UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

GRAZIANE SALES TEODORO

Derivadas fracionárias: tipos e critérios de validade

Campinas

2019

Graziane Sales Teodoro

Derivadas fracionárias: tipos e critérios de validade

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Matemática Aplicada.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pela aluna Graziane Sales Teodoro e orientada pelo Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira.

Campinas

2019

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Silvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

T264d	Teodoro, Graziane Sales, 1990- Derivadas fracionárias : tipos e critérios de validade / Graziane Sales Teodoro. – Campinas, SP : [s.n.], 2019. Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Derivadas fracionárias. 2. Cálculo fracionário. 3. Equações diferenciais fracionárias. 4. Modelos fracionários. 5. Integrais fracionárias. I. Oliveira, Edmundo Capelas de, 1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Fractional derivatives : types and validity criteria
Palavras-chave em inglês:
Fractional derivates
Fractional calculus
Fractional differential equations
Fractional Models
Fractional integrals
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Doutora em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Edmundo Capelas de Oliveira [Orientador]
Rubens de Figueiredo Camargo
Eliana Contharteze Grigoletto
Jayme Vaz Júnior
Jose Vanterler da Costa Sousa
Data de defesa: 07-01-2019
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 07 de janeiro de 2019 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO

Prof(a). Dr(a). ELIANA CONTHARTEZE GRIGOLETTO

Prof(a). Dr(a). JAYME VAZ JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). JOSE VANTERLER DA COSTA SOUSA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedicado a

Larissa e Isabela que preencheram com amor e alegria essa jornada;

Grazielle e Pedro que são os melhores irmãos que alguém poderia ter e

Edmundo que sem ele este trabalho não existiria.

Agradecimentos

A Deus pela proteção constante e por sempre guiar os meus passos!

À UNICAMP, ao IMECC e ao programa de pós-graduação em Matemática Aplicada por proporcionar que esse sonho fosse realizado.

À Capes pela bolsa de estudo. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

À UFLA, em especial ao DEX, pela concessão do afastamento, que me possibilitou a concretização de mais essa importante etapa em minha vida. A todos os professores desse departamento o meu muito obrigada.

Agradeço de forma especial ao meu orientador, Edmundo Capelas de Oliveira, que nunca mediu esforços para me ajudar, sempre muito dedicado e competente. Obrigada pela orientação, dedicação, atenção, ensinamentos e exemplo de professor.

Aos meus colegas de orientação Daniela, José Vanterler e Ester.

Aos membros da banca Eliana Contharteze Grigoletto, Jayme Vaz Júnior, José Vanterler da Costa Sousa e Rubens Figueiredo Camargo que gentilmente aceitaram o convite.

À capoeira por me proporcionar amizades que levarei para vida toda. Castor, Delicada, Jeni e Pimentinha não tenho palavras para expressar o quão importantes vocês foram para que essa etapa fosse cumprida.

A meu professor Neto e a todos colegas de treino que me proporcionaram boas emoções e sensações.

Aos meus amigos queridos, Thais Presses e Gregory Murad, que mesmo distantes estiveram presente em cada etapa desse doutorado.

Ao meu amado amigo Pedro Longo, por estar sempre ao meu lado, pelo companherismo, amizade, por ser essa pessoa tão linda e tenho tanto orgulho de tê-lo como amigo. Obrigada por fazer meus dias mais felizes, por formar a Casa Feliz comigo!

Às minhas tias Gi, Lena e Stela e a minha querida vovó Inêz por todo carinho e por estarem sempre torcendo para meu sucesso.

Em especial, agradeço a meus pais, Sônia e João, por serem os melhores pais do mundo, pelo exemplo de amor, humildade e simplicidade. Por me apoiarem sempre, por estarem sempre ao meu lado, pelas orações e por acreditar em mim. Vocês são meus maiores exemplo!

Agradeço também a minha amada irmã, Grazi, que sempre esteve presente em cada etapa de minha vida me apoiando e ajudando, sendo fundamental para que eu estivesse aqui hoje. Obrigada por toda amizade, cumplicidade, amor,...

À Larissa e à Isabela por fazer chover amor em nossas vidas, colorindo das melhores cores os meus dias, proporcionando muitas risadas e amor!

"Eu sou um barco na imensidão do mar
Com saudade do meu porto
Navego, navego, navego nas ondas do mar
Vento me leva pra lá de novo."
Mestrando Sabiá

Resumo

O número de formulações, na literatura especializada, envolvendo o termo derivada fracionária é grande e esse número vem aumentando. Tendo em vista esse crescente número de definições, nesse trabalho apresentamos dois critérios: o proposto por Ross em 1975 e o proposto por Ortigueira e Machado em 2015 - ambos compostos por cinco propriedades, que nos auxiliam a concluir quando um dado operador é uma derivada fracionária. Classificamos as derivadas de ordem não inteira em três classes distintas, a saber, derivadas clássicas, derivadas locais e derivadas com núcleo não singular. Depois disso, verificamos a real possibilidade de um operador poder ser classificado como derivada fracionária, segundo o critério de Ortigueira e Machado - visto esse ser mais restritivo do que o proposto por Ross. As derivadas clássicas são as que melhores satisfazem o critério proposto por Ortigueira e Machado, podendo assim serem ditas derivadas fracionárias, de acordo com o referido critério. A classe das derivadas locais não pode ser considerada como de derivadas fracionárias por esse critério, sendo assim propomos um novo critério para essa classe de operadores. Já as derivadas com núcleo não singular, em sua grande maioria, não cumprem todas as propriedades do critério em questão. Como aplicação, resolvemos a equação logística linear em sua versão fracionária utilizando três diferentes derivadas ditas fracionárias, sendo cada uma representante de uma classe.

Palavras-chave: critério. derivada fracionária. derivada clássica. derivada local. derivada com núcleo não singular.

Abstract

The number of formulations in specialized literature involving the term fractional derivative is significant and that number has increased. Considering the growing number of definitions, in this thesis, we present two criteria: one proposed by Ross in 1975 and the other proposed by Ortigueira and Machado in 2015 - both have five properties, what helps us to conclude if a given operator is a fractional derivative. We have classified the non-integer order derivatives in three different classes: classic derivatives, local derivative and derivatives without singular kernel. In the sequence, we check the real possibility of a non-integer order derivative be classified as a fractional derivative, according to the criterion of Ortigueira and Machado - which is more restrictive than the one proposed by Ross. Classic derivatives are the ones which best correspond to the criterion proposed by Ortugueira and Machado, being called fractional derivatives, according to that criterion. Local derivatives cannot be considered fractional derivatives by that criterion, therefore we propose a new criterion for this class of operators. Vast majority of derivatives without singular kernel do not satisfy all the properties of the criterion in question. As an application we solve the linear logistic equation in its fractional version using three different fractional derivatives, each one representing a class.

Keywords: criterion. fractional derivative. classic derivative. local derivative. derivative without singular kernel.

Sumário

Introdução

Como é sabido, o cálculo diferencial e integral de ordem inteira ou, simplesmente, cálculo diferencial e integral, ou ainda, somente cálculo, é um ramo do que é conhecido como Análise, um dos pilares da Matemática. O cálculo, como o conhecemos hoje, é uma sucessão de contribuições a partir de como foi proposto, independentemente, por Newton e Leibniz, no final do século XVII. Vários matemáticos contribuíram para a evolução e aprimoramento e que, aqui, mencionamos: Euler, Lagrange, Cauchy, Weierstrass, Riemann, dentre outros [16].

Paralelamente, na mesma época, foi concebido o cálculo de ordem não inteira, popularmente conhecido pelo nome de cálculo fracionário. Esse nome advém de uma célebre correspondência, datada de 30 de setembro de 1695, trocada entre l'Hôpital e Leibniz, onde o primeiro, através de um simples questionamento, queria saber o significado de uma derivada de ordem meio. Leibniz, em tom audacioso, para não dizer profético, apresentou o resultado e afirmou, com toda certeza, que esse paradoxo um dia iria gerar várias consequências importantes. Hoje, depois de mais de trezentos anos, temos a certeza que o cálculo fracionário se tornou uma fonte de discussões, controvérsias e muitas pesquisas [19].

O cálculo está completamente consolidado e contempla uma série de aplicações das quais destacamos o estudo das equações diferenciais, integrais e integrodiferenciais. Tais equações podem ser encontradas em vários ramos da ciência, percorrendo uma enorme gama, digamos, da física, passando pela engenharia, até a biologia, sem deixar de lado a economia, dentre outras. Por outro lado, o cálculo fracionário, além de estar presente em várias aplicações, apesar de não ter uma interpretação geométrica, destaca-se na abordagem de problemas que envolvem os conceitos de não localidade e efeito de memória os quais não podem ser explicados pelo cálculo, em particular, pelo conceito de derivada que, no cálculo é um operador local enquanto no cálculo fracionário é um operador não local [60].

Aqui, vamos nos concentrar no estudo da derivada fracionária de ordem α a qual pode ser inclusive complexa, bem como de ordem variável. Devido a proliferação de diferentes definições de derivada, faz-se necessário, primeiro uma ordenação para depois adentrarmos numa classificação, objetivo central do presente trabalho. Começamos com a ordenação no seguinte sentido: ao considerar α uma constante, não nos preocupamos com a ordem variável e, $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, não vamos nos preocupar com a ordem complexa [78].

Ainda mais, vamos considerar $0 < \alpha < 1$, uma vez que a extensão, em sua grande maioria, é tarefa não muito árdua.

Então, nosso trabalho, uma extensão natural do trabalho [67], visa, em primeiro lugar, classificar as derivadas de ordem não inteiras, sendo a ordem uma constante real, não serão consideradas a ordem complexa nem ordem arbitrária, em três classes distintas para, depois, verificar, segundo um particular critério, a real possibilidade de um operador de ordem não inteira poder ser classificado como derivada fracionária [70, 93, 94]. A importância dessa classificação que é, no mínimo, uma tabela ordenada, explicita o verdadeiro potencial de uma derivada fracionária poder ser utilizada em problemas do mundo real, com ganhos relativos, isto é, apresentando resultados mais fidedignos, em contraste com a derivada de ordem inteira, no sentido que a escolha da derivada é de fundamental importância, por exemplo, em problemas que envolvem efeito de memória.

Começamos destacando as três classes, das assim chamadas derivadas fracionárias, que são encontradas na literatura especializada, a saber, derivadas fracionárias clássicas, derivadas “fracionárias” locais, derivadas “fracionárias” com núcleo não singular. Note que escrevemos a palavra fracionária entre aspas, pois não são consideradas fracionárias no sentido que abordamos aqui, isto é, satisfazendo um particular critério [76]. Fazem parte da primeira classe aquelas que, com uma ou outra modificação, tiveram início com a formulação proposta por Sonin [82], a partir da integral de Riemann-Liouville, uma generalização da integral de Cauchy. Nesta classe, a qual passamos a denominar derivadas fracionárias clássicas, acreditamos que a mais importante contribuição, cem anos depois de Sonin, é devida a Caputo [21] que, em linhas gerais, trocou a ordem dos símbolos de integral com o de derivada. Então, a diferença entre as formulações de Riemann-Liouville (derivada de uma integral) e Caputo (integral de uma derivada), como já mencionado, permuta a ordem dos símbolos e é essa troca que desempenha papel fundamental na abordagem de um particular problema. Hoje, advindo dessa permuta, podemos ter uma divisão nessa classe, isto é, formulações tipo Riemann-Liouville e formulações tipo Caputo, querendo dizer, respectivamente, derivada de uma integral e integral de uma derivada. Mencionamos, como formulações dessa primeira classe, as formulações de Liouvile, Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Marchaud, Chen, Hadamard, Riesz, Weyl, Osler e Hilfer, além de outras menos conhecidas, dentre elas, as formulações de Davidson-Essex, Coimbra, Canavati, Cossar [67] e Jumarie [41, 58]. Mais recente são as formulações tipo Caputo-Hadamard [5], Hilfer-Katugampola [62], derivada fracionária tipo Caputo [63], derivada (k, ρ)-fracionária [64] e ψ-Hilfer [84].

Passemos à segunda classe de derivadas fracionárias. Essa classe de formulações teve início no final da década de noventa e é composta pelas chamadas derivadas “fracionárias” locais que serão denominadas apenas como derivadas locais, e, para uma revisão, mencionamos a referência [51]. Após 2012, novas formulações têm sido propostas, das quais mencionamos: a derivada compatível, introduzida por Khalil et al. [48], bem como o chamado cálculo compatível [2]; a derivada fracionária alternativa, introduzida por Katugampola [46] e, mais recente, várias outras têm sido introduzidas, das quais mencionamos: a derivada M e a derivada $\mathcal{V}$ [85]. Ainda nessa classe podemos inserir as, também recentes, derivadas truncadas, dentre elas M e $\mathcal{V}$ [86, 87, 88, 89]. Aqui, devemos ressaltar que, a partir do critério proposto por Ortigueira-Tenreiro Machado [70] foi mostrado que tais derivadas locais, por não satisfazerem o critério, não podem ser consideradas como fracionárias. Esse mesmo resultado foi obtido de uma maneira diferente por Tarasov que mostrou que tais derivadas são, quando muito um fator multiplicativo de uma derivada de ordem um [94].

Enfim, passemos à terceira classe das derivadas fracionárias. Essa classe emerge na literatura a partir do trabalho de Caputo-Fabrizio [22] onde os autores propuseram um núcleo não singular para a integral fracionária e, por isso, vamos classificar tais derivadas com a nomenclatura derivadas "fracionárias" com núcleo não singular ou simplesmente como derivadas com núcleo não singular. Vamos mencionar algumas outras derivadas que se enquadram nessa nomenclatura. Atangana [10] introduziu uma nova derivada fracionária com núcleo não singular para discutir uma equação do tipo reação-difusão; Atangana e Baleanu [11] introduziram uma derivada com núcleo não singular, em particular, sendo o núcleo uma função de Mittag-Leffler, Yang e Tenreiro Machado [105] também introduziram uma nova derivada a fim de estudar o problema de difusão anômala. Também recente é o trabalho de Agarwal et al. [4], onde o núcleo contém uma função hipergeométrica. Ainda nesta classe mencionamos, Garra et al. [33] que introduziram as chamadas derivadas Hilfer-Prabhakar, onde o núcleo contém uma função de Mittag-Leffler com três parâmetros. Devemos mencionar as derivadas que foram introduzidas com um parâmetros a mais, dentre as quais mencionamos Panchal et al. [72], a chamada derivada k-Hilfer-Prabhakar.

Finalmente, nessa introdução, mencionamos que outras tantas derivadas podem ser propostas fazendo possíveis associações ora envolvendo, na primeira classe, a derivada antes da integral, tipo Riemann-Liouville, ou a integral antes da derivada, tipo Caputo; na segunda classe podemos considerar várias possibilidades, porém todas elas devem recair num fator multiplicando a derivada primeira, na terceira classe podemos propor um núcleo envolvendo uma particular função, ou mesmo um produto de funções. E, nada impede, que se combine possibilidades entre as três classes, conforme nossa classificação. Ainda mais, com certeza, cada uma delas foi introduzida visando uma particular aplicação porém somente o experimento vai concluir se tal proposta é, realmente, essa derivada que melhor descreve o particular problema em questão. É importante inferir que, nesse trabalho, ainda que se mencionemos uma particular aplicação, não é nosso foco possíveis aplicações envolvendo as três classes abordadas.

Tendo em vista o objetivo principal desse trabalho, uma classificação para as derivadas de ordem não inteira, esse trabalho está disposto da seguinte maneira: no Capítulo 1, apresentamos dois critérios para um operador ser classificado como derivada fracionária, um proposto por Ross [76] e o outro por Ortigueira e Machado [70]. Nos Capítulos 2, 3 e 4 usaremos o critério de Ortigueira e Machado, visto ser esse critério mais restritivo do que o proposto por Ross, para verificar se alguns operadores, conhecidos na literatura como derivadas fracionárias, realmente podem ser assim chamados. No Capítulo 2 apresentamos algumas derivadas da primeira classe, as derivadas clássicas, e de acordo com o critério em questão essas derivadas podem ser chamadas de fracionárias. No Capítulo 3 as derivadas locais são o nosso objetivo de estudo, essas derivadas não cumprem todos os itens do critério de Ortigueira e Machado, não podendo assim ser classificada como fracionária. As derivadas com núcleo não singular são apresentadas no Capítulo 4 e também não satisfazem o critério de Ortigueira e Machado. E por fim, no Capítulo 5, resolvemos a equação logística linearizada em sua versão fracionária utilizando uma derivada de cada uma das classes de derivadas, a saber, derivadas fracionárias clássicas, derivadas locais e derivadas com núcleo não singular. As conclusões e perspectivas encerram o trabalho, bem como cinco apêndices abordando regra de Leibniz, transformada de Laplace, coeficiente binomial e fórmula de reflexão de Euler.

Capítulo 1

Critérios para uma derivada fracionária

O cálculo fracionário ganhou popularidade e importância considerável durante as últimas três décadas principalmente devido a suas aplicações atraentes em campos da ciência e engenharia [79]. Existe mais de uma formulação para a derivada fracionária [67] e esse número de definições vem aumentando com o passar do tempo, sendo cada uma delas mais adequada a um certo contexto físico [75, 96]. Com isso nos deparamos com a seguinte questão: Que critérios um operador deve satisfazer para que este possa ser considerado uma derivada fracionária [97]?

Esse capítulo será dedicado ao estudo de dois critérios que nos auxiliarão a concluir quando um dado operador pode ser considerado um operador associado à derivação fracionária. Apresentaremos os critérios propostos por Ross em 1975 [76] e por Ortigueira e Machado em 2015 [70].

Após a apresentação desses critérios verificaremos nos próximos três capítulos, derivadas fracionárias clássicas, derivadas locais e derivadas com núcleo não singular, se particulares operadores, conhecidos na literatura como derivadas fracionárias, cumprem o critério proposto por Ortigueira e Machado [70], visto ser esse critério mais restritivo do que o proposto o Ross [76] .

Para a apresentação desses critérios usaremos a notação D^α para representar uma derivada fracionária qualquer de ordem α. O critério proposto por Bertran Ross [76] para que um operador seja uma derivada fracionária é:

Critério segundo Ross

1. A derivada fracionária de uma função analítica[a] é analítica;

2. A derivação fracionária, quando a ordem é um inteiro positivo n, $n \in \mathbb{N}$, deve produzir o mesmo resultado da derivação ordinária, ou seja,
$$D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$
e quando a ordem é um inteiro negativo $-n$, $n \in \mathbb{N}$ deve produzir o mesmo resultado da n-ésima integração ordinária, ou seja,
$$D^{-n} f(x) = \int_0^x \int_0^{\tau_n - 1} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1};$$

3. A derivada de ordem zero de uma função é a própria função, $D^0 f(x) = f(x)$;

4. A derivada fracionária é um operador linear;

5. A lei dos expoentes,[b] $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x)$, é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$.

[a] Uma função analítica é uma função que pode ser localmente expandida em série de Taylor.

[b] A lei dos expoentes também é conhecida na literatura como propriedade de semigrupo.

Uma derivada fracionária cuja a ordem α é menor que zero pode ser interpretada como uma integral fracionária. De fato, considerando uma função analítica f temos que ela pode ser expandida na vizinhança de x_0, sendo x_0 pertencente ao domínio de f, em uma série de Taylor, assim $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Seja $m \in \mathbb{N}$ então $\frac{d^m}{dx^m} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}(x - x_0)^{n-m}$, uma forma de generalizar esse resultado para uma ordem α qualquer é, considerando a função gama, assim $D^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{\Gamma(n - \alpha + 1)}(x - x_0)^{n-\alpha}$.

Seja $\mu \in \mathbb{R}$ com $\mu \geqslant 0$ e levando em consideração a quarta propriedade do critério de Ross, ou seja, que uma derivada fracionária é um operador linear temos,

$$\begin{aligned} D^{\mu}D^{-\mu}f(x) &= D^{\mu}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{\Gamma(n+\mu+1)}(x-x_0)^{n+\mu}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{\Gamma(n+\mu+1)}D^{\mu}(x-x_0)^{n+\mu} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n} = f(x), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D^{-\mu}D^{\mu}f(x) &= D^{\mu}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{\Gamma(n-\mu+1)}(x-x_0)^{n-\mu}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{\Gamma(n-\mu+1)}D^{\mu}(x-x_0)^{n-\mu} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n} = f(x). \end{aligned}$$

Como $D^{-\mu}D^{\mu}f(x) = D^{\mu}D^{-\mu}f(x) = f(x)$ podemos interpretar através do teorema fundamental do cálculo que $D^{-\mu}$ representa uma integral, uma vez que as operações de derivada e integral são operações inversas, a menos de constantes.

Tendo em vista que operadores lineares que satisfazem a clássica regra de Leibniz, a saber, $D^{\alpha}(f(x)g(x)) = D^{\alpha}f(x)g(x)+f(x)D^{\alpha}g(x)$, não são derivadas fracionárias [93], uma vez que para essa regra ser satisfeita a ordem α da derivada fracionária coincide com a diferenciação de ordem igual a um, isto é, derivadas fracionárias de ordens não inteira não podem satisfazer a regra de Leibniz[1], sendo assim, estas derivadas devem satisfazer uma generalização da clássica regra de Leibniz.

Ainda mais, considerando que a derivada fracionária de uma função analítica não é necessariamente analítica, Ortigueira e Machado [70], reformularam o critério proposto por Ross e apresentam o seguinte critério para que uma derivada venha a ser considerada fracionária:

[1] Ver Apêndice A.

Critério segundo Ortigueira e Tenreiro Machado

1. A derivada fracionária é um operador linear;

2. A derivada fracionária de ordem zero de uma função é a própria função, $D^0 f(x) = f(x)$;

3. A derivação fracionária, quando a ordem é um inteiro deve produzir o mesmo resultado da derivação ordinária.

4. A lei dos expoentes, $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x)$, é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$;

5. Vale a generalização da regra de Leibniz[a],

$$D^\alpha(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D^k f(x) D^{\alpha-k} g(x),$$

sendo $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)k!}$.

[a] Ver Apêndice B para a demonstração da regra de Leibniz no caso inteiro.

Observemos tanto o critério proposto em 1975 por Ross [76] quanto o proposto por Ortigueira e Machado [70] são compostos de cinco propriedades e se diferenciam em apenas uma propriedade, no critério de Ross há "a derivada fracionária de uma função analítica é analítica" enquanto no de Ortigueira e Machado temos a propriedade "vale a generalização da regra de Leibniz".

Nos próximos capítulos apresentamos particulares operadores conhecidos como derivadas fracionárias e verificaremos se esses cumprem as cinco propriedades do critério de Ortigueira e Machado [70].

Capítulo 2

Derivadas fracionárias clássicas

Existe uma grande quantidade de definições envolvendo o conceito de derivada fracionária [67, 75]. Essa seção será dedicada ao estudo de algumas formulações para as derivadas fracionárias bem como a verificação do critério proposto por Ortigueira e Machado para essas derivadas. Vamos utilizar o critério proposto por Ortigueira e Machado [70], por julgarmos mais restritivo que aquele proposto por Ross [76]. Aqui, vamos nos dedicar ao estudo das chamadas derivadas fracionárias clássicas. Tal classe de derivada teve início com a formulação de Sonin [82]. Mencionamos, como formulações dessa classe, Liouville, Riemann-Liouville, Caputo [20, 30], Grünwald-Letnikov, Marchaud, Chen, Hadamard, Riesz, Weyl, Osler, Hilfer, Davidson-Essex, Coimbra, Canavati, Cossar [67], Jumarie [41, 58], Caputo-Hadamard [5], Hilfer-Katugampola [62], derivada fracionária tipo Caputo [63], derivada (k, ρ)-fracionária [64] e ψ-Hilfer [84], sendo essa última uma generalização de vinte e duas outras derivadas. Aqui, a fim de explicitarmos os cálculos, escolhemos as formulações conforme os autores a seguir: Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, Hilfer, Weyl, Chen, Jumarie, Hilfer-Katugampola e ψ-Hilfer.

De acordo com [57], as formulações de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville e Caputo são três tipos de derivadas fracionárias que frequentemente são mais usadas, sendo assim, começamos esse capítulo apresentando primeiro essas derivadas.

2.1 Derivada fracionária segundo Grünwald-Letnikov

Nessa seção apresentamos a derivada fracionária segundo Grünwald-Letnikov, que foi introduzida por Anton Karl Grünwald [37], em 1867, e por Aleksey Vasilievich Letnikov [56], em 1868. Essa formulação tem grande importância em problemas numéricos e está baseada na generalização da diferenciação ordinária de ordem $n \in \mathbb{N}$, conforme vamos ver a seguir.

Lema 2.1. *A derivada n-ésima, $n \in \mathbb{N}$, de uma função f pode ser escrita como*

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh). \tag{2.1}$$

Demonstração. Vamos mostrar que vale a Eq.(2.1) por indução. Pela definição de derivada temos que $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Considerando a mudança $z = x+h$ podemos escrever $f'(z) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z)-f(z-h)}{h}$ e, portanto, vale a Eq.(2.1) para $n=1$. Suponhamos que vale a Eq.(2.1) para $n = m$ sendo $m \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x-kh),$$

e mostraremos que vale a Eq.(2.1) para $n = m+1$. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x) &= \frac{d}{dx}\frac{d^m}{dx^m} f(x) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{h^m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} f(x-kh) - \dfrac{1}{h^m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} f(x-h-kh)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} f(x-kh) - \displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} f(x-h-kh)}{h^{m+1}}.
\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança $k \to k-1$ no segundo somatório, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} f(x-kh) + \displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k\binom{m}{k-1} f(x-kh)}{h^{m+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m}{k} f(x-kh) + \displaystyle\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m}{k-1} f(x-kh)}{h^{m+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right] f(x-kh)}{h^{m+1}}.
\end{aligned}$$

Aqui estamos usando

$$\binom{m}{k} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-k)!k!}, & \text{para } m \geqslant k; \\ 0, & \text{para } m < k. \end{cases}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} &= \frac{m!}{(m-k)!k!} + \frac{m!}{(m-k+1)!(k-1)!} \\
&= \frac{m!(m-k+1+k)}{(m-k+1)!k!} = \frac{(m+1)!}{(m-k+1)!k!} = \binom{m+1}{k}.
\end{aligned}$$

Assim, segue

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} f(x-kh)}{h^{m+1}},$$

ou seja, vale a Eq.(2.1) para $n = m+1$ e, portanto, vale a Eq.(2.1) para qualquer $n \in \mathbb{N}$, conforme queríamos mostrar. ∎

Generalizando o **Lema 2.1** para uma ordem qualquer temos a definição da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov [19].

Definição 2.1. *A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov de ordem α, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ de uma função f é definida através do limite de uma série, a saber,*

$${}_{GL}D^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh). \tag{2.2}$$

Agora mostraremos que a derivada de Grünwald-Letnikov, conforme definida pela Eq.(2.2) satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam f e g funções, a e b escalares, assim

$$\begin{aligned}
& {}_{GL}D^{\alpha}[af+bg](x) \\
= \; & \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} [af+bg](x-kh) \\
= \; & a \left(\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh) \right) + b \left(\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} g(x-kh) \right) \\
= \; & a\, {}_{GL}D^{\alpha} f(x) + b\, {}_{GL}D^{\alpha} g(x).
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Grünwald-Letnikov é um operador linear.

Derivada de ordem zero

A derivada de Grünwald-Letnikov de ordem zero de uma função é a própria função. De fato, podemos escrever

$${}_{GL}D^{0} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{0}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{0}{k} f(x-kh).$$

Observemos que o coeficiente binomial $\binom{0}{k}$ só será diferente de zero quando $k = 0$ e nesse caso vale um. Portanto,

$${}_{GL}D^{0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x-kh) = f(x).$$

Derivada de ordem inteira

Como vimos no **Lema 2.1** a derivada de Grünwald-Letnikov está baseada na generalização da diferenciação ordinária, portanto quando a ordem é $n \in \mathbb{N}$ produz o mesmo resultado da derivação ordinária. Para mostrar que a derivada de Grünwald-Letnikov, quando a ordem é um inteiro negativo, produz o mesmo resultado da n-ésima integração, precisamos primeiro considerar o seguinte resultado.

Lema 2.2. *Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ então*

$$\frac{(-\alpha)_n}{n!} = (-1)^n \binom{\alpha}{n}, \tag{2.3}$$

sendo $(\alpha)_n = (\alpha)(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$ *o símbolo de Pochhammer.*

Demonstração. De fato, temos,

$$\begin{aligned} \frac{(-\alpha)_n}{n!} &= \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+n-1)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n(\alpha)(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)n!} = (-1)^n\binom{\alpha}{n}, \end{aligned}$$

conforme queríamos mostrar. ∎

Quando a ordem da derivada é um inteiro negativo, ou seja, $\alpha = -n$ com $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$_{GL}D^{-n}f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-n}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n}{k} f(x-kh)$$

e pela Eq.(2.3) podemos escrever

$$_{GL}D^{-n}f(x) = \lim_{h\to 0} h^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{k!} f(x-kh) = \lim_{h\to 0} h^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)k!} f(x-kh).$$

Rearranjando a equação acima considerando $t = kh$ e admitindo que essa série converge uniformemente, obtemos

$$_{GL}D^{-n}f(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \lim_{h\to 0} h^n \frac{\Gamma(n+\frac{t}{h})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{t}{h}+1)} f(x-t).$$

Usando a relação apresentada em [70], a saber, $\dfrac{\Gamma(n+\frac{t}{h})}{\Gamma(\frac{t}{h}+1)} \approx \left(\dfrac{t}{h}\right)^{n-1}$, quando $h \to 0$ (comportamento assintótico) temos

$$_{GL}D^{-n}f(x) = \lim_{h\to 0} h^n \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(\frac{t}{h})^{n-1}}{\Gamma(n)} f(x-t) = \lim_{h\to 0} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} f(x-t)h.$$

De onde segue

$$ {}_{GL}D^{-n}f(x) = \int_0^\infty \frac{f(x-t)t^{n-1}}{\Gamma(n)}dt, $$

que é a n-ésima integral de f de acordo com a fórmula de integrais iteradas de Cauchy. E portanto, quando a ordem é um inteiro negativo temos que a derivada de Grünwald-Letnikov produz o mesmo resultado da n-ésima integração de f.

Lei dos expoentes

Vamos mostrar que vale a relação $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta}f(x)$ para α, $\beta \in \mathbb{R}$ quaisquer, para isso usaremos a relação apresentada em [69], a saber,

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m-n}\binom{\beta}{n} = \binom{\alpha+\beta}{m}, \tag{2.4} $$

cuja demonstração encontra-se no Apêndice C. Assim, podemos escrever

$$ {}_{GL}D^{\alpha}{}_{GL}D^{\beta}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}\left[\frac{1}{h^\beta}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\beta}{n}f(x-kh-nh)\right]. $$

Considerando a mudança de variável $k = m - n$ no primeiro somatório e a Eq.(2.4) podemos escrever,

$$ \begin{aligned} {}_{GL}D^{\alpha}{}_{GL}D^{\beta}f(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha+\beta}}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m-n}\binom{\beta}{n}\right](-1)^m f(x-mh) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha+\beta}}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{m}(-1)^m f(x-mh) = {}_{GL}D^{\alpha+\beta}f(x). \end{aligned} $$

Portanto, vale a lei dos expoentes para a derivada de Grünwald-Letnikov.

Regra de Leibniz - Generalização

Vamos primeiro considerar um resultado que será importante para mostrar que a derivada de Grünwald-Letnikov satisfaz a generalização da regra de Leibniz, a saber,

Lema 2.3. *Se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $k, i \in \mathbb{N}$ então*

$$ \binom{k+i}{i}\binom{\alpha}{k+i} = \binom{\alpha}{i}\binom{\alpha-i}{k}. \tag{2.5} $$

Demonstração. Utilizando a Eq.(2.3) podemos escrever

$$ \binom{k+i}{i}\binom{\alpha}{k+i} = \binom{k+i}{i}\frac{(-\alpha)_{k+i}}{(k+i)!(-1)^{k+i}} = \frac{(k+i)!}{k!i!}\frac{(-\alpha)_{k+i}}{(k+i)!(-1)^{k+i}}. $$

Observemos que

$$ (-\alpha)_{i+k} = (-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+i-1)(-\alpha+i)\cdots(-\alpha+i+k-1) = (-\alpha)_i(-\alpha+i)_k, $$

assim, segue

$$\binom{k+i}{i}\binom{\alpha}{k+i} = \frac{1}{(-1)^{k+i}}\frac{(-\alpha)_i}{i!}\frac{(-\alpha+i)_k}{k!}.$$

Utilizando a Eq.(2.3) duas vezes obtemos o resultado desejado. ■

Vamos agora mostrar que a derivada de Grünwald-Letnikov satisfaz a generalização da regra de Leibniz. Com o intuito de simplificar a notação consideremos

$$\left(\Delta_h^\alpha f\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh),$$

assim reescrevendo a derivada de Grünwald-Letnikov temos ${}_{GL}D^\alpha f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\Delta_h^\alpha f\right)(x)}{h^\alpha}$. Como $\left(\Delta_h^n f\right)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dbinom{n}{k}f(x-kh)$ então $f(x-kh) = \sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i\dbinom{k}{i}\left(\Delta_h^i f\right)(x)$ [69]. Sejam f e g funções reais de variável real e $n\in\mathbb{N}$, assim,

$$\begin{aligned}
\left(\Delta_h^\alpha fg\right)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}g(x-kh)f(x-kh)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}g(x-kh)\left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\left(\Delta_h^i f\right)(x)\right]\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(\Delta_h^i f\right)(x)\sum_{k=i}^{\infty}(-1)^k\binom{k}{i}\binom{\alpha}{k}g(x-kh).
\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança $k\to k-i$ temos,

$$\left(\Delta_h^\alpha fg\right)(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(\Delta_h^i f\right)(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+i}\binom{k+i}{i}\binom{\alpha}{k+i}g(x-(k+i)h).$$

Utilizando a Eq.(2.5) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left(\Delta_h^\alpha fg\right)(x) &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\Delta_h^i f\right)(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{i}\binom{\alpha-i}{k}g(x-(k+i)h)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\left(\Delta_h^i f\right)(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha-i}{k}g(x-(k+i)h).
\end{aligned}$$

Considerando a convergência uniforme da série temos

$$\begin{aligned}
{}_{GL}D^\alpha(fg)(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\Delta_h^\alpha fg\right)(x)}{h^\alpha}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\left(\Delta_h^i f\right)(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha-i}{k}g(x-(k+i)h)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}\left[\lim_{h\to 0}\frac{\left(\Delta_h^i f\right)(x)}{h^i}\right]\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha-i}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha-i}{k}g(x-(k+i)h)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}f^{(i)}(x)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha-i}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha-i}{k}g(x-kh)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}f^{(i)}(x){}_{GL}D^{\alpha-i}g(x),
\end{aligned}$$

portanto, vale a generalização da regra de Leibniz.

Logo, como a derivada de Grünwald-Letnikov satisfaz as cinco propriedades do critério de Ortigueira e Machado, temos que essa derivada pode ser considerada fracionária, segundo esse critério.

2.2 Derivada fracionária segundo Riemann-Liouville

O primeiro trabalho que apresentou o que hoje chamamos de derivada de Riemann-Liouville foi o escrito em 1869 por Nikolay Sonin [82]. Nessa seção mostramos que a derivada de Riemann-Liouville satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado.

A derivada fracionária de Riemann-Liouville é definida em termos da integral fracionária, por isso começamos essa seção com a definição dessa integral.

Definição 2.2. *A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de uma função f causal é dada por,*

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \tag{2.6}$$

sendo $\alpha > 0$, $t > 0$ e $J^0 = I$, sendo I o operador identidade.

Podemos escrever a integral fracionária, Eq.(2.6), como um produto de convolução das funções f e ϕ_α, sendo a função ϕ_α conhecida como função de Gel'fand-Shilov e dada por

$$\phi_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se} \quad t > 0, \\ 0, & \text{se} \quad t \leqslant 0. \end{cases}$$

Portanto, podemos escrever

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \phi_\alpha(t) * f(t),$$

onde $*$ denota o produto de convolução.

Apresentamos agora as definições de integrais fracionárias de Riemann-Liouville à direita e à esquerda, no entanto, nessa seção utilizamos a **Definição 2.2**.

Definição 2.3. *Seja $[a,b]$ um intervalo finito no eixo real $\mathbb{R}$. As integrais fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita de ordem α de uma função f, $I^\alpha_{a+}f$ e $I^\alpha_{a-}f$, são respectivamente,*

$$I^\alpha_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \; t \geqslant a \tag{2.7}$$

$$I^\alpha_{b-}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau)(\tau-t)^{\alpha-1} d\tau, \; t \leqslant b. \tag{2.8}$$

Usaremos a notação J^α ao invés de I^α_{0+} quando utilizarmos a Eq.(2.7) com $a = 0$. Tendo em vista a definição da integral fracionária, **Definição 2.2**, apresentamos agora a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville.

Definição 2.4. *Sejam α um número complexo tal que $Re(\alpha) > 0$ e m o menor inteiro maior que $Re(\alpha)$, assim $m-1 < Re(\alpha) \leqslant m$. A derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma função causal f é dada por,*

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} J^{m-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau. \tag{2.9}$$

Mostraremos agora a validade do critério de Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam f e g funções, a e b escalares e $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$. Assim, para $m-1 < \mathrm{Re}(\alpha) \leqslant m$, temos

$$\begin{aligned} D^\alpha(af+bg)(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{(af+bg)(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \left[a \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau + b \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \right] \\ &= \frac{a}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau + \frac{b}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \\ &= aD^\alpha f(t) + bD^\alpha g(t), \end{aligned}$$

portanto a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Para $\alpha = 0$ temos, $D^0 f(t) = D^0 J^0 f(t) = f(t)$, ou seja, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem zero de uma função é a própria função.

Derivada de ordem inteira

Para $\alpha = m$ sendo m inteiro positivo, temos,

$$D^m f(t) = \frac{d^m}{dt^m} J^{m-m} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} J^0 f(t) = \frac{d^m}{dt^m} f(t).$$

Portanto, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem m, sendo m um inteiro positivo é igual a m-ésima derivada ordinária. Tomemos agora $\alpha = -m$ sendo m inteiro positivo, assim

$$D^{-m} f(t) = J^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{m-1} d\tau$$

essa integral é a fórmula integral de Cauchy, portanto D^{-m} representa a m-éssima integral, ou seja,

$$D^{-m}f(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_m - 1} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \cdots d\tau_{m-1}.$$

Logo, a derivada fracionária de Riemann-Liouville recupera o caso inteiro [19].

Lei dos expoentes.

Uma derivada fracionária cuja a ordem α é menor que zero pode ser interpretada como uma integral fracionária. Portanto, mostrar que a derivada segundo Riemann-Liouville satisfaz à lei dos expoentes, $D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$ para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ é o mesmo que mostrar que $J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta}$, para $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Observemos que a função ϕ_α satisfaz a propriedade, $\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \phi_{\alpha+\beta}(t)$, sendo $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. De fato, pelo produto de convolução de Fourier temos,

$$(\phi_\alpha * \phi_\beta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\alpha(\tau)\phi_\beta(t-\tau) d\tau. \tag{2.10}$$

Observemos que

$$\phi_\alpha(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \tau > 0; \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \qquad \phi_\beta(t-\tau) = \begin{cases} \dfrac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \tau < t; \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

O produto $\phi_\alpha(\tau)\phi_\beta(t-\tau)$ só será diferente de zero para $0 < \tau < t$. Assim pela Eq.(2.10) temos,

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau, & 0 < \tau < t; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Através da função beta, a saber, $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} du$, e de sua relação com a função gama, $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, temos,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} t^{\beta-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\beta-1} d\tau. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Introduzindo a mudança de variável $u = \dfrac{\tau}{t}$ na Eq.(2.11), temos

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (ut)^{\alpha-1}t^{\beta-1}(1-u)^{\beta-1}\,tdu \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}B(\alpha,\beta) = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Isto, é $\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \phi_{\alpha+\beta}(t)$.

Por fim, mostraremos que $J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta}f(t)$, para qualquer função f e para $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta f(t) &= J^\alpha(\phi_\beta(t) * f(t)) \\ &= \phi_\alpha(t) * (\phi_\beta(t) * f(t)) \\ &= (\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t)) * f(t) \\ &= \phi_{\alpha+\beta}(t) * f(t) \\ &= J^{\alpha+\beta}f(t). \end{aligned}$$

E, portanto, a lei dos expoentes é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$.

Regra de Leibniz - Generalização

Para mostrarmos que a derivada de Riemann-Liouville satisfaz a generalização da regra de Leibniz iremos primeiro considerar o seguinte resultado:

Lema 2.4. *A derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α, sendo $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\alpha \notin \mathbb{Z}$ de uma função analítica f é tal que,*

$$D^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\binom{\alpha}{n}. \tag{2.12}$$

Demonstração. Vamos primeiro considerar $Re(\alpha) < 0$, então $D^\alpha = J^{-\alpha}$ sendo $J^{-\alpha}$ a integral fracionária de Riemann-Liouville, conforme **Definição 2.2**. Seja $\beta = -\alpha$, assim,

$$D^\alpha f(t) = J^{-\alpha}f(t) = J^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\beta-1}d\tau.$$

Sendo f uma função analítica, temos $f(\tau) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(\tau-t)^n}{n!}$. E, portanto, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(\tau-t)^n(t-\tau)^{\beta-1}}{n!}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1+n}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!}\left[\frac{-(t-\tau)^{\beta+n}}{\beta+n}\right]_0^t \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!}\frac{t^{\beta+n}}{\beta+n} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!}\frac{t^{\beta+n}}{\beta+n}\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!}\frac{t^{\beta+n}\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n+1)}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Agora observemos que

$$\binom{-\beta}{n} = \frac{(-1)^n\Gamma(n+\beta)}{n!\Gamma(\beta)}. \tag{2.14}$$

Observemos que a equação acima é a presente no **Lema 2.2** escrita de um modo ligeiramente diferente e vamos demonstrá-la aqui de uma nova maneira. Para mostrarmos a Eq.(2.14) precisaremos da seguinte equação $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$, conhecida como fórmula de reflexão de Euler [1]. Assim,

$$\binom{-\beta}{n} = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\beta-n)n!} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\beta)\Gamma(\beta)(-\beta-n)\Gamma(-\beta-n)n!}.$$

Por outro lado,

$$\Gamma(-\beta-n)\Gamma(1+\beta+n) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(-\pi(\beta+n))} = \frac{-\pi}{\operatorname{sen}(\beta\pi)(-1)^n}.$$

Assim, obtemos

$$\binom{-\beta}{n} = \frac{-\pi\Gamma(1+\beta+n)(-1)^n\operatorname{sen}(\beta\pi)}{\operatorname{sen}(\pi\beta)\Gamma(\beta)(-\beta-n)n!\pi} = \frac{(-1)^n\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)n!},$$

portanto vale a Eq.(2.14). Pelas Eq.(2.13) e Eq.(2.14) podemos escrever

$$D^{\alpha}f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)t^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)}\binom{-\beta}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\binom{\alpha}{n},$$

logo, vale a Eq.(2.12) para $Re(\alpha) < 0$. Mostraremos agora que vale a Eq.(2.12) para $Re(\alpha) > 0$. Assim para $m-1 < Re(\alpha) \leqslant m$ e usando o fato de valer a Eq.(2.12) para $Re(\alpha) < 0$, temos

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{d^m}{dt^m}J^{m-\alpha}f(t) = \frac{d^m}{dt^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)t^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m-\alpha+1)}\binom{\alpha-m}{n}.$$

[1] Para a demostração dessa equação ver Apêndice D.

Considerando que essa série converge uniformemente e utilizando a regra de Leibniz para o caso inteiro podemos escrever,

$$
\begin{aligned}
D^\alpha f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\frac{f^{(n+k)}(t)\frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}}t^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m-\alpha+1)}\binom{\alpha-m}{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\frac{f^{(n+k)}(t)\frac{\Gamma(n+m-\alpha+1)}{\Gamma(n+k-\alpha+1)}t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+m-\alpha+1)}\binom{\alpha-m}{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}f^{(n+k)}(t)\frac{t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)}\binom{\alpha-m}{n}.
\end{aligned}
$$

Introduzindo a mudança $k \to j-n$ temos,

$$
D^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{j-n}\binom{\alpha-m}{n}f^{(j)}(t)\frac{t^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}.
$$

Utilizando a Eq.(2.4), segue

$$
D^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha}{j}f^{(j)}(t)\frac{t^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}.
$$

Portanto, vale a Eq.(2.12) para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. ■

Utilizando o **Lema 2.4** e considerando que f e g são funções analíticas temos, pela Eq.(2.12),

$$
D^\alpha (fg)(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(fg)^{(n)}(t)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\binom{\alpha}{n}. \tag{2.15}
$$

Usando a regra de Leibniz para o caso inteiro temos,

$$
\begin{aligned}
D^\alpha (fg)(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\binom{n}{k}\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(t)\sum_{n=k}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\binom{n}{k}\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}g^{(n-k)}(t).
\end{aligned}
$$

Introduzindo a mudança $n \to n+k$ podemos escrever

$$
D^\alpha (fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(t)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n+k}\binom{n+k}{k}\frac{t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)}g^{(n)}(t).
$$

Como,

$$
\begin{aligned}
\binom{\alpha}{n+k}\binom{n+k}{k} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1+\alpha-n-k)(n+k)!}\frac{(n+k)!}{n!k!} \\
&= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n-k)n!k!}\frac{\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)} = \binom{\alpha}{k}\binom{\alpha-k}{n} \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

podemos escrever,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(fg)(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}\binom{\alpha-k}{n} \frac{t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} g^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-k}{n} \frac{t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} g^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Considerando novamente a Eq.(2.12) temos que a derivada de Riemann-Liouville satisfaz a generalização da regra de Leibniz, a saber,

$$D^{\alpha}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{\alpha-k} g(t). \tag{2.17}$$

Ao observarmos a Eq.(2.17) não é imediato ver que a derivada fracionária do produto fg é igual a derivada fracionária do produto gf, sendo f e g funções analíticas. Utilizando a regra de Leibniz para o caso inteiro conforme a Eq.(B.3), podemos escrever pela Eq.(2.15)

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(fg)(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(t) g^{(k)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(t) \sum_{n=k}^{\infty} \binom{\alpha}{n}\binom{n}{k} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} f^{(n-k)}(t). \end{aligned}$$

Considerando mudança $n \to n+k$, a Eq.(2.16) e rearranjando temos

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(fg)(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} g^{(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-k}{n} \frac{t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} g^{(k)}(t) D^{\alpha-k} f(t) \\ &= D^{\alpha}(gf)(t). \end{aligned}$$

Portanto a derivada de Riemann-Liouville satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado. Caputo [20, 21], tendo em vista a definição de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville, apresentou uma nova definição de derivada fracionária, mais restritiva que a de Riemann-Liouville. Com esta formulação a derivada de uma constante é zero [19]. Essas duas formulações são similares cuja diferença encontra-se na ordem dos operadores de derivação ordinária e de integração fracionária. A derivada fracionária de Caputo será o objeto de estudo da próxima seção.

2.3 Derivada fracionária segundo Caputo

Em 1967, Caputo [20, 21] reformulou a definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville ao trocar a ordem dos operadores derivada e integral fracionárias. E em

1969 ele utiliza essa formulação a fim de resolver um problema de viscoelasticidade [21]. Nessa seção apresentaremos a derivada fracionária de Caputo, bem como verificaremos se esta cumpre o critério proposto por Ortigueira e Machado.

Definição 2.5. *Sejam α um número complexo tal que $Re(\alpha) > 0$ e m o menor inteiro maior que $Re(\alpha)$, assim $m - 1 < Re(\alpha) \leqslant m$. A derivada fracionária segundo Caputo de uma função causal, suficientemente bem comportada, f é dada por,*

$$_*D^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t),$$

sendo J^α a integral fracionária conforme **Definição 2.2**.

Observemos que a derivada de Caputo é uma integral fracionária de uma derivada de ordem inteira e a derivada de Riemann-Liouville, apresentada na Seção 2.2, é a derivada de ordem inteira de uma integral fracionária. No entanto, a derivada fracionária de Caputo é mais restritiva que a derivada fracionária de Riemann-Liouville, uma vez que para a derivada fracionária de Caputo de ordem α de uma função f exista é necessário a integrabilidade da derivada de ordem m de f, sendo $m - 1 < Re(\alpha) \leqslant m$ [18]. Agora verificaremos se a derivada de Caputo satisfaz as cinco propriedade do critério de Ortigueira e Machado.

Linearidade

Mostraremos que a derivada fracionária de Caputo é um operador linear. De fato, para f e g funções e γ e β escalares temos,

$$_*D^\alpha(\gamma f + \beta g)(t) = J^{m-\alpha} D^m(\gamma f + \beta g)(t) = J^{m-\alpha}[\gamma D^m f(t) + \beta D^m g(t)],$$

como a integral fracionária é um operador linear segue que a derivada fracionária de Caputo também é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Quando a ordem da derivada é zero, temos que $m = 0$ e assim,

$$_*D^0 f(t) = J^0 D^0 f(t) = f(t),$$

portanto a derivada de ordem zero é a própria função.

Derivada de ordem inteira

Quando a ordem α da derivada é um inteiro positivo m, $m \in \mathbb{N}$, temos que esta recupera o caso inteiro, de fato

$$_*D^\alpha f(t) = J^0 D^m f(t) = \frac{d^m}{dt^m} f(t),$$

e quando a ordem da derivada fracionária de Caputo é um inteiro negativo $-m$, sendo $m \in \mathbb{N}$, a integral fracionária de ordem m, $D^{-m} = J^m$, que é a m-ésima integral (fórmula integral de Cauchy).

Lei dos expoentes

Vale a lei dos expoentes para a derivada fracionária de Caputo conforme mostramos na Seção 2.2 para a integral de Riemann-Liouville.

Regra de Leibniz - Generalização

Para verificarmos se a derivada fracionária de Caputo satisfaz a generalização da regra de Leibniz iremos primeiro considerar o seguinte teorema que relaciona as derivadas de Caputo e de Riemann-Liouville.

