



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

RICARDO SOARES OLIVEIRA

**Formulação baseada em fluxo para problemas
de roteamento de veículos: Uma aplicação no
transporte na cidade de Itumbiara-GO**

Campinas

2018

Ricardo Soares Oliveira

Formulação baseada em fluxo para problemas de roteamento de veículos: Uma aplicação no transporte na cidade de Itumbiara-GO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Washington Alves de Oliveira

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Ricardo Soares Oliveira e orientada pelo Prof. Dr. Washington Alves de Oliveira.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1639-3964>

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Sylvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

OL4f Oliveira, Ricardo Soares, 1985-
Formulação baseada em fluxo para problemas de roteamento de veículos:
Uma aplicação no transporte na cidade de Itumbiara-GO / Ricardo Soares
Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Washington Alves de Oliveira.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Problema de roteamento de veículos. 2. Transportes - Planejamento. 3.
Linguagem de programação. I. Oliveira, Washington Alves de, 1977-. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Flow-based formulation for vehicle routing problems: An application at the transport in the city of Itumbiara-GO

Palavras-chave em inglês:

Vehicle routing problem

Transportation - Planning

Programming language

Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada e Computacional

Banca examinadora:

Washington Alves de Oliveira

Cristiano Torezzan

Anibal Tavares de Azevedo

Data de defesa: 10-12-2018

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 10 de dezembro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). WASHINGTON ALVES DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). CRISTIANO TOREZZAN

Prof(a). Dr(a). ANIBAL TAVARES DE AZEVEDO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é dedicado a Deus, a minha família,
aos meus amigos e mestres,
com seu incentivo, impulsionaram até essa conquista
Dedico também à memória do meus Avôs
Luís Oliveira, Manoel Soares e Elza Antunes.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que manteve firme na fé.

Agradeço aos meus pais que foram meus primeiros professores.

Agradeço aos professores(as) e mestres nessa caminhada e principalmente meu orientador.

Agradeço ao Instituto Federal Goiás pelo apoio, amigos e professores(as).

Agradeço a turma do mestrado profissional em matemática aplicada e computacional.

Agradeço a equipe do centro de pesquisa operacional da Faculdade de Ciências Aplicadas.

Agradeço à minha avó e as minhas irmãs pelo apoio.

Agradeço aos amigos e amigas nessa jornada que dedicaram seu tempo para ajudar.

Agradeço meus parentes e familiares pelo incentivo e confiança.

Agradeço a empresa de ônibus que disponibilizou para coletar os dados.

“E ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria.” (1 Coríntios 13, 2)

Resumo

O planejamento adequado do transporte de passageiros nas grandes e pequenas cidades é de suma importância para garantir o deslocamento adequado e organizado das pessoas pelas diversas vias. Este planejamento baseia-se fortemente no desenho de rotas eficientes para os veículos de transporte e na adequada localização de pontos de embarque e desembarque de passageiros ao longo dessas rotas. É comum encontrar planejamentos feitos a partir da experiência empírica dos tomadores de decisão, no entanto encontramos na literatura possibilidades modernas de tratar o desenho de rotas como opção de transporte de passageiros a partir da modelagem e otimização de problemas de roteamento de veículos. Esta dissertação apresenta, a partir de uma sucinta revisão bibliográfica, várias classes de problemas de roteamento de veículos, os quais podem ser corretamente adaptados e utilizadas para fornecer novas possibilidades de planejamento do serviço de transporte. De fato, eles apontam para alternativas que podem contribuir além da experiência empírica. Entre alguns tipos de transporte de passageiros, esta pesquisa contribuiu para investigar a logística atual do transporte de funcionários de uma grande empresa alimentícia da cidade de Itumbiara-GO, a qual é realizada por uma empresa de ônibus fretado. Tomando como base uma formulação matemática para o problema de roteamento de veículos baseado em fluxo de redes, foi modelado o desenho de rotas capacitadas para planejar, usando frota alternada de veículos para visitar diversos pontos de ônibus, o embarque e desembarque da demanda de funcionários em cada ponto que trabalham em três turnos diuturnamente nesta empresa alimentícia. A possibilidade de planejar o deslocamento dos funcionários ao alternar o tipo de veículo utilizado, a minimização do tamanho total das rotas e a obtenção de rotas equilibradas em relação ao tamanho, ao número de pontos visitados e ao números de passageiros coletados foram alvos desta pesquisa. Com o objetivo de tornar a aplicação mais próxima da situação vivida pela empresa de ônibus fretado e passageiros, os parâmetros de entrada utilizados na formulação matemática foram coletados em campo: as coordenadas geográficas; a demanda de passageiros em cada ponto de ônibus; e a matriz das distâncias reais das ruas via informações “*google maps*”. Eles são compostos por seis linhas de ônibus que atendem sessenta e dois bairros de Itumbiara, e as cidades Centralina e Araporã de Minas Gérias, totalizando cento e doze pontos de ônibus. Adicionalmente à revisão de problemas de roteamento de veículos, foi apresentado os principais modelos matemáticos e suas variações, além dos métodos de resolução propostos na literatura: exatos; heurísticos; e meta-heurísticos. Os experimentos computacionais foram conduzidos na linguagem *Julia* e os modelos matemáticos de programação linear inteira mista foram resolvidos a partir do *Solver Cplex*.

Palavras-chave: Roteamento de veículos, roteamento em fluxo de rede, transporte de passageiros, linguagem de programação.

Abstract

The suitable passenger transport for large and small cities has vital importance to ensure the adequate and organized displacement of people through different streets. This planning is solidly based on the design of efficient routes for the transport vehicles and the proper location of points of loading and unloading of passengers along these routes. It is common to find plans made from the empirical experience of decision makers. However, in the literature, there are possibilities to treat the design of routes as an option to transport passengers from the modeling and optimization of vehicle routing problems. This dissertation presents, from a brief bibliographical review, several classes of vehicle routing problems, which can be correctly adapted and used to provide new possibilities for transport service planning. They point to alternatives that may contribute beyond empirical experience. Among some types of passenger transportation, this research contributed to investigating the current logistics of transporting employees of a large food company in the city of Itumbiara-GO, which is carried out by a chartered bus company.

A mathematical formulation for the vehicle routing problem based on network flow was modeled to design of routes capable of collecting by using alternating types of vehicles, and from several bus stops, the loading and unloading of the demand of employees in the points that work in three daily shifts in this food company. The possibility of planning the displacement of employees by alternating type of vehicles, minimizing the total size of the routes and obtaining balanced routes concerning the size and number of points visited were the targets of this research.

With the aim of making the application closer to the real situation lived by the chartered bus company and passengers, all input data for the mathematical formulation used were collected by the author in the field: the geographical coordinates; the demand for passengers at each bus stop; and determining the array of actual street distances via “*google maps*” informations. The collected data contain six bus lines that serve sixty-two districts of Itumbiara, and the two cities Centralina and Araporã of Minas Gérias, totaling a hundred and twelve bus stops. In addition to the revision of vehicle routing problems, the main mathematical models and their variations were presented, as well as the solution methods proposed in the literature: exact; heuristics; and meta-heuristics. The computational experiments were conducted in the Julia language and the mathematical models of mixed integer linear programming were solved from the *Solver Cplex*.

Keywords: Vehicle routing, network flow routing, passenger transport, programming language.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Cidade de Itumbiara-GO. Fonte: Mateus Lima Silva	21
Figura 2 – Instituto Federal de Goiás - Câmpus Itumbiara	22
Figura 3 – Localização geográfica dos pontos de ônibus no mapa da cidade	27
Figura 4 – Configuração atual para Rota 01	29
Figura 5 – Configuração atual: segundo período	30
Figura 6 – Representação do PRV através do grafo	34
Figura 7 – Família de variações dos diversos modelos	50
Figura 8 – Ilustração da formulação através de fluxo em rede	59
Figura 9 – PRV descrito através do fluxo de dois índices. Fonte: (OTA, 2018)	70
Figura 10 – Indicadores do Julia: <i>Benchmarks</i>	110
Figura 11 – Características do primeiro cenário	111
Figura 12 – Características do segundo cenário	112
Figura 13 – Características do segundo cenário	113
Figura 14 – Características do quarto cenário	114
Figura 15 – Características do quinto cenário	115
Figura 16 – Distâncias total dos cenários de testes	130
Figura 17 – Número de vértices por ônibus nas linhas dos cenários	134
Figura 18 – Número de vértices por micro-ônibus nas linhas dos cenários	134
Figura 19 – Número de vértices por van nas linhas dos cenários	135
Figura 20 – Distâncias Empíricas	136
Figura 21 – Rota 4 empírica	136
Figura 22 – Rota 6 empírica	137
Figura 23 – Distâncias otimizadas	138
Figura 24 – Otimizadas conjunto Indústria	140
Figura 25 – Pontos de todas as rotas	141
Figura 26 – Distância otimizada indústria separada	141
Figura 27 – Distâncias individuais por ônibus nas linhas dos cenários	143
Figura 28 – Distâncias individuais por micro-ônibus nas linhas dos cenários	143
Figura 29 – Distâncias individuais por van nas linhas dos cenários	144
Figura 30 – Número de passageiros por ônibus nas linhas dos cenários	144
Figura 31 – Número de passageiros por micro-ônibus nas linhas dos cenários	145
Figura 32 – Número de passageiros por van nas linhas dos cenários	145

Lista de tabelas

Tabela 1 – Atividade econômica de Itumbiara. Fonte (CIDADES, 2017)	25
Tabela 2 – Horário dos turnos	30
Tabela 3 – Variações para o PRV e seus autores	36
Tabela 4 – Quadro taxionômico. Fonte: (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016)	42
Tabela 5 – Continuação do quadro taxionômico. Fonte: (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016)	43
Tabela 6 – Métodos de resolução aplicados	44
Tabela 7 – Modelos matemáticos utilizados	45
Tabela 8 – Conjunto de notações para o PRVC	56
Tabela 9 – Conjunto de notações prioridade de entrega	62
Tabela 10 – Conjunto de notações para o problema de coleta e entrega	64
Tabela 11 – Demandas e distâncias empíricas das rotas separadas	115
Tabela 12 – Distâncias otimizadas das rotas separadas	117
Tabela 13 – Resultado segundo cenário: rotas em conjunto e depósito na indústria	120
Tabela 14 – Resultados terceiro cenário: rotas separadas partindo da indústria	122
Tabela 15 – Resultados quarto cenário: modelo equilibrado	125
Tabela 16 – Resultados quarto cenário: modelo equilibrado (continuação)	126
Tabela 17 – Resultados do cenário cinco: rotas equilibradas	127
Tabela 18 – Resultados do cenário cinco: rotas equilibradas (continuação)	128
Tabela 19 – Resultados dos primeiros cenários: vértices, passageiros e distâncias	132
Tabela 20 – Resultados dos cenários dos modelos equilibrados	133
Tabela 21 – Pontos das rota 4 empírico e otimizado	137
Tabela 22 – Pontos das rota 6 empírico e otimizado	137
Tabela 23 – Preços de referência e de comercialização do óleo diesel. Fonte: ANP	138
Tabela 24 – Economia por quilometro rodado	139
Tabela 25 – Economia por quilometro rodado segundo	140
Tabela 26 – Número de vértices e passageiros	140
Tabela 27 – Economia por quilometro otimizado indústria	142
Tabela 28 – Solução com Multi-veículos	145

Lista de abreviaturas e siglas

PRV	Problema de Roteamento de Veículos
PCV	Problema do Caixeiro Viajante
PRVC	Problema de Roteamento de Veículos Capacitado
PRC	Problema de Rota de Cobertura
PRVG	Problema de Roteamento de Veículos Generalizado
PRVPE	Problema de Roteamento de Veículos com Prioridade de Entrega
PRVCE	Problema de Roteamento de Veículos com Coleta e Entrega
PRVMD	Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplos Depósitos
PRVMV	Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplos Veículos
PRVFH	Problema de Roteamento de Veículo com Frota Heterogênea
PRVEF	Problema de Roteamento de Veículos com Entrega Fracionada
PRVGF	Problema de Roteamento de Veículos Generalizado com Fluxo
PL	Programação Linear
PLI	Programação Linear Inteira
PLIM	Programação Linear Inteira Mista

Sumário

	INTRODUÇÃO	15
1	CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA ABORDADO	20
1.1	Itumbiara	20
1.2	O estudo de caso	26
1.3	Revisão taxionômica	31
1.4	Problema de roteamento de veículos	36
1.5	Tabela taxionômica	41
1.6	Caracterização do problema	45
2	PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS	48
2.1	Variações	48
2.2	Problema de roteamento de veículos	50
2.3	Problema de roteamento de veículos com múltiplos depósitos	54
2.4	Problema de roteamento de veículos capacitado	55
2.5	Variações do modelo capacitado	59
2.6	Problema de roteamento de veículos com prioridade de entrega	60
2.7	Problema de roteamento de veículos com coleta e entrega	63
2.8	Problema de roteamento de veículos com frota heterogênea	65
2.9	Problema de roteamento de veículos com múltiplo uso de veículos	67
2.10	Modelos com dois índices	69
3	MÉTODOS DE RESOLUÇÃO	71
3.1	Métodos Exatos	71
3.2	Algoritmos exatos recentes	76
3.3	Heurísticas	79
3.4	Heurísticas clássicas de melhoria	81
3.5	Meta-heurísticas	82
4	DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMÁTICO	88
4.1	Problema do caixeiro viajante com janela de tempo	88
4.2	Problema de roteamento de veículos capacitado	90
4.3	Problema com rota de cobertura multiveículo	92
4.4	Problema de roteamento de veículos generalizado	96
4.5	Balanceamento das rotas	99
4.6	Problema de Roteamento de Veículos Generalizado com Fluxo	102

4.7	Formulação com fluxo equilibrado	105
5	TESTES COMPUTACIONAIS E RESULTADOS	109
5.1	Linguagem de programação JULIA	109
5.2	Cenários dos testes computacionais	111
5.3	Resultados dos cenários	117
5.4	Discussão dos cenários	129
5.5	Gráficos e resultados econômicos	135
5.6	Perspectivas futuras	145
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	147
	REFERÊNCIAS	148

Introdução

Em geral o desenvolvimento e crescimento populacional das cidades requerem melhorias no planejamento e algumas adequações na rede de transporte para aumentar a eficiência e qualidade aos usuários, a qual inclui transporte público e privado.

Em vários casos, a configuração das rotas de veículo para esta rede pode ser descrita como um problema de roteamento de veículos (PRV), o que possibilita utilizar modelos matemáticos de otimização para representar e resolver situações complexas que envolvem o planejamento do transporte, como intervalos de tempo restritos para a passagem do veículo em certos locais, localização de pontos espalhados geograficamente, demandas específicas de embarque e desembarque de passageiros, os custos globais do transporte, etc.

Não é incomum encontrar planejamentos baseados em experiências empíricas dos tomadores de decisão que, a partir da realidade que estão inseridos, constroem quadros de horários dos motoristas e, principalmente, as rotas que os veículos devem percorrer ao longo dos pontos.

Uma parte desta pesquisa apresenta uma revisão bibliográfica das principais características, propriedades e variações dos PRVs, os quais têm inúmeras aplicabilidades nos setores de logística, transporte, navegação, bens e passageiros. O primeiro modelo para o PRV, conhecido como problema de despacho de caminhões, foi proposto por (DANTZIG; RAMSER, 1959). Em seguida, (CLARKE; WRIGHT, 1964) descreveram vários conceitos envolvendo um PRV como um problema de otimização linear, e desde então apresentou-se um crescimento exponencial nos estudos das variações de modelos matemáticos e métodos de resolução para PRVs.

De um modo geral, essa classe de problema de otimização envolve a coleta de dados, os aspectos da modelagem matemática em aplicações na indústria, o transporte de carga, o transporte de passageiros, etc, ou seja, esse tema é tratado em diversos artigos científicos publicados, incide em algumas disciplinas acadêmicas, além da construção inteligente de código de algoritmos e desenvolvimento de bons softwares.

Outra parte importante deste trabalho envolve a modelagem e resolução de uma proposta para a configuração de um problema de transporte na cidade de Itumbiara-GO, cujo transporte de funcionários de uma grande indústria do ramo alimentício realizado por uma empresa privada de ônibus.

Uma vez que os horários do transporte público urbano de Itumbiara não contempla a demanda específica desta indústria, necessita manter seu funcionando com horários prefixados de entradas e saídas de seus funcionários em alguns turnos de trabalho,

os quais embarcam e desembarcam em pontos de ônibus próximos a suas residências, a empresa alimentícia optou pela terceirização de transporte para uma empresa que possa realizá-lo de maneira eficiente.

Foram realizados testes computacionais para a atual estrutura de veículos em funcionamento da empresa, outros tipos de veículos disponíveis foram utilizados nos testes, pois se a capacidade de cada veículo não é esgotada, o custo total do transporte utilizando veículos menores como vans e micro-ônibus pode ser diminuído em termos do custo por quilômetro rodado.

A construção das rotas para embarque e desembarque dos funcionários foi realizada de maneira empírica pelos tomadores de decisão da empresa. Uma das propostas desse trabalho, visa otimizar as rotas de ônibus de tal forma que possa ocorrer permutações da atual configuração de pontos de ônibus entre as diferentes rotas, além de mudar a ordem das visitas dos pontos em cada rota afim de minimizar a distância total percorrida.

A metodologia de resolução escolhida envolveu a coleta de dados realizada pelo autor, com duração de uma semana, em que as coordenadas geográficas foram captadas com o auxílio do aplicativo *HERE* e a demanda de passageiros foram coletadas para cada um dos 112 pontos de ônibus. Esses estão dispersos em 62 bairros de Itumbiara, além das cidades vizinhas Araporã e Centralina no estado de Minas Gerais.

Por se caracterizar como um problema de roteamento de veículos, cada um parte de e retorna para um depósito fixo, que pode ser a garagem ou a indústria. Além disso, o conjunto de veículos visita todos os pontos de ônibus, onde cada ponto é visitado uma única vez por um único veículo para que seja realizado o embarque e o desembarque dos funcionários.

Na tentativa de se aproximar da situação real, foi utilizado a distância não-euclidiana entre pontos de ônibus, ou seja, cada parâmetro de entrada da matriz de custo é a distância real das vias de acesso calculada pelo *Visual Basic for Applications* (VBA) do software *Excel* a partir do *Application Programming Interface* (API) do *Google* conhecido como *Distance Matrix*.

Para compreender melhor a estrutura dos PRVs e decidir pelo melhor modelo matemático a ser utilizado nos testes computacionais, no Capítulo 1 foi realizada uma revisão bibliográfica que trata da taxionomia encontrada nos trabalhos de (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016; EKSIUGLU; VURAL; REISMAN, 2009). Os primeiros autores realizaram uma pesquisa taxionômica para 1021 artigos no período entre os anos de 1959 e 2008, e propuseram a elaboração de um quadro de classificação. O segundo grupo de autores apresentaram uma revisão mais atual no período entre os anos de 2009 e 2015 para 209 artigos das principais revistas e uma revisão do quadro taxionômico anterior.

Desde o seu surgimento, existe uma variação tão grande da família de PRVs que se torna sempre necessária uma revisão bibliográfica abrangente para futuros pesquisadores. Após cinquenta anos do surgimento do primeiro trabalho sobre PRV, (LAPORTE, 2009) publicou um artigo em comemoração a esses 50 anos, onde ele destacou os principais métodos de resolução (algoritmos exatos, heurísticas clássicas e meta-heurísticas) e a evolução desses métodos, que foram impulsionados principalmente pelo avanço computacional relacionado à velocidade de processamento e ao aumento da capacidade de armazenamento de dados dos computadores.

O Capítulo 1 também apresenta uma breve contextualização do ensino e economia de Itumbiara destacando a importância do polo industrial da cidade, que devido a sua localização geográfica no estado de Goiás, é estratégico para o desenvolvimento econômico e social da região. O projeto desenvolvido no Instituto Federal de Goiás (IFG) em parceria com o município sobre o transporte público urbano. Este último motivou em parte a concepção desta pesquisa.

Para descrever e compreender melhor o problema do ônibus fretado para funcionários da indústria alimentícia foi utilizado o quadro taxinômico da literatura para identificar um modelo matemático mais aderente e encontrar formas de resolvê-lo entre as várias variações.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica das principais variações dos modelos matemáticos para o PRV, que inclui por exemplo o problema de roteamento de veículos capacitado (PRVC) (BALDACCI; TOTH; VIGO, 2007) e as suas variações: com múltiplos depósitos (MONTROYA-TORRES et al., 2015); *backhaul* (ALVES, 2015); *pick-up and delivery* (MONTANÉ; GALVÃO, 2002); frota heterogênea (BALDACCI; CHRISTOFIDES; MINGOZZI, 2008); veículos compartilhados (KARAOĞLAN, 2015); e com janela de tempo (BRÄYSY; GENDREAU, 2005a; BRÄYSY; GENDREAU, 2005b). Todos esses modelos contribuem para a inserção de uma visão ampla e geral das variações, características e propriedades principais do PRV, que auxilia na modelagem do programa linear inteiro misto (PLIM) que é proposto e resolvido neste trabalho.

Utilizando os fundamentais livros sobre PRVs (TOTH; VIGO, 2002; TOTH; VIGO, 2014) e (GOLDEN; RAGHAVAN; WASIL, 2008), a parte teórica para os importantes métodos de resolução exatos, heurísticos e meta-heurísticos é abordada no Capítulo 3. Entre os métodos exatos, destacamos os métodos *branch-and-bound* e *branch-and-cut*. Além disso, discutimos outras sete abordagens recentes de algoritmos exatos para resolver alguns PRVCs.

As heurísticas podem ser divididas em dois grupos. Para o grupo das *heurísticas construtivas*, destacamos a heurística de economia (CLARKE; WRIGHT, 1964) e a heurística de pétala (BALINSKI; QUANDT, 1964). Enquanto que no grupo das *heurísticas de melhoria*, destacamos as heurísticas λ -opt (LIN, 1965), 2-opt (TOTH; VIGO, 2014),

Granular Search (JOHNSON; MCGEOCH, 1997) e *Adaptive Large Neighborhood Search* (ALNS) (PISINGER; ROPKE, 2007).

No campo das meta-heurísticas encontram-se dois grandes conjuntos de métodos de resolução. O primeiro conjunto consiste em *algoritmos de busca local*, como os algoritmos *Simulated Annealing* (SA), *Deterministic Annealing* (DA), *Tabu Search* (TS), *Iterated Local Search* (ILS) e o algoritmo *Variable Neighborhood Search* (VNS). O segundo conjunto consiste em *algoritmos bio-inspirados*, como os algoritmos *Ant Colony Optimization* (ACO), *Genetic Algorithms* (GA), *Hybrid Algorithms* (HA), *Scatter Search* (SS) e o algoritmo *Path Relinking* (PR).

No Capítulo 4 é descrito o desenvolvimento do problema de roteamento de veículos com base no modelo de fluxo de duas commodities. Fizemos um levantamento sucinto para justificar a utilização do modelo de fluxo: contribuição eficiente para restrição de eliminação de sub-rotas, que nos modelos clássicos apresentam crescimento exponencial, e, além disso, como o problema envolve o embarque e desembarque de passageiros, de acordo com a revisão realizada, o modelo em fluxo de rede é o mais aderente para o estudo de caso. O ponto de partida é o problema do caixeiro viajante (PCV) (LANGEVIN et al., 1993), que também pode ser modelado através de fluxo em rede com janela de tempo.

Com base nesse cenário, o trabalho de (BALDACCI; HADJICONSTANTINOU; MINGOZZI, 2004) descreve o PRVC com base no fluxo de rede de duas commodities. Lá encontramos o modelo para o problema de cobertura multi veículo (*m*-PRC) (HÀ et al., 2013), estende para o problema de roteamento de veículos generalizado (PRVG) (HÀ et al., 2014), onde são formulados através de modelos de fluxo em rede. Os dois últimos são as bases para a estrutura do modelo proposto neste trabalho.

Já o modelo para o *m*-PRC proposto por (HÀ et al., 2013) considera o número de veículos como uma variável. Quando o número de veículos é fixo (OLIVEIRA; MORETTI; REIS, 2015) considera o *m*-PRC com equações para balanceamento e efetuam aplicações no sistema de segurança pública. A dissertação de (OTA, 2018) faz uma combinação desses dois últimos trabalhos, onde é proposto um novo modelo chamado de problema de rotas de cobertura balanceado (*m*-PRCB), que apresenta novas restrições para atingir o balanceamento entre rotas à partir de um modelo de fluxo em rede.

Como contribuição deste trabalho, utilizamos as várias ideias apresentadas nos trabalhos de (HÀ et al., 2013; OLIVEIRA; MORETTI; REIS, 2015; OTA, 2018) para alterar o modelo de (HÀ et al., 2014) e propor um novo modelo em fluxo em rede adaptado para a aplicação real que foi resolvida.

O Capítulo 5 discute os resultados computacionais obtidos ao avaliar a modelagem proposta neste trabalho. Os experimentos computacionais foram executados utilizando a linguagem de programação *Julia*. Esta linguagem foi apresentada recentemente em 2012

e está se difundido rapidamente no meio acadêmico. Ela foi projetada para atender os requisitos da computação de alto desempenho numérico e científico e, de fato, está apresentando resultados satisfatórios em termos de performance, tendo resultados aproximando de C e C++, além de ter uma interface amigável de programação como *Matlab* e *Python* (BEZANSON et al., 2015).

Para resolver o PLIM foi usado a interface *Julia for Mathematical Programming* (JuMP) que suporta mais de dez resolvedores, como por exemplo o *Solver* CPLEX que foi utilizado neste trabalho para obter soluções exatas. Apresentamos os resultados computacionais para vários cenários, onde se buscou discutir as várias possibilidades de configurações de rotas para o problema abordado.

1 Contextualização do problema abordado

Este capítulo apresenta uma revisão taxionômica para o problema de roteamento de veículo (PRV). A partir de uma breve revisão bibliográfica desenvolvida com os principais artigos da área, é abordado uma familiarização com os PRVs para delimitar e definir de forma clara e sucinta o problema de roteamento abordado no estudo de caso da cidade de Itumbiara, Goiás. Esta pesquisa discorre através das definições, das variações e das características principais mais relevantes dos modelos matemáticos, além de apresentar os vários métodos de resolução e algumas aplicações que foram publicadas nas principais revistas e jornais especializados da área.

O caso de estudo abordado é introduzido através de uma contextualização dos aspectos educacionais e econômicos da cidade de Itumbiara. Na parte da educação, que envolve a participação do Instituto Federal de Goiás, é relatado a iniciativa do projeto “soluções cidadãos” que envolve ações públicas no transporte do município em parceria com o ministério público e câmara dos vereadores. Na economia da cidade a pesquisa foca em um setor da indústria, especificamente no transporte urbano de funcionários que é realizado por uma empresa privada de ônibus, a qual atende uma indústria de grande porte do ramo alimentício.

1.1 Itumbiara

O município brasileiro de Itumbiara ilustrado na Figura 1, está localizada na região sul do estado de Goiás, divisa com Minas Gerais, a uma distância de 208 km da capital Goiânia e 411 km da capital federal Brasília. A população estimada em 103.652 pessoas segundo estimativas do último censo (BRASIL, 2015) décimo primeiro município mais populoso do estado.

A cidade de Itumbiara possui um total de 43 escolas de nível fundamental e 18 escolas de nível médio. O índice de desenvolvimento da educação básica (IDEB) dos anos iniciais do ensino fundamental é 6.4 e dos anos finais é 5.2. O município de Itumbiara possui duas instituições de Ensino Superior Públicas, um câmpus da Universidade Estadual de Goiás (UEG) e o Instituto Federal de Goiás (IFG). Além de contar com mais quatro instituições privadas, o Instituto Luterano de Ensino Superior de Itumbiara, a Faculdade Santa Rita de Cássia, a Universidade Norte do Paraná e a Uniasselvi.

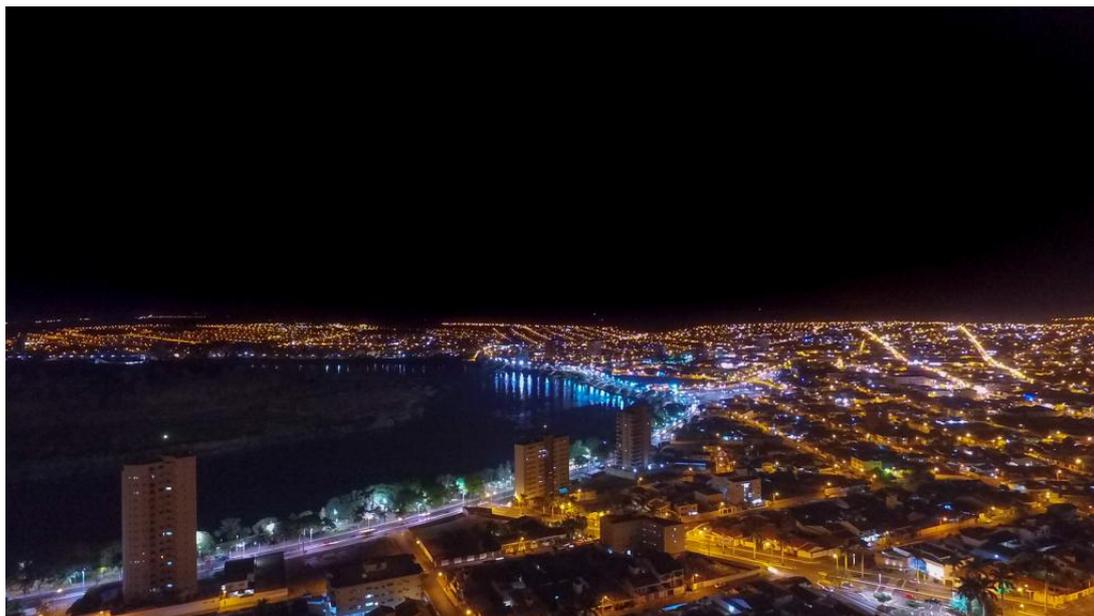


Figura 1 – Cidade de Itumbiara-GO. Fonte: Mateus Lima Silva

IFG

A história retorna ao ano de 1909, quando o então presidente Nilo Peçanha, criou 19 escolas de Aprendizes de Artífices por todo país por meio do Decreto nº 7.566. Que posteriormente deram origem aos Centro Federais de Educação Profissional e Tecnológica (Cefets).

No ano de 2008, os 31 Cefets, as 75 unidades descentralizadas de ensino (Uneds), mais 39 escolas agrotécnicas e 7 escoladas técnicas federais além de 8 escolas vinculadas universidade foram transformadas nos Institutos Federais de Educação Ciência e Tecnologia. Por meio da lei 11.892, de 29 de dezembro de 2008.

Atualmente são 38 Institutos Federais existentes em todos os estados do país. A rede ainda conta com outras instituições que não aderiram aos Institutos Federais mas oferece educação profissional em todos os níveis, totalizando 644 campi em funcionamento. Composta por 2 Cefets, 25 escolas vinculadas as Universidades, o Colégio Pedro II e uma Universidade Tecnológica.

O Estado de Goiás possuiu dois Institutos Federais, o Instituto Federal Goiano (IF Goiano) e o Instituto Federal de Goiás (IFG). O IF Goiano integrou os antigos Cefets, todos provenientes de antigas escolas agrícolas. O Instituto Federal de Goiás (IFG), formado pelo Cefet Goiás em Goiânia e unidade em Jataí, e o Instituto Federal Goiano (IF Goiano), formado pela fusão dos Cefets de Rio Verde e de Urutaí e da Escola Agrotécnica Federal de Ceres.

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) agrega várias posições em relação ao desempenho dos estudantes no Exame Nacional do Ensino



Figura 2 – Instituto Federal de Goiás - Câmpus Itumbiara

Médio (Enem) destaques no ano de 2017. Entre as escolas públicas do Estado de Goiás, os 14 Campi em funcionamento com seus mais de 11 mil alunos ocupam 11 posições entre as 15 melhores do estado, e outros três aparecem entre as 30 melhores.

O câmpus do IFG - Itumbiara ilustrado na Figura 2, inaugurado no ano de 2008, oferece cursos de Bacharelado em: Engenharia elétrica e Engenharia de Controle e automação, também a Licenciatura em Química. Uma Especialização lato-sensu em Fontes de Energias Renováveis. Técnico Integrado em Agroindústria na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos e Técnico Subsequente em Eletrotécnica.

Além disso, possuiu dois Cursos técnicos integrados ao Ensino Médio de: Eletrotécnica e Química. No ano de 2014, 2015 e 2017 na análise dos dados da classificação estadual em Goiás, o câmpus Itumbiara se encontra em primeiro lugar entre as escolas públicas (municipal, estadual e federal). No ano de 2016 a classificação divulgada não inseriu os Institutos Federais. Os dois cursos de graduação Bacharelado em Engenharia Elétrica e Licenciatura em Química, foram avaliados com nota 4 e nota 3 respectivamente, no Exame Nacional do Desempenho de Estudantes (ENADE) de 2017, em um escala que contempla valores entre 1 a 5.

O interesse pelo problema do transporte público urbano tratado no câmpus do IFG de Itumbiara, surgiu em parceria dos alunos de iniciação científica e professores do câmpus com a Câmara Municipal de Vereadores e Ministério Público, para o desenvolvimento de soluções cidadãs para compor melhorias em alguns aspectos no transporte publico de ônibus do município que era realizado anteriormente por um determinada

empresa e também executa o transporte de ônibus fretado pela indústria.

Projeto

O IFG (Itumbiara), no dia 17 de Outubro de 2017, apresentou propostas de melhoria no transporte público na câmara municipal de Itumbiara durante o quinto encontro do projeto *Soluções Cidadãs: A câmara de vereadores e o ministério público ouvem a Universidade e você*. Estudo apresentado pelos professores Néelson Ney Dantas Cruz de geografia, e o Professor Ricardo Soares Oliveira de matemática. Mais três estudantes de iniciação científica do curso técnico integrado ao ensino médio.

Um dos problemas motivadores consiste no fato de que as linhas de ônibus que atendem o câmpus do IFG demoram em média 1h e 15min até 2h e 30min, tornando assim, inviável os estudantes contarem com o transporte público para frequentarem as aulas.

Por isso, o Projeto foi idealizado pelo Professor Néelson, quem orientou os alunos do curso integrado e o Professor Ricardo ficou responsável pela estatística do projeto *Escritório Geográfico: transporte humano e cidadania no município de Itumbiara-GO*, cujo objetivo era identificar detalhadamente os problemas correlacionados ao transporte coletivo na cidade e sugerir uma solução para o reordenamento do transporte.

Motivação

A motivação inicial partiu da parceria entre a prefeitura municipal e a nova empresa de ônibus que ensejou na participação do projeto relacionado ao Problema de Roteamento de Veículos com a empresa de ônibus fretado para indústria, visando oferecer uma alternativa na configuração das rotas de ônibus percorrendo os pontos da cidade.

O perspectiva do projeto apresentado na câmara de vereadores propõe uma solução de rotas com enfoque totalmente em caráter de estudo geográfico, mediante análise estatística. Adotar o modelo matemático caracterizado pelo Problema de Roteamento de Veículos (PRV) para resolvê-lo através de um software é a abordagem desse trabalho que difere do projeto inicial.

No momento da coletas de dados, já havia ocorrido a substituição da antiga por uma nova empresa de ônibus, que permitiu através da parceria com a prefeitura a coleta de dados do ônibus fretado, e que ainda continua realizando o serviço de transporte público urbano e fretamento dos funcionários da indústria pesquisada na cidade de Itumbiara-GO.

Transporte público urbano

O estudo executado pela empresa Ativva Consultoria e Serviços fora apresentado à Prefeitura Municipal de Itumbiara em 2014, o Relatório Preliminar do Estudo para

Implantação do Novo Sistema de Transporte Coletivo de Itumbiara após uma pesquisa de campo pode-se compreender e fazer um levantamento atual da estrutura da rede, situação operacional, mapeamentos e outros. Dentre eles destacam-se:

- Levantamento/Mapeamento da atual rede de transporte coletivo;
- Pesquisa sobre o nível de serviço e oferta de viagens;
- Pesquisa sobre origem e destino das viagens;
- Pesquisa qualitativa junto a população sobre o serviço de transporte coletivo atualmente oferecido;
- Elaboração da primeira proposta de Nova rede de transporte coletivo.

A empresa que realizou a pesquisa apresentou uma sistema à Prefeitura Municipal. A dissertação propõe uma solução de otimização matemática para o problema.

Mapeamento da rede de transporte

O mapeamento da atual rede de transporte coletivo, no ano que foi realizada a pesquisa a cidade de Itumbiara em (2014), possuía treze linhas de ônibus com as respectivas distâncias distribuída pelos seus sessenta e dois loteamentos.

- Linha 01: Norma Gibaldi/ Parque dos Buritis. Extensão 36,6 km;
- Linha 02: Bairro Brasília/ Vila de Furnas/ Bairro Paranaíba/ Bairro Ulisses Guimarães. Extensão 22,9 km;
- Linha 03: Morado dos Sonhos/ Bairro Novo Horizonte/ Bairro Planalto/ Hospital Municipal. Extensão 21,1 km;
- Linha 04: Cidade Jardim/ Vila Vitória/ Vila Beatriz. Extensão 19,9 km;
- Linha 05: Cidade Jardim/ Vila Vitória/ Ulbra/ Hospital Municipal. Extensão 19,6 km;
- Linha 06: Morada dos Sonhos/ Bairro Novo Horizonte/ Bairro Planalto/ Bairro Ulisses Guimarães. Extensão 24,5 km;
- Linha 07: Vila Vitória/ Ulisses Guimarães. Extensão 24,9 km;
- Linha 08: Cidade Jardim/ Vila Vitória/ Posto Fiscal. Extensão 19,6 km;
- Linha 09: Araporã/ Itumbiara. Extensão 7,9 km;

- Linha 10: Norma Gibaldi/ Rodoviária/ Hospital Municipal. Extensão 27,6 km;
- Linha 11: Dionária Rocha/ Hospital Municipal. Extensão 55,1 km
- Linha 13: Norma Gibaldi/ Dionária Rocha/ Hospital Municipal. Extensão 29,5 km;
- Linhas 15: Sarandi/ Presídio/ Itumbiara. Extensão 48,1 km.

Um dos problemas identificados na pesquisa e no projeto refere-se as linhas (rotas) da atual rede que são diametralmente opostas e o tempo de espera nos pontos de ônibus. As linhas ou rotas percorrem caminhos passando pelo centro, todavia, atendem na mesma linha regiões geograficamente opostas da cidade.

No entanto, para introduzir o transporte de ônibus fretado é importante conhecer as características econômicas do município, melhor estratégia e o papel da indústria na região.

Economia

Itumbiara está localizada em uma região estratégica para economia goiana, na divisa de Goiás com Minas Gerais, sendo o principal ponto de intersecção entre as regiões sudeste e centro-oeste.

A cidade de Itumbiara é o sexto Produto Interno Bruto (PIB) do estado de Goiás e 219 no Brasil. A expressividade da economia está ligada a divisão do PIB por setor de acordo com a Tabela 1.

Setor	R\$ × 1000	Porcentagem
Agropecuária	242.750,15	7.75 %
Indústria	1.248.572,29	39.87 %
Serviços	1.640.797,26	52.38 %

Tabela 1 – Atividade econômica de Itumbiara. Fonte ([CIDADES, 2017](#))

A localização estratégica para recebimento e escoamento de produção é o principal motivo para instalação do distrito agroindustrial de Itumbiara que conta com algumas empresas e indústrias de pequeno, médio e grande porte.

Na área de Bioenergia temos : A BP, SJC, CEM, Usina Primavera, Goiasa e Usina Alvorada. A Cargill de gordura vegetal. Du Point-Pioner de semente de milho e soja. Trading de commodities como Louis Dreyfus. A processadora de couros JBS. E por último e objeto de estudo a Caramuru que engloba: exportadora de soja, biodiesel, alimentos, óleos vegetais e rações animais.

Transporte fretado

O desenvolvimento dos grandes centros urbanos e a localização afastada dos distritos industriais originaram uma determinada demanda de transporte com características bem específicas. As pessoas que trabalham nos distritos se deslocam das zonas urbanas, onde residem, para a indústria e retornam ao final do expediente.

Dado à esse fator, o transporte público não atende de forma satisfatória esse fluxo de passageiros impulsionando as empresas e os funcionários a utilizarem os serviços do transporte privado. Para contornar essa situação as empresas tem investido em um sistema de transporte coletivo para seus funcionários determinando rotas que passam próximo a casa dos funcionários para efetuar o trajeto do ponto até a empresa e ao final do expediente retornar.

Em seu trabalho (JUNIOR et al., 2016) realiza uma pesquisa sobre otimização do transporte de trabalhadores de uma indústria na região metropolitana de Fortaleza em que o problema da empresa localizada no município de Maracanaú, onde se encontram os 75 funcionários que utilizam do serviço. Para viabilizar o transporte, a empresa contratou uma transportadora com 4 veículos para atender e criar as rotas. Os autores implementam dois modelos: o primeiro de programação linear inteira (PLI), resolvido com solver IBM CPLEX utilizando *branch-and-cut*; e o segundo, utilizando método heurístico de (CLARKE; WRIGHT, 1964) algoritmo iterativo e se baseia em uma estratégia gulosa para obter o melhor roteiro, além disso utilizou uma heurística econômica.

Outra aplicação prática que vale destacar foi realizada por (RODRIGUES, 2008) no transporte de funcionários da Usina Hidrelétrica de Itaipu, no município de Foz do Iguaçu-PR. Com 1227 funcionários, dos quais 860 utilizam o transporte terceirizado oferecido pela Itaipu. Abordado no trabalho problema de localização de facilidades através do algoritmo de p -medianas, problema de designação e aplica-se meta-heurística colônia de formigas.

1.2 O estudo de caso

O objetivo desse trabalho é propor uma alternativa através da otimização, para configuração atual do transporte de funcionários de uma indústria local através da empresa terceirizada da frota de ônibus que executa esse serviço. O Transporte dos funcionários de pontos pre-determinados, próximos as residências em direção à indústria e depois retornando da indústria até os pontos de ônibus próximos a suas residências. Localizados na cidade de Itumbiara, e uma linha nas cidades vizinhas de Centralina e Araporã no estado de Minas Gerais.

Para realização dessa atividade, a empresa de ônibus terceirizada conta com

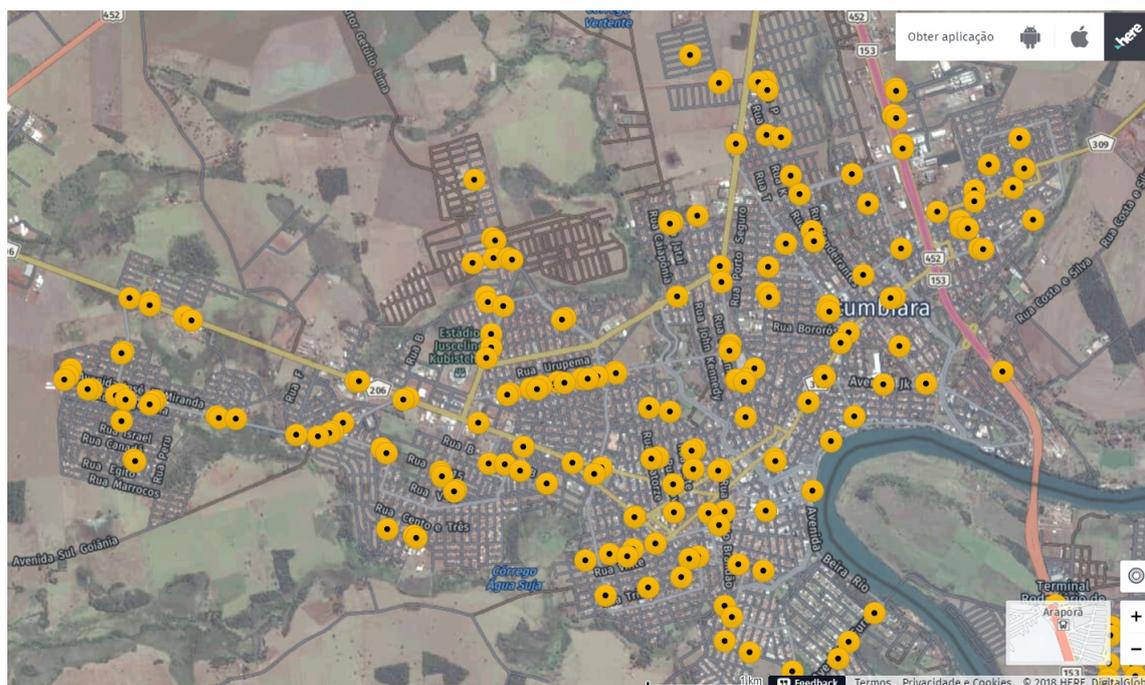


Figura 3 – Localização geográfica dos pontos de ônibus no mapa da cidade

uma frota limitada homogênea de veículos que envolvem ônibus, vans e micro-ônibus, onde cada veículo possui uma quantidade de lugares atribuído para o motorista percorrer uma rota, embarcando passageiros em todos os pontos pertencentes a cada rota. É importante que, no problema, não exista nenhum tipo de transbordo, pois os passageiros embarcados nos pontos próximos a suas residências são deslocados até a indústria.

Outra questão importante é o tempo, apesar de não existirem janelas de tempo, a indústria estabelece o horário de início e término do expediente aos funcionários. Mesmo que o ônibus possui uma capacidade superior de lugares a van e o micro-ônibus nem sempre atinge o limite total, pois depende além da capacidade, o tempo total gasto na rota, a distância total para realizar a rota e o tempo para começar o embarque dos passageiros de tal forma que iniciem suas atividades na indústria no horário previsto.

