



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Rafael Fernandes Cunha

Controle Robusto Parcialmente Amostrado via
Realimentação de Estado para Sistemas
Lineares com Saltos Markovianos

Campinas
2018



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Engenharia de Computação e Au-
tomação Industrial

Rafael Fernandes Cunha

**Controle Robusto Parcialmente Amostrado via
Realimentação de Estado para Sistemas Lineares com
Saltos Markovianos**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. José Claudio Geromel

Coorientadora: Profa. Dra. Gabriela Werner Gabriel

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Rafael Fernandes Cunha, e orientada pelo Prof. Dr. José Claudio Geromel

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 132449/2017-0

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3877-0994>

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

C914c Cunha, Rafael Fernandes, 1983-
Controle robusto parcialmente amostrado via realimentação de estado para sistemas lineares com saltos markovianos / Rafael Fernandes Cunha. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: José Claudio Geromel.
Coorientador: Gabriela Werner Gabriel.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas lineares. 2. Desigualdades matriciais lineares. 3. Sistemas híbridos. 4. Sistemas estocásticos. I. Geromel, José Claudio, 1952-. II. Gabriel, Gabriela Werner, 1979-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Robust partially sampled-data state feedback control of Markov jump linear systems

Palavras-chave em inglês:

Linear systems

Linear matrix inequalities

Hybrid systems

Stochastic systems

Área de concentração: Automação

Títuloção: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

José Claudio Geromel [Orientador]

Marcelo Dutra Fragoso

Romis Ribeiro de Faissol Attux

Data de defesa: 30-07-2018

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA-DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidato: Rafael Fernandes Cunha, **RA:** 192719.

Data da Defesa: 30 de Julho de 2018.

Título da tese: “Controle Robusto Parcialmente Amostrado via Realimentação de Estado para Sistemas Lineares com Saltos Markovianos”.

Prof. Dr. José Claudio Geromel (Presidente, FEEC/ UNICAMP)

Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso (LNCC)

Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Dedico esta dissertação à minha esposa Momyque, à minha mãe Lucia, ao meu falecido pai Pedro e aos meus irmãos Helder e Mônica.

Agradecimentos

Existem diversas pessoas que me ajudaram no meu caminho até aqui. Gostaria de expressar a minha gratidão especialmente a algumas delas.

Ao meu orientador, professor José C. Geromel, por sua grande ajuda e disposição em me ensinar e orientar ao longo do meu mestrado. Admiro muito a sua dedicação à atividade acadêmica sempre com muita energia focada no trabalho de ensino, pesquisa e escrita de livros.

À minha coorientadora, Gabriela W. Gabriel, por ter ajudado a me guiar ao longo do meu mestrado, tirando dúvidas e dando sugestões, sempre paciente e de bom humor.

Durante o período na FEEC, tive contato com diversos professores. Agradeço a todos pelos seus ensinamentos. Em especial ao professor Ricardo Oliveira, pela sua grande boa vontade em tirar dúvidas, tanto sobre as matérias que fiz com ele como sobre assuntos da vida acadêmica em geral. Também ao professor Matheus Souza, por ser sempre cordial quando me atendia em sua sala.

À minha esposa Monyque, que é muito importante em minha vida e sempre esteve ao meu lado durante o percurso do mestrado. Ela se manteve compreensiva comigo nos momentos em que tive que dedicar um tempo maior aos estudos, tanto durante o período das matérias como o da escrita dos artigos e da dissertação.

À minha mãe Lucia, que sempre me apoiou pensando na minha felicidade nas grandes decisões que tive que tomar em minha vida. Pelo amor e carinho que ela sempre demonstrou por mim. Ao meu falecido pai Pedro, que foi muito importante em minha infância, deixando ótimos exemplos a serem seguidos. Aos meus irmãos Helder e Mônica, pela fraternidade e carinho com que me tratam.

Aos meus amigos de laboratório Tiago, Rafael, Lucas, Vanessa e Matheus, por criarem um ambiente agradável, pelos estudos conjuntos, pela boa vontade em tirar dúvidas e pelas boas conversas que tivemos durante os momentos de descanso.

Ao meu amigo do meu antigo trabalho Abel, que muito me incentivou a continuar os meus estudos com foco em um mestrado acadêmico.

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.

“A verdadeira viagem de descobrimento não consiste em procurar novas paisagens, mas em ter novos olhos”.
(Marcel Proust.)

Resumo

Esta dissertação propõe, como um dos principais resultados, condições para se obter uma lei de controle robusto parcialmente amostrado via realimentação de estado para sistemas lineares com saltos markovianos (MJLS). Embora, como de costume, a estrutura de controle dependa do modo de Markov, apenas a variável de estado é amostrada. Para análise, um sistema híbrido equivalente é proposto e um problema de duas condições de contorno que garante um custo mínimo \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_2 é definido. Para a síntese de controle, ele é reescrito como um conjunto convexo de condições suficientes, levando ao custo mínimo garantido das classes mencionadas em apenas uma iteração. As condições de otimalidade são expressas através de desigualdades diferenciais lineares (DLMI), um dispositivo algébrico que pode ser manipulado por meio de qualquer resolvidor de LMI disponível. Exemplos estão incluídos para ilustração.

Palavras-chaves: controle amostrado, processo de Markov, desigualdades matriciais lineares, sistemas híbridos, sistemas de controle em rede.

Abstract

This dissertation proposes, as one of the main results, conditions to obtain a robust partially sampled-data state feedback control law for Markov jump linear systems (MJLS). Although, as usual, the control structure depends on the Markov mode, only the state variable is sampled. For the analysis, an equivalent hybrid system is proposed and a Two-Point Boundary Value Problem that ensures minimum \mathcal{H}_∞ or \mathcal{H}_2 cost is defined. For the control synthesis, it is rewritten as a convex set of sufficient conditions leading to the minimum guaranteed cost of the mentioned classes in only one shot. The optimality conditions are expressed through Differential Linear Matrix Inequalities (DLMI), an algebraic device that can be handled by means of any available LMI solver. Examples are included for illustration.

Keywords: sampled-data control, Markov processes, linear matrix inequalities, hybrid systems, networked control systems.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Arquitetura geral de sistemas de controle em redes.	15
Figura 2 – Possíveis particularizações da arquitetura de redes.	15
Figura 3 – Modos de uma cadeia de Markov	21
Figura 4 – Rede entre sensor e controlador.	28
Figura 5 – Rede entre controlador e atuador.	28
Figura 6 – Custos mistos \mathcal{J}_∞ e \mathcal{J}_2 de um sistema.	39
Figura 7 – Arranjo de um sistema massa-mola-amortecedor.	42
Figura 8 – Simulação temporal sem a entrada exógena w_d	44
Figura 9 – Simulação temporal com a entrada exógena w_d	44
Figura 10 – Simulação temporal - Controle independente de modo.	45
Figura 11 – Espaço de busca.	45
Figura 12 – Custos mistos \mathcal{J}_∞ e \mathcal{J}_2 do sistema.	50

Lista de tabelas

Tabela 1 – Índices de desempenho.	46
Tabela 2 – Acurácia computacional.	46
Tabela 3 – Índice de desempenho \mathcal{H}_2	49

Lista de abreviaturas e siglas

DLMIs	Differential Linear Matrix Inequalities
LMIs	Linear Matrix Inequalities
MJLS	Markov Jump Linear Systems
NCS	Network Control Systems

Sumário

1	Introdução	14
1.1	Apresentação da dissertação	17
1.2	Notação	18
2	Conceitos Básicos	19
2.1	Sistemas lineares	19
2.2	Sistemas lineares com saltos markovianos	20
2.3	Estabilidade de MJLS	22
2.4	Normas de MJLS	22
2.4.1	Norma \mathcal{H}_2	23
2.4.2	Norma \mathcal{H}_∞	23
2.5	MJLS híbridos	24
2.6	Estabilidade e normas de MJLS híbrido	25
3	Modelagem Matemática	27
4	Controle parcialmente amostrado	31
4.1	Estabilidade e norma de um sistema parcialmente amostrado	31
4.2	Controle de um sistema parcialmente amostrado	32
5	Controle \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 parcialmente amostrado	36
5.1	Controle \mathcal{H}_∞	36
5.2	Controle \mathcal{H}_2	37
5.3	Controle Robusto	39
5.4	Controle Independente de Modo	40
6	Exemplos Ilustrativos	41
6.1	Método numérico para aproximar DLMI's para LMI's	41
6.2	Exemplo 1 (Sistema massa-mola-amortecedor)	42
6.3	Exemplo 2 (Máquinas elétricas acopladas)	46
6.4	Exemplo 3 (Cálculo de norma mista)	49
7	Conclusão	51
	Referências	53

1 Introdução

O desenvolvimento da ciência ocorre através de várias facetas. Muitas vezes, uma abordagem puramente teórica sobre um determinado assunto pode levar ao desenvolvimento de ferramentas matemáticas que encontrarão a sua aplicação prática apenas vários anos mais tarde. Um exemplo disso é o da teoria de quatérnios, que foi desenvolvida em 1843 pelo matemático William Rowan Hamilton, que trata de um sistema numérico que generaliza a teoria de números complexos (HAMILTON, 1844). Esse ferramental matemático começou a ser amplamente utilizado apenas anos depois para o cálculo de rotações em espaços tri-dimensionais com aplicações em gráficos computacionais, visão computacional, robótica, teoria de controle, controle de atitude, etc.

Por outro lado, outros resultados científicos são gerados a partir do empenho em se resolver problemas práticos. Na área da teoria de controle é possível encontrar os dois extremos. Um exemplo prático seria o de modelagem e controle de uma planta industrial sujeita a diversas restrições, enquanto que um teórico seria o desenvolvimento da teoria de controle em redes, em que alguns resultados matemáticos ainda não conseguem ser diretamente aplicados.

Do ponto de vista de formulação matemática, essa dissertação trata do projeto de estabilidade e controle robusto parcialmente amostrado via realimentação de estado para sistemas lineares com saltos markovianos, onde apenas a variável de estado é amostrada, enquanto o parâmetro estocástico que define o modo de Markov do sistema não é afetado pela operação de amostragem. Esse tipo de sistema, que será melhor detalhado ao longo do texto, encontra uma aplicação possível na descrição matemática de sistemas de controle em redes (NCS), que foram desenvolvidos em grande parte nas últimas décadas, especialmente devido às suas aplicações em ambientes industriais, veja Yang (2006). Trata-se de sistemas espacialmente distribuídos nos quais a comunicação entre pelo menos dois componentes entre sensores, atuadores e controladores é feita através do compartilhamento de uma rede de comunicação digital de banda limitada. Exemplos de arquiteturas desse tipo podem ser vistas nas Figuras 1 e 2. Os NCSs estão na interseção das teorias de controle e telecomunicação. Tradicionalmente, a teoria de controle concentra-se no estudo de sistemas dinâmicos interconectados ligados através de canais ideais, enquanto que a teoria de telecomunicações estuda a transmissão de informações através de canais imperfeitos (HESPANHA *et al.*, 2007). As principais características a serem consideradas nos projetos de controle são:

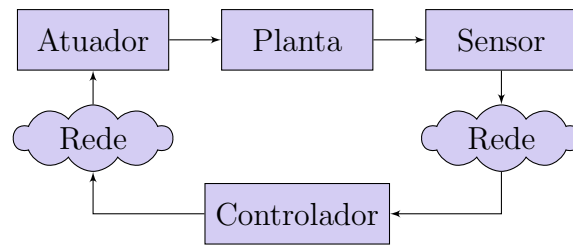
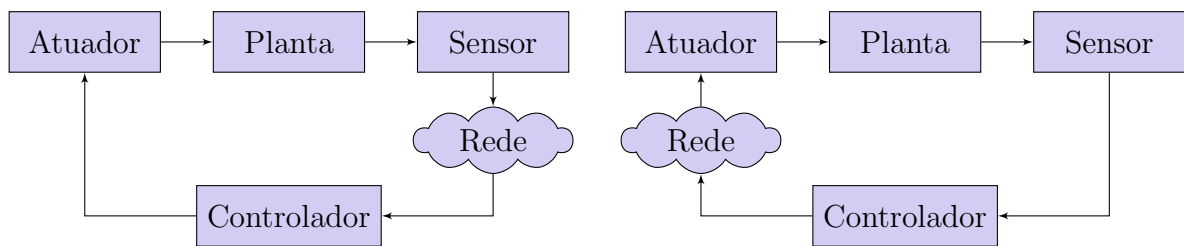


Figura 1 – Arquitetura geral de sistemas de controle em redes.



(a) Rede entre sensor e controlador.

(b) Rede entre controlador e atuator.

Figura 2 – Possíveis particularizações da arquitetura de redes.

- Canais de banda limitada - Cada rede de comunicação é caracterizada por ter uma capacidade máxima de transmissão de informação.
- Amostragem e atraso - Para transmitir um sinal contínuo através de uma rede, o sinal deve ser amostrado, codificado em formato digital, transmitido pela rede e, por fim, os dados devem ser decodificados no lado do receptor. Este processo é significativamente diferente da habitual amostragem periódica em controle digital. Esse processo ocasiona atrasos no sinal transmitido.
- Perda de pacotes - Existe a possibilidade da perda de pacotes durante o seu envio através da rede.
- Arquitetura do sistema - De acordo com as diferentes arquiteturas do sistema, a exemplo das Figuras 1 e 2, espera-se que o comportamento da transmissão de dados através da rede seja diferente, sendo importante levar isso em consideração na modelagem em que se está trabalhando.

A modelagem matemática feita nessa dissertação pode ser interpretada como uma representação da arquitetura de rede da Figura 2a, além de levar em conta a amostragem e a perda de pacotes. As demais características citadas anteriormente não são consideradas nesse estudo. Em relação ao processo de amostragem, as técnicas mais comumente usadas são a discretização clássica do sistema a tempo contínuo, o *liffiting*, o atraso de entrada e

a abordagem de sistema híbrido, entre outras. Alguns desenvolvimentos, incluindo os citados, são encontrados em Chen e Francis (2012), Fridman (2010), DeCarlo *et al.* (2000), Goebel *et al.* (2009), Hu *et al.* (2002), Geromel e Souza (2015) e as referências contidas neles. Especialmente, a abordagem do sistema híbrido tornou-se uma técnica muito adequada para resolver problemas de controle ótimo em um contexto muito amplo, que inclui sistemas não-lineares. No projeto da referência Geromel e Souza (2015), a análise de estabilidade e o cálculo de normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são feitos considerando dados de controle amostrados a partir de um ponto de vista teórico que envolve problemas de duas condições de contorno compostos por equações diferenciais de Lyapunov ou Riccati em uma estrutura unificada.

Já sistemas sujeitos a mudanças abruptas que ocorrem de maneira estocástica são comumente tratados usando cadeias de Markov. A função de distribuição de probabilidade condicional de tal modelo estocástico satisfaz a propriedade de não ter memória (STEWART, 2009), ou seja, todas as informações relevantes para descrever o processo estão presentes apenas no estado atual (LEON-GARCIA, 2008). Por isso, naturalmente, esta é uma das principais possibilidades para tratar a perda de pacotes em rede.