Teorema 2.1. *Se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $m-1 < Re(\alpha) \leqslant m$, então vale a seguinte relação entre as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e de Caputo,*

$$ {}_*D^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{2.18}$$

Demonstração. Como a derivada de Riemann-Liouville é um operador linear temos,

$$\begin{aligned} D^\alpha\left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\right] &= D^\alpha f(t) - D^\alpha \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} \\ &= D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} \\ &= D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Assim, mostrar que vale a Eq.(2.18) é o mesmo que mostrar a seguinte equação,

$$ {}_*D^\alpha f(t) = D^\alpha\left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\right]. \tag{2.19}$$

Para demonstrarmos que a Eq.(2.19) é verdadeira, vamos primeiro mostrar que

$$ J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}, \tag{2.20}$$

o que faremos por indução. De fato vale a Eq.(2.20) para $n=1$, pois

$$ J^1 D^1 f(t) = J^1 f'(t) = \int_0^t f'(\tau)d\tau = f(t) - f(0).$$

Agora vamos supor que vale a Eq.(2.20) para $n = s$, ou seja,

$$ J^s D^s f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!},$$

sendo $s \in \mathbb{N}$ e mostraremos que vale a Eq.(2.20) para $n = s+1$. Assim, segue

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t) \quad = \quad J^1 J^s D^s f'(t).$$

Utilizando a hipótese de indução temos,

$$\begin{aligned}
J^{s+1}D^{s+1}f(t) &= J^1\left(f'(t) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{t^k}{k!}\right) \\
&= \int_0^t f'(\tau)d\tau - \int_0^t \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{\tau^k}{k!}d\tau \\
&= f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\int_0^t \frac{\tau^k}{k!}d\tau \\
&= f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{\tau^{k+1}}{(k+1)k!}\Big|_0^t \\
&= f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{s-1} f^{(k+1)}(0)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Considerando a mudança de índice $k \to k-1$ na Eq.(2.21), temos

$$J^{s+1}D^{s+1}f(t) = f(t) - f(0) - \sum_{k=1}^{s} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} = f(t) - \sum_{k=0}^{s} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}.$$

Logo, vale a Eq.(2.20). A partir das Eq.(2.20) e Eq.(2.19), para $m-1 < Re(\alpha) \leqslant m$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
D^\alpha\left[f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\right] &= D^\alpha\left[J^m D^m f(t)\right] \\
&= D^m J^{m-\alpha} J^m D^m f(t) \\
&= D^m J^m J^{m-\alpha} D^m f(t) \\
&= J^{m-\alpha} D^m f(t) =_* D^\alpha f(t),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

Agora, utilizando o **Teorema 2.1**, iremos obter uma fórmula para a derivada de Caputo do produto de duas funções em termos da derivada fracionária de Riemann-Liouville. Na Seção 2.2 mostramos que a derivada de Riemann-Liouville satisfaz a generalização da regra de Leibniz, então para f e g funções temos,

$$\begin{aligned}
{}_*D^\alpha(fg)(t) &= D^\alpha(fg)(t) - \sum_{k=0}^{m-1}(fg)^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} D^k f(t) D^{\alpha-k} g(t) - \sum_{k=0}^{m-1}(fg)^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)},
\end{aligned}$$

portanto, a derivada de Caputo só satisfaz a generalização da regra de Leibniz em termos da derivada de Riemann-Liouville se a derivada k-ésima do produto de f por g calculado em zero for zero ou se a ordem da derivada α for um inteiro, ou seja, nos casos onde as derivadas de Caputo e de Riemann-Liouville admitem o mesmo valor.

Agora, escreveremos uma regra para a derivada de Caputo do produto de duas funções em termos da própria derivada de Caputo. Para isso iremos considerar $\alpha \in \mathbb{C}$ com $m-1 < Re(\alpha) \leqslant m$ assim pela Eq.(2.18) podemos escrever,

$$_*D^\alpha(fg)(t) = D^\alpha(fg)(t) - \sum_{k=0}^{m-1}(fg)^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

Como vimos na Seção 2.2, a derivada de Riemann-Liouville satisfaz a generalização da regra de Leibniz então,

$$_*D^\alpha(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)D^{\alpha-k}g(t) - \sum_{k=0}^{m-1}(fg)^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

Observemos que o expoente $\alpha - k$ só será maior que zero quando k variar de zero a $m-1$, pois $m-1 < Re(\alpha) \leqslant m$, portanto podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} _*D^\alpha(fg)(t) &= \sum_{k=0}^{m-1}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)D^{\alpha-k}g(t) \\ &+ \sum_{k=m}^{\infty}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)J^{k-\alpha}g(t) - \sum_{k=0}^{m-1}(fg)^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo o somatório $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)\left(\sum_{s=0}^{m-1}g^{(s)}(0)\frac{t^{s-\alpha+k}}{\Gamma(s-\alpha+k+1)}\right)$ temos

$$\begin{aligned} _*D^\alpha(fg)(t) &= \sum_{k=0}^{m-1}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)D^{\alpha-k}g(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)\left(\sum_{s=0}^{m-1}g^{(s)}(0)\frac{t^{s-\alpha+k}}{\Gamma(s-\alpha+k+1)}\right) \\ &+ \sum_{k=m}^{\infty}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)J^{k-\alpha}g(t) - \sum_{k=0}^{m-1}(fg)^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)\left(\sum_{s=0}^{m-1}g^{(s)}(0)\frac{t^{s-\alpha+k}}{\Gamma(s-\alpha+k+1)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)\left(D^{\alpha-k}g(t) - \sum_{s=0}^{m-1}g^{(s)}(0)\frac{t^{s-\alpha+k}}{\Gamma(s-\alpha+k+1)}\right) \\ &+ \sum_{k=m}^{\infty}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)J^{k-\alpha}g(t) - \sum_{k=0}^{m-1}(fg)^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(t)\left(\sum_{s=0}^{m-1}g^{(s)}(0)\frac{t^{s-\alpha+k}}{\Gamma(s-\alpha+k+1)}\right). \end{aligned}$$

Pela Eq.(2.18) temos que $_*D^{\alpha-k}g(t) = D^{\alpha-k}g(t) - \displaystyle\sum_{s=0}^{m-1}g^{(s)}(0)\frac{t^{s-\alpha+k}}{\Gamma(s-\alpha+k+1)}$, logo

$$
\begin{aligned}
{}_*D^{\alpha}(fg)(t) &= \sum_{k=0}^{m-1}\binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t)\,{}_*D^{\alpha-k}g(t) + \sum_{k=m}^{\infty}\binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) J^{k-\alpha}g(t) \\
&- \sum_{k=0}^{m-1}(fg)^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \sum_{k=0}^{m-1}\binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t)\left(\sum_{s=0}^{m-1} g^{(s)}(0)\frac{t^{s-\alpha+k}}{\Gamma(s-\alpha+k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\,{}_*D^{k}f(t)\,{}_*D^{\alpha-k}g(t) - \sum_{k=0}^{m-1}(fg)^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
&+ \sum_{k=0}^{m-1}\binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t)\left(\sum_{s=0}^{m-1} g^{(s)}(0)\frac{t^{s-\alpha+k}}{\Gamma(s-\alpha+k+1)}\right). \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Assim, a derivada de Caputo satisfaz a generalização da regra de Leibniz ligeiramente diferente das derivadas de Riemman-Liouville e Grünwald-Letnikov, sendo igual a regra conforme proposto por Ortigueira e Machado em casos especiais quando conseguimos zerar os últimos dois somatórios, quando por exemplo as derivadas de ordem i, sendo $0 < i < m-1$ de g em zero são nulas.

Como caso particular consideremos $\alpha \in \mathbb{C}$ com $0 < Re(\alpha) \leqslant 1$. Seja m o menor inteiro maior que $Re(\alpha)$ então $m = 1$ e pela Eq.(2.22) podemos escrever

$$
\begin{aligned}
{}_*D^{\alpha}(fg)(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t)\,{}_*D^{\alpha-k}g(t) - f(0)g(0)\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)} + f(t)g(0)\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t)\,{}_*D^{\alpha-k}g(t) + g(0)[f(t)-f(0)]\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

Observemos que se $g(0)$ for zero ou f for uma função constante o segundo termo da Eq.(2.23) é zero, e, assim, vale a generalização da regra de Leibniz, conforme o critério proposto por Ortigueira e Machado. Observemos também pela Eq.(2.23) que a derivada de Caputo não é simétrica em relação as funções f e g.

2.4 Derivada fracionária segundo Hilfer

Nessa seção apresentaremos a derivada fracionária de Hilfer [39] e depois verificaremos se esta satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado. Ressaltamos que, essa derivada recupera, para particulares valores dos parâmetros, as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo (no sentido estrito), apresentadas nas seções anteriores, bem como a derivada de Weyl, que será apresentada na próxima seção.

Definição 2.6. *A derivada de Hilfer de ordem α e tipo μ com $0 < \alpha < 1$ e $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ de uma função f é dada por*

$$D^{\alpha,\mu}_{a\pm}f(t) = \pm I^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm} D I^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm} f(t),$$

sendo, as integrais $I^{\alpha}_{a\pm}$ conforme Eq.(2.7) e Eq.(2.8).

Se tomarmos $a = \pm\infty$ e $\mu = 0$ na derivada de Hilfer recuperamos a derivada de Weyl, que veremos com mais detalhes na próxima seção. Se tomarmos $\mu = 0$ e $a = 0$ na derivada segundo Hilfer à esquerda recuperamos a derivada de Riemann-Liouville, conforme **Definição 2.4**, e se tomarmos $\mu = 1$ e $a = 0$ na derivada segundo Hilfer à esquerda, obtemos a derivada de Caputo, conforme **Definição 2.5** . De fato, para $0 < \alpha < 1$ temos,

$$D_{0+}^{\alpha,0} f(t) = I_{0+}^{0} D I_{0+}^{1-\alpha} f(t) = D J^{1-\alpha} f(t) = D^{\alpha} f(t),$$

e

$$D_{0+}^{\alpha,1} f(t) = I_{0+}^{1-\alpha} D I_{0+}^{0} f(t) = J^{1-\alpha} D f(t) = {}_{*}D^{\alpha} f(t).$$

Para um caso mais geral, onde são definidas as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo à direita e à esquerda, diferentemente do que foi feito nesse trabalho, temos para $0 < \alpha < 1$,

$$D_{a+}^{\alpha,0} f(t) = I_{a+}^{0} D I_{a\pm}^{1-\alpha} f(t) = D I_{a+}^{1-\alpha} f(t) = D_{a+}^{\alpha} f(t),$$

e

$$D_{a+}^{\alpha,1} f(t) = I_{a+}^{1-\alpha} D I_{a+}^{0} f(t) = I_{a\pm}^{1-\alpha} D f(t) = {}_{*}D_{a+}^{\alpha} f(t).$$

Observemos que para $\gamma = \mu + \alpha - \alpha\mu$ com $0 < \gamma < 1$ podemos escrever a derivada de Hilfer em termos da derivada de Riemann-Liouville [32, 44], a saber,

$$D_{a+}^{\alpha,\mu} f(t) = I_{a+}^{\gamma-\alpha} D_{a+}^{\gamma} f(t).$$

Podemos também escrever a derivada de Hilfer em termos da derivada de Caputo, assim para $0 < \alpha\mu - \mu + 1 < 1$ temos,

$$D_{a\pm}^{\alpha,\mu} f(t) = \pm I_{a\pm}^{1-(\alpha\mu-\mu+1)} D I_{a\pm}^{(1-\mu)(1-\alpha)} f(t) = {}_{*}D_{a\pm}^{\alpha\mu-\mu+1} I_{a\pm}^{(1-\mu)(1-\alpha)} f(t).$$

Ao mostrarmos que a derivada de Hilfer satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado estamos também mostrando que as derivadas de Weyl, Riemann-Liouville e Caputo satisfazem esses critérios uma vez que essas derivadas são recuperadas através de valores apropriados para a e μ na derivada de Hilfer. Nessa seção apresentamos as propriedades apenas para a derivada de Hilfer à esquerda, enquanto à direita, o procedimento é analogo.

Linearidade

Considerando que tanto a derivação de ordem um quanto a integral fracionária são operadores lineares mostraremos que a derivada de Hilfer é um operador linear. Sejam

f e g funções, β e γ escalares, $0 < \alpha < 1$ e $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
D^{\alpha,\mu}_{a\pm}(\beta f + \gamma g)(x) &= \left[\pm I^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm}\frac{d}{dx}\left(I^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}\right)(\beta f + \gamma g)\right](x) \\
&= \pm I^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm}\frac{d}{dx}\left(\beta I^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm} f(x) + \gamma I^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm} g(x)\right) \\
&= \pm I^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm}\left(\beta\frac{d}{dx} I^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm} f(x) + \gamma \frac{d}{dx} I^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm} g(x)\right) \\
&= \beta\left[\pm I^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm}\frac{d}{dx}\left(I^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}\right) f\right](x) \\
&+ \gamma\left[\pm I^{\mu(1-\alpha)}_{a\pm}\frac{d}{dx}\left(I^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}\right) g\right](x) \\
&= \beta D^{\alpha,\mu}_{a\pm}\beta f(x) + \gamma D^{\alpha,\mu}_{a\pm}\beta g(x).
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Hilfer é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Mostraremos agora que a derivada de Hilfer de ordem zero de uma função é a própria função. De fato,

$$\lim_{\alpha\to 0} D^{\alpha,\mu}_{a+} f(x) = \left[I^{\mu}_{a+}\frac{d}{dx}\left(I^{(1-\mu)}_{a+}\right) f\right](x) = \left[I^{\mu}_{a+}\left(I^{-\mu}_{a+}\right) f\right](x) = I^0 f(x) = f(x).$$

Lei dos expoentes

Mostrar que a lei dos expoentes é sastisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ é o mesmo que mostrar que a integral fracionária satisfaz essa propriedade para $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ e, conforme já mencionamos, isso ocorre. Assim, para provar que $I^{\alpha}_{a\pm} I^{\beta}_{a\pm} = I^{\alpha+\beta}_{a\pm}$ iremos considerar alguns lemas. Para uma demonstração diferente ver [19]. Mostraremos que vale a lei dos expoentes para a integral à esquerda, enquanto para a direita a demonstração é análoga.

Lema 2.5. *A integral fracionária à esquerda possui a propriedade*

$$I^{\beta}_{a+} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(t-a)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)}\binom{-\beta}{n} \tag{2.24}$$

para $t > a$ e $\beta \in \mathbb{C}$ com $Re(\beta) > 0$.

Demonstração. A demonstração é análoga ao **Lema 2.4** para o caso em que $Re(\alpha) < 0$. Basta tomarmos nesse lema $\alpha = -\beta$ e considerar o limite inferior da integral igual a a, o que difere do referido lema onde o limite inferior é zero. ■

Lema 2.6. *A integral fracionária à esquerda de um produto de duas funções é dado por*

$$I^{\beta}_{a+}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\beta}{k} f^{(k)}(t) I^{k+\beta}_{a+} g(t) \tag{2.25}$$

para $t > a$ e $\beta \in \mathbb{C}$ com $Re(\beta) > 0$.

Demonstração. Pela Eq.(2.24) temos

$$I^{\beta}_{a+}(fg)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(fg)^{(n)}(t)(t-a)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)} \binom{-\beta}{n}.$$

Usando a regra de Leibniz para o caso inteiro temos,

$$\begin{aligned} I^{\beta}_{a+}(fg)(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \frac{(t-a)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \binom{n}{k} \frac{(t-a)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \sum_{n=k}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \binom{n}{k} \frac{(t-a)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)} g^{(n-k)}(t). \end{aligned}$$

Introduzindo a mudança $n \to n+k$ podemos escrever

$$I^{\beta}_{a+}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n+k} \binom{n+k}{k} \frac{(t-a)^{n+k+\beta}}{\Gamma(n+k+\beta+1)} g^{(n)}(t).$$

Usando a Eq.(2.16) podemos escrever,

$$\begin{aligned} I^{\beta}_{a+}(fg)(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} \binom{-\beta-k}{n} \frac{(t-a)^{n+k+\beta}}{\Gamma(n+k+\beta+1)} g^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} f^{(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta-k}{n} \frac{(t-a)^{n+k+\beta}}{\Gamma(n+k+\beta+1)} g^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Considerando novamente a Eq.(2.24) temos

$$I^{\beta}_{a+}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} f^{(k)}(t) I^{k+\beta}_{a+} g(t),$$

como queríamos mostrar. ■

Agora mostraremos que a integral satisfaz a lei dos expoentes, isso é,

$$\left[I^{\gamma}_{a+}\left(I^{\beta}_{a+}f\right)\right](t) = I^{\gamma+\beta}_{a+} f(t). \tag{2.26}$$

Usando a Eq.(2.24) temos

$$\left[I^{\gamma}_{a+}\left(I^{\beta}_{a+}f\right)\right](t) = I^{\gamma}_{a+}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(t-a)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)} \binom{-\beta}{n}\right],$$

considerando agora a Eq.(2.25) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \left[I^{\gamma}_{a+}\left(I^{\beta}_{a+}f\right)\right](t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \binom{-\gamma}{k} \frac{f^{(n+k)}(t) I^{k+\gamma}_{a+}[(t-a)^{\beta+n}]}{\Gamma(n+\beta+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \binom{-\gamma}{k} \frac{f^{(n+k)}(t)}{\Gamma(n+\beta+1)} \frac{(t-a)^{\beta+n+k+\gamma}\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1+k+\gamma)}. \end{aligned}$$

Introduzindo a mudança $k \to k-n$ temos

$$\left[I^{\gamma}_{a+}\left(I^{\beta}_{a+}f\right)\right](t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \binom{-\gamma}{k-n} f^{(k)}(t) \frac{(t-a)^{\beta+\gamma+k}}{\Gamma(\beta+\gamma+1+k)}.$$

Pelas Eq.(2.4) e Eq.(2.24) obtemos o resultado desejado,

$$\left[I^{\gamma}_{a+}\left(I^{\beta}_{a+}f\right)\right](t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta-\gamma}{k} f^{(k)}(t) \frac{(t-a)^{\beta+\gamma+k}}{\Gamma(\beta+\gamma+1+k)} = I^{\beta+\gamma}_{a+} f(t).$$

Derivada de ordem inteira

Aqui mostraremos que a derivada de Hilfer à esquerda recupera o caso inteiro. Como a derivada de ordem n com $n \in \mathbb{N}$ é a inversa à esquerda da n-ésima integração, ou seja, $\dfrac{d^n}{dx^n} I^n_{a+} f(x) = f(x)$, para mostrar que a derivada de Hilfer recupera a derivação ordinária quando a ordem é um inteiro positivo, vamos mostrar que $D^{n,\mu}_{a+} I^n_{a+} f(x) = f(x)$. Assim, admitindo que vale a lei dos expoentes, temos

$$\begin{aligned} D^{n,\mu}_{a+} I^n_{a+} f(x) &= \left[I^{\mu(1-n)}_{a+} \frac{d}{dx} \left(I^{(1-\mu)(1-n)}_{a+} \right) \right] I^n_{a+} f(x) \\ &= I^{\mu(1-n)}_{a+} \frac{d}{dx} \left[\left(I^{(1-\mu)(1-n)}_{a+} \right) I^n_{a+} f(x) \right] \\ &= I^{\mu(1-n)}_{a+} \frac{d}{dx} \left(I^{(1-\mu)(1-n)+n}_{a+} \right) f(x) \\ &= I^{\mu(1-n)}_{a+} \left(I^{(1-\mu)(1-n)+n-1}_{a+} \right) f(x) \\ &= I^{0}_{a+} f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Regra de Leibniz - Generalização

Nessa seção vamos obter uma fórmula para a derivada de Hilfer do produto de duas funções. Sejam α e μ, respectivamente, a ordem e o tipo da derivada de Hilfer, com $0 < \alpha < 1$ e $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Assim, escrevendo a derivada de Hilfer em termos da derivada de Caputo temos,

$$D^{\alpha,\mu}_{a\pm}(fg)(t) = {}_*D^{\alpha\mu-\mu+1}_{a\pm} I^{(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm}(fg)(t),$$

sendo $0 < \alpha\mu - \mu + 1 < 1$ e $t > a$. Utilizando o **Lema 2.6**, Eq.(2.25), podemos escrever

$$D^{\alpha,\mu}_{a\pm}(fg)(t) = {}_*D^{\alpha\mu-\mu+1}_{a\pm} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k} f^{(k)}(t) I^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm} g(t) \right].$$

Como a derivada de Caputo é um operador linear temos,

$$D^{\alpha,\mu}_{a\pm}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k} {}_*D^{\alpha\mu-\mu+1}_{a\pm} \left[f^{(k)}(t) I^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}_{a+} g(t) \right].$$

Considerando a regra de Leibniz para a derivada de Caputo, Eq.(2.23), podemos reescrever a equação anterior como

$$\begin{aligned} & D^{\alpha,\mu}_{a\pm}(fg)(t) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \binom{\alpha\mu-\mu+1}{s} f^{(k+s)}(t) {}_*D^{\alpha\mu-\mu+1-s}_{a\pm} I^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm} g(t) \right] \\ + & \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k} I^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}_{a\pm} g(a) (f^{(k)}(t) - f^{(k)}(a)) \frac{(t-a)^{-\alpha\mu+\mu-1}}{\Gamma(\mu-\alpha\mu)}. \end{aligned}$$

Introduzindo a mudança $k = m - s$ temos,

$$\begin{aligned} & D_{a\pm}^{\alpha,\mu}(fg)(t) \\ = & \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=s}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{m-s}\binom{\alpha\mu-\mu+1}{s}f^{(m)}(t)_*D_{a\pm}^{\alpha\mu-\mu+1-s}I_{a\pm}^{m-s+(1-\mu)(1-\alpha)}g(t) \\ + & \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k}I_{a\pm}^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}g(a)(f^{(k)}(t)-f^{(k)}(a))\frac{(t-a)^{-\alpha\mu+\mu-1}}{\Gamma(\mu-\alpha\mu)}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Observemos que para $s \in \mathbb{N}$, $0 < \bar{\alpha} < 1$ e $0 < \bar{\beta} < 1$ temos,

$$_*D_{a\pm}^{\bar{\alpha}-s}I_{a\pm}^{\bar{\beta}-s} = I_{a\pm}^{1-s-(\bar{\alpha}-s)}D^{1-s}I_{a\pm}^{\bar{\beta}-s} = I_{a\pm}^{1-\bar{\alpha}}D^1D^{-s}I_{a\pm}^{-s}I_{a\pm}^{\bar{\beta}} = I_{a\pm}^{1-\bar{\alpha}}D^1I_{a\pm}^{\bar{\beta}}. \tag{2.28}$$

Tomando $\bar{\alpha} = \alpha\mu - \mu + 1$ e $\bar{\beta} = m + (1-\mu)(1-\alpha)$ na Eq.(2.28) obtemos

$$\begin{aligned} {}_*D_{a\pm}^{\alpha\mu-\mu+1-s}I_{a\pm}^{m+(1-\mu)(1-\alpha)-s} &= I_{a\pm}^{\mu-\alpha\mu}D^1I_{a\pm}^{m+(1-\mu)(1-\alpha)} \\ &= I_{a\pm}^{\mu(1-\alpha)}D^1I_{a\pm}^{(1-\mu)(1-\alpha)}I_{a\pm}^{m} \\ &= D_{a\pm}^{\alpha,\mu}I_{a\pm}^{m} \\ &= D_{a\pm}^{\alpha-m,\mu}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Assim, pelas Eq.(2.27) e Eq.(2.29) segue

$$\begin{aligned} D_{a\pm}^{\alpha,\mu}(fg)(t) &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{m-s}\binom{\alpha\mu-\mu+1}{s}f^{(m)}(t)D_{a\pm}^{\alpha-m,\mu}g(t) \\ + & \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k}I_{a\pm}^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}g(a)(f^{(k)}(t)-f^{(k)}(a))\frac{(t-a)^{-\alpha\mu+\mu-1}}{\Gamma(\mu-\alpha\mu)}. \end{aligned}$$

Usando a Eq.(2.4) temos, uma fórmula para a derivada de Hilfer do produto de duas funções, a saber,

$$\begin{aligned} D_{a\pm}^{\alpha,\mu}(fg)(t) &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m}f^{(m)}(t)D_{a\pm}^{\alpha-m,\mu}g(t) \\ &+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k}I_{a\pm}^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}g(a)(f^{(k)}(t)-f^{(k)}(a))\frac{(t-a)^{-\alpha\mu+\mu-1}}{\Gamma(\mu-\alpha\mu)}\cdot \end{aligned} \tag{2.30}$$

Observemos que se $g(a) = 0$ obtemos a regra de Leibniz explicitamente, conforme o critério proposto por Ortigueira e Machado. Observemos também que se tomarmos $\mu = 0$ e $\mu = 1$ na Eq.(2.30) recuperamos, respectivamente, a regra de Leibniz para as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo. De fato, em tais casos, obtemos

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(fg)(t) &= D_{a\pm}^{\alpha,0}(fg)(t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m}f^{(m)}(t)D_{a\pm}^{\alpha-m}g(t) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k}I_{a\pm}^{k+(1-\alpha)}g(a)(f^{(k)}(t)-f^{(k)}(a))\frac{(t-a)^{-1}}{\Gamma(0)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m}f^{(m)}(t)D_{a\pm}^{\alpha-m}g(t), \end{aligned}$$

exatamente a Eq.(2.17) bem como

$$
\begin{aligned}
{}_*D^{\alpha}(fg)(t) &= D_{a\pm}^{\alpha,1}(fg)(t) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(t)\,{}_*D_{a\pm}^{\alpha-m}g(t) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{0}{k} I_{a\pm}^{k}g(a)(f^{(k)}(t)-f^{(k)}(a))\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m} f^{(m)}(t)\,{}_*D_{a\pm}^{\alpha-m}g(t) + g(a)(f^{(k)}(t)-f^{(k)}(a))\frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},
\end{aligned}
$$

exatamente a Eq.(2.23).

2.5 Derivada fracionária segundo Weyl

Em 1917 Hermann Weyl [100] definiu uma nova derivada fracionária, que hoje conhecemos por derivada fracionária de Weyl, de manheira similar à aquela conhecida na época, a derivada de Riemann-Liouville.

Nessa seção apresentaremos a derivada fracionária de Weyl, que pode ser vista como um caso particular da derivada de Hilfer, conforme Seção 2.4.

Definição 2.7. *A derivada de Weyl de ordem α com $0 < \alpha < 1$ de uma função f é dada por*

$$W_{\pm}^{\alpha}f(t) = \pm\frac{d}{dt}I_{\pm}^{1-\alpha}f(t),$$

sendo, $I_{\pm}^{\alpha}$ as integrais fracionárias de Weyl, à esquerda e à direita, dadas por

$$
\begin{aligned}
I_{+}^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau, \\
I_{-}^{\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t}^{\infty} f(\tau)(\tau-t)^{\alpha-1}d\tau.
\end{aligned}
$$

Observemos que se tomarmos $a = \pm\infty$ e $\mu = 0$ na derivada fracionária de Hilfer, obtemos a derivada fracionária de Weyl. Como mostramos na Seção 2.4, a derivada fracionária de Hilfer é um operador linear, recupera o caso inteiro, a derivada de ordem zero é a própria função e vale a lei dos expoentes, portanto valem essas quatros propriedades para a derivada de Weyl. Para completar o critério proposto por Ortigueira e Machado, iremos analisar o que ocorre com a derivada do produto de duas funções.

Regra de Leibniz - Generalização

Nessa seção vamos obter uma fórmula para a derivada fracionária de Weyl do produto de duas funções, baseada na derivada fracionária de Hilfer. Sejam α e μ

respectivamente a ordem e tipo da derivada fracionária de Hilfer, com $0 < \alpha < 1$ e $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Na seção anterior obtivemos a seguinte relação para a derivada fracionária de Hilfer do produto de duas funções,

$$D_{a\pm}^{\alpha,\mu}(fg)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} f^{(m)}(t) D_{a\pm}^{\alpha-m,\mu} g(t)$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k} I_{a\pm}^{k+(1-\mu)(1-\alpha)} g(a)(f^{(k)}(t) - f^{(k)}(a)) \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(\mu - \alpha\mu)}.$$

Tomando $\mu = 0$ e $a = \pm\infty$ na equação acima obtemos uma fórmula para a derivada fracionária de Weyl do produto de duas funções f e g,

$$W_{\pm}^{\alpha}(fg)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} f^{(m)}(t) W_{\pm}^{\alpha-m} g(t).$$

Logo, a derivada fracionária de Weyl satisfaz a generalização da regra de Leibniz e por sua vez cumpre as cinco propriedades do critério de Ortigueira e Machado.

2.6 Derivada fracionária segundo Chen

Nessa seção apresentamos a integral e derivada fracionária de Chen [24, 74] bem como verificamos que esta cumpre o critério proposto por Ortigueira e Machado .

Definição 2.8. *Sejam $c \in \mathbb{R}$ um valor fixo, $\alpha > 0$ e f uma função. As integrais fracionárias de ordem α, à esquerda e à direita, são dadas, respectivamente, por*

$${}_{+}I_c^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \ \ \textit{para } x > c$$

e

$${}_{-}I_c^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^c f(\tau)(\tau - x)^{\alpha-1} d\tau, \ \ \textit{para } c > x.$$

Note através das **Definição 2.3** e **Definição 2.8** que as integrais fracionárias de Riemann-Liouville e Chen possuem a mesma expressão.

Definição 2.9. *As derivadas fracionárias de Chen de ordem α, sendo $0 < \alpha < 1$, à direita e à esquerda, de uma função f são, respectivamente,*

$${}_{-}D_c^{\alpha} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^c (\xi - x)^{-\alpha} f(\xi) d\xi, \ \ \textit{sendo } x < c,$$

e

$${}_{+}D_c^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_c^x (x - \xi)^{-\alpha} f(\xi) d\xi, \ \ \textit{sendo } x > c.$$

Mostraremos que a derivada fracionária de Chen à esquerda satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado, de modo análogo pode ser feito para a derivada fracionária de Chen à direita.

Linearidade

Sejam f, g funções e a, b escalares, assim

$$\begin{aligned}
{}_{+}D_c^{\alpha}[af+bg](x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_c^x (x-\xi)^{-\alpha}[af+bg](\xi)d\xi \\
&= a\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_c^x (x-\xi)^{-\alpha}f(\xi)d\xi + b\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_c^x (x-\xi)^{-\alpha}g(\xi)d\xi \\
&= a{}_{+}D_c^{\alpha}[f(x)] + b{}_{+}D_c^{\alpha}[g(x)],
\end{aligned}$$

sendo $x > c$. Portanto, a derivada fracionária de Chen à esquerda é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Tomando a ordem da derivada de Chen à esquerda igual a zero, pela **Definição 2.9**, temos para $x > c$,

$$ {}_{+}D_c^{0}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\frac{d}{dx}\int_c^x (x-\xi)^{0}f(\xi)d\xi = \frac{d}{dx}\int_c^x f(\xi)d\xi = f(x).$$

Logo, o operador ${}_{+}D_c^{0}$ é o operador identidade.

Derivada de ordem inteira

Observemos que podemos escrever a derivada fracionária de Chen à esquerda em termos da integral fracionária à esquerda,

$$\begin{aligned}
{}_{+}D_c^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_c^x (x-\xi)^{-\alpha}f(\xi)d\xi \\
&= \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x (x-\xi)^{(1-\alpha)-1}f(\xi)d\xi = \frac{d}{dx}{}_{+}I_c^{1-\alpha}f(x),
\end{aligned} \tag{2.31}$$

sendo $x > c$. Tomando $\alpha = n$, sendo $n \in \mathbb{N}$, segue

$$ {}_{+}D_c^{n}f(x) = \frac{d}{dx}{}_{+}I_c^{1-n}f(x).$$

Para $n = 1$, temos ${}_{+}D_c^{1}f(x) = \frac{d}{dx}{}_{+}I_c^{0}f(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ e para $n > 1$ o índice $1-n$ será negativo, assim ${}_{+}I_c^{1-n}f(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)$, logo

$$ {}_{+}D_c^{n}[f(x)] = \frac{d}{dx}{}_{+}I_c^{1-n}f(x) = \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x).$$

Portanto, para $n \in \mathbb{N}$ temos ${}_{+}D_c^{n}f(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x)$, e, assim, a derivada fracionária de Chen recupera o caso inteiro quando a ordem da derivada é um inteiro positivo.

Vamos considerar agora a ordem da derivada fracionária de Chen à esquerda sendo um inteiro negativo $-n$ com $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$ {}_{+}D_c^{-n}f(x) = {}_{+}I_c^{n}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_c^x f(\tau)(x-\tau)^{n-1}d\tau,$$

tomando $c = 0$ obtemos a fórmula integral de Cauchy, portanto ${}_{+}D_0^{-n}$ é a n-ésima integração recuperando assim o caso inteiro, quando $c = 0$.

Lei dos expoentes

Sejam $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ então vale a propriedade de semigrupo para a integral de Chen, uma vez que vale para a integral de Riemann-Liouville e ambas possuem a mesma fórmula. Essa propriedade também é satisfeita para $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$, de fato, utilizando a Eq.(2.31) podemos escrever para $x > c$

$$\begin{aligned}
{}_+D_c^\alpha\,{}_+D_c^\beta f(x) &= \frac{d}{dx} I_c^{1-\alpha}\left[{}_+D_c^\beta f(x)\right] \\
&= \frac{d}{dx} I_c^{1-\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_c^x (x-\xi)^{-\beta} f(\xi)d\xi\right] \\
&= \frac{d}{dx} I_c^{1-\alpha}\left[\frac{-\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_c^x (x-\xi)^{-\beta-1} f(\xi)d\xi\right] \\
&= \frac{d}{dx} I_c^{1-\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(-\beta)}\int_c^x (x-\xi)^{-\beta-1} f(\xi)d\xi\right] \\
&= \frac{d}{dx} I_c^{1-\alpha} I_c^{-\beta} f(x) = \frac{d}{dx} I_c^{1-(\alpha+\beta)} f(x) = {}_+D_c^{\alpha+\beta} f(x),
\end{aligned}$$

para obter o resultado acima consideramos que vale a lei dos expoentes para a integral fracionária de Riemann-Liouville, conforme mostrado pela Eq.(2.26). Portanto, vale a lei dos expoentes para a derivada fracionária de Chen.

Regra de Leibniz - Generalização

Nessa seção mostraremos que a derivada fracionária de Chen à esquerda satisfaz a generalização da regra de Leibniz. Seja f uma função analítica. Então, podemos escrever a derivada fracionária de Chen do produto das funções f e g por

$$\begin{aligned}
{}_+D_c^\alpha[fg](x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_c^x (x-\xi)^{-\alpha} f(\xi)g(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_c^x (x-\xi)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)(\xi-x)^n}{n!} g(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_c^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(x-\xi)^{-(\alpha-n)} f^{(n)}(x)g(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_c^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(x-\xi)^{-(\alpha-n)} f^{(n)}(x)g(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(x)\int_c^x (x-\xi)^{-(\alpha-n)} g(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Considerando a convergência uniforme da série e utilizando a regra do produto para derivada de primeira ordem temos,

$$\begin{aligned}
{}_{+}D_c^{\alpha}[fg](x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\int_c^x (x-\xi)^{-(\alpha-n)}g(\xi)d\xi \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}(x)\frac{d}{dx}\int_c^x (x-\xi)^{-(\alpha-n)}g(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\int_c^x (x-\xi)^{-(\alpha-n)}g(\xi)d\xi \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}(x)\frac{\Gamma(1-(\alpha-n))}{\Gamma(1-(\alpha-n))}\frac{d}{dx}\int_c^x (x-\xi)^{-(\alpha-n)}g(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\int_c^x (x-\xi)^{-(\alpha-n)}g(\xi)d\xi \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}(x)\Gamma(1-(\alpha-n))\,{}_{+}D_c^{\alpha}g(x).
\end{aligned}$$

Utilizando a Eq.(2.14) podemos escrever,

$$\begin{aligned}
{}_{+}D_c^{\alpha}[fg](x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha+n)}f^{(n+1)}(x)\int_c^x (x-\xi)^{-(\alpha-n)}g(\xi)d\xi \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}f^{(n)}(x)\,{}_{+}D_c^{\alpha}g(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}f^{(n+1)}(x)\,{}_{+}D_c^{\alpha-n-1}g(x) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}f^{(n)}(x)\,{}_{+}D_c^{\alpha}g(x).
\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança $n \to n-1$ no primeiro somatório e já rearranjando temos,

$$\begin{aligned}
{}_{+}D_c^{\alpha}[fg](x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}f^{(n)}(x)\,{}_{+}D_c^{\alpha-n}g(x) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}f^{(n)}(x)\,{}_{+}D_c^{\alpha}g(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(x)\,{}_{+}D_c^{\alpha-n}g(x)\left[\binom{\alpha-1}{n-1}+\binom{\alpha-1}{n}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}f^{(n)}(x)\,{}_{+}D_c^{\alpha-n}g(x).
\end{aligned}$$

Portanto, vale a generalização da regra de Leibniz para a derivada fracionária de Chen.

2.7 Derivada fracionária segundo Jumarie

Nessa seção apresentamos a derivada fracionária de Jumarie, também conhecida como derivada de Riemann-Liouville modificada. Essa derivada foi introduzida por Jumarie

[42, 43] com o intuito de corrigir o fato que a derivada de Riemann-Liouville, vista na Seção 2.2, de uma constante não ser necessariamente zero.

Definição 2.10. *A derivada fracionária de Jumarie de ordem α de uma função f é dada por*

$$D_J^\alpha f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-\xi)^{-\alpha-1} f(\xi) d\xi, & \text{para } \alpha < 0; \\ \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} [f(\xi) - f(0)] d\xi, & \text{para } 0 < \alpha < 1; \\ (D_J^{\alpha-n} f(x))^{(n)}, & n \leqslant \alpha < n+1, \text{ para } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Observemos que, de fato, a derivada fracionária de Jumarie de ordem α de uma constante é zero, pois para $f(x) = c$ sendo $c \in \mathbb{N}$, temos

- para $0 < \alpha < 1$

$$D_J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} [c-c] d\xi = 0;$$

- para $n \leqslant \alpha < n+1$, sendo para $n \geqslant 1$ temos

$$D_J^\alpha f(x) = (D_J^{\alpha-n} f(x))^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha+n)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha+n} [c-c] d\xi \right] = 0.$$

Agora verificaremos se a derivada fracionária de Jumarie satisfaz as cinco propriedades do critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam f e g funções e a, b escalares. Então, para $\alpha < 0$ temos pela **Definição 2.2** que $D_J^\alpha = J^{-\alpha}$ e a integral fracionária é um operador linear. Portanto, a derivada fracionária de Jumarie de ordem α sendo $\alpha < 0$ é um operador linear. Para $0 \leqslant \alpha < 1$ temos

$$\begin{aligned} D_J^\alpha [af + bg](x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} [(af+bg)(\xi) - (af+bg)(0)] d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} [a(f(\xi) - f(0)) + b(g(\xi) - g(0))] d\xi \\ &= a D_J^\alpha f(x) + b D_J^\alpha g(x), \end{aligned}$$

portanto para $0 < \alpha < 1$ a derivada fracionária de Jumarie de ordem α é um operador linear. Para $n \leqslant \alpha < n+1$, sendo $n \geqslant 1$ temos $D_J^\alpha f(x) = (D_J^{\alpha-n} f(x))^{(n)}$, mas $0 \leqslant \alpha - n < 1$ e como a derivada fracionária de Jumarie de ordem α com $0 \leqslant \alpha < 1$ e a derivada ordinária de ordem n são operadores lineares temos que a derivada fracionária de Jumarie para $n \leqslant \alpha < n+1$ também é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Considerando a ordem igual a zero na derivada fracionária de Jumarie temos,

$$D_J^0 f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x [f(\xi) - f(0)]d\xi = f(x) - f(0)$$

Portanto, a derivada fracionária de Jumarie de ordem zero de uma função só será a própria função se $f(0) = 0$.

Derivada de ordem inteira

Seja $n \in \mathbb{N}$. Então a derivada fracionária de Jumarie de ordem n é dada por

$$(D_J^0 f(x))^{(n)} = (f(x) - f(0))^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

E, para $n \in \mathbb{N}$ a derivada fracionária de Jumarie de ordem $-n$ é a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem n. Portanto, a derivada fracionária de Jumarie recupera o caso inteiro.

Lei dos expoentes

Vale a lei dos expoentes conforme mostramos na Seção 2.2.

Regra de Leibniz - Generalização

Pelo **Lema 2.6** temos que vale a generalização da regra de Leibniz para a derivada fracionária de Jumarie de ordem α, sendo $\alpha < 0$. Seja $0 < \alpha < 1$. Então temos a seguinte relação entre as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e de Jumarie de uma função f, $D_J^\alpha f(x) = D^\alpha[f(x) - f(0)]$. Assim, para f e g funções e considerando a regra de Leibniz para a derivada fracionária de Riemann-Liouville temos,

$$\begin{aligned}
D_J^\alpha[fg(x)] &= D^\alpha[fg(x) - fg(0)] \\
&= D^\alpha[fg(x)] - D^\alpha[fg(0)] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) D^{\alpha-i} g(x) - D^\alpha[fg(0)] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) D^{\alpha-i} g(x) - \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) D^{\alpha-i} g(0) - D^\alpha[fg(0)] \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) D^{\alpha-i} g(0) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) D^{\alpha-i}[g(x) - g(0)] - D^\alpha[fg(0)] + \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) D^{\alpha-i} g(0) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) D_J^{\alpha-i} g(x) - D^\alpha[fg(0)] + \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) D^{\alpha-i} g(0).
\end{aligned}$$

Como tanto $(fg)(0)$ e $g(0)$ são constantes, vamos calcular a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de uma constante c para substituirmos na equação acima e obter uma relação envolvendo a derivada do produto de duas funções que dependa apenas da derivada fracionária de Jumarie. Seja $0 < \alpha < 1$. Assim,

$$D^{\alpha}c = D^1 J^{1-\alpha}c = D^1 \frac{t^{1-\alpha}c}{\Gamma(1-\alpha+1)} = \frac{(1-\alpha)t^{-\alpha}c}{\Gamma(2-\alpha)} = \frac{t^{-\alpha}c}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Logo,

$$D_J^{\alpha}[fg(x)] = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x) D_J^{\alpha-i}g(x) - \frac{x^{-\alpha}f(0)g(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x)\frac{x^{-\alpha+i}g(0)}{\Gamma(1-\alpha+i)}. \quad (2.32)$$

Observemos que se $g(0) = 0$ recuperamos a generalização da regra de Leibniz, conforme o critério proposto por Ortigueira e Machado.

Por fim, para $n \leqslant \alpha < n+1$, sendo $n \geqslant 1$, temos

$$\begin{aligned} &D_J^{\alpha}[fg(x)] \\ &= (D_J^{\alpha-n} fg(x))^{(n)} \\ &= \left[\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha-n}{i} f^{(i)}(x) D_J^{\alpha-n-i}g(x) - \frac{x^{-\alpha+n}f(0)g(0)}{\Gamma(1-\alpha+n)} + \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha-n}{i} f^{(i)}(x)\frac{x^{-\alpha+n+i}g(0)}{\Gamma(1-\alpha+n+i)}\right]^{(n)}. \end{aligned}$$

Usando a regra de Leibniz para o caso inteiro, conforme **Apêndice B**, podemos escrever,

$$\begin{aligned} D_J^{\alpha}[fg(x)] &= \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha-n}{i}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{n}{s} f^{(i+s)}(x) D^{n-s} D_J^{\alpha-n-i}g(x) - \frac{\frac{\Gamma(-\alpha+n+1)}{\Gamma(-\alpha+1)}x^{-\alpha}f(0)g(0)}{\Gamma(1-\alpha+n)} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha-n}{i}\frac{g(0)}{\Gamma(1-\alpha+n+i)}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{n}{s} f^{(i+s)}(x) D^{n-s}(x^{-\alpha+n+i}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{\alpha-n}{i}\binom{n}{s} f^{(i+s)}(x) D_J^{\alpha-s-i}g(x) - \frac{x^{-\alpha}f(0)g(0)}{\Gamma(-\alpha+1)} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha-n}{i}\frac{g(0)}{\Gamma(1-\alpha+n+i)}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{n}{s} f^{(i+s)}(x)\frac{\Gamma(-\alpha+n+i+1)}{\Gamma(-\alpha+s+i+1)}x^{-\alpha+i+s}. \end{aligned}$$

Agora introduzimos a mudança de variável $j = i + s$, logo

$$\begin{aligned} D_J^{\alpha}[fg(x)] &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{\alpha-n}{j-s}\binom{n}{s} f^{(j)}(x) D_J^{\alpha-j}g(x) - \frac{x^{-\alpha}f(0)g(0)}{\Gamma(-\alpha+1)} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{\alpha-n}{j-s}\binom{n}{s}\frac{g(0)}{\Gamma(-\alpha+j+1)} f^{(j)}(x) x^{-\alpha+t}. \end{aligned}$$

Por fim, utilizando a Eq.(2.4), segue

$$D_J^{\alpha}[fg(x)] = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha}{j} f^{(j)}(x) D_J^{\alpha-j}g(x) - \frac{x^{-\alpha}f(0)g(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha}{j} f^{(j)}(x)\frac{x^{-\alpha+j}g(0)}{\Gamma(1-\alpha+j)} \quad (2.33)$$

Novamente, pelas Eq.(2.32) e Eq.(2.33) temos que a derivada fracionária de Jumarie de ordem α tanto com $0<\alpha<1$ quanto para $n \leqslant \alpha < n+1$, sendo $n \geqslant 1$, tem a mesma equação para a derivada do produto de duas funções. Assim, podemos resumir, a derivada fracionária de Jumarie do produto de duas funções da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&D_J^{\alpha}[fg(x)]\\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha}{j} f^{(j)}(x) D_J^{\alpha-j} g(x), & \text{para } \alpha<0;\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha}{j} f^{(j)}(x) D_J^{\alpha-j} g(x) - \frac{x^{-\alpha} f(0) g(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha}{j} f^{(j)}(x)\frac{x^{-\alpha+j} g(0)}{\Gamma(1-\alpha+j)}, & \text{para } \alpha>0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

2.8 Hilfer-Katugampola

Essa seção é dedicada ao estudo da derivada fracionária de Hilfer-Katugampola, que foi definida recentemente [62]. Como veremos no decorrer dessa seção, essa derivada, depedendo da escolha apropriada de seus parâmetros recupera as conhecidas derivadas fracionárias de Hilfer, Hilfer-Hadamard, Riemann-Liouville, Hadamard, Caputo, Caputo-Hadamard, Liouville e Weyl. Essa nova formulação é definida em termos da integral fracionária generalizada [47], que é uma generalização das integrais de Riemann-Liouville e Hadamard. Assim, antes de verificarmos se a derivada fracionária de Hilfer-Katugampola cumpre as propriedades do critério de Ortigueira e Machado apresentaremos as definições das derivadas fracionárias que essa generalizam e que ainda não foram apresentadas nesse trabalho. Começamos essa seção com a definição da integral fracionária generalizada.

Definição 2.11. *Sejam $\alpha, \rho, c \in \mathbb{R}$ com $\alpha>0$ e $\rho>0$. As integrais fracionárias generalizadas à esquerda e à direita de uma função f, sendo*[2] *$f \in X_c^p(a,b)$, são, respectivamente, dadas por*

$$
{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^{\rho-1}(x^{\rho}-t^{\rho})^{\alpha-1} f(t)\,dt, \textit{ para } x>a,
$$

e

$$
{}^{\rho}\mathscr{I}_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b t^{\rho-1}(t^{\rho}-x^{\rho})^{\alpha-1} f(t)\,dt, \textit{ para } x<b.
$$

Apresentamos agora a definição das derivadas fracionárias de Hilfer-Katugampola à esquerda e à direita conforme introduzidas em [62].

Definição 2.12. *Sejam $n-1<\alpha\leqslant n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, respectivamente a ordem e o tipo da derivada. A derivada fracionária de Hilfer-Katugampola, com $\rho>0$, da função f é definida por*

$$
{}^{\rho}\mathscr{D}_{a\pm}^{\alpha,\beta} f(x) = \left(\pm\, {}^{\rho}\mathscr{I}_{a\pm}^{\beta(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n} {}^{\rho}\mathscr{I}_{a\pm}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f \right)(x). \tag{2.34}
$$

[2] $X_c^p(a,b)$ consiste nas funções de valor complexo mensuráveis de Lebesgue.

Note que essa nova formulação recupera as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, vista na Seção 2.2, quando $\rho \to 1$ e $\beta = 0$; Caputo, apresentada na Seção 2.3 quando $\rho \to 1$ e $\beta = 1$; Hilfer, apresentada na Seção 2.4, quando tomamos $\rho \to 1$, e, por fim, Weyl, vista na Seção 2.5 quando tomamos $\rho \to 1$, $\beta = 0$ e $a \to -\infty$. Recupera também as formulações de Hilfer-Hadamard, quando $\rho \to 0^+$, Caputo-Hadamard, quando $\rho \to 0^+$ e $\beta = 1$, e Hadamard quando $\rho \to 0^+$ e $\beta = 0$, cujas definições apresentamos a seguir.

Tendo em vista a derivada fracionária de Hilfer, foi introduzida em [73] uma nova derivada fracionária, a conhecida derivada fracionária Hilfer-Hadamard.

Definição 2.13. *A derivada fracionária de Hilfer-Hadamard de ordem α sendo $0 < \alpha < 1$ e tipo β com $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ é dada por*

$$\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta} f(t) = \left(\mathscr{I}_{a+}^{\beta(1-\alpha)} \left(t\frac{d}{dt} \right) \mathscr{I}_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f \right)(t).$$

Apresentamos agora as definições das derivada e integral fracionárias de Hadamard [49].

Definição 2.14. *Sejam $\alpha > 0$ e (a,b) um intervalo limitado ou ilimitado de $\mathbb{R}$. As integrais fracionárias de Hadamard à esquerda e à direita são dadas por*

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t},$$

para $x > a$ e

$$\mathcal{I}_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\ln \frac{t}{x} \right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t},$$

para $b > x$, respectivamente, sendo a integral de ordem zero o operador identidade.

A derivada fracionária de Hadamard é definida em termos da integral de Hadamard, conforme apresentamos a seguir.

Definição 2.15. *Sejam $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $n - 1 < \alpha < n$. As derivadas fracionárias de Hadamard à esquerda e à direita são dadas, respectivamente, por*

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = \left(x\frac{d}{dx} \right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{n-\alpha+1} f(t) \frac{dt}{t} \right],$$

para $x > a$ e

$$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) = \left(-x\frac{d}{dx} \right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{n-\alpha+1} f(t) \frac{dt}{t} \right],$$

para $b > x$.

Enfim, mencionamos a derivada fracionária de Caputo-Hadamard conforme introduzida em [40].

Definição 2.16. *Sejam $D^{\alpha}_{a+}f(x)$ e $D^{\alpha}_{b-}f(x)$ as derivadas fracionárias de Hadamard de ordem α com $\alpha \geqslant 0$. As derivadas de Caputo-Hadamard à esquerda e à direita são dadas por*

$$^{C}\mathscr{D}^{\alpha}_{a+}f(x) = \left(D^{\alpha}_{a+} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k f(a)}{k!} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^k \right] \right)(x),$$

e

$$^{C}\mathscr{D}^{\alpha}_{b-}f(x) = \left(D^{\alpha}_{b-} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \delta^k f(b)}{k!} \left(\ln \frac{b}{t} \right)^k \right] \right)(x),$$

sendo $\delta = \left(t\dfrac{d}{dt} \right)$.

Iremos agora verificar se a derivada fracionária de Hilfer-Katugampola que contém como casos particulares, além das já mencionadas, aquelas acima apresentadas, satisfaz as propriedades do critério de Ortigueira e Machado. Para tal, usaremos a formulação para a derivada à esquerda.

