UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

ROGERIO JOSÉ DE RIBAMAR DA SILVA JUNIOR

MODALIDADES PARACONSISTENTES COMO BASE PARA O TRATAMENTO DE PARADOXOS EPISTÊMICO-DOXÁSTICOS

CAMPINAS
2018

ROGERIO JOSÉ DE RIBAMAR DA SILVA JUNIOR

MODALIDADES PARACONSISTENTES COMO BASE PARA O TRATAMENTO DE PARADOXOS EPISTÊMICO-DOXÁSTICOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Orientadora: Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO **Rogerio José de Ribamar da Silva Junior**, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. **Itala Maria Loffredo D'Ottaviano**.

CAMPINAS
2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES, 161480

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
Cecília Maria Jorge Nicolau - CRB 8/3387

Si38m

Silva Junior, Rogerio José de Ribamar da, 1983-
Modalidades paraconsistentes como base para o tratamento de paradoxos epistêmico-doxásticos / Rogerio José de Ribamar da Silva Junior. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Itala Maria Loffredo D'Ottaviano.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Modalidade (Lógica). 2. Lógica matemática não-clássica. 3. Epistemologia. 4. Paradoxos. I. D'Ottaviano, Itala Maria Loffredo, 1944-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Paraconsistent modalities as a basis for treating epistemic-doxastic paradoxes
Palavras-chave em inglês:
Modality (Logic)
Nonclassical mathematical logic
Epistemology
Paradox
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Mestre em Filosofia
Banca examinadora:
Itala Maria Loffredo D'Ottaviano [Orientador]
Fábio Maia Bertato
Hércules de Araújo Feitosa
Data de defesa: 02-07-2018
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Dissertação de Mestrado, composta pelos Professores Doutores a seguir descritos, em sessão pública realizada no dia 02/07/2018, considerou o candidato Rogerio José de Ribamar da Silva Junior aprovado.

Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano (Unicamp, Campinas) – orientadora

Prof. Dr. Fábio Maia Bertato (Unicamp, Campinas)

Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa (Unesp, Bauru).

A Ata de Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no processo de vida acadêmica do aluno.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, cuja compreensão e apoio incondicional às minhas decisões permitiram a progressão em minha vida acadêmica.

Sou grato pela formação e convivência com os Professores da Universidade Federal do Maranhão, em especial ao amigo e ex-orientador Marcio Kléos; seus incentivos constantes para meu aprofundamento na área de lógica durante a graduação, geraram frutos que transformaram minha vida. Também agradeço aos Professores Raimundo Portela e César Frederico, cujas sugestões, apoio e correções na área da lógica foram de valor inestimável durante a conclusão dos cursos de graduação e especialização, e também no período de preparação para ingressar no Mestrado. Menciono com gratidão a Profa. Carmem Portela, pelas palavras motivacionais e carinhosas em um momento delicado de minha trajetória. Agradeço ao Grupo de Lógica e Filosofia Formal da UFMA, pelo acolhimento e interesse em minha pesquisa nas ocasiões em que retorno à São Luís. Agradeço afetuosamente a todos os colegas e amigos que fiz por ocasião dos estudos em lógica ao longo dos anos. Infelizmente o espaço não permite mencionar a todos nominalmente, como eu gostaria.

Agradeço à minha orientadora, Profa. Itala M. L. D'Ottaviano, por acreditar em meu projeto e propiciar as oportunidades que me conduziram ao presente momento. Sua diligente orientação durante todo o processo, assim como seu cuidado em lapidar as intuições que deram origem ao presente trabalho, foram essenciais para meu desenvolvimento enquanto acadêmico. Agradeço ao Prof. Marcelo Coniglio, que acompanhou de maneira próxima minha evolução acadêmica durante suas aulas, gentilmente incentivando minha superação. Ao Prof. Walter Carnielli, por me apresentar aos materiais que auxiliaram a dar corpo à minha pesquisa, além dos conselhos valiosos sobre desenvoltura no ambiente acadêmico. À Profa. Juliana Bueno-Soler, por propiciar o conteúdo sobre o qual baseou-se, em grande parte, esta pesquisa. Suas contribuições e sugestões durante a qualificação foram imprescindíveis à versão final que apresento. Ao Prof. Giorgio Venturi, pelas aulas de lógica modal que incrementaram importantes pontos da pesquisa em andamento, e, pelas sugestões filosóficas na ocasião da qualificação.

Agradeço ao colegas e funcionários do CLE, por propiciarem um ambiente adequado e amistoso para o desenvolvimento do curso de Mestrado. Agradeço à Coordenação e à Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas pelo apoio, acompanhamento e todas as informações necessárias, os quais auxiliaram a finalização deste trabalho.

Agradeço à banca examinadora por gentilmente ter aceitado o convite para minha defesa.

Agradeço à Larissa Castro, simplesmente por tudo.

Durante minha estadia em Campinas fui financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior – CAPES, através do Processo **161480**, instituição à qual agradeço e cujo fomento permitiu a produção desta dissertação.

RESUMO

Pretende-se nesta dissertação analisar sistemas de lógicas modais paraconsistentes que sirvam de base para o tratamento formal de Paradoxos no âmbito das Lógicas Epistêmico-Doxásticas, lógicas modais que formalizam as noções de conhecimento e crença. Estas por sua vez são interpretações de lógicas modais baseadas na lógica clássica, na qual demonstra-se o Princípio *Ex Falso Sequitur Quodlibet*, conhecido também como *Princípio de Explosão.* A demonstração deste Princípio nestas lógicas contribui para resultados indesejados como o *Paradoxo da Cognoscibilidade* (ou *Paradoxo de Fitch*), e o *Paradoxo da Credibilidade,* ambos resultados que levam aos colapsos dos operadores de crença e conhecimento, respectivamente. Algumas soluções têm sido propostas para lidar com os Paradoxos, dentre elas rejeitar certas hipóteses assumidas, tais como o *Princípio de Cognoscibilidade.* A presente dissertação segue outra linha, a saber, que busca investigar os efeitos decorrentes de dotar de bases paraconsistentes os sistemas nos quais os Paradoxos ocorrem. O aparato lógico que utilizaremos para esta tarefa são os chamados sistemas *catódicos*, introduzidos em [Bueno-Soler, 2009]. Estes são sistemas modais que contêm negações subclássicas em suas linguagens e podem ser vistos como combinações entre lógicas modais e paraconsistentes. Especificamente investigamos a possibilidade de que *Lógicas da Inconsistência Formal* (**LFI**s), introduzidas em [Carnielli e Marcos, 2002] e desenvolvidas em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007] possam constituir sistemas catódicos promissores para o tratamento dos Paradoxos Epistêmico-Doxásticos.

Palavras-Chave: Modalidade (Lógica); Lógica matemática não-clássica; Epistemologia; Paradoxos.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is to analyze paraconsistent modal logic systems that serve as the basis for the formal treatment of Paradoxes within the framework of Epistemic-Doxastic Logics, modal logics that formalize the notions of knowledge and belief. These, in turn, are interpretations of modal logics based on classical logic, in which the *Ex Falso Sequitur Quodlibet* Principle, also known as the *Explosion Principle*, is demonstrable. The demonstration of this Principle in these logics contributes to unwanted outcomes such as the *Paradox of Knowability* (or *Fitch Paradox*), and the *Credibility Paradox,* both of which results in the collapse of belief and knowledge operators, respectively. Some solutions have been proposed to deal with the Paradoxes, among them rejecting certain assumed hypotheses, such as the *Principle of Knowability*. The present dissertation follows another line, namely, that seeks to investigate the effects of providing paraconsistent bases with the systems in which Paradoxes occur. The logical apparatus that we will use for this task are the so-called *cathodic systems*, introduced in [Bueno-Soler, 2009]. These are modal systems that contain subclassic negations in their languages and can be seen as combinations of modal and paraconsistent logics. Specifically, we investigated the possibility that Logics of Formal Inconsistency (**LFI**s), introduced in [Carnielli and Marcos, 2002] and developed in [Carnielli, Coniglio and Marcos, 2007] may constitute promising cathodic systems for the treatment of Epistemic-Doxastic Paradoxes.

Keywords: Modality (Logic); Nonclassical mathematical logic; Epistemology; Paradox.

Sumário

Introdução

Pretende-se, neste trabalho, analisar certas lógicas não-clássicas, a saber, lógicas modais paraconsistentes, que ofereçam uma base para o tratamento formal de paradoxos relacionados às lógicas epistêmico-doxásticas, as quais formalizam as noções de conhecimento e crença. Estas são tipos de lógicas modais baseadas na lógica clássica, onde é demonstrável a Lei *Ex Falso Sequitur Quod Libet*, conhecida também como o *Princípio de Explosão.*

Em interpretações epistêmicas, essa característica pode contribuir para a ocorrência de resultados absurdos, a depender do sistema e das hipóteses assumidas. Nas interpretações doxásticas, isto pode implicar que em um sistema que deduza fórmulas contraditórias que envolvam o operador modal de crença, qualquer proposição se seguiria, incluindo toda possível contradição, a qual se espalharia por todo sistema. Porém, assim como no caso epistêmico é possível questionar se os resultados problemáticos ainda se manteriam em uma lógica sem o Ex Falso, é possível no caso doxástico conceber conjuntos de crenças nos quais indivíduos podem isolar crenças contraditórias, suspender julgamentos, e a partir de contradições detectadas, não se segue que acreditem em qualquer proposição.

Em particular, um resultado problemático da lógica epistêmica, que abordamos diretamente nesta dissertação é o *Paradoxo da Cognoscibilidade* ou *Paradoxo de Fitch.* Este resultado é controverso porque implicaria no absurdo de sermos oniscientes em relação ao conhecimento. Por outro lado, negando a hipótese que gera o absurdo, a saber, o Princípio de Cognoscibilidade o qual afirma que toda verdade é passível de ser conhecida, a ocorrência do Paradoxo parece implicar que há verdades cujo conhecimento seria impossível. Essa ideia encontra amparo em demonstrações famosas como o Teorema de Incompletude de Gödel. Tratamos aqui também da contraparte doxástica do Paradoxo da Cognoscibilidade, conhecida como Paradoxo da Credibilidade, a qual julgamos relevante em função de suas peculiaridades.

Na intenção de explorar alternativas de tratamento para os Paradoxos Epistêmico-Doxásticos, investigamos se uma base mais adequada para as lógicas de conhecimento e crença poderia ser encontrada nas *lógicas paraconsistentes*, em particular nas lógicas da inconsistência formal (**LFIs**), as quais internalizam em sua linguagem noções como *consistência* e *inconsistência*, são capazes de definir a negação clássica em sua linguagem e suportam contradições sem cair em trivialização dedutiva. Ao estendermos modalmente as **LFIs**, obtemos os *sistemas catódicos*, ponto central de interesse deste trabalho, por serem lógicas modais com potencial para interpretações epistêmico-doxásticas que suportem contradições, abrindo também possibilidade para representar logicamente agentes epistêmicos menos ideais.

1 Lógicas modais

A *lógica clássica* é caracterizada por conter três princípios fundamentais, a saber: *Identidade*, *Não-Contradição*, *Terceiro Excluído.* A revisão destes princípios ou o acréscimo de novos conceitos geram as chamadas *lógicas não-clássicas*, que se dividem em duas categorias principais: as lógicas *alternativas à clássica* (ou *rivais*), e as *complementares da clássica* (ou *ampliadas*)[1]. As lógicas alternativas ou rivais da clássica são as que se propõem a substituí-la ou enfraquecer alguns de seus princípios fundamentais. Como exemplos temos as *lógicas não-reflexivas*, as quais fazem um contraponto ao Princípio de Identidade, as *lógicas paraconsistentes*, que enfraquecem o Princípio de Não-Contradição, as *lógicas polivalentes*, que vão de encontro ao Princípio do Terceiro Excluído, etc. Por sua vez as lógicas complementares da clássica se propõem a acrescentar operadores novos e princípios a eles relativos, bem como novas interpretações. Como exemplos, temos os vários tipos de *lógicas das modalidades.*

Lógicas modais são lógicas não-clássicas *complementares* que formalizam noções modais, ou seja, o *modo* pelo qual uma proposição é enunciada. As modalidades que podem ser tratadas formalmente por estas lógicas incluem as *aléticas*(referentes às noções de necessidade e possibilidade), *temporais*(tempo), *epistêmico-doxásticas* (conhecimento e crença), *dinâmicas*(mudanças de estado), dentre outras. O artifício pelo qual as modalidades podem ser expressas nestas lógicas consiste em introduzir *operadores*[2] *modais* como primitivos nas linguagens de base da lógica clássica, estendendo-a assim.

Os símbolos usualmente introduzidos para representar os operadores modais são: "$\Box$"(box), e "$\Diamond$"(diamond), os quais correspondem ao operador modal forte e seu dual, respectivamente.[3]

1.1 Aspectos históricos das lógicas das modalidades

Embora não tenha havido total desenvolvimento, Aristóteles (384-322 a.C.), criador da teoria dos silogismos e considerado fundador da lógica, também criou uma teoria do *silogismo modal.* Um silogismo modal[4] utilizava em suas premissas proposições *apodíticas*, ou seja, as que continham o termo "necessário", e as proposições *problemáticas*, que por

[1] As lógicas alternativas (terminologia presente em [Haack, 1998]) também são denominadas como *heterodoxas*, conforme apresentado em [da Costa, 1980].

[2] Ou "*conectivos*". Ao longo deste trabalho utilizaremos os termos "operador" e "conectivo" indistintamente.

[3] Como referência para uma introdução à lógica modal, sugerimos [Blackburn, Rijke & Venema, 2001], [Carnielli & Pizzi, 2008], [Chellas, 1980], [Girle, 2000] e [Hughes & Cresswell, 1996].

[4] O termo modal é empregado para denotar o *modo* de apresentação do *ser*.

sua vez continham o termo “possível”. Porém, esta teoria não teve muita repercussão e não se desenvolveu satisfatoriamente(apesar de muito discutida pelos lógicos medievais), em decorrência de alguns motivos, dentre os quais, a falta de uma simbolização adequada e certa confusão entre os conceitos de “possível” e “contingente”.

Um dos problemas que Aristóteles levanta e que demanda um tratamento lógico das modalidades, é o dos *futuros contingentes*, que é suscitado pelo chamado *Argumento da Batalha Naval*[5]:

> [...] Digo, por exemplo, ser necessário que haja ou não haja uma batalha naval amanhã, mas não ser necessário nem que haja uma batalha naval amanhã nem que não haja, não obstante ser necessário que haja ou que não haja uma batalha naval.[6]

Uma questão proeminente aqui é se, enunciadas duas alternativas para o futuro, *necessariamente* se dará alguma delas. Isto demanda esclarecer a noção de *necessidade* que está sendo utilizada, e, se é possível asserir valores de verdade às proposições enunciadas no presente, mas que se referem ao futuro. Se aceitamos que uma proposição sempre verdadeira é necessária[7], a expressão "haverá ou não haverá uma batalha naval amanhã", é sempre verdadeira hoje. Em formulação contemporânea, sendo sua formalização $(p \vee \sim p)$ uma tautologia, teremos $\Box(p \vee \sim p)$. Porém isto não é o mesmo que dizer que cada um dos disjuntos desta tautologia é também necessário, ou seja, da fórmula anterior *não* se segue $(\Box p \vee \Box \sim p)$. Isto porque o princípio de bivalência não se aplica bem às asserções que fazem referência a um futuro contingente. Não sendo possível afirmar ser verdadeiro que haverá uma batalha naval amanhã, e não sendo também possível afirmar ser verdadeira sua contraditória, não é possível também afirmar a necessidade de qualquer um dos disjuntos. Caso façamos isto teríamos que aceitar como consequência que o futuro se encontra determinado. Há comentadores[8] que sustentam ainda que a confusão pode ser evitada esclarecendo o caráter de "necessidade lógica" e o de "necessidade como operador modal", onde a primeira se refere a uma relação entre premissas e conclusão e a segunda se refere a uma qualificação da sentença. Ao afirmar que é necessário que ocorra uma das alternativas, não se está dizendo de fato que uma das sentenças deve ser qualificada como necessária. Aristóteles não teria clara esta distinção, embora demonstrasse estar ciente de alguma ambiguidade a esse respeito.

[5] Uma detida explanação sobre a relação entre as modalidades e os futuros contingentes de Aristóteles pode ser encontrada em [Moraes e Alves, 2009].

[6] *De Interpretatione*, Aristóteles, Cap. 9, 19a23-32.

[7] Aristóteles já parecia sustentar a ideia da regra de *necessitação* ao considerar que, se uma proposição é verdadeira, então é necessária. [*De Interpretatione*, 18a34-34−19a22].

[8] Moraes e Alves, 2009

Os conceitos de possível e necessário foram retomados com Leibniz (1646-1716), na segunda metade do século XVII. Leibniz trabalha estes conceitos a partir de uma abordagem metafísica, utilizando a noção de mundos possíveis. Nesta abordagem, uma proposição necessária seria uma proposição verdadeira em todos os mundos possíveis, e uma proposição possível seria uma proposição verdadeira em ao menos um mundo possível.

Conforme argumenta [Hughes & Cresswell, 1996], a lógica modal próxima ao que conhecemos esboçou seus primeiros traços nas intuições de Hugh MacColl(1837-1909) em [MacColl, 1880]. Definindo os conectivos de disjunção como $(a + b)$, implicação como $(a : b)$, conjunção como (ab), negação como (a'), e $(a = b)$ como $(a : b)(b : a)$ ele estabelece que, das fórmulas abaixo, a primeira seria válida enquanto que a segunda não o seria:

(I) $(a : b) : a' + b$.

(II) $(a : b) = a' + b$.

A razão disto, segundo o autor, é que a negação da implicação afirma que podemos ter a fórmula *a sem necessariamente* ter a fórmula b, enquanto que a negação da disjunção afirma que de fato temos *a e não temos b*. Ou seja, a noção de implicação defendida aqui parece envolver a noção de necessidade, enquanto que a forma disjuntiva poderia denotar uma típica implicação material como a conhecemos hoje. Em [MacColl, 1903], ele define explicitamente seu conectivo de implicação de forma não verofuncional, do seguinte modo: $(a : b) \stackrel{\text{def}}{=} (a' + b)^{\varepsilon}$ (ou, também $(ab')^{\eta}$), onde ε é interpretado como "necessário" e η como "impossível", respectivamente.

Apesar de tratar com noções modais, MacColl não introduziu um sistema que pudesse ser considerado como de lógica modal propriamente dito.

A lógica modal contemporânea tem origem com C. I. Lewis(1883-1964). Lewis, a partir de ideias similares às de MacColl, criticou em muitos de seus trabalhos a noção de implicação material apresentada no *Principia Mathematica* [Russell & Whitehead, 1910]. Suas inquietações eram direcionadas aos chamados *Paradoxos da Implicação Material*, como são conhecidos atualmente. Estes são devidos à interpretação das seguintes fórmulas, que são teoremas do *Principia* e também do cálculo proposicional clássico em geral:

(1) $p \supset (q \supset p)$

(2) $\sim p \supset (p \supset q)$

De (1) e (2), pode-se derivar facilmente:

(3) $(p \supset q) \vee (q \supset p)$.

Estas fórmulas mostram que, se uma fórmula é verdadeira, é implicada por qualquer outra; se é falsa, implica qualquer outra; e consideradas duas fórmulas quaisquer, ou a primeira implica a segunda ou a segunda implica a primeira. Embora Lewis aparentasse estar ciente de que esta é apenas a descrição do comportamento verofuncional da implicação adotada no *Principia*, ele defendia haver outro sentido para a noção de implicação, onde a veracidade da fórmula antecedente seria de fato *relevante* para a veracidade da fórmula consequente, e assim, o comportamento descrito pelas fórmulas acima não se manteria necessariamente.

Lewis procurava criar uma implicação que fosse mais forte que a implicação material da lógica clássica. Para isto precisou utilizar conceitos modais que dessem suporte à sua noção de *implicação estrita*, a qual requeria que uma implicação do tipo $(\alpha \supset \beta)$ fosse "necessária", para quaisquer fórmulas α e β. Ou seja:

$$\alpha \prec \beta \stackrel{\text{def}}{=} \Box(\alpha \supset \beta),$$

onde o operador "$\Box$" formaliza a noção de necessidade lógica. Em outra formulação, a implicação estrita quer dizer que "não é possível" que tenhamos α e não β:

$$\alpha \prec \beta \stackrel{\text{def}}{=} \sim\Diamond(\alpha \wedge \sim\beta),$$

e aqui o símbolo "$\Diamond$" formaliza a noção de possibilidade lógica.

O diferencial de Lewis na fundação da lógica modal contemporânea foi ter utilizado recursos apresentados no próprio *Principia Mathematica*, objeto de sua crítica, em particular a adoção do *método axiomático* apresentado neste, para introduzir os primeiros *sistemas modais*. Em sua obra *A Survey of Symbolic Logic* [Lewis, 1918], a impossibilidade lógica é tomada como operador modal primitivo em um sistema axiomático chamado *Sistema Survey*. O Sistema *Survey* é estendido em [Becker, 1930] por alguns axiomas adicionais que permitem demonstrar que todas as modalidades podem ser reduzidas a um pequeno número delas, independentes entre si. Em [Lewis & Langford, 1932] são desenvolvidos os sistemas **S1** e **S2** para a implicação estrita, que tomam como operador modal primitivo a possibilidade. No apêndice da mesma obra é retomado o sistema *Survey*, que é apresentado como **S3**, e, através dos postulados de redução apresentados em [Becker, 1930], são propostos mais dois sistemas, chamados de **S4** e **S5**. Desde o princípio Lewis assume que, se uma proposição é necessária então ela é verdadeira, de modo que, com as devidas adaptações, seus sistemas têm como base o sistema **T**[9], o qual será introduzido adiante. Atualmente, além de **T**, os sistemas modais mais conhecidos incluem os sistemas **K**, **D**, **B**, **S4** e **S5**, os quais apresentaremos neste trabalho.

De início, o desenvolvimento da lógica modal se deu em um caráter eminentemente sintático, através da introdução de operadores, regras de formação e axiomas. Somente com Saul Kripke [1963 apud Mortari, 2001] tivemos um tratamento formal para uma semântica da lógica modal. Kripke retoma as noções de necessidade e possibilidade abordadas por Leibniz e as define em função da noção de mundos possíveis, introduzindo, no entanto, um novo componente: a relação de acessibilidade entre esses mundos. Assim, uma proposição necessária seria uma proposição verdadeira em todos os mundos possíveis acessíveis a um mundo dado, enquanto que uma proposição possível seria uma proposição verdadeira em ao menos um mundo possível acessível a um mundo dado.

1.2 Lógicas modais aléticas

A maior parte das lógicas modais já citadas se distingue uma da outra pelas interpretações que atribuem a estes operadores, sendo a interpretação alética destes a mais comum para ilustrar as características básicas de sistemas modais. Nesta interpretação, os operadores "$\Box$" e "$\Diamond$" são lidos como "é necessário que" e "é possível que", respectivamente.

A semântica mais utilizada para estas lógicas é a *semântica de mundos possíveis*, cujas primeiras inspirações foram atribuídas a Leibniz(1646-1716), mas chegaram ao seu status de semântica formal para as lógicas modais com Saul Kripke(1940 -). Devido a Kripke, essas semânticas têm como ponto essencial a *relação de acessibilidade* definida entre os pontos, nós ou mundos possíveis que pertencem a um universo em um modelo. Assim, tomando-se como referência um mundo específico do modelo, o qual será considerado o mundo *atual*, uma proposição será considerada *necessária* se for verdadeira em todos os mundos acessíveis ao mundo dado. Caso seja verdadeira em ao menos um(que seja acessível ao primeiro), a proposição será considerada *possível*, com relação ao mundo de referência.

1.2.1 Linguagem

Seja $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ uma assinatura para a lógica modal modal, em que $\Sigma_1 = \{\Box, \sim\}$ e $\Sigma_2 = \{\supset\}$, e seja $Var = \{p, q, ..., p_0, q_0, ...\}$ um conjunto de variáveis proposicionais. Os

[9] A rigor, os sistemas de Lewis não são o sistema **T**, mas para fórmulas simples de primeiro grau, não há diferenças entre o sistema **T** e os sistemas de Lewis.

elementos de Var são chamados *fórmulas atômicas* e o conjunto $For^{\Box}$ das *fórmulas bem formadas* (fbfs) é definido recursivamente da seguinte forma:

- se $\varphi \in Var$, então $\varphi \in For^{\Box}$;
- se φ e $\psi \in For^{\Box}$, então $(\varphi \supset \psi) \in For^{\Box}$;
- se $\varphi \in For^{\Box}$, então $\sim\varphi$, $\Box\varphi \in For^{\Box}$.
- Nada mais é fórmula.

Definimos os conectivos $\vee$, $\wedge$ e $\leftrightarrow$ da seguinte forma:

- $(\alpha \vee \beta) \stackrel{\text{def}}{=} (\sim\alpha \supset \beta)$
- $(\alpha \wedge \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \sim(\alpha \supset \sim\beta)$
- $(\alpha \leftrightarrow \beta) \stackrel{\text{def}}{=} ((\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha))$

O operador modal $\Diamond$ também é introduzido por definição:

$$\Diamond\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sim\Box\sim\alpha.$$

A partir de agora, podemos omitir o uso de alguns parênteses nas expressões bem formadas nos casos em que isto não causar ambiguidades.

Seja $\Gamma \cup \alpha \subseteq For^{\Box}$ e $\vdash \subseteq \wp(For^{\Box}) \times For^{\Box}$ uma relação de consequência, em que $\wp(For^{\Box})$ indica o conjunto das partes de $For^{\Box}$. Esta relação de consequência é denominada *tarskiana*, se satisfaz as seguintes condições:

(Con1) $\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$ (*reflexividade*)[10]

(Con2) $(\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \subseteq \Gamma) \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$ (*monotonicidade*)

(Con3) $(\Delta \vdash \alpha$ e $\alpha \vdash \beta) \Rightarrow \Delta \vdash \beta$ (*transitividade*)[11]

Além disso, a relação de consequência $\vdash$ pode ser também *finitária* e *estrutural*, quando satisfaz:

(Con4) $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma^{fin} \vdash \alpha$, para algum finito $\Gamma^{fin} \subseteq \Gamma$ (*compacidade*)[12]

[10] Ou *autodedutibilidade*.
[11] Ou *corte*.
[12] Ou *dedutibilidade finita*.

(Con5) $\Gamma \vdash\alpha \Rightarrow \varepsilon(\Gamma)\vdash\varepsilon(\alpha)$ (*estruturalidade*),

quando a função de mapeamento ε :$Var\rightarrow For$ é uma extensão homomórfica única(um *endomorfismo* em For). Uma relação de consequência estrutural preserva endomorfismos[13].

Assumiremos, neste trabalho, que a relação de consequência, além de tarskiana, também é finitária e estrutural.

1.2.2 Axiomas e regras

Seguem alguns esquemas de axiomas muito conhecidos em lógica modal e regras de inferência usuais:

(**PC**): todos os esquemas de teoremas do cálculo proposicional clássico

(**K**): $\Box(\varphi \supset \psi) \supset (\Box\varphi \supset \Box\psi)$

(**D**): $\Box\varphi \supset \Diamond\varphi$

(**T**): $\Box\varphi \supset \varphi$

(**4**): $\Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$

(**B**): $\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$

(**5**): $\Diamond\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$

Modus Ponens (**MP**): α, $\alpha \supset \beta \vdash\beta$

Regra de Necessitação (**Nec**): $\vdash\alpha$ implica $\vdash\Box\alpha$.

Alguns dos axiomas apresentados podem ser introduzidos com formulações equivalentes, por exemplo:

(**K**): $(\Box(\varphi \supset \psi) \wedge \Box\varphi) \supset \Box\psi$

(**D**): $\sim(\Box\varphi \wedge \Box\sim\varphi)$

(**T**): $\varphi \supset \Diamond\varphi$

[13]Esta propriedade se expressa na regra de *Substituição Uniforme* ou no uso de esquemas metalinguísticos para fórmulas.