Outras formas de abordar as imperfeições na transmissão de informações via redes podem ser encontradas em Hespanha *et al.* (2007) e Wang e Liu (2008). Um modelo puro a tempo discreto é adotado em Costa *et al.* (2006) e Todorov e Fragoso (2016), entre muitos outros. A referência Wu *et al.* (2017) se concentra em um controle passivo assíncrono, enquanto que Dolgov e Hanebeck (2017) trata o caso independente de modo, isto é, independente do modo da cadeia de Markov, todos eles modelados como sistemas lineares com saltos markovianos a tempo discreto. A teoria de MJLS a tempo contínuo é amplamente discutida em Costa *et al.* (2013). Este tipo de sistema é usado em Rodrigues *et al.* (2017) junto com uma informação de modo baseada em detector. Uma abordagem geral para lidar com as incertezas que afetam tanto as matrizes do sistema quanto os parâmetros da matriz taxa de transição é dada em Morais *et al.* (2016). Veja também Todorov e Fragoso (2011) onde são fornecidos resultados úteis sobre o cálculo do raio de estabilidade do MJLS. Uma abordagem híbrida em conjunto com o MJLS foi usada em Gabriel *et al.* (2017) e Gabriel *et al.* (2018), em que as condições para estabilidade e controle amostrado de realimentação de estado baseado em normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são necessárias e suficientes, sendo totalmente expressas através de LMIs. As duas últimas referências mencionadas podem ser utilizadas para uma representação da arquitetura de rede da Figura 2b ou, assumindo algumas simplificações, a da Figura 1. Assim, falando de forma mais específica, nessa dissertação, utiliza-se:

- O sistema híbrido para modelar o processo de amostragem e a dinâmica do sistema em um único equacionamento;
- Os saltos markovianos para modelar a perda de pacotes;

- A estrutura do sistema juntamente com o formato da lei de controle para modelar a arquitetura de rede da Figura 2a. Esse tipo de arquitetura pode ser encontrada em instalações industriais em que os sensores são de difícil acesso, tornando-se mais fácil e econômico a transmissão de seus dados para o controlador via uma rede de largura de banda limitada, por exemplo, sem fio.

1.1 Apresentação da dissertação

Os capítulos seguintes estão organizados como se segue:

- **Capítulo 2: Conceitos Básicos.** Neste capítulo, introduzem-se os conceitos básicos necessários para o entendimento dos novos resultados apresentados na dissertação. Uma explicação rápida sobre sistemas lineares invariantes no tempo, cadeias de Markov, sistemas lineares com saltos markovianos e sistemas híbridos é mostrada. Para tratar a síntese de controladores de MJLS híbridos, são apresentados conceitos de estabilidade estocástica, cálculo de índices de desempenho baseados nas normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ e uma função que unifica o cálculo dessas normas.
- **Capítulo 3: Modelagem Matemática.** Inicia-se a apresentação da contribuição teórica dessa dissertação. Apresenta-se textualmente a dinâmica desejada para o sistema. Em seguida, a partir do equacionamento do sistema dinâmico, da regra de amostragem e da estrutura de controle relacionada a uma rede do tipo da Figura 2a considerando-se a perda de pacotes, obtêm-se um MJLS híbrido. Este sistema é comparado com outro sistema da literatura utilizado para descrever uma estrutura de controle do tipo da Figura 2b. Algumas discussões são feitas com relação a transformar a síntese de controle do sistema obtido em um problema convexo.
- **Capítulo 4: Controle Parcialmente Amostrado.** É apresentado um corolário que possibilita a avaliação de estabilidade e norma de um MJLS híbrido composto pelas matrizes apresentadas no capítulo anterior. Discute-se brevemente a dependência em relação ao tempo do tipo de controle proposto e é obtido o principal teorema dessa dissertação, que trata da linearização da síntese do problema de controle proposto a partir do corolário de estabilidade e norma para MJLS híbridos que descrevem a arquitetura de redes da Figura 2a. É mostrado que, para transformá-lo em um problema convexo, algumas particularizações são necessárias, tornando o resultado encontrado apenas suficiente.
- **Capítulo 5: Controle \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 Parcialmente Amostrado.** Neste capítulo, aborda-se a síntese de controles parcialmente amostrados sujeitos aos índices de desempenho \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 . Três corolários baseados no teorema do capítulo anterior são

apresentados. Discute-se brevemente sobre controle misto e também é feita a síntese para o caso de controladores robustos ou independentes do modo de operação.

- **Capítulo 6: Exemplos Ilustrativos.** Neste capítulo, alguns exemplos retirados da literatura são utilizados como forma de demonstrar a aplicação da teoria desenvolvida nesta dissertação.
- **Capítulo 7: Conclusão.** Por último, são apresentadas as conclusões, os trabalhos oriundos dessa dissertação e as perspectivas para trabalhos futuros.

1.2 Notação

A notação utilizada é padrão. Os símbolos \mathbb{R} , \mathbb{R}_+ , \mathbb{N} e $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$, respectivamente. Para matrizes quadradas, $\mathbf{tr}(\cdot)$ denota a função traço. Para vetores ou matrizes reais, $(\cdot)'$ indica o seu transposto. Para matrizes simétricas, (\bullet) indica o seu bloco simétrico e $X > 0$ ($X \geq 0$) denota que X é positiva (semi)definida. O operador do valor esperado é $\mathcal{E}\{\cdot\}$. O operador $\mathcal{P}(\cdot)$ indica a probabilidade do evento (\cdot) . Como de costume, para tempo contínuo, a norma quadrática de qualquer trajetória $w_c(t) \in \mathbb{R}^{r_c}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ é $\|w_c\|_2^2 = \int_0^\infty \mathcal{E}(w_c(t)'w_c(t))dt$ e \mathcal{L}_2 indica o conjunto de todas as trajetórias com norma finita. Similarmente, a tempo discreto, a norma quadrática de uma trajetória $w_d(t_k) \in \mathbb{R}^{r_d}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, é $\|w_d\|_2^2 = \sum_{k=0}^\infty \mathcal{E}(w_d(t_k)'w_d(t_k))$ e ℓ_2 indica o conjunto de todas as trajetórias com norma finita. A notação $f[k] = f(t_k)$ indica as amostras em t_k , $k \in \mathbb{N}$. Sempre que possível, a dependência no tempo de uma variável vetorial ou matricial é omitida.

2 Conceitos Básicos

Neste capítulo, é feito um resumo dos principais conceitos necessários para o entendimento dessa dissertação. O objetivo é chegar à definição de um sistema linear híbrido com saltos markovianos e a obtenção de uma possível forma de se avaliar a sua estabilidade e norma. Para isso, definem-se sistemas lineares invariantes no tempo (GEROMEL; PALHARES, 2004), as características de uma cadeia de Markov (STEWART, 2009) e os sistemas lineares com saltos markovianos, cujo estudo detalhado pode ser encontrado em Costa *et al.* (2013). O estudo de estabilidade e desempenho através das definições das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ também é tratado, mostrando o equacionamento na forma clássica e a modelagem através de LMIs. É apresentada uma função utilizada para a análise de estabilidade e cálculos de normas através de uma formulação matemática unificada (GABRIEL *et al.*, 2018).

2.1 Sistemas lineares

As seguintes equações no espaço de estados representam um sistema linear contínuo invariante no tempo

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t), & x(0) = x_0 \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

em que $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $w(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^r$, e $z(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^s$ são o estado, a entrada externa e a saída controlada, respectivamente. A função de transferência deste sistema, definida no domínio da transformada de Laplace, é dada por

$$H_{wz}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.2)$$

com as matrizes A, B, C e D constantes e de dimensões apropriadas. No caso de termos qualquer uma das matrizes $A = A(t), B = B(t), C = C(t)$ ou $D = D(t)$, dizemos que o sistema é variante no tempo. Classifica-se o sistema como estritamente próprio se $D = 0$ e como próprio, caso contrário. Note que a partir da matriz A , é possível obter resultados importantes do comportamento dinâmico do sistema, uma vez que seus autovalores determinam os polos e, portanto, os modos próprios dele (GEROMEL; PALHARES, 2004). Devido a isso, a análise de estabilidade de um sistema linear é essencialmente baseada na matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, que define sua dinâmica.

2.2 Sistemas lineares com saltos markovianos

A fim de modelar uma característica estocástica em um sistema dinâmico, uma possibilidade é a de se considerar mudanças nas matrizes do sistema obedecendo a uma certa distribuição de probabilidade. Tal modelagem pode ser utilizada, por exemplo, para a representação da perda de transmissão de pacotes em uma rede de comunicação. Um tipo de processo estocástico utilizado para esse fim são as cadeias de Markov.

O processo de Markov $\theta(t) \in \mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$ é um processo aleatório em que a previsão do futuro depende apenas das informações disponíveis no presente (LEONGARCIA, 2008). A característica principal da cadeia de Markov a tempo contínuo é que ela faz um número finito de saltos em qualquer intervalo de tempo finito. A variável contínua que representa os instantes de tempo é denotada por $t \in \mathbb{R}_+$. Para instantes arbitrários de tempo, $s_1 < s_2 < \dots < s < t$, a propriedade de Markov é expressa nas probabilidades associadas à variável aleatória $\theta(t) \in \mathbb{K}$, da seguinte maneira:

$$\mathcal{P}(\theta(t) = j | \theta(s) = i, \dots, \theta(s_1) = i_1) = \mathcal{P}(\theta(t) = j | \theta(s) = i) \quad (2.3)$$

onde i_1, \dots, i e j são qualquer elemento possível do espaço de estados de $\theta(t)$. Além disso, a cadeia de Markov a tempo contínuo é homogênea se para cada $i, j \in \mathbb{K}$ e $s < t$, temos que:

$$\mathcal{P}(\theta(t) = j | \theta(s) = i) = \mathcal{P}(\theta(t-s) = j | \theta(0) = i) \quad (2.4)$$

A cadeia de Markov contínua aqui utilizada é do tipo homogênea. Devido às considerações anteriores, um processo de Markov a tempo contínuo é completamente definido por um estado inicial $\theta(0) \in \mathbb{K}$ e uma matriz de taxa de transição $\{\lambda_{ij}\} = \Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$. A matriz de transição $Q(t)$, que descreve a probabilidade de saltos dentro do conjunto \mathbb{K} , está intrinsecamente relacionada à matriz de taxa de transição e é dada por

$$Q(t) = e^{\Lambda t} \quad (2.5)$$

Esta é a solução única das equações diferenciais de Kolmogorov direta e reversa com $Q(0) = I$, como descrito em Costa *et al.* (2013). O vetor das probabilidades $\pi(t) = [\pi_1 \dots \pi_N]'$, onde $\pi_i(t) = \mathcal{P}(\theta(t) = i)$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e $t \in \mathbb{R}_+$, verifica

$$\pi(t) = Q(t)' \pi(0) \quad (2.6)$$

Assim, (2.5)–(2.6) implicam

$$\pi(t+h) = e^{\Lambda h} \pi(t) \quad (2.7)$$

Considerando um pequeno intervalo de tempo $h > 0$ e expandindo (2.7) em série de Taylor, é possível definir o modo contínuo de Markov como segue.

Definição 2.1 (*Modo contínuo de Markov*)

A variável $\theta(t) \in \mathbb{K}$ é um modo contínuo de Markov se ela for uma variável aleatória

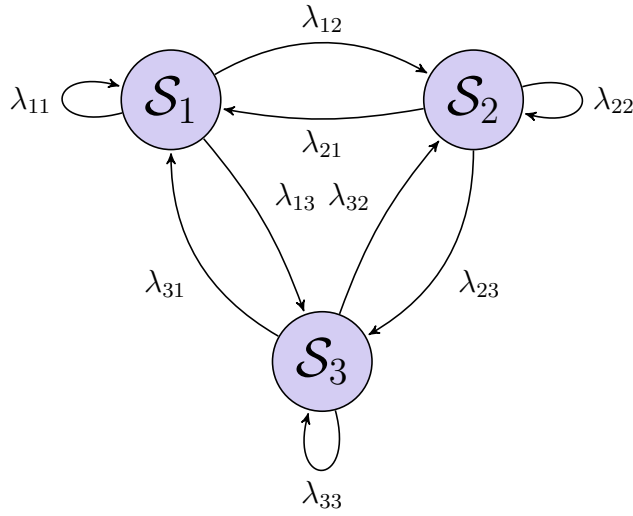


Figura 3 – Modos de uma cadeia de Markov

governada por um processo de Markov a tempo contínuo com uma condição inicial $\theta(0) = \theta_0 \in \mathbb{K}$ tal que $\mathcal{P}(\theta_0 = i) = \pi_{i0} \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, satisfazendo $\sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} = 1$ e uma matriz de taxa de transição de estados $\{\lambda_{ij}\} = \Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$, que define as probabilidades de transição

$$\mathcal{P}(\theta(t + \varepsilon) = j | \theta(t) = i) = \begin{cases} 1 + \lambda_{ij}\varepsilon + o(\varepsilon), & i = j \\ \lambda_{ij}\varepsilon + o(\varepsilon), & i \neq j \end{cases} \quad (2.8)$$

com $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} o(\varepsilon)/\varepsilon = 0$. Os elementos de Λ são tais que $\lambda_{ij} \geq 0$, $\forall i \neq j$, e $\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$.

Define-se o sistema linear homogêneo contínuo com saltos markovianos como

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\theta(t)}x(t) + E_{c\theta(t)}w_c(t) \\ z(t) = C_{\theta(t)}x(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

evoluindo a partir das condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\theta(0) = \theta_0$, onde $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $w_c(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{r_c}$, $z(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^s$ e $\theta(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{K}$ correspondem, respectivamente, ao estado, à entrada exógena, à saída controlada e ao modo de Markov como na Definição 2.1. Observe que o sistema (2.9) é uma composição de vários sistemas dinâmicos, cada um sendo representado por um modo da cadeia de Markov, que variam entre si de acordo com $\theta(t)$. A Figura 3 representa um sistema \mathcal{S} que possui três modos, ou seja, ele é uma composição dos sistemas \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 , \mathcal{S}_3 e de sua matriz de taxa de transição Λ . Por isso, esse tipo de sistema é utilizado para representar dinâmicas que sofrem mudanças abruptas de forma estocástica.

2.3 Estabilidade de MJLS

Trata-se de fundamental importância saber avaliar a estabilidade de um sistema como base para o seu projeto de controle.

Definição 2.2 (*Estabilidade em média quadrática*) (COSTA et al., 2013)

O sistema (2.9) com $w_c(t) \equiv 0$ é estável em média quadrática se, para qualquer estado inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\theta(0) = \theta_0 \in \mathbb{K}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\|x(t)\|^2) = 0 \quad (2.10)$$

A condição de estabilidade em média quadrática também decorre do critério de Lyapunov, o qual permite escrevê-la de forma matricial e, a depender do caso, transformar o problema de investigação da estabilidade do sistema em um problema convexo, podendo ser expresso através de LMIs.

