Multimodalidades anódicas e catódicas: a negação controlada em lógicas multimodais e seu poder expressivo

Juliana Bueno

Tese apresentada ao
Instituto de Filosofia e
Ciências Humanas da
Universidade Estadual de Campinas
para a obtenção do grau de
Doutor em Filosofia (Área de Lógica)

Orientador: **Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano**

Durante a elaboração deste trabalho
a autora recebeu apoio financeiro do CNPq.

14 de julho de 2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP
por Sandra Ferreira Moreira CRB n^o 5124

*B*862*m*

Bueno, Juliana
Multimodalidades anódicas e catódicas: a negação controlada em lógicas multimodais e seu poder expressivo / Juliana Bueno.- - Campinas, SP:[s. n.], 2009.

Orientadora: Itala Maria Loffredo D'Ottaviano
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Modalidade (Lógica). 2. Lógica matemática não-clássica. 3. Lógica simbólica e matemática. 4. Linguagens formais - Semântica. I. D'Ottaviano, Itala M. Loffredo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Título em inglês: Anodic and cathodic multimodalities: controled negation in multimodal logics and their expressive power.
Palavras chaves em inglês (keywords): Modality (Logic)
Non-classical mathematical logic
Mathematical symbolic logic
Formal languages - Semantics
Área de concentração: Lógica
Titulação: Doutor em Filosofia
Banca examinadora: Itala Maria Loffredo D'Ottaviano, Claudio Pizzi, Nelson Gonçalves Gomes, Cezar Mortari, Marcelo Finger.
Data da defesa: 26-06-2009
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

JULIANA BUENO

MULTIMODALIDADES ANÓDICAS E CATÓDICAS: A NEGAÇÃO CONTROLADA EM LÓGICAS MULTIMODAIS E SEU PODER EXPRESSIVO

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação da Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 26/06/2009.

BANCA

Profa. Dra. Itala M. L. D'Ottaviano (Unicamp, Campinas) - orientadora

Prof. Dr. Claudio Pizzi (Università di Siena, Itália)

Prof. Dr. Nelson G. Gomes (UnB, Brasília)

Prof. Dr. Cezar A. Mortari (UFSC, Florianópolis)

Prof. Dr. Marcelo Finger (USP, São Paulo)

Profa. Dra. Maria da Paz N. de Medeiros (UFRN, Natal) - suplente

Prof. Dr. Elias H. Alves (Unicamp, Campinas) - suplente

Prof. Dr. Marcelo E. Coniglio (Unicamp, Campinas) - suplente

Junho/2009

Dedico à minha avó Amábile

And if I have proved to you, everything I say is true, please help me believe my own lies!

(Nat King Cole, *Funny*).

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação do IFCH-Unicamp que participaram diretamente da minha formação como pesquisadora. Dentre eles destaco Itala M. L. D'Ottaviano, Walter Carnielli e Marcelo E. Coniglio. Aproveito esse momento para agradecer aos colegas do programa que também contribuíram com para meu enriquecimento intelectual.

Quero agradecer à Professora Cristina Sernadas (Intituo Superior Técnico de Lisboa, Portugal) por ter me incentivado e também colaborado, com crítica e sugestões, com o projeto que culminou nesta Tese, no período do meu estágio de mestrado junto ao grupo do Centro de Lógica e Computação do IST em Lisboa.

Agradeço também aos Professores Cláudio Pizzi (Universidade de Siena, Itália) e Walter Carnielli (Unicamp, Campinas) por terem conferido a credibilidade necessária para que eu participasse da tradução do livro *Modalità e Multimodalità* para a sua versão em língua inglesa, *Modalities and Multimodalities*, peça fundamental para a elaboração desta Tese. Agradeço também aos colegas Anderson de Araújo, Samir Gorski, Bruno Jacinto, Alberto Batista Neto, Newton Peron e Luiz Henrique Silvestrini pelas intensas discussões sobre lógica modal, conteúdo daqueles livros, que me ajudaram a dirimir dúvidas e afiar conceitos.

Sou grata à minha orientadora, Professora Itala D'Ottaviano, por ter acreditado no meu projeto e também por ter me dado a liberdade necessária e suficiente para que eu desenvolvesse esta Tese, e mais ainda, pela cuidadosa leitura e pelas críticas à versão final do trabalho.

Agradeço ao Professor Leon van der Torre (Universidade de Luxemburgo) pelo convite e acolhimento junto ao excelente grupo *Individual and Collective Reasoning – Computer Science and Comunication* e pela oportunidade dada para que eu pudesse expor meu trabalho para todo o grupo durante minha estada em Luxemburgo. Dessa interação resultaram sugestões que contribuiram para o desenvolvimento final do trabalho.

Não posso deixar de agradecer à Catarina Dutilh Novaes por seu entusiasmo para com o meu trabalho e pela discussão que ajudou a optar pelos termos *factual* e *hipotético* – definições-chave para a interpretação dos sistemas anódicos.

Sou também grata à plataforma oferecida pelo *software* livre TeXnicCenter que permitiu que esta Tese fosse redigida no editor LaTeX com todas as suas facilidades.

À minha família que sempre me apoiou nessa tarefa, dando o estímulo e o carinho necessário para que eu continuasse essa difícil caminhada, sou imensamente grata. E ao Walter, $\Box$ e $\Diamond$ que somos, por todos os momentos que juntos pudemos desfrutar e aprender por meio de nossos diálogos (quase) nada socrático que me ajudaram a refletir, questionar e mais do que tudo, acreditar!

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo investigar o papel da negação no âmbito das modalidades, de forma a poder esclarecer até que ponto a negação pode ser atenuada, controlada ou mesmo totalmente eliminada em favor da melhor expressabilidade lógica de certas teorias, asserções ou raciocínios que sofrem os efeitos da negação. Contudo, atenuar ou eliminar a negação tem um alto preço: métodos tradicionais em lógica podem deixar de ser válidos e certos resultados, como teoremas de completude para sistemas lógicos, podem ser derrogados.

Do ponto de vista formal, a questão central que investigamos aqui é até que ponto tais métodos podem ser restabelecidos. Com tal finalidade, iniciamos nosso estudo a partir do que denominamos "sistemas anódicos" (sem negação) e, *a posteriori*, introduzimos gradativamente o elemento "catódico" (negações, com diversas gradações e diferentes características) nos sistemas modais por meio de combinações com certas lógicas paraconsistentes, as chamadas lógicas da inconsistência formal (LFIs).

Todos os sistemas tratados são semanticamente caracterizados por semânticas de mundos possíveis; resultados de incompletude são também obtidos e discutidos. Obtemos ainda semânticas modais de traduções possíveis para diversos desses sistemas. Avançamos na direção das multimodalidades, investigando os assim chamados sistemas multimodais anódicos e catódicos.

Finalmente, procuramos avaliar criticamente o alcance e o interesse dos resultados obtidos na direção da racionalidade sensível à negação.

ABSTRACT

The present work aims to investigate the role of negations in the scope of modalities and in the reasoning expressed by modalities. The investigation starts from what we call "anodic" systems (without any form of negation) and gradually reaches the "cathodic" elements, where negations are introduced by means of combining modal logics with certain paraconsistent logics known as logics of formal inconsistency (LFIs).

We obtain completeness results for all treated systems, and also show that certain incompleteness results can be obtained. The class of the investigated systems includes all normal modal logics that are extended by means of the schema $G^{k,l,m,n}$ due to E. J. Lemmon and D. Scott combined with LFIs. We also tackle the question of obtaining modal possible-translations semantics for these systems. Analogous results are analyzed in the scope of multimodalities, where anodic as much as cathodic logics are studied.

