UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

FRANCISMAR FERREIRA LIMA

Σ-invariantes de Grupos
e
Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica

CAMPINAS

2016

FRANCISMAR FERREIRA LIMA

Σ-invariantes de Grupos e Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutor em MATEMÁTICA

Orientador: DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA
Coorientador: LUCIO CENTRONE

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO FRANCISMAR FERREIRA LIMA, E ORIENTADA PELA PROF.ª DR.ª DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

CAMPINAS
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 140718/2016-8; CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L628s
Lima, Francismar Ferreira, 1985-
Sigma-invariantes de grupos e conjectura n-(n+1)-(n+2) homológica / Francismar Ferreira Lima. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Dessislava Hristova Kochloukova.
Coorientador: Lucio Centrone.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos grupos. 2. Álgebra homológica. 3. Invariantes geométricos. I. Kochloukova, Dessislava Hristova,1970-. II. Centrone, Lucio,1983-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Sigma-invariants of groups and homological n-(n+1)-(n+2) conjecture
Palavras-chave em inglês:
Group theory
Homological algebra
Geometric invariants
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Lucio Centrone [Coorientador]
Paulo Roberto Brumatti
Simone Marchesi
Lucia Satie Ikemoto Murakami
Vitor de Oliveira Ferreira
Data de defesa: 22-07-2016
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 22 de julho de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUCIO CENTRONE

Prof(a). Dr(a). PAULO ROBERTO BRUMATTI

Prof(a). Dr(a). SIMONE MARCHESI

Prof(a). Dr(a). LUCIA SATIE IKEMOTO MURAKAMI

Prof(a). Dr(a). VITOR DE OLIVEIRA FERREIRA

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

A todos que sonham.

AGRADECIMENTOS

Tudo fenece...

Finda, portanto, dez anos e algo em torno de seis meses de UNICAMP para mim e de uma forma ótima, por sinal: como doutor. Bem mais que isso: como potencial promotor do conhecimento, potencial agente de transformação da sociedade de agora e vindoura. Foram anos de Graduação, de Mestrado e, finalmente, de Doutorado. Agradeço, portanto, à Vida pela possibilidade, com a finalização desta etapa, de ter o potencial de servir como professor, como pesquisador e lidar, em última instância, com a vocação do Homem, que é aprender.

Para este trabalho, três mulheres foram muito, muito importantes para mim, têm sido uma constelação de Três Marias a me guiar cada qual com sua grandeza: dando direção, iluminação, energia, fortaleza. A elas sou muitíssimo grato:

À Desi somente com atos poderei agradecer, tamanha a dedicação, atenção e prestatividade sempre e continuamente presentes. Deixo aqui carinhosamente meus agradecimentos e espero que com o tempo, o trabalho duro e o esforço árduo consiga eu agadecer, de fato, pela orientação de anos.

À minha mãe agradeço pela motivação em me fazer sempre lutar e de modo sobranceiro. Lembrar-me de minha mãe sempre me faz pensar que parar não é uma opção. E a esse movimento interno que ela me faz sentir agradeço muito.

Bia, como encontrar pessoa mais doce? Sua fortaleza e motivação natas são pra mim inspiração. Agradeço muito, Linda, pelo apoio sólido de anos, pela força, pela coragem em enfrentar a Vida, pela sobriedade em nossos planos e confidências dos últimos meses. Inspiro-me em você para ser cada vez mais forte, lúcido, resiliente, mas também mais doce, mais leve, mais vivo, mais sorriso.

À UNICAMP deixo a minha mais profunda gratidão. Tanta coisa vivi aqui... Tantas pessoas, momentos... tantos pássaros, tantos verdes... Vivi aqui meus melhores e piores momentos. E portanto, sou grato, profundamente, pela acolhida de braços abertos.

Não poderia deixar de agradecer à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro a este trabalho e ao IMECC e à UNICAMP por toda estrutura física e administrativa disposta da qual pude usufruir ao longo desses anos. Aos professores do IMECC minha gratidão, respeito e carinho profundos.

Agradeço ainda ao meu pai e minha irmã pelo apoio perpétuo. À Iza e ao Márcio pela torcida de sempre. Aos queridos amigos pelo prazer incomensurável de suas presenças.

Dos quais sentirei muita falta, agradeço, por fim, aos anus-brancos, aos ventos de fim de tarde e aos rosados pores-do-sol por terem me feito mais feliz...

RENÚNCIA

Chora de manso e no íntimo... procura
Tentar curtir sem queixa o mal que te crucia:
O mundo é sem piedade e até riria
Da tua inconsolável amargura.

Só a dor enobrece e é grande e é pura.
Aprende a amá-la que a amarás um dia.
Então ela será tua alegria,
E será ela só tua ventura...

A vida é vã como a sombra que passa
Sofre sereno e de alma sombranceira
Sem um grito sequer tua desgraça.

Encerra em ti tua tristeza inteira
E pede humildemente a Deus que a faça
Tua doce e constante companheira...

Manuel Bandeira

RESUMO

Um grupo G é de tipo homológico FP_n, com $n \geq 0$, se possui uma resolução projetiva de tipo finito do $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ do tipo

$$P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to \mathbf{0}.$$

Dizemos ainda que um grupo G é de tipo homotópico F_n se o mesmo for de tipo homológico FP_n e for finitamente apresentável.

A Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ (Homotópica) afirma que, para $n \geq 0$, dadas duas sequências exatas curtas de grupos $N_1 \hookrightarrow G_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} Q$ e $N_2 \hookrightarrow G_2 \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} Q$, se N_1 é de tipo homotópico F_n, ambos G_1 e G_2 são de tipo homotópico F_{n+1} e Q é de tipo homotópico F_{n+2}, então o produto fibra P de G_1 e G_2 associado a π_1 e π_2 é de tipo homotópico F_{n+1}. Tal conjectura ainda permanece como um problema em aberto.

Inspirada na conjectura acima temos uma versão homológica da mesma cujo enunciado é o mesmo trocando-se "tipo homotópico F_n" por "tipo homológico FP_n".

Nesta Tese de Doutorado, conseguimos resolver alguns casos particulares da Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica. Casos estes análogos aos resolvidos por B. Kuckuck com respeito à Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ (Homotópica). Entretanto, nossas técnicas para abordar o problema diferem essencialmente das técnicas usadas por B. Kuckuck, uma vez que os grupos analisados em nosso problema não são finitamente apresentáveis.

Em outra frente, trabalhando em outro problema, foram também estudados Σ-invariantes, grupos limites e grupos residualmente livres. Grupos limites possuem descrição puramente algébrica, no entanto possuem também descrições topológicas, que têm se mostrado, na literatura, mais úteis para manipulação desses grupos. Já um grupo residualmente livre G é aquele que possui a seguinte propriedade:

$$\bigcap_{\substack{N \lhd G \\ G/N \text{ é livre}}} N = \mathbf{1}.$$

O segundo problema que atacamos foi descrever Σ-invariantes de um grupo residualmente livre finitamente apresentável. O resultado que obtivemos foi uma descrição parcial de tais Σ-invariantes.

ABSTRACT

A group G is of homological type FP_n, with $n \geq 0$, if it has a projective resolution of finite type of $\mathbb{Z}$ as trivial $\mathbb{Z}G$-module

$$P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to \mathbf{0}.$$

Moreover, we say that a group G is of homotopic type F_n if it has homological type FP_n and it is finitely presented.

The (Homotopic) n-$(n+1)$-$(n+2)$ Conjecture claims that: for $n \geq 0$, given two short exact sequences of groups $N_1 \hookrightarrow G_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} Q$ and $N_2 \hookrightarrow G_2 \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} Q$, if N_1 is of homotopic type F_n, both G_1 and G_2 are of homotopic type F_{n+1} and Q is of homotopic type F_{n+2}, then the fiber product of π_1 and π_2 is of homotopic type F_{n+1}. This conjecture remains as an open problem still now.

Inspired by the conjecture above, we have a homological version of that conjecture whose claim is the same except changing "homotopic type F_n" to "homological type FP_n".

In this Doctoral Thesis, we have succeeded in solving some particular cases of Homological n-$(n+1)$-$(n+2)$ Conjecture. These particular cases are analogous to those had solved by B. Kuckuck in the (Homotopic) n-$(n+1)$-$(n+2)$ Conjecture. However, our technical approach profoundly differs from Kuckuck's topological approach, since the analysed groups in our work are not finitely presented.

In another front, working at another problem, we have also studied Σ-invariants, limit groups and residually free groups. Limit groups have purely algebraic description, but there is a topological account of these groups as well. This topological approach has showed more useful to manipulate these groups in literature. For another hand, a residually free group G is defined as a group that has the following property:

$$\bigcap_{\substack{N \lhd G \\ G/N \text{ is free}}} N = \mathbf{1}.$$

The second problem that we attacked was to describe Σ-invariants of a finitely presented residually free group. The main result was a partial description of such that Σ-invariants.

LISTA DE SÍMBOLOS

R - anel associativo com identidade

K - anel associativo comutativo com identidade

D - domínio de integridade, isto é, anel associativo comutativo com identidade sem divisores de zero com $1 \neq 0$

$\mathbb{Z}$ - conjunto dos números inteiros, ou grupo abeliano usual dos inteiros, ou anel usual dos inteiros

$\mathbb{Z}_+$ - conjunto dos números inteiros positivos

$\mathbb{Q}$ - conjunto dos números racionais, ou corpo usual dos racionais, ou $\mathbb{Q}$-espaço vetorial

$\mathbb{R}$ - conjunto dos números reais, ou grupo abeliano cujo conjunto de elementos é o conjunto dos números reais e a operação é a soma usual

$\mathbb{R}_+$ - conjunto dos números reais positivos

$\mathbb{Z}^n$ - grupo abeliano cujo conjunto de elementos é o conjunto de n-uplas de números inteiros e a operação é a soma usual

$\mathbb{R}^n$ - grupo abeliano cujo conjunto de elementos é o conjunto de n-uplas de números reais e a operação é a soma usual

$\mathbb{S}^n$ - esfera n-dimensional contida em $\mathbb{R}^{n+1}$

$\mathbf{0}$ - subgrupo trivial de grupo com a operação com notação aditiva, ou submódulo trivial de módulo

$\mathbf{1}$ - subgrupo trivial de grupo com a operação com notação multiplicativa

1_G ou 1 - elemento neutro do grupo G com operação com notação multiplicativa

0_A ou 0 - elemento neutro do grupo A com operação com notação aditiva, ou elemento neutro do módulo A

$Hom(G, H)$ - grupo abeliano aditivo dos homomorfismos de grupo de um grupo G em um grupo H [1]

[1] A operação $+$ de grupo abeliano aditivo em $Hom(G, H)$ é tomada como sendo, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in Hom(G, H)$ e $\forall g \in G$, $(\varphi_1 + \varphi_2)(g) := \varphi_1(g) + \varphi_2(g)$, cuja boa definição é imediata.

$\dot{\bigcup}$ - símbolo utilizado para união disjunta

$G_1 \times G_2$ - produto direto dos grupos G_1 e G_2

$A \leq B$ - significa que o grupo A é subgrupo do grupo B, ou que o módulo A é submódulo do módulo B

$A \geq B$ - significa que o grupo B é subgrupo do grupo A, ou que o módulo B é submódulo do módulo A

G^{ab} - abelianização do grupo G, isto é, $G^{ab} = G/G'$, onde G' é o subgrupo de comutadores de G

$\lhd$ - símbolo que denota subgrupo normal

$\lhd_{car}$ - símbolo que denota subgrupo característico

$\cong$ - símbolo que significa "isomorfo a"

$\twoheadrightarrow$ - símbolo utilizado para funções que são sobrejetivas

$\hookrightarrow$ - símbolo utilizado para funções que são injetivas

$\xrightarrow{\sim}$ - símbolo utilizado para funções que são isomorfismos

$[G : H]$ - símbolo que denota o índice do subgrupo H no grupo G

$\mathfrak{M}_R$ - classe ou também categoria dos R-módulos à direita

${}_R\mathfrak{M}$ - classe ou também categoria dos R-módulos à esquerda

${}_R\mathfrak{M}_S$ - classe ou também categoria dos $(R-S)$-bimódulos, sendo S um anel associativo com identidade

R-$\mathfrak{Comp}$ - classe ou também categoria dos complexos de R-módulos

SUMÁRIO

Introdução

"Don't use for every stupid thing an excuse. There is not too short, too tall, too heavy, too warm, too wet, too humid. There is just one excuse: too weak. So don't use excuses, try harder."

Alexander Megos, escalador alemão.

Preliminares

O interesse principal desta Tese de Doutorado é o estudo de propriedades homológicas de grupos. Em particular, a propriedade (homológica) $FP_n(D)$ de grupos e os Σ-invariantes de grupos, onde D é um domínio de integridade. Um grupo G é de tipo (homológico) $FP_n(D)$, com $n \geq 0$, se existe uma resolução projetiva

$$\mathcal{P} : P_n \to \ldots \to P_i \to P_{i-1} \to \ldots \to P_0 \to D \to 0$$

do DG-módulo trivial D tal que cada DG-módulo projetivo P_i é finitamente gerado para $0 \leq i \leq n$. Caso $D = \mathbb{Z}$, dizemos simplesmente que G é de tipo FP_n e, nesse caso, temos que G é de tipo $FP_n(D)$ para qualquer domínio de integridade D. Essa definição foi sugerida primeiramente por Robert Bieri e Beno Eckmann e mais detalhes sobre o tipo FP_n podem ser encontrados no livro [6] de 1981 de Robert Bieri, *Homological Dimension of Discrete Groups*. Um grupo ser de tipo FP_n é uma propriedade que é versão homológica de uma outra propriedade de origem homotópica chamada F_n, que não vamos abordar com detalhes nesta Tese, embora valha a pena ressaltar que um grupo G ser de tipo homotópico F_2 é equivalente a G ser finitamente apresentável e, se $n \geq 2$, temos que G é de tipo homotópico F_n se, e somente se, G é de tipo homológico FP_n e é de tipo homotópico F_2.

Existe uma conjectura chamada Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$, que aqui denominaremos de Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homotópica, a qual diz respeito a produtos fibra. Estes, por sua vez, são definidos da seguinte maneira: dados os grupos G_1, G_2 e Q e os epimorfismos de grupos $\pi_1 : G_1 \twoheadrightarrow Q$ e $\pi_2 : G_2 \twoheadrightarrow Q$, definimos o produto fibra de G_1 e G_2 associado a π_1 e π_2 como sendo o subgrupo P do produto direto $G_1 \times G_2$ dado por

$$P = \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : \pi_1(g_1) = \pi_2(g_2)\}.$$

A Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homotópica diz, então, que, para $n \geq 0$, dadas duas sequências exatas curtas de grupos $N_1 \hookrightarrow G_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} Q$ e $N_2 \hookrightarrow G_2 \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} Q$, se N_1 é de tipo homotópico F_n, ambos G_1 e G_2 são de tipo homotópico F_{n+1} e Q é de tipo homotópico F_{n+2}, então o produto fibra P de G_1 e G_2 associado a π_1 e π_2 é de tipo homotópico F_{n+1}.

A conjectura, de fato, vale para $n \in \{0, 1\}$. O caso mais simples $n = 0$ foi mostrado em 2009, em [13] por Martin R. Bridson e Charles F. Miller III. Já o caso $n = 1$ foi demonstrado por vários autores: a versão simétrica, isto é, quando $G_1 = G_2$, denominada de Teorema 1-2-3, foi demonstrada em 2000 por Gilbert Baumslag, Martin R. Bridson, Charles F. Miller III e Hamish Short em [2] e a versão assimétrica, isto é, quando G_1 e G_2 não são necessariamente iguais, denominada de Teorema 1-2-3 Assimétrico, foi demonstrada em 2013 por Martin R. Bridson, James Howie, Charles F. Miller III e Hamish Short em [14].

Baseado no caso $n = 1$, Benno Kuckuck sugeriu, em sua Tese de Doutorado [22] de 2012, em Oxford, a versão assimétrica para n qualquer, isto é, a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homotópica descrita acima. Os resultados da Tese de B. Kuckuck foram publicados em [23], em 2014. Vale a pena ressaltar que B. Kuckuck não demonstrou a conjectura, mas obteve resultados importantes como:

- a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homotópica vale quando a segunda sequência exata curta, em seu enunciado, cinde;
- a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homotópica vale quando Q, em seu enunciado, é virtualmente abeliano.

Além disso, obteve ainda uma redução da conjectura da seguinte forma:

- se a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homotópica vale quando G_2, em seu enunciado, é um grupo livre finitamente gerado, então a mesma vale no caso geral.

Os métodos usados tanto no caso $n = 1$ em [2] e em [14], quanto no caso geral da Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homotópica em [23] são homotópicos naturalmente. Nesta Tese de Doutorado, desenvolvemos versão homológica desses resultados que, essencialmente, não podem ser desenvolvidos com métodos homotópicos, pois os grupos considerados não são finitamente apresentáveis. Os métodos usados na Tese de B. Kuckuck [22], bem como em seu artigo [23], portanto, não são aplicáveis em nosso caso.

A segunda parte de nossa pesquisa trata de propriedades de Σ-invariantes para grupos específicos. Consideraremos nesta Tese de Doutorado somente a versão homológica da Σ-teoria.

Se G for um grupo finitamente gerado, definimos a esfera de caracteres como sendo

$$S(G) = \frac{Hom(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}}{\sim},$$

onde, sendo $\chi_1, \chi_2 \in Hom(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$, então $\chi_1 \sim \chi_2$ se existe um número real positivo r tal que $\chi_1 = r\chi_2$. Sendo n o posto livre de torção da abelianização de G, então

$S(G)$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$. Um elemento do conjunto $S(G)$ é denotado entre colchetes, por exemplo $[\chi]$, onde $\chi \in Hom(G,\mathbb{R})\backslash\{0\}$. Um homomorfismo de grupos não-nulo $\chi \in Hom(G,\mathbb{R})\backslash\{0\}$ é denominado caráter de G e o mesmo é dito ser discreto se $im(\chi) \cong \mathbb{Z}$.

As primeiras publicações sobre a Σ-teoria surgiram na década 80, enquanto se buscava uma classificação de grupos metabelianos finitamente apresentáveis. Mais tarde, no fim da década de 80, a Σ-teoria foi desenvolvida para grupos arbitrários por Robert Bieri e Burkhardt Renz, o que foi publicado pelos mesmos em [9], em 1988. Definimos, para $n \geq 0$, o **Invariante Homológico** Σ^n como sendo o conjunto

$$\Sigma^n(G,D) = \{[\chi] \in S(G) : D \text{ é de tipo } FP_n(D) \text{ como } DG_\chi\text{-módulo}\},$$

onde D é DG-módulo trivial e $G_\chi = \{g \in G : \chi(g) > 0\}$ é um monoide, sendo DG_χ um subanel de DG, portanto. Caso $[\chi] \in \Sigma^n(G,D)$, dizemos que o monoide G_χ é de tipo $FP_n(D)$. Em [9], é mostrado que, se $\Sigma^n(G,D) \neq \emptyset$, então G tem tipo $FP_n(D)$. O que mostra o interesse em se estudar os invariantes $\Sigma^n(G,D)$ somente para grupos G de tipo $FP_n(D)$.

No Capítulo 5 desta Tese de Doutorado, estudaremos algumas propriedades do invariante $\Sigma^n(G,\mathbb{Q})$ para grupos G específicos. Concentraremos nossos esforços na classe de grupos G residualmente livres finitamente gerados e de tipo homológico $FP_n(\mathbb{Q})$. Um grupo G é dito residualmente livre se $\bigcap N = \mathbf{1}$, onde a interseção percorre todos os subgrupos normais N de G tais que G/N é um grupo livre. Equivalentemente, tais grupos são os subgrupos de um produto direto arbitrário (em geral infinito) de grupos livres. Para tais grupos residualmente livres existe teoria bastante interessante. De fato, Olga Kharlampovich e Alexei Myansnikov mostraram em 1998, em [20] que um grupo G residualmente livre finitamente gerado mergulha em um produto direto com número finito de componentes $G_1 \times \ldots \times G_m$, entretanto, de grupos limites, os quais são também conhecidos como grupos completamente residualmente livres (na Seção 3.2 do Capítulo 3, discutiremos propriedades de grupos limites) e, em 1999, Gilbert Baumslag, Alexei Myasnikov e Vladimir Remeslennikov mostraram em [3] que tal mergulho se dá de forma que o grupo G residualmente livre finitamente gerado é um produto subdireto do produto direto $G_1 \times \ldots \times G_m$ de grupos limites com número finito de componentes. G ser um produto subdireto significa dizer que cada projeção canônica de G sobre G_i é sobrejetiva, para $1 \leq i \leq m$. Este último resultado, então, mostra que, para entendermos, de certa forma, grupos residualmente livres finitamente gerados, uma abordagem é estudarmos produtos subdiretos finitamente gerados S de produtos diretos de grupos limites $G_1 \times \ldots \times G_m$ com número finito de componentes. De fato, o que será estudado, como será visto, é o caso em que cada grupo limite G_i de tal produto direto é não-abeliano e em que o produto subdireto finitamente gerado S é completo, isto é, $S \cap G_i \neq \mathbf{1}$, para $1 \leq i \leq m$.

Ainda nesse contexto, um grupo G é dito ser VSP (Virtualmente Sobrejetivo em Pares) se $p_{i,j}(G)$ tiver índice finito em $G_i \times G_j$, onde $p_{i,j} : G \twoheadrightarrow G_i \times G_j$ é projeção canônica e $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Em 2009, em [15] e em 2013, em [14], Martin R. Bridson, James Howie, Charles F. Miller III e Hamish Short mostraram que, sendo G um subgrupo do produto direto $G_1 \times \ldots \times G_m$ de grupos finitamente apresentáveis, temos que, se G é VSP, então G é finitamente apresentável (Critério VSP). A recíproca, porém, não é verdadeira em geral. Estes mesmos autores classificaram ainda naqueles trabalhos os grupos residualmente livres finitamente apresentáveis G, mostrando que, para esses grupos, quando $G_1, \ldots, G_m$ são grupos limites não-abelianos, as propriedades FP_2 e F_2 coincidem e que, ainda, são equivalentes a G ser VSP, ou seja, valendo a recíproca do Critério VSP para esses grupos.

Em 2010, em [21] Dessislava H. Kochloukova obteve resultados relacionados ao parágrafo precedente. Mostrando que, sendo S um produto subdireto completo finitamente gerado de um produto direto $G_1 \times \ldots \times G_m$ de grupos limites não-abelianos, se S é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$, com $2 \leq n \leq m$, então, para toda projeção canônica $p_{j_1,\ldots,j_n} : S \twoheadrightarrow G_{j_1} \times \ldots G_{j_n}$, o subgrupo $p_{j_1,\ldots,j_n}(S)$ possui índice finito em $G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n}$, onde $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, m\}$ e $j_1 < \ldots < j_n$.

Notamos que a recíproca desse último resultado, uma espécie de **Critério Virtualmente Sobrejetivo em n-Uplas Homológico**, ainda é um desafiante problema em aberto.

Resultados Principais

Esta Tese de Doutorado contém dois resultados novos principais: um ligado à Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica no Capítulo 4 e o outro ligado a Σ-invariantes no Capítulo 5.

Resultados Principais Relacionados à Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$

Motivados pelo trabalho de Benno Kuckuck em [23] e pela Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homotópica, em nosso estudo, conjecturamos, então, o que chamamos de **Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica**, que também diz respeito a produtos fibra e é a seguinte: dadas duas sequências exatas curtas de grupos $N_1 \hookrightarrow G_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} Q$ e $N_2 \hookrightarrow G_2 \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} Q$, se N_1 é de tipo homológico FP_n, ambos G_1 e G_2 são de tipo homológico FP_{n+1} e Q é de tipo homológico FP_{n+2}, então o produto fibra P de G_1 e G_2 associado a π_1 e π_2 é de tipo homológico FP_{n+1}.

Usando principalmente sequências espectrais, mostramos no Capítulo 4 os seguintes resultados novos, cujo resultado principal do Capítulo é:

Teorema A. Sejam $n \geq 1$, $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ uma sequência exata curta de grupos com A

de tipo FP_n e C de tipo FP_{n+1}. Assuma que exista uma outra sequência exata curta de grupos $A \hookrightarrow B_0 \twoheadrightarrow C_0$ com B_0 de tipo FP_{n+1} e um **homomorfismo qualquer** de grupos $\theta : B_0 \to B$ tal que $\theta|_A = id_A$, ou seja,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "id_A"'] & B_0 \arrow[r, two heads, "\pi_0"] \arrow[d, "\theta"'] & C_0 \arrow[d, dotted, "\nu"] \\ A \arrow[r, hook] & B \arrow[r, two heads, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

onde $\nu : C_0 \to C$ é um homomorfismo de grupos induzido por θ tal que $\nu\pi_0 := \pi\theta$. Então, B é também de tipo FP_{n+1}.

É interessante salientar que o resultado acima primeiramente foi demonstrado para o homomorfismo θ, do enunciado, sendo um epimorfismo. Posteriormente, percebemos que uma demonstração também poderia ser feita para θ sendo um monomorfismo. Daí que, utilizando-se a composição $\iota\theta_1$, em que $\theta_1 : B_0 \twoheadrightarrow im(\theta)$ é tal que $\theta_1(b_0) = \theta(b_0)$, para todo $b_0 \in B_0$ e $\iota : im(\theta) \hookrightarrow B$ é a inclusão, conseguimos generalizar o resultado para um homomorfismo θ onde $im(\nu)$ é de tipo FP_{n+1}. Esses resultados preliminares estão descritos no Apêndice A.

Destarte, saber que o Teorema A era válido para um homomorfismo θ onde $im(\nu)$ é de tipo FP_{n+1}, mas que nem era monomorfismo, nem epimorfismo de grupos necessariamente, serviu como motivação para conseguirmos desenvolver uma demonstração ainda melhor e mais geral de que o Teorema A vale para um homomorfismo θ qualquer e é essa demonstração que está, de fato, no texto principal da Tese.

Como corolários do Teorema A acima obtemos os seguintes resultados quando a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica vale:

Corolário B (Caso Cindido)**.** Sejam

$$N_1 \hookrightarrow G_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} Q$$

$$N_2 \hookrightarrow G_2 \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} Q$$

sequências exatas curtas de grupos onde a segunda sequência exata curta cinde e tal que G_1 e G_2 são ambos de tipo homológico FP_{n+1} e N_1 é de tipo homológico FP_n. Então, o produto fibra P de G_1 e G_2 associado a π_1 e π_2 é de tipo homológico FP_{n+1}.

Observe que aqui não precisamos da hipótese da Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica de que Q é de tipo FP_{n+2}.

Corolário C (Redução da Conjectura para o Caso Livre Finitamente Gerado)**.** Se a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica vale quando G_2, em seu enunciado, é um grupo livre finitamente gerado, então a mesma vale em geral.

Corolário D (Caso Virtualmente Abeliano)**.** A Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica vale quando Q, em seu enunciado, é virtualmente abeliano.

Resultados Principais Relacionados a Σ-invariantes

Na segunda parte de resultados novos da Tese, Capítulo 5, voltamos nossos esforços para descrever parcialmente o conjunto $\Sigma^n(S, \mathbb{Q})$ de um grupo S que é produto subdireto completo finitamente gerado de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$, tendo como motivação o resultado em [21] supracitado de Dessislava H. Kochloukova. Estabelecemos, então, uma conjectura que denominamos **Conjectura da Recíproca VSU (Virtualmente Sobrejetiva em Uplas) Monoidal** por se tratar do caso monoidal da afirmação recíproca do Critério Virtualmente Sobrejetivo em n-Uplas Homológico supracitado.

Conjectura E. Sejam $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$, com $m \geq 2$, um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$ de um produto direto de grupos limites não-abelianos e $\chi : S \to \mathbb{R}$ um caráter. Se S_χ é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$ para algum $n \in \{1, \ldots, m-1\}$, então, para cada projeção canônica $p_{j_1,\ldots,j_n} : G_1 \times \ldots \times G_m \to G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n}$, com $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, m\}$ e $j_1 < \ldots < j_n$,

$$p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi) = p_{j_1,\ldots,j_n}(S)$$

e, portanto,

$$[G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n} : p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi)] < \infty.$$

O primeiro resultado principal obtido com relação a tal conjectura é o **Caso Discreto da Recíproca VSU Monoidal** que afirma que a conjectura é verdadeira para caracteres discretos.

Teorema F (Recíproca VSU Monoidal - Caso Discreto)**.** Sejam $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$, com $m \geq 2$, um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$ de um produto direto de grupos limites não-abelianos e $\chi : S \to \mathbb{R}$ um caráter discreto. Se S_χ é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$ para algum $n \in \{1, \ldots, m-1\}$, então

$$p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi) = p_{j_1,\ldots,j_n}(S)$$

e, portanto,

$$[G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n} : p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi)] < \infty$$

O segundo resultado principal é a Recíproca VSU Monoidal com o acréscimo da hipótese de que S, da conjectura, é de tipo $FP_{n+1}(\mathbb{Q})$ (observe que S já é imediatamente de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$, já que S_χ é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$). Para facilitar posteriores referências, denominamos tal teorema **Pseudorrecíproca VSU Monoidal**.

Teorema G (Pseudorrecíproca VSU Monoidal)**.** Sejam $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$, com $m \geq 2$, um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$ de um produto direto de grupos limites não-abelianos e $\chi : S \to \mathbb{R}$ um caráter. Se S é de tipo $FP_{n+1}(\mathbb{Q})$ e S_χ é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$ para algum $n \in \{1, \ldots, m-1\}$, então, para cada projeção canônica $p_{j_1,\ldots,j_n} : G_1 \times \ldots \times G_m \to G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n}$, com $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, m\}$ e $j_1 < \ldots < j_n$,

$$p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi) = p_{j_1,\ldots,j_n}(S)$$

e, portanto,

$$[G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n} : p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi)] < \infty.$$

As afirmações feitas com respeito à finitude de índices nos Teoremas F e G e na Conjectura E seguem do resultado em [21] supracitado de Dessislava H. Kochloukova.

Resumo

No Capítulo 1, fazemos uma compilação de definições, construções e resultados preliminares que, direta ou indiretamente, são usados no texto desta Tese de Doutorado. Aqui são vistos resultados e definições ligados à Homologia de Complexos e Homologia de Grupos, fundamentais no objeto de estudo desta Tese, bem como algumas páginas são dedicadas a Grupos Fundamentais de Grafos de Grupos, que é a base de uma das interpretações de Grupos Limites ligada a Grafos de Grupos. Além disso, algumas páginas são dedicadas também a Sequências Espectrais, ingrediante recorrente nos resultados envolvendo a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica.

O Capítulo 2 é dedicado a Σ-invariantes com definições e alguns resultados que serão úteis neste texto.

No Capítulo 3, o conceito de Grupo Limite é explorado e algumas propriedades já estabelecidas são apresentadas no texto, bem como Propriedades de Finitude desses grupos, as quais são propriedades homológicas dos mesmos.

O Capítulo 4 foi reservado exclusivamente para resultados novos obtidos nesta Tese de Doutorado envolvendo a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica. São obtidos resultados análogos aos resultados homotópicos de Benno Kuckuck em [23], no entanto com estratégias e demonstrações visceralmente distintas daquele, uma vez que os grupos analisados neste Capítulo não são finitamente apresentáveis.

Por fim, o Capítulo 5 foi reservado exclusivamente para resultados novos envolvendo Σ-invariantes de Grupos Residualmente Livres Finitamente Apresentáveis. Os resultados principais aqui referem-se a uma caracterização parcial do Invariante Σ^n de Grupos Residualmente Livres Finitamente Apresentáveis.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Módulos e Grupos de Tipo FP_n

Como fixado na Lista de Símbolos, nesta seção R denotará um anel associativo com identidade.

1.1.1 Módulos Livres, Projetivos e Planos

Nesta subseção introduziremos módulos livres, projetivos e planos bem como complexos e sequências exatas de R-módulos. Esses conceitos são básicos para esta Tese de Doutorado e permeiam todo o trabalho.

Definição 1.1. *Seja I um conjunto de índices. Um R-módulo à direita F é dito **livre** se existe um conjunto $\mathcal{B} = \{a_i \in F : i \in I\}$ tal que $F \cong \bigoplus_{i \in I} a_i R$, onde $a_i R \cong R$ (como R-módulos), para todo $i \in I$. Assim, temos que F é uma soma direta de cópias de R. Denominamos $\mathcal{B}$ de **base** de F.*

Proposição 1.2. *[31, Proposition 2.34 (Extending by Linearity), p. 57]. Seja F um R-módulo à direita livre com base X. Então, dados M um R-módulo à direita e $f : X \to M$ uma função, existe um único homomorfismo de R-módulos à direita $\theta : F \to M$ tal que $\theta\iota = f$, onde $\iota : X \hookrightarrow F$ é a função canônica inclusão, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dotted, "\theta"] & \\ X \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

Proposição 1.3. *[31, Theorem 3.1, p. 99]. Seja F um R-módulo à direita livre. Então, dados A, A' R-módulos à direita, $h : F \to A'$ um homomorfismo de R-módulos à direita e $p : A \twoheadrightarrow A'$ um epimorfismo de R-módulos à direita, existe um homomorfismo de R-*

módulos à direita $g : F \to A$ tal que $pg = h$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, two heads, "p"'] & A' \arrow[r] & \boldsymbol{0} \end{tikzcd}$$

Teorema 1.4. *[31, Theorem 2.35, p. 58]. Seja M um R-módulo à direita. Então, M é quociente de algum R-módulo à direita livre. Dito de outra forma, existem um R-módulo à direita livre F e um R-submódulo A de F tal que $M \cong F/A$ (isomorfismo de R-módulos). Além disso, M é um R-módulo à direita finitamente gerado se, e somente se, pudermos escolher, da forma acima, um R-módulo à direita livre F como sendo finitamente gerado.*

Definição 1.5. *Sejam $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família de R-módulos à direita e $\{\varphi_n : A_n \to A_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família de homomorfismos de R-módulos à direita. Dizemos que o seguinte diagrama é uma* ***sequência de R-módulos à direita****:*

$$\mathscr{A} : \ldots \longrightarrow A_{n+1} \overset{\varphi_{n+1}}{\longrightarrow} A_n \overset{\varphi_n}{\longrightarrow} A_{n-1} \longrightarrow \ldots .$$

E, sejam $n \in \mathbb{Z}$, $\{A_k\}_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\leq n}}$ uma família de R-módulos à direita e $\{\varphi_k : A_k \to A_{k-1}\}_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\leq n}}$ uma família de homomorfismos de R-módulos à direita. Dizemos que o seguinte diagrama é uma ***sequência parcial de R-módulos à direita****:*

$$\mathscr{A} : A_n \overset{\varphi_n}{\longrightarrow} A_{n-1} \overset{\varphi_{n-1}}{\longrightarrow} A_{n-2} \longrightarrow \ldots .$$

E que o seguinte diagrama é uma ***sequência de comprimento finito n de R-módulos à direita****:*

$$\mathscr{A} : \boldsymbol{0} \longrightarrow A_n \overset{\varphi_n}{\longrightarrow} A_{n-1} \overset{\varphi_{n-1}}{\longrightarrow} A_{n-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_0 \longrightarrow \boldsymbol{0}.$$

Definição 1.6. *Dizemos que uma sequência de R-módulos à direita*

$$\mathscr{A} : \ldots \longrightarrow A_{n+1} \overset{\varphi_{n+1}}{\longrightarrow} A_n \overset{\varphi_n}{\longrightarrow} A_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

é um ***complexo de R-módulos à direita*** *se $ker(\varphi_n) \supseteq im(\varphi_{n+1}), \forall n \in \mathbb{Z}$. E também que uma sequência parcial de R-módulos à direita*

$$\mathscr{A} : A_n \overset{\varphi_n}{\longrightarrow} A_{n-1} \overset{\varphi_{n-1}}{\longrightarrow} A_{n-2} \longrightarrow \ldots$$

é um ***complexo de R-módulos à direita*** *se $ker(\varphi_k) \supseteq im(\varphi_{k+1}), \forall k < n$. Caso, na sequência de R-módulos à direita acima, tenhamos que $ker(\varphi_n) = im(\varphi_{n+1}), \forall n \in \mathbb{Z}$, dizemos que tal sequência é uma* ***sequência exata de R-módulos à direita*** *e, caso , na sequência parcial de R-módulos à direita acima, tenhamos que $ker(\varphi_k) = im(\varphi_{k+1}), \forall k < n$, denominamos tal sequência parcial de* ***sequência parcial exata de R-módulos à***

direita.

Definição 1.7. *Um R-módulo à direita P é dito* ***projetivo*** *se, para cada A, A' R-módulos à direita, $f : P \to A'$ um homomorfismo de R-módulos à direita e $p : A \twoheadrightarrow A'$ um epimorfismo de R-módulos à direita, sempre existir um homomorfismo de R-módulos à direita $g : P \to A$ tal que $pg = f$, isto é, se o seguinte diagrama for comutativo:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, two heads, "p"'] & A' \arrow[r] & \boldsymbol{0} \end{tikzcd}$$

Observação 1.8. Pela Proposição 1.3 (p. 21) e pela Definição 1.7 (p. 23), segue que todo R-módulo à direita livre é R-módulo à direita projetivo.

As duas proposições abaixo dão caracterizações de R-módulos projetivos.

Definição 1.9. *Uma sequência exata curta de R-módulos à direita*

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow A' \overset{i}{\longrightarrow} A \overset{p}{\longrightarrow} A'' \longrightarrow \boldsymbol{0}$$

cinde *se existe um homomorfismo de R-módulos à direita $j : A'' \to A$ tal que $pj = id_{A''}$.*

Proposição 1.10. *[31, Proposition 3.3, p. 100] Um R-módulo à direita P é projetivo se, e somente se, cada sequência exata curta de R-módulos à direita $\boldsymbol{0} \longrightarrow A \overset{i}{\longrightarrow} B \overset{p}{\longrightarrow} P \longrightarrow \boldsymbol{0}$ cinde.*

Proposição 1.11. *[31, Theorem 3.5, p. 101] Seja P um R-módulo à direita. Então, P é um R-módulo à direita projetivo se, e somente se, P é uma parcela direta de um R-módulo à direita livre, isto é, existe um R-módulo à direita livre F tal que $F = P \oplus A$, onde A é algum R-submódulo de F. Além disso, existe epimorfismo de R-módulos $\varphi : F \twoheadrightarrow P$.*

Em geral, sendo B um R-módulo à esquerda, o funtor $- \otimes_R B$ é um funtor exato à direita. Caso tal funtor seja exato também à esquerda, ou seja, se $- \otimes_R B$ é um funtor exato, B é, então, um tipo especial de R-módulo.

Definição 1.12. *Sejam $F : {}_R\mathfrak{M} \to {}_R\mathfrak{M}$ um funtor aditivo, A, B, C R-módulos e $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ homomorfismos de R-módulos. Dizemos que F é um* ***funtor exato à esquerda*** *se, tendo que a sequência de R-módulos*

$$\boldsymbol{0} \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C$$

é exata, isto é, tendo que $ker(\alpha) = \boldsymbol{0}$ e $im(\alpha) = ker(\beta)$, então a sequência de R-módulos

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow FA \overset{F\alpha}{\longrightarrow} FB \overset{F\beta}{\longrightarrow} FC$$

é também exata.

Dizemos que F é um ***funtor exato à direita*** *se, tendo que a sequência de R-módulos*

$$A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to \boldsymbol{0}$$

é exata, isto é, tendo que $im(\alpha) = ker(\beta)$ e $im(\beta) = C$, então a sequência de R-módulos

$$FA \overset{F\alpha}{\longrightarrow} FB \overset{F\beta}{\longrightarrow} FC \longrightarrow \boldsymbol{0}$$

é também exata.

Dizemos ainda que F é um ***funtor exato*** *se o mesmo for exato à direita e à esquerda.*

Definição 1.13. *Seja B um R-módulo à esquerda. Dizemos que B é um R-módulo à esquerda* ***plano*** *se o funtor $- \otimes_R B$ é exato.*

Proposição 1.14. *[30, Corollary 3.46, p. 85] Todo R-módulo projetivo é um R-módulo plano.*

A seguinte proposição é usada na subseção 1.3.2 e também no Capítulo 2. Para enunciá-la façamos primeiramente as duas seguintes definições:

Definição 1.15. *Sejam I um conjunto quasi-ordenado* [1] *e $\mathfrak{C}$ uma categoria. Um* ***sistema direto em $\mathfrak{C}$ com conjunto de índices*** *I é o conjunto $\{A_i, \phi^i_j\}_{i,j \in I}$ tal que, para cada $i \in I$, existe um objeto A_i em $\mathfrak{C}$ e tal que, se $i, j \in I$ satisfazem $i \leq j$, então existe um morfismo $\varphi^i_j : A_i \to A_j$ tal que:*

i) $\varphi^i_i : A_i \to A_i$ é o morfismo identidade para cada $i \in I$;

ii) Dados $i, j, k \in I$, se $i \leq j \leq k$, então existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "\varphi^i_j"] \arrow[dr, "\varphi^i_k"'] & & A_j \arrow[dl, "\varphi^j_k"] \\ & A_k & \end{tikzcd}$$

Definição 1.16. *Seja $\{A_i, \phi^i_j\}_{i,j \in I}$ um sistema direto numa categoria $\mathfrak{C}$ com conjunto de índices quasi-ordenado I. O* ***limite direto de*** *$\{A_i, \phi^i_j\}_{i,j \in I}$ é um objeto, denotado por $\underset{\longrightarrow}{lim} A_i$, e uma família de morfismos $\alpha_i : A_i \to \underset{\longrightarrow}{lim} A_i$ com $\alpha_i = \alpha_j \varphi^i_j$ toda vez que $i \leq j$ em I satisfazendo a seguinte propriedade universal: para cada objeto X e cada família de morfismos $f_i : A_i \to X$ com $f_i = f_j \varphi^i_j$ toda vez que $i \leq j$, existe um único morfismo*

[1] conjunto parcialmente ordenado cuja relação de ordem é reflexiva e transitiva

$\beta : \underrightarrow{lim} A_i \to X$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
\underrightarrow{lim} A_i \arrow[rr, dotted, "\beta"] & & X \\
& A_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi^i_j"] & \\
& A_j \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Como usual em objetos universais, o limite direto é único a menos de isomorfismos.

Proposição 1.17. *[30, Theorem 3.47, p. 86] Seja $\{A_i, \phi^i_j\}_{i,j \in I}$ um sistema direto de R-módulos planos sobre um conjunto de índices I. Se I é um conjunto direcionado [2], então $\underrightarrow{lim} A_i$ é um R-módulo plano.*

Utilizando-se a Proposição 1.17 (p. 25), temos o seguinte exemplo.

Exemplo 1.18. O funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é exato.

1.1.2 Resoluções Livres e Projetivas e Módulos de Tipo FP_n

Definição 1.19. *Sejam A um R-módulo à direita e $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Uma **resolução de comprimento finito** n **do** R**-módulo à direita** A é uma sequência exata de R-módulos à direita*

$$\mathscr{A} : \boldsymbol{0} \longrightarrow A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \boldsymbol{0}.$$

Definição 1.20. *Seja A um R-módulo à direita. Uma sequência exata de R-módulos à direita*

$$\mathscr{A} : \ldots \longrightarrow A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \boldsymbol{0}$$

*é uma **resolução de tipo finito do** R**-módulo** A se A_n é um R-módulo finitamente gerado, é uma **resolução projetiva do** R**-módulo** A se A_n é um R-módulo projetivo e é uma **resolução livre do** R**-módulo** A se A_n é um R-módulo livre $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. E, dado $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, uma sequência parcial exata de R-módulos à direita*

$$\mathscr{A} : A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \boldsymbol{0}$$

*é uma **resolução parcial de tipo finito do** R**-módulo** A se A_k é um R-módulo finitamente gerado, é uma **resolução parcial projetiva do** R**-módulo** A se A_k é um*

[2] conjunto quasi-ordenado tal que, para cada $i, j \in I$, existe $k \in I$ com $i \leq k$ e $j \leq k$

*R-módulo projetivo e é é uma **resolução parcial livre do R-módulo** A se A_k é um R-módulo livre $\forall k \leq n$.*

Definição 1.21. *Dado $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, um **$R$-módulo à direita A é de tipo FP_n** se existe uma resolução parcial projetiva de tipo finito do R-módulo à direita A*

$$\mathscr{P} : P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \boldsymbol{0}.$$

*E, um **R-módulo à direita A é de tipo FP_∞** se existe uma resolução projetiva de tipo finito do R-módulo à direita A*

$$\mathscr{P} : \ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \boldsymbol{0}.$$

Observemos que um R-módulo à direita A de tipo FP_n é de tipo FP_k para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e um R-módulo à direita A de tipo FP_∞ é de tipo FP_k para todo $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

A seguinte proposição mostra que na definição de módulo de tipo FP_n é suficiente e necessário tomarmos uma resolução livre de tipo finito, ao invés de uma resolução projetiva de tipo finito.

Proposição 1.22. *[16, (4.3) Proposition, pp. 193 e 194] Sejam M um R-módulo à direita e $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) Existe uma resolução parcial $F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ onde cada F_i é R-módulo à direita livre finitamente gerado para $0 \leq i \leq n$;

ii) M é um R-módulo à direita de tipo FP_n;

iii) M é um R-módulo à direita finitamente gerado e, para toda resolução parcial projetiva de tipo finito $P_k \xrightarrow{d_k} \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow \boldsymbol{0}$ com $k < n$, $ker(d_k)$ é R-submódulo finitamente gerado.

1.1.3 Grupos de Tipo FP_n

Consideraremos agora algumas definições envolvendo módulos sobre o anel de grupo $\mathbb{Z}G$.

Definição 1.23. *Seja G um grupo. Um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita A é dito **trivial** se G age trivialmente à direita sobre A.*

Definição 1.24. *Seja G um grupo. Dado $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, dizemos que G é um* ***grupo de tipo*** FP_n *se o $\mathbb{Z}G$-módulo à direita trivial $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_n. E dizemos que G é um* ***grupo de tipo*** FP_∞ *se o $\mathbb{Z}G$-módulo à direita trivial $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_∞.*

Definição 1.25. *Seja G um grupo. Denominamos a função $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ dada por*

$$\varepsilon(\sum_{g\in G} x_g g) = \sum_{g\in G} x_g,$$

onde $x_g \in \mathbb{Z}$, de ***função de aumento*** *e, denotando $ker(\varepsilon)$ por $Aug(\mathbb{Z}G)$, denominamo-lo de* ***ideal de aumento****.*

Observação 1.26. Seja G um grupo. Observe que, se $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}G$-módulo à direita trivial, a função de aumento $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ é um epimorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos à direita. Observe também que o ideal de aumento $Aug(\mathbb{Z}G) := ker(\varepsilon)$ é, de fato, um ideal do anel $\mathbb{Z}G$.

Exemplo 1.27. Todo grupo G é um grupo de tipo FP_0.