Teorema 2.1 (COSTA et al., 2013)

Considere o MJLS

$$\dot{x} = A_{\theta(t)}x(t), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad x(0) = x_0 \quad (2.11)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\theta(t) \in \mathbb{K}$ e $t \in \mathbb{R}_+$, com distribuição inicial $\pi_{i0} = \mathcal{P}(\theta_0 = i)$. O sistema (2.9) é estável em média quadrática se, e somente se, para quaisquer matrizes simétricas $G = (G_1, \dots, G_n) > 0$, existem matrizes simétricas $P = (P_1, \dots, P_n) > 0$ satisfazendo

$$A_i'P_i + P_iA_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij}P_j + G_i = 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.12)$$

É importante notar que a Equação (2.12) possui um termo cruzado ligando os diversos modos do sistema. Como consequência, o estudo de estabilidade de um MJLS não equivale a estudar a estabilidade de todos os modos individualmente. É possível que todos os modos sejam estáveis, mas o sistema seja instável, bem como o contrário também é verdadeiro, ou seja, todos os modos são instáveis mas o sistema é estável a depender da matriz de taxa de transição de estados. Teoria e exemplos sobre o assunto podem ser encontrados em Costa et al. (2013).

2.4 Normas de MJLS

Após o conceito de estabilidade, outro importante critério a ser avaliado é o de desempenho. Observe que o controle do sistema pode ser sintetizado levando-se em consideração algum índice de desempenho. Dois deles comumente utilizados são os associados às normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . O primeiro se relaciona a características de desempenho do sistema, tal como a eficiência energética de entrada-saída da planta. O segundo pode ser interpretado como uma característica de sua robustez. Ele está relacionado com o quanto este sistema tolera incertezas e variações em seus parâmetros e ainda assim se mantém estável.

2.4.1 Norma \mathcal{H}_2

A definição da norma \mathcal{H}_2 , a seguir apresentada, está diretamente ligada ao problema linear quadrático e fornece uma medida do quanto o sistema permanece afastado do seu ponto de equilíbrio dado um estado inicial.

Definição 2.3 (Norma \mathcal{H}_2 de MJLS) (COSTA et al., 1999)

O sistema (2.9), sendo estável em média quadrática, possui a norma \mathcal{H}_2

$$\|\mathcal{S}\|_2 = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{r_c} \|z_\ell\|_2^2} \quad (2.13)$$

em que $z_\ell(t)$ é a sua resposta à entrada impulsiva $w_c(t) = e_\ell \delta(t)$, sendo $e_\ell \in \mathbb{R}^{r_c}$ o vetor correspondente à ℓ -ésima coluna da matriz identidade, para $\ell = 1, \dots, r_c$.

Observe que a norma acima definida só existe quando o somatório da equação (2.13) é um valor finito, em outras palavras, o sistema é estável e a entrada exógena $w_c(t)$ possui energia finita. A seguir é dada a descrição equivalente do cálculo dessa norma através de um problema de otimização convexa.

Teorema 2.2 (COSTA et al., 1999)

A norma \mathcal{H}_2 do sistema (2.9), considerado estável em média quadrática, pode ser calculada através do seguinte problema de otimização convexa

$$\|\mathcal{S}\|_2^2 = \min_{P_i > 0} \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \text{tr}(E'_{ci} P_i E_{ci}) \quad (2.14)$$

sujeito a

$$A'_i P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + C'_i C_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.15)$$

onde π_{i0} é a probabilidade inicial para cada modo de operação, ou seja, $\mathcal{P}(\theta_0 = i) = \pi_{i0} \geq 0$, para todo $i \in \mathbb{K}$.

2.4.2 Norma \mathcal{H}_∞

Diferentemente da norma \mathcal{H}_2 , que está associada à performance, a norma \mathcal{H}_∞ está associada à robustez do sistema perante incertezas. Através dessa norma, é possível verificar como o sistema responde à perturbação de pior caso aplicada a ele. A prova do próximo teorema pode ser encontrada em Souza e Fragoso (1993).

Definição 2.4 (Norma \mathcal{H}_∞ de MJLS) (SOUZA; FRAGOSO, 1993)

O sistema (2.9), sendo estável em média quadrática, possui a norma \mathcal{H}_∞ igual ao menor valor de $\gamma > 0$, tal que,

$$\|z\|_2 < \gamma \|w_c\|_2 \quad (2.16)$$

para todo $w_c(t)$ com norma limitada, ou seja, $w_c \in \mathcal{L}_2$ e todo $\theta_0 \in \mathbb{K}$.

Como se nota, a determinação desta norma requer um trabalho considerável, sobretudo se o parâmetro $\gamma > 0$ que a define for determinado através de um processo de busca unidimensional. Felizmente, o próximo teorema mostra que o seu cálculo também pode ser feito através da solução de um problema de otimização convexa.

Teorema 2.3 (SOUZA; FRAGOSO, 1993)

A norma \mathcal{H}_∞ do sistema (2.9), considerado estável em média quadrática, pode ser calculada através do seguinte problema de otimização convexa

$$\|\mathcal{S}\|_\infty^2 = \min_{\gamma, P_i > 0} \gamma^2 \quad (2.17)$$

sujeito a,

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j & C'_i & P_i E_{ci} \\ \bullet & -I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \in \mathbb{K} \quad (2.18)$$

Observe que as restrições que definem o problema que permite calcular a norma \mathcal{H}_∞ podem ser escritas como um conjunto de desigualdades algébricas de Riccati.

$$A'_i P_i + P_i A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + C'_i C_i + \gamma^2 P_i E_{ci} E'_{ci} P_i < 0 \quad (2.19)$$

Como se trata de um conjunto de restrições quadráticas convexas, estas foram convertidas nas desigualdades matriciais lineares (2.18) através da aplicação de complemento de Schur em (2.19). Embora tenha uma variável escalar adicional γ , o fato de o problema (2.17)–(2.18) ser convexo faz com que ele tenha fácil solução através de resolvedores de LMIs.

2.5 MJLS híbridos

Sistemas híbridos combinam dinâmicas a tempo contínuo e leis de amostragem em um mesmo sistema. De forma simples, eles podem ser representados por duas dinâmicas diferentes na mesma formulação, uma descrevendo os valores contínuos e a outra, os valores discretos do sistema. Uma abordagem híbrida pode ser utilizada, por exemplo, em sistemas biológicos tais como enxames de vaga-lumes, grupos de grilos, conjuntos de osciladores neuronais e grupos de células do músculo cardíaco, na modelagem de sistemas mecânicos colidindo massas, no controle de aeronaves e no controle de dados amostrados, como podem ser vistos em Goebel *et al.* (2009), com cada um deles necessitando de uma formulação matemática específica. No contexto do controle de sistemas amostrados, o sistema híbrido é composto por equações de dinâmica contínua, normalmente representadas na forma de espaço de estados, e leis de mudanças abruptas. Um sistema linear híbrido

com saltos markovianos é definido como

$$\dot{\psi}(t) = F_{\theta(t)}\psi(t) + J_{c\theta(t)}w_c(t) \quad (2.20)$$

$$z(t) = G_{\theta(t)}\psi(t) \quad (2.21)$$

$$\psi(t_k) = H_{\theta(t_k)}\psi(t_k^-) + J_{d\theta(t_k)}w_d[k-1], \quad \psi(0^-) = \psi_0 \quad (2.22)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ com $t_0 = 0$ e $t_{k+1} - t_k = h > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, em que $\psi(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_\psi}$, $w_c(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{r_c}$, $w_d[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{r_d}$ e $z(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{s_z}$ são o vetor de estado, as entradas exógenas contínuas e discretas e a saída do sistema, respectivamente. Além disso, as matrizes $F_{\theta(t)}$, $J_{c\theta(t)}$, $J_{d\theta(t_k)}$, $G_{\theta(t)}$ e $H_{\theta(t_k)}$ são de dimensões compatíveis e $\theta(t)$ é uma variável aleatória como apresentada na Definição 2.1. Nesse caso, a equação (2.20) representa a dinâmica contínua do sistema, a equação (2.22) representa as suas mudanças abruptas e a (2.21), a saída desejada.

2.6 Estabilidade e normas de MJLS híbrido

A fim de tratar estabilidade e normas de MJLS híbrido, considere a função $\rho_\gamma(\cdot) : \mathbb{R}^{n_\psi} \rightarrow \mathbb{R}_+$ associada a (2.20)–(2.22) definida como segue

$$\rho_\gamma(\psi(0)) = \sup_{w_c \in \mathcal{L}_2, w_d \in \ell_2} \|z\|_2^2 - \gamma^2 \left(\|w_c\|_2^2 + \|w_d\|_2^2 \right) \quad (2.23)$$

em que $\gamma \in \mathbb{R}_+$ é um escalar conhecido. Para um dado $\gamma > 0$, a função $\rho_\gamma(\psi(0))$ pode ser calculada através da solução estacionária da equação de programação dinâmica associada às entradas exógenas contínua $w_c^* \in \mathcal{L}_2$ e discreta $w_d^* \in \ell_2$ de pior caso. Isto é, resulta da aplicação do gerador infinitesimal (COSTA *et al.*, 2013) que leva à desigualdade de Hamilton-Jacob-Bellman (GABRIEL *et al.*, 2018). A função (2.23) também pode ser utilizada para o cálculo das normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 de MJLS híbrido.

Nota 2.1 (Norma \mathcal{H}_∞ de MJLS híbrido)

Assumindo que o MJLS híbrido (2.20)–(2.22) é estável em média quadrática, de (2.23) e do fato de que $\psi_0 = 0$ e $w_d[-1] = 0$ implica $\psi(0) = 0$, o problema de determinação da sua norma \mathcal{H}_∞ se reduz a

$$\min_{\gamma > 0} \{ \gamma^2 : \rho_\gamma(0) \leq 0 \} \quad (2.24)$$

Por outro lado, $\rho_\infty(\psi(0)) = \|z\|_2^2$ segue do fato que para $\gamma = +\infty$, o problema (2.23) fornece $w_c^* \equiv 0$ e $w_d^* \equiv 0$. Adicionando as contribuições de cada condição inicial correspondente ao impulso a tempo contínuo $\delta(0^-)$ (delta de Dirac) e a tempo discreto $\delta[k-1]$ (delta de Kronecker), em cada canal da entrada exógena w_c e w_d , respectivamente, pode-se determinar a norma \mathcal{H}_2 de MJLS híbrido.

Nota 2.2 (Norma \mathcal{H}_2 de MJLS híbrido)

Assumindo que o MJLS híbrido (2.20)–(2.22) é estável em média quadrática, a sua norma \mathcal{H}_2 é dada por

$$\sum_{\ell=1}^{r_c+r_d} \rho_{\infty}(\psi_{\ell}(0)) \quad (2.25)$$

em que $\psi_{\ell}(0)$ para $\ell = 1, \dots, r_c+r_d$ são as condições iniciais correspondentes aos impulsos a tempo contínuo e a tempo discreto mencionados, veja Zhou et al. (1996) para detalhes.

Deve-se lembrar que o sistema (2.20) – (2.22) pode ser usado para descrever dinâmicas contínuas juntamente com mudanças abruptas em um mesmo equacionamento. É importante a obtenção de ferramentas matemáticas que sejam capazes de fornecer informações quanto a sua estabilidade e performance. O seguinte teorema trata da estabilidade e norma de um MJLS híbrido.

Teorema 2.4 (Estabilidade e norma de um MJLS híbrido) (GABRIEL et al., 2018)

Sejam os escalares $h > 0$, $\gamma > 0$, as matrizes $F_i, G_i, H_i, J_{ci}, J_{di}$ e as condições iniciais $\psi(0)$ dados. O MJLS híbrido (2.20)–(2.22) é estável em média quadrática e a função (2.23) satisfaz

$$\rho_{\gamma}(\psi(0)) \leq \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \psi(0)' S_i \psi(0) \quad (2.26)$$

se e somente se existirem matrizes definidas positivas S_i de dimensões compatíveis tais que $\gamma^2 I > J_{di}' S_i J_{di}$, $\forall i \in \mathbb{K}$, satisfazendo o problema de duas condições de contorno composto pelas inequações diferenciais acopladas

$$\dot{P}_i + F_i' P_i + P_i F_i + \gamma^{-2} P_i J_{ci} J_{ci}' P_i + G_i' G_i \leq - \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \quad (2.27)$$

sujeitas às condições de contorno iniciais e finais

$$S_i \geq P_i(0), \quad P_i(h) \geq H_i' \left(S_i^{-1} - \gamma^{-2} J_{di} J_{di}' \right)^{-1} H_i \quad (2.28)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$, uma delas estritamente satisfeita.

Perceba que o Teorema 2.4 pode ser escrito como um problema convexo através de DL-MIs e assim ser resolvido por qualquer resolvidor de LMIs. O problema de controle, como será visto na sequência, a depender da estrutura das matrizes do sistema (2.20)–(2.22) em relação as suas variáveis internas, pode se tornar não convexo. Como será visto posteriormente, o desenvolvimento dessa dissertação se baseou em resultados derivados desse teorema.

3 Modelagem Matemática

Este capítulo trata da modelagem matemática do projeto de estabilidade e controle robusto parcialmente amostrado via realimentação de estado para sistemas lineares com saltos markovianos híbridos, onde apenas a variável de estado é amostrada, enquanto o parâmetro estocástico que define o modo de Markov do sistema não é afetado pela operação de amostragem, ou seja, a lei de controle proposta é da forma

$$u(t, t_k) = L_{\theta(t)} \left(x(t_k) + E_{d\theta(t_k)} w_d[k-1] \right), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (3.1)$$

para todo $k = 0, 1, \dots$, onde $u(\cdot)$ é o sinal de controle de dados parcialmente amostrados, $x(\cdot)$ é a variável de estado de dimensão compatível e $\theta(\cdot)$ é o modo de Markov. A entrada exógena $w_d[\cdot]$ é uma perturbação externa introduzida pela operação de amostragem em cada instante de tempo $t = t_k$.

Diferentemente da estrutura definida em (3.1), nas referências Gabriel *et al.* (2017) e Gabriel *et al.* (2018) a seguinte estrutura de controle foi adotada

$$u(t_k) = L_{\theta(t_k)} x(t_k) + E_{d\theta(t_k)} w_d[k-1], \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (3.2)$$

para todo $k = 0, 1, \dots$ onde $u(\cdot)$ é o sinal de controle de dados amostrados. Recuperando-se o contexto de NCS, a equação (3.1) pode ser interpretada como a estrutura de controle aplicada à arquitetura de rede da Figura 4, enquanto (3.2) pode ser interpretada como o controle a tempo contínuo $u(t) = L_{\theta(t)} x(t)$ sendo transmitido ao atuador através de uma rede de banda limitada, como na Figura 5. Neste trabalho, no qual o controle proposto é do tipo (3.1), observe que o parâmetro de Markov no sinal de controle não é afetado pela operação de amostragem.