Finally, we advance a critical evaluation of the reach and scope of all the results obtained to what concerns expressibility of reasoning considered to be sensible to negation.

We also critically assess the obtained results in contrast with problems of rationality that are sensible to negation.

SUMÁRIO

PRÓLOGO

> "A lógica modal é uma das tantas filhas da Filosofia. Adulta, ela se mudou da casa natal e está hoje em dia longe da casa dos pais. Mas os laços permanecem: a Filosofia é importante para a lógica modal, e a lógica modal é importante para a Filosofia".[1]

Assim começa o ensaio de Lindström e Segerberg em [LS07], mas na verdade talvez não faça tanto tempo assim que a lógica modal saiu de casa. O que é certo é que a certidão de nascimento comprova a filiação por parte da Filosofia, a Filosofia tem falado da lógica modal há longo tempo – não só dois capítulos do *De Interpretatione* e parte dos *Analytica Priora* de Aristóteles (veja [Ari52a] e [Ari52c]) se ocuparam em boa parte da lógica modal, como toda a discussão passou dos filósofos clássicos para os medievais e comentadores, ocupando grande parte do interesse com discussões entre possibilidade e necessidade e com a investigação das relações lógicas entre esses conceitos. Em *De Interpretatione*, por exemplo, Aristóteles já se referia à contraditoriedade entre "pode ser" e "não pode ser" e que de "pode ser" segue-se "não é impossível", ou segue ainda de "é necessário que deve ser".

Aristóteles e seus comentadores preocupavam-se também em tentar esclarecer argumentos que podemos hoje pensar como combinando tempo e modalidade, por exemplo, em *De Caelo* (1: 11-12 de [Ari52b]); o chamado "Argumento Mestre" de Diodoro Cronos parte também do que podemos hoje ver como uma redução da necessidade à temporalidade, afirmando que o que é sempre será é "necessariamente verdadeiro".

[1] Modal logic is one of philosophy's many children. As a mature adult it has moved out of the parental home and is nowadays straying far from its parent. But the ties are still there: philosophy is important for modal logic, modal logic is important for philosophy. Nossa tradução.

Como justificativa do interesse que estudos profundos sobre as modalidades podem ter em Filosofia, é conveniente mencionar que Descartes, em sua tentativa de provar que o corpo e a mente são distintos, invocava a essencialidade da distinção entre necessidade e possibilidade: de fato, Cunning em [Cun08] se refere explicitamente ao interesse em se construir uma "teoria geral cartesiana da modalidade". Lukasiewics também teve sua preocupação com os futuros contingentes de Aristóteles quando introduziu seus sistemas de lógicas polivalentes, conforme Cignoli, D'Ottaviano e Mundici em [CDM95]:

> "Lukasiewics introduziu seus sistemas de lógicas polivalentes como uma tentativa de investigar as proposições modais e as noções de possibilidade e necessidade intimamente relacionadas com tais proposições."

O objetivo desta Tese consiste, especialmente, em estudar relações entre as modalidades e a negação, ou à falta de negação. Nesse sentido, a relação entre modalidade e contradição (ou não-contradição) será central no desenvolvimento dos nossos resultados. E essa relação não é um fato novo na Filosofia.

O famoso argumento ontológico relativo à existência de Deus, apresentado pela primeira vez na literatura por Santo Anselmo da Cantuária (1033-1109) e também defendido por Descartes na *meditação terceira* (cf. [Des73]), podem ser vistos como argumentos filosóficos relacionados à modalidade. Para mais detalhe sobre esse tema veja Sautter em [T.00].

No início do século XVIII, Leibniz aprimorou o argumento ontológico cartesiano, mas Gödel, na mesma linha de argumentação de Leibniz, foi quem formalizou tais argumentos ao propor uma axiomatização para a noção de propriedade positiva, ou seja, faz o papel das perfeições divinas. De acordo com Sautter em [Sau06], Gödel parece ter trabalhado por três décadas na sua demonstração da existência de Deus.

> "Há, entre os espólios de Gödel, esboços do argumento ontológico datando de *c*. 1941, mas a versão definitiva é datada de 10 de fevereiro de 1970."

Aparentemente, a prova da existência de Deus necessita partir da premissa de que Deus *possivelmente* existe para ter sucesso. Para quem está satisfeito com a conclusão de que Deus existe, essa premissa é fácil de aceitar. Mas a posição contrária pode argumentar que é impossível aceitar tal premissa *antes* de demonstrar a existência. A saída para alguns filósofos é defender que a *possibilidade da existência* de alguma coisa pode ser estabelecida se sua essência implica em não-contradição; eis então a (não)contradição e as modalidades na base de argumento filosófico de altíssimo quilate.

Mas a prova de Gödel não poderia ser dada antes do desenvolvimento de uma semântica formal adequada para as modalidades, e não é difícil se convencer que o próprio fato de haver uma semântica com alto grau de sucesso já engendra outra discussão filosófica. De fato, um grande fator de sucesso da lógica modal contemporânea foi a *semântica de mundos possíveis* (proposta por Carnap) ou *semântica relacional* proposta por Kripke, possivelmente inspirado nas idéias de Leibniz, a respeito de necessidade como "verdade em todos os mundos possíveis". Na verdade, uma componente essencial da análise de Kripke e que marca toda a lógica modal contemporânea são as *relações de acessibilidade*, nas quais, de acordo com Carnielli e Pizzi em [CP08], aparentemente Leibniz nunca tenha pensado.

> "The problem whether or not Leibniz had in mind the equivalence between "necessarily true" and "truth at all possible worlds" is not yet settled; it is very likely that Leibniz was convinced that necessity implied truth at all possible worlds, but it is doubtful that he would agree with the converse implication".

A semântica de Kripke teve tal sucesso como um instrumento para analisar o sentido das proposições modais que houve quem passasse a pensar que proposições sobre modalidades seriam de fato proposições acerca de mundos possíveis. Da discussão instalou-se o debate acerca da existência de tais mundos. O "realismo", representado por David Lewis defende que "existem outros mundos possíveis além do nosso próprio mundo real", de acordo com Mortari em [Mor]. A tese defendida por Lewis sofreu duras críticas de modo que não pode ser considerada uma explicação adequada dos conceitos de necessidade e possibilidade, de acordo com Mortari em [Mor]:

> "Em virtude dos problemas acima levantados, o realismo modal não pode ser considerado uma explicação adequada dos conceitos de necessidade e possibilidade; não serve, assim, como fundamento para a interpretação de lógicas modais. A questão que se coloca, portanto, é a seguinte: há, ao contrário do que Lewis afirma e defende, alguma alternativa razoável?"

O "atualismo" defendido por Plantinga (veja [Pla76]), que pode ser entendido como uma espécie de realismo modal (uma vez que os mundos possíveis são entendidos como entidades abstratas) também é alvo de críticas, e numa tentativa de salvar sua teoria Plantinga apela a noções de propriedades essenciais. Murcho, em [Mur02], defende tais propriedades essenciais com o objetivo de apresentar argumentos em favor da existência de verdades necessárias *a posteriori*.

Embora necessidade e possibilidade nunca tivessem perdido sua posição de destaque no discurso filosófico, o estudo mais profundo de suas propriedades lógicas permaneceu negligenciado até o começo do século XX: a lógica modal só saiu de casa incitada pela crítica de Clarence I. Lewis ao sistema lógico elaborado por Russell e Whitehead nos *Principia Mathematica*.