Linearidade

Sejam d e e escalares e f e g funções. Para mostrar que a derivada fracionária de Hilfer-Katugampola é um operador linear vamos primeiro mostrar que a integral generalizada, conforme **Definição 2.11**, é um operador linear. Assim, para $\alpha, \rho, c \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$ e $\rho > 0$ temos

$$\begin{aligned} ^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}(df + eg)(x) &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1}(df + eg)(t)dt \\ &= \frac{d\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} f(t)dt + \frac{e\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} g(t)dt \\ &= d^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}f(x) + e^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}g(x). \end{aligned}$$

Assim, levando em consideração que a derivada de ordem inteira n e a integral generalizada são operadores lineares temos

$$\begin{aligned} ^{\rho}\mathscr{D}^{\alpha,\beta}_{a+}(df + eg)(x) &= \left(^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(n-\alpha)}_{a+} \left(t^{\rho-1}\frac{d}{dt} \right)^n {}^{\rho}\mathscr{I}^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a+}(df + eg) \right)(x) \\ &= {}^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(n-\alpha)}_{a+} \left(x^{\rho-1}\frac{d}{dx} \right)^n \left(d^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}f(x) + e^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}g(x) \right) \\ &= d^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(n-\alpha)}_{a+} \left(x^{\rho-1}\frac{d}{dx} \right)^n {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}f(x) + e^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(n-\alpha)}_{a+} \left(x^{\rho-1}\frac{d}{dx} \right)^n {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}g(x) \\ &= d^{\rho}\mathscr{D}^{\alpha,\beta}_{a+}f(x) + e^{\rho}\mathscr{D}^{\alpha,\beta}_{a+}g(x). \end{aligned}$$

Portanto, a derivada fracionária de Hilfer-Katugampola é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Sejam $\alpha = 0$ e e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, assim $n = 0$ e podemos escrever

$$^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{0,\beta} f(x) = \left({}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{0} \left(t^{\rho-1} \frac{d}{dt} \right)^{0} {}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{0} f \right)(x) = f(x),$$

recuperando assim a função original.

Derivada de ordem inteira

Consideramos agora a ordem da derivada sendo um inteiro positivo n com $n \in \mathbb{N}$. Assim, para $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ e $\rho > 0$ temos,

$$\begin{aligned} {}^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{n,\beta} f(x) &= \left({}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{0} \left(t^{\rho-1} \frac{d}{dt} \right)^{n} {}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{0} f \right)(x) \\ &= \left(x^{\rho-1} \frac{d}{dx} \right)^{n} f(x), \end{aligned}$$

E quando $\rho = 1$, recuperamos o caso inteiro.

Lei dos expoentes

Iremos mostrar que a integral fracionária generalizada à esquerda satisfaz a lei dos expoentes, para a integral à direita a demonstração é análoga. Sejam $\alpha, \beta, \rho, c \in \mathbb{R}$ com $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\rho > 0$. Assim, para $x > a$,

$$\begin{aligned} {}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{\alpha} \, {}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{\beta} f(x) &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} {}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{\beta} f(t) dt \\ &= \frac{\rho^{2-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} \left[\int_a^t \tau^{\rho-1}(t^\rho - \tau^\rho)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \right] dt. \end{aligned}$$

Permutando a ordem das integrais e rearranjando podemos escrever,

$${}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{\alpha} \, {}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{\beta} f(x) = \frac{\rho^{2-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \tau^{\rho-1} f(\tau) \int_\tau^x t^{\rho-1}(x^\rho - t^\rho)^{\alpha-1}(t^\rho - \tau^\rho)^{\beta-1} dt d\tau.$$

Consideremos agora a mudança $y = \dfrac{t^\rho - \tau^\rho}{x^\rho - \tau^\rho}$, assim $t^\rho = y(x^\rho - \tau^\rho) + \tau^\rho$ e portanto,

$$\begin{aligned} &{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{\alpha} \, {}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{\beta} f(x) \\ &= \frac{\rho^{2-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \tau^{\rho-1} f(\tau) \int_0^1 (x^\rho - \tau^\rho - y(x^\rho - \tau^\rho))^{\alpha-1} (y(x^\rho - \tau^\rho))^{\beta-1} \frac{x^\rho - \tau^\rho}{\rho} dy d\tau \\ &= \frac{\rho^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \tau^{\rho-1}(x^\rho - \tau^\rho)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} (y)^{\beta-1} dy d\tau. \end{aligned}$$

A integral resultante é a conhecida função beta, $B(\alpha,\beta)$. Utilizando a relação entre as funções gama e beta, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
{}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}\,{}^{\rho}\mathscr{I}^{\beta}_{a+}f(x) &= \frac{\rho^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \tau^{\rho-1}(x^\rho-\tau^\rho)^{\alpha+\beta-1}f(\tau)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}d\tau \\
&= \frac{\rho^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x \tau^{\rho-1}(x^\rho-\tau^\rho)^{\alpha+\beta-1}f(\tau)d\tau \\
&= {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha+\beta}_{a+}f(x).
\end{aligned}$$

E, portanto, vale a lei dos expoentes também conhecida como propriedade de semigrupo.

Regra de Leibniz - Generalização

Nessa seção vamos obter uma fórmula para derivada fracionária de Hilfer-Katugampola do produto de duas funções, aqui iremos considerar a ordem da derivada entre zero e um, ou seja, $0 < \alpha \leqslant 1$. Para obtermos tal fórmula iremos considerar o seguinte resultado.

Lema 2.7. *Sejam $\alpha > 0$ e $\rho > 0$. A integral fracionária generalizada da função f possui a propriedade,*

$$ {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = \rho^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}\frac{f^{(n)}(x)(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}, \tag{2.35}$$

para $x > a$.

Demonstração. Suponhamos que podemos escrever a função f através da série

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)(t^\rho-x^\rho)^n}{n!}.$$

Assim pela **Definição 2.11** podemos escrever para $x > a$,

$$\begin{aligned}
{}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}f(x) &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho-t^\rho)^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)(t^\rho-x^\rho)^n}{n!}dt \\
&= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!}\int_a^x t^{\rho-1}(x^\rho-t^\rho)^{\alpha-1+n}dt.
\end{aligned}$$

Consideremos a mudança $u = x^\rho - t^\rho$ na integral, assim

$$\begin{aligned}
{}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}f(x) &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!}\left[-\rho^{-1}\int_{x^\rho-a^\rho}^{0}u^{\alpha-1+n}dt\right] \\
&= \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!}\left[-\frac{u^{\alpha+n}}{\alpha+n}\right]_{x^\rho-a^\rho}^{0} \\
&= \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!}\frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+n}}{\alpha+n}.
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por $\dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)}$ temos,

$$ {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!}\frac{(x^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha+n}\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n+1)}. $$

Pela Eq.(2.14) temos

$$ {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}f(x) = \rho^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}\frac{f^{(n)}(x)(x^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}, $$

como queríamos mostrar. ■

Vamos agora, utilizando o **Lema 2.7**, obter uma fórmula para a integral do produto de duas funções para posteriormente obter uma fórmula para a derivada Hilfer-Katugampola do produto de duas funções.

Lema 2.8. *Sejam f e g funções, $\alpha > 0$ e $\rho > 0$. A integral fracionária generalizada do produto das funções f e g satisfaz a equação,*

$$ {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k}\rho^{k} f^{(k)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha+k}_{a+}g(x), \tag{2.36} $$

para $x > a$.

Demonstração. Pela Eq.(2.35) podemos escrever,

$$ {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}(fg)(x) = \rho^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}\frac{(fg)^{(n)}(x)(x^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}. $$

Usando a regra de Leibniz para o caso inteiro temos,

$$ \begin{aligned} {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}(fg)(x) &= \rho^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\frac{(x^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)} \\ &= \rho^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(x)\sum_{n=k}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}\binom{n}{k}g^{(n-k)}(x)\frac{(x^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}. \end{aligned} $$

Considerando a mudança de variável $n \to n+k$ temos,

$$ {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}(fg)(x) = \rho^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n+k}\binom{n+k}{k}g^{(n)}(x)\frac{(x^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha+n+k}}{\Gamma(\alpha+n+k+1)}. $$

Pela Eq.(2.16) temos que $\dbinom{-\alpha}{n+k}\dbinom{n+k}{k} = \dbinom{-\alpha}{k}\dbinom{-\alpha-k}{n}$. Assim,

$$ {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}(fg)(x) = \rho^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k}f^{(k)}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha-k}{n}g^{(n)}(x)\frac{(x^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha+n+k}}{\Gamma(\alpha+n+k+1)}. $$

Utilizando a Eq.(2.35) temos o resultado desejado, a saber,

$$ {}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha}_{a+}(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k}\rho^{k} f^{(k)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}^{\alpha+k}_{a+}g(x). $$

■

Tendo em vista o lema acima vamos agora obter uma fórmula para a derivada Hilfer-Katugampola do produto de duas funções f e g. Pela Eq.(2.34) e considerando $0 < \alpha < 1$, ou seja, $n = 1$, temos,

$$ {}^{\rho}\mathscr{D}^{\alpha,\beta}_{a+}(fg)(x) = {}^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(1-\alpha)}_{a+}\left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right){}^{\rho}\mathscr{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)}_{a+}(fg)(x). $$

Podemos reescrever a equação acima utilizando a Eq.(2.36) como

$$ {}^{\rho}\mathscr{D}^{\alpha,\beta}_{a+}(fg)(x) = {}^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(1-\alpha)}_{a+}\left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^k f^{(k)}(x){}^{\rho}\mathscr{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k}_{a+}g(x). $$

Derivando termo a termo em relação a x obtemos,

$$ \begin{aligned} {}^{\rho}\mathscr{D}^{\alpha,\beta}_{a+}(fg)(x) &= {}^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(1-\alpha)}_{a+}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^k x^{1-\rho}f^{(k+1)}(x){}^{\rho}\mathscr{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k}_{a+}g(x) \\ &+ {}^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(1-\alpha)}_{a+}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^k x^{1-\rho}f^{(k)}(x)\frac{d}{dx}{}^{\rho}\mathscr{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k}_{a+}g(x) \\ &= {}^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(1-\alpha)}_{a+}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^k x^{1-\rho}f^{(k+1)}(x){}^{\rho}\mathscr{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k}_{a+}g(x) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^k{}^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(1-\alpha)}_{a+}\left(f^{(k)}(x)x^{1-\rho}\frac{d}{dx}{}^{\rho}\mathscr{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k}_{a+}g(x)\right). \end{aligned} $$

Considerando que a integral generalizada é um operador linear e novamente pela Eq.(2.36) temos

$$ \begin{aligned} &{}^{\rho}\mathscr{D}^{\alpha,\beta}_{a+}(fg)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^k{}^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(1-\alpha)}_{a+}\left[x^{1-\rho}f^{(k+1)}(x){}^{\rho}\mathscr{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k}_{a+}g(x)\right] \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^k \\ &\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\beta(1-\alpha)}{m}\rho^m f^{(k+m)}(x){}^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(1-\alpha)+m}_{a+}x^{1-\rho}\frac{d}{dx}{}^{\rho}\mathscr{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k}_{a+}g(x). \end{aligned} $$

Mais uma vez pela Eq.(2.36) podemos escrever

$$ \begin{aligned} &{}^{\rho}\mathscr{D}^{\alpha,\beta}_{a+}(fg)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^k \\ &\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\beta(1-\alpha)}{s}\rho^s\frac{d^s}{dx^s}\left[x^{1-\rho}f^{(k+1)}(x)\right]{}^{\rho}\mathscr{I}^{\beta(1-\alpha)+s}_{a+}{}^{\rho}\mathscr{I}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k}_{a+}g(x) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^k\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\beta(1-\alpha)}{m}\rho^m f^{(k+m)}(x){}^{\rho}\mathscr{I}^{m}_{a+}{}^{\rho}\mathscr{D}^{\alpha,\beta}_{a+}{}^{\rho}\mathscr{I}^{k}_{a+}g(x). \end{aligned} $$

Usando a regra de Leibniz para o caso inteiro e considerando que vale a lei dos expoentes para a integral generalizada obtemos,

$$
\begin{aligned}
&{}^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta}(fg)(x)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^{k}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\beta(1-\alpha)}{s}\rho^{s}\\
&\cdot\sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n}\frac{\Gamma(2-\rho)}{\Gamma(2-\rho-n)}x^{1-\rho-n}f^{(k+s-n+1)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{s+k+1-\alpha}g(x)\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\binom{-\beta(1-\alpha)}{m}\rho^{k+m}f^{(k+m)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{m}\,{}^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta}\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{k}g(x)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^{k}\\
&\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=n}^{\infty}\binom{-\beta(1-\alpha)}{s}\binom{s}{n}\rho^{s}\frac{\Gamma(2-\rho)}{\Gamma(2-\rho-n)}x^{1-\rho-n}f^{(k+s-n+1)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{s+k+1-\alpha}g(x)\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\binom{-\beta(1-\alpha)}{m}\rho^{k+m}f^{(k+m)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{m}\,{}^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta}\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{k}g(x).
\end{aligned}
$$

Tomemos agora a mudança de índice $s\to s+n$, assim

$$
\begin{aligned}
&{}^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta}(fg)(x)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^{k}\\
&\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\beta(1-\alpha)}{s+n}\binom{s+n}{n}\rho^{s+n}\frac{\Gamma(2-\rho)}{\Gamma(2-\rho-n)}x^{1-\rho-n}f^{(k+s+1)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{s+n+k+1-\alpha}g(x)\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\binom{-\beta(1-\alpha)}{m}\rho^{k+m}f^{(k+m)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{m}\,{}^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta}\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{k}g(x).
\end{aligned}
$$

Pela Eq.(2.16) temos que

$$
\begin{aligned}
&{}^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta}(fg)(x)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^{k}\\
&\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\beta(1-\alpha)}{n}\binom{-\beta(1-\alpha)-k}{s}\rho^{s+n}\frac{\Gamma(2-\rho)}{\Gamma(2-\rho-n)}x^{1-\rho-n}f^{(k+s+1)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{s+n+k+1-\alpha}g(x)\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\binom{-\beta(1-\alpha)}{m}\rho^{k+m}f^{(k+m)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{m}\,{}^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta}\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{k}g(x)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\beta(1-\alpha)}{n}\frac{\Gamma(2-\rho)}{\Gamma(2-\rho-n)}x^{1-\rho-n}\\
&\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\beta(1-\alpha)-k}{s}\rho^{s+n}f^{(k+s+1)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{s+n+k+1-\alpha}g(x)\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\binom{-\beta(1-\alpha)}{m}\rho^{k+m}f^{(k+m)}(x)\,{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{m}\,{}^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta}.{}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{k}g(x).
\end{aligned}
$$

Novamente pela Eq.(2.36) podemos escrever a seguinte equação para a derivada Hilfer-Katugampola do produto de duas funções,

$$
\begin{aligned}
&{}^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta}(fg)(x)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\rho^{k}\\
&\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\beta(1-\alpha)}{n}\frac{\Gamma(2-\rho)}{\Gamma(2-\rho-n)}x^{1-\rho-n}\rho^{n\rho}\mathscr{I}_{a+}^{\beta(1-\alpha)+k}\left[f^{(k+1)}(x)^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{-\beta(1-\alpha)+n+1-\alpha}g(x)\right]\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\binom{-\beta(1-\alpha)}{m}\rho^{k+m}f^{(k+m)}(x)^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{m\,\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta\rho}.\mathscr{I}_{a+}^{k}g(x)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\binom{-\beta(1-\alpha)}{n}\rho^{n+k}\frac{\Gamma(2-\rho)}{\Gamma(2-\rho-n)}x^{1-\rho-n}\\
&\cdot\ {}^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{\beta(1-\alpha)+k}\left[f^{(k+1)}(x)^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{-\beta(1-\alpha)+n+1-\alpha}g(x)\right]\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\binom{-\beta(1-\alpha)}{m}\rho^{k+m}f^{(k+m)}(x)^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{m\,\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta\rho}.\mathscr{I}_{a+}^{k}g(x),
\end{aligned}
$$

obtendo assim uma equação para a derivada de Hilfer-Katugampola do produto de duas funções, bem diferente daquela proposta por Ortigueira e Machado [70].

2.9 Derivada fracionária ψ-Hilfer

Recentemente, Souza e Oliveira [84] propuseram uma nova formulação para a derivada fracionária, a chamada, derivada fracionária ψ-Hilfer. Sugumarana et al. [91] apresentaram condições necessárias para a existência de solução de uma equação diferencial utililizando a derivada fracionária ψ-Hilfer envolvendo ordem complexa.

Essa nova formulação generaliza vinte e duas outras derivadas fracionárias [84], dentre elas, as derivadas de Riemann-Liouville, Caputo, Weyl, Chen e Jumarie vista nas seções anteriores bem como as derivadas ψ-Caputo, ψ-Riemann-Liouville, Katugampola, Hadamard, Caputo-Hadamard, Caputo-Katugampola, Hilfer-Hadamard, Hilfer-Katugampola, Riemann, Prabhakar, Erdélyi-Kober, Liouville, Liouville-Caputo, Riesz, Feller, Cossar e Caputo-Riesz.

Aqui, apresentaremos a definição dessa nova formulação bem como a definição de dois importantes casos particulares, a saber, as derivadas ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville, pois essas serão utilizadas mais adiante nessa seção e também verificaremos a validade do critério proposto por Ortigueira e Machado. As derivadas fracionárias ψ-Hilfer, ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville são definidas em termos de uma integral fracionária, assim apresentamos primeiro a definição dessa integral introduzida em 1993 por Samko et al. [78].

Definição 2.17. *Sejam* (a,b) *com* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ *um intervalo na reta real,* $\alpha > 0$ *e* $\psi(x)$ *uma função monótona crescente e positiva em* $(a,b]$*, cuja derivada é contínua em* (a,b)*. As integrais fracionárias de uma função* f*, em relação a função* ψ*, à esquerda e à direita, respectivamente, são*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)[\psi(x)-\psi(t)]^{\alpha-1} f(t)dt$$

e

$$I_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \psi'(t)[\psi(t)-\psi(x)]^{\alpha-1} f(t)dt.$$

Observe que podemos relacionar as integrais de Riemann-Liouville, **Definição 2.3**, com as integrais da **Definição 2.17** através das equações [50, 78],

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = Q_\psi I^{\alpha}_{\psi(a)+} Q_\psi^{-1} f(x) \tag{2.37}$$

e

$$I_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = Q_\psi I^{\alpha}_{\psi(b)-} Q_\psi^{-1} f(x).$$

onde $Q_\psi f(x) = f(\psi(x))$ e Q_ψ^{-1} o operador inverso. Diante dessas relações, muitas propriedades da integral de Riemann-Liouville são satisfeitas para a integral fracionária em relação a função ψ como veremos adiante, por exemplo, a lei dos expoentes. Apresentamos agora as definições das derivadas fracionárias ψ-Riemann-Liouville [50] e ψ-Caputo [6], respectivamente.

Definição 2.18. *Sejam* $n-1 < \alpha \leqslant n$ *com* $n \in \mathbb{N}$*,* $I = [a,b]$ *um intervalo tal que* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$*,* ψ *uma função crescente tal que* $\psi'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$ *e* $\psi \in C^n([a,b],\mathbb{R})$*,* $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$*. As derivadas fracionárias* ψ*-Riemann-Liouville de ordem* α*, à esquerda e à direita, de uma função* f *são, respectivamente,*

$${}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n I_{a+}^{(n-\alpha);\psi} f(x)$$

e

$${}^{RL}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = \left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n I_{b-}^{(n-\alpha);\psi} f(x).$$

Definição 2.19. *Sejam* $n-1 < \alpha \leqslant n$ *com* $n \in \mathbb{N}$*,* $I = [a,b]$ *um intervalo tal que* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$*,* ψ *uma função crescente tal que* $\psi'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$ *e* $\psi \in C^n([a,b],\mathbb{R})$*,* $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$*. As derivadas fracionárias* ψ*-Caputo de ordem* α*, à esquerda e à direita, de uma função* f *são, respectivamente,*

$${}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = I_{a+}^{(n-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x)$$

e

$${}^{C}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = I_{b-}^{(n-\alpha);\psi} \left(-\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n f(x).$$

Apresentamos a definição da derivada fracionária ψ-Hilfer conforme introduzida em [83, 84].

Definição 2.20. *Sejam $n-1 < \alpha \leqslant n$ com $n \in \mathbb{N}$, $I = [a,b]$ um intervalo tal que $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, ψ uma função crescente tal que $\psi'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ e $\psi \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$. A derivada fracionária ψ-Hilfer de ordem α e tipo β com $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, à esquerda e à direita, de uma função f são, respectivamente,*

$$ {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = I_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x) $$

e

$$ {}^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = I_{b-}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left(-\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n I_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x). $$

A partir daqui iremos trabalhar apenas com a formulação da derivada à esquerda. Podemos escrever a derivada ψ-Hilfer em termos das derivadas de ψ-Riemann-Liouville e ψ-Caputo das seguintes formas,

$$ {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = I_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi}\, {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha+\beta(n-\alpha);\psi} f(x), $$

e

$$ {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = {}^C\mathbb{D}_{a+}^{\beta(\alpha-n)+n;\psi} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x). \tag{2.38} $$

Observamos que a derivada ψ-Hilfer generaliza as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, Caputo, Weyl, Chen, Jumarie, ψ-Riemann-Liouville e ψ-Caputo. De fato, ao tomarmos $\psi(x) = x$ e $\beta = 0$ na **Definição 2.20** temos

$$ {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,0;x} f(x) = I_{a+}^{0;x} \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_{a+}^{(n-\alpha);x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt = D^\alpha f(x), $$

ou seja, a derivada de Riemann-Liouville vista na Seção 2.2. Ao tomarmos $\psi(x) = x$ e o $\beta = 1$ na derivada ψ-Hilfer temos,

$$ {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,1;x} f(x) = I_{a+}^{n-\alpha;x} \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_{a+}^{0;x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} f(t)dt = {}_*D^\alpha f(x), $$

que é a derivada de Caputo apresentada na Seção 2.3. Ao considerarmos $\psi(x) = x$, $a = -\infty$, $0 < \alpha < 1$ e $\beta = 0$ na derivada à esquerda ψ-Hilfer recuperamos a derivada de Weyl à esquerda apresentada na Seção 2.5, a saber,

$$ {}^H\mathbb{D}_{-\infty}^{\alpha,0;x} f(x) = I_{-\infty}^{0;x} \frac{d}{dx} I_{-\infty}^{(n-\alpha);x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt = W_+^\alpha f(x). $$

Por fim, tomando $\psi(x) = x$, $\beta = 0$ e $0 < \alpha < 1$ na **Definição 2.20** temos

$$ {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,0;x} f(x) = I_{a+}^{0;x} \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_{a+}^{(1-\alpha);x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt =_+ D_c^\alpha f(x). $$

ou seja, a derivada de Chen vista na Seção 2.6. Tomando $\psi(x) = x$, $a = 0$, $g(x) = f(x) - f(0)$, $0 < \alpha < 1$ e $\beta = 0$ na derivada ψ-Hilfer obtemos a derivada de Jumarie para $0 < \alpha < 1$ apresentada na Seção 2.7, de fato,

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{0+}^{\alpha,0;x} g(x) &= I_{0+}^{0;x} \frac{d}{dx} I_{0+}^{(1-\alpha);x} [f(x) - f(0)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} [f(t) - f(0)] dt = D_J^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

E considerando $\beta = 1$ e $\beta = 0$ na derivada ψ-Hilfer recuperamos, respectivamente, as derivadas ψ-Caputo e ψ-Riemann-Liouville.

Outros dois casos particulares importantes da derivada de ψ-Hilfer são as derivadas de Hadamard, conforme **Definição 2.15**, que é recuperada ao considerar $\beta \to 0$ e $\psi(x) = \ln x$ na derivada ψ-Hilfer e a derivada Erdélyi-Kober e devido a essa importância aqui apresentaremos a definição da derivada e integral de Erdélyi-Kober bem como no final dessa seção recuperamos uma fórmula para a derivada do produto de duas funções (generalização da regra de Leibniz) para essas derivadas.

Definição 2.21. *Sejam (a, b) um intervalo finito ou infinito de $\mathbb{R}$, α um número complexo tal que $Re(\alpha) > 0$, $\sigma > 0$ e $\eta \in \mathbb{C}$. As integrais de Erdélyi-Kober de ordem α, à esquerda e à direita, são dadas, respectivamente, por*

$$I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t) dt}{(x^{\sigma} - t^{\sigma})^{1-\alpha}},$$

para $0 \leqslant a < x < b \leqslant \infty$. E,

$$I_{b-;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t) dt}{(t^{\sigma} - x^{\sigma})^{1-\alpha}},$$

para $0 \leqslant a < x < b \leqslant \infty$.

Definição 2.22. *Sejam α um número complexo tal que $Re(\alpha) > 0$ e n o menor inteiro maior que $Re(\alpha)$, assim $n - 1 < Re(\alpha) \leqslant n$, $\sigma > 0$ e $\eta \in \mathbb{C}$. As derivadas fracionárias de Erdélyi-Kober são definidas, para $0 \leqslant a < x < b \leqslant \infty$, por*

$$D_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} \frac{d}{dx} \right)^n x^{\sigma(n+\eta)} I_{a+;\sigma,\eta+\alpha}^{n-\alpha} f(x),$$

e

$$D_{b-;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x) = x^{\sigma(\eta+\alpha)} \left(-\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} \frac{d}{dx} \right)^n x^{\sigma(n-\eta-\alpha)} I_{b-;\sigma,\eta+\alpha-n}^{n-\alpha} f(x).$$

Observemos que tomando $\beta \to 0$, $\psi(x) = x^\sigma$ e $g(x) = x^{\sigma(\eta+\alpha)} f(x)$ na **Definição 2.20** recuperamos a derivada de Erdélyi-Kober à esquerda, de fato, temos,

$$\begin{aligned} x^{-\sigma\eta\,H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,0;\psi} g(x) &= x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} \frac{d}{dx}\right)^n I_{a+}^{(n-\alpha);\psi} g(x) \\ &= x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \sigma t^{\sigma-1} [x^\sigma - t^\sigma]^{n-\alpha-1} g(t) dt \\ &= x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \sigma t^{\sigma(\eta+\alpha+1)-1} [x^\sigma - t^\sigma]^{n-\alpha-1} f(t) dt \\ &= x^{-\sigma\eta} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} \frac{d}{dx}\right)^n x^{\sigma(n+\eta)} I_{a+;\sigma,\eta+\alpha}^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha} f(x). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Vamos agora verificar se a derivada ψ-Hilfer à esquerda cumpre o critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

Para mostrar que a derivada ψ-Hilfer à esquerda é um operador linear basta mostrarmos que a integral fracionária em relação a função ψ à esquerda é um operador linear uma vez que o operador de derivação ordinária é linear.

Sejam f e g funções reais e de variável real e c, d escalares, bem como as condições da **Definição 2.17**, assim

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\psi}[cf(x) + dg(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)[\psi(x) - \psi(t)]^{\alpha-1} [cf(t) + dg(t)] dt \\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)[\psi(x) - \psi(t)]^{\alpha-1} f(t) dt \\ &+ \frac{d}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} g(t) dt \\ &= c I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) + d I_{a+}^{\alpha;\psi} g(x). \end{aligned}$$

Logo, a integral à esquerda é um operador linear e portanto a derivada ψ-Hilfer à esquerda também é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Sejam $I = [a, b]$ um intervalo tal que $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, ψ uma função crescente tal que $\psi'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ e $\psi \in C^n([a, b], \mathbb{R})$, $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$. Admitindo que ao tomar a ordem da integral igual a zero temos o operador identidade, isso é, $I_{a+}^{0;\psi} f(x) = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ representa o operador identidade, obtemos a derivada fracionária ψ-Hilfer de ordem $\alpha = 0$ e tipo β com $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, à esquerda, de uma função f,

$${}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = I_{a+}^{0;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx}\right)^0 I_{a+}^{0;\psi} f(x) = \mathbf{I} f(x) = f(x),$$

recuperando assim a função original.

Derivada de ordem inteira

Tomemos a ordem da derivada ψ-Hilfer à esquerda igual a m sendo $m \in \mathbb{N}$, assim pela **Definição 2.20** temos

$$^{H}\mathbb{D}_{a+}^{m,\beta;\psi} f(x) = I_{a+}^{0;\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{m} I_{a+}^{0;\psi} f(x) = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{m} f(x),$$

generalizando o caso inteiro quando $\dfrac{1}{\psi'(x)} = 1$, ou seja, quando $\psi(x) = x + c$, sendo c uma constante.

Lei dos expoentes

Sejam $\alpha > 0$, $\beta > 0$, (a, b) com $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ um intervalo na reta real e $\psi(x)$ uma função monótona crescente e positiva em $(a, b]$, cuja derivada é contínua em (a, b). Vamos mostrar que a integral fracionária à esquerda satisfaz a propriedade de semigrupo. Pela Eq.(2.37) e considerando que vale a propriedade de semigrupo para a integral de Riemann-Liouville, podemos escrever,

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha;\psi} I_{a+}^{\beta;\psi} f(x) &= Q_{\psi} I_{\psi(a)+}^{\alpha} Q_{\psi}^{-1} Q_{\psi} I_{\psi(a)+}^{\beta} Q_{\psi}^{-1} f(x) \\ &= Q_{\psi} I_{\psi(a)+}^{\alpha} I_{\psi(a)+}^{\beta} Q_{\psi}^{-1} f(x) \\ &= Q_{\psi} I_{\psi(a)+}^{\alpha+\beta} Q_{\psi}^{-1} f(x) \\ &= I_{a+}^{\alpha+\beta;\psi} f(x) \end{aligned}$$

onde $Q_{\psi} f(x) = f(\psi(x))$ e Q_{ψ}^{-1} o operador inverso. O mesmo vale para a integral à direita.

Regra de Leibniz - Generalização

Nessa seção iremos obter uma fórmula para a derivada ψ-Hilfer do produto de duas funções, para isso usaremos a seguinte forma de representar a integral fracionária.

Lema 2.9. *Sejam (a, b) com $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ um intervalo na reta real, $\alpha > 0$ e $\psi(x)$ uma função monótona crescente e positiva em $(a, b]$, cuja derivada é contínua em (a, b). Assim,*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} f^{(n)}(x) \frac{[\psi(x) - \psi(a)]^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha + n + 1)}. \tag{2.40}$$

para $x > a$.

Demonstração. Suponhamos que podemos escrever a função f como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} [\psi(t) - \psi(x)]^{n},$$

para $x > a$. Substituindo a função f, como escrita acima, na integral fracionária da função f, em relação a função ψ, conforme **Definição 2.17**, temos

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(t)[\psi(x)-\psi(t)]^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}[\psi(t)-\psi(x)]^n dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)(-1)^n}{n!} \int_a^x \psi'(t)[\psi(x)-\psi(t)]^{\alpha-1+n} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)(-1)^n}{n!} \left[\frac{-[\psi(x)-\psi(t)]^{\alpha+n}}{\alpha+n} \right]_a^x \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)(-1)^n}{n!} \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{\alpha+n}}{\alpha+n}.
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por $\dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)}$, podemos escrever

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)(-1)^n}{n!} \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{\alpha+n}\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Utilizando a Eq.(2.14) obtemos a Eq.(2.40) como queríamos mostrar. ■

Vamos agora utilizar o **Lema 2.9** para obter uma fórmula para a integral fracionária do produto de duas funções. Sejam f e g funções, supondo que as condições do lema acima são satisfeitas podemos escrever através da Eq.(2.40),

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}[fg](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (fg)^{(n)}(x) \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Usando a regra de Leibniz para o caso inteiro temos,

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha;\psi}[fg](x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x) \sum_{n=k}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}.
\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de índices $n \to n+k$ no segundo somatório, obtemos,

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}[fg](x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} g^{(n)}(x) \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{\alpha+n+k}}{\Gamma(\alpha+n+1+k)}.$$

Pela Eq.(2.16) temos,

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha;\psi}[fg](x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} \binom{-\alpha-k}{n} g^{(n)}(x) \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{\alpha+n+k}}{\Gamma(\alpha+n+1+k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} f^{(k)}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha-k}{n} g^{(n)}(x) \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{\alpha+n+k}}{\Gamma(\alpha+n+1+k)}.
\end{aligned}$$

Utilizando a Eq.(2.40) temos uma fórmula para a integral do produto de duas funções, a saber,

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}[fg](x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k} f^{(k)}(x) I_{a+}^{\alpha+k;\psi} g(x). \tag{2.41}$$

Consideramos $n=1$ e vamos utilizar a derivada ψ-Hilfer em termos das derivadas de ψ-Caputo, Eq.(2.38), assim

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\beta(\alpha-1)+1;\psi} I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha);\psi} f(x).$$

Vamos agora obter uma fórmula para a derivada ψ-Hilfer do produto de duas funções f e g,

$${}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} (fg)(x) = {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\beta(\alpha-1)+1;\psi} I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha);\psi} (fg)(x).$$

Pela Eq.(2.41) obtemos,

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} (fg)(x) &= {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\beta(\alpha-1)+1;\psi} \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k} f^{(k)}(x) I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k;\psi} g(x)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k} {}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\beta(\alpha-1)+1;\psi}\left[f^{(k)}(x) I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k;\psi} g(x)\right]. \end{aligned} \tag{2.42}$$

A generalização da regra de Leibniz para a derivada fracionária ψ-Caputo em termos da derivada ψ-Riemann-Liouville é

$${}^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\psi} (fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x)\, {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-k;\psi} g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{d^k}{dx^k}[f(x)g(x)](a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}[\psi(x)-\psi(a)]^{k-\alpha}.$$

Usando a regra de Leibniz para a derivada ψ-Caputo na Eq.(2.42) obtemos

$$\begin{aligned}&{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} (fg)(x)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k} \sum_{l=0}^{\infty}\binom{\beta(\alpha-1)+1}{l} f^{(k+l)}(x)\, {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\beta(\alpha-1)+1-l;\psi} I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k;\psi} g(x)\\ &- \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k} I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k;\psi} g(a) f^{(k)}(a) \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{-1-\beta(\alpha-1)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}.\end{aligned}$$

No primeiro somatório introduzimos a mudança $k+l=m$

$$\begin{aligned}&{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} (fg)(x)\\ &= \sum_{m=l}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{m-l}\binom{\beta(\alpha-1)+1}{l} f^{(m)}(x)\, {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\beta(\alpha-1)+1-l;\psi} I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)+m-l;\psi} g(x)\\ &- \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k} I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k;\psi} g(a) f^{(k)}(a) \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{-1-\beta(\alpha-1)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{m-l}\binom{\beta(\alpha-1)+1}{l} f^{(m)}(x)\, {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\beta(\alpha-1)+1-l;\psi} I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)+m-l;\psi} g(x)\\ &- \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k} I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k;\psi} g(a) f^{(k)}(a) \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{-1-\beta(\alpha-1)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}.\end{aligned}$$

Observemos que por definição podemos escrever (considerando $n = 1$),

$$^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\gamma-l;\psi} I_{a+}^{\mu-l;\psi} = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right) I_{a+}^{1-\gamma+l;\psi} I_{a+}^{\mu-l;\psi} = \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right) I_{a+}^{1-\gamma+\mu;\psi} = {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-\beta;\psi},$$

assim, para $\gamma = \beta(\alpha-1)+1$ e $\mu = (1-\beta)(1-\alpha)+m$, temos

$$^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\beta(\alpha-1)+1-l;\psi} I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)+m-l;\psi} g(x) = {}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi} g(x).$$

Logo, obtemos uma fórmula para a derivada de ψ-Hilfer do produto de duas funções, a saber,

$$\begin{aligned} & {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) \\ = & \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{m-l}\binom{\beta(\alpha-1)+1}{l} f^{(m)}(x)\,{}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi} g(x) \\ - & \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k} I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k;\psi} g(a) f^{(k)}(a) \frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{-1-\beta(\alpha-1)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}. \end{aligned}$$

Como caso particular, ao considerar $\beta \to 0$ e $\psi(x) = \ln x$, recuperamos uma fórmula para a derivada de Hadamard do produto de funções, a saber,

$$\mathtt{D}_{a+}^{\alpha} fg(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\binom{\alpha-1}{m} + \binom{\alpha-1}{m-1}\right] f^{(m)}(x)\,{}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi} g(x).$$

Pela Eq.(2.39) temos uma fórmula para a derivada de Erdélyi-Kober, sendo $\psi(x) = x^{\sigma}$

$$\begin{aligned} D_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha} fg(x) &= x^{-\sigma\eta}\,{}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,0;\psi} x^{-\sigma(\eta+\alpha)} fg(x) \\ &= x^{-\sigma\eta}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\binom{\alpha-1}{m} + \binom{\alpha-1}{m-1}\right]\frac{d^m}{dx^m}[x^{-\sigma(\eta+\alpha)} f(x)]\,{}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi} g(x). \end{aligned}$$

Utilizando a regra de Leibniz para o caso inteiro podemos escrever,

$$\begin{aligned} D_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha} fg(x) &= x^{-\sigma\eta}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\binom{\alpha-1}{m} + \binom{\alpha-1}{m-1}\right] \\ &\cdot \sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(-\sigma(\eta+\alpha)+1)}{\Gamma(-\sigma(\eta+\alpha)-k+1)} x^{-\sigma(\eta+\alpha)-k} f^{(m-k)}(x)\,{}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi} g(x) \\ &= x^{-\sigma(2\eta+\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\binom{\alpha-1}{m} + \binom{\alpha-1}{m-1}\right] \\ &\cdot \sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(-\sigma(\eta+\alpha)+1)}{\Gamma(-\sigma(\eta+\alpha)-k+1)} x^{-k} f^{(m-k)}(x)\,{}^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi} g(x). \end{aligned}$$

Portanto, a equação acima nos fornece uma fórmula para obtermos a derivada de Erdélyi-Kober do produto de duas funções em termos da derivada de ψ-Riemann-Liouville.

A fim de concluir este capítulo, direcionado às clássicas derivadas fracionárias, apresentamos, na tabela a seguir, as equações para as derivadas do produto de duas funções f e g, uma vez que as demais propriedades do critério de Ortigueira e Machado, foram discutidas no texto e para todas as formulações estão satisfeitas.

Tabela 1 – Regra de Leibniz para derivadas fracionárias.

Derivada Fracionária	**Regra de Leibniz**
Grünwald-Letnikov	${}_{GL}D^{\alpha}(fg)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} f^{(i)}(x)_{GL}D^{\alpha-i}g(x)$
Riemann-Liouville	$D^{\alpha}(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x)D^{\alpha-k}g(x)$
Caputo	${}_{*}D^{\alpha}(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} {}_{*}D^{k}f(x)_{*}D^{\alpha-k}g(x) + g(0)(f(x) - f(0))\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$
Hilfer	$D_{a\pm}^{\alpha,\mu}(fg)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)D_{a\pm}^{\alpha-m,\mu}g(x)$ $+ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-(1-\mu)(1-\alpha)}{k} I_{a\pm}^{k+(1-\mu)(1-\alpha)}g(a)(f^{(k)}(x) - f^{(k)}(a))\frac{(x-a)^{-\alpha\mu+\mu-1}}{\Gamma(\mu-\alpha\mu)}$
Weyl	$W_{\pm}^{\alpha}(fg)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} f^{(m)}(x)W_{\pm}^{\alpha-m}g(x)$
Chen	${}_{+}D_{c}^{\alpha}[fg](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} f^{(n)}(x)_{+}D_{c}^{\alpha-n}g(x)$
Jumarie	$D_{J}^{\alpha}[fg(x)] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} f^{(j)}(x)D_{J}^{\alpha-j}g(x)$, para $\alpha < 0$; $D_{J}^{\alpha}[fg(x)] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} f^{(j)}(x)D_{J}^{\alpha-j}g(x)$ $-\frac{x^{-\alpha}f(0)g(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} f^{(j)}(x)\frac{x^{-\alpha+j}g(0)}{\Gamma(1-\alpha+j)}$, para $\alpha > 0$.

Tabela 2 – Regra de Leibniz para derivadas fracionárias.

Derivada Fracionária	Regra de Leibniz
Hilfer-Katugampola	$^{\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta}(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\binom{-\beta(1-\alpha)}{n}\rho^{n+k}\frac{\Gamma(2-\rho)}{\Gamma(2-\rho-n)}x^{1-\rho-n}$ $^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{\beta(1-\alpha)+k}\left[f^{(k+1)}(x)^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{-\beta(1-\alpha)+n+1-\alpha}g(x)\right]$ $+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}\binom{-\beta(1-\alpha)}{m}\rho^{k+m}f^{(k+m)}(x)^{\rho}\mathscr{I}_{a+}^{m\,\rho}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha,\beta\,\rho}\mathscr{I}_{a+}^{k}g(x).$
ψ-Hilfer	$^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(fg)(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{m-l}\binom{\beta(\alpha-1)+1}{l}f^{(m)}(x)^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi}g(x)$ $-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-(1-\beta)(1-\alpha)}{k}I_{a+}^{(1-\beta)(1-\alpha)+k;\psi}g(a)f^{(k)}(a)\frac{[\psi(x)-\psi(a)]^{-1-\beta(\alpha-1)}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}$
Hadamard	$\mathtt{D}_{a+}^{\alpha}fg(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\binom{\alpha-1}{m}+\binom{\alpha-1}{m-1}\right]f^{(m)}(x)^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi}g(x).$
Erdélyi-Kober	$D_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha}fg(x) = x^{-\sigma(2\eta+\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\binom{\alpha-1}{m}+\binom{\alpha-1}{m-1}\right]\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(-\sigma(\eta+\alpha)+1)}{\Gamma(-\sigma(\eta+\alpha)-k+1)}x^{-k}f^{(m-k)}(x)^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-m;\psi}g(x).$
ψ-Caputo	$^{C}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\psi}(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}f^{(k)}(x)^{RL}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha-k;\psi}g(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{d^k}{dx^k}[f(x)g(x)](a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}[\psi(x)-\psi(a)]^{k-\alpha}$

Capítulo 3

Derivadas locais

Nesse capítulo apresentamos as derivadas "fracionárias" ditas locais, também conhecidas como derivadas fractais [27], que podem ser interpretadas como derivadas "fracionárias" especiais [38]. Aqui, vamos nos referir a tais derivadas simplesmente como derivadas locais, uma vez, que essas derivadas podem ser escritas em termos da derivada ordinária de ordem um, por isso evitaremos o termo "fracionária" [1]. Essas formulações são recentes e, em particular, cada uma delas foi introduzida associada a um particular problema. Para cada uma delas, vamos verificar a validade do critério proposto por Ortigueira e Machado [70]. Como vai ficar claro, no decorrer do texto, essas derivadas não cumprem todos os itens do critério em questão. Diante disso vamos propor um novo critério para as derivadas locais.

3.1 Derivada de Chen

Nessa seção apresentamos a derivada local conforme introduzida por Chen [26]. Essa formulação foi utilizada para modelar fenômenos de turbulência [25] e de difusão anômala [26].

Definição 3.1. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ uma função. A derivada de Chen de ordem $\alpha > 0$ de f é definida a partir do limite,*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} = \lim_{s \to x} \frac{f(x) - f(s)}{x^\alpha - s^\alpha}, \tag{3.1}$$

Ressaltamos que foi mantida, conforme a correspondente definição, a notação x ou t para a variável independente. Observemos que podemos escrever a derivada de Chen de forma alternativa como

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}, \tag{3.2}$$

onde a ($'$) denota derivada de ordem inteira em relação à variável x.

De fato, utilizando a regra de l'Hôpital temos

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} = \lim_{s\to x}\frac{f(x)-f(s)}{x^\alpha - s^\alpha} = \lim_{s\to x}\frac{-f'(s)}{-\alpha s^{\alpha-1}} = \frac{f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}.$$

Agora vamos mostrar que a derivada de Chen, conforme Eq.(3.1), não satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado, apresentado no Capítulo 1, pois não satisfaz quatro das cinco propriedades desse critério, conforme apresentamos a seguir.

Linearidade

Sejam f, g funções reais de variável real, a, b escalares e $\alpha > 0$. A derivada de Chen da combinação linear de f e g é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}[af+bg](x) &= \lim_{s\to x}\frac{[af+bg](x)-[af+bg](s)}{x^\alpha - s^\alpha}\\ &= \lim_{s\to x}\frac{af(x)+bg(x)-af(s)-bg(s)}{x^\alpha - s^\alpha}\\ &= a\lim_{s\to x}\frac{f(x)-f(s)}{x^\alpha - s^\alpha} + b\lim_{s\to x}\frac{g(x)-g(s)}{x^\alpha - s^\alpha}\\ &= a\frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} + b\frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha}.\end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Chen é um operador linear.

Derivada de ordem zero

A derivada de Chen de ordem zero é dada por,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^0} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\lim_{s\to x}\frac{f(x)-f(s)}{x^\alpha - s^\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \infty,$$

para obter o resultado acima utilizamos a regra de l'Hôpital. Observemos que a derivada de ordem zero de Chen não recupera a função e, portanto, não satisfaz essa propriedade do critério de Ortigueira e Machado.

Lei dos expoentes

Vamos mostrar que a derivada de Chen de ordem α de uma derivada de ordem β é diferente da derivada de ordem $\alpha+\beta$, sendo $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Temos, então pela Eq.(3.2),

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f(x)}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{f'(x)}{\beta x^{\beta-1}}\right] = \frac{\frac{\beta x^{\beta-1}f''(x)-\beta(\beta-1)x^{\beta-2}f'(x)}{\beta^2 x^{2\beta-2}}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{f''(x)-(\beta-1)x^{-1}f'(x)}{\alpha\beta x^{\alpha+\beta-2}}.$$

Por outro lado, também pela Eq.(3.2), podemos escrever,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^{\alpha+\beta}} = \frac{f'(x)}{(\alpha+\beta)x^{\alpha+\beta-1}}.$$

Portanto, confrontando com o resultado anterior, $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial f(x)}{\partial x^\beta} \neq \dfrac{\partial f(x)}{\partial x^{\alpha+\beta}}$, que justifica a não validade da lei dos expoentes.

Derivada de ordem inteira

Seja $n \in \mathbb{N}$. A derivada de ordem n de uma função f é dada por,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^n} = \lim_{s \to x} \frac{f(x) - f(s)}{x^n - s^n} = \lim_{s \to x} \frac{f'(s)}{ns^{n-1}} = \frac{f'(x)}{nx^{n-1}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, para $n = 1$ recuperamos a derivada de ordem um, já para $n \neq 1$, em geral, não recuperamos o caso inteiro.

Regra de Leibniz

Vamos agora calcular a derivada de Chen de ordem α do produto de duas funções f e g. Temos, a partir da definição,

$$\frac{\partial fg(x)}{\partial x^\alpha} = \lim_{s \to x} \frac{f(x)g(x) - f(s)g(s)}{x^\alpha - s^\alpha}.$$

Somando e subtraindo o termo $f(x)g(s)$ no numerador, podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{\partial fg(x)}{\partial x^\alpha} &= \lim_{s \to x} \frac{f(x)(g(x) - g(s)) - g(s)(f(x) - f(s))}{x^\alpha - s^\alpha} \\ &= f(x) \lim_{s \to x} \frac{g(x) - g(s)}{x^\alpha - s^\alpha} - g(x) \lim_{s \to x} \frac{f(x) - f(s)}{x^\alpha - s^\alpha} \\ &= f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha} + g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha}, \end{aligned}$$

portanto, vale a clássica regra de Leibniz.

Tendo em vista que a derivada de Chen só satisfaz uma das cinco propriedades do critério de Ortigueira e Machado, a saber, a linearidade, temos que essa derivada não pode ser considerada fracionária segundo tal critério.

3.2 Derivada compatível

Aqui, apresentamos a derivada e a integral locais denominadas compatíveis que foram propostas por Khalil e colaboradores [48] em 2014. Essa derivada tem sido utilizada em aplicações envolvendo mecânica de Newton [29], equação do calor [31] e usada na solução de equação diferencial não linear com condição inicial [14].

Definição 3.2. *Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $f(t)$ uma função real. A derivada local compatível de ordem α, sendo $0 < \alpha \leqslant 1$, de uma função f é dada por,*

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \tag{3.3}$$

para todo $t > 0$.

Observemos pela definição acima que se f for diferenciável então

$$T_\alpha f(t) = t^{1-\alpha} f'(t), \tag{3.4}$$

para $0 < \alpha \leqslant 1$ e $t > 0$. De fato, tomando $\delta = \varepsilon t^{1-\alpha}$ temos

$$\begin{aligned} T_\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\delta \to 0} \frac{f(t+\delta) - f(t)}{\delta t^{\alpha-1}} \\ &= t^{1-\alpha} \lim_{\delta \to 0} \frac{f(t+\delta) - f(t)}{\delta} \\ &= t^{1-\alpha} f'(t). \end{aligned}$$

Uma outra forma de mostrarmos que vale a Eq.(3.4) é através da regra de l'Hôpital,

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} t^{1-\alpha} f'(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = t^{1-\alpha} f'(t).$$

A **Definição 3.2** se refere a α no intervalo $(0, 1]$ que é o caso como foi introduzida em [48], no entanto podemos defini-la para um valor de α mais geral, quando $\alpha \in (n, n+1]$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.3. *A derivada local compatível de ordem α, sendo $n < \alpha \leqslant n+1$ com $n \in \mathbb{N}$, de uma função f é dada por,*

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(n)}(t + \varepsilon t^{n+1-\alpha}) - f^{(n)}(t)}{\varepsilon},$$

para todo $t > 0$.

Aqui, nessa seção, trabalharemos apenas com valores de α no intervalo $(0, 1]$. Apresentamos agora a definição para a integral.

Definição 3.4. *Sejam $t \in \mathbb{R}$, $f(t)$ uma função real e $0 < \alpha < 1$. A integral de ordem α, denotada por I^a_α, da função f começando em $a \geqslant 0$ é definida por*

$$I^a_\alpha f(t) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx,$$

com $t > a$.

Tendo em vista as definições da integral e derivada compatíveis temos que a integral fracionária é a inversa à direita da derivada, o que apresentamos no teorema a seguir.

Teorema 3.1. *Sejam $x \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leqslant 1$ e f uma função contínua, então*

$$T_\alpha I^a_\alpha f(t) = f(t),$$

para $t \geqslant a$.

Demonstração. Seja $\alpha \in (0,1]$, pela Eq.(3.4) podemos escrever,

$$T_\alpha I_\alpha^a f(t) = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}I_\alpha^a f(t) = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx = t^{1-\alpha}\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} = f(t).$$

■

Vamos agora verificar se a derivada compatível satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado, no sentido de ser uma derivada fracionária.

Linearidade

A derivada compatível é um operador linear. De fato, para f e g funções reais e a e b parâmetros escalares, temos

$$\begin{aligned} T_\alpha[af+bg](t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{af(t+\varepsilon t^{1-\alpha})+bg(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-af(t)-bg(t)}{\varepsilon} \\ &= a\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}+b\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-g(t)}{\varepsilon} \\ &= aT_\alpha f(t)+bT_\alpha g(t). \end{aligned}$$

Derivada de ordem zero

Pela Eq.(3.4) temos que $T_0 f(t) = tf'(t)$ e, portanto, não recupera a função f, não satisfazendo essa propriedade do critério. Para uma demonstração diferente desse resultado ver [45].