Considere uma classe de sistemas lineares estocásticos descritos por um MJLS homogêneo a tempo contínuo com a seguinte realização no espaço de estados

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_{\theta(t)} x(t) + B_{\theta(t)} u(t) + E_{c\theta(t)} w_c(t) \\ y[k] &= x(t_k) + E_{d\theta(t_k)} w_d[k-1] \\ z(t) &= C_{\theta(t)} x(t) + D_{\theta(t)} u(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

em que $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, $w_c(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{r_c}$, e $z(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^s$ são o estado, o controle, a entrada exógena e a saída controlada, respectivamente. A entrada

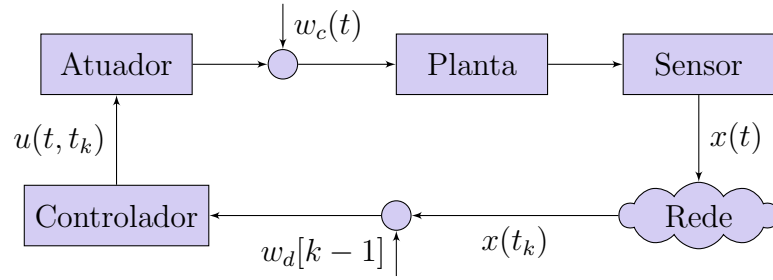


Figura 4 – Rede entre sensor e controlador.

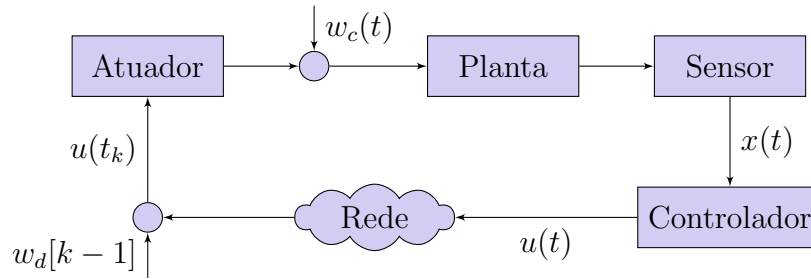


Figura 5 – Rede entre controlador e atuador.

exógena $w_d[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{r_d}$ e a saída medida $y[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ são definidas em uma estrutura a tempo discreto, sendo $w_d[-1]$ um valor conhecido a ser especificado depois.

Assume-se que o sistema (3.3) evolui a partir de $x(0) = x_0$ e $\theta(t) \in \mathbb{K}$ é uma variável aleatória governada por um processo de Markov a tempo contínuo como na Definição 2.1. Supõe-se que a entrada exógena $w_c \in \mathcal{L}_2$ em (3.3) é limitada em norma. Para esse sistema, considere o sinal de controle da forma

$$u(t) = u(t, t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

em que a sequência de instantes de amostragem igualmente espaçados $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é de modo que $t_0 = 0$, $t_{k+1} - t_k = h > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Serão fornecidas condições para a determinação dos ganhos de realimentação de estado $L_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\forall i \in \mathbb{K}$, de tal forma que, com a lei de controle (3.1), o sistema em malha fechada seja estável em média quadrática e um índice de desempenho desejado seja minimizado. Observe que até agora, segundo a análise bibliográfica feita, uma estrutura de controle via realimentação de estado do tipo (3.1) ainda não foi tratada. Considere o MJLS híbrido

$$\mathcal{S}_{h1} : \begin{cases} \dot{\psi}(t) &= F_{\theta(t)}\psi(t) + J_{c\theta(t)}w_c(t) \\ z(t) &= G_{\theta(t)}\psi(t) \\ \psi(t_k) &= H\psi(t_k^-) + J_{d\theta(t_k)}w_d[k-1] \end{cases} \quad (3.5)$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$ e $\forall k \in \mathbb{N}$, com as matrizes de dimensões compatíveis dadas por

$$F_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i L_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{ci} = \begin{bmatrix} E_{ci} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G'_i = \begin{bmatrix} C'_i \\ L'_i D'_i \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{di} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{di} \end{bmatrix}$$

para todo $i \in \mathbb{K}$. Identificando a variável de estado como $\psi(t)' = [x(t)' \ y(t)'] \in \mathbb{R}^{2n}$, segue imediatamente do sistema (3.5) que (3.3) é assegurado e $u(t) = u(t, t_k)$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$ conforme o controle de realimentação de estado (3.1) é reproduzido. Observe que o processo começa em $t_0 = 0$ a partir da condição inicial $\psi(0) = H\psi_0 + J_{d\theta_0}w_d[-1]$ que depende de $\psi_0 = \psi(0^-)$ e de $w_d[-1]$. Esses valores e as entradas exógenas $w_c \in \mathcal{L}_2$ e $w_d \in \ell_2$ são definidos de acordo com o problema de interesse. Neste ponto, é importante notar que o sistema (3.3) com a estrutura de controle (3.1) é totalmente equivalente à (3.5).

Observe que para a lei de controle (3.2), que foi tratada em Gabriel *et al.* (2018), uma das interpretações é a arquitetura de rede do tipo da Figura 5, que pode ser representada pela seguinte classe de sistemas estocásticos

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t) + E_{c\theta(t)}w_c(t) \\ y[k] &= x(t_k) \\ z(t) &= C_{\theta(t)}x(t) + D_{\theta(t)}u(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

com as suas variáveis definidas de forma similar ao sistema \mathcal{S}_1 . Considerando a estrutura de controle do tipo (3.2) e unindo ambos os equacionamentos em um único MJLS híbrido, define-se o sistema

$$\mathcal{S}_{h2} : \begin{cases} \dot{\psi}(t) &= F_{\theta(t)}\psi(t) + J_{c\theta(t)}w_c(t) \\ z(t) &= G_{\theta(t)}\psi(t) \\ \psi(t_k) &= H_{\theta(t_k)}\psi(t_k^-) + J_{d\theta(t_k)}w_d[k-1] \end{cases} \quad (3.8)$$

para $\theta(t) \in \mathbb{K}$, no intervalo de tempo $t \in [t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e as matrizes no espaço de estados de dimensões compatíveis, $\forall i \in \mathbb{K}$,

$$F_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{ci} = \begin{bmatrix} E_{ci} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G'_i = \begin{bmatrix} C'_i \\ D'_i \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$H_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_i & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{di} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{di} \end{bmatrix}$$

Identificando a variável de estado como $\psi(t)' = [x(t)' \ u(t)'] \in \mathbb{R}^{n+m}$ segue imediatamente de (3.8) que (3.7) é assegurada e $u(t) = u[k]$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$. Além disso a última linha do

sistema \mathcal{S}_{h2} reproduz o controle de realimentação de estados (3.2). As condições iniciais e as entradas exógenas são consideradas iguais as do sistema \mathcal{S}_1 .

Assim, os sistemas \mathcal{S}_{h1} e \mathcal{S}_{h2} são similares. A diferença está na estrutura das matrizes que os compõem e nos seus vetores de estado $\psi(t)' = [x(t)' y(t)'] \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\psi(t)' = [x(t)' u(t)'] \in \mathbb{R}^{n+m}$ respectivamente. Observe que em (3.6) a matriz L_i a ser encontrada através do problema de síntese de controle se encontra nas matrizes F_i e G_i que estão inseridas na equação diferencial do sistema \mathcal{S}_{h1} . Por outro lado, a matriz H inserida na parte da amostragem do sistema híbrido é constante. No outro caso, a matriz L_i a ser encontrada aparece apenas na parte amostrada do sistema \mathcal{S}_{h2} .

No presente trabalho, pretende-se resolver o problema de controle do tipo (3.1) através de DLMI. Para isso, é necessário explicitar as matrizes que compõem o Teorema 2.4 em relação à variável L_i como um problema convexo. Por isso, neste caso, a diferença mencionada acima faz com que o problema relacionado ao sistema \mathcal{S}_{h1} seja muito mais difícil de resolver. Isso se deve ao fato de que, para o problema de controle parcialmente amostrado, os ganhos de controle aparecem na equação diferencial do problema de duas condições de contorno. No caso da referência mencionada, os ganhos aparecem apenas nas condições de contorno. Mais detalhes sobre isso serão dados no próximo capítulo.

Para tratar corretamente essa estrutura, é necessário incluir alguns novos dispositivos matemáticos no sistema híbrido associado, quando comparado ao dado em Gabriel *et al.* (2018). Infelizmente, como ficará claro a seguir, o problema que considera a lei de controle (3.1), a ser tratado neste trabalho, é muito mais difícil de ser resolvido do que o anterior, cuja solução está disponível na literatura, veja Gabriel *et al.* (2018) e as referências nele contidas. Assim, a novidade deste trabalho é abordar o problema de controle mencionado anteriormente, onde a matriz de ganho muda de acordo com o estado atual da cadeia de Markov. Neste caso, para poder formular um problema de programação convexa, algumas questões algébricas devem ser enfrentadas, levando a um resultado com um certo grau de conservadorismo. Além disso, considerando o procedimento baseado em DLMI proposto em Gabriel *et al.* (2018), as condições de controle são facilmente resolvidas por qualquer resolvidor de LMI.

4 Controle parcialmente amostrado

O presente capítulo trata da análise e síntese do controle parcialmente amostrado via realimentação de estado do sistema \mathcal{S}_{h1} modelado no capítulo anterior. Primeiro, é mostrado como adaptar o Teorema 2.4 a ele. Depois, é apresentada a parte fundamental dessa dissertação, que é a linearização da explicitação do ganho L_i contido na estrutura das matrizes do Corolário 4.1 a fim de transformá-lo em um problema de otimização convexo, que pode ser resolvido através de DLMI's associadas a um problema diferencial de duas condições de contorno. Infelizmente, como será visto nesse capítulo, apenas condições suficientes são obtidas. Discussões sobre o porquê disso são feitas. A demonstração do Teorema 4.1 é apresentada de forma detalhada.

4.1 Estabilidade e norma de um sistema parcialmente amostrado

Para um dado $\gamma > 0$, são apresentados resultados para análise de estabilidade e avaliação da função $\rho_\gamma(\psi(0))$, como definida em (2.23). O resultado do Teorema 2.4 é particularizado para o sistema híbrido \mathcal{S}_{h1} que contém a lei de controle que pretendemos sintetizar.

Corolário 4.1 *Sejam os escalares $h > 0$, $\gamma > 0$, a condição inicial $\psi(0)$ e as matrizes $L_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\forall i \in \mathbb{K}$, dados. O MJLS híbrido (3.5) é estável em média quadrática e a função (2.23) satisfaz*

$$\rho_\gamma(\psi(0)) \leq \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \psi(0)' P_i(0) \psi(0) \quad (4.1)$$

se e somente se existirem funções de matrizes simétricas $P_i(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ para cada $i \in \mathbb{K}$ satisfazendo o problema de duas condições de contorno composto pelas inequações diferenciais acopladas

$$\dot{P}_i + F_i' P_i + P_i F_i + \gamma^{-2} P_i J_{ci} J_{ci}' P_i + G_i' G_i \leq - \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j \quad (4.2)$$

para todo $t \in [0, h)$, sujeito às condições de contorno

$$P_i(0) > 0, \quad P_i(h) \geq H' \left(P_i(0)^{-1} - \gamma^{-2} J_{di} J_{di}' \right)^{-1} H \quad (4.3)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, em que $\gamma^2 I > J_{di}' P_i(0) J_{di}$ para todo $i \in \mathbb{K}$.

Prova: A prova segue de uma adaptação direta do Teorema 2.4, fazendo $S_i = P_i(0) > 0$ e adotando as matrizes do espaço de estados F_i, G_i, J_{ci}, J_{di} e $H_i = H$ definidas como em (3.6) para todo $i \in \mathbb{K}$. ■

O resultado do Teorema 2.4 de Gabriel *et al.* (2018) aplica-se a vários sistemas híbridos, incluindo o que está sendo analisado. Portanto, todas as observações apresentadas naquele artigo também são válidas no presente caso. De fato, pode-se ver por integração simples, que sempre que existe, qualquer solução para as desigualdades acopladas (4.2) é tal que $P_i(t) > 0$ para todo $t \in [0, h)$ e $i \in \mathbb{K}$ porque as condições de contorno (4.3) impõem que $P_i(h) > 0$ para todos os $i \in \mathbb{K}$. Além disso, o Corolário 4.1 fornece o valor exato da função $\rho_\gamma(\cdot)$ sempre que o lado direito da desigualdade (4.1) é minimizado considerando ambos os cenários definidos. Essa tarefa pode ser executada sem dificuldade, pois temos que lidar com um conjunto de DLMIs acopladas que pode ser convertido em um conjunto de LMIs acopladas. Assim, a avaliação da função se reduz à solução de um problema de programação convexa possível de ser resolvido em uma única iteração.

4.2 Controle de um sistema parcialmente amostrado

Considere o problema de controle que temos que resolver relativo ao sistema (3.5). As matrizes F_i e G_i dependem dos ganhos de realimentação de estado parcialmente amostrados L_i para cada $i \in \mathbb{K}$ e, conseqüentemente, incluindo esses ganhos no conjunto de variáveis, a avaliação da função $\rho_\gamma(\cdot)$ torna-se um problema não-convexo. A maneira de contornar essa dificuldade é restringir as funções da matriz definida positiva particionada $P_i(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ na forma

$$Q_i(t) = P_i(t)^{-1} = \begin{bmatrix} Y_i(t) & U \\ U' & \hat{Y}_i(t) \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (4.4)$$

isto é, o elemento da diagonal secundária $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não-singular, independente da cadeia de Markov e constante em todo o intervalo $[0, h)$. É importante notar que esta restrição adicional implica que a parte da necessidade do Corolário 4.1 não é mais válida. O impacto sobre esse conservadorismo será avaliado numericamente através dos exemplos resolvidos no Capítulo 6. Antes de prosseguir, vamos definir as funções da matriz quadrada não-singular

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{Y}_i^{-1} U' \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

e as funções matriciais definidas positivas $X_i = U \hat{Y}_i^{-1} U' > 0$, para todo $i \in \mathbb{K}$. O próximo lema fornece um resultado instrumental que é essencial para que os cálculos sejam feitos daqui para frente. Ele apresenta a linearização dos termos acoplados que aparecem na desigualdade (4.2).

Lema 4.1 *Considere as funções matriciais previamente definidas e seja o escalar $h > 0$ dado. Existem funções matriciais $W_{ij}(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ satisfazendo as desigualdades*

$$\sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} W_{ij} > \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \Gamma_i' Q_i Q_j^{-1} Q_i \Gamma_i \quad (4.6)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$ e todo $t \in [0, h)$ se e somente se as desigualdades matriciais lineares

$$\begin{bmatrix} W_{ij} + \begin{bmatrix} Y_i & X_i \\ X_i & X_i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Y_i & X_j \\ X_i & X_j \end{bmatrix} \\ \bullet & \begin{bmatrix} Y_j & X_j \\ X_j & X_j \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.7)$$

são asseguradas para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ no mesmo intervalo de tempo $t \in [0, h)$.