A indústria e a garagem de ônibus se localizam no município de Itumbiara. A maioria dos funcionários da empresa pesquisada residem na cidade de Itumbiara e os pontos de ônibus estão localizados próximos a residência destes. Mas apenas um linha de ônibus desloca à duas cidades em Minas Gerais. No primeiro turno, pela manhã são coletados 176 funcionários em 6 linhas de ônibus que começam a operar às 5:30h, sendo que todos os passageiros desembarcam antes das 7:00h na indústria, quando se inicia o primeiro turno da manhã.

É uma rotina semelhante aos ônibus escolar, na zona urbana ou rural, que realiza o embarque dos estudantes próximos a suas residências em direção à escola para desembarcá-los antes do início das aulas. Após o término das aulas, retornam com os

estudantes aos pontos de origem, próximos as suas residências. Problema esse abordado por (ALVES, 2015).

Metodologia

A coleta de dados foi realizada pela autor no período de 30 de Julho a 10 de Agosto de 2018 em todas as linhas do turno da manhã do transporte fretado da empresa BPM. A empresa executa o transporte fretado dos funcionários de uma determinada indústria de Itumbiara. Todos as seis rotas foram mapeadas, bem como todos os 110 pontos, incluindo as três cidades Itumbiara em Goiás e Araporã e Centralina em Minas Gerais para embarque e desembarque de passageiros na indústria.

Todos os pontos foram mapeados atendendo a demanda de passageiros em cada ponto. Para isso foi utilizando o aplicativo *HERE*. Em 1985 *HERE* iniciou com objetivo de mapear sistemas de navegação para carros, após duas décadas, construíram sistemas e estiveram presentes *Nokia*, com mapas bidimensionais. Hoje já criam mapas tridimensionais, em parceria com as montadoras líderes mundiais, estão acionando 4 de 5 sistemas de navegação automotiva na América do Norte e na Europa. Uma grande inovação na condução autônoma à Internet das Coisas, são os planos da empresa que busca construir o futuro da tecnologia de localização por meio de parcerias estratégicas com líderes do setor.

Para coleta dos dados foram considerados pontos de ônibus, horário, número de veículos, capacidade dos veículos, número de passageiros embarcando em cada ponto, foi realizado pelo autor, com autorização da empresa de ônibus BPMV, em que o autor percorreu todas as linhas de ônibus coletando as coordenadas geográficas, conforme exposto na Figura 3, os pontos mapeados através do aplicativo, cujo o resultado é exposto no link <wego.here.com>.

Funcionamento

O funcionamento da empresa de ônibus que presta serviço para indústria do ramo alimentício possuiu uma rotina padrão diárias durante a semana. Na qual todos os veículos partem da garagem de ônibus (depósito), percorre toda a rota que contém os pontos com a demanda de funcionário da empresa para embarcar os funcionários no primeiro turno da manhã. Para exemplificação, a Figura 4 exhibe a rotina da rota 1 realizada pelo ônibus, que parte da garagem realizando o embarque de funcionários em direção à indústria, onde realiza o desembarque, e retorna a garagem.



Figura 4 – Configuração atual para Rota 01

Tipo de estudo

Buscando uma estrutura lógica para o problema apresentado critérios e características do quadro taxonômico proposto na revisão bibliográfica foram estabelecidos para iniciar o estudo que se concentra em Teoria e métodos aplicados que serão adotados por meio dos métodos exatos e heurísticos de melhoria ou construção.

Características dos cenários

Quando partimos para as características de cenário, o primeiro item do quadro é o número de pontos na rota que pode ser classificado como conhecido. Totalizado 110 pontos incluindo o depósito (garagem dos ônibus) e da própria indústria, distribuídos em 6 rotas que foram previamente determinadas pela indústria e a empresa. No item quantidade de clientes atendidos, foi levantado pelo autor, durante a pesquisa de campo que, no primeiro período da manhã um total de 176 funcionários são atendidos pelas rotas, ou seja valor determinístico.

O tempo de solicitação, sem calcular o tempo de embarque e desembarque, foi estimado na faixa entre 38min e 72min. O tempo de embarque em cada ponto não é calculado, mas pode-se fazer uma previsão de 1min no mínimo a 3min no máximo, agora o tempo total de cada rota soma-se a o tempo da rota com o tempo do número de pontos, que pode ser compreendido com a janela de tempo, para embarque e desembarque dos passageiros. Uma estrutura de janela de tempo, suave. Horizonte de tempo, multiperíodo, pois existem vários períodos de coleta e entrega dos funcionários dos pontos de ônibus próximos as suas residências até a indústria e o caminho de volta, visto que existem três

turnos para o início do expediente na fábrica, as 7:00h, que é o foco desse trabalho, às 15:00h e às 23:00h, bem como os funcionários do administrativo as 8:00h.

Para cada um desses existe uma logística específica. *Backhauls* no primeiro período da manhã apenas coletas nos pontos de ônibus, e na fábrica entrega. Depois coleta na fábrica dos funcionários que começaram o expediente as 23:00h, agora regressando a suas residências e coleta dos funcionários do administrativo, coleta e entrega simultânea no segundo período da manhã, e entrega dos funcionários do administrativo na indústria para iniciar o expediente às 8h.

Turno	Embarque	Local	Desembarque	Local	funcionários	expediente
1	5h30 - 7h	pontos	7h	indústria	176	7h - 16h
2	7h	indústria	7h -8h	pontos	172	fim

Tabela 2 – Horário dos turnos

Como pode-se verificar na Tabela 2, existem três turnos para os funcionários do operacional e administrativo. O trabalho foca no primeiro turno da manhã, os quais os dados foram coletados. Na Figura 5 para compreender melhor a dinâmica do segundo turno da manhã, os ônibus partem da empresa com funcionários do operacional para realizar o desembarque e, simultaneamente realizar o embarque dos funcionários do administrativo.

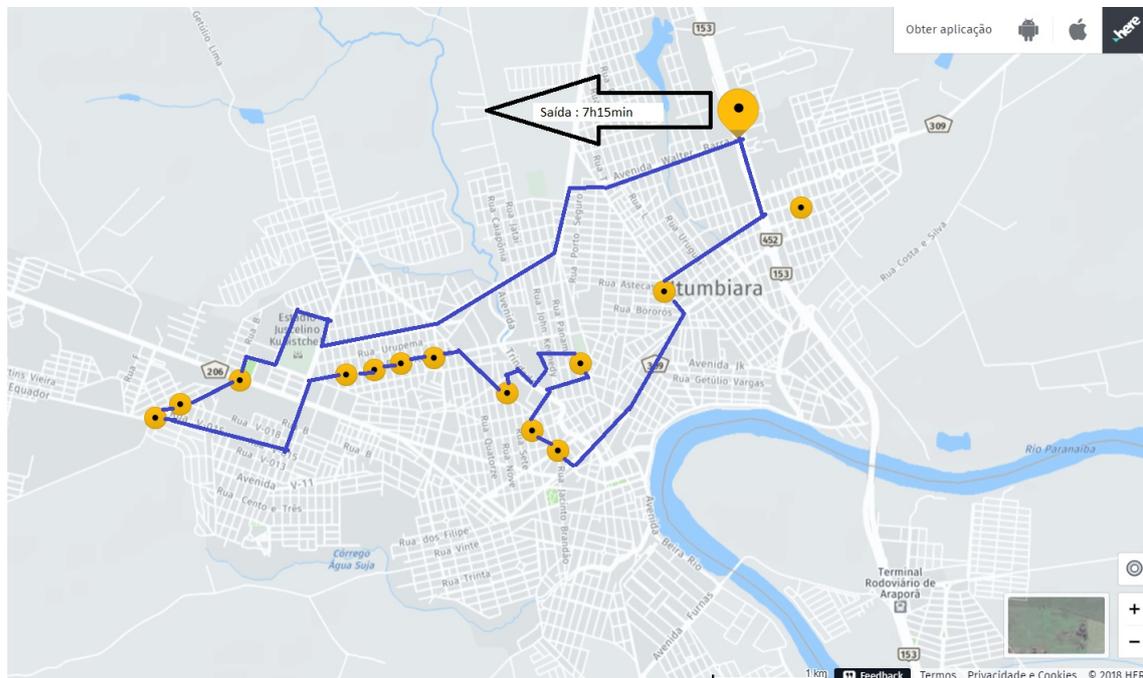


Figura 5 – Configuração atual: segundo período

Um fator interessante que acontece agora no problema é que o depósito (garagem) se modifica e a empresa se torna o depósito, pois os ônibus partem da empresa com os funcionários para desembarcar e, ao longo dos pontos de ônibus, embarcam também os funcionários do administrativo que entram as 8h da manhã, e os veículos retornam

à indústria. Essa dinâmica muda a cada turno de maneira a se adequar ao horário de funcionamento da indústria.

Características físicas do problema

Se tratando das características físicas do problema, a rede não é direcionada, ou seja a matriz das distância entre cada ponto não é simétrica, igual a sua transposta. Isso ocorre pois, a forma com foi calculada as distâncias entre cada ponto, não é maneira euclidiana, e sim a distância real das ruas, aproximando o nosso problema a um modelo ideal do real.

Munido das coordenadas de latitude e longitude de todos os pontos, foi possível através dos macros do *Excel VBA* calcular através do *Google Matrix API* essas distancias. Veja a matriz das distância, por exemplo da rota um, é um grafo assimétrico. A matriz assimétrica e o dado referente ao custo entre dois pontos associado a distância real das ruas.

Características da informação e dos dados

No que diz as características da informação, há uma evolução estática em que os dados são previamente conhecidos. Então, a qualidade da informação é conhecida (determinística) e o processo da informação é centralizado na empresa de ônibus. Os dados foram coletados pelo autor durante uma semana que acompanhou o trabalho dos motoristas no primeiro e segundo turno nas três cidades, cujos dados são do mundo real, bem como a latitude, a longitude, a demanda e o tempo, etc.

1.3 Revisão taxionômica

A revisão taxionômica tem como objetivo caracterizar o estudo de caso sobre o transporte de ônibus fretado que permite identificar quais são as principais particularidades e variações do PRV inerentes ao problema abordado. Além disso, ela viabiliza a escolha do modelo matemático e do método de resolução mais adequado ao estudo.

Para descrever as características e premissas do estudo de caso, essa primeira parte é inspirado em dois artigos: o primeiro dos autores ([BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016](#)) que realizaram uma revisão taxionômica da literatura entre os anos de 2009 a 2015, categorizando principais artigos do PRV.

Trabalho realizado anteriormente pelos autores ([EKSIOGLU; VURAL; REISMAN, 2009](#)) que além da revisão taxionômica, aprimoraram uma metodologia para classificar a literatura aperfeiçoando a tabela usada para definir as principais características da

família do PRV. Ambos os artigos consideram aspectos gerenciais, algumas considerações físicas geográficas além de disciplinas teóricas.

O PRV tem como objeto de estudo e prática bastante ampla, pois o assunto suplanta disciplinas acadêmicas e profissões que percorrem desde projetos de algoritmos até o planejamento de tráfego urbano de transporte terrestre. Toda essa diversidade de abrangência e atuação teve seu início no final dos anos 50 em um problema de maneira geral, simples mas com impacto que mudaria para sempre o planejamento de transporte de cargas e passageiros.

O problema de roteamento de veículos foi introduzido pela primeira vez por (DANTZIG; RAMSER, 1959) em 1959 para resolver “o problema de despacho de caminhões”. Fundamenta-se em projetar rotas para todos os veículos que transportam combustível iniciando a rota no depósito para atender a demanda dos postos de combustíveis que estão localizados em pontos distintos. O objetivo é obter a melhor rota para a frota de caminhões encontrar a menor distância possível percorrendo todos os pontos.

Após alguns anos (CLARKE; WRIGHT, 1964) em 1964 generalizaram para o problema de otimização linear. Em seu artigo consideraram os aspectos teóricos do problema de roteamento ideal, no qual a frota de caminhões com capacidades diferentes, inicia no depósito central em direção a vários pontos de entrega, dando origem ao valor muito elevado de rotas possíveis. Eles desenvolveram um método que permite a seleção rápida de uma rota ótima ou quase ótima.

Durante as cinco décadas que se passaram um grande desenvolvimento ocorreu no promissor estudo do PRV resultando em numerosas variações de suas características. Também algumas aplicações nas mais diversas áreas como : logística, transporte, planejamento, distribuição e coleta de bens e passageiros. Além disso, o desenvolvimento de algoritmos para resolução dos modelos propostos. (LAPORTE, 2009) enfatiza em seu estudo publicado em 2009, cinquenta anos após o primeiro artigo surgir na comunidade científica. O autor descreve brevemente o desenvolvimento da expansão no campo dos algoritmos exatos, métodos heurísticos e meta-heurísticas que foram desenvolvidos e aprimorados para resolver essa família de problemas.

Os modelos atuais do PRV são totalmente diferentes dos introduzidos por (DANTZIG; RAMSER, 1959) e (CLARKE; WRIGHT, 1964) pois buscam incluir a complexidade da vida real, tais como a questão do tempo, seja para a viagem ou problemas de tráfego, que envolvem a coleta e entrega de bens ou realização de determinado serviço, com demandas fixas ou variáveis ao longo do trajeto ocorrendo mudanças dinamicamente.

Os autores (DANTZIG; RAMSER, 1959) que foram os primeiros a apresentarem uma modelagem matemática através do problema de uma frota de caminhões homogêneos, para atender a demanda de vários postos de gasolina, partindo de um depósito central e

percorrendo uma distância mínima. São os percursos na história do PRV. Problema esse que foi generalizado posteriormente por (CLARKE; WRIGHT, 1964) para problema de otimização linear amplamente aplicado no campo da logística e do transporte, conhecido como Problema de Roteamento de Veículos - do inglês - *Vehicle Routing Problem* (VPR) que consiste em atender determinado conjunto de clientes, separados geograficamente próximos de um depósito central, com uma frota de caminhões ou ônibus com capacidades variáveis.

Definir o problema é fundamental para estabelecer uma boa compreensão do tema, seja para pesquisa ou ensino. O PRV pode ser definido de acordo com (LAPORTE, 2009), onde as aplicações no gerenciamento de distribuições é central, pode ser definido a seguir:

Definição 1 (Problema de Roteamento de Veículos) *O problema de projetar rotas de entrega a um menor custo de um depósito para um conjunto de clientes espalhados geograficamente, sujeitos à certas restrições.*

Para ampliar a compreensão do PRV é usual representar através de grafos direcionados ou não, pois a estrutura fica bem clara e objetiva na compreensão do problema. Devido a complexidade prática das inúmeras variações do problema, é interessante utilizar uma forma arquetípica devido sua aplicabilidade.

Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado onde $V = \{1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto de vértices e $A = \{(i, j) \mid i, j \in V, i \neq j\}$ é o conjunto de arcos. O vértice 1 representa o depósito, e os demais $n - 1$ pontos do vértice representam os clientes. Uma determinada frota de m veículos homogêneos com capacidade Q é localizada no depósito. O tamanho da frota é dado a princípio ou pode ser uma variável de decisão. A cada cliente é atribuído uma demanda d_i não-negativa. E uma matriz A referente aos custos c_{ij} definida como sendo as distâncias nos arcos entre cada ponto dos vértices do grafo.

Para ilustração, um modelo simples para compreender o PRV. Consideramos um grafo direcionado com um conjunto de vértices e arestas.

Exemplo 1 *Suponha que 10 vértices se encontrem separados geograficamente $V_n = \{1, 2, \dots, 10\}$ onde 1 é o depósito. E cada ponto é atribuído uma demanda específica $d_n = 1$. Estão disponíveis $m = 3$ veículos idênticos com capacidade $Q = 3$.*

Uma solução para o problema de roteamento de veículos descrito acima pode ser dado pelos conjuntos e três rotas $R_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $R_2 = \{1, 5, 6, 7\}$, $R_3 = \{1, 8, 9, 10\}$, uma vez que a capacidade do veículo não é violada. Veja a Figura 6.

Podemos observar no grafo do exemplo algumas características importantes. Primeiro todos os veículos devem iniciar e terminar a rota no depósito. Segundo todos os

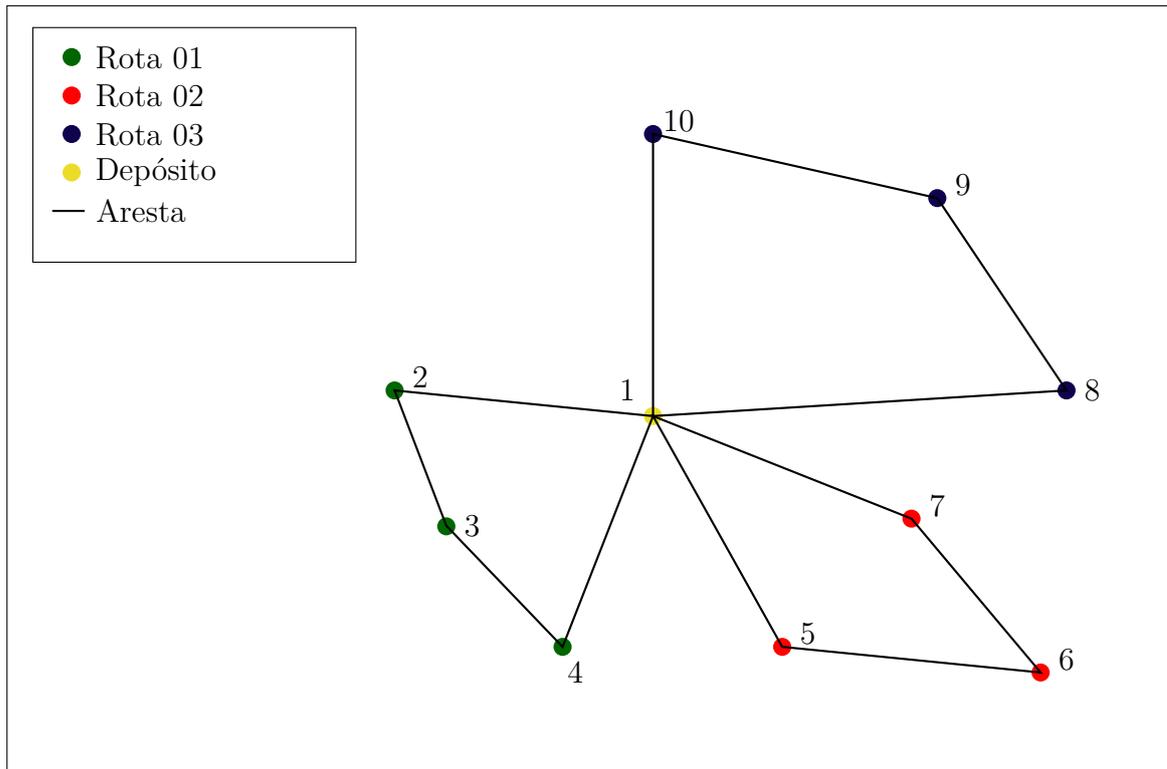


Figura 6 – Representação do PRV através do grafo

vértices são percorridos uma única vez. O problema de roteamento de veículos consiste em projetar rotas que: iniciam e terminem no depósito, cada vértice, ou seja cada cliente, seja visitado uma vez por um único veículo e a demanda total não pode exceder a capacidade do veículo. Também pode-se atribuir em alguns casos o limite de tempo para percorrer as rotas.

Na literatura existe o bem conhecido Problema do Caixeiro Viajante (PCV). Um caso particular do PRV quando utiliza apenas um veículo, ou seja $m = 1$. O PCV inspirou a formulação e resolução do PRV, uma vez que vários métodos de solução do PCV são aplicáveis com as devidas adaptações para o PRV.

O PRV generaliza o Problema do Caixeiro Viajante, que é muito mais difícil de resolver na prática. Enquanto existem algoritmos que são capazes de resolver o PCV com centenas ou milhares de vértices (APPLEGATE et al., 2007) alguns problemas do PRV não podem ser resolvidos com instâncias superiores a centenas de vértices utilizando os mesmos métodos. E como problemas reais excedem esse número, a maioria dos métodos para resolver esses problemas são algoritmos heurísticos, quando os métodos exatos falham em alguns aspectos.

O número dos métodos de soluções para o PRV na literatura aumentou drasticamente nas últimas décadas (LAPORTE, 2009). Aliado a isso, temos o desenvolvimento e avanço computacional na velocidade de processamento e memória dos computadores que

creceu exponencialmente, permitindo resolver grandes instâncias de vértices no PRV. Os algoritmos exatos evoluíram de esquemas básicos de ramificação e corte para programação matemática altamente sofisticada nos últimos cinquenta anos.

A primeira heurística do problema foi introduzida por (DANTZIG; RAMSER, 1959) que, basicamente consiste no algoritmo que reúne uma iteratividade de vértices para formar um conjunto de possíveis rotas para os veículos envolvendo uma sequência de programas lineares com variáveis iguais a um, se e somente se um par de pontos forem correspondidos.

Todo esse avanço precisava ser organizados de forma a compreender sua diversidade. Alguns trabalhos se dedicam a excetuar essa tarefa, com artigos citados nesse capítulo e expandem sobre o tema realizando uma revisão taxonômica abrangente. Assim remete chegar em alguns resultados importantes.

Em seu estudo (EKSIUGLU; VURAL; REISMAN, 2009) pesquisou 1021 artigos de revistas com tema principal PRV publicados entre os anos de 1959 a 2008. A taxonomia exhibe o domínio do assunto em termos que são mais simplificados para compreender, comunicar, ensinar e trabalhar. Com objetivo principal de aprimorar o quadro taxonômico, encontra-se a interação e o domínio da literatura PRV existente.

De acordo com os autores (EKSIUGLU; VURAL; REISMAN, 2009) o crescimento exponencial da literatura PRV implica em uma dificuldade para acompanhar o seu desenvolvimento, para isso o quadro permite uma localização dos principais aspectos.

Entre os principais pode-se citar as seguintes obras: (GOLDEN; RAGHAVAN; WASIL, 2008), (TOTH; VIGO, 2002) e (TOTH; VIGO, 2014) que contribuíram consideravelmente para literatura do PRV. Livros esses, que servem de alicerce para este trabalho em relação aos modelos matemáticos e métodos de solução. Além de pesquisas futuras e ministério de aulas sobre o problema de roteamento.

Utilizando-se da taxonomia para classificar roteamento de redes multiobjetivo por (CURRENT; MARSH, 1993), os autores realizaram uma análise em quarenta artigos para identificar uma gama de variedades de funções objetivos. Essa variedade reflete a importância do transporte em rede.

Com base nesse direcionamento, uma lista de alto nível com sete outros problemas multiobjetivo foi proposta pelo autor para apresentar uma família envolvendo o PRV e ao mesmo tempo fornecer um senso de fronteiras que isolam.

Se a lista com todos conectados com *desing* da rede transporte multi objetivo:

1. Problema do caminho mais curto;
2. Problema de transporte;

3. Problema de atribuição;
4. Problema de transbordo;
5. Problema de Roteamento de veículos;
6. Problema de *desing* de rede ótima;
7. Problema de fluxo em rede.

Esse quadro proposto por (CURRENT; MARSH, 1993) é apenas para identificar onde está inserido o PRV e compreender as suas limitações. Crucial para delimitar e resolver problemas práticos que envolvem inúmeras variáveis e alta complexidade, o foco, especificamente na categoria 5, tem o problema de roteamento de veículos, objeto de estudo dessa dissertação, passa por outras classificações de acordo com determinadas características.

No Capítulo 4 será apresentado uma relação entre o fluxo em rede 7 para descrever o PRV que envolve inicialmente o problema do caixeiro viajante (PCV) descrito como modelo de fluxo, passando pelo problema de roteamento de veículos capacitado (PRVC), discutindo o problema de rotas de cobertura (PRC), até chegar no problema de roteamento de veículos generalizado (PRVG).

1.4 Problema de roteamento de veículos

As principais variações do PRV podem ser descritas em algumas categorias essenciais de acordo com as características dos problemas, representado na Tabela 3. A taxionomia no roteamento de veículos é escassa e acompanhar o desenvolvimento é difícil devido a popularidade e expansão, que segundo (EKSHIOGLU; VURAL; REISMAN, 2009) cresce a uma taxa de 6% ao ano. Por sua vez algumas pesquisas se concentram em revisões e variantes dos aspectos específicos.

PRV	Descrição	Autores	Ano
Capacitado	Capacidade do veículo	(LAPORTE, 2009)	2009
Periódicos	Determinados períodos	(CAMPBELL; WILSON, 2014)	2014
Janela de tempo	Atendimento em intervalos de tempo	(BRÁYSY; GENDREAU, 2005a)	2005
Janela de Tempo		(BRÁYSY; GENDREAU, 2005b)	2005
Dinâmicas	Dados estocásticos	(PILLAC et al., 2013)	2013
Coleta e entrega	<i>Pickup-and-Delivery</i>	(BERBEGLIA et al., 2007)	2007
Múltiplos depósitos	Depósitos distintos	(MONTTOYA-TORRES et al., 2015)	2015
Verdes		(LIN et al., 2014)	2014

Tabela 3 – Variações para o PRV e seus autores

Essas pesquisas se concentram em revisar modelos matemáticos, e também métodos de solução propostos, não abordando em alguns casos, localização de diferentes

suposições e características dos métodos. O objetivo do artigo (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016) é classificar a literatura acadêmica, com inspiração nas características detalhadas do problema. A análise realizada por (EKSHIOGLU; VURAL; REISMAN, 2009) fornece uma classificação estruturada da literatura recente com objetivo de construir uma tabela de classificação.

Capacitado

O PRV pode ser definido como o problema de projetar rotas de entrega a um menor custo de um depósito para um conjunto de clientes espalhados geograficamente, sujeito a restrições de limitação que envolvem principalmente a capacidade do veículos. O PRV capacitado (LAPORTE, 2009) consiste em projetar m rotas de veículos que comece e termine no depósito, onde cada cliente seja visitado exatamente uma única vez por um único veículo, e a demanda total de cada rota não pode exceder a capacidade do veículo.

Pode se acrescentar ainda que a extensão total da rota não pode exceder um tempo limitante. Este problema é central para o gerenciamento e distribuição de mercadorias que devem ser rotineiramente resolvido pelas transportadoras. Na prática, diversas variantes do problema existem devido a diversidade de regras operacionais e restrições encontradas em aplicações da vida real.

Periódico

No problema de roteamento de veículos periódico (PRVP), os clientes exigem que as visitas sejam realizadas em um (1) ou mais dias da semana acessíveis ao planejamento do período. Existem conjuntos de opções de visitas para cada cliente que devem ser atribuídos um conjunto de visitas viáveis. O problema é resolvido para cada dia da semana no período de planejamento. O objetivo original é minimizar a distância total no planejamento de viagem no período. Ele surge em diversas aplicações como por exemplo coleta de material reciclável, roteamento de casa para enfermeiro de saúde e coleta de dados de rede sem fio.

Os autores (CAMPBELL; WILSON, 2014) descrevem a evolução do problema e ressaltam se tratar de um problema desafiador pois possuiu uma rica história que abrange os últimos 40 anos. Inicia-se em 1974 com o problema de coleta municipal de resíduos que inspirou os trabalhos sobre coleta de lixo industrial em Nova Iorque. Com enfoque na amplitude de contexto que foram aplicados e métodos de soluções propostos. Surge em situações como coleta de lixo em determinados pontos da cidade, onde não há necessidade de passar todos os dias.

Na concepção de (BELTRAMI; BODIN, 1974) um dos primeiros a introduzir problemas de roteamento em arco. Em alguns exemplos como dos varredores de rua na cidade de Nova Iorque. Seu trabalho com o título *Networks and vehicle routing for*

municipal waste collection é pioneiro na periodicidade de coleta ao cliente especificamente abordando a combinação, considerando ao custo de roteamento dos veículos. Destacam-se algumas aplicações abaixo.

1. Coleta

- a) Coleta de lixo industrial e outros resíduos;
- b) Coleta de lixo residencial em roteamento de arco;
- c) Coleta de materiais recicláveis;
- d) Coleta de óleo vegetal;
- e) Coleta de lixo hospitalares.

2. Entrega

- a) Entrega de produtos: bebidas e refrigerantes;
- b) Entrega de produtos em loja varejista;
- c) Entrega de roupas hospitalares;
- d) Roteamento de inventário.

3. Coleta e Entrega: serviços de empréstimo entre bibliotecas.

São apenas algumas das aplicações de PRV periódico que envolve várias situações onde existe a necessidade de atendimento por período em determinado momento do dia, além do problema de roteamento no arco, conhecido com Problema do Carteiro Chinês.

Janela de tempo

O Problema de Roteamento de Veículos com Janela de Tempo (PRJT) é uma extensão do Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (PRVC) onde o serviço em cada cliente obrigatoriamente deve começar dentro de um intervalo de tempo associado, chamado janela de tempo (BRÄYSY; GENDREAU, 2005a).

A janela de tempo pode ser restrita ou suave. No caso onde as janelas de tempo são restritas e os veículos chegam cedo demais em um cliente, aguardam até o cliente estar pronto para iniciar o serviço. Já as janelas de tempo suaves, estabelece um intervalo de tempo para realizar a atividade de entrega ou coleta.

Algumas empresas que trabalham com horários de tempo flexíveis, onde alguns dos exemplos onde aparecem naturalmente. Problemas com janela de tempo restrita podem incluir: serviço de patrulha, entregas bancárias, entregas postais, entrega de mercearia,

ônibus escolar e distribuição de jornais. (TOOTH; VIGO, 2014) janelas de tempo suaves surgem em problemas, *dial-a-ride*. O atendimento porta a porta, para transporte de passageiros com necessidades especiais ou idosos.

Geralmente na literatura existe um número de veículos limitados disponíveis para servir um conjunto de clientes. Problemas que envolvem janela de tempo são mais desafiadores para modelar e trabalhar, pois envolvem mais variáveis principalmente na função objetivo.

Dinâmico

Quando se resolve um PRV geralmente assume que todos os parâmetros de entrada são conhecidos. A demanda dos clientes ou a viagem e tempo de serviço são fragmentadas, incerta ou incompletas durante a fase de construção de uma rota. Existem duas importantes dimensões dos dados de entrada: evolução e qualidade da informação.

O primeiro implica que as informações estão sujeitas a alterações mesmo após o plano de roteamento e a última a possíveis incertezas dados disponíveis. Os parâmetros de entrada podem ser conhecidos, desconhecidos ou incertos. Pode-se classificar o problema dinâmico com base em uma taxonomia proposta por (TOOTH; VIGO, 2014) através das seguintes variações.

1. Estatístico e Determinístico: todos os parâmetros de entrada são conhecidos previamente e com certeza, não são alterados durante o planejamento e execução.
2. Estático e Estocástico: parte dos parâmetros de entrada são conhecidos como aleatórios ou estocásticos, para os quais os valores reais são revelados durante a execução do processo de roteamento. Como por exemplo clientes estocásticos, demanda e/ou tempo de viagem.
3. Dinâmico e Determinístico: problemas dinâmicos, diferente dos problemas acima, assume que parte ou todos os dados de entrada não são conhecidos antes da execução do plano, se tornam disponíveis ao longo do tempo. Incerteza total, e informações probabilísticas estão acessíveis para eventos futuros.
4. Dinâmico e Estocástico: esse grupo pode verificar problemas dinâmicos que não podem ser resolvidos uma vez e antes da realização do processo de roteamento; contudo, parte dos dados de entrada estão como informações estocásticas (previsões, intervalos de valores, distribuições).

Importante salientar que de acordo com as informações necessárias para os parâmetros de entrada, o problema dinâmico se encaixa em cada uma das categorias

citadas acima. Para se trabalhar com esses problemas é usual recorrer a estatística e modelos probabilísticos.

Coleta e entrega

O Problema de Roteamento de Veículos Coleta e Entrega (PRVCE), do inglês *Pickup-and-Delivery Vehicle Routing Problem*, constituem um importante família do problema de roteamento onde podem ser transportados bens ou pessoas de diferentes origens para diferentes destinos. De acordo com o tipo da demanda e estrutura da rota (TOTH; VIGO, 2014) classifica em três categorias.

1. Muitos-para-Muitos: cada commodity podem ter múltiplas origens ou múltiplos destinos.
2. Um-para-Muitos-para-Um: um commodity que pode ser entregue a partir do depósito para muitos clientes, e outra commodities que pode ser coletada de vários clientes para o depósito.
3. Um-para-Um: cada commodities tem uma origem e um destino que pode ser transportado.

O Item 1 pode surgir, como por exemplo, na reposição do inventário de lojas de supermercados, sistemas de compartilhamento de carros ou bicicletas. Por outro lado o item 2 pode ser compreendido como aplicação na entrega de bebidas e coleta de garrafas vazias. Por fim, o item 3 transporte urbano do serviço de correio. Se os parâmetros são conhecidos a priori temos o caso determinístico, e o problema dinâmico pelo fato de apenas algumas informações são conhecidas.

Problemas onde a demanda dos clientes nos vértices podem ser de coleta ou entrega quando se trata de bens, ou embarque e desembarque de passageiros quando se trata de transporte de pessoas.

Múltiplos depósito

A distribuição física é uma das funções chaves em sistemas logísticos, envolvendo um fluxo de produtos das plantas de manufaturas ou centros de distribuição por meio da rede de transporte até os consumidores. A indústria de distribuição, é uma função de alto custo.

Segundo (MONTROYA-TORRES et al., 2015) a literatura de Pesquisa Operacional tem abordado o PRV, referindo a uma classe de problemas de otimização combinatória, onde os clientes são visitados por um número de veículos. Onde os veículos partem do depósito, atendem os clientes na rede e retornam ao depósito depois de completar as rotas.

Em alguns casos devido a necessidade da empresa e a distribuição de mercadorias, existem vários depósitos distintos para atender a demanda dos clientes.

Agora que foi apresentado de maneira superficial algumas variações do PRV, para compreender a abrangência em vários ramos da logística e do transporte. O próximo tópico aprofunda no estudo taxionômico através das características dos problemas e são classificados e apresentados em tabelas.

1.5 Tabela taxionômica

O escopo da pesquisa realizada pelos autores ([BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016](#)) compreende artigos publicados entre o ano de 2009 até junho de 2015, utilizando o quadro taxionômico para classificação. O quadro exposto pelo autor está apresentado na Tabela 4, cuja proposta é permitir que futuros pesquisadores encontrem a literatura relevante eliminando ou selecionando características na taxonomia. A construção do quadro taxionômico foi inspirado anteriormente no quadro apresentado no trabalho de ([EKSIUGLU; VURAL; REISMAN, 2009](#)) e aponta um norte para a pesquisa e revisão bibliográfica de família PRV.

Os artigos selecionados entre 2009 e 2015 que fazem parte da pesquisa contém o termo “roteamento de veículo” no título. Foi limitado a seleção de artigos publicados em revistas com fator de impacto igual a 1.5 no campo da pesquisa de gestão de operações, transporte ou ciência e tecnologia do transporte além de artigos publicados em engenharia computacional e industrial.

Esse conjunto de artigos foi ampliado, adicionando os altamente citados e publicados em qualquer periódico, também contendo o termo “roteamento de veículo” no título ou na palavra chave. Os resumos dos artigos importantes para escolher a relevância do assunto. Não foram incluídos problemas combinados. A pesquisa realizada pelos autores resultaram em 277 artigos importantes para a área. Entre os periódicos pode-se destacar: *European Journal of Operational Research*, *Computers Operations Research*, e *Expert Systems with Applications*, os quais representam 23,46%, 22,38% e 13,7%, respectivamente, dos artigos publicados no conjunto selecionado pelos autores.

No quadro da Tabela 4 destacam-se cinco categorias principais: o tipo de estudo, cenário das características, características física do problema, características da informação e características dos dados, sendo cada categorias com a suas respectivas subcategorias detalhadas.

Em relação ao tipo de estudo temos os métodos aplicados que são diferenciados em três categorias: métodos exatos, heurísticas clássicas e meta-heurísticas. Em seu trabalho ([LAPORTE, 2009](#)) traça um histórico detalhado do desenvolvimento dos métodos

Parâmetro	Caracterização	
Tipo de Estudo	Teórico	
	Métodos Aplicados	Métodos exatos
		heurísticas clássicas
		meta-heurísticos
		Método de solução tempo real
Simulação		
	Implementação documentada	
	Revisão de pesquisa ou meta-pesquisa	
Características do Cenário	Serviço no local/Tempo espera	Determinístico (conhecido)
	Quantidade de atendimento ao cliente	Estocástico
	Tempo de pedido de novos clientes	desconhecido
	Número de pontos na rota	Determinístico (conhecido)
		Parcialmente conhecido
	Restrição decomposição de carga	permitida
		não-permitida
	Estrutura da Janela de Tempo	Suave
		Restrita
		Misto de ambas
	Horizonte de tempo	único período
Multi-período		
<i>Backhauls</i>	Coleta e entrega juntas	
	<i>Linehaul</i> ou <i>backhaul</i>	
Restrição no arco de cobertura	Recurso permitido	
	Precedência e acoplamento	
	Restrição de cobertura	
Características físicas	<i>Desing</i> da rede de transporte	direcionado
		não direcionado
	Localização dos endereços	Clientes no nó
		Instância no arco
	Número de pontos de origem	Origem única
		Múltiplas origens
	Pontos de carregamento/descarregamento	Único depósito
		Múltiplos depósitos
	Tipo de janela de tempo	Restrição nos clientes
		Restrição depósito/centro
		Restrição motoristas/veículos
	Número de veículos	Único veículo
		Número limitado de veículos
		Número ilimitado de veículos
	Consideração da capacidade	Veículos capacitados
		Veículos sem capacidade
	Veículos homogêneo	Veículos similares
		Veículos com carga específica
		Veículos heterogêneas
		Veículos cliente específico
	Tempo de viagem	Determinístico
		Função dependente
		Estocástico
Desconhecido		

Tabela 4 – Quadro taxionômico. Fonte: (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016)

de solução para o PRV ao longo das ultimas décadas. De acordo com o autor, os algoritmos exatos evoluíram nos últimos 40 anos de esquemas básicos de *branch-and-bound* para programação matemática altamente sofisticada. Já as heurísticas que surgiram entre 1964 e o início dos anos 90, onde a maioria são construtivas, mas também incluem fase de melhoria, denominadas de heurísticas “clássicas”. Assim chamadas, pois a cada iteração a função objetivo não se deteriora. Característica essa presente em algumas “meta-heurísticas” que foram desenvolvidas entre 1989 até meados de 2009. A maioria das meta-heurísticas podem

Parâmetro	Caracterização	
Características físicas	Função objetivo	Dependente tempo de viagem
		Dependente da distância
		Dependente do veículo
		Função do atraso
		Relacionado com risco/perigo
		Outros
Características da infirmação	Evolução da informação	Estática
		Parcialmente dinâmica
	Qualidade da informação	Conhecida (determinística)
		Estocástica
		Estimada
		Desconhecida (tempo-real)
	Disponibilidade da avaliação	Local
		Global
	Processamento da informação	Centralizado
		Descentralizado
Características dos dados	Dados utilizados	Dados mundo real
		dados sintéticos
		Ambos dados sintéticos e reais

Tabela 5 – Continuação do quadro taxionômico. Fonte: (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016)

ser considerada como métodos de melhoria, são bastante robustas e funcionam muito bem. Observa-se uma tendência de mudança de algoritmos baseados em único paradigma para métodos híbridos que utilizam de um ou mais princípios distintos.

Nas características do cenário o serviço no local ou tempo de espera, refere-se ao tempo que um veículo deve esperar em um determinado cliente antes de iniciar o serviço ou, a quantidade de tempo que irá utilizar para executar a tarefa.

É muito importante quando se trata de janela de tempo, a qual é detalhada nas características físicas. Típicas janelas de tempo são classificadas de acordo com os artigos quanto a restrição aos clientes. Quando se trata do número de veículos que podem ser utilizados, há casos com exatamente n veículos, até n veículos, ou um número ilimitado. Com um destaque para $n = 1$ veículos pois se trata do bem conhecido Problema do Caixeiro Viajante (PCV).

Tem-se ainda na categoria funções objetivo o destaque para otimizar o tempo de viagem, a distância, número de veículos, custos ligados ao atraso, relacionado a risco ou perigo. E por fim, as características das informações que podem ser: determinísticos, estocásticos ou estimadas e os dados reais ou sintéticos.

Será utilizada as tabelas ao longo do primeiro capítulo para contextualizar e delimitar as características do problema estudado em Itumbiara a respeito do transporte de ônibus fretado.

Um resumo das principais tendências em métodos aplicados e modelo utilizados

nos 277 artigos selecionados será exposto de forma sucinta para ter um contexto do campo do PRV diante das tendências recentes no que tange métodos aplicados e características de cenários das variações do PRV.

Os resultados dos 277 artigos pesquisados entre 2009 e junho de 2015 são apresentados abaixo em relação a porcentagem e os indicadores para analisar características dos PRV que são mais populares. Vale ressaltar que alguns artigos aparecem várias vezes, pois consideram diversas variantes do PRV. Com isso, a tabela de classificação contém 327 ao todo, as porcentagens são com base nesse total de 327.

Inspirado no trabalho (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016) os dados serão expostos em duas tabelas. A primeira Tabela 6 apresenta a os métodos aplicados, e a segunda Tabela 7 apresenta as diversas características do problema.

A Tabela 6 destaca no período pesquisado uma forte tendência em utilizar métodos meta-heurísticos em detrimento dos demais. Uma vez que métodos exatos são computacionalmente caros para instâncias grandes e complexas, e métodos heurísticos podem ficar presos na solução ótima local.

Método aplicado	Número de modelos	Porcentagem
meta-heurística	233	71.25
método exato	56	17.13
heurística clássica	32	9.79
método de solução de tempo real	11	3.36
simulação	7	2.14

Tabela 6 – Métodos de resolução aplicados

A Tabela 7 apresenta uma visão geral do cenário e das características físicas do problema. Claramente a maioria dos artigos são de veículos capacitados (90.52%) e os demais não capacitado, como, por exemplo, quando uma unidade de demanda é insignificante em tamanho. Geralmente veículos são considerados idênticos. Raras exceções com veículos específicos ou específicos dos clientes. Janelas de tempo são consideradas em mais de um terço dos artigos, janelas de tempo rigorosas (30.58%). Geralmente relacionadas com tempo de visitas nos clientes (34.86%) e restrições em depósitos/motoristas são em (13.76%) e (12.23%), respectivamente.

A variedade é observada nas funções objetivos da literatura considera um objetivo não padrão (18.35%). A grande maioria inclui o custo do roteamento (baseado na distância ou tempo de viagem) em (92.35%), e custos dependente do veículo (38.23%).

Em relação aos dados problemas com informações dinâmicas são modelados em (4.28%) dos artigos, embora grande parte da informação seja considerada determinística (82.57%), agora estocásticas ou desconhecidas (9.17%) e (4,59%), respectivamente. A maioria dos autores usa dados artificiais para testar seus métodos (84.10%) e (6.12%)

Característica	número de modelos	porcentagem geral
veículos capacitados	296	90.52
veículos heterogêneos	54	16.51
janela de tempo	124	37.92
backhauls	61	18.65
múltiplos depósitos	36	11.01
recurso permitido	31	9.48
precedência e acoplamento de restrições	28	8.52
subconjunto de restrições de cobertura	28	8.56
permitido dividir remessas	20	6.12
demanda estocástica	20	6.12
demanda desconhecida	6	1.83
tempo de viagem dependente do tempo	10	3.06
tempo de viagem estocástico	9	2.75
tempo de viagem desconhecido	5	1.53
pedido dinâmico	8	2.45

Tabela 7 – Modelos matemáticos utilizados

utiliza ambos dados da vida real e dados artificiais. O diferencial do trabalho proposto consiste no fato que os dados da pesquisa que são reais englobam (9.78%).

Existe uma tendência para as variações do PRV que incluem restrições e pressupostos da vida real, tornando assim modelos teóricos mais realistas possíveis e as soluções se aproximam cada vez mais da prática. Vale a pena destacar o PRV capacitado, PRV dinâmico e PRV dependente do tempo, se aproximam mais dos problemas do cotidiano. Inspiram pesquisadores a desenvolver formulações matemáticas e métodos de solução específicos.

Segundo (BRAEKERS; RAMAEKERS; NIEUWENHUYSE, 2016) propõem métodos altamente adaptados ao problema que não são aplicáveis a outras variantes do PRV nas quais ocorre uma manipulação dos parâmetros para fornecer um bom desempenho para instancia dada. Muitos métodos de solução propostos não podem ser facilmente aplicados em outras configurações de problemas ou aplicações da vida real.

1.6 Caracterização do problema

Pode-se notar de acordo com a caracterização do problema no quadro taxionômico das Tabelas 4 e 5 que existem cinco tipos principais de parâmetros e suas respectivas subdivisões.

Tipo de estudo

Analisando o primeiro parâmetro, o tipo de estudo, o trabalho dessa dissertação está na categoria teórico e métodos aplicados, pois é realizada uma pesquisa bibliográfica para descrever o problema do mundo real, através de modelos matemáticos inseridos na literatura. E pode-se destacar ainda em métodos aplicados, como os métodos exatos que serão utilizados para resolver o modelo matemático do problema descrito posteriormente.

Características do cenário

No quadro características do cenário, o número de pontos na rota do problema estudado é conhecido e foi coletado em campo pelo autor durante a pesquisa, com aparelho de *global position system* (GPS) e o aplicativo para celular *HERE Technologies*. Dados referentes a localização geográfica e demanda de passageiros em cada ponto. Então pode-se classificar como determinístico ou conhecido o número de pontos.

Quanto aos *Backhauls* existem dois momentos no horizonte de tempo. O primeiro momento ocorre quando o ônibus parte da garagem em direção aos pontos, realizando o embarque (coleta) de passageiros em direção a indústria, retornando ao depósito. No segundo momento o ônibus parte da indústria, com os passageiros e durante o percurso, acontece o embarque e desembarque, ou seja, coleta ou entrega dos passageiros nos pontos ônibus, retornando para indústria com os passageiros que embarcaram.

Não existe janela de tempo no problema do modelo matemático estudado, mas os passageiros (funcionários) da indústria necessitam entrar e sair em determinado horário na indústria. Ou seja, os veículos devem fazer o percurso de tal forma que os funcionários cheguem no horário, por isso o número de passageiros em cada ponto, e o número de pontos visitados, bem como a distância é importante para esse problema.