Lewis não aceitava que a base lógica através da qual os *Principia Mathematica* pretendiam reduzir a Matemática à Lógica contivesse como teoremas as fórmulas um tanto paradoxais $p \supset (q \supset p)$ e $\neg p \supset (p \supset q)$ significando, respectivamente, "uma sentença verdadeira é implicada por qualquer outra sentença" e "uma sentença falsa implica qualquer outra sentença". Lewis pensava que tais propriedades, se bem que admissíveis no contexto de Russell e Whitehead deveriam ser inválidas num sentido "estrito" da implicação. O projeto de Lewis de determinar uma axiomática correta para o que ele chamava "implicação estrita" acabou implicando na busca dos princípios lógicos da possibilidade e da necessidade.

O livro de Lewis e Langford de 1932 (veja [LL32]), que contém um tratamento da noção de implicação estrita, foi o que deu origem à lógica modal contemporânea e, assim, a lógica modal saiu de casa. Contudo, os laços permanecem, como sustentam Lindström e Segerberg.

Enquanto Lewis e Langford tinham boas razões para pretender modificar modalmente os conectivos lógicos, nosso trabalho pretende ter boas razões para modificar proposicionalmente os operadores modais, principalmente através da negação: o núcleo da proposta é estudar a combinação de diversos tipos de negações com modalidades, e ainda estudar modalidades sem negação alguma, investigando suas propriedades lógicas, com interesse em restringir ou controlar o efeito da negação nas modalidades e multimodalidades. Pretendemos esclarecer o poder expressivo de tal controle e mostrar seu interesse na argumentação filosófica.

Nosso trabalho vai seguir de perto, mas num plano e num patamar diferente, o desenvolvimento da lógica modal e multimodal em Carnielli e Pizzi em [CP08]; embora com objetivos completamente diferentes, boa parte da notação e da maneira de expor certas questões[2] técnicas e conceituais serão espelhadas naquele livro.

O termo *ânodo* parece ser usado em química indiferentemente como o terminal positivo (de uma célula eletrolítica) ou negativo (de uma célula galvânica). Esse uso parece ser surpreendentemente apropriado para o que se faz em lógica, pelo menos para o que se pretende desenvolver neste trabalho: do grego *anodos* é o "caminho para cima", e em princípio nada tem a ver com positivo ou negativo[3]. Em química, *anódico* pode ser entendido como o sentido para onde os elétrons se dirigem, ou aquele pólo que atrai o elemento negativo – visto assim, "anódico" se identifica com o "positivo".

De forma simétrica, *cátodo* (grego *kathodos*), o "caminho para baixo" dá origem a *catódico*, que pode ser entendido como o pólo que repele o elemento negativo – e igualmente, visto assim, "catódico" se identifica com o "negativo".

Este é o sentido com o qual introduzimos os termos "anódico" e "catódico", neologismos enquanto aplicados a sistemas lógicos, neste trabalho: podemos

[2] Deixo aqui registrado meu débito para com discussões envolvendo lógica modal na "Logica-l – Lista acadêmica brasileira dos profissionais e estudantes da área de LOGICA", `http://www.dimap.ufrn.br/cgi-bin/mailman/listinfo/logica-l`.

[3] Agradeço a Newton Marques Perón pela observação.

então nos referir a "lógicas anódicas" como aquelas que de alguma maneira repelem ou são destituídas de negação, e a "lógicas catódicas" como aquelas que, ao contrário, têm carga negativa.

A analogia é bastante apropriada, uma vez que, como em química, e isso será esclarecido ao longo de todo o trabalho, a diferença entre o elemento negativo e o positivo é muito longe de ser óbvia: de fato, a lógica sem negação parece algumas vezes parodiar aquela com negação, e recriar situações onde aparentemente a negação (oculta) seria a causa. E há ainda a possibilidade de se expressar logicamente "cargas controladas" de negação, e pode-se formular "lógicas catódicas", como veremos, com uma quantidade gradual de carga negativa – onde, no caso, trata-se da negação lógica.

Do ponto de vista do método lógico, o que este trabalho vai explorar é a possibilidade de se introduzir negação no âmbito das modalidades, ou ainda, de combinar modalidades com uma ampla gama de negações, partindo então das modalidades anódicas (sem negação) e gradativamente introduzindo o elemento catódico (negações) através das lógicas paraconsistentes conhecidas como *lógicas da inconsistência formal* (LFIs) introduzidas por Carnielli e Marcos em [CM02] e desenvolvidas por Carnielli, Coniglio e Marcos em [CCM07]. O que vem a seguir pretende justificar por qual razão se toma esta via de investigação.

Com o surgimento dos conhecidos paradoxos da virada do século XIX para o século XX, cujo paradigma é a famosa objeção de Bertrand Russell dirigida à obra de Gottlog Frege, e dos Teoremas de Incompletude de Kurt Gödel a respeito da aritmética, fez com que se levantasse fortíssimas suspeitas contra a negação, contudo, não se pode desconhecer que há maneiras sutís de balançar o edifício da matemática e da racionalidade sem usar a negação, como mostrou Haskell Curry em 1942.

De fato, Curry mostrou em [Cur42] um novo método capaz de reproduzir os argumentos de Russell e de Gödel em sistemas sem que sequer o símbolo de negação seja introduzido; basta para Curry que a implicação seja munida de algumas propriedades aparentemente bastante aceitáveis, como a *Absorção* $(\alpha \supset (\alpha \supset \beta)) \supset (\alpha \supset \beta)$ ou *Reflexividade* $(\alpha \supset \alpha)$ e a *Regra de Modus Ponens* ($\alpha, \alpha \supset \beta$ implica β). Com essas três ingênuas propriedades mais o princípio que arruinou Frege, o *Princípio da Abstração*[4], um novo desastre se produz. Na linguagem da teoria quantificacional de onde se expressa a teoria dos conjuntos, o Princípio da Abstração (**PA**) se escreve formalmente como:

$$\exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow P(x))$$

onde $P(x)$ é uma fórmula na qual a variável z não pode aparecer livre.

É claro que se tomarmos $P(x)$ como $x \notin x$ teremos a conhecida construção de Russell contra Frege, o famoso Paradoxo de Russell, mas o que Curry mostra é que o problema não é de maneira alguma a negação da pertinência (o elemento "$\notin$" na sentença): de fato, se tomarmos como $P(x)$ a sentença $(x \in x) \supset \alpha$, onde α é uma sentença arbitrária, **PA** garante a existência de um certo conjunto z que coleta aqueles elementos que satisfazem este $P(x)$:

$$\exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow ((x \in x) \supset \alpha))$$

A partir daí, o seguinte argumento mostra que a sentença arbitrária α pode ser derivada.