Prova: Primeiramente, o Complemento de Schur do segundo elemento da diagonal de (4.4) indica que $Q_i > 0$ se e somente se $Y_i > X_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$. Assim, de (4.4) e (4.5), manipulações algébricas simples mostram que a desigualdade (4.7) pode ser reescrita na forma equivalente

$$\begin{bmatrix} W_{ij} + \Gamma_i' Q_i \Gamma_i & \Gamma_i' Q_i \Gamma_j \\ \bullet & \Gamma_j' Q_j \Gamma_j \end{bmatrix} > 0 \quad (4.8)$$

para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ no qual o Complemento de Schur do segundo elemento da diagonal junto com o fato de que $\lambda_{ij} \geq 0$ para todo $j \neq i \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e $\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} = 0 \forall i \in \mathbb{K}$ nos permite determinar

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} W_{ij} &> \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \Gamma_i' (Q_i Q_j^{-1} Q_i - Q_i) \Gamma_i \\ &= \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} \Gamma_i' Q_i Q_j^{-1} Q_i \Gamma_i \end{aligned} \quad (4.9)$$

que é a desigualdade (4.6), concluindo dessa forma a prova. \blacksquare

Vale ressaltar que o uso de funções matriciais bloco diagonais como Γ_i , $i \in \mathbb{K}$, não é usual para linearização, ao passo que é essencial para obter o resultado do Lema 4.1. Isso só é possível devido à estrutura especial das funções da matriz (4.4) que foi imposta. Observe, entretanto, que todos os blocos das funções matriciais $P_i(t)$ são dependentes do tempo e do índice i , pois

$$\begin{aligned} P_i(t) &= \begin{bmatrix} Y_i(t) & U \\ U' & \hat{Y}_i(t) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (Y_i - X_i)^{-1} & -(Y_i - X_i)^{-1} U \hat{Y}_i^{-1} \\ -\hat{Y}_i^{-1} U' (Y_i - X_i)^{-1} & \hat{Y}_i^{-1} + \hat{Y}_i^{-1} U' (Y_i - X_i)^{-1} U \hat{Y}_i^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$i \in \mathbb{K}$, em que a dependência do tempo de Y_i, X_i e \hat{Y}_i na última matriz foi omitida para facilitar a visualização.

O próximo teorema, que é o principal resultado dessa dissertação, trata sobre a síntese dos ganhos de controle para o sistema \mathcal{S}_{h1} .

Teorema 4.1 *Sejam os escalares $h > 0, \gamma > 0$ e a condição inicial $\psi(0)$ dados. Se existirem funções matriciais $Y_i(t), X_i(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_{ij}(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ para todo $j \neq i \in \mathbb{K}$ e as matrizes $K_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as desigualdades matriciais lineares (4.7) e as DLMI*

$$\begin{bmatrix} R_i + \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} W_{ij} & \begin{bmatrix} Y_i C_i' + K_i' D_i' \\ X_i C_i' + K_i' D_i' \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} E_{ci} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bullet & -I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.11)$$

em que

$$R_i = \begin{bmatrix} -\dot{Y}_i + A_i Y_i + B_i K_i + Y_i A_i' + K_i' B_i' & A_i X_i + B_i K_i \\ \bullet & \dot{X}_i \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$ no intervalo de tempo $t \in [0, h)$, sujeito às condições de contorno iniciais e finais tais que

$$\begin{bmatrix} Y_{i0} & U & Y_{ih} & X_{ih} & 0 \\ \bullet & U + U' - X_{i0} & Y_{ih} & X_{ih} & E_{di} \\ \bullet & \bullet & Y_{ih} & X_{ih} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & X_{ih} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.13)$$

então, com os ganhos $L_i = K_i(U')^{-1}$, $i \in \mathbb{K}$, e as matrizes

$$P_i(0) = Q_i(0)^{-1} = \begin{bmatrix} Y_{i0} & U \\ \bullet & U' X_{i0}^{-1} U \end{bmatrix}^{-1} > 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (4.14)$$

o limite superior (4.1) é assegurado.

Prova: Do fato de que (4.7) e (4.11) são asseguradas, vamos primeiro calcular a seguinte derivada levando em consideração que $X_i = U \hat{Y}_i^{-1} U' > 0$ e $\dot{U} = 0$, produzindo

$$\begin{aligned} -\Gamma_i' \dot{Q}_i \Gamma_i &= \begin{bmatrix} -\dot{Y}_i & 0 \\ 0 & U \hat{Y}_i^{-1} \left(\frac{d\hat{Y}_i}{dt} \right) \hat{Y}_i^{-1} U' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\dot{Y}_i & 0 \\ 0 & \dot{X}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Além disso, com a mesma matriz, pode-se verificar que as relações

$$\Gamma_i' Q_i \Gamma_i = \begin{bmatrix} Y_i & X_i \\ X_i & X_i \end{bmatrix}, \quad \Gamma_i' Q_i G_i' = \begin{bmatrix} Y_i C_i' + K_i' D_i' \\ X_i C_i' + K_i' D_i' \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\Gamma'_i F_i Q_i \Gamma_i = \begin{bmatrix} A_i Y_i + B_i K_i & A_i X_i + B_i K_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma'_i J_{ci} = \begin{bmatrix} E_{ci} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

são asseguradas. Agora, calculando o Complemento de Schur de (4.11) com respeito às últimas duas linhas e colunas, usando a desigualdade (4.6) fornecida pelo Lema 4.1 e as relações matriciais anteriores, obtêm-se as inequações diferenciais lineares

$$-\dot{Q}_i + F_i Q_i + Q_i F'_i + \gamma^{-2} J_{ci} J'_{ci} + Q_i G'_i G_i Q_i \leq - \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} Q_i Q_j^{-1} Q_i \quad (4.18)$$

para cada $i \in \mathbb{K}$, válidas em todo o intervalo $t \in [0, h)$. Adicionalmente, as LMIs no Lema 4.1 implicam que $\Gamma'_i Q_i \Gamma_i > 0$ e conseqüentemente que $Q_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ no mesmo intervalo de tempo. Multiplicando ambos os lados de (4.18) por Q_i^{-1} , é possível ver que a função matricial $P_i(t) = Q_i(t)^{-1} > 0$ existe e satisfaz a inequação diferencial linear (4.2) do Corolário 4.1. Agora, vamos chamar nossa atenção para as condições de contorno. Da observação de que $X_{i0} > 0$ ¹ implica $U' X_{i0}^{-1} U \geq U + U' - X_{i0}$ para todo $i \in \mathbb{K}$, então o segundo elemento bloco-diagonal de (4.13) pode ser substituído por $U' X_{i0}^{-1} U$ mantendo válidas as mesmas LMIs. Fazendo isso e usando as relações matriciais anteriores, obtemos

$$\begin{bmatrix} \Gamma'_{i0} Q_{i0} \Gamma_{i0} & \Gamma'_{i0} H Q_{ih} \Gamma_{ih} & \Gamma'_{i0} J_{di} \\ \bullet & \Gamma'_{ih} Q_{ih} \Gamma_{ih} & 0 \\ \bullet & \bullet & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.19)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$. Multiplicando (4.19) pela direita por $\text{diag}\{\Gamma_{i0}^{-1}, \Gamma_{ih}^{-1}, I\}$ e pela esquerda pela sua transposta, o Complemento de Schur do resultado fornece as condições de contorno do Teorema 4.1. Finalmente, as matrizes avaliadas em $t = 0$ fornecem (4.14) sempre que a transformação inversa $\hat{Y}_{i0} = U' X_{i0}^{-1} U$ é executada. Fazendo isso, o limite superior (4.1) é válido. A prova está completa. ■

Em contraste com o controle amostrado via realimentação de estado da forma (3.2) para o qual o problema de controle associado é convexo, o controle parcialmente amostrado via realimentação de estado (3.1) é muito mais difícil de lidar, pois o problema de controle associado não é convexo e, em princípio, uma linearização por meio de uma mudança de variáveis direta pode não existir. De fato, essa afirmação deriva da observação de que qualquer mudança de variáveis deve depender da matriz $P_i(t)$ que varia no tempo, que, em parte, deve ser restrita a ser constante para todo $t \in [0, h)$ para impor que as variáveis matriciais L_i , $\forall i \in \mathbb{K}$, devam ser invariantes no tempo. Isso naturalmente introduz algum conservadorismo no resultado final.

¹ Para facilitar a apresentação, denotamos $Q_i(0) = Q_{i0}$, $Q_i(h) = Q_{ih}$ e suas matrizes de blocos de acordo, para todo $i \in \mathbb{K}$.

5 Controle \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 parcialmente amostrado

O principal objetivo deste capítulo é aprofundar o resultado do Teorema 4.1 para tratar os problemas de controle associados aos índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Mostra-se que esta formulação é adequada para lidar com incertezas paramétricas nas matrizes do sistema ou na matriz de taxa de transição. O caso particular do controle independente de modo também é analisado. Como o Teorema 4.1 determina um custo garantido associado à função $\rho_\gamma(\psi(0))$, que engloba os índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ como mencionado anteriormente, os próximos corolários reafirmam os problemas (2.24) e (2.25) em termos de um novo conjunto de variáveis.

5.1 Controle \mathcal{H}_∞

O caso do controle sujeito ao índice de desempenho \mathcal{H}_∞ é de grande importância quando é esperado que o sistema em malha fechada se mantenha estável, mesmo sujeito a perturbações.

Corolário 5.1 (Controle \mathcal{H}_∞) *Seja $h > 0$ dado. O controle parcialmente amostrado via realimentação de estado da forma (3.1) assumindo um custo garantido \mathcal{H}_∞ mínimo é fornecido pela solução ótima do problema de otimização convexa*

$$\inf_{W_{ij}, X_i, Y_i, K_i, U, \gamma} \left\{ \gamma^2 : (4.7), (4.11), (4.13) \right\} \quad (5.1)$$

Os ganhos são dadas por $L_i = K_i(U')^{-1}$, $\forall i \in \mathbb{K}$.

Prova: Note que $\rho_\gamma(0) \leq 0$ é equivalente a dizer que $\|z\|_2^2 - \gamma^2(\|w_c\|_2^2 + \|w_d\|_2^2) \leq 0$, para todo $w_c \in \mathcal{L}_2$ e $w_d \in \ell_2$. Logo, o problema de síntese do controle \mathcal{H}_∞ pode ser formulado como a minimização de γ^2 sujeito as restrições indicadas, fazendo deste corolário uma consequência imediata do Teorema 4.1. ■

Três observações podem ser feitas. Primeiro, os ganhos L_i , $i \in \mathbb{K}$, que garantem o custo mínimo garantido, são calculados em apenas uma iteração e não como resultado de um algoritmo iterativo convergente como, por exemplo, em Geromel e Gabriel (2015) e Hu *et al.* (2006). O segundo diz respeito à possibilidade de usar este resultado para projetar

uma lei de controle robusto parcialmente amostrado. De fato, em (5.1), todas as restrições dependem linearmente dos parâmetros do sistema em malha aberta, sendo possível tratar problemas com incerteza paramétrica em domínios limitados convexos. Uma ideia semelhante foi apresentada em Gabriel *et al.* (2018) para o caso do controle amostrado via realimentação de estado que considera uma lei de controle da forma (3.2). No entanto, em Gabriel *et al.* (2018), foram estabelecidas condições necessárias e suficientes para a estabilidade em média quadrática e índices de desempenho ótimo. Terceiro, uma maneira simples de resolver o problema convexo (5.1) é converter as desigualdades diferenciais lineares em LMIs através da estratégia que será discutida no próximo capítulo. Em linhas gerais, cada DLMI pode ser convertida em um certo número de LMIs, que dependerá da precisão adotada durante a síntese do controle.

5.2 Controle \mathcal{H}_2

O caso do controle sujeito ao índice de desempenho \mathcal{H}_2 , por outro lado, é utilizado quando a importância no comportamento do sistema em malha fechada tem como foco a relação energética entre a entrada e a saída do sistema.

Corolário 5.2 (Controle \mathcal{H}_2) *Seja $h > 0$ dado e faça $\gamma = +\infty$. O controle parcialmente amostrado via realimentação de estado da forma (3.1) assumindo um custo garantido \mathcal{H}_2 mínimo é fornecido pela solução ótima do problema de otimização convexa*

$$\inf_{W_{ij}, X_i, Y_i, K_i, U, V_i, M_i} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \left(\text{tr}(V_i) + \text{tr}(M_i) \right) : (4.7), (4.11), (4.13) \right\} \quad (5.2)$$

em que as variáveis matriciais simétricas $V_i \in \mathbb{R}^{r_c \times r_c}$ e $M_i \in \mathbb{R}^{r_d \times r_d}$ satisfazem

$$\begin{bmatrix} V_i & E'_{ci} \\ \bullet & Y_{ih} - X_{ih} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \mathbb{K} \quad (5.3)$$

$$\begin{bmatrix} M_i & 0 & E'_{di} \\ \bullet & Y_{i0} & U \\ \bullet & \bullet & U + U' - X_{i0} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i \in \mathbb{K} \quad (5.4)$$

Os ganhos são dados por $L_i = K_i(U')^{-1}$, $\forall i \in \mathbb{K}$.

Prova: Observe que a condição inicial $\psi_\ell(0)$ se iguala a cada uma das r_c colunas da matriz $HJ_{c\theta_0}$ correspondendo a um impulso a tempo contínuo $\delta(0^-)$ em cada canal da entrada exógena w_c e a cada uma das r_d colunas de $J_{d\theta_0}$ correspondendo a um impulso a tempo discreto $\delta[k-1]$ em cada canal da entrada exógena w_d . As parcelas da soma $\sum_{\ell=1}^{r_c+r_d} \rho_\infty(\psi_\ell(0))$ sendo calculadas com $\gamma = +\infty$ fornecem a função objetivo desejada.

Desta forma, do limitante superior (4.2) segue que

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^{r_c+r_d} \rho_\infty(\psi_\ell(0)) &\leq \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \mathbf{tr}(J'_{ci} H' P_i(0) H J_{ci} + J'_{di} P_i(0) J_{di}) \\
 &< \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \mathbf{tr}(J'_{ci} P_i(h) J_{ci} + J'_{di} P_i(0) J_{di}) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \mathbf{tr}(J'_{ci} Q_{ih}^{-1} J_{ci} + J'_{di} Q_{i0}^{-1} J_{di})
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

pois as condições de contorno (4.3) impõem $Q_{ih}^{-1} = P_i(h) > H' Q_{i0}^{-1} H$ com $P_i(0) = Q_{i0}^{-1}$, para todo $i \in \mathbb{K}$. Portanto, o cálculo da inversa da matriz de blocos fornece

$$\begin{aligned}
 V_i &> J'_{ci} Q_{ih}^{-1} J_{ci} \\
 &= \begin{bmatrix} E'_{ci} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{ih} & U \\ U' & U' X_{ih}^{-1} U \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{ci} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= E'_{ci} (Y_{ih} - X_{ih})^{-1} E_{ci}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

para cada $i \in \mathbb{K}$, o que reproduz (5.3). Além disso, (5.4) é uma condição suficiente para garantir $M_i > J'_{di} Q_{i0}^{-1} J_{di}$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e, como consequência, para a função objetivo (5.2), concluindo assim a prova. \blacksquare

Note que a nova restrição (5.3) é sempre viável, já que o bloco quadrado composto pela intersecção das linhas e colunas 3 e 4 da condição de contorno (4.13) impõe $Y_{ih} - X_{ih} > 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Além disso, a condição suficiente dada por (5.4) não impõe um aumento de conservadorismo na aplicação do Teorema 4.1 uma vez que a condição $U' X_{i0}^{-1} U \geq U + U' - X_{i0}$ já está imposta em (4.13). Em linhas gerais, as mesmas observações válidas para o problema de síntese do controle \mathcal{H}_∞ permanecem válidas no presente caso.