Características físicas

As características físicas do problema abordam os seguintes aspectos. Quando se trata da localização do endereços, os clientes estão nos nós. Número de pontos de origem, são múltiplos pontos, pois em cada ponto, temos embarque ou desembarque de passageiros (coleta e entrega) de muitos para muitos. Agora se tratando do depósito temos apenas um. Mas vale a pena ressaltar que ele sofre alteração. Em determinado momento o depósito se encontra na garagem de ônibus, em outro momento na indústria. O número de veículos é limitado, mas a empresa que opera o transporte dos funcionários da indústria, conta com um quantidade limitada de vans, micro-ônibus e ônibus convencional.

Todos os veículos são capacitados, possuem um número específico de passageiros que podem ser transportados com conforto e eficiência. Os veículos, em suas categorias, possuem características homogêneas, ônibus capacidade de 48 lugares, o micro-ônibus

de 23 lugares, e as vans de 15 lugares. O tempo de viagem, está relacionado com a distância percorrida por cada ônibus em cada uma das rotas. A função objetivo esta centrada na dependência da distância. O objetivo principal é minimizar a distância total, conseqüentemente o tempo total do percurso é reduzido, gerando menos gastos para empresa.

Caraterísticas da informação/dados

As características da informação são estatísticas, cujos dados foram coletados a priori para realizar os testes e verificar a possibilidade de utilizar outros veículos, e não apenas ônibus como é feito atualmente pela empresa. A qualidade da informação é conhecida, determinística. Processamento da informação é centralizado na empresa que opera os ônibus, no departamento de planejamento. Algumas rotas, apenas os motoristas que realizam a algum tempo conhecem. Após mapear, através do aplicativo *HERE*, é possível o operador do planejamento acessar a conta e verificar as rotas e pontos atuais mapeados pelo autor, e por fim, atingir as características dos dados são do mundo real.

2 Problema de Roteamento de Veículos

Neste capítulo é apresentado as principais características e modelos matemáticos do Problema de Roteamento de Veículos (PRV), do inglês - *Vehicle Routing Problem*. A principal referência desse capítulo são os livros (TOTH; VIGO, 2002; TOTH; VIGO, 2014) que permitem uma familiarização com as diferentes vertentes do problema de roteamento de veículos.

Devido a ampla diversidade e variação do roteamento de veículos acredita-se, não apenas por questões de protocolos, aprofundar o estudo no modelo matemático que mais se adapta ao problema em questão, pois mesmo se encontrando em uma determinada classificação, os artigos nos apresentam que cada problema, tem um modelo específico norteador que mais se encaixa a cada situação problema e métodos de resolução mais recomendáveis.

2.1 Variações

O problema de roteamento de veículos tem inúmeras variações, todavia as principais foram destacadas com inspiração no artigo de (MONTROYA-TORRES et al., 2015) que trata em seu artigo do PRV multi depósito que revela as variações e apresenta um modelo adaptado das diferentes variantes do PRV, inspirado em (WEISE; PODLICH; GORLDT, 2009). Na literatura, muitas pesquisas tem sido apresentadas analisando trabalhos publicados sobre a versão clássica, como, por exemplo podemos citar os autores (BODIN, 1975; BODIN; GOLDEN, 1981; DESROCHERS; LENSTRA; SAVELSBERGH, 1990; EKSIUGLU; VURAL; REISMAN, 2009; LAPORTE, 1992; ZIROUR, 2008; MAFFIOLI, 2003) e todos esses trabalhos consideram apenas um único depósito.

1. Capacitado: (BALDACCI; TOTH; VIGO, 2010; CORDEAU et al., 2007; CORDEAU et al., 2002; LAPORTE; NOBERT, 1987; CORDEAU et al., 2002; GENDREAU; LAPORTE; POTVIN, 2002; TOTH; VIGO, 2002);
2. Frota de veículos heterogênea: (BALDACCI; BATTARRA; VIGO, 2008; BALDACCI; TOTH; VIGO, 2007; BALDACCI; TOTH; VIGO, 2010);
3. Coleta e entrega: (SOLOMON; DESROSIERS, 1988)
4. Dinâmico: (PSARAFTIS, 1995);
5. Periódico: (MOURGAYA; VANDERBECK, 2006);
6. Várias viagens: (ŞEN; BÜLBÜL, 2008);

7. Entrega fracionada: (ARCHETTI; SPERANZA, 2008).

Ressaltam (WEISE; PODLICH; GORLDT, 2009) que o volume do tráfego de carga nas estradas alemãs terá dobrado até 2050 de acordo com o *German Federal Ministry of Economics and Technology* com o aumento do comércio no interior da União Europeia e importação e exportação Global.

Segundo os autores, as causas são efeitos da globalização e a localização geográfica da Alemanha na União Europeia. Com isso, resultam a importância de uma logística e soluções inteligentes para o planejamento estratégico. Isso pode ser considerado um problema de otimização multi objetivo. Aumentar o lucro das empresas e garantir a coleta e entrega no tempo para todas as parcelas e utilizar todos os meios de transportes disponíveis (ferroviário, caminhões) de maneira eficiente, reduzindo as distâncias e utilizando a capacidade máxima dos veículos. E, por último reduzindo a emissão de CO2 tornando o ambiente mais amigável.

Verifica-se que reduzindo a distância total, os custos da empresa de transporte com pessoal, manutenção, combustível, tempo etc. e isso impacta diretamente no lucro da empresa, e indiretamente no custo total dos transportes, afetando o valor final do produto.

O problema não são bens a serem transportados, mais sim passageiros que funcionam de maneira similar, sendo que revendo a distância, os efeitos colaterais na empresa de transporte são minimizados. Nesse sentido, a literatura apresenta uma vasta e importante área do conhecimento que tem crescido vertiginosamente nas últimas décadas, principalmente devido ao avanço tecnológico e a necessidade de expansão de transporte dos meios de produção e locomoção da população, o problema de roteamento de veículos.

Desde seu surgimento, apresenta algumas variações, de acordo com as características do problema, que podem ser a frota de veículos, número de depósitos, o tipo de entrega e/ou coleta, se envolve tempo, enfim, uma gama de variações de acordo com as especificidades do problema que já foi tratado no capítulo anterior no quadro taxonômico.

Porém só isso não é suficiente para escolhermos o melhor modelo para problema. É preciso conhecer os principais modelos matemáticos para o PRV propostos na literatura e que serão discutidos no Capítulo 2 uma breve síntese dos modelos e suas características.

Sobretudo, vale a pena ressaltar o quadro através da Figura 7 proposto por (WEISE; PODLICH; GORLDT, 2009) a família de variações do PRV onde faz um apanhado geral das principais variantes.

2. todas as rotas dos veículos começam e terminam no depósito;
3. algumas restrições laterais são satisfeitas.

As restrições laterais mais comuns incluem:

- i) capacidade de restrição: um peso (demanda) d_i não negativo é atribuído em cada cidade $i > 1$ e a soma de todos os pesos de qualquer veículo na rota não pode exceder a capacidade do veículo;
- ii) número de cidades em qualquer rota é limitado acima por q (este é um caso especial de i quando $d_i = 1$ para todo $i > 1$ e $D = q$);
- iii) restrição total do tempo: o intervalo de qualquer rota não pode exceder um limite L de tempo estabelecido; esse intervalo é composto de tempo de viagem c_{ij} entre as cidades e também o tempo de parada em cada cidade da rota;
- iv) janela de tempo: cidade i deve ser visitada com um intervalo de tempo $[a_i, b_i]$ e a espera é permitida na cidade i ;
- v) relação de precedência entre os pares de cidades: cidade i deve ser visitada antes da cidade j .

Quando são impostas restrições de capacidade, o problema é conhecido como PRV Capacitado (PRVC). Quando o problema apresenta restrições de tempo ou distância é chamado de PRV dinâmico (PRVD). Quando apresentam janela de tempo para visita é denominado PRV Janela de Tempo (PRVJT).

Formulação

Existem cinco formulações apresentadas por (LAPORTE, 1992) de PRV de acordo com o método de resolução. Neste trabalho, o modelo apresentado é com base no limite inferior de atribuição está relacionado com o algoritmo *branch-and-bound*. Formulação essa que utiliza a formulação proposta por (LAPORTE; MERCURE; NOBERT, 1986) que exploração a relação entre o PRV e o, m -PCV relaxado. Dado um grafo $G = (V, A)$ com o depósito no vértice 1 e m veículos localizados no depósito, o m -PCV consiste em estabelecer m rotas de veículos a um custo mínimo começando e terminando no depósito, e de tal maneira que cada vértice é visitado uma única vez.

Considere m_u sobre m , conhecido limite superior do número de veículos da solução ótima. A extensão do grafo G por outro G' permite que o m -PCV pode ser formulado como 1-PRV da seguinte forma.

- i) incrementa o número de vértices introduzindo $m_u - 1$ depósitos artificiais; permitir $n' = n + m_u - 1$, $V' = \{1, \dots, n'\}$, e $A' = A \cup \{(i, j) : i, j \in V', i \neq j \text{ ou } j \in V' \setminus V\}$;
- ii) A matriz distância estendida $C' = (c'_{ij})$ associada com A' é definida por:

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{se } (i, j \in V), \\ c_{i1}, & \text{se } i \in V \setminus \{1\}, j \in V' \setminus V, \\ c_{1j}, & \text{se } i \in V' \setminus V, j \in V \setminus \{1\}, \\ \gamma, & \text{se } i, j \in (V' \setminus V) \cup \{1\}. \end{cases}$$

Onde o valor de γ depende da variante do problema considerado:

$\gamma = \infty$ produz a distância mínima para os m_u veículos;

$\gamma = 0$ produz a distância mínima para no máximo m_u veículos;

$\gamma = -\infty$ produz a distância mínima para um número mínimo de veículos.

O PRV (PRVC, PRVD ou ambos) pode ser formulado como segue. Seja x_{ij} ($i \neq j$) a variável binária da equação c'_{ij} é igual a 1 se e somente se o arco (i, j) de A' aparece na solução ótima. Se $d_i + d_j \geq D$, i e j não pode pertencer a mesma rota e x_{ij} não necessita ser definido.

(PRV)

$$\text{Minimizar } \sum_{i \neq j} c'_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j=1}^{n'} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n', \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n'} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n', \quad (2.3)$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - v(s), \quad S \subset V' \setminus \{1\}, \quad |S| \geq 2, \quad (2.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n'. \quad (2.5)$$

Nesta formulação as Restrições (2.1)-(2.3) e (2.5) definem um problema de designação modificado, isto é, atribuições na diagonal principal são proibidas. As Restrições (2.4) são de eliminação de sub-rotas. Onde $v(s)$ é um limite inferior adequado para o número de veículos requisitados, para visitar todos os vértices de S na solução ótima. Essas restrições são obtidas observando que para qualquer $S \subset V' \setminus \{1\}$, $|S| \geq 2$ e $\bar{S} = V' \setminus S$, devemos ter:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq v(s),$$

que a identidade a seguir contém

$$|S| = \sum_{i,j \in S} x_{ij} + \sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij}.$$

O valor de $v(s)$ depende do tipo de PRV considerado. No PRVC é válido tomar

$$v(s) = \left\lceil \frac{\sum_{i \in S} d_i}{D} \right\rceil.$$

No PRVD, $v(s)$ não é fácil de determinar *a priori*. Entretanto, normalmente um limite inferior do seu valor pode ser determinado durante o processo de *branch-and-bound*, caso não tenha isso toma-se $v(s) = 1$. Vale a pena ressaltar a importância dupla da restrição 2.4: pois ela assegura que todos os veículos na rota satisfazem a capacidade ou comprimento-máxima de restrição; elas também garantem que a solução não possui nenhuma sub-rota desconectada do depósito; uma vez que todo conjunto S de $V \setminus \{1\}$ é ligado ao seu complemento.

Um algoritmo natural para resolver, como o algoritmo de atribuição para o Problema do Caixeiro Viajante, o problema é resolvido através do *Branch-and-Bound* no qual o sub-problemas são problemas de atribuição. A diferença única está na definição de eliminação de sub-rotas. Que agora incluem:

1. Sub-rotas sobre um conjunto S de vértices de $V \setminus \{1\}$
2. Violação da capacidade dos veículos da rota - ou restrições de máximo - comprimento, esse consistem em caminhos de vértices (i_1, i_2, \dots, i_r) onde $i_1, i_r \in \{1, n+1, \dots, n+m_u-1\}$, $i_2, \dots, i_{r-1} \in \setminus \{1\}$ e $\sum_{t=2}^{r-1} d_{i_t} > D$ ou $\sum_{t=1}^{r-1} c_{i_t, i_{t+1}} > L$

Esses podem ser eliminados particionando o subproblema atual ineficaz tomando $v(s) = 1$, como na epata 3 do PCV. Agora para particionamentos mais sofisticados com $v(s) \leq 1$ os detalhes são apresentados em (LAPORTE; MERCURE; NOBERT, 1986).

Utilizando a proposta do modelo matemático e método de resolução dos autores (LAPORTE; MERCURE; NOBERT, 1986), o O PRVC é resolvido no artigo (LAPORTE, 1992) por otimalidade com matrizes randômicas assimétricos envolvendo até 260 vértices.

O limite inferior $v(s)$

Para uma maior clareza no valor do limite inferior $v(s)$ é importante destacar e explicar os seguintes conjuntos do modelo matemático de dois índices apresentado por (LAPORTE, 1992).

Seja $\zeta = \{S : S \subseteq V', |S| \geq 2\}$. Onde $V' = V \setminus \{0\}$, onde o nó 0 representa o depósito e o conjunto V com $n + 1$ nós $V = \{0, 1, \dots, n\}$. Para um dado conjunto $S \in \zeta$ nós denotamos por \bar{S} o complementar do conjunto de nós de $V \setminus S$. Deixe $v(s)$ ser o número mínimo de veículos com capacidade Q necessária para satisfazer a demanda dos clientes em $S \in \zeta$. Também, dado $q(s)$ indica o total da demanda do subconjunto no nó $S \subseteq V'$, que é $q(s) = \sum_{i \in S} q_i$.

2.3 Problema de roteamento de veículos com múltiplos depósitos

Definição

A descrição formal do Problema de Roteamento de Veículos com Múltiplos Depósitos (PRVMD) (RENAUD; LAPORTE; BOCTOR, 1996) pode ser descrita como segue. Seja o grafo $G = (A, V)$, onde V é o conjunto de nós e E é o conjunto de arcos ou arestas conectados em cada par de nós. O conjunto V é particionado em dois subconjuntos: $V_c = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ o qual é o conjunto de clientes atendidos; e $V_d = \{v_{N+1}, v_{N+2}, \dots, v_M\}$ é o conjunto de depósitos. Cada cliente $v_i \in V_c$ tem uma demanda não negativa d_i . Cada arco pertence a o conjunto E associado ao custo, distância ou tempo de viagem c_{ij} . Um total de K veículos, cada um com capacidade P_k . O objetivo do PRVMD consiste em determinar um conjunto de rotas de veículos de tal forma que:

- cada rota comece e termine no depósito;
- cada cliente é servido exatamente por um único veículo;
- o total da demanda de cada rota não exceda a capacidade do veículo;
- o custo total de distribuição é minimizado.

Formulação

De acordo com o modelo matemático proposto por (KULKARNI; BHAVE, 1985) para PRVMD requer a definição de um variável binária de decisão x_{ijk} a equação é igual a 1 se o par de nós i e j são a rota do veículo k , e 0 caso contrário.

As variáveis auxiliares y_i são necessárias afim de criar eliminação de sub-rotas. De acordo com (MONTROYA-TORRES et al., 2015), o modelo inspirado no autor anterior é o seguinte:

(PRVMD)

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{N+M} \sum_{j=1}^{N+M} \sum_{k=1}^K c_{ij} x_{ijk} \quad (2.6)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{i=1}^{N+M} \sum_{k=1}^K x_{ijk} = 1, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.7)$$

$$\sum_{j=1}^{N+M} \sum_{k=1}^K x_{ijk} = 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^{N+M} x_{ihk} - \sum_{j=1}^{N+M} x_{hjk} = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad h = 1, \dots, N + M, \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^{N+M} Q_i \sum_{j=1}^{N+M} x_{ijk} \leq P_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^{N+M} \sum_{j=1}^{N+M} c_{ij} x_{ijk} \leq T_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=N+1}^{N+M} \sum_{j=1}^N x_{ijk} \leq 1, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.12)$$

$$\sum_{j=N+1}^{N+M} \sum_{i=1}^N x_{ijk} \leq 1, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.13)$$

$$y_i - y_j + (M + N)x_{ijk} \leq N + M - 1, \quad (2.14)$$

$$1 \leq i \neq j \leq N \quad e \quad 1 \leq k \leq K, \quad (2.15)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k. \quad (2.16)$$

Nesta formulação, as Restrições (2.7) e (2.8) garantem que cada cliente é atendido por um, e apenas um veículo. A continuidade da rota é representada pelas Restrição (2.9). O conjunto de Restrições (2.10) e (2.11) são das capacidades do veículo e restrição do custo total. Disponibilidade do veículo é verificado na Restrições (2.12) e (2.13). A eliminação de sub-rotas é fornecido pela Restrições (2.14). Nessa formulação, é assumido que a demanda total em cada nó é menor ou igual a capacidade do veiculo. Similar com o PRV com um depósito, a eliminação de sub rotas (2.14) pode ser reescrita de forma mais compacta assim

$$y_i - y_j + (M + N) \sum_{k=1}^V x_{ijk} \leq N + M - 1, \quad \text{para } 1 \leq i \neq j \leq M + N - 1. \quad (2.17)$$

2.4 Problema de roteamento de veículos capacitado

O problema de roteamento de veículos (PRV) é um dos mais estudados em problemas de otimização combinatorial e se concentra em projetar rotas ótimas para a frota de veículos que servem um conjunto de clientes. Existem centenas de artigos com soluções aproximadas e exatas da versão básica do PRV, conhecido como Problema de

Roteamento de Veículos Capacitado (PRVC), com uma frota homogênea de veículos está disponível e só considera a restrição a capacidade do veículo. (LAPORTE; NOBERT, 1987) realiza um pesquisa sobre os métodos exatos cobrindo o PRVC.

O livro dos autores (TOTH; VIGO, 2002) explana uma visão abrangente dos métodos exatos e heurísticos do PRVC e propõem outras variantes. Modelo apresentado é com base no trabalho de (BALDACCI; TOTH; VIGO, 2007), que fornece uma revisão do desenvolvimento dos métodos exatos de solução do PRVC em uma série de grafos não direcionados com um grande impacto nos algoritmos exatos para essa família de problemas. Além disso apresentam diferentes formulações matemáticas usados na literatura e realiza uma discussão entre os modelos, combinações e propriedades explorando os maiores sucessos.

Definição

No PRVC todos os clientes corresponde a entregas e as demandas são determinísticas, conhecida com antecedência e não pode ser dividida em rotas distintas. Os veículos são idênticos, todos localizados em um único depósito, e restrições de capacidade para os veículos. O objetivo é minimizar o custo total das rotas (comprimento ou tempo de viagem) necessário para atender todos os clientes, conforme apresentado na Tabela 8 de forma resumida sobre as variáveis, conjuntos e parâmetros.

Notação	Definição
G	Grafo $G = (V, A)$ completo e não direcionado
V	Conjunto $V = \{0, \dots, n\}$ de vértices
V_c	Conjunto $V_c = \{1, \dots, n\}$ dos clientes \setminus depósitos
M	Veículos idênticos com capacidade Q
d_{ij}	Custo de viagem em cada arco $\{i, j\}$ de i para j
q_i	Demanda não negativa associada a cada cliente
Q	Capacidade dos veículos

Tabela 8 – Conjunto de notações para o PRVC

O PRVC consiste em encontrar a coleção exatas de M veículos em um ciclo simples(cada veículo corresponde a uma rota) um custo mínimo definido como a soma dos custos no arcos pertencentes ao ciclo, tais que

- cada ciclo visita o vértice do depósito;
- cada vértice de cliente é visitado exatamente em um clique;
- a soma das demandas nos vértices visitados por cada ciclo não pode exceder a capacidade do veículo Q .

O PRVC é uma generalização do bem conhecido Problema do Caixeiro Viajante (PCV) que exige a determinação do custo mínimo em um ciclo simples visitando os vértices de G (Ciclo Hamiltoniano) e assumindo que $Q \geq \sum_{i \in V_c} q_i$ e $M = 1$.

Formulação

É descrito a formulação matemática do PRVC com base na nas abordagens das soluções exatas. A formulação de (BALDACCI; TOTH; VIGO, 2007) examina três modelos com dois e três índices no fluxo do veículo, fluxo da mercadoria e conjunto de partições.

Neste trabalho a formulação do fluxo de duas mercadorias proposto por (BALDACCI; HADJICONSTANTINOU; MINGOZZI, 2004). Além da notação já introduzida, para o subconjunto $S \subseteq V_c$, dado $\bar{V} = V \setminus S$ seja o complementar de S e dado $\delta(S)$ seja o custo definido por S (i.e., $\{\delta(s) = \{i, j\} \in E : i \in S, j \notin S, \text{ou}, i \notin S, j \in S\}$).

Para modelar a rota de cliente único, a formulação requer a extensão do grafo $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ obtido de G por adicionar o vértice $n + 1$ como uma cópia do depósito vértice 0. Portanto $\bar{V} = V \cup \{n + 1\}$, $V_c = \bar{V} \setminus \{0, n + 1\}$, $\bar{E} = E \cup \{i, n + 1\}$, $i \in V_c$ e $d_{in+1} = d_{0i}$, $\forall i \in V_c$.

Está formulação usa duas variáveis de fluxo y_{ij} e y_{ji} , para representar o arco $\{i, j\} \in \bar{E}$ de uma solução do PRVC ao longo do qual o veículo carrega uma carga cominada de Q unidades. Se o veículo viaja de i para j então o fluxo y_{ij} representa a carga do veículo e o fluxo y_{ji} representa o espaço vazio no veículo (i.e. $y_{ji} = Q - y_{ij}$). As variáveis de fluxo y_{ij} , $i, j \in \bar{V}$, $i \neq j$ definem dois caminhos de fluxo para qualquer rota de solução viável: um caminho do vértice 0 até o vértice $n + 1$ é dado pelas variáveis de fluxo representando a carga do veículo, enquanto o segundo caminho do vértice $n + 1$ para o vértice 0 define a variável de fluxo representando o espaço vazio no veículo.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i, j \in V, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja x_{ij} a variável binária é igual a 1 se o arco $\{i, j\} \in \bar{V}$ é solução, 0 caso contrário. A formulação de *fluxo de duas commodities* para o PRVC é dado a seguir

(PRVC)

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{\{i,j\} \in \bar{E}} d_{ij} x_{ij} \quad (2.18)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{j \in \bar{V}} (y_{ij} - y_{ji}) = 2q_i, \quad i \in V_c, \quad (2.19)$$

$$\sum_{j \in V_c} y_{0j} = qV_c, \quad (2.20)$$

$$\sum_{j \in V_c} y_{j0} = MQ - qV_c, \quad (2.21)$$

$$\sum_{j \in V_c} y_{n+1j} = MQ, \quad (2.22)$$

$$\sum_{\{i,j\} \in \delta(\{h\})} x_{ij} = 2, \quad h \in V_c, \quad (2.23)$$

$$y_{ij} + y_{ji} = Qx_{ij}, \quad \{i, j\} \in \bar{E}, \quad (2.24)$$

$$y_{ij} \geq 0, y_{ji} \geq 0, \quad \{i, j\} \in \bar{E}, \quad (2.25)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \{i, j\} \in \bar{E}. \quad (2.26)$$

As Restrições (2.18)-(2.22) e as Restrições de não negatividade (2.24) definem o modelo de fluxo viável dos vértices 0 e $n + 1$ para os vértices $V_c \cup \{0\}$. O fluxo de saída no vértice origem 0 (2.20) é igual ao total das demandas dos clientes, enquanto o fluxo de entrada na origem $n + 1$ (2.22) corresponde a capacidade total da frota de veículos. As Restrições (2.19) afirmam que o fluxo de entrada menos o fluxo de saída em cada cliente i é igual a $2q_i$, enquanto o fluxo de entrada no vértice 0 (2.21) corresponde a capacidade residual da frota de veículos. As Restrições (2.24) definem os arcos da solução viável e as restrições (2.23) força qualquer solução viável para conter duas arestas incidente em cada cliente.

Note que a formulação de duas commodities pode ser reescrita em termos das duas variáveis y_{ij} somente, uma vez que as variáveis x_{ij} podem ser substituídas y_{ij} usando a Equação (2.24). Nesse caso, as Restrições (2.26) devem ser substituídas por $y_{ij} + y_{ji} \in \{0, Q\} \forall \{i, j\} \in \bar{E}$.

Exemplo 2 *Seja um rota com três clientes cujas as demandas são conhecidas previamente, com valores iguais a: $q_4 = 6$, $q_2 = 5$ e $q_7 = 4$. E a capacidade do veículo é igual a $Q = 20$. Além disso temos dois caminhos C^α e C^β representados pelas variáveis de fluxo y_{ij} representadas na rota.*

A Figura 8 representa a solução do exemplo. O primeiro caminho C^α é dado pela variável que representa carga do veículo : $(y_{04}, y_{42}, y_{27}, y_{7n+1})$. Por exemplo, o fluxo $y_{04} = 15$ indica que o veículo sai do depósito com uma carga igual ao total da demanda dos três clientes. O segundo caminho C^β é dado pela variável que representa o espaço

vazio no veículo : $(y_{n+17}, y_{72}, y_{24}, y_{40})$. Note também que $y_{n+17} = 20$ indica que o veículo chega vazio no depósito. É importante notar também que todo arco $\{i, j\}$ da rota nós temos que $y_{ij} + y_{ji} = Q$.

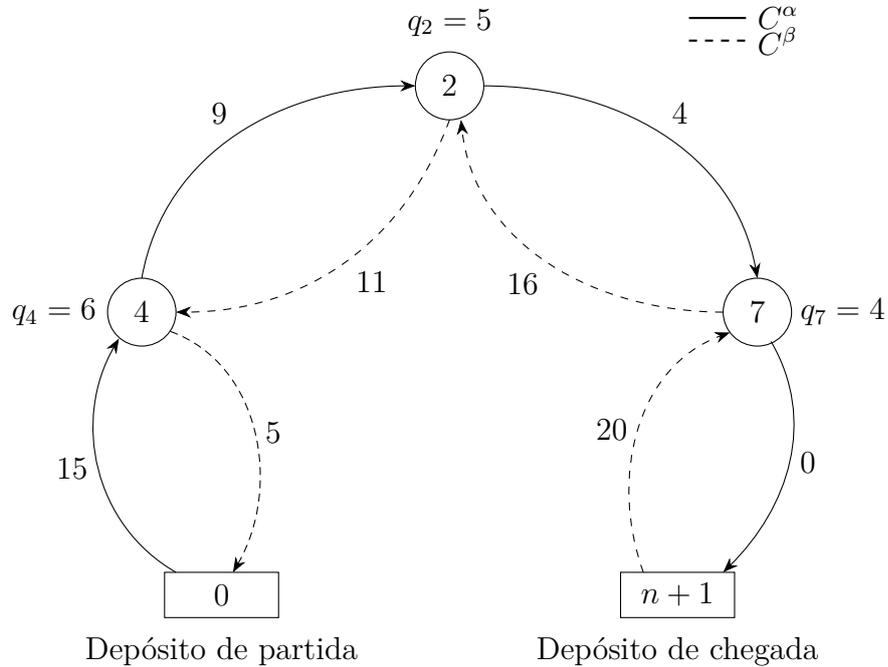


Figura 8 – Ilustração da formulação através de fluxo em rede

2.5 Variações do modelo capacitado

Algumas restrições adicionais impostas às soluções do PRVC para se aproximar mais do modelo real, dão origem a outras variações mais complexas do problema. Dentre as principais, destacam-se:

1. **Problema de roteamento de veículos com prioridade de entrega:** o conjunto de clientes é dividido em dois subconjuntos: *linehaul customers* e *backhaul customers*. O primeiro recebe mercadoria do depósito, enquanto o segundo envia mercadoria ao depósito. A restrição se refere a capacidade do veículo realizar a tarefa primeiro ao entregar a mercadoria ao cliente *linehaul*. E logo em seguida o cliente que envia mercadoria ao depósito *backhaul*, respeitando a restrição de capacidade C de cada veículo k .
2. **Problema de roteamento de veículos com coleta e entrega:** semelhante ao PRVPE, mas nesse casos é permitido ao cliente i enviar e receber bens do veículo. Onde d_i e p_i representam demanda homogênea de mercadorias distribuídas e coletadas. Subdividido em dois grupos O_i origem da demanda e D_i destino da demanda. Uma

das restrições que a entrega deve ser feita antes da coleta respeitando a capacidade C do veículo que percorre uma rota. Se $O_i = D_i = 0$ e $p_i = 0$ caímos no PRVC.

3. **Problema de roteamento de veículos com múltiplos depósitos:** esse problema caracteriza pelo fato de possuir vários depósitos. Poucos trabalhos na literatura e ele é resolvido dividindo os clientes em vários subconjuntos e consideram para resolver como um PRVC.
4. **Problema de roteamento de veículos com múltiplos veículos:** Muito utilizado com frotas pequenas, ou quando o período de entrega é inferior a um dia, como por exemplo alimentos perecíveis, supermercados, é uma extensão do PRV, pois contém as mesmas restrições e cujo objetivo é determinar um conjunto de rotas, de tal forma que o somatório fornece o menor custo total.
5. **Problema de roteamento de veículo com frota heterogênea:** é semelhante ao PRVC, exceto, pelo fato de a cada veículo pode-se associar um custo e uma capacidade única. Existem duas variantes desse problema. Uma delas, o número de veículos de cada tipo já é conhecida antecipadamente, e o problema consiste em determinar a rota de cada veículo. A outra, trata de determinar o número de veículos, pois não se conhece previamente, além da própria rota de cada veículo. O último problema é denominado na literatura como Problema de Roteamento e de Dimensionamento de uma Frota Heterogênea de Veículos (em inglês, *leet Size and Mix Vehicle Routing Problem*).
6. **Problema de roteamento de veículos com entrega fracionada:** os clientes são atendidos por mais de um veículo, importante diferença do Problema de Roteamento de Veículos Clássico (PRVC). Diferença que muda a restrição de capacidade, permitindo uma relaxação na restrição do PRVC, em que o cliente pode ser visitado apenas por um único veículo. No PRV com Entrega Fracionada os clientes podem ser atendidos por mais e um veículo. Adiciona-se uma restrição a respeito da capacidade de um veículo, que não pode exceder a soma de todas as frações da demanda dos clientes visitados.

2.6 Problema de roteamento de veículos com prioridade de entrega

O conhecido problema de roteamento de veículos com *Backhaul* é apresentado por (ALVES, 2015) como PRV Coleta e Entrega que se inspirou em (VIEIRA, 2008) que renomeia o problema *Backhaul*. O autor apresenta características e trabalho com problema de roteamento de ônibus escolar na cidade de Coxim-MS.

Uma extensão do PRVC é o Problema de Roteamento de Veículos com Prioridade de Entrega (PRVCE). Consiste basicamente em uma variação do PRV Capacitado

no qual o foco são os clientes divididos em dois conjuntos. O Primeiro conjunto se refere aos clientes que devem receber as mercadorias do depósito, denominado em inglês *linehaul customers*. Em contrapartida o segundo conjunto, é formado pelos clientes que devem enviar mercadorias ao depósito, denominado em inglês *backhaul costumers*. A restrição natural que aparece, se refere aos clientes que recebem mercadorias do depósito, devem ser atendidos antes. E os clientes que desejam enviar mercadorias ao depósito através dos veículos devem ser atendido depois. Pode-se ainda associar uma variável demanda d_i não negativa, que pode ser de entrega ou de coleta.

Definição

Para modelar o problema, podemos considerar os dois conjuntos de clientes *linehaul customers* e *backhaul costumers*, respectivamente $L = \{1, 2, \dots, n\}$ e $B = \{n + 1, n + 2, \dots, n + m\}$. Além disso é associada um demanda não negativa d_i para ser coletada ou entregue. A matriz do custo do PRVB é assimétrica, com objetivo de encontrar o número exato de rotas K determinando o menor custo de transporte e atendendo as seguintes restrições:

- Cada rota deve iniciar e terminar no depósito;
- Para cada rota a demanda total dos clientes *linehaul* e *backhaul*, não pode exceder separadamente, a capacidade C do veículo;
- Em uma rota os clientes *backhaul*, são visitados prioritariamente depois dos clientes *linehaul*.

O modelo proposto por (TOTH; VIGO, 2002) é resultado de uma modificação no problema, considerando o problema assimétrico, ou seja, também é válido para o PRVBA. Parte-se do pressuposto que apenas rotas para um único cliente *linehaul* é válida.

Seja $L_0 := L \cup \{0\}$ e $B_0 := B \cup \{0\}$. Além disso, temos o seguinte grafo direcionado $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{A})$, onde $\bar{V} = V$ e $\bar{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

\bar{A} : contém restrição de procedência, em que todos os *linehaul* devem ser atendidos antes dos *backhaul* $\bar{A} \subset A$.

Note que todos os arcos de \bar{A} são factíveis. Pois, caso contrário, teríamos arcos partindo do clientes *backhaul* até os clientes *linehaul*, e também, arcos que partam do depósito até os clientes *backhaul*, devido ao motivo de restrição de procedência. Definindo a variável binária.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \in \text{a solução ótima} \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

Notação	Definição
A_1	$A_1 := (i, j) \in A; i \in L_0, j \in L$
A_2	$A_2 := (i, j) \in A; i \in B, j \in B_0$
A_3	$A_3 := (i, j) \in A; i \in B, j \in B_0$
A_1	Todos os arcos que ligam o depósito até os clientes <i>linehaul</i> e todos os vértices aos clientes <i>linehaul</i>
A_2	Todos os arcos que ligam o depósito até os clientes <i>backhaul</i> e todos os clientes <i>backhaul</i> com o depósito
A_3	Representa todos os arcos que ligam o os clientes <i>linehaul</i> com os clientes <i>backhaul</i> ou o depósito

Tabela 9 – Conjunto de notações prioridade de entrega

Formulação

Seja \mathcal{L} (respectivamente \mathcal{B}) a família de todos os subconjuntos que contém os vértices de L (respectivamente B) e $\mathcal{F} = \mathcal{L} \cup \mathcal{B}$. Para cada $S \in \mathcal{F}$ seja $v(s)$ o número mínimo para atender todos os S . Para cada $i \in V$ temos $\Delta_i^+ = \{j : (i, j) \in \bar{A}\}$ e $\Delta_j^+ = \{i : (i, j) \in \bar{A}\}$, com isso a formulação de programação linear inteira é dado abaixo.

(PRVPE)

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{(i,j) \in \bar{A}} c_{ij} x_{ij} \quad (2.27)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{i \in \Delta_j^-} x_{ij} = 1, \quad j \in \bar{V} \setminus \{0\}, \quad (2.28)$$

$$\sum_{i \in \Delta_j^+} x_{ij} = 1, \quad i \in \bar{V} \setminus \{0\}, \quad (2.29)$$

$$\sum_{i \in \Delta_0^-} x_{i0} = K, \quad (2.30)$$

$$\sum_{j \in \Delta_0^+} x_{0j} = K, \quad (2.31)$$

$$\sum_{j \in S} \sum_{i \in \Delta_j^- \setminus S} x_{ij} \geq r(s), \quad S \in \mathcal{L}, \quad (2.32)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in \Delta_i^+ \setminus S} x_{ij} \geq r(s), \quad S \in \mathcal{L}, \quad (2.33)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in \bar{A}. \quad (2.34)$$

As Restrições (2.28)-(2.31) impõe respectivamente as restrições de entrada e saída aos clientes e aos depósitos. Denominada restrição de corte de capacidade (RCC) de (2.32) e (2.33) determina a continuidade entre as rotas e que a capacidade não seja violada. Veja que as Restrições (2.28) -(2.31) implicam necessariamente que lado esquerdo das equações (2.32) e (2.33) para qualquer conjunto S , devem ser iguais, ou seja o número de arcos que entram no conjunto S é igual ao número de arcos que saem do conjunto S .

É importante destacar que a família de restrições (2.32) e (2.33) possuiu uma cardinalidade que cresce de forma exponencial com o valor de $\max\{m, n\}$.

2.7 Problema de roteamento de veículos com coleta e entrega

Trata-se de um problema conhecido como *Pickup-and-Delivery*, uma importante variação na família dos PRV, com bens ou passageiros tendo sido transportados de diferentes origens para diferentes destinos. Usualmente, os problemas são definidos em um grafo com os vértices representando a origem ou destino de diferentes commodities sendo transportadas. Os PRVCE podem ser classificados de acordo com o tipo da demanda e estrutura inicial da rota considerada.

- *Many-to-Many (M-M)*: problemas muitos-para-muitos, cada commodities pode ter múltiplas origens e destinos e uma localização para origem e outra para o destino.
- *One-to-many-to-one (1-M-1)*: problemas um-muitos-um, são caracterizados pela presença de uma commodities ser enviada de um depósito para muitos clientes e outra commodities ser coletada de muitos clientes para um depósito.
- *one-to-one (1-1)*: problemas um-para-um, cada commodities possuem apenas uma origem e apenas um destino com transporte.

Evidencia que os problemas muitos-para-muitos podem surgir na reposição de inventário de lojas de varejo ou gerenciamento de bicicletas ou carros em sistema compartilhado. Já um-para-muitos- muitos-para-um, podem ser aplicados em distribuição de bebidas e na coleta de garrafas e latas vazias. Agora um-para-um, aplicações aparecem no serviço de correios por exemplo e cargas fracionadas.

Definição

O PRV com Coleta e Entrega (PRVCE) é semelhante ao PRV, mas possuiu Prioridade de Entrega. A citar, quando o cliente i é permitido receber e enviar mercadorias ao depósito ou a outro cliente. A diferença essencial é que os itens entregues por um determinado cliente, podem ser recebidos por outro cliente que se encontra na mesma rota antes do veículo chegar ao depósito. Podemos representar a quantidade de mercadorias recolhidas por m_i e por sua vez a quantidade de mercadorias recebidas por p_i . Para cada cliente i podemos associar os valores O_i como a origem da demanda e D_i o destino da demanda. O primeiro indica o cliente do qual o cliente i recebe sua mercadoria. Já o segundo valor indica o destino do produtor a ser entregue pelo cliente i . A restrição consiste no fato, de que o cliente O_i deve ser atendido antes do cliente i que por sua vez é antecessor

do cliente D_i . É natural que o cliente i seja atendido antes do cliente O_i , e logo após o cliente D_i .

- Cada rota tem seu início e fim no depósito;
- Cada cliente que pertence a uma rota é visitado uma única vez;
- A capacidade C do veículo em cada trecho da rota não pode exceder os itens entregues e coletados;
- O vértice O_i deve ser visitado antes do cliente i . Para que o veículo entregue a mercadoria no vértice O_i , diferente do depósito, e leve ao vértice i ;
- O vértice D_i deve ser visitado, após o cliente i . Para que o veículo colete a mercadoria no cliente i e leve ao vértice D_i , diferente do depósito.

Formulação

Destina-se a formulação baseada no modelo proposto por (MONTANÉ; GALVÃO, 2002), no cada cliente tem uma demanda para entrega e coleta de mercadorias. Os parâmetros são apresentados na Tabela 10.

Notação	Definição
V	conjunto dos vértices representando clientes a serem atendidos
V_0	Conjunto anterior acrescentando o depósito ou seja $V_0 = V \cup V_0$
V_p	Conjunto de clientes para coleta
V_d	Conjunto de clientes para entrega
N	Número total de clientes : $N = V $
N_p	Número de clientes nos conjuntos de coleta $N_p = V_p $;
N_d	Número de clientes nos conjuntos de entrega $N_d = V_d $;
$c_{i,j}$	custo do transporte entre os clientes i e j ;
p_i	demanda de coleta do cliente i , $i = 1, \dots, N$;
d_i	demanda de entrega do cliente i , $i = 1, \dots, N$;
Q	capacidade dos veículos;
NV	número máximo de veículos

Tabela 10 – Conjunto de notações para o problema de coleta e entrega

Temos as seguintes variáveis de decisão.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \text{ pertence ao conjunto de soluções} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- y_{ik} : demanda a ser coletada dos clientes até o vértice i e transportado no arco (i, j) .
- z_{ij} : demanda a ser entregue aos clientes da rota e ser transportado no arco (i, j) .

(PRVCE)

$$\text{Minimizar } \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N c_{ij} x_{ij} \quad (2.35)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{i=0}^N x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.36)$$

$$\sum_{j=0}^N x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.37)$$

$$\sum_{i=0}^N x_{ij} \leq NV, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.38)$$

$$\sum_{i=0}^N y_{ji} - \sum_{i=0}^N y_{ij} = p_i, \quad j \neq 0, \quad (2.39)$$

$$\sum_{i=0}^N z_{ij} - \sum_{i=0}^N y_{ij} = d_j, \quad j \neq 0, \quad (2.40)$$

$$y_{ij} + z_{ij} \leq Qx_{ij}, \quad i, j = 0, \dots, N, \quad (2.41)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 0, \dots, N, \quad (2.42)$$

$$y_{ij} \geq 0, z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 0, \dots, N. \quad (2.43)$$

As Restrições (2.36) e (2.37) garantem que cada um dos clientes, que pertencem aos vértices $(V \setminus \{0\})$ sejam visitados um única vez por apenas um único veículo. As Restrições (2.38) limitam o número de veículos. As restrições (2.39) e (2.40) representam as demandas de coleta e entrega dos clientes, para que as elas sejam satisfeitas. As demandas de coleta e entrega estão apenas nos arcos inclusos na solução (2.41), e além disso garante que a capacidade do veículo não seja violada no arco (i, j) . As Restrições (2.42) e (2.43) representam as variáveis de decisão.

2.8 Problema de roteamento de veículos com frota heterogênea

O PRV com Frota Heterogênea (PRVFH) se distancia do PRVC, devido os veículos possuírem diferentes custos e capacidades. A primeira proposta é atribuída a (GOLDEN et al., 1984). O problema, também é conhecido como Problema de Roteamento de Veículos com Frota Mista. Existem algumas variações dentro do PRVFH que analisam restrições de capacidade e outros janela de tempo. Mas, como o foco desse trabalho é apenas os casos gerais separados e não um misto das variações a abordagem será apenas o PRVFH.

Definição

O PRVFH utiliza também um grafo direcionado $G = (V, A)$ onde $V = \{V_i \cup V_0\}$ em que V_0 representa o depósito e $V_i = \{1, 2, \dots, n\}$ representa todos os clientes. Para

cada cliente $i \in V_i$ que se encontra em um dos vértices (nó) do grafo é associado uma demanda q_i , específica de bens que devem ser transportado do depósito V_0 até os clientes V_i , é natural assumirmos que a demanda do depósito é $q_0 = 0$. Esse tipo de problema trata de uma frota de $|P|$ tipos diferentes de veículos, isto é, a frota de K veículos possuem um subconjunto de veículos homogêneos $K = K^1 \cup K^2 \cup \dots \cup K^{|P|}$. Cada tipo de veículo com $p = \{1, \dots, P\}$, tem capacidade C^p , e cada veículo possui além disso um custo fixo FC^p e um custo específico de viagem c_{ij}^p em cada arco $(i, j) \in A$ da modelagem do grafo na rede.

Além disso, dependendo do tipo de frota disponível e do custo considerado, outras variantes podem ser alteradas na literatura. Em particular, as características abaixo podem ser alteradas como:

- O número de veículos da frota pode ser *limitado*, isto é apenas $|K^p|$ veículos do tipo p podem ser usados, ou *ilimitado*, isto é, $|K^p| \geq n$, para todo $p = \{1, \dots, |P|\}$;
- Os *custos fixos* FC^p podem ser considerados ou ignorados, isto é, $FC^p = 0$ para todo $p = 1, \dots, |P|$;
- Os custos das rotas no arcos podem ser *dependente-veículo*, i.e., diferentes possibilidades para cada tipo diferente de veículo, ou *veículo dependente*, i.e., $c_{ij}^{p_1} = c_{ij}^{p_2} = c_{ij}$ para todo $p_1 \neq p_2$ e para todo $(i, j) \in A$.

Formulação

Destaca-se como formulação matemática proposta por (BALDACCI; BATTARRA; VIGO, 2008) para o PRVFH.

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo } k \text{ utiliza o arco } (i, j) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A quantidade de bens no veículo é representado pela variável não negativa y_{ij} que se direciona do cliente i para o cliente j . Temos então a formulação do PRVFH.

(PRVFH)

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in p} FC^p \sum_{j \in V_i} x_{0jk} + \sum_{k \in p} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ijk} \quad (2.44)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{k \in p} \sum_{i \in V} x_{ijk} = 1, \quad j \in V_i, \quad (2.45)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i\rho k} - \sum_{j \in V} x_{\rho j k} = 0, \quad \rho \in V_i, \quad k \in p, \quad (2.46)$$

$$\sum_{j \in V_i} x_{0jk} \leq P_k, \quad k \in p, \quad (2.47)$$

$$\sum_{i \in V} y_{ij} - \sum_{i \in V} y_{ji} = q_j, \quad j \in V_i, \quad (2.48)$$

$$q_j x_{ijk} \leq y_{ij} \leq (C^p - q_i) x_{ijk}, \quad i, j \in V, \quad i \neq j, \quad k \in p, \quad (2.49)$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad i, j \in V, \quad i \neq j, \quad (2.50)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in V, \quad i \neq j, \quad k \in p. \quad (2.51)$$

As Restrições (2.45) e (2.45) estabelecem que cada cliente é visitado uma única vez e o veículo deve sair desse cliente. A restrição (2.47) impõem uma restrição sobre o número máximo de cada tipo de veículo, por outro lado a restrição (2.48) é a equação da demanda do próprio cliente. A restrição (2.49) trata sobre a capacidade do tipo de veículo que nunca pode ser superada pela demanda da rota. E as restrições (2.50) e (2.51) trata das não negatividade das variáveis inteiras e binárias.