Demonstração. Como $\varepsilon : \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ é um epimorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos à direita pela Observação 1.26 (p. 27), obtemos, então, a seguinte sequência parcial exata de $\mathbb{Z}G$-módulos à direita

$$\mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{0} \tag{1.1}$$

Como $\mathbb{Z}G$ é $\mathbb{Z}G$-módulo à direita livre, segue que $\mathbb{Z}G$ é $\mathbb{Z}G$-módulo à direita projetivo pela Observação 1.8 (p. 23). E, obviamente, $\mathbb{Z}G$ é $\mathbb{Z}G$-módulo à direita finitamente gerado. Portanto, temos que a sequência parcial exata em (1.1) (p. 27) é, de fato, uma resolução parcial projetiva de tipo finito. □

Exemplo 1.28. Todo grupo abeliano finitamente gerado Q é de tipo FP_∞.

Demonstração. Seja $\varepsilon : \mathbb{Z}Q \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ a função de aumento. Temos que $\mathbb{Z}Q$ é um anel comutativo noetheriano, logo $Aug(\mathbb{Z}Q) = ker(\varepsilon)$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}Q$-submódulo de $\mathbb{Z}Q$. Daí que, pela demonstração do Teorema 1.4 (p. 22), existem $\mathbb{Z}Q$-módulo livre finitamente gerado F_1 e $\varphi_1 : F_1 \twoheadrightarrow ker(\varepsilon)$ epimorfismo de $\mathbb{Z}Q$-módulos à direita. Definamos $d_1 := \iota_1\varphi_1$, onde $\iota_1 : ker(\varepsilon) \hookrightarrow \mathbb{Z}Q$ é o homomorfismo de $\mathbb{Z}Q$-módulos inclusão canônica. Segue que

$$Im(d_1) = d_1(F_1) = \iota_1\varphi_1(F_1) = \iota_1(ker(\varepsilon)) = ker(\varepsilon).$$

Temos, então, a seguinte resolução parcial livre de tipo finito de $\mathbb{Z}Q$-módulos

$$F_1 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}Q \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Como F_1 é $\mathbb{Z}Q$-módulo finitamente gerado, segue que F_1 é $\mathbb{Z}Q$-módulo noetheriano, portanto $ker(d_1)$ é $\mathbb{Z}Q$-submódulo de F_1 finitamente gerado. Podemos, então, repetir o processo acima para construir um $\mathbb{Z}Q$-módulo livre finitamente gerado F_2 tal que a seguinte sequência é uma resolução parcial livre de tipo finito

$$F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}Q \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{0},$$

onde d_2 é definido de modo análogo a d_1. Podemos repetir tal processo indefinidamente, obtendo, assim, uma resolução livre de tipo finito para o $\mathbb{Z}Q$-módulo trivial $\mathbb{Z}$. Usando a Observação 1.8 (p. 23) concluímos que Q é um grupo de tipo FP_∞. □

1.2 Homologia de Complexos e Homologia de Grupos

Nesta seção R denotará um anel associativo com identidade conforme notação fixada na Lista de Símbolos.

1.2.1 Homologia de Complexos

Complexos e o Funtor Homologia

Notação 1.29. Um complexo $\mathscr{A} : \ldots A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \to \ldots$ será denotado por

$$(\mathscr{A}, d).$$

Definição 1.30. *Sejam $(\mathscr{A}, d)$, $(\mathscr{A}', d')$ dois complexos de R-módulos. Um **homomorfismo de complexos** é uma sequência de homomorfismos de R-módulos $f = \{f_n : A_n \to A'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & A'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & A'_n \arrow[r, "d'_n"'] & A'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"'] & \ldots
\end{tikzcd}$$

A classe de todos os complexos com morfismos sendo os homomorfismos de complexos com as composições usuais formam uma categoria denominada **categoria dos complexos de R-módulos**, que é denotada por R-$\mathfrak{Comp}$.

Definição 1.31. *Seja $(\mathscr{A}, d)$ um complexo de R-módulos. A **n-ésima homologia de** $(\mathscr{A}, d)$ é o R-módulo quociente*

$$H_n(\mathscr{A}) = ker(d_n)/im(d_{n+1}).$$

*Os elementos de $ker(d_n)$ são chamados de **n-ciclos** e os elementos de $im(d_{n+1})$ são chamados de **n-bordos**.*

A n-ésima homologia de $(\mathscr{A}, d)$ é, na verdade, um funtor aditivo de R-$\mathfrak{Comp}$ para $\mathfrak{M}_R$ (ou ${}_R\mathfrak{M}$) cujo efeito sobre complexos de R-$\mathfrak{Comp}$ foi definido acima e cujo efeito sobre os morfismo de R-$\mathfrak{Comp}$ é o definido a seguir.

Definição 1.32. *Sejam $(\mathscr{A}, d)$, $(\mathscr{A}', d')$ dois complexos de R-módulos e $f : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ um homomorfismo de complexos. Definimos*

$$H_n(f) : H_n(\mathscr{A}) \to H_n(\mathscr{A}')$$

por

$$z_n + im(d_{n+1}) \mapsto f_n(z_n) + im(d'_{n+1})$$

Lema 1.33. *[30, Exercise 6.4, p. 170] Seja $T : {}_R\mathfrak{M} \to {}_R\mathfrak{M}$ um funtor covariante e $\mathscr{A}$ um complexo de R-módulos. Se T é funtor exato, então, para todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$H_n(T\mathscr{A}) \cong TH_n(\mathscr{A}),$$

como R-módulos.

Definição 1.34. *Seja $(\mathscr{A}, d)$ um complexo de R-módulos. Um **subcomplexo de** $(\mathscr{A}, d)$ é um complexo de R-módulos $(\mathscr{A}', d')$ tal que cada R-módulo A'_n do complexo $(\mathscr{A}', d')$ é submódulo do R-módulo A_n do complexo $(\mathscr{A}, d)$ e tal que $d'_n := d_n|_{A'_n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, definimos ainda o **complexo quociente**, que é definido por*

$$\mathscr{A}/\mathscr{A}' : \ldots \longrightarrow A_n/A'_n \xrightarrow{\bar{d}_n} A_{n-1}/A'_{n-1} \longrightarrow \ldots,$$

onde definimos $\bar{d}_n : a_n + A'_n \mapsto d_n(A_n) + A'_{n-1}$.

Exemplo 1.35. Sejam $(\mathscr{A}, d)$, $(\mathscr{A}', d')$ dois complexos de R-módulos e $f : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ um homomorfismo de complexos. Então, $\mathscr{K}er(f)$ e $\mathscr{I}m(f)$ são subcomplexos de $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$ respectivamente, definidos obviamente. Além disso, temos o seguinte isomorfismo de complexos de R-módulos:

$$\mathscr{A}/\mathscr{K}er(f) \cong \mathscr{I}m(f)$$

Definição 1.36. *Sejam $(\mathscr{A}, d)$, $(\mathscr{A}', d')$, $(\mathscr{A}'', d'')$ complexos de R-módulos e $f : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$, $g : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}''$ homomorfismos de complexos. Dizemos que a sequência de complexos*

$$\mathscr{A}' \xrightarrow{f} \mathscr{A} \xrightarrow{g} \mathscr{A}''$$

*é **exata em** $\mathscr{A}$ se $\mathscr{I}m(f) = \mathscr{K}er(g)$.*

Teorema 1.37 (Sequência Exata Longa)**.** *Se* $\mathscr{O} \to \mathscr{A}' \xrightarrow{i} \mathscr{A} \xrightarrow{p} \mathscr{A}'' \to \mathscr{O}$ *é uma sequência exata de complexos de* R*-módulos, onde* $\mathscr{O}$ *é o complexo nulo, então existe a seguinte sequência exata de* R*-módulos:*

$$\ldots \longrightarrow H_n(\mathscr{A}') \xrightarrow{(i_n)_*} H_n(\mathscr{A}) \xrightarrow{(p_n)_*} H_n(\mathscr{A}'') \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathscr{A}') \xrightarrow{(i_{n-1})_*} H_{n-1}(\mathscr{A}) \longrightarrow \ldots,$$

onde i_* *e* p_* *são induzidos pelo funtor homologia e* $\partial_n : H_n(\mathscr{A}'') \to H_{n-1}(\mathscr{A}')$ *é um homomorfismo de* R*-módulos denominado* ***homomorfismo de conexão*** *e definido por*

$$\partial_n : z'' + im(d''_{n+1}) \mapsto i_{n-1}^{-1} d_n p_n^{-1}(z'') + im(d'_n).$$

Resultados Técnicos Envolvendo Complexos e Homologia de Complexos

Os dois seguintes lemas, que são exercícios conhecidos na literatura da teoria de Homologia de Complexos, serão utilizados no Capítulo 5 na demonstração dos resultados principais daquele capítulo.

Lema 1.38. *Sejam* A *um* R*-módulo e* $\mathscr{R}$ *um complexo de* R*-módulos, dado por*

$$\mathscr{R} : F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow B \longrightarrow \boldsymbol{0},$$

onde F_i *é* R*-módulo livre finitamente gerado, para todo* $i \in \{0, \ldots, n\}$*. Se* $H_{n-1}(\mathscr{R})$ *é finitamente gerado como* R*-módulo e* $H_i(\mathscr{R}) = \boldsymbol{0}$*, para todo* $i \in \{0, \ldots, n-2\}$*, então existe resolução parcial livre de tipo finito de* R*-módulos denotada por*

$$\mathscr{R}' : F'_n \xrightarrow{\delta_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow B \longrightarrow \boldsymbol{0}.$$

Demonstração. Como $H_{n-1}(\mathscr{R}) = ker(d_{n-1})/im(d_n)$ é finitamente gerado por hipótese, sejam $z_1 + im(d_n), \ldots, z_k + im(d_n)$ os geradores de $H_{n-1}(\mathscr{R})$ como R-módulo, onde $z_1, \ldots, z_k \in ker(d_{n-1})$. Definamos, então, $F'_n = F_n \oplus R^k$, onde $R^k \cong \bigoplus_{i=1}^{k} e_i R$ com $e_i \in R$ para $1 \leq i \leq k$ e onde $\delta_n|_{F_n} = d_n$ e $\delta(e_i) = z_i$ para $1 \leq i \leq k$. Segue de imediato que F'_n é livre e que $im(\delta_n) = ker(d_{n-1})$. □

Lema 1.39. *Sejam* K *um anel com divisão,* $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ *e* Δ_n *um complexo dado por*

$$\Delta_n : \boldsymbol{0} \longrightarrow K^{\alpha_n} \xrightarrow{d_n} K^{\alpha_{n-1}} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \longrightarrow K^{\alpha_0} \longrightarrow \boldsymbol{0},$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ *e* K^{α_i} *é considerado como* K*-módulo à direita, onde* $0 \leq i \leq n$*.*

Então,

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i dim_K H_i(\Delta_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \alpha_i.$$

(Observe que como K é anel com divisão, o conceito de dimensão está bem definido para os K-módulos do complexo Δ_n. Além disso, tais K-módulos têm dimensão finita).

Demonstração. Vamos fazer a demonstração por indução sobre $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Caso $n = 0$, então $\Delta_0 : \mathbf{0} \longrightarrow K^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbf{0}$. Daí que, $H_0(\Delta_0) = K^{\alpha_0}$ e, portanto,

$$(-1)^0 dim_K(H_0(\Delta_0)) = (-1)^0\alpha_0.$$

Caso $n > 0$, observe que $ker(d_n) \hookrightarrow K^{\alpha_n} \twoheadrightarrow im(d_n)$ é sequência exata curta de K-módulos à direita com dimensões finitas, logo

$$\alpha_n = dim_K K^{\alpha_n} = dim_K(ker(d_n)) + dim_K(im(d_n)). \tag{1.2}$$

Além disso, temos as seguintes condições:

$$ker(d_n) = H_n(\Delta_n); \qquad ker(d_{n-1}) = H_{n-1}(\Delta_{n-1});$$

$$H_i(\Delta_{n-1}) = H_i(\Delta_n), \text{ para } 0 \leq i \leq n-2;$$
$$H_{n-1}(\Delta_n) = \frac{ker(d_{n-1})}{im(d_n)} = \frac{H_{n-1}(\Delta_{n-1})}{im(d_n)}. \tag{1.3}$$

Ademais, pela hipótese de indução,

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i dim_K H_i(\Delta_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \alpha_i.$$

Assim, utilizando as condições (1.3) (p. 31), temos que

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\alpha_i = (-1)^n\alpha_n + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\alpha_i = (-1)^n\alpha_n + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i dim_K H_i(\Delta_{n-1}) =$$

$$= (-1)^n\alpha_n + (-1)^{n-1}dim_K(ker(d_{n-1})) + \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i dim_K H_i(\Delta_{n-1}) \overset{(1.2)}{=}$$

$$= (-1)^n\Big[dim_K(ker(d_n)) + dim_K(im(d_n))\Big] + (-1)^{n-1}dim_K(ker(d_{n-1}))+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i dim_K H_i(\Delta_n) =$$

$$= (-1)^n\Big[dim_K H_n(\Delta_n) + \big\{dim_K(ker(d_{n-1})) - dim_K H_{n-1}(\Delta_n)\big\}\Big]+$$

$$+(-1)^{n-1}dim_K(ker(d_{n-1})) + \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i dim_K H_i(\Delta_n) =$$

$$= (-1)^n dim_K H_n(\Delta_n) + (-1)^{n-1} dim_K H_{n-1}(\Delta_n) + \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i dim_K H_i(\Delta_n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i dim_K H_i(\Delta_n).$$

$\square$

O Funtor Tor

Definição 1.40. *Seja $\mathscr{X}$ um complexo de R-módulos da seguinte forma*

$$\mathscr{X} : \ldots \to X_1 \to X_0 \to M \to \boldsymbol{0}.$$

*Denominamos de **complexo apagado de** $\mathscr{X}$ o complexo $\mathscr{X}_M$ formado pela supressão do R-módulo M em $\mathscr{X}$, ou seja,*

$$\mathscr{X}_M : \ldots \to X_1 \to X_0 \to \boldsymbol{0}.$$

Teorema 1.41 (da Comparação). *[30, Theorem 6.9 (Comparison Theorem), pp. 179 e 180] Sejam A, A' R-módulos, $f : A \to A'$ um homomorfismo de R-módulos e os seguintes complexos de R-módulos*

$$\mathscr{X} : \ldots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \boldsymbol{0}$$

$$\mathscr{X}' : \ldots \longrightarrow X_2' \xrightarrow{d_2'} X_1' \xrightarrow{d_1'} X_0' \xrightarrow{d_0'} A' \longrightarrow \boldsymbol{0}\,.$$

Se X_n é projetivo para cada $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e o complexo $(\mathscr{X}', d')$ é uma sequência exata, então existe um homomorfismo de complexos de R-módulos $\bar{f} : \mathscr{X}_A \to \mathscr{X}'_{A'}$ tal que o seguinte diagrama por completo comute:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "\bar{f}_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "\bar{f}_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "\bar{f}_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \boldsymbol{0} \\
\ldots \arrow[r] & X_2' \arrow[r, "d_2'"'] & X_1' \arrow[r, "d_1'"'] & X_0' \arrow[r, "d_0'"'] & A' \arrow[r] & \boldsymbol{0}
\end{tikzcd}$$

Definição 1.42. *Sejam T um funtor, A um R-módulo, $\mathscr{P}$ uma resolução projetiva de A e $\mathscr{P}_A$ seu respectivo complexo apagado de A. Definimos o **n-ésimo funtor derivado à***

esquerda de *T como sendo*

$$(L_nT)A = H_n(T\mathscr{P}_A) = ker(Td_n)/im(Td_{n+1})$$

e

$$(L_nT)f : (L_nT)A \to (L_nT)B$$

como sendo

$$(L_nT)f = z_n + im(Td_{n+1}) \mapsto (T\bar{f})(z_n) + im(Td'_{n+1}),$$

para $z_n \in ker(Td_n)$ e para B um R-módulo. Aqui $\bar{f} : \mathscr{P}_A \to \mathscr{P}_B$ é o homomorfismo de complexos (apagados) de R-módulos do Teorema da Comparação 1.41 (p. 32).

Na definição acima, o n-ésimo funtor derivado à esquerda de T é um funtor aditivo e, um resultado interessante, é que tal definição independe da escolha da resolução projetiva $\mathscr{P}$ do R-módulo A.

Definição 1.43. *Sejam o funtor $T = -\otimes_R B$, A um R-módulo à direita, $\mathscr{P}$ uma resolução projetiva de A e $\mathscr{P}_A$ seu respectivo complexo apagado de A. O n-ésimo funtor derivado à esquerda L_nT é denominado, neste caso, de* ***n-ésimo funtor de torção*** *e é denotado por*

$$L_nT = Tor_n^R(-, B),$$

onde

$$Tor_n^R(A, B) = H_n(\mathscr{P}_A \otimes_R B) = ker(d_n \otimes id)/im(d_{n+1} \otimes id).$$

Caso sejam o funtor $T = A \otimes_R -$, B um R-módulo à esquerda, $\mathscr{Q}$ uma resolução projetiva de B e $\mathscr{Q}_B$ seu respectivo complexo apagado de B. O n-ésimo funtor derivado à esquerda L_nT é denominado também, neste caso, de n-ésimo funtor de torção e é denotado por

$$L_nT = tor_n^R(A, -),$$

onde

$$tor_n^R(A, B) = H_n(A \otimes_R \mathscr{Q}_B) = ker(id \otimes d_n)/im(id \otimes d_{n+1}).$$

Como consequência da definição do n-ésimo funtor derivado à esquerda, a definição de $Tor_n^R(A, B)$ independe da escolha da resolução projetiva $\mathscr{P}$ do R-módulo A. Analogamento, a definição de $tor_n^R(A, B)$ também independe da escolha da resolução projetiva $\mathscr{Q}$ do R-módulo B.

O seguinte resultado mostra que Tor e tor são equivalentes.

Teorema 1.44. *[30, Theorem 7.9, p. 198] Sejam A um R-módulo à direita e B um R-módulo à esquerda. Sejam também*

$$\ldots \to P_1 \to P_0 \to A \to \mathbf{0} \quad e \quad \ldots \to Q_1 \to Q_0 \to B \to \mathbf{0}$$

resoluções projetivas de R-módulos. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$,

$$H_n(\mathscr{P}_A \otimes_R B) \cong H_n(A \otimes_R \mathscr{Q}_B),$$

como grupos abelianos.

Isso mostra que $Tor_n^R(A, B)$ é isomorfo, como grupo abeliano, a $tor_n^R(A, B)$.

Doravante, denotaremos o funtor $tor_n^R(A, -)$ por $Tor_n^R(A, -)$.

Proposição 1.45. *[30, Theorem 8.1 e Theorem 8.2, pp. 220 e 221] Sejam A um R-módulo à direita e B um R-módulo à esquerda. Então:*

i) $Tor_n^R(A, B) = 0$, para todo $n < 0$.

ii) $Tor_0(-, B)$ é naturalmente equivalente a $- \otimes_R B$ e $Tor_0^R(A, -)$ é naturalmente equivalente a $A \otimes_R -$.

Teorema 1.46. *[30, Theorem 8.3, p. 221] Se $\mathbf{0} \to A' \to A \to A'' \to \mathbf{0}$ é uma sequência exata curta de R-módulos, então existe a seguinte sequência exata de R-módulos:*

$$\ldots \longrightarrow Tor_1^R(A'', B) \longrightarrow A' \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow A'' \otimes_R B \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Proposição 1.47. *[30, pp. 222 e 223] Sejam A e X R-módulos à direita e B um R-módulo à esquerda. Então:*

i) Se X é plano, então $Tor_n^R(X, B) = 0$, para todo $n \geq 1$.

ii) Se R é comutativo, então $Tor_n^R(A, B)$ é um R-módulo e $Tor_n^R(A, B) \cong Tor_n^R(B, A)$ como R-módulos.

1.2.2 Homologia de Grupos

Definição 1.48. *Sejam G um grupo, A um $\mathbb{Z}G$-módulo e consideremos $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Definimos o **n-ésimo grupo homológico de** G **com coeficientes** A por*

$$H_n(G, A) := Tor_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) = H_n(\mathscr{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} A),$$

onde $\mathscr{P}$ é alguma resolução projetiva do $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$.

Uma vez que $Tor_n^{-}(\mathbb{Z}, A)$ e $Tor_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -)$ são funtores, o n-ésimo grupo homológico de G com coeficientes em A é também um bifuntor, isto é, tanto $H_n(-, A)$, quanto $H_n(G, -)$ são funtores.

Proposição 1.49. *[31, Proposition 9.46, pp. 535 e 536 - Corollary 9.49, p. 537 - Proposition 9.53, pp. 540 e 541] Sejam G um grupo e A um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda.*

a) $H_0(G, A) \cong A/(Aug(\mathbb{Z}G)A) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$;

b) $H_0(G, A) \cong A$, *se A é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial;*

c) $H_1(G, A) \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} A$, *se A é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial.*

Proposição 1.50. *[30, Corollary 10.5, p. 269] Sejam G um grupo e A um $\mathbb{Z}G$-módulo. Se G é um grupo livre, então $H_n(G, A) = 0$, para cada $n \geq 2$.*

Proposição 1.51. *[35, Proposition 6.1.13, p. 165] Sejam G, H grupos. Então, a seguinte sequência exata curta cinde:*

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(G, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(H, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_n(G \times H, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_p(G, \mathbb{Z}), H_q(H, \mathbb{Z})).$$

Corolário 1.52. *[35, Exercise 6.1.7, p. 165] Sejam G, H grupos e F um corpo, considerado como $F(G \times H)$-bimódulo trivial. Então, para todo $n \geq 0$,*

$$H_n(G \times H, F) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(G, F) \otimes_F H_q(H, F).$$

Resultados Técnicos Envolvendo Homologia de Grupos

Os dois lemas abaixo, que são conhecidos na literatura da teoria de Homologia de Grupos, serão utilizados no Capítulo 3 e Capítulo 5.

Lema 1.53. *Seja G um grupo. Consideremos $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo à direita trivial e $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Q}G$-bimódulo trivial. Então, para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos o seguinte isomorfismo natural de $\mathbb{Q}G$-módulos à direita*

$$Tor_i^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong Tor_i^{\mathbb{Q}G}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}).$$

Além disso, sendo $F \lhd G$. Então, para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos o seguinte isomorfismo de $\mathbb{Q}(G/F)$-módulos à direita

$$Tor_i^{\mathbb{Z}F}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong Tor_i^{\mathbb{Q}F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}).$$

Demonstração. Façamos a demonstração de que

$$Tor_i^{\mathbb{Z}F}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong Tor_i^{\mathbb{Q}F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}),$$

como $\mathbb{Q}(G/F)$-módulos à direita, para todo $i \in \mathbb{Z}$, sendo $F \lhd G$. A demonstração de que $Tor_i^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong Tor_i^{\mathbb{Q}G}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ como $\mathbb{Q}G$-módulos é análoga.

Recordemos que

$$Tor_i^{\mathbb{Z}F}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) := H_i(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}F} \mathbb{Q}) \quad \text{e} \quad Tor_i^{\mathbb{Q}F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) := H_i(\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q}),$$

onde

$$\mathcal{P} : \ldots \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{0}$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}G$-módulos à direita de $\mathbb{Z}$ e

$$\mathcal{Q} := \mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} : \ldots \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}$$

é também uma resolução livre de $\mathbb{Q}G$-módulos à direita de $\mathbb{Q}$, uma vez que o tensor $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é exato.

Agora

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} : \ldots \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_n} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_0} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}$$

e, portanto,

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} : \ldots \longrightarrow (\mathbb{Q}(G/F))^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Q}(G/F))^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Por outro lado,

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}F} \mathbb{Q} : \ldots \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_n} \otimes_{\mathbb{Z}F} \mathbb{Q} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_0} \otimes_{\mathbb{Z}F} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Observando a seguinte sequência de isomorfismos de $\mathbb{Q}(G/F)$-módulos à direita:

$$\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}F} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}F} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}F} \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}(G/F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}(G/F).$$

Logo,

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}F} \mathbb{Q} : \ldots \longrightarrow (\mathbb{Q}(G/F))^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Q}(G/F))^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

O resultado, então, segue da naturalidade dos isomorfismos no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}F} \mathbb{Q} : \ldots \arrow[r] & (\mathbb{Q}(G/F))^{\alpha_n} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \ldots \arrow[r] & (\mathbb{Q}(G/F))^{\alpha_0} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathbf{0}\,. \\
\mathcal{Q}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} : \ldots \arrow[r] & (\mathbb{Q}(G/F))^{\alpha_n} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & (\mathbb{Q}(G/F))^{\alpha_0} \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

□

Lema 1.54. *Seja G um grupo e suponhamos que exista uma resolução parcial livre de* *tipo finito de $\mathbb{Z}G$-módulos à direita do $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$:*

$$\mathscr{P} : (\mathbb{Z}G)^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \boldsymbol{0}\,,$$

onde $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Então, $H_i(G, \mathbb{Z})$ é grupo abeliano finitamente gerado e

$$rank(H_i(G,\mathbb{Z})) = dim_{\mathbb{Q}}(H_i(G,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}),$$

para $0 \leq i \leq n-1$.

Demonstração. Primeiramente, observe que o complexo apagado de $\mathscr{P}$ é:

$$\mathscr{P}_{\mathbb{Z}} : (\mathbb{Z}G)^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbf{0}$$

e que, para $0 \leq i \leq n-1$,

$$H_i(G,\mathbb{Z}) = Tor_i^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = H_i(\mathscr{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}).$$

Ademais, temos que

$$\mathscr{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} : \mathbb{Z}^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{Z}^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Agora, como $\mathbb{Z}^{\alpha_i}$ é grupo abeliano finitamente gerado, concluímos que $H_i(G,\mathbb{Z})$ é também grupo abeliano finitamente gerado e, portanto,

$$H_i(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_i} \oplus F_i,$$

onde $b_i \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e F_i é um grupo finito. Daí que,

$$H_i(G,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong (\mathbb{Z}^{b_i} \oplus F_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}^{b_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^{b_i}.$$

Portanto,

$$dim_{\mathbb{Q}}(H_i(G,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = b_i = rank(H_i(G,\mathbb{Z})).$$

$\square$

1.3 Aneis de Grupo e Grupos Policíclicos

1.3.1 Algumas Propriedades

Os resultados desta subseção são simplesmente algumas propriedades de Grupos Policíclicos envolvendo Aneis de Grupo e que serão utilizadas no Capítulo 5.

Lema 1.55. *[27, Lemma 3.4, p. 25] Sejam G, H grupos e K um corpo. Então, temos o seguinte isomorfismo de K-álgebras:*

$$KG \otimes_K KH \cong K[G \times H].$$

Definição 1.56. *Um grupo G é chamado de **policíclico** se existe uma cadeia de subgrupos $\mathbf{1} = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$, chamada série subnormal de G, onde cada grupo quociente G_i/G_{i-1} é um grupo cíclico, onde $1 \leq i \leq n$.*

Proposição 1.57 (Propriedades Conhecidas de Grupos Policíclicos)**.** *São válidas as seguintes afirmações:*

i) Se G é um grupo policíclico, então G é finitamente gerado;

ii) Se G é um grupo policíclico, então G é solúvel;

iii) Todo subgrupo de um grupo policíclico G é policíclico;

iv) Se G é um grupo policíclico e $N \lhd G$, então G/N é policíclico;

v) Se G é um grupo policíclico-por-policíclico, então G é policíclico;

vi) Se G é um grupo nilpotente finitamente gerado, então G é policíclico;

vii) Se $G_1, \ldots, G_n$ são grupos policíclicos, então $G_1 \times \ldots \times G_n$ é policíclico.

Usando ii) e vi) temos o seguinte esquema de classes de grupos:

$$\begin{tikzcd}
\textit{Cíclicos} \arrow[r, hook] & \textit{Abel.} \arrow[r, hook] & \textit{Nilp.} \arrow[rr, hook] & & \textit{Solúveis} \\
& & \textit{Nilp. fin. ger.} \arrow[r, hook] & \textit{Policíclicos} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Proposição 1.58. *[27, Theorem 2.7., p. 425]. Sejam S um anel associativo com identidade, G um grupo policíclico-por-finito cujos elementos são unidades de S e R um subanel de S que é noetheriano à direita e tal que $1_R = 1_S$. Se S é gerado como anel por G e por R e $R = R^G := \{g^{-1}rg : g \in G, r \in R\}$, então S é noetheriano à direita.*

O seguinte resultado é usado, amiúde, como ferramenta na teoria de grupos de tipo FP_n.

Corolário 1.59. *Se G é um grupo policíclico-por-finito, então $\mathbb{Z}G$ e $\mathbb{Q}G$ são aneis noetherianos.*

Demonstração. Tomado-se na Proposição anterior $R = \mathbb{Z}$, que é noetheriano (à esquerda e à direita) e $S = \mathbb{Z}G$, veja que G é um grupo de unidades de $\mathbb{Z}G$ e que $\mathbb{Z}G$ é gerado como anel por $\mathbb{Z}$ e por G. Além disso, para todo $g \in G$ e para todo $z \in \mathbb{Z}$, temos que $g^{-1}zg = (1_{\mathbb{Z}}g^{-1}) \cdot (z1_G) \cdot (1_{\mathbb{Z}}g) = zg^{-1}g = z1_G = z$. Analogamente, $gzg^{-1} = z$. Segue, portanto, que $\mathbb{Z}G$ é anel noetheriano (à esquerda e à direita).

De forma idêntica, mostra-se que $\mathbb{Q}G$ é também anel noetheriano (à esquerda e à direita). □

Proposição 1.60. *[27, Lemma 2.5, p. 422] Seja G um grupo poli-$\{$cíclico, finito$\}$. Então, G possui um subgrupo característico de índice finito e que é poli-$\{$cíclico infinito$\}$.*

1.3.2 Localização de Ore e Conjectura do Divisor de Zero

Nesta subseção R denotará um anel associativo com identidade e $S \subseteq R$ denotará um conjunto multiplicativo de R, o qual é definido abaixo.

Em Álgebra Comutativa faz-se o estudo da localização de um anel comutativo. É possível generalizar a ideia de localização vista naquele contexto para aneis não-comutativos. Tal generalização recebe o nome de Localização de Ore.

Definição 1.61. *Um **conjunto multiplicativo** $S \subseteq R$ é um conjunto tal que $1 \in S$, $0 \notin S$ e que é fechado em relação à multiplicação de R, ou seja, $\forall s_1, s_2 \in S, s_1s_2 \in S$. Dito de outra forma, $S \subseteq R$ é um monóide com respeito à multiplicação de R não contendo o elemento $0 \in R$.*

Definição 1.62. *Dizemos que o par (R, S) satisfaz a **condição de Ore à direita** se satisfizer as seguintes propriedades:*

i) dado $(r, s) \in R \times S$, $rS \cap sR \neq \emptyset$;

ii) dado $(r, s) \in R \times S$, se $sr = 0$, então existe $t \in S$ tal que $rt = 0$.

*De forma análoga define-se a **condição de Ore à esquerda**.*

Definição 1.63. *Suponhamos que o par (R, S) satisfaça a condição de Ore à direita. Definamos a seguinte relação de equivalência $\sim$ em $R \times S$:*

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists\ u_1, u_2 \in R \ tais\ que\ r_1u_1 = r_2u_2\ e\ s_1u_1 = s_2u_2\ e,\ além\ disso,\ s_1u_1 = s_2u_2 \in S.$$

Denotaremos o conjunto das classes de equivalência com relação a $\sim$ por RS^{-1} e, dado $(r,s) \in R\times S$, denotaremos a classe de equivalência de (r,s) por r/s, ou por rs^{-1}.

Definição 1.64. *Suponhamos que o par (R,S) satisfaça a condição de Ore à direita. Definimos a **localização de Ore à direita** como sendo o anel associativo com identidade RS^{-1}, onde, dadas as classes de equivalência $r_1/s_1, r_2/s_2 \in RS^{-1}$, a soma (denotada por $+$) é definida por $r_1/s_1 + r_2/s_2 := (r_1c + r_2d)/t$, onde $t = s_1c = s_2d \in S$ e a multiplicação (denotada por $\cdot$) é definida por $r_1/s_1 \cdot r_2/s_2 = r_1c/s_2t$, onde $s_1c = r_2t$ para $t \in S$.*

*De forma análoga define-se a **localização de Ore à esquerda**.*

O elemento neutro (pela soma) é o elemento $0/1$ e o elemento identidade (elemento neutro pela multiplicação) é o elemento $1/1$.

*A função $f : R \to RS^{-1}$ dada por $f(r) = r/1$ é um homomorfismo de aneis. Neste texto denominá-la-emos de **aplicação canônica da localização de Ore**.*

Lema 1.65. *[25, Lemma 8.15 (2) e (3), p. 324] Suponhamos que o par (R,S) satisfaça a condição de Ore à direita e que RS^{-1} seja a localização de Ore à direita.*

i) Considerando a aplicação canônica da localização de Ore $f : R \to RS^{-1}$, segue que

$$ker(f) = \{r \in R : rs = 0 \ para\ algum\ s \in S\}.$$

ii) $RS^{-1} \otimes_R -$ é um funtor exato.

Demonstração. $i)$ A demonstração é imediata a partir da relação de equivalência definida acima sobre RS^{-1}.

$ii)$ Primeiramente, observe que RS^{-1} é um R-bimódulo e que podemos escrever

$$RS^{-1} = \bigcup_{s\in S} Rs^{-1}.$$

Veja que $Rs^{-1} \cong R$ como R-módulos. Considerando o conjunto de índices

$$I = \{Rs^{-1} : s \in S\},$$

temos que $RS^{-1} = \varinjlim(Rs^{-1})$, onde o limite direto percorre o conjunto de índices I.

Observe que I é um conjunto direcionado, isto é, dados $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i \le k$ e $j \le k$, onde a relação de ordem considerada é a continência de conjuntos. De fato, dados $Rs_1^{-1}, Rs_2^{-1} \in I$, então $s_1, s_2 \in S$ e, pela condição de Ore, $s_1S \cap s_2R \neq \emptyset$, que é o mesmo que afirmar que existe $s \in S$ tal que $s \in s_1R$ e $s \in s_2R$, já que S é multiplicativo. Isso equivale a dizer que $s_1^{-1}s \in R$ e $s_2^{-1}s \in R$, ou seja, $s_1^{-1} \in Rs^{-1}$ e $s_2^{-1} \in Rs^{-1}$. Essa última afirmação, naturalmente, equivale a $Rs_1^{-1} \subseteq Rs^{-1}$ e $Rs_2^{-1} \subseteq Rs^{-1}$, o que mostra que I é direcionado finalmente.

Agora $Rs^{-1} \cong R$ como R-módulos e R é R-módulo livre, portanto, R-módulo plano. Assim, Rs^{-1} é um R-módulo plano para cada $s \in S$. Utilizando-se, então, a Proposição 1.17 (p. 25), concluímos que RS^{-1} é R-módulo plano, que, por definição, siginifica dizer que $RS^{-1} \otimes_R -$ é funtor exato. □

A seguir enunciamos uma conjectura antiga, denominada Conjectura do Divisor de Zero (ou Conjectura de Kaplansky).

Embora a conjectura ainda seja um problema em aberto e considerado muito difícil, progressos foram feitos. Nesta Tese de Doutorado usaremos um desses progressos, um resultado devido a Daniel R. Farkas e Robert L. Snider que afirma ser a conjectura verdadeira sob certas hipóteses.

Conjectura 1.66 (do Divisor de Zero (ou de Kaplansky))**.** *Sejam G um grupo e F um corpo. Se G é livre de torção, então FG não possui divisores de zero.*

A recíproca da conjectura do Divisor de Zero (ou de Kaplansky) é verdadeira. Basta olhar para a contrapositiva da afirmação. De fato, se G possui elemento de torção x, isto é, se $x^n = 1$, com $n > 1$, então $(1 - x)(1 + x + \ldots + x^{n-1}) = 0$ em FG.

Apesar dessa conjectura ser um problema em aberto por décadas, avanços foram feitos, mostrando-se que a mesma é válida por uma extensa classe de grupos. Uma dessas classes se encontra na seguinte proposição.

Proposição 1.67 (Farkas-Snider (1976))**.** *[27, Theorem 4.18, p. 636] Sejam G um grupo policíclico-por-finito e F um corpo de característica zero. Se G é livre de torção, então FG não possui divisores de zero.*

Corolário 1.68. *[25, Example 8.16, p. 324] Sejam G um grupo policíclico-por-finito livre de torção, F um corpo de característica zero. Então, $(FG, FG\backslash\{0\})$ satisfaz a condição de Ore. Além disso, a localização de Ore $\mathcal{K} := (FG)(FG\backslash\{0\})^{-1}$ é um anel com divisão que contém uma cópia de FG como subanel, isto é, a aplicação canônica $FG \hookrightarrow \mathcal{K}$ é um monomorfismo.*

1.4 Grupo Fundamental de Grafos de Grupos, Produto Livre Amalgamado e Extensão HNN

1.4.1 Apresentação de Grupos

Todo grupo G é quociente de algum grupo livre $F(X)$ com base algum conjunto X. Logo, podemos escrever

$$G \cong F(X)/\langle R\rangle^{F(X)}$$

onde $R \subseteq F(X)$ (subconjunto) e $\langle R\rangle^{F(X)}$ é o fecho normal de R em $F(X)$, ou seja,

$$\langle R\rangle^{F(X)} = \left\langle \{frf^{-1} : f \in F(X), r \in R\} \right\rangle.$$

Quando escrevemos G desta forma, dizemos que G tem **apresentação** $\langle X|R\rangle$ com **geradores** [3] X e **relações** R e escrevemos

$$G = \langle X|R\rangle$$

Uma apresentação de um grupo G não é única. Por exemplo, temos as seguintes apresentações para o grupo abeliano (em notação multiplicativa) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

$$\langle x|x^6\rangle \quad \text{e} \quad \langle x, y|x^2, y^3, xyx^{-1}y^{-1}\rangle.$$

Definição 1.69. *Seja G um grupo. Caso G tenha uma apresentação $\langle X'|R'\rangle$ com X' e R' conjuntos finitos, então dizemos que G é **finitamente apresentável**.*

Alguns exemplos são:

Exemplo 1.70.

1) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \langle x \mid x^6\rangle$ e $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \langle x, y \mid x^3, y^2, xyx^{-1}y^{-1}\rangle$;

2) $\mathbb{Z} = \langle x \mid \emptyset\rangle$, grupo livre com um único gerador;

3) $F(X) = \langle X \mid \emptyset\rangle$, grupo livre [4] com um conjunto X como gerador;

4) $\mathbb{Z}^3 = \langle x, y, z \mid xyx^{-1}y^{-1}, xzx^{-1}z^{-1}, yzy^{-1}z^{-1}\rangle$;

5) $D_4 = \langle a, b \mid a^4, b^2, (ab)^2\rangle$

[3] Abusando da notação, X é, de fato, um conjunto gerador de G como grupo.
[4] O grupo é dito livre, pois não possui relações, é, de fato, "livre" de relações.

Algumas propriedades bem conhecidas de grupos finitamentes apresentáveis são listadas a seguir:

Propriedade 1.71.

i) Todo grupo finitamente apresentável é finitamente gerado.

ii) Todo grupo finito é finitamente apresentável.

iii) Todo grupo abeliano finitamente gerado é finitamente apresentável.

1.4.2 Produto Livre Amalgamado e Extensão HNN de Grupos

No estudo dos Grupos Fundamentais de Grafos de Grupos aparecem como exemplos duas estruturas interessantes denominadas Produto Livre Amalgamado e Extensão HNN de Grupos, estruturas essas que tem sua importância e estudo independentes daquele contexto.

No Capítulo 3 veremos que Grupos Limites são grupos fundamentais de grafos especiais de grupos específicos, possuindo assim uma relação estreita com Produtos Livres Amalgamados e Extensões HNN de Grupos. Além do mais, em [12] é mostrado que um Grupo Limite é virtualmente uma extensão HNN com propriedades específicas.

Definição 1.72. *Sejam $\mathcal{A}$ um conjunto de índices, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ uma família de grupos, G um grupo e $\{\iota_\alpha : G_\alpha \to G\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ uma família de homomorfismos de grupos. Dizemos que o par $(G, \{\iota_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}})$ é um* ***produto livre dos grupos*** *G_α se, dado um grupo H e dados homomorfismos de grupos $f_\alpha : G_\alpha \to H$ com $\alpha \in \mathcal{A}$, existir um único homomorfismo de grupos $\phi : G \to H$ tal que $f_\alpha = \phi\iota_\alpha$, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo para todo $\alpha \in \mathcal{A}$:*

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "\iota_\alpha"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & G \arrow[dl, dotted, "\phi"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Denotamos

$$G = \mathop{*}_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha.$$

A teoria prevê que G da definição acima é um objeto universal, isto é, G satisfaz uma propriedade universal apropriada. Além disso, um teorema importante, denominado Forma Normal para Produtos Livres, garante que os homomorfismos de grupos ι_α da definição acima são, de fato, monomorfismos de grupos. Daí que, cada grupo G_α, com $\alpha \in \mathcal{A}$, é, na verdade, considerado como subgrupo de G. Desta forma, em geral, consideramos, por abuso, os monomorfismos ι_α como inclusões e o grupo G como o produto livre da família de grupos $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

Sendo G_α, com $\alpha \in \mathcal{A}$, com apresentação $G_\alpha = \langle X_\alpha | R_\alpha \rangle$, o produto livre $\underset{\alpha\in\mathcal{A}}{*} G_\alpha$ é o grupo cuja apresentação é

$$\underset{\alpha\in\mathcal{A}}{*} G_\alpha = \langle \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha | \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} R_\alpha \rangle.$$

Assim, o produto livre $\underset{\alpha\in\mathcal{A}}{*} G_\alpha$ é "livre" de outras relações que não as relações dos grupos G_α que compõem o produto livre.

Definição 1.73. *Sejam G_0, G_1, G_2, G grupos e $i_1 : G_0 \to G_1, i_2 : G_0 \to G_2, \alpha_1 : G_1 \to G, \alpha_2 : G_2 \to G$ homomorfismos de grupos. Dizemos que a tripla (G, α_1, α_2) é um **push-out do par** (i_1, i_2) se:*

i) $\alpha_1 \circ i_1 = \alpha_2 \circ i_2$;

ii) para cada grupo H e cada par de homomorfismos de grupos $f_1 : G_1 \to H$ e $f_2 : G_2 \to H$ tais que $f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$, existir um único homomorfismo de grupos $\phi : G \to H$ tal que $\phi \circ \alpha_1 = f_1$ e $\phi \circ \alpha_2 = f_2$.

Ou seja, tivermos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \arrow[d, "\alpha_1"] \arrow[dr, bend left, "f_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[rr, bend right, "f_2"'] & G \arrow[r, dotted, "\phi"] & H
\end{tikzcd}$$

*Se i_1, i_2 são monomorfismos, dizemos que G é um **produto livre amalgamado de** G_1 **e** G_2 **com** G_0 **amalgamado (ou com amálgama** G_0**)**. Neste caso, denotamos*

$$G = G_1 *_{G_0} G_2.$$

Utilizando ainda a notação da Definição 1.73 (p. 44), a teoria prevê também que o push-out (G, α_1, α_2) do par (i_1, i_2) é um objeto universal, isto é, que o push-out (G, α_1, α_2) do par (i_1, i_2) satisfaz uma propriedade universal apropriada. Ainda mais, no caso de G ser o produto livre amalgamado de G_1 e G_2 com amálgama G_0, caso em que i_1 e i_2 são monomorfismos de grupos, há também um teorema denominado Forma Normal para Produtos Livres Amalgamados que garante que os homomorfismos de grupo α_1 e α_2 são monomorfismos de grupo e que $\alpha_1(G_1) \cap \alpha_2(G_2) = \alpha_1(G_0) = \alpha_2(G_0)$. Assim, consideramos, por abuso, os grupos G_1, G_2 e G_0 como subgrupos de $G = G_1 *_{G_0} G_2$.

Sendo $G_1 = \langle X_1|R_1\rangle$ e $G_2 = \langle X_2|R_2\rangle$, o produto livre amalgamado de G_1 e G_2 com amálgama G_0 é o grupo cuja apresentação é

$$G_1 *_{G_0} G_2 = \big\langle X_1 \cup X_2 | R_1 \cup R_2 \cup \{i_1(g_0)i_2(g_0)^{-1} : g_0 \in G_0\}\big\rangle.$$

Observe ainda que o produto livre dos grupos G_1 e G_2 é o caso particular do produto livre amalgamado de G_1 e G_2 com o grupo trivial **1** amalgamado.

Definição 1.74. *Sejam $G = \langle X|R\rangle$ um grupo, p um símbolo que não pertence a X e A, B subgrupos de G tais que $\varphi : A \xrightarrow{\sim} B$ é um isomorfismo de grupos. Definimos como* ***extensão HNN com grupo base** G**, letra estável** p **e grupos associados** A **e** B o grupo H que possui a seguinte apresentação:*

$$H = \langle X, p | R, p^{-1}ap\varphi(a)^{-1} \ \forall a \in A\rangle$$

Observe que

$$H = \frac{G * \langle p\rangle}{\langle \{p^{-1}ap\phi(a)^{-1}\}_{a\in A}\rangle^{G*\langle p\rangle}}$$

Utilizando-se a notação da Definição 1.74 (p. 45), mais uma vez, temos também que a extensão HNN de um grupo base G, letra estável p e grupos associados A e B é um objeto universal, possuindo também garantias de que G é um subgrupo de H através da Forma Normal para Extensões HNN.

Seguem alguns exemplos de extensões HNN:

Exemplo 1.75.

1) Escrevamos $\mathbb{Z} = \langle x \mid \emptyset\rangle$, que é um grupo livre com base $\{x\}$. Veja que $\mathbb{Z}$ é extensão HNN com base o grupo trivial e letra estável x.

2) Sejam t um elemento não pertencente a $\mathbb{Z} = \langle x \mid \emptyset\rangle$, $A = \mathbb{Z}$, $B = 2\mathbb{Z}$, ou seja, $A = \langle x\rangle$ e $B \cong \langle x^2\rangle$ e $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ um isomorfismo de grupos dado por $\phi(x) = x^2$. Então, a extensão HNN H com grupo base $\mathbb{Z}$, letra estável t e grupos associados A e B tem apresentação $H = \langle x, t \mid t^{-1}xt = x^2\rangle$.

   H é conhecido como grupo de Baumslag-Solitar e denotado por $B(1, 2)$.

1.4.3 Grupo Fundamental de Grafos de Grupos

Definição 1.76. *Um* ***grafo generalizado de grupos** Δ **sobre*** X *consiste de:*

i) um grafo conexo X;

*ii) um grupo G_v para cada $v \in V(X)$ (vértices de X), chamado de **grupo de vértices** e um grupo G_e para cada $e \in E(X)$ (arestas de X), chamado **grupo de arestas**, tal que $G_e = G_{\bar{e}}$ ($\bar{e}$ é a aresta inversa de e);*

iii) um homomorfismo de grupos $\tau_e : G_e \to G_{\tau(e)}$ para cada $e \in E(X)$ (onde $\tau(e)$ é o vértice final de e).

*Se os homomorfismos do item iii) acima são monomorfismos, chamamos Δ de **grafo de grupos**.*

Como $G_e = G_{\bar{e}}$ e $\tau(\bar{e}) = \sigma(e)$ (ponto inicial de e), temos também um homomorfismo $\sigma_e : G_e \to G_{\sigma(e)}, \forall e \in E(X)$.