Também é possível sintetizar um controle no qual ambos os índices de desempenho sejam parcialmente levados em consideração. Nesse caso, uma função que inclua uma ponderação entre ambos pode ser considerada. Essa opção é importante na síntese de projetos em que se busca um meio termo entre um desempenho associado aos índices \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . O próximo corolário é uma generalização dos dois anteriores em uma única implementação.

Corolário 5.3 (Controle misto \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞) *Seja os escalares $h > 0$ e $\beta_\infty \geq 0$ dados. O controle parcialmente amostrado via realimentação de estado da forma (3.1) assumindo uma ponderação dada por β_∞ entre os custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ mínimos é fornecido pela solução ótima do problema de otimização convexa*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \inf_{W_{ij}, X_i, Y_i, K_i, U, V_i, M_i, \gamma} & \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \left(\mathbf{tr}(V_i) + \mathbf{tr}(M_i) \right) + \beta_\infty \gamma^2 \\ \text{Sujeito a} & (4.7), (4.11), (4.13), (5.3), (5.4) \end{cases} \tag{5.7}$$

Os ganhos são dados por $L_i = K_i(U')^{-1}$, $\forall i \in \mathbb{K}$.

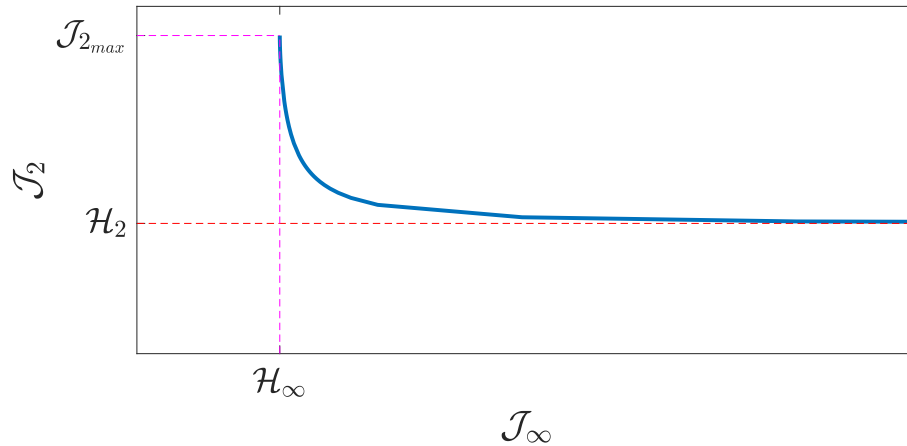


Figura 6 – Custos mistos \mathcal{J}_∞ e \mathcal{J}_2 de um sistema.

Prova: Esta prova diz respeito a uma junção dos Corolários 5.1 e 5.2. Note que, para $\beta_\infty \rightarrow \infty$, o ínfimo ocorre para o menor γ possível, recaindo-se portanto no Corolário 5.1, pois, nesse caso, as variáveis V_i e M_i passam a não influenciar no conjunto em que está sendo feita a minimização da função objetivo e as restrições (4.13), (5.3) passam a não influenciar em nada no conjunto de busca da minimização de γ^2 . Por outro lado, para $\beta_\infty = 0$, a solução ótima faz $\gamma \rightarrow +\infty$, recaindo-se no Corolário 5.2. ■

A Figura 6 mostra a relação entre os custos garantidos \mathcal{J}_∞ e \mathcal{J}_2 para um dado sistema. Isso é obtido variando-se β_∞ de 0 a $+\infty$ no Corolário 5.3. O mínimo valor possível do eixo do \mathcal{J}_∞ trata-se da norma \mathcal{H}_∞ do sistema. Observe que nesse caso, o custo \mathcal{J}_{2max} é um valor finito. Analisando-se o eixo do \mathcal{J}_2 , observa-se que o valor mínimo possível da função trata-se da norma \mathcal{H}_2 . Nesse caso, diferentemente do anterior, tem-se que o custo garantido $\mathcal{J}_\infty \rightarrow +\infty$. Esse gráfico é muito útil na síntese de controladores em que deve ser atendido a priori um determinado custo garantido \mathcal{J}_∞ ou \mathcal{J}_2 , com o outro sendo determinado como consequência.

Assim, é possível calcular o ganho de controle misto definindo-se o valor do custo mínimo desejado para um dos índices de desempenho a priori. Por exemplo, é possível definir um valor $\mathcal{J}_\infty = \gamma$ e aplicar o Corolário 5.2 com esse valor de γ desejado.

É de particular importância o fato de que todas as restrições dos problemas (5.2) e (5.7) também dependem linearmente dos parâmetros do sistema em malha aberta, possibilitando mais uma vez tratar incertezas paramétricas em domínios politópicos convexos sem grande dificuldade adicional. Isso é apresentado na seção a seguir.

5.3 Controle Robusto

Considere o sistema (3.3). Para lidar com incertezas, considere o simplex unitário composto por todos os vetores não negativos $\alpha \in \mathbb{R}^M$, M um inteiro positivo, tais que

$\sum_{\ell=1}^M \alpha_\ell = 1$. Assim, o modelo composto é $\bar{F}_{i\alpha} = \sum_{\ell=1}^M \alpha_\ell \bar{F}_{i\ell}$ e $\Lambda_\alpha = \sum_{\ell=1}^M \alpha_\ell \Lambda_\ell$, de forma que, para um parâmetro desconhecido $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_M]'$, as matrizes do MJLS são descritas por

$$\bar{F}_{i\alpha} = \begin{pmatrix} A_{i\alpha} & B_{i\alpha} & E_{ci\alpha} \\ C_{i\alpha} & D_{i\alpha} & E_{di\alpha} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_i, \Lambda_\alpha \in \Omega \quad (5.8)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$. Os conjuntos \mathcal{M}_i , para cada $i \in \mathbb{K}$, e Ω são convexos e poliédricos, sendo os seus vértices definidos por $\bar{F}_{i\ell}$ e Λ_ℓ para cada $\ell \in \{1, 2, \dots, M\}$. Note que as DLMIs definidas no Teorema 4.1 são lineares em relação aos parâmetros $\bar{F}_{i\ell}$, $i \in \mathbb{K}$ e Λ_ℓ para todo $\ell \in \{1, 2, \dots, M\}$. Assim, mantendo as variáveis matriciais invariantes no conjunto de incertezas, o custo mínimo garantido pode ser determinado pela imposição das DLMIs dos Corolários 5.1, 5.2 e 5.3 em cada vértice do politopo. Essa estratégia, que já é bem conhecida no domínio de sistemas lineares incertos, pode ser usada para abordar incertezas paramétricas mesmo no contexto de MJLS.

5.4 Controle Independente de Modo

Para fins práticos, é importante investigar a situação em que apesar de o controlador não ter acesso aos modos da cadeia de Markov do sistema em malha aberta, ainda sim é possível determinar um controle parcialmente amostrado via realimentação de estado em malha fechada que seja efetivo. Existem na literatura diferentes trabalhos abordando o problema de estimar o estado do processo de Markov, Rodrigues *et al.* (2017), por exemplo. No entanto, nesta dissertação, discute-se uma questão muito mais simples para esse problema, impondo $L_i = L$, $\forall i \in \mathbb{K}$, de tal forma que $u(t, t_k) = Ly(t_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Para fazer essa síntese, precisamos apenas impor adicionalmente que $K_i = K$, $\forall i \in \mathbb{K}$, nos Corolários 5.1, 5.2 e 5.3, respectivamente. Pode ser visto que o conjunto de DLMIs é facilmente derivado de (4.7), (4.11) e (4.13) levando em consideração a mesma restrição adicional. Fazendo isso, o ganho independente de modo segue de $L_i = L = K(U')^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{K}$, conforme desejado.

6 Exemplos Ilustrativos

O objetivo desse capítulo é mostrar como é possível aplicar a lei de controle (3.1) a alguns sistemas dinâmicos. Utilizaram-se alguns exemplos da literatura e a síntese de controladores sujeitos a índices de desempenhos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ foi obtida, considerando-se, em alguns casos, incertezas paramétricas. Uma análise do quão restritivas são as condições do Teorema 4.1 também foi realizada. Foram considerados:

- Aplicação prática em um sistema massa-mola-amortecedor descrito em Lutz (2014). Calculou-se o controle do sistema submetido à índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Entradas exógenas contínuas e discretas são consideradas.
- Aplicação prática em um sistema de máquinas elétricas acopladas (COSTA *et al.*, 2013). O modelo utilizado é de quatro modos de Markov. É realizada a síntese do controle sujeito ao índice de desempenho \mathcal{H}_2 e a incertezas paramétricas politópicas.
- Aplicação da utilização dos Corolários 5.2 e 5.3 para o cálculo de normas mistas em um modelo acadêmico.

6.1 Método numérico para aproximar DLMI's para LMI's

Para a conversão das DLMI's do Teorema 4.1 em LMI's e com isso viabilizar a utilização de métodos de otimização convexa capazes de expressar a solução procurada em apenas uma iteração, considere uma solução contínua por partes da forma

$$X_i(t) = X_{ip} + (X_{i(p+1)} - X_{ip}) \left(\frac{t - t_p}{\eta} \right), \quad t \in [t_p, t_{p+1}] \quad (6.1)$$

para $p = 0, 1, \dots, n_h - 1$, com $X_{ip} > 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e todo $p = 0, 1, \dots, n_h$. Para resolver as DLMI's (4.11), dividiu-se o intervalo de tempo $[0, h]$ em n_h segmentos de comprimento $\eta = h/n_h$ tal que $t_p = p\eta$. Consequentemente, apenas pontos isolados de descontinuidade na solução da derivada em relação ao tempo podem existir.

Conforme descrito em Gabriel *et al.* (2018), denotando a variável matricial global $X = (X_1, \dots, X_N)$ e o conjunto de DLMI's acopladas que será resolvido por $\dot{X}_i + \mathcal{L}_i(X) < 0$, em que $\mathcal{L}_i(\cdot)$ é uma função linear para cada $i \in \mathbb{K}$, então, utilizando-se a linearidade

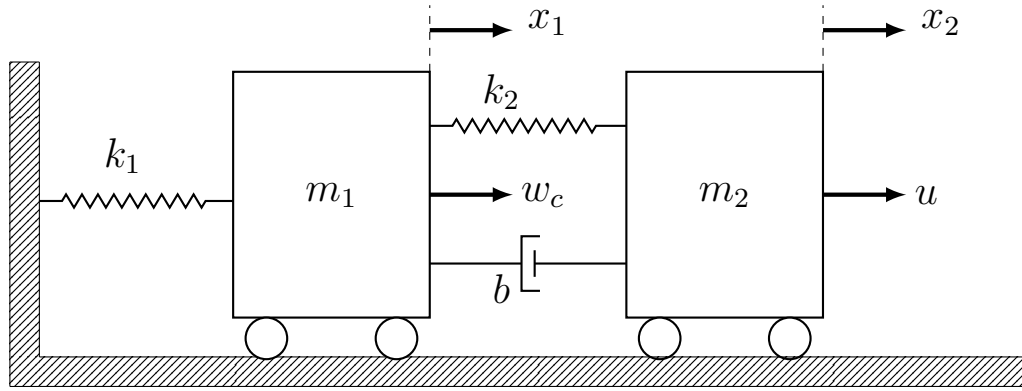


Figura 7 – Arranjo de um sistema massa-mola-amortecedor.

de (6.1) em relação a t , aquela função linear por partes é factível se e somente se

$$\frac{X_{i(p+1)} - X_{ip}}{\eta} + \mathcal{L}_i(X_p) < 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{X_{i(p+1)} - X_{ip}}{\eta} + \mathcal{L}_i(X_{p+1}) < 0 \quad (6.3)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$ e $p = 0, \dots, n_h - 1$. Ou seja, de forma a garantir que as DLMIs (4.11)–(4.12) sejam satisfeitas em todo intervalo de tempo $[0, h)$, é necessário e suficiente impor que (4.11)–(4.12) sejam asseguradas em ambos os extremos de cada subintervalo de tempo $[t_p, t_{p+1})$, $\forall p = 0, 1, \dots, n_h - 1$.

6.2 Exemplo 1 (Sistema massa-mola-amortecedor)

O problema a ser resolvido consiste em um sistema massa-mola-amortecedor no qual o controlador se conecta aos sensores via rede e aos atuadores via uma conexão direta, ou seja, sem amostragem ou perda de pacotes. O sistema é composto por dois carros sem fricção, com massas $m_1 = 0.5$ [kg] e $m_2 = 1.0$ [kg], conectados por um amortecedor, $b = 0.2$ [Ns/m] e uma mola, $k_2 = 7.0$ [N/m]. O primeiro carro está anexado à parede através de outra mola, $k_1 = 12.0$ [N/m]. A força $u(t)$ é a entrada de controle atuando no segundo carro e a força $w_c(t)$ é a entrada exógena atuando no primeiro carro. Um exemplo similar onde a planta é controlada através de uma rede foi proposto em Lutz (2014) e resolvido em Gabriel *et al.* (2018) com uma matriz de taxa de transição conhecida. As matrizes do espaço de estados são as seguintes:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (-k_2 - k_1)/m_1 & k_2/m_1 & -b/m_1 & b/m_1 \\ k_2/m_2 & -k_2/m_2 & b/m_2 & -b/m_2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_2 \end{bmatrix}, \quad E_{c1} = E_{c2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro, é considerado $E_{di} = 0 \forall i \in \mathbb{K}$ e, depois, $E_{di} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]'$ $\forall i \in \mathbb{K}$ modelando uma entrada exógena w_d na medida de velocidade do segundo carro. Para levar em conta possíveis perdas de pacotes na rede, o sistema em malha aberta é modelado como um MJLS com dois modos $\mathbb{K} = \{1, 2\}$ que representam a perda de pacotes e o sucesso da transmissão, respectivamente. A partir de Lutz (2014), a matriz de transição é determinada como

$$Q = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = e^{\Lambda h_d} \quad (6.4)$$

com período de amostragem $h_d = 20$ [ms]. A distribuição inicial $\pi_0 = [0.4 \ 0.6]'$ foi adotada. Nesta dissertação, as DLMI foram resolvidas utilizando-se a estratégia mencionada anteriormente com $n_h = 16$. O efeito da limitação de largura de banda afeta somente a comunicação entre sensores e controlador, implicando em uma lei de controle parcialmente amostrada da forma (3.1) dentro de cada intervalo de tempo $[t_k, t_{k+1})$ tal que $h = t_{k+1} - t_k = 200$ [ms], $\forall k \in \mathbb{N}$. A partir do Corolário 5.1, o controle parcialmente amostrado \mathcal{H}_∞ impõe o custo mínimo garantido $\gamma = 2.63$ que é assegurado pelos ganhos

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2496 & -1.2028 & -0.7905 & -3.7891 \end{bmatrix}$$

Considerando $w_c(t) = \text{sen}(\pi t/2)$ para todo $t \in [0, 5)$ e zero caso contrário, uma simulação de Monte Carlo com 500 realizações do MJLS para todo $t \in [0, 10]$ foi executada. A Figura 8 mostra no topo todas as trajetórias dentro do intervalo de um desvio padrão do quadrado da norma euclidiana da saída controlada e, na parte inferior, o sinal de controle parcialmente amostrado correspondente à última realização. Observe que todas as trajetórias tendem a zero após $t = 5$ [s], quando a perturbação desaparece. Por outro lado, considerando $E'_{di} = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \forall i \in \mathbb{K}$, o controle parcialmente amostrado \mathcal{H}_∞ impõe o custo mínimo garantido $\gamma = 6.24$ que é assegurado pelos ganhos

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.093 & -1.009 & -0.508 & -2.420 \end{bmatrix}$$

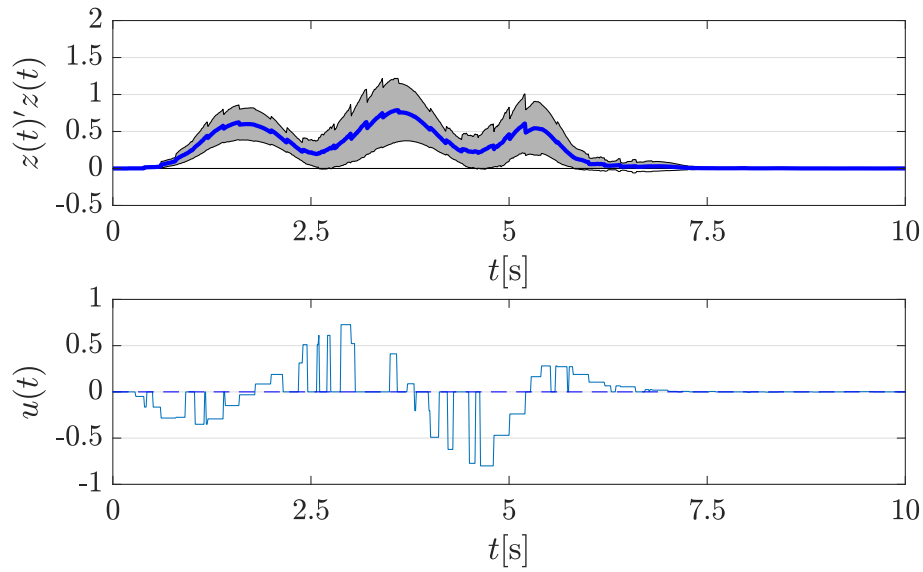


Figura 8 – Simulação temporal sem a entrada exógena w_d .