1.	$\forall x((x \in c) \leftrightarrow ((x \in x) \supset \alpha))$	[Instanciação em **PA**]
2.	$(c \in c) \leftrightarrow ((c \in c) \supset \alpha)$	[Subst. x por c em 1]
3.	$(c \in c) \supset ((c \in c) \supset \alpha)$	[Implicação à direita em 2]
4.	$((c \in c) \supset \alpha) \supset (c \in c)$	[Implicação à esquerda em 2]
5.	$((c \in c) \supset ((c \in c) \supset \alpha)) \supset ((c \in c) \supset \alpha)$	[Absorção]
6.	$(c \in c) \supset \alpha$	[(**MP**) em 3 e 5]
7.	$c \in c$	[(**MP**) em 6 e 4]
8.	α	[(**MP**) em 6 e 7]

Essa derivação só usou Absorção e Modus Ponens; como desprezar *Modus Ponens* parece uma alternativa paralisante, o único passo que se pode dar é restringir **PA**, como propõe a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, que permite apenas formar conjuntos que cumpram uma dada propriedade

[4] **Princípio da Abstração** (ou **Compreensão**): Toda propriedade P determina um conjunto constituído por exatamente aqueles objetos que satisfazem à propriedade P .

a partir de conjuntos previamente dados. A solução é altamente engenhosa, e aparentemente é um milagre lógico que a partir de dois conjuntos iniciais, o vazio e um conjunto infinito (através do Axioma do Infinito), possa-se construir toda uma base para a matemática, que então parece permanecer sólida. Só não se sabe até quando, e graças (ou desgraças) ao segundo Teorema de Gödel, possivelmente não se poderá saber jamais.

O que parece claro é que, se mesmo sem a negação pode-se incorrer na trivialização dedutiva, como advertiu Curry, com a negação a situação é pior ainda: pelo menos sem a negação há, aparentemente, menos caminhos conduzindo ao abismo da trivialidade (embora o chamado $\lambda-$cálculo, introduzido por A. Church em [Chu36], permita formalizar o argumento de Curry de forma abstrata, conforme argumentam Curry e Feys em [CF58]). Não é de se surpreender, portanto, que a negação tenha tido um papel de destaque nas discussões sobre os fundamentos da matemática, principalmente entre os intuicionistas.

Em diversas publicações, durante mais de 10 anos, entre 1944 e 1955, Griss defendeu uma forma de matemática intuicionista completamente desprovida de negação, desde que, segundo ele, não se poderia conceber uma demonstração de uma proposição que envolvesse algum tipo de contradição, de acordo com Troelstra e van Dalen em [TvD88], capítulo 13.

Brouwer objetou contra Griss, mostrando em 1948 um exemplo de um argumento envolvendo negação, em uma certa construção de números reais, que não poderia ser substituído por uma construção positiva. Contudo, a concepção de Brouwer a respeito da construção envolvida, e de resto a respeito do que fosse a matemática construtiva envolvendo a noção de "matemático ideal", é considerada por Troelstra, mesmo pela própria comunidade construtivista, como solipsista demais para ser levada a sério (veja [Tro91]).

O cálculo proposicional intuicionista (**IPC**) apresenta um alto grau de dependência da negação. Um dos grandes diferenciais da lógica intuicionista é seu conceito de implicação, que justifica uma semântica diferente para a negação, de tal forma a permitir esclarecer como é possível que $\alpha \vee \neg\alpha$ deixe de ser uma lei universalmente válida. Os trabalhos de Beth (cf. [Bet56]) e Kripke (cf. [Kri65]) permitiram dar demonstrações de completude para **IPC**, e tanto os modelos de Kripke quanto os de Beth podem ser vistos como modelos topológicos com base em espaços especiais, mas de tal modo que a partícula $\perp$ (*falsum,* ou constante de falsidade) nunca seja tomada como verdadeira.

Contudo, Veldman mostrou que é possível estender a noção de modelos de Beth de forma a definir os chamados modelos *falíveis*, onde em certos nós (ou mundos) $\perp$ seja semanticamente validado. A mesma idéia foi transferida para modelos de Kripke por Swart, conforme esclarece Troelstra em [Tro91],.

> Beth and Kripke proved completeness for their respective kinds of semantics by classical methods (Beth originally believed to have also an intuitionistic completeness proof for his semantics). Veldman was able to show that is one extends the notion of Beth model to *falible* Beth models, where it is permitted that in certain nodes falsehood is forced, it is possible to obtain an intuitionistic completeness proof for Kripke semantics. The idea was transferred to Kripke semantics by H. de Swart.

Para o fragmento positivo da lógica intuicionista (sem negações e sem $\perp$) os modelos falíveis coincidem com modelos ordinários, e resultados avançados nessa direção foram propostos por Friedman no sentido de se pensar uma base menos insegura para a matemática (veja [Tro91]).

> For the fragment of intuitionistic logic without falsehood and negations, falible models are just ordinary models. For minimal logic, where $\perp$ is regarded as an arbitrary unprovable proposition letter, one has intuitionistic completeness relative to ordinary Beth models. The best results in this direction can be obtained from work by H. Friedman.

Partindo de um tratamento dos fragmentos implicativos positivos da lógica proposicional estudadas por Henkin em [Hen49], a idéia de "tablôs sem refutação" foi proposta em Barrero e Carnielli em [BC06], com conseqüências interessantes para o tratamento de questões aparentemente intransponíveis como o Paradoxo de Curry.

Considerando que o conceito de inconsistência parece sempre incluir algum tipo de negação (pelo menos assim argumentam Carnielli e Marcos em [CM02], p. 17–32), o Paradoxo de Curry nos defronta com uma situação de "trivialização" direta e não de "inconsistência"; dessa forma, a par da noção de paraconsistência, a noção de "paratrivialidade" foi introduzida em Barrero e Carnielli [BC06] para designar a propriedade de certos sistemas de lógica de controlar as condições que produziriam a trivialidade dedutiva, em lógicas sem negação.

Dessa forma, as lógicas que combinam (multi)modalidades anódicas e catódicas incluem amplas classes de sistemas paraconsistentes e paratriviais, estendendo a classe das lógicas da inconsistência formal. Apesar de neste trabalho somente nos dedicarmos à questão do conceito de paraconsistência que ocorre ligado às lógicas multimodais catódicas, a investigação que se fará a respeito das lógicas anódicas serve como uma utilíssima preparação para o estudo da questão paratrivialidade – estudo esse que deixamos para o futuro e para futuros interessados.

Celani e Jansana, em [CJ97], propõem uma nova semântica para a lógica modal "positiva" com operadores $\wedge$, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$, $\top$ e $\bot$.[5] Sua proposta usa enquadramentos de Kripke contendo uma quase-ordem $\leq$ no conjunto de mundos possíveis e uma relação de acessibilidade binária $\boldsymbol{R}$, que se conecta com a quase-ordem a partir de um par de condições. A quase-ordem é usada para definir uma valoração que os autores chamam de *increasing valuation*. A justificativa apresentada é que esse tipo de semântica tem vantagens sobre uma outra semântica anterior dada por Dunn em [Dun95], e ainda, segundo os autores, pode ser estendida para outros sistemas.

A principal crítica à semântica de Dunn, que é uma semântica de Kripke usual, consiste no argumento de que esta se comporta mal, apesar de Dunn investigar sistemas estritamente "afirmativos" contendo $\wedge$, $\vee$, $\Box$ e $\Diamond$, tanto quanto sistemas ditos positivos contendo adicionalmente $\top$ e $\bot$. O alegado mal-comportamento se dá pelo fato de que, se adicionarmos o sequente (ou

[5] A presença do $\bot$ na assinatura não implica, necessariamente, que o sistema não seja positivo. Para o sistema perder seu caráter positivo é necessário que se defina uma negação a partir do $\bot$.

princípio) da forma $\Box\varphi \vdash \Box\Box\varphi$ a seus sistemas, obtém-se uma incompletude na classe dos enquadramentos, conforme argumentam os autores em [CJ97]:

> "His semantics has a shortcoming that, for example, if one adds $\Box\varphi \vdash \Box\Box\varphi$ to his basic system, one obtains a system that is frame incomplete: $\Diamond\Diamond p \vdash \Diamond p$ is valid in all the frames where $\Box p \vdash \Box\Box p$ is valid but is not deducible in the system."