Lei dos expoentes

Vamos verificar se a integral compatível satisfaz a lei dos expoentes. Sejam $0<\alpha<1$ e $0<\mu<1$ assim, a partir de expressão para a integral, temos

$$I_\alpha^a I_\mu^a f(t) = \int_a^t \frac{I_\mu^a f(x)}{x^{1-\alpha}}dx = \int_a^t \frac{1}{x^{1-\alpha}}\left[\int_a^x \frac{f(y)}{y^{1-\mu}}dy\right]dx,$$

que, integrando por partes, fornece,

$$I_\alpha^a I_\mu^a f(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha}\int_a^t \frac{f(y)}{y^{1-\mu}}dy - \frac{1}{\alpha}\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\mu-\alpha}}dx = \frac{t^\alpha}{\alpha}I_\mu^a f(t) - \frac{1}{\alpha}I_{\mu+\alpha}^a f(t),$$

logo, a derivada local compatível não satisfaz a lei dos expoentes para $\alpha<0$ e $\mu<0$. Vamos agora verificar se essa derivada satisfaz tal lei para ordens maiores que zero. Sejam $0<\beta\leqslant 1$ e $0<\alpha\leqslant 1$ então pela Eq.(3.4) temos,

$$\begin{aligned} T_\alpha T_\beta f(t) &= T_\alpha(t^{1-\beta}f'(t)) \\ &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\left(t^{1-\beta}f'(t)\right) \\ &= t^{1-\alpha}\left((1-\beta)t^{-\beta}f'(t)+t^{1-\beta}f''(t)\right) \\ &= (1-\beta)t^{1-\alpha-\beta}f'(t)+t^{2-\alpha-\beta}f''(t), \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Por outro lado, também pela Eq.(3.4),

$$T_{\alpha+\beta} f(t) = t^{1-\alpha-\beta} f'(t).$$

Portanto, $T_\alpha T_\beta f(t) \neq T_{\alpha+\beta} f(t)$, não valendo a lei dos expoentes.

Derivada de ordem inteira

De fato, a derivada compatível de ordem um coincide com a derivada de ordem inteira. Basta tomarmos $n = 1$ na Eq.(3.4) e a integral compatível de ordem um também recupera a integral de f.

Regra de Leibniz - Generalização

Sejam f e g duas funções reais. Vamos agora calcular a derivada local compatível do produto dessas duas funções.

$$\begin{aligned}
T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t) + f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t) - f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})[g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)] + g(t)[f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\
&= f(t) T_\alpha g(t) + g(t) T_\alpha f(t),
\end{aligned}$$

ou seja, a derivada local compatível satisfaz a clássica regra de Leibniz.

Portanto, a derivada local compatível não satisfaz o critério de Ortigueira e Machado, uma vez que só estão satisfeitas as propriedades relacionadas à linearidade e à derivada de ordem inteira.

3.3 Derivada de Katugampola

Nessa seção apresentamos a derivada local definida por Katugampola [46] em 2014 e que foi utilizada em problemas de mecânica quântica [9]. Mostraremos que essa formulação não cumpre todas as propriedades do critério de Ortigueira e Machado.

Definição 3.5. *Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $f(t)$ uma função real. A derivada local de Katugampola de ordem α, sendo $0 < \alpha < 1$, de uma função f é dada por,*

$$D^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon}, \tag{3.5}$$

para todo $t > 0$.

Observemos que utilizando a regra de l'Hôpital temos que

$$D^\alpha f(t) = t^{1-\alpha} f'(t). \tag{3.6}$$

De fato, utilizando a regra de l'Hôpital e rearranjando, temos

$$D^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} t^{1-\alpha} e^{\varepsilon t^{-\alpha}} f'(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) = t^{1-\alpha} f'(t).$$

Katugampola [46] também definiu essa nova formulação para uma valor de α mais geral, quando $\alpha \in (n, n+1]$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.6. *Sejam $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $f(t)$ uma função real n vezes diferenciável. A derivada local de Katugampola de ordem α, sendo $n < \alpha \leqslant n+1$, da função f é dada por,*

$$D^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(n)}(te^{\varepsilon t^{n-\alpha}}) - f^{(n)}(t)}{\varepsilon},$$

para todo $t > 0$.

Observamos, de forma semelhante ao que fizemos na Eq.(3.6), através da **Definição 3.6** e da regra de l'Hôpital temos $D^\alpha f(t) = t^{1-\alpha+n} f^{(n+1)}(t)$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e f $n+1$ vezes diferenciável.

Nessa seção, trabalharemos apenas com valores de α no intervalo $(0, 1]$. Apresentamos agora a definição para a integral também proposta por Katugampola [46].

Definição 3.7. *Sejam $a \geqslant 0$, $t \geqslant a$ e $f(t)$ uma função real definida em $(a, t]$. A integral de ordem α, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, denotada por I_a^α, da função f é definida por*

$$I_a^\alpha f(t) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx, \tag{3.7}$$

com $t > a$.

Observemos que a integral de Katugampola e a integral compatível possuem a mesma expressão. Tendo em vista as definições da integral e derivada locais de Katugampola temos o teorema a seguir, que nos garante que a integral fracionária é a inversa à direita da derivada.

Teorema 3.2. *Sejam $a \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$ e f uma função contínua tal que $I_a^\alpha f(t)$ exista, então*

$$D^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t),$$

para $t \geqslant a$.

Demonstração. Análoga a demonstração do **Teorema 3.1**. ■

Como efetuado com as derivadas de Chen e compatível, vamos verificar a validade segundo o critério de Ortigueira e Machado.

Linearidade

De fato a derivada de Katugampola é um operador linear. Sejam as funções reais$f$ e g, os parâmetros a e b escalares e $0 < \alpha < 1$ assim,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}[af + bg](t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{af(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) + bg(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - af(t) - bg(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{a[f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)] + b[g(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - g(t)]}{\varepsilon} \\ &= aD^{\alpha}f(t) + bD^{\alpha}g(t) \end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Derivada de ordem zero

Pela Eq.(3.6) temos que $D^0 f(t) = tf'(t)$ e, portanto, não recupera a função f, não satisfazendo assim essa propriedade do critério de Ortigueira e Machado.

Lei dos expoentes

Como a expressão para a integral de Katugampola e a integral compatível são iguais, e a integral compatível não satisfaz a lei dos expoentes, temos que a integral de Katugampola também não a satisfaz.

Sejam $0 < \beta < 1$ e $0 < \alpha < 1$ então pela Eq.(3.6) temos,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}D^{\beta}f(t) &= D^{\alpha}(t^{1-\beta}f'(t)) \\ &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\left(t^{1-\beta}f'(t)\right) \\ &= t^{1-\alpha}\left((1-\beta)t^{-\beta}f'(t) + t^{1-\beta}f''(t)\right) \\ &= (1-\beta)t^{1-\alpha-\beta}f'(t) + t^{2-\alpha-\beta}f''(t), \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Por outro lado, também pela Eq.(3.6),

$$D^{\alpha+\beta} = t^{1-\alpha-\beta}f'(t).$$

Portanto, $D^{\alpha}D^{\beta}f(t) \neq D^{\alpha+\beta}f(t)$, logo, não vale a lei dos expoentes.

Derivada de ordem inteira

A derivada local de Katugampola de ordem um coincide com a derivada de ordem inteira. Para tal, basta tomarmos $\alpha = 1$ na Eq.(3.6).

Regra de Leibniz - Generalização

Sejam f e g funções reais de variável real. Vamos agora encontrar uma fórmula para a derivada local de Katugampola do produto dessas duas funções. Novamente pela Eq.(3.6) podemos escrever,

$$D^\alpha fg(t) = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}fg(t) = t^{1-\alpha}\left[f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\right] = g(t)D^\alpha f(t) + f(t)D^\alpha g(t).$$

Portanto, vale a clássica regra de Leibniz. Tendo em vista que apenas duas propriedades do critério de Ortigueira e Machado são satisfeitas, a saber, linearidade e derivada de ordem inteira, temos que essa derivada não cumpre tal critério.

3.4 Derivada M-fracionária

Recentemente, Souza e Oliveira [85] definiram uma derivada local como sendo uma generalização da derivada de Katugampola [46], apresentada na Seção 3.3, a chamada derivada M-fracionária.

Definição 3.8. *Sejam $t \in \mathbb{R}$ e f uma função real. A derivada M-fracionária de ordem α com $0 < \alpha < 1$ de uma função f, denotada por $\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} f(t)$, é dada por*

$$\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon}, \tag{3.8}$$

para todo $t > 0$, $\beta > 0$ sendo $E_\beta(t)$ a clássica função de Mittag-Leffler com um parâmetro, introduzida em 1903 por Gosta Mittag-Leffler [61],

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \tag{3.9}$$

com $Re(\alpha) > 0$.

Utilizando a regra de l'Hôpital podemos reescrever a derivada M-fracionária como

$$\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} f(t) = \frac{t^{1-\alpha} f'(t)}{\Gamma(\beta + 1)}, \tag{3.10}$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função gama. Para mostrar que vale a Eq.(3.10) precisaremos da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Em 1905, Wiman [101] generalizou a função de Mittag-Leffler, Eq.(3.9), introduzindo um segundo parâmetro, definindo assim a função $E_{\alpha,\beta}(x)$,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$.

Mostraremos agora, utilizando a regra que l'Hôpital, que vale a Eq.(3.10).

$$\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} f'(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) \frac{d}{d\varepsilon}[tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})]. \tag{3.11}$$

Vamos calcular separadamente a derivada de $E_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})$.

$$\frac{d}{d\varepsilon}[E_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})] = \frac{d}{d\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k t^{-\alpha k}}{\Gamma(\beta k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\varepsilon^{k-1}t^{-\alpha k}}{\Gamma(\beta k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{k-1}t^{-\alpha k}}{\beta\Gamma(\beta k)} = t^{-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varepsilon t^{-\alpha})^{k-1}}{\beta\Gamma(\beta k)}.$$

Considerando a mudança dos índices $k = m+1$ temos,

$$\frac{d}{d\varepsilon}[E_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})] = t^{-\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon t^{-\alpha})^m}{\beta\Gamma(\beta m+\beta)} = \frac{t^{-\alpha}}{\beta}E_{\beta,\beta}(\varepsilon t^{-\alpha}). \tag{3.12}$$

Assim pelas Eq.(3.11) e Eq.(3.12) temos

$$\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta}f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} f'(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}))\frac{t^{1-\alpha}}{\beta}E_{\beta,\beta}(\varepsilon t^{-\alpha}) = f'(tE_\beta(0))\frac{t^{1-\alpha}}{\beta}E_{\beta,\beta}(0).$$

Observemos que todos os termos do somatório,

$$E_\beta(0) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{0^k}{\Gamma(\beta k+1)},$$

serão nulos, exceto em $k = 0$, que vale 1. De modo análogo, todos os termos do somatório,

$$E_{\beta,\beta}(0) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{0^k}{\Gamma(\beta k+\beta)},$$

serão nulos, exceto em $k = 0$, que vale $\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}$. Assim,

$$\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta}f(t) = f'(t)\frac{t^{1-\alpha}}{\beta}\frac{1}{\Gamma(\beta)} = f'(t)\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Portanto, vale a Eq.(3.10). Agora apresentamos a definição da integral M-fracionária.

Definição 3.9. *A integral M-fracionária de ordem α, sendo $0 < \alpha < 1$, de uma função f é definida por,*

$$_M\mathscr{I}_a^{\alpha,\beta}f(t) = \Gamma(\beta+1)\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx, \tag{3.13}$$

sendo $a > 0$ e $t > a$.

Teorema 3.3. *Sejam $a \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ e f uma função de variável real. Então,*

$$\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta}(_M\mathscr{I}_a^{\alpha,\beta}f(t)) = f(t),$$

sendo $t \geqslant a$. Isto é, a derivada à esquerda da correspondente integral reproduz a própria função. Dizemos que, neste caso, uma é a inversa da outra.

Demonstração. Utilizando a Eq.(3.10) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta}({}_M\mathscr{I}_a^{\alpha,\beta}f(t)) &= \frac{t^{1-\alpha}\dfrac{d({}_M\mathscr{I}_a^{\alpha,\beta}f(t))}{dt}}{\Gamma(\beta+1)}\\
&= \frac{t^{1-\alpha}\Gamma(\beta+1)\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx}{\Gamma(\beta+1)}\\
&= t^{1-\alpha}\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}\\
&= f(t),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ∎

Em analogia as formulações anteriores, vamos verificar se a derivada M-fracionária cumpre o critério conforme proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

A derivada M-fracionária é um operador linear. Sejam f e g funções de variável real, a e b parâmetros escalares, $0<\alpha<1$ e $\beta>0$, assim, pela definição, temos,

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta}[af+bg](t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{af(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}))+bg(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}))-af(t)-bg(t)}{\varepsilon}\\
&= a\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}))-f(t)}{\varepsilon}+b\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}))-g(t)}{\varepsilon}\\
&= a\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta}f(t)+b\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta}g(t),
\end{aligned}$$

para todo $t>0$.

Derivada de ordem zero

Pela Eq.(3.10) a derivada M-fracionária de ordem zero de uma função f é dada por

$$\mathscr{D}_M^{0,\beta}f(t)=f'(t)\frac{t}{\Gamma(\beta+1)},$$

não recuperando, assim, a função f.

Lei dos expoentes

A derivada M-fracionária não satisfaz a lei dos expoentes. Sejam $0<\alpha<1$, $0<\gamma<1$ e $\beta>0$, assim pela Eq.(3.10) temos

$$\mathscr{D}_M^{\alpha+\gamma,\beta}f(t)=f'(t)\frac{t^{1-\alpha-\gamma}}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Por outro lado, também utilizando a Eq.(3.10) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta}\mathscr{D}_M^{\gamma,\beta}f(t) &= \mathscr{D}_M^{\alpha,\beta}[f'(t)\frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta+1)}] \\
&= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)}\frac{d}{dt}\left[f'(t)\frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta+1)}\right] \\
&= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)}\left[f''(t)\frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta+1)} + f'(t)\frac{(1-\gamma)t^{-\gamma}}{\Gamma(\beta+1)}\right].
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathscr{D}_M^{\alpha+\gamma,\beta}f(t) \neq \mathscr{D}_M^{\alpha,\beta}\mathscr{D}_M^{\gamma,\beta}f(t)$.

Vamos agora mostrar que a integral M-fracionária também não satisfaz a lei dos expoentes. Sejam $0<\alpha<1$ e $0<\mu<1$. Assim, a partir da definição da integral, temos

$$\begin{aligned}
{}_M\mathscr{I}_a^{\alpha,\beta}\,{}_M\mathscr{I}_a^{\mu,\beta}f(t) &= \Gamma(\beta+1)\int_a^t \frac{{}_M\mathscr{I}_a^{\mu,\beta}f(x)}{x^{1-\alpha}}dx \\
&= \Gamma(\beta+1)\int_a^t \frac{1}{x^{1-\alpha}}\left[\Gamma(\beta+1)\int_a^x \frac{f(y)}{y^{1-\mu}}dy\right]dx.
\end{aligned}$$

Integrando por partes temos,

$$\begin{aligned}
{}_M\mathscr{I}_a^{\alpha,\beta}\,{}_M\mathscr{I}_a^{\mu,\beta}f(t) &= [\Gamma(\beta+1)]^2\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\int_a^t \frac{f(y)}{y^{1-\mu}}dy - \frac{1}{\alpha}\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\mu-\alpha}}dx\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)t^\alpha}{\alpha}\,{}_M\mathscr{I}_a^{\mu,\beta}f(t) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{\alpha}\,{}_M\mathscr{I}_a^{\mu+\alpha,\beta}f(t),
\end{aligned}$$

logo, não vale a lei dos expoentes.

Derivada de ordem inteira

Seja $\beta>0$. A partir da Eq.(3.10) temos

$$\mathscr{D}_M^{1,\beta}f(t) = f'(t)\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Assim, a derivada M-fracionária de ordem um recupera a derivada primeira quando $\beta=1$. Ainda mais, a integral M-fracionária de ordem um também recupera a integral quando $\beta=1$. De fato, pela Eq.(3.13), temos

$${}_M\mathscr{I}_a^{1,\beta}f(t) = \Gamma(\beta+1)\int_a^t f(x)dx.$$

Regra de Leibniz - Generalização

Vamos agora calcular a derivada M-fracionária de ordem α com $0<\alpha<1$ do produto das duas funções de variável real f e g,

$$\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta}fg(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}))g((tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}))) - f(t)g(t)}{\varepsilon},$$

para todo $t > 0$ e sendo $\beta > 0$. Somando e subtraindo o termo $f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}))g(t)$ e rearranjando temos

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} fg(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha}))[g(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - g(t)] + g(t)[f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)]}{\varepsilon} \\ &= f(t)\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - g(t)}{\varepsilon} + g(t)\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(tE_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= f(t)\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} g(t) + g(t)\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} f(t),\end{aligned}$$

portanto, vale a clássica regra de Leibniz.

Assim, concluímos que, a derivada M-fracionária não cumpre o critério proposto por Ortigueira e Machado.

3.5 Derivada deformável

Nessa seção apresentaremos a derivada e a integral deformáveis [108]. Essa derivada foi introduzida tendo em vista que a derivada, como proposta por Khalil [48], a saber, a derivada local compatível, não inclui o zero como possibilidade para a ordem da derivada.

Definição 3.10. *Sejam $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ e f uma função de variável real. A derivada deformável de ordem α é definida por,*

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+\varepsilon\beta)f(t+\varepsilon\alpha) - f(t)}{\varepsilon} \tag{3.14}$$

sendo β tal que $\alpha + \beta = 1$.

Observemos que podemos escrever a Eq. (3.14) em termos da derivada ordinária de ordem um da seguinte forma,

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \beta f(t) + \alpha f'(t), \tag{3.15}$$

sendo f uma função diferenciável e $\beta + \alpha = 1$. De fato, pela Eq.(3.14), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+\varepsilon\beta)f(t+\varepsilon\alpha) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon\alpha) - f(t)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon\beta f(t+\varepsilon\alpha)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t+\varepsilon\alpha) - f(t)}{\varepsilon} + \beta f(t).\end{aligned}$$

Seja $h = \varepsilon\alpha$, assim, a partir da expressão anterior

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h\alpha^{-1}} + \beta f(t) = \beta f(t) + \alpha f'(t).$$

Portanto vale a Eq.(3.15).

Apesar de a ordem α da derivada estar entre zero e um, podemos estender a derivada deformável para $n < \alpha \leqslant n+1$, sendo $n \in \mathbb{N}$ [108], conforme definição a seguir.

Definição 3.11. *Sejam $n < \alpha \leqslant n+1$ e f uma função de variável real, n vezes diferenciável, sendo $n \in \mathbb{N}$. A derivada deformável de ordem α é dada por,*

$$\mathcal{D}^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1+\varepsilon\{\beta\}) f^{(n)}(t+\varepsilon\{\alpha\}) - f^{(n)}(t)}{\varepsilon}$$

sendo $\{\beta\}$ a parte fracionária de β e $\{\alpha\} + \{\beta\} = 1$.

A seguir apresentamos a integral, visando mostrar que esses operadores são um o inverso do outro.

Definição 3.12. *Seja f uma função de variável real e contínua em $[a,b]$. A integral de ordem α, sendo $0 < \alpha \leqslant 1$, denotada por, $\mathcal{I}_a^{\alpha} f$, é definida por*

$$\mathcal{I}_a^{\alpha} f(t) = \frac{e^{\frac{-\beta t}{\alpha}}}{\alpha} \int_a^t e^{\frac{\beta x}{\alpha}} f(x) dx,$$

sendo $\alpha + \beta = 1$.

Agora, vamos demonstrar o teorema que garante que a integral $\mathcal{I}_a^{\alpha}$ é o operador inverso da derivada deformável $\mathcal{D}^{\alpha}$.

Teorema 3.4. *Seja f uma função de variável real e contínua em $[a,b]$. Assim, temos*

$$\mathcal{D}^{\alpha}(\mathcal{I}_a^{\alpha} f(t)) = f(t),$$

sendo $0 < \alpha \leqslant 1$.

Demonstração. Pela Eq.(3.15) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\alpha}(\mathcal{I}_a^{\alpha} f(t)) &= \beta \mathcal{I}_a^{\alpha} f(t) + \alpha \frac{d}{dt} \mathcal{I}_a^{\alpha} f(t) \\
&= \beta \mathcal{I}_a^{\alpha} f(t) + \alpha \frac{d}{dt} \mathcal{I}_a^{\alpha} f(t) \\
&= \beta \mathcal{I}_a^{\alpha} f(t) + \frac{-\beta e^{\frac{-\beta t}{\alpha}}}{\alpha} \int_a^t e^{\frac{\beta x}{\alpha}} f(x) dx + e^{\frac{-\beta t}{\alpha}} e^{\frac{\beta t}{\alpha}} f(t) \\
&= \beta \mathcal{I}_a^{\alpha} f(t) - \beta \mathcal{I}_a^{\alpha} f(t) + e^0 f(t) \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

■

Em analogia às demais formulações de derivada vamos agora mostrar que a derivada deformável, conforme Eq.(3.14), não satisfaz o critério de Ortigueira e Machado.

Linearidade

De fato a derivada deformável é um operador linear, pois para f, g funções de variável real e a e b parâmetros escalares temos pela Eq.(3.14),

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\alpha}[af+bg](t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon\beta)[af+bg](t+\varepsilon\alpha)-[af+bg](t)}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a(1+\varepsilon\beta)f(t+\varepsilon\alpha)-af(t)+b(1+\varepsilon\beta)g(t+\varepsilon\alpha)-bg(t)}{\varepsilon}\\
&= a\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon\beta)f(t+\varepsilon\alpha)-f(t)}{\varepsilon}+b\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon\beta)g(t+\varepsilon\alpha)-g(t)}{\varepsilon}\\
&= a\mathcal{D}^{\alpha}f(t)+b\mathcal{D}^{\alpha}g(t).
\end{aligned}$$

Derivada de ordem zero

Tomando $\alpha=0$ na Eq.(3.14) temos que $\beta=1$, pois $\alpha+\beta=1$, assim

$$\mathcal{D}^{0}f(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)f(t)-f(t)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon f(t)}{\varepsilon}=f(t),$$

recuperando a função original.

Lei dos expoentes

Observemos pela Eq.(3.15) que para $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ e $0\leqslant\gamma\leqslant 1$ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\alpha}\mathcal{D}^{\gamma}f(t) &= \beta\mathcal{D}^{\gamma}f(t)+\alpha\frac{d}{dt}\mathcal{D}^{\gamma}f(t)\\
&= \beta\left(\phi f(t)+\gamma f'(t)\right)+\alpha\frac{d}{dt}\left(\phi f(t)+\gamma f'(t)\right)\\
&= \beta\left(\phi f(t)+\gamma f'(t)\right)+\alpha\left(\phi f'(t)+\gamma f''(t)\right),
\end{aligned}$$

sendo $\alpha+\beta=1$ e $\gamma+\phi=1$

A derivada deformável de ordem $\alpha+\gamma$, sendo $0\leqslant\alpha+\gamma\leqslant 1$ pode ser calculada utilizando a Eq.(3.15),

$$\mathcal{D}^{\alpha+\gamma}f(t)=\rho f(t)+(\alpha+\gamma)f'(t),$$

sendo $\alpha+\gamma+\rho=1$. Portanto, em geral, não vale a lei dos expoentes. Essa regra é satisfeita no caso em que $\gamma=0$ (o que implica em $\phi=1$).

A integral também não satisfaz essa lei. A fim de verificar, consideramos $0<\alpha\leqslant 1$ e $0<\gamma\leqslant 1$, logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_a^{\alpha}\mathcal{I}_a^{\gamma}f(t) &= \frac{e^{\frac{-\beta t}{\alpha}}}{\alpha}\int_a^t e^{\frac{\beta x}{\alpha}}\mathcal{I}_a^{\gamma}f(x)dx\\
&= \frac{e^{\frac{-\beta t}{\alpha}}}{\alpha}\int_a^t e^{\frac{\beta x}{\alpha}}\left[\frac{e^{\frac{-\phi x}{\gamma}}}{\gamma}\int_a^x e^{\frac{\phi y}{\gamma}}f(y)dy\right]dx\\
&= \frac{e^{\frac{-\beta t}{\alpha}}}{\alpha\gamma}\int_a^t e^{x\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\phi}{\gamma}\right)}\left[\int_a^x e^{\frac{\phi y}{\gamma}}f(y)dy\right]dx,
\end{aligned}$$

sendo $\alpha + \beta = 1$ e $\gamma + \phi = 1$. Integrando por partes podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_a^\alpha \mathcal{I}_a^\gamma f(t) &= \frac{e^{\frac{-\beta t}{\alpha}}}{\alpha\gamma}\left(\frac{e^{t\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\phi}{\gamma}\right)}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\phi}{\gamma}}\int_a^t e^{\frac{\phi y}{\gamma}} f(y)dy - \int_a^t \frac{e^{\frac{\beta x}{\alpha}}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\phi}{\gamma}} f(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\phi}{\gamma}\right)}\mathcal{I}_a^\gamma f(t) - \frac{1}{\gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\phi}{\gamma}\right)}\mathcal{I}_a^\alpha f(t) \neq \mathcal{I}_a^{\alpha+\gamma} f(t).
\end{aligned}$$

Derivada de ordem inteira

Se tomarmos a ordem α da derivada deformável igual a um temos que $\beta = 0$, uma vez que $\alpha + \beta = 1$. Assim, pela Eq.(3.15) a derivada deformável de ordem um coincide com a derivada primeira, $\mathcal{D}^1 f(t) = f'(t)$. Ainda mais, a integral de ordem um também recupera a integração ordinária, uma vez que $\alpha = 1$ implica em $\beta = 0$.

Regra de Leibniz - Generalização

Nessa seção veremos que a derivada deformável não satisfaz nem a clássica regra de Leibniz nem a generalização dessa regra. Sejam f e g funções de variável real e diferenciáveis e $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha fg(t) &= \beta f(t)g(t) + \alpha\frac{d[f(t)g(t)]}{dt} \\
&= \beta f(t)g(t) + \alpha[f'(t)g(t) + f(t)g'(t)] \\
&= g(t)(\beta f(t) + \alpha f'(t)) + \alpha f(t)g'(t) \\
&= g(t)\mathcal{D}^\alpha f(t) + \alpha f(t)g'(t).
\end{aligned}$$

Assim, a derivada deformável não satisfaz a generalização da regra de Leibniz. A regra clássica de Leibniz é satisfeita quando $\alpha g'(t) = \mathcal{D}^\alpha g(t) = \beta g(t) + \alpha g'(t)$, ou seja, quando $\beta = 0$ e $\alpha = 1$.

3.6 Beta-derivada

Nessa seção apresentamos as chamadas beta-derivada e beta-integral introduzidas em 2014 por Atangana e Goufo [12]. Essa formulação tem sido utilizada para problemas envolvendo métodos assintóticos [12] e em modelos descrevendo doenças infecciosas [13].

Definição 3.13. *Seja f uma função, tal que $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$. A beta-derivada da função f é dada por*

$$ {}_0^A D_x^\beta (f(x)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(x)}{\varepsilon}, \tag{3.16}$$

para todo $x \geqslant a$ e $\beta \in (0, 1]$.

De modo análogo ao que fizemos com as outras derivadas, podemos escrever a beta-derivada em termos da derivada de ordem um utilizando a regra de l'Hôpital,

$$
\begin{aligned}
{}_0^A D_x^\beta(f(x)) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f\left(x+\varepsilon\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(x)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'\left(x+\varepsilon\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) \\
&= \left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'(x). \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Apresentamos agora a definição da beta-integral.

Definição 3.14. *Seja f uma função, tal que $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$. A beta-integral da função f é definida por*

$$
{}_a^A I_x^\beta(f(x)) = \int_a^x \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(t)dt.
$$

O teorema a seguir, nos mostra que a beta-derivada à esquerda da beta-integral reproduz a própria função.

Teorema 3.5. *Seja f uma função contínua e diferenciável, tal que $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$. Então*

$$
\begin{gathered}
i)\ {}_0^A D_x^\beta\left({}_a^A I_x^\beta(f(x))\right) = f(x), \\
ii)\ {}_a^A I_x^\beta\left({}_0^A D_x^\beta(f(x))\right) = f(x)-f(a),
\end{gathered}
$$

para todo $x \geqslant a$.

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que vale *i)*. Utilizando a relação entre a beta-derivada e a derivada de ordem um, temos

$$
\begin{aligned}
{}_0^A D_x^\beta\left({}_a^A I_x^\beta(f(x))\right) &= \left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\frac{d}{dx}\int_a^x\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(t)dt \\
&= \left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

Vamos agora mostrar que vale *ii)*, utilizando novamente a relação entre a beta-derivada e a derivada de ordem um, Eq.(3.17), obtemos

$$
\begin{aligned}
{}_a^A I_x^\beta\left({}_0^A D_x^\beta(f(x))\right) &= \int_a^x\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} {}_0^A D_x^\beta(f(t))dt \\
&= \int_a^x\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'(t)dt \\
&= \int_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a),
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar. ∎

Vamos verificar se a beta-derivada satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam f, g funções de variável real e a e b parâmetros escalares. Assim,

$$\begin{aligned}
&{}_0^A D_x^\beta(af(x)+bg(x)) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{af\left(x+\varepsilon\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)+bg\left(x+\varepsilon\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-af(x)-bg(x)}{\varepsilon} \\
&= a\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(x+\varepsilon\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(x)}{\varepsilon}+b\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g\left(x+\varepsilon\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-g(x)}{\varepsilon} \\
&= a{}_0^A D_x^\beta(f(x))+b{}_0^A D_x^\beta(g(x)),
\end{aligned}$$

para todo $x \geqslant a$ e $\beta \in (0,1]$.

Portanto, a beta-derivada é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Tomando a ordem da beta-derivada tendendo a zero, temos, pela Eq.(3.17), o seguinte limite,

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to 0}{}_0^A D_x^\beta(f(x)) &= \lim_{\beta\to 0}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'(x) \\
&= xf'(x),
\end{aligned}$$

não recuperando, assim, a função f.

Lei dos expoentes

Seja $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$. Assim, para $x \geqslant a$ temos,

$$\begin{aligned}
{}_a^A I_x^\alpha {}_a^A I_x^\beta(f(x)) &= \int_a^x\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1}{}_a^A I_x^\beta(f(t))dt \\
&= \int_a^x\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1}\int_a^t\left(y+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(y)dydt.
\end{aligned}$$

Integrando por partes a equação acima temos,

$$\begin{aligned}
{}_a^A I_x^\alpha {}_a^A I_x^\beta(f(x)) &= \left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}-\left(a+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1}\left(a+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} \\
&- \int_a^x(\alpha-1)\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-2} f(t)dt \\
&\neq \int_a^x\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)^{\alpha+\beta-1} dt \\
&= {}_a^A I_x^{\alpha+\beta}(f(x)).
\end{aligned}$$

Portanto, a beta-integral não satisfaz a lei dos expoentes. Verificaremos agora se a beta-derivada satisfaz essa lei através da Eq.(3.17). Assim, para $\alpha \in (0,1]$ e $\beta \in (0,1]$, temos

$$\begin{aligned}
{}_0^A D_x^\alpha {}_0^A D_x^\beta (f(x)) &= \left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha} \frac{d}{dx} {}_0^A D_x^\beta (f(x)) \\
&= \left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha} \frac{d}{dx} \left(\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'(x) \right) \\
&= \left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha} \left[(1-\beta) \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{-\beta} f'(x) + \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f''(x) \right] \\
&\neq \left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)^{1-\alpha-\beta} f'(x) \\
&= {}_0^A D_x^{\alpha+\beta} (f(x)),
\end{aligned}$$

não satisfazendo a lei dos expoentes.

Derivada de ordem inteira

Vamos calcular a beta-derivada de ordem um de uma função f. Pela Eq.(3.16) temos,

$${}_0^A D_x^1 (f(x)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = f(x),$$

e, portanto, recupera o caso inteiro.

A beta-integral também recupera o caso inteiro quando a ordem é um, resultado imediato da definição da beta-integral.

Regra de Leibniz - Generalização

Sejam f e g funções de variável real e $\beta \in (0,1]$. A beta-derivada do produto dessas funções de ordem β é dada, através da Eq.(3.17), por

$$\begin{aligned}
{}_0^A D_x^\beta (fg(x)) &= \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} (fg)'(x) \\
&= \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) \\
&= {}_0^A D_x^\beta (f(x)) g(x) + f(x) {}_0^A D_x^\beta (g(x)).
\end{aligned}$$

Desse resultado, temos que a beta-derivada satisfaz a clássica regra de Leibniz. E, portanto, não cumpre o critério proposto por Ortigueira e Machado.

3.7 Derivada AGO

Nessa seção apresentamos a derivada local introduzida recentemente por Almeida e colaboradores [7], neste texto nos referimos a essa derivada por derivada AGO, onde cada letra representa a inicial do sobrenome dos autores. Essa derivada é uma generalização de duas outras derivadas que foram apresentadas anteriormente, a saber, a beta-derivada e a derivada compatível.

Definição 3.15. *Seja $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t) \neq 0$ sempre que $t > a$. Dada a função f e $\alpha \in (0,1)$, a derivada local de f de ordem α é definida por*

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon(k(t))^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}. \tag{3.18}$$

Observemos que se tomarmos $k(t) = t$ para todo $t > 0$ na derivada AGO, recuperamos a derivada compatível. Por outro lado, se tomarmos $k(t) = t + \dfrac{1}{\alpha}$ recuperamos a beta-derivada.

Podemos escrever a derivada AGO, Eq.(3.18), em termos da derivada de ordem um pela seguinte equação,

$$f^{(\alpha)}(t) = (k(t))^{1-\alpha} f'(t). \tag{3.19}$$

Utilizando a regra de l'Hôpital na Eq.(3.18) temos,

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} (k(t))^{1-\alpha} f'(t - \varepsilon(k(t))^{1-\alpha}) = (k(t))^{1-\alpha} f'(t).$$

Em analogia as formulações de derivada apresentadas anteriormente, vamos agora verificar se a derivada AGO satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam f, g funções de variável real, c e d parâmetros escalares, $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t) \neq 0$ e $\alpha \in (0,1)$. A derivada local AGO de $cf + dg$ de ordem α é dada pela **Definição 3.15** por

$$\begin{aligned}
(cf + dg)^{(\alpha)}(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{cf(t - \varepsilon(k(t))^{1-\alpha}) + dg(t - \varepsilon(k(t))^{1-\alpha}) - cf(t) - dg(t)}{\varepsilon} \\
&= c \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t - \varepsilon(k(t))^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} + d \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(t - \varepsilon(k(t))^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= cf^{(\alpha)}(t) + dg^{(\alpha)}(t),
\end{aligned}$$

portanto, a derivada local AGO é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Tomando $\alpha = 0$ na Eq.(3.19), podemos escrever,

$$f^{(0)}(t) = \lim_{\alpha \to 0} (k(t))^{1-\alpha} f'(t) = k(t) f'(t).$$

Dessa expressão, é evidente que a função f não é recuperada.

Lei dos expoentes

Sejam $k : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t) \neq 0$, $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta \in (0, 1)$ a derivada local AGO de ordem $\alpha + \beta$ é dada por

$$f^{(\alpha+\beta)}(t) = (k(t))^{1-\alpha-\beta} f'(t).$$

Por outro lado, a derivada local AGO de ordem α da derivada de ordem β é dada por

$$\begin{aligned}
(f^{(\beta)}(t))^{(\alpha)} &= (k(t))^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f^{(\beta)}(t) \\
&= (k(t))^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \left[(k(t))^{1-\beta} f'(t) \right] \\
&= (k(t))^{1-\alpha} \left[(1-\beta)(k(t))^{-\beta} f'(t) + (k(t))^{1-\beta} f''(t) \right] \\
&= (1-\beta)(k(t))^{1-\alpha-\beta} f'(t) + (k(t))^{2-\alpha-\beta} f''(t).
\end{aligned}$$

Portanto, não vale, em geral, a lei dos expoentes, uma vez que $(f^{(\beta)}(t))^{(\alpha)} \neq f^{(\alpha+\beta)}(t)$.

Derivada de ordem inteira

Tomando $\alpha \to 1$ na Eq.(3.19) temos,

$$f^{(1)}(t) = \lim_{\alpha \to 1} (k(t))^{1-\alpha} f'(t) = f'(t).$$

Portanto, a derivada local AGO de ordem inteira recupera o caso inteiro.

Regra de Leibniz - Generalização

Sejam f e g funções de variável real, $k : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t) \neq 0$, $\alpha \in (0, 1)$. A derivada local AGO de fg de ordem α é dada, através da Eq.(3.19), por

$$\begin{aligned}
(fg)^{(\alpha)}(t) &= (k(t))^{1-\alpha} \frac{d}{dt} fg(t) \\
&= (k(t))^{1-\alpha} (f'(t)g(t) + f(t)g'(t)) \\
&= g(t)f^{(\alpha)}(t) + f(t)g^{(\alpha)}(t).
\end{aligned}$$

Desse resultado, conclui-se que a derivada local AGO satisfaz a clássica regra de Leibniz.

Assim, a derivada local AGO não cumpre o critério proposto por Ortigueira e Machado uma vez que não satisfaz todas as propriedades desse critério.

3.8 Derivada generalizada

Nessa seção apresentamos a chamada derivada local generalizada definida recentemente por Akkurt e colaboradores [8]. Essa derivada generaliza as derivadas de Katugampola [46], AGO [7] e compatível [48].

Definição 3.16. *Seja $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t) \neq 0$ sempre que $t > a$. Dadas a função f e $\alpha \in (0,1)$, a derivada local generalizada de f de ordem α denotada por ${}_G D^\alpha f(t)$, é definida por*

$$ {}_G D^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f\left(t - k(t) + k(t) e^{\frac{\varepsilon (k(t))^{-\alpha}}{k'(t)}}\right) - f(t)}{\varepsilon}. \tag{3.20} $$

Se tomarmos $k(t) = t$ na Eq.(3.20) recuperamos a derivada de Katugampola. Para mostrar que a derivada generalizada recupera a derivada AGO vamos expandir a exponencial, a saber, $e^{\frac{\varepsilon (k(t))^{-\alpha}}{k'(t)}}$, em uma série de Maclaurin. Apenas os dois primeiros termos dessa série contribuirão, uma vez que tomaremos o limite com ε tendendo a zero. Assim,

$$ \begin{aligned} {}_G D^\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f\left(t + \frac{k(t)(k(t))^{-\alpha}}{k'(t)}\varepsilon - f(t)\right)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f\left(t + \left(\frac{(k(t))}{(k'(t))^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right)^{1-\alpha} \varepsilon - f(t)\right)}{\varepsilon}, \end{aligned} $$

tomando $\mu(t) = \dfrac{(k(t))}{(k'(t))^{\frac{1}{1-\alpha}}}$, recuperamos a derivada AGO. E para recuperar a derivada compatível basta tomarmos $\mu(t) = t$.

Podemos relacionar a derivada local generalizada, Eq.(3.20), com a derivada de ordem um pela seguinte equação,

$$ {}_G D^\alpha f(t) = \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)} f'(t). \tag{3.21} $$

De fato, utilizando a regra de l'Hôpital na Eq.(3.20) temos,

$$ \begin{aligned} {}_G D^\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} f'\left(t - k(t) + k(t) e^{\frac{\varepsilon (k(t))^{-\alpha}}{k'(t)}}\right) k(t) \frac{(k(t))^{-\alpha}}{k'(t)} e^{\frac{\varepsilon (k(t))^{-\alpha}}{k'(t)}} \\ &= \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)} f'(t). \end{aligned} $$

Apresentamos agora a definição da integral generalizada e em seguida mostraremos que essa integral é a inversa da derivada local generalizada.

Definição 3.17. *Sejam $a \geqslant 0$, $t \geqslant a$, $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t) \neq 0$ sempre que $t > a$. Dadas a função f, definida em $(a,t]$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, a integral generalizada de f de ordem α, denotada por ${}_G I^\alpha f(t)$ é definida por*

$$ {}_G I^\alpha f(t) = \int_a^t \frac{k'(x) f(x)}{(k(x))^{1-\alpha}} dx. $$

Teorema 3.6. *Sejam $a \geqslant 0$, $\alpha \in (0,1)$, f uma função contínua tal que ${}_GI^{\alpha}f$ exista e $k:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t)\neq 0$. Então, para todo $t>a$, temos,*

$${}_GD^{\alpha}({}_GI^{\alpha}f(t)) = f(t).$$

Demonstração. Pela Eq.(3.21) podemos escrever,

$$\begin{aligned}
{}_GD^{\alpha}({}_GI^{\alpha}f(t)) &= \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}\frac{d}{dt}({}_GI^{\alpha}f(t)) \\
&= \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}\frac{k'(t)f(t)}{(k(t))^{1-\alpha}} \\
&= f(t),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ∎

Enfim, em analogia as demais formulações, vamos verificar se a derivada generalizada satisfaz as cinco propriedades do critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

A derivada local generalizada é um operador linear. Sejam f e g funções de variável real, a e b parâmetros escalares, $0<\alpha<1$ e $k:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t)\neq 0$ sempre que $t>a$. Assim, pela **Definição 3.16**, temos

$$\begin{aligned}
&{}_GD^{\alpha}[af+bg](t) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{af\left(t-k(t)+k(t)e^{\frac{\varepsilon(k(t))^{-\alpha}}{k'(t)}}\right)+bg\left(t-k(t)+k(t)e^{\frac{\varepsilon(k(t))^{-\alpha}}{k'(t)}}\right)-af(t)-bg(t)}{\varepsilon} \\
&= a\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{af\left(t-k(t)+k(t)e^{\frac{\varepsilon(k(t))^{-\alpha}}{k'(t)}}\right)-f(t)}{\varepsilon}+b\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g\left(t-k(t)+k(t)e^{\frac{\varepsilon(k(t))^{-\alpha}}{k'(t)}}\right)-g(t)}{\varepsilon} \\
&= a\,{}_GD^{\alpha}f(t)+b\,{}_GD^{\alpha}g(t).
\end{aligned}$$

Derivada de ordem zero

Utilizando a Eq.(3.21) podemos escrever,

$${}_GD^{0}f(t) = \frac{k(t)}{k'(t)}f'(t).$$

Portanto, a derivada generalizada de ordem zero de uma função não recupera a função. Exceção à essa regra é o caso em que $k(t)=e^t$.

Lei dos expoentes

Sejam $k:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t)\neq 0$ sempre que $t>a$, $\alpha\in(0,1)$ e $\beta\in(0,1)$. A derivada generalizada de f de ordem $\alpha+\beta$ é dada, através da Eq.(3.21), por

$$ {}_GD^{\alpha+\beta}f(t) = \frac{(k(t))^{1-\alpha-\beta}}{k'(t)}f'(t). $$

Por outro lado, também pela Eq.(3.21), temos,

$$ \begin{aligned} {}_GD^{\alpha}{}_GD^{\beta}f(t) &= \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}\frac{d}{dt}{}_GD^{\beta}f(t) \\ &= \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{(k(t))^{1-\beta}}{k'(t)}f'(t)\right) \\ &= \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}\left(\frac{(1-\beta)(k(t))^{-\beta}(k'(t))^2-(k(t))^{1-\alpha}k''(t)}{(k'(t))^2}f'(t)+\frac{(k(t))^{1-\beta}}{k'(t)}f''(t)\right). \end{aligned} $$

Portanto, não vale a lei dos expoentes, pois ${}_GD^{\alpha+\beta}f(t) \neq {}_GD^{\alpha}{}_GD^{\beta}f(t)$. O mesmo ocorre com a integral generalizada, isto é,

$$ \begin{aligned} {}_GI^{\alpha}{}_GI^{\beta}f(t) &= \int_a^t \frac{k'(x){}_GI^{\beta}f(x)}{(k(x))^{1-\alpha}}dx \\ &= \int_a^t \frac{k'(x)}{(k(x))^{1-\alpha}}\left[\int_a^x \frac{k'(y)f(y)}{(k(y))^{1-\beta}}dy\right]dx. \end{aligned} $$

Integrando por partes podemos escrever,

$$ \begin{aligned} {}_GI^{\alpha}{}_GI^{\beta}f(t) &= \frac{(k(t))^{\alpha}}{\alpha}\int_a^t \frac{k'(y)f(y)}{(k(y))^{1-\beta}}dy - \int_a^t \frac{(k(x))^{\alpha}}{\alpha}\frac{k'(x)f(x)}{(k(x))^{1-\beta}}dx \\ &= \frac{(k(t))^{\alpha}}{\alpha}{}_GI^{\beta}f(t) - \frac{1}{\alpha}{}_GI^{\alpha+\beta}f(t). \end{aligned} $$

Não valendo, assim, a lei dos expoentes para a integral generalizada.

Derivada de ordem inteira

Tomando $\alpha = 1$ na Eq.(3.21) temos,

$$ {}_GD^{1}f(t) = \frac{f'(t)}{k'(t)}. $$

Assim, a derivada local generalizada de ordem inteira igual a um recupera o caso inteiro apenas quando $k'(t) = 1$, isto é, $k(t) = t + c$ com $c \in \mathbb{R}$. Já a integral generalizada de ordem n, sendo $n \in \mathbb{N}$, é dada, através da **Definição 3.17**, por

$$ {}_GI^{n}f(t) = \int_a^t \frac{k'(x)f(x)}{(k(x))^{1-n}}dx, $$

não generalizando assim o caso inteiro. Pois para generalizar o caso inteiro se faz necessário a função k ser de duas variáveis, o que difere da **Definição 3.17**, se $k(t,x) = \dfrac{t-x}{(-\Gamma(n))^{\frac{1}{n}}}$ teríamos $\dfrac{k'(t,x)}{(k(t,x))^{1-n}} = \dfrac{(t-x)^{n-1}}{\Gamma(n)}$, recuperando assim a fórmula integral de Cauchy.

Regra de Leibniz - Generalização

Sejam f e g funções de variável real. Vamos calcular a derivada local generalizada do produto dessas funções. Consideremos $k : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t) \neq 0$ sempre que $t > a$ e $\alpha \in (0, 1)$. Assim, a derivada local generalizada do produto fg, de ordem α, é dada através da Eq.(3.21), por

$$\begin{aligned} {}_{G}D^{\alpha} fg(t) &= \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)} \frac{d}{dt} fg(t) \\ &= \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)} \left(f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\right) \\ &= g(t)\,{}_{G}D^{\alpha} f(t) + f(t)\,{}_{G}D^{\alpha} g(t). \end{aligned}$$

Portanto, a derivada generalizada satisfaz a clássica regra de Leibniz.

Tendo em vista essas cinco propriedades acima apresentadas, temos que a derivada local generalizada não cumpre o critério proposto por Ortigueira e Machado.

3.9 Derivada $\mathcal{V}$-fracionária truncada

Nessa seção apresentamos a derivada $\mathcal{V}$-fracionária truncada introduzida por Souza e Oliveira [88]. Essa derivada está baseada na função de Mittag-Leffler de seis parâmetros. Então, antes de nos depararmos com tal definição, precisamos, primeiro, considerar alguns resultados envolvendo a função de Mittag-Leffler. Apresentamos a definição da função de Mittag-Leffler de seis parâmetros conforme definida em 2012, por Salim e Faraj [77].

Definição 3.18. *A função de Mittag-Leffler de seis parâmetros é definida pela seguinte série,*

$$E_{\gamma,\beta,p}^{\rho,\delta,q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\rho)_{kq}}{\Gamma(\gamma k + \beta)(\delta)_{kp}},$$

sendo $\gamma, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$, $Re(\gamma) + p \geqslant q$ *e* $(\rho)_{kq}$ *uma generalização do símbolo de Pochhammer, ou seja,* $(\rho)_{kq} = \dfrac{\Gamma(\rho + kq)}{\Gamma(\rho)}$.

Iremos, agora, considerar a função de Mittag-Leffler de seis parâmetros truncada da seguinte forma,

$${}_{i}E_{\gamma,\beta,p}^{\rho,\delta,q}(x) = \sum_{k=0}^{i} \frac{x^k (\rho)_{kq}}{\Gamma(\gamma k + \beta)(\delta)_{kp}},$$

sendo $\gamma, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ e $Re(\gamma) + p \geqslant q$.

Através da função de Mittag-Leffler truncada, em [88] define-se a função ${}_iH^{\rho,\delta,q}_{\gamma,\beta,p}$,

$$ {}_iH^{\rho,\delta,q}_{\gamma,\beta,p}(x) = \Gamma(\beta)\,{}_iE^{\rho,\delta,q}_{\gamma,\beta,p}(x) = \Gamma(\beta)\sum_{k=0}^{i}\frac{x^k(\rho)_{kq}}{\Gamma(\gamma k+\beta)(\delta)_{kp}}, $$

sendo $\gamma,\beta,\rho,\delta \in \mathbb{C}$, $p,q>0$, $Re(\beta)>0$, $Re(\gamma)>0$, $Re(\rho)>0$, $Re(\delta)>0$ e $Re(\gamma)+p \geqslant q$.

Tendo em vista os resultados acima apresentados temos, a seguir, a definição da derivada $\mathcal{V}$-fracionária truncada conforme proposta por Souza e Oliveira [88].

Definição 3.19. *Sejam $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ e $0<\alpha<1$. A derivada $\mathcal{V}$-fracionária truncada de ordem α, denotada por ${}^{\rho}_{i}\mathcal{V}^{\delta,p,q}_{\gamma,\beta,\alpha}$, é definida por*

$$ {}^{\rho}_{i}\mathcal{V}^{\delta,p,q}_{\gamma,\beta,\alpha}f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t\,{}_iH^{\rho,\delta,q}_{\gamma,\beta,p}(\varepsilon t^{-\alpha})\right)-f(t)}{\varepsilon}, \tag{3.22} $$

para todo $t>0$, sendo $\gamma,\beta,\rho,\delta\in\mathbb{C}$, $p,q>0$, $Re(\beta)>0$, $Re(\gamma)>0$, $Re(\rho)>0$, $Re(\delta)>0$ e $Re(\gamma)+p\geqslant q$.

Podemos escrever a derivada $\mathcal{V}$-fracionária truncada de ordem α sendo $0<\alpha<1$ em termos da derivada primeira da seguinte forma,

$$ {}^{\rho}_{i}\mathcal{V}^{\delta,p,q}_{\gamma,\beta,\alpha}f(t) \;=\; f'(t)\,\Gamma(\beta)\frac{t^{1-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q}. \tag{3.23} $$

Para mostrar que vale a Eq.(3.23) observemos primeiro que para $0<\alpha<1$, $\gamma,\beta,\rho,\delta\in\mathbb{C}$, $p,q>0$, $Re(\beta)>0$, $Re(\gamma)>0$, $Re(\rho)>0$, $Re(\delta)>0$ e $Re(\gamma)+p\geqslant q$ temos

$$ \begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}{}_iH^{\rho,\delta,q}_{\gamma,\beta,p}(\varepsilon t^{-\alpha}) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma(\beta)\,{}_iE^{\rho,\delta,q}_{\gamma,\beta,p}(x) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma(\beta)\sum_{k=0}^{i}\frac{(\varepsilon t^{-\alpha})^k(\rho)_{kq}}{\Gamma(\gamma k+\beta)(\delta)_{kp}}. \end{aligned} \tag{3.24} $$

Observemos que ao tomarmos o limite, ε tendendo a zero, o único termo do somatório que será diferente de zero será quando $k=0$ e nesse caso temos

$$ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\varepsilon t^{-\alpha})^k(\rho)_{kq}}{\Gamma(\gamma k+\beta)(\delta)_{kp}}\bigg|_{k=0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\rho)_0}{\Gamma(\beta)(\delta)_0} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}, \tag{3.25} $$

uma vez que $(\delta)_0=(\rho)_0=1$. Assim, pelas Eq.(3.24) e Eq(3.25) temos,

$$ \lim_{\varepsilon\to 0}{}_iH^{\rho,\delta,q}_{\gamma,\beta,p}(\varepsilon t^{-\alpha}) = 1. $$

Portanto, utilizando a regra de l'Hôpital na Eq.(3.22), temos

$$ \begin{aligned} {}^{\rho}_{i}\mathcal{V}^{\delta,p,q}_{\gamma,\beta,\alpha}f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}f'\left(t\,{}_iH^{\rho,\delta,q}_{\gamma,\beta,p}(\varepsilon t^{-\alpha})\right)\frac{d}{d\varepsilon}[t\,{}_iH^{\rho,\delta,q}_{\gamma,\beta,p}(\varepsilon t^{-\alpha})] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}f'\left(t\,{}_iH^{\rho,\delta,q}_{\gamma,\beta,p}(\varepsilon t^{-\alpha})\right)t\Gamma(\beta)\sum_{k=0}^{i}\frac{kt^{-\alpha}(\varepsilon t^{-\alpha})^{k-1}(\rho)_{kq}}{\Gamma(\gamma k+\beta)(\delta)_{kp}}. \end{aligned} $$

Observemos que ao tomarmos o limite, ε tendendo a zero, no somatório acima, apenas o termo $k = 1$ do somatório será diferente de zero e valerá $\dfrac{t^{-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q}$. Assim,

$$ {}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} f(t) \;=\; f'(t)\,\Gamma(\beta)\frac{t^{1-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q}, $$

como queríamos mostrar. Antes de abordarmos as propriedades do critério proposto por Ortigueira e Machado, apresentamos a definição de integral $\mathcal{V}$-fracionária [88].