Definição 1.77. *Sejam Δ um grafo generalizado de grupos sobre X, E o grupo livre com base $E(X)$ e N o fecho normal de $\{e^{-1}\sigma_e(g)e\tau_e(g)^{-1} : e \in E(X), g \in G_e\} \cup \{e\bar{e} : e \in E(X)\}$ em $E * (*_{v \in V(X)} G_v)$. Definimos*

$$F(\Delta) = (E * (*_{v \in V(X)} G_v))/N$$

Caso Δ seja um grafo de grupos, então τ_e e σ_e são monomorfismos, $\forall e \in E(X)$, logo $F(\Delta)$ é extensão HNN com grupo base $*_{v \in V(X)} G_v$, letras estáveis $e \in E(X)$, subgrupos associados $\sigma_e(G_e)$ e $\tau_e(G_e)$, para cada letra estável e, e ainda cada aresta é única para cada par $\{e, \bar{e}\} \subseteq E(X)$.

Definição 1.78. *Sejam Δ um grafo generalizado de grupos sobre X, T uma árvore maximal de X. Definimos o **grupo fundamental de** Δ como sendo*

$$\pi(\Delta, X, T) := F(\Delta)/M,$$

onde M é o fecho normal em $F(\Delta)$ do conjunto $\{e : e \in E(T)\}$.

Pode ser mostrado que $\pi(\Delta, X, T)$ não depende da escolha da árvore maximal T, isto é, T pode ser qualquer árvore maximal. Denotamos, então, $\pi(\Delta, X, T)$ por $\pi(\Delta)$.

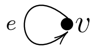
A seguir, apresentamos dois exemplos simples, no entanto importantes [5].

Exemplo 1.79.

1) Seja X o grafo $v \bullet\!\xrightarrow{e}\!\bullet w$ cujas arestas são e e $\bar{e}$ e cujos vértices são $\sigma(e) = v \neq w = \tau(e)$. Como X é árvore, $T = X$. Seja Δ um grafo de grupos do grafo X. Então,

$$\pi(\Delta, X, X) = \frac{F(\Delta)}{\langle \{e\} \rangle^{F(\Delta)}} = \frac{G_v * G_w}{\langle \{\sigma_e(g)\tau_e(g)^{-1}\} \rangle^{G_v * G_w}} = G_v *_{G_e} G_w$$

[5] Estes dois exemplos aparecem como construções básicas em uma das principais caracterizações de Grupos Limites nesta Tese de Doutorado.

2) Seja X o grafo  cujas arestas são e e $\bar{e}$ e cujo vértice é $\sigma(e) = v = \tau(e)$. O vértice v é árvore maximal de X. Seja Δ um grafo de grupos do grafo X. Então,

$$\pi(\Delta, X, v) = F(\Delta)$$

$F(\Delta)$ é uma extensão HNN de grupo base G_v, letra estável e e grupos associados $\sigma_e(G_e)$ e $\tau_e(G_e)$.

Enunciamos aqui dois importantes resultados da Teoria de Bass-Serre:

Teorema 1.80. *[17, Theorem 27, pp. 211 e 212] Sejam Δ um grafo de grupos sobre X e H um subgrupo de $\pi(\Delta)$. Então,*

$$H = \pi(\Omega)$$

em que Ω é um grafo de grupos e os grupos de vértices de Ω são $H \cap gG_vg^{-1}$, $\forall v \in V(X)$ onde g percorre um subconjunto dos representantes das classes bilaterais de H e G_v da forma HkG_v com $k \in \pi(\Delta)$ e onde os grupos de arestas de Ω são $H \cap gG_eg^{-1}, \forall e \in E(X)$ onde g percorre um subconjunto dos representantes das classes bilaterais de H e G_e da forma HkG_e com $k \in \pi(\Delta)$.

Teorema 1.81. *[17, Theorem 9 (Nielsen's Theorem), pp. 189 e 190] Todo subgrupo de um grupo livre é também livre.*

1.5 Sequência Espectral

Nesta seção, R denotará um anel associativo com identidade.

Aqui apresentaremos a definição de Sequência Espectral, bem como alguns resultados centrais relacionados às Sequências Espectrais. O objetivo aqui não é esgotar o tema, mas sim apenas fazer um breve resumo sobre o assunto com enfoque nos teoremas úteis no texto desta Tese de Doutorado.

Sequências Espectrais desempenham um papel crucial na obtenção de alguns dos resultados novos desta Tese no Capítulo 4.

1.5.1 Construção da Sequência Espectral

Definição 1.82. *Um R-**módulo bigraduado** M é uma família duplamente indexada de R-módulos*

$$M = \{M_{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}.$$

Definição 1.83. *Sejam* $M = \{M_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$, $N = \{N_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ *R-módulos bigraduados e* $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. *Definimos um* ***homomorfismo de módulos bigraduados com bigrau*** (a,b), *denotando-o por* $f : M \to N$, *como sendo uma família de homomorfismos de R-módulos*

$$f = \{f_{p,q} : M_{p,q} \to N_{p+a,q+b}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}.$$

Todos os R-módulos bigraduados juntamente com todos os homomorfismos de R-módulos bigraduados formam uma categoria.

Definição 1.84. *Sejam* $M = \{M_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ *e* $M' = \{M'_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ *dois R-módulos bigraduados. Dizemos que* M' *é* ***R-submódulo bigraduado de*** M, *o que denotamos por* $M' \subseteq M$, *se* $M'_{p,q}$ *for R-submódulo de* $M_{p,q}$ *para todo* $p, q \in \mathbb{Z}$. *Observe que a inclusão* $M' \to M$ *é um homomorfismos de R-módulos bigraduados com bigrau* $(0,0)$.

Se M' *é R-submódulo bigraduado de* M, *definimos o* ***R-módulo quociente bigraduado*** *como sendo*

$$M/M' = \{M_{p,q}/M'_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}.$$

Observe que a projeção canônica $M \to M/M'$ *é um homomorfismo de R-módulos bigraduados com bigrau* $(0,0)$.

Sejam $N = \{N_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ *um R-módulo bigraduado e* $f : M \to N$ *um homomorfismo de R-módulos bigraduados com bigrau* (a,b). *Definimos* $ker(f)$ *como sendo*

$$ker(f) = \{ker(f_{p,q})\}_{p,q\in\mathbb{Z}}.$$

Repare que $ker(f)_{p,q} = ker(f_{p,q})$ *para todo* $p, q \in \mathbb{Z}$. *Veja também que* $ker(f) \subseteq M$. *Definimos*

$$im(f) = \{im(f_{p-a,q-b})\}_{p,q\in\mathbb{Z}}.$$

Desta forma, $im(f)_{p,q} = im(f_{p-a,q-b}) \subseteq N_{p,q}$ *para todo* $p, q \in \mathbb{Z}$ *e, portanto,* $im(f) \subseteq N$.

Sendo $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *uma sequência de R-módulos bigraduados, onde* f, g *são homomorfismos de R-módulos bigraduados e* f *tem bigrau* (a,b), *dizemos que tal sequência é* ***exata em*** B *se* $ker(g) = im(f)$, *ou seja,* $ker(g_{p,q}) = im(f_{p-a,q-b})$, *para todo* $p, q \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.85. *Um* ***par exato*** (D, E) ***de R-módulos bigraduados*** *é um diagrama de homomorfismos de R-módulos bigraduados exato em cada ponto*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\alpha"] & & D \arrow[dl, "\beta"] \\ & E \arrow[ul, "\gamma"] & \end{tikzcd}$$

onde

$$im(\alpha) = ker(\beta), \quad im(\beta) = ker(\gamma), \quad im(\gamma) = ker(\alpha).$$

Definição 1.86. *Seja* $\mathscr{C} : \ldots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$ *um complexo. Uma* ***filtração de um complexo*** $\mathscr{C}$ *é uma família de subcomplexos* $\{F^p\mathscr{C}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ *de* $\mathscr{C}$ *tal que*

$$\ldots \subseteq F^{p-1}\mathscr{C} \subseteq F^p\mathscr{C} \subseteq F^{p+1}\mathscr{C} \subseteq \ldots.$$

Tal filtração determina complexos quocientes

$$\ldots,\ F^p\mathscr{C}/F^{p-1}\mathscr{C},\quad F^{p+1}\mathscr{C}/F^p\mathscr{C},\ \ldots.$$

Dizemos ainda que tal filtração é ***limitada*** *caso existam, para cada* $n \in \mathbb{Z}$, $p_0(n), p_1(n) \in \mathbb{Z}$ *tais que*

$$\boldsymbol{0} = F^{p_0(n)}C_n \subseteq F^{p_0(n)+1}C_n \subseteq \ldots \subseteq F^{p_1(n)-1}C_n \subseteq F^{p_1(n)}C_n = C_n.$$

A seguinte proposição garante a existência de pares exatos e, consequentemente, a existência de sequências espectrais.

Proposição 1.87. *[31, Poposition 10.8, pp. 618 e 619] Sejam* $\mathscr{C}$ *um complexo e*

$$\{F^p\mathscr{C}\}_{p\in\mathbb{Z}}$$

uma filtração de $\mathscr{C}$. *Então, existe par exato de* R*-módulos bigraduados* $(E, D, \alpha, \beta, \gamma)$, *onde* $E_{p,q} := H_{p+q}(F^p\mathscr{C}/F^{p-1}\mathscr{C})$, $D_{p,q} := H_{p+q}(F^p\mathscr{C})$, α, β, γ *tem bigraus*

$$(1, -1), \quad (0, 0), \quad (-1, 0)$$

respectivamente.

A partir de um par exato de R-módulos bigraduados $(E^1, D^1, \alpha^1, \beta^1, \gamma^1)$ tal que α^1 tenha bigrau $(1, -1)$, β^1 tenha bigrau $(0, 0)$ e γ^1 tenha bigrau $(-1, 0)$, fazemos a construção de outros pares exatos de R-módulos bigraduados da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd} D^1 \arrow[rr, "\alpha^1"] & & D^1 \arrow[dl, "\beta^1"] \\ & E^1 \arrow[ul, "\gamma^1"] & \end{tikzcd} \qquad \ldots \qquad \begin{tikzcd} D^r \arrow[rr, "\alpha^r"] & & D^r \arrow[dl, "\beta^r"] \\ & E^r \arrow[ul, "\gamma^r"] & \end{tikzcd}$$

Definindo-se, para $r \geq 2$, $d^{r-1} := \beta^{r-1} \circ \gamma^{r-1} : E^{r-1} \to E^{r-1}$, que é homomorfismo de R-módulos bigraduados e que tem bigrau $(1 - r, r - 2)$, veja que

$$d^{r-1} \circ d^{r-1} = 0 \text{ e que } d^{r-1}_{p,q} : E^{r-1}_{p,q} \to E^{r-1}_{p+1-r,q+r-2}$$

Construímos, assim,

$$D^r := Im(\alpha^{r-1}), \text{ que é } R\text{-submódulo bigraduado de } D^{r-1},$$

$$E^r := H(E^{r-1}, d^{r-1}), \text{ que é homologia de módulos, isto é,}$$

$$E^r_{p,q} := \frac{ker(d^{r-1}_{p,q})}{Im(d^{r-1}_{p+r-1,q+2-r})}.$$

Construímos também

$$\alpha^r \text{ como sendo a restrição de } \alpha^{r-1} \text{ sobre } im(\alpha^{r-1});$$

$$\beta^r \text{ induzido por } \beta^{r-1} \circ (\alpha^{r-1})^{-1};$$

$$\gamma^r \text{ induzido por } \gamma^{r-1}.$$

Por definição, temos que $E^r_{p,q}$ é subquociente de $E^{r-1}_{p,q}$, ou seja, existem submódulos A, B de $E^{r-1}_{p,q}$ tais que

$$\mathbf{0} \subseteq A \subseteq B \subseteq E^{r-1}_{p,q} \quad \text{e} \quad E^r_{p,q} = B/A$$

De fato, os elementos de A são os bordos da definição de homologia e os elementos de B são os ciclos da definição de homologia.

Temos, então, a seguinte cadeia de submódulos:

$$\mathbf{0} \subseteq B^2_{p,q} \subseteq B^3_{p,q} \subseteq \ldots \subseteq Z^3_{p,q} \subseteq Z^2_{p,q} \subseteq E^1_{p,q}$$

E, para $r \geq 2$,

$$E^r_{p,q} = \frac{Z^r_{p,q}}{B^r_{p,q}}$$

Além disso, definimos $B^\infty_{p,q} := \bigcup_{r\geq 2} B^r_{p,q}$, $Z^\infty_{p,q} := \bigcap_{r\geq 2} Z^r_{p,q}$ e $E^\infty_{p,q} := \frac{Z^\infty_{p,q}}{B^\infty_{p,q}}$.

Definição 1.88. *Uma **sequência espectral** é uma família* $\{(E^r, d^r)\}_{r\geq 1}$, *construída como acima.*

1.5.2 Convergência da Sequência Espectral

Definição 1.89. *Um R-**módulo graduado** $\mathcal{M}$ é uma família indexada de R-módulos*

$$\mathcal{M} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Definição 1.90. *Sejam* $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *e* $\mathcal{M}' = \{M'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *dois* R*-módulos graduados. Dizemos que* $\mathcal{M}'$ *é* R***-submódulo graduado de*** $\mathcal{M}$*, o que denotamos por* $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$*, se* M'_n *for* R*-submódulo de* M_n *para todo* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Se $\mathcal{M}'$ *é* R*-submódulo graduado de* $\mathcal{M}$*, definimos o* R***-módulo quociente graduado*** *como sendo*

$$\mathcal{M}/\mathcal{M}' = \{M_n/M'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Definição 1.91. *Seja* $\mathcal{M}$ *um* R*-módulo graduado. Uma **filtração de um*** R***-módulo graduado*** $\mathcal{M}$ *é uma família de* R*-submódulos graduados* $\{F^p\mathcal{M}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ *de* $\mathcal{M}$ *tal que*

$$\ldots \subseteq F^{p-1}\mathcal{M} \subseteq F^p\mathcal{M} \subseteq F^{p+1}\mathcal{M} \subseteq \ldots.$$

*Dizemos ainda que tal filtração é **limitada** caso existam, para cada* $n \in \mathbb{Z}$*,* $p_0(n), p_1(n) \in \mathbb{Z}$ *tais que*

$$\mathbf{0} = F^{p_0(n)}M_n \subseteq F^{p_0(n)+1}M_n \subseteq \ldots \subseteq F^{p_1(n)-1}M_n \subseteq F^{p_1(n)}M_n = M_n.$$

Definição 1.92. *Uma sequência espectral* $\{(E^r, d^r)\}_{r\geq 1}$ *é **convergente** se existe um módulo graduado* $\mathcal{M}$ *e uma filtração limitada* $\{F^p\mathcal{M}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ *de* $\mathcal{M}$ *tal que*

$$E^\infty_{p,q} \cong F^pM_n/F^{p-1}M_n, \text{ onde } n = p+q.$$

Neste caso, dizemos que sequência espectral converge a $\mathcal{M}$ *e usamos a notação*

$$E^2_{p,q} \underset{p}{\Rightarrow} M_n$$

Segue abaixo um importante resultado da teoria de Sequências Espectrais.

Teorema 1.93. *[31, Theorem 10.14, pp. 626 e 627] Sejam* $\mathscr{C}$ *um complexo,* $\{F^p\mathscr{C}\}_{p\in\mathbb{Z}}$ *uma filtração limitada de* $\mathscr{C}$ *e* $\{E^r\}_{r\geq 1}$ *a sequência espectral determinada por tal filtração como na Proposição 1.87 (p. 49) e como no texto que se segue a tal proposição. Então,*

i) $E^2_{p,q} \underset{p}{\Rightarrow} H_n(\mathscr{C})$;

ii) $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $\exists r \geq 2$, *dependendo de* p *e* q*, tal que* $E^\infty_{p,q} = E^r_{p,q}$.

O próximo teorema é um corolário de um teorema mais geral devido a Alexander Grothendieck e foi essencial no Capítulo 4 desta Tese de Doutorado. É um importante resultado bastante utilizado em Teoria de Grupos e em Álgebra em geral.

Teorema 1.94 (Lyndon-Hochschild-Serre (LHS))**.** *[31, Theorem 10.52, pp. 661 e 662] Sejam* G *um grupo e* $N \lhd G$*. Então, para cada* $\mathbb{Z}G$*-módulo* A *temos que a seguinte* *sequência espectral é convergente:*

$$E^2_{p,q} = H_p(G/N, H_q(N, A)) \underset{p}{\Rightarrow} H_n(G, A)$$

Denominaremos esta sequência espectral de ***sequência espectral LHS****.*

1.6 Propriedade Homológica FP_n

Na Seção 1.1, especificamente na Subseção 1.1.3, definimos o conceito de tipo homológico FP_n de grupos. Nesta seção exploraremos algumas propriedades de grupos de tipo FP_n.

O objetivo aqui não é esgotar o extenso assunto sobre tipo homológico FP_n, mas tão somente apresentar alguns resultados que serão muito úteis nos teoremas principais desta Tese de Doutorado nos Capítulos 4 e 5.

Sendo $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e K um anel associativo comutativo com identidade, um grupo G é **de tipo FP_n sobre K (ou de tipo $FP_n(K)$)** se o KG-módulo trivial K possui uma resolução parcial projetiva (equivalentemente livre, conforme Proposição 1.22 (p. 26)) de tipo finito de KG-módulos tal como

$$P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to K \to \mathbf{0}.$$

Caso $K = \mathbb{Z}$, dizemos simplesmente que G é de tipo FP_n, como já vimos na Definição 1.24 (p. 27).

Proposição 1.95. *[6, Definition, p. 19] Sejam G um grupo, K um anel associativo comutativo com identidade e $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Se G é de tipo FP_n, então G é de tipo $FP_n(K)$.*

O seguinte resultado caracteriza o tipo homológico FP_1. Uma demonstração mais detalhada pode ser encontrada em [24, Proposição 3.9, p. 108].

Proposição 1.96. *[6, Proposition 2.1, pp. 19 e 20] Seja G um grupo. Então, G é de tipo FP_1 se, e somente se, G é grupo finitamente gerado.*

Sobre o tipo homológico FP_2, é sabido que grupos finitamente apresentáveis são de tipo FP_2, porém a afirmação recíproca manteve-se como um problema em aberto por vários anos. Em 1997, em [4], Mladen Bestvina e Noel Brady mostraram um contraexemplo para tal afirmação, isto é, um exemplo de grupo de tipo FP_2 que não era finitamente apresentável.

A seguinte proposição garante que um subgrupo de grupo de tipo FP_n é desse mesmo tipo, desde que tenha índice finito no grupo. Além do mais, grupo virtualmente de tipo FP_n (isto é, que possui subgrupo de tipo FP_n com índice finito no grupo) é também de tipo FP_n.

Proposição 1.97. *[6, Proposition 2.5, pp. 21 e 22] Sejam G grupo, $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e H subgrupo de G tal que $[G : H] < \infty$. Então, G é de tipo FP_n se, e somente se, H é de tipo FP_n. Portanto, G é de tipo FP_∞ se, e somente se, H é de tipo FP_∞.*

As duas proposições seguintes foram utilizadas nas demonstrações dos resultados novos obtidos no Capítulo 4. A primeira proposição caracteriza tipo homológico FP_n com respeito à homologia de grupos, já a segunda afirma que o funtor homologia de grupos de tipo FP_n comuta com o funtor produto direto até a dimensão $n-1$.

Proposição 1.98. *[6, Proposition 2.3, p. 21] Sejam G um grupo e $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 2$. Então, G é de tipo FP_n se, e somente se, G é finitamente gerado, $H_i(G, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}G)_\alpha) = \boldsymbol{0}$, para $1 \leq i \leq n-1$ e para todo I tal que $|I| = \aleph_0$, onde $(\mathbb{Z}G)_\alpha = \mathbb{Z}G, \forall \alpha \in I$. Além disso, G é de tipo FP_∞ se, e somente se, G é finitamente gerado, $H_i(G, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}G)_\alpha) = \boldsymbol{0}$, para $i \geq 1$ e para todo I tal que $|I| = \aleph_0$, onde $(\mathbb{Z}G)_\alpha = \mathbb{Z}G, \forall \alpha \in I$.*

Proposição 1.99. *[6, Theorem 1.3, pp. 9-11] Sejam G um grupo, $n \in \mathbb{Z}_+$, I um conjunto de índices e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. Se G é de tipo FP_n, então*

$$H_i(G, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha) \cong \prod_{\alpha \in I} H_i(G, M_\alpha),$$

para $0 \leq i \leq n-1$, onde $M_\alpha = M, \forall \alpha \in I$.

O próximo resultado apresenta a relação entre tipo homológico FP_n e os grupos de uma sequência exata curta de grupos. O item *a)* pode ser encontrado em [6], *Proposition* 2.7, p. 23. No entanto, mesmo assim, demos uma demonstração mais detalhada abaixo. Os demais itens, *b)* e *c)*, são resultados conhecidos neste campo de estudo, no entanto não encontramos referências para os mesmos e, portanto, apresentamos também demonstrações para tais resultados.

O resultado novo principal do Capítulo 4 desta Tese de Doutorado responde, de certa forma, quando vale a recíproca do item *c)* abaixo.

Proposição 1.100. *Sejam $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ sequência exata curta de grupos e $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.*

a) Se A é de tipo FP_∞, então B é de tipo FP_n se, e somente se, C é de tipo FP_n.

Portanto, se A é de tipo FP_∞, então B é de tipo FP_∞ se, e somente se, C é de tipo FP_∞.

b) Se A e C são de tipo FP_n, então B é de tipo FP_n.

c) Se A é de tipo FP_n e B é de tipo FP_{n+1}, então C é de tipo FP_{n+1}.

Demonstração. a) Observe que se $n = 0$, não há nada o que fazer, pois todo grupo é de tipo FP_0.

Caso $n = 1$, usando a Proposição 1.96 (p. 52), se B é de tipo FP_1, isto é, finitamente gerado, então C é finitamente gerado, pois $C \cong B/A$ e, portanto, C é de tipo FP_1. Por outro lado, se C é de tipo FP_1, ou seja, finitamente gerado, como A é de tipo FP_∞, em particular, A é de tipo FP_1, logo finitamente gerado, concluímos que B é também finitamente gerado e, portanto, de tipo FP_1.

Seja I algum conjunto enumerável de índices. Caso $n \geq 2$, se B é de tipo FP_n, então B é de tipo FP_1, logo finitamente gerado e, pelo parágrafo precedente, C é de tipo FP_1, logo finitamente gerado. Se C é de tipo FP_n, de forma análoga, B é finitamente gerado. Assim, em qualquer caso, ambos B e C são finitamente gerados. Logo, pela Proposição 1.98 (p. 53), afim de que mostremos que

"B é de tipo FP_n se, e somente se, C é de tipo FP_n",

basta, então, que mostremos que

$$H_i(B, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow H_i(C, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha) = \mathbf{0}, \text{ para } 1 \leq i \leq n-1,$$

onde $(\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z}B$ e $(\mathbb{Z}C)_\alpha = \mathbb{Z}C$ para todo $\alpha \in I$.

Pelo Teorema 1.94 (p. 51), temos a seguinte convergência de sequência espectral

$$E^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha)) \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(B, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha).$$

Como A é de tipo FP_∞ por hipótese, usando a Proposição 1.99 (p. 53), temos que

$$H_q(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha) \cong \prod_{\alpha \in I} H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) \text{ para } q \geq 0.$$

Agora, pela Proposição 1.47 *i)* (p. 34), $\forall \alpha \in I$, $H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbf{0}$ para $q \geq 1$, pois $(\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z}B$ é $\mathbb{Z}A$-módulo livre, uma vez que A é subgrupo de B. Além disso, pela Proposição 1.49 *a)* (p. 35), $\forall \alpha \in I$,

$$H_0(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} (\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}B \cong \mathbb{Z}(B/A) \cong \mathbb{Z}C.$$

Segue, portanto, que

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se} \quad q \geq 1 \\ H_p(C, \prod\limits_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha), & \text{se} \quad q = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

onde $(\mathbb{Z}C)_\alpha = \mathbb{Z}C,\ \forall \alpha \in I$. Assim, fixando-se $p + q = s$ com $1 \leq s \leq n-1$, temos que

$$E^2_{p,q} = \mathbf{0} \text{ se } q \geq 1, \quad E^2_{s,0} \cong H_s(C, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha) \text{ com } s = p + q. \tag{1.5}$$

Portanto, fixando-se $p + q = s$,

$$E^2_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se } 1 \leq s \leq n-1 \text{ e } q \neq 0$$

E segue que,

$$E^\infty_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se } 1 \leq s \leq n-1 \text{ e } q \neq 0, \tag{1.6}$$

já que $E^\infty_{p,q}$ é subquociente de $E^2_{p,q}$.

Analisando a sequência espectral $\{(E^r, d^r)\}_{r \geq 1}$ em torno do ponto $E^i_{s,0}$, com $1 \leq s \leq n-1$ fixado e $i \geq 2$. Temos

$$E^i_{s+i,1-i} \xrightarrow{d^i_{s+i,1-i}} E^i_{s,0} \xrightarrow{d^i_{s,0}} E^i_{s-i,i-1} \ .$$

Daí que, $E^i_{s+i,1-i} = \mathbf{0}$, pois $1 - i < 0$, e, por (1.4) (p. 55), obtemos que $E^i_{s-i,i-1} = \mathbf{0}$ para $i \geq 2$. Assim, temos

$$\mathbf{0} \xrightarrow{d^i_{s+i,1-i}} E^i_{s,0} \xrightarrow{d^i_{s,0}} \mathbf{0} \text{ para todo } 1 \leq s \leq n-1 \text{ fixado e } i \geq 2.$$

Por outro lado, por definição,

$$E^{i+1}_{s,0} = \frac{ker(d^i_{s,0})}{im(d^i_{s+i,1-i})} = E^i_{s,0} \text{ para todo } 1 \leq s \leq n-1 \text{ fixado e } i \geq 2.$$

O que garante, por (1.5) (p. 55), que

$$E^\infty_{s,0} \cong H_s(C, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha) \text{ com } 1 \leq s \leq n-1 \text{ fixado} \ . \tag{1.7}$$

Fixando-se $s \in \{1, \ldots, n-1\}$, pela definição de convergência de uma sequência espectral, existe uma filtração limitada da forma

$$\mathbf{0} = \Phi^{a(s)} H_s \subseteq \Phi^{a(s)+1} H_s \subseteq \ldots \subseteq \Phi^{b(s)-1} H_s \subseteq \Phi^{b(s)} H_s = H_s, \tag{1.8}$$

de forma que

$$E^{\infty}_{p,q} \cong \Phi^p H_s/\Phi^{p-1}H_s, \text{ para } p,q \in \mathbb{Z} \text{ e onde } p+q=s, \tag{1.9}$$

sendo $a(s), b(s) \in \mathbb{Z}$ e onde denotamos, por simplificação de notação, $H_s(B, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$ por H_s.

Usando a filtração limitada em (1.8) (p. 55) e usando (1.9) (p. 56), (1.7) (p. 55) e (1.6) (p. 55), temos que

$$H_s(B, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha) \cong H_s(C, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha), \text{ com } 1 \leq s \leq n-1. \tag{1.10}$$

Logo,

$$H_s(B, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow H_s(C, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha) = \mathbf{0}, \text{ com } 1 \leq s \leq n-1.$$

O que termina a demonstração.

Observe que (1.10) (p. 56) vale para todo $n \geq 2$, logo concluímos também que B é de tipo FP_∞ se, e somente se, C é de tipo FP_∞.

b) Caso $n=0$, a afirmação é trivial, uma vez que todo grupo é de tipo FP_0.

Caso $n=1$, então, por hipótese, A e C são de tipo FP_1, portanto finitamente gerados pela Proposição 1.96 (p. 52). Como $C \cong B/A$, segue que B é também finitamente gerado e, portanto, FP_1 pela Proposição 1.96 (p. 52).

Seja I algum conjunto enumerável de índices. Caso $n \geq 2$, por hipótese, temos que A e C são de tipo FP_n. Mas, isso implica que A e C são de tipo FP_1, logo finitamente gerados e, como vimos acima, B é também finitamente gerado. Pela Proposição 1.98 (p. 53), afim de que mostremos que B é de tipo FP_n, basta, então, que mostremos que

$$H_i(B, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbf{0} \text{ para } 1 \leq i \leq n-1,$$

onde $(\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z}B$ para todo $\alpha \in I$.

Pelo Teorema 1.94 (p. 51), temos a seguinte convergência de sequência espectral

$$E^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(B, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha).$$

Como A é de tipo FP_n, usando a Proposição 1.99 (p. 53), temos que

$$H_q(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha) = \prod_{\alpha\in I} H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) \text{ para } 0 \leq q \leq n-1.$$

Agora, pela Proposição 1.47 *i)* (p. 34), $\forall \alpha \in I$, $H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbf{0}$ para $q \geq 1$, pois $(\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z}B$ é $\mathbb{Z}A$-módulo livre, uma vez que A é subgrupo de B. Além disso, pela Proposição 1.49 *a)* (p. 35), $\forall \alpha \in I$,

$$H_0(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} (\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}B \cong \mathbb{Z}(B/A) \cong \mathbb{Z}C.$$

Segue, portanto, que

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se } \ 1 \leq q \leq n-1 \\ H_p(C, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha), & \text{se } \ q = 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

onde $(\mathbb{Z}C)_\alpha = \mathbb{Z}C$, $\forall \alpha \in I$.

Por outro lado, como C é de tipo FP_n, usando a Proposição 1.98 (p. 53), temos que

$$H_p(C, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha) = \mathbf{0} \text{ se } 1 \leq p \leq n-1. \tag{1.12}$$

Assim, fixando-se $p + q = s$ com $1 \leq s \leq n-1$, por (1.11) (p. 57) e (1.12) (p. 57), temos que

$$E^2_{p,q} = \mathbf{0} \text{ se } 1 \leq q \leq n-1, \quad E^2_{s,0} \cong H_s(C, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha) = \mathbf{0} \text{ com } 1 \leq s \leq n-1.$$

Portanto,

$$E^2_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se fixamos } p + q = s \text{ com } 1 \leq s \leq n-1.$$

E segue que,

$$E^\infty_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se fixamos } p + q = s \text{ com } 1 \leq s \leq n-1, \tag{1.13}$$

já que $E^\infty_{p,q}$ é subquociente de $E^2_{p,q}$.

Fixando-se $s \in \{1, \ldots, n-1\}$, pela definição de convergência de uma sequência espectral, existe uma filtração limitada da forma

$$\mathbf{0} = \Phi^{a(s)} H_s \subseteq \Phi^{a(s)+1} H_s \subseteq \ldots \subseteq \Phi^{b(s)-1} H_s \subseteq \Phi^{b(s)} H_s = H_s, \tag{1.14}$$

de forma que

$$E^\infty_{p,q} \cong \Phi^p H_s / \Phi^{p-1} H_s, \text{ para } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e onde } p + q = s, \tag{1.15}$$

sendo $a(s), b(s) \in \mathbb{Z}$ e onde denotamos, por simplificação de notação, $H_s(B, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha)$ por H_s.

Usando a filtração limitada em (1.14) (p. 57), por (1.15) (p. 57) e (1.13) (p.

57), temos que $H_s = H_s(B, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbf{0}$ para $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ como queríamos. O que termina a demonstração.

c) Caso $n = 0$, então, por hipótese, A é de tipo FP_0 e B é de tipo FP_1, isto é, B é finitamente gerado pela Proposição 1.96 (p. 52). Como $C \cong B/A$, temos que C é também finitamente gerado, ou seja, C é de tipo FP_1 pela Proposição 1.96 (p. 52).

Seja I algum conjunto enumerável de índices. Caso $n \geq 1$, por hipótese, temos que A é de tipo FP_n e B é de tipo FP_{n+1}. Mas, isso implica que B é de tipo FP_1, isto é, finitamente gerado pela Proposição 1.96 (p. 52), logo, como visto acima, C é também finitamente gerado. Assim, pela Proposição 1.98 (p. 53), afim de que mostremos que C é de tipo FP_{n+1}, basta, então, que mostremos que

$$H_i(C, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha) = \mathbf{0} \text{ para } 1 \leq i \leq n,$$

onde $(\mathbb{Z}C)_\alpha = \mathbb{Z}C$ para todo $\alpha \in I$.

Pelo Teorema 1.94 (p. 51), temos a seguinte convergência de sequência espectral

$$E^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha)) \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(B, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha).$$

Como A é de tipo FP_n por hipótese, usando a Proposição 1.99 (p. 53), temos que

$$H_q(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \prod_{\alpha \in I} H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) \text{ para } 0 \leq q \leq n-1.$$

Agora, pela Proposição 1.47 *i)* (p. 34), $\forall \alpha \in I$, $H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbf{0}$ para $q \geq 1$, pois $(\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z}B$ é $\mathbb{Z}A$-módulo livre, uma vez que A é subgrupo de B. Além disso, pela Proposição 1.49 *a)* (p. 35), $\forall \alpha \in I$,

$$H_0(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} (\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}B \cong \mathbb{Z}(B/A) \cong \mathbb{Z}C.$$

Segue, portanto, que

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se } \; 1 \leq q \leq n-1 \text{ e } n \geq 2 \\ H_p(C, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha), & \text{se } \; q = 0, \end{cases} \tag{1.16}$$

onde $(\mathbb{Z}C)_\alpha = \mathbb{Z}C$, $\forall \alpha \in I$. Assim, fixando-se $p + q = s$, com $s \in \{1, \ldots, n\}$, temos que

$$E^2_{p,q} = \mathbf{0} \text{ se } 1 \leq q \leq n-1 \text{ e } n \geq 2,$$

$$E^2_{s,0} \cong H_s(C, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha), \quad E^2_{0,n} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}C} H_n(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha). \tag{1.17}$$

Portanto,

$$E^2_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se } p+q = s \text{ e } p \neq 0, s, \text{ com } s \in \{1, \ldots, n\}$$

E segue que,

$$E^\infty_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se } p+q = s \text{ e } p \neq 0, s,$$

já que $E^\infty_{p,q}$ é subquociente de $E^2_{p,q}$.

Analisando a sequência espectral $\{(E^r, d^r)\}_{r\geq 1}$ em torno do ponto $E^i_{s,0}$, com $s \in \{1, \ldots, n\}$ fixado e $i \geq 2$. Temos

$$E^i_{s+i,1-i} \xrightarrow{d^i_{s+i,1-i}} E^i_{s,0} \xrightarrow{d^i_{s,0}} E^i_{s-i,i-1}\ .$$

Daí que, $E^i_{s+i,1-i} = \mathbf{0}$, pois $1-i < 0$, e também $E^i_{s-i,i-1} = \mathbf{0}$ para $i > n$, já que, neste caso, $s - i < 0$. Por outro lado, por (1.16) (p. 58), obtemos que $E^i_{s-i,i-1} = \mathbf{0}$ para $2 \leq i \leq n$ e $n \geq 2$. Assim, temos

$$\mathbf{0} \xrightarrow{d^i_{s+i,1-i}} E^i_{s,0} \xrightarrow{d^i_{s,0}} \mathbf{0} \ \text{ para todo } i \geq 2.$$

Por outro lado, por definição,

$$E^{i+1}_{s,0} = \frac{ker(d^i_{s,0})}{im(d^i_{s+i,1-i})} = E^i_{s,0} \text{ para todo } i \geq 2.$$

O que garante, por (1.6) (p. 58), que

$$E^\infty_{s,0} \cong H_s(C, \prod_{\alpha\in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha). \tag{1.18}$$

Fixando-se $s \in \{1, \ldots, n\}$, pela definição de convergência de uma sequência espectral, existe uma filtração limitada da forma

$$\mathbf{0} = \Phi^{a(s)} H_s \subseteq \Phi^{a(s)+1} H_s \subseteq \ldots \subseteq \Phi^{b(s)-1} H_s \subseteq \Phi^{b(s)} H_s = H_s, \tag{1.19}$$

de forma que

$$E^\infty_{p,q} \cong \Phi^p H_s / \Phi^{p-1} H_s, \text{ para } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e onde } p+q = s, \tag{1.20}$$

sendo $a(s), b(s) \in \mathbb{Z}$ e onde denotamos, por simplificação de notação, $H_s(B, \prod_{\alpha\in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha)$ por H_s.

Usando a filtração limitada em (1.19) (p. 59) e sendo $s \in \{1, \ldots, n\}$, por (1.20) (p. 59), temos que $E^\infty_{s,0}$ é subquociente de $H_s = H_s(B, \prod_{\alpha\in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha)$. Pela Proposição

1.98 (p. 53), $H_s(B, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbf{0}$, uma vez que B é de tipo FP_{n+1} por hipótese. Daí que, também $E^\infty_{s,0} = \mathbf{0}$. E, por (1.18) (p. 59), concluímos que $H_s(C, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}C)_\alpha) = \mathbf{0}$ para $1 \leq s \leq n$, como queríamos. O que termina a demonstração. $\square$

Capítulo 2

Invariante Homológico Σ^n

Consideremos, neste capítulo, G como sendo um grupo finitamente gerado e D um domínio de integridade, isto é, um anel associativo comutativo com identidade sem divisores de zero e tal que $1 \neq 0$.

2.1 Esfera de Caracteres e Invariante Homológico Σ^n

Nesta seção definiremos o Invariante Homológico Σ^n para cada $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, sendo o mesmo um subconjunto da Esfera de Caracteres, a qual é definida a seguir.

Definição 2.1. *Um homomorfismo de grupos não-nulo $\chi : G \to \mathbb{R}$ é chamado de **caráter de** G.*

Definição 2.2. *Seja $\chi : G \to \mathbb{R}$ um caráter. Dizemos que χ é **discreto** se $im(\chi) \cong \mathbb{Z}$.*

Visto que a abelianização G/G' é grupo abeliano finitamente gerado, segue que (usando notação multiplicativa)

$$G/G' \cong \mathbb{Z}^n \times T$$

onde n é o posto livre de torção de G/G' e T é o subgrupo de torção, que é finito, daí temos os seguintes isomorfismos de grupos abelianos

$$\mathbb{R}^n \cong Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \cong Hom(\mathbb{Z}^n \times T, \mathbb{R}) \cong Hom(G/G', \mathbb{R}) \cong Hom(G, \mathbb{R})$$

onde o primeiro desses isomorfismos é dado por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \langle \cdot, x \rangle \end{array}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Por outro lado, podemos definir a seguinte relação de equivalência em $Hom(G, \mathbb{R})\backslash\{0\}$:

dados $\chi_1, \chi_2 \in Hom(G,\mathbb{R})\backslash\{0\}$, dizemos que

$$\chi_1 \sim \chi_2 \Leftrightarrow \text{ existe } r \in \mathbb{R}_+ \text{ tal que } \chi_1 = r\chi_2.$$

Denotamos a classe de equivalência de $\chi \in Hom(G,\mathbb{R})\backslash\{0\}$ desta relação por $[\chi]$.

Definição 2.3. *Definimos a* ***esfera de caracteres*** $S(G)$ *como sendo o conjunto das classes de equivalência dos caracteres (não-nulos) de* G *com respeito à relação de equivalência* $\sim$ *vista acima, ou seja,*

$$S(G) := \frac{Hom(G,\mathbb{R})\backslash\{0\}}{\sim}$$

onde 0 *denota o homomorfismo nulo.*

Como pode ser observado, a esfera de caracteres $S(G)$ é, de fato, a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ em $\mathbb{R}^n$, sendo n o posto livre de torção de G. $S(G)$ incorpora também a topologia de $\mathbb{S}^{n-1}$ induzida pela topologia de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.4. *Sejam* G_1, G_2 *grupos finitamente gerados (portanto* $G_1 \times G_2$ *é também finitamente gerado). Sejam também* $\chi_1 : G_1 \to \mathbb{R}$, $\chi_2 : G_2 \to \mathbb{R}$ *caracteres. Definamos* $(\chi_1, \chi_2) : G_1 \times G_2 \to \mathbb{R}$ *por*

$$(\chi_1, \chi_2)(g_1, g_2) = \chi_1(g_1) + \chi_2(g_2),$$

onde $g_1 \in G_1$ *e* $g_2 \in G_2$*. Observemos que* (χ_1, χ_2) *é um caráter e,* $\forall r \in \mathbb{R}$,

$$r(\chi_1, \chi_2) = (r\chi_1, r\chi_2).$$

Observação 2.5. Sejam G_1, G_2 grupos finitamente gerados. Sejam também

$$j_1 : G_1 \to G_1 \times G_2, \quad j_2 : G_2 \to G_1 \times G_2$$

os homomorfismos de grupos inclusões canônicas e $\chi : G_1 \times G_2 \to \mathbb{R}$ um caráter. Façamos as composições $\chi j_1 : G_1 \to \mathbb{R}$ e $\chi j_2 : G_2 \to \mathbb{R}$ e sejam

$$\chi_1 := \chi j_1 \quad \text{e} \quad \chi_2 := \chi j_2.$$

Primeiramente, temos que (χ_1, χ_2) é um caráter e, dado $r \in \mathbb{R}_+$, $r(\chi_1, \chi_2) = (r\chi_1, r\chi_2)$. Além disso, podemos escrever $\chi = (\chi_1, \chi_2)$, onde $\chi_1 = \chi j_1$ e $\chi_2 = \chi j_2$. De fato, $\forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$,

$$\chi(g_1, g_2) = \chi((g_1, 1)(1, g_2)) = \chi(g_1, 1) + \chi(1, g_2) =$$

$$= \chi j_1(g_1) + \chi j_2(g_2) = \chi_1(g_1) + \chi_2(g_2) = (\chi_1, \chi_2)(g_1, g_2).$$

Através da Definição 2.4 (p. 62) e da Observação 2.5 (p. 62), podemos definir a junção entre dois subconjuntos da esfera de caracteres.

Definição 2.6. *Sejam G_1, G_2 grupos finitamente gerados e $A \subseteq S(G_1), B \subseteq S(G_2)$ subconjuntos das respectivas esferas de caracteres. Definimos, então, a **junção entre A e B** por*

$$A * B = \big\{[(u_1,u_2)] \in S(G_1 \times G_2) : [u_1] \in A, [u_2] \in B\big\} \cup$$

$$\cup \ \{[(u_1,0)] \in S(G_1 \times G_2) : [u_1] \in A\} \ \cup \ \{[(0,u_2)] \in S(G_1 \times G_2) : [u_2] \in B\}.$$

Sendo G_1, G_2 grupos finitamente gerados, observe que

$$S(G_1 \times G_2) = S(G_1) * S(G_2).$$

A próxima definição preparará o terreno para definirmos o Invariante Homológico Σ^n.

Definição 2.7. *Sejam G um grupo finitamente gerado e χ um caráter de G. Definimos o **monoide relativo ao caráter χ de G** como sendo*

$$G_\chi = \{g \in G : \chi(g) \geq 0\}.$$

Observe que G_χ é, de fato, um monoide e $\mathbb{Z}G_\chi$ é um subanel de $\mathbb{Z}G$.

Definição 2.8. *Sejam D um domínio de integridade e G um grupo finitamente gerado. Consideremos D como um DG-módulo trivial. Definimos o **invariante homológico Σ^n** como sendo*

$$\Sigma^n(G,D) = \{[\chi] \in S(G) : D \text{ tem tipo } FP_n \text{ como } DG_\chi\text{-módulo}\}.$$

Seja A um DG-módulo e sejam ainda D um domínio de integridade e G um grupo finitamente gerado. Em [26], John Meier, Holger Meinert e Leonard VanWyk definem um objeto mais geral denominado **invariante homológico puramente algébrico** Σ^n da seguinte forma:

$$\Sigma^n_D(G,A) = \{[\chi] \in S(G) : A \text{ tem tipo } FP_n \text{ como } DG_\chi\text{-módulo}\}.$$

Veja que, considerando $A = D$ como um DG-módulo trivial, as definições de $\Sigma^n_D(G,D)$ e $\Sigma^n(G,D)$ coincidem.

Definição 2.9. *Sejam D um domínio de integridade, G um grupo finitamente gerado, $\chi : G \to \mathbb{R}$ um caráter de G e $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Suponhamos que D seja um DG-módulo trivial. Dizemos que o monoide G_χ* **é de tipo** *$FP_n(D)$ se $[\chi] \in \Sigma^n(G,D)$.*

O seguinte lema garante que, caso $\Sigma^n(G,D) \neq \emptyset$, então G é de tipo $FP_n(D)$, isto é, D, visto como DG-módulo trivial, é de tipo FP_n.

Assim, supondo $\Sigma^n(G,D) \neq \emptyset$, o Invariante Homológico Σ^n, de certa forma, "mede" para quais caracteres χ de G a propriedade homológica FP_n de D é mantida quando D é visto como módulo sobre o subanel DG_χ. Ou de outra forma, o Invariante Homológico Σ^n "mede" quais monoides G_χ herdam o tipo homológico $FP_n(D)$ de G, onde χ é um caráter de G.

Lema 2.10 (1. Introduction, 1.5, p. 466)**.** *Sejam D um domínio de integridade e G um grupo finitamente gerado. Suponhamos que D seja um DG-módulo trivial. Se $\Sigma^n(G,D) \neq \emptyset$, então G é de tipo $FP_n(D)$. Dito de outra forma, sendo $\chi : G \to \mathbb{R}$ um caráter de G, se G_χ é de tipo $FP_n(D)$, então G é de tipo $FP_n(D)$.*

Demonstração. A princípio, tomando-se $[\chi] \in \Sigma^n(G,D)$, perceba que

$$DG = \bigcup_{k \geq 0} DG_\chi \cdot g_0^k,$$

para qualquer $g_0 \in G$ fixo tal que $\chi(g_0) < 0$.

De fato, para se ver que $DG \subseteq \bigcup_{k \geq 0} DG_\chi \cdot g_0^k$, sendo $\sum_{i=1}^{m} d_i g_i \in DG$, observe que $d_i g_i = d_i g_i g_0^{-1} g_0$, para todo $g_0 \in G$. Daí que,

$$\sum_{i=1}^{m} d_i g_i = [\sum_{i=1}^{m} d_i g_i g_0^{-1}] g_0.$$

Seja $\chi(g_{i_0}) := min\{\chi(g_1), \dots, \chi(g_m)\}$. Tomemos $g_0 \in G$ tal que $\chi(g_0) < 0$. Temos duas possibilidades: ou $\chi(g_{i_0}) \geq 0$, ou $\chi(g_{i_0}) < 0$. Caso $\chi(g_{i_0}) \geq 0$, então $g_i g_0^{-1} \in G_\chi$ para $1 \leq i \leq m$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{m} d_i g_i = [\sum_{i=1}^{m} d_i g_i g_0^{-1}] g_0 \in DG_\chi \cdot g_0.$$

O que mostra a continência requerida. Por outro lado, se $\chi(g_{i_0}) < 0$, sendo $K_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $K_0 > \frac{|\chi(g_{i_0})|}{|\chi(g_0)|}$, então $\chi(g_{i_0} g_0^{-K_0}) = \chi(g_{i_0}) - K_0 \chi(g_0) > 0$. Segue que $\chi(g_i g_0^{-K_0}) > 0$ para $1 \leq i \leq m$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{m} d_i g_i = [\sum_{i=1}^{m} d_i g_i g_0^{-K_0}] g_0^{K_0} \in DG_\chi \cdot g_0^{K_0}.$$

Mostrando-se, assim, a continência esperada.