2.9 Problema de roteamento de veículos com múltiplo uso de veículos

Definição

O PRV com uso de Múltiplos Veículos continua sendo uma extensão do PRV Capacitado. Nele, e cada veículo pode executar várias rotas e ter as mesmas restrições. Geralmente, é usado quando se tem frota pequena, ou quando o tempo de percurso dos veículos nas rotas são inferiores a um dia. Temos como exemplo: a entrega de alimentos perecíveis e as entregas de supermercados. O objetivo consiste em determinar, de forma semelhante ao PRVC, o número de rotas que somadas minimizem o custo total do transporte.

- Cada rota deve começar e terminar no depósito;
- Cada cliente deve pertencer a apenas uma única rota;
- O total das demandas dos clientes de uma rota não deve exceder a capacidade C do veículo;

- A jornada diária de trabalho T de um veículo alocado em uma rota, não pode ultrapassar o limite estabelecido.

Formulação

A estrutura matemática do PRVMUV se fundamenta no PRVC, com algumas especificidades. Considere $V = \{0\} \cup V_i$, onde $\{0\}$ é o vértice que contém o depósito e V_i é o vértice de todos os clientes. Em cada arco (i, j) deve-se atribuir um custo para o transporte, assim como é feito com o PRVC. Além disso, é necessário acrescentar um tempo de viagem $t_{i,j}$, ao longo do caminho, partindo do vértice i para o vértice j , tal que

$$t_{ij} + t_{jk} \geq t_{ik}.$$

Já um jornada de trabalho T representa o tempo que um veículo está disponível para atender os clientes no percurso das rotas. A formulação é baseada na proposta de (KARAOĞLAN, 2015) com as seguintes variáveis de decisão.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco } (i, j) \text{ pertencer a qualquer rota} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo termina o percurso anterior no vertice } j \\ & \text{e começa o próximo percurso no vértice } i \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(PRVMUV)

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{i,j} x_{i,j} \quad (2.52)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{i \in V} x_{i,j} = 1, \quad i \in V_i, \quad (2.53)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = \sum_{j \in V} x_{ji}, \quad i \in V, \quad (2.54)$$

$$\sigma_j - \sigma_i + Cx_{ij} + (C - d_i - d_j)x_{ij} \leq C - d_i, \quad i, j \in V_i, \quad i \neq j, \quad (2.55)$$

$$\sigma_i \geq d_i + \sum_{j \in V_i} d_j x_{ij}, \quad i \in V_i, \quad i \neq j, \quad (2.56)$$

$$\sigma \leq C - (C - d_i)x_{i0}, \quad i \in V_i, \quad (2.57)$$

$$\xi_i - \xi_j + Tx_{ij} \leq T - \xi_{ij}, \quad i, j \in V_i, \quad i \neq j, \quad (2.58)$$

$$\xi_i - \xi_j + (T - t_{i0} - t_{oj})\vartheta_{ij} \leq T, \quad \forall i, j \in V_c, \quad i \neq j, \quad (2.59)$$

$$t_{0j} \leq \sigma_j \leq T - t_{j0} \quad j \in V_i, \quad (2.60)$$

$$\sum_{j \in V_i} \vartheta_{ij} \leq x_{i0}, \quad i \in V_i, \quad (2.61)$$

$$\sum_{i \in V_i} \vartheta_{ij} \leq x_{0j}, \quad j \in V_i, \quad (2.62)$$

$$\sum_{j \in V_i} x_{0j} - \sum_{i \in V_i} \sum_{j \in V_i} \vartheta_{ij} \leq |k|, \quad (2.63)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in V, \quad (2.64)$$

$$\vartheta_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in V_i, \quad (2.65)$$

$$\xi_i, \sigma_i \geq 0, \quad i \in V_i. \quad (2.66)$$

As Restrições (2.53) estabelecem que cada cliente deve ser visitado uma única vez. As restrições (2.54) garantem cada arco $(i, j) \in A$ pertence a apenas uma rota. As Restrições (2.55) e (2.57) representam a restrição de limitação da capacidade dos veículos. As Restrições (2.58) estabelece o início do tempo de serviço de clientes pertencentes em um mesma rota. As restrições (2.59) estabelece o início do tempo de serviço aos clientes associados a próxima rota. O limite de janela de tempo de cada cliente é estabelecido pelas Restrições (2.60). As restrições (2.61)-(2.62) testam as combinações entre as duas rotas, para isso utilizam o último e primeiro cliente das rotas. A restrição (2.63) garante que o número total de veículos disponíveis não seja ultrapassado. E as restrições (2.64)-(2.66) definem o conjunto das variáveis de decisão.

2.10 Modelos com dois índices

Os principais modelos matemáticos que serviram de inspiração para modelar o problema real são constituídos de dois índices. Dado completamente diferente de grande parte da literatura encontrada, conforme explicita o Capítulo 2 (principais variações do

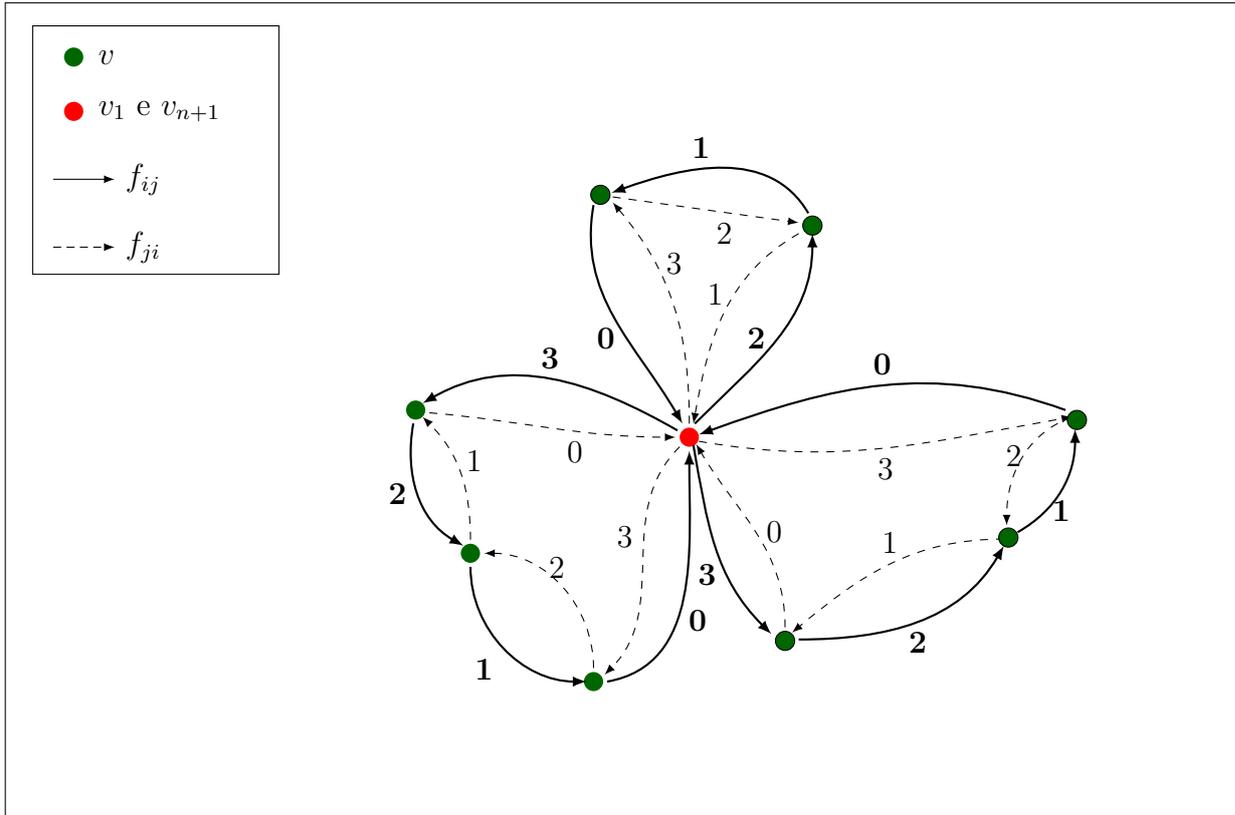


Figura 9 – PRV descrito através do fluxo de dois índices. Fonte: (OTA, 2018)

PRV). Já no Capítulo 4 apresenta o modelo com dois índices, além do PRV descrito em modelos de fluxos, essenciais para a modelagem desse trabalho.

As vantagens são grandes, pois evitam a restrição de eliminação de sub-rotas, gerando um número de restrições muito elevado. Contudo, a desvantagem e a dificuldade se encontra em associar a qual rota pertence determinado veículo, já que o terceiro índice não existe no modelo. Esse problema é resolvido analisando o conjunto das soluções e identificando o fluxo em cada rota. Na Figura 9 consideramos que cada vértice $v_n = 1$ possui uma demanda unitária. Na solução do problema são apresentados três rotas.

Entretanto, como o modelo com fluxo de dois índices não é possível associar a qual rota/vértice pertence cada solução, sendo necessário analisar o comportamento do fluxo que passa pelo vértice. Embora o modelo apresente essa desvantagem, ele ganha muito em eficiência computacional para resolver o problema, já que não usa as restrições de eliminação de sub- rotas tradicionais.

Desse modo é possível compreender como um fluxo contínuo de um veículo interceptar o depósito três vezes, após a partida do depósito e retorno ao depósito artificial v_{n+1} . Isso é possível devido as duas variáveis de fluxo f_{ij} e f_{ji} corresidentes a carga a ser embarcada e o espaço vazio do veículo. Além do mais, após cada vértice visitado a variável sofre alteração até retornar ao depósito artificial.

3 Métodos de Resolução

Este capítulo apresenta uma visão geral dos métodos usados para a resolução do problema de roteamento de veículos capacitado (PRVC). Tem como base os autores (TOTH; VIGO, 2014) que realizam uma pesquisa ampla em torno dos métodos de resolução exatos, heurísticos e meta-heurísticos para as variações do PRVC, que é uma extensão natural do PCV. Com isso várias soluções propostas e bem sucedidas para o PRVC são derivadas do PCV, contudo o PRVC está longe de ser resolvido satisfatoriamente com alguns métodos.

Em um primeiro momento, a pesquisa realizada pelos autores abrange as principais famílias dos métodos diretos de busca em árvore ligadas ao *Branch-and-Bound* com geração de colunas e *branch-and-cut*. Após o primeiro trabalho de (LAPORTE; NOBERT, 1987) vários artigos surgiram para análise dos algoritmos exatos devido o bom número de trabalhos ricos e a variedade nos primeiros anos de história do PRV. Outros artigos de revisão foram concentrados na revisão como (LAPORTE, 2009) e livros (TOTH; VIGO, 2002) e (GOLDEN; RAGHAVAN; WASIL, 2008).

3.1 Métodos Exatos

Serão apresentados três métodos exatos para resolução do PRVC. Iniciando com *Branch-and-Bound* (B&B), seguido por método de geração de colunas e por fim *Branch-and-Cut* (B&C). Vale ressaltar que os algoritmos mais recentes presentes nos artigos apresentam o método *Branch-and-Cut-and-Price* (B&C&P).

Branch-and-Bound

As abordagens mais eficazes para o PRVC são algoritmos diretos de busca em árvores baseados em (B&B). Semelhante ao proposto para o PCV, que incorporam relaxamento combinatorial básico baseado em Problema de Alocação - inglês: *Assignment Problem* (AP) e Árvore Geradora Mínima - inglês: *Shortest Spanning Tree* (SST). Essas abordagens foram essenciais para resolver instâncias com algumas dezenas de clientes (LITTLE et al., 1963) mesmo com hardware limitado naquele momento. Os autores dividiram todo os conjuntos de rotas em dois subconjuntos menores através do processo de ramificação, e para cada subconjunto um limite no conjunto inferior nas distância das rotas é determinado. Motivados por problemas de atribuição. No final dos anos noventa, antes da introdução dos planos de corte foram propostos limites mais sofisticados baseados em relaxação Lagrangiana na abordagem aditivada, trazendo métodos diretos de pesquisa

em árvores.

Limites baseados em Alocação Contribuição

Trata-se de uma extensão do método proposto por (LITTLE et al., 1963) para resolver o PCV. Essa proposta foi o primeiro tipo de relação combinatorial para PRVC, resultando em um problema de transporte (PT) chamando para coleção de custos mínimos de G , visitado uma vez todos os vértices de N , e $|K|$ vezes o vértice 0. O PRVC pode relaxado pode apresentar infactibilidade se:

- o custo total da demanda na rota exceder a capacidade do veículo;
- possa existir rota isolada, isto é, sub-rotas não visitadas.

Uma extensão completa do grafo direcionado $G' = (V', A')$ é obtida adicionando $|k| - 1$ cópias do vértice depósito para V , para resolver de maneira eficiente o PT. Os primeiros algoritmos transformaram em um AP. Precisamente $V' := N \cup W$, onde $W := \{0\} \cup \{n + 1, \dots, n + |k| - 1\}$ é conjunto de $|k|$ vértices de G' associado ao depósito e a cada cliente em N está ligado a cada um dessas cópias. Além disso, o custo em cada arco em A' é definido como segue.

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{se } i, j \in N; \\ c_{i0} & \text{se } i \in N, j \in W; \\ c_{0j} & \text{se } i \in W, j \in N; \\ \lambda & \text{se } i, j \in W, \end{cases}$$

De tal forma que λ é o parâmetro que influência o número de veículos na decisão. Quando $\lambda = +\infty$ é o caso típico do PRVC, onde o modelo impõe usar toda frota de $|k|$ veículos disponíveis. Por outro lado, se $\lambda = 0$ leva a solução de um custo mínimo usando no máximo $|k|$ rotas.

A primeira vez que esse método foi usado para PRVC simétrico por (CHRISTOFIDES; EILON, 1969) inspirado no limite do B & B para resolver o PCV, foi possível resolver o problema com 6 e 13 clientes usando um IBM 7090. Além disso, o autor usou outros dois métodos: a abordagem de economia (*The savings approach*) e o método de rota 3-ótimo (*The 3-optimal tour method*).

O outro tipo de relaxação semelhante usada no modelo do PRVC em arco simétrico é problema b-correspondente - em inglês *b-Matching* - e requisita a determinação de uma coleção de custo mínimo das rotas cobrindo todos os vértices de tal forma que o grau de cada vértice i é igual a b_i , onde $b_i = 2$ para todos os vértices dos clientes, e $b_0 = 2|k|$ para o vértice do depósito.

Relação desse tipo foi usada por (MILLER, 1995) como base para um efetiva limite Lagrangiano. O autor utiliza o algoritmo (*B&B*) para PRVC e propõe limites inferiores que são derivados da relaxação da eliminação de sub-rotas e restrição de capacidade para gerar um perfeito *b-Matching*. Esses limites são fortalecidos pelos Multiplicadores de Lagrange para impor eliminação de sub-rotas e capacidade. O algoritmo resolve problemas com 51 ou menos vértices.

De acordo com (TOTH; VIGO, 2002) a performance da avaliação experimental em 9 instancias de testes, incluíram entre 44 e 199 clientes. *b-Matching* é a melhor relação desse tipo, com uma relação média de 76.7% do limite inferior a respeito da solução viável mais conhecida. Já o limite Problema de Atribuição (PA) tem a pior performance em instâncias simétricas, como uma relação 67,4%. Todavia, em instâncias assimétricas com 70 clientes mostra uma evolução para 91.3%.

Limites baseados em Abrangência em Árvores e em Caminho mais curto

As relaxações são obtidas enfraquecendo restrições de eliminação de sub-rotas generalizada (RESG) de forma a impor apenas a conectividade da solução e por ignorar parte do degrau dos requerimentos de vértice. O problema de determinar um custo mínimo aos arcos conectados com todos os vértices do arco. Esse relaxamento foi proposto a partir de várias relaxações baseadas na Árvore Geradora Mínima - em inglês *Shortest Spanning Tree* (SST).

Introduzido por (HELD; KARP, 1971) a relaxação *1-tree* para o PCV, foi utilizado pela primeira vez por (CHRISTOFIDES; EILON, 1969). A *1-árvore* é um subconjunto de $|V| = n + 1$ é um dos arcos obtidos pela adição dos n arcos, formando o SST sobre G , o arco de custo mínimo não pertence ao SST. A extensão direta de relaxação *1-tree* para PRVC simétrico (PRCS) foi executado por (FISHER, 1994), o qual fizeram a programação de uma frota de k veículos para entregar a n clientes sujeitos a restrições de capacidade. O autor propõe definir em um grafo com $n + 1$ nós, a K árvore é definida como um conjunto de $n + |k|$ arestas que abrangem o grafo. O modelo PRVCS é o problema de determinar o custo mínimo de K árvores com dois k arcos incidentes no depósito, e sujeito a algumas restrições que impõe: (i) a capacidade do veículo, e (ii) e que cada cliente seja visitado uma vez. Os autores encontraram soluções ótimas com para vários problemas difíceis entre 25-71 clientes e com 100 clientes.

Foi introduzido por (CHRISTOFIDES; MINGOZZI; TOTH, 1981) um relaxamento baseado em árvore para PRVCS, que definiram uma Árvore Central de K -graus (K-ACD) - em inglês *k-Degree Center Tree* - como um árvore k no vértice 0, onde $|k| \leq k \leq 2|k|$. A relaxação global é obtida pela adição ao k -ACD um conjunto $2|k| - k$ arestas com um custo mínimo total. O limite resultante incorporado ao (B&B) foi capaz de resolver instâncias com até 20 clientes em um CDC7600.

Cabe ressaltar uma importante relaxação para o PRVCS, baseada na chamada q -rotas - em inglês, q -rotas, que não é uma simples rota com carga total igual a q , e não é incluindo o laço com dois vértices. Descrito por (CHRISTOFIDES; MINGOZZI; TOTH, 1981) trata-se da relaxação que calcula uma q -rota com o q -caminhos do depósito até os clientes i mais o arco de i até o depósito. Um procedimento eficiente, que permite resolver instâncias com até 25 clientes. O limite geral derivado das q -rotas mostrou ser mais eficiente do que os limites usados pela k -ACD.

Limites aperfeiçoados: Lagrangiana e Aproximações Aditivas

Quando usada as aproximações dentro do (B&B), permite ótimas soluções para pequenas instâncias, diferentemente de uma relação básica combinatorial disponível para PRVC simétrico e assimétrico, pois possuiu qualidade pobre.

Para os relaxamentos básicos do PRVCS os autores (MILLER, 1995) e (FISHER, 1994) propuseram um reforço dualizando, de uma forma lagrangiana, algumas restrições relaxadas. (FISHER, 1994) como o grau da restrição Generalização das Restrições de Eliminação de sub-rotas (GRES) na forma dos chamados Corte de Restrição de Capacidade (CRC). Já (MILLER, 1995) inclui o subconjunto de (GRES) que foram removidos para obtenção da relaxação b -matching.

A maior dificuldade associada com essa relaxação é rerepresentada pela cardinalidade exponencial do conjunto das restrições relaxadas (isto é, CRC e GRES) que não permitem a inclusão explícita de todos eles na função objetivo. Para resolver esse problema, ambos os autores propuseram incluir um família limitada de CRC e GRES e adicionando iterativamente ao relaxamento Lagrangiano as restrições que são violadas pela solução atual do problema Lagrangiano.

O limite Lagrangiano global melhorou consideravelmente o relaxamento da k -árvore básica, em média, maior que 99% do valor da solução ótima para três instâncias euclidianas com $n \leq 100$ resolvido em (FISHER, 1994) por otimalidade. No caso de (MILLER, 1995) o limite Lagrangiano final é substancialmente apertado, sendo em médio 98% o valor da solução ótima com oito problemas com $n \leq 50$ vértices.

Estrutura dos Algoritmos Branch-and-Bound

A seguir será descrito importantes ferramentas e cruciais para implementação com sucesso para algoritmo *Branch-and-Bound*, também usado para o *Branch-and-Cut* e *Branch-and-Cut-and-Price*, o qual possuiu mesmo esquema de enumeração implícita.

Estrutura de Ramificação

A estrutura de ramificação são extensões utilizadas no PCV, adaptadas para o PRVCS. Os primeiros esquemas consistem em ramificações em arcos, o processo consiste em estender os caminhos parciais começando no depósito e terminando em um dado vértice. Esse contexto foi proposto primeiramente por (CHRISTOFIDES; EILON, 1969). Cada nó da árvore de decisão o *branch*, uma aresta (i, j) é selecionada para estender o caminho parcial atual, e dois nós são gerados: o primeiro nó é associado com a inclusão do arco selecionado na solução, i.e., $x_{i,j} = 1$, enquanto o segundo nó o arco é excluído, i.e., $x_{ij} = 0$.

Para selecionar o arco para ramificação (MILLER, 1995) com um processo semelhante a melhor solução lagrangiana. (FISHER, 1994) usou um esquema misto onde a ramificação em arcos é usado sempre que o caminho parcial é presente no subproblema atual. Nessa situação, o cliente i atualmente não atendido que possui a maior demanda. Ele é escolhido e o arco (i, j) é usado para ramificação, onde j é o cliente não atendido mais próximo de i . O autor usou a ramificação mista para resolver instâncias do PRVCS com distâncias reais euclidianas, mas não obteve sucesso. (FISHER, 1994) observou que instâncias onde muitos pequenos *clusters* de clientes muito próximos existem, qualquer solução em que esses clientes são atendidos constantemente na mesma rota, tem quase o mesmo custo. Para resolver isso, é proposto pelo autor esquemas alternativos de ramificação baseados em GRES.

Redução da dominância

De acordo com (TOTH; VIGO, 2014) alguns arcos que não podem pertencer a solução ótima, permitindo a detecção de infactibilidade e detecção de dominância, proibindo assim o seu uso na computação de limites e acelerando a solução do PRVCS.

Muitas dessas regras são inspiradas nos trabalhos feitos com PCV. No caso do PRVCA é removido os arcos de A , mesmo que a remoção é implementada pela definição do custo nos arcos a serem removidos, igual a um alto valor positivo $+\infty$.

A regras de redução podem ser aplicadas no grafo problema original, subproblema associado com cada nó da árvore de decisão-ramificação, no qual está relacionado aos arcos de um dado subconjunto são compulsórios a solução, assim como ocorre nos algoritmos *Branch-and-Bound* e *Branch-and-Cut*.

Vários algoritmos *Branch-and-Bound* incluem o uso de algoritmos heurísticos para explorar as informações relacionadas aos atuais problemas relaxados, a fim de encontrar soluções factíveis que possam melhorar a solução vigente.

Branch-and-Cut

Em seu livro (TOOTH; VIGO, 2014) realiza uma revisão bibliográfica dos principais trabalhos direcionados para o algoritmo *Branch-and-Cut*, realizado entre os anos de 1980 a 2005. Inspirados no trabalho de referência de (LAPORTE; NOBERT; DESROCHERS, 1985) introduziram a formulação de dois índices para formulação do PRV e descreveu o primeiro algoritmo B&C para sua solução.

Em seu artigo (LAPORTE; NOBERT; DESROCHERS, 1985) sugerem uma relaxação do modelo PRV, em que os (GRES), impõem as restrições de capacidade, as quais são removidas junto com as restrições de integralidade das variáveis. Além do mais, identificam as inequações que violam a capacidade. Além do mais, o autor utiliza a separação heurística para identificar as desigualdades de capacidade violada. Nesse contexto, é encontrada uma solução ótima do relaxamento, ou a solução viável para o PRVCS, o algoritmo termina, ou é uma solução inviável.

Em 1995, (AUGERAT, 1995) descreve as inequações válidas no modelo atual, separando em quatro família de desigualdades: (i) o arredondamento das inequações de capacidade; (ii) as restrições de capacidade generalizada; (iii) desigualdades de *comb*; (iv) desigualdades *hypotour*. Além disso, foi usada uma heurística de busca tabu para gerar um limite superior inicial, e atualizá-lo com base nas soluções fracionárias que são visitadas no curso do algoritmo.

No ano de 2003 é proposta uma nova abordagem para o algoritmo B&C. Os autores (RALPHS et al., 2003) separaram primeiramente separaram as restrições de capacidade com três heurísticas. E assim, no momento em que as heurísticas não obtiveram êxito para identificar uma desigualdade violada, foi proposta a utilização de um algoritmo de decomposição para encontrar restrições adicionais. Os atores descobriram que o esquema de ramificação mais eficiente seria ramificar as variáveis.

Em 2004, um novo algoritmo *Branch-and-Cut* para o PRVC foi introduzido por (LYSGAARD; LETCHFORD; EGGLESE, 2004). O algoritmo se baseia em novos procedimentos de separação das desigualdades válidas conhecidas: (i) desigualdades de capacidade arredondada; (ii) desigualdade de capacidade formulada; (iii) as desigualdades de *comb* reforçadas; e (iv) as desigualdades *hypertour*. Para as soluções fracionárias atuais, cortes de Gomoroy inteiro misto são introduzidos uma vez no nó raiz.

3.2 Algoritmos exatos recentes

O algoritmo de geração de colunas proposto por (DESROSIERS; SOUMIS; DESROCHERS, 1984) é utilizado no Problema de Roteamento de veículos com Janela de Tempo (PRVJT) com uma dominante abordagem para construção de algoritmos exatos.

Por sua vez o PRVC pode ser considerado um caso particular do PRVJT, no qual os intervalos de tempo são arbitrariamente grandes.

No início dos anos 2000, os algoritmos *Branch-and-Bound*, exerciam bem a função de melhor desempenho para PRVC, o qual separavam complexas famílias de cortes através de investigação poliédrica (TOOTH; VIGO, 2002).

Todavia, casos que envolviam um número superior a 50 clientes não poderiam ser resolvidos para otimização. Foi um desses contextos que surgiu o trabalho de algoritmo B&C&P (FUKASAWA et al., 2006), o qual combina geração de corte e coluna, o que apresenta ser mais eficaz que cada uma das técnicas sozinhas. Atualmente os algoritmos atuais são inspirados nessa combinação.

De acordo com (PESSOA; ARAGÃO; UCHOA, 2007) algoritmo B&C&P em (FUKASAWA et al., 2006) só usa cortes robustos. Segundo (TOOTH; VIGO, 2014) um corte é dito robusto quando o valor da variável dual associada a ele pode ser traduzido em custos no subproblema de preços. Com isso a estrutura e o tamanho do subproblema permanece inalterados. Então, os cortes não robustos alteram a estrutura e/ou tamanho do subproblema de preços.

A robustez é uma propriedade desejável de um BCP, pois há uma simetria nas operações de corte e de preços nesse algoritmo. Heurísticas podem ser usadas caso alguma família de cortes for intratável. Entretanto, se heurísticas falharem os cortes violados podem ter sido perdidos com vínculo duplo válido.

Principais Abordagens Exatas

De acordo com os autores (PECIN et al., 2017) os melhores algoritmos exatos para o Problema de Roteamento de Veículos Capacitado são baseados na combinação de corte e geração de coluna. (PECIN et al., 2017) apresentam uma revisão taxionômica, inspirados em (TOOTH; VIGO, 2014). Esses autores, revisam os principais algoritmos nos trabalhos mais recentes para o (PRVC), e introduzem uma técnica para reduzir o impacto. São eles baseados na combinação de geração de colunas e cortes:

1. (FUKASAWA et al., 2006) apresentaram um algoritmo B&C&P, no qual as colunas são associadas às q -rotas sem k -ciclos. Os cortes separados são os mesmos usados em algoritmos anteriores sobre os arcos de formulação do PRV. Cortes esses, que são robustos com respeito ao preço do q -rota. O algoritmo pode mudar automaticamente para o B&C, se a geração de coluna no nó raiz determinada for muito lenta. Trata-se de uma melhoria expressiva sobre os métodos anteriores, pois todas as instâncias de referência na literatura podem ser resolvidas por otimalidade, fornecendo assim uma melhoria expressiva nos métodos anteriores com até 135 clientes.

2. (BALDACCI; CHRISTOFIDES; MINGOZZI, 2008) apresentaram um algoritmo com base na geração de colunas e cortes. As colunas estão associadas as rotas elementares. Através de uma nova abordagem, o algoritmo termina no nó raiz como enumera todas as rotas elementares com custo reduzido, não se trata de um B&C&P. Tudo isso, leva menos tempo e resolve quase todas as instâncias resolvidas pela proposta em (FUKASAWA et al., 2006), mas em alguns casos, falha com muitos clientes, devido a natureza exponencial de alguns elementos algorítmicos.
3. (PESSOA; ARAGÃO; UCHOA, 2008) apresentam algumas melhorias em relação a (FUKASAWA et al., 2006). Como por exemplo, cortes de formulação extensa com índices que foram separados. Não são alterados a complexidade dos preços das q rotas por esses índices de programação dinâmica, pois foi hibridizado com uma ramificação tradicional, afim de evitar uma falha prematura no gap de raiz. Entretanto, a melhoria global não foi suficiente para resolver instâncias maiores.
4. (BALDACCI; MINGOZZI; ROBERTI, 2011) apresenta uma melhoria no algoritmo proposto por (BALDACCI; CHRISTOFIDES; MINGOZZI, 2008). Pela introdução do conceito das ng -rotas, um relaxamento das rotas mais eficiente que q rotas sem k -ciclos. Além de ser mais rápido, o algoritmo melhorado é mais estável podendo em alguns casos, resolver a rota de muitos clientes.
5. (CONTARDO; MARTINELLI, 2014) introduz novas torções no uso de cortes não-robustos e enumeração da rota. As colunas estão associadas a rotas q sem dois ciclos, o que remete a um relaxamento pobre. Cortes fortes não robustos reforçam a elementaridade parcial das rotas. A enumeração elementar das rotas é direcionado para enumeração das colunas. Os resultados computacionais relatados são muito consistentes. Para a instância difícil da literatura M-n151-k12 (150 clientes, 12 rotas), foi resolvida por otimalidade em (6 horas) novo recorde.
6. (RØPKE, 2012) voltou ao B&C&P robusto. As diferentes relaxações lineares de (FUKASAWA et al., 2006) utilizam apenas ng -rotas mais eficientes. O poder do algoritmo vem principalmente de uma sofisticada e agressiva forte ramificação, capaz de reduzir sinaficamente o tamanho médio das árvores de enumeração.
7. (CONTARDO; MARTINELLI, 2014) finalmente melhoram (CONTARDO; MARTINELLI, 2014) em vez de q -rotas sem dois-ciclos, ng -rotas são usadas. Além disso, o desempenho de programação dinâmica foi reforçada e as variáveis dos arcos são fixadas por custos reduzidos. Nesse contexto, a instância M-n-151-k12 foi resolvida em até 3h.

O trabalho de (PESSOA; ARAGÃO; UCHOA, 2007) combinada com a nova proposta para o algoritmo *Branch-Cut-and-Price* encontrados em trabalhos anteriores.

Como por exemplo, enumeração da rota e ramificações fortes. Todas as instâncias que usam *benchmarking* de algoritmos exatos, com até 199 clientes foram resolvidas por otimalidade.

3.3 Heurísticas

Nos últimos anos, vários algoritmos sofisticados de decomposição de programação matemática foram apresentados para resolução do PRV. No entanto, mesmo com esse esforço situações relativamente pequenas com 100 clientes podem ser resolvidas de forma otimizada, e a variação do tempo de resolução é muito elevada.

Em geral algumas, aplicações da vida precisam ser resolvidas em um tempo hábil, mas configurações exatas do problema variam de uma forma para outra, necessitando desenvolver heurísticas suficientemente flexíveis para lidar com situações envolvendo várias funções objetivos com suas respectivas restrições.

O trabalho de (TOOTH; VIGO, 2014) fornece uma revisão desse contexto. Ele se concentra em destacar algumas heurísticas com métodos e princípios que com o passar do tempo se mantiveram sólidas. Para um aprofundamento em heurísticas clássicas e heurísticas é sugerido consultar o livro (TOOTH; VIGO, 2002) e (GOLDEN; RAGHAVAN; WASIL, 2008). Nesse contexto, apresentamos os principais métodos de resolução heurísticos de acordo com a seguinte divisão em dois subgrupos:

1. Heurísticas Construtivas:

- a) Heurística de economia de Clarke e Wright (CLARKE; WRIGHT, 1964);
- b) Algoritmo de Pétala (BALINSKI; QUANDT, 1964).

2. Heurística de Melhoria Clássica:

- a) Λ -opt (LIN; KERNIGHAN, 1973);
- b) 2-opt (TOOTH; VIGO, 2014);
- c) Granular Search (JOHNSON; MCGEOCH, 1997);
- d) Adaptive Large Neighborhood Search (ALNS) (PISINGER; ROPKE, 2007).

Heurísticas Construtivas

Geralmente, heurísticas construtivas são usadas para fornecer uma solução inicial para uma heurística de melhoria. Entretanto, várias meta-heurísticas são agora tão robustas que podem ser inicializadas a partir de qualquer solução inicial viável ou não. Existem várias heurísticas construtivas descritas em (TOOTH; VIGO, 2002). Contudo (TOOTH; VIGO, 2014) se concentra em duas delas, devido ao desuso nas demais.

A Heurísticas da Economia de Clarke e Wright

A heurística de economia foi proposta inicialmente por (CLARKE; WRIGHT, 1964), os autores constroem rotas de ida e volta $(0, i, 0)$ para $(i = 1, \dots, n)$ e as combinam gradualmente, aplicando o critério de economia. Especificamente, mesclam duas rotas $(0, \dots, i, 0)$ e $(0, j, \dots, 0)$ em apenas uma rota $(0, \dots, i, j, \dots, 0)$ gerando assim uma economia $s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$.

Como as economias se mantêm iguais ao longo do algoritmo, podem ser computadas a priori. Na versão paralela, a fusão de uma rota viável que proporciona uma maior economia é implementada em cada iteração, até que não seja mais possível mais fusão. Esse algoritmo é intuitivo e fácil de implementar, e geralmente é utilizado para gerar uma solução inicial em algoritmos mais sofisticados. Entretanto, há aprimoramentos e processos de aceleração propostos (PAESSENS, 1988) em função da velocidade dos computadores e a robustez das meta-heurísticas.

Algoritmo de Pétala

A ideia do algoritmo de Pétala consiste em resolver o PRV através de uma formulação de particionamento (BALINSKI; QUANDT, 1964), definida como algoritmo exato. Os algoritmos consistem em gerar um conjunto S de rotas viáveis para o PRV e combiná-las através da solução de um problema já definido. Como por exemplo:

Seja a_{ik} um coeficiente binário igual a 1 se e somente se o cliente i pertence a rota k . E uma variável x_k binária igual a 1 se e somente se a rota k pertencer a solução, além disso d_k o custo da rota k . Então o problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in S} d_k x_k \quad (3.1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{k \in S} a_{ik} x_k = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$x_k \in \{0, 1\}. \quad (3.3)$$

Contudo, esse provou ser impraticável, pois o número de rotas viáveis é tipicamente grande e computa custos d_k muito caros para serem calculados. Sugerido por (RYAN; HJORRING; GLOVER, 1993) e (RENAUD; BOCTOR; LAPORTE, 1996) o problema normalmente é resolvido através de uma heurística gerando um conjunto de rotas promissoras. (FOSTER; RYAN, 1976) avançam a pesquisa e geram configurações denominadas *2-pétalas*, que consistem em duas rotas embutidas ou cruzadas.

Os algoritmos são adequados para problemas com restrições, como janelas de tempo, restrições de capacidade e duração da rota. A metodologia de geração de colunas se torna uma solução de escolha para instâncias mais restritas.

3.4 Heurísticas clássicas de melhoria

A heurísticas de melhoria clássica (TOOTH; VIGO, 2014) podem ser divididas em dois grupos que realizam movimentos *intra-route* e *inter-route*.

Para o primeira se aplica heurísticas de melhoria utilizada no PCV. Nela, é possível realizar uma exploração completa de bairros padrões, o que requer um número considerável de operações. Entretanto, para se alcançar bons resultados o segundo tipo de movimento é essencial. Além disso, temos *neighborhoods* e movimentos *b*-cíclicos de transferência *k*.

Λ -OPT

Na situação *intra-rota*, qualquer heurística de melhoria projetada para o *Problema do Caixeiro Viajante* (PCV) pode ser aplacada, como em (LIN, 1965) com trocas Λ -OPT, no qual os arcos λ são removidos e substituídos por outras λ arestas. Ao longo da pesquisa, o valor de λ pode ser modificado dinamicamente (LIN; KERNIGHAN, 1973). Pesquisas realizadas (JOHNSON; MCGEOCH, 2007) indicam que entre os vários algoritmos heurística para PRV propostos (LIN; KERNIGHAN, 1973) apresenta melhores resultado.

2-OPT

São métodos de última geração e mais usados (TOOTH; VIGO, 2014). Podemos apresentar tipos diferentes de movimentos de melhoria. Os três mais utilizados são: *Realocar*, *Troca* e *2-OPT**. O primeiro consiste em remover *k* clientes consecutivos de sua rota atual e reinserir-los em outro lugar. Já o segundo movimento troca clientes consecutivos em diferentes rotas. E o ultimo operador clássico, remove duas arestas de rotas diferentes e reconecta-las de forma distinta. O número em média dos clientes permanece pequeno.

Granular Search (GS)

Número de operações é da ordem de $O(n^2k^2)$ onde *n* é o número de clientes, e *k* o número de rotas/veículos, para uma exploração de toda a vizinhança. Quando se trabalha com grandes instâncias torna-se essencial reduzir o número de movimentos. Para resolver esse problema os autores (JOHNSON; MCGEOCH, 1997) e (TOOTH; VIGO, 2003) propõem uma técnica de poda denominada *Busca Granular*. A técnica consiste basicamente em evitar movimentos entre clientes distantes através das restrições geográficas, o que proporciona importantes reduções do esforço de busca.

Adaptive Large Neighborhood Search (ALNS)

A maioria dos movimentos clássicos são casos especiais dos denominados movimentos b -cíclicos, k -transferência (THOMPSON; PSARAFTIS, 1993). Neles, a perturbação circular que de b rotas é considerada, e k clientes de cada rota são deslocados para a próxima rota da permutação cíclica. Junto a isso, destaca-se a heurística *Adaptive Large Neighborhood Search* (ALNS) de (PISINGER; ROPKE, 2007), no qual os movimentos são selecionados aleatoriamente por meio de um mecanismo de roda roletada, que produzem ótimos resultados.

3.5 Meta-heurísticas

Os autores (TOTH; VIGO, 2014) afirma as técnicas de meta-heurísticas eram bastante distintas. Todavia, mais de uma década depois as barreiras entre elas se difundiram, o que propiciou o desenvolvimento de vários híbridos. Desse modo, fornecer uma pesquisa sobre os métodos híbridos é uma tarefa árdua, considerando todo o referencial teórico já desenvolvido e ampla expansão da literatura atual existente. Neste trabalho, apresentaremos alguns princípios dos métodos que são destaque (TOTH; VIGO, 2014).

As meta-heurísticas atuais para o PRV podem ser classificadas em métodos de pesquisa locais e heurísticas baseadas na população. Os métodos de pesquisa locais exploram o espaço da solução em sua vizinhança, movendo-se em cada iteração de uma solução para outra. As heurísticas baseadas na população desenvolvem uma população inicial de soluções, que podem ser combinadas na expectativa de gerar melhores resultados. Dentre os principais métodos de resolução meta-heurísticos de acordo com a seguinte divisão:

1. Algoritmos de busca Local:

- a) *Simulated Annealing* (SA) (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983), (NIKOLAEV; JACOBSON, 2010);
- b) *Deterministic Annealing* (DA) (DUECK, 1993), (DUECK; SCHEUER, 1990) e (LI; GOLDEN; WASIL, 2005);
- c) *Tabu Search* (TS) (GLOVER, 1986) e (GENDREAU; POTVIN, 2010);
- d) *Iterated Local Search* (ILS) (LOURENÇO; MARTIN; STÜTZLE, 2010) e (BAXTER, 1984);
- e) *Variable Neighborhood Search* (VNS) (MLADENOVIĆ; HANSEN, 1997).

2. Baseadas na população:

- a) *Ant Colony Optimization*(ACO) (REIMANN; DOERNER; HARTL, 2004);

- b) *Genetic Algorithms* (GA) (PRINS, 2004) e (HOLLAND, 1975);
- c) *Hybrid Algorithms* (HA) (VIDAL et al., 2012);
- d) *Scatter Search* (SS) e *Path Relinking* (PR) (GLOVER, 1977), (RESENDE et al., 2010) e (TARANTILIS; ANAGNOSTOPOULOU; REPOUSSIS, 2013).

Algoritmos de Busca Local

Dado uma solução inicial x_1 , os algoritmos de busca local realiza uma operação nesta solução e prossegue em cada iteração i da solução atual x_i para outra solução x_{i+1} avaliando a vizinhança $N(x_i)$ de x_i , até que uma condição de parada seja satisfeita.

Por exemplo, para determinar os zeros reais de funções reais, parte de uma solução inicial, através de um processo iterativo até atingir um determinado critério de parada. Se $f(x)$ indica o custo de x , nos algoritmos de busca local, o ideal é que $f(x_{i+1})$ seja menor que $f(x_i)$. No entanto, deve incluir regras no código para quando $f(x_{i+1})$ não for inferior a $f(x_i)$ para evitar ciclismo do algoritmo.

Simulated Annealing (SA)

Em cada iteração i do SA ocorre a seleção de uma solução x aleatória na vizinhança em $N(x)$ para evitar o ciclismo.

Se $f(x) \leq f(x_i)$, então $x_{i+1} = x$. Caso contrário,

$$x_{i+1} = \begin{cases} x & \text{com probabilidade } p_i, \\ x_i & \text{com probabilidade } 1 - p_i. \end{cases}$$

Identifica-se geralmente p_i como uma função decrescente de i e de $f(x) - f(x_i)$. É usual definir p_i como $p_i = \exp -\frac{f(x) - f(x_i)}{\theta_i}$, onde a temperatura θ_i representa uma função decrescente de i . Existe uma regra para definir θ_i conhecida como cronograma de resfriamento.

Inicialmente θ_i é ajustado igual a um valor $\theta_1 > 0$ dado, e é multiplicado por um valor α ($0 < \alpha < 1$) após I interações, de tal forma que diminui com o passar do tempo a probabilidade de aceitar uma solução pior.

Normalmente, os critérios de parada utilizados estão relacionados com a função f^* dependente de x^* , a qual não pode ser menor que o mínimo $\pi_1\%$, para pelo menos ocorram r_1 ciclos consecutivos de cada iteração I ; para que o o número de movimentos permitidos seja menor que $\pi_2\%$ de I ; e também, para que r_2 ciclos imediatos de I iterações; e r_3 cilos de I interações foram executadas.

Determinist Annealing (DA)

A regra é aceitar x determinista em DA. Uma das principais e melhores implementações é o algoritmo proposto por (LI; GOLDEN; WASIL, 2005), inspirada na ideia de (DUECK, 1993).

No algoritmo, um registro é a solução mais conhecida x^* . Na iteração i , uma solução x é desenhada de $N(x_i)$ e $x_{i+1} = x$ se $f(x) \leq \sigma f(x^*)$, e σ é um parâmetro superior a 1 (i.e., $\sigma = 1,06$). Entretanto, se $f(x) > \sigma f(x^*)$, pode-se então $x_{i+1} = x_i$. As implementações de (LI; GOLDEN; WASIL, 2005) são fáceis de reproduzir e muito eficazes.

Tabu Search (TB)

Na Busca Tabu se move de uma solução i para uma melhor solução não-tabu x_{i+1} na vizinhança $N(x_i)$. Para se evitar o ciclismo, as soluções que possuem características semelhantes com x_i são estabelecidas como tabu, ou simplesmente proibidas para as várias iterações.

A denominação tabu de uma solução é retirada. Quando corresponde a uma nova solução mais conhecida. Nos últimos vinte anos, dezenas de implementações foram feitas com regras que destacam vizinhanças com melhorias potenciais.

Uma das características de implementação considera as soluções intermediárias inviáveis durante a pesquisa, conforme proposto por (GENDREAU; HERTZ; LAPORTE, 1994). Essa implementação é realizada minimizando uma função penalizada. Por exemplo, $f'(x) = f(x) + \sum_k \alpha_k V_k(x)$, onde $V_k(x)$ é a violação total da restrição do tipo k na solução x (a título de ilustração $V_k(x)$ pode ser uma das restrições, como por exemplo a restrição de capacidade em toda as rotas) e α_k um parâmetro de auto ajuste.

Se x é viável, então o valor de $f'(x)$ e $f(x)$ são coincidentes. Os pesos α_k iniciam com valor 1 e são ajustados no decorrer da pesquisa. Em (CORDEAU; LAPORTE; MERCIER, 2001) em cada iteração realizada nas implementações, se o valor de x é viável em relação a restrição k , então, α_k é dividido por $1 + \delta$, onde $\delta > 0$; caso contrário α_k é multiplicado por $1 + \delta$.

Iterated Local Search (ILS)

Trata-se uma heurística proposta em meados dos anos 80 por (BAXTER, 1984) que possuiu uma variedade de nomes (LOURENÇO; MARTIN; STÜTZLE, 2010). O algoritmo tem um princípio simples e pode ser executado sobre qualquer procedimento de busca local, como por exemplo, uma descida mais acentuada situada em uma única vizinhança, ou mais complicada como a Busca Tabu.

A ideia é executar um mecanismo de busca local incorporado, até atingir um critério de parada; perturbar a solução obtida utilizando esta pesquisa local com o objetivo de produzir uma nova solução inicial; e logo após reaplicar a busca local incorporada. Tal objetivo se torna concreto, até que se atinga um dos critérios de parada, como por exemplo: número de iteração externas; limite de tempo; ou uma série de iterações consecutivas sem a melhoria da solução. Para isso, é necessário o cuidado na perturbação específica do algoritmo, para que não haja destruição completa da estrutura da solução original obtida pela busca local incorporada.