Definição 3.20. *Sejam $a \geqslant 0$, $t \geqslant a$, f uma função definida em $(a, t]$ e $0 < \alpha < 1$. A integral $\mathcal{V}$-fracionária é dada por*

$$ {}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_p}{\Gamma(\beta)(\rho)_q}\int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx, $$

sendo $\gamma, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ e $Re(\gamma)+p \geqslant q$.

Teorema 3.7. *Sejam $a \geqslant 0$, $t \geqslant a$, f uma função contínua tal que ${}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} f(t)$ exista, então*

$$ {}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}\left({}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} f(t)\right) = f(t), $$

sendo $\gamma, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ e $Re(\gamma)+p \geqslant q$.

Demonstração. Usando a Eq.(3.23) temos

$$ \begin{aligned} {}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}\left({}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} f(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left({}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} f(t)\right)\Gamma(\beta)\frac{t^{1-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_p}{\Gamma(\beta)(\rho)_q}\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}\Gamma(\beta)\frac{t^{1-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q} \\ &= f(t), \end{aligned} $$

como queríamos mostrar. ■

Em analogia às formulações anteriores passamos agora a verificar se a derivada $\mathcal{V}$-fracionária satisfaz as cinco propriedades do critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam f e g funções de uma variável real, a, b parâmetros escalares. A derivada $\mathcal{V}$-fracionária de ordem α, sendo $0 < \alpha < 1$ da combinação linear das funções f e g é dada por,

$$ \begin{aligned} {}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}[af+bg](t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{af\left(t\,{}_{i}H_{\gamma,\beta,p}^{\rho,\delta,q}(\varepsilon t^{-\alpha})\right)+bg\left(t\,{}_{i}H_{\gamma,\beta,p}^{\rho,\delta,q}(\varepsilon t^{-\alpha})\right)-af(t)-bg(t)}{\varepsilon} \\ &= a\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t\,{}_{i}H_{\gamma,\beta,p}^{\rho,\delta,q}(\varepsilon t^{-\alpha})\right)-f(t)}{\varepsilon}+b\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g\left(t\,{}_{i}H_{\gamma,\beta,p}^{\rho,\delta,q}(\varepsilon t^{-\alpha})\right)-g(t)}{\varepsilon} \\ &= a\,{}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} f(t)+b\,{}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} g(t), \end{aligned} $$

para todo $t > 0$, $\gamma, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ e $Re(\gamma) + p \geqslant q$. Portanto, a derivada $\mathcal{V}$-fracionária é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Tomando $\alpha = 0$ na Eq.(3.23) temos

$$ {}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,0}^{\delta,p,q} f(t) \;=\; f'(t)\,\Gamma(\beta)\frac{t(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q}, $$

para todo $t > 0$, sendo $\gamma, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ e $Re(\gamma) + p \geqslant q$. Não recuperando a função $f(t)$.

Lei dos expoentes

Sejam α e μ tais que $0 < \alpha + \mu < 1$, assim, podemos escrever

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}\left({}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\mu}^{\delta,p,q} f(t)\right) &= \frac{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_p}{\Gamma(\beta)(\rho)_q}\int_a^t \frac{{}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\mu}^{\delta,p,q} f(x)}{x^{1-\alpha}}dx \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_p}{\Gamma(\beta)(\rho)_q}\int_a^t \frac{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_p}{\Gamma(\beta)(\rho)_q}\left[\int_a^x \frac{f(y)}{y^{1-\mu}}dy\right] x^{\alpha-1}dx. \end{aligned} $$

Integrando por partes temos,

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}\left({}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\mu}^{\delta,p,q} f(t)\right) &= \left[\frac{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_p}{\Gamma(\beta)(\rho)_q}\right]^2\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\int_a^t \frac{f(y)}{y^{1-\mu}}dy - \int_a^t \frac{y^\alpha f(y)}{\alpha y^{1-\mu}}dy\right) \\ &= \left[\frac{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_p}{\Gamma(\beta)(\rho)_q}\right]^2\frac{1}{\alpha}\int_a^t \frac{f(y)}{y^{1-\mu}}(t^\alpha - y^\alpha)dy \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_p}{\alpha\Gamma(\beta)(\rho)_q}\left(t^\alpha\,{}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\mu}^{\delta,p,q} f(t) - {}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\alpha+\mu}^{\delta,p,q} f(t)\right), \end{aligned} $$

sendo $\gamma, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ e $Re(\gamma)+p \geqslant q$. Portanto, ${}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\alpha+\mu}^{\delta,p,q} f(t) \neq {}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}\left({}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,\mu}^{\delta,p,q} f(t)\right)$ e não vale a lei dos expoentes.

Vamos agora verificar se a derivada $\mathcal{V}$-fracionária truncada satisfaz a lei dos expoentes, sejam $0 < \alpha < 1$ e $0 < \mu < 1$, pela Eq.(3.23) podemos escrever,

$$ \begin{aligned} {}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}\,{}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\mu}^{\delta,p,q} f(t) &= \frac{d}{dt}\left({}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\mu}^{\delta,p,q} f(t)\right)\frac{\Gamma(\beta)t^{1-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)\Gamma(\beta)t^{1-\mu}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q}\right)\frac{\Gamma(\beta)t^{1-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q} \\ &= \left[\frac{\Gamma(\beta)(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q}\right]^2 t^{1-\beta}\left(t^{1-\mu}f'(t) + (1-\mu)t^{-\mu}f'(t)\right). \end{aligned} $$

Por outro lado, novamente pela Eq.(3.23), temos

$$ {}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha+\mu}^{\delta,p,q} f(t) \;=\; f'(t)\frac{\Gamma(\beta)t^{1-\alpha-\mu}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q}, $$

portanto, não vale a lei dos expoentes para a derivada $\mathcal{V}$-fracionária truncada.

Derivada de ordem inteira

Tomando $\alpha = 1$ Eq.(3.23) temos

$$ {}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,1}^{\delta,p,q} f(t) = f'(t)\,\Gamma(\beta)\frac{(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q}. $$

Portanto a derivada $\mathcal{V}$-fracionária não recupera o caso inteiro, exceto no caso especial em que valha a expressão $\Gamma(\beta)\dfrac{(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q} = 1$, uma particular combinação dos parâmetros.

Já a integral $\mathcal{V}$-fracionária de ordem $\alpha = 1$ é dada por,

$$ {}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{\gamma,\beta,1}^{\delta,p,q} f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_p}{\Gamma(\beta)(\rho)_q}\int_a^t f(x)dx, $$

recuperando o caso inteiro apenas quando $\dfrac{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_p}{\Gamma(\beta)(\rho)_q} = 1$.

Regra de Leibniz - Generalização

Utilizando a Eq.(3.23) vamos obter uma fórmula para a derivada $\mathcal{V}$-fracionária do produto de duas funções. Sejam $f : [0,\infty] \to \mathbb{R}$, $g : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < 1$. Assim, para todo $t > 0$, sendo $\gamma,\beta,\rho,\delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ e $Re(\gamma) + p \geqslant q$, podemos escrever a derivada $\mathcal{V}$-fracionária truncada de ordem α sendo $0 < \alpha < 1$ em termos da derivada primeira da seguinte forma,

$$ \begin{aligned} {}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}[fg](t) &= \frac{d}{dt}\left(fg(t)\right)\Gamma(\beta)\frac{t^{1-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q} \\ &= \left(f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\right)\Gamma(\beta)\frac{t^{1-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q} \\ &= g(t)\,{}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} f(t) + f(t)\,{}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} g(t), \end{aligned} $$

para todo $t > 0$, sendo $\gamma,\beta,\rho,\delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ e $Re(\gamma) + p \geqslant q$. Assim vale a clássica regra de Leibniz.

3.10 Propriedades

Em resumo, apresentamos a Tabela 3 com as propriedades do critério proposto por Ortigueira e Machado que cada uma das derivadas locais, apresentadas e discutidas nesse capítulo, satisfazem.

Na tabela a seguir, apresentamos a regra que as derivadas locais, apresentadas nesse capítulo, satisfazem para a derivada do produto de duas funções. Observamos que todas, exceto a derivada deformável, satisfazem a clássica regra de Leibniz. Isso se dá devido à correspondência dessas derivadas com a derivada de ordem um[1] e o mesmo não ocorre

[1] Ver **Teorema A.2**.

Tabela 3 – Validade das propriedades do critério de Ortigueira e Machado para as derivadas locais. Aqui, o símbolo ✓representa que a propriedade é satisfeita, $\times$ que a propriedade não é satisfeita e $\diamond$ que ela é satisfeita para casos especiais.

	Operador linear	Derivada de ordem zero	Lei dos expoentes	Derivada de ordem inteira	Regra de Leibniz Generalização
Chen	✓	$\times$	$\times$	$\diamond$	$\times$
Compatível	✓	$\times$	$\times$	✓	$\times$
Katugampola	✓	$\times$	$\times$	✓	$\times$
M-fracionária	✓	$\times$	$\times$	✓	$\times$
Deformável	✓	✓	$\times$	✓	$\times$
Beta-derivada	✓	$\times$	$\times$	✓	$\times$
AGO	✓	$\times$	$\times$	✓	$\times$
Generalizada	✓	$\diamond$	$\times$	$\diamond$	$\times$
$\mathcal{V}$-fracionária truncada	✓	$\times$	$\times$	$\diamond$	$\times$

com a derivada deformável, pois, de acordo com a Eq.(3.15), essa está relacionada com a derivada de ordem um e com a função original. Segundo Tarasov [93] operadores lineares que satisfazem a clássica regra de Leibniz não podem representar derivadas fracionárias.

Tabela 4 – Regra de Leibniz para derivadas fracionárias.

Derivada Fracionária	**Regra de Leibniz**
Chen	$\dfrac{\partial fg(x)}{\partial x^\alpha} = f(x)\dfrac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha} + g(x)\dfrac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha}$
Conforme	$T_\alpha fg(t) = f(t)T_\alpha g(t) + g(t)T_\alpha f(t)$
Katugampola	$D^\alpha fg(t) = g(t)D^\alpha f(t) + f(t)D^\alpha g(t)$
M-fracionária	$\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} fg(t) = f(t)\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} g(t) + g(t)\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} f(t)$
Deformável	$\mathcal{D}^\alpha fg(t) = g(t)\mathcal{D}^\alpha f(t) + \alpha f(t)g'(t)$
Beta-derivada	${}_0^A D_x^\beta(fg(x)) = g(x){}_0^A D_x^\beta(f(x)) + f(x){}_0^A D_x^\beta(g(x))$
AGO	$(fg)^{(\alpha)}(t) = g(t)f^{(\alpha)}(t) + f(t)g^{(\alpha)}(t)$
Generalizada	${}_G D^\alpha fg(t) = g(t){}_G D^\alpha f(t) + f(t){}_G D^\alpha g(t)$
$\mathcal{V}$-fracionária truncada	${}_i^\rho\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}[fg](t) = g(t){}_i^\rho\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} f(t) + f(t){}_i^\rho\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q} g(t)$

3.11 Critério para uma derivada local

Tendo em vista que as derivadas locais apresentadas nesse capítulo não satisfazem o critério proposto por Ortigueira e Machado [70], aqui propomos um critério, também composto de cinco propriedades, que essas derivadas locais possam satisfazer, isto é, de modo a caracterizá-las como uma particular classe de derivadas.

$\boxed{\textit{Critério - Derivada local}}$

1. A derivada local é um operador linear;
2. A derivada local de ordem um deve produzir o mesmo resultado da primeira derivação ordinária;
3. A derivada local de uma constante é zero;
4. A clássica regra de Leibniz é satisfeita: $D^{\alpha}fg(t) = g(t)D^{\alpha}f(t) + f(t)D^{\alpha}g(t)$;
5. Vale a regra da cadeia: $D^{\alpha}f(g(t)) = (D^{\alpha}f)(g(t))g'(t)$.

Vamos mostrar que as derivadas apresentadas nesse capítulo satisfazem, em sua grande maioria, o critério acima proposto, para isso mostraremos apenas as propriedades da derivada de uma constante ser zero e a regra da cadeia, uma vez que as demais propriedades já foram mostradas nas seções anteriores.

3.11.1 Derivada de Chen

Vamos primeiro mostrar que a derivada de Chen de uma constante é zero. Seja c uma constante, assim pela Eq.(3.2), temos

$$\frac{\partial c}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\frac{d}{dx}c}{\alpha x^{\alpha-1}} = 0.$$

Mostraremos agora que a derivada de Chen satisfaz a regra da cadeia. Sejam f e g funções de uma variável real. Pela Eq.(3.2) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(g(x))}{\partial x^{\alpha}} &= \frac{\frac{d}{dx}f(g(x))}{\alpha g^{\alpha-1}(x)} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}\right)(g(x))g'(x). \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Chen cumpre o critério.

3.11.2 Derivada compatível

Vamos mostrar que a derivada compatível definida pela Eq.(3.3) cumpre o critério aqui proposto. Para isso vamos primeiro mostrar que a derivada de uma constante c é nula. Pela Eq.(3.4) e para $0 < \alpha \leqslant 1$, temos

$$T_{\alpha}c = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}c = 0,$$

para todo $t > 0$. Agora, mostraremos que vale a regra da cadeia. Sejam f e g funções de variável real e $0 < \alpha \leqslant 1$, pela Eq.(3.4) temos

$$\begin{aligned} T_\alpha f(g(t)) &= g^{1-\alpha}(t)\frac{d}{dt}f(g(t)) \\ &= g^{1-\alpha}(t)f'(g(t))g'(t) \\ &= (T_\alpha f)\,(g(t))g'(t). \end{aligned}$$

3.11.3 Derivada de Katugampola

Vamos primeiro mostrar que a derivada de Katugampola de ordem α, sendo $0 < \alpha < 1$, de uma constante c é zero. Pela Eq.(3.6) temos

$$D^\alpha c = t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}c = 0.$$

Novamente utilizando a Eq.(3.6) mostraremos que vale a regra da cadeia para a derivada de Katugampola. Sejam f e g funções de variável real e $0 < \alpha < 1$. Temos,

$$D^\alpha f(g(t)) \;=\; g^{1-\alpha}(t)\frac{d}{dt}f(g(t)) = g^{1-\alpha}(t)f'(g(t))g'(t) = (D^\alpha f)(g(t))g'(t).$$

Portanto, a derivada de Katugampola satisfaz as cinco propriedades do critério proposto nessa seção.

3.11.4 Derivada M-fracionária

Vamos agora calcular a derivada M-fracionária de uma constante c. Pela Eq.(3.10) temos

$$\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} c = \frac{t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}c}{\Gamma(\beta+1)} = 0,$$

para todo $t > 0$, $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 0$. Utilizando a Eq.(3.10) mostraremos que vale a regra da cadeia para a derivada M-fracionária. Sejam f e g funções de variável real, $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 0$. Temos,

$$\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} f(g(t)) = \frac{g^{1-\alpha}(t)\frac{d}{dt}[f(g(t))]}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{g^{1-\alpha}(t)f'(g(t))g'(t)}{\Gamma(\beta+1)} = \left(\mathscr{D}_M^{\alpha,\beta} f\right)(g(t))g'(t).$$

3.11.5 Derivada deformável

A derivada deformável não satisfaz o critério aqui proposto, uma vez que já vimos na Seção 3.5 que essa derivada não satisfaz a regra de Leibniz. Aqui, mostraremos que a derivada de uma constante não é nula e que também não satisfaz a regra da cadeia. Assim, as únicas propriedades desse critério que são satisfeitas são: a derivada de ordem um coincide com a derivada primeira e ser um operador linear. Vamos primeiro mostrar que a derivada de uma constante c não é nula. Pela Eq.(3.14) temos para $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$\mathcal{D}^{\alpha}c = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon\beta)c - c}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\beta c}{\varepsilon} = \beta c$$

sendo β tal que $\alpha + \beta = 1$. Portanto a derivada deformável de uma constante só será nula quando β for zero, ou seja, a ordem da derivada for um. Vamos agora obter uma fórmula para a derivada deformável de uma função composta através da Eq.(3.15),

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\alpha}f(g(t)) &= \beta f(g(t)) + \alpha\frac{d}{dt}f(g(t))\\ &= \beta f(g(t)) + \alpha f'(g(t))g'(t).\end{aligned}$$

Portanto, essa derivada não satisfaz a regra da cadeia. Exceto, no caso especial, onde $g'(x) = 1$.

3.11.6 Beta-derivada

Vamos primeiro calcular a beta-derivada de uma constante c. Pela Eq.(3.17) temos,

$$ {}_{0}^{A}D_{x}^{\beta}(c) = \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\frac{d}{dx}c = 0.$$

Vamos agora mostrar que a beta-derivada também satisfaz a regra da cadeia. Novamente pela Eq.(3.17) temos,

$$\begin{aligned}{}_{0}^{A}D_{x}^{\beta}(f(g(x))) &= \left(g(x) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\frac{d}{dx}f(g(x))\\ &= \left(g(x) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}f'(g(x))g'(x)\\ &= {}_{0}^{A}D_{x}^{\beta}(f)(g(x))g'(x).\end{aligned}$$

Assim, a beta-derivada também cumpre o critério aqui proposto.

3.11.7 Derivada AGO

A derivada AGO satisfaz tanto a propriedade da regra da cadeia quanto a propriedade da derivada de uma constante ser zero. De fato, para c constante e $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t) \neq 0$ temos, pela Eq.(3.19),

$$f^{(\alpha)}c = \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}\frac{d}{dt}c = 0.$$

Novamente pela Eq.(3.19) e $\alpha \in (0,1)$ temos

$$[f(g(t))]^{(\alpha)} = \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}\frac{d}{dt}f(g(t)) = \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}f'(g(t))g'(t) = f^{(\alpha)}(g(t))g'(t).$$

3.11.8 Derivada generalizada

Nessa seção mostraremos que a derivada generalizada satisfaz a regra da cadeia e que a derivada de uma constante é zero. Vamos primeiro encontrar a derivada de uma constante c. Pela Eq.(3.21) temos para $k : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que $k'(t) \neq 0$,

$$_{G}D^{\alpha}c = \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}\frac{d}{dt}c = 0.$$

Novamente pela Eq.(3.21) e $\alpha \in (0, 1)$ temos

$$_{G}D^{\alpha}f(g(t)) = \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}\frac{d}{dt}f(g(t)) = \frac{(k(t))^{1-\alpha}}{k'(t)}f'(g(t))g'(t) = ({}_{G}D^{\alpha}f)(g(t))g'(t),$$

valendo, assim, a regra da cadeia.

3.11.9 Derivada $\mathcal{V}$-fracionária truncada

Sejam c uma constante e $0 < \alpha < 1$. A derivada $\mathcal{V}$-fracionária de ordem α dessa constante c é dada através da Eq.(3.23) por

$${}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}f(t) = \frac{d}{dt}c\Gamma(\beta)\frac{t^{1-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q} = 0,$$

para todo $t > 0$, $\gamma, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ e $Re(\gamma) + p \geqslant q$. Portanto, a derivada $\mathcal{V}$-fracionária de ordem α de uma constante é zero, igual ao que ocorre no caso inteiro.

Agora vamos calcular a derivada $\mathcal{V}$-fracionária de ordem α de uma função composta. Sejam f e g funções de variável real e $0 < \alpha < 1$. Assim, pela Eq.(3.23) temos,

$$\begin{aligned}
{}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}f(g(t)) &= \frac{d}{dt}\left(f(g(t))\right)\Gamma(\beta)\frac{t^{1-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q} \\
&= f'(g(t))g'(t)\Gamma(\beta)\frac{t^{1-\alpha}(\rho)_q}{\Gamma(\gamma+\beta)(\delta)_q} \\
&= ({}_{i}^{\rho}\mathcal{V}_{\gamma,\beta,\alpha}^{\delta,p,q}f)(g(t))g'(t),
\end{aligned}$$

sendo $t > 0$, $\gamma, \beta, \rho, \delta \in \mathbb{C}$, $p, q > 0$, $Re(\beta) > 0$, $Re(\gamma) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\delta) > 0$ e $Re(\gamma) + p \geqslant q$. Portanto, a derivada $\mathcal{V}$-fracionária de ordem α satisfaz a regra da cadeia.

Em resumo, apresentamos a Tabela 5, com as cinco propriedades do critério, aqui proposto, que cada uma das derivadas locais, vistas nesse capítulo, satisfazem.

3.12 Outras formulações

Apresentamos agora mais algumas derivadas conhecidas na literatura como "fracionárias" locais, no entanto será apresentada apenas as suas definições e não mostraremos se estas cumprem os critérios propostos por Ortigueira e Machado [70].

Tabela 5 – Validade das propriedades do critério, aqui proposto, para as derivadas locais. Os símbolos ✓e ◇ representam que a propriedade é satisfeita e que ela é satisfeita para casos especiais, respectivamente.

	Operador linear	Derivada de ordem um	Derivada de uma constante	Regra de Leibniz	Regra da cadeia
Chen	✓	✓	✓	✓	✓
Compatível	✓	✓	✓	✓	✓
Katugampola	✓	✓	✓	✓	✓
M-fracionária	✓	✓	✓	✓	✓
Deformável	✓	✓	◇	◇	◇
Beta-derivada	✓	✓	✓	✓	✓
AGO	✓	✓	✓	✓	✓
Generalizada	✓	◇	✓	✓	✓
$\mathcal{V}$-fracionária truncada	✓	◇	✓	✓	✓

3.12.1 Derivada quântica

Como uma alternativa para a derivada de Grünwald-Letnikov, Ortigueira [68] apresenta a chamada derivada quântica. Tal derivada é valida para $t > 0$ (ou para $t < 0$) e pode ser usada para resolver problemas de variação de escala e sistemas de equações diferenciais do tipo Euler-Cauchy.

Definição 3.21. *A derivada quântica de ordem α para $t > 0$ é dada por*

$$D_q^\alpha f(t) = t^{-\alpha} \lim_{q\to 1} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j}_q (-1)^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} q^{-j\alpha} f(q^j t)}{(1-q)^\alpha}$$

sendo o coeficiente q-binomial dado por

$$\binom{\alpha}{j}_q = \frac{[\alpha]_q!}{[j]_q![\alpha-j]_q!} \tag{3.26}$$

onde, $[\alpha]_q = \dfrac{1-q^\alpha}{1-q}$.

Definição 3.22. *A derivada quântica de ordem α para $t < 0$ é dada por*

$$D_{q^{-1}}^\alpha f(t) = t^{-\alpha} \lim_{q\to 1} \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j}_q (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} f(q^{-j} t)}{(1-q^{-1})^\alpha}$$

sendo o coeficiente q-binomial dado pela Eq.(3.26).

3.12.2 Derivada de Kolwankar-Gangal

Em 1996, Kiran Kolwankar e Anil Gangal [52], definiram uma nova derivada local tendo como referência a formulação de derivada de Riemann-Liouville. Essa nova definicão foi utilizada pelos autores como ferramenta para o estudo de regularidades de funções [52].

Definição 3.23. *Sejam $0 < \alpha < 1$ e f uma função tal que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. As derivadas locais de Kolwankar-Gangal de ordem α, à direita e à esquerda, são das por*

$$\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha} f(y) = \lim_{x \to y\pm} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_y^x \frac{f(t) - f(y)}{(x-t)^{\alpha}} dt.$$

Em 1997, Kiran Kolwankar e Anil Gangal [53], generalizaram a definição acima para uma ordem α mais geral com $n - 1 < \alpha < n$, sendo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.24. *Sejam $n - 1 < \alpha < n$, com $n \in \mathbb{N}$ e f uma função tal que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. As derivadas locais Kolwankar-Gangal de ordem α, à direita e à esquerda, são dadas por*

$$\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha} f(y) = \lim_{x \to y\pm} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_y^x \frac{f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(t-y)^k}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

3.12.3 Derivada de Chen-Yan-Zhang

Tendo com base a derivada Kolwankar-Gangal [52], conforme **Definição 3.23**, Yan Chen, Ying Yan e Kewei Zhang [28] definiram uma versão mais fraca para a derivação local do que a derivada de Kolwankar-Gangal. Eles a chamaram de *singular integral difference-quotient local fractional derivative* aqui chamaremos essa formulacão de derivada de Chen-Yan-Zhang.

Definição 3.25. *Suponha que $f \in C(a, b)$. A derivada de Chen-Yan-Zhang à direita de ordem α, com $0 < \alpha < 1$, de f, denotada por $\boldsymbol{D}_{+}^{\alpha} f(y)$ com $y \in (a, b)$ é dada pela seguinte equação se o limite existe,*

$$\boldsymbol{D}_{+}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{h \to 0+} \int_0^1 (1-t)^{-\alpha} \frac{f(th + y) - f(y)}{h^{\alpha}} dt.$$

De modo semelhante, temos a definição da derivada de Chen-Yan-Zhang à esquerda de ordem α, com $0 < \alpha < 1$, de f, denotada por $\boldsymbol{D}_{-}^{\alpha} f(y)$ com $y \in (a, b)$,

$$\boldsymbol{D}_{-}^{\alpha} f(y) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{h \to 0+} \int_0^1 (1-t)^{-\alpha} \frac{f(y - th) - f(y)}{h^{\alpha}} dt.$$

No próximo capítulo apresentamos as derivadas com núcleo não singular, e análogo ao que fizemos com as derivadas clássicas e as locais, verificamos se tais derivadas cumprem o critério proposto por Ortigueira e Machado [70].

Capítulo 4

Derivadas com núcleo não singular

Nessa seção apresentamos as derivadas ditas "fracionárias"[1] com núcleo não singular, que emergiram na literatura a partir da derivada proposta por Caputo e Fabrizio [22]. Yang et al. [105] propuseram uma nova formulação envolvendo uma integral cujo núcleo é uma função não singular, a saber, uma função exponencial. Atangana e Baleanu [11] apresentaram duas novas formulações para a derivada baseada na derivada de Caputo-Fabrizio, cujo núcleo é dado por uma função de Mittag-Leffler. Apresentamos também uma formulação, que aqui chamamos de derivada generalizada, que tem como casos particulares as derivadas de Caputo-Fabrizio, Yang-Srivastava-Machado e Atangana-Baleanu. Novamente, Caputo e Fabrizio [23] propuseram uma nova formulação para a derivada, agora com núcleo gaussiano. Sun et al. [92] propõem duas novas formulações para a derivada sendo o núcleo uma exponencial. Yang, et al. [107] introduziram as derivadas do tipo Riemann-Liouville e Liouville-Caputo sendo o núcleo não singular funções de Mittag-Leffler de um, dois, três e quatro parâmetros. Yang [103] definiu duas novas formulações, as derivadas gerais do tipo Liouville-Caputo e do tipo Riemann-Liouville, ambas definições possue núcleo não singular. Enfim, Souza e Oliveira [90] definiram dois novos operadores com núcleo não singular e com ordem variável, no entanto tais operadores não serão aqui apresentados pois as derivadas com ordem variável fogem do objetivo desse trabalho.

Aqui, de modo semelhante ao que fizemos nos capítulos anteriores verificamos se esses operadores cumprem as propriedades do critério proposto por Ortigueira e Machado [70]. Uma dessas propriedades é a lei dos expoentes, também conhecida como propriedade de semigrupo, e está relacionada com a integral fracionária. No entanto, nem todos esses operadores têm definida uma integral fracionária, e quando isso ocorrer omitimos a verificação dessa propriedade.

---

[1] Apesar de na literatura encontrarmos o termo fracionário na definição das derivadas com núcleo não singular, mostramos que nenhuma destas formulações satisfazem o critério proposto por Ortigueira e Machado e, portanto, vamos eliminar o termo fracionário.

4.1 Derivada segundo Caputo-Fabrizio

Nesta seção introduzimos a integral e a derivada de Caputo-Fabrizio [22], cujo núcleo é não singular e verificamos se essa derivada cumpre o critério proposto por Ortigueira e Machado. Esse formulação tem sido utilizada em problemas de eletromagnetismo [23], difusão [34], circuito RL [96] e em modelos envolvendo a equação de relaxamento [92].

Definição 4.1. *Sejam $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ e $-\infty \leqslant a < t$ e $f \in H^1(a,b)$ com $b > a$. A derivada de Caputo-Fabrizio é dada por*

$$\mathscr{D}_t^{(\alpha)} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \dot{f}(\tau) e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}} d\tau, \tag{4.1}$$

sendo $M(\alpha)$ uma função de normalização tal que $M(0) = 1 = M(1)$ e a notação $\dot{f}$ é usada para denotar a derivada de ordem um.

Através da mudança $\sigma = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ e pela nova função de normalização $N(\sigma)$, sendo $N(0) = 1 = N(\infty)$, [22] também escreve a derivada de Caputo-Fabrizio como,

$$\mathscr{D}_t^{\left(\frac{1}{\sigma+1}\right)} f(t) = \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t \dot{f}(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{\sigma}} d\tau.$$

A integral conforme definida por Caputo-Fabrizio [22] com a normalização apresentada por Losada e Nieto [59] é dada por:

Definição 4.2. *Seja $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, a integral de Caputo-Fabrizio é dada por*

$$^{CF}I^{\alpha} f(t) = (1-\alpha) f(t) + \alpha \int_0^t f(\tau) d\tau. \tag{4.2}$$

Mostraremos que a derivada de Caputo-Fabrizio não satisfaz um dos itens do critério proposto por Ortigueira e Machado, a saber, a lei dos expoentes.

Linearidade

Sejam f e g funções e β e γ escalares. A derivada de Caputo-Fabrizio de ordem α sendo $\alpha \in [0,1]$ da combinação linear $\beta f + \gamma g$ é

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_t^{(\alpha)}(\beta f + \gamma g)(t) &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t (\beta f \dot{+} \gamma g)(\tau) e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}} d\tau \\
&= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t [\beta \dot{f}(\tau) + \gamma \dot{g}(\tau)] e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}} d\tau \\
&= \beta \mathscr{D}_t^{(\alpha)} f(t) + \gamma \mathscr{D}_t^{(\alpha)} g(t),
\end{aligned}$$

portanto, a derivada de Caputo-Fabrizio é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Tomando a ordem da derivada de Caputo-Fabrizio igual a zero, podemos escrever pela **Definição 4.1**

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_t^0 f(t) &= M(0)\int_a^t \dot{f}(\tau)e^0 d\tau \\ &= f(t) - f(a), \end{aligned} \tag{4.3}$$

assim, a derivada de Caputo-Fabrizio de ordem zero de uma dada função é a própria função desde que $f(a) = 0$.

Derivada de ordem inteira

A derivada e a integral de Caputo-Fabrizio recuperam o caso inteiro (ordem zero e um). De fato, pela Eq.(4.3) e considerando $f(a) = 0$ temos que a derivada de ordem zero recupera o caso inteiro, para $\alpha \to 1$ e considerando $\sigma = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ temos

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 1} \mathscr{D}_t^{(\alpha)} f(t) &= \lim_{\alpha\to 1} \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t \dot{f}(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}}d\tau \\ &= \lim_{\sigma\to 0}\frac{M\left(\frac{1}{1+\sigma}\right)}{1-\frac{1}{1+\sigma}}\int_a^t \dot{f}(\tau)e^{-\frac{t-\tau}{\sigma}}d\tau \\ &= \int_a^t \dot{f}(\tau)\left[\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\frac{\sigma}{1+\sigma}}e^{-\frac{t-\tau}{\sigma}}\right]d\tau \\ &= \int_a^t \dot{f}(\tau)\left[\lim_{\sigma\to 0}\frac{1+\sigma}{\sigma}e^{-\frac{t-\tau}{\sigma}}\right]d\tau \\ &= \int_a^t \dot{f}(\tau)\left[\lim_{\sigma\to 0}\frac{e^{-\frac{t-\tau}{\sigma}}}{\sigma}\right]d\tau \\ &= \int_a^t \dot{f}(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \\ &= \dot{f}(t).\end{aligned}$$

Portanto, as derivadas de Caputo-Fabrizio de ordem zero e um são as derivadas de ordem inteira zero e um, no caso em que $f(a) = 0$. Agora mostramos que a integral de Caputo-Fabrizio também recupera o caso inteiro. Pela **Definição 4.2** podemos escrever a integral de ordem zero como,

$$^{CF}I^0 f(t) = (1-0)f(t) + 0\int_0^t f(s)ds = f(t).$$

E a integral de ordem um,

$$^{CF}I^1 f(t) = (1-1)f(t) + 1\int_0^t f(s)ds = \int_0^t f(s)ds.$$

Portanto, a derivada de Caputo-Fabrizio recupera o caso inteiro.

Lei dos expoentes

Nessa seção mostramos que a integral de Caputo-Fabrizio não satisfaz a lei dos expoentes para quaisquer valores de α e β. De fato,

$$\begin{aligned}
& {}^{CF}I^{\alpha}\,{}^{CF}I^{\beta}f(t) \\
= \; & (1-\alpha)^{CF}I^{\beta}f(t)+\alpha\int_0^t {}^{CF}I^{\beta}f(s)ds \\
= \; & (1-\alpha)(1-\beta)f(t)+(1-\alpha)\beta\int_0^t f(s)ds+\alpha\int_0^t\left[(1-\beta)f(s)+\beta\int_0^s f(\tau)d\tau\right]ds \\
= \; & (1-\alpha)(1-\beta)f(t)+(1-\alpha)\beta\int_0^t f(s)ds+\alpha(1-\beta)\int_0^t f(s)ds+\alpha\beta\int_0^t\int_0^s f(\tau)d\tau ds \\
= \; & (1-\alpha)(1-\beta)f(t)+(\beta+\alpha-2\alpha\beta)\int_0^t f(s)ds+\alpha\beta\int_0^t\int_0^s f(\tau)d\tau ds \\
= \; & (1-\alpha-\beta)f(t)+(\beta+\alpha)\int_0^t f(s)ds+\alpha\beta\left[f(t)+\int_0^t\int_0^s f(\tau)d\tau ds-2\int_0^t f(s)ds\right] \\
= \; & {}^{CF}I^{\alpha+\beta}f(t)+\alpha\beta\left[f(t)+\int_0^t(t-s)f(s)ds-2\int_0^t f(s)ds\right] \\
= \; & {}^{CF}I^{\alpha+\beta}f(t)+\alpha\beta\left[f(t)+\int_0^t(t-s-2)f(s)ds\right].
\end{aligned}$$

Em geral, ${}^{CF}I^{\alpha CF}I^{\beta}f(t)\neq{}^{CF}I^{\alpha+\beta}f(t)$, exceto quando α ou β é zero. Assim, não vale a lei dos expoentes para a derivada de Caputo-Fabrizio.

Regra de Leibniz - Generalização

Recentemenete, Ortigueira e Machado [71] afirmam que a derivada de Caputo-Fabrizio não é uma derivada fracionária e não satisfaz a regra de Leibniz.

De forma direta, para $f,g\in H^1(a,b)$, $b>a$ e $\alpha\in[0,1]$ podemos calcular a derivada de Caputo-Fabrizio de ordem α do produto de duas funções f e g através da equação

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_t^{(\alpha)}(fg)(t) &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t(\dot{fg})(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}}d\tau \\
&= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t[\dot f(\tau)g(\tau)+f(\tau)\dot g(\tau)]e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}}d\tau \\
&= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t\dot f(\tau)g(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}}d\tau+\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t f(\tau)\dot g(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}}d\tau
\end{aligned}$$

Na Seção 4.4 será apresentada uma derivada, cuja notação utilizada será ${}^{GC}D_t^{\alpha,\beta}$, que generaliza a derivada de Caputo-Fabrizio. Lá vamos obter uma fórmula do tipo Leibniz para a derivada do produto de duas funções, Eq.(4.16), e como caso particular obtemos a fórmula do tipo Leibniz para a derivada de Caputo-Fabrizio. Sejam $f,g\in H^1(a,b)$ funções analíticas, $b > a$ e $\alpha \in [0, 1]$ assim vale a regra do tipo Leibniz,

$$\mathscr{D}_t^{(\alpha)}(fg)(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty}\binom{-k}{s} f^{(s)}(t) I_{b+}^{k+s} g(t) - \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} e^{-\alpha\frac{(t-b)}{1-\alpha}} f(b)g(b),$$

onde $M(\cdot)$ representa uma função normalização tal que $M(0) = 1 = M(1)$ e I_{b+}^{α} a integral de Riemann-Liouville de ordem α à direita.

4.2 Derivada de Atangana-Baleanu

Atangana e Baleanu [11] apresentaram duas novas formulações, uma do tipo Caputo outra do tipo Riemann-Liouville, para derivada baseada na derivada de Caputo-Fabrizio [22]. Essas formulações foram utilizadas em aplicações de ciência térmica, em modelos de transferência de calor [11], em modelos de fuido [80] e no oscilador tipo Irving-Mullineux [35].

Definição 4.3. *Sejam $f \in H^1(a, b)$ (espaço de Sobolev), $b > a$ e $\alpha \in [0, 1]$, então a derivada segundo Atangana-Baleanu do tipo Caputo, denotada por ${}^{ABC}{}_bD_t^{\alpha}$ é dada por*

$$ {}^{ABC}{}_bD_t^{\alpha}(f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\int_b^t f'(x) E_{\alpha}\left(-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha}\right) dx, \tag{4.4}$$

sendo $B(\alpha)$ uma função de normalização com $B(0) = 1 = B(1)$ e $E_{\alpha}(\cdot)$, a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Observemos que se considerarmos a ordem da derivada, α, igual a zero, não recuperamos a função original, ao menos que $f(b)$ seja nula. Pois pela Eq.(4.4) temos,

$$ {}^{ABC}{}_bD_t^{0}(f(t)) = B(0)\int_b^t f'(x) E_0(0)\, dx = \int_b^t f'(x) dx = f(t) - f(b).$$

Para evitar que isso ocorra, Atangana e Baleanu [11], apresentam uma nova definição.

Definição 4.4. *Sejam $f \in H^1(a, b)$, $b > a$ e $\alpha \in [0, 1]$, a derivada segundo Atangana-Baleanu do tipo Riemann-Liouville, denotada por ${}^{ABR}{}_bD_t^{\alpha}$, é dada por*

$$ {}^{ABR}{}_bD_t^{\alpha}(f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_b^t f(x) E_{\alpha}\left(-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha}\right) dx, \tag{4.5}$$

sendo $B(\alpha)$ uma função de normalização com $B(0) = 1 = B(1)$ e $E_{\alpha}(\cdot)$, a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Pela Eq.(4.5) temos que a derivada de Atangana-Baleanu ${}^{ABR}bD_t^{\alpha}$ de ordem zero recupera a função original. De fato,

$$ {}^{ABR}{}_bD_t^{0}(f(t)) = B(0)\frac{d}{dt}\int_b^t f(x) E_0(0)\, dx = \frac{d}{dt}\int_b^t f(x) dx = f(t).$$

Uma outra diferença entre as duas definições é em relação a derivada de uma constante, uma vez que ${}^{ABC}{}_bD_t^\alpha(c) = 0$, sendo c uma constante, o que não ocorre em ${}^{ABR}{}_bD_t^\alpha(c)$.

Agora apresentamos uma fórmula que relaciona as duas derivadas de Atangana-Baleanu, a saber, ${}_b^{ABR}D_t^\alpha$ e ${}_b^{ABC}D_t^\alpha$. Vamos considerar f uma função analítica assim $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!}$. E, portanto, podemos escrever pela Eq.(4.5),

$$ {}^{ABR}{}_bD_t^\alpha(f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_b^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(t-x)^n(-1)^n}{n!} E_\alpha\left(-\alpha\frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha}\right)dx. $$

Escrevendo explicitamente a função de Mittag-Leffler e rearranjando temos,

$$ \begin{aligned} {}^{ABR}{}_bD_t^\alpha(f(t)) &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!\Gamma(\alpha k+1)}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k \int_b^t (t-x)^{\alpha k+n}dx \\ &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!\Gamma(\alpha k+1)}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k \frac{(t-b)^{\alpha k+n+1}}{\alpha k+n+1}. \end{aligned} $$

Derivando termo a termo obtemos,

$$ \begin{aligned} {}^{ABR}{}_bD_t^\alpha(f(t)) &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\alpha k+1)(\alpha k+n+1)}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k f^{(n+1)}(t)(t-b)^{\alpha k+n+1} \\ &+ \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\alpha k+1)}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k f^{(n)}(t)(t-b)^{\alpha k+n} \\ &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\alpha k+1)}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k f^{(n+1)}(t)\int_b^t (t-x)^{\alpha k+n}dx \\ &+ \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}E_\alpha\left(-\alpha\frac{(t-b)^\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}(t)(t-b)^n. \end{aligned} $$

Como estamos considerando f uma função analítica temos que

$$ f(b) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^{(n)}(t)(t-b)^n}{n!}. $$

Logo,

$$ \begin{aligned} {}^{ABR}{}_bD_t^\alpha(f(t)) &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\int_b^t \frac{(-1)^n f^{(n+1)}(t)(t-x)^n E_\alpha\left(-\alpha\frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha}\right)}{n!}dx \\ &+ \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}E_\alpha\left(-\alpha\frac{(t-b)^\alpha}{1-\alpha}\right)f(b) \\ &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\int_b^t f'(t)E_\alpha\left(-\alpha\frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha}\right)dx + \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}E_\alpha\left(-\alpha\frac{(t-b)^\alpha}{1-\alpha}\right)f(b). \end{aligned} $$

Então, podemos relacionar as duas derivadas através da equação,

$$ {}^{ABR}{}_bD_t^\alpha(f(t)) = {}^{ABC}{}_bD_t^\alpha(f(t)) + \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}E_\alpha\left(-\alpha\frac{(t-b)^\alpha}{1-\alpha}\right)f(b). \tag{4.6} $$

Apresentamos agora a definição da integral associada à derivada de Atangana-Baleanu, também proposta em [11].

Definição 4.5. *Seja $\alpha \in [0,1]$. A integral segundo Atangana-Baleanu, denotada por ${}^{AB}{}_{a}I_t^{\alpha}$, é dada por*

$$ {}^{AB}{}_{a}I_t^{\alpha}(f(t)) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\alpha-1}dy, \tag{4.7}$$

sendo $B(\alpha)$ a função normalização.

De madeira semelhante ao que fizemos com a derivada de Caputo-Fabrizio, vamos agora verificar se as derivadas de Atangana-Baleanu satisfazem as propriedades do critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam f e g funções tais que $f \in H^1(a,b)$ e $g \in H^1(a,b)$, $b > a$, $\alpha \in [0,1]$ e c e d parâmetros escalares. Vamos primeiro mostrar que a derivada segundo Atangana-Baleanu ${}^{ABC}{}_{b}D_t^{\alpha}$ é um operador linear. De fato,

$$\begin{aligned} {}^{ABC}{}_{b}D_t^{\alpha}(cf(t)+dg(t)) &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\int_b^t (cf'(x)+dg'(x))E_{\alpha}\left(-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha}\right)dx \\ &= c\,{}^{ABC}{}_{b}D_t^{\alpha}(f(t)) + d\,{}^{ABC}{}_{b}D_t^{\alpha}(g(t)), \end{aligned}$$

pois a integral é um operador linear. Vamos agora mostrar que a derivada de Atangana-Baleanu ${}^{ABR}{}_{b}D_t^{\alpha}$ também é um operador linear,

$$\begin{aligned} {}^{ABR}{}_{b}D_t^{\alpha}(cf(t)+dg(t)) &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_b^t (cf(x)+dg(x))E_{\alpha}\left(-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha}\right)dx \\ &= c\,{}^{ABR}{}_{b}D_t^{\alpha}(f(t)) + d\,{}^{ABR}{}_{b}D_t^{\alpha}(g(t)), \end{aligned}$$

uma vez que tanto a derivada ordinária de ordem um, quanto a integral são operadores lineares.

Derivada de ordem zero

Sejam $f \in H^1(a,b)$ e $b > a$. Conforme já mencionado a derivada segundo Atangana-Baleanu ${}^{ABC}{}_{b}D_t^{\alpha}$ de ordem zero só recupera a função original se $f(b) = 0$ e a derivada ${}^{ABR}{}_{b}D_t^{\alpha}$ de ordem zero recupera a função original.

Derivada de ordem inteira

Vamos agora verificar se as derivadas de Atangana-Baleanu de ordem um coincidem com a derivação ordinária. Comecemos com a ${}^{ABC}{}_{b}D_t^{\alpha}$. Pela **Definição 4.3** e de maneira análoga ao que fizemos com a derivada de Caputo-Fabrizio, consideramos $\sigma = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$,

$$\begin{aligned}
{}^{ABC}{}_{b}D_{t}^{1}(f(t)) &= \lim_{\alpha\to 1}\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\int_{b}^{t} f'(x)E_{\alpha}\left(-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha}\right)dx \\
&= \lim_{\sigma\to 0}\frac{B\left(\frac{1}{1+\sigma}\right)}{1-\frac{1}{1+\sigma}}\int_{a}^{t} f'(x)E_{\frac{1}{\sigma+1}}\left(-\frac{(t-x)^{\frac{1}{\sigma+1}}}{\sigma}\right)dx \\
&= \lim_{\sigma\to 0}\int_{a}^{t} f'(x)\left[\lim_{\sigma\to 0}\frac{1+\sigma}{\sigma}e^{-\frac{t-x}{\sigma}}\right]dx \\
&= \lim_{\sigma\to 0}\int_{a}^{t} f'(x)\left[\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{t-x}{\sigma}}\right]dx \\
&= \int_{a}^{t} f'(x)\delta(t-x)dx \\
&= f'(t),
\end{aligned}$$

recuperando assim o caso inteiro. Agora vamos mostrar que a derivada ${}^{ABR}{}_{b}D_{t}^{1}(f(t))$ também recupera a derivada de ordem um. De fato, de maneira análoga ao que fizemos com a derivada ${}^{ABR}{}_{b}D_{t}^{1}(f(t))$, ao tomarmos $\sigma = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ temos,

$$\begin{aligned}
{}^{ABR}{}_{b}D_{t}^{1}(f(t)) &= \lim_{\alpha\to 1}\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_{b}^{t} f(x)E_{\alpha}\left(-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha}\right)dx \\
&= \lim_{\sigma\to 0}\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_{a}^{t} f(x)E_{\frac{1}{\sigma+1}}\left(-\frac{(t-x)^{\frac{1}{\sigma+1}}}{\sigma}\right)dx \\
&= \lim_{\sigma\to 0}\frac{d}{dt}\int_{a}^{t} f(x)\left[\lim_{\sigma\to 0}\frac{1+\sigma}{\sigma}e^{-\frac{t-x}{\sigma}}\right]dx \\
&= \lim_{\sigma\to 0}\frac{d}{dt}\int_{a}^{t} f(x)\left[\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{t-x}{\sigma}}\right]dx \\
&= \frac{d}{dt}\int_{a}^{t} f(x)\delta(t-x)dx \\
&= \frac{d}{dt}f(t).
\end{aligned}$$

Por outro lado, a integral recupera o caso inteiro. Ao tomarmos $\alpha = 0$ na Eq.(4.7) temos imediatamente que

$${}^{AB}{}_{a}I_{t}^{0}(f(t)) = f(t),$$

e se tomarmos $\alpha = 1$ obtemos

$${}^{AB}{}_{a}I_{t}^{1}(f(t)) = \int_{a}^{t} f(y)dy.$$

Lei dos expoentes

Sejam $\alpha, \beta \in [0,1]$, iremos mostrar que a integral segundo Atangana-Baleanu não satisfaz a lei dos expoentes. Assim,

$$\begin{aligned}
& {}^{AB}{}_aI_t^{\alpha AB}{}_aI_t^{\beta}(f(t)) \\
= & \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} I_t^{\beta}(f(t)) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t I_t^{\beta}(f(y))(t-y)^{\alpha-1}dy \\
= & \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} I_t^{\beta}(f(t)) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t I_t^{\beta}(f(y))(t-y)^{\alpha-1}dy \\
= & \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \left[\frac{1-\beta}{B(\beta)} f(t) + \frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(y)(t-y)^{\beta-1}dy\right] \\
+ & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left[\frac{1-\beta}{B(\beta)} f(y) + \frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)} \int_a^y f(\tau)(y-\tau)^{\beta-1}d\tau\right](t-y)^{\alpha-1}dy \\
= & \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \left[\frac{1-\beta}{B(\beta)} f(t) + \frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(y)(t-y)^{\beta-1}dy\right] \\
+ & \frac{\alpha-\alpha\beta}{B(\alpha)B(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(y)(t-y)^{\alpha-1}dy \\
+ & \frac{\alpha\beta}{B(\alpha)B(\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^y f(\tau)(y-\tau)^{\beta-1}(t-y)^{\alpha-1}d\tau dy.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Vamos resolver em separado a integral

$$\int_a^t \int_a^y f(\tau)(y-\tau)^{\beta-1}(t-y)^{\alpha-1}d\tau dy.$$

Considerando a mudança na ordem das integrais podemos escrever,

$$\int_a^t \int_a^y f(\tau)(y-\tau)^{\beta-1}(t-y)^{\alpha-1}d\tau dy = \int_a^t \int_\tau^t f(\tau)(y-\tau)^{\beta-1}(t-y)^{\alpha-1}dy d\tau.$$

Seja $b = y - \tau$, assim

$$\begin{aligned}
\int_a^t \int_a^y f(\tau)(y-\tau)^{\beta-1}(t-y)^{\alpha-1}d\tau dy &= \int_a^t f(\tau) \int_0^{t-\tau} b^{\beta-1}(t-\tau-b)^{\alpha-1}dy d\tau \\
&= \int_a^t f(\tau) \int_0^{t-\tau} b^{\beta-1}(t-\tau)^{\alpha-1}\left(1-\frac{b}{t-\tau}\right)^{\alpha-1} db d\tau \\
&= \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^{t-\tau} b^{\beta-1}\left(1-\frac{b}{t-\tau}\right)^{\alpha-1} db d\tau.
\end{aligned}$$

Consideremos agora a mudança $u = \dfrac{b}{t-\tau}$ podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\int_a^t \int_a^y f(\tau)(y-\tau)^{\beta-1}(t-y)^{\alpha-1}d\tau dy &= \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} du d\tau \\
&= \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) d\tau,
\end{aligned}$$

sendo $B(\alpha,\beta)$ a função beta. Usando a relação entre as funções gama e beta temos,

$$\int_a^t \int_a^y f(\tau)(y-\tau)^{\beta-1}(t-y)^{\alpha-1} d\tau dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau. \tag{4.9}$$

Portanto, pelas Eq.(4.8) e Eq.(4.9) temos

$$\begin{aligned}
&{}^{AB}{}_aI_t^{\alpha}\,{}^{AB}{}_aI_t^{\beta}(f(t)) \\
= & \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\left[\frac{1-\beta}{B(\beta)}f(t) + \frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\beta-1}dy\right] \\
& + \frac{\alpha-\alpha\beta}{B(\alpha)B(\beta)\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\alpha-1}dy \\
& + \frac{\alpha\beta}{B(\alpha)B(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}d\tau \\
= & \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{B(\alpha)B(\beta)}f(t) + \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{B(\alpha)B(\beta)\Gamma(\beta)} + \frac{\alpha-\alpha\beta}{B(\alpha)B(\beta)\Gamma(\alpha)}\right]\int_a^t f(y)(t-y)^{\beta-1}dy \\
& + \frac{\alpha\beta}{B(\alpha)B(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}d\tau.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Por outro lado, pela **Definição 4.5** e considerando $\alpha+\beta \in [0,1]$ temos,

$${}^{AB}{}_aI_t^{\alpha+\beta}(f(t)) = \frac{1-\alpha-\beta}{B(\alpha+\beta)}f(t) + \frac{\alpha+\beta}{B(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\alpha+\beta-1}dy,$$

o que implica em

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\alpha+\beta-1}dy = \frac{B(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\,{}^{AB}{}_aI_t^{\alpha+\beta}(f(t)) - \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}f(t). \tag{4.11}$$

Assim pelas Eq.(4.10) e Eq.(4.11) temos

$$\begin{aligned}
&{}^{AB}{}_aI_t^{\alpha}\,{}^{AB}{}_aI_t^{\beta}(f(t)) \\
= & \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{B(\alpha)B(\beta)}f(t) + \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{\Gamma(\beta)} + \frac{\alpha(1-\beta)}{\Gamma(\alpha)}\right]\frac{1}{B(\alpha)B(\beta)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\beta-1}dy \\
& + \frac{\alpha\beta}{B(\alpha)B(\beta)}\left[\frac{B(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}\,{}^{AB}{}_aI_t^{\alpha+\beta}(f(t)) - \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}f(t)\right] \\
= & \frac{\alpha\beta B(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)B(\alpha)B(\beta)}\,{}^{AB}{}_aI_t^{\alpha+\beta}(f(t)) + \frac{(\alpha+\beta)(1-\alpha)(1-\beta)-\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)B(\alpha)B(\beta)}f(t) \\
& + \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{\Gamma(\beta)} + \frac{\alpha(1-\beta)}{\Gamma(\alpha)}\right]\frac{1}{B(\alpha)B(\beta)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\beta-1}dy.
\end{aligned}$$

E, portanto, não vale a lei dos expoentes.