Seja

$$A_k := \bigcup_{i=0}^{k} DG_\chi \cdot g_0^i = DG_\chi \cdot g_0^k.$$

Veja que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$. Logo,

$$\underrightarrow{lim} A_k \cong \bigcup_{k \geq 0} DG_\chi \cdot g_0^k = DG.$$

Como, para todo $k \geq 0$, A_k é DG_χ-módulo livre, portanto plano, concluímos que $\underrightarrow{lim} A_k \cong DG$ é também DG_χ-módulo plano pela Proposição 1.17 (p. 25). O que é equivalente ao funtor $DG \otimes_{DG_\chi} -$ ser exato.

Agora, por hipótese, G_χ é de tipo $FP_n(D)$, então existe a seguinte resolução parcial livre de tipo finito de DG_χ-módulos do DG_χ-módulo trivial D

$$\mathscr{R} : (DG_\chi)^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (DG_\chi)^{\alpha_1} \longrightarrow DG_\chi \longrightarrow D \longrightarrow \mathbf{0}\ ,$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_+$. Usando o funtor exato $DG \otimes_{DG_\chi} -$ sobre a resolução $\mathscr{R}$, obtemos a seguinte resolução parcial de DG-módulos

$$DG \otimes_{DG_\chi} \mathscr{R} : (DG)^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (DG)^{\alpha_1} \longrightarrow DG \longrightarrow DG \otimes_{DG_\chi} D \longrightarrow \mathbf{0}\ . \quad (2.1)$$

Veja que

$$DG \otimes_{DG_\chi} D = D \otimes_{DG_\chi} D \cong D.$$

De fato, esse último isomorfismo de DG-módulos é dado por $d_1 \otimes d_2 \mapsto d_1 d_2$, onde $d_1, d_2 \in D$. Já a iguadade $DG \otimes_{DG_\chi} D = D \otimes_{DG_\chi} D$ segue da seguinte observação: dados $g_1, g_2 \in G$ e supondo sem perda de generalidade que $\chi(g_1) \geq \chi(g_2)$, temos que $\chi(g_2^{-1} g_1) \geq 0$, logo $g_2^{-1} g_1 \in G_\chi$. Assim, para todo $d \in D$, temos em $DG \otimes_{DG_\chi} D$ que

$$(g_2 - g_1) \otimes d = g_2 \otimes d - g_1 \otimes d = g_2 \otimes d - (g_2 g_2^{-1}) g_1 \otimes d =$$

$$= g_2 \otimes d - g_2(g_2^{-1} g_1) \otimes d = g_2 \otimes d - g_2 \otimes d = 0.$$

Segue que $g_2 \otimes d = g_1 \otimes d$ em $DG \otimes_{DG_\chi} D$. Em particular, dado $g \in G$, $\chi(g) \geq \chi(1) = 0$, ou $\chi(g) < \chi(1) = 0$. De qualquer forma, pelo que foi exposto, $1 \otimes d = g \otimes d$ para todo $d \in D$, o que garante, portanto, que $DG \otimes_{DG_\chi} D = D \otimes_{DG_\chi} D$.

Concluímos, assim, pela resolução em (2.1) (p. 65) que G é de tipo $FP_n(D)$. $\square$

Observe ainda que, sendo D um domínio de integridade, G um grupo finitamente gerado e D um DG-módulo trivial, pela definição do invariante homológico Σ^n, temos que

$$S(G) \supseteq \Sigma^0(G, D) \supseteq \Sigma^1(G, D) \supseteq \ldots \supseteq \Sigma^n(G, D) \supseteq \ldots.$$

Veja que, sendo $D = \mathbb{Z}$,

$$S(G) = \Sigma^0(G, \mathbb{Z}).$$

De fato, sempre temos sequência exata $\mathbb{Z}G_\chi \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z} \to \mathbf{0}$ para todo $[\chi] \in S(G)$, onde ε é um homomorfismo de $\mathbb{Z}G_\chi$-módulos definido por $\varepsilon(\sum_{g \in G_\chi} z_g g) = \sum_{g \in G_\chi} z_g$, onde $z_g \in \mathbb{Z}$. Logo, $\mathbb{Z}$

é sempre finitamente gerado como $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo trivial para qualquer que seja $[\chi] \in S(G)$.

Ademais, sendo

$$(\mathbb{Z}G_\chi)^{\alpha_n} \to \ldots \to (\mathbb{Z}G_\chi)^{\alpha_0} \to \mathbb{Z} \to \mathbf{0},$$

uma resolução livre de tipo finito do $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo trivial $\mathbb{Z}$, visto que o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é exato, temos, então, que

$$(\mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\alpha_n} \to \ldots \to (\mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\alpha_0} \to \mathbb{Q} \to \mathbf{0}$$

é também uma resolução livre de tipo finito do $\mathbb{Z}G_\chi$-módulo trivial $\mathbb{Q}$. Observando que $\mathbb{Z}G_\chi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}G_\chi$, obtemos, por fim, a resolução livre de tipo finito do $\mathbb{Q}G_\chi$-módulo trivial $\mathbb{Q}$:

$$(\mathbb{Q}G_\chi)^{\alpha_n} \to \ldots \to (\mathbb{Q}G_\chi)^{\alpha_0} \to \mathbb{Q} \to \mathbf{0},$$

o que garante que, para $n \geq 0$,

$$\Sigma^n(G, \mathbb{Z}) \subseteq \Sigma^n(G, \mathbb{Q}).$$

Em particular, temos que

$$S(G) = \Sigma^0(G, \mathbb{Q}).$$

2.2 Propriedades do Invariante Homológico Σ^n

Relembremos que neste capítulo G denota um grupo finitamente gerado e D um domínio de integridade.

Muitas são as propriedades do Invariante Homológico Σ^n descritas na literatura, produzida desde as primeiras publicações desse objeto na década de 80 por Robert Bieri, Walter D. Neumann, Burkhardt Renz e Ralph Strebel em [8] e em [9].

Antes de enunciar algumas dessas propriedades, façamos a definição de um objeto muito útil na teoria de Σ-invariantes: a grande subesfera de caracteres.

Definição 2.11. *Sejam G um grupo finitamente gerado e P um subgrupo de G. Definimos a **grande subesfera de caracteres com respeito a** P por*

$$S(G, P) := \{[\chi] \in S(G) : \chi(P) = \mathbf{0}\}.$$

Com respeito às propriedades do Invariante Homológico Σ^n, por exemplo em [9], Robert Bieri e Burkhardt Renz mostrararm que o Invariante Homológico Σ^n sempre é um conjunto aberto da esfera de caracteres e mostraram também, em um segundo resultado, que o invariante homológico Σ^n guarda informações sobre o tipo homológico FP_n de subgrupos normais N de G cujo quociente G/N seja abeliano. Os resultados foram exatamente os seguintes:

Teorema 2.12. *[9, Corollary 4.6, p. 483] Sejam D um domínio de integridade, G um grupo finitamente gerado e consideremos D como um DG-módulo trivial. Então, o invariante homológico $\Sigma^n(G,D)$ é sempre um conjunto aberto da esfera de caracteres $S(G)$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 2.13. *[9, Theorem 5.1, pp. 484-490] Sejam G um grupo de tipo FP_n com $n \geq 1$ e $N \underset{\neq}{\lhd} G$ tal que G/N é um grupo abeliano. Então, N é de tipo FP_n se, e somente se,*

$$S(G,N) \subseteq \Sigma^n(G,\mathbb{Z}).$$

Nas demonstrações desses resultados é utilizada a teoria de valorações, cujas definição e observações básicas serão feitas aqui, uma vez que tal conceito será usado como ferramenta na demonstração do resultado novo principal do Capítulo 5.

Definição 2.14. *Sejam D um domínio de integridade, G um grupo finitamente gerado e $\chi : G \to \mathbb{R}$ um caráter. Uma **valoração do anel de grupo** DG é uma função*

$$\widehat{\chi} : DG \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

que é extensão de χ e tal que

$$\widehat{\chi}(0) = \infty \quad e \quad \widehat{\chi}(\lambda) = min\{\chi(g) \in \mathbb{R} : g \in supp(\lambda)\},$$

onde $\lambda = \sum_{g \in G} d_g g \in DG \backslash \{0\}$ e $supp(\lambda) = \{g \in G : d_g \neq 0\}$

Observemos que, dados $\lambda, \mu \in DG$, temos as seguintes desigualdades:

i) $\widehat{\chi}(\lambda + \mu) \geq min\{\widehat{\chi}(\lambda), \widehat{\chi}(\mu)\}$;

ii) $\widehat{\chi}(\lambda\mu) \geq \widehat{\chi}(\lambda) + \widehat{\chi}(\mu)$.

Para ver que i) é verdadeiro, sejam $\lambda = \sum_{g \in G} r_g g$ e $\mu = \sum_{g \in G} s_g g$ elementos não-nulos de DG, então $\widehat{\chi}(\lambda) = \chi(g_0)$ e $\widehat{\chi}(\mu) = \chi(g_1)$, com $g_0, g_1 \in G$ e $r_{g_0}, s_{g_1} \neq 0$, pela definição de valoração. Consideremos, sem perda de generalidade, que $\widehat{\chi}(\lambda) = \chi(g_0) \leq \chi(g_1) = \widehat{\chi}(\mu)$. Suponhamos, por absurdo, que $\widehat{\chi}(\lambda + \mu) < \widehat{\chi}(\lambda) = \chi(g_0)$. Pela definição de valoração, $\widehat{\chi}(\lambda + \mu) = \chi(g_2)$ para algum $g_2 \in G$ tal que $r_{g_2} + s_{g_2} \neq 0$. Mas, se $r_{g_2} \neq 0$, então, como $\chi(g_2) < \chi(g_0)$, teríamos $\widehat{\chi}(\lambda) = \chi(g_2)$ pela definição de valoração, que é contradição. Analogamente, teríamos uma contradição se $s_{g_2} \neq 0$. Assim, $\widehat{\chi}(\lambda + \mu) \geq min\{\widehat{\chi}(\lambda), \widehat{\chi}(\mu)\}$.

Para ver por que ii) é verdadeiro, sejam $\lambda = \sum_{g \in G} r_g g$ e $\mu = \sum_{h \in G} r_h h$ elementos não-nulos de DG, então $\widehat{\chi}(\lambda) = \chi(g_1)$ e $\widehat{\chi}(\mu) = \chi(h_1)$, com $g_1, h_1 \in G$ e $r_{g_1}, r_{h_1} \neq 0$, pela definição de valoração. Suponhamos, por absurdo, que $\widehat{\chi}(\lambda\mu) < \widehat{\chi}(\lambda) + \widehat{\chi}(\mu)$, então, pela definição de valoração, para alguns $g_0, h_0 \in G$,

$$\widehat{\chi}(\lambda\mu) = \widehat{\chi}(\sum_{g \in G} \sum_{h \in G} r_g r_h gh) = \chi(g_0 h_0) = \chi(g_0) + \chi(h_0) < \chi(g_1) + \chi(h_1)$$

e onde $r_{g_0} r_{h_0} \neq 0$. Daí que, $r_{g_0} \neq 0$ e $r_{h_0} \neq 0$. Além disso, a expressão acima nos garante que $\chi(g_1) + \chi(h_1) - \chi(g_0) - \chi(h_0) > 0$. Caso, $\chi(g_1) - \chi(g_0) \leq 0$, teríamos que $\chi(g_1) \leq \chi(g_0)$, que é uma contradição, a menos que $\chi(g_1) = \chi(g_0)$. Neste caso, teríamos $\chi(h_1) - \chi(h_0) > 0$, isto é, $\chi(h_1) > \chi(h_0)$, o que de novo é uma contradição. Assim, $\widehat{\chi}(\lambda\mu) \geq \widehat{\chi}(\lambda) + \widehat{\chi}(\mu)$, como queríamos.

Caso $\lambda = 0$, ou $\mu = 0$, as afirmações i) e ii) são triviais.

Voltando às propriedades do Invariante Homológico Σ^n, o mesmo se demonstrou muito útil em [10] como ferramenta essencial para que Robert Bieri e Ralph Strebel mostrassem que, para grupos metabelianos (abelianos-por-abelianos), ser finitamente apresentável é o mesmo que ser de tipo homológico FP_2. Explicitamente os autores demonstraram o seguinte teorema:

Teorema 2.15. *[10, Theorem 5.4, p. 461] Seja G um grupo metabeliano. São equivalentes as seguintes afirmações:*

i) G é finitamente apresentável;

ii) G é de tipo FP_2;

iii) G é de tipo $FP_2(D)$, onde D é qualquer domínio de integridade.

Em [10], a notação utilizada $\Sigma_A(Q)$ concide com a notação do invariante puramente algébrico $\Sigma^0_{\mathbb{Z}}(Q, A)$, onde Q foi usado para denotar um grupo abeliano finitamente gerado.

A seguir enunciamos um resultado sobre invariante homológico puramente algébrico Σ^n demonstrado por John Meier, Holger Meinert e Leonard VanWyk. Tal resultado será usado no Capítulo 5.

Teorema 2.16. *[26, Theorem 9.3, p. 42] Sejam D um domínio de integridade, G um grupo finitamente gerado, H um subgrupo de G, M um DG-módulo e $\xi : G \to \mathbb{R}$ um caráter de G. Se $[G : H] < \infty$ e $\xi|_H \neq 0$, então*

$$[\xi|_H] \in \Sigma^n_D(H, M) \Leftrightarrow [\xi] \in \Sigma^n_D(G, M).$$

Em particular, tomando-se $n = 0$, temos que

$$M \text{ é } DG_\xi\text{-módulo finitamente gerado } \Leftrightarrow M \text{ é } DH_{\xi|_H}\text{-módulo finitamente gerado.}$$

Um problema interessante envolvendo o Invariante Homológico Σ^n é a Fórmula do Produto Direto. O seguinte resultado, publicado em [7], é devido a Robert Bieri e Ross Geoghegan.

Teorema 2.17. *[7, Theorem 1.3, p. 253 e Proposition 5.2, pp. 257-260] Sejam $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, G_1, G_2 grupos finitamente gerados e K um corpo. Então,*

$$\Sigma^n(G_1 \times G_2, K)^c = \bigcup_{p=0}^{n} \Sigma^p(G_1, K)^c * \Sigma^{n-p}(G_2, K)^c,$$

onde $*$ denota a junção entre conjuntos de $S(G_1 \times G_2)$ e ^{c} denota o complementar de conjuntos em esfera de caracteres apropriada.

Para o caso particular em que $n = 2$, temos explicitamente:

$$\Sigma^2(G_1 \times G_2, K)^c = \bigcup_{p=0}^{2} \Sigma^p(G_1, K)^c * \Sigma^{2-p}(G_2, K)^c =$$

$$= \left\{[\rho_1, \rho_2)] : [\rho_1] \in \Sigma^1(G_1, K)^c, [\rho_2] \in \Sigma^1(G_2, K)^c \text{ e } \rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0\right\} \cup$$

$$\cup \left\{[\rho_1, 0)] : [\rho_1] \in \Sigma^1(G_1, K)^c, \rho_1 \neq 0\right\} \cup \left\{[0, \rho_2)] : [\rho_2] \in \Sigma^1(G_2, K)^c, \rho_2 \neq 0\right\}.$$

O resultado acima é um dos casos positivos de uma variação da Conjectura da Fórmula do Produto Direto, que foi postulada por Robert Bieri e Ross Georgheagan, cujo enunciado dizia:

Conjectura 2.18 (da Fórmula do Produto Direto)**.** *Sejam $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, G_1 e G_2 grupos finitamente gerados e D um domínio de integridade. Então,*

$$\Sigma^n(G_1 \times G_2, D)^c = \bigcup_{p=0}^{n} \Sigma^p(G_1, D)^c * \Sigma^{n-p}(G_2, D)^c,$$

onde $*$ denota a junção entre conjuntos de $S(G_1 \times G_2)$ e ^{c} denota o complementar de conjuntos em esfera de caracteres apropriada.

Dois resultados existentes referentes a tal conjectura são os seguintes, onde o primeiro deles é conhecido como Desigualdade de Meinert.

Teorema 2.19 (Desigualdade de Meinert)**.** *[7, Theorem 1.2, p. 253] Sejam $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$,*

G_1 e G_2 grupos finitamente gerados e D um domínio de integridade. Então,

$$\Sigma^n(G_1 \times G_2, D)^c \subseteq \bigcup_{p=0}^{n} \Sigma^p(G_1, D)^c * \Sigma^{n-p}(G_2, D)^c,$$

onde $*$ denota a junção entre conjuntos de $S(G_1 \times G_2)$ e ^{c} denota o complementar de conjuntos em esfera de caracteres apropriada.

Teorema 2.20. *[32, Corollary 3.3 e Lemma 2.2, pp. 677 e 678] Sejam G_1, G_2 grupos de tipo FP_n com $n \geq 1$ e $\chi : G_1 \times G_2 \to \mathbb{R}$ um caracter com $\chi|_{(G_1 \times \mathit{1})} \neq 0$ e $\chi|_{(\mathit{1} \times G_2)} \neq 0$. Se $[\chi|_{(G_1 \times \mathit{1})}] \in \Sigma^k(G_1, \mathbb{Z})$ e $[\chi|_{(\mathit{1} \times G_2)}] \in \Sigma^l(G_2, \mathbb{Z})$ para alguns $k, l \geq 0$ com $k + l < n$, então $[\chi] \in \Sigma^{k+l+1}(G_1 \times G_2, \mathbb{Z})$.*

A Conjectura da Fórmula do Produto Direto mostrou-se verdadeira para os casos em que $D = \mathbb{Z}$ e $n = 1$, graças ao trabalho de Robert Bieri, Walter D. Neumann e Ralph Strebel em [8], e em que $D = \mathbb{Z}$ e $n = 2$, graças ao trabalho de Ralf Gehrke em [18]. Observe que para o caso $n = 0$ a conjectura é trivialmente verdadeira.

Em 2008, em [32], Dirk Schütz mostrou que a Conjectura do Produto Direto é falsa para $n \geq 4$ e que a mesma vale para o caso $n = 3$ e $D = \mathbb{Z}$.

Capítulo 3

Grupos Limites e Grupos Residualmente Livres

3.1 Descrições Equivalentes de Grupo Limite

Iniciamos o capítulo dando algumas definições equivalentes de Grupo Limite. Embora não tenhamos trabalhado diretamente com as seguintes definições de Grupo Limite, é interessante observar que o conceito de Grupo Limite permeia por entre áreas distintas da Matemática, como Teoria de Grupos, Topologia Algébrica, Teoria de Grafos e Lógica Matemática.

Uma descrição bastante utilizada de tais grupos é a dada pelos Teoremas 3.6 (p. 73) e 3.7 (p. 73). Várias propriedades apresentadas neste capítulo são demonstradas através desses dois teoremas.

Em [5], Mladen Bestvina e Mark Feighn dão a seguinte definição de Grupo Limite:

Definição 3.1. *Seja Γ um grupo finitamente gerado. Uma sequência de homomorfismos de grupos $\{f_i : \Gamma \to \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ é dita ser* ***estável*** *se, para todo $\gamma \in \Gamma$, a sequência $\{f_i(\gamma)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ em $\mathbb{R}$ é 0, exceto para um número finito de índices $i \in \mathbb{Z}_+$, ou se a mesma sequência em $\mathbb{R}$ nunca é 0, exceto para um número finito de índices $i \in \mathbb{Z}_+$. O* ***kernel estável de*** *$\{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, denotado por $\underrightarrow{ker} f_i$, é o subgrupo de Γ*

$$\{\gamma \in \Gamma : f_i(\gamma) = 0, \text{ exceto para um número finito de índices } i \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Um grupo finitamente gerado G é um ***grupo limite*** *se existe um grupo Γ finitamente gerado e uma sequência estável de homomorfismos de grupos $\{f_i : \Gamma \to \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ tais que*

$$G \cong \Gamma / \underrightarrow{ker} f_i.$$

Em [33], Zlil Sela apresenta uma definição topológica de Grupo Limite. Antes de apresentarmos tal definição, apresentemos o conceito de torre ω-residualmente livre.

Definição 3.2. *Uma* ***torre ω-residualmente livre*** *é o grupo fundamental de um com-*

plexo X_n para algum $n \geq 0$, construido da seguinte maneira:

- *X_0 é uma união, por um ponto, de grafos, toros m-dimensionais $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1}_{m\ vezes}$ e superfícies hiperbólicas fechadas com característica de Euler menor que -1.*
- *X_{k+1} é construído acrescentando a X_k uma das seguintes estruturas:*
  - *i) uma superfície hiperbólica Σ compacta com fronteira colada através da fronteira com característica de Euler menor que -1 tal que exista uma retração $r : X_{k+1} \to X_k$ de modo que $r_*(\pi_1(\Sigma))$ não seja abeliano;*
  - *ii) um toro de dimensão qualquer m, isto é, $T^m = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1}_{m\ vezes}$, colado através de uma curva coordenada (e.g. a curva $\mathbb{S}^1 \times \{1\} \times \ldots \times \{1\}$).*

*O número n é chamado de **altura** da torre ω-residualmente livre.*

Em [33], Zlil Sela mostra que subgrupos finitamente gerados de torres ω-residualmente livres são dados como exemplos de Grupos Limites. Já, em [34], o mesmo autor descreve Grupo Limite como sendo isomorfos a subgrupos finitamente gerados de torres ω-residualmente livres. Portanto, podemos considerar a seguinte definição topológica para Grupo Limite:

Definição 3.3. *Um **grupo limite** G é um subgrupo finitamente gerado de uma torre ω-residualmente livre. Sua **altura**, denotada por $h(G)$, é a altura mínima de uma torre ω-residualmente livre que possui um subgrupo isomorfo a G.*

Observação 3.4. Desta definição segue, claramente, que subgrupos finitamente gerados de grupos limites são também grupos limites.

Podemos, então, descrever Grupos Limites indutivamente por suas alturas. Grupos Limites de altura 0 envolvem grupos de superfície, os quais são definidos a seguir.

Definição 3.5. *Um **grupo de superfície** é o grupo fundamental de uma superfície orientável ou não-orientável. Um **grupo de superfície orientável** é um grupo com a seguinte apresentação*

$$\langle x_1, \ldots, x_{2t} | [x_1, x_2] \cdot [x_3, x_4] \cdot \ldots \cdot [x_{2t-1}, x_{2t}] \rangle$$

*E um **grupo de superfície não-orientável** é um grupo com a seguinte apresentação*

$$\langle x_1, \ldots, x_t | x_1^2 x_2^2 \ldots x_t^2 \rangle$$

Temos que

- **Grupos limites de altura 0** são o produto livre de número finito de grupos abelianos livres de posto finito e grupos de superfície com característica de Euler menor que -1.

- **Grupos limites de altura maior que 0** são descritos pelos seguintes teoremas:

Teorema 3.6. *[11, Lemma 1.3, p. 388] Seja G um grupo limite de altura $h(G) \geq 1$. Então, G é o grupo fundamental de um grafo finito bipartido de grupos, ou seja, os vértices do grafo podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos tais que cada aresta conecta um vértice de um conjunto a um vértice do outro.*

Os grupos de arestas são cíclicos infinitos ou triviais e os grupos de vértice são de dois tipos, cada um correspondente a um conjunto da bipartição:

i) isomorfos a um subgrupo de um grupo limite de altura $h(G) - 1$;

ii) livres de posto finito, ou abelianos livres de posto finito.

Teorema 3.7. *[11, Lemma 1.4, p. 388] Seja G um grupo limite de altura $h(G) \geq 1$ e que não pode ser decomposto como produto livre de dois subgrupos não-triviais. Então, G é o grupo fundamental de um grafo finito de grupos com os grupos de arestas cíclicos infinitos e com um dos grupos de vértice sendo grupo limite não-abeliano de altura menor que $h(G)$.*

Esses dois últimos teoremas dão uma descrição de Grupos Limites sob o ponto de vista de grafos de grupos. Como já mencionado, várias propriedades que serão apresentadas neste capítulo são demonstradas enxergando Grupos Limites conforme os dois últimos teoremas.

3.2 Algumas Propriedades de Grupos Limites

Comecemos esta seção com as definições de dimensão cohomológica e característica de Euler de um grupo.

Definição 3.8. *Seja $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Dizemos que um grupo G tem **dimensão cohomológica** $cd(G) \leq n$ se existir uma resolução projetiva de comprimento finito n de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial do seguinte tipo*

$$\mathbf{0} \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Se não existir tal n, dizemos que $cd(G) = \infty$.

Dizemos ainda que $cd(G) = n$ se n é o menor inteiro não negativo que satisfaz a propriedade acima.

Exemplo 3.9.

1) $cd(G) = 0 \Leftrightarrow G$ é o grupo trivial;

2) G é grupo livre não-trivial $\Leftrightarrow cd(G) = 1$;

3) $cd(\mathbb{Z}^n) = n$;

4) $cd(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \infty$.

A afirmação recíproca, no item 2) do exemplo acima, é um resultado bastante profundo e intrincado devido a John Stallings e Richard Swan (ver [16], p. 185).

Definição 3.10. *Seja G um grupo de tipo FP_∞ tal que $cd(G) < \infty$. Definimos a* ***característica de Euler de*** *G como sendo o seguinte número inteiro*

$$\chi(G) = \sum_{i=0}^{cd(G)} (-1)^i rank(H_i(G, \mathbb{Z}))$$

Observe que $H_i(G, \mathbb{Z})$ é grupo abeliano finitamente gerado, logo o número $rank(H_i(G, \mathbb{Z}))$ está bem definido.

Uma propriedade, envolvendo a característica de Euler, que será utilizada no Capítulo 5 desta Tese é a seguinte.

Proposição 3.11. *[16, (7.3) Proposition, pp. 250-252] Sejam G um grupo de tipo FP_∞ com $cd(G) < \infty$ e H um subgrupo de G. Se $[G : H] < \infty$, então*

$$\chi(H) = [G : H] \cdot \chi(G).$$

Uma propriedade interessante de grupos com dimensão cohomológica finita é que os mesmos são livres de torção. Esse fato é facilmente obtido da seguinte proposição em [16]:

Proposição 3.12. *[16, (2.4) Proposition (a), p. 187] Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Então, $cd(H) \leq cd(G)$.*

Demonstração. A demonstração segue do fato de que uma resolução projetiva de comprimento finito do $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ pode ser considerada como resolução projetiva de comprimento finito do $\mathbb{Z}H$-módulo trivial $\mathbb{Z}$. □

Corolário 3.13. *[16, (2.5) Corollary, p. 187] Seja G um grupo. Se $cd(G) < \infty$, então G é livre de torção.*

Demonstração. Demonstremos a afirmação contrapositiva. Caso G tenha algum elemento de torção, então G possui subgrupo cíclico finito isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pelo Exemplo 3.9 4) (p. 73), temos que $cd(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \infty$ e, portanto, $cd(G) = \infty$ pela Proposição 3.12 (p. 74). □

Enunciemos também o seguinte lema técnico que será utilizado para demonstrar uma das proposições essenciais do Capítulo 5.

Lema 3.14. *[16, (2.6) Proposition, pp. 187 e 188] Seja G um grupo com dimensão cohomológica $cd(G) = n < \infty$. Então, existe uma resolução livre de tipo finito e comprimento finito n de $\mathbb{Z}G$-módulos do $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$*

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \boldsymbol{0}\,.$$

Além disso, aplicando o funtor exato $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ à resolução acima, obtemos uma resolução livre de tipo finito e comprimento finito n de $\mathbb{Q}G$-módulos do $\mathbb{Q}G$-módulo trivial $\mathbb{Q}$

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \boldsymbol{0}\,.$$

A proposição a seguir enumera uma série de propriedades interessantes de Grupos Limites. As propriedades 1), 3), 4) e 5), por exemplo, são demonstradas usando os Teoremas 3.6 (p. 73) e 3.7 (p. 73).

Proposição 3.15.

1) *Todo grupo limite G é de tipo FP_∞ e é finitamente apresentável;*

2) *Todo subgrupo finitamente gerado de um grupo limite é também um grupo limite;*

3) *Seja G um grupo limite. Então, $cd(G) < \infty$. Em particular, G é livre de torção;*

4) *Seja G um grupo limite. Então, $\chi(G) \leq 0$. Além disso, $\chi(G) = 0 \Leftrightarrow G$ é abeliano;*

5) *Todo grupo limite G é livre-por-(nilpotente livre de torção);*

6) *Em todo grupo limite G a comutatividade entre elementos não neutros é uma relação transitiva, isto é, $[x, y] = 1$ e $[y, z] = 1 \Rightarrow [x, z] = 1, \forall x, y, z \in G \backslash \{1\}$.*

7) *(Core Property) Sejam G grupo limite, $H \leq G$ e $\boldsymbol{1} \neq N \lhd G$, onde $N \subseteq H$. Se H é finitamente gerado, então $[G : H] < \infty$.*

8) *(Howson Property) Sejam G grupo limite e $H_1, H_2 \leq G$. Se H_1 e H_2 são subgrupos de G finitamente gerados, então $H_1 \cap H_2$ é subgrupo de G finitamente gerado.*

As propriedades 1) e 3) acima seguem de indução sobre a altura do Grupo Limite e da Teoria de Bass-Serre. Já a propriedade 2) refere-se à Observação 3.4 (p. 72). As propriedades 4) e 5) foram demonstradas por Dessislava H. Kochloukova em [21, Lemma 5, pp. 4 e 5 e Corollary 3, p. 4]. A propriedade 6) é consequência direta do Teorema 3.21 (p. 78) e do Teorema 3.23 (p. 78) abaixo. Por fim, a Propriedade de Howson e a *Core Property* são, respectivamente, resultados de Ilya Kapovich em [19], *Theorem* 6.3, p. 353 e de Martin R. Bridson, James Howie, Charles F. Miller III e Hamish Short em [15], *Theorem* 4.1, pp. 1454 e 1457.

Um outra propriedade de Grupos Limites é a que garante que tais grupos são virtualmente extensões HNN.

Proposição 3.16. *[12, Theorem 3.1, pp. 394-396] Sejam G um grupo limite e $\mathbf{1} \neq N \lhd G$. Então, existe um subgrupo U de G de índice finito tal que U é uma extensão HNN com grupo base finitamente gerado, subgrupos associados cíclicos e letra estável $t \in N$. Dito de outra forma, G é virtualmente uma extensão HNN com grupo base finitamente gerado, subgrupos associados cíclicos e letra estável $t \in N$.*

Em [21], Dessislava H. Kochloukova conseguiu calcular o Invariante Homológico $\Sigma^n(G, \mathbb{Z})$ de Grupos Limites. O resultado, inclusive, serve como um contra-exemplo para o Lema 2.10 (p. 64), uma vez que um Grupo Limite G é de tipo FP_n para todo $n \geq 0$, porém $\Sigma^n(G, \mathbb{Q}) = \emptyset$.

Proposição 3.17. *[21, Corollary 30, p. 16] Para todo grupo limite G não-abeliano e todo $n \geq 1$,*

$$\Sigma^n(G, \mathbb{Q}) = \emptyset.$$

Demonstração. Analisando a demonstração do *Lemma* 29 dada em [21], p. 15, suponhamos que $[\chi] \in \Sigma^1(G, \mathbb{Q})$, ou seja, $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Q}G_\chi$-módulo de tipo FP_1. Basta, então, na demonstração do *Lemma* 29, tomarmos a resolução parcial livre de tipo finito

$$\mathscr{P} : P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0} \, .$$

Daí que, utilizando a resolução apagada $\mathscr{P}_\mathbb{Q}$ e o Lema 1.53 (p. 35), segue que:

$$H_1(\mathscr{P}_\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q}) \cong Tor_1^{\mathbb{Q}F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cong Tor_1^{\mathbb{Z}F}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = H_1(F, \mathbb{Q}).$$

Continuamos, então, com a mesma demonstração dada em [21], no *Lemma* 29, p. 16. $\square$

3.3 Grupos Residualmente Livres

Grupo Residualmente Livre é o principal objeto investigado no Capítulo 5 desta Tese de Doutorado. Como veremos abaixo, tais grupos são uma generalização de Grupos Limites no sentido em que a classe dos Grupos Limites está contida na classe dos Grupos Residualmente Livres.

Definição 3.18. *Um grupo G é chamado de **residualmente livre** se,*

$$\bigcap_{\substack{N \lhd G \\ G/N \text{ é livre}}} N = \mathbf{1},$$

onde a intersecção acima, como indicado, percorre todos os grupos normais N de G tais que o grupo quociente G/N seja um grupo livre.

A definição acima é equivalente a dois outros fatos facilmente obtidos, o que motiva definir um grupo Residualmente Livre por qualquer uma das três possíveis propriedades a seguir.

Proposição 3.19. *Seja G um grupo. As seguintes propriedades são equivalentes:*

i) $\bigcap_{\substack{N \lhd G \\ G/N \text{ é livre}}} N = \mathbf{1}$;

ii) para cada $1 \neq g \in G$, existe um grupo livre F_g e um homomorfismo de grupos $\varphi_g : G \to F_g$ tal que $\varphi_g(g) \neq 1$;

iii) G pode ser mergulhado como subgrupo de um produto direto, não necessariamente finito, de grupos livres, ou seja,

$$G \hookrightarrow \prod_{i \in I} F_i,$$

onde F_i é livre e I é um conjuto de índices não necessariamente finito.

Demonstração. Para ver que i) implica ii), tome um qualquer $g \in G\backslash\{1\}$. Visto que $\bigcap_{\substack{N \lhd G \\ G/N \text{ é livre}}} N = \mathbf{1}$, existe $N_0 \lhd G$ tal que G/N_0 é livre e $g \notin N_0$. Daí que, tomando como φ_g a projeção canônica $G \twoheadrightarrow G/N_0$ obtemos o resultado.

Para obter i) a apartir de ii) contrapositivamente, veja que $ker(\varphi_g) \lhd G$ e que

$$G/ker(\varphi_g) \cong im(\varphi_g) \leq F_g.$$

Logo, $im(\varphi_g)$ é também um grupo livre pelo Teorema 1.81 (p. 47) e, portanto, $G/ker(\varphi_g)$ é um grupo livre. Caso $\bigcap_{\substack{N \lhd G \\ G/N \text{ é livre}}} N \neq \mathbf{1}$, tome $x \in \bigcap_{\substack{N \lhd G \\ G/N \text{ é livre}}} N$ tal que $x \neq 1$. Em particular, $x \in \bigcap_{g \in G\backslash\{1\}} ker(\varphi_g)$. Daí que, $\varphi_g(x) = 1$ para todo $g \in G\backslash\{1\}$. Logo, $\varphi_x(x) = 1$, que é a negação da afirmação ii). Assim, concluímos que i) pode ser obtida de ii).

Notemos que iii) é obtido de ii) considerando o produto direto $\prod_{g \in G\backslash\{1\}} F_g$ e observando que temos o seguinte monomorfismo de grupos $\iota : G \hookrightarrow \prod_{g \in G\backslash\{1\}} F_g$ dado por, para cada $h \in G$,

$$\iota(h) = \prod_{g \in G \setminus \{1\}} \varphi_g(h) = (\varphi_g(h))_{g \in G \setminus \{1\}}.$$

Por fim, mostremos que iii) implica ii). Seja G um subgrupo de $\prod_{i \in I} F_i$, onde cada F_i é um grupo livre. Tome um qualquer $g \in G$ com $g \neq 1$. Então, $g = (f_i) \in \prod_{i \in I} F_i$, onde $f_i \in F_i$ para cada $i \in I$. Como $g \neq 1$, existe $i_0 \in I$ tal que $f_{i_0} \neq 1$. Tome, então, $\varphi_g = \pi_{i_0}$, onde $\pi_{i_0} : G \twoheadrightarrow F_{i_0}$ é a projeção $\pi_{i_0}((f_i)) = f_{i_0}$. Assim, $\varphi_g(g) = \pi_{i_0}(g) = f_0 \neq 1$. $\square$

Vejamos agora que a classe dos Grupos Limites é uma classe estritamente menor que está contida na classe dos Grupos Residualmente Livres.

Definição 3.20. *Um grupo G é chamado de **completamente residualmente livre** se, para cada subconjunto finito X de G, existir um grupo livre F_X e um homomorfismo de grupos $\varphi_X : G \to F_X$ tal que $(\varphi_X)|_X$ é injetivo.*

O seguinte resultado mostra mais uma faceta dos Grupos Limites e é devido a Zlil Sela, publicado em [33], em 2001. Tal descrição é a descrição mais simples para Grupos Limites, embora as outras descrições, enunciadas na primeira seção deste capítulo, têm se mostrado, na literatura, mais úteis para se investigar tais grupos.

Teorema 3.21. *[33, Theorem 4.6, pp. 60 e 61] Seja G um grupo finitamente gerado. Então, G é um grupo limite se, e somente se, G é completamente residualmente livre.*

Observe que grupos completamente residualmente livres são Residualmente Livres. Em particular, temos que

Grupos Limites são Residualmente Livres.

Para entendermos por que a classe dos Grupos Limites está, estritamente, contida na classe dos Grupos Residualemnte Livres é necessário apresentar o seguinte resultado devido a Benjamim Baumslag, publicado em [1], em 1967.

Definição 3.22. *Seja Γ um grupo. Dizemos que Γ é **transitivamente comutativo** se, dados $x, y, z \in \Gamma \setminus \{1\}$, tivermos a seguinte implicação:*

$$[x, y] = 1 \quad e \quad [y, z] = 1 \quad \Rightarrow \quad [x, z] = 1.$$

Teorema 3.23. *[1, Theorem 1, pp. 403 e 404] Seja G um grupo residualmente livre. Então, G é residualmente completamente livre se, e somente se, G é transitivamente comutativo.*

O seguinte exemplo nos mostra que a classe dos Grupos Limites está estritamente contida na classe dos Grupos Residualmente Livres.

Exemplo 3.24. Sejam $A = \langle x, y \mid \emptyset \rangle$ e $B = \langle s, t \mid \emptyset \rangle$ dois grupos livres de posto 2. Definamos $G := A \times B$, o produto direto de A e B. Observe que G é residualmente livre por ser ele próprio o produto direto de grupos livres. Por outro lado, G não é transitivamente comutativo, pois, em G,

$$[(1,s),(x,1)] = (1,s)(x,1)(1,s^{-1})(x^{-1},1) = 1$$

e

$$[(x,1),(1,t)] = (x,1)(1,t)(x^{-1},1)(1,t^{-1}) = 1.$$

Mas,

$$[(1,s),(1,t)] = (1, sts^{-1}t^{-1}) \neq 1,$$

pois B é grupo livre de relações.

Pelo Teorema 3.23 (p. 78), concluímos que G não é completamente residualmente livre. Daí que G não é Grupo Limite pelo Teorema 3.21 (p. 78).

Embora hajam Grupos Residualmente Livres que não são Grupos Limites, um importante resultado, em [20], publicado em 1998, de Olga Kharlampovich e Alexei Mysnikov garante-nos que Grupos Residualmente Livres **finitamente gerados** são subgrupos de um produto direto **finito** de Grupos Limites. Eis o enunciado do teorema demonstrado pelo autores.

Teorema 3.25. *[20, Corollary 2, p. 522] Todo grupo residualmente livre finitamente gerado é um subgrupo de um produto direto finito de grupos completamente residualmente livres.*

A recíproca desse resultado é trivialmente verdadeira, como vemos abaixo.

Lema 3.26. *Sejam $H \leq G_1 \times \ldots \times G_m$ um subgrupo qualquer não-trivial de um produto direto de grupos limites. Então, H é um grupo residualmente livre.*

Demonstração. De fato, dado $h \in H$ com $h \neq 1$, então existe $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\pi_{j_0}(h) \neq 1$, onde $\pi_{j_0} : H \to G_{j_0}$ é a restrição da projeção canônica em H sobre G_{j_0}. Como G_{j_0} é um grupo limite, segue que o mesmo é um grupo completamente residualmente livre pelo Teorema 3.21 (p. 78) e, portanto, residualmente livre. Logo, existem um grupo livre F_h e um homomorfismo de grupos $\varphi_h : G_{j_0} \to F_h$ tal que $\varphi_h(\pi_{j_0}(h)) \neq 1$. Assim, $\varphi_h \pi_{j_0} : H \to F_h$ é um homomorfismo de grupos com F_h sendo um grupo livre e $\varphi_h \pi_{j_0}(h) \neq 1$. Visto que $h \in H$ foi tomado arbitrário, segue que H é residualmente livre por definição. $\square$

Desta forma, podemos enxergar um grupo residuamente livre finitamente gerado G como um subgrupo de um produto direto possivelmente infinito de grupos livres, ou como um subgrupo de um produto direto finito de grupos limites:

$$G \hookrightarrow \prod_{i \in I} F_i, \text{ onde } F_i \text{ é livre e } I \text{ é um conjunto possivelmente infinito,}$$

ou

$$G \hookrightarrow G_1 \times \ldots \times G_m, \text{ onde } G_i \text{ é grupo limite, para } 1 \leq i \leq m.$$

Além disso, em 1999, em [3], Benjamim Baumslag, Alexei Myasnikov e Vladimir Remeslennikov mostraram que tal mergulho de um grupo residualmente livre finitamente gerado G como subgrupo de um produto direto finito de grupos limites $G_1 \times \ldots \times G_m$ se dá de forma que G é um produto subdireto desse produto direto de grupos limites. Explicitamente, temos o seguinte teorema abaixo.

Definição 3.27. *Sejam $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$ um subgrupo de um produto direto de grupos e $p_j : S \to G_j$ a restrição em S da projeção canônica, onde $1 \leq j \leq m$. Dizemos que S é um* ***produto subdireto de*** *$G_1 \times \ldots \times G_m$ se $p_j(S) = G_j$, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dizemos ainda que tal produto subdireto é* ***completo*** *se $S \cap G_j \neq \mathbf{1}$, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$.*

Teorema 3.28. *[3, Corollary 19, p. 76] Todo grupo residualmente livre finitamente gerado é um produto subdireto completo de um produto direto de grupos limites com número finito de componentes no produto direto.*

Desta forma, sendo G um grupo residualmente livre finitamente gerado, existem grupos limites $G_1, \ldots, G_m$ tais que

$$G \hookrightarrow G_1 \times \ldots \times G_m, \text{ com } p_i(G) = G_i \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\},$$

onde $p_i : G \to G_i$ é a restrição sobre G da projeção canônica $G_1 \times \ldots \times G_m \twoheadrightarrow G_i$.

Grupos Residualmente Livres Finitamente Gerados e Propriedade FP_n

Concentraremo-nos agora em algumas propriedades homológicas dos grupos residualmente livres finitamente gerados.

Iniciemos com a definição de Grupos VSP.

Definição 3.29. *Seja $G \leq G_1 \times \ldots \times G_m$ um subgrupo de um produto direto de grupos. Dizemos que G é* ***virtualmente sobrejetivo em pares (VSP)*** *se, $\forall i, j \in \{1, \ldots, m\}$,*

$p_{ij}(G)$ possui índice finito em $G_i \times G_j$, onde $p_{ij} : G \to G_i \times G_j$ é a restrição sobre G da projeção $G_1 \times \ldots \times G_m \twoheadrightarrow G_i \times G_j$.

Um importante resultado devido a Martin R. Bridson, James Howie, Charles F. Miller III e Hamish Short, publicado em [14], em 2013, afirma que, em se tratando de grupos residualmente livres finitamente gerados, a classe dos grupos de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$ coincide com a classe dos grupos finitamente apresentáveis e ambas também coincidem com a classe dos grupos VSP.

Teorema 3.30. *[14, Theorem 5.1, pp. 910 e 911] Seja S um grupo residualmente livre finitamente gerado, pelo Teorema 3.28 (p. 80), $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$ é um produto subdireto completo finitamente gerado de um produto direto de grupos limites. Suponhamos que G_i é não-abeliano para $1 \leq i \leq m$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

i) S é finitamente apresentável;

ii) S é de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$;

iii) S é VSP;

iv) $dim H_2(S_0, \mathbb{Q}) < \infty$, para todo subgrupo S_0 de S tal que $[S : S_0] < \infty$.

Fixemos agora as seguintes notações. Sejam $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$ um produto subdireto completo de um produto direto de grupos limites não-abelianos e $p_j : S \to G_j$ a restrição em S da projeção canônica $G_1 \times \ldots \times G_m \twoheadrightarrow G_j$, onde $1 \leq j \leq m$. Sejam ainda

$$L_j := S \cap G_j \neq \mathbf{1} \quad \text{e} \quad N_{i,j} := p_j(ker(p_i)),$$

para todo $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ com $i \neq j$.

Observe que $N_{i,j} \lhd G_j$. De fato, seja $g \in G_j$ e $n \in N_{i,j}$. Então, $g = p_j(x)$, para algum $x \in S$ e $n = p_j(k)$, para algum $k \in ker(p_i)$. Logo, $p_i(xkx^{-1}) = p_i(x)p_i(x)^{-1} = 1$ e, portanto, $xkx^{-1} \in ker(p_i)$. Assim, $gng^{-1} = p_j(x)p_j(k)p_j(x)^{-1} = p_j(xkx^{-1}) \in N_{i,j}$.

O lema e o teorema a seguir são resultados técnicos utilizados no Capítulo 5.

Antes, façamos a seguinte observação com relação à notação utilizada aqui. Em geral, temos a seguinte notação para comutadores de grupos. Seja G um grupo. Dado $i \in \mathbb{Z}_+$, temos:

$$[g_1, \ldots, g_i] := [[g_1, \ldots, g_{i-1}], g_i],$$

onde $[g_1] := g_1$, $[g_1, g_2] := g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$ e $g_i \in G, \forall i \in \mathbb{Z}_+$. Denominamos $[g_1, \ldots, g_i]$ de **comutador normado à esquerda de tamanho** i.

Lema 3.31. *[15, Lemma 6.1, p. 1457] $[N_{1,j}, \ldots, N_{j-1,j}, N_{j+1,j}, \ldots, N_{n,j}] \subseteq L_j$.*

Na demonstração do teorema a seguir, é usado fortemente a Proposição 3.16 (p. 76) para os grupos limites G_i, com $1 \leq i \leq m$.

Teorema 3.32. *[15, Proposition 6.4, pp. 1.459 e 1.460] Seja S um grupo residualmente livre finitamente gerado, pelo Teorema 3.28 (p. 80), $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$ é um produto subdireto completo finitamente gerado de um produto direto de grupos limites. Suponhamos que G_i é não-abeliano para $1 \leq i \leq m$ e que $m \geq 2$. Se $dim H_2(S_0, \mathbb{Q}) < \infty$, para todo subgrupo S_0 de S tal que $[S : S_0] < \infty$, então, com a notação fixada acima,*

$$[G_j : N_{i,j}] < \infty, \ \textit{onde } 1 \leq i, j \leq m \textit{ e } i \neq j.$$

Terminamos esta seção enunciando o teorema demonstrado por Dessislava H. Kochloukova em [21], em 2010 que foi um dos motivadores essenciais para o teorema principal do Capítulo 5 desta Tese de Doutorado.