Variable Neighborhood Search (VNS)

Consiste em uma estratégia de busca geral proposta por (MLADENOVIC; HANSEN, 1997). A sua metodologia funciona em várias vizinhanças N_1, N_2, \dots, N_p , que na maioria das vezes são de maiores complexidade e podem ser, por exemplo, incorporados os algoritmos *2-opt* e *3-opt*.

Partindo de uma solução inicial, o método executa de maneira iterativa. Um ciclo novo se inicia após o vizinho N_p for aplicado. O critério de parada pode ser realizado, quando um número predefinido de ciclos seja atingido, ou quando nenhuma melhoria mais for possível. O método foi capaz de identificar rapidamente soluções envolvendo até 20.000 clientes. O VNS foi aplicado com sucesso por (SUBRAMANIAN; UCHOA; OCHI, 2013).

Algoritmos baseados na população

Os algoritmos de busca local apresentados anteriormente foram inspirados pela necessidade de evitar o ciclismo e escapar da ótica local. Em contrapartida, os métodos edificados na população são inspirados em conceitos naturais, dos quais podemos citar: a evolução das espécies e o comportamento dos insetos.

São implementadas estratégias de orientação de alto nível, baseadas em diferentes estruturas de memória, a título de ilustração redes neurais, o qual definem conjuntos de soluções como cromossomos ou matrizes de feromonas. Segundo (TOTH; VIGO, 2014) todas as heurísticas do PRV, bem conhecidas dependem de componentes de pesquisas locais para orientar a busca de soluções.

Ant Colony Optimization (ACO)

Um dos algoritmos propostos (REIMANN; DOERNER; HARTL, 2004) e mais bem sucedidos que envolvem novas soluções são geradas através de um procedimento inspirado em economia e busca local. Em detrimento de usar a definição de economia $c_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$ proposta por (CLARKE; WRIGHT, 1964), os autores utilizam o denominado valor de atração $x_{ij} = \tau_{ij}^\alpha - S_{ij}^\beta$, onde o parâmetro τ_{ij} é o valor do ferormônio

e mede a qualidade combinando entre i e j por estar em iteração anteriores, e α e β são parâmetros que o usuário controla. Já a combinação dos vértices i e j ocorrem com a probabilidade $p_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{(h,l) \in \Omega_k} x_{hl}}$, onde Ω_k é o conjunto das combinações viáveis (i, j) que produzem as melhores economias k .

Genetic Algorithms (GA)

De acordo com (PRINS, 2004) o autor (HOLLAND, 1975) proporcionou uma das primeiras aplicações bem sucedidas de algoritmos genéticos. O método combina operadores genéticos, seleção e cromossomos, como uma busca local eficiente que troca o operador clássico de mutação aleatória. Esse é um tipo de método híbrido, às vezes chamado de algoritmo memético. O teórico apresenta uma solução com um caminho gigante sem restrições de rota. Um procedimento mais adequado para o caminho mais curto denominado *SPLIT*, utilizado para inserir visitas aos depósitos e delimitar as rotas.

Nas soluções gigantes de viagem são aplicados os operadores genéticos, permitindo assim operações simples baseadas em permutação. Por outro lado, os procedimentos de busca local são aplicados na representação completa da solução após o *SPLIT*. Uma solução nova s_{new} cujo valor objetivo é $Z(s_{new})$ é aceita em um população P se e somente se não existir uma solução $s \in P$ tal que $|Z(s_{new}) - z(s)| \leq \Delta$, onde Δ é um coeficiente de espaçamento de objetivos.

Hybrid Algorithms (HA)

O algoritmo genético híbrido de (VIDAL et al., 2012) “com controle de diversidade e avanço” tem como base o trabalho de (PRINS, 2004), onde os indivíduos são avaliados em bi-critérios, e a contribuição para diversidade populacional, incrementa a qualidade da solução.

A aptidão $\Phi_P(s)$ de uma solução S na população P é a soma ponderada de sua classificação na população em termos de contribuição para diversidade da população $\Phi^{DIV}(S)$. Avaliada como distância Hamming para outras soluções, e sua classificação em relação ao custo da solução $\Phi^{COST}(S)$.

O peso de cada critério é regulado pelo parâmetro μ^{ELITE} . Essa medida de adequação é usada para selecionar os pais e os sobreviventes

$$\Phi_P(S) = \Phi^{COST}(S) + \left(1 - \frac{\mu^{ELITE}}{|P|}\right) \Phi^{DIV}(S). \quad (3.4)$$

É permitido que o método confie em uma busca local granular eficiente, possível sistema eficiente de gestão de diversidade, aplicar em todos os filhos, sem arriscar um convergência de uma população prematura. Para expandir de exploração do método as soluções penais inviáveis são exploradas durante o processo de solução.

Scatter Search (SS) e Path Relinking (PR)

As recombinações de solução e melhoria local são métodos muito diferentes e complementares. No primeiro método, é permitido que o algoritmo selecione e recombine grandes partes das soluções de alta qualidade. Enquanto isso, o último é usado para refinamento da solução.

Atualmente o operador *crossover* anexa sequências de visitas de maneira aleatória. Tal fato, pode gerar um solução de baixíssima qualidade após o cruzamento. Nesse contexto, se for considerado que alguma randomização e agitação é benéfica no nível de exploração, pode ser muito prejudicial.

Algumas pesquisas como (GLOVER, 1977) e (RESENDE et al., 2010) se concentram na exploração de recombinações mais propositadas e inteligentes. (RESENDE et al., 2010) explora as soluções intermediárias que se encontram em um caminho; entre a solução de origem; e uma solução alvo. Para janelas de tempo (TARANTILIS; ANAGNOSTOPOULOU; REPOUSSIS, 2013) mostrou ser muito eficiente.

4 Desenvolvimento do modelo matemático

O problema proposto busca uma solução, para otimização do sistema de transporte coletivo terceirizado de funcionários de um indústria de grande porte de Itumbiara. Nesse contexto, a empresa é responsável por transportar os funcionários dos pontos de ônibus, que se encontram nas proximidades de suas casas, até a indústria. A prioridade, seria determinar um conjunto de rotas de forma a atender todos os funcionários que necessitam do serviço sujeito a restrições estabelecidas.

O modelo proposto na dissertação tem como alicerce duas fundamentações teóricas consolidadas no campo dos Problemas de Roteamento de Veículos. Uma delas é o Problema de Roteamento de Veículos Generalizado (PRVG), a diferença essencial está no fato de clientes serem atendidos por mais de um vértice. E o segundo está no Problema de Rota de Cobertura Multi-veículo.

Além disso é apresentado o Problema de Rota de Cobertura Multi veículo (m -PRC), indica aplicações e a modelagem matemática. (OLIVEIRA; MORETTI; REIS, 2015) apresentam um problema de aplicação no policiamento comunitário urbano. Além disso, os autores propuseram um balanceamento entre as rotas (m -PRCB). A modelagem utilizada na dissertação (OTA, 2018), se inspira em (OLIVEIRA, 2015) devido a viabilidade na resolução exata, e também se destaca como um problema de fluxo em redes e balanceamento entre as rotas.

4.1 Problema do caixeiro viajante com janela de tempo

(LANGEVIN et al., 1993) apresenta o Problema do Caixeiro Viajante com Janela de Tempo (PCVJT) e cita a literatura da formulação de fluxo para duas *commodities* do PCV. Logo após, os autores destacam uma nova formulação de fluxo, com duas *commodities* para o problema do caixeiro viajante, e também expõe o modelo com janela de tempo.

O problema do caixeiro viajante, com restrição de janela de tempo (PCVJT), consiste em encontrar consiste em encontrar uma distância mínima, que visita exatamente um conjunto de nós uma única vez. A visita em cada nó deve ser dentro de um intervalo de tempo especificado. A espera é permitida antes da primeira visita, mas os intervalos não podem ser violadas. Estes problemas encontram várias aplicações no setor de serviços:

- Banco e serviço postal;
- Roteamento de ônibus escolar e agendamento;

- Transporte de idosos e pessoas incapacitadas;
- Sistemas de veículos guiadas e automatizados.

Definição

A definição surge em uma variedade de problemas aplicados ao cotidiano, destacando-se como importante prática para otimização. O autor (LANGÉVIN et al., 1993) apresenta uma revisão da literatura relevante para formulação de fluxo com duas *commodities* para o PCV. Além disso, apresenta três formulações: Formulação de fluxo de duas *commodities* para o PCV, que é uma extensão relaxada do *Makespan Problem*; e uma nova formulação bem adequada para problemas com janela de tempo.

Considere uma grafo direcionado $G = (V, A)$, onde N é o conjunto de n nós e A é o conjunto de arcos factíveis. Seja c_{ij} o custo no arco (i, j) . O PVC é o problema de determinar no grafo G com uma dada matriz (c_{ij}) o circuito passando dentro cada nó somente uma vez a um custo mínimo.

Formulação com fluxo

A formulação para o PCV com fluxo em rede para duas *commodities* (PCVF2C) é introduzido por (FINKE, 1984). Na sua formulação, uma unidade da primeira mercadoria, fluxo $Y = (y_{ij})$, é entregue em cada nó, enquanto uma unidade da segunda, fluxo $Z = (z_{ij})$, é coletada em cada nó. Consequentemente, o total de mercadorias é combinado dos dois fluxos em cada nó, e é sempre o mesmo. O nó 1 corresponde ao depósito. O modelo é dado a seguir:

(PCVF2C)

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{i,j} (y_{ij} + z_{ij}) / (n - 1) \quad (4.1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{i=1}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ji} = \begin{cases} n - 1, & i = 1, \\ -1, & i \in N \setminus \{1\}, \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ji} = \begin{cases} -(n - 1), & i = 1, \\ -1, & i \in N \setminus \{1\}, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^n (y_{ij} + z_{ij}) = n - 1, \quad i \in N, \quad (4.4)$$

$$y_{ij} + z_{ij} \in \{0, n - 1\}, \quad (i, j) \in A, \quad (4.5)$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad z_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in A. \quad (4.6)$$

As Restrições (4.2) e (4.3) definem as equações de conservação do fluxo em cada commodity. As Restrições (4.4) e (4.5) garantem que exista apenas um arco usado

em cada nó. Pode-se mostrar que o modelo (4.1)- (4.6) pode ser reescrito equivalente, substituindo a equação de conservação do fluxo (4.2) pelo conjunto de equações.

$$\sum_{i=1}^n (y_{ij} + z_{ij}) = n - 1, \quad j \in N. \quad (4.7)$$

Se for definido $x_{ij} = \frac{y_{ij} + z_{ij}}{n - 1}$ então as Restrições (4.4) e (4.7) correspondem as restrições clássicas de designação. Por isso, esta formulação combina relações de designação (4.4) e (4.7) com a Restrição (4.3) de conservação do fluxo Z . Pode-se observar também que as equações de fluxo no nó 1 no depósito são obtidas de outras equações em conjunto de Restrições (4.2) e (4.3).

O autor introduz uma nova formulação para o problema do caixeiro viajante, baseado no fluxo da rede com duas *commodities*. Essa formulação com recursos limitados é bem adequada para lidar com restrições de janela de tempo, e é facilmente estendida para os tipo de problemas *Makespan*.

Os experimentos realizados por (LANGVIN et al., 1993) mostraram que essa formulação permite a solução de um PCV com restrição de tempo com até 60 nós. Esse tamanho de problemas abrange um grande número de aplicações com dados reais.

4.2 Problema de roteamento de veículos capacitado

O problema de roteamento de veículos capacitado (PRVC), considerados no artigo (BALDACCI; HADJICONSTANTINOU; MINGOZZI, 2004) envolve um conjunto de clientes e uma frota idêntica de veículos localizados em um depósito central. Cada um, com uma determinada demanda de bens a ser fornecida do depósito. Vale ressaltar, que a rota executada pelos veículos deve começar e terminar no depósito, e a carga transportada deve ser menor ou igual a capacidade do veículo.

Trata-se da matriz custo entre cada par de clientes dos caminhos de menor custo. O custo da rota é calculada como a soma dos custos dos arcos, formando a rota. O objetivo é projetar rotas de veículos, considerando uma rota para cada veículo, de forma que todos os clientes sejam visitados uma única vez e a soma do custo da rota é minimizado.

Definição

Os autores (BALDACCI; HADJICONSTANTINOU; MINGOZZI, 2004) apresentam uma nova formulação com a forma de um problema de fluxo em rede com duas *commodities* para o PRVC, com custo simétrico. Nesse processo, foi demonstrado que seu relaxamento Programação Linear (PL) satisfaz um forma fraca de restrição de capacidade.

A formulação, também pode ser modificada para acomodar diferentes restrições. Tudo isso poderá ser estendida para diversas formas de diferentes problemas de roteamento.

Para finalizar, o algoritmo *branch-and-cut* foi capaz de resolver otimização de uma instância envolvendo 135 clientes. O objetivo do problema é projetar M rotas de tal forma que todos os clientes sejam visitados uma única vez, e a soma do custo total da rota pode ser minimizada. Uma frota de M veículos idênticos com Capacidade Q é localizada no depósito 0. Cada cliente $i \in V'$ requer um fornecimento de q_i , unidades do depósito (assumindo que $q_0 = 0$)

Formulação com fluxo

O autor descreve uma nova e completa formulação do PRVC simétrico baseado em duas *commodities*, citadas como abordagem do fluxo em rede. Para modelar as rotas de um cliente único, esta formulação requer uma extensão do grafo $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{A})$, obtido de G adicionando o nó $n + 1$, que é a cópia do depósito 0. Nos temos os seguintes conjuntos e definições.

- $\bar{V} = V \cup \{n + 1\}$: conjunto de vértices incluindo todos os clientes e os dois depósitos;
- $V' = \bar{V} \setminus \{0, n + 1\}$: conjunto de vértices contendo;
- $\bar{E} = E \cup \{\{i, n + 1\}, i \in V'\}$: conjunto de arestas dos clientes para a cópia do depósito;
- $c_{i,n+1} = c_{0,i} \forall i \in V'$: o custo entre os depósitos adicionais e os clientes são idênticos.

Esta formulação usa duas variáveis de fluxo x_{ij} e x_{ji} para representar no arco $(i, j) \in \bar{E}$ uma solução viável para o PRVC, ao longo do qual o veículo transporta carga combinada de Q unidades. Se um veículo viaja de i para j , o fluxo x_{ij} representa a carga do veículo e o fluxo x_{ji} representa o espaço vazio no veículo (isto é, $x_{ji} = Q - x_{ij}$) ou seja o espaço vazio no veículo é igual a capacidade do veículo menos a carga transportada no mesmo. As variáveis de fluxo x_{ij} , $i, j \in \bar{V}$, $i \neq j$, definem dois caminhos de fluxo para qualquer rota de uma solução viável: um caminho do nó 0 para o nó $n + 1$ é definido pelas variáveis que representam a carga total, e um segundo caminho do nó $n + 1$ para o 0 é dado pela variável de fluxo representando o espaço vazio no veículo.

Seja ξ_{ij} a variável binária igual a 1 se o arco $\{i, j\} \in \bar{E}$ pertence a solução, e 0 caso contrário. Sejam x_{ij} e x_{ji} duas variáveis binárias de fluxo associadas com o arco $\{i, j\} \in \bar{E}$. A nova formulação matemática proposta por (BALDACCI; HADJICONSTANTINOU; MINGOZZI, 2004) é apresentada a seguir.

(PRVCF2C)

$$\text{Minimizar } \sum_{\{i,j\} \in \bar{V}} c_{i,j} \xi_{ij} \quad (4.8)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j \in \bar{V}} (x_{ji} - x_{ij}) = 2q_i, \quad i \in V', \quad (4.9)$$

$$\sum_{j \in J'} x_{0j} = qV', \quad (4.10)$$

$$\sum_{j \in J'} x_{j0} = MQ - qV', \quad (4.11)$$

$$\sum_{j \in V'} x_{n+1,j} = MQ, \quad (4.12)$$

$$x_{ij} + x_{ji} = Q\xi_{ij}, \quad \{i, j\} \in \bar{E}, \quad (4.13)$$

$$\sum_{j \in \bar{V}, i < j} \xi_{ij} + \sum_{j \in \bar{V}, i > j} \xi_{ji} = 2, \quad i \in V', \quad (4.14)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad x_{ji} \geq 0, \quad \{i, j\} \in \bar{E}, \quad (4.15)$$

$$\xi_{ij} \in \{0, 1\} \in \bar{E}. \quad (4.16)$$

As Restrições (4.9)-(4.13) junto com as restrições de não negatividade (4.15), definem um padrão de fluxo viável a partir dos nós de origem 0 e $n + 1$ até os nós $V' \cup \{0\}$. O fluxo de saída no nó de origem (4.10) é igual ao total da demanda dos clientes, e o fluxo de entrada no nó raiz $n + 1$ (4.12) corresponde ao total da capacidade da frota de veículos.

As Restrições (4.9) afirmam que o fluxo de entrada menos o fluxo de saída em cada cliente $i \in V'$ é igual a $2q_i$, e o fluxo de entrada no nó 0 da Restrição (4.11) corresponde a capacidade residual da frota de veículos. A Restrições (4.13) definem os arcos de uma solução viável e as Restrições (4.14) forçam que qualquer solução viável contenha dois arcos incidentes em a cada vértice. A validade da formulação é demonstrada pelo autor.

4.3 Problema com rota de cobertura multiveículo

O Problema de Rota de Cobertura multiveículo (m -PRC) é (PRV), com uma extensão do problema de rota de cobertura. Em seu artigo (HÀ et al., 2013) define o (m -PRC) e apresenta uma nova formulação para o problema, além de propor métodos exatos para o problema, bem como meta-heurísticas. Utiliza o algoritmo *branch-and-cut* com algumas desigualdades e restrições de capacidade. Meta-heurísticas implementam um algoritmo híbrido que envolve *local search* e *search tabu* superando a geração de colunas.

Definição

Seja $G = (V \cup W, E_1 \cup E_2)$ um grafo não direcionado, onde $V \cup W$ é o conjunto de vértices e $E_1 \cup E_2$ é o conjunto de arcos. $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ é o conjunto de n vértices que podem ser visitados, e $W = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ é o conjunto de vértices que devem ser cobertos. Seja $T = \{v_0, \dots, v_{t-1}\}$ um subconjunto de V , seja o conjunto de vértices que devem ser visitados. O vértice V_0 é o depósito; m veículos idênticos são localizados nele; O artigo dos autores (HÀ et al., 2013) considera o caso em que m é uma variável de decisão. O comprimento c_{ij} está associado com o arco $E_1 = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V, i < j\}$ e a distância d_{ij} está associada com o arco $E_2 = \{(v_i, v_j) : v_i \in V \setminus T, v_j \in W\}$.

O m -PRC consiste em determinar m rotas, tais que o custo total é minimizado. Nesse sentido, cada rota começa e termina no depósito; cada vértice de T é visitado exatamente uma vez, enquanto cada vértice de $V \setminus T$ é visitado no máximo uma vez. Cada vértice j de W é coberto pelas rotas, ou seja, está dentro de uma distância r de pelo menos um vértice $V \setminus T$ que é visitado, onde r é o raio de cobertura; número de vértices em cada rota (excluindo o depósito) é menos do que p ; e o comprimento de cada rota, não pode exceder o limite fixado q .

Formulação com fluxo

Descrito a nova formulação de programação inteira para o m -PRC- p . A ideia estrutural foi introduzida por (FINKE, 1984) para o Problema do Caixeiro Viajante (PCV). Essa abordagem foi estendida por (LANGEVIN et al., 1993), nomead como PCV com janela de tempo. (BALDACCI; HADJICONSTANTINO; MINGOZZI, 2004) usaram o método para derivar uma nova formulação para o *branch-and-cut*, o qual apresentamos na seção anterior. (BALDACCI et al., 2005) adaptou um formulação para o 1-PRC sem restrição de capacidade.

O autores (HÀ et al., 2013) se inspiram ao novo modelo para proporem o modelo de (BALDACCI et al., 2005) com algumas diferenças do 1-PRC. Eles consideram que cada vértice $v \setminus v_0$ tem uma demanda unitária e cada veículo tem um capacidade p . A diferença crucial do PRV para o m -PRC- p que não precisa visitar todos os vértices, com exceção do conjuntos dos vértices de T .

O grafo \bar{G} original é uma extensão do primeiro G , adicionando um novo vértice v_n que é uma cópia do primeiro v_0 . Temos então os seguintes conjuntos:

- $\bar{G} = (\bar{V} \cup W, \bar{E}_1 \cup E_2)$: extensão do grafo original;
- $\bar{V} = V \cup \{v_n\}$: conjunto de vértices incluindo todos os clientes e os dois depósitos;
- $V' = \bar{V} \setminus \{v_0, v_n\}$: conjunto de vértices contendo apenas com os clientes;

- $\bar{E} = E_1 \cup \{\{v_i, v_n\}, v_i \in V'\}$: conjunto de arestas dos clientes para a cópia do depósito;
- $c_{i,n} = c_{0,i}, \quad \forall v_i \in V'$: o custo entre os depósitos e os clientes são idênticos.

É possível notar as semelhanças com as características do modelo para PRVC com fluxo em rede e duas *commodities* apresentado anteriormente. Com algumas diferenças nas notações, é importante notar a evolução dos conceitos de um modelo para outro como por exemplo os conjuntos e as variáveis de decisão bem como as variáveis binárias.

Está formulação também necessita de duas variáveis de fluxo. O autor denomina f_{ij} e f_{ji} representado a solução m -PRC- p viável no arco ao longo do qual o veículo carrega uma carga de p unidades. Quando o veículo viaja de v_i para v_j , o fluxo f_{ij} representa o número de vértices que ainda podem ser visitados, e f_{ji} representa o número de vértices já visitados (isto é, $f_{ji} = p - f_{ij}$). Sendo assim, as variáveis binárias se definem em:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } \{v_i, v_j\} \text{ é usado na solução,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } i \text{ pertence a solução,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\lambda_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{se e só se } w_l \text{ é coberto por } v_i, \quad w_l \in W, \quad v_i \in V \setminus T, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A formulação de (HÀ et al., 2013) para o m -PRC- p é dado a seguir.

(m-PRC- p)

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{\{v_i, v_j\} \in \bar{E}} c_{i,j} x_{ij} \quad (4.17)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{v_i \in V \setminus T} \lambda_{ij} y_i \geq 1, \quad w_1 \in W, \quad (4.18)$$

$$\sum_{v_i \in \bar{V}, i < k} x_{ik} + \sum_{v_j \in \bar{V}, j > k} x_{kj} = 2y_k, \quad v_k \in V', \quad (4.19)$$

$$\sum_{v_j \in \bar{V}} (f_{ji} - f_{ij}) = 2y_i, \quad v_i \in V', \quad (4.20)$$

$$\sum_{v_j \in V'} f_{0j} = \sum_{v_i \in V'} y_i, \quad (4.21)$$

$$\sum_{j \in V'} f_{nj} = mp, \quad (4.22)$$

$$f_{ij} + f_{ji} = px_{ij}, \quad \{v_i, v_j\} \in \bar{E}, \quad (4.23)$$

$$f_{ij} \geq 0, \quad f_{ji} \geq 0, \quad \{v_i, v_j\} \in \bar{E}, \quad (4.24)$$

$$y_i = 1, \quad v_i \in T \setminus \{v_0\}, \quad (4.25)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \{v_i, v_j\} \in \bar{E}, \quad (4.26)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad v_i \in V', \quad (4.27)$$

Se comprarmos o modelo anterior com esse modelo, ele sofre algumas alterações sutis nas variáveis; q_i por y_i , modifica x_{ij} por f_{ij} e acrescenta a cobertura λ_{il} .

As Restrições (4.18) asseguram que todos os clientes de W estejam cobertos, enquanto as Restrições (4.19) garantem que cada vértice de V' seja visitado no máximo uma vez. As Restrições (4.20)-(4.23) definem as variáveis de fluxo. Especificamente, as Restrições (4.20) asseguram que o fluxo de entrada menos o fluxo de saída em cada vértice $v_i \in V'$ é igual a 2, se o v_i é usado na solução e 0 caso contrário. O fluxo de saída no vértice origem v_0 (4.21) é igual ao total da demanda de todos os vértices usados na solução, e o fluxo de saída em (4.22) corresponde ao total de capacidade dos veículos. As Restrições (4.23) são derivadas da definição das variáveis de fluxo. As Restrições (4.24)-(4.27) definem as variáveis.

Segundo o autor, a desvantagem dessa formulação é que ela não consegue expressar a restrição de comprimento em cada rota. Em contrapartida, suas vantagens são que, o número de variáveis e restrições aumenta polinomialmente com o tamanho do problema, e seu relaxamento satisfaz forma fraca de eliminação de sub-rotas (BALDACCI; HADJICONSTANTINO; MINGOZZI, 2004).

O artigo (HÀ et al., 2013), apresenta um caso particular do m -PRC onde restrição de comprimento é relaxada, i.e., $q = +\infty$. Este caso é o o modelo para o m -PRC- p (onde p é um limite superior do número de vértices por rota). A versão proposta pelo autor pode modelar aplicações, e assim, a restrição da distância não é importante e pode

ser relaxada. Quando o tempo de viagem entre as localizações é bastante pequena em comparação com o tempo de duração em um local, pode-se considerar então, que cada veículo pode atender um número limitado de locais e a restrição de distância nesse caso pode ser negligenciada.

4.4 Problema de roteamento de veículos generalizado

O Problema de Roteamento de Veículos Generalizado (PRVG) surge em aplicações mais complexas do mundo real, quando o cliente é atendido por mais de um vértice. Neste caso, é possível modelar problemas relacionados com redes de transporte de dois níveis (BEKTAŞ; ERDOĞAN; RÖPKE, 2011) sempre que um conjunto bem definido de vértices que precisem ser visitados, e nós que precisam encontrar a solução desse conjunto. A diferença para os problemas clássicos de transporte, Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (PRVC), consiste basicamente no fato que cada cliente é atendido por apenas um vértice. O PRVC é o mais popular e desafiador problema de otimização combinatória.

O PRVC implica em determinar um conjunto ótimo de rotas para a frota de veículos que serve um dado conjunto de clientes. No Capítulo 2, foi apresentado as variações do PRVC. Cada cliente é atendido a partir de apenas um vértice modelos clássicos de transporte. Todavia, em algumas aplicações reais o cliente pode ser servido por mais de um vértice, diferente quando há sempre um conjunto de vértices que necessitam ser visitados. O problema de roteamento de veículos generalizado PRVG é uma generalização do PRVC e uma extensão do Problema do Caixeiro Viajante Generalizado (PCVG). O modelo do problema PRVG pode ser relacionado com projetar dois níveis de transporte em rede (BEKTAŞ; ERDOĞAN; RÖPKE, 2011) e (POP; KARA; MARC, 2012).

Definição

O PRVG é definido por (HÀ et al., 2014) como um grafo não direcionado $G = (V, A)$, onde V é o conjunto de vértices e A é o conjunto de arestas. Seja $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ é o conjunto de n vértices que pode ser visitado, e o vértice v_0 é o depósito contendo m veículos idênticos com a capacidade Q . E o conjunto k de *cluster* $C = \{C_0, \dots, C_{k-1}\}$. Cada C_i exceto C_0 , que contém apenas um depósito tem uma demanda D_i . No modelo proposto pelo autor cada *cluster* inclui um número de vértices V e cada vértice em V pertence a um *cluster*. O número de veículos m pode ser constante ou variável. O custo c_{ij} está associado a cada arco de $E = \{\{v_i, v_j\} : v_i, v_j \in V, i < j\}$.

O PRVG consiste em encontrar m rotas para os veículos, tais como:

1. Cada rota começa termine no depósito;
2. Cada rota visita exatamente um vértice de cada *cluster* e visita apenas uma vez;

3. A demanda atendida para cada rota não pode exceder a capacidade do veículo Q ;
4. O custo total é minimizado.

(HÀ et al., 2014) consideram uma versão do PRVG, a qual não havia sido investigada ainda na literatura. Nela, o número de veículos é uma variável de decisão ($m \geq 1$). Na proposta dos autores o problema permite determinar o tamanho adequado da frota para minimizar o custo de roteamento diário. Há duas contribuições importantes dos autores. Eles apresentam uma nova formulação para o PRVG e propõem um método exato baseado em *branch-and-cut*, e uma meta-heurística híbrida que acopla o *Implementation Split* e um *Local Search* para resolver o problema.

Os experimentos computacionais mostram que o método exato pode resolver instancias com até 121 vértices e 51 *clusters*, e as meta-heurísticas fornecem soluções de alta qualidade para instâncias testadas em um tempo computacional razoável.

Formulação com fluxo

A formulação proposta por (BEKTAŞ; ERDOĞAN; RØPKE, 2011) cita que o número de veículos é constante. O que no modelo proposto por (HÀ et al., 2014) adaptam ao contexto que o número m de veículos no contexto é variável.

Deses modo, será descrito agora a nova formulação matemática para o PRVG. A ideia estrutural é introduzida por (FINKE, 1984) para o Problema do Caixeiro Viajante (PCV). Esta abordagem é estendida para o PCV com Janela de tempo por (LANGEVIN et al., 1993), cujo modelo de fluxo para duas *commodities* foi apresentado anteriormente.

(BALDACCI; HADJICONSTANTINOU; MINGOZZI, 2004) usam como derivado da formulação e o algoritmo *branch-and-bound* para o PRV, e (BALDACCI et al., 2005) adapta para o Problema de Rota de Cobertura (PRC) sem restrição de capacidade. Segundo o autor, junto com a formulação de fluxo com dois índices e o conjunto de formulação de particionamento essa é uma das mais bem sucedidas formulações de métodos exatos para o PRVC (BALDACCI; MINGOZZI; ROBERTI, 2012).

A formulação proposto por (HÀ et al., 2014) é uma extensão da formulação proposta por (BALDACCI; HADJICONSTANTINOU; MINGOZZI, 2004) para o PRVC, formulação esta, apresentada nessa dissertação na Seção 4.2. A diferença é que os autores assumem que existe uma demanda d_i igual a demanda $D_{\alpha(i)}$ do *cluster* para o qual o cliente pertence, em cada vértice v_i de V . Isso significa que todos os vértices do *cluster* tem a mesma demanda que o *cluster*. A diferença para o PRVC é que não precisa visitar todos os vértices de V .

Primeiro é estendido o grafo original G para $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$, adicionando um novo vértice v_n que é uma cópia do vértice v_0 . Assim, os conjuntos para este modelo são

definidos da seguinte forma:

- $\bar{V} = V \cup \{v_n\}$: conjunto de clientes, incluído depósito e a cópia do depósito;
- $V' = V \setminus \{v_0, v_n\}$: conjunto apenas de clientes, sem o depósito e a cópia do depósito;
- $\bar{E} = E \cup \{(v_i, v_n), v_i \in V'\}$: são os arcos entre os clientes i e j ;
- $c_{in} = c_{0i}$, $i \in V'$: custo igual entre os clientes e a cópia, e depósito e os clientes.

A formulação requer duas variáveis de fluxo f_{ij} e f_{ji} para representar uma vantagem de solução PRVG viável, ao longo do qual o veículo transporta uma carga com Q unidades. Quando o veículo viaja do vértice i para o vértice j , o fluxo f_{ij} representa a carga coletada, e o fluxo f_{ji} representa o espaço vazio no veículo, (isto é $f_{ji} = Q - f_{ij}$).

- f_{ij} : O fluxo representa a carga coletada;
- f_{ji} : O fluxo representa o espaço vazio no veículo;

Sejam x_{ij} e y_i variáveis binárias onde:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco } \{v_i, v_j\} \text{ é usado na solução,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se o vértice } v_i \text{ é visitado na solução,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O PRVG proposto por (HÀ et al., 2014) é dado a seguir.

(PRVG)

$$\text{Minimizar } \sum_{\{v_i, v_j\} \in \bar{E}} c_{ij} x_{ij} \quad (4.28)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{v_i \in C_k} y_i = 1 \quad C_k \in C, \quad (4.29)$$

$$\sum_{v_i \in \bar{V}, i < k} x_{ik} + \sum_{j \in \bar{V}, j > k} x_{kj} = 2y_k, \quad v_k \in V', \quad (4.30)$$

$$\sum_{v_j \in \bar{V}} (f_{ji} - f_{ij}) = 2d_i y_i, \quad v_i \in V', \quad (4.31)$$

$$\sum_{v_j \in V'} f_{0j} = \sum_{v_i \in V'} d_i y_i, \quad (4.32)$$

$$\sum_{j \in V'} f_{n,j} = mQ, \quad (4.33)$$

$$f_{ij} + f_{ji} = Qx_{ij}, \quad \{v_i, v_j\} \in \bar{V}, \quad (4.34)$$

$$f_{ij} \geq 0, f_{ji} \geq 0, \quad \{v_i, v_j\} \in \bar{V}, \quad (4.35)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \{v_i, v_j\} \in \bar{E}, \quad (4.36)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad v_i \in V', \quad (4.37)$$

$$m \in \mathbb{N}. \quad (4.38)$$

A Restrição (4.29) assegura que rota inclui exatamente um vértice de cada *cluster*, enquanto as Restrições (4.30) asseguram que cada vértice de V' é visitado no máximo um vez. As Restrições (4.31)-(4.35) definem as variáveis de fluxo. Especificamente, as Restrições (4.31) asseguram que o fluxo de entrada menos o fluxo de saída em cada vértice $v_i \in V'$ é igual a $2 \cdot d_i$ se v_i é usado, 0. Em caso contrário, o fluxo de saída no vértice v_0 (4.32) é igual o total da demanda nos vértices que são usados na solução, e o fluxo de saída v_n corresponde a Restrição (4.33) ao total da capacidade da frota de veículo. As Restrições (4.34) são derivada da definição variáveis de fluxo. As Restrições (4.35)-(4.39) definem as variáveis.

Os resultados computacionais obtidos pelos autores demonstram a eficácia do modelo proposto. Instâncias na literatura com até 262 vértices e a rota contém 131 vértices. O algoritmo *branch-and-cut* da simulação é mais eficiente que o (BEKTAŞ; ERDOĞAN; RÖPKE, 2011), em termos do número de instâncias de sucesso, qualidade dos limites inferiores, e número de nós na árvore *branch-and-bound*. Já as meta-heurísticas apresentam alta qualidade em tempo computacional razoável.

4.5 Balanceamento das rotas

A proposta descrita no artigo (OLIVEIRA; MORETTI; REIS, 2015) apresenta nas construção das rotas de patrulhamento urbano e uma nova proposta para o Problema

de Rota de Cobertura com vários veículos (m -PRC).

A partir dela, é estabelecida que a quantidade absoluta de vértices visitados de uma rota deve ser menor que o valor de r . No patrulhamento policial proposto, todos os veículos disponíveis devem ser usados, e não há um limite máximo de comprimento nem a distância máxima em cada rota. De acordo com as seguintes condições:

1. Cada rota inicia e termina no depósito;
2. O número de vértices visitados entre as diferentes rotas difere no máximo de r .

A diferença entre o número máximo de nós visitados nas diferentes rotas foi definido por (OLIVEIRA; MORETTI; REIS, 2015) como :

$$\tilde{r} = \max_{1 \leq p, q \leq m} \left| \sum_{i=1}^n y_{ip} - \sum_{i=1}^n y_{iq} \right| \leq r. \quad (4.39)$$

Em outras palavras, a diferença máxima de vértices visitados nas diferentes rotas \tilde{r} deve ser menor do que ou igual ao parâmetro r ($\tilde{r} \leq r$).

Definição

O modelo matemático para o (m -PRC) proposto por (HÀ et al., 2013) considera o número de veículos sendo fixo, enquanto (OLIVEIRA; OLIVEIRA; MORETTI, 2015) considera o número de veículos como variável e utiliza toda frota de veículos. O modelo matemático (m -PRC) é adaptado e utilizado por (OTA, 2018) nos testes computacionais de suas dissertação. Denominando pela autora como m -PRCFB, o modelo é balanceado e utiliza contribuições de (OLIVEIRA; OLIVEIRA; MORETTI, 2015) no conjunto de restrições do modelo fluxo m -PRCF.

Um dos objetivos do trabalho de (OTA, 2018) é resolver de forma exata o problema balanceado proposto por (OLIVEIRA, 2008). Isso é possível através de uma nova formulação para o m -PRC, no qual o equilíbrio entre as rotas é considerado a partir de m -PRC- $\rho\bar{\rho}$. As variáveis ρ e $\bar{\rho}$ correspondem aos limites superior e inferior do número de visitas por rotas. Reconhecer os limites inferior ρ e superior $\bar{\rho}$ como variáveis de decisão é uma das contribuições do trabalho de (OTA, 2018). As soluções exatas e soluções aproximadas foram obtidas utilizando a nova proposta.

Formulação balanceada

Os autores observaram que no m -PRC não existe um controle do índices bem definido que auxiliem a entrada e saída de fluxo em cada vértice, através do controle por rota. Além disso, algumas rotas podem iniciar na cópia do depósito $\{v_n\}$ e terminar no depósito

original $\{v_0\}$. Para superar esses desafios os autores (OLIVEIRA; MORETTI; REIS, 2015) propõem algumas alterações. Além do mais, para que seja possível o controle no número de vértices visitados em cada rota (OTA, 2018) citam rotas balanceadas aplicando as alterações proposta em seu modelo, que é denominado m -PRCFB. Trabalhando com arestas direcionadas, temos que as variáveis x_{ij} e x_{ji} são distintas. A seguir serão apresentadas as restrições incluídas no modelo m -PRCF tornando-o m -PRCFB.

Para controlar melhor o sentido do fluxo nos arcos, que possuíam variáveis x_{ij} e x_{ji} ativas em qualquer sentido para $i < j$, algumas alterações propostas estabelecem que o fluxo apenas em determinado sentido. A equação (4.42) considera que há apenas um sentido no caminho entre dois vértices.

A seguir será apresentado as alterações propostas no modelo semelhante ao trabalho de (OTA, 2018) para o modelo matemático m -PRC- p (HÀ et al., 2013), a fim de obter o balanceamento descrito acima. Contudo nessa dissertação é executado as alteração no modelo matemático PRVG do artigo de (HÀ et al., 2014).

Alterações e inclusões no modelo PRVG

$$\sum_{v_i \in \bar{V}, i \neq k} x_{ik} + \sum_{v_j \in \bar{V}, j \neq k} x_{kj} = 2y_k, \quad v_k \in V', \quad (4.40)$$

$$f_{ij} + f_{ji} = \bar{p}(x_{ij} + x_{ji}), \quad \{v_i, v_j\} \in \bar{E}_1, \quad i < j, \quad (4.41)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1, \quad v_i, v_j \in V', \quad i < j, \quad (4.42)$$

$$\sum_{v_i \in \bar{V}, i \neq k} x_{ik} \leq 1, \quad v_k \in V', \quad (4.43)$$

$$\sum_{v_j \in \bar{V}, j \neq k} x_{kj} \leq 1, \quad v_k \in V', \quad (4.44)$$

$$x_{i0} = 0, \quad \forall v_i \in V', \quad (4.45)$$

$$x_{nj} = 0, \quad \forall v_j \in V'. \quad (4.46)$$

Para garantir que o vértice v_k seja visitado e possua apenas dois arcos ativos, as Restrições (4.19) são substituídas pelas Restrições (4.40), obtendo assim um controle melhor dos vértices ativos na solução do problema. As Restrições (4.23) são substituídas pelas Restrições (4.41), assegurando que a soma dos fluxos em ambos os sentidos do arco seja igual a \bar{p} caso algum dos arcos (v_i, v_j) ou (v_j, v_i) seja percorrido, com $i < j$. Sejam dois vértices distintos, as Restrições (4.42) estabelecem que no máximo um dos arcos entre os vértices podem estar ativos.

As Restrições (4.43) asseguram que existe no máximo um arco ativo com fluxo de chegada em cada vértice $v_k \in V'$. As Restrições (4.44) asseguram que existe no máximo um arco ativo com fluxo de partida em cada vértice $v_k \in V'$. As Restrições (4.45) garantem

que nenhum arco pode retornar ao depósito v_0 . As Restrições (4.46) garantem que nenhum arco inicia a rota a partir da cópia do depósito v_n .

As modificações no modelo (PRVG) descrito por fluxo em rede (PRVGF) para balanceamento. Será utilizados para escrever o modelo matemático que descreve o modelo utilizado nesse trabalho.

4.6 Problema de Roteamento de Veículos Generalizado com Fluxo

O modelo utilizado nesta dissertação será descrito como Problema de Roteamento de Veículos Generalizado com Fluxo (PRVGF), cuja introdução foi executada através dos vários modelos apresentados. Iniciando com o Problema do Caixeiro Viajante (LANGÉVIN *et al.*, 1993), passando pelo Problema de Roteamento de Veículos Capacitado (BALDACCI; HADJICONSTANTINO; MINGOZZI, 2004), entrando no Problema de Rota de Cobertura (PRC) (HÀ *et al.*, 2013), e por fim, o Problema de Roteamento de Veículos Generalizado (PRVG). (HÀ *et al.*, 2014), foram peças fundamentais para construção sólida do modelo matemático. É importante ressaltar que os modelos citados possuem características bem específicas nas suas formulações, com inspiração no modelo de fluxo.

Para construir o PRVGF utiliza as equações de restrição do modelo de (HÀ *et al.*, 2013) e a proposta de balanceamento apresentadas por (OTA, 2018) e (OLIVEIRA; OLIVEIRA; MORETTI, 2015). Além do mais, tal estratégia é utilizada para o controle mais específico dos índices que auxiliam no fluxo de entrada e saída em cada vértice, conforme descrito Seção 4.5. Como o PRVGF não é um problema de cobertura, todos os vértices são visitados, sendo assim, a estrutura do modelo é inspirado em (HÀ *et al.*, 2014).

Definição

O modelo matemático deste dissertação é inspirado na formulação para o Problema de Roteamento de Veículos Generalizado (PRVG) proposta por (HÀ *et al.*, 2014), o qual apresenta uma extensão do Problema de Roteamento do Caixeiro Viajante Generalizado (PCVG) (LANGÉVIN *et al.*, 1993). Está proposta incluiu equações de balanceamento propostas para o Problema de Rota de Cobertura (PRC) (HÀ *et al.*, 2013). Além do mais, para descrever o problema do transporte, no estudo de caso de Itumbiara, o modelo matemático escolhido denominou-se Problema de Roteamento de Veículos Generalizado com Fluxo (PRVGF).

Formulação do PRVGF

Com todas as considerações e após o tratamento da evolução do modelo, será apresentado os conjuntos, as variáveis e o modelo matemático para o problema proposto

de Itumbiara.

Conjuntos

Primeiramente se estende o grafo original G para $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ adicionando um novo vértice n , que é uma copia do depósito. Sendo assim, temos:

- $V = \{1, 2, \dots, n - 1\}$: conjunto de clientes e o depósito;
- $\bar{V} = V \cup \{n\}$: conjunto de clientes, incluído depósito e a cópia do depósito;
- $V' = V \setminus \{1, n\}$: conjunto apenas dos clientes, sem o depósito e a cópia do depósito;
- $\bar{E} = E \cup \{(i, n), i \in V'\}$: são os arcos entre os clientes i e j ;
- $c_{in} = c_{1i}$, $i \in V'$: igualdade dos custos do depósito e da cópia.

O conjunto \bar{V} representa os vértices incluindo a cópia n do depósito 1. Já o conjunto V' representa os vértices, excluindo o depósito e sua cópia $\{1, n\}$. Temos ainda, \bar{E} que incluiu as arestas E com o par dos vértices $\{i, n\}$, no qual i pertence ao conjunto dos clientes apenas. Por fim, tem-se o custo c_{in} para percorrer o arco entre os clientes i e a cópia do depósito n , cujo valor é igual ao custo c_{1i} dos arcos que iniciam no vértice 1 em direção aos clientes i .

Variáveis

A formulação requer duas variáveis de fluxo f_{ij} e f_{ji} , para representar uma vantagem na solução do modelo viável, ao longo do qual o veículo transporta uma quantidade Q de passageiros. Quando o veículo percorre o vértice i para o j , o fluxo f_{ij} representa a quantidade de passageiros embarcados, e f_{ji} representa a quantidade de poltronas disponíveis no veículo (isto é $f_{ji} = Q - f_{ij}$).

- f_{ij} : O fluxo representa a carga coletada (passageiros embarcados);
- f_{ji} : O fluxo representa o espaço vazio no veículo (poltronas disponíveis);

Sejam x_{ij} a variável binária onde:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } \{i, j\} \text{ é usado na solução,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Parâmetros

Os parâmetros de entradas utilizados no modelo são os dados reais, tais como a matriz das distâncias, a capacidade dos veículos, e a demanda de passageiros por ponto nas rotas:

- Q : capacidade do veículo;
- c_{ij} : custo no arco entre os vértices i e j ;
- d_j : demanda de passageiros em cada ponto $j = 1, \dots, n$.