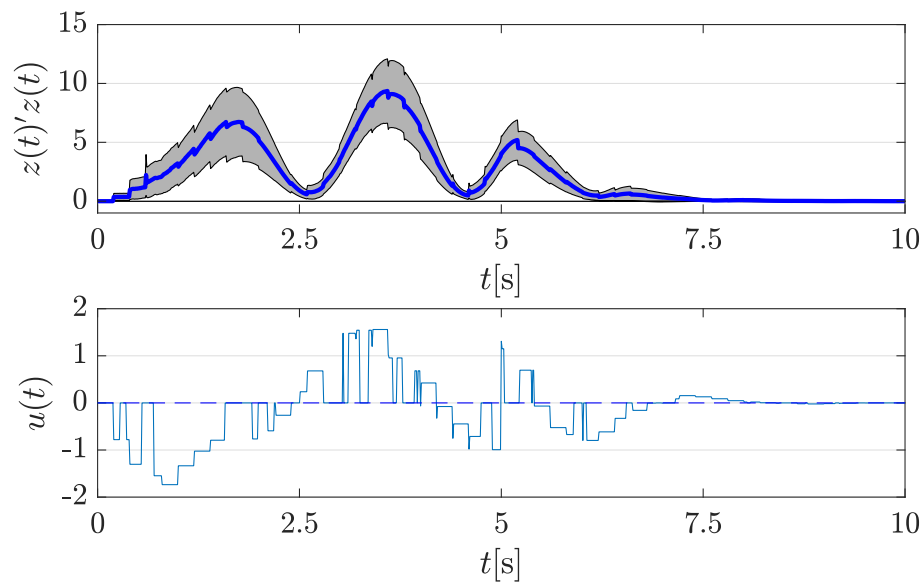


Figura 9 – Simulação temporal com a entrada exógena w_d .

Executando a simulação temporal como antes, mas com $w_d(t_k) = \text{sen}(\pi t_k/2)$ para todo $t \in [0, 5)$ e zero caso contrário, pode ser visto na Figura 9 que a perturbação discreta causa um aumento na amplitude da saída do sistema, mas como antes, após $t = 5$ [s] todas as trajetórias desaparecem.

O mesmo exemplo com $E_{di} = 0 \forall i \in \mathbb{K}$ foi usado para investigar o comportamento do controle independente de modo. Nesse caso, o controle parcialmente amostrado \mathcal{H}_∞ impõe o custo garantido mínimo $\gamma = 3.26$, que é assegurado pelo ganho

$$L_1 = L_2 = L = \begin{bmatrix} 0.2393 & -0.4757 & -0.5078 & -2.4405 \end{bmatrix}$$

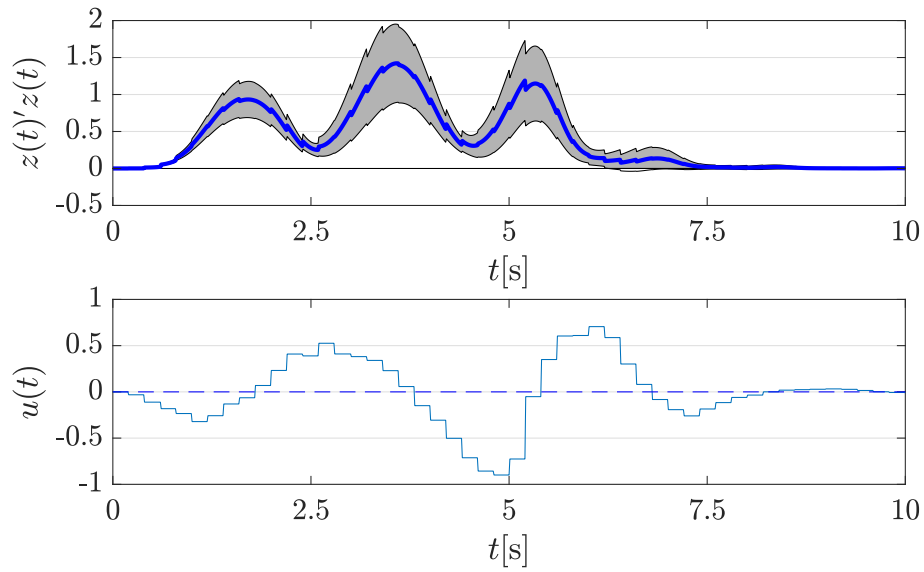


Figura 10 – Simulação temporal - Controle independente de modo.

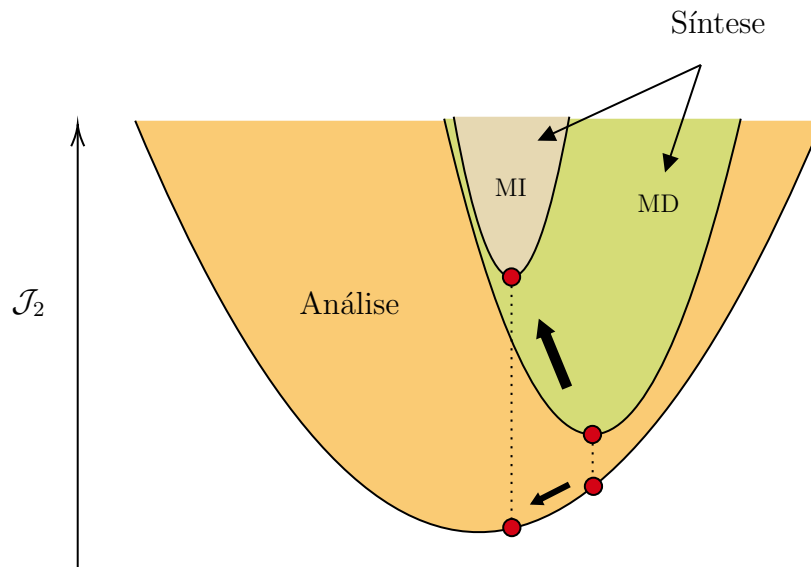


Figura 11 – Espaço de busca.

A Figura 10, com a mesma configuração da Figura 8, mostra os resultados da simulação temporal. Além da maior norma \mathcal{H}_∞ adquirida para o controle independente de modo, o que era esperado devido à restrição adicional imposta, é possível observar que a forma do sinal de controle parcialmente amostrado, quando comparada com o caso anterior, é diferente. Isto pode ser explicado devido ao fato de que, no primeiro caso, $u(t, t_k) = L_{\theta(t)}x(t_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ é t e t_k dependente. Observe que a mudança no sinal de controle pode ocorrer em duas situações diferentes, ou seja, na amostragem e na mudança

Tabela 1 – Índices de desempenho.

		$E_{di} = 0$		$E_{di} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]'$	
		Síntese	Análise	Síntese	Análise
\mathcal{H}_∞	MD	2.63	1.34	6.24	2.48
	MI	3.26	1.62	6.97	2.94
\mathcal{H}_2	MD	1.62	1.21	2.25	1.40
	MI	1.93	1.44	2.42	1.37

Tabela 2 – Acurácia computacional.

n_h	1	2	4	8	16
\mathcal{H}_∞	5.25	3.80	3.04	2.75	2.63
\mathcal{H}_2	2.35	1.98	1.76	1.67	1.62

do modo de Markov. No segundo caso, $u(t_k) = Lx(t_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ só depende de t_k implicando que seu valor permanece constante durante todo o intervalo de amostragem. Cálculos de custos garantidos e normas foram feitos para os cenários dependente de modo (MD) e independente de modo (MI). Os resultados estão resumidos na Tabela 1. A Figura 11 ilustra o ocorrido com os dois últimos valores que constam da sexta coluna dessa tabela. O custo com o controle independente de modo é menor que o custo com o controle dependente de modo. Isto pode ocorrer, segundo a Figura 11, pois a minimização de dois limitantes superiores pode gerar custos verdadeiros não comparáveis.

A partir da Tabela 1, é possível verificar quão restritivo é o cálculo do custo mínimo garantido quando comparado com a norma do sistema em malha fechada calculada exatamente pelo Corolário 4.1 para o sistema com os mesmos ganhos fixados. Isso se deve ao fato de que os Corolários 5.1 e 5.2 expressam apenas condições suficientes para os cálculos dos índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Outro fato importante a ser observado é que (6.1), usado para calcular a derivada temporal das DLMI's expressas em (4.11), é tão preciso quanto maior é o número n_h de segmentos utilizados. Este é um compromisso entre precisão do custo garantido e esforço computacional. A Tabela 2 mostra os resultados para o cenário de custo garantido dependente de modo \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 com $E_{d1} = E_{d2} = 0$.

6.3 Exemplo 2 (Máquinas elétricas acopladas)

Considere duas máquinas elétricas acopladas operando em uma rede, conforme descrito em Costa *et al.* (2013) e Loparo e Blankenship (1985). Aqui, será considerado o efeito que pequenos acoplamentos estocásticos podem causar na estabilidade de sistemas de potência. O modelo considera o número de máquinas, o desvio angular do rotor em relação ao seu valor nominal, o coeficiente de amortecimento, a frequência natural da

máquina e um mecanismo de acoplamento adverso, como pode ser visto na equação

$$\ddot{\varphi}_j(t) + 2\alpha_j\dot{\varphi}_j(t) + \omega_j^2\varphi_j(t) = \sum_{k=1}^M \epsilon\mu_{jk}(t)\varphi_k(t), \quad j = 1, \dots, M \quad (6.5)$$

onde M é o número de máquinas consideradas na rede, e φ_j é o desvio do ângulo do rotor da j -ésima máquina em relação ao seu valor nominal. Os parâmetros α_j e ω_j são respectivamente o coeficiente de amortecimento e a frequência natural da j -ésima máquina. Neste exemplo, faz-se a suposição $0 = \alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_M$, o que significa que a primeira máquina tem um coeficiente de amortecimento líquido zero, enquanto as outras máquinas têm amortecedores estritamente positivos. Neste caso, espera-se que a energia seja “bombeada” da porção estável e positivamente amortecida do sistema ($j \geq 2$) para a parte marginalmente estável ($j = 1$), conduzindo assim o sistema global à instabilidade. Este mecanismo de acoplamento adverso, cuja amplitude é sintonizada pelo pequeno parâmetro $\epsilon > 0$, é representado pelo termo que aparece no lado direito de (6.5). Os processos μ_{jk} modelam as flutuações aleatórias que afetam o sistema. Para chegar a resultados explícitos, foi assumido em Costa *et al.* (2013) que eles são processos telegráficos homogêneos tomando valores em $\{-1, 1\}$.

Este exemplo, considerando-se o caso de dois motores, com todas as especificações das matrizes do sistema, foi proposto e resolvido em Costa *et al.* (2013) para o caso a tempo contínuo, considerando uma lei de controle clássica dependente de modo, da forma $u(t) = L_{\theta(t)}x(t)$. Deseja-se projetar a lei de controle (3.1) onde apenas a variável de estado é amostrada. Para isso, considerou-se $h = 20$ [ms], $nh = 4$ e a matriz de taxa de transição nominal

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -(\eta_1 + \eta_2) & \eta_2 & \eta_1 & 0 \\ \eta_2 & -(\eta_1 + \eta_2) & 0 & \eta_1 \\ \eta_1 & 0 & -(\eta_1 + \eta_2) & \eta_2 \\ 0 & \eta_1 & \eta_2 & -(\eta_1 + \eta_2) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

com $\eta_1 = 2.5$ e $\eta_2 = 0.5$. As matrizes no espaço de estados são

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 - \epsilon & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\epsilon & 0 & -\omega_2^2 - \epsilon & -2\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 - \epsilon & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \epsilon & 0 & -\omega_2^2 - \epsilon & -2\alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 + \epsilon & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\epsilon & 0 & -\omega_2^2 + \epsilon & -2\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 + \epsilon & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \epsilon & 0 & -\omega_2^2 + \epsilon & -2\alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} I_4 \\ 0_{1 \times 4} \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 4} \\ 1 \end{bmatrix}, E_{ci} = I_4, E_{di} = 0_{4 \times 1}$$

para $i = \{1, 2, 3, 4\}$. Do Corolário 5.2, o controle parcialmente amostrado \mathcal{H}_2 impõe o custo garantido 9,91, que é assegurado pelos ganhos

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3887 & -1.3466 & -0.6157 & -0.9001 \\ -0.4013 & -1.3512 & -0.6234 & -0.9001 \\ -0.3903 & -1.3513 & -0.6213 & -0.9002 \\ -0.4027 & -1.3471 & -0.6208 & -0.9001 \end{bmatrix}$$

Este resultado é muito similar ao calculado em Costa *et al.* (2013), com $\mathcal{H}_2 = 9.84$ mostrando que, para este caso, as particularizações impostas no Teorema 4.1 não foram muito restritivas. Esse custo mínimo garantido depende fortemente do intervalo de tempo de amostragem escolhido. Para confirmar essa afirmação, para o mesmo problema, mas resolvido com $h = 200$ [ms], o custo mínimo garantido \mathcal{H}_2 aumenta para 22.78.