Segundo Celani e Jansana em [CJ97], tal incompletude ressalta uma conexão indesejada entre $\Diamond$ e $\Box$ na semântica de Dunn, uma vez que esta refere-se a sistemas modais positivos.

> "This is not a good feature. It seems that the semantics must reflect the fact that without negation the consequence pairs schemes $\Diamond\Diamond\varphi \vdash \Diamond\varphi$ and $\Box\varphi \vdash \Box\Box\varphi$ are no longer dependent on each other."

A semântica que apresentamos aqui é completamente distinta da de Celani e Jansana (e, de resto, distinta da de Dunn), como amplamente discutido no Capítulo 2.

Iniciamos o primeiro capítulo com um breve levantamento histórico acerca das lógicas modais com a intenção de situar o leitor do ambiente sobre o qual discorremos. Nosso objetivo é introduzir os sistemas monomodais anódicos $\mathbf{K}^{\supset}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ que são obtidos a partir de fragmentos do cálculo proposicional clássico **PC**. Mostramos como tais sistemas podem ser caracterizados por meio de semânticas de Kripke.

O Capítulo 2 continua investigando a questão dos sistemas anódicos, mas a partir de linguagens mais ricas: os chamados sistemas bi-modais anódicos. Primeiramente estudamos a caracterização do sistema bi-modal anódico $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$. Esse sistema, aqui introduzido, vai servir de base para uma classe de infinitas lógicas bi-modais anódicas, obtidas pelo acréscimo de instâncias do esquema de axiomas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$. A estratégia da demonstração de completude é uma modificação sutil dos chamados "métodos de Henkin" através de modelos canônicos, reestruturando os argumentos de Lemmon e Scott em [LS77]. Abordamos também a questão da incompletude, no âmbito das lógicas bi-modais anódicas (sem negação), obtendo, assim, um resultado original de incompletude sem negação.

O Capítulo 3 investiga o comportamento dos sistemas modais relativamente a certas classes de *negações fracas*, isto é, negações que compartilham grande parte das propriedades da negação clássica, mas não causam a "explosão dedutiva" quando submetidas a uma contradição. A estratégia será adicionar, às hieraquias de sistemas bi-modais anódicos, axiomas que se referem à negação paraconsistente, obtendo, dessa forma as novas hierarquias catódicas $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$. Mostramos que tais classes são caracterizadas por meio de modelos de Kripke e finalizamos com um resultado de incompletude referente à classe $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$.

No Capítulo 4 introduzimos o novo conceito de *semântica modal de traduções possíveis*, baseada na proposta de Carnielli em [Car90] das *semânticas de traduções possíveis*, e mostramos como os sistemas catódicos podem também ser caracterizados por essa nova semântica.

O Capítulo 5 dedica-se às multimodalidades anódicas e catódicas. De alguma forma, certas distinções de Aristóteles entre diferentes tipos de necessidade poderiam ser consideradas como combinações entre tempo e modalidades aléticas, e fazem pensar que a lógica modal já tenha nascido multimodal, e que tenha tardiamente descoberto sua verdadeira personalidade.

Nosso objetivo, nesse capítulo, é generalizar os sistemas anódicos e catódicos estudados no Capítulo 2 e Capítulo 3, respectivamente, para classes de sistemas multimodais. Mostramos como se pode obter teoremas gerais de completude para sistemas multimodais anódicos e catódicos enfatizando o método para o caso dos sistemas basilares, resultados gerais que generalizam todos os obtidos nos capítulos anteriores.

Finalmente, discutimos num último capítulo como vários desses resultados podem influenciar o discurso filosófico e alterar a perspectiva sobre certos paradoxos e outras perplexidades modais.

1. LÓGICAS MONOMODAIS ANÓDICAS

Nosso propósito, neste capítulo, é apresentar de modo informal alguns resultados relevantes em lógica modal, procurando enfatizar seu caráter histórico para servir como motivação para a estrutura do trabalho. Dessa forma, focamos a atenção em dois sistemas anódicos, $\mathbf{K}^{\supset}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$, extensões modais respectivas dos fragmentos $\mathbf{PC}^{\supset}$ e $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$ de $\mathbf{PC}$ (cálculo proposicional clássico).

Não se desviando do tema central da Tese – investigar o comportamento da negação no escopo das lógicas modais – o presente capítulo concentra esforços em dois sistemas *monomodais* (sistemas que incorporam à linguagem um único operador modal, no presente caso o "operador de necessidade"[1] $\Box$) que irão servir de base para a construção de uma hierarquia de sistemas anódicos *bi-modais* (sistemas com dois operadores modais primitivos na linguagem) os quais investigaremos no Capítulo 2.

Todos os resultados e definições padrão em lógica modal convenientes para uma leitura confortável do material apresentado serão elencados neste capítulo, a fim de tornar o trabalho tanto quanto possível auto-contido. As demonstrações que aparecem no corpo do trabalho são originais ou consistem em soluções de exercícios que eventualmente foram deixados para o leitor em livros e artigos mencionados nas referências, e que serão úteis aqui.

Como ponto de partida para a apresentação dos resultados conhecidos na literatura, escolhemos os sistemas propostos por Lewis e Langford, em [LL32], como uma solução para os paradoxos relacionados com a implicação material. Nossa atenção está focada nos sistemas modais normais, ou seja,

[1] Existem outras interpretações para o operador modal $\Box$, como por exemplo "obrigatório" (no caso de sistemas deônticos) e "demonstrável" (no caso da lógica da demonstrabilidade).

sistemas que têm entre seus axiomas o conhecido axioma modal (**K**) que governa a distribuição da modalidade $\Box$ com relação à implicação, ao qual damos o nome de *axioma da distribuição*, e da regra de necessitação, a qual denotamos por (**Nec**). Neste capítulo consideramos apenas as extensões modais normais, adicionando ao sistema em questão (**K**) e (**Nec**), à qual denominamos de *extensão modal minimal*.

Buscamos, de forma sistemática, obter resultados de completude para cada sistema modal desprovido de negação. A idéia central na direção da obtenção de tais provas consiste em tomar como base a noção maximal de não-trivialidade dedutiva, ao invés da noção de consistência maximal.

Embora detalhemos a prova de completude apenas para as duas extensões modais minimais anódicas de $\mathbf{PC}^{\supset}$ e $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$ através de (**K**) e (**Nec**), com a mesma metodologia podem-se obter resultados de completude através de (**K**) e (**Nec**) também para outros sistemas, por exemplo, para os sistemas catódicos que apresentamos no Capítulo 3. Não o fazemos aqui por se tratar de extensões elementares e dotadas, a nosso ver, de pouco interesse filosófico. Nosso objetivo é tratar de sistemas que apresentam na linguagem os dois operadores modais, de necessidade e o de possibilidade. A extensão modal com (**K**) e (**Nec**) é considerada aqui apenas com o intuito de apontar as dificuldades técnicas e conceituais envolvidas.