Regra de Leibniz - Generalização

Na Seção 4.4 serão apresentadas as derivadas ${}^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}$ e ${}^{GC}D_t^{\alpha,\beta}$ que generalizam as derivadas de Atangana-Baleanu do tipo Riemann-Liouville e Caputo, respectivamente.

Lá vamos obter uma fórmula do tipo Leibniz para a derivada do produto de duas funções, a saber, as Eq.(4.15) e Eq.(4.16) e como caso particular obtemos as fórmulas do tipo Leibniz para as derivadas de Atangana-Baleanu. Assim, para $f, g \in H^1(a,b)$ funções analíticas, $b > a$ e $\alpha \in [0,1]$ temos as equações,

$$\begin{aligned} {}^{ABC}{}_bD_t^{\alpha}(fg(t)) &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\alpha k}{s} f^{(s)}(t) I_{b+}^{\alpha k+s} g(t) \\ &- \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}E_{\alpha}\left(-\alpha\frac{(t-b)^{\alpha}}{1-\alpha}\right) f(b)g(b). \end{aligned}$$

$${}^{ABR}{}_bD_t^{\alpha}(fg(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\alpha k}{s} f^{(s)}(t) I_{b+}^{\alpha k+s} g(t),$$

onde $B(\cdot)$ representa uma função normalização tal que $B(0) = 1 = B(1)$ e I_{b+}^{α} a integral de Riemann-Liouville de ordem α à direita.

4.3 Derivada segundo Yang-Srivastava-Machado

Nessa seção apresentamos a derivada introduzida em [105], tal derivada foi definida como uma extensão da derivada de Riemann-Liouville com núcleo singular e foi utilizada na modelagem do fluxo de calor [104, 105]. Apresentamos agora a sua definição.

Definição 4.6. *Seja $0 < \alpha < 1$ um número real. A derivada de Yang-Srivastava-Machado é dada por*

$${}^{YSM}D_{a+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{R(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dx}\int_a^x f(\tau) e^{-\frac{\alpha(x-\tau)}{1-\alpha}} d\tau, \tag{4.12}$$

sendo $a \leqslant x$ e $R(\alpha)$ uma função de normalização tal que $R(0) = 1 = R(1)$.

Ao introduzir a mudança $\sigma = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ temos que $0 < \sigma < \infty$ uma vez que $0 < \alpha < 1$ e podemos reescrever a derivada de Yang-Srivastava-Machado como

$${}^{YSM}D_{a+}^{\left(\frac{1}{\sigma+1}\right)} f(x) = \frac{S(\sigma)}{\sigma}\frac{d}{dx}\int_a^x f(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)}{\sigma}} d\tau,$$

sendo $S(\sigma)$ uma nova normalização tal que $S(\sigma) = (\sigma+1)R\left(\dfrac{1}{\sigma+1}\right)$.

Verificamos agora se a derivada acima definida cumpre o critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam f e g funções reais de variáveis reais e c e d parâmetros escalares, a derivada de Yang-Srivastava-Machado da combinação linear $cf(x) + dg(x)$ é dada através da **Definição 4.6** por

$$\begin{aligned}{}^{YSM}D^{(\alpha)}_{a+}[cf(x)+dg(x)] &= \frac{cR(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dx}\int_a^x f(\tau)e^{-\frac{\alpha(x-\tau)}{1-\alpha}}d\tau + \frac{dR(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dx}\int_a^x g(\tau)e^{-\frac{\alpha(x-\tau)}{1-\alpha}}d\tau \\ &= c^{YSM}D^{(\alpha)}_{a+}f(x) + d^{YSM}D^{(\alpha)}_{a+}g(x),\end{aligned}$$

sendo $a \leqslant x$ e portanto, a derivada de Yang-Srivastava-Machado é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Ao considerarmos a ordem da derivada igual a zero recuperamos a função original, de fato,

$${}^{YSM}D^{(0)}_{a+}f(x) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{R(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dx}\int_a^x f(\tau)e^{-\frac{\alpha(x-\tau)}{1-\alpha}}d\tau = \frac{d}{dx}\int_a^x f(\tau)d\tau = f(x).$$

Derivada de ordem inteira

Mostraremos agora que quando consideramos a ordem da derivada de Yang-Srivastava-Machado igual a um recuperamos o caso inteiro, ou seja, a derivada de ordem um. Observemos pela mudança $\sigma = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ que σ tende a zero quando α tende a um, assim

$$\begin{aligned}{}^{YSM}D^{(1)}_{a+}f(x) &= \lim_{\alpha\to 1}\frac{R(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dx}\int_a^x f(\tau)e^{-\frac{\alpha(x-\tau)}{1-\alpha}}d\tau \\ &= \lim_{\sigma\to 0}\frac{S(\sigma)}{\sigma}\frac{d}{dx}\int_a^x f(\tau)e^{-\frac{(x-\tau)}{\sigma}}d\tau = f'(x).\end{aligned}$$

uma vez que $\displaystyle\lim_{\sigma\to 0}\frac{e^{-\frac{(x-\tau)}{\sigma}}}{\sigma} = \delta(x-\tau)\cdot$

Regra de Leibniz - Generalização

Na próxima seção, Seção 4.4, vamos apresentar a derivada ${}^{GRL}D^{\alpha,\beta}_t$ que generaliza a derivada de Yang-Srivastava-Machado. Lá vamos obter uma fórmula do tipo Leibniz para a derivada do produto de duas funções, a saber, a Eq.(4.15), e como caso particular vamos recuperar uma fórmula do tipo Leibniz para a derivada de Yang-Srivastava-Machado, a saber,

$${}^{YSM}D^{(\alpha)}_{a+}(fg(t)) = \frac{R(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-k}{s}f^{(s)}(t)I^{k+s}_{b+}g(t),$$

onde $R(\cdot)$ representa uma função de normalização tal que $R(0)=1=R(1)$ e I^{α}_{b+} a integral de Riemann-Liouville de ordem α à direita.

4.4 Derivadas generalizadas

Aqui apresentamos, um par de derivadas visando generalizar as derivadas apresentadas nas seções anteriores, a saber, as derivadas de Caputo-Fabrizio, Atangana-Baleanu e Yang-Srivastava-Machado. Apresentamos a do tipo Caputo e a do tipo Riemann-Liouville.

Definição 4.7. *Sejam $\alpha \in [0,1)$ a ordem da derivada e $\beta \in [0,1]$ o tipo. A derivada generalizada do tipo Caputo, denotada por ${}^{GC}D_t^{\alpha,\beta}$ é dada por*

$$ {}^{GC}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) = \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\int_b^t f'(x)E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-x)^\beta}{1-\alpha}\right)dx, \tag{4.13}$$

sendo $G(\alpha)$ uma função de normalização com $G(0) = 1 = G(1)$ e $E_\beta(\cdot)$, a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Ao considerar a ordem da derivada, α, igual a zero, para qualquer $\beta \in (0,1]$, não recuperamos a função original, exceto se $f(b)$ é nula. Pois pela Eq.(4.13) temos,

$$ {}^{ABC}{}_bD_t^{0,\beta}(f(t)) = G(0)\int_b^t f'(x)E_\beta\,(0)\,dx = \int_b^t f'(x)dx = f(t) - f(b).$$

Para evitar que isso ocorra apresentamos a definição do tipo Riemann-Liouville.

Definição 4.8. *Sejam $\alpha \in [0,1)$ a ordem da derivada e $\beta \in [0,1]$ o tipo. A derivada generalizada do tipo Riemann-Liouville, denotada por ${}^{GRL}D_t^{\alpha}$ é dada por*

$$ {}^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) = \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_b^t f(x)E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-x)^\beta}{1-\alpha}\right)dx,$$

sendo $G(\alpha)$ uma função de normalização tal que $G(0) = 1 = G(1)$.

Note que, agora, quando a ordem da derivada é nula temos,

$$ {}^{GRL}D_t^{0,\beta}(f(t)) = G(0)\frac{d}{dt}\int_b^t f(x)E_\beta\,(0)\,dx = \frac{d}{dt}\int_b^t f(x)dx = f(t),$$

para todo $\beta \in (0,1]$.

Observemos que ao considerar $\beta = 1$ e $\beta = \alpha$ na derivada generalizada do tipo Riemann-Liouville recuperamos, respectivamente, as derivadas de Yang-Srivastava-Machado e Atangana-Baleanu do tipo Riemann-Liouville e ao tomar $\beta = 1$ e $\beta = \alpha$ na derivada generalizada do tipo Caputo recuperamos, respectivamente, as derivadas de Caputo-Fabrizio e Atangana-Baleanu do tipo Caputo.

Vamos obter uma relação entre as duas derivadas, **Definição 4.7** e **Definição 4.8**, através da equação,

$$ {}^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) \;=\; {}^{GC}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) + \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-b)^\beta}{1-\alpha}\right)f(b). \tag{4.14}$$

De fato, tomando f uma função analítica, ou seja, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!}$, podemos escrever,

$$^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) = \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_b^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(t-x)^n(-1)^n}{n!}E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-x)^\beta}{1-\alpha}\right)dx.$$

Escrevendo explicitamente a função de Mittag-Leffler obtemos,

$$\begin{aligned} ^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!\Gamma(\beta k+1)}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\int_b^t (t-x)^{\beta k+n}dx \\ &= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!\Gamma(\beta k+1)}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{(t-b)^{\beta k+n+1}}{\beta k+n+1}. \end{aligned}$$

Derivando formalmente termo a termo obtemos,

$$\begin{aligned} ^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\beta k+1)(\beta k+n+1)}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k f^{(n+1)}(t)(t-b)^{\beta k+n+1} \\ &+ \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\beta k+1)}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k f^{(n)}(t)(t-b)^{\beta k+n}. \end{aligned}$$

Escrevendo novamente em termos da integral temos,

$$\begin{aligned} ^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\beta k+1)}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k f^{(n+1)}(t)\int_b^t (t-x)^{\beta k+n}dx \\ &+ \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-b)^\beta}{1-\alpha}\right)\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}(t)(t-b)^n \\ &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\int_b^t \frac{(-1)^n f^{(n+1)}(t)(t-x)^n E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-x)^\beta}{1-\alpha}\right)}{n!}dx \\ &+ \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-b)^\beta}{1-\alpha}\right)f(b) \\ &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\int_b^t f'(t)E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-x)^\beta}{1-\alpha}\right)dx + \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-b)^\beta}{1-\alpha}\right)f(b) \\ &= {}^{GC}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) + \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-b)^\beta}{1-\alpha}\right)f(b). \end{aligned}$$

E, portanto, vale a Eq.(4.14). Note que, as duas derivadas serão iguais quando $f(b) = 0$.

Verificaremos agora quais propriedades do critério de Ortigueira e Machado essas duas novas formulações satisfazem.

Linearidade

Sejam f e g funções reais de variável real, $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in (0,1]$ e c e d parâmetros escalares. Vamos primeiro mostrar que a derivada generalizada do tipo Caputo $^{GC}D_t^{\alpha,\beta}$ é um operador linear. De fato,

$$\begin{aligned} {}^{GC}D_t^{\alpha}(cf(t)+dg(t)) &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\int_b^t (cf'(x)+dg'(x))E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-x)^\beta}{1-\alpha}\right)dx \\ &= c^{GR}D_t^{\alpha,\beta}(f(t))+d^{GR}D_t^{\alpha,\beta}(g(t)), \end{aligned}$$

uma vez que a integral é um operador linear. Vamos agora mostrar que a derivada generalizada do tipo Riemann-Liouville também é um operador linear,

$$\begin{aligned} {}^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(cf(t)+dg(t)) &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_b^t (cf(x)+dg(x))E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-x)^\beta}{1-\alpha}\right)dx \\ &= c^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(f(t))+d^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(g(t)), \end{aligned}$$

já que tanto a derivada ordinária de ordem um, quanto a integral são operadores lineares.

Derivada de ordem zero

Como já mencionamos a derivada generalizada do tipo Caputo de ordem zero só recupera a função original se $f(b)=0$ e a derivada do tipo Riemann-Liouville de ordem zero recupera a função original.

Derivada de ordem inteira

Como vimos nas seções anteriores, para valor específico de β, a saber, $\beta=\alpha$ e $\beta=1$ as derivadas generalizadas de ordem um tanto do tipo Caputo quanto Riemann-Liouville recuperam o caso inteiro.

Regra de Leibniz - Generalização

Sejam $\alpha \in [0,1)$, $\beta \in [0,1]$ e f uma função analítica. Assim, a derivada generalizada do tipo Riemann-Liouville de f pode ser escrita na forma, a partir da expansão da função de Mittag-Leffler, contendo a integral de Riemann-Liouville

$$\begin{aligned} {}^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_b^t f(x)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k (t-x)^{\beta k}\frac{1}{\Gamma(\beta k+1)}dx \\ &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{\Gamma(\beta k+1)}\frac{d}{dt}\int_b^t f(x)(t-x)^{\beta k}dx. \end{aligned}$$

Utilizando a regra de Leibniz para a derivada de uma integral obtemos,

$$\begin{aligned} {}^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{\Gamma(\beta k+1)}\int_b^t \beta k f(x)(t-x)^{\beta k-1}dx \\ &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{\Gamma(\beta k)}\int_b^t f(x)(t-x)^{\beta k-1}dx. \end{aligned}$$

Pela **Definição 2.3** temos que a integral fracionária de Riemann-Liouville de f à esquerda, $I^{\alpha}_{a+}f$ é dada por

$$I^{\alpha}_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau,$$

para $Re(\alpha) > 0$ e $t > a$. Com isso temos,

$${}^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(f(t)) \;=\; \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k I^{\beta k}_{b+}f(t),$$

onde $I^{\alpha}_{a+}f$ representa a integral fracionária de Riemann-Liouville de f à esquerda.

Agora, considerando o produto de duas funções f e g analíticas, temos

$${}^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(fg(t)) \;=\; \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k I^{\beta k}_{b+}(fg)(t).$$

Como mostramos na Seção 2.2, em consequência do **Lema 2.4**, a integral fracionária satisfaz a regra de Leibniz, portanto, temos a seguinte regra do tipo Leibniz para a derivada generalizada do tipo Riemann-Liouville do produto de suas funções

$${}^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(fg(t)) \;=\; \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\beta k}{s} f^{(s)}(t)I^{\beta k+s}_{b+}g(t). \tag{4.15}$$

Considerando $\beta = \alpha$ na Eq.(4.15) recuperamos uma regra do tipo Leibniz para a derivada de Atangana-Baleanu do tipo Riemann-Liouville, a saber,

$${}^{GRL}D_t^{\alpha,\alpha}(fg(t)) = {}^{ABR}{}_bD_t^{\alpha}(fg(t)) = \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\alpha k}{s} f^{(s)}(t)I^{\alpha k+s}_{b+}g(t).$$

Ainda mais, considerando $\beta = 1$ na Eq.(4.15) recuperamos uma regra do tipo Leibniz para a derivada de Yang-Srivastava-Machado, a saber,

$${}^{GRL}D_t^{\alpha,1}(fg(t)) = {}^{YSM}D_{a+}^{(\alpha)}(fg(t)) = \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty}\binom{-k}{s} f^{(s)}(t)I^{k+s}_{b+}g(t).$$

A partir da relação entre as derivadas generalizadas do tipo Caputo e do tipo Riemann-Liouville, Eq.(4.14), podemos escrever

$$\begin{aligned}{}^{GC}D_t^{\alpha,\beta}(fg(t)) &= {}^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(fg(t)) - \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-b)^\beta}{1-\alpha}\right)(fg)(b)\\ &= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\beta k}{s} f^{(s)}(t)I^{\beta k+s}_{b+}g(t)\\ &- \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-b)^\beta}{1-\alpha}\right)f(b)g(b).\end{aligned} \tag{4.16}$$

Considerando $\beta = \alpha$ na Eq.(4.16) recuperamos uma regra do tipo Leibniz para a derivada de Atangana-Baleanu do tipo Caputo, a saber,

$$\begin{aligned}
{}^{GC}D_t^{\alpha,\alpha}(fg(t)) &= {}^{ABC}{}_bD_t^{\alpha}(fg(t)) \\
&= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\alpha k}{s}f^{(s)}(t)I_{b+}^{\alpha k+s}g(t) \\
&- \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}E_\alpha\left(-\alpha\frac{(t-b)^\alpha}{1-\alpha}\right)f(b)g(b).
\end{aligned}$$

Ainda mais, considerando $\beta = 1$ na Eq.(4.16) recuperamos uma regra do tipo Leibniz para a derivada de Caputo-Fabrizio, a saber,

$$\begin{aligned}
{}^{GC}D_t^{\alpha,1}(fg(t)) &= \mathscr{D}_t^{(\alpha)}(fg)(t) \\
&= \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-k}{s}f^{(s)}(t)I_{b+}^{k+s}g(t) - \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}e^{-\alpha\frac{(t-b)}{1-\alpha}}f(b)g(b).
\end{aligned}$$

4.5 Derivada com núcleo gaussiano

Caputo e Fabrizio [23] propuseram uma nova formulação para a derivada, que aqui chamaremos de derivada com núcleo gaussiano e denotaremos por ${}^{CF}D^\alpha$.

Definição 4.9. *Sejam f uma função suave definida em $[a,T]$ tal que $a \in [-\infty, T]$ e $f(a) = 0$ e $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ a ordem da derivada, assim*

$$ {}^{CF}D^\alpha f(t) = \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^\alpha(1-\alpha)}}\int_a^t \dot{f}(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)^2}{1-\alpha}}d\tau, $$

onde $\dot{f}(t)$ representa a derivada primeira da função f.

Note que ao escrever a exponencial em sua representação em série obtemos uma nova equação para a derivada com núcleo gaussiano em termos da integral fracionária de Riemann-Liouville,

$$\begin{aligned}
{}^{CF}D^\alpha f(t) &= \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^\alpha(1-\alpha)}}\int_a^t \dot{f}(\tau)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha(t-\tau)^2}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{k!}d\tau \\
&= \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^\alpha(1-\alpha)}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{k!}\int_a^t \dot{f}(\tau)(t-\tau)^{2k}d\tau.
\end{aligned}$$

Integrando por partes obtemos,

$$\begin{aligned}
{}^{CF}D^\alpha f(t) &= \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^\alpha(1-\alpha)}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{k!}2k\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{2k-1}d\tau \\
&= \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^\alpha(1-\alpha)}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{k!}2k\frac{(2k-1)!}{(2k-1)!}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{2k-1}d\tau,
\end{aligned}$$

utilizando a integral de Riemann-Liouville podemos escrever,

$$ {}^{CF}D^{\alpha}f(t) \quad = \quad \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^{\alpha}(1-\alpha)}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{(2k)!}{k!}I_{a+}^{2k}f(t). \qquad (4.17) $$

Usaremos a equação acima, Eq.(4.17), para obter uma regra do tipo Leibniz para a derivada do produto de duas funções.

Verificaremos agora se a derivada com núcleo gaussiano satisfaz as propriedades do critério de Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam f e g funções suaves definidas em $[a, T]$ tais que $a \in [-\infty, T]$, $f(a) = 0$ e $g(a) = 0$, $0 \leqslant \alpha < 1$ a ordem da derivada e b e c escalares, assim a derivada com núcleo gaussiano da combinação linear $bf(t) + cg(t)$ é dado por,

$$ \begin{aligned} {}^{CF}D^{\alpha}[bf(t)+cg(t)] &= \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^{\alpha}(1-\alpha)}}\int_a^t \frac{d}{dt}[bf(\tau)+cg(\tau)]e^{-\frac{\alpha(t-\tau)^2}{1-\alpha}}d\tau \\ &= \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^{\alpha}(1-\alpha)}}\int_a^t [b\dot{f}(\tau)+c\dot{g}(\tau)]e^{-\frac{\alpha(t-\tau)^2}{1-\alpha}}d\tau \\ &= b^{CF}D^{\alpha}f(t)+c^{CF}D^{\alpha}g(t), \end{aligned} $$

já que a integral é um operador linear. Portanto, a derivada com núcleo gaussiano é um operador linear.

Derivada de ordem zero

A derivada com núcleo gaussiano de ordem zero recupera a função original, de fato,

$$ {}^{CF}D^{0} = \int_a^t \dot{f}(\tau)d\tau = f(t), $$

uma vez que pela **Definição 4.9** $f(a) = 0$.

Derivada de ordem inteira

Mostraremos agora que quando tomamos a ordem da derivada de ordem inteira igual a um recuperamos a derivada primeira. Para isso usaremos o conhecido resultado envolvendo a função delta, a saber,

$$ \lim_{\alpha\to 1}\frac{2}{\sqrt{\pi^{\alpha}(1-\alpha)}}e^{-\frac{\alpha(t-\tau)^2}{1-\alpha}} = \delta(t-\tau). $$

Assim,

$$\begin{aligned} {}^{CF}D^1 f(t) &= \lim_{\alpha\to 1}\frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^\alpha(1-\alpha)}}\int_a^t \dot{f}(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)^2}{1-\alpha}}d\tau \\ &= \int_a^t \dot{f}(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f'(t). \end{aligned}$$

Regra de Leibniz - Generalização

Sejam f e g funções suaves definidas em $[a,T]$ tais que $a \in [-\infty, T]$, $f(a)=0$ e $g(a)=0$ e $0 \leqslant \alpha < 1$. Pela Eq.(4.17) temos

$$ {}^{CF}D^\alpha[fg](t) = \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^\alpha(1-\alpha)}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{(2k)!}{k!}I_{a+}^{2k}fg(t). $$

Como apresentado na Seção 2.2 a integral fracionária satisfaz a regra de Leibniz, portanto,

$$ {}^{CF}D^\alpha[fg](t) = \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^\alpha(1-\alpha)}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{(2k)!}{k!}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-2k}{s}f^{(s)}(t)I_{a+}^{2k+s}g(t), $$

que é uma regra do tipo Leibniz para a derivada do produto de duas funções.

4.6 Derivada segundo Sun-Hao-Zhang-Baleanu

Em [92], os autores utilizaram a derivada de Caputo-Fabrizio para resolver um modelo de relaxação e difusão, no entanto afirmaram que tal derivada com núcleo exponencial não pode caracterizar tal modelo, sendo assim propuseram duas novas formulações para a derivada sendo o núcleo uma exponencial estendida. Aqui, nós iremos nos dirigir a essas derivadas pelo termo Sun-Hao-Zhang-Baleanu. Apresentamos agora essas formulações.

Definição 4.10. *Seja $0<\alpha<1$ um número real. A derivada de Sun-Hao-Zhang-Baleanu é dada por*

$$ {}^{SE}D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_a^t f'(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha}}d\tau, \tag{4.18}$$

sendo $a \leqslant t$ e $M(\alpha)$ uma função de normalização tal que $M(0)=1=M(1)$.

De maneira semelhante ao que fizemos com a derivada com núcleo gaussiano, iremos escrever a exponencial em sua representação em série com o intuito de obtermos uma nova equação para essa derivada em termos da integral fracionária de Riemann-Liouville, assim para $0<\alpha<1$ temos,

$$ {}^{SE}D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\left[e^{-\frac{\alpha(t-a)^\alpha}{1-\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(k-1)!}I_{a+}^\alpha f(t)\right]. \tag{4.19}$$

Ainda mais, podemos escrever

$$\begin{aligned}{}^{SE}D^{\alpha}_{a+}f(t) &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_a^t f'(\tau)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha(t-\tau)^{\alpha}}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{k!}d\tau \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{k!}\int_a^t f'(\tau)(t-\tau)^{\alpha k}d\tau.\end{aligned}$$

Integrando por partes obtemos,

$$\begin{aligned}&{}^{SE}D^{\alpha}_{a+}f(t) \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{k!}\left[(t-a)^{\alpha k}f(a)-\alpha k\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{2\alpha-1}d\tau\right] \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{k!}\left[(t-a)^{\alpha k}f(a)-\alpha k\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{2\alpha-1}d\tau\right] \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{k!}\left[(t-a)^{\alpha k}f(a)-\alpha k\Gamma(2\alpha)I^{2\alpha}_{a+}f(t)\right] \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{1}{k!}\left[(t-a)^{\alpha k}f(a)-k\alpha\Gamma(2\alpha)I^{\alpha}_{a+}f(t)\right] \\ &= \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\left[e^{-\frac{\alpha(t-a)^{\alpha}}{1-\alpha}}-\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{\alpha\Gamma(2\alpha)}{(k-1)!}I^{2\alpha}_{a+}f(t)\right],\end{aligned}$$

sendo que $I^{\alpha}_{a+}f(t)$ representa a integral de Riemann-Liouville de ordem α de f. Usaremos a equação acima para obter uma regra do tipo Leibniz para a derivada do produto de duas funções.

Definição 4.11. *Seja $0<\alpha<1$ um número real. A derivada de Sun-Hao-Zhang-Baleanu 2 é dada por*

$$ {}^{SE2}D^{\alpha}_{a+}f(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_a^t f'(\tau)e^{-\frac{\alpha(\frac{t-\tau}{t})^{\alpha}}{1-\alpha}}d\tau, \tag{4.20}$$

sendo $a\leqslant t$ e $M(\alpha)$ uma função de normalização tal que $M(0)=1=M(1)$.

Por simplicidade, é proposto que $M(\alpha)=\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$ e o termo "SE" representa "stretched exponential" (exponencial estendida) [92].

Vamos, agora, verificar se a derivada de Sun-Hao-Zhang-Baleanu cumpre o critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam f e g funções reais de variável real e c e d escalares, assim,

$$\begin{aligned}{}^{SE}D^{\alpha}_{a+}[cf(t)+dg(t)] &= \frac{cM(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t f'(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)^{\alpha}}{1-\alpha}}d\tau+\frac{dM(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t g'(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)^{\alpha}}{1-\alpha}}d\tau \\ &= c\,{}^{SE}D^{\alpha}_{a+}f(x)+d\,{}^{SE}D^{\alpha}_{a+}g(x),\end{aligned}$$

sendo $a \leqslant t$. Então, a derivada de Sun-Hao-Zhang-Baleanu é um operador linear.

Derivada de ordem zero

Tomando a ordem da derivada de Sun-Hao-Zhang-Baleanu igual a zero temos

$$\begin{aligned} {}^{SE}D^0_{a+}f(t) &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\int_a^t f'(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha}}d\tau \\ &= \int_a^t f'(\tau)d\tau \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}. \end{aligned}$$

Considerando a mudança $1-\alpha = \dfrac{1}{1+x}$ e usando que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ temos

$$\begin{aligned} {}^{SE}D^0_{a+}f(t) &= \int_a^t f'(\tau)d\tau \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{x+1}{x}} \\ &= \int_a^t f'(\tau)d\tau \lim_{x\to 0}(1+x)\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= ef(t) - ef(a). \end{aligned}$$

Derivada de ordem inteira

A derivada de Sun-Hao-Zhang-Baleanu de ordem um pode ser escrita pela seguinte equação através da mudança $\sigma = 1-\alpha$

$$\begin{aligned} {}^{SE}D^1_{a+}f(t) &= \lim_{\sigma\to 0}\frac{M(1-\sigma)}{\sigma^{\frac{1}{1-\sigma}}}\int_a^t f'(\tau)e^{-\frac{(1-\sigma)(t-\tau)^{1-\sigma}}{\sigma}}d\tau \\ &= \lim_{\sigma\to 0}\frac{M(1-\sigma)}{\sigma}\int_a^t f'(\tau)e^{-\frac{(t-\tau)}{\sigma}}d\tau \\ &= \int_a^t f'(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \\ &= f'(t), \end{aligned}$$

sendo $a \leqslant t$ e $M(\alpha)$ uma função de normalização tal que $M(0) = 1 = M(1)$. Para obter o resultado acima usamos que $\lim\limits_{\sigma\to 0}\dfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{t-\tau}{\sigma}} = \delta(t-\tau)$. Portanto, a derivada de Sun-Hao-Zhang-Baleanu de ordem um recupera o caso inteiro.

Regra de Leibniz - Generalização

Sejam $0 < \alpha < 1$ e f e g funções reais com variável real, assim pela Eq.(4.19) podemos escrever

$$ {}^{SE}D^\alpha_{a+}[fg](t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\left[e^{-\frac{\alpha(t-a)^\alpha}{1-\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(k-1)!}I^{2\alpha}_{a+}[fg](t)\right]. $$

Como apresentado na Seção 2.2 a integral fracionária satisfaz a regra de Leibniz. Portanto, temos a seguinte regra do tipo Leibniz para a derivada de Sun-Hao-Zhang-Baleanu,

$$^{SE}D^{\alpha}_{a+}[fg](t)=\frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\left[e^{-\frac{\alpha(t-a)^{\alpha}}{1-\alpha}}-\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{k}\frac{\alpha\Gamma(2\alpha)}{(k-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-2\alpha}{s}f^{(s)}(t)I^{2\alpha+s}_{a+}g(t)\right].$$

4.7 Derivadas segundo Yang-Machado-Baleanu

Recentemente, Yang, Machado e Baleanu [107] introduziram as derivadas do tipo Riemann-Liouville e Liouville-Caputo sendo o núcleo não singular funções de Mittag-Leffler de um, dois, três e quatro parâmetros [95]. Tais formulações foram utilizadas em modelos de difusão anômala [107]. Apresentamos nessa seção a formulação envolvendo a função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros, uma vez que para valores apropriados para esses parâmetros recuperamos como casos particulares as demais formulações. Essas novas formulações formam utilizadas em modelos de reologia [102]. Como as formulações que aqui apresentamos estão definidas em termos da função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros começamos essa seção com tal definição.

Em 2007, Shukla e Prajapati [81], introduziram a função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros, sendo uma generalização das funções de Mittag-Leffler de um, dois, três parâmetros e a função exponencial. Veremos agora a definição dada por eles.

Definição 4.12. *Sejam $\alpha,\beta,\rho\in\mathbb{C}$ e $q\in(0,1)\cup\mathbb{N}$ tal que $Re(\alpha)>0$, $Re(\beta)>0$ e $Re(\rho)>0$, assim*

$$E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{x^k}{k!},$$

sendo $(\rho)_{qk}$ uma generalização do símbolo de Pochhammer, ou seja, $(\rho)_{qk}=\dfrac{\Gamma(\rho+qk)}{\Gamma(\rho)}$.

Definição 4.13. *Sejam $a\in[-\infty,+\infty)$ e $0<\alpha<1$. As derivadas de Yang-Machado-Baleanu do tipo Liouville-Caputo e do tipo Riemann-Liouville com o núcleo uma função de Mittag-Leffler de quatro parâmetros são definidas, respectivamente, por*

$$^{C}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D^{(\alpha)}_{a}f(t)=\int_a^t E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-\tau)^{\alpha})f'(\tau)d\tau, \tag{4.21}$$

$$^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D^{(\alpha)}_{a}f(t)=\frac{d}{dt}\int_a^t E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-\tau)^{\alpha})f(\tau)d\tau, \tag{4.22}$$

para $t>a$

Note que, podemos relacionar as duas formulações de derivadas segundo Yang-Machado-Baleanu, Eq.(4.21) e Eq.(4.22) através da equação

$$ {}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}f(t) = {}^{C}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}f(t) + E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-a)^\alpha)f(a). \tag{4.23} $$

De fato, tomando f uma função analítica podemos escrever pela Eq.(4.22),

$$ {}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}f(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-\tau)^\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(t-\tau)^n(-1)^n}{n!}d\tau. $$

Escrevendo explicitamente a função de Mittag-Leffler obtemos,

$$ \begin{aligned} {}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}f(t) &= \frac{d}{dt}\int_a^t \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{(t-\tau)^{\alpha k}}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(t-\tau)^n(-1)^n}{n!}d\tau \\ &= \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha k+n}d\tau \\ &= \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!}\frac{(t-a)^{\alpha k+n+1}}{\alpha k+n+1}. \end{aligned} $$

Derivando termo a termo temos,

$$ \begin{aligned} {}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(\alpha k+n+1)}f^{(n+1)}(t)(t-a)^{\alpha k+n+1} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}(t)(t-a)^{\alpha k+n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\int_a^t(t-\tau)^{\alpha k+n}d\tau \\ &+ E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-a)^\alpha)f(a) \\ &= \int_a^t E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-\tau)^\alpha)f'(\tau)d\tau + E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-a)^\alpha)f(a) \\ &= {}^{C}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}f(t) + E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-a)^\alpha)f(a), \end{aligned} $$

como queríamos mostrar. Observe que, as duas derivadas serão iguais quando $f(a)=0$.

Para o caso em que o núcleo é uma função de Mittag-Leffler de um parâmetro, ou seja, quando $\beta=\rho=q=1$, tendo assim as derivadas

$$ {}^{C}_{E_\alpha}D_a^{(\alpha)}f(t) = \int_a^t E_\alpha((t-\tau)^\alpha)f'(\tau)d\tau, $$

e

$$ {}^{RL}_{E_\alpha}D_a^{(\alpha)}f(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t E_\alpha((t-\tau)^\alpha)f(\tau)d\tau, $$

foi introduzida a integral associada a essas derivadas [107].

Definição 4.14. *A integral associada às derivadas segundo Yang-Machado-Baleanu do tipo Liouville-Caputo e do tipo Riemann-Liouville com o núcleo uma função de Mittag-Leffler de um parâmetro é dada por*

$$ {}_{E_\alpha}I_a^{(\alpha)}f(t) = \int_a^t \left[\delta(t-\tau) - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] f(\tau)d\tau, $$

para $t > a$.

Podemos reescrever a integral considerando $a = 0$ como

$$ {}_{E_\alpha}I_0^{(\alpha)}f(t) = f(t) - \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)d\tau = f(t) - J^\alpha f(t), \tag{4.24} $$

onde $J^\alpha f(t)$ é a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de uma função f conforme **Definição** 2.2.

Verificaremos agora se essas derivadas satisfazem o critério de Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam c, d escalares, f e g funções reais de variável real $a \in [-\infty, +\infty)$ e $0 < \alpha < 1$. As derivadas segundo Yang-Machado-Baleanu são operadores lineares. De fato,

$$ \begin{aligned} {}^{C}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}[cf(t)+dg(t)] &= \int_a^t E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-\tau)^\alpha)\frac{d}{d\tau}[cf(\tau)+dg(\tau)]d\tau \\ &= \int_a^t E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-\tau)^\alpha)[cf'(\tau)+dg'(\tau)]d\tau \\ &= c\,{}^{C}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}f(t) + d\,{}^{C}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}g(t), \end{aligned} $$

bem como,

$$ \begin{aligned} {}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}[cf(t)+dg(t)] &= \frac{d}{dt}\int_a^t E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-\tau)^\alpha)[cf(\tau)+dg(\tau)]d\tau \\ &= c\,{}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}f(t) + d\,{}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}g(t), \end{aligned} $$

uma vez que tanto a derivada de ordem um quanto a integral são operadores lineares.

Derivada de ordem zero

Tomando a ordem das derivadas segundo Yang-Machado-Baleanu do tipo Liouville-Caputo e do tipo Riemann-Liouville igual a zero temos,

$$ \begin{aligned} {}^{C}_{E^{\rho,q}_{0,\beta}}D_a^{(0)}f(t) &= \int_a^t E^{\rho,q}_{0,\beta}(1)f'(\tau)d\tau \\ &= E^{\rho,q}_{0,\beta}(1)\int_a^t f'(\tau)d\tau \\ &= E^{\rho,q}_{0,\beta}(1)[f(t)-f(a)]. \end{aligned} $$

E, por outro lado, aquela do tipo Riemann-Liouville,

$$\begin{aligned} {}^{RL}_{E^{\rho,q}_{0,\beta}}D^{(0)}_a f(t) &= \frac{d}{dt}\int_a^t E^{\rho,q}_{0,\beta}(1) f(\tau)d\tau \\ &= E^{\rho,q}_{0,\beta}(1)\frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)d\tau \\ &= E^{\rho,q}_{0,\beta}(1)f(t). \end{aligned}$$

Em ambos os casos, obtemos um fator multiplicando a função original. Não recuperando assim a função original conforme critério proposto por Ortigueira e Machado.

Derivada de ordem inteira

As derivadas de Yang-Machado-Baleanu do tipo Liouville-Caputo e do tipo Riemann-Liouville recuperam a derivada primeira apenas no caso especial em que o argumento da função de Mittag-Leffler é zero e $\beta = 1 = \alpha$. Pois assim, $E^{\rho,q}_{1,1}(0) = 1$ e, portanto,

$${}^{C}_{E^{\rho,q}_{1,1}}D^{(\alpha)}_a f(t) = \int_a^t f'(\tau)d\tau = f(t) - f(a),$$

e,

$${}^{RL}_{E^{\rho,q}_{1,1}}D^{(\alpha)}_a f(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t f(\tau)d\tau = f(t).$$

Lei dos expoentes

Para o caso particular em que $\beta = \rho = q = 1$ temos a definição da integral associada às derivadas apresentadas nessa seção, assim pela Eq.(4.24) podemos escrever a integral considerando $a = 0$ como

$$\begin{aligned} {}_{E_\alpha}I^{(\alpha)}_0 \, {}_{E_\beta}I^{(\beta)}_0 f(t) &= {}_{E_\beta}I^{(\beta)}_0 f(t) - J^\alpha \, {}_{E_\beta}I^{(\beta)}_0 f(t) \\ &= f(t) - J^\beta f(t) - J^\alpha[f(t) - J^\beta f(t)], \end{aligned}$$

como a integral fracionária de Riemann-Liouville satisfaz a lei dos expoentes temos,

$${}_{E_\alpha}I^{(\alpha)}_0 \, {}_{E_\alpha}I^{(\beta)}_0 f(t) = f(t) - J^\beta f(t) - J^\alpha f(t) + J^{\alpha+\beta} f(t).$$

Por outro lado, também pela Eq.(4.24) temos,

$${}_{E_{\alpha+\beta}}I^{(\alpha+\beta)}_0 f(t) = f(t) - J^{\alpha+\beta} f(t).$$

Portanto, não vale a lei dos expoentes.

Regra de Leibniz - Generalização

Sejam $0 < \alpha < 1$ e f uma função analítica. Assim,

$$\begin{aligned} {}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}f(t) &= \frac{d}{dt}\int_a^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{(t-\tau)^{\alpha k}}{k!} f(\tau)d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{1}{k!} \frac{d}{dt}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha k} f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Utilizando a regra de Leibniz para a derivada de uma integral obtemos,

$$\begin{aligned} {}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{1}{k!}\alpha k \int_a^t (t-\tau)^{\alpha k-1} f(\tau)d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{1}{k!}\alpha k \frac{\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(\alpha k)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha k-1} f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Pela **Definição 2.3** podemos escrever

$${}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{1}{k!}\Gamma(\alpha k+1) I_{a+}^{\alpha k} f(t).$$

onde $I_{a+}^{\alpha} f$ representa a integral fracionária de Riemann-Liouville de f à esquerda.

Agora, considerando o produto de duas funções f e g analíticas, temos

$${}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}[fg(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{1}{k!}\Gamma(\alpha k+1) I_{a+}^{\alpha k} [fg(t)].$$

Como mostramos na Seção 2.2 a integral fracionária satisfaz a regra de Leibniz, portanto, temos a seguinte regra do tipo Leibniz para a derivada do tipo Riemann-Liouville do produto de duas funções

$${}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}[fg(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{1}{k!}\Gamma(\alpha k+1) \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-\alpha k}{s} f^{(s)}(t) I_{a+}^{\alpha k+s} g(t).$$

Pela relação entre as derivadas do tipo Liouville-Caputo e do tipo Riemann-Liouville, Eq.(4.23), temos a regra do tipo Leibniz para a derivada segundo Yang-Machado-Baleanu do tipo Liouville-Caputo do produto de duas funções analíticas f e g,

$$\begin{aligned} {}^{C}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}[fg(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{1}{k!}\Gamma(\alpha k+1) \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-\alpha k}{s} f^{(s)}(t) I_{a+}^{\alpha k+s} g(t) \\ &- E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-a)^{\alpha}) f(a)g(a). \end{aligned}$$

4.8 Derivada geral

Yang [103] definiu duas novas formulações para a derivada que chamou de derivadas gerais do tipo Liouville-Caputo e do tipo Riemann-Liouville, ambas definições possuem núcleo não singular. Essas derivadas foram utilizadas em modelos de reologia [103] e modelos de difusão anômala [106].

Definição 4.15. *Sejam* $0 < \alpha < 1$ *e* $f' \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_0^+)$*. A derivada geral do tipo Riemann-Liouville é dada por,*

$$ {}^{RLT}_{0}\mathbb{D}_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha} f(\tau) d\tau, $$

sendo $t > 0$.

Yang [103] expande essa definição para $m-1 < \alpha < m$, sendo $m \in \mathbb{N}$.

Definição 4.16. *Sejam* $m-1 < \alpha < m$*, com* $m \in \mathbb{N}$ *e* $f' \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_0^+)$*. A derivada geral do tipo Riemann-Liouville é dada por,*

$$ {}^{RLT}_{0}\mathbb{D}_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+m)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+m-1} f(\tau) d\tau, $$

sendo $t > 0$.

Apresentamos agora a definição da derivada geral do tipo Liouville-Caputo

Definição 4.17. *Sejam* $0 < \alpha < 1$ *e* $f' \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_0^+)$*. A derivada geral do tipo Liouville-Caputo é dada por,*

$$ {}^{CT}_{0}\mathbb{D}_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha} f'(\tau) d\tau, $$

sendo $t > 0$.

Yang [103], de modo semelhante à derivada geral do tipo Riemann-Liouville, também expande essa definição para $m-1 < \alpha < m$, sendo $m \in \mathbb{N}$.

Definição 4.18. *Sejam* $m-1 < \alpha < m$*, com* $m \in \mathbb{N}$ *e* $f' \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_0^+)$*. A derivada geral do tipo Liouville-Caputo é dada por,*

$$ {}^{CT}_{0}\mathbb{D}_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+m)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+m-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, $$

sendo $t > 0$.

Nesse trabalhado usaremos a ordem α da derivada geral entre zero e um conforme **Definição 4.15** e **Definição 4.17**, exceto quando formos obter uma regra do tipo Leibniz, que nesse caso usaremos $m-1 < \alpha < m$, sendo $m \in \mathbb{N}$.

Pelas **Definição 4.15** e **Definição 4.17** temos a seguinte relação entre derivadas gerais do tipo Riemann-Liouville e do tipo Liouville-Caputo para $0 < \alpha < 1$,

$$ {}^{RLT}_{0}\mathbb{D}_t^{\alpha} f(t) = {}^{CT}_{0}\mathbb{D}_t^{\alpha} f(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} f(0) t^{\alpha}, \tag{4.25} $$

De fato, considerando f uma função analítica temos,

$$\begin{aligned} {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+n} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!} \frac{t^{\alpha+n+1}}{\alpha+n+1}. \end{aligned}$$

Derivando termo a termo podemos escrever,

$$\begin{aligned} {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(t)(-1)^n}{n!} \frac{t^{\alpha+n+1}}{\alpha+n+1} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!} t^{\alpha+n}. \end{aligned}$$

Agora, escrevendo novamente em função da integral,

$$\begin{aligned} {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(t)(-1)^n}{n!} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+n} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} f(0) t^{\alpha} \\ &= {}^{CT}_{\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} f(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} f(0) t^{\alpha}. \end{aligned}$$

Assim, as derivadas gerais do tipo Riemann-Liouville e Liouville-Caputo serão iguais quando $f(0) = 0$.

Apresentamos agora a definição da integral geral também proposta em [103].

Definição 4.19. *Seja $0 < \alpha < 1$. A integral geral do tipo Liouville-Caputo é dada por,*

$${}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{I}^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau,$$

sendo $t > 0$.

Verificaremos agora as propriedades do critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade

Sejam $0 < \alpha < 1$, a e b escalares e f e g funções reais de variável real. A derivada geral do tipo Riemann-Liouville da combinação linear $af(t) + bg(t)$ é dada por,

$$\begin{aligned} {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} [af(t) + bg(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha} [af(\tau) + bg(\tau)] d\tau \\ &= \frac{a}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha} f(\tau) d\tau + \frac{b}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha} g(\tau) d\tau \\ &= a\, {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} f(t) + b\, {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} g(t). \end{aligned}$$

Portanto, a derivada geral do tipo Riemann-Liouville é um operador linear. Mostraremos agora que a derivada geral do tipo Liouville-Caputo também é um operador linear. Assim para $0 < \alpha < 1$, a e b escalares e f e g funções reais de variável real temos,

$$\begin{aligned}
{}^{CT}_{\ 0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t}[af(t)+bg(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha}\frac{d}{d\tau}[af(\tau)+bg(\tau)]d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha}[af'(\tau)+bg'(\tau)]d\tau \\
&= \frac{a}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha}f'(\tau)d\tau + \frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha}g'(\tau)d\tau \\
&= a\,{}^{CT}_{\ 0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t}f(t) + b\,{}^{CT}_{\ 0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t}g(t).
\end{aligned}$$

Derivada de ordem zero

A derivada geral do tipo Riemann-Liouville de ordem zero é dada por,

$${}^{RLT}_{\ \ 0}\mathbb{D}^{0}_{t}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)}\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)d\tau = f(t)$$

recuperando assim a função original. A derivada geral do tipo Liouville-Caputo de ordem zero é,

$${}^{CT}_{\ 0}\mathbb{D}^{0}_{t}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^t f'(\tau)d\tau = f(t) - f(0).$$

Derivada de ordem inteira

Tomando a ordem da derivada geral do tipo Riemann-Liouville igual a um temos,

$${}^{RLT}_{\ \ 0}\mathbb{D}^{1}_{t}f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

utilizando a regra de Leibniz para a derivada de uma integral temos,

$${}^{RLT}_{\ \ 0}\mathbb{D}^{1}_{t}f(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

E pela Eq.(4.25) temos,

$${}^{CT}_{\ 0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t}f(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau - f(0)t^{\alpha},$$

portanto, ambas derivadas não recuperam o caso inteiro.

Lei dos expoentes

Para mostrarmos que vale a lei dos expoentes, também conhecida como propriedade de semigrupo, vamos proceder de modo análogo ao que fizemos para a integral de Riemann-Liouville no Capítulo 2.

Consideremos a função ψ_α dada por,

$$\psi_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}, & \text{se} \quad t > 0, \\ 0, & \text{se} \quad t \leqslant 0. \end{cases}$$

Assim podemos escrever a integral, conforme **Definição 4.19**, como um produto de convolução das funções f e ψ_α. Logo, para $0 < \alpha < 1$, a derivada geral do tipo Liouville-Caputo pode ser dada por,

$${}^{RLT}_{\ 0}\mathbb{I}^\alpha_t f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau = \psi_\alpha(t) * f(t),$$

sendo $t > 0$ e $*$ denotando o produto de convolução.

Observemos que a função ψ_α satisfaz a propriedade, $\psi_\alpha(t) * \psi_\beta(t) = \psi_{\alpha+\beta}(t)$, sendo $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. De fato, pelo produto de convolução de Fourier temos,

$$(\psi_\alpha * \psi_\beta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\alpha(\tau)\psi_\beta(t-\tau) d\tau. \tag{4.26}$$

Observemos que

$$\psi_\alpha(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\tau^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}, & \tau > 0; \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \qquad \psi_\beta(t-\tau) = \begin{cases} \dfrac{(t-\tau)^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)}, & \tau < t; \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

O produto $\phi_\alpha(\tau)\phi_\beta(t-\tau)$ só será diferente de zero para $0 < \tau < t$. Assim pela Eq.(4.26) temos,

$$\psi_\alpha(t) * \psi_\beta(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{\tau^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \frac{(t-\tau)^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)} d\tau, & 0 < \tau < t; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Através da função beta e de sua relação com a função gama temos,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\tau^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \frac{(t-\tau)^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)} d\tau &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} \int_0^t \tau^{-\alpha-1}(t-\tau)^{-\beta-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} \int_0^t \tau^{-\alpha-1} t^{-\beta-1} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{-\beta-1} d\tau. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Introduzindo a mudança de variável $u = \dfrac{\tau}{t}$ na Eq.(4.27), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\tau^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \frac{(t-\tau)^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)} d\tau &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} \int_0^1 (ut)^{-\alpha-1} t^{-\beta-1} (1-u)^{-\beta-1}\, t du \\
&= \frac{t^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} \int_0^1 (u)^{-\alpha-1} (1-u)^{-\beta-1} du \\
&= \frac{t^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} B(-\alpha,-\beta) \\
&= \frac{t^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(-\alpha-\beta)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi_\alpha(t) * \psi_\beta(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(-\alpha-\beta)}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Isto, é $\psi_\alpha(t) * \psi_\beta(t) = \psi_{\alpha+\beta}(t)$.