Teorema 3.33. *[21, Theorem 9, pp. 6 e 7] Seja S um grupo residualmente livre finitamente gerado, pelo Teorema 3.28 (p. 80), $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$ é um produto subdireto completo finitamente gerado de um produto direto de grupos limites. Suponhamos que G_i é não-abeliano para $1 \leq i \leq m$. Se S é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$ para algum $n \in \{2, \ldots, m\}$, então, para cada projeção canônica $p_{j_1,\ldots,j_n} : G_1 \times \ldots \times G_m \twoheadrightarrow G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n}$,*

$$[G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n} : p_{j_1,\ldots,j_n}(S)] < \infty.$$

Capítulo 4

Resultados Novos: Versões Homológicas de Resultados Homotópicos

Seja $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ uma sequência exata curta de grupos tal que A é de tipo FP_n e C é de tipo FP_{n+1}. Pela Proposição 1.100 *b)* (p. 53), B é de tipo FP_n. O objetivo deste capítulo é estudar quando é que B é de tipo FP_{n+1} e mostrar como esse resultado pode ser usado para demonstrar parcialmente a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica.

4.1 Resultados Técnicos Preliminares

Teorema 4.1. *Sejam I um conjunto de índices enumerável, $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ uma sequência exata curta de grupos onde A é de tipo FP_n e C é de tipo FP_{n+1} com $n \geq 2$ e $\{(E^r, d^r)\}_{r \geq 1}$ a sequência espectral convergente LHS onde $E^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha))$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $(\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z}B$, $\forall \alpha \in I$. Então, B é de tipo FP_{n+1} se, e somente se, o diferencial da sequência espectral LHS*

$$d^{n+1}_{n+1,0} : H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha)) \longrightarrow H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha))$$

é sobrejetivo.

Demonstração. Primeiramente, observe, pela Proposição 1.100 *b)* (p. 53), que B é de tipo FP_n, uma vez que tanto A, quanto C são de tipo FP_n. Assim, pela Proposição 1.98 (p. 53), $H_i(B, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbf{0}$ para $1 \leq i \leq n-1$, daí que, usando este último fato e por esta mesma proposição,

$$B \text{ é de tipo } FP_{n+1} \text{ se, e somente se, } H_n(B, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbf{0}. \tag{4.1}$$

Pelo Teorema 1.94 (p. 51), temos a seguinte convergência de sequência espectral

$$E^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(B, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha).$$

Como A é de tipo FP_n, usando a Proposição 1.99 (p. 53), temos que

$$H_q(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha) = \prod_{\alpha \in I} H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) \text{ para } 0 \leq q \leq n-1.$$

Agora, $\forall \alpha \in I$, $H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) = \mathbf{0}$ para $q \geq 1$ pela Proposição 1.47 *i)* (p. 34), pois $(\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z}B$ é $\mathbb{Z}A$-módulo livre, uma vez que A é subgrupo de B. Além disso, $\forall \alpha \in I$, pela Proposição 1.49 *a)* (p. 35),

$$H_0(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} (\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}B \cong \mathbb{Z}(B/A) \cong \mathbb{Z}C.$$

Segue, portanto, que

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se } \ 1 \leq q \leq n-1 \\ H_p(C, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha), & \text{se } \quad q = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $(\mathbb{Z}C)_\alpha = \mathbb{Z}C$, $\forall \alpha \in I$.

Pela definição de convergência de uma sequência espectral, existe uma filtração limitada da forma

$$\mathbf{0} = \Phi^{a(n)}H_n \subseteq \Phi^{a(n)+1}H_n \subseteq \ldots \subseteq \Phi^{b(n)-1}H_n \subseteq \Phi^{b(n)}H_n = H_n, \tag{4.3}$$

de forma que

$$E^\infty_{p,q} \cong \Phi^p H_n / \Phi^{p-1} H_n, \text{ para } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e onde } p + q = n, \tag{4.4}$$

sendo $a(n), b(n) \in \mathbb{Z}$ e onde denotamos, por simplificação de notação, $H_n(B, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$ por H_n.

Por (4.2) (p. 84) e considerando-se $p + q = n$, temos que $E^2_{p,q} = \mathbf{0}$ se $1 \leq q \leq n-1$ e $E^2_{n,0} = H_n(C, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha) = \mathbf{0}$ pela Proposição 1.98 (p. 53) e pelo fato de C ser de tipo FP_{n+1}. Portanto, $E^2_{p,q} = \mathbf{0}$, se $p + q = n$ e $p \neq 0$. E segue que,

$$E^\infty_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se } p + q = n \text{ e } p \neq 0, \tag{4.5}$$

já que $E^\infty_{p,q}$ é subquociente de $E^2_{p,q}$.

Usando a filtração limitada em (4.3) (p. 84), por (4.4) (p. 84) e (4.5) (p. 84), tal filtração se resume a

$$\mathbf{0} = \Phi^{a(n)}H_n = \Phi^{a(n)+1}H_n = \ldots = \Phi^{-1}H_n \subseteq \Phi^0 H_n = \ldots = \Phi^{b(n)-1}H_n = \Phi^{b(n)}H_n = H_n.$$

Logo,

$$E^{\infty}_{0,n} \cong \Phi^0 H_n/\Phi^{-1}H_n = H_n/\mathbf{0} = H_n = H_n(B, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha).$$

Por conseguinte, por (4.1) (p. 83), temos que

$$B \text{ é de tipo } FP_{n+1} \text{ se, e somente se, } E^{\infty}_{0,n} = \mathbf{0}. \tag{4.6}$$

Analisemos agora a sequência espectral $\{(E^r, d^r)\}_{r\geq 1}$ em torno do ponto $E^i_{0,n}$, com $i \geq 2$. Temos

$$E^i_{i,n+1-i} \xrightarrow{d^i_{i,n+1-i}} E^i_{0,n} \xrightarrow{d^i_{0,n}} E^i_{-i,n+i-1} = \mathbf{0}\ .$$

Por definição,

$$E^{i+1}_{0,n} = \frac{ker(d^i_{0,n})}{im(d^i_{i,n+1-i})} = \frac{E^i_{0,n}}{im(d^i_{i,n+1-i})} \tag{4.7}$$

E, por (4.2) (p. 84), segue que, para $i \geq 2$,

$$E^2_{i,n+1-i} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se} \quad 1 \leq n+1-i \leq n-1 \\ H_i(C, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha), & \text{se} \quad n+1-i = 0, \end{cases}$$

logo

$$E^2_{i,n+1-i} = \mathbf{0}, \text{ se } 2 \leq i \leq n. \tag{4.8}$$

Note que $i \geq n+2 \Leftrightarrow n+1-i < 0$, o que implica que $E^i_{i,n+1-i} = \mathbf{0}$, caso $i \geq n+2$. Por esta observação e por (4.8) (p. 85), concluímos que

$$E^2_{i,n+1-i} = \mathbf{0} \text{ se } i \neq n+1 \text{ e } i \geq 2$$

Para $i \geq 2$, $E^i_{i,n+1-i}$ é subquociente de $E^2_{i,n+1-i}$, daí que

$$E^i_{i,n+1-i} = \mathbf{0} \text{ se } i \neq n+1 \text{ e } i \geq 2,$$

mas isso implica que

$$im(d^i_{i,n+1-i}) = \mathbf{0} \text{ se } i \neq n+1 \text{ e } i \geq 2. \tag{4.9}$$

Usando (4.7) (p. 85) e (4.9) (p. 85), obtemos que

$$E^{i+1}_{0,n} = E^i_{0,n}, \text{ se } i \neq n+1 \text{ e } i \geq 2,$$

resultando, assim, que

$$E^2_{0,n} = E^3_{0,n} = \ldots = E^n_{0,n} = E^{n+1}_{0,n} \quad \text{e} \quad E^{n+2}_{0,n} = E^{n+3}_{0,n} = \ldots = E^{\infty}_{0,n}. \tag{4.10}$$

Usando (4.10) (p. 86) e (4.6) (p. 85), temos que

$$B \text{ tem tipo } FP_{n+1} \text{ se, e somente se, } E^{n+2}_{0,n} = \mathbf{0} \tag{4.11}$$

Considerando a seguinte parte de sequência

$$E^{n+1}_{n+1,0} \xrightarrow{d^{n+1}_{n+1,0}} E^{n+1}_{0,n} \xrightarrow{d^{n+1}_{0,n}} E^{n+1}_{-n-1,2n} = \mathbf{0}\,,$$

vemos que

$$E^{n+2}_{0,n} = \frac{ker(d^{n+1}_{0,n})}{im(d^{n+1}_{n+1,0})} = \frac{E^{n+1}_{0,n}}{im(d^{n+1}_{n+1,0})}.$$

Donde concluímos que $E^{n+2}_{0,n} = \mathbf{0} \Leftrightarrow d^{n+1}_{n+1,0}$ é sobrejetivo. Assim, por (4.11) (p. 86), chegamos ao resultado que

$$B \text{ tem tipo } FP_{n+1} \text{ se, e somente se, } d^{n+1}_{n+1,0} \text{ é sobrejetivo}$$

Observe que $d^{n+1}_{n+1,0} : E^{n+1}_{n+1,0} \longrightarrow E^{n+1}_{0,n}$ e que, por (4.10) (p. 86), $E^{n+1}_{0,n} = E^2_{0,n} = H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha))$.

Vamos mostrar agora que $E^{n+1}_{n+1,0} = E^2_{n+1,0}$, o que completa a demonstração.

Analisemos a sequência espectral convergente $\{(E^r, d^r)\}_{r \geq 1}$ em torno do ponto $E^i_{n+1,0}$, com $i \geq 2$. Temos

$$E^i_{n+1+i,1-i} \xrightarrow{d^i_{n+1+i,1-i}} E^i_{n+1,0} \xrightarrow{d^i_{n+1,0}} E^i_{n+1-i,i-1}\,.$$

Por definição,

$$E^{i+1}_{n+1,0} = \frac{ker(d^i_{n+1,0})}{im(d^i_{n+1+i,1-i})}.$$

Veja que, como $i \geq 2$, então $E^i_{n+1+i,1-i} = \mathbf{0}$, pois $1-i < 0$, logo $im(d^i_{n+1+i,1-i}) = \mathbf{0}$ e, portanto,

$$E^{i+1}_{n+1,0} = ker(d^i_{n+1,0}). \tag{4.12}$$

Agora, por (4.2) (p. 84), $E^i_{n+1-i,i-1} = \mathbf{0}$ se $1 \leq i-1 \leq n-1$, isto é, se $2 \leq i \leq n$. Portanto, $ker(d^i_{n+1,0}) = E^i_{n+1,0}$ se $2 \leq i \leq n$, o que implica, por (4.12) (p. 86), que $E^{i+1}_{n+1,0} = E^i_{n+1,0}$ se $2 \leq i \leq n$. Segue assim que,

$$E^2_{n+1,0} = E^3_{n+1,0} = \ldots = E^n_{n+1,0} = E^{n+1}_{n+1,0}.$$

Logo,

$$E^{n+1}_{n+1,0} = E^2_{n+1,0} = H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha)).$$

E, finalmente, concluímos que $d^{n+1}_{n+1,0}$ tem como domínio $H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha))$ e como contradomínio $H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha))$. □

Teorema 4.2. *Sejam I um conjunto de índices, $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ uma sequência exata curta de grupos onde A é de tipo FP_n e C é de tipo FP_{n+1} com $n \geq 2$, M um $\mathbb{Z}B$-módulo livre e $\{(E^r, d^r)\}_{r\geq 1}$ a sequência espectral convergente LHS onde $E^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha)))$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $M_\alpha = M$, $\forall \alpha \in I$. Se B é de tipo FP_{n+1}, então*

$$d^{n+1}_{n+1,0} : H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha)) \longrightarrow H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha))$$

é sobrejetivo.

Demonstração. A demonstração é semelhante à demonstração do Teorema 4.1 (p. 83) com $(\mathbb{Z}B)_\alpha$ substituído por M_α.

Pelo Teorema 1.94 (p. 51), temos que a seguinte sequência espectral converge

$$E^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha)) \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(B, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha).$$

Como A é de tipo FP_n, usando a Proposição 1.99 (p. 53), temos que

$$H_q(A, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha) = \prod_{\alpha\in I} H_q(A, M_\alpha) \text{ para } 0 \leq q \leq n-1.$$

Agora, $\forall \alpha \in I$, $H_q(A, M_\alpha) = \mathbf{0}$ para $q \geq 1$ pela Proposição 1.47 *i)* (p. 34), pois $M_\alpha = M$ é $\mathbb{Z}B$-módulo livre e $\mathbb{Z}B$ é $\mathbb{Z}A$-módulo livre, uma vez que A é subgrupo de B. Além disso, como M é $\mathbb{Z}B$-módulo livre, temos que $M \cong \bigoplus_{\beta\in J}(\mathbb{Z}B)_\beta$, para algum conjunto de índices J e onde $(\mathbb{Z}B)_\beta = \mathbb{Z}B$, $\forall \beta \in J$. Segue que, $\forall \alpha \in I$, usando que soma direta comuta com produto tensorial (*Theorem 2.65* (p. 86) de [31]) e pela Proposição 1.47 *i)* (p. 34),

$$H_0(A, M_\alpha) = H_0(A, M) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} M \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} (\bigoplus_{\beta\in J}(\mathbb{Z}B)_\beta) \cong \bigoplus_{\beta\in J}(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} (\mathbb{Z}B)_\beta) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{\beta\in J}(\mathbb{Z}(B/A))_\beta \cong \bigoplus_{\beta\in J}(\mathbb{Z}C)_\beta =: \tilde{M}.$$

Segue, portanto, que

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se} \quad 1 \leq q \leq n-1 \\ H_p(C, \prod_{\alpha \in I} \tilde{M}_\alpha), & \text{se} \qquad q = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

onde $\tilde{M}_\alpha = \tilde{M}$, $\forall \alpha \in I$, e $\tilde{M}$ é um $\mathbb{Z}C$-módulo livre.

Como C é de tipo FP_{n+1}, pela Proposição 1.99 (p. 53),

$$H_p(C, \prod_{\alpha \in I} \tilde{M}_\alpha) \cong \prod_{\alpha \in I} H_p(C, \tilde{M}_\alpha) \text{ para } 0 \leq p \leq n \tag{4.14}$$

e, pelo fato de $\tilde{M}_\alpha$ ser $\mathbb{Z}C$-módulo livre, pela Proposição 1.47 *i)* (p. 1.47), $\forall \alpha \in I$, temos que

$$H_p(C, \tilde{M}_\alpha) = \mathbf{0}, \forall \alpha \in I \text{ e para } p \geq 1.$$

Segue que,

$$H_p(C, \prod_{\alpha \in I} \tilde{M}_\alpha) = \mathbf{0}, \text{ para } 1 \leq p \leq n \tag{4.15}$$

Assim, obtemos, por (4.13) (p. 88), que

$$E^2_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se } 1 \leq q \leq n-1, \text{ ou se } q = 0 \text{ e } 1 \leq p \leq n. \tag{4.16}$$

Pela definição de convergência de uma sequência espectral, existe uma filtração limitada da forma

$$\mathbf{0} = \Phi^{a(n)} H_n \subseteq \Phi^{a(n)+1} H_n \subseteq \ldots \subseteq \Phi^{b(n)-1} H_n \subseteq \Phi^{b(n)} H_n = H_n \tag{4.17}$$

de forma que

$$E^\infty_{p,q} \cong \Phi^p H_n / \Phi^{p-1} H_n, \text{ para } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e onde } p + q = n, \tag{4.18}$$

sendo $a(n), b(n) \in \mathbb{Z}$ e onde denotamos, por simplificação de notação, $H_n(B, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha)$ por H_n.

Por (4.16) (p. 88) e considerando-se $p + q = n$, temos que $E^2_{p,q} = \mathbf{0}$, se $p + q = n$ e $p \neq 0$. Segue que,

$$E^\infty_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se } p + q = n \text{ e } p \neq 0, \tag{4.19}$$

já que $E^\infty_{p,q}$ é subquociente de $E^2_{p,q}$.

Usando a filtração limitada em (4.17) (p. 88), por (4.18) (p. 88) e (4.19) (p.

88), tal filtração se resume a

$$\mathbf{0} = \Phi^{a(n)}H_n = \Phi^{a(n)+1}H_n = \ldots = \Phi^{-1}H_n \subseteq \Phi^0 H_n = \ldots = \Phi^{b(n)-1}H_n = \Phi^{b(n)}H_n = H_n.$$

Logo,

$$E^\infty_{0,n} \cong \Phi^0 H_n/\Phi^{-1}H_n = H_n/\mathbf{0} = H_n = H_n(B, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha).$$

Todavia, por hipótese, B é de tipo FP_{n+1}, logo a Proposição 1.99 (p. 53) garante que

$$H_n(B, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha) \cong \prod_{\alpha\in I} H_n(B, M_\alpha).$$

Além do mais, visto que, $n \geq 1$ e $\forall \alpha \in I, M_\alpha = M$ é $\mathbb{Z}B$-módulo livre, concluímos que $H_n(B, M_\alpha) = \mathbf{0}, \forall \alpha \in I$ pela Proposição 1.47 *i)* (p. 34), logo $H_n(B, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha) = \mathbf{0}$ e, por conseguinte,

$$E^\infty_{0,n} = \mathbf{0} \tag{4.20}$$

Analisemos agora a sequência espectral convergente $\{(E^r, d^r)\}_{r\geq 1}$ em torno do ponto $E^i_{0,n}$, com $i \geq 2$. Temos a seguinte parte de sequência

$$E^i_{i,n+1-i} \xrightarrow{d^i_{i,n+1-i}} E^i_{0,n} \xrightarrow{d^i_{0,n}} E^i_{-i,n+i-1} = \mathbf{0}\ .$$

Por definição,

$$E^{i+1}_{0,n} = \frac{ker(d^i_{0,n})}{im(d^i_{i,n+1-i})} = \frac{E^i_{0,n}}{im(d^i_{i,n+1-i})} \tag{4.21}$$

E, por (4.16) (p. 88), segue que, para $i \geq 2$,

$$E^2_{i,n+1-i} = \mathbf{0},\ \text{se } 1 \leq n+1-i \leq n-1,$$

logo

$$E^2_{i,n+1-i} = \mathbf{0},\ \text{se } 2 \leq i \leq n. \tag{4.22}$$

Note que $i \geq n+2 \Leftrightarrow n+1-i < 0$, o que implica que $E^i_{i,n+1-i} = \mathbf{0}$, caso $i \geq n+2$. Por esta observação e por (4.22) (p. 89), concluímos que

$$E^2_{i,n+1-i} = \mathbf{0} \text{ se } i \neq n+1 \text{ e } i \geq 2.$$

Para $i \geq 2$, $E^i_{i,n+1-i}$ é subquociente de $E^2_{i,n+1-i}$, segue que

$$E^i_{i,n+1-i} = \mathbf{0} \text{ se } i \neq n+1 \text{ e } i \geq 2,$$

mas isso implica que

$$im(d^i_{i,n+1-i}) = \mathbf{0} \text{ se } i \neq n+1 \text{ e } i \geq 2.$$

Usando (4.21) (p. 89), obtemos que

$$E^{i+1}_{0,n} = E^i_{0,n}, \text{ se } i \neq n+1 \text{ e } i \geq 2,$$

resultando, assim, que

$$E^2_{0,n} = E^3_{0,n} = \ldots = E^n_{0,n} = E^{n+1}_{0,n} \quad \text{e} \quad E^{n+2}_{0,n} = E^{n+3}_{0,n} = \ldots = E^\infty_{0,n}. \tag{4.23}$$

Usando (4.20) (p. 89), temos que

$$E^{n+2}_{0,n} = \mathbf{0}. \tag{4.24}$$

Considerando-se a seguinte parte de sequência

$$E^{n+1}_{n+1,0} \xrightarrow{d^{n+1}_{n+1,0}} E^{n+1}_{0,n} \xrightarrow{d^{n+1}_{0,n}} E^{n+1}_{-n-1,2n} = \mathbf{0}\ ,$$

note que

$$E^{n+2}_{0,n} = \frac{ker(d^{n+1}_{0,n})}{im(d^{n+1}_{n+1,0})} = \frac{E^{n+1}_{0,n}}{im(d^{n+1}_{n+1,0})}.$$

Donde concluímos, por (4.24) (p. 90), que $d^{n+1}_{n+1,0}$ é sobrejetivo.

Observe que, por (4.23) (p. 90), $E^{n+1}_{0,n} = E^2_{0,n} = H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha))$.

Vamos mostrar agora que $E^{n+1}_{n+1,0} = E^2_{n+1,0}$, o que termina a demonstração.

Analisemos a sequência espectral convergente $\{(E^r, d^r)\}_{r \geq 1}$ em torno do ponto $E^i_{n+1,0}$, com $i \geq 2$. Temos

$$E^i_{n+1+i,1-i} \xrightarrow{d^i_{n+1+i,1-i}} E^i_{n+1,0} \xrightarrow{d^i_{n+1,0}} E^i_{n+1-i,i-1}$$

Por definição,

$$E^{i+1}_{n+1,0} = \frac{ker(d^i_{n+1,0})}{im(d^i_{n+1+i,1-i})}.$$

Veja que, como $i \geq 2$, então $E^i_{n+1+i,1-i} = \mathbf{0}$, pois $1 - i < 0$. Logo, $im(d^i_{n+1+i,1-i}) = \mathbf{0}$ e, portanto,

$$E^{i+1}_{n+1,0} = ker(d^i_{n+1,0}) \tag{4.25}$$

Agora, por (4.16) (p. 88), $E^i_{n+1-i,i-1} = \mathbf{0}$ se $1 \leq i-1 \leq n-1$, isto é, se $2 \leq i \leq n$. Portanto, $ker(d^i_{n+1,0}) = E^i_{n+1,0}$ se $2 \leq i \leq n$, o que implica que $E^{i+1}_{n+1,0} = E^i_{n+1,0}$ se $2 \leq i \leq n$. Daí que,

$$E^2_{n+1,0} = E^3_{n+1,0} = \ldots = E^n_{n+1,0} = E^{n+1}_{n+1,0}$$

Assim,

$$E^{n+1}_{n+1,0} = E^2_{n+1,0} = H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha \in I} M_\alpha))$$

E, assim, concluímos que $d^{n+1}_{n+1,0}$ tem como domínio $H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha))$ e como contradomínio $H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha))$. □

Lema 4.3. *Sejam $A \hookrightarrow B_0 \twoheadrightarrow C_0$ e $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ sequências exatas curtas de grupos e um homomorfismo de grupos $\theta : B_0 \to B$ tal que $\theta|_A = id_A$. Então, temos o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d, "id_A"'] & B_0 \arrow[r, two heads, "\pi_0"] \arrow[d, "\theta"'] & C_0 \arrow[d, dotted, "\nu"] \\
A \arrow[r, hook] & B \arrow[r, two heads, "\pi"] & C
\end{tikzcd}$$

onde $\nu : C_0 \to C$ é homomorfismo de grupos induzido por θ tal que $\nu\pi_0 = \pi\theta$.

Além disso, se θ é monomorfismo, ou epimorfismo, então ν é monomorfismo, ou epimorfismo, respectivamente.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que $\nu := \pi\theta(\pi_0)^{-1}$ está bem definida. De fato, dados $c_0 \in C_0$ e $b_0, b_0' \in B_0$ tais que $\pi_0(b_0) = \pi_0(b_0') = c_0$, temos que $b_0^{-1}b_0' \in ker(\pi_0) = A$. Mas, $\theta|_A = id_A$, logo $\theta(b_0^{-1}b_0') = b_0^{-1}b_0' \in A = ker(\pi)$. Portanto, $\pi\theta(b_0^{-1}b_0') = 1$, o que implica que $\pi\theta(b_0) = \pi\theta(b_0')$, mostrando, assim, que ν está bem definida.

Mostremos agora que ν é, de fato, homomorfismo de grupos. Sejam $c_0, c_1 \in C_0$. Como π_0 é sobrejetivo, existem $b_0, b_1 \in B_0$ tais que $\pi_0(b_0) = c_0$ e $\pi_0(b_1) = c_1$. Como $\pi_0(b_0b_1) = \pi_0(b_0)\pi_0(b_1) = c_0c_1$, temos que $b_0b_1 \in \pi_0^{-1}(c_0c_1)$. Pela boa definição de ν, segue que $\nu(c_0c_1) = \pi\theta\pi_0^{-1}(c_0c_1) = \pi\theta(b_0b_1) = \pi\theta(b_0)\pi\theta(b_1) = \pi\theta\pi_0^{-1}(c_0)\pi\theta\pi_0^{-1}(c_1) = \nu(c_0)\nu(c_1)$.

Observe que a comutatividade do diagrama à esquerda é óbvia e que a comutatividade do diagrama à direita é imediata, uma vez que, pela boa definição de ν, dado $b_0 \in B_0$, $\nu\pi_0(b_0) = \pi\theta\pi_0^{-1}(\pi_0(b_0)) = \pi\theta(b_0)$. Logo, $\nu\pi_0 = \pi\theta$.

Agora, caso θ seja monomorfismo de grupos, dados $c_0, x_0 \in C_0$ tais que $\nu(c_0) = \nu(x_0)$, então $\pi\theta\pi_0^{-1}(c_0) = \pi\theta\pi_0^{-1}(x_0)$, logo $\pi\theta(b_0) = \pi\theta(y_0)$, onde $b_0 \in \pi_0^{-1}(c_0)$ e $y_0 \in \pi_0^{-1}(x_0)$. Segue que $\pi\theta(b_0y_0^{-1}) = 1$, isto é, $b_0y_0^{-1} \in ker(\pi\theta) = \theta^{-1}(ker(\pi)) = \theta^{-1}(A) = A = ker(\pi_0)$, onde essa penúltima igualdade vale por θ ser monomorfismo. Assim, $\pi_0(b_0y_0^{-1}) = 1$, o que implica que $\pi_0(b_0) = \pi_0(y_0)$, isto é, $c_0 = x_0$. Mostrando, finalmente, a injetividade de ν.

E, caso θ seja epimorfismo de grupos, dado $c \in C$, como π é epimorfismo de grupos, existe $b \in B$ tal que $c = \pi(b)$ e, pela sobrejetividade de θ, existe $b_0 \in B_0$ tal que $c = \pi\theta(b_0)$. Segue que $c = \pi\theta\pi_0^{-1}(\pi(b_0)) = \nu(\pi_0(b_0))$, onde $\pi_0(b_0) \in C_0$, o que mostra a sobrejetividade de ν. □

4.2 Resultado Principal do Capítulo

O Teorema 4.4 (p. 92) abaixo é o resultado principal deste Capítulo. Como veremos a seguir o mesmo é usado para demonstrar alguns resultados envolvendo a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica.

Teorema 4.4. *[23, Versão Homológica da Proposição 4.3, pp. 1.305-1.308] Sejam $n \geq 2$, $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ uma sequência exata curta de grupos com A de tipo FP_n e C de tipo FP_{n+1}. Assuma que exista uma outra sequência exata curta de grupos $A \hookrightarrow B_0 \twoheadrightarrow C_0$ com B_0 de tipo FP_{n+1} e um* ***homomorfismo qualquer*** *de grupos $\theta : B_0 \to B$ tal que $\theta|_A = id_A$, ou seja,*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d, "id_A"'] & B_0 \arrow[r, two heads, "\pi_0"] \arrow[d, "\theta"'] & C_0 \arrow[d, dotted, "\nu"] \\
A \arrow[r, hook] & B \arrow[r, two heads, "\pi"] & C
\end{tikzcd}$$

onde $\nu : C_0 \to C$ é um homomorfismo de grupos induzido por θ tal que $\nu\pi_0 = \pi\theta$. Então, B é também de tipo FP_{n+1}.

Demonstração. Pelo Teorema 1.94 (p. 51), temos a seguinte convergência de sequência espectral

$$E^2_{p,q} = H_p(C_0, H_q(A, \mathbb{Z}B)) \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(B_0, \mathbb{Z}B).$$

Observe que $\mathbb{Z}B$ é $\mathbb{Z}B_0$-módulo via homomorfismo de grupos θ.

Agora, $H_q(A, \mathbb{Z}B) = \mathbf{0}$ para $q \geq 1$ pela Proposição 1.47 *i)* (p. 34), pois $\mathbb{Z}B$ é $\mathbb{Z}A$-módulo livre, uma vez que A é subgrupo de B. Além disso, pela Proposição 1.49 *a)* (p. 35),

$$H_0(A, \mathbb{Z}B) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}B \cong \mathbb{Z}(B/A) \cong \mathbb{Z}C. \tag{4.26}$$

Segue, portanto, que

$$E^2_{p,q} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se} \quad q \geq 1 \\ H_p(C_0, \mathbb{Z}C), & \text{se} \quad q = 0, \end{cases} \tag{4.27}$$

E, consequentemente, que

$$E^\infty_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se } q \geq 1, \tag{4.28}$$

já que $E^\infty_{p,q}$ é subquociente de $E^2_{p,q}$.

Tentemos calcular, então, $E^\infty_{p,0}$. Analisando a sequência espectral $\{(E^r, d^r)\}_{r\geq 1}$ em torno do ponto $E^i_{p,0}$, com $p \geq 0$ fixado e $i \geq 2$. Temos

$$E^i_{p+i,1-i} \xrightarrow{d^i_{p+i,1-i}} E^i_{p,0} \xrightarrow{d^i_{p,0}} E^i_{p-i,i-1}\ .$$

Daí que, $E^i_{p+i,1-i} = \mathbf{0}$, pois $1 - i < 0$, e também $E^i_{p-i,i-1} = \mathbf{0}$ por (4.27) (p. 92). Assim, temos

$$\mathbf{0} \xrightarrow{d^i_{p+i,1-i}} E^i_{p,0} \xrightarrow{d^i_{p,0}} \mathbf{0} \text{ para todo } i \geq 2.$$

Por outro lado, por definição,

$$E^{i+1}_{p,0} = \frac{ker(d^i_{p,0})}{im(d^i_{p+i,1-i})} = E^i_{p,0} \text{ para todo } i \geq 2.$$

O que garante, por (4.27) (p. 92), que

$$E^{\infty}_{p,0} = H_p(C_0, \mathbb{Z}C). \tag{4.29}$$

Fixando-se $p + q = n$, pela definição de convergência de uma sequência espectral, existe uma filtração limitada da forma

$$\mathbf{0} = \Phi^{a(n)} H_n \subseteq \Phi^{a(n)+1} H_n \subseteq \ldots \subseteq \Phi^{b(n)-1} H_n \subseteq \Phi^{b(n)} H_n = H_n, \tag{4.30}$$

de forma que

$$E^{\infty}_{p,q} \cong \Phi^p H_n / \Phi^{p-1} H_n, \text{ para } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e onde } p + q = n, \tag{4.31}$$

sendo $a(n), b(n) \in \mathbb{Z}$ e onde denotamos, por simplificação de notação, $H_n(B_0, \mathbb{Z}B)$ por H_n.

Usando a filtração limitada em (4.30) (p. 93) e sendo $n = p$, temos, por (4.31) (p. 93) e por (4.28) (p. 92), que

$$\mathbf{0} = \ldots = \mathbf{0} \subseteq \Phi^p H_p = \ldots = H_p = H_p(B_0, \mathbb{Z}B).$$

Logo,

$$H_p(B_0, \mathbb{Z}B) = \Phi^p H_p \cong \Phi^p H_p / \mathbf{0} = \Phi^p H_p / \Phi^{p-1} H_p \cong E^{\infty}_{p,0}.$$

Concluímos, assim, que

$$H_p(C_0, \mathbb{Z}C) \cong E^2_{p,0} \cong E^{\infty}_{p,0} \cong H_p(B_0, \mathbb{Z}B) \tag{4.32}$$

e, portanto, o homomorfismo de grupos $\varphi : H_p(B_0, \mathbb{Z}B) \to H_p(C_0, \mathbb{Z}C)$ é um isomorfismo de grupos, onde φ é induzido pelo homomorfismo de grupos $\pi_0 : B_0 \twoheadrightarrow C_0$ e pelo homomorfismo de aneis $\pi_\# : \mathbb{Z}B \twoheadrightarrow \mathbb{Z}C$ induzido por π.

Seja I um conjunto enumerável de índices. Usando novamente o Teorema 1.94 (p. 51), temos a seguinte convergência de sequência espectral

$$\mathcal{E}^2_{p,q} = H_p(C_0, H_q(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha)) \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(B_0, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha),$$

onde $(\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z}B$ para todo $\alpha \in I$.

Agora, como A é de tipo FP_n por hipótese, pela Proposição 1.99 (p. 53), segue que $H_q(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha) = \prod_{\alpha\in I} H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha)$ para $0 \leq q \leq n-1$. Além disso, para todo $\alpha \in I$, $H_q(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha) = H_q(A, \mathbb{Z}B) = \mathbf{0}$, para $q \geq 1$, pela Proposição 1.47 *i)* (p. 34), pois $\mathbb{Z}B$ é $\mathbb{Z}A$-módulo livre, uma vez que A é subgrupo de B. Daí que,

$$\mathcal{E}^2_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se } 1 \leq q \leq n-1. \tag{4.33}$$

Consequentemente,

$$\mathcal{E}^\infty_{p,q} = \mathbf{0}, \text{ se } 1 \leq q \leq n-1, \tag{4.34}$$

uma vez que $\mathcal{E}^\infty_{p,q}$ é subquociente de $\mathcal{E}^2_{p,q}$.

Sendo $n \in \mathbb{Z}$, veja que $\mathcal{E}^2_{n,0} = H_n(C_0, H_0(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha))$.

Note que C_0 é de tipo FP_{n+1} pela Proposição 1.100 *c)* (p. 53). E, como também A é de tipo FP_n, concluímos pela Proposição 1.99 (p. 53) e por (4.26) (p. 92) que

$$\mathcal{E}^2_{n,0} = H_n(C_0, H_0(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \cong H_n(C_0, \prod_{\alpha\in I} H_0(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha)) \cong$$

$$\cong \prod_{\alpha\in I} H_n(C_0, H_0(A, (\mathbb{Z}B)_\alpha)) \cong \prod_{\alpha\in I} H_n(C_0, (\mathbb{Z}C)_\alpha),$$

onde $(\mathbb{Z}C)_\alpha = \mathbb{Z}C$ e $(\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z}B$, para todo $\alpha \in I$.

Por (4.32) (p. 93), temos, então, que

$$\mathcal{E}^2_{n,0} \cong \prod_{\alpha\in I} H_n(B_0, (\mathbb{Z}B)_\alpha).$$

E, como B_0 é de tipo FP_{n+1} por hipótese, pela Proposição 1.99 (p. 53), segue que

$$\mathcal{E}^2_{n,0} \cong H_n(B_0, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha). \tag{4.35}$$

Fixemos $p+q=n$. Analisando a sequência espectral $\{(\mathcal{E}^r, \delta^r)\}_{r\geq 1}$ em torno do ponto $\mathcal{E}^i_{n,0}$, com $i \geq 2$. Temos

$$\mathcal{E}^i_{n+i,1-i} \xrightarrow{\delta^i_{n+i,1-i}} \mathcal{E}^i_{n,0} \xrightarrow{\delta^i_{n,0}} \mathcal{E}^i_{n-i,i-1}.$$

Daí que, $\mathcal{E}^i_{n+i,1-i} = \mathbf{0}$, pois $1-i<0$, e também $\mathcal{E}^i_{n-i,i-1} = \mathbf{0}$ para $2 \leq i \leq n$ por (4.33) (p. 94) e $\mathcal{E}^i_{n-i,i-1} = \mathbf{0}$ para $i > n$, uma vez que, neste caso, $n-i<0$. Assim, temos

$$\mathbf{0} \xrightarrow{\delta^i_{n+i,1-i}} \mathcal{E}^i_{n,0} \xrightarrow{\delta^i_{n,0}} \mathbf{0} \text{ para todo } i \geq 2.$$

Por outro lado, por definição,

$$\mathcal{E}^{i+1}_{n,0} = \frac{ker(\delta^i_{n,0})}{im(\delta^i_{n+i,1-i})} = \mathcal{E}^i_{n,0} \text{ para todo } i \geq 2.$$

Assim, obtemos que

$$\mathcal{E}^{\infty}_{n,0} = \mathcal{E}^2_{n,0} = H_n(B_0, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha). \tag{4.36}$$

Lembremos que fixamos $p + q = n$. Pela definição de convergência de uma sequência espectral, existe uma filtração limitada da forma

$$\mathbf{0} = \Lambda^{\alpha(n)} H_n \subseteq \Lambda^{\alpha(n)+1} H_n \subseteq \ldots \subseteq \Lambda^{\beta(n)-1} H_n \subseteq \Lambda^{\beta(n)} H_n = H_n, \tag{4.37}$$

de forma que

$$\mathcal{E}^{\infty}_{p,q} \cong \Lambda^p H_n / \Lambda^{p-1} H_n, \text{ para } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e onde } p + q = n, \tag{4.38}$$

sendo $\alpha(n), \beta(n) \in \mathbb{Z}$ e onde denotamos, por simplificação de notação, $H_n(B_0, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha)$ por H_n.

Usando a filtração limitada em (4.37) (p. 95) e por (4.38) (p. 95) e (4.34) (p. 94),

$$\mathbf{0} = \ldots = \mathbf{0} \subseteq \Lambda^0 H_n = \ldots = \Lambda^{n-1} H_n \subseteq \Lambda^n H_n = \ldots = H_n = H_n(B_0, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha).$$

Assim, por um lado,

$$\mathcal{E}^{\infty}_{0,n} \cong \Lambda^0 H_n / \Lambda^{-1} H_n = \Lambda^0 H_n / \mathbf{0} \cong \Lambda^0 H_n = \Lambda^{n-1} H_n.$$

E, por outro lado,

$$\mathcal{E}^{\infty}_{n,0} \cong \Lambda^n H_n / \Lambda^{n-1} H_n = H_n / \Lambda^{n-1} H_n \cong H_n / \mathcal{E}^{\infty}_{0,n}.$$

Portanto, temos a sequência exata curta de grupos abelianos

$$\mathcal{E}^{\infty}_{0,n} \hookrightarrow H_n \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} \mathcal{E}^{\infty}_{n,0},$$

onde o epimorfismo de grupos θ é induzido pelos epimorfismos $\pi_0 : B_0 \twoheadrightarrow C_0$ e $\pi_\# : \mathbb{Z}B \twoheadrightarrow \mathbb{Z}C$, onde $\pi_\#$ é o epimorfismo de aneis induzido pelo epimorfismo de grupos π.

Além disso, na verdade, θ é um isomorfismo de grupos. De fato, por (4.32) (p.

93), como já mencionado, temos a existência de um isomorfismo de grupos

$$\varphi : H_n(B_0, \mathbb{Z}B) \xrightarrow{\sim} H_n(C_0, \mathbb{Z}C),$$

também induzido pelos epimorfismos $\pi_0 : B_0 \twoheadrightarrow C_0$ e $\pi_\# : \mathbb{Z}B \twoheadrightarrow \mathbb{Z}C$. Ainda mais, φ induz o isomorfismo de grupos

$$\Pi\varphi : \prod_{\alpha\in I} H_n(B_0, (\mathbb{Z}B)_\alpha) \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha\in I} H_n(C_0, (\mathbb{Z}C)_\alpha).$$

Agora, do fato de que tanto B_0, quanto C_0 são de tipo FP_{n+1}, segue, pela Proposição 1.99 (p. 53), como já vimos acima, que

$$\prod_{\alpha\in I} H_n(B_0, (\mathbb{Z}B)_\alpha) \cong H_n(B_0, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha) \quad \text{e} \quad \prod_{\alpha\in I} H_n(C_0, (\mathbb{Z}C)_\alpha) \cong H_n(C_0, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha).$$

Daí que, $\Pi\varphi$ induz exatamente o isomorfismo de grupos

$$\theta : H_n(B_0, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha) \xrightarrow{\sim} H_n(C_0, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}C)_\alpha).$$

Assim, $ker(\theta) = \mathbf{0}$ e, portanto,

$$\mathcal{E}^\infty_{0,n} = \mathbf{0}. \tag{4.39}$$

Analisando agora a sequência espectral $\{(\mathcal{E}^r, \delta^r)\}_{r\geq 1}$ em torno do ponto $\mathcal{E}^i_{0,n}$, com $i \geq 2$. Temos

$$\mathcal{E}^i_{i,n+1-i} \xrightarrow{\delta^i_{i,n+1-i}} \mathcal{E}^i_{0,n} \xrightarrow{\delta^i_{0,n}} \mathcal{E}^i_{-i,n+i-1}\,.$$

Daí que, $\mathcal{E}^i_{i,n+1-i} = \mathbf{0}$, para $2 \leq i \leq n$ por (4.33) (p. 94) e $\mathcal{E}^i_{i,n+i-1} = \mathbf{0}$ para $i \geq n+2$, uma vez que, neste caso, $n+1-i < 0$. E também $\mathcal{E}^i_{-i,n+i-1} = \mathbf{0}$, pois $-i < 0$. Assim, temos que

$$\mathbf{0} \xrightarrow{\delta^i_{i,n+1-i}} \mathcal{E}^i_{0,n} \xrightarrow{\delta^i_{0,n}} \mathbf{0} \text{ para todo } i \geq 2 \text{ e } i \neq n+1.$$

Por definição,

$$\mathcal{E}^{i+1}_{0,n} = \frac{ker(\delta^i_{0,n})}{im(\delta^i_{i,n+1-i})} \cong \mathcal{E}^i_{0,n} \text{ para todo } i \geq 2 \text{ e } i \neq n+1.$$

Logo,

$$\mathcal{E}^2_{0,n} \cong \ldots \cong \mathcal{E}^{n+1}_{0,n} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}^{n+2}_{0,n} \cong \ldots \cong \mathcal{E}^\infty_{0,n}. \tag{4.40}$$

E, por (4.39) (p. 96), obtemos que

$$\mathcal{E}^{n+2}_{0,n} \cong \mathbf{0}. \tag{4.41}$$

Voltando agora à sequência espectral $\{(\mathcal{E}^r, \delta^r)\}_{r\geq 1}$ em torno do ponto $\mathcal{E}^i_{0,n}$, com $i = n+1$. Temos

$$\mathcal{E}^{n+1}_{n+1,0} \xrightarrow{\delta^{n+1}_{n+1,0}} \mathcal{E}^{n+1}_{0,n} \xrightarrow{\delta^{n+1}_{0,n}} \mathcal{E}^{n+1}_{-n-1,2n} .$$

Note que $\mathcal{E}^{n+1}_{-n-1,2n} = \mathbf{0}$, pois $-n-1 < 0$, logo

$$ker(\delta^{n+1}_{0,n}) = \mathcal{E}^{n+1}_{0,n}.$$

Por (4.41) (p. 96),

$$\mathbf{0} = \mathcal{E}^{n+2}_{0,n} := \frac{ker(\delta^{n+1}_{0,n})}{im(\delta^{n+1}_{n+1,0})} = \frac{\mathcal{E}^{n+1}_{0,n}}{im(\delta^{n+1}_{n+1,0})}.$$

Daí que, $im(\delta^{n+1}_{n+1,0}) = \mathcal{E}^{n+1}_{0,n}$ e concluímos que

$$\delta^{n+1}_{n+1,0} : \mathcal{E}^{n+1}_{n+1,0} \longrightarrow \mathcal{E}^{n+1}_{0,n} \text{ é sobrejetivo .} \tag{4.42}$$

Observe que não poderíamos ter usado o Teorema 4.2 (p. 87) para demonstrar (4.42) (p. 97), pois não sabemos se $\mathbb{Z}B$ é $\mathbb{Z}B_0$-módulo livre.

Analisando a sequência espectral $\{(\mathcal{E}^r, \delta^r)\}_{r\geq 1}$ em torno do ponto $\mathcal{E}^i_{n+1,0}$, com $i \geq 2$. Temos

$$\mathcal{E}^i_{n+1+i,1-i} \xrightarrow{\delta^i_{n+1+i,1-i}} \mathcal{E}^i_{n+1,0} \xrightarrow{\delta^i_{n+1,0}} \mathcal{E}^i_{n+1-i,i-1} .$$

Daí que, $\mathcal{E}^i_{n+1-i,i-1} = \mathbf{0}$, para $2 \leq i \leq n$ por (4.33) (p. 94) e $\mathcal{E}^i_{n+1-i,i-1} = \mathbf{0}$ para $i \geq n+2$, uma vez que, neste caso, $n+1-i < 0$. Além disso, $\mathcal{E}^i_{n+1+i,1-i} = \mathbf{0}$, pois $1-i < 0$. Assim, temos que

$$\mathbf{0} \xrightarrow{\delta^i_{n+1+i,1-i}} \mathcal{E}^i_{n+1,0} \xrightarrow{\delta^i_{n+1,0}} \mathbf{0} \text{ para todo } i \geq 2 \text{ e } i \neq n+1.$$

Por definição,

$$\mathcal{E}^{i+1}_{n+1,0} = \frac{ker(\delta^i_{n+1,0})}{im(\delta^i_{n+1+i,1-i})} \cong \mathcal{E}^i_{n+1,0} \text{ para todo } i \geq 2 \text{ e } i \neq n+1.$$

Logo,

$$\mathcal{E}^2_{n+1,0} \cong \ldots \cong \mathcal{E}^{n+1}_{n+1,0} \text{ e } \mathcal{E}^{n+2}_{n+1,0} \cong \ldots \cong \mathcal{E}^{\infty}_{n+1,0}. \tag{4.43}$$

Usando (4.40) (p. 96) e (4.43) (p. 97), concluímos que

$$\mathcal{E}^2_{n+1,0} \cong \mathcal{E}^{n+1}_{n+1,0} \text{ e } \mathcal{E}^2_{0,n} \cong \mathcal{E}^{n+1}_{0,n}.$$

Portanto, podemos considerar que $\delta^{n+1}_{n+1,0}$ tem os seguintes domínio e contradomínio:

$$\delta^{n+1}_{n+1,0} : \mathcal{E}^2_{n+1,0} \twoheadrightarrow \mathcal{E}^2_{0,n} .$$

Pela naturalidade da sequência espectral LHS, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(C_0, H_0(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \arrow[r, two heads, "\delta^{n+1}_{n+1,0}"] \arrow[d, "\mu_1"'] & H_0(C_0, H_n(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \arrow[d, "\mu_2"] \\ H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \arrow[r, "\psi^{n+1}_{n+1,0}"'] & H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \end{tikzcd} \tag{4.44}$$

onde μ_1 e μ_2 são induzidos por ν, uma vez que $H_m(-, M)$ é funtor para cada $m \geq 0$ e para cada módulo apropriado M e $\psi^{n+1}_{n+1,0}$ é um diferencial da sequência espectral que possui a seguinte convergência garantida pelo Teorema 1.94 (p. 51):

$$\mathscr{E}^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(B, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha).$$

Denotamos $V := H_n(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$. Como θ é homomorfismo de grupos, temos que ν é também homomorfismo de grupos pelo Lema 4.3 (p. 91) e V é $\mathbb{Z}C_0$-módulo à esquerda via homomorfismo ν, isto é, dados $c_0 \in C_0$ e $v \in V$, a ação de c_0 sobre v é dada por $c_0 v := \nu(c_0)v$. Assim, pela Proposição 1.49 *a)* (p. 35), temos que

$$H_0(C_0, V) \cong \frac{V}{Aug(\mathbb{Z}C_0)V} = \frac{V}{Aug(\mathbb{Z}(im(\nu)))V} \quad \text{e} \quad H_0(C, V) \cong \frac{V}{Aug(\mathbb{Z}C)V}.$$

Logo,

$$\mu_2 : \frac{V}{Aug(\mathbb{Z}(im(\nu)))V} \longrightarrow \frac{V}{Aug(\mathbb{Z}C)V}$$

é o homomorfismo de grupos alargamento, que é sobrejetivo por definição. Pelo diagrama em (4.44) (p. 98), como $\delta^{n+1}_{n+1,0}$ e μ_2 são ambos sobrejetivos, concluímos que $\psi^{n+1}_{n+1,0}$ é também sobrejetivo e, assim, pelo Teorema 4.1 (p. 83), temos que B é de tipo FP_{n+1}. □

No Apêndice A encontramos versões particulares do Teorema 4.4 (p. 92), os quais possuem demonstrações mais simples.