A formulação do modelo Problema de Roteamento de Veículos Generalizado com Fluxo (PRVGF) se define a partir de:

(PRVGF)

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in \bar{V}} \sum_{j \in \bar{V}} c_{ij} x_{ij} \quad (4.47)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{i \in \bar{V}, i \neq k} x_{ik} + \sum_{j \in \bar{V}, j \neq k} x_{kj} = 2, \quad k \in V', \quad (4.48)$$

$$\sum_{j \in \bar{V}} (f_{ji} - f_{ij}) = 2d_i, \quad i \in V', \quad (4.49)$$

$$\sum_{j \in V'} f_{1j} = \sum_{i \in V'} d_i, \quad (4.50)$$

$$\sum_{j \in V'} f_{nj} = mQ, \quad (4.51)$$

$$f_{ij} + f_{ji} = Q(x_{ij} + x_{ji}), \quad i, j \in \bar{V}, \quad i < j, \quad (4.52)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1, \quad \forall i, j \in V', \quad i < j, \quad (4.53)$$

$$\sum_{i \in \bar{V}} x_{ik} \leq 1, \quad k \in V', \quad i \neq k, \quad (4.54)$$

$$\sum_{j \in \bar{V}} x_{kj} \leq 1, \quad k \in V, \quad j \neq k, \quad (4.55)$$

$$x_{i1} = 0, \quad i \in V', \quad (4.56)$$

$$x_{nj} = 0, \quad j \in V', \quad (4.57)$$

$$\sum_{i \in V'} x_{1i} = m, \quad (4.58)$$

$$\sum_{j \in V'} x_{jn} = m, \quad (4.59)$$

$$f_{ij} \geq 0, \quad f_{ji} \geq 0, \quad \forall i, j \in \bar{V}, \quad (4.60)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in \bar{V}, \quad (4.61)$$

$$m \in \mathbb{N}. \quad (4.62)$$

A função objetivo (4.47) é minimizar o custo total. As Restrições (4.48) assegura que cada vértice de V' é visitado no máximo um vez, ou seja, o vértice visitado possui apenas dois arcos ativos.

As Restrições (4.49)-(4.52) definem as variáveis de fluxo. Especificamente, as Restrições (4.49) afirmam que o fluxo de entrada menos o fluxo de saída em cada vértice $i \in V'$ é igual ao dobro da demanda $2d_i$. O fluxo de saída em 1 (Restrição (4.50)) é igual o somatório da demanda nos vértices, e o fluxo de saída em n corresponde ao total da capacidade da frota de veículo (4.51).

As Restrições (4.52) indicam que soma dos fluxos em ambos os sentidos é igual a capacidade do veículo. Além dos mais, se os arcos (i, j) ou (j, i) forem percorridos, essa restrição elimina a volta. As Restrições (4.53) estabelecem que no máximo um dos arcos podem estar ativos entre dois vértices. As Restrições (4.54) e (4.55) correspondem a existência de no máximo um arco ativo com fluxo de chegada e partida, respectivamente no vértice k , e além disso verifica as Restrições (4.48). As Restrições (4.56) e (4.57) garantem que nenhum arco retorna ao depósito e nenhum arco inicia na cópia do depósito. As Restrições (4.58) e (4.59) garantem que o o número de veículos que sai do depósito são iguais ao número que retorna a cópia do depósito.

4.7 Formulação com fluxo equilibrado

O modelo matemático PRVGF tem como função objetivo minimizar a distância total das rotas. Provavelmente, deverá ocorrer uma redução no número de rotas, pois o modelo usa a capacidade do veículo, que no caso do ônibus é de 48 lugares. Atualmente, os 6 ônibus disponíveis possuem no total 288 lugares. Além disso, o número de passageiros no primeiro turno da manhã é igual a 176. Então eles poderiam ser atendidos com uma frota de veículos inferior a configuração atual. Uma vez que o solver encontrará uma configuração com a menor distância possível além de usar menos veículos.

Se for enfatizado apenas a redução da distância e no número de veículos otimizado pela solução do modelo, seria simples. No entanto, várias abordagens de pesquisa operacional englobam outros fatores na tomada de decisão. O operador do sistema necessita de mais informações para executar melhor o planejamento das rotas atribuídas aos respectivos veículos, além dos pontos com demanda específica de passageiros para cada rota.

Uma vez que a capacidade do veículo não pode ser violada, se o número de rotas diminuir pode ocorrer aumento significativo no número de passageiros por rota, e conseqüentemente, aumento no número de vértices (pontos de ônibus) visitados. Assim, o tempo gasto para o embarque de passageiros e percurso completo por rota, pode aumentar também.

Atualmente existem 110 vértices (incluindo o depósito) divididos entre as 6 rotas resultando em um média de 18,33 de pontos por rota. A configuração atual da rota possuiu um número mínimo de vértices visitados (11), e um valor máximo de (27). Utilizando os métodos exatos, ao verificar o que acontece com o número de rotas, possivelmente irá diminuir, uma vez que a capacidade do veículo não é ultrapassada. A consequência é aumentar o número de passageiros por veículo, gerando outro problema, pois os funcionários tem horário definido de entrada na indústria.

Uma forma de resolver esse problema, é a abordagem de equilíbrio proposta por (OTA, 2018). A autora apresenta os parâmetros $\rho = \tilde{\rho} - r$, correspondentes aos limitantes superiores e inferiores da quantidade de vértices visitados por rota. A contribuição da autora é modificar os parâmetros ρ e $\tilde{\rho}$ para que sejam variáveis. O próprio modelo irá fornecer a melhor quantidade de vértices em cada rota mantendo o balanceamento. Para isso adiciona-se as Restrições (4.63) :

$$f_{1j} \geq x_{1j}\rho, \quad \forall j \in V' \quad (4.63)$$

garantindo que tenha uma quantidade mínima de vértices visitados em cada rota. A partir da Equação (4.39) conclui-se que $\rho = \tilde{\rho} - r$, onde r é o parâmetro de balanceamento (a diferença entre o limitante inferior e superior da quantidade de vértices por rota).

Em sua estrutura, o modelo matemático discutido, envolve o número de passageiros embarcados e o trabalho sobre os vértices, o qual será a inspiração para construir o modelo equilibrado dos passageiros.

Com as modificações nos parâmetros para variáveis, as restrições configuram um problema não linear. O intuito dessa dissertação é resolver tal situação, sem utilizar processo de linearização, mas transformar as novas variáveis em funções dependentes de parâmetros adicionados.

Linearização

De acordo com a proposta, o antigo parâmetro - capacidade do veículo Q , será transformado em duas novas variáveis, para possibilitar o equilíbrio do número máximo e mínimo de passageiros embarcados por rota. Atribuindo a Q a quantidade máxima e q o quantidade mínima, ambos se tratando de funções dependentes de dois parâmetros adicionais.

O primeiro parâmetro m corresponde a quantidade de rotas/veículos utilizados na solução do problema. O número e rotas m era caracterizado como variável no modelo PRVGF. E o segundo parâmetro $2r$ representa a diferença em módulo da quantidade máxima e mínima de vértices visitados.

Neste trabalho, a contribuição proposta no processo modificação do modelo

não linear com as duas variáveis Q e q , supõe um modelo linear, através da dependência das duas variáveis em função dos novos parâmetros m e r .

Variáveis

- Q limite superior de passageiros embarcados;
- q limite inferior de passageiros embarcados.

Parâmetros

- m quantidade de rotas/veículos utilizados;
- $2r$ diferença modular entre as variáveis.

O objetivo é equilibrar o número de passageiros por rotas. Então, o intuito é determinar o valor de r que forneça esse equilíbrio da quantidade de passageiros em torno da média por rota. Como o valor é obtido através da diferença entre a quantidade máxima e mínima deve-se reduzir o valor. Para calcular a média desejada de passageiros por rota, denominado a , calcula-se o seguinte valor.

$$a = \frac{\sum_{i \in V'} d_i}{m}, \quad (4.64)$$

Nesse contexto, há o quociente entre da demanda total de passageiros em V' e o total de veículos. Assim, quando o número de passageiros embarcados por rota está próximo do parâmetro a , obtemos rotas equilibradas em relação a quantidade de passageiros por rota.

Por exemplo, para 176 passageiros distribuídos em 6 rotas obtemos como média $a = 29,33$. Como este resultado não é um número inteiro, definimos os seguintes parâmetros $Teto = \lceil a \rceil$ e $Piso = \lfloor a \rfloor$. Se a quantidade de passageiros máxima Q e mínima q embarcados por rota estiver próxima desses valores é admissível encontrar um equilíbrio na quantidade de passageiros por rota.

Na atual configuração da rota, o valor máximo e o valor mínimo de passageiros por rota são respectivamente 36 e 25. A diferença entre o máximo e o teto é igual a $r_1 = 6$. Desse modo, a diferença entre o valor mínimo e o piso corresponde a $r_2 = 4$. Determina-se que o máximo seja maior ou igual $q \leq Piso$, e o valor mínimo menor ou igual ao piso $q \leq Piso$.

A relação do modulo entre a diferença das duas variáveis dependentes. No exemplo, temos r_1 e r_2 , sendo que o objetivo é ter apenas um r e esse será o novo e único parâmetro. Obtido pela diferença em modulo das duas variáveis $|Q - q| = 2r$.

Na busca de um valor melhor para o r , a diferença modular entre os valores extremos, objetivou-se atribuir o valor de r o menor possível. E como Q e q são variáveis que dependem de r , teríamos valores mais próximos de a , mantendo o modelo matemático de fluxo mais equilibrado.

Com todo esse processo o modelo ainda continua não-linear devido as variáveis nas restrições. Entretanto, a restrição (4.65) será substituída por q no lugar de ρ e adicionada ao modelo de fluxo a restrição (4.63) para torna-lo linear novamente. Como foi dito anteriormente, não será o número de vértices visitados, mais sim o número de passageiros coletados. No caso o mínimo.

$$f_{1j} \geq x_{1j}q, \quad \forall j \in V' \quad (4.65)$$

E fundamental destacar que o número de passageiros por rotas está conectado a quantidade de rotas, conforme explicitam as equações (4.64) e (4.65). Observando o quociente a , o valor encontrado não é necessariamente inteiro. Tem-se duas possibilidades: Se o número não for inteiro, então será escolhido o maior valor inteiro superior (teto), e o menor valor imediatamente inferior (piso); se o resultado é inteiro, toma-se o valor inteiro.

Se o valor de r for próximo de zero 0, aproximaria os a quantidade máxima e mínimo de passageiros por rota. A quantidade máxima é maior ou igual ao teto, e a quantidade mínima é menor ou igual ao piso. O quociente entre o somatório da demanda sobre o número de rotas, representa maior ou igual a Q se consideramos o limite superior, por outro lado o limite inferior representa menor do que ou igual a Q , lembrando que o quociente representa a , temos então:

$$Q \geq \left\lceil \frac{\sum_{i \in V'} d_i}{m} \right\rceil \quad (4.66)$$

$$q \leq \left\lfloor \frac{\sum_{i \in V'} d_i}{m} \right\rfloor \quad (4.67)$$

Os resultados computacionais do modelo equilibrado serão testados apresentados no Capítulo 5 verificando discussão teórica.

5 Testes computacionais e Resultados

Este capítulo apresenta como os testes computacionais foram realizados. É destacado as funcionalidades da linguagem de programação *JULIA*. Além do mais, explicamos todos os cenários de variações dos testes realizados com os dois modelos matemáticos de fluxo e modelos equilibrados. A terceira seção, apresenta os dados iniciais, dados atuais empíricos, bem como os parâmetros de testes. A quarta seção, apresenta os resultados computacionais em tabelas e gráficos para as comparações com os dados empíricos do problema.

Junto a isso, será apresentado os resultados obtidos para um conjunto de experimentos de dados reais, utilizando o modelo (PRVGF) e o modelo equilibrado, conforme apresentado no Capítulo 4. Os testes foram executados em uma máquina com CPU de 1.80 GHz, 16 GB de RAM, 64 bits, processador Intel(R) Core(TM) i7-8550 e plataforma *Windows*.

5.1 Linguagem de programação JULIA

JULIA é uma linguagem de programação compilada (JIT - *Just In Time*) *open source* de alto nível e projetado com foco na computação científica e numérica de alto desempenho (BEZANSON et al., 2015).

A linguagem teve seu início no MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) em 2009 se tornou *open source* em fevereiro 2012. Geralmente, no contexto de otimização, as linguagens de programação usualmente costumam ter vantagens na produtividade ou desempenho. Como por exemplo, C/C++ é uma linguagem conhecida na literatura de otimização, por possibilitar a implementação de algoritmos de rápida execução.

Entretanto, exige um grau de conhecimento específico para ser dominada, pois se trata de uma linguagem difícil, levando a uma baixa produtividade em relação a outras linguagens. Em contraponto, tem-se o *Python* que se define como implementação de algoritmos sofisticados em um número pequeno de linhas de código, embora o desempenho seja inferior ao C/C++.

Conforme a Figura 10, esses *benchmarks* testam o desempenho do compilador em vários padrões de código comuns: como chamadas de função, análise de sequência, classificação, *loops* numéricos, geração de números aleatórios, recursão e operações de matriz. Destaca-se seu alto desempenho em detrimento dos demais de fácil linguagem e alta performance, aproximando-se do C <<https://julialang.org/benchmarks/>>.

A linguagem foi criada por quatro pesquisadores: Stefan Karpinski, Jeff Beason,

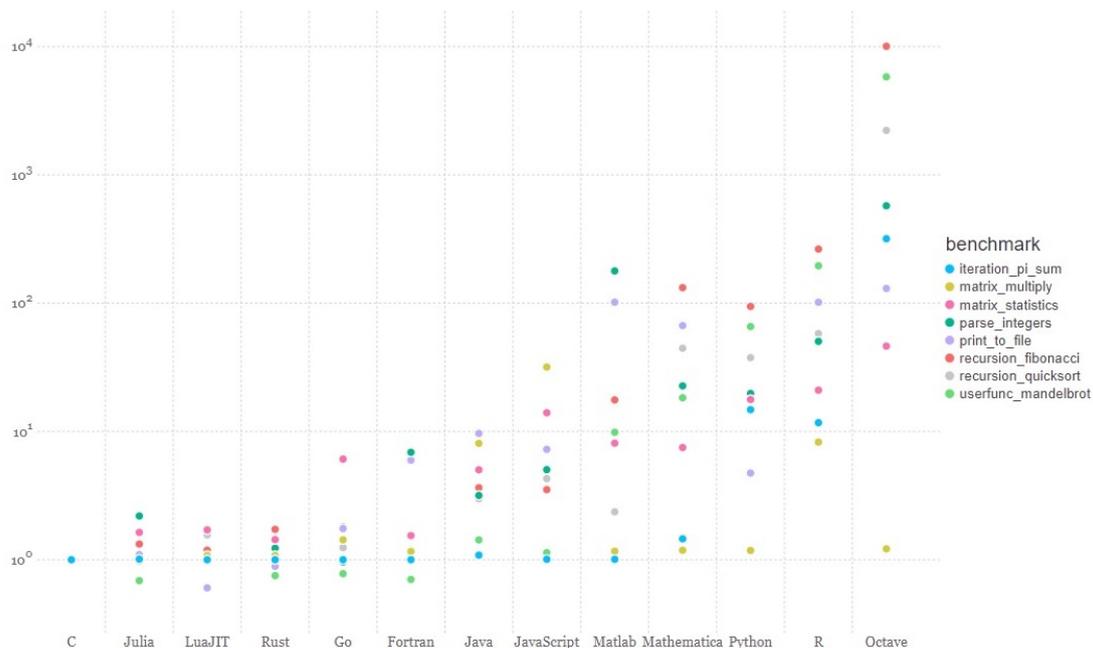


Figura 10 – Indicadores do Julia: *Benchmarks*

Alan Edelmana e Viral Shah (BEZANSON et al., 2015). Ela foi projetada como uma computação científica abastadamente rápida, como as linguagens C e Fortran.

mais equitativamente fácil de aprender como *MATLAB* e o *Mathematica*, seu objetivo principal foi facilitar a modelagem computacional. A lista abaixo apresenta os recursos principais da linguagem :

- Sintaxe intuitiva semelhante ao *MATLAB*;
- Fácil aprendizado e utilização;
- Agrega vantagens de outras linguagens(*MATLAB*, *Phyton*, Rubi, R, C/C++);
- Existem mais de 10 resolvedores de Programação Linear, Linear Inteira Mista, Não Linear, Cônica;
- CPLEX, Gurobi, CBC, GLPK.

Um dos focos deste trabalho é aplicar o modelo na linguagem *JULIA* para Programação Matemática, em especial para Programação Linear Inteira mista, especificamente com o intuito de explorando a JuMP (*Julia for Mathematical Programming*).

Imerso a linguagem Julia existe de Modelagem JuMP, o qual suporta mais de 10 resolvedores de Programação Linear, Programação Não Linear, Cônica de Segunda Ordem, Semi-definida e Não-Linear. Uma característica fundamental do Julia que é possível

implementar em JuMP independente do resolvidor, isto é, independente dos resolvidor a ser utilizado.

A sintaxe da linguagem de programação JULIA é muito semelhante ao *MATLAB*, pois compartilha algumas características importantes. O método usado pelo Solver CPLEX para resolver o modelo matemático é Método Exato *Branch-and-Cut*, descrito no Capítulo 3.

5.2 Cenários dos testes computacionais

O conjunto de dados de testes são todos reais, a destacar a implementação do modelo matemático com a formulação de fluxo, e o modelo equilibrado para número de passageiros por rota. Tal fato, contribui para minimizar, a distância total, além de manter um equilíbrio do número de passageiros por rota embarcados, e número de vértices visitados.

As variações dos testes implementados serão apresentados separadamente em fluxogramas. Inciaremos com o primeiro cenário no fluxograma da Figura 11, para uma melhor compreensão de todos os testes que foram realizados e os resultados obtidos. A implementação na linguagem JULIA se divide no modelo de fluxo e no modelo equilibrado de fluxo.

Primeiro cenário de testes: rotas separadas na garagem

O primeiro cenário de testes utiliza o modelo de fluxo, e refere-se aos veículos, todos eles divididos em três categorias: ônibus, van e micro-ônibus. Todos o testes são implementados em rotas separadamente, ou seja, utilizando os pontos das seis respectivas rotas e partindo do depósito localizado na garagem de ônibus. No primeiro turno (manhã), há o setor operacional da indústria, ocorrendo apenas embarque de passageiros.

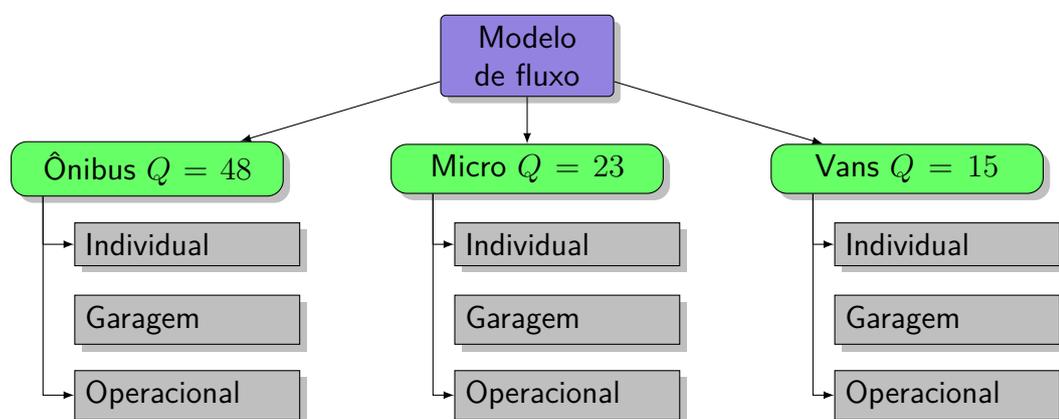


Figura 11 – Características do primeiro cenário

O objetivo é comparar as distâncias empíricas que atualmente são utilizadas pela empresa. Além disso, observa-se a tabela com as distâncias otimizadas, após implementação e análise de redução na distância alternado pontos da rota pelo modelo matemático.

Como todas as rotas começam e terminam na garagem, trata-se de um Problema do Caixeiro viajante (PCV). Para utilizarmos o modelo de fluxo para Problema de Roteamento de Veículos, iremos implementar as rotas em conjunto, definidas como segundo cenário.

Segundo cenário de testes: rotas em conjunto na indústria

O segundo cenário as rotas serão implementadas em conjunto para justificar a utilização de um PRV com modelo de fluxo. As rotas partem da indústria e são implementadas com o modelo matemático de fluxo para os três veículos. A proposta se justifica, pois as rotas serão implementadas em conjunto, ou seja, inicia e termina a rota na indústria.

O objetivo principal é analisar o comportamento do número de rotas o fluxo de passageiros por rotas, comparando ao primeiro cenário otimizado. Nele, o número de passageiros e número de vértices visitados permanece constante em relação ao resultado empírico. No que se refere ao objetivo secundário, trata-se de comparar a distância das rotas empíricas com as rotas otimizadas em conjunto, e também a distância das rotas otimizadas.

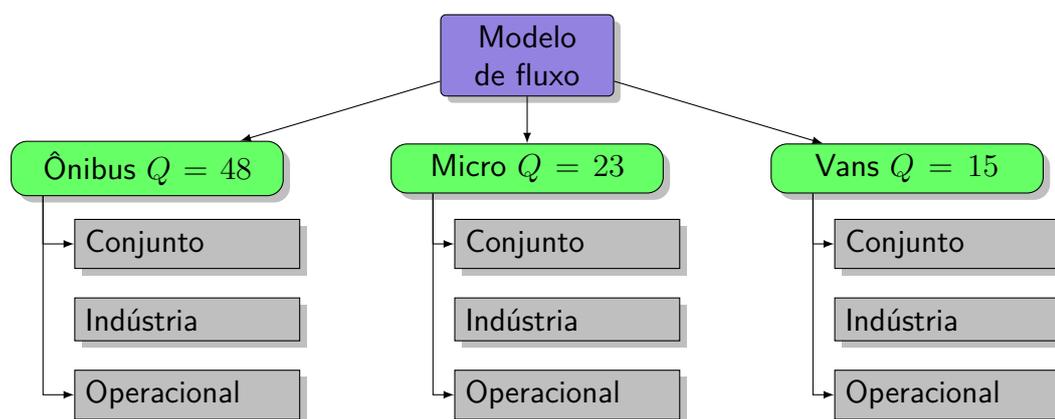


Figura 12 – Características do segundo cenário

Na Figura 12 verifica-se que todas as rotas são implementadas partindo da indústria, já que o modelo inicia e termina no depósito. Vale ressaltar, que se o mesmo for implementado na garagem inviabiliza a proposta, uma vez que todas as rotas da solução, apenas uma passaria na indústria para realizar o desembarque.

Terceiro cenário de testes: rotas separadas na indústria

O terceiro cenário utiliza o modelo de fluxo matemático, implementado na linguagem JULIA. A diferença é que as rotas serão implementadas separadamente, ou seja, a configuração atual das rotas em número de passageiros e número de vértices visitados será mantida. Mas, para comparação com segundo cenário, há uma otimização, pois partindo da indústria verifica-se uma distância entre as variáveis de fluxo e número de vértices.

O objetivo é comparar as distâncias em rotas conjunto, que implicam diretamente em uma redução e nas rotas separadas, já que mantém o número de rotas fixas.

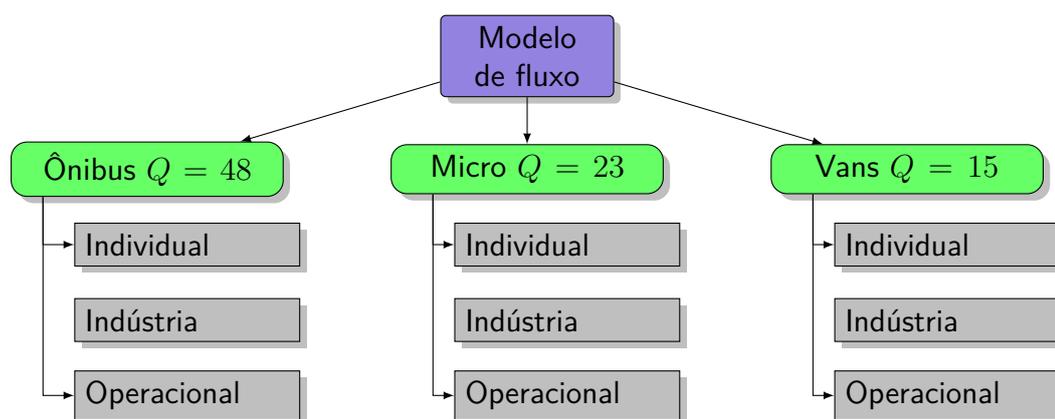


Figura 13 – Características do segundo cenário

O fluxograma da Figura 13 apresenta uma melhor compreensão para essa bateria de testes a ser realizado. Desse modo, há possibilidade de utilizar vans e micro-ônibus, pois para executar a tarefa são realizados apenas com ônibus.

Quarto cenário de testes: modelo equilibrado

A proposta é equilibrar o modelo em relação ao número de passageiros que utilizam o serviço por rota. Quando se otimiza as rotas em conjunto, ocorre uma redução no número de rotas em relação aos dados empíricos. Tal fato, ocasiona um aumento no número de passageiros por rota, e conseqüentemente, o número de vértices visitados, o que gera um aumento no tempo de execução da rota.

Nessa quarta bateria de testes o número m de vértices visitados com ônibus, van e micro-ônibus será escolhido de acordo com os resultados de teste para o segundo cenário. O essencial é discutir através do modelo equilibrado, a utilização de outros tipos de veículos além do ônibus. E assim, objetiva-se controlar o tempo e distância de cada rota através do fluxo de passageiros por rota, e conseqüentemente o número de vértices visitados por rota. Isso é estabelecido com o número m de veículos utilizados por rota, e o número $2r$, que é o valor do módulo da diferença entre o número máximo Q ; e o número mínimo q , e passageiros por rota.

Nesse novo cenário, o número Q e o número q passam a ser variáveis no modelo implementado e o número m e r são parâmetros de testes, conforme o fluxograma da Figura 14. O objetivo crucial é equilibrar, otimizando a distância, e também, mantendo um número razoável de rotas e fluxo passageiros, de tal forma que não aumente o tempo de execução por veículo.

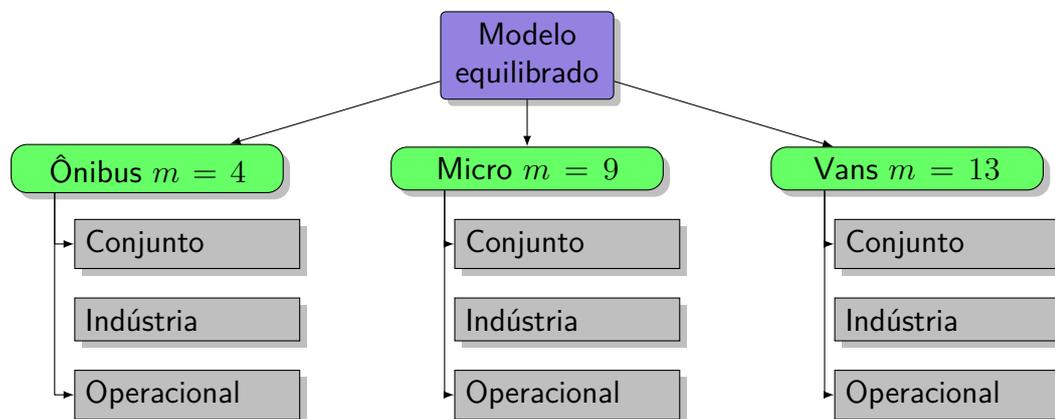


Figura 14 – Características do quarto cenário

Quinto cenário: uso de veículos distintos variando os parâmetros r e m

No quinto cenário será realizada uma bateria de testes para verificar a aplicabilidade do modelo de fluxo equilibrado proposto no final do capítulo 04. Nesse contexto, não ocorrerá variações nos veículos, mais sim no número de rotas m e no número r . Além disso, será realizada a análise de diferença entre as variáveis dependentes, número máximo e número mínimo de passageiros.

O objetivo é analisar as possíveis combinações entre utilizar van, micro-ônibus e ônibus em uma mesma rotina, ou seja, algumas rotas serem utilizadas por micro-ônibus e van, de acordo com a demanda do número de passageiros por rota e capacidade disponível do veículo, conforme exemplificado no fluxograma da Figura 15.

Todos os veículos partem da indústria, e retornam a mesma. No primeiro turno da manhã encontram-se os funcionários do operacional, a partir do modelo de fluxo equilibrado. As rotas implementadas em conjunto, para analisar as opções de veículos de acordo com a demanda. Assim, será possível modificar a variável de equilíbrio e o número de rotas.

Cenário inicial: valores empíricos dos ônibus na garagem

Nesta seção será apresentada os dados empíricos e a configuração atual das rotas, além da distribuição de pontos por rotas, bem como número de passageiros que utiliza o serviço.

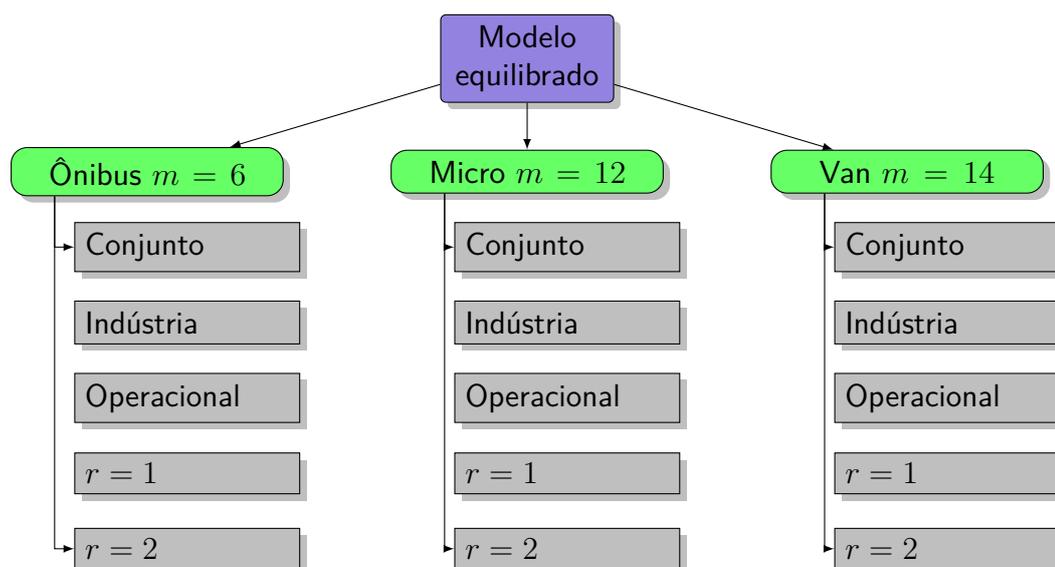


Figura 15 – Características do quinto cenário

O objetivo desta seção é comparar os dados iniciais para verificar os resultados obtidos após os diversos cenários de testes, propondo assim melhorias para otimização das rotas. Todas as rotas partindo da garagem, passando pela indústria e retornando a garagem.

Rotas	Pontos de ônibus	Passageiros	Capacidade	Distância empíricas (m)
1	14	25	48	17.803
2	18	34	48	29.742
3	19	28	48	18.119
4	25	25	48	18.325
5	16	28	48	26.914
6	24	36	48	57.491
Σ	116	176	288	168.394

Tabela 11 – Demandas e distâncias empíricas das rotas separadas

Na Tabela 11 verifica-se o número de pontos de ônibus e a distribuição da rota planejada pelo departamento da empresa de tráfego em parceria com a solicitação e demanda da indústria. A metodologia utilizada foi o cálculo, através do *Distance Matrix API* e VBA do *software* Excel, obtendo assim, a distância real das ruas em quilômetros com aproximações na ordem das unidades.

Pontos de ônibus

Os pontos de ônibus foram incluídos na primeira etapa da seguinte maneira: os seis veículos partem da garagem no primeiro turno da manhã, embarcando todos os passageiros nos respectivos pontos próximos de suas casas. Logo em seguida, desembarcam todos na indústria.

Desse modo, foram coletadas separadamente, as demandas as demandas em cada ponto, bem como as coordenadas geográficas.

O número de pontos de ônibus totaliza 116, pois como as rotas são calculadas separadamente, e cada rota possuiu um depósito, estamos contando 6 depósitos em cada rota.

Quando os pontos são implementados em conjunto totaliza 111 pois temos os 110 pontos mais o depósito, e subtraindo 5 depósitos das rotas separadas, obtemos o valor de cento e onze. Tudo isso, inclui o depósito, ou seja, a garagem.

Número de passageiros

Os Passageiros são embarcados separadamente, em cada ponto, próximos de suas residencias. Esses dados estão contabilizados na tabela 11 e totalizam 176 funcionários no primeiro turno da manhã.

Logo em seguida, os ônibus que estão localizados no segundo turno da indústria são responsáveis por embarcar os funcionários que trabalham no último turno da noite. Então, os veículos partem da indústria, realizando o desembarque desses funcionários e ao mesmo tempo, embarcando os funcionários do administrativo.

Capacidade do Veículo

A empresa conta com uma frota disponível de seis ônibus e mais um ônibus reserva, caso haja manutenção ou imprevisto. Em cada um deles há 48 lugares. E além disso, a empresa conta com algumas vans e micro-ônibus, com 15 e 23 lugares respectivamente.

Atualmente, essas vans não são usados para esse fim. Entretanto, como a demanda de passageiros não ultrapassa esse limite de 48 em cada roda, pode-se realizar experimentos, alternando a capacidade dos veículos no modelo matemático, e assim obter resultados de acordo com a capacidade dos veículos.

Distâncias empíricas

As distâncias empíricas, são determinadas pela sequência de pontos construídos, de acordo com a experiência prática dos funcionários. As distâncias foram calculadas e apresentadas em metros. Logo após, as rotas foram somadas para uma comparação com as rotas otimizadas. Junto a isso, foi realizado o mapeamento das coordenadas com o software HERE, e assim, os dados foram inseridos no programa EXCEL.

Tudo isso, permitiu a construção da matriz distância não euclidiana e assimétrica, pois condiz com a distância real das ruas. Todos os testes computacionais foram implementados na linguagem de programação JULIA.

5.3 Resultados dos cenários

De acordo com os cenários discutidos na seção 02 iremos apresentar os tetes dos resultados computacionais em comparação com os resultados empíricos, bem como a análise dos resultados.

Cenário 01: otimização das rotas separadas na garagem

O primeiro cenário de testes apresenta as características descritas na Figura 11. Vale ressaltar que para o modelo de fluxo, utiliza-se software de linguagem, descrito na primeira seção. Os testes feitos são realizados com as três variações de veículos: ônibus, micro-ônibus e vans. Partindo da garagem e retornando a mesma. O embarque de passageiros é realizado no primeiro período da manhã. As rotas foram implementadas individualmente, conforme apresenta na Tabela 12. Um resumo das características é apresentado a seguir:

- Veículos: ônibus com capacidade $Q = 48$ lugares;
- Rota: todos os ônibus iniciam e terminam na garagem;
- Testes: cálculo das rotas $r = \{1, 2, \dots, 6\}$ foram implementadas separadamente;
- Demanda: relacionada aos funcionários do primeiro turno.

O objetivo desse experimento é comparar as distâncias atuais com as distâncias obtidas pelo modelo matemático implementadas pelo software. Dessa forma, será possível medir a eficiência do modelo matemático proposto nesse trabalho, através do *GAP* relativo, aplicado ao problema de Itumbiara, que possuiu distâncias não-euclidianas, mas sim as distâncias reais das ruas, se aproximando mais ainda do modelo real que se pretende resolver.

rotas	distância atual	distância	tempo (s)	gap (%)
1	17.803	17.285	0,14	2,91
2	29.742	27.842	0,06	6,39
3	18.119	16.837	0,31	7,08
4	18.325	17.766	0,33	3,05
5	26.914	24.075	0,20	10,55
6	57.491	56.242	1,00	2,17
Σ	168.394	160.047	2,04	4,96

Tabela 12 – Distâncias otimizadas das rotas separadas

O gap relativo da tabela 12 é determinado através do quociente entre o módulo da diferença entre a distância atual (DA) e distância otimizada (DO), divididos pela

distância atual (DA). Obter o valor percentual basta multiplicar por 100 o resultado. Em termos matemáticos a equação (5.1) é representada:

$$\text{gap} = \frac{|DA - DO|}{DA} \times 100 \quad (5.1)$$

Primeiramente, a metodologia proposta é resolver primeiro todas as rotas separadamente, para isso, encontrar a melhor sequência de pontos que cada ônibus deve percorrer em cada rota, sempre respeitando o limite máximo passageiros.

Os resultados obtidos com os testes demonstram uma redução na distância percorrida em cada rota, e conseqüentemente a distância total. O maior valor de 10.55% na rota 5 e o menor valor do *gap* 2.17% na rota 6. É importante ressaltar que a rota seis agrega pontos em outras duas cidades de Minas Gerais.

Em todos os casos houve uma redução na distância total de 8.347 Km, partindo da garagem, passando pelos pontos em direção à indústria e retornando na garagem. O somatório das distâncias de todas as rotas e exibe um *gap* de aproximadamente 4,96%.

Deve-se destacar a capacidade do veículo. No ônibus com $Q = 48$ lugares, as demandas não são ultrapassadas com esse limite em cada rota, conforme explicitado na Tabela 11. Podemos contabilizar 112 lugares ociosos, diferença entre a demanda d_i , $i \in V'$, e a capacidade dos veículos mQ . A questão principal é por que de usar essa quantidade de ônibus.

O problema é semelhante ao modelo matemático do Problema do Caixeiro Viajante, pois a forma que foi implementada com as rotas separadamente e não ultrapassando a capacidade dos veículos.

É natural a questionar a opção pelo modelo do problema de roteamento com fluxo. Uma resposta é a própria eliminação de sub-rotas, conforme abordado anteriormente. Outra argumentação para o uso do modelo de fluxo, está endossada na implementar do modelo com os dados de todas as rotas em conjunto, ou seja, um PRV.

Nesse cenário não é possível calcular o trajeto para vans e micro-ônibus, uma vez que a solução necessita apresentar mais de uma rota, começando e terminando na garagem. Contudo, o problema impõe que todas as rotas passagem pela indústria antes de retornar ao depósito. O que é inviável no modelo, pois a indústria será considerada no modelo como um ponto. Se apenas uma rota passar para realizar o embarque, torna-se infactível a resolução.

Cenário 02: otimização das rotas em conjunto dos veículos na indústria

Os dados do segundo cenário de testes apresenta as características descritas na Figura 12. Vale destacar que utiliza-se o modelo de fluxo e o software descrito na

primeira seção. A diferença essencial do primeiro para o segundo cenário consiste no fato da mudança do depósito, que se encontrava na garagem para indústria.

Principalmente pelo motivo que as rotas serão implementadas em conjunto para os três tipos de veículos. O modelo prevê início e término no mesmo local, o depósito, os demais pontos são visitados apenas uma vez, tornando ineficaz esse cenário com depósito localizado na garagem. A matriz custo deve ser modificada para realizar os cálculos.

- Na rota total o número de veículos é variável $m \geq 1$;
- Veículos: ônibus, micro-ônibus e vans; com capacidade $Q = 48$, $Q = 23$ e $Q = 15$ lugares respectivamente;
- Rota: todos os veículos iniciam e terminam na indústria;
- Testes: cálculo das rotas $r = \{1, 2, \dots, 6\}$ foram implementadas em conjunto;
- Demanda: relacionada aos funcionários do primeiro turno.

O objetivo é analisar a redução da distância total otimizada. Para uma melhor comparação é ideal implementar as rotas partindo da indústria. Contudo o objetivo essencial do segundo cenário é analisar, as distâncias das rotas separadamente e verificar seu comportamento, o número de vértices por rota, e o fluxo de passageiros por rota. Tudo isso será, comparando com os dados empíricos e com as três variações: ônibus, vans e micro-ônibus.

A metodologia consiste na modificação do depósito, da garagem para a indústria. Para efetuar os cálculos no cenário 02, modificamos os dados da matriz custo de tal forma que, o depósito a ser considerado não será mais a garagem dos ônibus. Agora, todos os ônibus partem do depósito atual, ou seja indústria. Além disso, retornam a mesma, desembarcando o passageiros do primeiro turno da manhã.

Como critério de parada para implementação, o tempo foi fixado em 1 hora e o *gap* é apresentado, em relação ao tempo. Em termos teóricos, os ônibus saem da indústria embarcando passageiros e passando apenas uma única vez em cada ponto. Logo após, retornam a indústria, desembarcando o total de passageiros coletados. Com isso, iremos obter a distância total das rotas, partindo do depósito e retornando ao mesmo. Os resultados obtidos estão contabilizados na Tabela 13.

A discussão dos resultados da Tabela 13 apresenta os dados de cada veículo, com as três capacidades diferentes $Q = 48$ para o ônibus, $Q = 23$ para o micro-ônibus e $Q = 15$ para a Van. É possível aumentar o número de rotas, uma vez que são embarcados 176 funcionários em 109 pontos distintos utilizando veículos com as capacidades descritas acima.

ônibus	rotas	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
	1	30.545	28	48	5,82
	2	42.556	32	48	5,82
	3	15.366	21	39	5,82
	4	23.614	28	41	5,82
Σ	4	112.081	109	176	5,82
micro	rotas	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
	1	16.998	16	23	22,35
	2	37.153	16	23	22,35
	3	29.758	12	23	22,35
	4	14.659	14	19	22,35
	5	34.845	17	23	22,35
	6	17.896	9	15	22,35
	7	3.950	3	8	22,35
	8	17.334	13	23	22,35
	9	12.650	9	19	22,35
Σ	9	185.243	109	176	22,35
vans	rotas	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
	1	24.095	8	15	22,92
	2	16.686	8	15	22,92
	3	11.047	4	12	22,92
	4	32.259	10	14	22,92
	5	15.477	5	14	22,92
	6	12.198	13	14	22,92
	7	16.102	6	12	22,92
	8	5.539	6	13	22,92
	9	15.484	15	15	22,92
	10	18.940	10	15	22,92
	11	13.324	6	10	22,92
	12	17.413	8	12	22,92
	13	56.542	10	15	22,92
Σ	13	255.106	109	176	22,35

Tabela 13 – Resultado segundo cenário: rotas em conjunto e depósito na indústria

O ônibus apresentam apenas 4 rotas e o valor da distância total otimizada é 112.081 m. Isso se compararmos apenas as distâncias totais com o micro-ônibus e a van que apresentam respectivamente na resolução as distâncias de 185.243 m e 255.106 m, distribuídas nas rotas com 9 e 3 trechos.

Notamos um aumento no número de veículos utilizados e na distância total. Contudo, vamos analisar outros aspectos para a tomada de decisão: verificar o número de vértices visitados, número de passageiros embarcados e a distância otimizada em cada rota, conforme a Tabela 19.

Os primeiros resultados em relação ao ônibus, apresentam uma redução significativa no número de rotas no primeiro período da manhã. Inversamente proporcional,

ocorre um aumento significativo no número da distância por cada rota, no número de vértices visitados e no número de passageiros embarcados.

É fato que a distância total diminui consideravelmente. Para uma comparação mais fiel, no terceiro cenário será realizada a análise do *gap* da distância total. O *gap* representado na tabela, é o resultado do quociente entre o modulo da diferença entre a melhor solução inteira (MI) e o melhor corte (MC), dividido pela melhor solução inteira e multiplicado por 100. Matematicamente o *gap* é apresentado na seguinte expressão da equação (5.2).

$$\text{gap} = \frac{|MI - MC|}{MI} \times 100 \quad (5.2)$$

Como previsto na discussão do Capítulo 4, minimizar a distância total está sujeito a restrições pois se a capacidade do veículo não foi ultrapassada, geraria um aumento no número de vértices visitados e passageiros embarcados, acarretando um maior tempo para realização dessa atividade com um número menor de veículos. A solução foi propor um modelo equilibrado a ser discutidos no quarto e quinto cenários.

Entretanto, a análise deve se estender para outros aspectos, tais como: número de vértices visitados, distância otimizadas das rotas separadas e número de passageiros por rota. O tempo de execução dos experimentos é o mesmo, contudo o *gap* apresenta uma diferença percentual razoável.

Cenário 03: otimização das rotas separadas dos veículos na indústria

No terceiro cenário de teste realizado com os veículos, o que diferencia o segundo cenário são as rotas implementadas de forma separada. O objetivo principal é analisar a otimização das distâncias em conjunto (segundo cenário) com as distâncias das rotas otimizadas separadamente (terceiro cenário), pois o número de passageiros por rota e o número de vértices visitados se manterá semelhante ao primeiro cenário, conforme explicitado a seguir:

- Na rota total o número de veículos é fixo;
- Veículos: ônibus, micro-ônibus e vans; com capacidade $Q = 48$, $Q = 23$ e $Q = 15$ lugares respectivamente;
- Rota: todos os veículos iniciam e terminam na indústria;
- Testes: cálculo das rotas $R = 1, 2, \dots, 6$ foram implementadas separadas;
- Demanda: relacionada aos funcionários do primeiro turno.

No terceiro cenário, a discussão centra em torno das distâncias otimizadas entre os três veículos, partindo da indústria no primeiro período da manhã. A comparação com o segundo cenário está centrada na distância total, analisando o *gap* da redução. Além do mais, há análise do número de vértices visitados por rota em conjunto: rotas separadas; número de passageiros embarcados, e a distância em cada rota individualmente, conforme apresentado na Tabela 14.

ônibus	rotas	distância	# vértices	# passageiros	tempo(s)
	1	16.611	14	25	0,13
	2	26.966	18	34	0,08
	3	16.151	19	28	0,47
	4	17.080	25	25	0,25
	5	23.275	16	28	0,11
	6	55.479	24	36	0,41
Σ		155.562	116	176	1,45
micro	rotas	distância	# vértices	# passageiros	tempo(s)
	1	16.459	11	23	0,14
	2	8.209	2	2	0,14
	3	23.677	12	21	0,36
	4	18.259	5	13	0,36
	5	14.080	12	15	0,33
	6	42.228	6	13	0,33
	7	17.146	22	23	0,2
	8	4.739	2	2	0,2
	9	23.178	13	23	0,27
	10	6.777	2	5	0,27
	11	53.839	10	19	1,69
	12	16.473	13	17	1,69
Σ	12	245.064	110	176	2,99
van	rotas	distância	# vértices	# passageiros	tempo(s)
	1	11.068	5	10	0,23
	2	15.435	8	15	0,23
	3	19.520	6	15	2,2
	4	22.687	10	15	2,2
	5	3.836	1	4	2,2
	6	14.080	12	15	0,14
	7	4.228	6	13	0,14
	8	12.219	10	11	1,64
	9	14.559	14	14	1,64
	10	17.113	8	15	0,81
	11	15.026	7	13	0,81
	12	54.201	10	15	2,97
	13	54.067	8	15	2,97
	14	13.402	5	6	2,97
	14	271.441	110	176	7,99

Tabela 14 – Resultados terceiro cenário: rotas separadas partindo da indústria

Comparando a Tabela 13 com a Tabela 14, que correspondem aos cenários dois e três respectivamente, notamos há uma distância total otimizada partindo da indústria com os três veículos. No ônibus ocorreu um aumento de 112.081 m para 155.569 m; já em relação a micro-ônibus teve um aumento de 185.243 m para 245.064 m; e por último nas vans passaram de 244.106 m para 271.441 m. Em todos os casos, ocorreu um aumento na distância, pois as rotas otimizadas em conjunto permite a permutação entre os pontos das rotas originais (empíricas). O mesmo não ocorre com as rotas implementadas separadamente, já que elas preservam a configuração dos pontos atuais na rota, mas não preservam a sequência.