1.1 Os sistemas modais usuais

Aristóteles, nos *Analytica Priora* e no *De Interpretatione* [Ari52c] apresenta pela primeira vez um estudo envolvendo as modalidades "possível" e "necessário". Suas indagações envolviam o acréscimo de modalidades em sentenças do tipo *assertórica* (sentenças declarativas gerais puras), e com isso gerando as chamadas sentenças *apodíticas* (sentenças que envolvem a modalidade "necessário"), e as *problemáticas* (sentenças que envolvem a modalidade "possível"). Seu objetivo consistia em adaptar a *Teoria dos Silogismos* às sentenças modalizadas, mas segundo William Kneale e Martha Kneale em [KK91] o silogismo modal de Aristóteles é tido como incompleto e pouco satisfatório:

> "A teoria aristotélica do silogismo modal é geralmente reconhecida como sendo confusa e insatisfatória e conjecturou-se que se trata de um trabalho tardio e inacabado inserido nos *Primeiros Analíticos* bastante depois de o resto da obra estar completa."

A dificuldade encontrada por Aristóteles no tratamento dos silogismos modais pode ser explicada (ou pelo menos a crítica pode ser atenuada) pela inexistência de uma lógica proposicional desenvolvida, além de não haver ainda uma notação adequada.

Podemos defender que o estudo da lógica modal no período antigo consistia em um estudo mais que tudo linguístico: as preocupações estavam restritas ao campo do discurso, e visavam evitar que sentenças falsas fossem obtidas a partir de sentenças verdadeiras por meio de leis silogísticas.

Frege em seu *Begriffsschrift* [Fre79] não aceitava que proposições modais estivessem dentro do escopo das proposições estudadas em lógica. O interesse pela lógica modal ressurgiu em 1918 com o trabalho de Lewis em seu livro *Survey of Symbolic Logic*, no qual o autor buscava evitar os paradoxos relacionados à implicação material (veja [Lew18]). Mesmo com seu particular interesse dedicado às modalidades, Lewis não é considerado o pioneiro no tratamento do raciocínio modal, conforme argumentam Blackburn, de Rijke e Venema em [BdRV02]:

> "Lewis was certainly not the first to consider modal reasoning, indeed he was not even the first to construct symbolic systems for this purpose: Hugh MacColl, who explored the consequences of enriching propositional logic with operators δ ("it is certain that") and η ("it is impossible that") seems to have been the first to do that."

Em 1932, o trabalho de Lewis reapareceu numa forma mais elaborada e foi publicado em co-autoria com Langford. O livro intitulado *Symbolic Logic* (veja [LL32]) é considerado por muitos autores como um marco inicial no estudo da Lógica Modal contemporânea. Nesse livro o símbolo $\Diamond$ (com significado de "é possível que") aparece na literatura pela primeira vez como um símbolo primitivo. Dessa forma, o operador I (que significa "é impossível que") e que havia sido introduzido em [Lew18] passa a ser escrito como $\sim\Diamond$.

Com essa nova notação a implicação estrita (denotada por $\prec$), com sentido de "é impossível que o antecedente da implicação seja verdadeiro e o consequente seja falso", pode ser melhor formalizada. Na nova apresentação do trabalho de Lewis a implicação de $\varphi \prec \psi$ passa a ser definida como $\sim\Diamond(\varphi \wedge \sim\psi)$.

Nos cinco sistemas, **S1–S5**, que aparecem no livro *Symbolic Logic*, a atenção está voltada para os paradoxos relacionados à implicação material: para Lewis duas leis universalmente aceitas são bastante criticáveis: o fato de uma "proposição falsa" implicar qualquer proposição, e de uma "proposição verdadeira" ser implicada por qualquer proposição constituem para ele um paradoxo. Para contornar essa questão Lewis sustenta que a implicação estrita pode evitar esse tipo de situação, uma vez que uma proposição implica estritamente outra se, e somente se, é *impossível* que a primeira seja verdadeira e a segunda falsa. Esse tipo de tratamento está inteiramente fundado nas modalidades, de tal forma que leis que afetam as modalidades irão afetar a implicação estrita.

Embora os sistemas **S1–S5** tenham sido tratados formalmente, isto é, por meio de axiomas e regras, resultados como o de completude não foram obtidos para esses sistemas. A busca por tais resultados teve um papel propulsor essencial no desenvolvimento da Lógica Modal, e devido à sua flexibilidade e maleabilidade em expressar noções tão díspares como necessidade, obrigatoriedade, conhecimento, crença, demonstrabilidade, temporalidade e fluxo de informação e mesmo execução de programas, surgiram vários ramos do conhecimento especializados na pesquisa em modalidades com especificidades em Filosofia, Fundamentos da Matemática, Ciência da Computação, Ciência Cognitiva e Linguística.

Podemos dizer que o presente trabalho tem potencialidade para transitar entre as três primeiras áreas acima: quando a Lógica Modal elucida, ou mesmo pretende resolver certos paradoxos modais, pode-se dizer que a investigação passa por um viés *filosófico*; a busca por uma interpretação algébrica para as lógicas modais conduz a uma investigação de caráter um tanto mais *matemático*; por fim, o tratamento por meio de tablôs poderia ser também de interesse *computacional*; não nos preocupamos, contudo, com especificidades de tais questões.

Depois de Lewis e Langford o interesse investigativo envolvendo as lógicas modais passou a seguir uma linha mais matemática, liderada por Jónson, Tarski, Lemmon, McKinsey entre outros.

1.2 As bases formais das modalidades

Definimos os sistemas modais sobre uma *linguagem proposicional* que consiste numa classe de *variáveis proposicionais* e uma *assinatura* (conjunto Σ de conectivos assumidos como primitivos na linguagem), à qual acrescentamos um ou mais operadores modais, que usualmente denotamos por $\Box$ ou variações desse símbolo. Chamamos a essa nova assinatura de *linguagem proposicional modal.* A cada interpretação dada aos operadores modais da linguagem proposicional modal tem-se uma nova lógica modal, e esse novo sistema é regido pelos axiomas que são assumidos de acordo com a interpretação adotada ou pretendida. Exemplos de alguns sistemas são os seguintes:

Sistema	Interpretação do $\Box$	Axioma
K	"demonstrável em **K** que"	$\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$
KT	"é necessário que"	$\Box p \supset p$
KD	"é obrigatório que"	$\Box p \supset {\sim}\Box{\sim}p$
KGL	"é demonstrável na Aritmética que"	$\Box(\Box p \supset p) \supset \Box p$

O nome dado aos sistemas segue a seguinte convenção: **K** indica o axioma de distribuição da modalidade $\Box$, comum a todos os sistemas normais, seguido do nome dos axiomas modais característicos daquele sistema. Na literatura muitos autores optam por excluir a letra **K** do nome do sistema, mas a convenção que adotamos aqui é a mesma considerada em [CP08][2]. Por exemplo, o nome do axioma que caracteriza a lógica da demonstrabilidade da aritmética **KGL**, isto é (**GL**) (veja Carnielli e Pizzi em [CP08]) tem

[2] Essa é a versão em língua inglesa de "Modalità e Multimodalità" (veja [CP01]). Além de uma leitura crítica desse material, a digitação e a tradução foram feitas com a minha colaboração.

intenção de homenagear Gödel e Löb; Gödel, proponente de um sistema modal que expressa a questão da indemonstrabilidade da consistência da aritmética e Löb, porque apresentou uma formulação mais simples para o sistema de Gödel, atendendo a uma questão proposta por Henkin (veja Boolos em [Boo93]).

Denotamos o conjunto das variáveis proposicionais $\{p, q, r, \cdots\}$ por Var. Os elementos desse conjunto são chamados *fórmulas atômicas*, e o conjunto das *fórmulas bem formadas* (fbfs) é definido recursivamente do modo padrão, acrescido da seguinte cláusula:

- Se α é uma fbf, então $\Box\alpha$ também é uma fbf.