4.3 Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica

Nesta seção veremos algumas aplicações do Teorema 4.4 (p. 92).

Motivados pelo trabalho de Benno Kuckuck em [23], conjecturamos o seguinte resultado.

Conjectura 4.5 (Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica)**.** *Sejam $n \in \mathbb{Z}$ com $n \geq 2$ e*

$$N_1 \hookrightarrow G_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} Q$$

$$N_2 \hookrightarrow G_2 \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} Q$$

duas sequências exatas curtas de grupos e P o produto fibra de G_1 e G_2 associado a π_1 e π_2, ou seja,

$$P = \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : \pi_1(g_1) = \pi_2(g_2)\}.$$

Se N_1 é de tipo FP_n, G_1 e G_2 são de tipo FP_{n+1} e Q é de tipo FP_{n+2}, então P é de tipo FP_{n+1}.

Apesar de não provarmos a validade da Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica nesta Tese, obtivemos os resultados abaixo. O primeiro deles é o interessante resultado quando uma das sequências exatas curtas do enunciado da conjectura cinde. Observe que neste resultado a hipótese da conjectura de que Q é de tipo FP_{n+2} é suprimida.

Inicialmente demonstramos este resultado através do Teorema A.1 (p. 138), que é um caso particular do Teorema 4.4 (p. 92).

Teorema 4.6 (Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica - Caso Cindido)**.** *Sejam $n \geq 2$ e*

$$N_1 \hookrightarrow G_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} Q$$

$$N_2 \hookrightarrow G_2 \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} Q$$

sequências exatas curtas de grupos onde a segunda sequência exata curta cinde e tal que G_1 e G_2 são de tipo FP_{n+1} e N_1 é de tipo FP_n. Então, o produto fibra P de G_1 e G_2 associado a π_1 e π_2 é de tipo FP_{n+1}.

Observe que aqui não exigimos nem que N_2 seja de tipo FP_n, nem que Q seja de tipo FP_{n+2}, apesar de Q ser, automaticamente, de tipo FP_{n+1} pela Proposição 1.100 c) (p. 53)

Demonstração. Como a sequência exata curta

$$N_2 \hookrightarrow G_2 \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} Q$$

cinde, existe um homomorfismo de grupos $\sigma_2 : Q \to G_2$ tal que $\pi_2\sigma_2 = id_Q$.

Consideremos agora a seguinte sequência exata curta de grupos

$$N_1 \hookrightarrow P \overset{p_2}{\twoheadrightarrow} G_2$$

onde $p_2 : P \twoheadrightarrow G_2$ é a restrição da projeção canônica de $G_1 \times G_2$ sobre G_2. Definamos $\phi : G_1 \to P$ por $\phi(g_1) = (g_1, \sigma_2\pi_1(g_1)) \in G_1 \times G_2$. Veja que $\pi_1(g_1) = \pi_2\sigma_2\pi_1(g_1)$ e, portanto, de fato, $\phi(G_1) \subseteq P$. Temos ainda, pela definição de ϕ, que $\phi|_{N_1} = id_{N_1}$ e que ϕ é monomorfismo de grupos. Obtemos, assim, o seguinte diagrama comutativo de grupos

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "id_{N_1}"'] & G_1 \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, "\phi"] & Q \arrow[d, "\sigma_2"] \\ N_1 \arrow[r, hook] & P \arrow[r, two heads, "p_2"] & G_2 \end{tikzcd}$$

Veja que $\nu_2 := p_2\phi\pi_1^{-1}$ está bem definido e que $\sigma_2 = p_2\phi\pi_1^{-1} = \nu_2$, ou seja, σ_2 é induzido por ϕ da mesma forma que ν é induzido por θ no Teorema 4.4 (p. 92). Observe que temos as mesmas hipóteses do Teorema 4.4 (p. 92), o que acarreta que P é de tipo FP_{n+1}. □

Outro resultado interessante que obtemos foi a redução da Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica, o qual segue abaixo.

Inicialmente demonstramos este resultado através do Teorema A.2 (p. 140), que é um caso particular do Teorema 4.4 (p. 92).

Corolário 4.7 (Redução da Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica)**.** *Se a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica (p. 98) vale quando G_2 é um grupo livre finitamente gerado (portanto de tipo FP_∞), então a mesma vale em geral.*

Demonstração. Sejam

$$\tilde{N}_1 \hookrightarrow \tilde{G}_1 \overset{\tilde{\pi}_1}{\twoheadrightarrow} \tilde{Q}$$

$$\tilde{N}_2 \hookrightarrow \tilde{F} \overset{\tilde{\pi}_2}{\twoheadrightarrow} \tilde{Q}$$

duas sequências exatas curtas de grupos tais que $\tilde{N}_1$ é de tipo FP_n, $\tilde{G}_1$ é de tipo FP_{n+1} e $\tilde{Q}$ de tipo FP_{n+2} e seja $\tilde{P}$ o produto fibra de $\tilde{G}_1$ e $\tilde{F}$ associado a $\tilde{\pi}_1$ e $\tilde{\pi}_2$, ou seja,

$$\tilde{P} = \{(\tilde{g}_1, \tilde{f}) \in \tilde{G}_1 \times \tilde{F} : \tilde{\pi}_1(\tilde{g}_1) = \tilde{\pi}_2(\tilde{f})\}.$$

Suponhamos que se $\tilde{F}$ é um grupo livre finitamente gerado, então $\tilde{P}$ é de tipo FP_{n+1}, ou seja, que a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica (p. 98) vale em tal circunstância.

Sejam agora

$$N_1 \hookrightarrow G_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} Q$$

$$N_2 \hookrightarrow G_2 \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} Q$$

duas sequências exatas curtas de grupos tais que N_1 é de tipo FP_n, G_1 e G_2 são de tipo FP_{n+1} e Q é de tipo FP_{n+2} e seja P o produto fibra de G_1 e G_2 associado a π_1 e π_2, ou seja,

$$P = \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : \pi_1(g_1) = \pi_2(g_2)\}.$$

Sabemos que existe um epimorfismo de grupos $p : F \twoheadrightarrow G_2$ onde F é um grupo livre finitamente gerado, uma vez que G_2 é finitamente gerado. Consideremos, então, as seguintes sequências exatas curtas

$$N_1 \hookrightarrow G_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} Q$$

$$ker(\pi_2 p) \hookrightarrow F \overset{\pi_2 p}{\twoheadrightarrow} Q$$

e denotemos por P' o produto fibra de G_1 e F associado a π_1 e $\pi_2 p$, ou seja,

$$P' = \{(g_1, f) \in G_1 \times F : \pi_1(g_1) = \pi_2 p(f)\}.$$

Pelo primeiro parágrafo desta demonstração, segue que P' é de tipo FP_{n+1}. Consideremos, então, o seguinte diagrama comutativo de sequências exatas curtas de grupos

$$\begin{tikzcd}
N_1 \times \mathbf{1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "id_{N_1 \times \mathbf{1}}"'] & P' \arrow[r, two heads, "p_2'"] \arrow[d, "id_{G_1} \times p"] & F \arrow[d, "p"] \\
N_1 \times \mathbf{1} \arrow[r, hook] & P \arrow[r, two heads, "p_2"] & G_2
\end{tikzcd}$$

onde $p_2' : P' \twoheadrightarrow F$ é dado por $p_2'(g_1, f) = f$, $p_2 : P \twoheadrightarrow G_2$ é dado, de forma análoga, por $p_2(g_1, g_2) = g_2$ e $id_{G_1} \times p : P' \to P$ é dado por $(id_{G_1} \times p)(g_1, f) = (id(g_1), p(f)) = (g_1, p(f))$. Observe que $id_{G_1} \times p$ é um epimorfismo, uma vez que tanto id_{G_1}, quanto p são epimorfismos. Além disso, $(id_{G_1} \times p)(N_1 \times \mathbf{1}) = N_1 \times \mathbf{1}$. Veja também que p assume o mesmo papel que ν no Teorema 4.4 (p. 92), de forma que $pp_2' = p_2(id_{G_1} \times p)$. Assim, pelo Teorema 4.4 (p. 92), segue que P é de tipo FP_{n+1}. □

Um último resultado novo que obtivemos é o seguinte teorema, que afirma, em particular, que a Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica vale quando Q, em seu enunciado, é virtualmente abeliano.

Teorema 4.8 (Conjectura n-$(n+1)$-$(n+2)$ Homológica - Caso Virtualmente Abeliano)**.** *Sejam $n \geq 2$*

$$N_1 \hookrightarrow G_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} Q$$

$$N_2 \hookrightarrow G_2 \overset{\pi_2}{\twoheadrightarrow} Q$$

sequências exatas curtas de grupos com G_1, G_2 de tipo FP_{n+1}, Q virtualmente abeliano (note que Q é necessariamente finitamente gerado, pois G_1 e G_2 o são), N_1 de tipo FP_k e N_2 de tipo FP_l para alguns $k, l \geq 0$ com $k + l \geq n$. Então, o produto fibra P de G_1 e G_2 associado a π_1 e π_2 é de tipo FP_{n+1}.

Demonstração. Primeiramente, pela Proposição 1.100 *b)* (p. 53) e usando a sequência exata curta de grupos

$$G_1 \overset{\iota}{\hookrightarrow} G_1 \times G_2 \overset{p_2}{\twoheadrightarrow} G_2,$$

onde ι é o homomorfismo de grupos inclusão canônica e p_2 é o homomorfismo de grupos projeção na segunda coordenada, constatamos que $G_1 \times G_2$ é de tipo FP_{n+1}.

Consideremos P como sendo o produto fibra de G_1 e G_2 associado a π_1 e π_2, ou seja,

$$P = \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : \pi_1(g_1) = \pi_2(g_2)\}.$$

Assumamos de início que Q é abeliano, ao invés de virtualmente abeliano. Veja que, pelo fato de Q ser abeliano, $P \lhd (G_1 \times G_2)$ e $(G_1 \times G_2)' \subseteq P$, acarretando, assim, o fato de $(G_1 \times G_2)/P$ ser abeliano. Segue que, pelo Teorema 2.13 (p. 67), para concluirmos nossa demonstração, precisamos mostrar que, para todo caráter $\chi : G_1 \times G_2 \to \mathbb{R}$ com $\chi(P) = 0$, temos que $[\chi] \in \Sigma^{n+1}(G_1 \times G_2, \mathbb{Z})$ (recorde que um caráter é um homomorfismo de grupos não-nulo por definição). Seja, então, χ um tal caráter.

Observe que

$$G_1 \times G_2 = (G_1 \times \mathbf{1})P.$$

De fato, é evidente que $(G_1 \times \mathbf{1})P \subseteq G_1 \times G_2$. Vamos mostrar a continência contrária. Seja $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. Temos que $\pi_2(g_2) = q_2 \in Q$. Como π_1 é epimorfismo de grupos, existe $g_1' \in G_1$ tal que $\pi_1(g_1') = q_2$. Seja, então, $\tilde{g}_1 := g_1' g_1^{-1} \in G_1$. Logo, $\pi_1(\tilde{g}_1 g_1) = \pi_1(g_1' g_1^{-1} g_1) = \pi_1(g_1') = \pi_2(g_2)$. Logo, $(\tilde{g}_1 g_1, g_2) \in P$. Segue que $(g_1, g_2) = ((\tilde{g}_1)^{-1}\tilde{g}_1 g_1, g_2) = ((\tilde{g}_1)^{-1}, 1)(\tilde{g}_1 g_1, g_2) \in (G_1 \times \mathbf{1})P$. Como $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ foi tomado de forma arbitrária, segue que $G_1 \times G_2 \subseteq (G_1 \times \mathbf{1})P$. De forma análoga, mostramos também que

$$G_1 \times G_2 = P(\mathbf{1} \times G_2).$$

Assim, concluímos que $\chi|_{(G_1 \times \mathbf{1})} \neq 0$, do contrário $\chi : (G_1 \times \mathbf{1})P \to \mathbb{R}$ seria nulo. Da mesma forma, $\chi|_{(\mathbf{1} \times G_2)} \neq 0$.

Pelo fato de Q ser abeliano, temos que $G_1/N_1, G_2/N_2$ são abelianos. Além disso, veja que

$$P \cap (G_1 \times \mathbf{1}) = N_1 \quad \text{e} \quad P \cap (\mathbf{1} \times G_2) = N_2,$$

o que implica que $\chi|_{(G_1 \times \mathbf{1})}(N_1) = \mathbf{0}$ e $\chi|_{(\mathbf{1} \times G_2)}(N_2) = \mathbf{0}$, uma vez que $\chi(P) = \mathbf{0}$. Sejam $k', l' \geq 0$ tais que $k' \leq k$, $l' \leq l$ e $k' + l' = n$. Como N_1 é de tipo FP_k e N_2 é de tipo FP_l, então N_1 é de tipo $FP_{k'}$ e N_2 é de tipo $FP_{l'}$. Assim, pelo Teorema 2.13 (p. 67), $[\chi|_{(G_1 \times \mathbf{1})}] \in \Sigma^{k'}(G_1, \mathbb{Z})$ e $[\chi|_{(\mathbf{1} \times G_2)}] \in \Sigma^{l'}(G_2, \mathbb{Z})$. Usando o Teorema 2.20 (p. 70), concluímos que

$$[\chi] \in \Sigma^{k'+l'+1}(G_1 \times G_2, \mathbb{Z}) = \Sigma^{n+1}(G_1 \times G_2, \mathbb{Z}).$$

Supondo agora o caso geral, isto é, supondo Q virtualmente abeliano. Então, existe subgrupo abeliano A de Q tal que $[Q : A] < \infty$. Temos, então, as seguintes sequências exatas curtas de grupos:

$$N_1 \hookrightarrow \pi_1^{-1}(A) \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} A$$

$$N_2 \hookrightarrow \pi_2^{-1}(A) \xrightarrow{\tilde{\pi}_2} A$$

onde $\tilde{\pi}_1 := \pi_1|_{\pi_1^{-1}(A)}$ e $\tilde{\pi}_2 := \pi_2|_{\pi_2^{-1}(A)}$. Veja que, como $N_1 = ker(\pi_1)$, $N_1 \subseteq \pi_1^{-1}(A)$, logo $ker(\tilde{\pi}_1) = N_1 \cap \pi_1^{-1}(A) = N_1$. Analogamente, $ker(\tilde{\pi}_2) = N_2$.

Como

$$[G_1 : \pi_1^{-1}(A)] = [\pi_1^{-1}(Q) : \pi_1^{-1}(A)] = [Q : A] < \infty$$

e G_1 é de tipo FP_{n+1}, segue da Proposição 1.97 (p. 53) que $\pi_1^{-1}(A)$ é de tipo FP_{n+1}. Semelhantemente, $\pi_2^{-1}(A)$ é de tipo FP_{n+1}. Pelo caso anterior visto acima, temos que o produto fibra $\tilde{P}$ de $\pi_1^{-1}(A)$ e $\pi_2^{-1}(A)$ associado a $\tilde{\pi}_1$ e $\tilde{\pi}_2$ é de tipo FP_{n+1}.

Observe agora que $\tilde{P} = P \cap (\pi_1^{-1}(A) \times \pi_2^{-1}(A))$. Logo,

$$[P : \tilde{P}] = [P : P \cap (\pi_1^{-1}(A) \times \pi_2^{-1}(A))] =$$

$$= [P\big(\pi_1^{-1}(A) \times \pi_2^{-1}(A)\big) : \pi_1^{-1}(A) \times \pi_2^{-1}(A)] \leq [G_1 \times G_2 : \pi_1^{-1}(A) \times \pi_2^{-1}(A)].$$

Por outro lado,

$$[G_1 \times G_2 : \pi_1^{-1}(A) \times \pi_2^{-1}(A)] = [G_1 : \pi_1^{-1}(A)] \cdot [G_2 : \pi_2^{-1}(A)] = [Q : A]^2 < \infty.$$

Logo, $[P : \tilde{P}] < \infty$. Novamente usando a Proposição 1.97 (p. 53), concluímos que P é de tipo FP_{n+1}. $\square$

Capítulo 5

Resultados Novos: Σ-invariantes de Grupos Residualmente Livres Finitamente Apresentáveis

Relembremos e fixemos as seguintes notações. **Sejam** $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$ **um produto subdireto completo de um produto direto de grupos limites não-abelianos e**

$$p_j : S \twoheadrightarrow G_j$$

a restrição em S **da projeção canônica sobre** G_j**, onde** $1 \leq j \leq m$**. Observe que** S **é um grupo residualmente livre** pelo Lema 3.26 (p. 79).

Sejam também

$$L_j := S \cap G_j \neq \mathbf{1} \quad \textbf{e} \quad N_{i,j} := p_j(ker(p_i)),$$

para todo $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ **com** $i \neq j$**. Recorde das notações fixadas imediatamente após o Teorema 3.30 (p. 81) que**

$$N_{i,j} \lhd G_j.$$

Sendo ainda G **um grupo, dado** $i \in \mathbb{Z}_+$**, temos a seguinte notação:**

$$[g_1, \ldots, g_i] := [[g_1, \ldots, g_{i-1}], g_i],$$

onde $[g_1] := g_1$**,** $[g_1, g_2] := g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$ **e** $g_i \in G, \forall i \in \mathbb{Z}_+$**.**

5.1 Resultados Técnicos Preliminares

A seguinte proposição fornece-nos um subgrupo N do produto subdireto S com "boas" propriedades e que é essencial para a obtenção dos resultados principais deste Capítulo. Tal subgrupo N permeará a maioria dos outros resultados técnicos deste Capítulo.

Proposição 5.1. *Seja $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$, com $m \geq 2$, um produto subdireto completo finitamente gerado de um produto direto de grupos limites não-abelianos. Se S é de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$, então, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe subgrupo normal $F_i \lhd G_i$ tal que F_i é livre, G_i/F_i é policíclico-por-finito e $F_i \subseteq S'$. Em particular, $N := F_1 \times \ldots \times F_m \subseteq S' \subseteq S$.*

Demonstração. Utilizaremos a notação fixada no início do Capítulo. Definamos

$$N_j := \bigcap_{i \neq j} N_{i,j}.$$

Então,

$$\gamma_{m-1}(N_j) \subseteq [N_{1,j}, \ldots, N_{j-1,j}, N_{j+1,j}, \ldots, N_{m,j}].$$

Pelo Lema 3.31 (p. 81),

$$\gamma_{m-1}(N_j) \subseteq S. \tag{5.1}$$

Por outro lado, temos que $\gamma_{m-1}(N_j) \lhd_{car} N_j \lhd G_j$, logo $\gamma_{m-1}(N_j) \lhd G_j$.

Veja que, como $\gamma_{m-1}(N_j/\gamma_{m-1}(N_j)) = \gamma_{m-1}(N_j)/\gamma_{m-1}(N_j) \cong \mathbf{1}$, segue que $N_j/\gamma_{m-1}(N_j)$ é nilpotente.

Além disso, pelas hipóteses da Proposição, bem como pelos Teoremas 3.30 (p. 81) e 3.32 (p. 82) e a Proposição 3.16 (p. 76), temos que $[G_j : N_{i,j}] < \infty$. Portanto,

$$[G_j : N_j] < \infty.$$

Assim,

$$G_j/\gamma_{m-1}(N_j) \text{ é nilpotente-por-finito,}$$

uma vez que $N_j/\gamma_{m-1}(N_j)$ é nilpotente e

$$[G_j/\gamma_{m-1}(N_j) : N_j/\gamma_{m-1}(N_j)] = [G_j : N_j] < \infty.$$

Pela Propriedade 5) da Proposição 3.15 (p. 75), para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, existe subgrupo normal $\widetilde{F_j} \lhd G_j$ tal que $\widetilde{F_j}$ é livre e $G_j/\widetilde{F_j}$ é nilpotente livre de torção. Definamos, então,

$$\widehat{F_j} := \gamma_{m-1}(N_j) \cap \widetilde{F_j}.$$

Veja que $\widehat{F_j} \lhd G_j$ e é também livre, uma vez que subgrupo de grupo livre é livre pelo Teorema 1.81 (p. 47). Observe ainda que, por (5.1) (p. 105),

$$\widehat{F_j} \subseteq \gamma_{m-1}(N_j) \subseteq S. \tag{5.2}$$

Note que a função

$$\phi : \frac{G_j}{\widehat{F}_j} \longrightarrow \frac{G_j}{\gamma_{m-1}(N_j)} \times \frac{G_j}{\widetilde{F}_j}$$

dada por $\phi(x\widehat{F}_j) = (x\gamma_{m-1}(N_j), x\widetilde{F}_j)$ está bem definida e é um monomorfismo de grupos. Daí que, visto que $G_j/\gamma_{m-1}(N_j)$ e $G_j/\widetilde{F}_j$ são nilpotentes-por-finito,

$$G_j/\widehat{F}_j \text{ é também nilpotente-por-finito,}$$

já que é isomorfo a um subgrupo de $\frac{G_j}{\gamma_{m-1}(N_j)} \times \frac{G_j}{\widetilde{F}_j}$.

Definamos $\widehat{N} := \widehat{F}_1 \times \ldots \times \widehat{F}_n$. Por (5.2) (p. 105), $\widehat{N} \subseteq S$.

Definamos também

$$F_i := \widehat{F}_i \cap (\widehat{N} \cap S') = \widehat{F}_i \cap S'.$$

Consequentemente,

$$F_i \subseteq S' \text{ e } F_i \text{ é subgrupo livre }, \tag{5.3}$$

já que é subgrupo do grupo livre $\widehat{F}_i$. Por (5.2) (p. 105) e pelo fato de $S' \lhd S$, segue que $\widehat{F}_i \cap (\widehat{N} \cap S') = \widehat{F}_i \cap S' \lhd \widehat{F}_i$. Analogamente, pelo fato de $\widehat{N} \subseteq S$ e $S' \lhd S$, temos que $\widehat{N} \cap S' \lhd \widehat{N}$. Temos, então, o homomorfismo de grupos

$$\psi : \frac{\widehat{F}_i}{\widehat{F}_i \cap (\widehat{N} \cap S')} \longrightarrow \frac{\widehat{N}}{\widehat{N} \cap S'},$$

dado por $\psi(x(\widehat{F}_i \cap (\widehat{N} \cap S'))) = x(\widehat{N} \cap S')$, que é, de fato, injetor.

Mas, veja que

$$\widehat{N}/(\widehat{N} \cap S') \cong (\widehat{N}S')/S' \subseteq S/S',$$

sendo este último um grupo abeliano finitamente gerado, já que S é finitamente gerado por hipótese. Logo, $\widehat{F}_i/(\widehat{F}_i \cap (\widehat{N} \cap S')) = \widehat{F}_i/F_i$ é abeliano finitamente gerado e, portanto, policíclico.

Além disso, como $G_i/\widehat{F}_i$ é nilpotente-por-finito finitamente gerado, existe $A \lhd G_i/\widehat{F}_i$ tal que A é nilpotente e $[G_i/\widehat{F}_i : A] < \infty$. Daí que, A é também finitamente gerado e, portanto, policíclico. Segue que

$$G_i/\widehat{F}_i \text{ é policíclico-por-finito.}$$

Vamos mostrar agora que $F_i \lhd G_i$. Por definição, $F_i = \widehat{F}_i \cap S'$. Como $\widehat{F}_i \lhd G_i$, basta mostrarmos que, dado $g_i \in G_i$, $g_i F_i (g_i)^{-1} \subseteq S'$.

Seja $g_i \in G_i$. Sendo $\phi_i : G_1 \times \ldots \times G_n \to G_i$ a projeção canônica e p_i a restrição de ϕ_i em S, como S é produto subdireto, temos que existe $s \in S$ tal que $g_i = p_i(s) = \phi_i(s)$.

Como $S' \lhd S$, segue que $sF_is^{-1} \subseteq sS's^{-1} \subseteq S'$. Além disso,

$$\phi_i(s^{-1}g_i) = \phi_i(s)^{-1}\phi_i(g_i) = g_i^{-1}g_i = 1.$$

Logo, $s^{-1}g_i \in G_1 \times \ldots G_{i-1} \times G_{i+1} \times \ldots \times G_n$. Consequentemente,

$$[s^{-1}g_i, F_i] \subseteq [G_1 \times \ldots G_{i-1} \times G_{i+1} \times \ldots \times G_n, G_i] = \mathbf{1}.$$

Assim,

$$s^{-1}g_iF_i(s^{-1}g_i)^{-1} = F_i.$$

Finalmente, segue que

$$g_iF_ig_i^{-1} = ss^{-1}g_iF_ig_i^{-1}ss^{-1} = s(s^{-1}g_i)F_i(s^{-1}g_i)^{-1}s^{-1} = sF_is^{-1} \subseteq S'.$$

O que mostra que $F_i \lhd G_i$.

Por fim, veja que $(G_i/F_i)/(\widehat{F}_i/F_i) \cong G_i/\widehat{F}_i$, que é policíclico-por-finito. Como $\widehat{F}_i/F_i$ é policíclico, segue que

$$G_i/F_i \text{ é policíclico-por-finito.}$$

$\square$

Os dois seguintes lemas tratam de quando certos aneis de monoide com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{Q}$ são noetherianos. Os mesmos são utilizados em alguns dos seguintes resultados técnicos desta seção.

Lema 5.2. *Sejam G um grupo policíclico-por-finito e $\chi : G \to \mathbb{R}$ um caráter discreto de G. Então, $\mathbb{Z}G_\chi$ e $\mathbb{Q}G_\chi$ são aneis noetherianos.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.59 (p. 39), $\mathbb{Z}G$ e $\mathbb{Q}G$ são aneis noetherianos.

Visto que χ é caráter discreto, ou seja, $im(\chi) \cong \mathbb{Z}$, temos a seguinte sequência exata curta de grupos:

$$ker(\chi) \hookrightarrow G \overset{\chi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}\,.$$

Já que $\mathbb{Z}$ é grupo livre, obtemos que $G = ker(\chi) \rtimes \mathbb{Z}$, ou seja, G é produto semidireto de $ker(\chi)$ e $\mathbb{Z}$ onde $ker(\chi) \lhd G$.

Tomemos $x \in \chi^{-1}(1)$. Veja que $\chi(x) = 1$ é um gerador de $\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ é visto como subgrupo do produto semidireto $G = ker(\chi) \rtimes \mathbb{Z}$, identificamos $\chi(x)$ com x e consideramos $\mathbb{Z}$ gerado por x, isto é, $\mathbb{Z} = \langle x \rangle$. Então, dado $g \in G$, temos que $g = g_0x^k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ e para algum $g_0 \in ker(\chi)$ (note que consideramos $\mathbb{Z}$ como subgrupo multiplicativo de G). Daí que,

$$g = g_0x^k \in G_\chi \Leftrightarrow k \geq 0.$$

De fato, dado $g \in G$, $\chi(g) = \chi(g_0x^k) = \chi(g_0) + k\chi(x) = k$. Assim, $g \in G_\chi \Leftrightarrow \chi(g) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 0$.

Agora, por definição,

$$\mathbb{Z}G_\chi = \bigoplus_{\substack{g=g_0x^k \in G \\ k\geq 0}} \mathbb{Z}g = \bigoplus_{\substack{g_0 \in ker(\chi) \\ k\geq 0}} \mathbb{Z}(g_0x^k) = \mathbb{Z}ker(\chi)[x].$$

Contudo, visto que $ker(\chi)$ é subgrupo de G, temos que $ker(\chi)$ é policíclico-por-finito e, pelo Corolário 1.59 (p. 39), segue que $\mathbb{Z}ker(\chi)$ é anel noetheriano. Concluímos por fim, usando o Teorema da Base de Hilbert, que $\mathbb{Z}ker(\chi)[x]$ é anel noetheriano e, consequentemente, que $\mathbb{Z}G_\chi$ é anel noetheriano.

De forma idêntica, mostramos que $\mathbb{Q}G_\chi$ é anel noetheriano. De fato, basta subtituir $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Q}$ no parágrafo precedente. □

Sejam G um grupo, H um subgrupo normal de G, $\chi : G \to \mathbb{R}$ um caráter e $G_\chi := \{g \in G : \chi(g) \geq 0\}$, monoide de G relativo a χ. Observe que, se $\chi(H) = \mathbf{0}$, então χ induz um caráter $\chi_0 : G/H \to \mathbb{R}$ definido por $\chi_0(gH) = \chi(g)$, para todo $gH \in G/H$.

Definimos

$$G_\chi/H := \{gH \in G/H : g \in G_\chi\}.$$

Veja que G_χ/H é o monoide de G/H relativo a χ_0, uma vez que

$$(G/H)_{\chi_0} = \{gH \in G/H : \chi_0(gH) \geq 0\} =$$

$$= \{gH \in G/H : \chi(g) \geq 0\} = \{gH \in G/H : g \in G_\chi\} = G_\chi/H.$$

Para os próximos dois lemas e para a próxima proposição, **seja** $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$**, com** $m \geq 2$**, um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo** $FP_2(\mathbb{Q})$ **de um produto direto de grupos limites não-abelianos. Sejam também**

$$N := F_1 \times \ldots \times F_m \subseteq S' \subseteq S,$$

como na Proposição 5.1 (p. 105), onde $F_i \lhd G_i$, F_i **é livre e** G_i/F_i **é policíclico-por-finito com** $1 \leq i \leq m$**.**

Lema 5.3. *Se $\chi : S \to \mathbb{R}$ é um caráter discreto de S, então $\mathbb{Z}(S_\chi/N)$ e $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$ são aneis noetherianos.*

Demonstração. Como G_i/F_i é policíclico-por-finito para $1 \leq i \leq m$, segue que $G_1/F_1 \times \ldots \times G_m/F_m$ é também policíclico-por-finito. Agora, S/N é isomorfo a um subgrupo de $G_1/F_1 \times \ldots \times G_m/F_m$, portanto S/N é também policíclico-por-finito. Além disso, como $N \subseteq S'$, resulta que $\chi(N) = \mathbf{0}$. Logo, χ induz homomorfismo de grupos

$$\chi_0 : S/N \to \mathbb{R} \text{ definido por } \chi_0(sN) = \chi(s), \text{ para todo } sN \in S/N.$$

Ainda mais, visto que χ é caráter discreto, temos que χ_0 é também discreto, ou seja, $im(\chi_0) \cong \mathbb{Z}$. Daí que, pelo Lema 5.2 (p. 107), $\mathbb{Z}(S/N)_{\chi_0} = \mathbb{Z}(S_\chi/N)$ e $\mathbb{Q}(S/N)_{\chi_0} = \mathbb{Q}(S_\chi/N)$ são aneis noetherianos. $\square$

A seguinte proposição é um resultado interessante por si só, embora seja técnico e usado nesta Tese no lema que a sucede no texto. Sua demonstração usa uma estratégia frequente neste trabalho: tendo um certo módulo finitamente gerado sobre um dado anel de grupo (ou anel de monoide) e tendo ainda que tal anel de grupo (ou anel de monoide) é noetheriano, concluímos que os submódulos do módulo inicial são finitamente gerados.

Proposição 5.4. *Seja $\chi : S \to \mathbb{R}$ um caráter discreto (onde lembramos que, como fixado na notação acima, S é de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$). Se $[\chi] \in \Sigma^n(S, \mathbb{Q})$, onde $1 \leq n \leq m-1$, isto é, se S_χ é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$, então $H_j(N, \mathbb{Q})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}(S_\chi/N)-$módulo onde $0 \leq j \leq n$.*

Demonstração. O fato de $[\chi]$ pertencer a $\Sigma^n(S, \mathbb{Q})$, implica que $\mathbb{Q}$ é de tipo FP_n como $\mathbb{Q}S_\chi$-módulo à direita trivial, portanto, pela Proposição 1.22 (p. 26), existe resolução livre de $\mathbb{Q}S_\chi$-módulos

$$\mathscr{F} : \mathcal{F}_{n+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{F}_{j+1} \xrightarrow{d_{j+1}} \mathcal{F}_j \xrightarrow{d_j} \mathcal{F}_{j-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

onde $\mathcal{F}_j$ é $\mathbb{Q}S_\chi$-módulo finitamente gerado para $j \in \{0, \ldots, n\}$ ($\mathcal{F}_{n+1}$ não é necessariamente finitamente gerado). Veja que, para $0 \leq j \leq n+1$, $\mathcal{F}_j \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q}$ é $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$-módulo à direita através da ação induzida pela restrição da projeção canônica $\pi|_{S_\chi} : S_\chi \twoheadrightarrow S_\chi/N$ (onde $\pi : S \twoheadrightarrow S/N$), uma vez que $N \subseteq S_\chi$ age trivialmente sobre o grupo abeliano $\mathcal{F}_j \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q}$. Ademais, observe que, para $0 \leq j \leq n$, temos os seguintes isomorfismos de $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$-módulos

$$\mathcal{F}_j \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q} \cong (\bigoplus_{\alpha \in I_j} (\mathbb{Q}S_\chi)_\alpha) \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{\alpha \in I_j} ((\mathbb{Q}S_\chi)_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q}),$$

onde $(\mathbb{Q}S_\chi)_\alpha := \mathbb{Q}S_\chi$ e onde I_j é algum conjunto de índices finito para cada $j \in \{0, \ldots, n\}$, pois $\mathcal{F}_j$ é $\mathbb{Q}S_\chi$-módulo livre finitamente gerado. E, sendo $\widetilde{T} := T \cap S_\chi$, onde T é uma transversal à direita de N em S, para cada $\alpha \in I_j$,

$$(\mathbb{Q}S_\chi)_\alpha \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}S_\chi \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q} \cong (\bigoplus_{t\in\widetilde{T}} (\mathbb{Q}N)t) \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{t\in\widetilde{T}} \mathbb{Q}t \cong \bigoplus_{t\in\widetilde{T}} \mathbb{Q}(Nt) =$$

$$= \bigoplus_{Nt\in S_\chi/N} \mathbb{Q}(Nt) = \mathbb{Q}(S_\chi/N) =: \mathbb{Q}(S_\chi/N)_\alpha.$$

Daí que,

$$\mathcal{F}_j \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{\alpha\in I_j} \mathbb{Q}(S_\chi/N)_\alpha.$$

Assim, visto que $-\otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q}$ é funtor e considerando-se o complexo apagado $\mathscr{F}_{\mathbb{Q}}$, obtemos a sequência de $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$-módulos à direita (não necessariamente exata) $\mathscr{F}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q}$:

$$\mathcal{F}_{n+1} \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{F}_{j+1} \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q} \xrightarrow{d_{j+1}\otimes id_{\mathbb{Q}}} \mathcal{F}_j \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q} \xrightarrow{d_j\otimes id_{\mathbb{Q}}} \mathcal{F}_{j-1} \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q} \longrightarrow \ldots.$$

$$\ldots \longrightarrow \mathbf{0}$$

Observe que, pelo que foi visto acima, $\mathcal{F}_j \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q}$ é $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$-módulo livre finitamente gerado para cada $j \in \{0, \ldots, n\}$.

Pelo Lema 1.53 (p. 35),

$$H_j(N, \mathbb{Q}) = Tor_j^{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong Tor_j^{\mathbb{Q}N}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = H_j(\mathscr{F}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q}) = \frac{ker(d_j \otimes id_{\mathbb{Q}})}{im(d_{j+1} \otimes id_{\mathbb{Q}})}.$$

Assim, como, para cada $j \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathcal{F}_j \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q}$ é $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$-módulo finitamente gerado e como $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$ é anel noetheriano, concluímos que todo e qualquer $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$-submódulo de $\mathcal{F}_j \otimes_{\mathbb{Q}N} \mathbb{Q}$ é finitamente gerado, portanto $ker(d_j \otimes id_{\mathbb{Q}})$ é $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$-submódulo finitamente gerado e, consequentemente, $H_j(N, \mathbb{Q})$ é $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$-módulo finitamente gerado. □

Lema 5.5. *Sejam*

$$q_{j_1,\ldots,j_n} : (G_1/F_1) \times \ldots \times (G_m/F_m) \to (G_{j_1}/F_{j_1}) \times \ldots \times (G_{j_n}/F_{j_n})$$

projeção nas coordenadas $j_1, \ldots, j_n$*, onde* $n \in \{1, \ldots, m-1\}$*,* $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, m\}$*, com* $j_1 < \ldots < j_n$*, e* $\chi : S \to \mathbb{R}$ *um caráter discreto. Se* S_χ *é de tipo* $FP_n(\mathbb{Q})$*, então*

$$W_{j_1,\ldots,j_n} := (F_{j_1}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} (F_{j_2}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} (F_{j_n}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$$

é finitamente gerado como $\mathbb{Q}q_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi/N)$*-módulo.*

Demonstração. Como $H_n(N, \mathbb{Q}) = H_n(F_1 \times \ldots \times F_m, \mathbb{Q})$, generalizando o Corolário 1.52

(p. 35) para $m \geq 2$, obtemos o seguinte isomorfismo de $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$-módulos:

$$H_n(N,\mathbb{Q}) = H_n(F_1 \times \ldots \times F_m, \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{r_1+\ldots+r_m=n} H_{r_1}(F_1,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} H_{r_m}(F_m,\mathbb{Q}), \quad (5.4)$$

com $r_1, \ldots, r_m \in \{0, \ldots, n\}$ e onde a ação de $S_\chi/N \subseteq (G_1/F_1) \times \ldots \times (G_m/F_m)$ sobre $H_{r_1}(F_1,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} H_{r_m}(F_m,\mathbb{Q})$ é dada coordenada a coordenada.

Como F_i é grupo livre para $1 \leq i \leq m$, segue que $H_k(F_i,\mathbb{Q}) = \mathbf{0}$ para $k \geq 2$. Logo, na soma direta do isomorfismo em (5.4) (p. 111), temos que, na verdade, $r_1, \ldots, r_m \in \{0,1\}$.

Agora, pela Proposição 1.49 (p. 35), temos que $H_0(F_i,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ e $H_1(F_i,\mathbb{Q}) = F_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Com o que foi visto até aqui e por (5.4) (p. 111), segue que

$$H_n(N,\mathbb{Q}) = H_n(F_1 \times \ldots \times F_m, \mathbb{Q}) =$$

$$= \bigoplus_{1 \leq j_1 < \ldots < j_n \leq m} (F_{j_1}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} (F_{j_2}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} (F_{j_n}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

Pelo Lema 5.3 (p. 108), $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$ é anel noetheriano e, pela Proposição 5.4 (p. 109), $H_n(N,\mathbb{Q})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$-módulo. Logo, $W_{j_1,\ldots,j_n}$ é $\mathbb{Q}(S_\chi/N)$-submódulo de $H_n(N,\mathbb{Q})$ finitamente gerado.

Observe que $q_{j_1,\ldots,j_n}$ é epimorfismo de grupos e que

$$ker(q_{j_1,\ldots,j_n}) = \prod_{\substack{j \in \{1,\ldots,m\} \\ j \neq j_1,\ldots,j_n}} G_j/F_j.$$

Como a ação de S_χ/N é dada por coordenada a coordenada sobre $W_{j_1,\ldots,j_n}$, vemos que a ação de $ker(q_{j_1,\ldots,j_n}) \cap (S_\chi/N)$ é trivial sobre $W_{j_1,\ldots,j_n}$, portanto temos ação induzida de $q_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi/N)$ sobre $W_{j_1,\ldots,j_n}$ e, assim, $W_{j_1,\ldots,j_n}$ é $\mathbb{Q}q_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi/N)$-módulo. A ação de $q_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi/N)$ sobre $W_{j_1,\ldots,j_n}$ é dada por, sendo $q_{j_1,\ldots,j_n}(x) \in q_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi/N)$ e $w \in W_{j_1,\ldots,j_n}$,

$$q_{j_1,\ldots,j_n}(x) \cdot w := x \cdot w.$$

Logo, pela definição da ação, $W_{j_1,\ldots,j_n}$ é também finitamente gerado como $\mathbb{Q}q_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi/N)$-módulo. □

A seguinte proposição é um resultado semelhante à *Proposition 7*, p. 5, de [21]. Difere, no entanto, no detalhe de que, na *Proposition 7*, o grupo quociente G/F é nilpotente livre de torção, já na proposição abaixo tal quociente é policíclico-por-finito livre de torção.

A demonstração dessa proposição é intrincada, envolvendo homologia de complexos e homologia de grupos, propriedades geométricas de grupos limites e, ainda, uma guinada para um resultado devido a Daniel R. Farkas e Robert L. Snider (Proposição

1.67, p. 41), um dos casos resolvidos da Conjectura do Divisor de Zero.

Proposição 5.6. *Sejam G um grupo limite não-abeliano, F um subgrupo normal de G livre tal que G/F seja grupo policíclico-por-finito livre de torção. Então, existe um $\mathbb{Q}(G/F)$-submódulo de $F^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ que é cíclico livre, isto é, isomorfo a uma cópia do anel $\mathbb{Q}(G/F)$.*

Demonstração. Como G é grupo limite, G tem dimensão cohomológica $cd(G) = n < \infty$, e pelo Lema 3.14 (p. 75), existe resolução livre de tipo finito e comprimento finito n de $\mathbb{Z}G$-módulos à direita com $\mathbb{Z}$ sendo considerado como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial

$$\mathscr{P} : \mathbf{0} \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

onde $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, e cujo complexo apagado associado é

$$\mathscr{P}_{\mathbb{Z}} : \mathbf{0} \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Pelo Lema 1.54 (p. 36), temos que, para $0 \leq i \leq n$,

$$rank(H_i(G, \mathbb{Z})) = dim_{\mathbb{Q}}(H_i(G, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}),$$

logo

$$\chi(G) = \sum_{i=0}^{cd(G)} (-1)^i rank(H_i(G, \mathbb{Z})) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i dim_{\mathbb{Q}}(H_i(G, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}). \tag{5.5}$$

Observe que

$$\mathscr{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Q} : \mathbf{0} \longrightarrow \mathbb{Q}^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{Q}^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbf{0}$$

e, como $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é funtor exato, temos pelo Lema 1.33 (p. 29), para $0 \leq i \leq n$,

$$H_i(G, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = H_i(\mathscr{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H_i(\mathscr{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \cong H_i(\mathscr{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Q}).$$

E, pelo Lema 1.39 (p. 30), obtemos que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i dim_{\mathbb{Q}}(H_i(G, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i dim_{\mathbb{Q}}(H_i(\mathscr{P}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Q})) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha_i.$$

Usando (5.5) (p. 112), concluímos que

$$\chi(G) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha_i. \tag{5.6}$$

Agora, utilizando-se novamente que o funtor $-\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ é exato, obtemos a seguinte sequência exata

$$\mathscr{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} : \mathbf{0} \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \dots \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{\alpha_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Visto que $(\mathbb{Z}G)^{\alpha_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\alpha_i} \cong (\mathbb{Q}G)^{\alpha_i}$, para $0 \leq i \leq n$, onde os isomorfismo são de $\mathbb{Q}G$-módulos à direita e onde $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ é $\mathbb{Q}G$-módulo à direita trivial, segue que

$$\mathscr{Q} = \mathscr{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} : \mathbf{0} \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_n} \longrightarrow \dots \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

é resolução livre de tipo finito de $\mathbb{Q}G$-módulos à direita do $\mathbb{Q}G$-módulo trivial $\mathbb{Q}$, cujo complexo apagado associado é

$$\mathscr{Q}_{\mathbb{Q}} : \mathbf{0} \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_n} \longrightarrow \dots \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Aplicando o funtor $- \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q}$ na resolução $\mathscr{Q}$, obtemos o seguinte complexo

$$\mathscr{Q} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} : \mathbf{0} \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_n} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} \longrightarrow \dots \longrightarrow (\mathbb{Q}G)^{\alpha_0} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Contudo, para $0 \leq i \leq n$, temos os seguintes isomorfismos de $\mathbb{Q}(G/F)$-módulos à direita:

$$(\mathbb{Q}G)^{\alpha_i} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} \cong (\mathbb{Q}G \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q})^{\alpha_i} \cong (\mathbb{Q}(G/F))^{\alpha_i},$$

onde a ação de $\mathbb{Q}(G/F)$ sobre $\mathbb{Q}G \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q}$ é induzida pelo epimorfismo de grupos projeção canônica $\phi : G \twoheadrightarrow G/F$, já que F age trivialmente sobre $\mathbb{Q}G \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q}$. Além disso, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ como $\mathbb{Q}(G/F)$-módulos mediante o isomorfismo $q_1 \otimes q_2 \mapsto q_1 q_2$, com $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Portanto, temos o complexo de $\mathbb{Q}(G/F)$-módulos:

$$\mathscr{R} = \mathscr{Q}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q} : \mathbf{0} \longrightarrow (\mathbb{Q}(G/F))^{\alpha_n} \longrightarrow \dots \longrightarrow (\mathbb{Q}(G/F))^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbf{0}$$

e, para $0 \leq i \leq n$, pelo Lema 1.53 (p. 35),

$$H_i(F, \mathbb{Q}) = Tor_i^{\mathbb{Z}F}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong Tor_i^{\mathbb{Q}F}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = H_i(\mathscr{Q}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}F} \mathbb{Q}) = H_i(\mathscr{R}). \tag{5.7}$$

Observe que, como F é grupo livre,

$$H_i(F, \mathbb{Q}) = \mathbf{0}, \text{ para todo } i \geq 2. \tag{5.8}$$

Além disso,

$$H_0(F, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad H_1(F, \mathbb{Q}) = F^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \tag{5.9}$$

pela Proposição 1.49 (p. 35).

Agora, como G/F é policíclico-por-finito livre de torção, pelo Corolário 1.68

(p. 41), concluímos que $(\mathbb{Q}(G/F), \mathbb{Q}(G/F)\backslash\{\mathbf{0}\})$ satisfaz a condição de Ore e, ainda mais, a localização de Ore $\mathcal{K} := \mathbb{Q}(G/F)(\mathbb{Q}(G/F)\backslash\{\mathbf{0}\})^{-1}$ é anel com divisão onde a aplicação canônica $\mathbb{Q}(G/F) \hookrightarrow \mathcal{K}$ é monomorfismo de aneis.

Observe que $\mathcal{K}$ é $\mathbb{Q}(G/F)$-módulo. Usando, então, o funtor $-\otimes_{\mathbb{Q}(G/F)}\mathcal{K}$, temos o seguinte complexo de $\mathcal{K}$-módulos à direita:

$$\mathscr{R} \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K} : \mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{K}^{\alpha_n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{K}^{\alpha_0} \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Na verdade, como $\mathcal{K}$ é anel com divisão, o conceito de dimensão está bem definido para cada $\mathcal{K}$-módulo do complexo acima e, além disso, tais dimensões são finitas.