O número de vértices também sofreu variações entre os veículos, como por exemplo: o ônibus alterou de 4 para 6; os micro-ônibus de 9 para 12, e as vans de 13 para 14 rotas. Totalizando 111 pontos, o tempo gasto para implementar as rotas em conjunto foi estabelecido com limite máximo de 1 h. Já o tempo para implementar as rotas separadas é inferior a 3 s, pois o número máximo de pontos na atual configuração é 25 pontos na rota cinco 5, e o menor 15 pontos na rota 01.

Torna-se necessário implementar as rotas em conjunto, quando observa apenas a distância total otimizada. Uma análise mais sucinta é realizada em torno do conjunto de: passageiros embarcados, e vértices visitados e distâncias separadas de cada rota.

Convém evidenciar a diferença entre o número de vértices visitados e também o número passageiros embarcados. Por exemplo, nas rotas 7 e 8 do micro-ônibus, há uma distância de 12.407 m entre o valor máximo de 17.146m, e o valor mínimo de 4.739 m no trecho da rota.

Nesse sentido, temos outra diferença de 21 passageiros, chegando em uma solução com 23 em uma rota e 2 passageiros em outra. Tal contexto, evidencia ser um problema, ocasiona um desequilíbrio muito grande em todos sistema. As discussões no Capítulo 4, possibilitaram a realização de um modelo de fluxo equilibrado, que aborda o quarto e quinto cenários de teste.

Cenário 04: modelo equilibrado veículos na indústria

O quarto e quinto cenários são fundamentais para analisar a proposta do modelo matemático equilibrado (PRVGE), influenciando nos resultados discutidos no 4. Principalmente, no que diz respeito ao número de passageiros embarcados em torno de uma média, verificar experimentalmente, e representá-lo em gráficos e tabelas.

Todas as rotas foram implementadas com os veículos, iniciando e terminando na indústria. Nesse momento, averiguando-se qual dos três veículos seria utilizado para os teste: ônibus, micro-ônibus ou van. A partir de agora o parâmetro Q passa a se tornar duas variáveis, relacionando a quantidade máxima Q e mínima qd de passageiros embarcados

por rota. As duas variáveis são dependentes do parâmetro m , e o parâmetro $2r$ a diferença entre os valores. Desse modo, é preciso lembrar a mudança no modelo matemático PRVG, através da proposta de equilíbrio de passageiros por rota, sendo modificado para o Problema de Roteamento de Veículos Generalizado Equilibrado (PRVGE).

Variáveis

- Q limite superior de passageiros embarcados;
- q limite inferior de passageiros embarcados.

Parâmetros

- $m = \{4, 9, 13\}$ quantidade de rotas/veículos utilizados;
- $r = \{1, 2\}$ diferença modular entre as variáveis.

As escolha do parâmetro m está diretamente ligada ao número de rotas obtidas no segundo cenário. A escolha do valor de r é sempre a menor possível, desde que o solver resolva no tempo inferior a 1h.

Quando analisamos a tabela para o valor de $m = 4$, cujo resultado da divisão de 176 por 4 resulta em 44, o valor de r definido previamente, permite controlar o fluxo de passageiros nas quatro rotas. Uma consequência observada é um equilíbrio no número de vértices visitados. Quando $r = 1$ oscila em torno de 25 a 29, e com $r = 2$ em torno de 23 e 30. Quando se aumentado o número de rotas para $m = 9$, e logo após $m = 13$ o *gap* aumenta consideravelmente, chegando a 79,59%. Isso se deve principalmente a um valor muito baixo para o $r = 1$. Os resultados referentes a distância, quantidade de vértices visitados e número de passageiros por rota apresentados, que estão nas Tabelas 15 e 16, são ilustrados em gráficos, como o intuito de destacar o comportamento do equilíbrio no modelo de fluxo proposto. Dessa forma, é possível manter um equilíbrio entre as rotas evitando diferenças excessivas entre valores de máximo e mínimo no número de passageiros embarcados.

O testes computacionais apresentaram os seguintes resultados conforme as Tabelas 15 e 16. Todos os testes foram implementados com critério de parada de 1h. Contudo, algumas situações não foram suficiente para obter um *gap* razoável. Por exemplo, quando implementado com $r = 1$ e $m = 13$, o *gap* obtido é 71,81 %. No próximo teste com $r = 1$ e $m = 13$ o *gap* obtido é 40,49 %. Possivelmente, o valor de r tem influência nos resultados. Ele equilibra a diferença entre o máximo e mínimo. No próximo e ultimo cenário de testes, iremos implementar com $r = 2$ e $r = 2$ para mais análises.

r	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
1	1	31.934	28	43	26,56
1	2	24.309	29	44	26,56
1	3	58.406	25	45	26,56
1	4	30.229	27	44	26,56
Σ	4	144.878	109	176	26,56
r	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
2	1	38.454	30	43	16,25
2	2	24.827	23	45	16,25
2	3	28.691	30	42	16,25
2	4	34.992	26	46	16,25
Σ	4	126.964	109	176	16,25
r	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
1	1	125.470	12	18	79,59
1	2	58.112	10	21	79,59
1	3	85.800	8	18	79,59
1	4	44.404	13	21	79,59
1	5	108.842	14	20	79,59
1	6	103.087	16	21	79,59
1	7	140.434	16	19	79,59
1	8	35.720	12	19	79,59
1	9	56.744	8	19	79,59
Σ	9	758.613	109	176	79,59
r	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
2	1	23.815	10	19	21,68
2	2	28.241	12	17	21,68
2	3	37.352	15	22	21,68
2	4	16.124	11	17	21,68
2	5	15.112	12	20	21,68
2	6	16.008	12	21	21,68
2	7	18.559	10	20	21,68
2	8	15.122	16	20	21,68
2	9	24.058	11	20	21,68
Σ	9	194.391	109	176	21,68

Tabela 15 – Resultados quarto cenário: modelo equilibrado

Cenário 05: modelo equilibrado veículos na indústria

O quinto cenário de testes continua com o modelo de fluxo equilibrado PRVGFE, analisando mais variações de m e r de tal forma que, o valor de m seja uma das soluções apresentadas do terceiro Cenário 3.

Parâmetros

- $m = 6, 12, 14$: quantidade de rotas/veículos utilizados;
- $r = 2, 3$: diferença máxima entre o número de passageiros nas diferentes rotas.

r	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
1	1	54.626	9	12	71,81
1	2	48.176	8	13	71,81
1	3	35.150	7	12	71,81
1	4	72.691	8	15	71,81
1	5	25.135	5	14	71,81
1	6	32.604	8	12	71,81
1	7	35.862	9	15	71,81
1	8	47.501	11	15	71,81
1	9	33.153	8	12	71,81
1	10	87.746	8	12	71,81
1	11	88.767	10	14	71,81
1	12	149.928	12	15	71,81
1	13	60.425	6	15	71,81
Σ	13	771.764	109	176	71,81
r	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
2	1	15.758	7	15	40,49
2	2	14.352	6	13	40,49
2	3	20.979	14	14	40,49
2	4	25.150	8	12	40,49
2	5	25.232	9	16	40,49
2	6	18.559	7	13	40,49
2	7	18.599	8	11	40,49
2	8	18.136	7	13	40,49
2	9	33.460	7	14	40,49
2	10	58.311	7	12	40,49
2	11	27.866	13	16	40,49
2	12	26.016	9	16	40,49
2	13	17.806	7	11	40,49
Σ	13	320.224	109	176	40,49

Tabela 16 – Resultados quarto cenário: modelo equilibrado (continuação)

As escolhas para o parâmetro m está diretamente ligadas ao número de rotas obtidas no terceiro cenário. A escolha do valor de r é sempre a menor possível, mas no quinto cenário, para $r = 1$ em alguns casos, o solver não conseguiu encontrar um solução inteira no tempo inferior à 1h. Manteve-se o tempo, mas o valor de r foi alterado para o próximo inteiro. Os resultados apresentados nas Tabelas 17 e 18 descrevem os dados dos cenários de tetes.

Conforme discutido no cenário de teste anterior, diminuindo o valor de r , é possível obter um *gap* menor na resolução com tempo inferior a 1h. Aumentando o número de rotas m e mantendo r próximo de 1, o *gap* da resolução aumenta drasticamente, conforme apresentam os resultados do quarto e quinto cenários contidos nas Tabelas 15, 16, 17 e 18.

Ao analisar apenas as distâncias totais das rotas otimizadas, é possível compreender que, em alguns casos o *gap* piorou em relação ao cenário empírico. Contudo, a

<i>r</i>	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
1	1	23.799	18	29	29,61
1	2	28.601	22	29	29,61
1	3	29.330	14	28	29,61
1	4	39.514	22	31	29,61
1	5	23.370	16	30	29,61
1	6	32.848	17	29	29,61
Σ		177.462	109	176	29,61
<i>r</i>	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
2	1	21.008	17	29	28,21
2	2	57.930	17	29	28,21
2	3	18.848	19	28	28,21
2	4	21.467	22	31	28,21
2	5	28.346	21	32	28,21
2	6	24.088	13	27	28,21
Σ		171.687	109	176	28,21
<i>r</i>	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
2	1	21.645	8	16	37,79
2	2	19.326	13	17	37,79
2	3	13.932	8	12	37,79
2	4	20.698	7	12	37,79
2	5	17.355	6	12	37,79
2	6	17.158	7	15	37,79
2	7	23.727	11	17	37,79
2	8	25.062	8	14	37,79
2	9	30.903	10	14	37,79
2	10	23.864	12	17	37,79
2	11	18.582	7	13	37,79
	12	59.992	12	17	37,79
Σ	12	292.244	109	176	37,79
<i>r</i>	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
3	1	18.141	6	15	23,44
3	2	24.576	11	17	23,44
3	3	16.166	17	18	23,44
3	4	19.000	10	14	23,44
3	5	5.106	4	11	23,44
3	6	14.625	6	11	23,44
3	7	15.806	9	13	23,44
3	8	15.194	7	13	23,44
3	9	27.224	7	18	23,44
3	10	20.829	11	14	23,44
3	11	22.054	10	15	23,44
3	12	33.710	11	17	23,44
Σ	12	232.431	109	176	23,44

Tabela 17 – Resultados do cenário cinco: rotas equilibradas

próxima seção apresenta uma discussão mais ampla dos cenários. Nela serão apresentadas tabelas com as variáveis; parâmetros de comparação com valores totais e médias do número de passageiros embarcados por rota; número de vértices visitados, e distâncias das rotas.

r	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
2	1	22.356	9	10	41,69
2	2	23.885	7	13	41,69
2	3	22.735	6	11	41,69
2	4	60.570	9	11	41,69
2	5	18.881	9	13	41,69
2	6	16.399	8	10	41,69
2	7	55.312	9	12	41,69
2	8	32.921	10	15	41,69
2	9	4.958	5	12	41,69
2	10	29.765	8	15	41,69
2	11	23.990	8	15	41,69
2	12	28.068	9	13	41,69
2	13	24453	6	12	41,69
	14	15.436	6	14	41,69
Σ	14	379.729	109	176	41,69
r	rota	distância	# vértices	# passageiros	gap(%)
3	1	17.013	6	11	39,77
3	2	20.393	9	15	39,77
3	3	15.872	6	9	39,77
3	4	28.171	10	16	39,77
3	5	24.763	8	16	39,77
3	6	11.914	5	9	39,77
3	7	68.952	11	16	39,77
3	8	17.558	6	11	39,77
3	9	14.697	9	10	39,77
3	10	11.084	4	10	39,77
3	11	16.347	10	14	39,77
3	12	11.719	6	11	39,77
3	13	50.067	10	14	39,77
3	14	16.709	9	14	39,77
Σ	14	325.259	109	176	39,77

Tabela 18 – Resultados do cenário cinco: rotas equilibradas (continuação)

Cenário 06: modelo equilibrado variação dos veículos

Também foi realizado o cenário de testes para um misto dos veículos. Para isso, trabalhou com valor de $m = 9$, pois o resultado da divisão é 19,55. Obtendo o teto igual a 20 e o piso igual a 19, estabelece-se um $r = 4$, sendo requisitados para um mesma rota; vans, micro-ônibus e ônibus. O resultado obtido foi:

- Seis micro-ônibus, duas vans e um ônibus;
- Total da distância percorrida 201.806 metros.
- Gap 27,20%

Mais um teste foi realizado para $m = 8$, o qual também foi analisado, pois o resultado da divisão é 22. Obtendo o Teto e Piso igual a 22, estabelece-se um $r = 7$ com isso o número máximo de passageiros pode ser $Q = 29$ e mínimo $q = 15$. Possibilitando o uso dos três veículos resultado obtido:

- Quatro micro-ônibus, quatro ônibus;
- Total da distância percorrida 181.170 metros.
- Gap 29,16%

Em uma possível combinação entre os veículos distintos, observa-se que a distância total aumenta, mas o custo de cada veículo pode possibilitar alternativas na escolha de redução nos valores.

5.4 Discussão dos cenários

A discussão dos cenários não se restringe as distâncias, mas engloba outros fatores importantes, como o número de vértices, passageiros embarcados e a distâncias nas rotas separadas.

A Tabela 19 reúne os dados dos cenários: empírico, primeiro e segundo. Estas, centram no modelo matemático (PRVG): rotas implementadas em conjunto e separadas, que partem da indústria e da garagem no primeiro período da manhã com ônibus, vans e micro-ônibus. Já a Tabela 20 expõe os resultados dos cenários de testes com as variações de m e r .

Resumo das comparações entre cenários

1. Distância total entre cenários: análise do modelo PRVG e do modelo equilibrado com variações para m e r .
2. Distância entre o cenário empírico e o primeiro: redução 8.347 m com *gap* 4,96%;
3. Distâncias individuais e totais entre as rotas do segundo e terceiro cenários em relação a ônibus, micro-ônibus e vans: aumento da distância;
4. Comparar os valores máximos e mínimos dos passageiros por rotas para verificar o equilíbrio com o PRVGFE.

Resumo das comparações das tabelas e dos gráficos

1. O gráfico da Figura 16: distância total dos cenários;
2. A Tabela 19 e o gráfico da Figura 27;
3. A Tabela 19 e os gráficos das Figuras 28 e 29;
4. Os gráficos para o número de passageiros nas Figuras 30, 31 e 32: ônibus, micro-ônibus e vans.

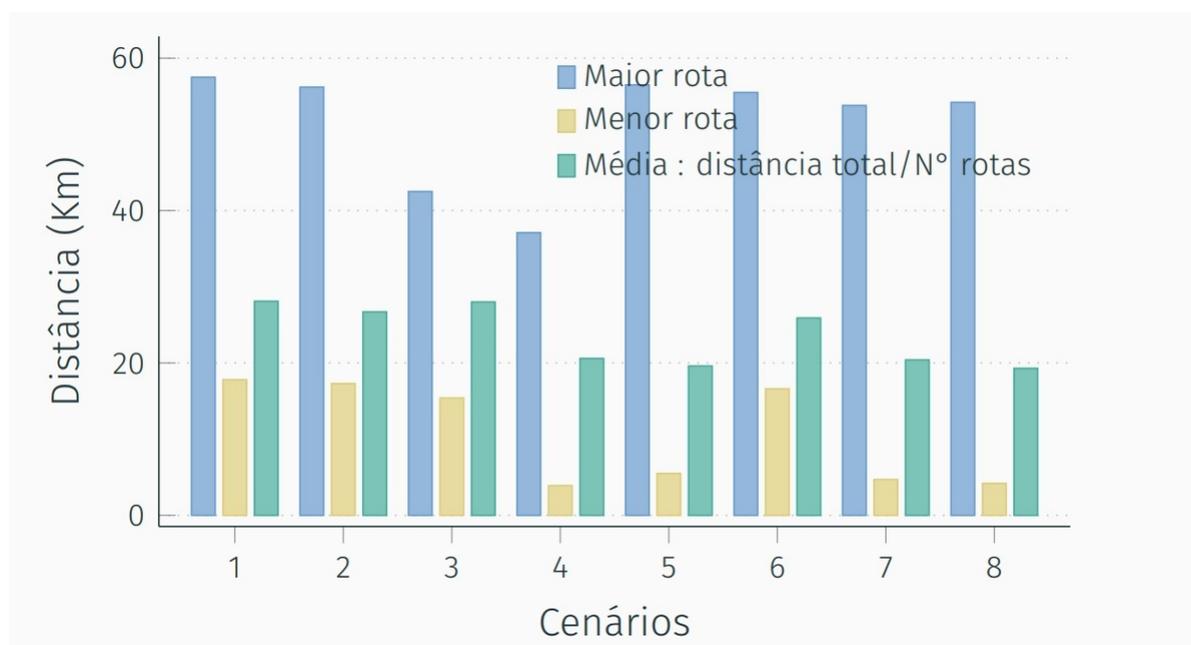


Figura 16 – Distâncias total dos cenários de testes

Para verificar as alternativas de utilização de micro-ônibus e vans é realizada uma comparação das distâncias, através da análise dos gráficos da Figura 28, que correspondem aos micro-ônibus, e também a Figura 29, que reaperesenta os resultados das vans. Ao analisarmos apenas as distâncias totais percorridas pelas vans e micro-ônibus são maiores em relação aos ônibus, conforme explicita o gráfico da Figura 16. O mesmo acontece com o micro-ônibus, pois o número de veículos utilizados é bem maior, devido a capacidades individuais.

Quando analisamos o gráfico da Figura 16 onde : Empírico (1), Otimizado Garagem (2), Otimizado Indústria {ônibus (3), micro (4) e van (5)} e O. I. Separado {ônibus (6), micro (7) e van (8)}, observa-se no segundo cenário uma redução na distância em relação ao empírico, se tratando de ônibus. Já no terceiro cenário se mantém a redução em relação aos ônibus. Mas, utilizando vans e micro-ônibus no segundo e terceiro cenário a distância total ultrapassa os 200 km.

No quarto cenário utilizando $m = 4$ com $r = 1$ e $r = 2$ a distância total também é inferior. Por outro lado, no quarto cenário com $m = 9$ e $r = 1$ o valor ultrapassa 750 km. Nesse caso, o *gap* foi de 19,59 %. Agora com $m = 9$ e $r = 2$ o valor da distância total sofre um redução para 195 km com *gap* de 21,68 %.

Ainda no quarto cenário com $m = 13$ e $r = 1$ o valor salta novamente para mais de 770 km, com *gap* de 71,81 %. Agora com $r = 2$ cai para 320 km e *gap* de 40.5 %. No quinto cenário, se consegue uma maior estabilidade, pois utiliza-se seis, doze e quatorze rotas com valores de r entre 1 e 3. Para $m = 6$ e $r = 1$ e $r = 2$ encontra-se 177,462 km e 171,687 km se aproximando do valor empírico 168,394 km. Quando se utiliza $m = 12$ e $m = 14$ com os valores de $r = 2$ e $r = 3$ encontra-se 292 km, 232 km, 379 km e 325 km. Todos superiores a 200 km.

Analisando o gráfico da Figura 27 vemos que do cenário empírico para o otimizado a média da distância por rotas sem manteve em torno de 28,085 km e 26,674 km. Na Tabela 19 a distância nos diferentes cenários aumenta. Se compararmos o segundo e terceiro cenários, partindo da indústria com ônibus, compreendemos que ocorreu um aumento de 43,481 km na distância total e na média subiu de 42,566 km para 55,479 km.

A diferença é rotas separadas e rotas em conjunto. Rotas em conjunto otimizado como foi discutido. Então, nos cenários de testes, quarto e quinto buscam um equilíbrio, pois apesar da distância ser bem menor no cenário dois, há o problema de utilizar poucos veículos, aumentando as rotas individuais. Na Tabela 20 quando se utiliza $m = 4$ e $n = 6$, e se realiza as variações em $r = 1$ e $r = 2$, para buscar um equilíbrio de passageiros por rota, se obtêm os seguintes resultados na distância.

Quando $m = 4$ e $r = 1$ distância é 144,878 Km; quando $m = 4$ e $r = 2$ a distância é 126,964 km; quando $m = 6$ e $r = 1$ a distância é 177,462 km e quando $m = 6$ e $r = 2$ a distância é 171,687 km.

O gráfico da Figura 27 apresenta uma melhor comparação com os cenários anteriores. Nele, há a representação do valor máximo da distância por vértice, o valor mínimo, e a barra da média representa a média entre os dois. A linha reapresenta média do total da distância dividido pela quantidade de rotas. Nesse contexto, o equilíbrio maior é obtido no quarto ($m = 4$ e $r = 2$) e quinto ($m = 6$ e $r = 1$) cenários.

Analisando o número de vértices na Tabela 11, referente as rotas empíricas temos uma média de 110 pontos (incluindo o depósito), distribuídos entre 6 rotas. Isso apresenta uma média de 18.5 pontos de ônibus por rota, e uma diferença entre o máximo 25 e mínimo 14 de 11 pontos por rota. Além disso, analisando o número de passageiros 176 distribuídos entre as 6 rotas, temos uma médio de 29,33 passageiros por rota. Com uma diferença entre o valor máximo 36 e o valor mínimo 25 de 11 passageiros.

No que se refere a Tabela 12 (primeiro cenário) ao analisarmos as distâncias

cenário	# rotas	# vértices				
		máximo	mínimo	média por rota	diferença	total
empírico	6	26	15	18,5	11	111
primeiro	6	25	14	18,5	11	111
segundo	4	32	21	27,75	11	111
	9	17	3	12,33	14	111
	13	15	5	8,54	10	111
terceiro	6	25	14	18,50	11	111
	12	22	2	9,25	20	111
	14	14	5	7,93	9	111
cenário	# rotas	# passageiros				
		máximo	mínimo	média por rota	diferença	total
empírico	6	36	25	29,33	11	176
primeiro	6	36	25	29,33	11	176
segundo	4	48	39	44,00	9	176
	9	23	8	19,56	15	176
	13	15	10	13,54	5	176
terceiro	6	36	25	29,33	11	176
	12	23	2	14,67	21	176
	14	15	4	12,57	11	176
cenário	# rotas	distância				
		máxima	mínima	média por rota	diferença	total
empírico	6	57.491	17.803	28.065,67	39.688	168.394
primeiro	6	56.242	17.285	26.674,5	38.957	160.047
segundo	4	42.566	15.366	28.020,25	27.200	112.081
	9	37.153	3.950	20.582,56	33.203	185.243
	13	56.542	5.539	19.623,54	51.003	255.106
terceiro	6	55.479	16.611	25.927,00	38.868	155.562
	12	53.839	4.739	20.422,00	49.100	245.064
	14	54.201	4.739	19.388,64	49.462	271.441

Tabela 19 – Resultados dos primeiros cenários: vértices, passageiros e distâncias

das rotas otimizadas separadas dos ônibus e que partem da garagem, obtemos a média no valor de 26.674,5 m e a diferença entre a menor 17.285 m, e a maior rota 56.242 m é igual a 38.957 m. Nesse contexto, o objetivo no modelo equilibrado é diminuir essa diferença respeitando a minimização da função objetivo.

Para uma análise mais criteriosa do segundo cenário é importante desacatar a Tabela 19, pois nela há uma comparação não apenas da distância total otimizada e uma análise mais específica dos valores máximos e mínimos. Além do mais, é realizado uma média aritmética e a diferença do total dos número de vértices, passageiros embarcados e distâncias de cada rota separadamente.

Analisando o número de vértices na Tabela 13, temos uma média de 111 pontos (incluindo o depósito) distribuídos entre as 4 rotas. Isso apresenta uma média de 27.75 pontos de ônibus por rota, e uma diferença entre o máximo 32 e mínimo 21 de 11 pontos por rota.

Além do mais, observando o número de passageiros 176 distribuídos entre as 6 rotas temos uma média de 29,33 passageiros por rota. Com uma diferença entre o valor máximo 36 e o valor mínimo 25 de 11 passageiros.

<i>r</i>	# rotas	# vértices				
		máximo	mínimo	média por rota	diferença	total
1	4	29	25	27,25	4	109
2	4	30	23	27,25	7	109
1	9	16	8	12,11	8	109
2	9	21	17	12,11	4	109
1	13	12	5	8,38	7	109
2	13	14	6	8,38	8	109
1	6	22	16	18,17	6	109
2	6	22	13	18,17	9	109
2	12	13	6	9,08	7	109
3	12	17	4	9,08	13	109
2	14	10	5	7,79	5	109
3	14	10	4	7,79	6	109
<i>r</i>	# rotas	# passageiros				
		máximo	mínimo	média por rota	diferença	total
1	4	45	43	44,00	2	176
2	4	46	42	44,00	4	176
1	9	21	18	19,56	3	176
2	9	21	17	19,56	4	176
1	13	15	12	13,54	3	176
2	13	16	12	13,54	4	176
1	6	31	28	29,33	3	176
2	6	32	27	29,33	5	176
2	12	17	12	14,67	4	176
3	12	18	11	14,67	6	176
2	14	15	10	12,57	5	176
3	14	15	9	12,57		176
<i>r</i>	# rotas	distâncias				
		máximo	mínimo	média por rota	diferença	total
1	4	58.406	24.309	36219,50	34.097	144.878
2	4	34.992	24.827	31741,00	10.165	126.964
1	9	140.434	35.720	30282,89	104.714	272.546
2	9	37.352	15.112	21571,22	22.240	194.141
1	13	149.928	25.135	56891,15	124.793	739.585
2	13	58.311	14.352	24632,62	43.959	320.224
1	6	32.848	23.370	29577,00	9.478	177.462
2	6	57.930	18.848	28614,50	39.082	171.687
2	12	59.992	17.158	24353,67	42.834	292.244
3	12	33.710	5.106	19369,25	28.604	232.431
2	14	60.570	4.958	27123,50	55.612	379.729
3	14	50.067	11.084	23232,79	38.983	325.259

Tabela 20 – Resultados dos cenários dos modelos equilibrados

Para acompanhar a variação do número de vértices, passageiros em relação aos valores da media e diferença será inserido seis Gráficos.

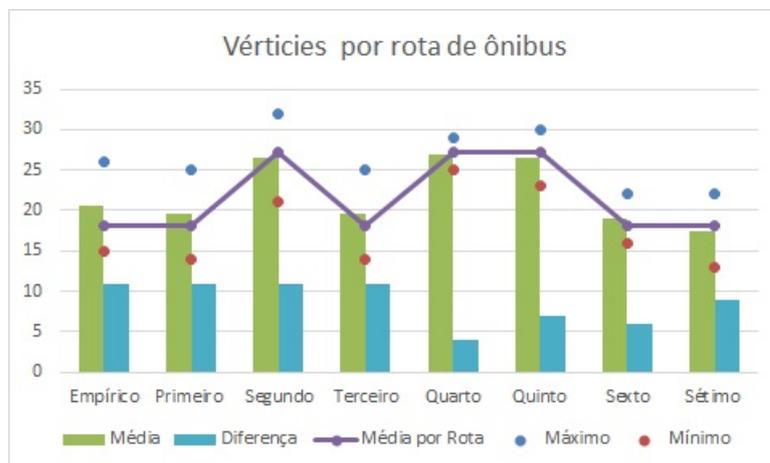


Figura 17 – Número de vértices por ônibus nas linhas dos cenários

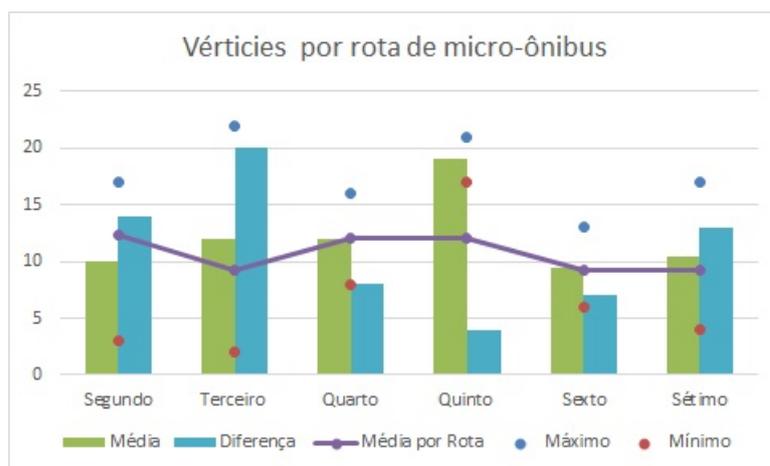


Figura 18 – Número de vértices por micro-ônibus nas linhas dos cenários

Analisando, a Tabela 19 em relação ao número de vértices, e comparando com os gráficos das figuras que representa o número de vértices visitados pelos ônibus na Figura 17, observamos que os vértices visitados pelos micro-ônibus das Figuras 18 e 19 possibilitam uma melhor análise diante dos vários cenários. A diferença apresentada está entre os valores máximos e mínimos que inicialmente se mantém em 11 no segundo cenário. Com o uso de vans e micro-ônibus cai para 10 e aumenta para 14, respectivamente. Mas, no terceiro cenário os ônibus mantêm a diferença de 11, e o micro-ônibus salta para 20. Enquanto isso, a van reduz para 9. A média de vértices visitados pelos ônibus se mantém em 19 em todos os cenários. O micro-ônibus e a van 12 e 9 no segundo cenário e no terceiro 9 e 8. Se implementado o modelo de equilíbrio o número médio de vértices visitados entre os valores máximos e mínimos, estarão próximos do número médio de vértices por rotas obtidos.

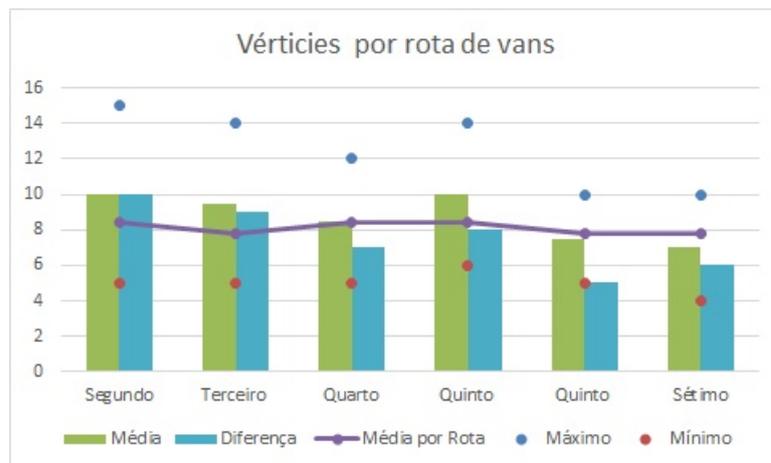


Figura 19 – Número de vértices por van nas linhas dos cenários

A segunda etapa da análise de dados é referente ao número de passageiros embarcados com enfoque na média e na diferença entre os valores máximos e valores mínimos. Os gráficos das Figuras 30, 31 e 32 evidenciam que a média se mantém nos cenários empíricos. No primeiro e terceiro com o uso de ônibus, cujo valor é 22,33. No segundo cenário salta para 44, principalmente, devido a redução de 6 para 4 no número de rotas. A diferença por sua vez se mantém em 11, visto que as rotas são implementadas separadamente e cai para 9 no segundo cenário, quando implementadas em conjunto. Vans e micro-ônibus uma média de 13,54 e 19,56 respectivamente, caindo para 14,67 e 12,57 quando as rotas são implementadas separadas.

Convém destacar o valor da diferença, pois no micro-ônibus temos 15 e 21 no segundo e terceiro cenários. Valor alto, visto que a capacidade do veículo é 23. E na van a diferença entre o máximo e mínimo no número de passageiros é 5 no segundo cenário e 11 no último, destacando sua capacidade de 15 lugares.

Quando vamos para os cenários de testes com o modelo equilibrado, fica explícito a influência sobre a diferença entre os valores máximos e mínimos de passageiros embarcados, em torno da média de passageiros por rota.

5.5 Gráficos e resultados econômicos

Nesse tópico, será abordado nesse tópico a apresentação dos resultados econômicos e os gráficos. Gráfico que permite resumir os dados das tabelas, e analisar o impacto direto do modelo equilibrado na distância de cada rota, através do número de passageiros por rota. E os resultados econômicos atribuem valores monetários em relação a redução das distâncias, tendo por base o preço atual tabelado do combustível pela Agência Nacional do Petróleo (ANP).

O Gráfico 20 apresenta distâncias empíricas atuais das rotas de ônibus da empresa, que presta serviço para indústria. Com o modelo matemático para o problema abordado busca-se reduzir a distância total das rotas.

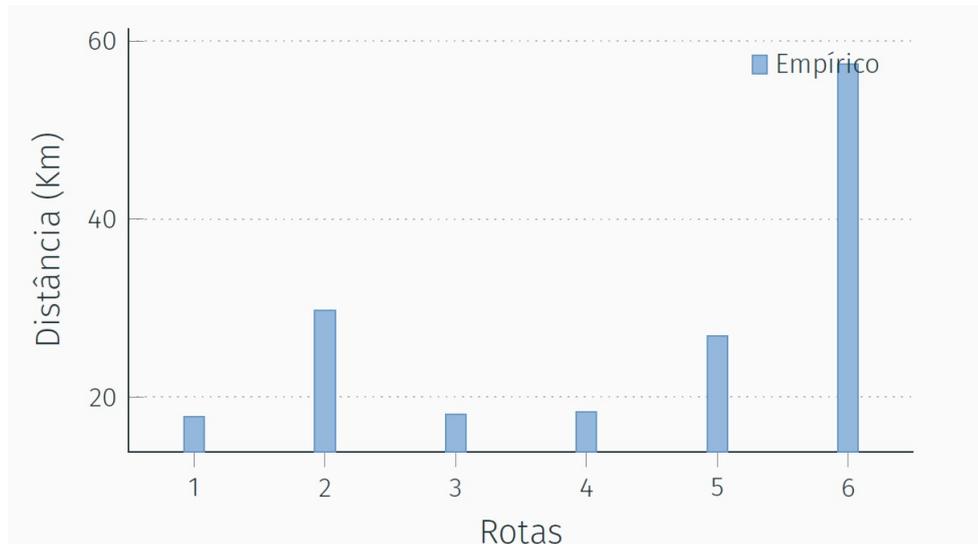


Figura 20 – Distâncias Empíricas

Inicialmente, as rotas foram implementadas separadas a partir dos conjuntos de pontos pertencentes a cada rota, bem como os passageiros associados as demandas dos vértices, conforme representam as Figuras 21 e 22 que abarcam os pontos das rotas 4 e 6. A maior rota é a rota 6, pois os pontos de embarque estão localizados em três cidades: Itumbiara, Centralina e Araporã. As duas ultimas no estado de Minas Gerais.

A Tabela 21 apresenta os cenários (E) Empírico e (OG) Otimizado Garagem, referentes a rota 4. Além disso, o número de vértices, e passageiros que são iguais, e já a

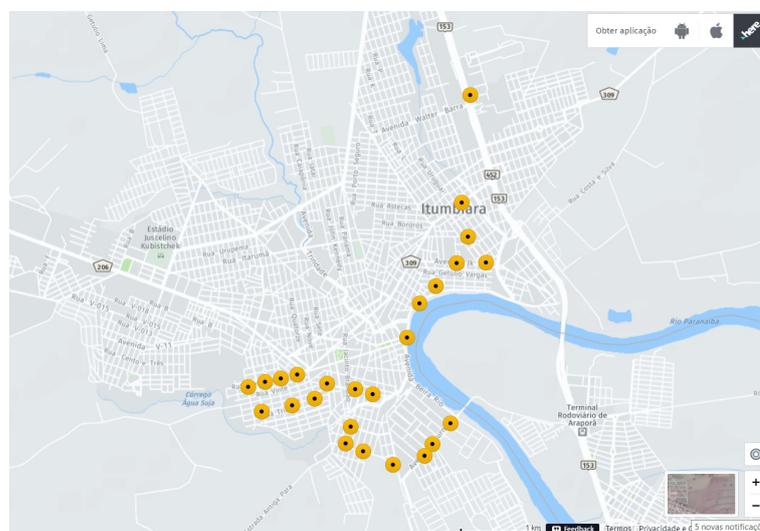


Figura 21 – Rota 4 empírica

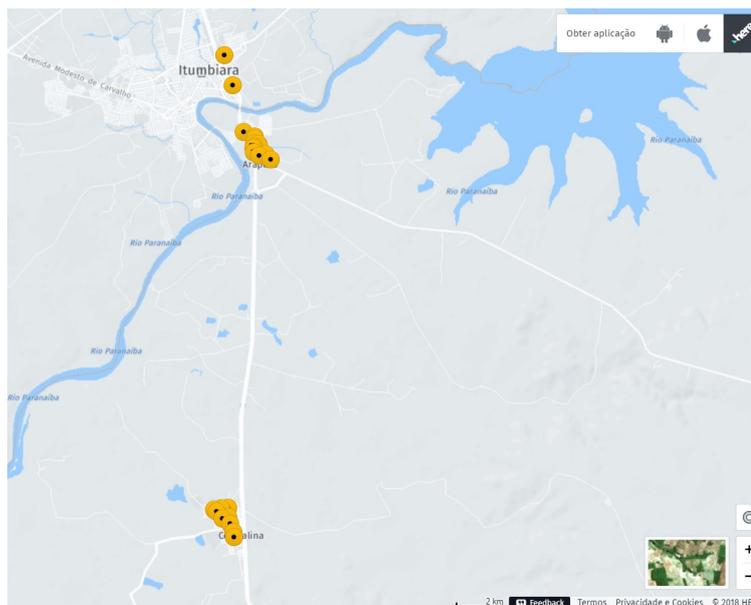


Figura 22 – Rota 6 empírica

Cenário	vért.	pass.	dist.(km)
(EP)	25	25	18,325
(OG)	25	25	17,766

Tabela 21 – Pontos das rota 4 empírico e otimizado

Cenário	vért.	pass.	dist.(km)
(EP)	24	36	57,491
(OG)	24	36	56,242

Tabela 22 – Pontos das rota 6 empírico e otimizado

distância otimizada. Nota-se que ocorreu uma redução de 559 metros, a partir da alteração da sequência de pontos na rota a serem visitados.

A Tabela 22 representa o número de pontos visitados e os passageiros embarcados na rota 06. Além disso, representa a distância total dos cenários empírico e otimizado da garagem, o qual se refere o primeiro cenário de testes. O Gráfico 23 representa todas as 6 rotas otimizadas, separadamente. A redução total da distância corresponde a 8,347 km, percentualmente 4,96% de redução na distância total em relação ao cenário empírico.

Se analisarmos valores em relação a consumo de quilometro por litro de diesel, nota-se que de acordo com o tipo de veículo o consumo médio é 2,3 km com 1 litro de diesel. Vale ressaltar que, a empresa realiza esses trajetos 4 vezes por dia, durante 7 dias da semana, e em média 4 semanas ao mês.

Se consideramos apenas o valor de quilometro litro e os valores atuais do diesel

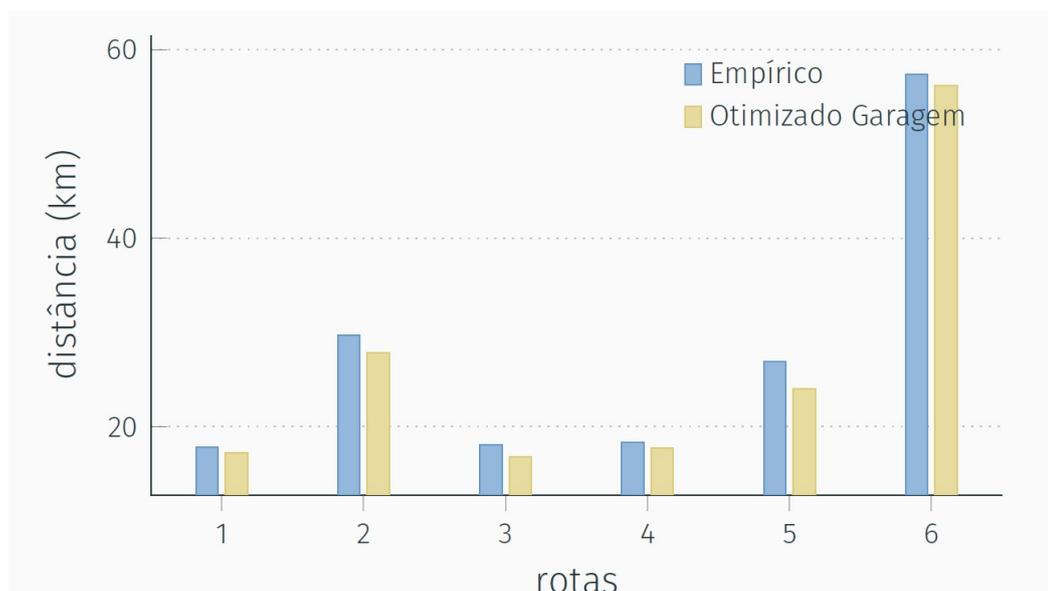


Figura 23 – Distâncias otimizadas

a economia em um mês, além disso, soma-se a manutenção corretiva de sete veículos com capacidade de 48 lugares por semana é em média R\$1500,00. Como base nesse valor, é possível calcular o custo do quilometro rodado, tendo em vista a distância total empírica realizada em dos turnos do dia. Assim multiplica-se por 3 turnos, logo após por 5 dias, e divide o valor encontrado pelo custo de manutenção semanal obtendo R\$0,594 por quilometro rodado.

A Tabela 24 apresenta a redução dos valores nos diversos cenários. Iniciando com o primeiro cenário, temos a redução da distância total das rotas e o cálculo do valor em reais dos quilômetros por litro.

Se considerarmos o valor do litro de óleo diesel a partir dos dados da Agência Nacional do Petróleo (ANP) verificamos que os preços apresentados na Tabela 23 estavam vigentes entre 31 de agosto a 29 de setembro de 2018, nos termos do Decreto *n* 9.454 de 2018.

São apresentados os novos valores de preço de referência (PR) que foram calculados pela fórmula publicada pela ANP na Resolução *n* 743/2018, bem como os Preços de Comercialização (PC), conforme determinado pelo programa de subvenção, de acordo com Medida Provisória *N* 838/2018. <<http://www.anp.gov.br>>.

(Em R\$/litro)	Norte	Nordeste	Centro-Oeste	Sudeste	Sul
PR em 31/08/18 (Resp. ANP 743/18)	2,5281	2,5592	2,7094	2,6277	2,6143
PC em 31/08/18 (Resp. ANP 9.454/18)	2,2281	2,2592	2,4094	2,3277	2,3143

Tabela 23 – Preços de referência e de comercialização do óleo diesel. Fonte: ANP

Cenário	D.R. (<i>km</i>)	C.E. (<i>l</i>)	V.C. (<i>R\$</i>)	C.M. (<i>R\$</i>)	semanal (<i>R\$</i>)	mensal (<i>R\$</i>)	anual (<i>R\$</i>)
Primeiro	8,347	3,629	8,74	4,95	205,35	1.206,75	10.648,20

Tabela 24 – Economia por quilometro rodado

A Tabela 24 apresenta as seguintes descrições: distância reduzida em quilômetros (D.R.) e o combustível economizado em litros (C.E.). De acordo com o preço do combustível no Centro-Oeste da Tabela 23 PC de 31/08/18 a 29/09/18 valor de R\$ 2,4094 temos o valor do combustível economizado em reais (V.C.). O valor da manutenção semanal dos ônibus, de acordo com a distância empírica atual é a base para o calculo da manutenção por quilômetro rodado, obtendo R\$0,594 de manutenção por quilometro.

Temos então, o custo da manutenção dado em reais (C.M.). O custo diário é o triplo dos valores encontrados, pois são realizados em três períodos. O custo semanal é o valor diário multiplicado por cinco.

Para calcular as rotas em conjunto é implementado o depósito como sendo a indústria, pois o modelo prevê que todos os veículos partem e retornam ao depósito, visitando os vértices apenas uma vez. Se a indústria for um dos vértices das rotas implementadas em conjunto, não é possível realizar essa implementação. Entretanto, como o modelo permite o cálculo de multi-rotas, este foi implementado a partir da indústria.

A distância entre a indústria e a garagem pode ser calculado, de acordo com o *google maps* mede 1,3 km de distância.

Os resultados correspondentes ao segundo cenário de testes, tratam de todos os pontos das rotas serem implementados em conjunto partindo da indústria. A Figura 24 apresenta os resultados que mostram uma redução significativa na distância total e no número de rotas de 6 para 4. O tempo foi limitado em 1 hora (3600 s), com o total de 111 pontos (incluindo o depósito) e o *gap* do CPLEX (5,82%).

As distâncias totais obtidas nos cenários empírico (EP), otimizado garagem (OG) e otimizado indústria (OI) são respectivamente 168,394 km, 160,047 km e 112,081 km. As reduções são de 8,347 km e 56,313 km. Contudo, a última foi implementada partindo da indústria, calculando a partida da garagem para indústria das 4 rotas (5.2 km), e o retorno para garagem após o embarque dos passageiros e desembarque na indústria totalizam em (10.4 km). Observa-se um aumento no número da distância em cada rota, apesar da distância total reduzida.