(**4**): $\Diamond\Diamond\varphi \supset \Diamond\varphi$

(**B**): $\sim\varphi \supset \Box\sim\Box\varphi$

(**5**): $\sim\Box\varphi \supset \Box\sim\Box\varphi$

A adoção de um ou mais esquemas de axiomas em um sistema modal depende da interpretação que dispensamos aos mesmos e das propriedades que desejamos em um sistema. Caso interpretemos o operador $\Box$ de modo epistêmico, por exemplo, o Axioma (**T**), em sua formulação padrão, pode ser interpretado como "se uma proposição é conhecida, então é o caso", o que é aceito na maioria dos sistemas de lógica epistêmica, como veremos em breve[14]. Porém se a interpretação desse operador for de natureza moral, expressando a noção de "obrigação", então não seria desejável introduzi-lo em sistemas modais que tratem de inferências relacionadas a *dever*, pois a interpretação do Axioma seria algo como "se uma proposição é obrigatória(em termos de necessidade moral), então é o caso". Naturalmente essa leitura vai contra nossas intuições. Porém o mesmo não ocorre com o Axioma (**D**), o qual se mostra válida para o contexto de necessidade moral, pois sua interpretação seria "se uma proposição é obrigatória então é ao menos permitida". O fato de que o Axioma é denotado pela letra "D" se deve exatamente por sua interpretação, chamada *deôntica*, e o sistema modal composto pelos Axiomas (**K**) e (**D**)[15] é por vezes chamado de **DSL** (*Standard Deontic Logic*)[16]. O Axioma (**4**), tomado em interpretação alética, pode suscitar questões sobre em que condições uma proposição necessária é necessariamente necessária, e, no uso cotidiano e intuitivo da noção de necessidade é incomum ocorrer o tipo de redundância que este esquema expressa, problema que é resolvido do ponto de vista formal através de leis de redução de modalidades iteradas, como veremos. No entanto, o esquema parece ser plausível quando tratamos de uma proposição logicamente necessária. Em sistemas de lógica epistêmica, porém, esse esquema se mostra adequado para representar a propriedade de introspecção do conhecimento (se um agente sabe uma proposição, ele sabe que o sabe), e a transitividade do conhecimento em sistemas epistêmicos multiagentes (se um agente a sabe que um agente b sabe que φ, então a sabe que φ).

[14] Nesses sistemas, o Axioma (**T**) (por vezes também chamado de Axioma (**M**)), é chamado como *Princípio de Veridicalidade* ou *Axioma da Veracidade*, pois expressa a ideia de que só podemos de fato conhecer proposições verdadeiras.

[15] O primeiro sistema modal deôntico foi concebido em 1951 por Georg Henrik von Wright (1916-2003). Von Wright também propiciou o primeiro tratamento da noção de conhecimento como operador modal, inaugurando a lógica epistêmica em 1957. No entanto, foi Jaakko Hintikka quem desenvolveu a lógica epistêmica padrão, em 1962, sendo considerado então seu fundador.

[16] *Lógica Deôntica Padrão.*

O Axioma (**B**) é considerado um princípio de algum modo ligado à lógica intuicionista. Como ilustrado em [Hughes e Cresswell, 1996], nessa lógica, enquanto um esquema de fórmula da forma $\varphi \supset {\sim}{\sim}\varphi$ é válido, não se pode dizer o mesmo de sua recíproca, ${\sim}{\sim}\varphi \supset \varphi$. Tomando a interpretação do conectivo $\sim$ de uma maneira modal, precisamente como "é necessário que não"(ou "não é possível que"), o esquema ${\sim}{\sim}\varphi \supset \varphi$ se tornaria $\Box{\sim}\Box{\sim}\varphi \supset \varphi$, ou seja, $\Box\Diamond\varphi \supset \varphi$. Por sua vez, o esquema $\varphi \supset {\sim}{\sim}\varphi$ se torna $\varphi \supset \Box{\sim}\Box{\sim}\varphi$, ou seja, $\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$, o mesmo Axioma (**B**)[17].

1.2.3 Sistemas normais

Um sistema S de lógica modal é considerado *normal* quando, dado um conjunto Γ de fórmulas e $\Box\Gamma = \{\Box\varphi | \ \varphi \in \Gamma\}$, se $\Gamma \vdash_S \psi$ então $\Box\Gamma \vdash_S \Box\psi$. Os sistemas normais contêm em comum (**PC**), (**K**), (**MP**) e (**Nec**), sendo que o sistema conhecido como **K** é considerado o sistema normal mais básico ou minimal que contém essas características.

Existem alguns sistemas normais bem típicos, constituídos pela adição de um ou mais axiomas ao sistema **K**. São estes:

- Sistema **D** ou **KD**: **K** + (**D**);
- Sistema **T** ou **KT**: **K** + (**T**);
- Sistema **S4** ou **KT4**: **T** + (**4**);
- Sistema **B** ou **KTB**: **T** + (**B**);
- Sistema **S5** ou **KT5**: **T** + (**5**).

1.2.4 Teoremas modais e Regras Derivadas

Seguem alguns exemplos de teoremas que podem ser obtidos em cada um dos sistemas apresentados.[18]

*Teoremas de **K***

(K.1) $\Box(\varphi \wedge \psi) \supset (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$

[17] Este Axioma é denominado comumente como *Axioma Brouweriano* em referência à Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881- 1966), o fundador da proposta intuicionista da matemática.

[18] Quase todas as demonstrações dos teoremas e regras derivadas de **K**, assim como de suas extensões normais aqui apresentadas podem ser encontradas em [Hughes e Cresswell, 1996].

(K.2) $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \supset \Box(\varphi \wedge \psi)$

(K.3) $\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$

(K.4) $(\Box\varphi \vee \Box\psi) \supset \Box(\varphi \vee \psi)$

(K.5) $\Box\varphi \leftrightarrow {\sim}\Diamond{\sim}\varphi$

(K.6) $\Box{\sim}\varphi \leftrightarrow {\sim}\Diamond\varphi$[19]

(K.7) $\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$

(K.8) $\Diamond(\varphi \supset \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \supset \Diamond\psi)$

(K.9) $\Diamond(\varphi \wedge \psi) \supset (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)$

(K.10) $\Box(\varphi \vee \psi) \supset (\Box\varphi \vee \Diamond\psi)$

São *regras derivadas* de **K**:

(RD1) $\vdash \alpha \supset \beta \Rightarrow \vdash \Box\alpha \supset \Box\beta$

(RD2) $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \vdash \Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta$

(RD3) $\vdash \alpha \supset \beta \Rightarrow \vdash \Diamond\alpha \supset \Diamond\beta$

Teorema de ***D***

(D.1) $\Diamond(\varphi \supset \varphi)$

Teoremas de ***T***

(T.1) $\varphi \supset \Diamond\varphi$

(T.2)$\Diamond(\varphi \supset \Box\varphi)$

---

[19] A demonstração deste teorema, embora não esteja presente em [Hughes e Cresswell, 1996], é simples:

1.	$\Box{\sim}\varphi \leftrightarrow {\sim}{\sim}\Box{\sim}\varphi$	[(**PC**)]
2.	$\Box{\sim}\varphi \leftrightarrow {\sim}\Diamond\varphi$	[1, Def$_\Diamond$]

$\Box$

*Teoremas de **S4***

(S4.1) $\Diamond\Diamond\varphi \supset \Diamond\varphi$

(S4.2) $\Diamond\Box\Diamond\varphi \supset \Diamond\varphi$

(S4.3) $\Box\Diamond\varphi \supset \Box\Diamond\Box\Diamond\varphi$

(S4.4) $\Diamond\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box\varphi$

Em **S4** é possível também demonstrar algumas equivalências que agem como *Leis de Redução* sobre a iteração dos operadores modais de uma fórmula:

(LR1) $\Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\Diamond\varphi$

(LR2) $\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\Box\varphi$

(LR3) $\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\Diamond\varphi$

(LR4) $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\Box\varphi$

*Teorema de **B***

(B.1) $\Diamond\Box\varphi \supset \varphi$

Em **B** é possível também demonstrar uma nova regra derivada:

(RD4) $\vdash\Diamond\alpha \supset \beta \Rightarrow \vdash\alpha \supset \Box\beta$

*Teoremas de **S5***

(S5.1) $\Diamond\Box\varphi \supset \Box\varphi$

(S5.2) $\Box(\varphi \vee \Box\psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \vee \Box\psi)$

(S5.3) $\Box(\varphi \vee \Diamond\psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \vee \Diamond\psi)$

(S5.4) $\Diamond(\varphi \wedge \Diamond\psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi)$

(S5.5) $\Diamond(\varphi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow (\Diamond\varphi \wedge \Box\psi)$

(S5.6) $\sim\Box\varphi \supset \Box\sim\Box\varphi$.

1.2.5 Semântica para as lógicas modais normais

Um *modelo relacional* para as lógicas modais normais é uma terna ordenada $\mathfrak{M} = \langle W, R, v\rangle$ baseada em um $frame$[20] $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$, tal que:

- W é um conjunto não-vazio de mundos possíveis, pontos ou nós;
- $R \subseteq W \times W$ é uma *relação de acessibilidade* definida sobre os mundos em W;
- v: $Var \times W \rightarrow \{0, 1\}$ é uma função que satisfaz as seguintes condições[21]:

  (i) $v(p, w) = 1$ ou $v(p, w) = 0$;

  (ii) $v(\alpha \wedge \beta, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w) = v(\beta, w) = 1$;

  (iii) $v(\alpha \vee \beta, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w) = 1$ ou $v(\beta, w) = 1$;

  (iv) $v(\alpha \supset \beta, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w) = 0$ ou $v(\beta, w) = 1$;

  (v) $v(\sim\alpha, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w) = 0$;

  (vi) $v(\Box\alpha, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w') = 1$, para todo $w' \in W$ tal que wRw'.

Seguem algumas definições semânticas importantes:

- Uma fórmula α é *satisfeita* em um modelo $\mathfrak{M}$, se existe um mundo $w \in W$ tal que $v(\alpha, w) = 1$.
- Uma fórmula α é *válida* em um modelo $\mathfrak{M}$ (ou $\mathfrak{M}$-válida), se $v(\alpha, w) = 1$, para todo $w \in W$, o que representamos como $\mathfrak{M} \vDash \alpha$.
- Uma fórmula α é *válida no frame* $\mathfrak{F}$, se é válida em todo modelo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F}$, o que denotamos $\mathfrak{F} \vDash \alpha$.
- Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas da linguagem de uma lógica **L**. Dizemos que α é *consequência semântica* de Γ com respeito a uma classe de $frames$ $\mathcal{F}$ se:

  $$\mathfrak{F} \vDash \Gamma \text{ implica } \mathfrak{F} \vDash \alpha,$$

  para cada $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$, onde $\mathfrak{F} \vDash \Gamma$ significa que $\mathfrak{F} \vDash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Podemos representar esta relação de consequência como $\Gamma \vDash^{\mathbf{L}}_{\mathcal{F}} \alpha$, ou simplesmente $\Gamma \vDash_{\mathcal{F}} \alpha$.

[20] Ou *enquadramento.*

[21] Alternativamente, v pode ser caracterizada como uma função V: $Var \rightarrow \wp(W)$ tal que $V(p)=\{w_n\}$, para $w_n \in W$ e $p \in Var$, ou seja, é uma função que toma variáveis proposicionais e gera o conjunto de mundos nos quais as mesmas são verdadeiras.

1.2.6 Correção e Completude para as Lógicas Modais Normais

Os metateoremas de *Correção* e *Completude* são importantes resultados que demonstram a equivalência entre as noções de *validade*(com respeito a uma determinada classe de frames) e de *demonstrabilidade* em cada lógica modal normal caracterizada por tais frames. De forma geral, para alguma lógica modal normal **L** e para alguma fórmula $\varphi \in For^{\Box}$, o Teorema da Correção estabelece que:

$$\text{Se } \mathbf{L}\vdash \varphi, \text{ então } \mathcal{F}_{\mathbf{L}}\vDash \varphi,$$

onde $\mathcal{F}_{\mathbf{L}} = \{\mathfrak{F}|\ \mathfrak{F}$ é um frame que tem uma relação de acessibilidade característica para a lógica $\mathbf{L}\}$, e $\mathcal{F}_{\mathbf{L}}\vDash \varphi$ quer dizer que $\mathfrak{F} \vDash \varphi$ para todo $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$.

Por sua vez, o Teorema da Completude enuncia que:

$$\text{Se } \mathcal{F}_{\mathbf{L}}\vDash \varphi, \text{ então } \mathbf{L}\vdash \varphi.$$

Os axiomas que caracterizam cada sistema lógico são validados por diferentes tipos de frame, que são distinguidos entre si por suas relações de acessibilidade. Isto é fundamental para construir provas de correção e completude para cada sistema. As relações de acessibilidade que definem cada tipo de frame são as seguintes:

- *Serialidade*: A relação de acessibilidade R é serial, sse[22], $\forall x\exists y(xRy)$, para x, $y \in W$;
- *Reflexividade*: A relação de acessibilidade R é reflexiva, sse, $\forall x(xRx)$, para $x \in W$;
- *Simetria*: A relação de acessibilidade R é simétrica, sse, $\forall x\forall y(xRy \Rightarrow yRx)$, para x, $y \in W$;
- *Transitividade*: A relação de acessibilidade R é transitiva, sse, $\forall x,y,z(xRy$ e $yRz \Rightarrow xRz)$, para x, $y \in W$;
- *Euclidiana*: A relação de acessibilidade R é de euclidiana, sse, $\forall x,y,z(xRy$ e $xRz \Rightarrow yRz)$, para x, $y \in W$.

A partir das relações acima, classificamos também os tipos de frames:

[22] Abreviação de "se, e somente se", que utilizaremos com frequência sempre que for conveniente. Utilizamos também, como abuso de notação, quantificadores, no intuito de clarificar algumas propriedades sem no entanto adotar de fato uma lógica de primeira ordem.

Frame serial: Contém a relação de acessibilidade serial e permite caracterizar semanticamente o axioma (**D**);

Frame reflexivo: Contém a relação de acessibilidade reflexiva e permite caracterizar semanticamente o axioma (**T**);

Frame simétrico: Contém a relação de acessibilidade simétrica e permite caracterizar semanticamente o axioma (**B**);

Frame transitivo: Contém a relação de acessibilidade transitiva e permite caracterizar semanticamente o axioma (**4**);

Frame euclidiano: Contém a relação de acessibilidade euclidiana e permite caracterizar semanticamente o axioma (**5**).

Cada sistema modal normal pode ser caracterizado semanticamente por um ou mais tipos de frames a depender dos axiomas que são adotados.

1.3 Lógicas epistêmico-doxásticas

Lógicas epistêmicas são aquelas que pretendem tratar formalmente a noção de conhecimento, enquanto as *lógicas doxásticas* pretendem fazê-lo com a noção de crença. A maioria dos sistemas lógicos intercambia as duas noções, sendo então denominados de *lógicas epistêmico-doxásticas*, ou, simplesmente, lógicas epistêmicas, quando assumem o princípio de que não é possível *saber* uma proposição sem *acreditar* nela.

A maioria destes sistemas é um tipo particular de lógica modal com interpretações especiais dos operadores modais, a saber, "$\Box\alpha$" é interpretado epistemicamente como "sabe-se que"(o que é usualmente formalizado pelo operador "K"), e doxasticamente como "acredita-se que"(formalizado pelo operador "B"). Embora não seja tão comum, em função da interdefinibilidade dos operadores modais, alguns autores também interpretam o operador $\Diamond$. Assim, "$\Diamond\alpha$" epistemicamente é interpretado como "é consistente com tudo o que se sabe"(formalizado como o operador "P"), e doxasticamente como "é compatível com tudo o que se acredita"(formalizado como o operador "C").[23]

[23] A exemplo da seção anterior, apresentamos aqui apenas conceitos e resultados fundamentais necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Como referência básica para o estudo das lógicas epistêmico-doxásticas temos [Hintikka, 1962]. Sugerimos de forma complementar [Girle, 2000], [Mortari, 1999] e [Van Ditmarsch, Van Der Hoek e Kooi, 2008].

Há vários sistemas de lógica epistêmica, em sua maioria baseados em sistemas normais de lógica alética. No entanto, alguns são considerados mais adequados do que outros para representar agentes de crença ou de conhecimento, a depender das peculiaridades dos axiomas e regras adotados. Por exemplo, o sistema apresentado em [Hintikka, 1962] como modelo para conhecimento é uma interpretação do sistema alético **KT4**, e para crença, o sistema **KD4**. No entanto, segundo [Mortari, 1999], é frequente que o sistema **KT5** seja modelado para conhecimento, enquanto a versão mais fraca **KD45** seja o modelo para crença[24]. Girle em [Girle, 2000] alerta para os problemas levantados por uma lógica de conhecimento baseada em **KT5**, mostrando algumas consequências consideradas contra-intuitivas, grande parte delas no escopo das lógicas normais.

A semântica utilizada para estas lógicas, desde que as mesmas sejam modais, permanece sendo a semântica dos mundos possíveis, ou *semântica de Kripke*. A diferença aqui é que a noção de mundos possíveis será interpretada como *estados epistemicamente alternativos* ou *epistemicamente possíveis*. E a relação de acessibilidade entre estes estados se baseará na ideia do que é *concebível* epistemicamente a partir de um estado dado. Por exemplo, um agente a saberá que p se, e somente se, p for concebível em todas as suas alternativas de conhecimento. O mecanismo funciona de modo similar para atitudes de crença.

Há famosos problemas filosóficos suscitados pelas lógicas de conhecimento e crença, principalmente as baseadas em sistemas normais. Seguem alguns deles:

- *O problema da Onisciência Lógica*(e seu correlato, da *Onicredência Lógica*)

  O agente representado conhece automaticamente todos os teoremas de uma lógica, neste caso epistêmica. Este tipo de onisciência é descrita como *tese da onisciência lógica forte*,[25] resultado de adotar e interpretar em termos epistêmicos a regra Nec. Ou seja, se α é um teorema de uma lógica epistêmica, então um agente representado por esta lógica automaticamente sabe que α. O mecanismo é o mesmo para agentes representados por lógicas doxásticas, no que concerne à *onicredência lógica*.

  Em particular, temos também a *tese da onisciência lógica fraca*[26], incluída na anterior. Neste caso α seria um teorema da lógica proposicional clássica e os agentes representados também saberiam automaticamente que α.

[24] O autor indica [Halpern e Moses, 1984] e [Moore, 1985], como exemplos.

[25] *Strong logical omniscience thesis (SLOT)*. Ver [Girle, 2000].

[26] *Weak logical omniscience thesis (WLOT)*. Agentes considerados pelo menos fracamente logicamente oniscientes são descritos como *agentes cartesianos*, segundo [Girle, 2000].

As duas formas de onisciência descritas geram controvérsias entre filósofos e lógicos que se dedicam à representação de conhecimento, pois os agentes em questão são considerados exageradamente idealizados. De fato, não é trivial aceitar que um agente conhecerá automaticamente todas as leis de uma lógica, ou, em particular, que conhecerá automaticamente uma tautologia constituída por, digamos, 400 variáveis proposicionais[27].

- *O problema da Onisciência Dedutiva* (e seu correlato, da *Onicredência Dedutiva*)

  Um agente ideal é considerado *dedutivamente onisciente* se conhece todas as consequências daquilo que sabe. Essa característica é resultado de se adotar nas lógicas de conhecimento o Axioma (**K**), interpretado epistemicamente, juntamente com a regra Nec epistêmica. Neste aspecto, os agentes ideais de todos os sistemas normais são dedutivamente oniscientes, pois são regidos pelo axioma (**K**) e Nec[28]. O mecanismo é o mesmo para as lógicas de crença.

  Similar à crítica do tópico anterior, mesmo aceitando algum grau de idealização, não é ponto pacífico que um agente de conhecimento ou crença tenha como característica essencial conhecer ou acreditar em tudo o que se segue do que sabe ou acredita. Mesmo em teorias axiomatizadas é possível conceber situações onde haja proposições verdadeiras e não demonstráveis a partir dos axiomas de alguma teoria. Daí a interpretação epistêmica de (**K**) nestas lógicas é problemática.

- *Os problemas de Introspecção*

  Em sistemas que adotam o Axioma (**4**) epistemicamente interpretado, $K\varphi \supset KK\varphi$, e, a onisciência lógica forte simultaneamente, os agentes sabem todas as verdades da lógica epistêmica, e assim, sabem que o sabem, dotando o sistema da propriedade da *introspecção positiva*[29] em relação às leis da lógica. Por outro lado,

[27] A esse respeito, [Almeida, 2011] nos lembra que "até um computador eletrônico poderia carecer de capacidade computacional para verificar se uma fórmula é teorema, caso sua demonstração fosse muito grande".

[28] A exemplo da (RD1) apresentada na Subseção **1.2.4**, o axioma (**K**) e a regra Nec epistêmicos permitem a seguinte regra derivada: $\vdash \varphi \supset \psi \Rightarrow \vdash K\varphi \supset K\psi$. Nomeada como *Regra de Regularidade Epistêmica* em [Almeida, 2011], esta regra implica também que se alguém conhece todos os axiomas de uma teoria, conhece todos os seus teoremas.

[29] Conforme esclarece [Almeida, 2011], este nome se deve ao fato de que o axioma versa acerca do conhecimento sobre o próprio conhecimento. No caso doxástico trata da crença sobre a própria crença, o que é representado pela fórmula: $B\varphi \supset BB\varphi$. Em sistemas onde as noções de conhecimento e crença são intercambiáveis entre si, podemos ter ainda como axiomas as fórmulas $B\varphi \supset KB\varphi$ (se um agente acredita que φ então ele sabe que acredita em φ) e $B\varphi \supset BK\varphi$ (se um agente acredita que φ então ele acredita que sabe que φ).

com a introdução do Axioma (**5**) epistêmico, $\sim K\varphi \supset K\sim K\varphi$ [30], temos a propriedade da *introspecção negativa*[31]. As duas características são controversas, sendo a primeira alvo da crítica que aponta não ser razoável que um agente conheça automaticamente todas as leis de uma determinada lógica, e, para evitar contra-exemplos que depõem contra a noção de "conhecimento sobre o próprio conhecimento", deve buscar uma definição de conhecimento cujas implicações filosóficas extrapolam a própria lógica, acabando muitas vezes por idealizar mais ainda os agentes representados. No segundo caso, é possível conceber contextos onde o agente parece ter acesso até mesmo à proposição que não conhece, tornando a introspecção negativa uma característica muito excêntrica para um agente de conhecimento que possa ser considerado razoável.

- *Conjuntos contraditórios de crenças*

Este último item é de interesse central para este trabalho. Como já dito, a maior parte dos sistemas de lógica epistêmica tem como lógica de base a clássica, em função de sua herança alética. Em presença de contradições esses sistemas explodem, ou seja, incorrem em trivialização dedutiva em virtude da validade do princípio clássico *Ex Falso Sequitur Quod Libet*[32]. Essa característica é passada também às lógicas doxásticas, onde, de um conjunto contraditório de crenças, ou quando destas se seguem consequências contraditórias, o sistema entra em trivialização dedutiva, ou seja, segue-se que o agente acreditaria em qualquer coisa, incluindo outras contradições. A questão é que agentes de crenças mais próximos a agentes reais isolam contradições quando as encontram, e daí não se segue que acreditem em qualquer coisa. A contradição entra em uma espécie de quarentena, até que haja novas informações que possibilitem uma revisão de crença, ou, há tantas evidências em favor de uma proposição quanto em favor de sua contraditória(como por exemplo acreditar nos pressupostos da mecânica quântica e da física da relatividade simultaneamente, cujos princípios até o momento são inconciliáveis), o que não torna o sistema de crenças trivial.[33]. Sobre esse tema, a posição de autores como [Mortari, 1999] é

[30] Notemos que este esquema de fórmula corresponde ao teorema alético (S5.6) apresentado na Subseção **1.2.4**.

[31] Este termo se deve ao fato de que o axioma trata do conhecimento sobre a própria ignorância, sendo que no caso doxástico falaríamos de crença sobre a própria descrença: $\sim B\varphi \supset B\sim B\varphi$. Outros esquemas que podem ainda ser acrescentados como axiomas de introspecção negativa em sistemas que intercambiam conhecimento e crença são $\sim B\varphi \supset K\sim B\varphi$ (se um agente não acredita em φ então sabe que não acredita em φ), e $\sim K\varphi \supset B\sim K\varphi$ (se alguém não sabe que φ, então acredita que não sabe que φ).

[32] $\alpha \supset (\sim\alpha \supset \beta)$, ou seja, de uma contradição tudo se segue. Ver [Gomes e D'Ottaviano, 2017].

[33] Uma breve problematização sobre o comportamento de agentes de crenças reais pode ser encontrada em [Girle, 2000].

a de que fazer sistemas de lógica epistêmica requer algum grau de idealização e que a lógica epistêmica(ou doxástica) não procura descrever como as pessoas realmente acreditam, pois alguém poderia se aferrar a sua crença mesmo quando estas são provadas como falsas. No entanto, o que está em jogo aqui não é lidar com a questão de um agente que se apega às suas crenças falsas(movimento amplamente permitido pela própria lógica epistêmica onde um agente pode acreditar em uma proposição falsa), mas, quando o conjunto de crenças inevitavelmente produz uma contradição, evitar que o mesmo trivialize dedutivamente.

1.4 Os Paradoxos Epistêmico-Doxásticos

Os Paradoxos Epistêmico-Doxásticos são resultados controversos em sistemas alético-epistêmicos e alético-doxásticos, respectivamente, onde ocorrem resultados absurdos do ponto de vista intuitivo. Esses resultados, demonstrados formalmente nos sistemas modais nos quais ocorrem, afirmam algo que dificilmente alguém estaria disposto a aceitar, a saber, que todas as verdades são conhecidas(o que constitui o Paradoxo da Cognoscibilidade), e que todas as verdades são acreditadas(o que constitui o Paradoxo da Credibilidade). Nas seções a seguir mostraremos como os Paradoxos ocorrem e também indicaremos algumas soluções existentes na literatura consultada, apresentando ao fim um esboço de como pretendemos desenvolver nossa abordagem.

1.4.1 O Paradoxo da Cognoscibilidade

O Paradoxo da Cognoscibilidade é um resultado da lógica epistêmico-alética que leva ao colapso do operador epistêmico, ou seja, o fato de uma proposição φ ser verdadeira equivale a saber que φ. É conhecido também como *Paradoxo de Fitch*, devido a Frederic B. Fitch, que o publicou em 1963 em seu artigo intitulado *A Logical Analysis of Some Value Concepts* no periódico *The Journal of Symbolic Logic*(ver [Fitch, 1963])[34].

A essência do Paradoxo está contida na proposição contida no *Teorema 5* de seu artigo:

> Se há alguma proposição verdadeira que ninguém sabe(ou soube ou saberá) ser verdadeira, então há uma proposição verdadeira que ninguém pode saber ser verdadeira.([Fitch, 1963])

[34] O próprio Fitch atribui o resultado a um referee anônimo de uma versão não publicada de seu trabalho em 1945. Atualmente, em decorrência das pesquisas de Joe Salerno([Salerno, 2006]), estudioso do Paradoxo, considera-se que este referee foi na verdade o lógico e matemático americano Alonzo Church(1903-1995).

Com recursos da lógica simbólica contemporânea, em particular com uma linguagem proposicional modal alético-epistêmica[35], podemos formalizar este teorema da seguinte maneira:

$$\vdash (\varphi \wedge {\sim}K\varphi) \supset (\varphi \wedge {\sim}\Diamond K\varphi), \text{ para alguma proposição } \varphi.$$

O Paradoxo em si é obtido através de sua contraposição

$$\vdash {\sim}(\varphi \wedge {\sim}\Diamond K\varphi) \supset {\sim}(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$$

e regras da lógica proposicional clássica:

$$\vdash (\varphi \supset \Diamond K\varphi) \supset (\varphi \supset K\varphi)^{36}.$$

O antecedente da implicação, como veremos, é conhecido como *Princípio de Cognoscibilidade*, e enuncia que, se alguma proposição é verdadeira então é passível de ser conhecida. A consequência de se adotar este Princípio é que, se uma proposição é verdadeira, então é conhecida, fazendo com que o agente representado por esta lógica seja onisciente. E mais, em uma lógica epistêmica na qual vale o *Princípio de Veracidade*: $K\varphi \supset \varphi$[37], temos imediatamente o colapso do operador epistêmico, sendo estes resultados controversos que constituem o Paradoxo da Cognoscibilidade.

O sistema que denotamos por $\mathbf{T}_K$ é apresentado a seguir para demonstrar como é possível obter tal paradoxo. Introduzimos como primitivo, na assinatura anterior Σ, o operador epistêmico K, gerando o conjunto $For^{\Box K}$ de expressões bem formadas da lógica alético-epistêmica. Temos uma nova cláusula de formação:

- se $\varphi \in For^{\Box K}$, então $(K\varphi) \in For^{\Box K}$.

[35] A totalidade das noções essenciais para a obtenção do Paradoxo pode ser expressa na linguagem de uma lógica de primeira ordem, o que traria maior precisão e detalhamento de suas etapas. No entanto, lógicas modais de primeira ordem apresentam outros problemas (como por exemplo se o domínio de quantificação permanece o mesmo de um mundo possível para outro) que poderiam nos afastar do objetivo central de nosso trabalho. Por isto, optamos em utilizar uma linguagem mais simples, mesmo perdendo um pouco em poder expressivo.

[36] Mostraremos nas páginas seguintes como derivar o Paradoxo da Cognoscibilidade.