Agora, vamos mostrar que vale a lei dos expoentes. De fato,

$$\begin{aligned}
{}^{RLT}_{\ 0}\mathbb{I}^{\alpha}_{t}\, {}^{RLT}_{\ 0}\mathbb{I}^{\beta}_{t} f(t) &= {}^{RLT}_{\ 0}\mathbb{I}^{\alpha}_{t} (\psi_\beta(t) * f(t)) \\
&= \psi_\alpha(t) * (\psi_\beta(t) * f(t)) \\
&= (\psi_\alpha(t) * \psi_\beta(t)) * f(t) \\
&= \psi_{\alpha+\beta}(t) * f(t) \\
&= {}^{RLT}_{\ 0}\mathbb{I}^{\alpha+\beta}_{t} f(t).
\end{aligned}$$

E, portanto, a lei dos expoentes é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$.

Regra de Leibniz - Generalização

Sejam f uma função analítica e $m-1 < \alpha < m$ sendo $m \in \mathbb{N}$. A derivada geral do tipo Riemann-Liouville da função f pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
{}^{RLT}_{\ 0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+m)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+m-1} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+m)} \frac{d^m}{dt^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+m+n-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+m)} \frac{d^m}{dt^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!} \frac{t^{\alpha+m+n}}{\alpha+m+n} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+m)} \frac{d^m}{dt^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!} \frac{t^{\alpha+m+n}}{\alpha+m+n} \frac{\Gamma(\alpha+m+n)}{\Gamma(\alpha+m+n)}.
\end{aligned}$$

Pela Eq.(2.14) temos que

$$\binom{-\alpha-m}{n} = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+m)}{n!\Gamma(\alpha+m)}.$$

Logo, podemos escrever para a derivada

$$ {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{d^m}{dt^m}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha-m}{n} f^{(n)}(t)\frac{t^{\alpha+m+n}}{\Gamma(\alpha+m+n+1)}. $$

Vamos agora calcular a derivada m-ésima. Para isso usaremos a regra de Leibniz para o caso inteiro. Assim,

$$ \begin{aligned} {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\binom{-\alpha-m}{n} f^{(n+k)}(t)\frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}}t^{\alpha+m+n}\frac{1}{\Gamma(\alpha+m+n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\binom{-\alpha-m}{n} f^{(n+k)}(t)\frac{\Gamma(\alpha+m+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+n+1)}\frac{t^{\alpha+k+n}}{\Gamma(\alpha+m+n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\binom{-\alpha-m}{n} f^{(n+k)}(t)\frac{t^{\alpha+k+n}}{\Gamma(\alpha+k+n+1)}. \end{aligned} $$

Introduzindo a mudança $k \to j-n$ temos,

$$ {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} f(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{j-n}\binom{-\alpha-m}{n} f^{(j)}(t)\frac{t^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+j+1)}. $$

Utilizando a Eq.(2.4), temos

$$ {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} f(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{j} f^{(j)}(t)\frac{t^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+j+1)}. \tag{4.28} $$

Agora consideremos f e g funções analíticas. Assim, temos

$$ {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} [fg](t) = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{j}\frac{d^j}{dt^j}(fg)(t)\frac{t^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+j+1)}. $$

Usando a regra de Leibniz para o caso inteiro temos,

$$ \begin{aligned} {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} [fg](t) &= \sum_{j=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{j}\frac{t^{j+\alpha}}{\Gamma(j+\alpha+1)}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} f^{(k)}(t)g^{(j-k)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\binom{-\alpha}{j}\binom{j}{k}\frac{t^{j+\alpha}}{\Gamma(j+\alpha+1)} f^{(k)}(t)g^{(j-k)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t)\sum_{j=k}^{\infty}\binom{-\alpha}{j}\binom{j}{k}\frac{t^{j+\alpha}}{\Gamma(j+\alpha+1)} g^{(j-k)}(t). \end{aligned} $$

Introduzindo a mudança $j \to j+k$ podemos escrever

$$ {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} [fg](t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t)\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{j+k}\binom{j+k}{k}\frac{t^{j+k+\alpha}}{\Gamma(j+k+\alpha+1)} g^{(j)}(t). $$

E, pela Eq.(2.16) podemos escrever,

$$ \begin{aligned} {}^{RLT}_{\;\;0}\mathbb{D}^{\alpha}_{t} [fg](t) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t)\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k}\binom{-\alpha-k}{j}\frac{t^{j+k+\alpha}}{\Gamma(j+k+\alpha+1)} g^{(j)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k} f^{(k)}(t)\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-\alpha-k}{j}\frac{t^{j+k+\alpha}}{\Gamma(j+k+\alpha+1)} g^{(j)}(t). \end{aligned} $$

Considerando a Eq.(4.28) temos que a derivada geral do tipo Riemann-Liouville satisfaz a regra do tipo Leibniz, a saber,

$$ {}^{RLT}_{\ \ 0}\mathbb{D}_t^{\alpha}[fg](t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} f^{(k)}(t)\, {}^{RLT}_{\ \ 0}\mathbb{D}_t^{\alpha+k} g(t). $$

Agora, utilizando a relação entre as derivadas gerais do tipo Riemann-Liouville e Liouville-Caputo, Eq.(4.25) vamos obter uma equação para a derivada do tipo Liouville-Caputo do produto de duas funções analíticas f e g para $0 < \alpha < 1$,

$$ \begin{aligned} {}^{CT}_{\ 0}\mathbb{D}_t^{\alpha} fg(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} f^{(k)}(t)\, {}^{RLT}_{\ \ 0}\mathbb{D}_t^{\alpha+k} g(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} f(0)g(0)t^{\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} f^{(k)}(t) \left[{}^{CT}_{\ 0}\mathbb{D}_t^{\alpha+k} f(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+k+1)} f(0)t^{\alpha+k} \right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} f(0)g(0)t^{\alpha}. \end{aligned} $$

Em resumo, apresentamos na Tabela 6, as propriedades do critério proposto por Ortigueira e Machado [70] com destaque para a regra do tipo Leibniz que cada uma das derivadas com núcleo não singular, vista nesse capítulo, satisfazem.

Tabela 6 – Validade das propriedades do critério de Ortigueira e Machado para as derivadas com núcleo não singular. O símbolo ✓ representa que a propriedade é satisfeita, × que a propriedade não é satisfeita e ⋄ que ela é satisfeita para casos especiais. 1 representa a propriedade operador Linear, 2 ordem zero, 3 lei dos expoentes e 4 derivada de ordem inteira.

	1	2	3	4	Regra do tipo Leibniz
Caputo-Fabrizio [22]	✓	⋄	⋄	⋄	$\mathscr{D}_t^{(\alpha)}(fg)(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-k}{s}f^{(s)}(t)I_{b+}^{k+s}g(t) - \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}e^{-\alpha\frac{(t-b)}{1-\alpha}}f(b)g(b),$
Atangana-Baleanu tipo Caputo [11]	✓	⋄	×	✓	${}^{ABC}{}_bD_t^{\alpha}(fg(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\alpha k}{s}f^{(s)}(t)I_{b+}^{\alpha k+s}g(t) - \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}E_\alpha\left(-\alpha\frac{(t-b)^\alpha}{1-\alpha}\right)f(b)g(b).$
Atangana-Baleanu tipo Riemann-Liouville [11]	✓	✓	×	✓	${}^{ABR}{}_bD_t^{\alpha}(fg(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\alpha k}{s}f^{(s)}(t)I_{b+}^{\alpha k+s}g(t).$
Yang-Srivastava-Machado [105]	✓	✓	-	✓	${}^{YSM}D_{a+}^{(\alpha)}(fg(t)) = \frac{R(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-k}{s}f^{(s)}(t)I_{b+}^{k+s}g(t).$
Generalizadas tipo Caputo (Seção 4.4)	✓	⋄	-	⋄	${}^{GC}D_t^{\alpha,\beta}(fg(t)) = \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\beta k}{s}f^{(s)}(t)I_{b+}^{\beta k+s}g(t) - \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}E_\beta\left(-\alpha\frac{(t-b)^\beta}{1-\alpha}\right)f(b)g(b).$
Generalizadas tipo Riemann-Liouville (Seção 4.4)	✓	✓	-	⋄	${}^{GRL}D_t^{\alpha,\beta}(fg(t)) = \frac{G(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^k\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\beta k}{s}f^{(s)}(t)I_{b+}^{\beta k+s}g(t).$
Com núcleo gaussiano [23]	✓	✓	-	✓	${}^{CF}D^{\alpha}[fg](t) = \frac{1+\alpha^2}{\sqrt{\pi^\alpha(1-\alpha)}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{(2k)!}{k!}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-2k}{s}f^{(s)}(t)I_{a+}^{2k+s}g(t).$
Sun-Hao-Zhang-Baleanu [92]	✓	×	-	✓	${}^{SE}D_{a+}^{\alpha}[fg](t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\left[e^{-\frac{\alpha(t-a)^\alpha}{1-\alpha}} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(k-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-2\alpha}{s}f^{(s)}(t)I_{a+}^{2\alpha+s}g(t)\right].$
Yang-Machado-Baleanu tipo Caputo [107]	✓	×	×	×	${}^{C}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}[fg(t)] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{1}{k!}\Gamma(\alpha k+1)\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\alpha k}{s}f^{(s)}(t)I_{a+}^{\alpha k+s}g(t) - E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}((t-a)^\alpha)f(a)g(a).$
Yang-Machado-Baleanu tipo Riemann-Liouville [107]	✓	×	×	×	${}^{RL}_{E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}}D_a^{(\alpha)}[fg(t)] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{1}{k!}\Gamma(\alpha k+1)\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-\alpha k}{s}f^{(s)}(t)I_{a+}^{\alpha k+s}g(t).$
Geral tipo Caputo [103]	✓	⋄	✓	×	${}^{CT}_{\ 0}\mathbb{D}_t^{\alpha}fg(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k}f^{(k)}(t)\left[{}^{CT}_{\ 0}\mathbb{D}_t^{\alpha+k}f(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+k+1)}f(0)t^{\alpha+k}\right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}f(0)g(0)t^{\alpha}.$
Geral tipo Riemann-Liouville [103]	✓	✓	✓	×	${}^{RLT}_{\ \ 0}\mathbb{D}_t^{\alpha}[fg](t) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k}f^{(k)}(t)\,{}^{RLT}_{\ \ 0}\mathbb{D}_t^{\alpha+k}g(t).$

Capítulo 5

Modelo logístico

Nos capítulos anteriores apresentamos as três classes, conhecidas na literatura especializada, de derivadas fracionárias, a saber, derivadas fracionárias clássicas, derivadas locais e derivadas fracionárias com núcleo não singular. Nesse capítulo, escolhemos uma derivada de cada classe com o intuito de discutirmos a equação logística linearizada em sua versão fracionária.

Foi o economista Malthus que propôs a utilização da matemática para estabelecer um modelo para o crescimento de uma população (humana). Por esse modelo, o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante de tempo e, dessa forma, esta deveria crescer sem inibição, não considerando fome, guerra, epidemia ou qualquer outro fator que inibisse o crescimento da população. A equação diferencial que descreve o fenômeno, não foi obtida por Malthus. Ao trabalhar com populações isoladas, muitos fatores abióticos e de autorregulação podem contribuir para o crescimento ou decrescimento dessa população, tais como temperatura, vento, umidade, espaço, alimento, idade, dentre outros. Foi caminhando nessa direção que o matemático belga Pierre François Verhulst propôs em 1838, um novo modelo de dinâmica de populações [98].

Um importante modelo do ponto de vista biológico e realístico é aquele proposto por Verhulst, isto é, a equação conhecida como equação logística ou equação de Verhulst para descrever o crescimento da população mundial baseando-se em estatísticas populacionais disponíveis e na teoria do crescimento exponencial de Malthus [19, 99]. Considerando a taxa de crescimento proporcional à população em cada instante, esse modelo é conhecido pelo nome de modelo de Malthus modificado. Esse modelo supõe que uma população deverá crescer até um limite máximo, ou seja, ela tende a se estabilizar. Verhulst não foi capaz de testar a precisão de seu modelo devido à falta de dados adequados e, por isso, não recebeu muita atenção até muitos anos depois. Esse modelo populacional pode ser aplicado quando há dependência temporal e possui uma vasta área de aplicação já que fatores inibidores de crescimento são levados em consideração.

Tanto o modelo de Malthus quanto o de Verhulst foram formulados para tempo contínuo, considerando que os indivíduos se reproduzem a todo instante, o que na verdade ocorre em poucas populações.

Nesse capítulo apresentamos um modelo de dinâmica de populações, o modelo logístico, na sua versão inteira, bem como na versão fracionária e resolvemos a correspondente equação fracionária utilizando três derivadas diferentes sendo uma clássica, uma com núcleo não singular e uma local, a saber, respectivamente, as derivadas de Caputo, Caputo-Fabrizio e Katugampola.

5.1 Caso inteiro

Sejam $t > 0$ e $y(t)$ uma função real contínua. A equação de Verhulst, também conhecida como equação logística, é dada por

$$\frac{dy(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{y(t)}{k}\right)y(t), \tag{5.1}$$

sendo as constantes r a taxa de crescimento/decrescimento intrínseca e k a capacidade de sustentação devida ao ambiente.

Vamos agora encontrar as soluções dessa equação diferencial. Note que é uma equação diferencial não linear. Vamos primeiro procurar as soluções mais simples onde $\dfrac{dy(t)}{dt} = 0$, ou seja, $r\left(1 - \dfrac{y(t)}{k}\right)y(t) = 0$, o que implica nas soluções $y(t) = 0$ e $y(t) = k$ para todo t. Essas soluções são conhecidas como soluções de equilíbrio.

Como já mencionamos a Eq.(5.1) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e não linear. Começamos por linearizar essa equação para simplificar os cálculos de modo que possamos utilizar a metodologia da transformada de Laplace. Tomemos $x(t) = \dfrac{1}{y(t)}$, de onde podemos reescrever a Eq.(5.1) na forma,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{r}{k}\left(1 - kx(t)\right), \tag{5.2}$$

que se constitui numa equação diferencial ordinária de primeira ordem e linear. Vamos agora resolver essa equação usando variáveis separáveis, de onde segue-se para a solução

$$x(t) = \frac{1 - ce^{-rt}}{k},$$

sendo c uma constante de integração. Impondo a condição $x(0) = x_0$, isto é, admitimos conhecida a população no instante $t = 0$, segue $c = 1 - kx_0$. Portanto, temos que a solução da Eq.(5.2) é dada por

$$x(t) = \frac{1 - (1 - kx_0)e^{-rt}}{k}.$$

Voltemos agora à variável inicial y para obter a solução da Eq.(5.1),

$$y(t) = \frac{k}{1 - ce^{-rt}}.$$

Seja $y(0) = y_0$, então $y_0 = \dfrac{k}{1-c}$ e portanto $c = 1 - \dfrac{k}{y_0}$. Logo, a solução da equação de Verhulst, Eq.(5.1), é dada por,

$$y(t) = \frac{y_0 k}{y_0 + (k - y_0)e^{-rt}}. \tag{5.3}$$

Observemos pela Eq.(5.3) que independente dos valores de k, r e y_0, quando consideramos t suficientemente grande, y tende ao valor k. De fato, tomando o limite, temos

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{y_0 k}{y_0 + (k - y_0)e^{-rt}} = k.$$

A seguir apresentamos graficamente a solução da equação logística admitindo os seguintes valores para os parâmetros constantes: $k = 100$, $r = 0,2$ $y_0 = 10$.

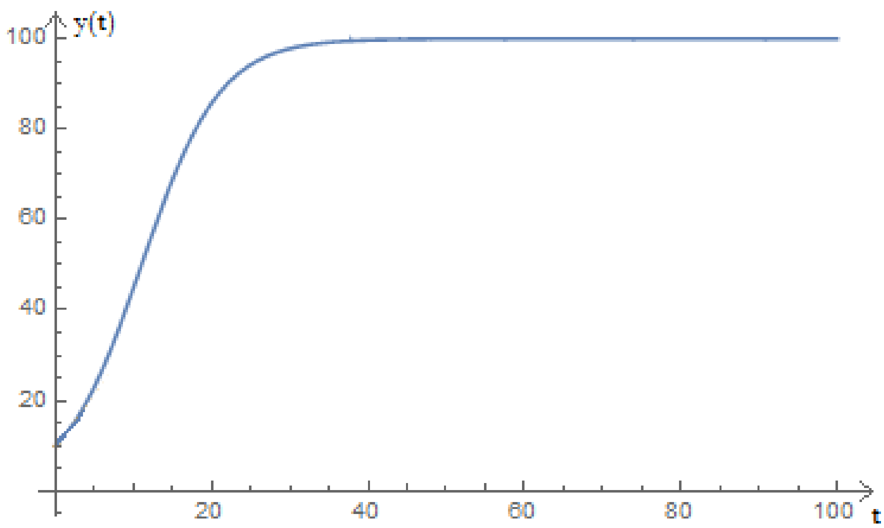

Figura 1 – Solução da equação logística, Eq.(5.3).

Da Figura 1 fica claro que no limite $t \to \infty$ (longo período de tempo) temos $y(t) \to k$, a constante que depende do ambiente.

5.2 Versão fracionária

Nessa seção apresentamos a versão fracionária da equação de Verhulst linearizada utilizando três derivadas distintas: Caputo, Katugampola e Caputo-Fabrizio. A equação que será fracionalizada é a linearizada, após a mudança de variável dependente, em analogia ao caso inteiro. Ainda mais, após a fracionalização da equação linear, vamos admitir a mudança de variável dependente. Obtemos a solução, para cada uma das equações diferenciais lineares, através da metodologia da transformada de Laplace. Note que, a transformada de Laplace só pode ser utilizada em uma equação diferencial linear e, portanto, vamos proceder como no caso inteiro. Analisamos o comportamento dessas soluções para diferentes valores da ordem da derivada, bem como apresentamos uma comparação entre as correspondentes soluções, e recuperamos o resultado, através de uma conveniente escolha do parâmetro, relativo ao caso inteiro.

Na próxima seção resolveremos a versão fracionária linearizada da equação de Verhulst utilizando a derivada de Caputo.

5.2.1 Derivada de Caputo

Sejam $0 < \alpha \leqslant 1$, $t > 0$ e $y(t)$ uma função real contínua. A versão fracionária da equação de Verhulst, Eq.(5.1), é dada por

$$ {}_*D^{\alpha} y(t) = r\left(1 - \frac{y(t)}{k}\right) y(t), \tag{5.4}$$

sendo que ${}_*D$ denota a derivada de Caputo.

Começamos, em analogia à Eq.(5.2), com a versão linear, a saber,

$$ {}_*D^{\alpha} x(t) = \frac{r}{k}\left(1 - kx(t)\right), \tag{5.5}$$

É importante notar que estamos partindo diretamente da forma linear, pois não temos a validade da regra do produto para derivadas fracionárias. Aplicando a transformada de Laplace[1] na equação acima temos,

$$\mathscr{L}[{}_*D^{\alpha} x(t)] = \mathscr{L}\left[\frac{r}{k}\left(1 - kx(t)\right)\right].$$

Pela Eq.(E.14) e considerando que a transformada de Laplace é um operador linear temos

$$s^{\alpha}\mathscr{L}[x(t)] - s^{\alpha-1}x_0 = \frac{r}{k}\mathscr{L}[1] - r\mathscr{L}[x(t)].$$

Por definição da transformada de Laplace, **Definição E.1**, temos, $\mathscr{L}[1] = \dfrac{1}{s}$, de onde segue, já isolando $\mathscr{L}[x(t)]$,

$$\mathscr{L}[x(t)] = \frac{r}{k}\frac{s^{-1}}{s^{\alpha} + r} + \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + r}x_0,$$

sendo $x(0) = x_0$. A fim de recuperar a função, aplicamos a transformada inversa em ambos os membros da equação anterior

$$x(t) = \frac{r}{k}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{-1}}{s^{\alpha} + r}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + r}\right]x_0.$$

[1] Ver Apêndice E.

Utilizando a Eq.(E.9), obtemos a solução na variável $x(t)$, logo

$$x(t) = \frac{r}{k} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-rt^\alpha) + E_\alpha(-rt^\alpha) x_0,$$

onde $E_\alpha(\cdot)$ e $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ são as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, respectivamente. A partir da relação

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\alpha+1}(-rt^\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-rt^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha + 1)} \\ &= -\frac{1}{rt^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-rt^\alpha)^{n+1}}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)}, \end{aligned}$$

e considerando a mudança de índice $n \to n-1$ temos,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\alpha+1}(-rt^\alpha) &= -\frac{1}{rt^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-rt^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \\ &= -\frac{1}{rt^\alpha} \left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-rt^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \right] \\ &= -\frac{1}{rt^\alpha} \left[-1 + E_\alpha(-rt^\alpha) \right]. \end{aligned}$$

Logo, obtemos a identidade

$$E_\alpha(-rt^\alpha) = 1 - rt^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-rt^\alpha). \tag{5.6}$$

Assim, voltando na expressão para $x(t)$, temos

$$\begin{aligned} x(t) &= -k^{-1}\left[-1 + E_\alpha(-rt^\alpha)\right] + E_\alpha(-rt^\alpha) x_0 \\ &= k^{-1} + (x_0 - k^{-1}) E_\alpha(-rt^\alpha), \end{aligned}$$

que é a solução da equação diferencial linear fracionária, Eq. (5.5).

Admitindo-se a mudança de variável dependente e tendo em mente que não vamos obter a solução da equação diferencial fracionária não linear, podemos escrever a solução da Eq.(5.4),

$$\frac{1}{y(t)} = k^{-1} + \left(\frac{1}{y_0} - k^{-1} \right) E_\alpha(-rt^\alpha)$$

de onde segue a expressão

$$y(t) = \frac{k y_0}{y_0 + (k - y_0) E_\alpha(-rt^\alpha)}. \tag{5.7}$$

Observemos que, para $\alpha = 1$ recuperamos o caso inteiro, Eq.(5.3).

Assim como no caso inteiro, considerando t suficientemente grande, a solução y tende a k. A fim de mostrarmos esse resultado, utilizamos a seguinte expansão assintótica da função de Mittag-Leffler [36], apresentada pela proposição a seguir:

Proposição 5.1. *Sejam* $0 < \alpha < 2$ *e* $\dfrac{\pi\alpha}{2} < \theta < \min(\pi, \alpha\pi)$*. Assim para p inteiro positivo arbitrário temos,*

$$E_\alpha(z) = \frac{e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}}{\alpha} - \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)} + O(|z|^{-1-p}),$$

para $|z| \to \infty$ *e* $|\arg z| \leqslant \theta$*. E,*

$$E_\alpha(z) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)} + O(|z|^{-1-p}), \tag{5.8}$$

para $|z| \to \infty$ *e* $\theta \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$*.*

Assim pela Eq.(5.8) podemos escrever,

$$\lim_{t\to\infty} E_\alpha(-rt^\alpha) = -\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{(-rt^\alpha)^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)} + O(|-rt^\alpha|^{-1-p}) = 0.$$

Portanto, recuperamos o caso limite

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{ky_0}{y_0 + (k-y_0)E_\alpha(-rt^\alpha)} = k.$$

A seguir apresentamos a Figura 2 com a solução dada pela Eq.(5.7) para diferentes valores de α, a saber, $\alpha = 1$, $\alpha = 0,9$, $\alpha = 0,7$ e $\alpha = 0,5$ e com os seguintes valores para os parâmetros, $k = 100$ $r = 0,2$ $y_0 = 10$.

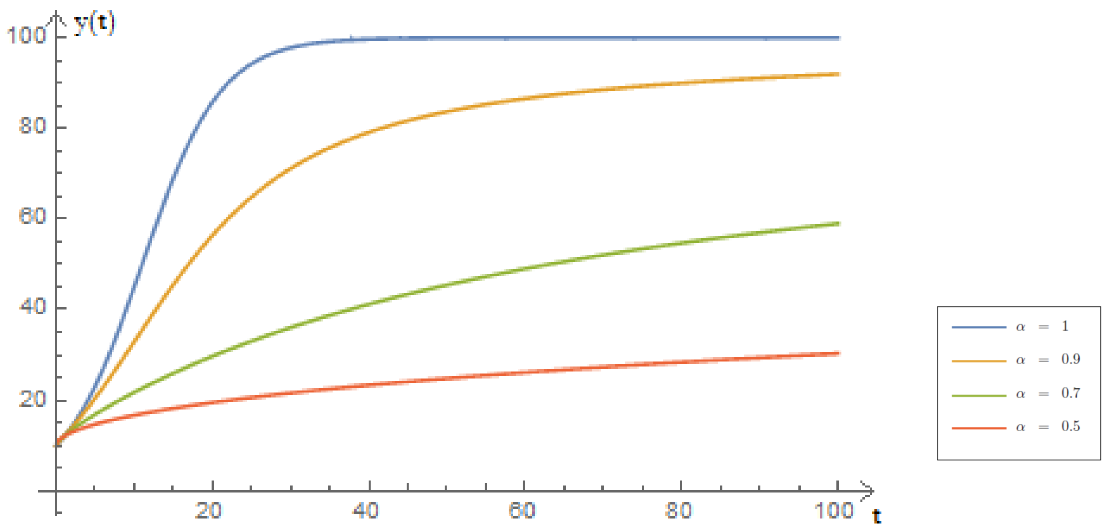

Figura 2 – Solução dada pela Eq.(5.7) para diferentes valores de α.

5.2.2 Derivada de Katugampola

Vamos, agora, resolver o mesmo problema, isto é, equação logística com condição inicial, utilizando a derivada de Katugampola. Note que esta é uma derivada local. No

Capítulo 3, Eq.(3.6), obtivemos a relação formal entre a derivada de Katugampola com a derivada ordinária de ordem um, a saber,

$$D^{\alpha}f(t) = t^{1-\alpha}f'(t),$$

onde D^{α} representa a derivada de Katugampola de ordem α.

Seja $0 < \alpha \leqslant 1$, a versão fracionária linear da equação de Verhulst, Eq.(5.1), utilizando a derivada de Katugampola, pode ser escrita como

$$D^{\alpha}x(t) = \frac{r}{k}\left(1 - kx(t)\right). \tag{5.9}$$

Diferentemente do que fizemos para resolver a versão fracionária linear da equação de Verhulst utilizando a derivada de Caputo, ao resolver essa equação utilizando a derivada de Katugampola, não utilizamos a metodologia da transformada de Laplace, uma vez que utilizando a Eq.(3.6) podemos obter de forma direta a solução através do método de separação de variáveis.

Assim, utilizando a Eq.(3.6) podemos escrever,

$$x'(t) = t^{\alpha-1}\frac{r}{k}\left(1 - kx(t)\right).$$

Pelo método de separação de variáveis, obtemos a solução na variável $x(t)$

$$x(t) = \frac{1 - ce^{-\frac{rt^{\alpha}}{\alpha}}}{k},$$

sendo c uma constante de integração. Com a mesma mudança do caso inteiro voltaremos agora para a variável y. Como $y = \dfrac{1}{x}$ temos,

$$y(t) = \frac{k}{1 - ce^{-\frac{rt^{\alpha}}{\alpha}}},$$

sendo c uma constante. Através da condição inicial, a saber, $y(0) = y_0$ encontraremos o valor da constante c. Assim, substituindo $t = 0$ na solução obtemos

$$c = \frac{y_0 - k}{y_0}.$$

Portanto, a solução da Eq.(5.9), utilizando a derivada de Katugampola e a mudança de variável dependente $y(t) = \dfrac{1}{x(t)}$, é dada por,

$$y(t) = \frac{ky_0}{y_0 + (k - y_0)e^{-\frac{rt^{\alpha}}{\alpha}}}, \tag{5.10}$$

que, como já mencionado, recupera o caso inteiro para $\alpha = 1$.

Observemos que a solução y, dada pela Eq.(5.10), tende a k quando t tende ao infinito, independentemente dos valores de k, r e y_0. De fato, tomando o limite $t \to \infty$ obtemos

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{k y_0}{y_0 + (k - y_0)e^{-\frac{r t^{\alpha}}{\alpha}}} = k.$$

A Figura 3 mostra a solução dada pela Eq.(5.10) utilizando a derivada de Katugampola com $k = 100$ $r = 0,2$ $y_0 = 10$, os mesmos valores utilizados na derivada de Caputo, para diferentes valores de α, a saber, $\alpha = 1$, $\alpha = 0,9$, $\alpha = 0,7$ e $\alpha = 0,5$.

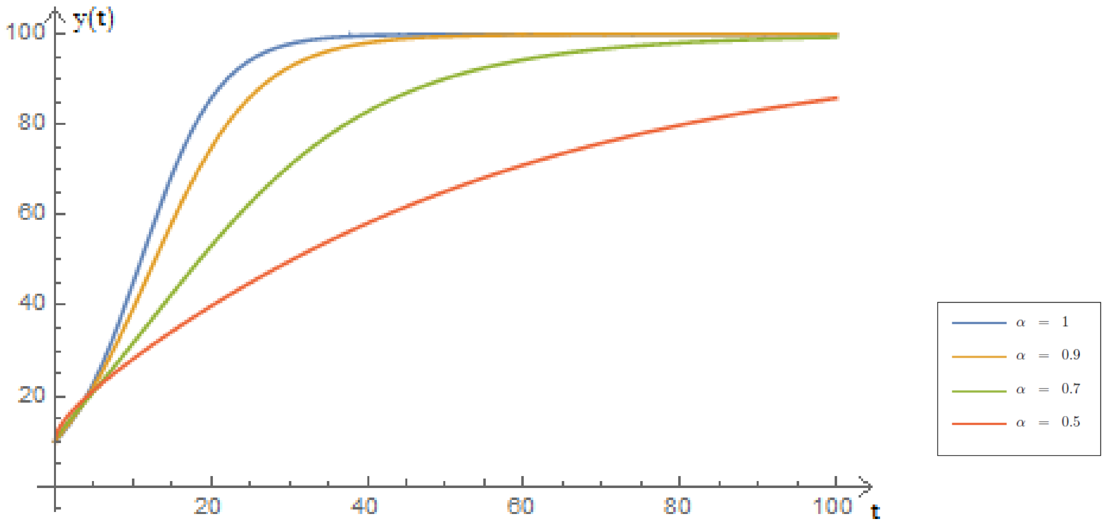

Figura 3 – Solução dada pela Eq.(5.10) com diferentes valores de α.

Ao compararmos as Figura 2 e Figura 3 podemos observar que a solução da equação logística fracionária utilizando a derivada fracionária de Katugampola se aproxima mais do caso inteiro para cada um dos diferentes valores de α uma vez comparado com a solução utilizando a derivada de Caputo, isso se dá pois podemos escrever a derivada de Katugampola em termos da derivada ordinária de ordem um.

Na próxima seção, de modo semelhante ao que fizemos nessa, abordaremos a equação logística fracionária utilizando uma derivada com o núcleo não singular, a derivada de Caputo-Fabrizio [22] . Conforme vimos, em capítulos anteriores, essa derivada não satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado. No entanto tem sido utilizada em recentes aplicações [96].

5.2.3 Derivada de Caputo-Fabrizio

Nessa seção, resolveremos a versão fracionária linearizada da equação de Verhulst, Eq.(5.1), utilizando a derivada de Caputo-Fabrizio, Eq.(4.1), a saber,

$$_{CF}D^{\alpha}x(t) \quad = \quad \frac{r}{k}\left(1 - kx(t)\right). \tag{5.11}$$

Para resolver a Eq.(5.11) usaremos a metodologia da transformada de Laplace. Aplicando a transformada de Laplace temos,

$$\mathscr{L}[{}_{CF}D^{\alpha}x(t)] = \mathscr{L}\left[\frac{r}{k}(1-kx(t))\right].$$

Pela Eq.(E.20) e considerando que a transformada de Laplace é um operador linear temos

$$\frac{M(\alpha)\left[s\mathscr{L}[x(t)]-x(0)\right]}{s(1-\alpha)+\alpha} = \frac{r}{k}\mathscr{L}[1]-r\mathscr{L}[x(t)]$$

de onde segue, isolando a transformada de Laplace da função x,

$$\mathscr{L}[x(t)] = \frac{r}{ks}\frac{s(1-\alpha)+\alpha}{s\left(M(\alpha)+(1-\alpha)r\right)+\alpha r}+\frac{M(\alpha)x(0)}{s\left(M(\alpha)+(1-\alpha)r\right)+\alpha r},$$

sendo $M(\alpha)$ tal que $M(0)=1=M(1)$. Separando o primeiro termo da equação acima de forma conveniente, podemos escrever,

$$\mathscr{L}[x(t)] = \frac{r(1-\alpha)k^{-1}+M(\alpha)x(0)}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\frac{1}{s+\frac{\alpha r}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}}+\frac{\alpha r k^{-1}}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\frac{s^{-1}}{s+\frac{\alpha r}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}}.$$

A fim de recuperar a solução $x(t)$, voltamos com a transformada inversa, logo

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}^{-1}\left[\mathscr{L}[x(t)]\right]\\ = \;&\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{r(1-\alpha)k^{-1}+M(\alpha)x(0)}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\frac{1}{s+\frac{\alpha r}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}}+\frac{\alpha r k^{-1}}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\frac{s^{-1}}{s+\frac{\alpha r}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}}\right],\end{aligned}$$

ou seja, devido a linearidade, na seguinte forma

$$\begin{aligned}x(t) = \;&\frac{r(1-\alpha)k^{-1}+M(\alpha)x(0)}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{\alpha r}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}}\right]\\ &+\frac{\alpha r k^{-1}}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{-1}}{s+\frac{\alpha r}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}}\right].\end{aligned}$$

Pela Eq.(E.9) temos,

$$\begin{aligned}x(t) = \;&\frac{r(1-\alpha)k^{-1}+M(\alpha)x(0)}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}E_1\left(\frac{-\alpha r t}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\right)\\ &+\frac{\alpha r k^{-1}}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}tE_{1,2}\left(\frac{-\alpha r t}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\right),\end{aligned}$$

onde $E_1(\cdot)$ e $E_{1,2}(\cdot)$ são as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, respectivamente. Pela Eq.(5.6) temos,

$$\left(\frac{\alpha r}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\right)tE_{1,2}\left(\frac{-\alpha r t}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\right) = 1-E_1\left(\frac{-\alpha r t}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\right).$$

Assim, a solução é dada por

$$x(t) \;=\; \frac{M(\alpha)\left[x(0)-k^{-1}\right]}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}E_1\left(\frac{-\alpha r t}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\right)+k^{-1}.$$

Voltemos agora para a variável y admitindo a mesma mudança de variável dependente,

$$\begin{aligned}\frac{1}{y(t)} &= \frac{M(\alpha)\left[\frac{1}{y(0)}-k^{-1}\right]}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}E_1\left(\frac{-\alpha r t}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\right)+k^{-1}\\ &= \frac{kM(\alpha)\left[\frac{1}{y(0)}-k^{-1}\right]}{\left(M(\alpha)+(1-\alpha)r\right)k}E_1\left(\frac{-\alpha r t}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\right)+\frac{M(\alpha)+(1-\alpha)r}{\left(M(\alpha)+(1-\alpha)r\right)k},\end{aligned}$$

que, simplificando, fornece,

$$y(t)=\frac{M(\alpha)k+(1-\alpha)rk}{kM(\alpha)\left[\frac{1}{y(0)}-k^{-1}\right]E_1\left(\frac{-\alpha r t}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\right)+M(\alpha)+(1-\alpha)r}.$$

Substituindo $y(0)=y_0$ e rearranjando a equação acima temos a solução dada por

$$y(t)=\frac{y_0k}{\frac{M(\alpha)(k-y_0)E_1\left(\frac{-\alpha r t}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}\right)}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}+y_0}. \tag{5.12}$$

Observe que a condição inicial $y(0)=y_0$ só é satisfeita quando utilizamos $\alpha=1$ [66], pois

$$y(0)=\frac{y_0k}{\frac{M(\alpha)(k-y_0)}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}+y_0}.$$

Enfim, note que ao tomarmos $\alpha=1$ recuperamos o caso inteiro.

Observemos, do mesmo modo que ocorreu com a solução utilizando as derivadas de Katugampola e Caputo, que a solução y, Eq.(5.12) tende a k quando t tende ao infinito independentemente dos valores de k, r e y_0. De fato,

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{y_0k}{\frac{M(\alpha)(k-y_0)e^{\frac{-\alpha r t}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}}}{M(\alpha)+(1-\alpha)r}+y_0}=k.$$

A Figura 4 mostra a solução dada pela Eq.(5.12) utilizando a derivada de Caputo-Fabrizio para diferentes valores da ordem da derivada, bem como utilizamos a normalização apresentada em [59], a saber, $M(\alpha)=\dfrac{2}{2-\alpha}$ para os valores de $\alpha=0,9$, $\alpha=0,7$ e $\alpha=0,5$ e consideramos $k=100$, $r=0,2$ e $y_0=10$.

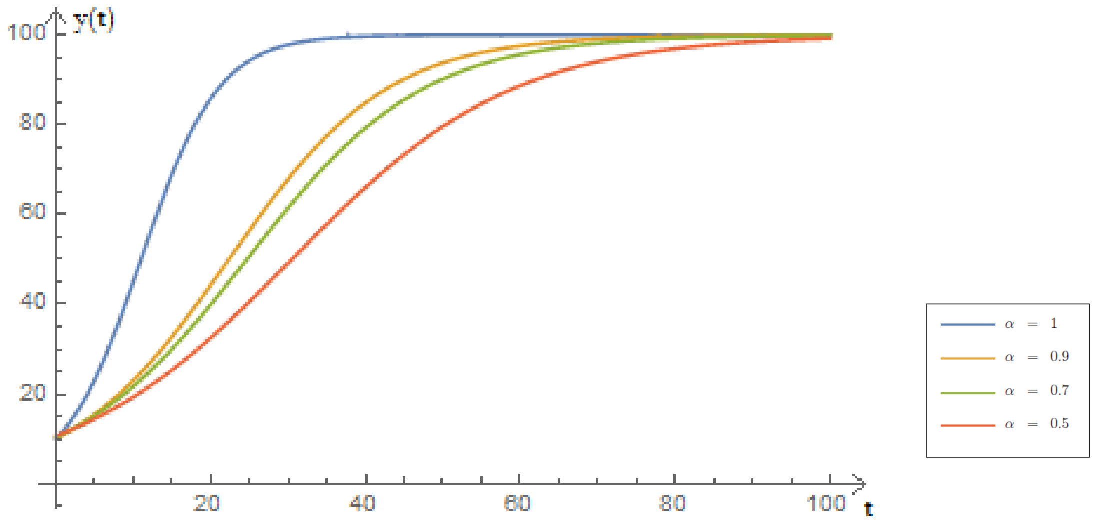

Figura 4 – Solução dada pela Eq.(5.12) com diferentes valores de α.

5.2.4 Comparação entre a solução via as diferentes derivadas

Resolvemos a equação logística, tendo em mente que resolvemos a equação linearizada e admitimos a mudança de variável dependente, utilizando três tipos de derivadas fracionárias, as derivadas de Caputo, Caputo-Fabrizio e Katugampola. Observamos que essas três soluções recuperam o caso inteiro quando tomamos a ordem da derivada igual a um. Além disso, a solução apresenta o comportamento assintótico quando t tende ao infinito. Nas três versões observamos também pelas Figura 2, Figura 3 e Figura 4 que ao tomarmos diferentes ordens das derivadas as soluções apresentam comportamentos diferentes em relação à convergência para a capacidade de sustentação ambiental k, isto é, podemos ver que quando mais distante o valor da ordem dessa derivada encontra-se de um, mais lenta é a convergência, nos três casos discutidos.

Enfim, pelas Eq.(5.10) e Eq.(5.12) a solução da equação logística fracionária, utilizando as respectivas derivadas de Katugampola e Caputo-Fabrizio, é dada em termos da função exponencial, já a solução que utiliza a derivada de Caputo é dada em termos da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, Eq.(5.7). A **Figura 5** mostra a solução da equação logística fracionária, conforme observação feita em relação à não linearidade, utilizando essas derivadas para $\alpha = 0.95$, bem como para a derivada de Caputo-Fabrizio utilizamos a normalização apresentada em [59] e consideramos $k = 100$, $r = 0,2$ e $y_0 = 10$.

Podemos observar pela Figura 5 que a solução que mais se aproxima do caso inteiro é a que utiliza a derivada de Katugampola, isso se deve ao fato que podemos escrever essa derivada em termos de uma derivada de ordem um, conforme vimos no **Capítulo 3**, Eq.(3.6). Por outro lado, a solução que difere um pouco mais do caso inteiro é a que utiliza a derivada de Caputo-Fabrizio. Observamos também que quanto maior

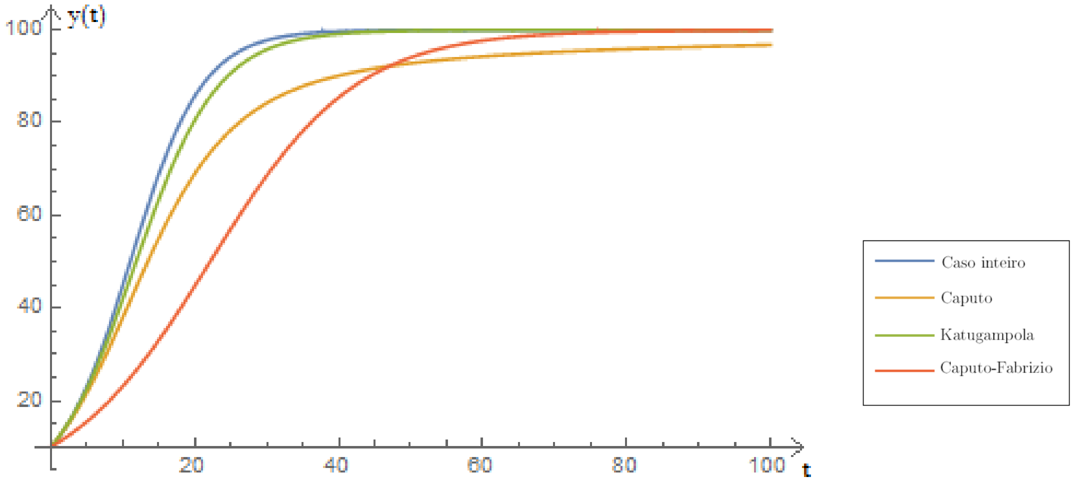

Figura 5 – Comparação das soluções da equação logística utilizando as diferentes formulações da derivada sendo a ordem $\alpha = 0.95$.

for o valor de t mais as soluções, utilizando as derivadas fracionárias, se aproximam da solução inteira, justamente pelo fato de todas tenderem a k quando t tende ao infinito.

Conclusão

Tendo em vista o crescente número de formulações envolvendo o termo derivada fracionária, apresentamos nesse trabalho dois critérios para um operador ser classificado como derivada fracionária, a saber, o critério proposto em 1975 por Ross [76] e o proposto, quarenta anos depois, por Ortigueira e Machado [70], ambos critérios são compostos de cinco propriedades e se diferenciam em apenas uma propriedade, no critério de Ross há “a derivada fracionária de uma função analítica é analítica” enquanto no de Ortigueira e Machado temos a propriedade “vale a generalização da regra de Leibniz”.

Classificamos as derivadas ditas fracionárias, com a ordem sendo uma constante real, existentes na literatura em três classes, sendo elas, derivadas clássicas, derivadas locais e derivadas com núcleo não singular. Verificamos se estas podem ser chamadas de derivadas fracionárias segundo o critério de Ortigueira e Machado, uma vez que julgamos esse mais restritivo do que o proposto por Ross.

Ao verificar a classe das derivadas clássicas quanto ao critério de Ortigueira e Machado, observamos que as derivadas analisadas cumprem as propriedades de tal critério, podendo se diferenciar um pouco no que se diz respeito à propriedade da generalização da regra de Leibniz, mas quando não temos a regra exatamente igual a proposta, temos ela somada ou subtraída a algum termo. Portanto, de acordo com tal critério, os operadores presentes nessa classe podem ser chamados de derivadas fracionárias.

Ao analisarmos algumas derivadas que compõem a segunda classe, a saber, as derivadas locais, percebemos que essas podem ser escritas em termos da derivada ordinária de ordem um. Essas derivadas não cumprem todos os itens do critério em questão, em particular, as propriedades referentes à lei dos expoentes e à generalização da regra de Leibniz em que nenhuma das derivadas analisadas satisfaz. No que diz respeito à derivada do produto de duas funções, esses operadores satisfazem a clássica regra de Leibniz, justamente devido à correspondência dessas derivadas com a derivada de ordem um. Portanto, essa classe não pode ser considerada derivada fracionária. Diante disso, apresentamos cinco propriedades que essa classe de operadores satisfaz.

As derivadas verificadas da terceira classe, classe das derivadas com núcleo não singular, nenhuma delas satisfaz à generalização da regra de Leibniz conforme proposta no critério de Ortigueira e Machado, sendo assim apresentamos uma regra do tipo Leibniz para cada uma delas, e em quase todas as derivadas analisadas, essa regra é dada em termos da integral fracionária de Riemann-Liouville. A única propriedade que todas cumprem é a do operador linear, as demais propriedades não temos um padrão, algumas satisfazem, outras não.

Tendo em vista as três classes de derivadas, no Capítulo 5, escolhemos uma derivada de cada classe, a saber, as derivadas de Caputo, Katugampola e Caputo-Fabrizio, com o intuito de resolvermos a equação logística em sua versão fracionária. Para isso linearizamos a equação diferencial para utilizarmos a metodologia da transformada de Laplace. As três soluções recuperam o caso inteiro quando tomamos a ordem da derivada igual a um. Além disso, as soluções apresentam o comportamento assintótico quando o tempo t tende ao infinito, igual ocorre ao caso inteiro.

Uma continuação natural desse trabalho é analisar possíveis novas representantes de uma das três classes de derivadas ditas fracionárias, clássica, local e com núcleo não singular, que não constam no presente trabalho, bem como propor um critério de classificação para as derivadas com ordem variável.

Referências

[1] ABDELHAKIM, A.,A. MACHADO, J.A.T., *A critical analysis of the conformable derivative*, Nonlinear Dynamics, **55**, 1-11 , (2019).

[2] ABDELJAWAD, T., *On conformable fractional calculus*, J. Comput. Appl. Math., **279**, 57-66, (2015).

[3] ABLOWITZ, M. J., FOKAS, A. S., *Complex Variables: Introduction and Applications.* Cambridge, New York, (1997).

[4] AGARWAL, P., CHOI, J., PARIS, R. B., *Extended Riemann-Liouville fractional derivative operator and its applications*, J. Nonlinear Sci. Appl., **8**, 451-466, (2015).

[5] ALMEIDA, R., *Caputo-Hadamard fractional derivative of variable order*, Num. Funct. Anal. Opt., **38**, 1-19, (2017).

[6] ALMEIDA, R., *A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, **44**, 460-481, (2017).

[7] ALMEIDA, R., GUZOWSKA, M., ODZIJEWICZ, T., *A remark on local fractional calculus and ordinary derivatives*, Open Math., **14**, 1122-1124, (2016).

[8] AKKURT, A., YILDIRIM, M. E., YILDIRIM, H., *New generalized fractional derivative and integral*, arXiv:1704.03299, (2017).

[9] ANDERSON, D. R., ULNESS, D. J., *Properties of the Katugampola fractional derivative with potential application in quantum mechanics*, J. Math. Phys., **56**, 063502, (2015)

[10] ATANGANA, A., *On the new fractional derivative and application to nonlinear Fisher's reaction-diffusion equation*, Appl. Math. Comput., **273**, 948-956 (2016).

[11] ATANGANA, A.; BALEANU, D., *New fractional derivative without nonlocal and nonsingular kernel: theory and application to heat transfer model.*, Therm. Sci., **20**, 763-769 (2016).

[12] ATANGANA, A., GOUFO, E. F. D., *Extension of matched asymptotic method to fractional boundary layers problems.* Mathematical Problems in Engineering, **2014**, http://dx.doi.org/10.1155/2014/107535, (2014).

[13] ATANGANA, A., NOUTCHIE, S. C. O.,*Model of break-bone fever via beta-derivatives*, Research International, **2014**, http://dx.doi.org/10.1155/2014/523159, (2014).

[14] BAYOUR, B., TORRES, D. F. M., *Existence of solution to a local fractional nonlinear differential equation*, J. Comp. Appl. Math., **312**, 127-133, (2017)

[15] BELLMAN, R. E., ROTH, R. S., *The Laplace transform* . World Scientific, Singapore, (1984).

[16] CALHEIROS, J. C., *O cálculo com enfoque geométrico*, Mestrado Profissional, Imecc-Unicamp, Campinas, (2016).

[17] CAMARGO, R. F., *Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard*, Dissertação de Mestrado, Imecc-Unicamp, Campinas, (2005).

[18] CAMARGO, R. F., *Cálculo Fracionário e Aplicações*, Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas, (2009).

[19] CAMARGO, R. F., OLIVEIRA, E. C., *Cálculo Fracionário*. Livraria da Física, São Paulo, (2015).

[20] CAPUTO, M., *Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II.* Geophys. J. Int., **13**, 529–539 (1967).

[21] CAPUTO, M., *Elasticità e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna, (1969).

[22] CAPUTO, M., FABRIZIO, M., *A new definition of fractional derivative without singular kernel*, Prog. Fract. Differ. Appl., **1**, 73-85, (2015).

[23] CAPUTO, M., FABRIZIO, M. *Applications of new time and spatial fractional derivatives with exponential kernels*, Prog. Fract. Differ. Appl., **2**, 1-11 (2016).

[24] CHEN, Y. W., *Hoelder continuity and initial value problems of mixed type differential equations*. Comment. Math. Helv., **33** , 296– 321. (1959)

[25] CHEN, W., *Fractional and fractal derivatives modeling of turbulence*, arXiv:nlin/0511066v1, IAPCM Report, (2005).

[26] CHEN, W., *Time–space fabric underlying anomalous diffusion*, Chaos, Solitons and Fractals, **28**, 923-929, (2006).

[27] CHEN, W., SUN, H., ZHANG, X., KOROSAK, D., *Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives*, Comp. Math. Appl., **59**, 1754–1758, (2010).

[28] CHEN, W., YAN, Y., ZHANG, X., KOROSAK, D., *On the local fractional derivative*, J. Math. Anal. Appl., 362, 17–33, (2010).

[29] CHUNG, W. S., *Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative*, J. Comput. Appl. Math., **290**, 150–158, (2015)

[30] DZHRBASHYAN M. M., NERSESYAN, A. B., *Fractional derivatives and the Cauchy problem for fractional differential equation*, Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR, 3, 3-29 (1968).

[31] EROGLU, B. B. I, AVCI, D., OZDEMIR, N., *Optimal control problem for a conformable fractional heat conduction equation*, Acta Physica Polonica A, **132**, 658-662, (2017)

[32] FURATI, K. M., KASSIM, M. D., TATAR, N.e-., *Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative.* Comp. Math. Appl., **64**, 1616-1626, (2012).

[33] GARRA, R., GORENFLO, R., POLITO, F., TOMOVSKI, Z., *Hilfer-Prabhakar derivatives and some applications*, Appl. Math. Comput., **242**, 576-589, (2014).