No decorrer do texto nos referimos às fbfs simplesmente por fórmulas. Os símbolos que podem ser definidos na linguagem são os usuais, acrescentando-se o operador modal $\Diamond$, definido como:

$$\Diamond\alpha \stackrel{\text{Def}}{=} {\sim}\Box{\sim}\alpha$$

O conjunto das fómulas é denotado por For, e quando necessário escrevemos $For_{\mathbf{S}}$ para indicar o nome do sistema **S** ao qual estamos nos referindo. Seja $\Gamma \cup \alpha \subseteq For$ e $\vdash \subseteq \wp(For) \times For$ uma relação de conseqüência, em que $\wp(For)$ indica o conjunto das partes de For. A relação de conseqüência é chamada *tarskiana* quando $\vdash$ é (pelo menos) reflexiva, monotônica e transitiva. Muitas vezes é conveniente levar em consideração operadores de conseqüência que são também finitários e estruturais (no sentido em que admitem substituição). Não explicitamos tais propriedades por se tratar de conceitos básicos em lógica dos quais assumimos familiaridade. Neste trabalho, em particular, assumimos que a relação de conseqüência é finitária e estrutural.

Os sistemas modais mantêm um alto interesse filosófico devido às suas diversas interpretações. Os trabalhos de Lewis e Langford, como comentado, estavam direcionados para uma abordagem mais analítica da argumentação, que buscava atacar problemas relacionados com os paradoxos da implicação material. O problema de encontrar uma interpretação semântica que fosse capaz de caracterizar os sistemas modais permaneceu em aberto por décadas. A proposta do topólogo Dugundji[3] de 1940, veja [Dug40], foi uma primeira resposta nessa direção. Por muito tempo se acreditou que os sistemas modais pudessem ser caracterizados por matrizes multivalentes finitas, porém o resultado de Djundji mostrou justamente o contrário: "Nenhum sistema modal pode ser caracterizado por matrizes finitas"[4]. Esse resultado sinalizou a importância de se estabelecer semânticas específicas para as lógicas modais.

O primeiro sistema contemplado com um resultado de completude foi o sistema **S5** de Lewis e Langford.[5] Carnap, inspirado pelo conceito dos mundos possíveis de Leibniz, propôs que se interpretasse a verdade de uma sentença do tipo $\Box\alpha$ como sendo "verdadeira em todos os mundos possíveis", e dessa forma obteve em 1947 um resultado de completude para **S5** (veja [Car47]). Quanto realmente leibniziano seja essa proposta é ainda uma questão debatida na literatura, mas comentaremos sobre isso mais adiante.

Para Carnap, um modelo para a lógica modal consiste em um par formado por um conjunto W de assim chamados "mundos possíveis" e uma valoração $V : Var \longrightarrow \wp(W)$, onde $V(p)$ indica o conjunto daqueles mundos nos quais a variável p é verdadeira. Esse modelo permite que se obtenha facilmente uma demonstração da completude para **S5** (com relação a tais modelos). Contudo, o problema da completude para os subsistemas de **S5** ainda não estava resolvido, e era muito mais complicado do que se pensava.

Kripke em 1959, aos dezesseis anos de idade, foi quem resolveu definitivamente o problema da interpretação semântica adequada para as lógicas modais. Generalizando de maneira profunda a solução de Carnap, Kripke

[3] Autor de um texto clássico em topologia *Topology*, [Dug66].

[4] Gödel foi o pioneiro no uso de matrizes infinitárias para mostrar que a lógica intuicionista não pode ser caracterizada por semânticas multivalentes finitárias (veja [Göd32]). O resultado de Dugundji parece ter sido inspirado nas idéias de Gödel.

[5] Como é padrão em lógica modal, **S5** estende a lógica clássica e pode ser caracterizado adicionando-se aos axiomas de **PC** os seguintes axiomas e regras modais:

(K)	$\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$
(T)	$\Box p \supset p$
(B)	$p \supset \Box\Diamond p$
(4)	$\Box p \supset \Box\Box p$
(Nec)	$\vdash \alpha$ implica $\vdash \Box\alpha$

propôs em [Kri59] os chamados *modelos relacionais*. Primeiramente devemos escolher um *mundo de referência* e a partir daí interpretamos uma sentença $\Box\alpha$ como verdadeira nesse mundo de referência quando a subfórmula α for verdadeira em *todos* os mundos com os quais o mundo de referência se relaciona. O ponto central dessa abordagem é precisamente o relacionamento entre os mundos, expresso por meio das *relações de acessibilidade*. Na verdade, essa maneira como se selecionam os mundos "visíveis" a partir do mundo de referência é revolucionária, e uma grande parte do estudo das lógicas modais está ligada a compreender, catalogar ou caracterizar propriedades de tais relações.

Deve-se registrar aqui que, embora certamente Leibniz nunca tenha se referido à questão da relação de acessibilidade, essencial para o desenvolvimento das lógicas modais pós-Kripke, de fato o sistema **S5** não necessita de relações de acessibilidade (ou alternativamente, pode ser caraterizado pela relação total). Desse modo, pode-se defender que de fato o enfoque de Carnap (mas não o de Kripke) é leibniziano.

Dentro dessa nova perspectiva torna-se plausível intuir o que seja um subsistema de **S5**. No artigo de 1959, Kripke demonstrou um resultado de completude para os sistemas **KT**, **S4** e **S5**. Nesse novo tipo de modelo a relação entre os mundos dos modelos para **S5** consiste de uma relação total, isto é $R = W \times W$. Para os subsistemas **KT** e **S4** é imposto que a relação entre os mundos seja restringida por meio de condições específicas, descritas numa linguagem algébrica, como veremos adiante. Dessa forma podemos especificar o que significa ser um subsistema de **S5**.

Para uma definição formal de um modelo relacional, primeiramente definimos o conceito de *enquadramento* (estrutura relacional), no qual os modelos relacionais são baseados.

Definição 1.2.1. *Um enquadramento $\mathfrak{F}$ é um par $\langle W, R\rangle$, cuja primeira componente é um conjunto não-vazio chamado* universo (ou domínio) *de $\mathfrak{F}$ e cuja segunda componente R é uma relação binária entre os elementos de W.*

Podemos interpretar os elementos de W, além de *mundos*, como *pontos*, *estados*, *nós*, *instantes*, etc. Essa escolha não é desprovida de relevância: podemos defender que Carnap, ao se referir aos "mundos possíveis" de Leibniz, pode ter dado um grande impulso na direção da aproximação da modalidade de questões de fundo filosófico. Tivesse Carnap interpretado a verdade de uma sentença $\Box\alpha$ através da noção de "nós em um grafo", é possível que a importância da lógica modal tivesse passado despercebida aos filósofos, ou tardasse a ser apreciada. Por outro lado, a expressão "mundos possíveis" parece por vezes incendiar a imaginação de alguns filósofos.

O que irá diferenciar um enquadramento de outro será a maneira como os elementos de W se relacionam. Isso é expresso através de restrições à relação R. São exemplos de estruturas relacionais as *ordens relacionais estritas*, *ordens lineares*, *ordens totais* entre outras[6].