[37] Este princípio, versão epistêmica do axioma alético ($\mathbf{T}$): $\Box\varphi \supset \varphi$, é tomado por muitos autores(incluindo [Hintikka, 1962]), como um pressuposto básico da lógica epistêmica, pois, se uma proposição φ é falsa, não se pode dizer que um agente sabe que φ. Em decorrência disto, a quase totalidade dos sistemas modais de lógica epistêmica é baseada em sistemas modais que contêm pelo menos o Axioma ($\mathbf{T}$). No entanto, há tentativas de solução do Paradoxo da Cognoscibilidade que envolvem a rejeição deste axioma epistêmico, o que não soluciona o problema, visto que com a versão epistêmica do Axioma mais fraco ($\mathbf{D}$) e do Axioma ($\mathbf{4}$) o Paradoxo volta a ocorrer.

Além dos Axiomas (**PC**) e (**K**), já presentes no sistema alético minimal **K**, o sistema $\mathbf{T}_K$ é também constituído pelos seguintes axiomas:

($\mathbf{K}_K$) $K(\varphi \supset \psi) \supset (K\varphi \supset K\psi)$;

($\mathbf{T}_K$) $K\varphi \supset \varphi$.

As regras de inferência de $\mathbf{T}_K$ incluem (**MP**), (**Nec**) e a regra de *Necessitação epistêmica*:

$$(\mathbf{Nec}_K)\text{: } \vdash\alpha \text{ implica } \vdash K\alpha.$$

No sistema $\mathbf{T}_K$ também temos outras propriedades importantes do sistema **K**, como a $\text{Def}_\Diamond$ e os teoremas (K.5) e (K.6), disponibilizando assim o intercâmbio entre os operadores modais aléticos (I$\Box\Diamond$). As definições dos conectivos $\vee$, $\wedge$ e $\leftrightarrow$ também estão disponíveis em $\mathbf{T}_K$.

Para obter o Paradoxo, primeiro provamos em $\mathbf{T}_K$ um resultado conhecido como *Tese Fitch-Moore*[38]:

$$(\mathbf{TFM})\text{: } {\sim}\Diamond K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi).$$

Este resultado enuncia que é impossível para um agente cognoscente saber que, uma proposição é verdadeira e não é conhecida(pelo mesmo agente). Para demonstrá-lo basta que tenhamos disponível a propriedade da *semi-distributividade do conhecimento na conjunção* ($\wedge_K$): $K(\varphi \wedge \psi) \supset (K\varphi \wedge K\psi)$, a qual também é facilmente demonstrável em $\mathbf{T}_K$:

$$\vdash_{\mathbf{T}_K} K(\varphi \wedge \psi) \supset (K\varphi \wedge K\psi).$$

[38]Este resultado também leva o nome do filósofo britânico George Edward Moore (1873-1958), em função do chamado *Paradoxo de Moore*, cuja ideia central é a de que um agente não pode afirmar que uma proposição é verdadeira e simultaneamente afirmar não acreditar nisso, sem incorrer em algum absurdo. A Tese Fitch-Moore é considerada uma versão epistêmica desta ideia, onde temos que não é possível um agente afirmar saber que: uma proposição é o caso e ao ao mesmo tempo ignorar isto.

1.	$(\varphi \wedge \psi) \supset \varphi$	(**PC**)
2.	$(\varphi \wedge \psi) \supset \psi$	(**PC**)
3.	$K((\varphi \wedge \psi) \supset \varphi)$	[1, ($\mathbf{Nec}_K$)]
4.	$K(\varphi \wedge \psi) \supset K\varphi$	[3, ($\mathbf{K}_K$) e (**MP**)]
5.	$K((\varphi \wedge \psi) \supset \psi)$	[2, ($\mathbf{Nec}_K$)]
6.	$K(\varphi \wedge \psi) \supset K\psi$	[5, ($\mathbf{K}_K$) e (**MP**)]
7.	$K(\varphi \wedge \psi) \supset (K\varphi \wedge K\psi)$	[4, 6, (**PC**)]

$\square$

Segue a demonstração da Tese Fitch-Moore baseada em [Almeida, 2011], a qual designaremos como (**TFM**1):

1.	$K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi) \supset (K\varphi \wedge K{\sim}K\varphi)$	[($\wedge_K$)]
2.	$K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi) \supset K\varphi$	[1, (**PC**) e (**MP**)]
3.	$K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi) \supset K{\sim}K\varphi$	[1, (**PC**) e (**MP**)]
4.	$K{\sim}K\varphi \supset {\sim}K\varphi$	[($\mathbf{T}_K$)]
5.	$K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi) \supset {\sim}K\varphi$	[3, 4, (**PC**) e (**MP**)]
6.	${\sim}K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[2, 5, Redução ao Absurdo]
7.	$\square{\sim}K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[6, (**Nec**)]
8.	${\sim}\lozenge K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[7, (I$\square\lozenge$)]

$\square$

Há outras maneiras de obtermos a Tese Fitch-Moore, e um destes caminhos é baseado em [Costa-Leite, 2003]. Designamos esta demonstração como (**TFM**2):

1.	$K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[hipótese]
2.	$K\varphi \wedge K{\sim}K\varphi$	[1, $(\wedge_K)$ e (**MP**)]
3.	$K\varphi$	[2, (**PC**) e (**MP**)]
4.	$K{\sim}K\varphi$	[2, (**PC**) e (**MP**)]
5.	$K{\sim}K\varphi \supset {\sim}K\varphi$	[$(\mathbf{T}_K)$]
6.	${\sim}K\varphi$	[4, 5, (**MP**)]
7.	$K\varphi \wedge {\sim}K\varphi$	[3, 6, (**PC**)]
8.	${\sim}K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[1-7, Redução ao Absurdo]
9.	$\Box{\sim}K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[8, (**Nec**)]
10.	${\sim}\Diamond K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[9, (I$\Box\Diamond$)]

$\Box$

Nesta demonstração introduzimos a fórmula $K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$ como hipótese no sistema. Essa hipótese contraria diretamente a Tese Fitch-Moore, logo, é introduzida com a intenção de provála por meio de um absurdo. No entanto, a demonstração anterior baseada em [Almeida, 2011] (**TFM1**), mostra que podemos obter esta tese utilizando apenas os recursos do sistema $\mathbf{T}_K$.

O Princípio de Cognoscibilidade

O Princípio de Cognoscibilidade é uma tese filosófica que afirma que qualquer verdade é passível de ser conhecida(cognoscível), e pode ser formulada em linguagem proposicional alético-epistêmica da seguinte maneira:

$$\varphi \supset \Diamond K\varphi.$$

Esta ideia é o centro de muitos debates teóricos acerca da possibilidade do conhecimento, e nesse contexto temos como exemplo as posturas do *realismo* e a do *antirealismo*.

Como postura que não endossa o Princípio de Cognoscibilidade, os teóricos realistas em sua maioria concordam que há uma realidade que independe das construções cognitivas que os agentes têm sobre ela, e por esta razão haveria também aspectos da realidade objetiva que não seriam passíveis de conhecimento em função de possíveis limitações insuperáveis dos agentes cognoscentes, seja de ordem lógica, física ou biológica.

Mas também no contexto dos sistemas formais, temos resultados que depõem contra o Princípio de Cognoscibilidade, sendo o mais expressivo deles os famosos *Teoremas de Incompletude*, demonstrados por Gödel(1906-1978)[39]. Em um de seus teoremas, Gödel mostra que qualquer sistema axiomático consistente no qual a aritmética possa ser desenvolvida é incompleto, ou seja, há enunciados verdadeiros que não podem ser derivados. Um exemplo de proposição matemática que pode ser verdadeira, e ao mesmo tempo talvez não seja derivável dos axiomas da aritmética á a chamada *Conjectura de Goldbach*, que afirma que qualquer número par maior que dois pode ser expresso pela soma de dois números primos; embora até o momento não se tenha encontrado exceções à conjectura, também não se conseguiu prová-la.

Como corrente que se concilia com o Princípio de Cognoscibilidade, o antirealismo sustenta que o conhecimento é um constructo do intelecto humano, e seria absurdo que um agente necessariamente não conhecesse seus próprios constructos. Um dos exemplos mais proeminentes desta corrente de pensamento é o *intuicionismo*[40], para o qual uma proposição que afirme que "existe um objeto com uma propriedade x" só pode ser provada se for demonstrado construtivamente que existe um objeto específico para o qual tais propriedades valem[41].

No âmbito da epistemologia porém é que temos um apoio mais claro ao Princípio de Cognoscibilidade, em particular na postura denominada *verificacionismo*. Proposta no contexto do Círculo de Viena[42], o verificacionismo reflete a ideia de que o significado e a determinação da verdade de uma proposição dependem da possibilidade de verificá-

[39]Em seu artigo *Uber formal unentscheidhare Sätze der Principia Mathematica und werwandter Systeme"*("Sobre as Proposições Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos"), Gödel também prova que a consistência da aritmética não pode ser provada com recursos da própria teoria.

[40]Vertente teórica em filosofia da matemática formulada por L. Brouwer(1881-1966) e desenvolvida por A. Heyting(1898-1980), a qual pretende aplicar princípios construtivistas à matemática e à lógica. Para esta postura, os objetos matemáticos existem apenas na medida em que tenham sido efetivamente construídos e das construções resulta também a validade das suas respectivas demonstrações. Em particular, afirmações sobre a existência de objetos matemáticos, assim como de proposições existenciais, devem ser fundamentadas em suas correspondentes construções.

[41][Almeida, 2011] esclarece que seria difícil para os intuicionistas descartar o Princípio de Cognoscibilidade: "No caso em questão, seria necessário apontar uma proposição p, demonstrar p, e demonstrar que p é incognoscível. Mas, se há uma demonstração de p, então ela é uma verdade justificada, acreditada por qualquer pessoa razoável que entenda a demonstração. Ou seja, p é cognoscível."

[42]Um grupo de filósofos e cientistas formado nos anos 1920, cujas ideias se caracterizavam por uma postura empirista e antimetafísica, propondo a utilização de uma análise lógica da linguagem científica. O corpo de suas ideias ficou conhecido como *Positivismo Lógico*(ou *Empirismo Lógico*). Dentre seus nomes de destaque estão Moritz Schlick(1882-1936), Rudolf Carnap(1891-1970), Otto Neurath(1882-1945), e nos Estados Unidos A. J. Ayer(1910-1989).

la, o que inclui a existência de um método de verificação. Neste caso, uma proposição incognoscível seria uma proposição para a qual não haveria possibilidade de verificação, ou seja, seria uma pseudoproposição sem significado e por conseguinte falsa. Logo, toda verdade deve ser cognoscível.

No contexto dessa discussão epistemológica e seguindo [Costa-Leite, 2003], a partir de agora nos referiremos ao Princípio de Cognoscibilidade como *Tese Verificacionista* (**TV**). Para obtermos o resultado final que consiste no Paradoxo da Cognoscibilidade, introduzimos a (**TV**) no sistema $\mathbf{T}_K$ como um novo axioma, gerando assim o sistema $\mathbf{T}_{KV}$. Por fim, o colapso do operador epistêmico, que resulta na onisciência do agente cognoscente, pode ser obtido pela demonstração que chamaremos de (**COL**1):

1.	$(\varphi \wedge {\sim}K\varphi) \supset \Diamond K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[(**TV**)]
2.	${\sim}\Diamond K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[(**TFM**)]
3.	${\sim}(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[1, 2, (**PC**) e (**MP**)]
4.	$\varphi \supset K\varphi$	[3, (**PC**) e (**MP**)]
5.	$K\varphi \supset \varphi$	[($\mathbf{T}_K$)]
6.	$K\varphi \leftrightarrow \varphi$	[4, 5, (**PC**) e (**MP**)]

□

Esta demonstração finalmente mostra que a introdução da ideia de que toda verdade é cognoscível em um sistema alético-espistêmico razoavelmente típico leva à consequência absurda de que toda verdade é conhecida. Por outro lado, é desejável que os agentes representados por esta lógica sejam não-oniscientes, o que pode ser formalizado como a *Tese da Não-Onisciência Lógica* (**NO**), da seguinte maneira:

(**NO**): $\varphi \wedge {\sim}K\varphi$[43].

Este esquema expressa a ideia de que alguma proposição φ é o caso mas não é conhecida[44]. No entanto, podemos verificar que a mera introdução da (**NO**) como hipótese no

[43] Notemos que a estrutura desta fórmula foi fundamental para as demonstrações precedentes, sendo utilizada como parte das instâncias aqui apresentadas de ($\wedge_K$), (**TV**) e (**TFM**). Isto evidencia que de alguma maneira a Tese da Não-Onisciência é pressuposta nos sistemas com os quais estamos trabalhando.

[44] Apesar de ser possível formalizar desta maneira, a exemplo do que faz [Costa-Leite, 2003], a proposição φ em questão deveria ser especificada, o que seria mais adequadamente formalizado através de uma linguagem de primeira ordem: $\exists p(p \wedge {\sim}Kp)$.

sistema $\mathbf{T}_{KV}$, o qual contém (**TV**) como esquema de axioma, reconduz-nos ao Paradoxo da Cognoscibilidade. A demonstração deste fato será denotada por (**COL**2), e é como segue:

1.	$\varphi \wedge \sim K\varphi$	[hipótese (**NO**)]
2.	$\Diamond K(\varphi \wedge \sim K\varphi)$	[1, (**TV**) e (**MP**)]
3.	$\sim\Diamond K(\varphi \wedge \sim K\varphi)$	[(**TFM**)]
4.	$\Diamond K(\varphi \wedge \sim K\varphi) \wedge \sim\Diamond K(\varphi \wedge \sim K\varphi)$	[2, 3, (**PC**) e (**MP**)]
5.	$\sim(\varphi \wedge \sim K\varphi)$	[1-4, Redução ao Absurdo]
6.	$\varphi \supset K\varphi$	[5, (**PC**) e (**MP**)]
7.	$K\varphi \supset \varphi$	[($\mathbf{T}_K$)]
8.	$K\varphi \leftrightarrow \varphi$	[6, 7, (**PC**) e (**MP**)]

$\square$

Vemos então que a hipótese que afirma a não-onisciência nos leva diretamente a um resultado que afirma a onisciência.

Curiosamente é possível obter o colapso do operador epistêmico a partir do sistema $\mathbf{T}_K$, sem a introdução da (**TV**) como axioma, usando novamente (**NO**) como hipótese. Chamaremos esta demonstração de (**COL**3):

1.	$\varphi \wedge {\sim}K\varphi$	[hipótese (**NO**)]
2.	$K(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[1, ($\mathbf{Nec}_K$)]
3.	$K\varphi \wedge K{\sim}K\varphi$	[2, ($\wedge_K$) e (**MP**)]
4.	$K\varphi$	[3, (**PC**) e (**MP**)]
5.	$K{\sim}K\varphi$	[3, (**PC**) e (**MP**)]
6.	${\sim}K\varphi$	[5, ($\mathbf{T}_K$) e (**MP**)]
7.	$K\varphi \wedge {\sim}K\varphi$	[4, 6, (**PC**) e (**MP**)]
8.	${\sim}(\varphi \wedge {\sim}K\varphi)$	[1-7, Redução ao Absurdo]
9.	$\varphi \supset K\varphi$	[8, (**PC**) e (**MP**)]
10.	$K\varphi \supset \varphi$	[($\mathbf{T}_K$)]
11.	$K\varphi \leftrightarrow \varphi$	[9, 10, (**PC**) e (**MP**)]

$\square$

Observamos que neste caso também não utilizamos a Tese Fitch-Moore.

1.4.2 O Paradoxo da Credibilidade

O Paradoxo da Credibilidade é um resultado similar ao Paradoxo da Cognoscibilidade, pois leva ao colapso do operador de crença, porém em um sistema modal no qual temos as versões doxásticas dos Axiomas (**K**), (**D**) e (**4**). É obtido ao introduzirmos nesse sistema o Axioma $\varphi \supset \Diamond B\varphi$, que é a interpretação doxástica da Tese Verificacionista e que chamamos de *Princípio de Credibilidade*.

Uma das razões para explorar a relevância do Paradoxo da Credibilidade é o fato que ele mostra que outras axiomatizações razoáveis em termos epistemológicos também geram o colapso dos operadores modais primitivos em seus respectivos sistemas. Isto pode ser evidenciado quando usamos as interpretações epistêmicas dos mesmos Axiomas (**K**), (**D**) e (**4**), e verificamos mais uma maneira pela qual o Paradoxo da Cognoscibilidade é obtido. Mostra por sua vez que, ainda que não utilizemos no Paradoxo Epistêmico o usual Axioma ($\mathbf{T}_K$), sua rejeição não detém necessariamente o avanço do Paradoxo.

Há outra razão relacionada à rejeição de pressupostos. Ao contrário da Tese Verificacionista, que divide pensadores que se ocupam da questão do conhecimento em função da exigência de critérios muito precisos e rigorosos para determinar sua natureza, o Princípio da Credibilidade afirma algo que dificilmente poderia ser refutado. Isto porque a noção de crença é, em muitos aspectos, menos rigorosa do que a de conhecimento, e a possibilidade de acreditar em verdades não representa problema significativo em comparação com a polêmica afirmação de que toda verdade é acreditada. Deste modo, o Princípio de Credibilidade usualmente não é rejeitado.

Por fim, nesta Dissertação pretendemos mostrar que o tratamento que sugerimos ao Paradoxo da Cognoscibilidade acaba por não se aplicar em sua totalidade ao Paradoxo da Credibilidade, em função das peculiaridades do sistema alético-doxástico utilizado para obtê-lo.

Para a obtenção do Paradoxo da Credibilidade, apresentamos o sistema alético-doxástico que denotamos $\mathbf{D4}_B$.

A linguagem de $\mathbf{D4}_B$ acrescenta à assinatura Σ, apresentada na **Subseção 1.2.1**, o operador doxástico B, gerando assim o conjunto $For^{\Box B}$ que contém as expressões bem formadas da lógica alético-doxástica. Adicionamos a seguinte cláusula de formação às já existentes:

- se $\varphi \in For^{\Box B}$, então $B\varphi \in For^{\Box B}$.

Acrescentamos ao conjunto de axiomas do sistema **K** os seguintes axiomas:

($\mathbf{K}_B$) $B(\varphi \supset \psi) \supset (B\varphi \supset B\psi)$

($\mathbf{D}_B$) $B\varphi \supset {\sim}B{\sim}\varphi$

($\mathbf{4}_B$) $B\varphi \supset BB\varphi$.

As regras de inferência de $\mathbf{D4}_B$ incluem (**MP**), (**Nec**) e a regra de *Necessitação Doxástica*:

$$(\mathbf{Nec}_B)\text{: } \vdash\alpha \text{ implica } \vdash B\alpha.$$

Em $\mathbf{D4}_B$ também dispomos do intercâmbio (I$\Box\Diamond$) entre operadores modais aléticos e das definições dos conectivos $\vee$, $\wedge$ e $\leftrightarrow$.

A exemplo do Paradoxo epistêmico, demonstramos em $\mathbf{D4}_B$ a versão doxástica da Tese Fitch-Moore:

$$(\mathbf{TFM}_B)\text{: } \sim\Diamond B(\varphi \wedge \sim B\varphi),$$[45]

a qual pode ser interpretada como "é inacreditável que: uma proposição seja o caso e não se acredite nisso". Podemos obter a $(\mathbf{TFM}_B)$ com recursos do próprio sistema $\mathbf{D4}_B$, a partir do teorema

$$(\wedge_B)\text{: } B(\varphi \wedge \psi) \supset (B\varphi \wedge B\psi),$$

cuja demonstração é similar à demonstração de $(\wedge_K)$, bastando utilizar $(\mathbf{PC})$, $(\mathbf{Nec}_B)$, $(\mathbf{K}_B)$ e $(\mathbf{MP})$.

$\square$

Uma demonstração possível para a $(\mathbf{TFM}_B)$ é como segue[46]:

1.	$B(\varphi \wedge \sim B\varphi) \supset (B\varphi \wedge B{\sim}B\varphi)$	$[(\wedge_B)]$
2.	$B(\varphi \wedge \sim B\varphi) \supset B\varphi$	[1, $(\mathbf{PC})$ e $(\mathbf{MP})$]
3.	$B(\varphi \wedge \sim B\varphi) \supset B{\sim}B\varphi$	[1, $(\mathbf{PC})$ e $(\mathbf{MP})$]
4.	$B\varphi \supset BB\varphi$	$[(\mathbf{4}_B)]$
5.	$B(\varphi \wedge \sim B\varphi) \supset BB\varphi$	[2, 4, $(\mathbf{PC})$ e $(\mathbf{MP})$]
6.	$B{\sim}B\varphi \supset \sim B{\sim\sim}B\varphi$	$[(\mathbf{D}_B)]$
7.	$B\varphi \supset {\sim\sim}B\varphi$	$[(\mathbf{PC})]$
8.	$BB\varphi \supset B{\sim\sim}B\varphi$	[7, $(\mathbf{K}_B)$ e $(\mathbf{MP})$]
9.	$\sim B{\sim\sim}\varphi \supset \sim BB\varphi$	[8, $(\mathbf{PC})$ e $(\mathbf{MP})$]
10.	$B{\sim}B\varphi \supset \sim BB\varphi$	[6, 9, $(\mathbf{PC})$ e $(\mathbf{MP})$]
11.	$B(\varphi \wedge \sim B\varphi) \supset \sim BB\varphi$	[3, 10, $(\mathbf{PC})$ e $(\mathbf{MP})$]
12.	$\sim B(\varphi \wedge \sim B\varphi)$	[5, 11, $(\mathbf{PC})$ e $(\mathbf{MP})$ (Redução ao Absurdo)]
13.	$\square{\sim}B(\varphi \wedge \sim B\varphi)$	[12, $(\mathbf{Nec})$]
14.	$\sim\Diamond B(\varphi \wedge \sim B\varphi)$	[13, $(\mathrm{I}\square\Diamond)$]

[45]Embora seja demonstrável em $\mathbf{D4}_B$, a $(\mathbf{TFM}_B)$ é controversa quando admitimos que não somos oniscientes. Sendo que não conhecemos todas as verdades, é plausível a possibilidade de não acreditarmos em uma sentença verdadeira(quando não conhecemos este fato). Então não é realmente inacreditável que não acreditemos em certas verdades. De todo modo, a demonstração da $(\mathbf{TFM}_B)$ como etapa intermediária para a obtenção do Paradoxo da Credibilidade não é de fato essencial, como retomaremos adiante, sendo apenas o modo usual pelo qual obtém-se o colapso do operador doxástico na literatura consultada. Reforçamos também que estas etapas, se adaptadas para o contexto epistêmico, mostram que é possível obter o Paradoxo da Cognoscibilidade em uma axiomatização que contenha as interpretações epistêmicas de $(\mathbf{D})$ e $(\mathbf{4})$.

[46]Demonstração inspirada em [Almeida, 2011], com algumas modificações.

□

A partir de agora introduzimos como axioma no sistema $\mathbf{D4}_B$ o esquema de fórmula que chamamos de *Princípio de Credibilidade*:

$$(\mathbf{PCD})\text{: } \varphi \supset \Diamond B\varphi.$$

O Princípio ($\mathbf{PCD}$) pode ser interpretado como "se uma proposição φ é o caso, então é possível acreditar em φ", e, quando acrescentado como Axioma ao sistema $\mathbf{D4}_B$, origina o sistema $\mathbf{D4}_{BC}$. Em $\mathbf{D4}_{BC}$ é possível derivar as duas fórmulas que levam ao colapso do operador doxástico, a primeira a seguir:

$(\Rightarrow) \vdash_{\mathbf{D4}_{BC}} \varphi \supset B\varphi$

Prova:

1.	$(\varphi \wedge \sim B\varphi) \supset \Diamond B(\varphi \wedge \sim B\varphi)$	[($\mathbf{PCD}$)]
2.	$\sim\Diamond B(\varphi \wedge \sim B\varphi)$	[($\mathbf{TFM}_B$)]
3.	$\sim(\varphi \wedge \sim B\varphi)$	[1, 2, ($\mathbf{PC}$), ($\mathbf{MP}$)]
4.	$\varphi \supset B\varphi$	[3, ($\mathbf{PC}$), ($\mathbf{MP}$)]

□

Neste ponto é possível adaptar a discussão sobre a Não-Onisciência Lógica para o contexto doxástico. De fato, assim como em um sistema epistêmico considera-se desejável que os agentes não sejam oniscientes, em um sistema doxástico é desejável que os agentes não necessariamente sejam crentes em todas as proposições verdadeiras dessa lógica. Podemos formalizar esta ideia como a *Tese da Não-Onicredência Lógica*:

$$(\mathbf{NOC})\text{: } \varphi \wedge \sim B\varphi, \text{ para algum } \varphi[47].$$

O esquema de fórmula ($\mathbf{NOC}$) pode ser interpretado como "alguma proposição φ é o caso, mas não se acredita em φ". Embora seja razoável que essa noção seja mantida em um sistema doxástico onde agentes não são automaticamente crentes em todas as proposições verdadeiras (não sendo então *onicredentes*)[48], sua introdução como hipótese

[47] A exemplo da Tese da Não-Onisicência Lógica, esta ideia seria melhor formalizada em uma linguagem de primeira ordem: $\exists p(p \wedge \sim Bp)$.

[48] Notemos que de modo similar ao caso epistêmico, o esquema ($\mathbf{NOC}$) foi utilizado como subfórmula da instância de ($\wedge_B$), e assim, é parte também de ($\mathbf{TFM}_B$), sinalizando que a noção de Não-Onicredência é de algum modo pressuposta aqui.

em $\mathbf{D4}_{BC}$ acaba por conduzir de qualquer maneira à fórmula $\varphi \supset B\varphi$ demonstrada acima, a qual como veremos é essencial para o colapso do operador de crença:

1.	$\varphi \wedge \sim B\varphi$	[(**NOC**)]
2.	$\Diamond B(\varphi \wedge \sim B\varphi)$	[1, (**PCD**) e (**MP**)]
3.	$\sim\Diamond B(\varphi \wedge \sim B\varphi)$	[($\mathbf{TFM}_B$)]
4.	$\sim(\varphi \wedge \sim B\varphi)$	[1-3, Redução ao Absurdo]
5.	$\varphi \supset B\varphi$	[4, (**PC**) e (**MP**)]

$\square$

Embora o Axioma (**T**) não tenha uma versão em termos de crença nas lógicas doxásticas, por ser forte demais (é difícil aceitar que se alguém acredita em algo então este algo é verdadeiro), seu esquema acaba sendo derivado de qualquer maneira por meio de ($\mathbf{D}_B$) e do resultado $\vdash_{\mathbf{D4}_{BC}} \varphi \supset B\varphi$, o qual por sua vez é fruto da combinação de (**PCD**) e ($\mathbf{TFM}_B$). Vejamos:

($\Leftarrow$) $\vdash_{\mathbf{D4}_{BC}} B\varphi \supset \varphi$

Prova:

1.	$B\varphi \supset \sim B\sim\varphi$	[($\mathbf{D}_B$)]
2.	$\sim\varphi \supset B\sim\varphi$	[$\vdash_{\mathbf{D4}_{BC}} \varphi \supset B\varphi$]
3.	$\sim B\sim\varphi \supset \sim\sim\varphi$	[2, (**PC**) e (**MP**)]
4.	$\sim\sim\varphi \supset \varphi$	[(**PC**)]
5.	$\sim B\sim\varphi \supset \varphi$	[3, 4, (**PC**) e (**MP**)]
6.	$B\varphi \supset \varphi$	[1, 5, (**PC**) e (**MP**)]

$\square$

O colapso segue diretamente através de $\vdash_{\mathbf{D4}_{BC}} \varphi \supset B\varphi$, (**PC**) e (**MP**):

$$B\varphi \leftrightarrow \varphi.$$

Em [Almeida, 2011] também são ilustradas duas variações possíveis do Paradoxo da

Credibilidade. A primeira delas consiste em utilizar o seguinte esquema de fórmula:

$$(\mathbf{4}^{c}_{B}):\ BB\varphi \supset B\varphi,$$

em lugar do Axioma ($\mathbf{4}_B$). Este novo esquema é chamado por Almeida de *Princípio de Infalibilidade da Introspecção Positiva*, por afirmar que as crenças de um agente sobre suas próprias crenças estão corretas. Por meio dessa substituição é obtida uma versão um pouco distinta da ($\mathbf{TFM}_B$):

$$(\mathbf{TFM}_{B1}):\ {\sim}\Diamond B(\varphi \wedge B{\sim}\varphi)^{49}.$$

Com esse aparato e (**PCD**), é possível obter as fórmulas que ocasionam o colapso do operador doxástico, conforme demonstrado em [Almeida, 2011].