[34] GÓMEZ-AGUILAR, J. F., LÓPEZ-LÓPEZ, M. G., ALVARADO-MARTÍNEZ, V. M., REYES-REYES, J., ADAM-MEDINA, M., *Modeling diffusive transport with a fractional derivative without singular kernel*, Phys. A, **447**, 467- 481, (2016).

[35] GÓMEZ-AGUILAR, J. F.,*Irving–Mullineux oscillator via fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel*, Chaos, Solitons and Fractals, **95**, 179-186, (2017).

[36] GORENFLO R., KILBAS, A. A., MAINARDI, F.,ROGOSIN, S. V.,*Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer, Heidelberg, (2014).

[37] GRÜNWALD A. K., *Derivationen und deren Anwendung*, Z. Angew. Math. Phys., **12**, 441–480 (1867).

[38] HE, J. H, *A tutorial review on fractal spacetime and fractional calculus.* Int. J. Theor. Phys., **53**, 3698-3718, (2014).

[39] HILFER, R., Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific Publishing, New York, (2000).

[40] JARAD, F., BALEANU, D., ABDELJAWAD, A., Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives. Adv. Differ. Equ. **2012**, 1-8, (2012).

[41] JUMARIE, G., *On the representation of fractional Brownian motion as an integral with respect to* $(dt)^\alpha$, Appl. Math. Lett., **18**, 739-748 (2005).

[42] JUMARIE, G., *Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results.* Comp. Math. Appl., **51**, 1367-1376, (2006).

[43] JUMARIE, G., *Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann–Liouville derivative for non-differentiable functions.* Applied Math. Lett., **22**, 378–385, (2009).

[44] KAMOCKI, R., *A new representation formula for the Hilfer fractional derivative and its application.* J. Comp. App. Math., **308**, 39-45, (2016).

[45] KATUGAMPOLA, U. N., *Correction to "What is a fractional derivative?" by Ortigueira and Machado [Journal of Computational Physics, Volume 293, 15 July 2015, Pages 4–13. Special issue on Fractional PDEs]* . J. Comp. Phys., **321**, 1255-1257, (2016).

[46] KATUGAMPOLA, U. N., *A new fractional derivative with classical properties.* J. Amer. Math. Soc., arXiv:1410.6535, (2014).

[47] KATUGAMPOLA, U. N., *New approach to a generalized fractional integral.* Appl. Math. Comput., **218**, 860–865, (2011).

[48] KHALIL, R., HORANI, M. A., YOUSEF, A., SABABHEH, M., *A new definition of fractional derivative.* J. Comp. Appl. Math., **264**, 65-70, (2014).

[49] KILBAS, A. A., *Hadamard-type fractional calculus.* J. Korean Math. Soc., **38**, 1191–1204, (2001).

[50] KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. M., TRUJILO J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Mathematics Studies, **207**, Amsterdam: Elsevier; (2006).

[51] KOLWANKAR, K. M., *Local fractional calculus*: *A review*, arXiv:1307.0739 (2013).

[52] KOLWANKAR, K. M., GANGAL, A. D. *Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimension*, Chaos, **6**, 505-513, (1996).

[53] KOLWANKAR, K. M., GANGAL, A. D. *Local fractional derivative and fractal functions of several variables*, Fract. Eng., arXiv:physics/9801010, (1997).

[54] KWOK, Y. K., *Applied Complex Variables for Scientists and Engineers.* Cambridge, New York, (2010).

[55] LEPAGE, W. R., *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers.* Dover Publications, New York, (1980).

[56] LETNIKOV A. V., *Theory of differentiation with an arbitrary index (Russian)*, Matem. Sbornik, **3**, 1-66, (1868).

[57] LI, C., DENG, W., *Remarks on fractional derivatives*, Appl. Math. Comp., **187**, 777-784, (2007).

[58] LIU, C. S., *Counter examples on Jumarie's two basic fractional calculus formulae*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., **22**, 92-94, (2015).

[59] LOSADA, J., NIETO, J. J., *Properties of a new fractional derivative without singular kernel*, Prog. Fract. Differ. Appl., **1**, 87-92 (2015).

[60] MAINARDI, F., *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity.* Imperial College Press, London, (2010).

[61] MITTAG - LEFFLER, G. M., *Sur la nouvelle fonction* $E_\alpha(x)$. C. R. Acad. Sci. Paris, **137**, 554–558, (1903)

[62] OLIVEIRA, D. S, OLIVEIRA, E. C., *Hilfer-Katugampola fractional derivative*, Comput. Appl. Math., 1-19 (2017).

[63] OLIVEIRA, D. S, OLIVEIRA, E. C., *On a Caputo-type fractional derivative*, Adv. Pure Appl. Math., https://doi.org/10.1515/apam-2017-0068, (2018).

[64] OLIVEIRA, D. S, OLIVEIRA, E. C., *On the generalized* (k,ρ)*-fractional derivative*, Progr. Fract. Diff. Appl., **4**, 133-145, (2018).

[65] OLIVEIRA, E. C., *Métodos Analíticos de Integração.* Livraria da Física, São Paulo, (2010).

[66] OLIVEIRA, E. C., JAROSZ, S., VAZ JR., J., *Fractional calculus via Laplace transform and its application in relaxation processes.* Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, **69**, 58-72, (2019).

[67] OLIVEIRA, E. C., MACHADO, J. A. T., *A review of definitions for fractional derivatives and integral.* Math. Probl. Eng., **2014**, 1-6, (2014).

[68] ORTIGUEIRA, M. D., *The fractional quantum derivative and its integral representations.* Commun. Nonl. Sci. Numer. Simulat., **15**, 956-962, (2010).

[69] ORTIGUEIRA, M. D., *Fractional Calculus for Scientists and Engineers.* Springer, New York, (2011).

[70] ORTIGUEIRA, M. D., MACHADO, J. A. T., *What is a fractional derivative?*. J. Comp. Phys., **293**, 4-13, (2015).

[71] ORTIGUEIRA, M. D., MACHADO, J. A. T., *A critical analysis of the Caputo–Fabrizio operator*. Commun. Nonl. Sci. Numer. Simulat., **59**, 608-611, (2018).

[72] PANCHAL, S. K., KHANDAGALE, A. D., and DOLE, P. V., *k-Hilfer-Prabhakar fractional derivatives and its applications*, Indian J. Math., **59**, 367-383, (2017).

[73] QASSIM, M. D., FURATI, K. M., and TATAR, N.-E., *On a differential equation involving Hilfer-Hadamard fractional derivative.* Abst. Appl. Anal., **2012**, http://dx.doi.org/10.1155/2012/391062, (2012)

[74] RAFEIRO, H., YAKHSHIBOEV, M., *The Chen-Marchaud fractional integro-differentiation in the variable exponent Lebesgue space*, Fract. Cal. Appl. Anal., **14**, 343–360, (2011).

[75] RODRIGUES, F. G., OLIVEIRA. E. C., *Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática.* Rev. Bras. Ens. Fís., **37**, 1-12, (2015).

[76] ROSS, B., *A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus.* Fract. Cal. Appl., **57**, 1-36, (1975).

[77] SALIM, T. O., FARAJ, A. W., *A generalization of Mittag-Leffler function and integral operator associated with fractional calculus*, J. Fract. Cal. Appl., 3, 1 - 13, 2012.

[78] SAMKO, S. G., KILBAS, A. A., MARICHEV, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives*: *Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, (1993).

[79] SCHERER, R., KALLA, S. L., TANG Y., HUANG, J., *The Grünwald–Letnikov method for fractional differential equations.* Comp. Math. Appl.,**62**, 902-917, (2011).

[80] SHEIKH, N. A., ALI, F., SAQIB, M., KHAN, I., JAN, S. A. A., ALSHOMRANI, A. S., ALGHAMDI, M. S., *Comparison and analysis of the Atangana–Baleanu and Caputo-Fabrizio fractional derivatives for generalized Casson fluid model with heat generation and chemical reaction* . Physics, **7**, 789-800, (2017).

[81] SHUKLA, A. K., PRAJAPATI J. C., *On a generalization of Mittag–Leffler function and its properties*, J. Math. Anal. Appl., **336**, 797–811, 2007.

[82] SONIN, N. Ya., *On differentiation with arbitrary index*, Moscou Mat. Sb., **6**, 1-38 (1869).

[83] SOUSA, J. V. C., *Equação de difusão tempo-fracionária (Taxa de sedimentação de eritrócitos)*, Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas, (2018).

[84] SOUSA, J. V. C., OLIVEIRA, E. C., *On the ψ-Hilfer fractional derivative*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., **60** 72-91 (2018).

[85] SOUSA, J. V. C., OLIVEIRA, E. C., *On the local $\mathcal{M}$-derivative*, Progr. Fract. Differ. Appl., **4**, 479 - 492, (2018).

[86] SOUSA, J. V. C., OLIVEIRA, E. C., *A truncated $\mathcal{V}$-fractional derivative in $\mathbb{R}^n$*, Turkish J. Math.Comp. Sci., **8**, 49-64, (2018).

[87] SOUSA, J. V. C., OLIVEIRA, E. C., *Truncated $\mathcal{V}$-fractional Taylor's formula with applications*, Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **19**, 525-546, (2018).

[88] SOUSA, J. V. C., OLIVEIRA, E. C., *Mittag-Leffler function and the truncated $\mathcal{V}$-fractional derivative*, Mediterrr. J. Math., 14:244 (2017).

[89] SOUSA, J. V. C., OLIVEIRA, E. C., *A new truncated $\mathcal{M}$-fractional derivative type unifying some fractional derivative type with classical properties*, Int. J. Anal. and Appl., **16**, 83-96 (2018).

[90] SOUSA, J. V. C., OLIVEIRA, E. C., *Two new fractional derivatives of variable order with non-singular kernel and fractional differential equation*, Comp. Appl. Math., 1-20, (2018).

[91] SUGUMARANA, H., IBRAHIMB, R. W., KANAGARAJANA, K., *On ψ-Hilfer fractional differential equation with complex order.* Univ. J. Math. Appl., **1**, 33-38, (2018).

[92] SUN, H., HAO, X., ZANG, Y., BALEANU, D., *Relaxation and diffusion models with non-singular kernel.* Phys. A, 468, 590–596, (2017).

[93] TARASOV, V. E., *No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative.* Commun. Nonlinear Sci. Num. Simulat, **18**, 2945-2948, (2013).

[94] TARASOV, V. E., *No locality. No fractional derivative.* Commun. Nonlinear Sci. Num. Simulat. **62**, 157-163 (2018).

[95] TEODORO, G. S., *Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler*, Dissertação de Mestrado, Imecc-Unicamp, Campinas, (2014).

[96] TEODORO, G. S., OLIVEIRA, D. S., OLIVEIRA, E. C., *Sobre derivadas fracionárias.* Rev. Bras. Ens. Fís., **40**, 1-26, (2018).

[97] TEODORO, G. S., OLIVEIRA, E. C., *Derivadas fracionárias: critérios para classificação.* Rev. Elet. Paulista Matemática, **10**, 1-10, (2017).

[98] VERHULST, P. F., *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement.* Corresp. Math. Physics **10**,113-121, (1838).

[99] VERHULST, P. F., *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population.* Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, **18**, 1-41, (1844)

[100] WELY H., *Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung.* Zürich. Naturf. Ges. , **62**, 296–302, (1917).

[101] WIMAN, A.,*Uber den fundamental Satz in der Theorie der Funktionen* $E_\alpha(x)$, Acta Math., **29**, 191- 201, (1905)

[102] YANG, X. J., *New general fractional-order rheological models within kernels of Mittag-Leffler functions*, Romanian Rep. Phys., **69**, 1-15, (2017).

[103] YANG, X. J., *New rheological problems involving general fractional derivatives within nonsingular power-law kernel*, Proceedings of the Romanian Academy - Series A, **19**, 45-52, (2018).

[104] YANG, A. M., HAN, Y., LI, J., LIU, W., X., *On steady heat flow problem involving Yang-Srivastava-Machado fractional derivative without singular kernel*, Thermal Science, **20**, 717-721, (2016).

[105] YANG, X. J., SRIVASTAVA, H. M., MACHADO, J. A. T., *A new fractional derivative without singular kernel. Application to the modelling of the steady heat flow*, Thermal Science, **20**, 753-756 (2016).

[106] YANG, X. J., SRIVASTAVA, H. M., TORRES, D. F. M., DEBBOUCHE, A., *General fractional-order anomalous diffusion with non-singular power-law kernel*, Thermal Science, **1**, S1-S9 (2017).

[107] YANG, X. J., MACHADO, J. A. T., BALEANU, D., *Anomalous diffusion models with general fractional derivatives within the kernels of the extended Mittag-Leffler type functions*, Romanian Reports in Physics, **69**, S1-S9 (2017).

[108] ZULFEQARR, F., UJLAYAN, A., AHUJA, P., *A new fractional derivative and its fractional integral with some applications*, arXiv:1705.00962v1, (2017).

APÊNDICE A

Derivadas fracionárias e a regra de Leibniz

Tarasov [93] em 2013 apresentou um teorema que nos garante que operadores lineares que satisfazem a clássica regra de Leibniz não são derivadas fracionárias. Esse apêndice será dedicado à apresentação desse resultado. No entanto, antes de nos depararmos com esse teorema é necessário alguns resultados que serão necessários para a sua demonstração.

Teorema A.1 (Hadamard)**.** *Se*[1] $f \in C^1(U)$ *em uma vizinhança* U *do ponto* x_0 *então* f *pode ser representada da forma*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g(x),$$

sendo $g \in C^1(U)$*.*

Demonstração. Seja F uma função definida por $F(t) = f(x_0 + (x - x_0)t)$. Observemos que $F(0) = f(x_0)$ e $F(1) = f(x)$. Pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}F(t)dt = F(1) - F(0) = f(x) - f(x_0). \tag{A.1}$$

Por outro lado, utilizando a regra da cadeia, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{dt}F(t)dt &= \int_0^1 \frac{d}{dt}[f(x_0 + (x - x_0)t)]dt \\ &= (x - x_0)\int_0^1 f'(x_0 + (x - x_0)t)dt. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Tomando $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{df}{dt}\right)(x_0 + (x - x_0)t)dt$ e pelas Eq.(A.1) e Eq.(A.2) temos $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g(x)$, como queríamos mostrar. ■

[1] $C^m(U)$ é o espaço das funções m vezes continuamente diferenciáveis em $U \subset \mathbb{R}$.

Lema A.1. *Se E é um operador linear que satisfaz a regra de Leibniz, a saber, $E(f(x)g(x)) = g(x)Ef(x) + f(x)Eg(x)$, então $E1 = 0$.*

Demonstração. Como E é um operador linear e vale a regra de Leibniz podemos escrever,

$$E1 = E1.1 = 1E1 + 1E1 = 2E1.$$

Logo, $E1 = 0$. ■

Observemos pelo **Lema A.1** que um operador linear que satisfaz a regra de Leibniz, quando aplicado em uma constante será zero, de fato para $c \in \mathbb{R}$ temos $Ec = cE1 = 0$.

Agora apresentaremos o teorema que nos garante que: se um operador não viola a regra de Leibniz então ele não é uma derivada fracionária.

Teorema A.2. *Se E é um operador linear que satisfaz a regra de Leibniz e pode ser aplicado as funções $C^2(U)$, sendo $U \subset \mathbb{R}$ uma vizinhança de um ponto x_0, então esse operador é uma derivada de ordem um, ou seja,*

$$E = a(x)\frac{d}{dx},$$

onde a é uma função em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $f \in C^2(U)$ então pelo **Teorema A.1** temos que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g(x), \tag{A.3}$$

sendo $g \in C^2(U)$. Utilizando novamente o **Teorema A.1** podemos escrever

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)h(x), \tag{A.4}$$

sendo $h \in C^2(U)$. Então, pelas Eq.(A.3) e Eq.(A.4) podemos escrever

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g(x_0) + (x - x_0)^2 h(x). \tag{A.5}$$

Assim, $f'(x) = g(x_0) + 2(x - x_0)h(x) + (x - x_0)^2 h'(x)$ e portanto $f'(x_0) = g(x_0)$. Reescrevendo a Eq.(A.5) temos

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 h(x). \tag{A.6}$$

Aplicando o operador linear E na Eq.(A.6) e considerando que a regra de Leibniz vale, temos,

$$\begin{aligned}
(Ef)(x) &= Ef(x_0) + E[(x - x_0)f'(x_0)] + E[(x - x_0)^2 h(x)] \\
&= f'(x_0)E(x - x_0) + h(x)E[(x - x_0)^2] + (x - x_0)^2(Eh)(x) \\
&= f'(x_0)E(x - x_0) + 2h(x)(x - x_0)E(x - x_0) + (x - x_0)^2(Eh)(x) \\
&= f'(x_0)Ex + 2h(x)(x - x_0)Ex + (x - x_0)^2(Eh)(x).
\end{aligned}$$

Seja $a(x) = Ex$ assim $(Ef)(x) = f'(x_0)a(x) + 2h(x)(x - x_0)a(x) + (x - x_0)^2(Eh)(x)$. Portanto, $(Ef)(x_0) = a(x_0)f'(x_0)$, como queríamos mostrar. ■

APÊNDICE B

Generalização da regra de Leibniz para o caso inteiro

O quinto item do critério proposto por Ortigueira e Machado [70], afirma que um operador deve satisfazer a generalização da regra de Leibniz, a saber, $D^\alpha(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}D^k f(x)D^{\alpha-k}g(x)$ a fim de que seja considerado uma derivada fracionária. Nesse apêndice mostraremos que a generalização da regra de Leibniz é valida quando a ordem α da derivada é um inteiro positivo n. Iremos mostrar esse resultado por indução, no entanto observemos primeiro que $\binom{n}{k}$ é zero quando $k > n$, assim mostrar que $D^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}D^k f(x)D^{n-k}g(x)$ é o mesmo que mostrar que $D^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k f(x)D^{n-k}g(x)$. Assim, para $n = 1$ temos

$$D^1(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}D^k f(x)D^{1-k}g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

que é o conhecido resultado do cálculo, a regra da derivada do produto. Vamos agora supor que vale a generalização da regra de Leibniz para $n = m$, ou seja, vamos supor que vale a igualdade $D^m(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D^k f(x)D^{m-k}g(x)$ e iremos mostrar que vale quando $n = m+1$ e portanto $D^{m+1}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}D^k f(x)D^{m+1-k}g(x)$. Considerando a convergência uniforme da série temos,

$$\begin{aligned}
D^{m+1}(f(x)g(x)) &= \frac{d}{dx}D^m(f(x)g(x)) \\
&= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D^k f(x)D^{m-k}g(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left[D^{k+1}f(x)D^{m-k}g(x) + D^k f(x)D^{m-k+1}g(x)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D^{k+1}f(x)D^{m-k}g(x) + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D^k f(x)D^{m-k+1}g(x).
\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de índices $k \to k-1$ na primeira série podemos escrever,

$$\begin{aligned}
D^{m+1}(f(x)g(x)) &= \sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}D^k f(x)D^{m-k+1}g(x) + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D^k f(x)D^{m-k+1}g(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k-1}D^k f(x)D^{m-k+1}g(x) \\
&+ D^{m+1}f(x)g(x) + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D^k f(x)D^{m-k+1}g(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m}D^k f(x)D^{m-k+1}g(x)\left[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}\right] + D^{m+1}f(x)g(x) \quad \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

Observemos que para $m, k \in \mathbb{N}$, vale a relação

$$\begin{aligned}
\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} &= \frac{m!}{(m-k+1)!(k-1)!}\frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&= \frac{km! + (m-k+1)m!}{k!(m-k+1)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} = \binom{m+1}{k}. \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}$$

Então, pelas Eq.(B.1) e Eq.(B.2) podemos escrever

$$\begin{aligned}
D^{m+1}(f(x)g(x)) &= \sum_{k=0}^{m}D^k f(x)D^{m-k+1}g(x)\binom{m+1}{k} + D^{m+1}f(x)g(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}D^k f(x)D^{m+1-k}g(x).
\end{aligned}$$

Logo, vale a generalização da regra de Leibniz quando a ordem da derivada é um inteiro positivo.

De modo análogo, podemos mostrar por indução que

$$D^n(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}D^{n-k}f(x)D^k g(x), \qquad \text{(B.3)}$$

sendo n um inteiro positivo. Logo, $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}D^{n-k}f(x)D^k g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}D^k f(x)D^{n-k}g(x)$.

APÊNDICE C

Soma de produto de coeficientes binominais

Nesse apêndice iremos demonstrar um resultado envolvendo o somatório do produto de dois coeficientes binomiais, que foi utilizado no decorrer do texto. Mostraremos que vale a Eq.(2.4), a saber,

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{\alpha}{i} \binom{\beta}{m-i} = \binom{\alpha+\beta}{m}.$$

Pelo **Lema 2.2** temos,

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{(-1)^i \Gamma(i-\alpha)}{i!\Gamma(-\alpha)} \quad \text{e} \quad \binom{\beta}{m-i} = \frac{(-1)^{m-i}\Gamma(m-i-\beta)}{(m-i)!\Gamma(-\beta)},$$

assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} \binom{\alpha}{i} \binom{\beta}{m-i} &= \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i \Gamma(i-\alpha)}{i!\Gamma(-\alpha)} \frac{(-1)^{m-i}\Gamma(m-i-\beta)}{i!\Gamma(-\beta)} \\
&= \frac{(-1)^m}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} \sum_{i=0}^{m} \frac{\Gamma(i-\alpha)\Gamma(m-i-\beta)}{i!(m-i)!}.
\end{aligned}$$

A partir da relação entre as funções gama e beta, $B(i-\alpha, m-i-\beta) = \dfrac{\Gamma(i-\alpha)\Gamma(m-i-\beta)}{\Gamma(m-\alpha-\beta)}$, temos,

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{\alpha}{i} \binom{\beta}{m-i} = \frac{(-1)^m \Gamma(m-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} \sum_{i=0}^{m} \frac{B(i-\alpha, m-i-\beta)}{i!(m-i)!}.$$

Utilizando a representação integral para a função beta podemos escrever,

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{\alpha}{i} \binom{\beta}{m-i} = \frac{(-1)^m \Gamma(m-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!(m-i)!} \int_0^1 \xi^{i-\alpha-1}(1-\xi)^{m-i-\beta-1} d\xi.$$

Trocando a ordem da integração e rearranjando em i temos,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{m-i} &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^1 \xi^{-\alpha-1}(1-\xi)^{m-\beta-1}\sum_{i=0}^{m}\frac{\xi^i(1-\xi)^{-i}}{i!(m-i)!}d\xi \\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^1 \xi^{-\alpha-1}(1-\xi)^{m-\beta-1}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^i d\xi.\end{aligned}$$

Somando em i, utilizando a soma (progressão geométrica),

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^i = \left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)^m = \frac{1}{(1-\xi)^m}$$

podemos escrever,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{m-i} &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^1 \xi^{-\alpha-1}(1-\xi)^{m-\beta-1}\frac{1}{(1-\xi)^m}d\xi \\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_0^1 \xi^{-\alpha-1}(1-\xi)^{-\beta-1}d\xi \\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}B(-\alpha,-\beta) \\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(-\alpha-\beta)} \\ &= \frac{(-1)^m\Gamma(m-\alpha-\beta)}{m!\Gamma(-\alpha-\beta)}.\end{aligned}$$

Novamente pelo **Lema 2.2** temos,

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{m-i} = \binom{\alpha+\beta}{m}.$$

APÊNDICE D

Fórmula de reflexão de Euler

A fórmula de reflexão de Euler, cujo nome é uma homenagem a Leonhard Euler, mostra uma relação entre a função trigonométrica seno e a função gama. Nesse apêndice, iremos demonstrar essa fórmula, a saber,

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi a)},$$

com $0 < a < 1$. Para isso usaremos a relação entre as funções gama e beta,

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Assim, explicitando a função Beta, temos

$$B(a, 1-a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \Gamma(a)\Gamma(1-a).$$

Logo, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(1-a) &= B(a, 1-a) \\
&= \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt \\
&= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t} dt + \int_1^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt.
\end{aligned}$$

Vamos considerar a mudança $t = \dfrac{1}{x}$ na segunda integral, assim

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(1-a) &= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t} dt - \int_1^0 \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{a-1} x^{-2}}{1+\frac{1}{x}} dx \\
&= \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{x^{-a}}{x+1} dx.
\end{aligned}$$

Agora reescrevemos as integrais acima utilizando a série geométrica,

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k, \tag{D.1}$$

para $|t| < 1$.

De fato, a Eq.(D.1) é verdadeira, considerando a soma parcial,

$$a_n = 1 - t + t^2 + \cdots + t^n$$

e

$$ta_n = t - t^2 + \cdots - t^n + t^{n+1},$$

podemos escrever,

$$a_n + ta_n = 1 + t^{n+1}$$

e, portanto,

$$a_n = \frac{1 + t^{n+1}}{1 + t}.$$

Tomando o limite com n tendendo ao infinito temos que vale a Eq.(D.1) desde que $|t| < 1$. Portanto, utilizando a Eq.(D.1) temos

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k t^{a-1} dt + \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k t^{-a} dt.$$

Considerando a convergência uniforme da série acima podemos escrever,

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(1-a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k t^{k+a-1} dt + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k t^{k-a} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+a} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k-a+1}. \end{aligned}$$

Separando o termo onde $k = 0$ no primeiro somatório e considerando a mudança $k \to k-1$ no segundo somatório temos,

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(1-a) &= \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k-a} \\ &= \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[\frac{-1}{k+a} + \frac{1}{k-a} \right] \\ &= \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[\frac{2a}{k^2 - a^2} \right]. \end{aligned} \tag{D.2}$$

Precisamos agora, para concluir essa demonstração, mostrar que

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[\frac{2a}{k^2 - a^2} \right] = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}$$

para isso vamos calcular a série de Fourier da função $f(x) = \pi \cos(ax)$ em $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Dada uma função f periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, a série de Fourier dessa função f é dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

sendo os coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ os coeficientes de Fourier e dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Em nosso caso temos,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos(ax)dx \\ &= \frac{\text{sen}(a\pi) - \text{sen}(-a\pi)}{a} \\ &= \frac{2\text{sen}(a\pi)}{a}, \end{aligned}$$

e,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos(ax)\cos(nx)\, dx,$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$. A partir da soma das fórmulas do cosseno da soma e da diferença: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$ e $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$, obtemos

$$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta).$$

Assim, podemos escrever para o coeficiente a_n.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left((n-a)x\right)\cos\left((n+a)x\right) dx \\ &= \frac{\text{sen}((n-a)\pi)}{n-a} + \frac{\text{sen}((n+a)\pi)}{n+a} \\ &= \frac{-(-1)^n\text{sen}(a\pi)}{n-a} + \frac{(-1)^n\text{sen}(a\pi)}{n+a} \\ &= (-1)^{n+1}\text{sen}(a\pi)\left[\frac{1}{n-a} + \frac{1}{n+a}\right] \\ &= (-1)^{n+1}\text{sen}(a\pi)\frac{2a}{n^2-a^2}, \end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$. Logo, a série de Fourier é tal que

$$\pi\cos(ax) = \frac{\text{sen}(a\pi)}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\text{sen}(a\pi)\frac{2a}{n^2-a^2}\cos(nx).$$

Tomando $x = 0$ na expressão anterior temos,

$$\pi = \frac{\text{sen}(a\pi)}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\text{sen}(a\pi)\frac{2a}{n^2-a^2},$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2a}{n^2 - a^2}. \tag{D.3}$$

Portanto, pelas Eq.(D.2) e Eq.(D.3) temos,

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{2a}{k^2 - a^2}\right] = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)}.$$

Alternativamente, esta expressão pode ser obtida via funções analíticas, a partir do teorema dos resíduos [3, 54, 55].

APÊNDICE E

Transformada de Laplace

Uma ferramenta muito útil para a resolução de uma equação diferencial linear é a transformada integral [15]. Uma transformada integral é da forma

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt,$$

sendo K uma função dada, chamada de núcleo da transformação. Os limites α e β podem ser menos infinito e mais infinito, respectivamente. Essa operação transforma a função f em F, sendo F a chamada transformada de f.

Nesse apêndice iremos considerar apenas a transformada de Laplace. Nessa transformada os limites α e β são, respectivamente, zero e mais infinito e $K(s,t) = e^{-st}$, onde s é o parâmetro da transformada. Essa transformada é uma ferramenta poderosa para resolver equações diferenciais tanto ordinárias quanto parciais lineares, em particular as equações diferenciais com coeficientes constantes. Com a sua utilização transformamos uma equação dada em outra equação, aparentemente mais simples de resolver, resolvemos essa equação e calculamos a transformada inversa da solução da equação que foi transformada, logo encontramos a solução da equação original dada.

Definição E.1. *Seja f uma função de t e definida para $t > 0$. Então a transformada de Laplace de f, que denotamos por $F(s)$ ou $\mathscr{L}[f(t)]$, é definida pela equação*

$$F(s) \equiv \mathscr{L}[f(t)] = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \tag{E.1}$$

sendo s um parâmetro complexo, com $Re(s) > 0$.

Vamos abordar algumas propriedades dessa transformada que nos serão úteis no decorrer do texto. A transformada de Laplace é um operador linear. Sejam f_1 e f_2 funções cujas transformadas de Laplace existam, respectivamente, para $s > a_1$ e $s > a_2$.

Assim, para α e β constantes e $s > \max(a_1, a_2)$ temos,

$$\mathscr{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)]dt = \alpha \mathscr{L}[f_1(t)] + \beta \mathscr{L}[f_2(t)].$$

A transformada de Laplace de uma função f, $\mathscr{L}[f(t)]$, existe se f satisfaz certas condições. No teorema a seguir veremos quais são essas condições.

Teorema E.1. *Se f é uma função seccionalmente contínua no intervalo $0 \leqslant t \leqslant A$, para qualquer A, e $\mid f(t) \mid \leqslant Ke^{at}$ quando $t \geqslant M$, sendo a, K e M constantes reais e K e M positivas, então a transformada de Laplace de f, $\mathscr{L}[f(t)]$, existe para $s > a$.*

Demonstração. Separamos a integral imprópria, $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$, na soma de integrais

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{M} e^{-st} f(t)dt + \int_M^{\infty} e^{-st} f(t)dt. \tag{E.2}$$

A primeira integral à direita do sinal de igualdade na Eq.(E.2) existe, pois, por hipótese, f é uma função seccionalmente contínua no intervalo $0 \leqslant t \leqslant A$, em particular para $A = M$. Mostraremos agora que a segunda integral também existe. Para $t \geqslant M$ temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_M^{\infty} e^{-st} f(t)dt \right| &\leqslant \int_M^{\infty} \mid e^{-st} f(t) \mid dt \\
&\leqslant \int_M^{\infty} e^{-st} \mid f(t) \mid dt \\
&\leqslant \int_M^{\infty} e^{-st} K e^{at} dt \\
&= K \lim_{A \to \infty} \int_M^{A} e^{(a-s)t} dt \\
&= K \lim_{A \to \infty} \frac{e^{(a-s)A} - e^{(a-s)M}}{a - s}.
\end{aligned}$$

Para $s > a$ a segunda integral na Eq.(E.2) converge, pois temos que $a - s < 0$, e assim

$$\left| \int_M^{\infty} e^{-st} f(t)dt \right| \leqslant K \frac{-e^{(a-s)M}}{a - s}.$$

Portanto, a transformada de Laplace de f, $\mathscr{L}[f(t)]$ existe para $s > a$. ∎

Dizemos que uma função f é de ordem exponencial a se existem constantes $M > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, tal que para todo $t > 0$, temos $|f(t)| \leqslant Me^{at}$.

As propriedades a seguir são apresentadas em forma de teoremas. A primeira propriedade relaciona a transformada de Laplace da derivada primeira de uma função com a transformada de Laplace dessa função e será apresentada no **Teorema E.2**, em seguida temos o **Teorema E.3** que generaliza esse resultado, relacionando, então, a transformada de Laplace da derivada de ordem n com a transformada de Laplace dessa função.

Teorema E.2. *Sejam f uma função contínua e f' seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leqslant t \leqslant A$. E, além disso, existem constantes K, M e a tais que $|f(t)| \leqslant Ke^{at}$ para $t \geqslant M$. Então a transformada de Laplace da derivada de f existe para $s > a$ e vale a relação*

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0).$$

Demonstração. Consideremos a seguinte integral

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt. \tag{E.3}$$

Como a função f' é seccionalmente contínua no intervalo $0 \leqslant t \leqslant A$ iremos denotar seus possíveis pontos de descontinuidades por ξ_0, ξ_1,$\cdots$,ξ_n, sendo $0 \leqslant \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n \leqslant A$. Assim podemos escrever a Eq.(E.3) como

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = \int_0^{\xi_0} e^{-st} f'(t)dt + \int_{\xi_0}^{\xi_1} e^{-st} f'(t)dt + \cdots + \int_{\xi_n}^{A} e^{-st} f'(t)dt. \tag{E.4}$$

Integrando por partes cada uma dessas integrais à direita do sinal de igualdade na Eq.(E.4) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st} f'(t)dt &= e^{-st} f(t)\Big|_0^{\xi_0} + e^{-st} f(t)\Big|_{\xi_0}^{\xi_1} + \cdots + e^{-st} f(t)\Big|_{\xi_n}^{A} + \\ & s\left(\int_0^{\xi_0} e^{-st} f(t)dt + \int_{\xi_0}^{\xi_1} e^{-st} f(t)dt + \cdots + \int_{\xi_n}^{A} e^{-st} f(t)dt\right). \end{aligned}$$

Como f é contínua temos

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = -f(0) + e^{-sA} f(A) + s\int_0^A e^{-st} f(t)dt.$$

Como, por hipótese, $|f(t)| \leqslant Ke^{at}$ para $t \geqslant M$ temos que $|f(A)| \leqslant Ke^{aA}$ para $A \geqslant M$, e assim $|e^{-sA}f(A)| \leqslant Ke^{-(s-a)A}$. Logo, $e^{-sA}f(A) \to 0$ quando $A \to \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f'(t)dt &= \lim_{A\to\infty} \left[-f(0) + e^{-sA} f(A) + s\int_0^A e^{-st} f(t)dt\right] \\ \mathscr{L}[f'(t)] &= s\mathscr{L}[f(t)] - f(0), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

O teorema a seguir apresenta uma generalização do **Teorema E.2**.

Teorema E.3. *Suponha que as funções f, f',$\cdots$, $f^{(n-1)}$ são contínuas e que $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leqslant t \leqslant A$. E, além disso, existem constantes K, M e a tais que $|f(t)| \leqslant Ke^{at}$, $|f'(t)| \leqslant Ke^{at}$,$\cdots$, $|f^{(n)}(t)| \leqslant Ke^{at}$para $t \geqslant M$. Então a transformada de Laplace da n-ésima derivada de f existe para $s > a$ e vale a relação*

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-(j+1)} f^{(j)}(0).$$

Demonstração. Mostraremos por indução que vale a equação

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-(j+1)} f^{(j)}(0). \tag{E.5}$$

Pelo **Teorema E.2** temos que a Eq.(E.5) vale para $n = 1$. Suponha que vale para $n = k$, ou seja,

$$\mathscr{L}[f^{(k)}(t)] = s^k \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-(j+1)} f^{(j)}(0).$$

Mostraremos que vale para $n = k + 1$, isto é,

$$\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)] \quad = \quad s^{k+1} \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{k} s^{k+1-(j+1)} f^{(j)}(0).$$

Como a função $f^{(k+1)}$ é seccionalmente contínua no intervalo $0 \leqslant t \leqslant A$, iremos denotar seus possíveis pontos de descontinuidades por ξ_0, ξ_1,$\cdots$,ξ_n, sendo $0 \leqslant \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n \leqslant A$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)] &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f^{(k+1)}(t)dt \\ &= \int_0^{\xi_0} e^{-st} f^{(k+1)}(t)dt + \int_{\xi_0}^{\xi_1} e^{-st} f^{(k+1)}(t)dt + \cdots + \lim_{A\to\infty} \int_{\xi_n}^{A} e^{-st} f^{(k+1)}(t)dt. \end{aligned} \tag{E.6}$$

Integrando por partes cada uma dessas integrais à direita do sinal de igualdade na Eq.(E.6) obtemos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)] \quad &= \quad e^{-st} f^{(k)}(t)\Big|_0^{\xi_0} + e^{-st} f^{(k)}(t)\Big|_{\xi_0}^{\xi_1} + \cdots + \lim_{A\to\infty} e^{-st} f^{(k)}(t)\Big|_{\xi_n}^{A} + \\ & \quad s\left(\int_0^{\xi_0} e^{-st} f^{(k)}(t)dt + \int_{\xi_0}^{\xi_1} e^{-st} f^{(k)}(t)dt + \cdots + \lim_{A\to\infty} \int_{\xi_n}^{A} e^{-st} f^{(k)}(t)dt\right).\end{aligned}$$

Como $f^{(k)}$ é contínua temos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)] \quad &= \quad -f^{(k)}(0) + \lim_{A\to\infty} e^{-sA} f^{(k)}(A) + s \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f^{(k)}(t)dt \\ &= \quad s\int_0^{\infty} e^{-st} f^{(k)}(t)dt - f^{(k)}(0)\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $|f^{(k)}(t)| \leqslant Ke^{at}$ para $t \geqslant M$ temos que $|f^{(k)}(A)| \leqslant Ke^{aA}$ para $A \geqslant M$, e assim $|e^{-sA} f^{(k)}(A)| \leqslant Ke^{-(s-a)A}$. Logo, $e^{-sA} f^{(k)}(A) \to 0$ quando $A \to \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(k+1)}(t)] \quad &= \quad s\int_0^{\infty} e^{-st} f^{(k)}(t)dt - f^{(k)}(0) \\ &= \quad s\mathscr{L}[f^{(k)}(t)] - f^{(k)}(0) \\ &= \quad s\left(s^k \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-(j+1)} f^{(j)}(0)\right) - f^{(k)}(0) \\ &= \quad s^{k+1} \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k+1-(j+1)} f^{(j)}(0) - f^{(k)}(0) \\ &= \quad s^{k+1} \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{j=0}^{k} s^{k+1-(j+1)} f^{(j)}(0).\end{aligned}$$

Logo, vale a Eq.(E.5), como queríamos demonstrar. ■

Teorema E.4. *Sejam $\mathscr{L}[f(t)]$ e $\mathscr{L}[g(t)]$ as respectivas transformadas de Laplace das funções f e g. Então a transformada de Laplace do produto de convolução, $f * g$, definido por*

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

é igual ao produto das transformadas, ou seja, vale a relação

$$\mathscr{L}[(f * g)(t)] = \mathscr{L}[f(t)]\mathscr{L}[g(t)].$$

Demonstração. Pela definição de transformada de Laplace temos,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[(f * g)(x)] &= \int_0^\infty (f * g)(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}d\tau dt \\
&= \int_0^\infty f(\tau)\left[\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-st}dt\right] d\tau.
\end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $x = t - \tau$ na integral entre conchetes, temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[(f * g)(x)] &= \int_0^\infty f(\tau)\left[\int_0^\infty g(x)e^{-s(x+\tau)}dx\right] d\tau \\
&= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\left[\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx\right] d\tau \\
&= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\mathscr{L}[g(t)]d\tau \\
&= \mathscr{L}[g(t)]\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \mathscr{L}[g(t)]\mathscr{L}[f(t)].
\end{aligned}$$

Logo, a transformada de Laplace do produto de convolução é igual ao produto das transformadas de Laplace. ■

E.1 Transformada de Laplace inversa

Como já mencionamos a metodologia das transformadas integrais conduz o problema de partida para um outro problema, aparentemente mais simples de ser resolvido. Então, em resumo, conduzimos o problema de partida num outro que requer o uso da respectiva transformada inversa. A seguir discutimos a transformada de Laplace inversa.

Teorema E.5. *Seja f uma função contínua por partes de ordem exponencial definida para $t \geqslant 0$ se existe uma constante real $a > 0$ tal que a integral $\int_0^\infty e^{at}|f(t)|dt$ existe. Seja $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ a transformada de Laplace de f. A transformada de Laplace inversa de $F(s)$ é dada pela integral*

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] \equiv f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st}F(s)ds, & se\ t > 0; \\ 0, & se\ t < 0. \end{cases} \tag{E.7}$$

Demonstração.[1] Para essa demonstração usaremos a integral de Fourier. Denotamos a seguinte expressão para a função g, contínua por partes, por integral de Fourier

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(v)e^{i\omega(v-t)}dvd\omega.$$

Assim, considerando $g(t) = e^{-at}f(t)$ e admitindo $f(t) = 0$ para $t < 0$, temos

$$e^{-at}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-av}f(v)e^{i\omega v}dv\right]e^{-i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} f(v)e^{-(av-i\omega v)}dv\right]e^{-i\omega t}d\omega,$$

para $t > 0$. Logo,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} f(v)e^{-(a-i\omega)v}dv\right]e^{(a-i\omega)t}d\omega,$$

Seja a mudança de variável $s = a - i\omega$, assim podemos escrever

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left[\int_{0}^{\infty} f(v)e^{-sv}dv\right]e^{st}ds.$$

Pela **Definição E.1** a integral entre cochetes é a transformada de Laplace de f, portanto,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st}ds,$$

que é a formula para a transformada de Laplace inversa de $F(s)$ como queríamos mostrar. ■

A integral da Eq.(E.7) fornece o resultado direto da transformada de Laplace, e é conhecido como integral ou fórmula complexa de inversão [65].

E.2 Transformada de Laplace das funções de Mittag-Leffler

Devido a importância, em particular, neste texto, calculamos explicitamente a transformada de Laplace das funções de Mittag-Leffler [95], bem como, utilizando a linearidade e inversão, obtemos uma relação de ida e volta envolvendo o par de transformadas de Laplace direta e inversa. Nessa seção calcularemos a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler de três parâmetros.

Assim, da definição, podemos escrever, com $|\lambda| < 1$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[t^{\beta-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})] &= \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda t^{\alpha})^k(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-\lambda)^k(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}dt\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-\lambda)^k(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}\frac{\Gamma(\alpha k+\beta)}{s^{\alpha k+\beta}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k(\rho)_k}{s^{\alpha k+\beta}k!} = \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^{\alpha}+\lambda)^{\rho}}.
\end{aligned}$$

1 Para demonstrações diferentes ver as referências [15, 17].

Aqui, usaremos a notação $\div$ introduzida em [60] para relacionar o par de transformadas de Laplace da seguinte forma, $f(t) \div \mathscr{L}[f(t)]$. Assim, para a função de Mittag-Leffler de três parâmetros temos,

$$t^{\beta-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha}) \div \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^{\alpha}+\lambda)^{\rho}}. \tag{E.8}$$

Tomando valores convenientes para os parâmetros ρ e β na Eq.(E.8) recuperamos as transformadas de Laplace das funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros,

$$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha}) \div \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+\lambda}, \tag{E.9}$$

e

$$E_{\alpha}(-\lambda t^{\alpha}) \div \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+\lambda}, \tag{E.10}$$

para $|\lambda| < 1$, respectivamente.

Antes de abordarmos a transformada de Laplace das derivadas, vamos apresentar o cálculo da transformada de Laplace da integral fracionária, a qual está presente na definição das derivadas de Riemann-Liouville e Caputo.

E.3 Transformada da integral fracionária

Agora iremos calcular a transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de uma dada função f.

Teorema E.6. *Seja f definida para $t > 0$. Então, a transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de f é dada pela equação,*

$$\mathscr{L}[J^{\alpha}f(t)] = \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{s^{\alpha}}. \tag{E.11}$$

Demonstração. Tomando a transformada de Laplace em ambos os membros da expressão envolvendo o produto de convolução temos

$$\mathscr{L}[J^{\alpha}f(t)] = \mathscr{L}[\phi_{\alpha}(t) * f(t)] = \mathscr{L}[\phi_{\alpha}(t)]\mathscr{L}[f(t)] = \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-st}dt. \tag{E.12}$$

O cálculo da integral resultante é obtido em termos da função gama, após uma conveniente mudança de variáveis, resultando em

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-st}dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}. \tag{E.13}$$

Assim pelas Eq.(E.12) e Eq.(E.13), temos

$$\mathscr{L}[J^{\alpha}f(t)] = \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}} = \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{s^{\alpha}},$$

conforme queríamos mostrar. ■

Agora, devido a importância na resolução de uma equação diferencial, vamos apresentar o cálculo de transformada de Laplace envolvendo as derivadas fracionárias.

E.4 Transformada de Laplace da derivada de Caputo

Aqui, vamos obter, em analogia a Eq.(E.5), a transformada de Laplace da derivada fracionária de ordem α segundo Caputo, sendo $Re(\alpha) > 0$.

Teorema E.7. *Sejam $Re(\alpha) > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $m-1 < Re(\alpha) \leqslant m$ então vale a equação para a transformada de Laplace da derivada fracionária de ordem α segundo Caputo,*

$$\mathscr{L}[{}_*D^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0), \tag{E.14}$$

sendo $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to 0} D^k f(t)$.

Demonstração. Para $m-1 < Re(\alpha) \leqslant m$, e utilizando a expressão da derivada de Caputo em termos da integral fracionária, temos

$$\mathscr{L}[{}_*D^\alpha f(t)] = \mathscr{L}[J^{m-\alpha} D^m f(t)]. \tag{E.15}$$

Seja $g(t) = D^m f(t)$, logo pela Eq.(E.15) temos $\mathscr{L}[{}_*D^\alpha f(t)] = \mathscr{L}[J^{m-\alpha} g(t)]$. Pela Eq.(E.11) temos que $\mathscr{L}[J^\alpha f(t)] = \dfrac{\mathscr{L}[f(t)]}{s^\alpha}$. Logo, podemos escrever

$$\mathscr{L}[{}_*D^\alpha f(t)] = \frac{\mathscr{L}[g(t)]}{s^{m-\alpha}}. \tag{E.16}$$

A partir da Eq.(E.5) obtemos a expressão para a transformada de Laplace da função $g(t)$,

$$\mathscr{L}[g(t)] = \mathscr{L}[D^m f(t)] = s^m \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0). \tag{E.17}$$

Enfim, utilizando as Eq.(E.16) e Eq.(E.17) temos,

$$\mathscr{L}[{}_*D^\alpha f(t)] = \frac{1}{s^{m-\alpha}} \left(s^m \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0) \right) = s^\alpha \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0),$$

como queríamos mostrar. ■

É importante notar que esta expressão contém uma derivada de ordem inteira calculada no ponto inicial, contrariamente à expressão envolvendo a derivada de Riemann-Liouville visto que esta contém uma derivada de ordem não inteira calculada no ponto inicial, como vamos ver a seguir.

E.5 Transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville

De maneira semelhante ao que fizemos na seção anterior, nessa seção iremos obter a transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem α, sendo $Re(\alpha) > 0$.

Teorema E.8. *Sejam $Re(\alpha) > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $m-1 < Re(\alpha) \leqslant m$. Então, vale a seguinte equação para a transformada de Laplace da derivada fracionária de ordem α segundo Riemann-Liouville,*

$$\mathscr{L}[D^\alpha f(t)] \;=\; s^\alpha \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} g^{(k)}(0),$$

sendo $g(t) = J^{m-\alpha} f(t)$.

Demonstração. Sejam $Re(\alpha) > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $m-1 < Re(\alpha) \leqslant m$. Escrevendo a derivada de Riemann-Liouville em termos da integral fracionária temos,

$$\mathscr{L}[D^\alpha f(t)] = \mathscr{L}[D^m J^{m-\alpha} f(t)]. \tag{E.18}$$

Seja $g(t) = J^{m-\alpha} f(t)$ assim $\mathscr{L}[D^\alpha f(t)] = \mathscr{L}[D^m g(t)]$ e pelo **Teorema E.3** temos,

$$\mathscr{L}[D^\alpha f(t)] = s^m \mathscr{L}[g(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-(k+1)} g^{(k)}(0) = s^m \mathscr{L}[J^{m-\alpha} f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-(k+1)} g^{(k)}(0).$$

Utilizando a transformada de Laplace da integral fracionária, Eq.(E.11), obtemos uma equação para a transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville, a saber,

$$\mathscr{L}[D^\alpha f(t)] \;=\; s^\alpha \mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} g^{(k)}(0),$$

sendo $g(t) = J^{m-\alpha} f(t)$ e $m-1 < Re(\alpha) \leqslant m$. ■

Observemos que a transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Caputo leva em consideração os valores iniciais da função e de suas derivadas de ordens inteiras menores que m e o mesmo não ocorre com a transformada de Laplace da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville.

E.6 Transformada de Laplace da derivada de Katugampola

Nessa seção encontraremos a transformada de Laplace da derivada de ordem α segundo Katugampola, sendo $0 < \alpha \leqslant 1$. Notemos que essa é uma derivada local, a partir da Eq.(3.6) obtemos,

$$\mathscr{L}[D^\alpha f(t)] = \mathscr{L}[t^{1-\alpha} f'(t)] = \int_0^\infty t^{1-\alpha} f'(t) e^{-st} dt.$$

Através de integração por partes obtemos para $0 < \alpha < 1$,

$$\mathscr{L}[D^\alpha f(t)] \;=\; s\mathscr{L}[t^{1-\alpha} f(t)] - (1-\alpha)\mathscr{L}[t^{-\alpha} f(t)],$$

e para $\alpha = 1$, $\mathscr{L}[D^\alpha f(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$.

Enfim, vamos concluir este apêndice com o cálculo da transformada de Laplace da derivada segundo Caputo-Fabrizio.

E.7 Transformada de Laplace da derivada de Caputo-Fabrizio

Nessa seção encontraremos a transformada de Laplace da derivada de ordem α segundo Caputo-Fabrizio, sendo $0 < \alpha \leqslant 1$. Assim, a partir da definição obtemos,

$$\mathscr{L}[\mathscr{D}_t^{(\alpha)} f(t)] = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\mathscr{L}[\int_a^t \dot{f}(\tau)e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}}d\tau] = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\mathscr{L}[\dot{f}(t) * e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}}], \tag{E.19}$$

considerando $a = 0$. Pelo **Teorema E.4**, podemos escrever,

$$\mathscr{L}[\mathscr{D}_t^{(\alpha)} f(t)] = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\mathscr{L}[\dot{f}(t)]\mathscr{L}\left[e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}}\right].$$

Vamos agora calcular $\mathscr{L}\left[e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}}\right]$. Pela definição da transformada de Laplace temos, já simplificando e rearranjando

$$\mathscr{L}[e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}}] = \int_0^\infty e^{-st}e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}}dt = \frac{1-\alpha}{s(1-\alpha)+\alpha}.$$

A partir do **Teorema E.2** temos, $\mathscr{L}[f'(t)] = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$. Portanto, voltando na Eq.(E.19) obtemos

$$\mathscr{L}[\mathscr{D}_t^{(\alpha)} f(t)] = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\left[s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)\right]\frac{1-\alpha}{s(1-\alpha)+\alpha} = \frac{M(\alpha)\left[s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)\right]}{s(1-\alpha)+\alpha}, \tag{E.20}$$

que é a expressão que fornece a transformada de Laplace da derivada de Caputo-Fabrizio.

Observamos que as transformadas de Laplace das derivadas de Caputo, Riemann-Liouville, Katugampola e Caputo-Fabrizio quando a ordem é um, isto é, o caso inteiro, fornecem o mesmo resultado, a saber, $s\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$.