Um caso de interesse surge ao assumir-se que as taxas de transição são incertas, com uma variação de 100 % em torno de seus valores nominais. Ou seja, nesse caso temos

$$\Lambda_1 = 0_{4 \times 4}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda_3 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \Lambda_4 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

O politopo tem quatro vértices e o controlador correspondente obtido do Corolário 5.2 impõe o custo mínimo garantido \mathcal{H}_2 de 9,93 através dos ganhos

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4209 & -1.4158 & -0.6125 & -0.8990 \\ -0.4565 & -1.4302 & -0.6438 & -0.8989 \\ -0.4327 & -1.4366 & -0.7793 & -0.9018 \\ -0.4853 & -1.3863 & -0.7659 & -0.9002 \end{bmatrix}$$

que é muito próximo ao calculado em Costa *et al.* (2013), que foi de 9.85. Novamente temos que, nesse caso, a suficiência imposta nas LMIs de síntese do controle não foram muito restritivas.

A Tabela 3 resume os resultados obtidos. O Corolário 5.2 foi utilizado para a síntese do controle robusto a partir do modelo de incertezas descrito na seção 5.3. Os valores de custo \mathcal{H}_2 fornecidos por Costa *et al.* (2013) correspondem a uma lei de controle linear contínua, isto é, não amostrada.

Tabela 3 – Índice de desempenho \mathcal{H}_2 .

	Sem Incerteza		Com Incerteza
$h[\text{ms}]$	20	200	20
Corolário 5.2	9.91	22.78	9.93
Costa <i>et al.</i> (2013)	9.84		9.85

6.4 Exemplo 3 (Cálculo de norma mista)

Considere um sistema linear sujeito a saltos markovianos com dois modos, uma entrada de perturbação externa $w_c(t)$ e uma saída controlada $z(t)$. O objetivo é encontrar uma lei de controle parcialmente amostrado via realimentação de estados da forma (3.1), com período de amostragem dado por $t_{k+1} - t_k = h = 250$ [ms], capaz de estabilizar o sistema dinâmico no contexto dos índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Esse sistema foi apresentado e resolvido para uma lei de controle da forma (3.2) em Gabriel *et al.* (2014). As matrizes da sua representação de estado são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{c1} = E_{c2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_{d1} = E_{d2} = 0$$

A matriz de taxa de transição $\Lambda \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

e $\pi_0 = [1 \ 0]'$ é o vetor de probabilidade inicial.

A ideia é obter custos mínimos garantidos sujeitos a um misto entre as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . A fim de que se tenha uma melhor percepção do comportamento do sistema, calculam-se os custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Em seguida, considera-se como meta para a robustez do sistema um valor 20% superior ao seu custo \mathcal{H}_∞ calculado anteriormente e a partir desse valor, encontra-se a matriz de ganhos L_i com o respectivo custo \mathcal{H}_2 correspondente. Para transformar as DLMI's do Teorema 4.1 em LMI's, adotou-se a estratégia descrita em (6.1) com $n_h = 16$. Utilizando-se o Corolário 5.1, obteve-se o custo garantido $\mathcal{H}_\infty = 2.74$ assegurado pelos ganhos

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.4382 & -4.0529 \\ -3.6411 & -3.8783 \end{bmatrix}$$

Utilizando-se o Corolário 5.2, obteve-se o custo garantido $\mathcal{H}_2 = 2.25$ assegurado pelos ganhos

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0463 & -1.0073 \\ -0.5282 & -1.0090 \end{bmatrix}$$

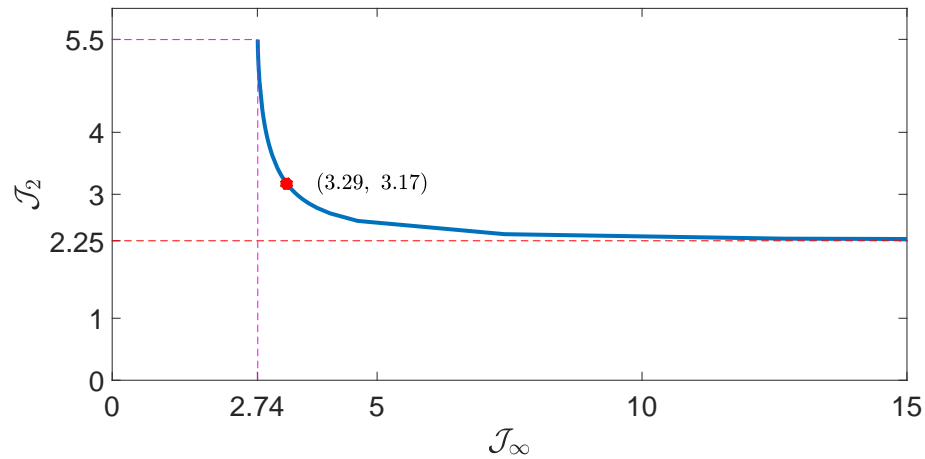


Figura 12 – Custos mistos \mathcal{J}_∞ e \mathcal{J}_2 do sistema.

Considerando-se agora $\gamma = 1.2 \times 2.74 = 3.29$ e utilizando o Corolário 5.2, obteve-se um custo garantido $\mathcal{J}_2 = 3.17$ assegurado pelos ganhos

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3925 & -1.8341 \\ -1.3763 & -1.8126 \end{bmatrix}$$

Observe que esse último valor obtido é maior do que o anterior para $\gamma = \infty$. Isso é razoável visto que os ganhos obtidos agora também tentam satisfazer um índice de robustez imposto ao projeto e não apenas a um desempenho dedicado a diminuição do gasto energético do sistema.

Para uma investigação do comportamento da relação entre os custos mínimos garantidos \mathcal{J}_∞ e \mathcal{J}_2 para esse sistema, utilizou-se o Corolário 5.3 variando-se β_∞ de 0 a $+\infty$. O resultado encontra-se na Figura 12. Nela podem ser vistos os valores das normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 . O ponto marcado em vermelho no gráfico representa o par $\mathcal{J}_\infty \times \mathcal{J}_2$ encontrado anteriormente.

7 Conclusão

Nessa dissertação, foi discutida a modelagem matemática de um sistema linear com saltos markovianos contínuo sujeito a uma lei de controle de realimentação de estado na qual apenas a variável de estado é amostrada, enquanto o modo de Markov usado para fins de controle não é afetado por essa operação. Sob este sistema, foi modelada a presença de entradas exógenas contínua e discreta. Foi visto que essa classe de sistemas pode ser utilizada para modelar um tipo específico de arquitetura de rede de comunicação na qual a rede se encontra entre o sensor e o controlador.

O sistema dinâmico juntamente com a lei de controle utilizada foi modelado como um MJLS híbrido tornando possível o seu tratamento através da adaptação de um resultado já existente na literatura, a respeito de estabilidade em média quadrática e de normas para esta classe de sistemas. A estratégia utilizada para a obtenção dos ganhos de controle foi a de adaptar o resultado citado para obter um problema convexo de otimização, explicitando-se os ganhos, e podendo ser expresso através de DLMI's, um dispositivo matemático que pode ser convertido em LMI's e ser resolvido através de programas de otimização convexa em apenas uma única iteração. Essa foi a principal novidade teórica da dissertação e também a parte mais desafiadora, visto que as estruturas das matrizes do MJLS híbrido obtido fazem com que a variável de ganho do controle esteja presente nas equações diferenciais do sistema, tornando o problema não convexo. Para enfrentar essa dificuldade, foi necessário fazer algumas particularizações na matriz de Lyapunov, tornando o resultado final apenas suficiente.

O problema convexo obtido foi adaptado para tratar a síntese de controle sujeita aos índices de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Também foi estudado o caso do controle independente de modo e o controle sujeito a incertezas paramétricas, este último através da abordagem de sistemas politópicos. A nova estrutura de controle proposta foi aplicada em exemplos disponíveis na literatura para mostrar como o ferramental matemático desenvolvido pode ser utilizado. Fizeram-se comparações entre os custos garantidos obtidos nas operações de síntese e análise do sistema, de forma a se ter uma ideia do quão conservadoras foram as hipóteses feitas para a obtenção do Teorema 4.1. Também foi possível ver como o conservadorismo introduzido pelas condições suficientes está relacionado à dinâmica do sistema que se deseja controlar e ao período de amostragem utilizado.

Recomenda-se como estudos futuros uma investigação mais profunda a respeito das hipóteses simplificadoras utilizadas para um maior entendimento do problema a ser

resolvido com a possível obtenção de condições necessárias e suficientes para a síntese da estrutura de controle proposta. Outro tópico interessante a ser abordado corresponde a uma estrutura genérica em que existem redes de banda limitada entre o sensor, o controlador e o atuador, sendo, nesse caso, cada uma delas modeladas com amostragem e variáveis de Markov diferentes. Em seguida, o mesmo tipo de problema para sistemas não lineares pode ser investigado.

As seguintes publicações decorrem da presente dissertação de mestrado:

- Rafael F. Cunha, Gabriela W. Gabriel e José C. Geromel, **Partial Sampled-Data State Feedback Control of Markov Jump Linear Systems**, *9th IFAC Symposium on Robust Control Design (9th ROCOND 2018)*, Aceito.
- Rafael F. Cunha, Gabriela W. Gabriel e José C. Geromel, **Controle Robusto Parcialmente Amostrado via Realimentação de Estado para Sistemas Lineares com Saltos Markovianos**, *XXII Congresso Brasileiro de Automática (XXII CBA 2018)*, Aceito.
- Rafael F. Cunha, Gabriela W. Gabriel e José C. Geromel, **Robust Partial Sampled-Data State Feedback Control of Markov Jump Linear Systems**, Submetido.

Referências

- CHEN, T.; FRANCIS, B. A. *Optimal sampled-data control systems*. London, United Kingdom: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 16.
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. *Discrete-time Markov jump linear systems*. Berlim, Germany: Springer Science & Business Media, 2006. Citado na página 16.
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; TODOROV, M. G. *Continuous-time Markov jump linear systems*. Berlim, Germany: Springer Science & Business Media, 2013. Citado 10 vezes nas páginas 16, 19, 20, 22, 25, 41, 46, 47, 48 e 49.
- COSTA, O. L. V.; VAL, J. B. R. do; GEROMEL, J. C. Continuous-time state-feedback \mathcal{H}_2 -control of markovian jump linear systems via convex analysis. *Automatica*, v. 35, n. 2, p. 259–268, 1999. Citado na página 23.
- DECARLO, R. A.; BRANICKY, M. S.; PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, 2000. Citado na página 16.
- DOLGOV, M.; HANEBECK, U. D. Static output-feedback control of markov jump linear systems without mode observation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 62, n. 10, p. 5401–5406, 2017. Citado na página 16.
- FRIDMAN, E. A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, Elsevier, v. 46, n. 2, p. 421–427, 2010. Citado na página 16.
- GABRIEL, G. W.; GEROMEL, J. C.; GRIGORIADIS, K. Optimal \mathcal{H}_∞ state feedback sampled-data control design for markov jump linear systems. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, p. 1–11, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 27.
- GABRIEL, G. W.; GONÇALVES, T. R.; GEROMEL, J. C. Optimal and robust sampled-data control of markov jump linear systems: a differential LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, 2018. Citado 11 vezes nas páginas 16, 19, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 37, 41 e 42.
- GABRIEL, G. W.; SOUZA, M.; GEROMEL, J. C. \mathcal{H}_2 state feedback sampled-data control for markov jump linear systems. In: *Proceedings of the 53th IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles: IEEE, 2014. p. 4355–4360. Citado na página 49.
- GEROMEL, J. C.; GABRIEL, G. W. Optimal \mathcal{H}_2 state feedback sampled-data control design of markov jump linear systems. *Automatica*, Elsevier, v. 54, p. 182–188, 2015. Citado na página 36.
- GEROMEL, J. C.; PALHARES, A. G. *Análise linear de sistemas dinâmicos: teorias, ensaios práticos e exercícios*. São Paulo, Brasil: Edgard Blucher, 2004. Citado na página 19.
- GEROMEL, J. C.; SOUZA, M. On an LMI approach to optimal sampled-data state feedback control design. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 88, n. 11, p. 2369–2379, 2015. Citado na página 16.

- GOEBEL, R.; SANFELICE, R. G.; TEEL, A. R. Hybrid dynamical systems. *IEEE Control Systems*, IEEE, v. 29, n. 2, p. 28–93, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 24.
- HAMILTON, W. R. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra: To the editors of the philosophical magazine and journal. *Philosophical Magazine Series 3*, Taylor & Francis, v. 25, n. 169, p. 489–495, 1844. Citado na página 14.
- HESPANHA, J. P.; NAGHSHTABRIZI, P.; XU, Y. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 95, n. 1, p. 138–162, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.
- HU, L.-S.; CAO, Y.-Y.; SHAO, H.-H. Constrained robust sampled-data control for nonlinear uncertain systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 12, n. 5, p. 447–464, 2002. Citado na página 16.
- HU, L.-S.; SHI, P.; FRANK, P. M. Robust sampled-data control for markovian jump linear systems. *Automatica*, v. 42, p. 2025–2030, 2006. Citado na página 36.
- LEON-GARCIA, A. *Probability, statistics, and random processes for electrical engineering*. Upper Saddle River, United States: Pearson Education, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 20.
- LOPARO, K.; BLANKENSHIP, G. A probabilistic mechanism for small disturbance instabilities in electric power systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, IEEE, v. 32, n. 2, p. 177–184, 1985. Citado na página 46.
- LUTZ, C. C. *Switched Markov jump linear systems: Analysis and control synthesis*. Tese (PhD dissertation) — Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 43.
- MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 control design for polytopic continuous-time markov jump linear systems with uncertain transition rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 26, n. 3, p. 599–612, 2016. Citado na página 16.
- RODRIGUES, C. G.; TODOROV, M. G.; FRAGOSO, M. D. \mathcal{H}_∞ control of continuous-time markov jump linear systems with detector-based mode information. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 90, n. 10, p. 2178–2196, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 40.
- SOUZA, C. D.; FRAGOSO, M. \mathcal{H}_∞ control for linear systems with markovian jumping parameters. *Control Theory and Advanced Technology*, v. 9, n. 2, p. 457–466, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- STEWART, W. J. *Probability, Markov chains, queues, and simulation: the mathematical basis of performance modeling*. Princeton, United States: Princeton University Press, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 19.
- TODOROV, M. G.; FRAGOSO, M. D. On the robust stability, stabilization, and stability radii of continuous-time infinite markov jump linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, SIAM, v. 49, n. 3, p. 1171–1196, 2011. Citado na página 16.

TODOROV, M. G.; FRAGOSO, M. D. A new look at the robust control of discrete-time markov jump linear systems. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 89, n. 3, p. 518–534, 2016. Citado na página 16.

WANG, F.-Y.; LIU, D. *Networked control systems*. London, United Kingdom: Springer, 2008. Citado na página 16.

WU, Z.-G.; SHI, P.; SHU, Z.; SU, H.; LU, R. Passivity-based asynchronous control for markov jump systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 62, n. 4, p. 2020–2025, 2017. Citado na página 16.

YANG, T. C. Networked control system: a brief survey. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, IET, v. 153, n. 4, p. 403–412, 2006. Citado na página 14.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1996. Citado na página 26.