Outra variação indicada pelo autor consiste em excluir o Axioma ($\mathbf{D}_B$) e introduzir como axioma o seguinte esquema:

$$(\mathbf{5}^{c}_{B}):\ B{\sim}B\varphi \supset {\sim}B\varphi,$$

denominado *Princípio de Infabilidade da Introspecção Negativa*, pois afirma que as crenças de um agente sobre suas próprias descrenças estão corretas. Observemos que este esquema é uma instância doxástica do axioma alético (**T**): $\Box\varphi \supset \varphi$. Embora sua versão doxástica mais direta, $B\varphi \supset \varphi$, não seja desejável em sistemas doxásticos pela razão já mencionada de que uma crença pode ser falsa, a instância ($\mathbf{5}^{c}_{B}$) é bem intuitiva e não sofre do mesmo problema. Nesta variação podemos obter ($\mathbf{TFM}_B$) em sua versão original e também a fórmula $\varphi \supset B\varphi$. Não temos nesse caso o colapso do operador doxástico, pois para isto precisaríamos ter o Axioma ($\mathbf{D}_B$), porém o resultado $\varphi \supset B\varphi$, por si só, já é considerado indesejável.

Há ainda mais um ponto a comentar que enseja um modo alternativo de obter o Paradoxo da Credibilidade. A ($\mathbf{TFM}_B$) apresenta algumas dificuldades quando submetida a uma interpretação intuitiva. Embora seja demonstrável a partir do sistema $\mathbf{D4}_B$, se assumimos que o agente cognoscente não é onisciente, é bem plausível que possa não acreditar em uma proposição verdadeira, na medida em que desconhece que ela é de fato verdadeira. Deste modo, não é inacreditável que um agente não acredite em uma

[49] A diferença sutil entre esta versão e a original pode ser compreendida talvez em sua interpretação: enquanto que ${\sim}B\varphi$ expressa a negação da atitude proposicional de crença de alguém, em $B{\sim}\varphi$ temos que um agente acredita na negação de uma proposição.

proposição verdadeira. A fim de evitar essa dificuldade, podemos mostrar que, para haver o colapso do operador doxástico, a ($\mathbf{TFM}_B$) não é essencial. Para isto, basta introduzirmos diretamente em $\mathbf{D4}_{BC}$ a razoável Tese (**NOC**) e partir dela como hipótese de nossa derivação:

1.	$\varphi \wedge \sim B\varphi$	[hipótese (**NOC**)]
2.	$B(\varphi \wedge \sim B\varphi)$	[1, ($\mathbf{Nec}_B$)]
3.	$B\varphi \wedge B{\sim}B\varphi$	[2, ($\wedge_B$) e (**MP**)]
4.	$B\varphi$	[3, (**PC**) e (**MP**)]
5.	$B{\sim}B\varphi$	[3, (**PC**) e (**MP**)]
6.	$B\varphi \supset BB\varphi$	[($\mathbf{4}_B$)]
7.	$B{\sim}B\varphi \supset \sim B{\sim}{\sim}B\varphi$	[($\mathbf{D}_B$)]
8.	$BB\varphi$	[4, 6, (**MP**)]
9.	$\sim B{\sim}{\sim}B\varphi$	[5, 7, (**MP**)]
10.	$B\varphi \supset {\sim}{\sim}B\varphi$	[(**PC**)]
11.	$BB\varphi \supset B{\sim}{\sim}B\varphi$	[10, ($\mathbf{Nec}_B$), ($\mathbf{K}_B$) e (**MP**)]
12.	$\sim B{\sim}{\sim}B\varphi \supset \sim BB\varphi$	[11, (**PC**) e (**MP**)]
13.	$\sim BB\varphi$	[9, 12, (**MP**)]
14.	$\sim(\varphi \wedge \sim B\varphi)$	[1-13, Redução ao Absurdo]
15.	$\varphi \supset B\varphi$	[14, (**PC**) e (**MP**)]

$\square$

Como podemos verificar, não foi preciso utilizar a fórmula ($\mathbf{TFM}_B$) nesta derivação, a qual nos permitiu obter uma das fórmulas que ocasionam o colapso do operador doxástico. Embora este resultado por si já seja indesejável, a fórmula inversa $B\varphi \supset \varphi$ pode ser obtida da maneira usual, a partir de ($\mathbf{D}_B$) e $\varphi \supset B\varphi$, daí se seguindo o colapso do operador de crença. Notemos que nesse caso também não houve necessidade de utilizar (**PCD**), bastando apenas considerar a hipótese de que há uma verdade não acreditada em um sistema como $\mathbf{D4}_B$(o que gerou exatamente o resultado absurdo de significado oposto, a saber, que toda verdade é acreditada).

Mostramos que há muitas maneiras de obter os Paradoxos Epistêmico-Doxásticos em lógicas modais baseadas em sistemas normais. Uma questão que surge ao observarmos esses resultados é se a formalização utilizada para capturar as principais teses e noções que constituem os Paradoxos é satisfatória ou mesmo adequada. É possível, nesse contexto, que os Paradoxos Epistêmico-Doxásticos sejam consequências indesejadas do fato de se tentar expressar na linguagem de uma lógica modal conceitos que podem não ser totalmente exprimíveis nessa linguagem.

Mesmo aventando essa possibilidade, indicaremos a seguir algumas soluções que têm sido propostas aos Paradoxos Epistêmico-Doxásticos, as quais utilizam outras vias de análise.

1.4.3 Possíveis soluções aos Paradoxos Epistêmico-Doxásticos

Algumas alternativas e soluções têm sido propostas aos Paradoxos na literatura, e exemplificamos algumas tendências neste sentido.

Rejeição dos pressupostos envolvidos

Uma alternativa é a rejeição de algumas das hipóteses envolvidas nas argumentações. Como já mencionado, é controversa entre filósofos a aceitação da Tese Verificacionista, a principal tese a ser rejeitada em alguns contextos, por ser considerada forte demais (ver discussão anterior sobre as posturas do realismo e do antirealismo). No entanto, há propostas de solução que tentam evitar este caminho, reformulando a (**TV**), como será descrito a seguir, pois, como observado anteriormente, não assumir a (**TV**) não inviabiliza a obtenção do colapso do operador epistêmico.

Reformulação da Tese Verificacionista

Esta alternativa consiste em evitar que haja o colapso do operador epistêmico sem rejeitar as principais teses epistêmicas, em particular a (**TV**). Sobre isto, [Almeida, 2011] ilustra algumas possibilidades, dentre as quais a proposta por Neil Tennant(1950-) que em seu artigo *The Taming of the True* (1997), restringe a Tese Verificacionista por meio da distinção entre *proposições cartesianas* e *proposições anticartesianas*, que tem por objetivo delimitar quais verdades são cognoscíveis. Segundo o autor, uma proposição φ é considerada anticartesiana se $K\varphi \vdash \perp$, ou seja, se o conhecimento de φ acarreta uma contradição. Por sua vez uma proposição é cartesiana se $K\varphi \nvdash \perp$, o que significa que conhecer φ não acarreta absurdo. A versão de Tennant da Tese Verificacionista estabelece então que:

Toda verdade cartesiana é cognoscível,

o que pode ser formalizado pela regra de inferência:

$$\varphi, (K\varphi \nvdash \bot) \vdash \Diamond K\varphi.$$

Como proposições do tipo $\varphi \wedge \sim K\varphi$ são classificadas como anticartesianas, não podem gerar o Paradoxo. A objeção a esta alternativa, no entanto, é que se assume que há verdades incognoscíveis.

Almeida propõe sua própria solução em [Almeida, 2011], a qual envolve lidar com sistemas *multiagentes*[50]. Isto coloca em outros termos os principais esquemas de fórmulas utilizados para obter o Paradoxo, como por exemplo a (**TFM**), onde, embora seja impossível para um agente i saber que uma proposição é verdadeira e ignorada pelo próprio agente i, isto poderia não ser incognoscível para um agente j distinto.

Almeida constrói um sistema multiagentes similar à $\mathbf{T}_K$, onde são estabelecidas as seguintes definições[51]:

$$\text{(a) } \forall x K x\varphi \stackrel{\text{def}}{=} K_1\varphi \wedge K_2\varphi \wedge ... \wedge K_n\varphi$$

e

$$\text{(b) } \exists x K x\varphi \stackrel{\text{def}}{=} K_1\varphi \vee K_2\varphi \vee ... \vee K_n\varphi.$$

O item (a) pode ser interpretado como "todos sabem que φ", enquanto que o item (b) como "alguém sabe que φ". A partir destas definições Almeida formula as seguintes versões da Tese Verificacionista, a qual o autor denota em seu trabalho como Princípio de Cognoscibilidade:

$$\text{Princípio de Cognoscibilidade } \mathit{Forte} : \varphi \supset \Diamond \forall x K x\varphi$$

$$\text{Princípio de Cognoscibilidade } \mathit{Fraco} : \varphi \supset \Diamond \exists x K x\varphi.$$

[50]Sistemas que lidam com vários agentes cognoscentes autônomos e distintos. Mesmo que os sistemas em questão não envolvam a interação entre operadores aléticos e epistêmicos, teríamos também neste caso sistemas multimodais, pois para cada agente distinto temos um operador epistêmico também distinto.

[51]A utilização de quantificadores nas definições que se seguem se deve a um abuso de linguagem com a finalidade de tornar mais clara a exposição, e não à adoção de uma lógica de primeira ordem.

A tentativa de solução proposta em [Almeida, 2011] consiste em utilizar a versão mais fraca da Tese Verificacionista[52], e não transcreveremos aqui as minúcias de seu argumento, em vez disso indicando a leitura de seu trabalho. Basta dizer que o Paradoxo é atenuado demonstrando, através da Semântica de Kripke, que existe um estado epistêmico onde um agente ignora uma proposição verdadeira, o que contraria o resultado paradoxal anterior que implicava a onisciência.

A principal objeção a este argumento é realizada pelo próprio autor, que demonstra também que através da versão fraca da Tese Verificacionista é possível obter o esquema $\varphi \supset \exists x K x \varphi$, ou seja, se uma proposição é verdadeira, então é conhecida por algum agente, do que decorre que não há verdades ignoradas por todos. O Paradoxo não teria sido, então, suficientemente atenuado.

A próxima via de tentativa de solução do Paradoxo envolve a revisão da lógica subjacente aos sistemas modais que geram o Paradoxo, o que pode significar substituir a lógica clássica por alguma lógica heterodoxa que inviabilize obter a (**TFM**) ou impeça o colapso do operador epistêmico.

Revisão da lógica subjacente aos raciocínios que originam o Paradoxo

Segundo [Almeida, 2011], T. Williamsom[53] (1955 -) propõe solucionar o Paradoxo considerando a lógica intuicionista como lógica subjacente aos sistemas que pretendem capturar noções epistemológicas. Nesse caso, embora a (**TFM**) continue sendo válida em um contexto intuicionista, não ocorre o mesmo na cadeia de inferências que conduzem ao esquema $\varphi \supset K\varphi$, essencial para a obtenção do colapso. Precisamente, em uma lógica intuicionista a seguinte inferência não é válida:

$$\sim(\varphi \wedge \sim K\varphi) \vdash \varphi \supset K\varphi.$$

Consequentemente não teríamos o colapso do operador epistêmico. Mas esta solução traz alguns problemas, pois, a partir da fórmula $\sim(\varphi \wedge \sim K\varphi)$(que pode ser interpretado como "não é o caso que uma proposição seja verdadeira e ignorada"), podemos, na lógica intuicionista, inferir o resultado:

$$\sim K\varphi \supset \sim\varphi,$$

[52] A inserção da versão forte da Tese Verificacionista provoca o colapso dos operadores epistêmicos de todos os agentes, conforme demonstrado por [Almeida, 2011].

[53] Ver [Williamson, 1982].

o qual podemos compreender como "se uma proposição é ignorada, então é falsa".

Outra proposta de revisão da lógica subjacente aos sistemas onde ocorre o Paradoxo é devida à [Costa-Leite, 2003], o qual dotou um sistema alético-epistêmico de uma base paraconsistente, concentrando-se em evitar nas demonstrações os passos onde eram aplicados regras clássicas como contraposição e redução ao absurdo, e impedindo assim a obtenção da (**TFM**). Para isso o autor utilizou a lógica **Ci**, uma *Lógica da Inconsistência Formal* (**LFI**). Como retomaremos no próximo capítulo, as **LFI**s são tipos de lógicas paraconsistentes nas quais a noção de consistência é introduzida como um operador primitivo da linguagem objeto, e em lógicas como **Ci** é possível também definir um operador para a noção de inconsistência. À primeira vista a solução encontrada teria potencial para conter o avanço do Paradoxo, porém, como observado posteriormente, pelo fato de que as peculiaridades de **LFI**s como **Ci** permitem também definir uma negação clássica em sua linguagem, e assim recuperar raciocínios clássicos, não há impedimento para que o Paradoxo da Cognoscibilidade seja recuperado integralmente em um sistema alético-epistêmico que contenha **Ci** como lógica subjacente.

Solução ao Paradoxo da Credibilidade

Em relação ao Paradoxo da Credibilidade, caso pretendamos preservar a cadeia de raciocínios que resultam no Paradoxo, um caminho natural seria investigar qual das teses assumidas poderia ser falsa. Porém, assunções como ($\mathbf{K}_B$), ($\mathbf{D}_B$) e ($\mathbf{4}_B$) são consideradas noções doxásticas intuitivas e razoáveis[54]. E, por sua vez, rejeitar o Princípio de Credibilidade é algo bem mais difícil do que rejeitar sua controversa versão epistêmica, afinal, não é tão problemático assumir que uma verdade é passível de ser acreditada. De qualquer modo [Almeida, 2011] indica uma solução semelhante à que propôs para o Paradoxo da Cognoscibilidade, a qual consiste em formular uma versão mais fraca do Princípio de Credibilidade em um sistema multiagentes. Teríamos então:

$$(\mathbf{PCD}_{fraco}) \colon \varphi \supset \Diamond \exists x B x \varphi,$$

onde

$$\exists x B x \varphi \stackrel{\text{def}}{=} B_1\varphi \vee B_2\varphi \vee \ldots \vee B_n\varphi.$$

[54]Em particular, ($\mathbf{D}_B$) expressa que o operador de crença preenche os requisitos de uma consistência clássica.

Através de modelos de Kripke, Almeida verifica que há uma proposição verdadeira e não acreditada por um agente cognoscente, demonstrando que há um mundo possível no qual há uma verdade desacreditada por algum agente, contrariando o resultado original absurdo que implicava onicredência.

O caminho a ser desenvolvido

O caminho que exploramos neste trabalho segue a tendência desenvolvida em [Costa-Leite, 2003], que busca prover uma base paraconsistente para o sistema que origina o Paradoxo a Cognoscibilidade, tendência essa que utilizaremos para analisar também o Paradoxo da Credibilidade.

Para esta tarefa, exploraremos alguns sistemas paraconsistentes específicos, a saber, os sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci**, os três últimos classificados como *Lógicas da Inconsistência Formal* ou simplesmente (**LFIs**)[55]. Dentre as características de que definem uma **LFI**, está a internalização da noção de *consistência* em sua linguagem objeto e a possibilidade de definir uma negação com características clássicas. Assim, as **LFIs** são dotadas de uma linguagem objeto mais expressiva, e seu poder dedutivo é maior do que o de sistemas que não permitem a reconstrução de raciocínios clássicos a partir de seus sistemas. Adotamos em nosso trabalho a sequência de **LFIs** já utilizada em [Bueno-Soler, 2009], que busca investigar sistemas modais com diferentes negações paraconsistentes, baseados primeiramente em uma **LFI** *minimal* ou fundamental, a saber, **mbC**, ampliando posteriormente este sistema para suas extensões gradativamente mais poderosas. O sistema **PI** não se enquadra como uma **LFI** e é aqui investigado inicialmente como base para a lógica **mbC** e suas respectivas extensões, mas adquire um papel de extrema importância quando estendido a uma classe de *sistemas catódicos*, em especial no tratamento dos paradoxos epistêmicos. Os sistemas catódicos, por sua vez, foram introduzidos em [Bueno-Soler, 2009][56], e podem ser compreendidos como extensões modais de sistemas paraconsistentes.

Pretendemos dotar esses sistemas de interpretações epistêmico-doxásticas a fim de verificar em que medida podemos conter o avanço dos Paradoxos apresentados.

[55] *Logics of Formal Inconsistency.* Introduzidas em [Carnielli e Marcos, 2002] e desenvolvidas em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007]. Ver também [Carnielli e Coniglio, 2016].

[56] Em sua tese, Bueno-Soler introduz também os chamados *sistemas anódicos*, uma base modal positiva sobre a qual se pode mensurar os efeitos lógicos de se acrescentar gradualmente negações subclássicas, introduzindo-as a partir de negações mais fracas até finalmente se definir uma negação clássica, que representa o caso limite. Estas negações, inseridas de forma gradual e controlada, são chamadas de *elementos catódicos*, e geram os chamados sistemas catódicos.

2 Lógicas Paraconsistentes

Uma teoria, em cuja linguagem ocorre o conectivo de negação $\sim$, é *inconsistente* se existe uma proposição α de sua linguagem, tal que α e $\sim\alpha$ são teoremas; caso contrário, a teoria é *consistente*. Uma teoria é trivial quando toda fórmula de sua linguagem é teorema. Por fim, uma lógica é *paraconsistente* se pode ser usada como lógica subjacente para teorias que são inconsistentes, porém não-triviais, ditas teorias paraconsistentes.

A lógica clássica é inábil para tratar com teorias que apresentam proposições inconsistentes entre si, pois nessa lógica prova-se o Princípio *Ex Falso Sequitur Quodlibet*, ou *Princípio de Explosão*. Disto decorre que a noção de teoria inconsistente implica a noção de teoria trivial.

Para poder lidar com teorias inconsistentes e não triviais, nas lógicas paraconsistentes o Princípio de Não Contradição não é válido em geral, bem como o Ex Falso.

2.1 Uma breve história da paraconsistência

Segundo [da Costa, Krause e Bueno, 2007] e [Gomes e D'Ottaviano, 2017], os primeiros a conceber a possibilidade de uma lógica que derrogasse o Princípio Aristotélico de Não-Contradição, foram *Jan Łukasiewicz* e *Nicolai I. Vasiliev*, quase simultaneamente e de forma independente, no período entre 1910 e 1913. O primeiro, embora não tenha desenvolvido sua ideia de obter uma lógica não-Aristotélica através da rejeição do Princípio de Não-Contradição, influencia seu aluno, *Stanislaw Jaśkowski*, o qual erige o primeiro sistema formal paraconsistente em 1948. Suas motivações para desenvolver a ideia de seu professor estavam relacionadas a tratar formalmente contradições que ocorriam em sistemas teóricos dialéticos, e também lidar com inconsistências ocasionadas por certas ambiguidades. Sua lógica é registrada historicamente como "lógica discursiva".

A partir de 1911, Vasiliev, por sua vez, propôs a possibilidade de uma "lógica imaginária", que consistia na ideia de mundos possíveis onde o Princípio de Não-Contradição não fosse válido em geral. Embora o mesmo não partilhasse da posição de que contradições realmente existissem no mundo real, e não tivesse desenvolvido sua lógica imaginária, sua ideia produziu desenvolvimentos tardios a exemplo de alguns sistemas paraconsistentes sistematizados em [Arruda, 1977] e analisados em [Gomes e D'Ottaviano, 2017].

Por volta de 1958, *Newton da Costa*, independente de Jaśkowski, iniciou a exploração e desenvolvimentos sistemáticos de vários sistemas que suportam contradições sem incorrer em trivialização dedutiva, promovendo também um grande passo rumo às aplicações destas lógicas em contextos matemáticos e das ciências em geral, enfatizando também um novo campo de problemas e implicações filosóficas que estas lógicas passaram a suscitar. O termo "paraconsistente" atribuído atualmente a estas lógicas se deve a *Francisco Miró Quesada*, que o sugeriu a da Costa em correspondência e o apresentou formalmente em 1976, no *III Simpósio Latino-Americano de Lógica Matemática*, realizado na Universidade Estadual de Campinas.

Atualmente, as Lógicas Paraconsistentes propiciam uma vasta gama de aplicações, dentre as mais promissoras, as implementações em tecnologias, computabilidade e inteligência artificial.

Os sistemas paraconsistentes de da Costa e alguns desenvolvimentos principais

Mencionaremos brevemente algumas lógicas paraconsistentes que se desenvolveram a partir do trabalho de da Costa, iniciando pela hierarquia $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$ ([da Costa, 1963]).

Em 1963, da Costa introduziu a hierarquia de cálculos proposicionais $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, a qual satisfaz as seguintes condições:

(i) O Princípio de Não-Contradição na forma $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ não é válido em geral;

(ii) A partir de duas premissas contraditórias α e $\neg\alpha$, não podemos deduzir qualquer fórmula β;

(iii) Os sistemas em questão devem conter esquemas e regras da lógica clássica que sejam compatíveis com as duas condições acima estabelecidas.

Sucintamente, podemos destacar outras importantes especificidades desses sistemas. Em particular, a partir do cálculo $\mathbf{C}_1$[57] é definido o operador de "*bom-comportamento*" ($\circ$), da seguinte maneira:

$$\alpha^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha),$$

onde α° é lido como "α é uma fórmula *bem-comportada*".

$\mathbf{C}_1$ tem como base a lógica proposicional positiva clássica, contendo os seguintes esquemas de axiomas :

[57] A linguagem do cálculo $\mathbf{C}_1$ é composta de variáveis proposicionais, os conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ e símbolos auxiliares.

Axioma 1: $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$

Axioma 2: $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset ((\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset (\alpha \supset \gamma))$

Axioma 3: $\alpha \supset (\beta \supset \alpha \wedge \beta)$

Axioma 4: $\alpha \wedge \beta \supset \alpha$

Axioma 5: $\alpha \wedge \beta \supset \beta$

Axioma 6: $(\alpha \supset \gamma) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \vee \beta) \supset \gamma))$

Axioma 7: $\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$

Axioma 8: $\beta \supset (\alpha \vee \beta)$

Axioma 9: $\neg\neg\alpha \supset \alpha$

Axioma 10: $\alpha \vee \neg\alpha$.

Além destes, temos esquemas de axiomas que fazem uso da noção de bom-comportamento definida anteriormente:

Axioma 11: $\beta^{\circ} \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \neg\beta) \supset \neg\alpha))$

Axioma 12: $\alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ} \supset (\alpha \supset \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \wedge \beta)^{\circ} \wedge (\alpha \vee \beta)^{\circ}$.

Em $\mathbf{C}_1$ temos a regra (**MP**): α, $\alpha \supset \beta \vdash \beta$.

É possível também definir novos operadores a partir de iterações entre operadores de bom-comportamento, da seguinte forma, para $0 < n < \omega$:

$$\alpha^{n} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^{\circ\circ\ldots\circ(n-vezes)}$$

$$\alpha^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^{\circ} \wedge \alpha^{\circ\circ} \wedge \ldots \wedge \alpha^{n}.$$

Por sua vez, os cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 < n < \omega$, são obtidos generalizando o Axioma 11 e o Axioma 12, da seguinte forma:

Axioma $11^{(n)}$: $\beta^{(n)} \supset ((\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \neg\beta)) \supset \neg\alpha))$

Axioma $12^{(n)}$: $\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)} \supset (\alpha \supset \beta)^{(n)} \wedge (\alpha \wedge \beta)^{(n)} \wedge (\alpha \vee \beta)^{(n)}$.

Além disso, em cada cálculo $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, pode-se definir o operador de *negação forte* ($\neg^*$), o qual possui as propriedades da negação clássica:

$$\neg^*\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg\alpha \wedge \alpha^{(n)}. \text{ [58]}$$

O cálculo $\mathbf{C}_\omega$ é axiomatizado pela lógica proposicional positiva clássica e os Axiomas 9 e 10, apresentados acima. Acrescentando-se o esquema $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, obtemos o cálculo $\mathbf{C}_0$, que denota o cálculo proposicional clássico[59].

Da Costa estende a hierarquia $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, para o cálculo de predicados de primeira ordem e para o cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade, gerando os cálculos $\mathbf{C}^*_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e $\mathbf{C}^=_n$, $1 \leq n \leq \omega$, respectivamente. A hierarquia é estendida também para teorias de descrições $\mathbf{D}_n$, $1 \leq n \leq \omega$. Não nos ocuparemos destas extensões, pois não constituem o objetivo de nosso trabalho.

Foram desenvolvidas também, por Arruda e da Costa, *Teorias Paraconsistentes de Conjuntos*[60], onde lógicas paraconsistentes são empregadas como lógicas subjacentes no intuito de permitir formulações mais fortes para o esquema de *Axioma da Separação*[61], sem restrições. Seu *modus operandi* consiste em tentar construir conjuntos inconsistentes de modo a comportar paradoxos formais, ainda que sejam evitadas antinomias[62]. Exemplos são as teorias de conjuntos paraconsistentes do tipo **NF**[63], denotadas por $\mathbf{NF}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, e introduzidas por [Arruda e da Costa, 1964], as quais são baseadas nos sistemas

[58] Para demonstrar que esta negação forte tem as propriedades da negação clássica, em cada cálculo $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, basta demonstrar o seguinte: $\vdash_{Cn} (\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \neg^*\beta) \supset \neg^*\alpha)$.

[59] É possível demonstrar que todos os axiomas de $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, são independentes e que cada um dos sistemas na hierarquia $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, é estritamente mais fraco do que os que o antecedem, sendo o cálculo $\mathbf{C}_\omega$ o mais fraco da hierarquia, conforme provado em [Alves, 1976]. Além disso, a hierarquia $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, não é decidível por matrizes finitas, resultado demonstrado em [Arruda, 1975a].

[60] Ver [Arruda e da Costa, 1964].

[61] Um dos axiomas da Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel, também conhecido como *Axioma da Compreensão.*

[62] No campo da lógica os termos "paradoxo"e "antinomia" não são distinguidos de forma muito acentuada, sendo tomados por vezes como sinônimos. Lançando mão de considerações filosóficas, no entanto, uma antinomia pode ser caracterizada como um conflito entre duas leis ou teses opostas, causando assim uma dificuldade aparentementemente insuperável. Um paradoxo(lógico) é tomado como uma argumentação ou derivação em um sistema lógico que gera duas proposições contraditórias, as quais não podem ser verdadeiras simultaneamente. Ver [Branquinho *et al*, 2006].

[63] Teoria de conjuntos introduzida por *Quine* em seu artigo *New foundations for mathematical logic*(ver [Quine, 1937]). Pode ser considerada como uma combinação entre teoria dos tipos e teoria dos conjuntos, onde o autor pretendia construir uma teoria de conjuntos, distinta da teoria **ZF**, que não gerasse os paradoxos da teoria ingênua de conjuntos. O principal diferencial era a inclusão do *conjunto universal* e também o fato de produzir conjuntos para os quais não se dispõe do axioma da escolha.

$\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$. As lógicas de base da hierarquia $\mathbf{NF}_n$, $1 \leq n \leq \omega$, correspondem aos cálculos de descrições $\mathbf{D}_n$, $1 \leq n \leq \omega$. Há algumas objeções às teorias de conjuntos $\mathbf{NF}_n$, em especial o fato de, por não serem compatíveis com o *Axioma da Escolha*[64], não são adequadas ao desenvolvimento da Matemática.

Como tentativa de lidar com a limitação mencionada, temos a hierarquia $\mathbf{CHU}_n$, $1 \leq n < \omega$, construída a partir da Teoria de Conjuntos **CHU** de Church[65]. Newton da Costa constrói a hierarquia $\mathbf{CHU}_n$, $1 \leq n < \omega$, em 1986, com o objetivo de obter teorias de conjuntos mais adequadas para o desenvolvimento de teorias matemáticas. A hierarquia $\mathbf{CHU}_n$, $1 \leq n < \omega$ tem como lógicas subjacentes os sistemas $\mathbf{C}_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$. Da Costa(1986) prova um relevante resultado: **CHU** é consistente se, e somente se, $\mathbf{CHU}_1$ é não-trivial. Como foi provado que a Teoria de Conjuntos-Zermelo Fraenkel **ZF** é consistente se, e somente se **CHU** é consistente(ver [Church, 1974] e [Fraenkel & Bar-Hillel, 1958]), temos que **ZF** é consistente, se e somente se, $\mathbf{CHU}_1$ é não-trivial.

Da Costa, seus discípulos e colaboradores de muitos países, têm introduzido muitos sistemas paraconsistentes e obtido relevantes resultados referentes a estruturas algébricas associadas a tais sistemas, teorias de conjuntos paraconsistentes, teorias de modelos, lógicas de ordem superior, cálculo diferencial paraconsistente e algumas aplicações em teorias baseadas em linguagens fechadas semanticamente, ética, outras lógicas não-clássicas, teoria da probabilidade, fundamentos do cálculo infinitesimal e da mecânica quântica, ciências cognitivas, ciências da computação, traduções e combinações de lógicas e aplicações em tecnologia.