Pelo Lema 1.65 (p. 40), temos que o funtor $-\otimes_{\mathbb{Q}(G/F)}\mathcal{K}$ é exato. E, pelo Lema 1.33 (p. 29), segue que, para $0 \leq i \leq n$,

$$H_i(\mathscr{R} \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K}) \cong H_i(\mathscr{R}) \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K}.$$

Contudo, por (5.7) (p. 113), (5.8) (p. 113) e (5.9) (p. 113),

$$H_i(\mathscr{R}) = \mathbf{0}, \text{ para todo } i \geq 2 \quad \text{e} \quad H_0(\mathscr{R}) = \mathbb{Q}.$$

Ademais, $H_1(\mathscr{R}\otimes_{\mathbb{Q}(G/F)}\mathcal{K})$ é quociente de dois $\mathcal{K}$-submódulos de dimensão finita, portanto $H_1(\mathscr{R} \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K})$ é também um $\mathcal{K}$-módulo de dimensão finita, isto é,

$$H_1(\mathscr{R} \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K}) \cong \mathcal{K}^b, \text{ com } b \geq 0.$$

Por outro lado, observe que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K} = \mathbf{0}$. De fato, dados $q \in \mathbb{Q}, \overline{g} \in G/F$ tal que $\overline{g} \neq 1_{G/F}$, e sendo $\overline{g} - 1_{G/F} \in \mathbb{Q}(G/F)$, temos que

$$q \otimes (\overline{g} - 1_{G/F}) = q \otimes \overline{g} - q \otimes 1_{G/F} = q\overline{g} \otimes 1_{G/F} - q \otimes 1_{G/F} = q \otimes 1_{G/F} - q \otimes 1_{G/F} = 0.$$

Como $\overline{g} - 1_{G/F} \neq 0$ em $\mathbb{Q}(G/F)$, segue que $\overline{g} - 1_{G/F}$ é invertível em $\mathcal{K}$. Assim,

$$0 = (q \otimes (\overline{g} - 1_{G/F}))(\overline{g} - 1_{G/F})^{-1} = q \otimes (\overline{g} - 1_{G/F})(\overline{g} - 1_{G/F})^{-1} = q \otimes 1_{\mathcal{K}}.$$

Portanto, para todo $k \in \mathcal{K}$,

$$0 = (q \otimes 1_{\mathcal{K}})k = q \otimes k.$$

O que mostra que

$$H_0(\mathscr{R}) \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K} \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K} = \mathbf{0}.$$

Assim,

$$H_i(\mathscr{R} \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K}) \cong \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se} \quad i \neq 1 \\ \mathcal{K}^b, & \text{se} \quad i = 1, \text{onde } b \geq 0, \end{cases} \tag{5.10}$$

e onde os isomorfismos são de $\mathcal{K}$-módulos à direita.

Agora, pelo Lema 1.39 (p. 30),

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i dim_{\mathcal{K}} H_i(\mathscr{R} \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \alpha_i.$$

Daí que, por (5.6) (p. 112), temos:

$$\chi(G) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \alpha_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i dim_{\mathcal{K}} H_i(\mathscr{R} \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K}) = -dim_{\mathcal{K}}\mathcal{K}^b = -b \leq 0.$$

No entanto, G é grupo limite não-abeliano e, portanto, pela Propriedade 4) da Proposição 3.15 (p. 75), $\chi(G) < 0$, o que implica que $b \neq 0$. Daí que, por (5.10) (p. 114), (5.7) (p. 113) e (5.9) (p. 113), temos os seguintes isomorfimos de $\mathcal{K}$-módulos:

$$\mathcal{K}^b \cong H_1(\mathscr{R} \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K}) \cong H_1(\mathscr{R}) \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K} \cong H_1(F, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K} \cong$$

$$\cong (F^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K}, \text{ com } b \neq 0.$$

O que garante que existe em $F^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ um $\mathbb{Q}(G/F)$-submódulo à direita cíclico livre. De fato, se, para todo $x \in F^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, existir $\lambda \in \mathbb{Q}(G/F)$ com $\lambda \neq 0$ tal que $x\lambda = 0$, então, como λ é invertível em $\mathcal{K}$, em $(F^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K}$ temos que

$$x \otimes 1_{\mathcal{K}} = x \otimes \lambda\lambda^{-1} = x\lambda \otimes \lambda^{-1} = 0.$$

Logo, para todo $k \in \mathcal{K}$,

$$x \otimes k = 0,$$

e, portanto, $(F^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K} = \mathbf{0}$. O que não é verdade, uma vez que

$$(F^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}(G/F)} \mathcal{K} \cong \mathcal{K}^b \text{ com } b \neq 0.$$

Assim, existe $x_0 \in F^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tal que, para todo $\lambda \in \mathbb{Q}(G/F)$ com $\lambda \neq 0$, $x_0\lambda \neq 0$. Portanto, $x_0\mathbb{Q}(G/F) \cong \mathbb{Q}(G/F)$ como $\mathbb{Q}(G/F)$-módulos à direita e $x_0\mathbb{Q}(G/F)$ é $\mathbb{Q}(G/F)$-submódulo à direita cíclico livre de $F^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. □

Consideremos novamente $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$, **com** $m \geq 2$**, um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo** $FP_2(\mathbb{Q})$ **de um produto direto de grupos limites não-abelianos. Sejam também** $N := F_1 \times \ldots \times F_m \subseteq S' \subseteq S$**, como na Proposição 5.1 (p. 105), onde** $F_i \lhd G_i$**,** F_i **é livre e** G_i/F_i **é policíclico-por-finito com** $1 \leq i \leq m$**,** $\chi : S \to \mathbb{R}$ **um caráter discreto,** $\chi_0 : S/N \to \mathbb{R}$ **o caráter**

também discreto induzido por χ e

$$\psi := q_{j_1,\ldots,j_n} : (G_1/F_1) \times \ldots \times (G_m/F_m) \to (G_{j_1}/F_{j_1}) \times \ldots \times (G_{j_n}/F_{j_n})$$

projeção nas coordenadas $j_1, \ldots, j_n$, onde $n \in \{1, \ldots, m-1\}$ e $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, m\}$ com $j_1 < \ldots < j_n$.

Façamos as duas seguintes observações.

Observação 5.7. Observe que

$$S/N = \dot{\bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}}} t^{\alpha} ker(\chi_0), \text{ onde } t \in \chi_0^{-1}(1). \tag{5.11}$$

De fato, assumindo, por abuso de notação, que $im(\chi_0) = \mathbb{Z}$, temos que $(S/N)/ker(\chi_0) \cong im(\chi_0) = \mathbb{Z}$ através do isomorfismo de grupos $qker(\chi_0) \mapsto \chi_0(q)$, para todo $q \in S/N$. Como $im(\chi_0) = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ (em notação multiplicativa), ocorre que $\chi_0^{-1}(1) \neq \emptyset$. Tomado-se, então, $t \in \chi_0^{-1}(1)$ e dado $qker(\chi_0) \in (S/N)/ker(\chi_0)$, se $q \in ker(\chi_0)$, então $q \in t^0 ker(\chi_0) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} t^{\alpha} ker(\chi_0)$. Por outro lado, se $q \notin ker(\chi_0)$, então, como $(S/N)/ker(\chi_0) \cong \mathbb{Z}$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $qker(\chi_0) = (tker(\chi_0))^m$, portanto $q = t^m x_0$, com $x_0 \in ker(\chi_0)$. Daí que, $q \in \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} t^{\alpha} ker(\chi_0)$. Assim, $S/N = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} t^{\alpha} ker(\chi_0)$.

Para ver que a tal união é, de fato, disjunta, seja $z \in t^{\alpha_1} ker(\chi_0) \cap t^{\alpha_2} ker(\chi_0)$. O que é equivalente a $z = t^{\alpha_1} x_0 = t^{\alpha_2} x_0'$, com $x_0, x_0' \in ker(\chi_0)$, que, por sua vez, é equivalente a $t^{\alpha_2 - \alpha_1} = x_0 (x_0')^{-1} \in ker(\chi_0)$. Mas,

$$t^{\alpha_2 - \alpha_1} = x_0 (x_0')^{-1} \in ker(\chi_0) \Leftrightarrow \chi_0(t^{\alpha_2 - \alpha_1}) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

O que mostra, ainda, que

$$t^{\alpha_1} ker(\chi_0) = t^{\alpha_2} ker(\chi_0) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Garantindo, portanto, que a união é, de fato, disjunta.

Utilizando (5.11) (p. 116), concluímos que

$$(S/N)_{\chi_0} = S_{\chi}/N = \dot{\bigcup_{\alpha \geq 0}} t^{\alpha} ker(\chi_0). \tag{5.12}$$

De fato, dado $q \in S/N$, existem $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $x_0 \in ker(\chi_0)$ tais que $\chi_0(q) = \chi_0(t^{\alpha} x_0) = \alpha$. Logo, $\chi_0(q) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 0$.

Por fim, utilizando (5.11) (p. 116) e (5.12) (p. 116), temos que, para algum

$t \in \chi_0^{-1}(1)$,

$$\psi(S/N) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} \psi(t)^\alpha \psi(ker(\chi_0)), \qquad \psi(S_\chi/N) = \bigcup_{\alpha \geq 0} \psi(t)^\alpha \psi(ker(\chi_0)). \tag{5.13}$$

Observe que as uniões aqui, a princípio, não precisam ser disjuntas.

Observação 5.8. Agora, veja que, como G_i/F_i é policíclico-por-finito, onde $1 \leq i \leq m$, então G_i/F_i é poli-{cíclico, finito} e, pela Proposição 1.60 (p. 39), concluímos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe $\widehat{Q}_i = A_i/F_i \lhd_{car} G_i/F_i$ tal que $[G_i/F_i : \widehat{Q}_i] < \infty$ e $\widehat{Q}_i$ é poli-{cíclico infinito} e, portanto, livre de torção. Daí que,

$$\widehat{Q}_i \text{ é policíclico livre de torção.} \tag{5.14}$$

Ademais, note que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, A_i é subgrupo de índice finito de G_i. Como G_i é grupo limite, segue que G_i é finitamente gerado e, portanto, de tipo FP_1 pela Proposição 1.96 (p. 52). Logo, A_i é também de tipo FP_1 pela Proposição 1.97 (p. 53) e, consequentemente, finitamente gerado pela Proposição 1.96 (p. 52) e, assim, também grupo limite conforme Observação 3.4 (p. 72).

Ainda mais, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, como G_i e A_i são grupos limites e $[G_i : A_i] < \infty$, pela Proposição 3.11 (p. 74), concluímos que

$$\chi(A_i) = \chi(G_i) \cdot [G_i : A_i]. \tag{5.15}$$

Como G_i é não-abeliano, segue que $\chi(G_i) < 0$ pela Propriedade 4) da Proposição 3.15 (p. 75). Usando (5.15) (p. 117), constatamos que $\chi(A_i) < 0$ e, finalmente, que A_i é não-abeliano pela Propriedade 4) da Proposição 3.15 (p. 75).

Note que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, estamos nas hipóteses da Proposição 5.6 (p. 112), uma vez que A_i é grupo limite não abeliano e $\widehat{Q}_i = A_i/F_i$ é policíclico-por-finito livre de torção por (5.14) (p. 117). Assim, $\mathbb{Q}\widehat{Q}_i$ é um $\mathbb{Q}\widehat{Q}_i$-submódulo de $F_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. E, portanto,

$$\mathbb{Q}[\widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}] \cong \mathbb{Q}\widehat{Q}_{j_1} \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\widehat{Q}_{j_n}$$

$$\text{é } \mathbb{Q}[\widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]\text{-submódulo de } (F_{j_1}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} (F_{j_n}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = W_{j_1,\ldots,j_n},$$

onde o último isomorfismo é dado pelo Lema 1.55 (p. 38).

Veja que, pelo Lema 5.5 (p. 110), $W_{j_1,\ldots,j_n}$ é $\mathbb{Q}\psi(S_\chi/N)$-módulo e, portanto, *a fortiori*,

$$W_{j_1,\ldots,j_n} \text{ é } \mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N) \cap \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]\text{-módulo.}$$

Assim, concluímos também que

$$\mathbb{Q}[\widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}] \text{ é } \mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N) \cap \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]\text{-submódulo de } W_{j_1,\ldots,j_n}.$$

As duas próximas proposições e o corolário seguinte às mesmas são resultados técnicos que serão usados nas demonstrações dos teoremas principais deste Capítulo, que estão na próxima seção.

Para tais resultados consideraremos as notações como nos parágrafos precedentes, onde $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$, **com** $m \geq 2$, **é um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo** $FP_2(\mathbb{Q})$ **de um produto direto de grupos limites não-abelianos,**

$$N := F_1 \times \ldots \times F_m \subseteq S' \subseteq, \text{ **como na Proposição 5.1 (p. 105)**},$$

$$\textbf{onde } F_i \lhd G_i, F_i \textbf{ é livre e } G_i/F_i \textbf{ é policíclico-por-finito com } 1 \leq i \leq m,$$

$$\psi := q_{j_1,\ldots,j_n} : (G_1/F_1) \times \ldots \times (G_m/F_m) \to (G_{j_1}/F_{j_1}) \times \ldots \times (G_{j_n}/F_{j_n})$$

é a projeção nas coordenadas $j_1, \ldots, j_n$, **onde** $n \in \{1, \ldots, m-1\}$ **e** $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, m\}$ **e** $j_1 < \ldots < j_n$**.**

Proposição 5.9. *Sejam*

$$W_{j_1,\ldots,j_n} = (F_{j_1}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \ldots \otimes_{\mathbb{Q}} (F_{j_n}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \quad e \quad \widehat{Q}_n \textit{ como na Observação 5.8 (p. 117).}$$

Sejam também $\chi : S \to \mathbb{R}$ *um caráter discreto e* $\chi_0 : S/N \to \mathbb{R}$ *o caráter também discreto induzido por* χ. *Se* S_χ *é de tipo* $FP_n(\mathbb{Q})$ *e* $[\psi(S/N) : \psi(ker(\chi_0))] = \infty$, *então* $W_{j_1,\ldots,j_n}$ *e* $\mathbb{Q}[\widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]$ *são* $\mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N) \cap \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]$*-módulos finitamente gerados.*

Demonstração. Neste caso, as uniões em (5.13) (p. 117) são disjuntas. De fato, se para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, tivermos que

$$[\psi(t)^{\alpha_1}\psi(ker(\chi_0))] \cap [\psi(t)^{\alpha_2}\psi(ker(\chi_0))] \neq \emptyset,$$

e considerando, então, $z \in [\psi(t)^{\alpha_1}\psi(ker(\chi_0))] \cap [\psi(t)^{\alpha_2}\psi(ker(\chi_0))]$, segue que

$$z = \psi(t)^{\alpha_1}\psi(x_0) = \psi(t)^{\alpha_2}\psi(x_{00}),$$

onde $x_0, x_{00} \in ker(\chi_0)$. Daí que, $\psi(t)^{\alpha_2-\alpha_1} = \psi(x_0 x_{00}^{-1}) \in \psi(ker(\chi_0))$. Então, existe $a \in \mathbb{Z}$ com $a > 0$ tal que

$$\psi(S/N) = \bigcup_{-a \leq \alpha \leq a} \psi(t)^\alpha \psi(ker(\chi_0)).$$

O que implica que

$$[\psi(S/N) : \psi(ker(\chi_0))] < \infty,$$

que contradiz a hipótese. Portanto,

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow [\psi(t)^{\alpha_1}\psi(ker(\chi_0))] \cap [\psi(t)^{\alpha_2}\psi(ker(\chi_0))] = \emptyset.$$

Podemos, então, definir o caráter $\mu : \psi(S/N) \to \mathbb{R}$ por

$$\mu(\psi(q)) := \chi_0(q), \text{ para todo } q \in S/N.$$

Veja que μ está bem definido pelo fato de termos a união disjunta

$$\psi(S/N) = \dot{\bigcup_{\alpha\in\mathbb{Z}}} \psi(t)^{\alpha}\psi(ker(\chi_0)). \tag{5.16}$$

De fato, dados $\psi(q_1), \psi(q_2) \in \psi(S/N)$ tais que $\psi(q_1) = \psi(q_2)$, temos que, por (5.16) (p. 119),

$$\psi(t)^{\alpha_1}\psi(x_0) = \psi(q_1) = \psi(q_2) = \psi(t)^{\alpha_2}\psi(x_{00}),$$

para alguns $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $x_0, x_{00} \in ker(\chi_0)$. E, como a união em (5.16) (p. 119) é disjunta, concluímos que $\alpha_1 = \alpha_2$. Por outro lado, por (5.11) (p. 116),

$$q_1 = t^{\beta_1}y_0 \quad \text{e} \quad q_2 = t^{\beta_2}y_{00},$$

para alguns $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ e $y_0, y_{00} \in ker(\chi_0)$. Assim,

$$\psi(t)^{\alpha_1}\psi(x_0) = \psi(q_1) = \psi(t^{\beta_1}y_0) = \psi(t)^{\beta_1}\psi(y_0)$$

$$\psi(t)^{\alpha_2}\psi(x_{00}) = \psi(q_2) = \psi(t^{\beta_2}y_{00}) = \psi(t)^{\beta_2}\psi(y_{00}).$$

Usando mais uma vez que a união em (5.16) (p. 119) é disjunta, segue que $\alpha_1 = \beta_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \beta_2$. Concluímos que

$$\mu(\psi(q_1)) = \chi_0(q_1) = \chi_0(t^{\beta_1}y_0) = \beta_1 = \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \chi_0(t^{\beta_2}y_{00}) = \chi_0(q_2) = \mu(\psi(q_2)).$$

Mostrando-se, assim, que μ está bem definida.

Observe ainda que

$$\mu(\psi(ker(\chi_0))) = \chi_0(ker(\chi_0)) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mu(\psi(t)) = \chi_0(t) = 1.$$

Além disso,

$$im(\mu) = im(\chi_0) = \mathbb{Z}.$$

Daí que, μ é caráter discreto e não-nulo.

Nosso objetivo agora é usar o Teorema 2.16 (p. 68). Usando-se a notação deste

Teorema, façamos

$$D := \mathbb{Q}, \quad M := W_{j_1,\ldots,j_n}, \quad \xi := \mu,$$

$$G := \psi(S/N), \quad H := \psi(S/N) \cap \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}.$$

Observe que as hipóteses do Teorema 2.16 (p. 68) são verificadas. De fato,

$$[\psi(S/N) : \psi(S/N) \cap \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}] < \infty,$$

uma vez que $[(G_{j_1}/F_{j_1}) \times \ldots \times (G_{j_n}/F_{j_n}) : \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}] < \infty$.

Agora $\mu|_H \neq 0$. De fato, $\mu(G) = \mathbb{Z}$, pois μ é caráter discreto. Como $[G : H] < \infty$, segue que $[\mu(G) : \mu(H)] < \infty$ e, portanto, $[\mathbb{Z} : \mu(H)] < \infty$, o que garante que $\mu(H) \neq \mathbf{0}$.

Usando o Teorema 2.16 (p. 68), concluímos, então, que

$$W_{j_1,\ldots,j_n} \text{ é } \mathbb{Q}[\psi(S/N)]_\mu\text{-módulo finitamente gerado}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$W_{j_1,\ldots,j_n} \text{ é } \mathbb{Q}H_{\mu|_H}\text{-módulo finitamente gerado.}$$

Note que $\psi(S_\chi/N) = [\psi(S/N)]_\mu$. De fato, dado $q \in S/N$,

$$\psi(q) \in \psi(S_\chi/N) \Leftrightarrow \chi_0(q) \geq 0 \Leftrightarrow \mu(\psi(q)) \geq 0 \Leftrightarrow \psi(q) \in [\psi(S/N)]_\mu.$$

Além disso,

$$\mathbb{Q}H_{\mu|_H} = \mathbb{Q}[\psi(S/N)]_\mu \ \cap \ \mathbb{Q}[\widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}] = \mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N)] \ \cap \ \mathbb{Q}[\widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}] =$$

$$= \mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N) \ \cap \ \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}].$$

Assim, reescrevendo a conclusão do Teorema 2.16 (p. 68), temos que

$$W_{j_1,\ldots,j_n} \text{ é } \mathbb{Q}\psi(S_\chi/N)\text{-módulo finitamente gerado}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$W_{j_1,\ldots,j_n} \text{ é } \mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N) \ \cap \ \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]\text{-módulo finitamente gerado.}$$

Usando, então, o Lema 5.5 (p. 110), obtemos que

$$W_{j_1,\ldots,j_n} \text{ é } \mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N) \ \cap \ \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]\text{-módulo finitamente gerado.}$$

Como $\mathbb{Q}H_{\mu|_H} = \mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N) \cap \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]$, H é grupo policíclico-por-finito e $\mu|_H$ é caráter discreto não-nulo, pelo Lema 5.2 (p. 107), concluímos que $\mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N) \ \cap$

$\widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]$ é anel noetheriano, e, portanto, $W_{j_1,\ldots,j_n}$ é $\mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N) \cap \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]$-módulo noetheriano à direita e qualquer um de seus $\mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N) \cap \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]$-submódulos é finitamente gerado. Em particular,

$$\mathbb{Q}[\widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}] \text{ é finitamente gerado como } \mathbb{Q}[\psi(S_\chi/N) \cap \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]\text{-módulo.}$$

□

Proposição 5.10. *Seja $\widehat{Q}_n$ como na Observação 5.8 (p. 117). Sejam também $\chi : S \to \mathbb{R}$ um caráter discreto e $\chi_0 : S/N \to \mathbb{R}$ o caráter também discreto induzido por χ. Se S_χ é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$, então*

$$[\psi(S/N) : \psi(ker(\chi_0))] < \infty.$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $[\psi(S/N) : \psi(ker(\chi_0))] = \infty$. Da Proposição 5.9 (p. 118), concluímos que $\mathbb{Q}[\widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}H_{\mu|_H}$-módulo, onde

$$H = \psi(S/N) \cap \widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}$$

e $\mu : \psi(S/N) \to \mathbb{R}$ está definido por $\mu(\psi(q)) = \chi_0(q)$, para todo $q \in S/N$ como na Proposição 5.9 (p. 118).

Observe que H é um grupo policíclico-por-finito e $\mu_0 := \mu|_H$ é caráter discreto não-nulo de H, portanto, do Lema 5.2 (p. 107), segue que $\mathbb{Q}H_{\mu_0}$ é anel noetheriano. Assim, $\mathbb{Q}[\widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]$ é $\mathbb{Q}H_{\mu_0}$-módulo noetheriano à direita. E, visto que $\mathbb{Q}H$ é $\mathbb{Q}H_{\mu_0}$-submódulo de $\mathbb{Q}[\widehat{Q}_{j_1} \times \ldots \times \widehat{Q}_{j_n}]$, temos que $\mathbb{Q}H$ é $\mathbb{Q}H_{\mu_0}$-módulo finitamente gerado.

Considerando-se a valoração

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathbb{Q}H & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ & 0 \neq \sum \lambda_h h & \longmapsto & min\{\mu_0(h) : \lambda_h \neq 0\} \\ & 0 & \longmapsto & \infty \end{array} ,$$

temos que, dados $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Q}H$, algumas de suas propriedades são:

$$\theta(\omega_1 + \omega_2) \geq min\{\theta(\omega_1), \theta(\omega_2)\} \quad \text{e} \quad \theta(\omega_1 \cdot \omega_2) \geq \theta(\omega_1) + \theta(\omega_2).$$

Observe ainda que $\theta(\mathbb{Q}H_{\mu_0}) \subseteq [0, +\infty]$. Além disso,

$$im(\mu_0) \subseteq im(\theta),$$

pois $\theta(1 \cdot h) = \mu_0(h)$, daí que $im(\mu_0) = \mu_0(H) = \theta(1 \cdot H) \subseteq \theta(\mathbb{Q}H) = im(\theta)$.

Como $\mathbb{Q}H$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}H_{\mu_0}$-módulo à direita, podemos escrever

$$\mathbb{Q}H = \omega_1(\mathbb{Q}H_{\mu_0}) + \ldots + \omega_k(\mathbb{Q}H_{\mu_0}),$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ e onde $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathbb{Q}H$. Assim, dado $\omega \in \mathbb{Q}H$, segue que $\omega = \omega_1\beta_1 + \ldots + \omega_k\beta_k$, para alguns $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{Q}H_{\mu_0}$. Logo,

$$\theta(\omega) = \theta(\omega_1\beta_1 + \ldots + \omega_k\beta_k) \geq min\{\theta(\omega_1\beta_1), \ldots, \theta(\omega_k\beta_k)\}.$$

Além disso, para $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\theta(\omega_i\beta_i) \geq \theta(\omega_i) + \theta(\beta_i) \geq \theta(\omega_i),$$

pois $\beta_i \in \mathbb{Q}H_{\mu_0}$ e $\theta(\mathbb{Q}H_{\mu_0}) \subseteq [0, +\infty]$. Daí que, $\theta(\omega) \geq min\{\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_k)\} = \theta(\omega_{i_0})$, para algum $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$. Portanto, como $\omega \in \mathbb{Q}H$ foi tomado arbitrário, segue que

$$im(\theta) \subset [\theta(\omega_{i_0}), +\infty].$$

Por outro lado, existe $\gamma \in \mathbb{Z}$ tal que $\gamma < 0$ e $\gamma < \theta(\omega_{i_0})$ e $im(\mu_0) = \mathbb{Z}$ (por abuso de notação), portanto $\gamma \in im(\mu_0) \subseteq im(\theta)$, o que é uma contradição.

Seguiu-se a contradição do fato de assumirmos que $[\psi(S/N) : \psi(ker(\chi_0))] = \infty$. Assim, obtemos o resultado esperado, isto é, $[\psi(S/N) : \psi(ker(\chi_0))] < \infty$. □

Corolário 5.11. *Sejam $\chi : S \to \mathbb{R}$ um caráter discreto e $\chi_0 : S/N \to \mathbb{R}$ o caráter também discreto induzido por χ. Se S_χ é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$, então*

$$\psi(S_\chi/N) = \psi(S/N).$$

Demonstração. Aqui utilizaremos notação da Observação 5.7 (p. 116).

Conforme Proposição 5.10 (p. 121), $[\psi(S/N) : \psi(ker(\chi_0))] < \infty$. Logo, existe $a \in \mathbb{Z}$ com $a > 0$ tal que $\psi(t)^{a+1} \in \psi(ker(\chi_0))$. Observe que, para cada $z \in \mathbb{Z}$, existem $z_0 \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, \ldots, a\}$ tal que $z = (a+1)z_0 + r$, portanto

$$\psi(t)^z\psi(ker(\chi_0)) = \psi(t)^{(a+1)z_0+r}\psi(ker(\chi_0)) = \psi(t)^r\psi(ker(\chi_0)).$$

Daí que, podemos escrever

$$\psi(S/N) = \bigcup_{0 \leq \beta \leq a} \psi(t)^\beta\psi(ker(\chi_0)).$$

Assim,

$$\psi(S/N) = \bigcup_{0 \leq \beta \leq a} \psi(t)^\beta\psi(ker(\chi_0)) \subseteq \bigcup_{\beta \geq 0} \psi(t)^\beta\psi(ker(\chi_0)) = \psi(S_\chi/N),$$

por (5.13) (p. 117). □

5.2 Resultados Principais do Capítulo: Teoremas VSU Monoidais

Consideremos, como feito antes, $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$, **com** $m \geq 2$**, um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo** $FP_2(\mathbb{Q})$ **de um produto direto de grupos limites não-abelianos,**

$$N := F_1 \times \ldots \times F_m \subseteq S' \subseteq S, \text{ **como na Proposição 5.1 (p. 105)**},$$

onde $F_i \lhd G_i$**,** F_i **é livre e** G_i/F_i **é policíclico-por-finito com** $1 \leq i \leq m$,

$$\pi : G_1 \times \ldots \times G_m \twoheadrightarrow \frac{G_1 \times \ldots \times G_m}{N}$$

projeção canônica e

$$\psi := q_{j_1,\ldots,j_n} : (G_1/F_1) \times \ldots \times (G_m/F_m) \twoheadrightarrow (G_{j_1}/F_{j_1}) \times \ldots \times (G_{j_n}/F_{j_n})$$

e

$$\theta := p_{j_1,\ldots,j_n} : G_1 \times \ldots \times G_m \twoheadrightarrow G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n}$$

projeções nas coordenadas $j_1, \ldots, j_n$**, onde** $n \in \{1, \ldots, m-1\}$**,** $j_1 < \ldots < j_n$ **e** $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, m\}$.

Mediante o que foi feito até aqui, obtemos o seguinte teorema, que é um dos resultados centrais desta Tese de Doutorado e o qual denominamos de Caso Discreto da Recíproca VSU (Virtualmente Sobrejetiva em Uplas) Monoidal para o caso de um caráter discreto. A expressão "Virtualmente Sobrejetivo em Uplas" faz menção ao Critério VSP e à definição de grupo VSP (Virtualmente Sobrejetivo em Pares) descritos em [14].

Teorema 5.12 (Recíproca VSU Monoidal - Caso Discreto)**.** *Sejam* $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$*, com* $m \geq 2$*, um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo* $FP_2(\mathbb{Q})$ *de um produto direto de grupos limites não-abelianos e* $\chi : S \to \mathbb{R}$ *um* **caráter discreto**. *Se* S_χ *é de tipo* $FP_n(\mathbb{Q})$ *para algum* $n \in \{1, \ldots, m-1\}$*, então*

$$p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi) = p_{j_1,\ldots,j_n}(S)$$

e, portanto,

$$[G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n} : p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi)] < \infty$$

(essa última afirmação segue do Teorema 3.33(p. 82)).

Demonstração. Pelo Corolário 5.11 (p. 122), segue que

$$q_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi/N) = q_{j_1,\ldots,j_n}(S/N),$$

o que implica que

$$p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi) = p_{j_1,\ldots,j_n}(S).$$

Por outro lado, visto que S_χ é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$, temos que S é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$ pelo Lema 2.10 (p. 64). Daí que, pelo Teorema 3.33 (p. 82), concluímos que

$$[G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n} : p_{j_1,\ldots,j_n}(S)] < \infty,$$

e, portanto,

$$[G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n} : p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi)] < \infty.$$

□

Caso o caráter $\chi : S \to \mathbb{R}$ **não** seja discreto, ainda conseguimos uma afirmação idêntica ao Caso Discreto da Recíproca VSU Monoidal 5.12 (p. 123), mas apenas para $n = 1$. Para o caso $n \geq 2$, precisamos incluir uma hipótese a mais, como veremos nos Teoremas 5.14 (p. 128) e 5.15 (p. 135).

Consideremos ainda a notação utilizada nos parágrafos precedentes. Definamos, para $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\widehat{p_i} : S \to G_i, \ \textbf{por} \ \widehat{p_i} := p_i|_S,$$

ou seja, como restrição sobre S da projeção p_i na coordenada i. E, definamos

$$\widehat{q_i} : S/N \to G_i/F_i, \ \textbf{por} \ \widehat{q_i} := q_i|_{S/N},$$

ou seja, como restrição sobre S/N da projeção q_i na coordenada i. Veja que $\widehat{q_i}$ é sobrejetivo, uma vez que S é produto subdireto, isto é, $p_i(S) = G_i$.

Podemos, então, enunciar a Recíproca VS (Virtualmente Sobrejetiva) Monoidal.

Teorema 5.13 (Recíproca VS Monoidal)**.** *Sejam $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$, com $m \geq 2$, um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$ de um produto direto de grupos limites não-abelianos, $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\chi : S \to \mathbb{R}$ um caráter. Se S_χ é de tipo $FP_1(\mathbb{Q})$, então*

$$p_i(S_\chi) = p_i(S).$$

(Consequentemente, de maneira trivial, temos que $[G_i : p_i(S_\chi)] < \infty$, uma vez que S é produto subdireto e, portanto, $p_i(S_\chi) = p_i(S) = G_i$).

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que $\widehat{q_i}(S/N) = \widehat{q_i}(S_\chi/N)$ e, consequentemente, teremos que $p_i(S_\chi) = p_i(S)$.

Começando a demonstração, de fato, lembremos que $\chi_0 : S/N \to \mathbb{R}$ é o caráter induzido por χ que é dado por $\chi_0(sN) := \chi(s)$, para todo $sN \in S/N$.

Nosso primeiro objetivo é mostrar que $\chi_0(ker(\widehat{q_i})) \neq \mathbf{0}$. Suponhamos, então, por absurdo, que

$$\chi_0(ker(\widehat{q_i})) = \mathbf{0}.$$

Podemos, então, definir $\chi_i : G_i/F_i \to \mathbb{R}$ por

$$\chi_i(g_iF_i) := \chi_0(sN), \text{ para algum } sN \in (\widehat{q_i})^{-1}(g_iF_i).$$

Veja que χ_i está bem definido, pois, caso $s_0N, x_0N \in (\widehat{q_i})^{-1}(g_iF_i)$, então $\widehat{q_i}(s_0N) = \widehat{q_i}(x_0N)$ e, portanto, $\widehat{q_i}(s_0x_0^{-1}N) = 1$. Daí que, $s_0x_0^{-1}N \in ker(\widehat{q_i}) \subseteq ker(\chi_0)$. Logo, $\chi_0(s_0x_0^{-1}N) = 0$ e, assim, $\chi_0(s_0N) = \chi_0(x_0N)$, ou seja, a definição independe da escolha de $sN \in (\widehat{q_i})^{-1}(g_iF_i)$.

Além disso, dados $g_iF_i, x_iF_i \in G_i/F_i$, caso $g_iF_i = x_iF_i$, então

$$\chi_i(g_iF_i) := \chi_0(s_1N), \text{ para algum } s_1N \in (\widehat{q_i})^{-1}(g_iF_i),$$

$$\chi_i(x_iF_i) := \chi_0(s_2N), \text{ para algum } s_2N \in (\widehat{q_i})^{-1}(x_iF_i).$$

Veja que $s_1s_2^{-1} \in (\widehat{q_i})^{-1}(g_ix_i^{-1}F_i) = (\widehat{q_i})^{-1}(F_i) = ker(\widehat{q_i}) \subseteq ker(\chi_0)$, onde essa última continência segue da hipótese por absurdo. Daí que,

$$0 = \chi_0(s_1s_2^{-1}) = \chi_0(s_1) - \chi_0(s_2) = \chi_i(g_iF_i) - \chi_i(x_iF_i),$$

donde obtemos que $\chi_i(g_iF_i) = \chi_i(x_iF_i)$.

Temos, então, o seguinte diagrama comutativo de homomorfismos de grupos:

$$\begin{tikzcd} S/N \arrow[r, "\chi_0"] \arrow[d, "\widehat{q_i}"'] & \mathbb{R} \\ G_i/F_i \arrow[ur, dotted, "\chi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Agora, χ_i induz um outro caráter $\widehat{\chi_i} : G_i \to \mathbb{R}$ definido por

$$\widehat{\chi_i}(g_i) := \chi_i(g_iF_i),$$

cuja boa definição é clara.

Por outro lado, sendo $\pi_i : G_i \twoheadrightarrow G_i/F_i$ projeção canônica e $\widehat{\pi} := \pi|_S$, o seguinte diagrama de homomorfismos de grupos é comutativo:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, two heads, "\widehat{\pi}"] \arrow[d, "\widehat{p}_i"'] & S/N \arrow[d, "\widehat{q}_i"] \\ G_i \arrow[r, two heads, "\pi_i"'] & G_i/F_i \end{tikzcd} \tag{5.17}$$

De fato, dado $s = (s_1, \ldots, s_m) \in S$,

$$\widehat{q}_i\widehat{\pi}(s) = \widehat{q}_i(sN) = \widehat{q}_i(s_1F_1, \ldots, s_mF_m) = s_iF_i = \pi_i(s_i) = \pi_i\widehat{p}_i(s).$$

Concluímos, assim, que, dado $s \in S$,

$$\chi(s) = \widehat{\chi}_i\widehat{p}_i(s). \tag{5.18}$$

Isso, pois

$$\chi(s) = \chi_0\widehat{\pi}(s) = \chi_i\widehat{q}_i\widehat{\pi}(s) = \chi_i\pi_i\widehat{p}_i(s) = \widehat{\chi}_i\widehat{p}_i(s).$$

Temos, então, o seguinte diagrama que é comutativo em cada "triângulo" e "quadrilátero":

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, two heads, "\widehat{\pi}"] \arrow[d, "\widehat{p}_i"] \arrow[ddr, bend right=60, "\chi"'] & & S/N \arrow[d, "\widehat{q}_i"'] \arrow[ddl, bend left=60, "\chi_0"] \\ G_i \arrow[rr, two heads, "\pi_i"] \arrow[dr, "\widehat{\chi}_i"'] & & G_i/F_i \arrow[dl, "\chi_i"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Observemos que

$$ker(\widehat{p}_i) \subseteq S_\chi.$$

De fato, dado $s \in ker(\widehat{p}_i)$, então $\widehat{p}_i(s) = 1$ e, portanto, $\pi_i\widehat{p}_i(s) = 1$. Pela comutatividade do diagrama (5.17) (p. 126), segue que $\widehat{q}_i\widehat{\pi}(s) = 1$, isto é, $\widehat{q}_i(sN) = 1$. Logo, $sN \in ker(\widehat{q}_i)$. Mas, $ker(\widehat{q}_i) \subseteq ker(\chi_0)$. Daí que, $\chi_0(sN) = 0$ e, portanto, $\chi(s) = 0$, o que garante que $s \in S_\chi$.

Temos, então, o seguinte isomorfismo de monoides:

$$\begin{array}{rrcl} \Phi : & S_\chi/ker(\widehat{p}_i) & \longrightarrow & (G_i)_{\widehat{\chi}_i} \\ & s(ker(\widehat{p}_i)) & \longmapsto & \widehat{p}_i(s) \end{array}$$

Veja que, dado $s(ker(\widehat{p}_i)) \in S_\chi/ker(\widehat{p}_i)$, $\widehat{p}_i(s) \in (G_i)_{\widehat{\chi}_i}$, pois, conforme (5.18) (p. 126), $\widehat{\chi}_i\widehat{p}_i(s) = \chi(s) \geq 0$. Além disso, a sobrejetividade de Φ vem do uso de (5.18) (p. 126) novamente e do fato de S ser produto subdireto, isto é, $S = p_i(G_i)$. Já a injetividade de

Φ é clara.

Agora, por hipótese, $[\chi] \in \Sigma^1(S, \mathbb{Q})$. Daí que, obtemos a seguinte sequência parcial exata de $\mathbb{Q}S_\chi$-módulos à direita com $\mathbb{Q}$ sendo $\mathbb{Q}S_\chi$-módulo trivial:

$$(\mathbb{Q}S_\chi)^\alpha \longrightarrow \mathbb{Q}S_\chi \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

onde $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Como o funtor $- \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_i)} \mathbb{Q}$ é exato à direita, temos que a seguinte sequência parcial é também exata:

$$(\mathbb{Q}S_\chi)^\alpha \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_i)} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}S_\chi \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_i)} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_i)} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

Mas, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_i)} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ pelo isomorfismo de $\mathbb{Q}S_\chi$-módulos $q_1 \otimes q_2 \mapsto q_1 q_2$, onde $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. E, utilizando o isomorfismo de monoides Φ, temos que

$$\mathbb{Q}S_\chi \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_i)} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[S_\chi / ker(\widehat{p}_i)] \cong \mathbb{Q}[G_i]_{\widehat{\chi}_i}.$$

Chegamos, então, à seguinte sequência parcial exata de $\mathbb{Q}[G_i]_{\widehat{\chi}_i}$-módulos à direita:

$$(\mathbb{Q}[G_i]_{\widehat{\chi}_i})^\alpha \longrightarrow \mathbb{Q}[G_i]_{\widehat{\chi}_i} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}\,.$$

O que mostra que $[\widehat{\chi}_i] \in \Sigma^1(G_i, \mathbb{Q})$, ou seja,

$$\Sigma^1(G_i, \mathbb{Q}) \neq \emptyset. \tag{5.19}$$

Entretanto, G_i é grupo limite para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, logo, pela Proposição 3.17 (p. 76), temos que $\Sigma^1(G_i, \mathbb{Q}) = \emptyset$, o que contradiz a afirmação feita em (5.19) (p. 127).

A única suposição que fizemos no início da demonstração foi que $\chi_0(ker(\widehat{q}_i)) = \mathbf{0}$. Logo, essa afirmação não procede e temos que

$$\chi_0(ker(\widehat{q}_i)) \neq \mathbf{0}.$$

Daí que, existe $x \in ker(\widehat{q}_i)$ tal que $\chi_0(x) \neq 0$. Podemos assumir, então, que $\chi_0(x) > 0$, do contrário tomamos x^{-1}. Agora, dado $q \in S/N$, veja que, para todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k > 0$,

$$\widehat{q}_i(q) = \widehat{q}_i(x^k q).$$

Tomemos, então, $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $k_0 > 0$ e $k_0 > \frac{|\chi_0(q)|}{\chi_0(x)}$. Segue, portanto, que

$$\chi_0(x^{k_0} q) = k_0 \chi_0(x) + \chi_0(q) > 0.$$

Logo, $x^{k_0} q \in S_\chi / N$ e, daí que, $\widehat{q}_i(q) = \widehat{q}_i(x^{k_0} q) \in \widehat{q}_i(S_\chi / N)$. Como $q \in S/N$ foi tomado

arbitrário, constatamos que
$$\widehat{q}_i(S/N) = \widehat{q}_i(S_\chi/N).$$

□

Consideremos mais uma vez a notação utilizada nos parágrafos precedentes.

Definamos, para $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{m}\}$ com $\mathbf{i} < \mathbf{j} < \mathbf{k}$,

$$\widehat{p}_{i,j} : S \to G_i \times G_j, \text{ **por** } \widehat{p}_{i,j} := p_{i,j}|_S,$$

ou seja, como restrição sobre S da projeção $p_{i,j}$ nas coordenadas i e j. E, definamos
$$\widehat{q}_{i,j} : S/N \to \frac{G_i}{F_i} \times \frac{G_j}{F_j}, \text{ **por** } \widehat{q}_{i,j} := q_{i,j}|_{S/N},$$

ou seja, como restrição sobre S/N da projeção $q_{i,j}$ nas coordenadas i e j. Denotaremos ainda $p_{i,j,k}$ como a projeção de $G_1 \times \ldots \times G_m$ sobre $G_i \times G_j \times G_k$.

Podemos enunciar, então, a Pseudorrecíproca VSP (Virtualmente Sobrejetiva em Pares) Monoidal, a qual é denominada assim por se tratar da Recíproca VSP Monoidal acrescida da hipótese de que S (abaixo) é de tipo $FP_3(\mathbb{Q})$.

Teorema 5.14 (Pseudorrecíproca VSP Monoidal)**.** *Sejam $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$, com $m \geq 3$, um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo $FP_3(\mathbb{Q})$ de um produto direto de grupos limites não-abelianos, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ com $i < j$ e $\chi : S \to \mathbb{R}$ um caráter. Se S_χ é de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$, então*
$$p_{i,j}(S_\chi) = p_{i,j}(S)$$
e, portanto,
$$[G_i \times G_j : p_{i,j}(S_\chi)] < \infty$$
(essa última afirmação segue do Teorema 3.33(p. 82)).

Demonstração. Nosso objetivo, novamente, é mostrar que $\widehat{q}_{i,j}(S/N) = \widehat{q}_{i,j}(S_\chi/N)$ e, consequentemente, teremos que $p_{i,j}(S_\chi) = p_{i,j}(S)$. Daí que, $[G_i \times G_j : p_{i,j}(S_\chi)] < \infty$ pelo Teorema 3.33(p. 82). A estratégia para fazer tal demonstração será parecida com a usada no Teorema 5.13 (p. 124).

Lembremos, mais uma vez, que $\chi_0 : S/N \to \mathbb{R}$ é o caráter induzido por χ que é dado por $\chi_0(sN) := \chi(s)$, para todo $sN \in S/N$.

Vamos mostrar primeiramente que $\chi_0(ker(\widehat{q}_{i,j})) \neq \mathbf{0}$. Suponhamos, então, por absurdo, que
$$\chi_0(ker(\widehat{q}_{i,j})) = \mathbf{0}.$$

Podemos, então, definir $\chi_{i,j} : \widehat{q}_{i,j}(S/N) \to \mathbb{R}$ por

$$\chi_{i,j}(\widehat{q}_{i,j}(sN)) := \chi_0(sN), \text{ onde } sN \in S/N.$$

Veja que $\chi_{i,j}$ está bem definido, pois, dados $\widehat{q}_{i,j}(sN), \widehat{q}_{i,j}(xN) \in \widehat{q}_{i,j}(S/N)$, caso $\widehat{q}_{i,j}(sN) = \widehat{q}_{i,j}(xN)$, então $\widehat{q}_{i,j}(sN)\widehat{q}_{i,j}(xN)^{-1} = 1$ e, portanto, $sx^{-1}N \in ker(\widehat{q}_{i,j}) \subseteq ker(\chi_0)$ pela hipótese por absurdo. Logo,

$$0 = \chi_0(sx^{-1}N) = \chi_0(sN) - \chi_0(xN) = \chi_{i,j}(\widehat{q}_{i,j}(sN)) - \chi_{i,j}(\widehat{q}_{i,j}(xN)).$$

Assim, $\chi_{i,j}(\widehat{q}_{i,j}(sN)) = \chi_{i,j}(\widehat{q}_{i,j}(xN))$.

Temos, então, o seguinte diagrama comutativo de homomorfismos de grupos:

$$\begin{tikzcd} S/N \arrow[r, "\chi_0"] \arrow[d, "\widehat{q}_{i,j}"'] & \mathbb{R} \\ \widehat{q}_{i,j}(S/N) \arrow[ur, dotted, "\chi_{i,j}"'] & \end{tikzcd}$$

Agora, $\chi_{i,j}$ induz um outro caráter $\widehat{\chi}_{i,j} : p_{i,j}(S) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\widehat{\chi}_{i,j}(\widehat{p}_{i,j}(s)) := \chi_{i,j}(\widehat{q}_{i,j}(sN)),$$

cuja boa definição segue do fato de que

$$ker(p_{i,j}) = \prod_{k \neq i,j} G_k \subseteq G_1 \times \ldots \times G_{i-1} \times F_i \times G_{i+1} \times \ldots \times G_{j-1} \times F_j \times G_{j+1} \times \ldots \times G_n,$$

e daí que

$$\frac{G_1 \times \ldots \times G_{i-1} \times F_i \times G_{i+1} \times \ldots \times G_{j-1} \times F_j \times G_{j+1} \times \ldots \times G_n}{N} =$$

$$= \prod_{k \neq i,j} G_k/F_k = ker(q_{i,j}),$$

o que garante que, para todo $s \in ker(\widehat{p}_{i,j})$, $sN \in ker(\widehat{q}_{i,j})$.

Assim, dados $\widehat{p}_{i,j}(s), \widehat{p}_{i,j}(x) \in p_{i,j}(S)$ tais que $\widehat{p}_{i,j}(s) = \widehat{p}_{i,j}(x)$, temos que $\widehat{p}_{i,j}(s)\widehat{p}_{i,j}(x)^{-1} = 1$ e, portanto, $sx^{-1} \in ker(\widehat{p}_{i,j})$. Daí que, $sx^{-1}N \in ker(\widehat{q}_{i,j})$, isto é, $\widehat{q}_{i,j}(sN) = \widehat{q}_{i,j}(xN)$ e, assim, $\widehat{\chi}_{i,j}(\widehat{p}_{i,j}(s)) = \widehat{\chi}_{i,j}(\widehat{p}_{i,j}(x))$.