Em análise o impacto econômico no segundo cenário compreende que a distância total com ônibus, adicionado a distância indústria à garagem, corresponde a 122,481 km, e a distância total reduzida corresponde a 45,913 km.

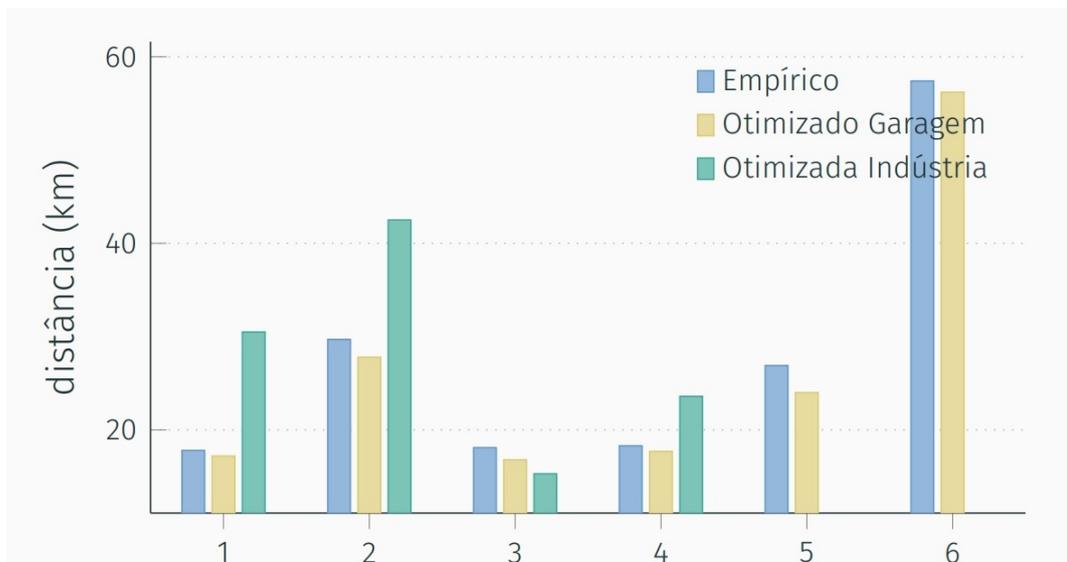


Figura 24 – Otimizadas conjunto Indústria

Cenário	D.R. (km)	C.E. (l)	V.C. (R\$)	C.M.) (R\$)	semanal (R\$)	mensal (R\$)	anual (R\$)
Primeiro	8,347	3,629	8,74	4,95	205,35	1.206,75	10.648,20
Segundo	45,913	19,962	48,01	27,27	1.129,20	4.516,80	58.718,40

Tabela 25 – Economia por quilometro rodado segundo

rotas	vért.	pass.	dist.(km)
4	32/21	48/39	112,081
9	17/3	23/8	185,243
13	15/4	15/10	255,106

Tabela 26 – Número de vértices e passageiros

A Tabela 25 apresenta os custos em relação ao segundo cenário de testes. A redução do custo é alto, principalmente a redução do número de rotas que atende a demanda. Contudo, existem soluções com o tamanho da rota elevado.

No segundo cenário de testes, também foi implementado as rotas em conjunto para micro-ônibus e vans, mudando os parâmetros capacidade para 23 e 15 lugares, respectivamente.

A Tabela 24 apresenta o número de rotas para ônibus (4), micro-ônibus (9) e vans (13); número de vértices visitados, passageiros embarcados, e distância total percorrida pelos veículos nas rotas. Junto a isso, há alguns exemplos dos maiores e menores valores no número de vértices visitados por rota. Nota-se que existe um certo desequilíbrio, como por exemplo, vértices visitados para micro-ônibus 17 e 3.

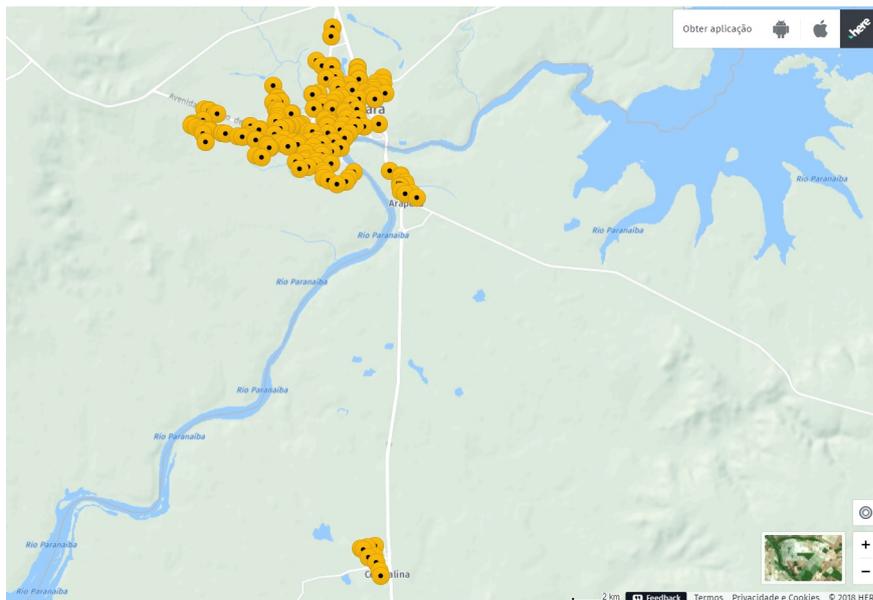


Figura 25 – Pontos de todas as rotas

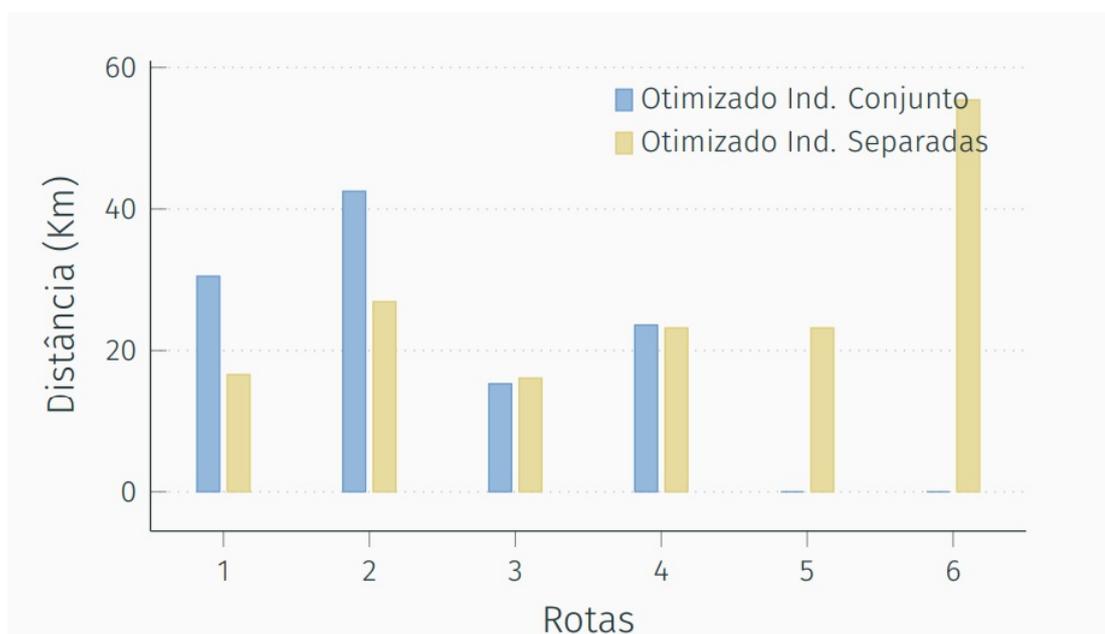


Figura 26 – Distância otimizada indústria separada

A Figura 25 apresenta o cenário de testes para rotas implementadas em conjunto com as três cidades e todos os 111, partindo e retornando a indústria.

No terceiro cenário de testes as rotas são implementadas separadamente, ou seja, cada conjunto de pontos associado a uma rota, partindo da indústria. E o resultado obtido está contido na Figura 26.

É natural que o número de rotas retorne para 6, e a distância obtida foi de 155,562 km, o que em relação ao cenário empírico corresponde a 12,832 km. Considerando os ônibus na indústria, o fator econômico da tabela pode ser calculado, obtendo os seguintes

resultados na Tabela:

Cenário	D.R. (<i>km</i>)	C.E. (<i>l</i>)	V.C. (<i>R\$</i>)	C.M. (<i>R\$</i>)	semanal (<i>R\$</i>)	mensal (<i>R\$</i>)	anual (<i>R\$</i>)
Primeiro	8,347	3,629	8,74	4,95	205,35	1.206,75	10.648,20
Segundo	45,913	19,962	48,01	27,27	1.129,20	4.516,80	58.718,40
Terceiro	12,832	5,579	13,44	7,62	315,19	1.263,60	16.426,80

Tabela 27 – Economia por quilometro otimizado indústria

A Tabela 27 apresenta o seguinte dado: o custo com o segundo cenário obtém uma redução significativa nos custos, contudo cada rota é muito extensa. Conforme descrito anteriormente, o objetivo maior é estabelecer um equilíbrio no número de passageiros embarcados, para controlar a distância de cada rota.

A Figura 16 apresenta os cenários de testes com os veículos; diferentes depósitos e rotas implementadas em conjunto, e rotas separadas. Notamos que algumas rotas possuem um valor muito alto, e outras muito baixo.

O modelo matemático apresentado vai além, propondo um equilíbrio no número de passageiros embarcados. Nesse sentido, verifica-se a análise na distância de cada rota e o número de vértices visitados, para ônibus, micro-ônibus e vans. O equilíbrio é estabelecido de acordo com as variações dos parâmetros, número de veículos/rotas m e o valor de r . Os valores empíricos são as configurações atuais das rotas.

1. Primeiro: rotas separadas com ônibus partindo da garagem;
2. Segundo: rotas em conjunto partindo da indústria todos veículos: ônibus $Q = 48$, micro-ônibus $Q = 23$, vans $Q = 15$.
3. Terceiro : rotas separadas partindo da indústria todos veículos;
4. Quarto Equilibrado
 - ônibus $m = 4$ e $r = 1$;
 - micro-ônibus $m = 9$ e $r = 1$;
 - vans $m = 13$ e $r = 1$;
5. Quinto Equilibrado
 - ônibus $m = 4$ e $r = 2$;
 - micro-ônibus $m = 9$ e $r = 2$;
 - vans $m = 14$ e $r = 2$;
6. Sexto Equilibrado

- ônibus $m = 6$ e $r = 1$;
- micro-ônibus $m = 12$ e $r = 2$;
- vans $m = 13$ e $r = 1$;

7. Sétimo Equilibrado

- ônibus $m = 6$ e $r = 2$;
- micro-ônibus $m = 12$ e $r = 3$;
- vans $m = 14$ e $r = 3$;

Nos gráficos das Figuras 27, 28 e 29 temos os valores máximo e mínimo das distâncias em cada rota; e a média entre esses dois valores, e a diferença entre os dois valores. Junto a isso, temos a média da distância total pelo número de rotas de cada cenário.

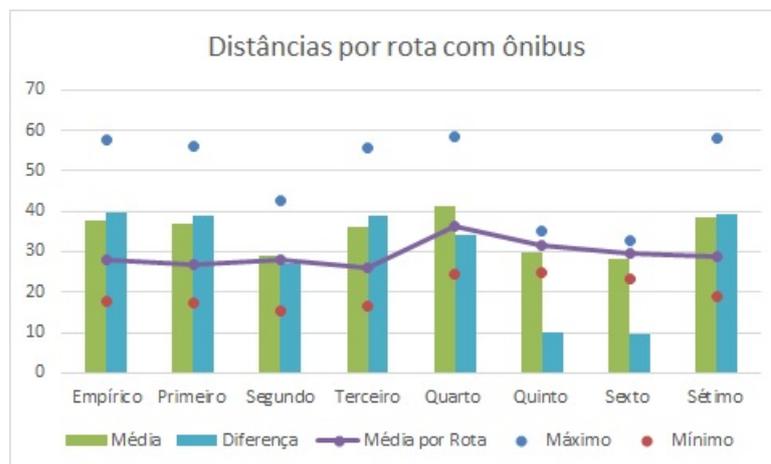


Figura 27 – Distâncias individuais por ônibus nas linhas dos cenários

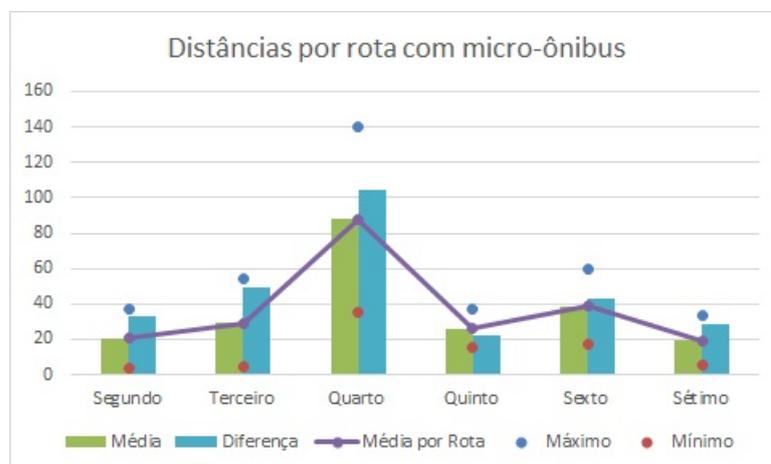


Figura 28 – Distâncias individuais por micro-ônibus nas linhas dos cenários

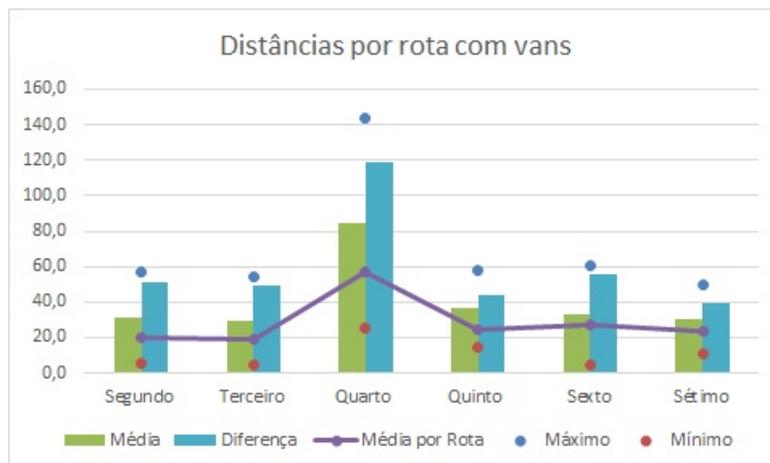


Figura 29 – Distâncias individuais por van nas linhas dos cenários

Nos cenários em que o modelo está equilibrado nota-se que a média entre os valores máximos e mínimos da distância por rota se aproximam da média da distância total por rota. Além disso, a diferença entre a maior rota e a menor rota diminuiu com a variação de r .

O equilíbrio de tudo isso, implicar em analisar o número de passageiros embarcados por rota. Os gráficos das Figuras 30, 31 e 32 representam o comportamento ao longo dos cenários dos maiores e menores valores de passageiros embarcados por rota, bem como a média e diferença entre eles, e a média do número total de passageiros pelo número de rotas.

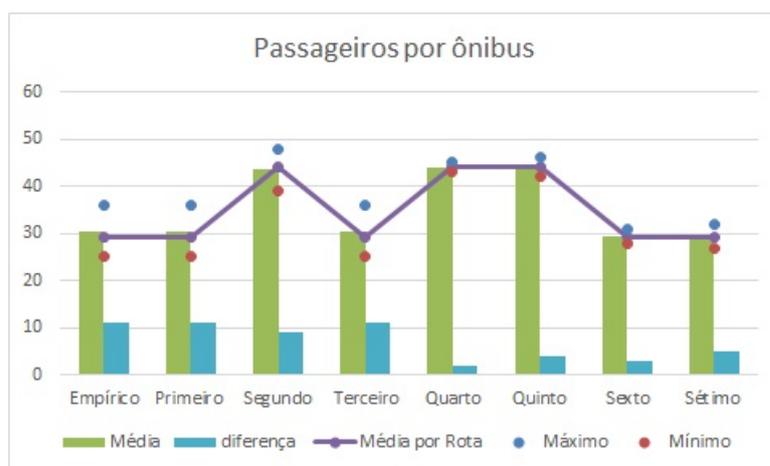


Figura 30 – Número de passageiros por ônibus nas linhas dos cenários

Nós cenários que se utilizam ônibus, vans ou micro-ônibus é utilizado o modelo equilibrado. Nisso, os valores máximos e mínimos da quantidade de passageiros embarcados por rota diminui a distância, conforme a variação dos novos parâmetros m e r . Nos gráficos fica mais evidente ainda que o valor da média por rota nos cenários equilibrados são

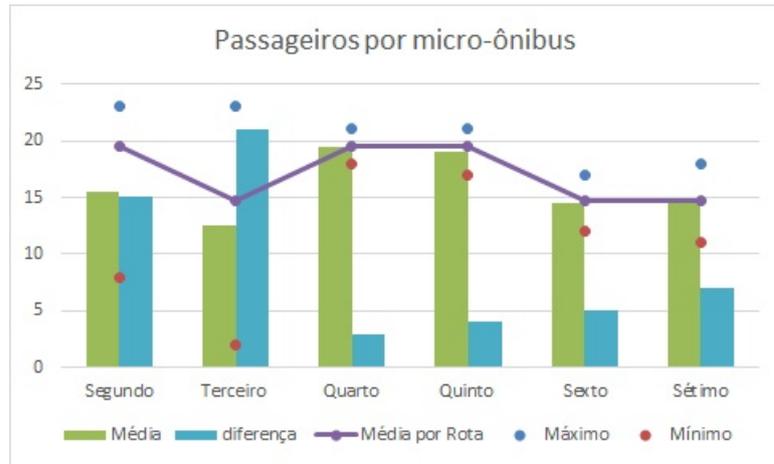


Figura 31 – Número de passageiros por micro-ônibus nas linhas dos cenários

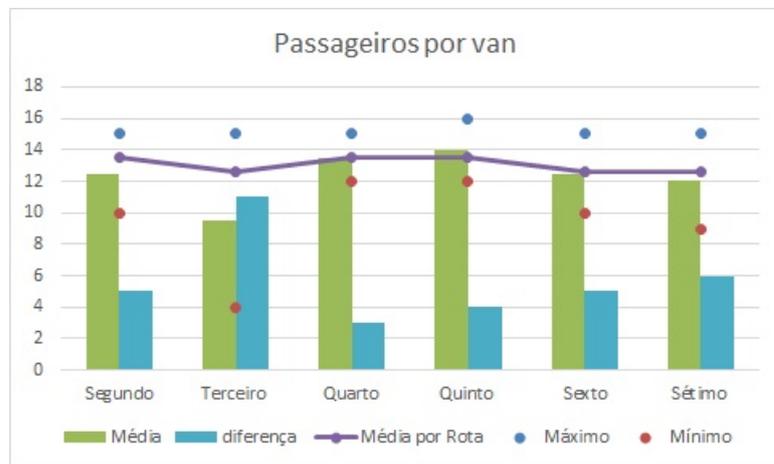


Figura 32 – Número de passageiros por van nas linhas dos cenários

tangentes a média entre os valores máximos e mínimos de passageiros embarcados por rota, principalmente no que diz respeito ao ônibus.

5.6 Perspectivas futuras

Para perspectivas futuras, busca-se analisar alternar-se na mesma rota o uso simultâneo de ônibus, micro-ônibus e vans. Foram realizados experimentos alternando os valores dos parâmetros, para permitir utilizar três veículos com capacidades distintas no mesmo conjunto solução das rotas. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 28.

m	a	r	Q	q	ônibus	micro	vans	dist.(km)	gap %
9	19,5	4	24	15	1	6	2	201,806	27,20
8	22	7	29	15	4	4	-	181,170	29,02

Tabela 28 – Solução com Multi-veículos

Na primeira situação poderá ser utilizado um ônibus, seis micro-ônibus e duas vans. Já na segunda situação utiliza-se apenas quatro ônibus e quatro micro-ônibus, mas nenhuma van.

6 Considerações finais

Esta pesquisa apresentou vários conceitos de problemas de roteamento de veículos e discutiu as suas aplicações em um estudo de caso. Trata-se de um problema prático do transporte de funcionários de uma empresa de ônibus fretado da cidade de Itumbiara-GO.

A revisão bibliográfica apresentada e a análise da descrição taxionômica dos PRVs auxiliou na identificação das principais características dos modelos matemáticos e métodos de resolução, necessários para modelar e resolver o estudo de caso como um modelo PRV.

A modelagem escolhida envolve o controle do embarque e desembarque de passageiros via um modelo matemático de programação linear inteira mista em fluxo de rede com duas *commodities*. Ele é uma adaptação do modelo conhecido como problema de roteamento de veículos generalizado proposto por (HÀ et al., 2014), no qual eliminamos as variáveis de cobertura e acrescentamos restrições para identificar cada rota dentro do fluxo total. Além disso, apresentamos uma versão equilibrada no tamanho, números de vértices visitados e número de passageiros transportado nas diferentes rotas.

Para o problema real, todos os dados para o problema resolvido foram coletados em campo objetivando reforçar e evidenciar a importância para a aplicação dos resultados. A linguagem JULIA foi escolhida para codificar a modelagem proposta. Já as soluções exatas para o PLIM foram obtidas via Solver CPLEX. Os experimentos computacionais realizados envolvem vários cenários para os dados coletados. Entretanto, optamos por testar algumas opções para o modelo matemático, que inclui um único veículo; multi-veículos; distintas capacidades para os veículos; equilíbrio entre rotas; dentre outros.

Os resultados obtidos apresentam redução significativa na distância total percorrida pela frota de veículos, quando comparada com as rotas obtidas de forma empírica pela empresa. Além disso, os vários cenários estudados fornecem opções, para que o tomador de decisão planeje o transporte de funcionários da empresa a partir de novos pontos de vista. Nesse contexto, apresentamos alternativas de realizar o transporte, utilizando não apenas ônibus, mas também micro-ônibus e vans. Outro aspecto é a possibilidade de manter as rotas com tamanho equilibrado de tal forma que os horários de entrada de funcionários nos seus diversos turnos de serviço não sejam afetados.

Como proposta futura, pretende-se expandir a abordagem realizada nesta pesquisa como forma de contribuir para o planejamento do transporte público urbano coletivo de passageiros realizado na cidade de Itumbiara.

Referências

- ALVES, F. S. Problemas de roteamento de veículos aplicados no planejamento logístico do transporte escolar da cidade de Coxim-MS. Dissertação de mestrado. Unicamp, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 17, 28 e 60.
- APPLEGATE, D. L.; COOK, W.; DASH, S.; ESPINOZA, D. G. Exact solutions to linear programming problems. *Operations Research Letters*, Elsevier, v. 35, n. 6, p. 693–699, 2007. Citado na página 34.
- ARCHETTI, C.; SPERANZA, M. G. The split delivery vehicle routing problem: a survey. In: *The vehicle routing problem: Latest advances and new challenges*. [S.l.]: Springer, 2008. p. 103–122. Citado na página 49.
- AUGERAT, P. *Approche polyédrale du problème de tournées de véhicules*. Tese (Doutorado) — Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 1995. Citado na página 76.
- BALDACCI, R.; BATTARRA, M.; VIGO, D. Routing a heterogeneous fleet of vehicles. In: *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges*. [S.l.]: Springer, 2008. p. 3–27. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 66.
- BALDACCI, R.; BOSCHETTI, M. A.; MANIEZZO, V.; ZAMBONI, M. Scatter search methods for the covering tour problem. In: *Metaheuristic optimization via memory and evolution*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 59–91. Citado 2 vezes nas páginas 93 e 97.
- BALDACCI, R.; CHRISTOFIDES, N.; MINGOZZI, A. An exact algorithm for the vehicle routing problem based on the set partitioning formulation with additional cuts. *Mathematical Programming*, Springer, v. 115, n. 2, p. 351–385, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 78.
- BALDACCI, R.; HADJICONSTANTINO, E.; MINGOZZI, A. An exact algorithm for the capacitated vehicle routing problem based on a two-commodity network flow formulation. *Operations research, INFORMS*, v. 52, n. 5, p. 723–738, 2004. Citado 8 vezes nas páginas 18, 57, 90, 91, 93, 95, 97 e 102.
- BALDACCI, R.; MINGOZZI, A.; ROBERTI, R. New route relaxation and pricing strategies for the vehicle routing problem. *Operations research, INFORMS*, v. 59, n. 5, p. 1269–1283, 2011. Citado na página 78.
- _____. Recent exact algorithms for solving the vehicle routing problem under capacity and time window constraints. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 218, n. 1, p. 1–6, 2012. Citado na página 97.
- BALDACCI, R.; TOTH, P.; VIGO, D. Recent advances in vehicle routing exact algorithms. *4OR*, Springer, v. 5, n. 4, p. 269–298, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 17, 48, 56 e 57.
- _____. Exact algorithms for routing problems under vehicle capacity constraints. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 175, n. 1, p. 213–245, 2010. Citado na página 48.

- BALINSKI, M. L.; QUANDT, R. E. On an integer program for a delivery problem. *Operations Research*, INFORMS, v. 12, n. 2, p. 300–304, 1964. Citado 3 vezes nas páginas 17, 79 e 80.
- BAXTER, J. Depot location: A technique for the avoidance of local optima. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 18, n. 2, p. 208–214, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 84.
- BEKTAŞ, T.; ERDOĞAN, G.; RÖPKE, S. Formulations and branch-and-cut algorithms for the generalized vehicle routing problem. *Transportation Science*, Informs, v. 45, n. 3, p. 299–316, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 96, 97 e 99.
- BELTRAMI, E. J.; BODIN, L. D. Networks and vehicle routing for municipal waste collection. *Networks*, Wiley Online Library, v. 4, n. 1, p. 65–94, 1974. Citado na página 37.
- BERBEGLIA, G.; CORDEAU, J.-F.; GRIBKOVSKAIA, I.; LAPORTE, G. Static pickup and delivery problems: a classification scheme and survey. *Top*, Springer, v. 15, n. 1, p. 1–31, 2007. Citado na página 36.
- BEZANSON, J.; KARPINSKI, S.; SHAH, V.; EDELMAN, A. The julia language. *Julialang. org. Np*, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 19, 109 e 110.
- BODIN, L.; GOLDEN, B. Classification in vehicle routing and scheduling. *Networks*, Wiley Online Library, v. 11, n. 2, p. 97–108, 1981. Citado na página 48.
- BODIN, L. D. A taxonomic structure for vehicle routing and scheduling problems. *Computers & Urban Society*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 11–29, 1975. Citado na página 48.
- BRAEKERS, K.; RAMAEKERS, K.; NIEUWENHUYSE, I. V. The vehicle routing problem: State of the art classification and review. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 99, p. 300–313, 2016. Citado 9 vezes nas páginas 11, 16, 31, 37, 41, 42, 43, 44 e 45.
- BRASIL, I. Censo demográfico, 2010. *Acesso em*, v. 13, 2015. Citado na página 20.
- BRÄYSY, O.; GENDREAU, M. Vehicle routing problem with time windows, part i: Route construction and local search algorithms. *Transportation science*, INFORMS, v. 39, n. 1, p. 104–118, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 17, 36 e 38.
- _____. Vehicle routing problem with time windows, part ii: Metaheuristics. *Transportation science*, INFORMS, v. 39, n. 1, p. 119–139, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 36.
- CAMPBELL, A. M.; WILSON, J. H. Forty years of periodic vehicle routing. *Networks*, Wiley Online Library, v. 63, n. 1, p. 2–15, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- CHRISTOFIDES, N.; EILON, S. An algorithm for the vehicle-dispatching problem. *Journal of the Operational Research Society*, Springer, v. 20, n. 3, p. 309–318, 1969. Citado 3 vezes nas páginas 72, 73 e 75.
- CHRISTOFIDES, N.; MINGOZZI, A.; TOTH, P. Exact algorithms for the vehicle routing problem, based on spanning tree and shortest path relaxations. *Mathematical programming*, Springer, v. 20, n. 1, p. 255–282, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 74.

- CIDADEDES, I. Disponível em. *Acesso em*, v. 28, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 25.
- CLARKE, G.; WRIGHT, J. W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations research*, Informs, v. 12, n. 4, p. 568–581, 1964. Citado 8 vezes nas páginas 15, 17, 26, 32, 33, 79, 80 e 85.
- CONTARDO, C.; MARTINELLI, R. A new exact algorithm for the multi-depot vehicle routing problem under capacity and route length constraints. *Discrete Optimization*, Elsevier, v. 12, p. 129–146, 2014. Citado na página 78.
- CORDEAU, J.-F.; GENDREAU, M.; LAPORTE, G.; POTVIN, J.-Y.; SEMET, F. A guide to vehicle routing heuristics. *Journal of the Operational Research society*, Springer, v. 53, n. 5, p. 512–522, 2002. Citado na página 48.
- CORDEAU, J.-F.; LAPORTE, G.; MERCIER, A. A unified tabu search heuristic for vehicle routing problems with time windows. *Journal of the Operational research society*, Springer, v. 52, n. 8, p. 928–936, 2001. Citado na página 84.
- CORDEAU, J.-F.; LAPORTE, G.; SAVELSBERGH, M. W.; VIGO, D. Vehicle routing. *Handbooks in operations research and management science*, Elsevier, v. 14, p. 367–428, 2007. Citado na página 48.
- CURRENT, J.; MARSH, M. Multiobjective transportation network design and routing problems: Taxonomy and annotation. *European Journal of Operational Research*, North-Holland, v. 65, n. 1, p. 4–19, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- DANTZIG, G. B.; RAMSER, J. H. The truck dispatching problem. *Management science*, Informs, v. 6, n. 1, p. 80–91, 1959. Citado 3 vezes nas páginas 15, 32 e 35.
- DESROCHERS, M.; LENSTRA, J. K.; SAVELSBERGH, M. W. A classification scheme for vehicle routing and scheduling problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 46, n. 3, p. 322–332, 1990. Citado na página 48.
- DESROSIERS, J.; SOUMIS, F.; DESROCHERS, M. Routing with time windows by column generation. *Networks*, Wiley Online Library, v. 14, n. 4, p. 545–565, 1984. Citado na página 76.
- DUECK, G. New optimization heuristics. *Journal of Computational physics*, Elsevier Science, v. 104, n. 1, p. 86–92, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 84.
- DUECK, G.; SCHEUER, T. Threshold accepting: a general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 90, n. 1, p. 161–175, 1990. Citado na página 82.
- EKSIOGLU, B.; VURAL, A. V.; REISMAN, A. The vehicle routing problem: A taxonomic review. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 57, n. 4, p. 1472–1483, 2009. Citado 7 vezes nas páginas 16, 31, 35, 36, 37, 41 e 48.
- FINKE, G. A two-commodity network flow approach to the traveling salesman problem. *Congresses Numeration*, v. 41, p. 167–178, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 89, 93 e 97.
- FISHER, M. L. Optimal solution of vehicle routing problems using minimum k-trees. *Operations research*, INFORMS, v. 42, n. 4, p. 626–642, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 73, 74 e 75.

- FOSTER, B. A.; RYAN, D. M. An integer programming approach to the vehicle scheduling problem. *Journal of the Operational Research Society*, Springer, v. 27, n. 2, p. 367–384, 1976. Citado na página 80.
- FUKASAWA, R.; LONGO, H.; LYSGAARD, J.; ARAGÃO, M. P. de; REIS, M.; UCHOA, E.; WERNECK, R. F. Robust branch-and-cut-and-price for the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical programming*, Springer, v. 106, n. 3, p. 491–511, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.
- GENDREAU, M.; HERTZ, A.; LAPORTE, G. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem. *Management science*, INFORMS, v. 40, n. 10, p. 1276–1290, 1994. Citado na página 84.
- GENDREAU, M.; LAPORTE, G.; POTVIN, J.-Y. Metaheuristics for the capacitated vrp. In: *The vehicle routing problem*. [S.l.]: SIAM, 2002. p. 129–154. Citado na página 48.
- GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. *Handbook of metaheuristics*. [S.l.]: Springer, 2010. v. 2. Citado na página 82.
- GLOVER, F. Heuristics for integer programming using surrogate constraints. *Decision sciences*, Wiley Online Library, v. 8, n. 1, p. 156–166, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 87.
- _____. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & operations research*, Elsevier, v. 13, n. 5, p. 533–549, 1986. Citado na página 82.
- GOLDEN, B.; ASSAD, A.; LEVY, L.; GHEYSENS, F. The fleet size and mix vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 11, n. 1, p. 49–66, 1984. Citado na página 65.
- GOLDEN, B. L.; RAGHAVAN, S.; WASIL, E. A. *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 43. Citado 4 vezes nas páginas 17, 35, 71 e 79.
- HÀ, M. H.; BOSTEL, N.; LANGEVIN, A.; ROUSSEAU, L.-M. An exact algorithm and a metaheuristic for the multi-vehicle covering tour problem with a constraint on the number of vertices. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 226, n. 2, p. 211–220, 2013. Citado 8 vezes nas páginas 18, 92, 93, 94, 95, 100, 101 e 102.
- HÀ, M. H.; BOSTEL, N.; LANGEVIN, A.; ROUSSEAU, L. M. An exact algorithm and a metaheuristic for the generalized vehicle routing problem with flexible fleet size. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 43, p. 9–19, 2014. Citado 7 vezes nas páginas 18, 96, 97, 98, 101, 102 e 147.
- HELD, M.; KARP, R. M. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: Part ii. *Mathematical programming*, Springer, v. 1, n. 1, p. 6–25, 1971. Citado na página 73.
- HOLLAND, J. Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with application to biology. *Control and artificial intelligence*, University of Michigan Press, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 86.

JOHNSON, D. S.; MCGEOCH, L. A. The traveling salesman problem: a case study in local optimization. *Local search in combinatorial optimization*, Chichester, UK, v. 1, p. 215–310, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 18, 79 e 81.

_____. Experimental analysis of heuristics for the stsp. In: *The traveling salesman problem and its variations*. [S.l.]: Springer, 2007. p. 369–443. Citado na página 81.

JUNIOR, D. P. A.; ALBERTIN, M. R.; NETO, A. R. P.; ROLIM, G. A. Otimização do transporte de trabalhadores de uma indústria na região metropolitana de fortaleza. In: ANPET. *Anais do XXX Congresso Nacional de Pesquisa em Transporte da ANPET*. Rio de Janeiro, 2016. v. 1, p. 511–520. Citado na página 26.

KARAOĞLAN, I. A branch-and-cut algorithm for the vehicle routing problem with multiple use of vehicles. *International Journal of Lean Thinking*, Directory of Open Access Journals, v. 6, n. 1, p. 21–46, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 68.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983. Citado na página 82.

KULKARNI, R.; BHAVE, P. R. Integer programming formulations of vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 20, n. 1, p. 58–67, 1985. Citado na página 54.

LANGEVIN, A.; DESROCHERS, M.; DESROSIERS, J.; GÉLINAS, S.; SOUMIS, F. A two-commodity flow formulation for the traveling salesman and the makespan problems with time windows. *Networks*, Wiley Online Library, v. 23, n. 7, p. 631–640, 1993. Citado 7 vezes nas páginas 18, 88, 89, 90, 93, 97 e 102.

LAPORTE, G. The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 59, n. 3, p. 345–358, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 48, 50, 51 e 53.

_____. Fifty years of vehicle routing. *Transportation Science*, INFORMS, v. 43, n. 4, p. 408–416, 2009. Citado 8 vezes nas páginas 17, 32, 33, 34, 36, 37, 41 e 71.

LAPORTE, G.; MERCURE, H.; NOBERT, Y. An exact algorithm for the asymmetrical capacitated vehicle routing problem. *Networks*, Wiley Online Library, v. 16, n. 1, p. 33–46, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 53.

LAPORTE, G.; NOBERT, Y. Exact algorithms for the vehicle routing problem. In: *North-Holland Mathematics Studies*. [S.l.]: Elsevier, 1987. v. 132, p. 147–184. Citado 3 vezes nas páginas 48, 56 e 71.

LAPORTE, G.; NOBERT, Y.; DESROCHERS, M. Optimal routing under capacity and distance restrictions. *Operations research*, INFORMS, v. 33, n. 5, p. 1050–1073, 1985. Citado na página 76.

LI, F.; GOLDEN, B.; WASIL, E. Very large-scale vehicle routing: new test problems, algorithms, and results. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 32, n. 5, p. 1165–1179, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 84.

- LIN, C.; CHOY, K. L.; HO, G. T.; CHUNG, S. H.; LAM, H. Survey of green vehicle routing problem: past and future trends. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 41, n. 4, p. 1118–1138, 2014. Citado na página 36.
- LIN, S. Computer solutions of the traveling salesman problem. *Bell System Technical Journal*, Wiley Online Library, v. 44, n. 10, p. 2245–2269, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 81.
- LIN, S.; KERNIGHAN, B. W. An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem. *Operations research*, INFORMS, v. 21, n. 2, p. 498–516, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 81.
- LITTLE, J. D.; MURTY, K. G.; SWEENEY, D. W.; KAREL, C. An algorithm for the traveling salesman problem. *Operations research*, INFORMS, v. 11, n. 6, p. 972–989, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 72.
- LOURENÇO, H. R.; MARTIN, O. C.; STÜTZLE, T. Iterated local search: Framework and applications. In: *Handbook of metaheuristics*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 363–397. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 84.
- LYSGAARD, J.; LETCHFORD, A. N.; EGGLESE, R. W. A new branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical Programming*, Springer, v. 100, n. 2, p. 423–445, 2004. Citado na página 76.
- MAFFIOLI, F. The vehicle routing problem: A book review. *Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies*, Springer, v. 1, n. 2, p. 149–153, 2003. Citado na página 48.
- MILLER, D. L. A matching based exact algorithm for capacitated vehicle routing problems. *ORSA Journal on Computing*, INFORMS, v. 7, n. 1, p. 1–9, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 73, 74 e 75.
- MLADENOVIĆ, N.; HANSEN, P. Variable neighborhood search. *Computers & operations research*, Elsevier, v. 24, n. 11, p. 1097–1100, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 85.
- MONTANÉ, F. A. T.; GALVÃO, R. D. Vehicle routing problems with simultaneous pick-up and delivery service. *Opsearch*, Springer, v. 39, n. 1, p. 19–33, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 64.
- MONTOYA-TORRES, J. R.; FRANCO, J. L.; ISAZA, S. N.; JIMÉNEZ, H. F.; HERAZO-PADILLA, N. A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 79, p. 115–129, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 17, 36, 40, 48 e 54.
- MOURGAYA, M.; VANDERBECK, F. The periodic vehicle routing problem: classification and heuristic. *RAIRO-Operations Research*, EDP Sciences, v. 40, n. 2, p. 169–194, 2006. Citado na página 48.
- NIKOLAEV, A. G.; JACOBSON, S. H. Simulated annealing. In: *Handbook of metaheuristics*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 1–39. Citado na página 82.
- OLIVEIRA, R. C. Aspectos teóricos e computacionais na resolução do problema de rotas e cobertura multiveículo. Dissertação de mestrado. Unicamp, 2015. Citado na página 88.

OLIVEIRA, R. C.; OLIVEIRA, W.; MORETTI, A. C. O problema de rotas de cobertura multiveículo com uma restrição de equilíbrio no número de vértices entre rotas. *XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, p. 2892–2903, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 100 e 102.

OLIVEIRA, W. A. Construção de rotas para patrulhamento urbano preventivo. Dissertação de mestrado. Unicamp, 2008. Citado na página 100.

OLIVEIRA, W. A.; MORETTI, A. C.; REIS, E. F. Multi-vehicle covering tour problem: building routes for urban patrolling. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 35, n. 3, p. 617–644, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 18, 88, 99, 100 e 101.

OTA, C. T. *Métodos de resolução e modelagem para o problema de rotas de cobertura multiveículo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Ciências Aplicadas, Limeira, 2018. Citado 8 vezes nas páginas 10, 18, 70, 88, 100, 101, 102 e 106.

PAESSENS, H. The savings algorithm for the vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 34, n. 3, p. 336–344, 1988. Citado na página 80.

PECIN, D.; PESSOA, A.; POGGI, M.; UCHOA, E. Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing. *Mathematical Programming Computation*, Springer, v. 9, n. 1, p. 61–100, 2017. Citado na página 77.

PESSOA, A.; ARAGÃO, M. P. D.; UCHOA, E. A robust branch-cut-and-price algorithm for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. In: SPRINGER. *International Workshop on Experimental and Efficient Algorithms*. [S.l.], 2007. p. 150–160. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.

_____. Robust branch-cut-and-price algorithms for vehicle routing problems. In: *The vehicle routing problem: Latest advances and new challenges*. [S.l.]: Springer, 2008. p. 297–325. Citado na página 78.

PILLAC, V.; GENDREAU, M.; GUÉRET, C.; MEDAGLIA, A. L. A review of dynamic vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 225, n. 1, p. 1–11, 2013. Citado na página 36.

PISINGER, D.; ROPKE, S. A general heuristic for vehicle routing problems. *Computers & operations research*, Elsevier, v. 34, n. 8, p. 2403–2435, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 18, 79 e 82.

POP, P. C.; KARA, I.; MARC, A. H. New mathematical models of the generalized vehicle routing problem and extensions. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 97–107, 2012. Citado na página 96.

PRINS, C. A simple and effective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 31, n. 12, p. 1985–2002, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 86.

PSARAFTIS, H. N. Dynamic vehicle routing: Status and prospects. *Annals of operations research*, Springer, v. 61, n. 1, p. 143–164, 1995. Citado na página 48.

- RALPHS, T. K.; KOPMAN, L.; PULLEYBLANK, W. R.; TROTTER, L. E. On the capacitated vehicle routing problem. *Mathematical programming*, Springer, v. 94, n. 2-3, p. 343–359, 2003. Citado na página 76.
- REIMANN, M.; DOERNER, K.; HARTL, R. F. D-ants: Savings based ants divide and conquer the vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 31, n. 4, p. 563–591, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 85.
- RENAUD, J.; BOCTOR, F. F.; LAPORTE, G. An improved petal heuristic for the vehicle routing problem. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 47, n. 2, p. 329–336, 1996. Citado na página 80.
- RENAUD, J.; LAPORTE, G.; BOCTOR, F. F. A tabu search heuristic for the multi-depot vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 23, n. 3, p. 229–235, 1996. Citado na página 54.
- RESENDE, M. G.; RIBEIRO, C. C.; GLOVER, F.; MARTÍ, R. Scatter search and path-relinking: Fundamentals, advances, and applications. In: *Handbook of metaheuristics*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 87–107. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 87.
- RODRIGUES, S. B. Metaheurística colônia de formigas aplicada a um problema de roteamento de veículos: caso da itaipu binacional. *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, v. 40, 2008. Citado na página 26.
- RØPKE, S. Branching decisions in branch-and-cut-and-price algorithms for vehicle routing problems. *Presentation in Column Generation*, v. 2012, 2012. Citado na página 78.
- RYAN, D. M.; HJORRING, C.; GLOVER, F. Extensions of the petal method for vehicle routing. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 44, n. 3, p. 289–296, 1993. Citado na página 80.
- ŞEN, A.; BÜLBÜL, K. A survey on multi trip vehicle routing problem. İstanbul Bilgi Üniversitesi, 2008. Citado na página 48.
- SOLOMON, M. M.; DESROSIERS, J. Survey paper—time window constrained routing and scheduling problems. *Transportation science*, INFORMS, v. 22, n. 1, p. 1–13, 1988. Citado na página 48.
- SUBRAMANIAN, A.; UCHOA, E.; OCHI, L. S. A hybrid algorithm for a class of vehicle routing problems. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 40, n. 10, p. 2519–2531, 2013. Citado na página 85.
- TARANTILIS, C. D.; ANAGNOSTOPOULOU, A. K.; REPOUSSIS, P. P. Adaptive path relinking for vehicle routing and scheduling problems with product returns. *Transportation Science*, INFORMS, v. 47, n. 3, p. 356–379, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 87.
- THOMPSON, P. M.; PSARAFTIS, H. N. Cyclic transfer algorithm for multivehicle routing and scheduling problems. *Operations research*, INFORMS, v. 41, n. 5, p. 935–946, 1993. Citado na página 82.
- TOTH, P.; VIGO, D. An overview of vehicle routing problems. In: *The vehicle routing problem*. [S.l.]: SIAM, 2002. p. 1–26. Citado 9 vezes nas páginas 17, 35, 48, 56, 61, 71, 73, 77 e 79.

- _____. The granular tabu search and its application to the vehicle-routing problem. *Inform Journal on computing*, INFORMS, v. 15, n. 4, p. 333–346, 2003. Citado na página 81.
- _____. *Vehicle routing: problems, methods, and applications*. [S.l.]: SIAM, 2014. Citado 13 vezes nas páginas 17, 35, 39, 40, 48, 71, 75, 76, 77, 79, 81, 82 e 85.
- VIDAL, T.; CRAINIC, T. G.; GENDREAU, M.; LAHRICHI, N.; REI, W. A hybrid genetic algorithm for multidepot and periodic vehicle routing problems. *Operations Research*, INFORMS, v. 60, n. 3, p. 611–624, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 86.
- VIEIRA, H. P. Metaheurística para a solução de problemas de roteamento de veículos com janela de tempo. Dissertação de mestrado. Unicamp, 2008. Citado na página 60.
- WEISE, T.; PODLICH, A.; GORLDT, C. Solving real-world vehicle routing problems with evolutionary algorithms. In: *Natural intelligence for scheduling, planning and packing problems*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 29–53. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.
- ZIROUR, M. Vehicle routing problem: models and solutions. *Journal of Quality Measurement and Analysis JQMA*, v. 4, n. 1, p. 205–218, 2008. Citado na página 48.