2.2 As Lógicas da Inconsistência Formal: LFIs

Como visto, as lógicas paraconsistentes em geral aceitam a presença de inconsistência sem a trivialização da teoria, e, dentre estas estão as *Lógicas da Inconsistência Formal*, ou **LFI**s[66], introduzidas em [Carnielli e Marcos, 2002] e desenvolvidas em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007]. As **LFI**s introduzem a noção de consistência no raciocínio paraconsistente, não como uma fórmula definida, mas como um operador primitivo da linguagem

[64]Um axioma da Teoria **ZFC**(Zermelo-Fraenkel-Choice) que possui muitas formulações equivalentes entre si, e afirma a possibilidade de selecionar membros de conjuntos não-vazios. Sua relevância inclui sua contribuição para o desenvolvimento das teorias matemáticas contemporâneas assim como de importantes provas que dependem do mesmo.

[65]Introduzida por Church em 1974 para conciliar alguns aspectos da teoria **ZF**, que não possui conjunto universal, com a existência de um conjunto universal.

[66]Do inglês: *Logics of Formal Inconsistency*.

objeto, permitindo também definir um operador para a noção de inconsistência[67]. Outra característica fundamental desta classe de lógicas é a capacidade de reconstruir, como nas lógicas originais de da Costa, raciocínios clássicos que envolvem consistência, e, quando isto não é possível, suportar eventuais contradições sem gerar trivializações.

A característica da não-trivialidade continua sendo um dos critérios mais relevantes ao se considerar um sistema lógico paraconsistente. Isto porque um sistema útil, cujo formalismo é erigido sob alguma restrição filosófica ou mesmo pragmática, é avaliado por sua capacidade de distinguir entre dois grupos de proposições, as que podem ser derivadas no sistema e as que não podem, o que traduz a ideia de não-trivialidade. Assim, em lógicas paraconsistentes, essa característica se torna mais relevante do que a simples ausência de contradições em uma teoria ou sistema. Porém, o desafio que se impõe é, ao enfraquecer certas lógicas pela rejeição do Princípio *Ex Falso Sequitur Quodlibet*, não torná-las ao mesmo tempo inócuas ou de pouco valor dedutivo.

De qualquer modo, o que uma lógica paraconsistente parece implicar também é a rejeição à ideia de que duas proposições contraditórias apresentam, necessariamente, algum tipo de falsidade. Nesse sentido, não é o caso de validar, de maneira precipitada, todas as contradições, mas de construir modelos que tornem verdadeiras *algumas* proposições contraditórias, ampliando assim a noção de verdade assumida.

Na tradição das lógicas paraconsistentes, conceitos fundamentais como o *Princípio de Não-Contradição*, a propriedade da *Não-Trivialidade* e o *Princípio de Explosão*, usualmente são caracterizados como fórmulas ou enunciados na linguagem objeto[68]. A abordagem que faremos destas noções em nosso trabalho extrapolará a linguagem objeto e levará em conta uma apresentação metateorética, com base nas definições apresentadas em [Costa-Leite, 2003], [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007] e [Carnielli e Coniglio, 2016].

Seja $\mathbf{L} = \langle For, \vdash \rangle$ uma lógica, em que o operador de consequência $\vdash$ satisfaz pelo menos reflexividade, monotonicidade e transitividade[69].

- Um conjunto $\Gamma \subseteq For$ é considerado uma *teoria* de $\mathbf{L}$ se, $\alpha \in \Gamma$ *sse* $\Gamma \vdash \alpha$, para

[67]Este artifício parece seguir uma tendência cada vez mais presente em lógica, no que se refere a introduzir noções metateoréticas no nível da linguagem objeto. Exemplos de lógicas que seguem esta tendência são os sistemas LDS(*labeled deductive systems*), lógicas híbridas e lógicas da provabilidade.

[68]Como exemplo, o Princípio de Não-Contradição é representado pelo esquema de fórmula $\sim(\alpha \wedge \sim\alpha)$; a propriedade da Não-Trivialidade para algum sistema $\mathbf{S}$, pode ser enunciada por $\nvdash_{\mathbf{S}} \alpha$, para algum α; e o Princípio de Explosão é representado pelo esquema de fórmula $\alpha \supset (\sim\alpha \supset \beta)$.

[69]Em nossa dissertação estamos considerando uma relação de consequência também estrutural e finitária.

toda fórmula α.[70]

Seja uma lógica **L** e Γ uma teoria de **L**. Temos as seguintes definições:

- Γ é *contraditória* se, para alguma fórmula α, temos que $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$[71]. Por sua vez, **L** é *contraditória* se todas as suas teorias são contraditórias e *não-contraditória* se há alguma teoria Γ tal que para toda fórmula α, temos $\Gamma \nvdash \alpha$ ou $\Gamma \nvdash \neg\alpha$.

- Γ é *trivial* se para toda fórmula β, temos $\Gamma \vdash \beta$[72]. **L** é *trivial* se todas as suas teorias são triviais. Caso exista uma teoria Γ e alguma fórmula β tal que $\Gamma \nvdash \beta$, **L** é considerada *não-trivial*.

- Γ é *explosiva* se para toda fórmula α e toda fórmula β, temos $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$. **L** é *explosiva* se todas as suas teorias são explosivas[73].

- **L** é *paraconsistente* se há uma teoria Γ tal que, para alguma fórmula α e alguma fórmula β, temos $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$ e $\Gamma \nvdash \beta$[74].

- **L** é *finitamente trivializável* se existe ao menos uma fórmula(ou um conjunto de fórmulas tomadas em conjunção), que, quando adicionada a **L** a torna trivial. Do contrário, **L** é *não-finitamente trivializável.*

- **L** tem uma *partícula minimal* ou *falsum* se há alguma fórmula ξ tal que, para toda teoria Γ e toda fórmula β, temos que $\Gamma, \xi \vdash \beta$[75]. Quaisquer duas partículas *falsum* são equivalentes, e em geral podemos tratá-las como uma partícula *bottom*: $\perp$.

[70]Ou seja, uma teoria é um conjunto de fórmulas fechado sob uma relação de consequência lógica.

[71]Dizemos nesse caso que Γ é contraditória com respeito à fórmula α ou que Γ é α-contraditória.

[72]Uma teoria trivial não diferencia entre as fórmulas da linguagem, permitindo derivar todas elas como teoremas.

[73]Embora essa definição tradicionalmente seja associada ao Princípio nomeado *Ex Falso Sequitur Quodlibet*, conforme vemos em [Gomes e D'Ottaviano, 2017], em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007] esta definição é chamada de *Ex Contradictione Sequitur Quodlibet*, pois os autores distinguem entre trivializações causadas por contradições e as causadas por partículas *Falsum*, conforme veremos. Este Princípio também é chamado na literatura de *Pseudo-Scotus* ou *Princípio de Explosão.*

[74]Segundo esta definição, uma lógica paraconsistente deve ter ao menos uma teoria que seja contraditória e não-trivial. Um modo equivalente de definir a paraconsistência é enunciar que uma lógica **L** é paraconsistente se existe uma teoria Γ tal que, para alguma fórmula α e alguma fórmula β, temos que $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \nvdash \beta$, ou seja, a lógica deve possuir ao menos uma teoria que não seja explosiva. A primeira definição é mais próxima à já presente na obra de da Costa, enquanto a segunda é mais próxima à definição de Jaśkowski.

[75]Ou seja, uma lógica tem uma partícula minimal se há alguma fórmula em sua linguagem que pode trivializá-la. Alternativamente, um *falsum* é uma fórmula que implica todas as fórmulas da linguagem de **L**.

- **L** tem uma *partícula maximal* ou *verum* se há alguma fórmula δ tal que, para toda teoria Γ temos que $\Gamma \vdash \delta$[76]. Quaisquer duas partículas *verum* se equivalem e podemos tratá-las como uma partícula *top* :$\top$.

- **L** é dotada de uma *negação suplementar* se possui um esquema de fórmula $\varphi(p_0)$ tal que, $\varphi(\alpha)$ não é uma partícula *bottom*, para alguma fórmula α, e para toda teoria Γ e toda fórmula α e β, temos que Γ, α, $\varphi(\alpha) \vdash \beta$[77].

- **L** possui uma *implicação dedutiva* se contém uma fórmula $\psi(p_0, p_1)$ tal que $\psi(\alpha, \beta)$ não é uma partícula *bottom* ou partícula *top*, para alguma escolha de α e β, e, para toda teoria Γ e toda fórmula α e β, temos que $\Gamma \vdash \psi(\alpha, \beta)$ *sse* Γ, $\alpha \vdash \beta$[78].

- **L** é dotada de uma *negação complementar* quando possui um esquema de fórmula $\psi(p_0)$ tal que, $\psi(\alpha)$ não é uma partícula *top*, para alguma fórmula α, e para toda teoria Γ e toda fórmula α, temos que $\Gamma,\alpha \vdash \psi(\alpha)$ implica $\Gamma \vdash \psi(\alpha)$[79].

- **L** possui uma *negação clássica* (primitiva ou definida) se há um conectivo de negação que é simultaneamente complementar e suplementar[80].

- **L** é *parcialmente explosiva* com respeito a alguma fórmula σ(ou σ-*parcialmente explosiva*), se $\sigma(\beta_0,...,\beta_n)$ não é uma partícula *top*, para alguma escolha de $\beta_0,...,\beta_n$, e, para toda teoria Γ, toda escolha de $\beta_0,...,\beta_n$ e toda fórmula α, temos que $\Gamma,\alpha,\neg\alpha \vdash \sigma(\beta_0,...,\beta_n)$[81].

- **L** é *fortemente paraconsistente* se não há qualquer fórmula σ tal que **L** seja σ-parcialmente explosiva.

- **L** é *controlavelmente explosiva* em contato com uma fórmula σ, se $\sigma(\alpha_0,...,\alpha_n)$ e $\neg\sigma(\alpha_0,...,\alpha_n)$ não são partículas *bottom*, para alguma escolha de $\alpha_0,...,\alpha_n$, e, para

[76]Neste caso, δ é considerada uma *tese* da lógica **L**. Alternativamente, um *verum* pode ser compreendido como uma fórmula que é implicada por todas as fórmulas de **L**.

[77]Intuitivamente uma fórmula é uma negação suplementar se não é um *falsum* e satisfaz o Princípio de Explosão.

[78]A primeira direção ($\Rightarrow$) desta afirmação é garantida pela regra *Modus Ponens*, enquanto que a segunda ($\Leftarrow$) é consequência do *Metateorema da Dedução*. Muitos autores consideram as duas direções como instâncias do Metateorema da Dedução, e o faremos deste modo em nosso trabalho.

[79]Alternativamente, uma fórmula é uma negação complementar se não é um *verum* e satisfaz o esquema $(\neg\alpha \supset \alpha) \supset \alpha$, conhecido como *Consequentia Mirabilis* ou *Lei de Clavius*.

[80]De modo simples, para verificar se um conectivo de negação $\neg$ preenche os requisitos para ser uma negação clássica em uma lógica **L**, basta verificar se nesta lógica os seguintes esquemas são demonstráveis: $(\alpha \vee \neg\alpha)$ e $(\alpha \supset (\neg\alpha \supset \beta))$.

[81]Ou seja, **L** é *parcialmente explosiva* se suas teorias explodem acarretando um tipo específico de fórmula quando expostas a uma contradição.

toda teoria Γ, toda escolha de α_0,...,α_n, e toda fórmula β, temos que Γ, $\sigma(\alpha_0,...,\alpha_n)$, $\neg\sigma(\alpha_0,...,\alpha_n)\vdash\beta$[82].

- **L** é *adjuntiva* se existe uma fórmula $\varphi(p_0,\ p_1)$ tal que, $\varphi(\alpha,\ \beta)$ não é uma partícula *bottom*, para alguma fórmula α e alguma fórmula β, e, para toda fórmula α e β, toda teoria Γ e toda fórmula γ, temos que Γ, α, $\beta \vdash \gamma$ implica Γ, $\varphi(\alpha,\ \beta)\vdash\gamma$. Neste caso, o esquema $\varphi(\alpha,\ \beta)$ é denotado por $(\alpha \wedge \beta)$[83].

- **L** é *disadjuntiva* se existe uma fórmula $\psi(p_0,\ p_1)$ tal que, $\psi(\alpha,\ \beta)$ não é uma partícula *top*, para alguma fórmula α e alguma fórmula β, e, para toda fórmula α e β, toda teoria Γ e toda fórmula γ, temos que Γ, $\psi(\alpha,\ \beta) \vdash\gamma$ implica Γ, α, $\beta \vdash\gamma$.

2.2.1 O desenvolvimento das LFIs

Uma das características das **LFI**s é a internalização de um operador para a noção de consistência, como operador primitivo, em sua linguagem objeto. Em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007], são apresentados alguns exemplos de lógicas que têm potencial para a definição deste operador, os quais mencionaremos brevemente. A lógica paraconsistente trivalente denominada *Pac*, que não preenche os requisitos para a definição de um operador de consistência, é aqui incluída como referência para a obtenção de sua extensão, a **LFI1**, que é suficientemente expressiva para a introdução do referido operador. Outro exemplo a ser citado é uma lógica semelhante, e também suficientemente expressiva, conhecida como $\mathbf{P}^1$. Em sequência, apresentamos a propriedade da *explosão gentil*, que torna uma lógica paraconsistente apta a recuperar inferências clássicas desde que alguns ajustes sejam efetuados, o que também é típico de uma **LFI**.

A lógica Pac

A lógica *Pac*[84] é uma lógica paraconsistente trivalente que apresenta '1' e '$\frac{1}{2}$' como valores *designados* e '0' como valor *não-designado*[85]. Sua assinatura é composta pelos

[82] Ou seja, **L** é *controlavelmente explosiva* se suas teorias explodem quando expostas a um tipo específico de formula.

[83] Em dedução natural, a característica apresentada nesta definição corresponde à regra de *introdução da conjunção*.

[84] Conforme explanado em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007], esta designação aparece em [Avron, 1991]. Antes, em [Avron, 1986], esta lógica era denominada $RM_3^{\sim\supset}$, e ainda anteriormente foi chamada de PI^s, em [Batens, 1980].

[85] No contexto de uma *semântica multivalorada*, um conjunto de valores de verdade $\mathcal{V}$ é dividido entre o conjunto $\mathcal{D}$ dos valores "designados" e $\mathcal{U}$, dos valores "não-designados". A preservação da verdade na relação de consequência, neste caso, não se refere somente ao valor de verdade "verdadeiro", e sim a todos os valores designados.

conectivos usuais $\wedge$, $\vee$ e $\supset$ e uma negação paraconsistente. Esta lógica não é controlavelmente explosiva, visto que não existe uma fórmula α tal que $\alpha, \neg\alpha \vdash_{Pac} \beta$, e não possui uma partícula *bottom*, não sendo finitamente trivializável.

A lógica **LFI1**

Acrescentando-se à lógica *Pac* ou uma partícula *bottom* ou uma negação suplementar, obtém-se uma extensão também paraconsistente, que se mostra adequada para formalizar a noção de consistência. Historicamente, esta lógica foi delineada em [Schütte, 1960][86], e, introduzida e investigada de forma independente em [D'Ottaviano e da Costa, 1970], onde é denominada **J3**[87]. Os conectivos primitivos de **J3** são $\neg$, $\supset$ e ∇, não tendo sido introduzida uma negação suplementar $\sim$. Em [D'Ottaviano e Epstein, 1988] e [Epstein, 1995 e 2000] a lógica **J3** é reintroduzida, porém propondo como primitivo um operador de consistência: $\circ$ [88]. [Avron, 1999], [Carnielli *et al*, 2000] e [de Amo *et al*, 2002] [89] exploram outros recursos desta lógica, mantendo o conectivo $\circ$ como primitivo e dispensando o conectivo ∇ como primitivo. Ao adotar-se a assinatura Σ°, renomeou-se esta lógica como **LFI1**, sendo então considerada adequada para formalizar a noção primitiva de consistência. Com $\circ$ como conectivo primitivo, pode-se definir os conectivos anteriores $\sim$ e ∇:

$$\sim\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\neg\alpha \wedge \circ\alpha),$$

$$\nabla\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \vee \neg\circ\alpha).$$

Por sua vez, $\circ$ também pode ser definido como:

$$\circ\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\neg\nabla\alpha \vee \neg\nabla\neg\alpha).$$

A lógica $\boldsymbol{P}^1$

A lógica $\mathbf{P}^1$(apresentada em [Sette, 1973]), é trivalente, e assim como **J3**, tem como valores designados '1' e '$\frac{1}{2}$'. Sua assinatura conta com os conectivos clássicos $\vee$, $\wedge$ e $\supset$, além de uma negação paraconsistente $\neg$. Nesta lógica, o conectivo de consistência $\circ$ pode ser definido da seguinte maneira:

[86] A abordagem de Schütte, entretanto, não tem qualquer motivação paraconsistente.

[87] Esta lógica foi investigada pelos autores como tentativa de proporcionar uma possível solução ao problema de Jaśkowski.

[88] Denotado originalmente como ©.

[89] Os autores pretendiam explorar recursos desta lógica com vistas à sua aplicação em bases de dados inconsistentes.

$$\circ\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg\neg\alpha \vee \neg(\alpha \wedge \alpha).$$

$\mathbf{P}^1$ também tem duas importantes propriedades relacionadas entre si:

- é controlavelmente explosiva quando em contato com fórmulas não-atômicas arbitrárias, ou seja, o comportamento paraconsistente só se dá no nível atômico, sendo que α, $\neg\alpha \vdash \beta$, para qualquer fórmula α não-atômica arbitrária;
- para toda fórmula α não-atômica, $\vdash \circ\alpha$ se mantém.

Recuperando raciocínios que envolvem consistência

As lógicas **LFI1** e $\mathbf{P}^1$ têm potencial, segundo [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007], de recuperar raciocínios clássicos que envolvem consistência, pois podem definir um operador para esta noção no nível da linguagem objeto, ou mesmo introduzi-lo como primitivo[90]. A consistência aqui é compreendida como o que poderia estar faltando a uma contradição para que volte a implicar a trivialização dedutiva. Por sua vez, se as lógicas paraconsistentes são compreendidas como aquelas que permitem lidar com inferências em condições que não envolvem a pressuposição de consistência, a introdução controlada da noção de consistência aplicada à fórmulas em ambientes inconsistentes trará a possibilidade de reconstruir raciocínios clássicos nestes ambientes.

Segundo os autores, uma das características distintivas de uma **LFI**, ocasionada pela introdução do operador de consistência $\circ$ na linguagem objeto de algumas lógicas paraconsistentes, é a propriedade denominada *Explosão Gentil*[91], que aqui enunciamos como *Princípio de Explosão Gentil*:

[90] Observemos que esta intuição(a possibilidade de recuperar raciocínios que envolvem consistência em sistemas paraconsistentes) já se encontra nos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$ de da Costa, através de seu conectivo $\circ$ de "bom comportamento", conforme mostrado anteriormente.

[91] Como esclarecido em [Carnielli e Coniglio, 2016], uma **LFI** é uma lógica paraconsistente na qual a explosão dedutiva é permitida de modo *local* ou *controlado*. Isto é conseguido através da existência de um conjunto de fórmulas $\bigcirc(p)$ que depende de uma única variável proposicional p, tal que $\bigcirc(\alpha)$, juntamente com uma contradição $\{\alpha, \neg\alpha\}$, é explosiva ou trivial, sendo que uma lógica que atende este requisito é chamada *gentilmente explosiva*. A ideia intuitiva por trás dessa propriedade parece ser a de que, caso afirmemos a existência de um conjunto de fórmulas que dependem de α, e *α é o caso*, negá-lo implica em disseminar a contradição para todas as fórmulas que dependem de α. No entanto, a combinação de $\bigcirc(\alpha)$ com α, ou com $\neg\alpha$ não trivializa a lógica, pois se assim fosse a propriedade de explosão gentil seria redundante. Para o caso em que $\bigcirc(p)$ é um conjunto unitário, é denotado por $\circ p$, onde $\circ$ é o operador de consistência.

Princípio da Explosão Gentil: $\circ\alpha$, α, $\neg\alpha \vdash \beta$,[92]

para toda fórmula α e toda fórmula β.

Uma lógica pode ser então considerada uma **LFI** com respeito à negação $\neg$, se:

(a) $\alpha,\neg\alpha \nvdash \beta$, para alguma fórmula α e alguma fórmula β,

(b) É demonstrável o Princípio de Explosão Gentil.

Em algumas **LFI**s é possível também definir em sua linguagem objeto um operador de inconsistência $\bullet$, a partir do operador de consistência $\circ$, como veremos adiante.

2.2.2 Os C-sistemas

Dada uma lógica $\mathbf{L}=\langle For, \vdash\rangle$, seja $For^{+}\subseteq For$ o conjunto das fórmulas *positivas* de **L**, isto é, o fragmento de For destituído de negação. Uma determinada lógica $\mathbf{L}_2 = \langle For_2, \vdash_2\rangle$ preserva positivamente uma lógica $\mathbf{L}_1 = \langle For_1, \vdash_1\rangle$ se:

(a) $For_2^{+} = For_1^{+}$

(b) $(\Gamma \vdash_2 \alpha \ sse\ \Gamma \vdash_1 \alpha)$ para todo $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For_2^{+}$.

Se $\mathbf{L}_2$ preserva positivamente a lógica $\mathbf{L}_1$, então $\mathbf{L}_2$ é uma extensão conservativa[93] do fragmento positivo de $\mathbf{L}_1$.

Uma lógica $\mathbf{L}_2$ é um **C**-sistema baseado em $\mathbf{L}_1$ se:

(a) $\mathbf{L}_2$ é uma **LFI** na qual a consistência ou inconsistência são expressas por operadores no nível da linguagem objeto;

(b) $\mathbf{L}_1$ não é paraconsistente;

(c) $\mathbf{L}_2$ preserva positivamente $\mathbf{L}_1$.

[92]Podemos observar que, nos sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, de da Costa, já existe uma propriedade que pode ser entendida como "gentil", no sentido pretendido em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007]. É representada no Axioma 11 do Cálculo $\mathbf{C}_1$: $\beta^{\circ} \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \neg\beta) \supset \neg\alpha))$, e de fato se mostra como uma "Redução ao Absurdo Gentil". Tanto nesta forma quanto em sua generalização para o cálculo $\mathbf{C}_n$, esta fórmula parece recuperar um comportamento tipicamente clássico.

[93]Dadas duas lógicas $\mathbf{L}_1=\langle For_1, \vdash_1\rangle$ e $\mathbf{L}_2=\langle For_2, \vdash_2\rangle$, $\mathbf{L}_2$ é uma *extensão conservativa* de $\mathbf{L}_1$, se $For_1 \subseteq For_2$, e, para qualquer $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For_1$, temos que $\Gamma \vdash_2 \alpha$ sse $\Gamma \vdash_1 \alpha$.

2.2.3 Os dC-sistemas

Os ***dC**-sistemas* podem ser compreendidos como subsistemas dos **C**-sistemas. Quando é possível expressar alternativamente o conectivo de consistência por meio de outros conectivos de uma assinatura menos complexa, temos um **dC**-sistema *direto*; um **dC**-sistema pode ser também do tipo *indireto*, quando a consistência não pode ser expressa nem por um conectivo unário primitivo (como $\circ$), nem tampouco definido, mas sim somente por uma fórmula complexa φ, que depende de uma única variável.

O sistema $\mathbf{P}^1$, e os sistemas $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n < \omega$, são exemplos de **dC**-sistemas diretos, enquanto que **J3** é um **C**-sistema baseado na lógica clássica, mas não um **dC**-sistema[94].

Na próxima seção nos deteremos em alguns sistemas paraconsistentes específicos, a saber, os sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci**, que servirão de base para a obtenção dos *sistemas catódicos* a serem explanados posteriormente, e apenas o primeiro não se enquadra como **LFI**. Antes, introduziremos dois sistemas de lógica proposicional clássica positiva, os quais servirão como base para os sistemas paraconsistentes e para os *sistemas anódicos* também a serem introduzidos adiante.

2.3 Os sistemas PI, mbC, bC e Ci

Abordaremos um grupo de **LFI**s seguindo a sequência adotada em [Bueno-Soler, 2009], que em sua tese de doutorado busca investigar sistemas modais com diferentes negações paraconsistentes, a partir de uma **LFI** *minimal* ou fundamental, a saber, **mbC**, e introduzindo suas extensões gradativamente mais poderosas. O sistema **PI** a ser aqui apresentado como base para a lógica **mbC**, torna-se promissor para tratar de paradoxos que envolvam negação, por ser um sistema cuja negação tem características paraconsistentes e ao mesmo tempo é fraca a ponto de ter um comportamento positivo. Sendo um sistema transitório e de característica híbrida, é aqui apresentado como base para **mbC** e as **LFI**s.

A fim de introduzir esses sistemas, apresentaremos dois sistemas de lógica proposicional clássica positiva, sobre os quais construiremos as extensões correspondentes aos sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci**, e também aos *sistemas anódicos*.

Lógica clássica positiva: os sistemas $\boldsymbol{PC}^{\supset}$ *e* $\boldsymbol{PC}^{\supset\wedge}$

Um fragmento positivo de uma lógica $\mathbf{L}$=$\langle For, \vdash\rangle$ é um conjunto $For^+ \subseteq For$,

[94] A demonstração destes fatos é dada em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007].

das fórmulas positivas de **L**, ou seja, fórmulas que não possuem negações de quaisquer tipos. As lógicas positivas das quais nos ocuparemos são respectivamente o *fragmento implicativo* $\mathbf{PC}^{\supset}$,[95] e o *fragmento implicativo-conjuntivo* $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$ do cálculo proposicional clássico, conforme apresentados em [Bueno-Soler, 2009].

Seja $\Sigma^{\supset} = \{\supset\}$ uma assinatura proposicional e seja Var um conjunto de variáveis proposicionais. O conjunto $For^{\supset}$ de fórmulas da lógica proposicional implicativa clássica é regido pelas seguintes cláusulas:

- se $\alpha \in Var$, então $\alpha \in For^{\supset}$;
- se α e $\beta \in For^{\supset}$, então $(\alpha \supset \beta) \in For^{\supset}$;
- Nada mais é fórmula.

Definimos o conectivo $\vee$ em $\mathbf{PC}^{\supset}$ da seguinte maneira:

$$\text{Def.}_{\vee}\text{: } (\alpha \vee \beta) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \supset \beta) \supset \beta$$

Em $\mathbf{PC}^{\supset}$ consideramos uma relação de consequência $\vdash$ que seja reflexiva, monotônica, transitiva, finitária e estrutural, respeitando assim as condições (Con1)-(Con5) apresentadas na **Seção 1.2.1**.

Seja v: $For^{\supset} \rightarrow \{0{,}1\}$ uma função *valoração*, que atribui a cada fórmula em $For^{\supset}$ um valor de verdade. As valorações para $\mathbf{PC}^{\supset}$ atendem às seguintes cláusulas:

- $v(p)$=0 ou $v(p)$=1, para todo $p \in Var$;
- $v(\alpha \supset \beta)$=1 sse $v(\alpha)$=0 ou $v(\beta)$=1, para α, $\beta \in For^{\supset}$.

Os seguintes são axiomas de $\mathbf{PC}^{\supset}$:

(A1) $p \supset (q \supset p)$

(A2) $(p \supset q) \supset ((p \supset (q \supset r)) \supset (p \supset r))$

(A3) $(p \supset r) \supset (((p \supset q) \supset r) \supset r)$.

As seguintes são regras de inferência de $\mathbf{PC}^{\supset}$:

[95] Estudado originalmente por Henkin em [Henkin, 1949].

Modus Ponens (**MP**): α, $\alpha \supset \beta$ implica β

Substituição Uniforme (**SU**): $\vdash\alpha$ implica $\vdash\alpha[p/\beta]$.

O *Teorema da Dedução* (**TD**) é válido em $\mathbf{PC}^{\supset}$, ou seja, para $\Gamma \subseteq For^{\supset}$ e α, $\beta \in For^{\supset}$, se Γ, $\alpha \vdash\beta$ então $\Gamma \vdash\alpha \supset \beta$. Em particular, se $\alpha \vdash\beta$ então $\vdash\alpha \supset \beta$.[96] A forma conversa deste enunciado, (se $\Gamma \vdash\alpha \supset \beta$ então $\alpha \vdash\beta$) é obtida através de Modus Ponens. Por simplicidade, identificaremos ambas as direções como formas do Teorema da Dedução.

Em $\mathbf{PC}^{\supset}$ temos os seguintes teoremas:

(i) $p \supset (p \vee q)$

(ii) $q \supset (p \vee q)$

(iii) $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$

(iv) $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$

(v) $p \vee (p \supset q)$

(vi) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

(vii) $(p \vee (q \vee r)) \supset ((p \vee q) \vee r)$

(viii) $((p \vee q) \vee r) \supset (p \vee (q \vee r))$.

As demonstrações destes teoremas podem ser encontradas em [Bueno-Soler, 2009].