Por outro lado, sendo $\widehat{\pi} := \pi|_S$ e $p : p_{i,j}(S) \to \widehat{q}_{i,j}(S/N)$ dado por $p(\widehat{p}_{i,j}(s)) = \widehat{q}_{i,j}(sN)$ (que está bem definido pelo fato de que, para todo $s \in ker(\widehat{p}_{i,j})$, $sN \in ker(\widehat{q}_{i,j})$), o seguinte diagrama de homomorfismos de grupos é claramente comutativo:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, two heads, "\widehat{\pi}"] \arrow[d, "\widehat{p}_{i,j}"'] & S/N \arrow[d, "\widehat{q}_{i,j}"] \\ p_{i,j}(S) \arrow[r, two heads, "p"'] & \widehat{q}_{i,j}(S/N) \end{tikzcd} \tag{5.20}$$

Concluímos, também, que, dado $s \in S$,

$$\chi(s) = \widehat{\chi}_{i,j}\widehat{p}_{i,j}(s). \tag{5.21}$$

Isso, pois

$$\chi(s) = \chi_0(sN) = \chi_{i,j}\widehat{q}_{i,j}(sN) = \widehat{\chi}_{i,j}\widehat{p}_{i,j}(s).$$

Temos, então, o seguinte diagrama que é comutativo em cada "triângulo" e "quadrilátero":

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, two heads, "\widehat{\pi}"] \arrow[d, "\widehat{p}_{i,j}"] \arrow[ddr, bend right=60, "\chi"'] & & S/N \arrow[d, "\widehat{q}_{i,j}"'] \arrow[ddl, bend left=60, "\chi_0"] \\ p_{i,j}(S) \arrow[rr, two heads, "p"] \arrow[dr, "\widehat{\chi}_{i,j}"'] & & \widehat{q}_{i,j}(S/N) \arrow[dl, "\chi_{i,j}"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Observemos que

$$ker(\widehat{p}_{i,j}) \subseteq S_\chi.$$

De fato, dado $s \in ker(\widehat{p}_{i,j})$, então $\widehat{p}_{i,j}(s) = 1$ e, portanto, $p\widehat{p}_{i,j}(s) = 1$. Pela comutatividade do diagrama (5.20) (p. 130), segue que $\widehat{q}_{i,j}\widehat{\pi}(s) = 1$, isto é, $\widehat{q}_{i,j}(sN) = 1$. Logo, $sN \in ker(\widehat{q}_{i,j})$. Mas, $ker(\widehat{q}_{i,j}) \subseteq ker(\chi_0)$. Daí que, $\chi_0(sN) = 0$ e, portanto, $\chi(s) = 0$, o que garante que $s \in S_\chi$.

Temos, então, o seguinte isomorfismo de monoides:

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & S_\chi/ker(\widehat{p}_{i,j}) & \longrightarrow & (p_{i,j}(S))_{\widehat{\chi}_{i,j}} \\ & s(ker(\widehat{p}_{i,j})) & \longmapsto & \widehat{p}_{i,j}(s) \end{array}$$

A igualdade em (5.21) (p. 130) mostra que, dado $s(ker(\widehat{p}_{i,j})) \in S_\chi/ker(\widehat{p}_{i,j})$, $\widehat{p}_{i,j}(s) \in (p_{i,j}(S))_{\widehat{\chi}_{i,j}}$, pois $\widehat{\chi}_{i,j}\widehat{p}_{i,j}(s) = \chi(s) \geq 0$ e mostra também a sobrejetividade de Φ. Já a injetividade de Φ é clara.

Agora, por hipótese, $[\chi] \in \Sigma^2(S, \mathbb{Q})$. Daí que, obtemos a seguinte sequência parcial exata de $\mathbb{Q}S_\chi$-módulos à direita onde $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{Q}S_\chi$-módulo trivial:

$$\mathscr{P} : (\mathbb{Q}S_\chi)^\beta \longrightarrow (\mathbb{Q}S_\chi)^\alpha \longrightarrow \mathbb{Q}S_\chi \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Aplicando o funtor exato à direita $- \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_{i,j})} \mathbb{Q}$, temos a seguinte sequência parcial, que é exata apenas em $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_{i,j})} \mathbb{Q}$ e em $\mathbb{Q}S_\chi \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_{i,j})} \mathbb{Q}$:

$$\mathscr{R} = \mathscr{P} \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_{i,j})} \mathbb{Q} : (\mathbb{Q}S_\chi)^\beta \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_{i,j})} \mathbb{Q} \longrightarrow (\mathbb{Q}S_\chi)^\alpha \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_{i,j})} \mathbb{Q} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathbb{Q}S_\chi \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_{i,j})} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_{i,j})} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}\ .$$

Mas, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_{i,j})} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ pelo isomorfismo de $\mathbb{Q}S_\chi$-módulos $q_1 \otimes q_2 \mapsto q_1 q_2$, onde $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. E, utilizando o isomorfismo de monoides Φ, temos que

$$\mathbb{Q}S_\chi \otimes_{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_{i,j})} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[S_\chi / ker(\widehat{p}_{i,j})] \cong \mathbb{Q}[p_{i,j}(S)]_{\widehat{\chi}_{i,j}}.$$

Chegamos, então, à seguinte sequência parcial de $\mathbb{Q}[p_{i,j}(S)]_{\widehat{\chi}_{i,j}}$-módulos à direita, que é exata apenas em $\mathbb{Q}$ e em $\mathbb{Q}[p_{i,j}(S)]_{\widehat{\chi}_{i,j}}$:

$$\mathscr{R} : (\mathbb{Q}[p_{i,j}(S)]_{\widehat{\chi}_{i,j}})^\beta \longrightarrow (\mathbb{Q}[p_{i,j}(S)]_{\widehat{\chi}_{i,j}})^\alpha \longrightarrow \mathbb{Q}[p_{i,j}(S)]_{\widehat{\chi}_{i,j}} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{0}\ .$$

Usando o Lema 1.53 (p. 35) e a Proposição 1.49 *c)* (p. 35), observe que

$$(ker(\widehat{p}_{i,j}))^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H_1(ker(\widehat{p}_{i,j}), \mathbb{Q}) = Tor_1^{\mathbb{Z}ker(\widehat{p}_{i,j})}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong Tor_1^{\mathbb{Q}ker(\widehat{p}_{i,j})}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) =$$

$$= H_1(\mathscr{P}_{\mathbb{Q}} \otimes_{ker(\widehat{p}_{i,j})} \mathbb{Q}) = H_1(\mathscr{R}_{\mathbb{Q}}).$$

Assim, a fim de que $p_{i,j}(S)_{\widehat{\chi}_{i,j}}$ seja de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$, tomando-se o complexo $\mathscr{R}$ acima, pelo Lema 1.38 (p. 30), é suficiente mostrar que $H_1(\mathscr{R}_{\mathbb{Q}})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}[p_{i,j}(S)]_{\widehat{\chi}_{i,j}}$-módulo à direita. Mas, pelos isomorfismos acima, isso é equivalente a mostrar que $(ker(\widehat{p}_{i,j}))^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ é finitamente gerado como $\mathbb{Q}[p_{i,j}(S)]_{\widehat{\chi}_{i,j}}$-módulo à direita, que, por sua vez, é suficiente mostrar que $(ker(\widehat{p}_{i,j}))^{ab}$ é finitamente gerado como grupo abeliano.

Vamos mostrar, então, que $(ker(\widehat{p}_{i,j}))^{ab}$ é finitamente gerado como grupo abeliano.

Por hipótese, S é de tipo $FP_3(\mathbb{Q})$, logo, pelo Teorema 3.33 (p. 82), segue que

$$[G_i \times G_j \times G_k : p_{i,j,k}(S)] < \infty,$$

onde $k \in \{1, \ldots, m\}$ e $k > j > i$. Daí que, existem subgrupos A_i, A_j, A_k, normais em G_i, G_j, G_k respectivamente, tais que

$$A_i \times A_j \times A_k \subseteq p_{i,j,k}(S) \subseteq G_i \times G_j \times G_k,$$

$$[G_i : A_i] < \infty, \quad [G_j : A_j] < \infty, \quad [G_k : A_k] < \infty. \tag{5.22}$$

Veja que, por (5.22) (p. 131),

$$\mathbf{1} \times \mathbf{1} \times A_k \subseteq p_{i,j,k}(S).$$

Logo,

$$A_k \subseteq p_k(ker(\widehat{p}_{i,j})). \tag{5.23}$$

Observe ainda que, definindo-se

$$\widetilde{N} := F_1 \times \ldots \times F_{i-1} \times F_{i+1} \times \ldots \times F_{j-1} \times F_{j+1} \times \ldots \times F_m, \tag{5.24}$$

temos que

$$\widetilde{N} \subseteq ker(\widehat{p}_{i,j}).$$

Definamos também, para $1 \leq k \leq m$ com $k \neq i, j$,

$$B_k := p_k(ker(\widehat{p}_{i,j})).$$

Por (5.22) (p. 131) e por (5.23) (p. 132),

$$[G_k : B_k] < \infty.$$

Além disso, por esse índice ser finito e G_k ser finitamente gerado, temos que

$$B_k \text{ é finitamente gerado para todo } k \in \{1, \ldots, m\} \text{ com } k \neq i, j.$$

Agora, para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$, G_k/F_k é um grupo policíclico-por-finito, portanto G_k/F_k é finitamente apresentável. Assim, existe um subconjunto finito $X_k \subseteq F_k$ tal que

$$F_k = \langle X_k^{G_k} \rangle.$$

Como $[G_k : B_k] < \infty$, escrevamos $G_k = \dot{\bigcup\limits_{t \in T_k}} tB_k$, onde T_k é um subconjunto finito de G_k. Logo,

$$X_k^{T_k} = \{x^t : x \in X_k, t \in T_k\} \text{ é um conjunto finito.}$$

Visto que, por definição, $B_k = p_k(ker(\widehat{p}_{i,j}))$, temos que, para $1 \leq k \leq m$ com $k \neq i, j$,

$$\left\langle (X_k^{T_k})^{ker(\widehat{p}_{i,j})} \right\rangle = \left\langle (X_k^{T_k})^{p_k(ker(\widehat{p}_{i,j}))} \right\rangle = \langle X_k^{T_k B_k} \rangle = \langle X_k^{G_k} \rangle = F_k.$$

Assim,

$$\widetilde{N} \lhd ker(\widehat{p}_{i,j}),$$

onde $\widetilde{N}$ foi definido em (5.24) (p. 132). $\widetilde{N}$ é, então, o fecho normal em $ker(\widehat{p}_{i,j})$ do conjunto $\Delta := \bigcup_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{m} X_k^{T_k}$.

Observe que $ker(\widehat{p}_{i,j})/\widetilde{N}$ é subgrupo do grupo policíclico-por-finito $\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{m} G_k/F_k$, logo temos que $ker(\widehat{p}_{i,j})/\widetilde{N}$ é também policíclico-por-finito e, portanto, finitamente gerado. Assim, existe um subconjunto finito $Y \subseteq ker(\widehat{p}_{i,j})$ tal que $Y\widetilde{N}/\widetilde{N}$ é um conjunto finito de geradores de $ker(\widehat{p}_{i,j})/\widetilde{N}$. Podemos supor ainda que $\Delta \subseteq Y$. Do contrário, tome $\widetilde{Y} = Y \cup \Delta$, que é finito. Ainda mais, como B_k é finitamente gerado, aumentando Y se for necessário, podemos supor que $B_k = \langle p_k(Y)\rangle$. Consequentemente, para $1 \leq k \leq m$ com $k \neq i, j$,

$$\langle Y\rangle \supseteq (X_k^{T_k})^{\langle Y\rangle} = (X_k^{T_k})^{\langle p_k(Y)\rangle} = X_k^{T_k B_k} = X_k^{G_k}.$$

Daí que, $F_k \subseteq \langle Y\rangle$, o que implica que $\widetilde{N} \subseteq \langle Y\rangle$ e, portanto, $\langle Y\rangle = ker(\widehat{p}_{i,j})$.

Concluímos que $ker(\widehat{p}_{i,j})$ é grupo finitamente gerado e, consequentemente, $(ker(\widehat{p}_{i,j}))^{ab}$ é também um grupo abeliano finitamente gerado. Desta forma,

$$[p_{i,j}(S)]_{\widehat{\chi}_{i,j}} \text{ é de tipo } FP_2(\mathbb{Q}),$$

isto é, $[\widehat{\chi}_{i,j}] \in \Sigma^2(p_{i,j}(S), \mathbb{Q})$.

Definindo-se $\rho := \widehat{\chi}_{i,j}|_{A_i\times A_j}$, observamos que ρ é um caráter de $A_i \times A_j$, portanto não-nulo por definição. Isto segue do fato de que se supusermos que $\rho = 0$, então $\widehat{\chi}_{i,j}|_{A_i\times A_j} = 0$. Daí que, podemos definir o homomorfismo de grupos $\eta : \frac{p_{i,j}(S)}{A_i\times A_j} \to \mathbb{R}$ por $\eta(y(A_i \times A_j)) := \widehat{\chi}_{i,j}(y)$ para todo $y(A_i \times A_j) \in \frac{p_{i,j}(S)}{A_i\times A_j}$, o qual está bem definido, pois $\widehat{\chi}_{i,j}(A_i \times A_j) = 0$. Entretanto, por (5.22) (p. 131), segue que $\frac{p_{i,j}(S)}{A_i\times A_j}$ é grupo finito, portanto um grupo de torção. Resultando no fato de que $\eta = 0$, o que implica finalmente que $\widehat{\chi}_{i,j} = 0$, o que é absurdo, pois $\widehat{\chi}_{i,j}$ é não-nulo, já que é um caráter.

Usando o Teorema 2.16 (p. 68), temos, então, que $[\rho] \in \Sigma^2(A_i \times A_j, \mathbb{Q})$, ou seja,

$$\Sigma^2(A_i \times A_j, \mathbb{Q}) \neq \emptyset. \tag{5.25}$$

Entretanto, A_i e A_j são grupos limites, logo, pela Proposição 3.17 (p. 76), temos que

$$\Sigma^1(A_i, \mathbb{Q}) = \Sigma^1(A_j, \mathbb{Q}) = \emptyset \quad \text{e} \quad \Sigma^2(A_i, \mathbb{Q}) = \Sigma^2(A_j, \mathbb{Q}) = \emptyset. \tag{5.26}$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.17 (p. 69), temos que

$$\Sigma^2(A_i \times A_j, \mathbb{Q})^c = \Big\{[(\rho_1, \rho_2)] : [\rho_1] \in \Sigma^1(A_i, \mathbb{Q})^c, [\rho_2] \in \Sigma^1(A_j, \mathbb{Q})^c, \rho_1, \rho_2 \neq 0\Big\} \cup$$

$$\cup \left\{ [(0,\rho_2)] : [\rho_2] \in \Sigma^2(A_j,\mathbb{Q})^c \right\} \cup \left\{ [(\rho_1,0)] : [\rho_1] \in \Sigma^2(A_i,\mathbb{Q})^c \right\}.$$

Usando (5.26) (p. 133), concluímos que

$$\Sigma^2(A_i \times A_j,\mathbb{Q})^c = S(A_i) * S(A_j) = S(A_i \times A_j).$$

O que é contradição com (5.25) (p. 133).

A única suposição que fizemos no início da demonstração foi que $\chi_0(ker(\widehat{q}_{i,j})) = \mathbf{0}$. Logo, essa afirmação não procede e temos que

$$\chi_0(ker(\widehat{q}_{i,j})) \neq \mathbf{0}.$$

Daí que, existe $x \in ker(\widehat{q}_{i,j})$ tal que $\chi_0(x) \neq 0$. Podemos assumir, então, que $\chi_0(x) > 0$, do contrário tomamos x^{-1}. Agora, dado $q \in S/N$, veja que, para todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k > 0$,

$$\widehat{q}_{i,j}(q) = \widehat{q}_{i,j}(x^k q).$$

Tomemos, então, $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $k_0 > 0$ e $k_0 > \frac{|\chi_0(q)|}{\chi_0(x)}$. Segue, portanto, que

$$\chi_0(x^{k_0} q) = k_0 \chi_0(x) + \chi_0(q) > 0.$$

Logo, $x^{k_0} q \in S_\chi/N$ e, daí que, $\widehat{q}_{i,j}(q) = \widehat{q}_{i,j}(x^{k_0} q) \in \widehat{q}_{i,j}(S_\chi/N)$. Como $q \in S/N$ foi tomado arbitrário, constatamos que

$$\widehat{q}_{i,j}(S/N) = \widehat{q}_{i,j}(S_\chi/N).$$

□

Obtemos, então, abaixo o último resultado central desta Tese de Doutorado: a Pseudorrecíproca VSU Monoidal, cuja demonstração é análoga à demonstração da Pseudorrecíproca VSP Monoidal.

Consideremos uma última vez a notação utilizada nos parágrafos precedentes.

Definamos, para $n \in \{1,\dots,m-1\}$ **e** $j_1,\dots,j_n \in \{1,\dots,m\}$ **com** $j_1 < \dots < j_n$**,**

$$\widehat{p}_{j_1,\dots,j_n} : S \to G_{j_1} \times \dots \times G_{j_n}, \text{ **por** } \widehat{p}_{j_1,\dots,j_n} := p_{j_1,\dots,j_n}|_S,$$

ou seja, como restrição sobre S **da projeção** $p_{j_1,\dots,j_n}$ **nas coordenadas** $j_1,\dots j_n$**. E, definamos**

$$\widehat{q}_{j_1,\dots,j_n} : S/N \to \frac{G_{j_1}}{F_{j_1}} \times \dots \times \frac{G_{j_n}}{F_{j_n}}, \text{ **por** } \widehat{q}_{j_1,\dots,j_n} := q_{j_1,\dots,j_n}|_{S/N},$$

ou seja, como restrição sobre S/N **da projeção** $q_{j_1,\dots,j_n}$ **nas coordenadas** $j_1,\dots,j_n$**.**

Denotaremos ainda $p_{j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}}$ **como a projeção de** $G_1 \times \ldots \times G_m$ **sobre**

$$G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n} \times G_{j_{n+1}}.$$

Teorema 5.15 (Pseudorrecíproca VSU Monoidal)**.** *Sejam $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$, com $m \geq 2$, um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$ de um produto direto de grupos limites não-abelianos e $\chi : S \to \mathbb{R}$ um caráter. Se S é de tipo $FP_{n+1}(\mathbb{Q})$ e S_χ é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$ para algum $n \in \{1, \ldots, m-1\}$, então, para cada projeção canônica $p_{j_1,\ldots,j_n} : G_1 \times \ldots \times G_m \to G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n}$, com $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, m\}$ e $j_1 < \ldots < j_n$, temos que*

$$p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi) = p_{j_1,\ldots,j_n}(S)$$

e, portanto,

$$[G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n} : p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi)] < \infty$$

(essa última afirmação segue do Teorema 3.33(p. 82)).

Demonstração. Mais uma vez, nosso intento é mostrar que $\widehat{q}_{j_1,\ldots,j_n}(S/N) = \widehat{q}_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi/N)$ e, consequentemente, teremos que $p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi) = p_{j_1,\ldots,j_n}(S)$. Daí que,

$$[G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n} : p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi)] < \infty$$

pelo Teorema 3.33(p. 82).

Lembremos, mais uma vez, que $\chi_0 : S/N \to \mathbb{R}$ é o caráter induzido por χ que é dado por $\chi_0(sN) := \chi(s)$, para todo $sN \in S/N$.

Como na demonstração da Pseudorrecíproca VSP Monoidal, Teorema 5.14 (p. 128), nosso objetivo é mostrar que $\chi_0(ker(\widehat{p}_{j_1,\ldots,j_n})) \neq \mathbf{0}$. Fazemos, então, a suposição, por absurdo, de que

$$\chi_0(ker(\widehat{p}_{j_1,\ldots,j_n})) = \mathbf{0}.$$

De forma semelhante à demonstração feita na Pseudorrecíproca VSP Monoidal, conseguimos mostrar a existência de um caráter $\widehat{\chi}_{j_1,\ldots,j_n} : p_{j_1,\ldots,j_n}(S) \to \mathbb{R}$. Além disso, como S é de tipo FP_{n+1}, obtemos subgrupos normais A_{j_l} de G_{j_l} para $1 \leq l \leq n+1$ tais que

$$A_{j_1} \times \ldots \times A_{j_{n+1}} \subseteq p_{j_1,\ldots,j_{n+1}}(S) \subseteq G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_{n+1}},$$

$$[G_{j_1} : A_{j_1}] < \infty \ , \ \ldots \ , \ [G_{j_{n+1}} : A_{j_{n+1}}] < \infty,$$

onde $p_{j_1,\ldots,j_{n+1}} : G_1 \times \ldots \times G_m \to G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_{n+1}}$ é a projeção canônica e mostramos que $(ker(\widehat{p}_{j_1,\ldots,j_n}))^{ab}$ é finitamente gerado como grupo abeliano. Logo, concluímos que

$$[p_{j_1,\ldots,j_n}(S)]_{\widehat{\chi}_{j_1,\ldots,j_n}} \text{ é de tipo } FP_2(\mathbb{Q}),$$

ou seja,

$$[\widehat{\chi}_{j_1,\ldots,j_n}] \in \Sigma^2(p_{j_1,\ldots,j_n}(S), \mathbb{Q})$$

e, portanto,

$$\Sigma^2(A_{j_1} \times \ldots \times A_{j_n}, \mathbb{Q}) \neq \emptyset, \tag{5.27}$$

já que $\rho := \widehat{\chi}_{j_1,\ldots,j_n}|_{A_{j_1}\times\ldots\times A_{j_n}} \neq 0$ e $[\rho] \in \Sigma^2(A_{j_1} \times \ldots \times A_{j_n}, \mathbb{Q})$. No entanto, pela Proposição 3.17 (p. 76),

$$\Sigma^1(A_{j_l}, \mathbb{Q}) = \emptyset \quad \text{e} \quad \Sigma^2(A_{j_l}, \mathbb{Q}) = \emptyset \quad \text{ para } 1 \leq l \leq n,$$

pois A_{j_l} é grupo limite. Daí que, usando o Teorema 2.17 (p. 69) e indução sobre n, sendo o primeiro passo de indução quando $n = 2$, temos que

$$\Sigma^2(A_{j_1} \times \ldots \times A_{j_n}, \mathbb{Q})^c = S(A_{j_1} \times \ldots \times A_{j_n}),$$

o que contradiz o afirmado em (5.27) (p. 136).

Assim, a suposição que fizemos de que $\chi_0(ker(\widehat{p}_{j_1,\ldots,j_n})) = \mathbf{0}$ é falsa e segue, então que $\chi_0(ker(\widehat{p}_{j_1,\ldots,j_n})) \neq \mathbf{0}$. Procedendo como no Teorema 5.14 (p. 128), concluímos que

$$\widehat{q}_{j_1,\ldots,j_n}(S/N) = \widehat{q}_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi/N)$$

como queríamos. □

Na demonstração acima da Pseudorrecíproca VSU Monoidal, uma das hipóteses é que S_χ é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$, logo S é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$ pelo Lema 2.10 (p. 64). Entretanto, usamos fortemente, na demonstração, a hipótese adicional de que S é de tipo $FP_{n+1}(\mathbb{Q})$. Apesar disso, acreditamos que essa última hipótese possa ser suprimida em uma nova demonstração resultando assim no teorema que denominamos Recíproca VSU Monoidal. Temos, assim, a seguinte conjectura:

Conjectura 5.16. *Sejam $S \leq G_1 \times \ldots \times G_m$, com $m \geq 2$, um produto subdireto completo finitamente gerado de tipo $FP_2(\mathbb{Q})$ de um produto direto de grupos limites não-abelianos e $\chi : S \to \mathbb{R}$ um caráter. Se S_χ é de tipo $FP_n(\mathbb{Q})$ para algum $n \in \{1, \ldots, m-1\}$, então, para cada projeção canônica*

$$p_{j_1,\ldots,j_n} : G_1 \times \ldots \times G_m \to G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n},$$

com $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, m\}$ e $j_1 < \ldots < j_n$, temos que

$$p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi) = p_{j_1,\ldots,j_n}(S)$$

e, portanto,

$$[G_{j_1} \times \ldots \times G_{j_n} : p_{j_1,\ldots,j_n}(S_\chi)] < \infty$$

(essa última afirmação segue do Teorema 3.33(p. 82)).

Apêndice A

Resultados Novos: Casos Particulares do Teorema 4.4

Abaixo seguem três teoremas que antecederam o Teorema 4.4 (p. 92). Tais resultados são casos particulares do Teorema 4.4. Decidimos deixá-los aqui para ilustrar como foi nosso avanço para conseguir demonstrar o Teorema 4.4 e, também, para termos versões de demonstrações do Teorema 4.4 nestes casos particulares.

A.1 Caso Particular para Monomorfismo

Teorema A.1. *Sejam $n \geq 2$, $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ uma sequência exata curta de grupos com A de tipo FP_n e C de tipo FP_{n+1}. Assuma que exista uma outra sequência exata curta de grupos $A \hookrightarrow B_0 \twoheadrightarrow C_0$ com B_0 de tipo FP_{n+1} e um* ***monomorfismo*** *de grupos $\theta : B_0 \to B$ tal que $\theta|_A = id_A$ e o seguinte diagrama seja comutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "id_A"'] & B_0 \arrow[r, two heads, "\pi_0"] \arrow[d, hook, "\theta"'] & C_0 \arrow[d, dotted, "\nu"] \\ A \arrow[r, hook] & B \arrow[r, two heads, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

onde $\nu : C_0 \to C$ é homomorfismo de grupos induzido por θ tal que $\nu\pi_0 = \pi\theta$. Então, B é também de tipo FP_{n+1}.

Demonstração. De início, observamos que, usando a sequência exata curta de grupos $A \hookrightarrow B_0 \twoheadrightarrow C_0$, como A é de tipo FP_n e B_0 é de tipo FP_{n+1}, pela Proposição 1.100 *c)* (p. 53), concluímos que C_0 é de tipo FP_{n+1}.

Sejam $\{(E^r, d^r)\}_{r\geq 1}, \{(\mathcal{E}^t, \delta^t)\}_{t\geq 1}$ as sequências espectrais convergentes LHS onde

$$E^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \ \text{ e } \ \mathcal{E}^2_{u,v} = H_u(C_0, H_v(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha))$$

com $p, q, u, v \in \mathbb{Z}$, I um conjunto de índices e $(\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z}B$, $\forall \alpha \in I$. Observamos que $E^2_{p,q}$ converge a $H_{p+q}(B, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$ e $\mathcal{E}^2_{u,v}$ converge a $H_{u+v}(B_0, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$.

Pela demonstração do Teorema 4.1 (p. 83), temos que

$$E^{n+1}_{n+1,0} = H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \text{ e } E^{n+1}_{0,n} = H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)).$$

Por outro lado, como $\theta : B_0 \to B$ é monomorfismo de grupos, podemos considerar B_0 como subgrupo de B, daí que $\mathbb{Z}B$ é $\mathbb{Z}B_0$-módulo livre e, portanto, pelo Teorema 4.2 (p. 87),

$$\mathcal{E}^{n+1}_{n+1,0} = H_{n+1}(C_0, H_0(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \text{ e } \mathcal{E}^{n+1}_{0,n} = H_0(C_0, H_n(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha))$$

e, ainda,

$$\delta^{n+1}_{n+1,0} : H_{n+1}(C_0, H_0(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \longrightarrow H_0(C_0, H_n(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \text{ é sobrejetivo.}$$

Pela naturalidade da sequência espectral LHS, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(C_0, H_0(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \arrow[r, two heads, "\delta^{n+1}_{n+1,0}"] \arrow[d, "\mu_1"'] & H_0(C_0, H_n(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \arrow[d, "\mu_2"] \\ H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \arrow[r, "d^{n+1}_{n+1,0}"'] & H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

onde μ_1 e μ_2 são induzidos por ν, uma vez que $H_m(-, M)$ é funtor para cada $m \geq 0$ e para cada módulo apropriado M. Denotando-se $V := H_n(A, \prod_{\alpha \in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$, pela Proposição 1.49 *a)* (p. 35), temos que

$$H_0(C_0, V) = \frac{V}{Aug(\mathbb{Z}C_0)V} \text{ e } H_0(C, V) = \frac{V}{Aug(\mathbb{Z}C)V}$$

Assim, como θ é monomorfismo de grupos, temos que ν é também monomorfismo de grupos pelo Lema 4.3 (p. 91) e, portanto, podemos considerar $\mathbb{Z}C_0 \subseteq \mathbb{Z}C$. Logo,

$$\mu_2 : \frac{V}{Aug(\mathbb{Z}C_0)V} \longrightarrow \frac{V}{Aug(\mathbb{Z}C)V}$$

é o homomorfismo de grupos alargamento, que é sobrejetivo, por definição. Pelo diagrama em (A.1) (p. 139), como $\delta^{n+1}_{n+1,0}$ e μ_2 são ambos sobrejetivos, concluímos que $d^{n+1}_{n+1,0}$ é também sobrejetivo e, assim, pelo Teorema 4.1 (p. 83), temos que B é de tipo FP_{n+1}. $\square$

A.2 Caso Particular para Epimorfismo

Teorema A.2. *Sejam $n \geq 2$, $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ uma sequência exata curta de grupos com A de tipo FP_n e C de tipo FP_{n+1}. Assuma que exista uma outra sequência exata curta de grupos $A \hookrightarrow B_0 \twoheadrightarrow C_0$ com B_0 de tipo FP_{n+1} e um* ***epimorfismo*** *de grupos $\theta : B_0 \to B$ tal que $\theta|_A = id_A$, ou seja,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "id_A"'] & B_0 \arrow[r, two heads, "\pi_0"] \arrow[d, "\theta"'] & C_0 \arrow[d, dotted, "\nu"] \\ A \arrow[r, hook] & B \arrow[r, two heads, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

onde $\nu : C_0 \to C$ é um homomorfismo de grupos induzido por θ tal que $\nu\pi_0 = \pi\theta$. Então, B é também de tipo FP_{n+1}.

Demonstração. Primeiramente, observamos que aqui também temos que C_0 é de tipo FP_{n+1} pela Proposição 1.100 *c)* (p. 53) e que ν é epimorfismo de grupos pelo pelo Lema 4.3 (p. 91).

Sejam $\{(E^r, d^r)\}_{r\geq 1}, \{(\mathcal{E}^t, \delta^t)\}_{t\geq 1}$ as sequências espectrais convergentes LHS análogas às consideradas na demonstração do Teorema A.1 (p. 138), isto é,

$$E^2_{p,q} = H_p(C, H_q(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \text{ e } \mathcal{E}^2_{u,v} = H_u(C_0, H_v(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B_0)_\alpha))$$

com $p, q, u, v \in \mathbb{Z}$, I um conjunto de índices, $(\mathbb{Z}B)_\alpha = \mathbb{Z}B$ e $(\mathbb{Z}B_0)_\alpha = \mathbb{Z}B_0$, $\forall \alpha \in I$.

Pela demonstração do Teorema 4.1 (p. 83), temos que

$$E^{n+1}_{n+1,0} = H_{n+1}(C, H_0(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \text{ e } E^{n+1}_{0,n} = H_0(C, H_n(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)),$$

$$\mathcal{E}^{n+1}_{n+1,0} = H_{n+1}(C_0, H_0(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B_0)_\alpha)) \text{ e } \mathcal{E}^{n+1}_{0,n} = H_0(C_0, H_n(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B_0)_\alpha))$$

e, ainda, pelo Teorema 4.1 (p. 83),

$$\delta^{n+1}_{n+1,0} : H_{n+1}(C_0, H_0(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B_0)_\alpha)) \longrightarrow H_0(C_0, H_n(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B_0)_\alpha)) \text{ é sobrejetivo.}$$

Pela naturalidade da sequência espectral LHS, segue que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(C_0, H_0(A, \prod\limits_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B_0)_\alpha)) \arrow[r, two heads, "\delta^{n+1}_{n+1,0}"] \arrow[d, "\mu_1"'] & H_0(C_0, H_n(A, \prod\limits_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B_0)_\alpha)) \arrow[d, "\mu_2"] \\ H_{n+1}(C, H_0(A, \prod\limits_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \arrow[r, "d^{n+1}_{n+1,0}"'] & H_0(C, H_n(A, \prod\limits_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)) \end{tikzcd} \tag{A.2}$$

onde temos aplicações

$$\theta_i : H_i(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B_0)_\alpha) \to H_i(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$$

induzidas pelo epimorfismo $\prod\limits_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B_0)_\alpha \twoheadrightarrow \prod\limits_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha$ que, por sua vez, é induzido pelo epimorfismo θ. Assim, μ_1 é induzido por ν e θ_0 e μ_2 é induzido por ν e θ_n. Aqui usamos que $H_m(-,-)$ é bifuntor com respeito às suas duas coordenadas para todo $m \geq 0$. Além disso, temos que μ_2 é sobrejetivo se

$$\theta_n : H_n(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B_0)_\alpha) \longrightarrow H_n(A, \prod_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$$

for sobrejetivo, pois, denotando $U := H_n(A, \prod\limits_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B_0)_\alpha)$ e $W := H_n(A, \prod\limits_{\alpha\in I}(\mathbb{Z}B)_\alpha)$, pela Proposição 1.49 *a)* (p. 35), temos que

$$H_0(C_0, U) = \frac{U}{Aug(\mathbb{Z}C_0)U} \quad \text{e} \quad H_0(C, W) = \frac{W}{Aug(\mathbb{Z}C)W}.$$

Assim, caso θ_n seja sobrejetivo, então μ_2 também o será e, pela comutatividade do diagrama (A.2) (p. 141), seguirá que $d^{n+1}_{n+1,0}$ será sobrejetivo e, portanto, pelo Teorema 4.1 (p. 83), concluiremos que B é de tipo FP_{n+1}, o que termina, então, a demonstração.

Vamos, então, mostrar que θ_n é sobrejetivo, para $n \geq 2$.

Considere a seguinte sequência exata curta de grupos

$$ker(\theta) \overset{\iota}{\hookrightarrow} B_0 \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} B$$

onde ι é a inclusão canônica e denotaremos $K := ker(\theta)$. Tal sequência exata curta de grupos induz a seguinte sequência exata curta de $\mathbb{Z}A$-módulos

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbb{Z}B_0(Aug(\mathbb{Z}K)) \longrightarrow \mathbb{Z}B_0 \xrightarrow{\theta_\#} \mathbb{Z}B \longrightarrow \mathbf{0} \tag{A.3}$$

onde $\theta_\#$ é induzido por θ. Temos, então, sequência exata longa em homologia da seguinte forma

$$\ldots \longrightarrow H_n(A, \mathbb{Z}B) \longrightarrow H_{n-1}(A, \mathbb{Z}B_0(Aug(\mathbb{Z}K))) \longrightarrow H_{n-1}(A, \mathbb{Z}B_0) \longrightarrow \ldots \quad \text{(A.4)}$$

Mas, veja que tanto $\mathbb{Z}B$, quanto $\mathbb{Z}B_0$ são $\mathbb{Z}A$-módulos livres, já que A é subgrupo de B e de B_0, logo, pela Proposição 1.47 *i)* (p. 34), $H_n(A, \mathbb{Z}B) = H_{n-1}(A, \mathbb{Z}B_0) = \mathbf{0}$, se $n \geq 2$. Assim, em (A.4) (p. 142), temos

$$\ldots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow H_{n-1}(A, \mathbb{Z}B_0(Aug(\mathbb{Z}K))) \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \ldots$$

o que implica que

$$H_{n-1}(A, \mathbb{Z}B_0(Aug(\mathbb{Z}K))) = \mathbf{0}, \text{ se } n \geq 2. \quad \text{(A.5)}$$

Usando a sequência exata curta de $\mathbb{Z}A$-módulos em (A.3) (p. 141), obtemos a seguinte sequência exata curta de $\mathbb{Z}A$-módulos

$$\mathbf{0} \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B_0(Aug(\mathbb{Z}K)))_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B_0)_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha \longrightarrow \mathbf{0}$$

onde $(\mathbb{Z}B_0(Aug(\mathbb{Z}K)))_\alpha = \mathbb{Z}B_0(Aug(\mathbb{Z}K))$, $\forall \alpha \in I$. Temos, então, sequência exata longa

$$\ldots \to H_n(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B_0)_\alpha) \xrightarrow{\theta_n} H_n(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha) \to H_{n-1}(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B_0(Aug(\mathbb{Z}K)))_\alpha) \to \ldots \quad \text{(A.6)}$$

Observe que, como A é de tipo FP_n, pela Proposição 1.99 (p. 53), segue que

$$H_i(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B_0(Aug(\mathbb{Z}K)))_\alpha) = \prod_{\alpha \in I} H_i(A, (\mathbb{Z}B_0(Aug(\mathbb{Z}K)))_\alpha), \text{ para } 0 \leq i \leq n-1. \quad \text{(A.7)}$$

Logo, por (A.5) (p. 142) e (A.7) (p. 142), concluímos que

$$H_{n-1}(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B_0(Aug(\mathbb{Z}K)))_\alpha) = \mathbf{0}, \text{ se } n \geq 2.$$

Assim, de (A.6) (p. 142), temos

$$\ldots \longrightarrow H_n(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B_0)_\alpha) \xrightarrow{\theta_n} H_n(A, \prod_{\alpha \in I} (\mathbb{Z}B)_\alpha) \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \ldots$$

implicando que θ_n é sobrejetivo se $n \geq 2$.

$\square$

A.3 Caso Particular para Homomorfismo tal que $im(\nu)$ é de tipo FP_{n+1} utilizando-se Monomorfismo e Epimorfismo

Teorema A.3. *Sejam $n \geq 2$, $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ uma sequência exata curta de grupos com A de tipo FP_n e C de tipo FP_{n+1}. Assuma que exista uma outra sequência exata curta de grupos $A \hookrightarrow B_0 \twoheadrightarrow C_0$ com B_0 de tipo FP_{n+1} e um homomorfismo de grupos $\theta : B_0 \to B$ tal que $\theta|_A = id_A$, ou seja,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "id_A"'] & B_0 \arrow[r, two heads, "\pi_0"] \arrow[d, "\theta"'] & C_0 \arrow[d, dotted, "\nu"] \\ A \arrow[r, hook] & B \arrow[r, two heads, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

onde $\nu : C_0 \to C$ é um homomorfismo de grupos induzido por θ tal que $\nu\pi_0 = \pi\theta$. Assuma também que $im(\nu)$ é de tipo FP_{n+1}. Então, B é também de tipo FP_{n+1}.

Demonstração. Primeiramente, observamos novamente que C_0 é também de tipo FP_{n+1} pela Proposição 1.100 *c)* (p. 53) e que ν é homomorfismo de grupos pelo pelo Lema 4.3 (p. 91).

Definamos $p : im(\theta) \to im(\nu)$ por $p := \pi|_{im(\theta)}$. Vamos nos certificar de que p está bem definida, isto é, de que, neste caso, $im(p) \subseteq im(\nu)$. Seja $x \in im(\theta)$. Logo, para algum $b_0 \in B_0$, $p(x) = p(\theta(b_0)) = \pi(\theta(b_0)) = \nu(\pi_0(b_0)) \in im(\nu)$. Assim, p está bem definida e, obviamente, é homomorfismo de grupos. Além disso, p é sobrejetivo, pois, dado $y \in im(\nu)$, para algum $c_0 \in C_0$ e algum $b_0 \in B_0$, $y = \nu(c_0) = \nu(\pi_0(b_0)) = \pi\theta(b_0) = p(z)$, onde $z = \theta(b_0)$. Agora, veja que $A = \theta(A) = \theta(A \cap B_0) \subseteq \theta(B_0) = im(\theta)$. Segue que $ker(p) = ker(\pi|_{im(\theta)}) = ker(\pi) \cap im(\theta) = A \cap im(\theta) = A$. Assim, temos a seguinte sequência exata curta de grupos $A \hookrightarrow im(\theta) \overset{p}{\twoheadrightarrow} im(\nu)$.

Consequentemente, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "id_A"'] & B_0 \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\theta_1"'] & C_0 \arrow[d, "\nu_1"] \\ A \arrow[r, hook] \arrow[d, "id_A"'] & im(\theta) \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, hook, "i_1"'] & im(\nu) \arrow[d, hook, "i_2"] \\ A \arrow[r, hook] & B \arrow[r, two heads, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

onde $\theta_1 : B_0 \twoheadrightarrow im(\theta)$ é dada por $\theta_1(b_0) = \theta(b_0), \forall b_0 \in B_0$ e $i_1 : im(\theta) \hookrightarrow B$ e $i_2 : im(\nu) \hookrightarrow C$ são as inclusões canônicas.

É imediato ver que $\nu_1\pi_0 = p\theta_1$ e que $i_2p = \pi i_1$.

Assim, pelo Teorema A.2 (p. 140), segue que $im(\theta)$ é de tipo FP_{n+1} e pelo Teorema A.1 (p. 138), concluímos que B é de tipo FP_{n+1}. □

Observe que o Teorema A.1 (p. 138) e o Teorema A.2 (p. 140) são casos particulares do Teorema A.3 (p. 143). De fato, no Teorema A.3, se θ for monomorfismo, pelo Lema 4.3 (p. 91), ν é também monomorfismo e, portanto, $im(\nu) \cong C_0$, que é de tipo FP_{n+1} pela Proposição 1.100 *c)* (p. 53), já que A é de tipo FP_n e B_0 é de tipo FP_{n+1}. O que nos garante automaticamente que $im(\nu)$ é de tipo FP_{n+1}. Por outro lado, se θ for epimorfismo de grupos, pelo Lema 4.3 (p. 91), ν é também epimorfismo de grupos, logo $im(\nu) \cong C$, que é de tipo FP_{n+1} por hipótese. O que também nos garante automaticamente que $im(\nu)$ é de tipo FP_{n+1}.

Bibliografia

[1] B. Baumslag. *Residually free groups.* Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series, 1967. v. 17. pp. 402-418.

[2] G. Baumslag, M. R. Bridson, C. F. Miller III, H. Short. *Fibre Products, non-positive curvature, and decision problems.* Commentarii Mathematici Helvetici, 2000. v. 75. pp. 457-477.

[3] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov. *Algebraic Geometry over Groups I. Algebraic Sets and Ideal Theory.* Journal of Algebra, 1999. v. 219. pp. 16-79.

[4] M. Bestvina, N. Brady. *Morse theory and finiteness properties of groups.* Inventiones Mathematicae 129, 1997. pp. 445–470.

[5] M. Bestvina, M. Feighn. *Notes on Sela's work: limit groups and Makanin-Razborov diagrams.* Geometric and cohomological methods in group theory, 1–29. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[6] R. Bieri. *Homological Dimension of Discrete Groups.* 2ª ed.. London: Queen Mary College Mathematics Notes (Queen Mary College), 1981.

[7] R. Bieri, R. Geoghegan. *Sigma invariants of direct products of groups.* Groups, Geometry, and Dynamics 4, 2010. nº 2. pp. 251-261.

[8] R. Bieri, Walter D. Neumann, Ralph Strebel. *A geometric invariant of discrete groups.* Inventiones mathematicae 90, 1987. pp. 451-477.

[9] R. Bieri, B. Renz. *Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups.* Commentarii Mathematici Helvetici, 1988. nº 3 v. 63. pp. 464-497.

[10] R. Bieri, R. Strebel. *Valuations and finitely presented metabelian groups.* Proceedings of the London Mathematical Society Third Series. 1980. v. 41. pp. 439-464.

[11] M. R. Bridson, J. Howie. *Normalisers in limit groups.* Mathematische Annalen 337. 2007. pp. 385-394.

[12] M. R. Bridson, J. Howie. *Subgroups of direct products of elementarily free groups.* GAFA Geometric And Functional Analysis. 2007. v. 17. pp. 385-403.

[13] M. R. Bridson, C. F. Miller III. *Structure and finiteness properties of subdirect products of groups.* Proceedings of the London Mathematical Society Third Series. 2009. v. 98. pp. 631-651.

[14] M. R. Bridson, J. Howie, C. F. Miller, H. Short. *On the finite presentation of subdirect products and the nature of residually free groups.* American Journal of Mathematics. 2013. nº 4 v. 135. pp. 891-933.

[15] M. R. Bridson, J. Howie, C. F. Miller, H. Short. *Subgroups of direct products of limit groups.* Annals of Mathematics. Second Series, 2009. nº 3 v. 170. pp. 1447-1467.

[16] K. S. Brown. *Cohomology of Groups.* Ann Arbor, Michigan: Springer, 1982.

[17] D. E. Cohen. *Combinatorial Group Theory: a topological approach.* Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[18] R. Gehrke. *The higher geometric invariants for groups with sufficient commutativity.* Communications in Algebra 26. 1998. pp. 1097-1115.

[19] I. Kapovich. *Subgroup properties of fully residually free groups.* Transactions of the American Mathematical Society. 1998. v. 354. pp. 335-362.

[20] O. Kharlampovich, A. Myasnikov. *Irreducible Affine Varieties over a Free Group. II. Systems in Triangular Quasi-quadratic Form and Description of Residually Free Groups.* Journal of Algebra. 1998. v. 200. pp. 517-570.

[21] D. H. Kochloukova. *On subdirect products of type FP_m of limit groups.* Journal of Group Theory. 2010. v. 10. pp. 1-19.

[22] B. Kuckuck. *Finiteness Properties of Fibre Products.* Doctoral Thesis. Wolfson College. University of Oxford. 2012.

[23] B. Kuckuck. *Subdirect products of groups and the n-$(n+1)$-$(n+2)$ conjecture.* The Quarterly Journal of Mathmatics. 2014. v. 0. pp. 1-26.

[24] F. F. Lima. *Pontos Fixos por Grupos Finitos Agindo sobre Grupos Solúveis de Tipo FP $infinito$.* Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas. 2013.

[25] W. Lück. *L^2-Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-Theory.* Germany: Springer, 2002.

[26] J. Meier, H. Meinert, L. VanWyk. *Higher generation subgroup sets and the Σ-invariants of graph groups.* Commentarii Mathematici Helvetici. 1998. v. 73. pp. 22-44.

[27] D. S. Passman. *The Algebraic Structure of Group Rings.* Reprint Edition. United States of America: Robert E. Krieger Publishing Company, 1985.

[28] B. Renz. *Geometrische Invarianten und Endlichkeitseigenschaften von Gruppen.* PhD Thesis, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, 1988.

[29] J. J. Rotman. *Advanced Modern Algebra.* 2ª ed.. United States of America: American Mathematical Society, 2010.

[30] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* United States of America: Academic Press, 1979.

[31] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* 2ª ed.. United States of America: Springer, 2000.

[32] D. Schütz. *On the direct product conjecture for sigma invariants.* Bulletin of the London Mathematical Society 40. 2008. pp. 675-684.

[33] Z. Sela. *Diophantine geometry over groups I. Makanin-Razborov diagrams.* Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques. 2001. Nº 93. pp. 31-105.

[34] Z. Sela. *Diophantine geometry over groups II. Completions, closures and formal solutions.* Israel Journal of Mathematics. 2003. Nº 134. pp. 173-254.

[35] C. A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* United States of America: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1994.