Ao adicionarmos o conectivo $\wedge$ como primitivo à assinatura que gera a linguagem $For^{\supset}$, estendemos o conjunto de fórmulas obtendo $For^{\supset\wedge}$. Nesta linguagem podemos construir o fragmento implicativo-conjuntivo do cálculo proposicional clássico, a saber, o sistema $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$. Temos mais uma cláusula de formação:

- se α e $\beta \in For^{\supset\wedge}$, então $(\alpha \wedge \beta) \in For^{\supset\wedge}$.[97]

[96] A demonstração pode ser encontrada em [Carnielli e Pizzi, 2008] e é por indução sobre o comprimento da demonstração. São utilizados os axiomas (A1), (A2), a fórmula $(\alpha\supset\alpha)$(a qual também pode ser facilmente obtida a partir de (A1) e (A2) e a regra (**MP**)).

[97] Observemos que, se tivéssemos à disposição o conectivo de negação(com propriedades específicas), poderíamos definir facilmente a conjunção a partir do conectivo primitivo já existente. Porém, em nível sintático este movimento não é possível sem descaracterizar o sistema como positivo, daí a necessidade de introduzir a conjunção em um novo conectivo primitivo a fim de ampliar o poder dedutivo do sistema anterior.

Adicionamos a valoração característica para o conectivo $\wedge$:

- $v(\alpha \wedge \beta)$=1 sse $v(\alpha)$=1 e $v(\beta)$=1.

O sistema $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$ acrescenta os seguintes axiomas aos que já existem em $\mathbf{PC}^{\supset}$:

(A4) $p \supset (q \supset (p \wedge q))$

(A5) $(p \wedge q) \supset p$

(A6) $(p \wedge q) \supset q$

Uma vez estabelecida a linguagem e os axiomas de $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$, temos novos teoremas[98]:

(ix) $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \gamma) \supset (\alpha \supset (\beta \wedge \gamma)))$

(x) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \supset (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.

Uma das características do sistema $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$ é ser uma lógica adjuntiva, no sentido definido anteriormente, ou seja, Γ,α, $\beta \vdash \gamma$ implica Γ, $(\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$. Em particular, α, $\beta \vdash \gamma$ implica $(\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$. Para verificar isto, suponhamos que (i) α, $\beta \vdash \gamma$ e (ii) $(\alpha \wedge \beta) \nvdash \gamma$; por (ii) devemos ter $v(\alpha \wedge \beta)$= 1 e $v(\gamma) = 0$, e daí $v(\alpha) = v(\beta) = 1$; porém isto contradiz (i). O caso geral segue por monotonicidade.

$\square$

2.3.1 O sistema PI

O sistema **PI**[99] é uma lógica paraconsistente não-gentilmente explosiva. Podemos obter o sistema **PI** estendendo a assinatura de de $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$ pela adição do conectivo $\neg$ como primitivo, o qual denota uma *negação fraca*. Seja $For^{\neg}$ o conjunto de fórmulas assim obtido. Temos então uma nova cláusula:

- se $\alpha \in For^{\neg}$, então $\neg\alpha \in For^{\neg}$.

O sistema **PI** inclui os axiomas e regras de $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$, e traz seu axioma característico:

(**PI**): $p \vee \neg p$.[100]

[98] Estas demonstrações também podem ser encontradas em [Bueno-Soler, 2009].

[99] Introduzido em [Batens, 1980].

[100] Embora o conectivo $\vee$ não seja primitivo na assinatura de $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$, a definição de $\vee$ que já apresentamos em função de $\supset$ permite que trabalhemos com este axioma desta forma.

A negação presente em **PI** é *complementar*, no sentido já definido neste trabalho. De fato, podemos verificar que, além de p não ser um $Verum$, a fórmula $((\neg p \supset p) \supset p)$ (*Consequentia Mirabilis*) é demonstrável em **PI**:

1.	$p \vee \neg p$	[(**PI**)]
2.	$(p \vee \neg p) \supset (\neg p \vee p)$	[Teorema de $\mathbf{PC}^{\supset}$ (vi)]
3.	$\neg p \vee p$	$[1, 2, (\mathbf{MP})]$
4.	$(\neg p \supset p) \supset p$	$[3, Def._{\vee}]$

$\square$

As valorações de **PI** incluem as de $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$ juntamente com a valoração para o conectivo $\neg$:

- se $v(\alpha) = 0$, então $v(\neg\alpha) = 1$.

Algumas características se destacam em **PI**, a saber:

- Não é possível definir uma partícula *bottom* em **PI**, conforme demonstrado em [Carnielli e Coniglio, 2016][101].
- Não é possível definir uma negação suplementar em **PI**, conforme demonstrado em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007][102].
- Como **PI** não possui uma negação suplementar, não é uma lógica explosiva. Não possuindo também uma partícula *bottom*, não é finitamente trivializável.
- O operador $\circ$ não pode ser definido em **PI**, conforme demonstrado em [Carnielli e Coniglio, 2016][103], e portanto esta lógica não é uma **LFI**.
- Em **PI** é válido o Teorema da Dedução (**TD**), característica herdada do sistema $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$ em virtude do fato de que não foram acrescentadas novas regras de inferência.
- Em **PI** pode-se contar com a estratégia de prova clássica conhecida como *prova por casos*:

[101] Ver **Proposição 3.3.18** em [Carnielli e Coniglio, 2016].
[102] Ver **Teorema 39** em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007].
[103] Ver **Proposição 3.3.19** em [Carnielli e Coniglio, 2016].

Se (Γ, $\alpha \vdash_{\mathbf{PI}} \beta$) e ($\Delta$, $\neg\alpha \vdash_{\mathbf{PI}} \beta$), então ($\Gamma$, $\Delta \vdash_{\mathbf{PI}} \beta$).

Podemos demonstrar este fato da seguinte maneira[104]:

1. $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ [hipótese]
2. $\Delta, \neg\alpha \vdash \beta$ [hipótese]
3. $\alpha \vee \neg\alpha$ [(**PI**)]
4. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\neg\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \vee \neg\alpha) \supset \beta))$ [Teorema de $\mathbf{PC}^{\supset}$ (iv)]
5. $\Gamma, \Delta \vdash (\alpha \supset \beta) \supset ((\neg\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \vee \neg\alpha) \supset \beta))$ [4, Con2]
6. $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$ [1, (**TD**)]
7. $\Delta \vdash \neg\alpha \supset \beta$ [2, (**TD**)]
8. $\Gamma, \Delta \vdash \beta$ [3, 5, 6, 7, (Con2) em 6 e 7, (**MP**) 3 vezes]

□

- **PI** é uma lógica *fortemente paraconsistente*.

  Supondo que **PI** não seja fortemente paraconsistente, deve existir uma fórmula σ tal que (i)$\sigma(\beta_0,...,\beta_n)$ não seja uma partícula *top*, para alguma escolha de $\beta_0,...,\beta_n$, e (ii) para toda teoria Γ, toda fórmula α e toda escolha de $\beta_0,...,\beta_n$, devemos ter $\Gamma,\alpha,\neg\alpha \vdash_{\mathbf{PI}} \sigma(\beta_0,...,\beta_n)$. Como **PI** é uma lógica adjuntiva, temos que $\Gamma,(\alpha \wedge \neg\alpha)\vdash_{\mathbf{PI}} \sigma(\beta_0,...,\beta_n)$. Por (**TD**), temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{PI}}(\alpha \wedge \neg\alpha) \supset \sigma(\beta_0,...,\beta_n)$. Para que a implicação(clássica) se mantenha, é necessário que $v(\alpha \wedge \neg\alpha)= 0$ ou $v(\sigma(\beta_0,...,\beta_n))= 1$. Como $(\alpha \wedge \neg\alpha)$ não constitui um partícula *bottom* em **PI**, devemos ter $v(\sigma(\beta_0,...,\beta_n))=$ 1, a fim de que a implicação se mantenha. Isto faz de $\sigma(\beta_0,...,\beta_n)$ uma partícula *top* para todo $\beta_0,...,\beta_n$, o que contradiz (i).

  □

- Para qualquer extensão de **PI** que seja fortemente paraconsistente, *não valem* procedimentos de *redução ao absurdo* como:

  (i) (Δ, $\beta \vdash\alpha$) e (Π, $\beta \vdash\neg\alpha$) implica (Δ, $\Pi \vdash\neg\beta$)

  (ii) (Δ, $\neg\beta \vdash\alpha$) e (Π, $\neg\beta \vdash\neg\alpha$) implica ($\Delta$, $\Pi \vdash\beta$).

[104] A partir deste ponto do trabalho estaremos assumindo amplamente a utilização da regra de Substituição Uniforme (**SU**), mesmo quando isto não for indicado de forma explícita.

Este fato pode ser evidenciado se considerarmos Δ=Π=$\{\alpha, \neg\alpha\}$. Caso apliquemos *reductio*, a lógica torna-se parcialmente explosiva.

- Sendo $\supset$ uma implicação dedutiva, *não valem* as seguintes regras de contraposição para qualquer extensão fortemente paraconsistente de **PI**:

  (i) Γ, $\alpha \supset \beta \vdash \neg\beta \supset \neg\alpha$

  (ii) Γ, $\alpha \supset \neg\beta \vdash \beta \supset \neg\alpha$

  (iii) Γ, $\neg\alpha \supset \beta \vdash \neg\beta \supset \alpha$

  (iv) Γ, $\neg\alpha \supset \neg\beta \vdash \beta \supset \alpha$.

  É possível verificar isto, supondo a validade da regra para efeito de argumentação:

1.	$\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$	[(A1)]
2.	$\Gamma \vdash \alpha \supset (\beta \supset \alpha)$	[1, Con2]
3.	$\Gamma, \alpha \vdash \beta \supset \alpha$	[2, (**TD**)]
4.	$\Gamma, \alpha \vdash \neg\alpha \supset \neg\beta$	[3, Contraposição]
5.	$\Gamma, \alpha, \neg\alpha \vdash \neg\beta$	[4, (**TD**)]

  A linha 5 da derivação mostra que, caso a regra de contraposição seja válida, novamente a lógica se torna parcialmente explosiva.

  $\square$

- Em geral, não é válida em **PI** a regra de *Substituição por Equivalentes Demonstráveis* (**EQ**)[105], resultado que falha também em suas extensões.

  Seja $\alpha \equiv \beta$ uma abreviação para $\alpha \vdash_{\mathbf{PI}} \beta$ e $\beta \vdash_{\mathbf{PI}} \alpha$. Embora em **PI** possamos ter $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$, não é o caso que tenhamos $\neg(p \wedge q) \equiv \neg(q \wedge p)$. Afinal, quando $v(p \wedge q) = v(q \wedge p) = 0$, temos que $v(\neg(p \wedge q)) = v(\neg(q \wedge p)) = 1$, mas para o caso em que $v(p \wedge q) = v(q \wedge p) = 1$, podemos ter valorações distintas para $\neg(p \wedge q)$ e $\neg(q \wedge p)$. Para quaisquer fórmulas que *não* estejam no escopo do conectivo $\neg$, a regra (**EQ**) permanece válida[106].

[105] Uma propriedade na qual, dadas duas fórmulas α_i e β_i (para $1 \leq i \leq n$), tal que $\alpha_1 \equiv \beta_1$,..., $\alpha_n \equiv \beta_n$, então $\varphi(\alpha_1,...,\alpha_n) \equiv \varphi(\beta_1,...,\beta_n)$, para toda fórmula $\varphi(p_1,...,p_n)$. Uma lógica na qual vale a regra (**EQ**) é chamada *auto-extensional* conforme indicado em [Wójcicki, 1988].

[106] A regra (**EQ**) também falha em fórmulas que estão no escopo do conectivo de consistência $\circ$, característico das **LFI**s que estendem **PI**. De modo geral, a partir de $\alpha \equiv \beta$ não se segue $\#\alpha \equiv \#\beta$, para $\# \in \{\neg, \circ\}$.

2.3.2 O sistema mbC

Adicionando o operador de consistência $\circ$ como conectivo primitivo à assinatura que dá origem à linguagem de **PI**, obtemos o conjunto For°. Adicionamos a seguinte cláusula de formação às já existentes:

- se $\alpha \in For^{\circ}$, então $\circ\alpha \in For^{\circ}$.

O sistema **mbC** estende **PI** pela adição de seu axioma característico:

$$(\mathbf{mbC}): \circ p \supset (p \supset (\neg p \supset q)).$$ [107]

As valorações de **mbC** incluem as valorações de **PI**, juntamente com a valoração para o conectivo $\circ$:

- se $v(\circ\alpha)$=1, então $v(\alpha)$=0 ou $v(\neg\alpha)$=0.

Em decorrência do axioma (**mbC**) e das propriedades da implicação dedutiva, pode-se obter em **mbC** a seguinte regra derivada:

$$(\mathbf{RD_{mbC}}): \circ\alpha,\ \alpha, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta$$ [108].

Em **mbC** obtém-se o seguinte teorema, o qual será útil em seções posteriores (demonstração em [Bueno-Soler, 2009]):

$$\vdash_{\mathbf{mbC}} (\alpha \wedge \neg\alpha) \supset \neg\circ\alpha.$$ [109]

$\square$

Em virtude da introdução do conectivo $\circ$ como primitivo e do Princípio de Explosão Gentil, alguns comportamentos clássicos podem ser recuperados, desde que suposições de consistência sejam realizadas. Temos então em **mbC** formas restritas das seguintes regras:

---

[107] Observemos que esta é a mesma fórmula conhecida como *Princípio de Explosão Gentil*, e apresentada em [Carnielli, Coniglio e Marcos, 2007] como (**bc1**) na reapresentação do cálculo $\mathbf{C}_1$ de da Costa. A diferença é que na abordagem de da Costa, $\circ$ era uma abreviação, enquanto que aqui o temos como um conectivo primitivo da linguagem.

[108] Intuitivamente, esta regra afirma que a explosão dedutiva ocorre quando temos simultaneamente consistência e contradição.

[109] Ou seja, de uma contradição obtém-se não-consistência.

Redução ao Absurdo

(i) $(\Gamma\vdash_{\mathbf{mbC}}\circ\alpha)$ e $(\Delta,\beta \vdash_{\mathbf{mbC}}\alpha)$ e $(\Lambda,\beta \vdash_{\mathbf{mbC}}\neg\alpha)$ implica $(\Gamma,\Delta,\Lambda\vdash_{\mathbf{mbC}}\neg\beta)$

(ii) $(\Gamma\vdash_{\mathbf{mbC}}\circ\alpha)$ e $(\Delta,\neg\beta \vdash_{\mathbf{mbC}}\alpha)$ e $(\Lambda,\neg\beta \vdash_{\mathbf{mbC}}\neg\alpha)$ implica $(\Gamma,\Delta,\Lambda\vdash_{\mathbf{mbC}}\beta)$.

Contraposição

(i) $\circ\beta,\ (\alpha \supset \beta)\vdash_{\mathbf{mbC}}(\neg\beta \supset \neg\alpha)$

(ii) $\circ\beta,\ (\alpha \supset \neg\beta)\vdash_{\mathbf{mbC}}(\beta \supset \neg\alpha)$

(iii) $\circ\beta,\ (\neg\alpha \supset \beta)\vdash_{\mathbf{mbC}}(\neg\beta \supset \alpha)$

(iv) $\circ\beta,\ (\neg\alpha \supset \neg\beta)\vdash_{\mathbf{mbC}}(\beta \supset \alpha)$.

Ao contrário do sistema **PI**, em **mbC** é possível definir uma partícula *bottom*. De fato, considerando $(\mathbf{RD_{mbC}})$ e o fato de que **mbC** é uma lógica adjuntiva, temos, para cada variável proposicional p :

$$\bot_p \stackrel{\text{def}}{=} p \wedge (\neg p \wedge \circ p).$$

A partir daí, podemos definir também uma negação suplementar em **mbC**. Definamos um conectivo de negação utilizando o símbolo $\sim$, da seguinte maneira:

$$\sim\!\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \supset \bot_p,$$

para alguma variável proposicional p. Podemos demonstrar que de fato esta negação definida é suplementar:

- $\sim\!\alpha$ não é um $falsum$.

  Considerando que $\sim\!\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \supset \bot_p$ e que $v(\alpha) = 0$, sendo $\supset$ uma implicação clássica, temos que $v(\alpha \supset \bot_p) = 1$, visto que o valor $v(\bot_p) = 0$ é constante.

- $\sim\!\alpha$ satisfaz o *Princípio de Explosão.*

  Basta verificar que $\forall\Gamma\forall\alpha\forall\gamma(\Gamma,\ \alpha,\ \sim\!\alpha \vdash_{\mathbf{mbC}}\gamma)$:

1.	Γ, α	[hipóteses]
2.	$\Gamma, \sim\alpha$	[hipóteses]
3.	$\Gamma, \alpha \supset \bot_p$	[2, Def. $\sim$]
4.	$\Gamma, \bot_p$	[3, 1, (**MP**)]
5.	$\Gamma, p \wedge (\neg p \wedge \circ p)$	[4, Def. $\bot_p$]
6.	$\Gamma \vdash p$	[5, (A5), (**MP**) e (**TD**)]
7.	$\Gamma \vdash \neg p$	[Cons. de 5, (A5), (**MP**) e (**TD**)]
8.	$\Gamma \vdash \circ p$	[Cons. de 5, (A6), (**MP**) e (**TD**)]
9.	$\circ p \supset (p \supset (\neg p \supset q))$	[(**mbC**)]
10.	$\Gamma \vdash \circ p \supset (p \supset (\neg p \supset q))$	[9, Con2]
11.	$\Gamma \vdash q$	[6, 7, 8, 10 e (**MP**) 3 vezes]

$\square$

Além de mostrar que a negação definida em **mbC** é suplementar, podemos mostrar também que ela preenche os requisitos para ser uma negação clássica. Para isto basta que mostremos que a negação definida também é complementar:

- $\sim\alpha$ não é um *verum*.

  Ainda considerando que $\sim\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \supset \bot_p$, seja $v(\alpha) = 1$. Sendo $\supset$ uma implicação clássica, temos que $v(\alpha \supset \bot_p) = 0$, visto que o valor $v(\bot_p) = 0$ é constante.

- $\sim\alpha$ satisfaz $\forall\Gamma\forall\alpha(\Gamma,\ \alpha \vdash\sim\alpha$ implica $\Gamma \vdash\sim\alpha)$[110].

  Vejamos:

[110]Uma forma alternativa seria provar que em **mbC** podemos obter a fórmula *Consequentia Mirabilis*, $(\sim\alpha \supset \alpha) \supset \alpha$, a exemplo do que faz [Bueno-Soler, 2009].

1.	$\Gamma, \alpha \vdash {\sim}\alpha$	[hipótese]
2.	$\Gamma \vdash \alpha \supset {\sim}\alpha$	[1, (**TD**)]
3.	$\Gamma \vdash \alpha \supset (\alpha \supset \perp_p)$	[2, Def.$_{\sim}$]
4.	$(\alpha \supset {\sim}\alpha) \supset (((\alpha \supset \perp_p) \supset {\sim}\alpha) \supset {\sim}\alpha)$	[(A3)]
5.	$\Gamma \vdash (\alpha \supset {\sim}\alpha) \supset (((\alpha \supset \perp_p) \supset {\sim}\alpha) \supset {\sim}\alpha)$	[4, Con2]
6.	$\Gamma \vdash ((\alpha \supset \perp_p) \supset {\sim}\alpha) \supset {\sim}\alpha$	[2, 5, (**MP**)]
7.	$\Gamma \vdash ({\sim}\alpha \supset {\sim}\alpha) \supset {\sim}\alpha$	[6, Def.$_{\sim}$]
8.	${\sim}\alpha \supset {\sim}\alpha$	[Teorema de reflexividade]
9.	$\Gamma \vdash {\sim}\alpha \supset {\sim}\alpha$	[8, Con2]
10.	$\Gamma \vdash {\sim}\alpha$	[7, 9, (**MP**)]

□

Assim, a negação $\sim$ definida em **mbC** tem as propriedades de uma negação clássica. Observemos que, como para cada variável proposicional de **mbC** temos uma partícula *bottom* distinta, cada negação clássica definida também será distinta, e, embora sejam equivalentes, não podem ser intersubstituídas livremente, pois a regra de Substituição por Equivalentes Demonstráveis (**EQ**) não é válida desde o sistema **PI**. Para utilizar uma negação clássica definida em **mbC**, podemos fixar uma variável proposicional p_0, que será utilizada para definir um bottom específico e por conseguinte a negação clássica que será usada no sistema.

Com a negação clássica, podemos definir na linguagem-objeto de **mbC** o conectivo de *inconsistência* $\bullet$:

$$\bullet\alpha \stackrel{\text{def}}{=} {\sim}\circ\alpha.$$ [111]

2.3.3 O sistema bC

O sistema **bC** é uma **LFI** que estende **mbC**, compartilhando de sua linguagem e adicionando seu axioma característico:

[111] Pode-se também definir o conectivo de inconsistência fazendo uso da negação fraca $\neg$, o que ocorre em **LFI**s como **Ci**.

$$(\mathbf{bC}):\ \neg\neg p \supset p.$$

As valorações de **bC** incluem as de **mbC** com a adição da cláusula:

- se $v(\neg\neg\alpha)$=1, então $v(\alpha)$=1.

2.3.4 O sistema Ci

O sistema **Ci**[112] compartilha da linguagem de **bC** e o estende, adicionando o axioma:

$$(\mathbf{Ci})\ \neg\circ p \supset (p \wedge \neg p).$$[113]

As valorações de **Ci** são as de **bC** acrescidas da seguinte cláusula:[114]

- se $v(\neg\circ\alpha)$=1 então $v(\alpha)$=1 e $v(\neg\alpha)$=1.

Como temos o resultado $\vdash_{\mathbf{mbC}}(\alpha \wedge \neg\alpha) \supset \neg\circ\alpha$, obtém-se em **Ci** uma equivalência entre as noções de *contradição* e *não-consistência*, por meio da qual, utilizando a negação primitiva $\neg$, definimos o operador de *inconsistência* $\bullet$:

$$\bullet\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg\circ\alpha.$$

No capítulo a seguir, apresentaremos classes de sistemas que são extensões modais do sistema $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$ e das **LFI**s aqui apresentadas, assim como do sistema **PI**.

[112] Há duas versões equivalentes de **Ci**, conforme chama a atenção [Bueno-Soler, 2009], e apresentamos aqui a mais simples.

[113] Ou seja, de uma não-consistência obtém-se uma contradição.

[114] A completude de **Ci** foi provada em [Carnielli e Marcos, 2002] por meio de uma semântica de valorações e também por intermédio de uma semântica de traduções possíveis.

3 Sistemas anódicos e catódicos

As nomenclaturas "anódico" e "catódico", utilizadas em contexto lógico, se originam em neologismos baseados nos termos *ânodo* e *cátodo* provenientes da química, sendo usados para caracterizar sistemas formais pela primeira vez em [Bueno-Soler, 2009][115]. Especificamente, os sistemas *anódicos* são considerados extensões modais de sistemas positivos, fazendo analogia com o pólo de uma bateria que não emite carga negativa; por sua vez, os sistemas *catódicos* apresentam alguma carga negativa, ou seja, contêm algum tipo de negação. Do mesmo modo que podemos controlar a carga elétrica emitida pelo pólo negativo em uma célula galvânica, podemos construir diferentes lógicas catódicas pela introdução controlada de diferentes tipos de negação.

Nas seções a seguir, abordaremos as particularidades destes sistemas, sem no entanto transcrever a totalidade da argumentação, a qual pode ser encontrada na tese de Bueno-Soler em [Bueno-Soler, 2009] e em dois artigos ([Bueno-Soler, 2009a][116] e [Bueno-Soler, 2010][117]). Também não reproduziremos provas de teoremas ou metateoremas que já foram demonstrados no trabalho original, nos atendo à aplicação de seus resultados. Quando necessário, indicaremos a leitura da referida tese.

3.1 Sistemas anódicos

Os sistemas anódicos são introduzidos em [Bueno-Soler, 2009] como uma base modal sobre a qual pode-se mensurar os efeitos lógicos de adicionarmos gradualmente negações subclássicas, introduzindo-as a partir de negações fracas até à possibilidade de definir uma negação clássica, que é o caso limite. Estas negações, inseridas de forma gradual e controlada, são chamadas de *elementos catódicos*, e geram os chamados sistemas catódicos, estes de grande interesse para o presente trabalho.

A seguir, mostraremos como estender modalmente o sistema $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$, a fim de obter sistemas monomodais anódicos.

[115] Segundo Bueno-Soler(2009): "Em química, *anódico* pode se entendido como o sentido para onde os elétrons se dirigem, ou aquele pólo que atrai o elemento negativo - visto assim, "anódico" se identifica com o "positivo". De forma simétrica, (...) *catódico* que pode ser entendido como o pólo que repele o elemento negativo - e igualmente visto assim, "catódico" se identifica com o "negativo".

[116] Completeness and incompleteness for anodic modal logics. *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 4(5): 291-310, 2009.

[117] Two semantical approaches to paraconsistent modalities. *Logica Universalis*, 4(1): 137-160, 2010.

3.1.1 Lógicas Monomodais Anódicas

Estendemos modalmente $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$ pela adição do operador $\Box$ à assinatura que dá origem à sua linguagem, gerando assim o conjunto $For^{\Box}$. Adicionamos a seguinte cláusula de formação às já existentes em $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$:

- se $\alpha \in For^{\Box}$, então $\Box\alpha \in For^{\Box}$.

Ao estendermos $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$ pela adição de uma extensão modal minimal, obtemos o sistema $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$, que é o fragmento implicativo-conjuntivo do sistema modal $\mathbf{K}$[118]. A axiomatização de $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$ inclui os axiomas e regras de $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$, trazendo também:

(**K**) $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$

(**Nec**) $\vdash\alpha$ implica $\vdash\Box\alpha$.

A semântica para $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$ é a semântica de mundos possíveis já apresentada neste trabalho, porém sem as cláusulas para os conectivos $\vee$ e $\sim$.[119]

A prova do Teorema de Correção para o sistema $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$ não difere muito do que é realizado para provar a Correção do sistema $\mathbf{K}$, visto que a ausência de negação não interfere no caso modal da referida prova. O percurso da prova inclui demonstrar que os axiomas de $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$ são válidos na classe de estruturas cuja relação de acessibilidade é arbitrária, e que as regras (**MP**), (**SU**) e (**Nec**) preservam a validade.

No que tange à prova de Completude, temos algumas peculiaridades ocasionadas pela ausência de negação em $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$. O processo pelo qual sua demonstração é obtida envolve a noção de *não-trivialidade*, em lugar da noção de consistência usual em provas deste tipo, sendo que a construção do modelo canônico para $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$ utiliza *conjuntos não-triviais maximais*.

As provas de correção e completude para o sistema $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$ são demonstradas em [Bueno-Soler, 2009].

---

[118] Bueno-Soler(2009) mostra também como estender modalmente o sistema $\mathbf{PC}^{\supset}$, de modo a obter o sistema anódico $\mathbf{K}^{\supset}$. Como suas propriedades são semelhantes, e também por ser um sistema mais expressivo, abordamos aqui diretamente a extensão modal do sistema $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$, a saber, o sistema $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$.

[119] Apesar disso, é possível utilizar a cláusula semântica para $\vee$ em $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$, desde que este conectivo é obtido por definição a partir de $\supset$.

3.1.2 Lógicas Bi-Modais Anódicas

Se tivéssemos à disposição um conectivo para a negação clássica, seria comum definir o operador modal alético $\Diamond$, a partir de $\Box$, conforme mostrado no Capítulo **1**. No entanto, sendo o sistema de base positivo, precisamos introduzir $\Diamond$ como operador primitivo à linguagem de $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$[120], a fim de podermos aumentar o poder expressivo desta lógica. Ao procedermos assim, temos o conjunto $For^{\Box\Diamond}$, a partir do qual é possível construir o sistema bi-modal $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$. Adicionamos à linguagem a seguinte cláusula de formação:

- se $\alpha \in For^{\Box\Diamond}$, então $\Diamond\alpha \in For^{\Box\Diamond}$.

Temos também a adição de novos axiomas modais:

(**K1**) $\Box(p \supset q) \supset (\Diamond p \supset \Diamond q)$

(**K2**) $\Diamond(p \vee q) \supset (\Diamond p \vee \Diamond q)$

(**K3**) $(\Diamond p \supset \Box q) \supset \Box(p \supset q)$.

Observemos que estas fórmulas seriam deriváveis a partir do Axioma (**K**) se tivéssemos à disposição a negação clássica e a consequente interdefinibilidade entre os operadores modais, o que não ocorre aqui.

São teoremas em $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$:

(i) $\vdash \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta \supset \Diamond(\alpha \vee \beta)$

(ii) $\vdash \Diamond(\alpha \wedge \beta) \supset (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$

(iii) $\vdash \Box(\alpha \vee \beta) \supset \Box\alpha \vee \Diamond\beta$

(iv) $\vdash \Diamond(\alpha \supset \beta) \supset (\Box\alpha \supset \Diamond\beta)$.

A semântica para $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ possui algumas particularidades, por exemplo o fato de que, embora não tenhamos disponível a interdefinibilidade dos operadores modais (pois $\Box$ e $\Diamond$ são introduzidos como primitivos), seu comportamento dual é preservado tanto quanto possível. Isto é conseguido por intermédio de um ajuste nas relações de acessibilidade referentes a estes operadores, o que é expresso na seguinte definição:

[120] Conforme indicado em [Bueno-Soler, 2009], a razão de construir uma extensão bi-modal a partir de $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$, em vez de $\mathbf{K}^{\supset}$, é, primeiramente, a de que $\mathbf{K}^{\supset\wedge}$ se aproxima mais dos sistemas modais usuais, e, em segundo lugar, a constatação de que o aparato utilizado para provar a completude deste sistema não funcionaria para $\mathbf{K}^{\supset}$, em decorrência do papel fundamental que o conectivo $\wedge$ desempenha na referida prova.

- seja $\mathfrak{F} = \langle W, R_\Box, R_\Diamond \rangle$ um $frame$ originado a partir da introdução dos operadores $\Box$ e $\Diamond$ como primitivos, onde $R_\Box$ e $R_\Diamond$ são relações arbitrárias de acessibilidade definidas sobre os elementos de W; então, um $frame$ para $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ pode ser caracterizado como uma estrutura $\mathfrak{F}$ =$\langle W, R\rangle$, onde definimos $R = R_\Box \cap R_\Diamond$[121].

O Teorema de Correção para $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$, que garante que todos os teoremas deste sistema são válidos na classe de todos os $frames$ nos quais R não requer propriedade específica(o caso em que R é arbitrária), segue o roteiro usual e sua prova pode ser encontrada em [Bueno-Soler, 2009].

Outra particularidade semâtica de $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ é o uso do artifício de $mundos\ factuais$ (ou $\Diamond$-*não-triviais*) na prova de seu Teorema de Completude, estratégia utilizada para conservar o sistema como estritamente positivo. Nesta semântica, os conjuntos são não-triviais com relação a fórmulas do tipo $\Diamond\alpha$, como explicita a seguinte definição:

- Seja $\mathbf{L}$= $\langle For, \vdash\rangle$ e $\Delta \subseteq For$. O conjunto Δ será chamado $factual$ se existe uma fórmula $\alpha \in For$ tal que $\Delta \nvdash \Diamond\alpha$. Não sendo o caso, Δ será chamado de *hipotético*.

Segundo [Bueno-Soler, 2009], o fato de haver em $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ sentenças da forma $\Diamond\alpha$ tornaria inevitável uma "possibilidade universal", um efeito indesejado se o objetivo pretendido é que inferências sejam realizadas sobre fatos. No entanto, excluir globalmente sentenças que tenham esta forma, traria para a lógica em questão um tipo de $falsum$, que, acrescido da implicação com propriedades clássicas presente em $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$, tornaria possível definir uma negação(clássica) no sistema. De todo modo, a simples presença de um $falsum$ em uma lógica já seria motivo para questionar seu caráter de "positiva", pois ocasiona invariavelmente uma explosão dedutiva. Deste modo, a estratégia adotada por [Bueno-Soler, 2009] para manter o caráter positivo deste sistema anódico é utilizar somente mundos factuais, mundos nos quais não se pode derivar as fórmulas do tipo $\Diamond\alpha$. Por sua vez, o modelo canônico para $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ é construído com base na noção de *extensões primas maximais.* O aprofundamento destes conceitos, assim como as provas de Correção e Completude para $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ são dadas em [Bueno-Soler, 2009].

[121]Conforme observado em [Bueno-Soler, 2009], seria possível definir R neste caso como $R_\Box \subseteq R_\Diamond$, ou $R_\Diamond \subseteq R_\Box$, ou ainda de maneira que as relações sejam independentes entre si. Porém estas possibilidades implicam em custos para o sistema, como a exclusão do axioma (**K1**) ou (**K3**), os quais afirmam a relação entre os dois operadores modais, e a intenção é propiciar que o comportamento destes operadores seja o mais próximo possível do que seria se tivéssemos uma negação clássica à disposição.

3.1.3 O esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$

O sistema anódico bi-modal $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ pode ser compreendido como *modalmente mínimo*, no sentido em que admite uma infinidade de sistemas como suas extensões. Estas extensões podem ser obtidas através da adição do esquema modal $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, o qual consiste em:

$$\mathbf{G}^{k,l,m,n} : \Diamond^k \Box^l \alpha \supset \Box^m \Diamond^n \alpha,$$ [122]

onde os índices k, l, m, n indicam o número de ocorrências de cada operador modal em suas iterações, e a maioria dos axiomas modais conhecidos pode ser obtida por meio de instâncias deste esquema[123]. Uma de suas maiores vantagens é que sua introdução permite provar a completude para uma classe de sistemas que sejam extensões do sistema de base, poupando assim a tarefa de examinar cada um por vez. Exemplos de instâncias do esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, que resultam em axiomas bem conhecidos em lógica modal, são os seguintes:

Axioma (**T**): $\mathbf{G}^{0,1,0,0}$ $(\Box\alpha \supset \alpha)$

Axioma (**D**): $\mathbf{G}^{0,1,0,1}$ $(\Box\alpha \supset \Diamond\alpha)$

Axioma (**B**): $\mathbf{G}^{0,0,1,1}$ $(\alpha \supset \Box\Diamond\alpha)$

Axioma (**4**): $\mathbf{G}^{0,1,2,0}$ $(\Box\alpha \supset \Box\Box\alpha)$

Axioma (**5**): $\mathbf{G}^{1,0,1,1}$ $(\Diamond\alpha \supset \Box\Diamond\alpha)$.

Semanticamente, assim como a cada axioma modal corresponde uma propriedade que caracteriza uma relação de acessibilidade específica, também há um esquema de propriedades que está relacionado ao esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, aqui chamado $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$ e que pode ser expresso em linguagem de primeira ordem[124]:

$$\mathbf{P}^{k,l,m,n} := \forall w_1 \forall w_2 \forall w_3((w_1 R^k w_2 \wedge w_1 R^m w_3) \supset \exists w_4(w_2 R^l w_4 \wedge w_3 R^n w_4)).$$

Neste esquema, cada $r \in \{k, l, m, n\}$ denota o "número de passos" pelos quais um mundo w_j é acessível a um mundo w_i, de modo que:

[122] Proposto por Lemmon e Scott(1977).

[123] Uma exceção a este fato é o *Axioma de McKinsey*: $\Box\Diamond\alpha \supset \Diamond\Box\alpha$.

[124] Chamado em [Carnielli & Pizzi, 2008] de *propriedade diamante* e em [Chellas, 1980] de *propriedade incestual*.

- se $w_i R^0 w_j$ então w_i é w_j;
- se $w_i R^r w_j$ então existem r-1 mundos w_{i+1},...,$w_{i+(r-1)}$ tal que $w_i R w_{i+1}$,...,$w_{i+(r-1)} R w_j$, o que significa que w_j é acessível a w_i em r-passos.

Estas convenções permitem abreviações nos casos em que as fórmulas contêm iterações entre operadores modais. Por exemplo, podemos abreviar uma fórmula da forma $\Box\Box\alpha$ como $\Box^2\alpha$. Aplicando estas convenções, podemos generalizar algumas fórmulas que já foram apresentadas neste trabalho, dentre axiomas e teoremas:

(i) $\Box^n(\alpha \supset \beta) \supset (\Box^n\alpha \supset \Box^n\beta)$

(ii) $\Box^n(\alpha \supset \beta) \supset (\Diamond^n\alpha \supset \Diamond^n\beta)$

(iii) $\Diamond^n(\alpha \vee \beta) \supset (\Diamond^n\alpha \vee \Diamond^n\beta)$

(iv) $\Diamond^n(\alpha \supset \beta) \supset (\Box^n\alpha \supset \Diamond^n\beta)$.

As provas destas generalizações podem ser encontradas em [Bueno-Soler, 2009].

As valorações para fórmulas do tipo $\Box^r\alpha$ e $\Diamond^r\alpha$, em que r denota o número de iterações entre operadores modais repetidos, podem ser adaptadas da seguinte maneira:

- $V(\Box^r\alpha,\, w) = 1$ *sse* $V(\alpha,\, w') = 1$ para todo $w' \in W$, tal que $wR^r w'$
- $V(\Diamond^r\alpha,\, w) = 1$ *sse* $V(\alpha,\, w') = 1$ para algum $w' \in W$, tal que $wR^r w'$.

Sendo $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ um sistema bi-modal positivo em que não podemos interdefinir os operadores $\Box$ e $\Diamond$, para satisfazer a propriedade $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$ precisamos adicionar a instância dual do esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, a saber, o esquema $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$, a fim de obter a completude dos sistemas estendidos[125]. Assim, ao estendermos $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ através dos esquemas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, temos a classe de sistemas anódicos:

$$\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond} + \mathbf{G}^{k,l,m,n} + \mathbf{G}^{m,n,k,l}.$$

[125] Por exemplo, instância dual de $\mathbf{G}^{0,0,1,1}$: $\alpha \supset \Box\Diamond\alpha$(Axioma (**B**)), é $\mathbf{G}^{1,1,0,0}$: $\Diamond\Box\alpha \supset \alpha$. Temos o curioso caso do axioma (**D**): $\Box\alpha \supset \Diamond\alpha$, cuja instância e sua dual são a mesma, a saber, $\mathbf{G}^{0,1,0,1}$. Este seria um caso em que não precisaríamos do acréscimo de axiomas duplicados ao estender o sistema bi-modal.

3.2 Sistemas catódicos

Os *sistemas catódicos* podem ser compreendidos como sistemas modais que possuem em sua linguagem negações subclássicas. Estes sistemas podem ser obtidos de duas maneiras:

(I) *estendendo sistemas anódicos pela adição de negações subclássicas em sua linguagem e pela inclusão de axiomas de lógicas paraconsistentes.*;

Este modo se harmoniza com a definição de sistemas catódicos sustentada em [Bueno-Soler, 2009](aqui adaptada), que simultaneamente esclarece um mecanismo de construção para estes sistemas:

- Um *sistema catódico* é uma extensão de um sistema anódico através da adição do conectivo de negação $\neg$, ou da adição simultânea de $\neg$ e do conectivo $\circ$ como primitivos na linguagem do sistema anódico em questão.[126]

(II) *estendendo modalmente lógicas com negações fracas, como por exemplo as lógicas paraconsistentes.*

O item (II) concorda com o fato de que podemos obter sistemas modais paraconsistentes simplesmente substituindo a base clássica da lógica em questão por uma base paraconsistente[127], recurso já utilizado na literatura[128], e que seria bem natural que desenvolvêssemos aqui (pois introduzimos os sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci**, bastando então estendê-los modalmente de acordo com a conveniência). Seguiremos no entanto a metodologia apresentada em [Bueno-Soler, 2009], por concordarmos que os efeitos da adição dos axiomas paraconsistentes aos sistemas anódicos permite uma melhor avaliação do efeito gradual que as diferentes negações provocam nos sistemas modais.

Estamos interessados também na aplicação dos sistemas modais resultantes deste processo aos Paradoxos Epistêmicos-Doxásticos, e, tanto o sistema **PI** e as **LFIs** apresentadas neste trabalho, quanto os sistemas anódicos, foram erigidos sobre uma base comum, o sistema positivo $\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$. Segundo Bueno-Soler(2009):

> Por um lado estamos estabelecendo uma metodologia para obter lógicas modais de diferentes tipos, e, por outro lado, mostraremos que esse aparato permite identificar, por exemplo, a importância da negação para a solução de alguns paradoxos deônticos e epistêmicos.

[126] Bueno-Soler define originalmente esta noção enunciando como requisito a adição simultânea dos conectivos $\neg$ e $\circ$, porém, se assim fosse, os sistemas catódicos baseados em **PI** não entrariam nesta categoria, pelo fato de que este não é uma **LFI** e não admite o conectivo $\circ$ em sua linguagem.

[127] Seria um caso de *fibrilação algébrica*, em particular, de *fusão* entre lógicas. Ver [Carnielli e Coniglio, 2014].

[128] Ver [Costa-Leite, 2003].

Assim, enfatizamos o interesse pelo trabalho, o qual se concentra propiciar metodologias para obter classes de sistemas modais com variados tipos de negação, com vistas à aplicações em problemas das lógicas epistêmico-doxásticas.

3.2.1 As classes de sistemas catódicos $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$

Consideremos o sistema anódico bi-modal $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$, e as extensões que podem ser obtidas através da adição dos esquemas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$. Classes inteiras de sistemas catódicos podem ser construídas da seguinte maneira:

- $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$: $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond} + \mathbf{G}^{k,l,m,n} + \mathbf{G}^{m,n,k,l} + (\mathbf{PI})$
- $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$: $\mathbf{PI}^{k,l,m,n} + (\mathbf{mbC})$
- $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$: $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n} + (\mathbf{bC})$
- $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$: $\mathbf{bC}^{k,l,m,n} + (\mathbf{Ci})$.

Como a partir do sistema **mbC** é possível definir uma negação clássica $\sim$, alguns esquemas de fórmulas que representam comportamentos clássicos podem ser recuperados como propriedades válidas em **mbC**:

(i) $\alpha \vee {\sim}\alpha$

(ii) $\alpha \supset {\sim}{\sim}\alpha$

(iii) ${\sim}{\sim}\alpha \supset \alpha$

(iv) $(\alpha \supset \beta) \supset ({\sim}\beta \supset {\sim}\alpha)$

(v) $({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta) \supset {\sim}(\alpha \vee \beta)$

(vi) $({\sim}\alpha \vee \beta) \supset (\alpha \supset \beta)$

(vii) $(\alpha \supset \beta) \supset ({\sim}\alpha \vee \beta)$

(viii) $(\alpha \vee \beta) \supset ({\sim}\alpha \supset \beta)$

(ix) ${\sim}(\alpha \wedge \beta) \supset ({\sim}\alpha \vee {\sim}\beta)$.

Cada uma destas propriedades pode ser demonstrada como no caso clássico.

$\square$

A restauração destas propriedades em **mbC** permite a recuperação da interdefinibilidade entre os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ (I$\Box\Diamond$), antes duais, na classe $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, o que não seria possível somente a partir da negação $\neg$. Isto faz também com que qualquer sistema modal baseado em **mbC** apresente propriedades comuns de um sistema modal usual.

Para que tenhamos efetivamente (I$\Box\Diamond$) na classe $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, [Bueno-Soler, 2009] indica ser necessário adicionar dois *axiomas de ligação*[129], a saber:

(AL1) $\Box{\sim}p \supset {\sim}\Diamond p$

(AL2) ${\sim}\Diamond p \supset \Box{\sim}p$.

Com o auxílio de (AL1) e (AL2) é possível demonstrar como válidas, em $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, os seguintes esquemas, que afirmam a relação entre os operadores $\Box$ e $\Diamond$:

(i) $\Diamond\alpha \supset {\sim}\Box{\sim}\alpha$

(ii) ${\sim}\Box{\sim}\alpha \supset \Diamond\alpha$

(iii) $\Box\alpha \supset {\sim}\Diamond{\sim}\alpha$

(iv) ${\sim}\Diamond{\sim}\alpha \supset \Box\alpha$.

As respectivas provas podem ser encontradas em [Bueno-Soler, 2009].

$\square$

A partir do resultado anterior, observamos que os sistemas pertencentes à classe $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, assim como suas extensões paraconsistentes, passam a se comportar como sistemas monomodais. Por sua vez, os axiomas aqui assinalados como (**K1**), (**K2**) e (**K3**), presentes no sistema anódico $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$, são deriváveis como teoremas de $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, a partir do axioma (**K**) e das propriedades clássicas recuperadas em **mbC**, conforme demonstra [Bueno-Soler, 2009].

Podemos mostrar também que são teoremas de $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ as seguintes generalizações das relações estabelecidas entre os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$:

[129] *Bridge Principle*. Ver [Carnielli *et al.*, 2007].

(i) $\sim\Diamond^n\sim\alpha \supset \Box^n\alpha$

(ii) $\Box^n\alpha \supset \sim\Diamond^n\sim\alpha$

(iii) $\Box^n\sim\alpha \supset \sim\Diamond^n\alpha$

(iv) $\sim\Diamond^n\alpha \supset \Box^n\sim\alpha$

(v) $\Diamond^n\sim\alpha \supset \sim\Box^n\alpha$

(vi) $\sim\Box^n\alpha \supset \Diamond^n\sim\alpha$

(vii) $\Diamond^n\alpha \supset \sim\Box^n\sim\alpha$.

Como na presença de uma negação clássica o sistema perde o comportamento bi-modal[130], pode-se verificar que os esquemas duais $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$, antes necessários no sistema anódico bi-modal $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$, em $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ se equivalem. Basta mostrar que $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ implica $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$, e que vale também sua recíproca.

Estes resultados e propriedades também se mantêm válidos para as extensões de $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, como $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$.

Lembremos que os modelos para os sistemas anódicos $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ + $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ + $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$ satisfazem a propriedade $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$ (a propriedade *diamante* ou *incestual*), mencionada anteriormente. Os modelos para os sistemas catódicos também satisfazem a referida propriedade, acrescentando as valorações características dos axiomas paraconsistentes. Então, um modelo $\mathfrak{M} = \langle W,\, R,\, V\rangle$ para os sistemas catódicos é um modelo para $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ + $\mathbf{G}^{k,l,mn}$ + $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$ no qual R satisfaz $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$, acrescido das seguintes cláusulas para valorações:

- para $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$:

  (i) $V(\alpha,\, w) = 0$ implica $V(\neg\alpha,\, w) = 1$;

- para $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ adiciona-se:

  (ii) $V(\circ\alpha,\, w) = 1$ implica $V(\alpha,\, w) = 0$ ou $V(\neg\alpha,\, w) = 0$;

- para $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ adiciona-se:

  (iii) $V(\neg\neg\alpha,\, w) = 1$ implica $V(\alpha,\, w) = 1$;

[130] De fato, a presença de dois operadores como primitivos se torna supérflua, fazendo com que a classe realmente possa ser escrita de forma monomodal.

- para $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ adiciona-se:

  (iv) $V(\neg\circ\alpha,\, w) = 1$ implica $V(\alpha,\, w) = 1$ e $V(\neg\alpha,\, w) = 1$.

Em virtude de viabilizar a demonstração do Teorema da Correção e, considerando o fato de ser possível definir uma negação clássica a partir da classe $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, podemos adicionar a cláusula:

(v) $V({\sim}\alpha,\, w) = 1$ *sse* $V(\alpha,\, w) = 0$.[131]

O Teorema de Correção para a classe de sistemas catódicos consiste em demonstrar que seus axiomas são válidos(no caso de $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, todos os axiomas de $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ mais o axioma (**PI**); e no caso dos sistemas a partir da classe $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, todos os axiomas proposicionais seguidos do axioma (**K**) e dos axiomas de ligação (AL1) e (AL2), além dos axiomas paraconsistentes específicos de cada sistema), e que o Axioma $\mathbf{G}^{k,l,mn}$ é válido em todo $frame$ onde a relação R satisfaz $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$. Em paralelo, deve-se provar que as regras (**MP**), (**US**) e (**Nec**) preservam validade.

O Teorema de Completude para as classes de sistemas catódicos $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ é obtido também por intermédio da construção de modelos canônicos, os quais utilizam a noção de conjunto não-trivial maximal. É incluída uma cláusula para a negação clássica $\sim$, a partir da classe $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ no que se refere às condições que regem os conjuntos não-triviais maximais(o que permite mostrar que se pode dispensar a noção de $mundo\ factual$[132], antes necessária aos sistemas anódicos bi-modais e à classe de sistemas catódicos $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$), e são acrescidas também cláusulas relacionadas aos axiomas característicos de cada **LFI**.

O caso da completude para a classe $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ é obtido por composição dos resultados inerentes aos sistemas anódicos bi-modais e aos sistemas catódicos, e pode ser encontrado com detalhes em [Bueno-Soler, 2009].

O Teorema de Completude é válido também para o caso em que os sistemas catódicos são estendidos com inúmeras instâncias do esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, resultado que pode ser adaptado para o caso dos sistemas anódicos bi-modais, em que a presença do esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ requer o axioma dual. Este fato é de extrema relevância para este trabalho, desde

[131] Como ${\sim}\alpha$ é definida como $\alpha \supset \bot$, e, tendo o conectivo $\supset$ propriedades clássicas, se $V(\alpha \supset \bot,\, w) = 1$, como $V(\bot,\, w) = 0$, então $V(\alpha,\, w) = 0$.

[132] É interessante observar que esta noção é dispensável em todos os sistemas modais que têm uma negação clássica à disposição. A definição de mundo factual precisa ser inserida apenas nos sistemas anódicos e em sistemas híbridos, como os catódicos com negação muito fraca(a exemplo da classe $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$).

que implica a possibilidade de dotar de bases paraconsistentes sistemas modais conhecidos na literatura(nos quais usualmente um sistema modal minimal é estendido através de dois ou mais axiomas), assim como outras combinações convenientes.

Para mostrar isto, Bueno-Soler(2009) adapta em sua tese o argumento apresentado em [Carnielli e Pizzi, 2008]: caso tenhamos r-instâncias do esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, devemos verificar que classe R obtida pela interseção entre as relações $\mathbf{P}^{k_1,l_1,m_1,n_1}$,..., $\mathbf{P}^{k_r,l_r,m_r,n_r}$, é não vazia; em seguida, demonstra-se que, adicionando-se duas instâncias distintas do esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$(o argumento é generalizado por iteração) a um dos seguintes sistemas, $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ + (**mbC**), $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ + (**bC**) ou $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ + (**Ci**), os sistemas resultantes são corretos e completos com relação à classe de enquadramentos na qual a relação R satisfaz simultaneamente as propriedades $\mathbf{P}^{k_1,l_1,m_1,n_1}$ e $\mathbf{P}^{k_2,l_2,m_2,n_2}$.

4 Lógicas epistêmico-doxásticas paraconsistentes

Em termos gerais, nossa investigação consiste em averiguar se os sistemas catódicos, apresentados no capítulo anterior, podem apresentar uma base para interpretações epistêmico-doxásticas de lógicas modais, que suportem fórmulas contraditórias envolvendo noções epistêmicas. Em específico, analisaremos como os sistemas catódicos se comportam mediante os Paradoxos da *Cognoscibilidade* e da *Credibilidade*, apresentados na Seção **1.4**.

4.1 Revisitando o Paradoxo da Cognoscibilidade

O Paradoxo da Cognoscibilidade representa o colapso do operador epistêmico no contexto das lógicas alético-epistêmicas. Esta seção não tem por objetivo retomar na íntegra aspectos filosóficos e formais pertinentes às apresentações tradicionais deste Paradoxo, as quais discorremos no Capítulo **1**. Pretendemos, em lugar disto, utilizar o aparato formal introduzido no Capítulo **3**, em especial o dos sistemas catódicos, como base para analisar possibilidades de tratamentos paraconsistentes para o Paradoxo. No processo, revisitaremos algumas demonstrações do Paradoxo apresentadas anteriormente, desenvolvidas agora em sistemas alético-epistêmicos paraconsistentes.

4.1.1 Um sistema catódico $\mathbf{T}_K$ baseado em mbC

Construiremos um sistema alético-epistêmico paraconsistente $\mathbf{T}_K$, baseado em **mbC**, com o objetivo de verificar se o Paradoxo da Cognoscibilidade se mantém em sua forma usual. Chamá-lo-emos de $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$.

A linguagem de $\boldsymbol{T}_{K\boldsymbol{mbC}}$

Seja $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, onde $\Sigma = \{\neg, \circ, \Box, \Diamond, K\}$ e $\Sigma_2 = \{\supset, \wedge\}$, uma assinatura para $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$ e Var o conjunto de variáveis proposicionais. O conjunto For de fórmulas da linguagem de $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$, apresenta as seguintes cláusulas definidas recursivamente:

- se $\alpha \in Var$ então $\alpha \in For$;
- se $\alpha \in For$ então $\circ\alpha$, $\neg\alpha$, $K\alpha$, $\Box\alpha$ e $\Diamond\alpha \in For$;
- se α e $\beta \in For$ então $(\alpha \supset \beta)$ e $(\alpha \wedge \beta) \in For$.

O operador $\vee$ é introduzido por definição:

$$(\alpha \vee \beta) \overset{\text{def}}{=} ((\alpha \supset \beta) \supset \beta).$$

O sistema $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$ contém os seguintes axiomas:

($\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$): Todos os axiomas e teoremas de $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$

(**PI**): $p \vee \neg p$

(**mbC**): $\circ p \supset (p \supset (\neg p \supset q))$

($\mathbf{K}_K$): $K(p \supset q) \supset (Kp \supset Kq)$

($\mathbf{T}_K$): $Kp \supset p$.[133]

As regras de inferência de $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$ incluem as regras de $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ e a regra de Necessitação Epistêmica ($\mathbf{Nec}_K$): $\vdash\alpha$ implica $\vdash K\alpha$.

O teorema epistêmico ($\wedge_K$): $K(\alpha \wedge \beta) \supset (K\alpha \wedge K\beta)$, utilizado nas demonstrações usuais do Paradoxo da Cognoscibilidade, é demonstrável em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$ da mesma forma que no sistema $\mathbf{T}_K$ baseado na lógica clássica(ver Subseção **1.4.1**), bastando empregar ($\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$)[134], ($\mathbf{Nec}_K$), ($\mathbf{K}_K$) e (**MP**).

$\square$

Analisaremos agora as demonstrações usuais do Paradoxo da Cognoscibilidade, porém a partir dos recursos do sistema $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$. Este processo envolve, dentre outros elementos, reescrever as principais teses e hipóteses que contêm negação, usando o conectivo para negação paraconsistente $\neg$ em lugar da negação clássica.

Em primeiro momento, consideramos a restrição de utilizar apenas as características paraconsistentes de $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$, e a partir disso, verificaremos se é possível obter a Tese Fitch-Moore no sistema. Utilizaremos as mesmas identificações usadas na Subseção **1.4.1** para distinguir entre os tipos de demonstrações usuais e suas variações. Iniciaremos pelo tipo (**TFM**1), apresentado na Subseção **1.4.1**.

a) Demonstração (**TFM**1) em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$:

[133] O Axioma **T**, independente de sua intepretação, pode ser instanciado pelo esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ (como $\mathbf{G}^{0,1,0,0}$), o que faz deste sistema um dos sistemas catódicos introduzidos em [Bueno-Soler, 2009].

[134] Como definido acima, ($\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$) se refere aos axiomas e teoremas do sistema $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$, o que inclui ($\mathbf{PC}^{\supset\wedge}$), o fragmento positivo da lógica proposicional clássica utilizado em inferências clássicas usuais.

1.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset (K\varphi \wedge K\neg K\varphi)$	$[(\wedge_K)]$
2.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset K\varphi$	[1, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e $(\mathbf{MP})$]
3.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset K\neg K\varphi$	[1, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e $(\mathbf{MP})$]
4.	$K\neg K\varphi \supset \neg K\varphi$	$[(\mathbf{T}_K)]$
5.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset \neg K\varphi$	[3, 4, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e $(\mathbf{MP})$]
6.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset (K\varphi \wedge \neg K\varphi)$	[2, 5, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e $(\mathbf{MP})$]
7.	$(K\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset \neg\circ K\varphi$	$[\vdash_{\mathbf{mbC}}]$
8.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset \neg\circ K\varphi$	[6, 7, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e $(\mathbf{MP})$]

Considerando somente as características paraconsistentes do sistema $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$ não conseguimos chegar à Tese Fitch-Moore através do tipo de demonstração (**TFM**1). Em vez disso, o resultado que obtivemos pode ser intuitivamente interpretado como "se um agente sabe que há uma proposição verdadeira e não conhecida(pelo mesmo agente), então não é consistente que este agente saiba esta proposição". A seguir, mostraremos a demonstração do tipo(**TFM**2) (ver Subseção **1.4.1**), desenvolvida no ambiente paraconsistente de $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$.

b) Demonstração (**TFM**2) em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$:

1.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi)$	[hipótese]
2.	$K\varphi \wedge K\neg K\varphi$	[1, $(\wedge_K)$ e $(\mathbf{MP})$]
3.	$K\varphi$	[2, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e $(\mathbf{MP})$]
4.	$K\neg K\varphi$	[2, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e $(\mathbf{MP})$]
5.	$K\neg K\varphi \supset \neg K\varphi$	$[(\mathbf{T}_K)]$
6.	$\neg K\varphi$	[4, 5, $(\mathbf{MP})$]
7.	$K\varphi \wedge \neg K\varphi$	[3, 6, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e $(\mathbf{MP})$]
8.	$(K\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset \neg\circ K\varphi$	$[\vdash_{\mathbf{mbC}}]$
9.	$\neg\circ K\varphi$	[7, 8, $(\mathbf{MP})$]

Aqui temos um resultado similar ao da demonstração de (**TFM**1) em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$, a saber, de uma hipótese que afirma o conhecimento de que há uma proposição verdadeira e não conhecida, obtemos nesta lógica que o conhecimento sobre tal proposição não é consistente. Porém, pelo caminho de (**TFM**2), mais uma vez não pudemos obter a Tese Fitch-Moore.

Em decorrência dos resultados acima, a tentativa de obter em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$ o colapso do operador epistêmico, em uma demonstração como (**COL**1)(ver Subseção **1.4.1**), encontra dificuldades. Afinal, nesta demonstração precisamos da Tese Fitch-Moore para derivar o colapso do operador epistêmico. O mesmo ocorre com o tipo de demonstração (**COL**2), também apresentada na Subseção **1.4.1**, a qual também depende da presença da Tese Fitch-Moore para acarretar o colapso.

Em relação à demonstração (**COL**3)(ver **Seção 1.4.1**), lembremos que esta derivação não depende da Tese Verificacionista ou da Tese Fitch-Moore para gerar o colapso do operador epistêmico, bastando introduzir como hipótese a Tese da Não-Onisciência Lógica (**NO**). Mesmo assim, isto não viabiliza em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$ a obtenção do colapso do operador epistêmico(considerando apenas o ambiente estritamente paraconsistente do sistema). Basta verificar que, utilizando a negação $\neg$ para reescrever a hipótese (**NO**) (de modo a obtermos $\varphi \wedge \neg K\varphi$), e aplicando em seguida a regra ($\mathbf{Nec}_K$), a sequência da demonstração se torna idêntica à tentativa de provar o caminho (**TFM**2) em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$, apresentada acima, obtendo-se novamente como resultado a fórmula $\neg\circ K\varphi$.[135]

c) Definindo uma negação clássica em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$:

Como visto, podemos definir no ambiente de **mbC** uma negação clássica $\sim$ para cada variável proposicional p. Cada uma destas negações definidas, embora equivalentes, não são livremente inter-substituíveis, afinal a regra (**EQ**) falha desde o sistema **PI**(ver Subseção **2.3.1**). Fixemos então uma variável proposicional específica, a qual denotamos p_0, para definir uma negação $\sim$ que possa ser usada como padrão para o sistema $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$, do seguinte modo:

$$\sim\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \supset \bot_{p_0}.$$

Mostramos na Subseção **3.2.1** que, utilizando a negação definida, podemos recuperar importantes propriedades da lógica clássica como contraposição e redução ao absurdo.

[135] Em virtude do fato de que a partir do passo 2, a demonstração (**COL3**) em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$ segue a mesma cadeia de inferências desenvolvida para (**TFM2**) em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$, não a reproduziremos aqui.

Vimos também que na classe de sistemas catódicos $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, a negação $\sim$ permite também a interdefinibilidade entre os operadores modais (I$\Box\Diamond$). Disto resulta que podemos recuperar o Paradoxo da Cognoscibilidade(em suas várias formas e etapas) de forma integral em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$, assim como também em sistemas aléticos-epistêmicos pertencentes às classses de sistemas catódicos $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$, relativa à negação clássica definida $\sim$.

O caso do Paradoxo da Credibilidade em um sistema alético-doxástico baseado em **mbC**, porém, apresenta aspectos distintos em relação ao Paradoxo da Cognoscibilidade, e discutiremos suas significativas diferenças ao final do trabalho.

A seguir, analisaremos o Paradoxo da Cognoscibilidade em um sistema catódico bimodal no qual não é possível definir uma negação clássica.

4.1.2 Um sistema catódico $\mathbf{T}_K$ baseado em PI

O sistema catódico construído pela adição do Axioma (**PI**) ao sistema anódico $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$, não permite a definição de uma negação clássica a partir de sua linguagem, e por isso não temos à disposição importantes propriedades clássicas que resultariam da introdução desta negação no sistema. De fato, a lógica componente **PI** não possui em sua linguagem o operador de consistência $\circ$, não se classificando assim como uma **LFI**, e a negação característica do sistema, $\neg$, é apenas complementar. O sistema não permite, então, a definição de uma partícula *bottom* ou a definição de uma negação suplementar (ver Subseção **2.3.1**).

Suas extensões modais permanecem então com uma base bi-modal, não sendo possível recuperar a interdefinibilidade entre os operadores $\Box$ e $\Diamond$, os quais em $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$ coexistem como primitivos. Por fim, a classe de sistemas catódicos $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, obtida pela adição do esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ à $\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}+$ (**PI**), terá, para cada instância deste esquema, uma instância de seu axioma dual: $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$.

Construiremos agora um sistema catódico $\mathbf{T}_K$ baseado em **PI**, o qual chamaremos de $\mathbf{T}_{K\mathbf{PI}}$. As características de $\mathbf{T}_{K\mathbf{PI}}$ são similares às já apresentadas para o sistema catódico $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$, com as seguintes ressalvas:

- na linguagem de $\mathbf{T}_{K\mathbf{PI}}$ não temos o operador de consistência $\circ$;
- a axiomatização de $\mathbf{T}_{K\mathbf{PI}}$ não inclui o axioma (**mbC**), e deste modo também não

inclui regras derivadas e teoremas característicos do sistema **mbC** que sejam consequências deste axioma;

- em todos os demais aspectos o sistema $\mathbf{T}_{K\mathbf{PI}}$ é similar à $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$.

De modo análogo ao que procedemos quando tratamos de $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$, analisaremos algumas demonstrações usuais que conduzem ao Paradoxo da Cognoscibilidade, as reproduzindo no ambiente do sistema $\mathbf{T}_{K\mathbf{PI}}$. Iniciamos pela tentativa de obter a Tese Fitch-Moore.

a) Demonstração (**TFM**1) em $\mathbf{T}_{K\mathbf{PI}}$:

1.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset (K\varphi \wedge K\neg K\varphi)$	$[(\wedge_K)]$
2.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset K\varphi$	[1, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e (**MP**)]
3.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset K\neg K\varphi$	[1, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e (**MP**)]
4.	$K\neg K\varphi \supset \neg K\varphi$	$[(\mathbf{T}_K)]$
5.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset \neg K\varphi$	[3, 4, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e (**MP**)]
6.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset (K\varphi \wedge \neg K\varphi)$	[2, 5, $(\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond})$ e (**MP**)]

Observemos que a partir do passo 6 da demonstração, não podemos prosseguir em direção à obtenção da Tese Fitch-Moore, pois não dispomos de regra de Redução ao Absurdo em um sistema catódico que tenha como base uma lógica não finitamente trivializável como **PI**. Assim, não foi possível demonstrar a Tese Fitch-Moore através do modo (**TFM**1) em $\mathbf{T}_{K\mathbf{PI}}$.

O mesmo ocorre com a demonstração (**TFM2**), pois, a partir da contradição $K\varphi \wedge \neg K\varphi$ (ver passo 7 desta demonstração em $\mathbf{T}_{K\mathbf{mbC}}$), também não podemos aplicar procedimento de Redução ao Absurdo e nem mesmo obter a fórmula $\neg\circ K\varphi$, o que seria possível se tivéssemos **mbC** como base.

Esta limitação afeta também as demonstrações do colapso do operador epistêmico do tipo (**COL**1) e (**COL**2)(ver Subseção **1.4.1**), em um sistema $\mathbf{T}_{K\mathbf{PI}}$ + (**TV**), pois ambos os tipos de demonstração necessitam, a fim de gerar o colapso, da presença da Tese Fitch-Moore em suas respectivas derivações.

O caso do tipo (**COL**3), o qual é apresentado na Subseção **1.4.1** e não utiliza a Tese Fitch-Moore ou a Tese Verificacionista, também não nos conduz ao colapso em $\mathbf{T}_{K\mathbf{PI}}$, como veremos.

b) Demonstração (**COL**3) em $\mathbf{T}_{K\mathbf{PI}}$:

1.	$\varphi \wedge \neg K\varphi$	[hipótese (**NO**)]
2.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi)$	[1, ($\mathbf{Nec}_K$)]
3.	$K(\varphi \wedge \neg K\varphi) \supset (K\varphi \wedge K\neg K\varphi)$	[($\wedge_K$)]
4.	$K\varphi \wedge K\neg K\varphi$	[2, 3, (**MP**)]
5.	$K\varphi$	[4, ($\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$) e (**MP**)]
6.	$K\neg K\varphi$	[4, ($\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$) e (**MP**)]
7.	$K\neg K\varphi \supset \neg K\varphi$	[($\mathbf{T}_K$)]
8.	$\neg K\varphi$	[6, 7, (**MP**)]
9.	$K\varphi \wedge \neg K\varphi$	[5, 8, ($\mathbf{K}^{\supset\wedge\Diamond}$) e (**MP**)]

Embora possamos conduzir a derivação até certo ponto, não pudemos obter o colapso do operador epistêmico, nem mesmo avançar para além da contradição obtida no passo 9, pelas mesmas razões indicadas anteriormente(a falta de propriedades clássicas importantes como o procedimento de Redução ao Absurdo, do qual não dispomos nesta lógica paraconsistente).

4.2 O Paradoxo da Credibilidade em sistemas paraconsistentes

Ao considerarmos a possibilidade de construir um sistema alético-doxástico sobre uma base paraconsistente, surge a questão sobre se ainda é possível introduzir o Axioma ($\mathbf{D}_B$):$B\varphi \supset {\sim}B{\sim}\varphi$, que envolve o conectivo de negação, essencial para o desenvolvimento da derivação usual pela qual se obtém a Tese Fitch-Moore doxástica. Isto porque o axioma expressa o significado de que um agente representado é *consistente* em suas crenças[136]: se o agente acredita que φ então não acredita na negação de φ.

O ponto é que consideramos plausível que uma situação representada pela fórmula $(B\varphi \wedge {\sim}B\varphi)$ possa ocorrer, se não em uma perspectiva ontológica[137], ao menos do ponto

[136] Ver [Girle, 2000].

[137] Ontologicamente, pode ser difícil conceber um agente que simultaneamente mantenha e não mantenha a mesma atitude de crença diante de uma proposição. Por outro lado, a situação representada pela fórmula $(B\varphi \wedge B{\sim}\varphi)$ causa menos desconforto, na medida em que um agente real de crenças pode considerar ter evidências para acreditar tanto em uma proposição quanto em sua negação, o que torna a trivialização dedutiva um comportamento, neste caso, inadequado. Porém, é possível demonstrar a partir de ($\mathbf{D}_B$)

de vista formal, como uma maneira de garantir que sistemas doxásticos não incorram em explosão dedutiva pela mera presença de fórmulas contraditórias, evitando assim a obtenção de resultados desconcertantes como os Paradoxos (os quais talvez sejam mais oriundos do fato de basear a lógica modal sobre a clássica, do que da adoção de alguma Tese problemática). Porém, se a lógica de base for paraconsistente, é possível que seja justamente o Axioma ($\mathbf{D}_B$) a assunção potencialmente problemática.

Em vista dessas dificuldades, podemos reescrever ($\mathbf{D}_B$) utilizando o conectivo para negação paraconsistente $\neg$, obtendo assim a fórmula $B\varphi \supset \neg B \neg \varphi$. No entanto, desde que o conectivo $\neg$ ainda representa algum tipo de negação, ainda que de natureza distinta da clássica, permanece a ideia *intuitiva* de que um agente que acredita em uma proposição está desautorizado em acreditar na negação dessa proposição. Do ponto de vista formal, porém, o caráter de negação fraca do conectivo $\neg$ traz a possibilidade de tolerância à contradições, mesmo quando o esquema de axioma parece afirmar o oposto[138].

Caso utilizemos em ($\mathbf{D}_B$) o operador de compatibilidade C (ver Seção **1.3**), em lugar de uma modalidade negada (de modo a obtermos a fórmula ($B\varphi \supset C\varphi$)), não estaremos inteiramente imunes à mesma observação. Isto porque o que está sendo afirmado é que a informação que é acreditada deve ser compatível com as crenças já estabelecidas - uma exigência que, pelas razões já mencionadas, gostaríamos de evitar em um sistema paraconsistente.[139] Aliado a isso, a estrutura sintática das demonstrações que envolvem o Paradoxo da Credibilidade depende do fato de que ($\mathbf{D}_B$) é escrito utilizando o conectivo de negação.

Embora ainda não possamos sustentar que sem o Axioma ($\mathbf{D}_B$), o Paradoxo da Credibilidade não ocorra, temos mais razões para dispensá-lo do que para mantê-lo em um sistema doxástico. A utilização desse Axioma é essencial na demonstração padrão para obter a Tese Fitch-Moore Doxástica ($\mathbf{TFM}_B$), o que acarreta diretamente a obtenção do colapso em todas as formas apresentadas, como podemos verificar na Subseção **1.4.1**, e por isso, sem o Axioma problemático, é possível que não tenhamos que nos preocupar

que ($B{\sim}\varphi \supset {\sim}B\varphi$), desde que a negação $\sim$ seja a clássica.

[138]Bueno-Soler, em comentário pessoal por ocasião da qualificação do presente trabalho, compartilha dessa posição quando afirma ser "muito mais fácil aceitar esse axioma com negações fracas do que com a negação clássica, pois a negação fraca nasce permitindo contradições, o que não ocorre com a negação clássica."

[139]De fato, a interpretação doxástica do operador $\Diamond$, a saber C, é caracterizada de maneira clássica no que concerne à noção de compatibilidade envolvida (ver [Hintikka, 1962] e [Girle, 2000]). Contudo, ao invés da noção de compatibilidade, talvez fosse mais adequado interpretar esse operador em um contexto paraconsistente como trazendo a ideia de *não-tirivialidade*. Pretendemos explorar essa ideia em trabalhos futuros.

com o Paradoxo da Credibilidade, pelo modo usual.

A alternativa promissora à primeira vista, por não utilizar ($\mathbf{D}_B$) para obter a Tese Fitch-Moore doxástica, é a variação que introduz no sistema alético-doxástico o Axioma ($\mathbf{5}^c_B$): $B{\sim}B\varphi \supset {\sim}B\varphi$. Mas este axioma também utiliza o conectivo de negação $\sim$, e, mesmo que o reescrevamos com a negação paraconsistente $\neg$, não teríamos uma instância do esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$.[140] Este ponto é de crucial relevância, porque tanto ($\mathbf{D}_B$) quanto ($\mathbf{5}^c_B$) fazem com que seus respectivos sistemas não se enquadrem como sistemas catódicos pertencentes às classes apresentados neste trabalho. Por esta razão, caso ignoremos as ressalvas discutidas e construamos sistemas que incluam os axiomas com modalidades negadas, deveríamos primeiramente apresentar uma prova de seus Teoremas de Completude, a fim de verificar em que extensão o avanço do Paradoxo da Credibilidade pode ser contido, e esta é uma questão que será estudada em trabalhos futuros.

[140] Outra razão pela qual esta alternativa não elimina as dificuldades, é que, embora a ($\mathbf{TFM}_B$) possa ser obtida sem ($\mathbf{D}_B$), o mesmo não pode ser dito do colapso do operador doxástico, como vemos nas Subseção **1.4.1**.

Considerações finais e indicações de pesquisa futura

A seguir, elencamos algumas questões que consideramos importantes em nossa pesquisa até o momento.

Em relação à possibilidade de recuperar o Paradoxo da Cognoscibilidade em um sistema catódico no qual possamos definir uma negação clássica $\sim$, é questionável em certo sentido se obtemos neste caso o "mesmo" Paradoxo, de modo integral. Isto porque o que a sentença $\sim\alpha$ expressa por meio uma negação clássica como operador primitivo, é distinto do que seu equivalente, $\alpha \supset (p_0 \wedge (\neg p_0 \wedge \circ p_0))$, expressa com a negação paraconsistente $\neg$, caso no qual a fórmula $\sim\alpha$ é uma abreviação.

Por outro lado, para mostrar que o Paradoxo da Cognoscibilidade não pode ser obtido em uma classe de sistemas catódicos baseada na lógica **PI**, precisamos construir um contra-modelo que mostre que a Tese Fitch-Moore não é válida neste sistema, tarefa que nos propomos a desenvolver em trabalhos futuros.

Continua sendo controverso se o Axioma ($\mathbf{D}_B$), em sua forma com negação, é plausível em uma lógica de base paraconsistente, visto que representa um tipo de consistência ao modo clássico, mesmo quando construído a partir de negações fracas. Arriscamo-nos a dizer, com base no que foi investigado, que ambas as versões deste Axioma (escrito com negações ou com o operador de compatibilidade "C"), são supérfluas em quaisquer sistemas doxásticos paraconsistentes, e estes poderiam ser construídos de modo satisfatório apenas com a base modal minimal e o Axioma ($\mathbf{4}_B$). E sem o referido axioma problemático, não obtemos o Paradoxo da Credibilidade.

Observamos que, assim como o sistema **PI**, o cálculo $\mathbf{C}_\omega$ de da Costa apresentado na Seção **2.1** não é finitamente trivializável e também não dispõe de recursos que permitam recuperar raciocínios clássicos, não sendo considerado uma **LFI**. Isto, dentre outros fatores, por não possuir qualquer axioma que, a exemplo de (**mbC**), possa recuperar o Princípio de Explosão, ainda que de forma atenuada. O cálculo $\mathbf{C}_\omega$ contém o esquema de axioma que chamamos de (**PI**) e também o esquema ($\neg\neg\alpha \supset \alpha$), que já apresentamos como (**bC**). Por suas características, parece ser promissor como base para tratar os Paradoxos epistêmico-doxásticos, direção esta que pretendemos aprofundar em pesquisas futuras.

Também como opção promissora para uma investigação futura, pretendemos explorar o sistema **J3**, investigado em [D'Ottaviano e da Costa, 1970]. Esta é uma lógica paraconsistente multivalorada mais forte que os sistemas mencionados, na qual pode-se definir as noções de necessário e possível, e assim abordar os Paradoxos Epistêmico-Doxásticos.

Por fim, pretendemos avaliar em que medida as características das classes de sistemas catódicos $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$, sistemas pouco explorados neste trabalho, possibilitariam de algum modo a recuperação do Paradoxo da Cognoscibilidade sem o uso explícito da negação clássica definida, ou seja, utilizando apenas os conectivos primitivos de suas respectivas assinaturas.

Bibliografia

[1] ALMEIDA, D. C. P. de. *A Persistência do Paradoxo da Cognoscibilidade*. Dissertação de Mestrado, IFCH - Unicamp. Campinas, SP, Brasil, 2011, pp. 1-96.

[2] ALVES, E. H. *Lógica e inconsistência*: um estudo dos cálculos $\mathbf{C}_n$, $1 \leq n \leq \omega$. Dissertação de Mestrado, FFLCH, Universidade Estadual de São Paulo, 1976.

[3] ARISTÓTELES. *Da interpretação.* Tradução e comentários de José Veríssimo Teixeira da Mata. São Paulo, UNESP, 2013.

[4] ARRUDA, A. I. On the Imaginary Logic of N. A. Vasil'év, in *Non-Classical Logic, Model Theory and Computability.* A. I. Arruda, N. C. A. da Costa and R. Chuanqui (eds.), Amsterdam, North Holland, pp. 3-24, 1977.

[5] ARRUDA, A. I. Remarques sur les systèmes $\mathbf{C}_n$. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris.* (A-B), 280: 1253-1256, 1975.

[6] ARRUDA, A. I.; DA COSTA, N. C. A. Sur une hiérarchie de systèmes formels. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris, série A*, v. 259, pp. 2943-2945, 1964.

[7] AVRON, A. On an implication connective of *RM*. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 27: 201-209, 1986.

[8] AVRON, A. Natural 3-valued logics - characterization and proof theory. *The Journal of Symbolic Logic*, 56(1): 276-294, 1991.

[9] AVRON, A. On the expressive power of the three-valued and four-valued languages. *Journal of Logic and Computation*, 9: 977-994, 1999.

[10] BATENS, D. Paraconsistent extensional propositional logics. *Logique et Analyse*, 90-91: 195-234, 1980.

[11] BECKER, O. Zur Logik der Modalitäten. *Jarhbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung.* 11: 497-548, 1930.

[12] BLACKBURN, P.; de RIJKE, M.; VENEMA, Y. *Modal Logic.* Vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[13] BRANQUINHO, J.; MURCHO, D.; GOMES, N. G. *Enciclopédia de Termos Lógico-Filosóficos.* Martins Fontes, São Paulo, 2006.

[14] BUENO-SOLER, J. *Multimodalidades Anódicas e Catódicas*: a negação controlada em lógicas multimodais e seu poder expressivo. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Brasil, 2009, pp. 1-209.

[15] BUENO-SOLER, J. Completeness and incompleteness for anodic modal logics. *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 4(5): 291-310, 2009, pp. 1-135.

[16] BUENO-SOLER, J. Two semantical approaches to paraconsistent modalities. *Logica Universalis*, 4(1): 137-160, 2010.

[17] CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E. Combining Logics. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, (ed.) Edward N. Zalta. Springer, 2014.

[18] CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E. *Paraconsistent Logic*: consistency, contradicition and negation. Springer International Publishing AG, 2016.

[19] CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E.; GABBAY, D.; GOUVEIA, P.; SERNADAS, C. *Analysis and Synthesis of Logics*: How to Cut and Paste Reasoning Systems. Springer, Amsterdam, 2007.

[20] CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E. ; MARCOS, J. Logics of Formal Inconsistency. In Gabbay, D. e F. Guenthner (eds): *Handbook of Philosophical Logic*, v. 14, Amsterdã, Springer-Verlag, pp. 1-41, 2007.

[21] CARNIELLI, W. A.; MARCOS, J. A taxonomy of **C**-systems. In Paraconsistency: The Logical Way to the Inconsistent. *Proceedings of the 2nd World Congress on Paraconsistency (WCP 2000), v. 228 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, eds. Carnielli, W. A., M. E. Coniglio, and Itala M. L. D'Ottaviano, 1-94, New York, Marcel Dekker, 2002.

[22] CARNIELLI, W. A.; MARCOS, J.; DE AMO, S. Formal Inconsistency and Evolutionary Databases. *Logic and Logical Philosophy*, Polônia, v. 8, pp. 115-152, 2000.

[23] CARNIELLI, W. A.; PIZZI, C. *Modalities and Multimodalities.* Springer, Amsterdã, 2008.

[24] CARVALHO, T. F. *Sobre o Cálculo Diferencial Paraconsistente de da Costa.* Tese de Doutorado, IFCH - Unicamp. Campinas, SP, Brasil, 2004, pp. 1-67.

[25] CHELLAS, B. F. *Modal Logic*: An Introduction. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[26] COSTA-LEITE, A. *Paraconsistência, Modalidades e Cognoscibilidade.* Dissertação de Mestrado, IFCH - Unicamp, Campinas, SP, Brasil, 2003, pp. 1-98.

[27] CHURCH, A. Set theory with a universal set. In *Proceeding of the Tarski Symposium.* (ed.) by Leon Henkin, 297 - 308. Providence, RI, USA, American Mathematical Society, 1974.

[28] DA COSTA, N. C. A. *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica.* São Paulo: Hucitec - Editora da Universidade de São Paulo, 1980.

[29] DA COSTA, N. C. A. Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants. *Compte Rendus de l'Académie de Sciences de Paris, série A*, v. 257, pp. 3790-3792, 1963.

[30] DA COSTA, N. C. A.; KRAUSE, D. A.; BUENO, O. A. Paraconsistent logics and paraconsistency. In *Philosophy of Logic*, Elsevier, pp. 791 - 911, 2007.

[31] DE AMO, S.; CARNIELLI, W. A.; MARCOS, J. A logical framework for integrating inconsistent information in multiple databases. In Thomas Eiter and Klaus-Dieter Schewe (org.). *Lecture Notes in Computer Science.* Berlim, Springer-Verlag, v. 2284, p. 67-84, 2002.

[32] D'OTTAVIANO, I. M. L. On the development of paraconsistent logic and da Costa's work. In *The Journal of Non-Classical Logic*, 7(1/2): pp. 89-152, 1990.

[33] D'OTTAVIANO, I. M. L.; DA COSTA, N. C. A. Sur un problème de Jaśkowski. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Paris* (A - B), 270: 1349-1353, 1970.

[34] D'OTTAVIANO, I. M. L.; EPSTEIN, R. L. A many-valued paraconsistent logic. *Reports on Mathematical Logic*, Wydawnictwo U Jagiell, Krakow, v. 22, p. 89-103, 1988.

[35] FITCH, F. A logical analysis of some value concepts. *The journal of Symbolic Logic.* pp. 135-142, Association for Symbolic Logic, Poughkeepsie, EUA, 1963.

[36] FRAENKEL, K. A.; BAR-HILLEL, Y. *Foundations of Set Theory.* North-Holland, 1958.

[37] GIRLE, R. *Modal Logics and Philosophy.* Montreal & Kingston/London/Ithaca, McGill-Queen's University Press, 2000.

[38] GOMES, E. L.; D'OTTAVIANO, I. M. L. *Para além das Colunas de Hércules, uma História da Paraconsistência*: de Heráclito a Newton da Costa. Editora Unicamp/Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência. (Série Unicamp ano 50, v. 50/ Coleção CLE, v. 80), 2017.

[39] HAACK, S. *Filosofia das Lógicas.* Trad. Cezar Augusto Mortari, Luiz Henrique Araújo Dutra. São Paulo, Ed. UNESP, 2002.

[40] HALPERN, J.; MOSES, J. Towards a Theory of Knowledge and Ignorance. *IBM Research Report RJ448(48136)*, 1984.

[41] HENKIN, L. Fragments of the propositional calculus. *The Journal of Symbolic Logic*, 14(1): 42 - 48, 1949.

[42] HINTIKKA, J. *Knowledge and Belief*: an introduction to the logic of the two notions. Cornell University Press, 1962.

[43] HUGHES, R.; CRESSWELL, M. *A New Introduction to Modal Logic.* London, Routledge, 1996.

[44] KRIPKE, S. A. Semantical Analysis of modal logic I, normal propositional calculi. In: *Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik*, 1963.

[45] LEMMON, E. J.; SCOTT, D. An introduction to modal logic. In Segerberg, K. (ed): *The Lemmon Notes.* Oxford, Blackwell, 1977.

[46] LEWIS, C. I. *A Survey of Symbolic Logic.* Berkeley, University of California Press, 1918.

[47] LEWIS, C. I.; LANGFORD, C. H. *Symbolic Logic.* New York, Dover publications, 1932.

[48] MacCOLL, H. Symbolical Reasoning. *Mind.* v. 5, 1880.

[49] MacCOLL, H. Symbolical Reasoning (v). *Mind.* N. S. v. 12, 1903.

[50] MacCOLL, H. *Symbolic Logic and its Applications.* London, Longmans, Green, 1906.

[51] MOORE, R. C. Semantic Considerations on Nonmonotonic Logic. *Artificial Intelligence*, 25: 75-94, 1985.

[52] MORAES, L. de.; ALVES, C. R. T. A modalidade a respeito dos contingentes futuros em Aristóteles, *De interpretatione* 9. *Cognitio*, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 243-266, jul-dez, 2009. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/cognitiofilosofia/article/vie Acesso em: 05 jun 2018.

[53] MORTARI, C. A. *Introdução à lógica.* São Paulo, Ed. UNESP, 2001.

[54] MORTARI, C. A. Lógicas epistêmicas, In *Nos Limites da Epistemologia Analítica*, UFSC, Florianópolis, pp. 17 - 68, 1999.

[55] QUINE, W. O. New foundations for mathematical logic. *American Mathematical Monthly*, v. 44, pp. 70-80, 1937.

[56] RUSSELL, B.; WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica.* Vol. 1. Cambridge University Press, 1910.

[57] SALERNO, J. Knowability Noir: 1945-1963. In J. Salerno (ed.), *New Essays on the Knowability Paradox*, Oxford University Press, Oxford, 2009.

[58] SCHÜTTE, K. *Proof Theory.* Berlin, Springer, 1977 (Translated from German original version, from 1960).

[59] SETTE, A. M. On the propositional calculus $\mathbf{P}^1$. *Mathematica Japonicae*, 18(13): 173 - 180, 1973.

[60] TENNANT, N. *The Taming of the True.* Clarendom Press, Oxford, RU, 1997.

[61] VAN DITMARSCH, H. P.; VAN DER HOEK, W.; KOOI, B. *Dynamic Epistemic Logic.* v. 337, Netherlands, Springer, 2008.

[62] WILLIAMSON, T. Intuitionism disproved?. *Analysis*, pp. 203-207, Oxford University Press, RU, 1982.

[63] WÓJCICKI, R. *Theory of logical calculi*: Basic theory of consequence operations. Synthese Library, v. 199. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1988.