Um *modelo relacional* $\mathfrak{M}$ para uma determinada linguagem modal é definido a partir de um enquadramento $\mathfrak{F}$ para essa linguagem, equipando tal estrutura relacional com uma valoração V atribuindo para cada variável proposicional $p \in Var$ um conjunto de mundos $V(p) \in \wp(W)$. É bom salientar que as noções apresentadas nesta seção têm um caráter um tanto informal, já que visamos colocar em linhas gerais alguns conceitos a respeito das lógicas modais que serão depois adaptados no decorrer da Tese para sistemas particulares. Por exemplo, uma definição formal de modelo relacional aparece na Definição 1.4.1.

É importante ressaltar que, para a obtenção do resultado de completude para os sitemas modais com respeito aos modelos relacionais, é necessário demonstrar que existe uma conexão entre as propriedades da relação de acessibilidade entre os mundos e os axiomas de cada sistema. Considere os seguintes exemplos:

[6] Para um detalhamento sobre exemplos de estruturas relacionais veja, por exemplo, capítulo 1 de [BdRV02] de Blackburn, de Rijke e Venema.

Sistema	Axioma	Propriedade de R	
K	$\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$		Arbitrária
KT	$\Box p \supset p$	$\forall w(wRw)$	Reflexiva
KD	$\Box p \supset \Diamond p$	$\forall w \exists w'(wRw')$	Serial
KB	$p \supset \Box\Diamond p$	$\forall ww'(wRw' \supset w'Rw)$	Simétrica

Para concluir a construção do modelo relacional falta explicitar as noções de satisfatibilidade e validade em um modelo relacional $\mathfrak{M}$. Uma fórmula α é dita ser *satisfeita* no modelo $\langle W, R, V\rangle$ se $V(\alpha) \neq \emptyset$; e é *válida* nesse modelo se $V(\alpha) = W$. Dado que os modelos são baseados em enquadramentos, então os conceitos de satisfatibilidade e validade nos enquadramentos reduzem-se aos dos modelos. Uma fórmula α é *satisfeita* no enquadramento $\mathfrak{F}$ se existe um modelo sobre esse enquadramento que satisfaz α, e *válida* no enquadramento se todo modelo sobre $\mathfrak{F}$ valida α. Dizemos que $\mathfrak{F}$ é um *enquadramento para* o sistema **S** se todo teorema de **S** é válido em $\mathfrak{F}$.

Um aspecto bastante intrigante em lógica modal é a questão da completude. É comum que um mesmo sistema seja caracterizado por diferentes classes de estruturas – tal é o caso do sistema **S5**, que como vimos é caracterizado tanto com relação aos modelos de Carnap quanto em relação aos modelos relacionais de Kripke. No entanto há quem defenda que a noção de completude com relação a modelos seja uma noção trivial, no sentido de que todo sistema modal pode ser caracterizado com relação a uma certa classe de modelos, conforme Carnielli e Pizzi em [CP08] afirmam:

> "... each system **S** is trivially complete with respect to at least a class of models, to wit, the class of models for **S**."

Já com relação aos enquadramentos a situação é diferente: essa acepção permite que se obtenha resultados de incompletude para alguns sistemas modais, ou seja, evidencia que tal noção de completude é de fato não-trivial. Portanto julgamos mais conveniente tratar a noção de completude enquanto relativa a classes de enquadramentos e não a de modelos.

Podemos dizer que a maior parte dos argumentos de completude para os sistemas modais segue o método proposto por Henkin para a completude da lógica quantificacional (veja [Hen96]), que ficou conhecido como "método de Henkin" – o qual é um eficiente método não-construtivo que emprega o Lema de Lindenbaum (e portanto uma forma do Axioma da Escolha) para obter os chamados *conjuntos consistentes maximais* e, construir, a partir daí, o *modelo canônico*. Existem porém sitemas que têm à disposição demonstrações de completude construtiva, as quais podem ser obtidas, por exemplo, a partir de tablôs. Embora tais demonstrações não sejam de nosso interesse, lembramos que uma discussão breve sobre esse tema aparece em [CP08], capítulo 4.

1.3 Lógicas modais anódicas

Um sistema lógico proposicional é classificado como *positivo* quando se exclui da linguagem do sistema o conectivo de negação e os axiomas que envolvem negação. Chamamos de *anódicas* as lógicas positivas estendidas com operadores modais. Nosso interesse é verificar que propriedades esse sistema é capaz de manter, sendo desprovido de negação. O principal objetivo ao partir de um sistema deficiente de negação é num segundo momento poder acrescentar ao sistema negações com distintos graus de expressividade, às quais chamamos de "elementos catódicos". Tal efeito pode ser obtido tomando como base as lógicas paraconsistentes chamadas lógicas da inconsistência formal (LFIs) introduzidas por Carnielli e Marcos em [CM02] e posteriormente desenvolvidas por Carnielli, Coniglio e Marcos em [CCM07]. O fato é que tais negações, chamadas de *negações fracas*, são negações subclássicas. Nosso objetivo é investigar o papel da negação dentro dos sistemas modais através da reconstrução de resultados clássicos nos chamados sistemas catódicos, que são precisamente sistemas modais anódicos munidos de algum tipo de negação fraca.

A notação $\alpha[p/\beta]$ será usada para expressar a substituição de cada ocorrência da variável p em α pela fórmula β.

Considere $\mathbf{PC}^{\supset}$, o fragmento implicativo do cálculo proposicional clássico $\mathbf{PC}$, como a lógica positiva de base que tem como único conectivo a implicação material ($\supset$). Os axiomas e regras que governam esse sistema são:

(**A1**) $p \supset (q \supset p)$

(**A2**) $(p \supset q) \supset [(p \supset (q \supset r)) \supset (p \supset r)]$

(**A3**) $(p \supset r) \supset [((p \supset q) \supset r) \supset r]$

(**MP**) α, $\alpha \supset \beta$ implica β

(**US**) $\vdash \alpha$ implica $\vdash \alpha[p/\beta]$

Definição 1.3.1. *Seja Γ um conjunto de fórmulas. A dedução de uma fórmula α a partir de Γ (notação: $\Gamma \vdash \alpha$) em um sistema dedutivo **S** consiste de uma seqüência finita $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, onde α é α_n e cada α_i $(1 \leq i \leq n)$ satisfaz uma das seguintes cláusulas:*
*(i) α_i é um axioma de **S**;*
(ii) $\alpha_i \in \Gamma$;
*(iii) α_i é derivada a partir de fórmulas precedentes por meio da aplicação de uma das regras de inferência do sistema **S**.*

Note que vale em $\mathbf{PC}^{\supset}$ o *Metateorema da Dedução*, ou simplesmente *Teorema da Dedução*. A prova é feita por indução no comprimento da dedução. O argumento pode ser refeito dado que temos a disposição os axiomas (**A1**) e (**A2**) e a regra (**MP**). O caso não usual é a regra (**US**); é válido, usando a hipótese de indução e instância do axioma (**A1**). Detalhes do argumento podem ser encontrado em [CP08], proposição 1.2.5.

Também não é difícil de ver que $\alpha \supset \alpha$ é um teorema de $\mathbf{PC}^{\supset}$ em face aos axiomas (**A1**) e (**A2**). Conseqüentemente, $\alpha \supset \alpha$ será teorema de toda extensão de $\mathbf{PC}^{\supset}$.

Em $\mathbf{PC}^{\supset}$, definimos o conectivo de disjunção ($\vee$) como:

$$(\alpha \vee \beta) \overset{\text{Def}}{=} (\alpha \supset \beta) \supset \beta$$

A partir da definição acima os resultados do Teorema 1.3.2 mostram quanto apta é a definição da disjunção que estamos adotando, e que estabelecem propriedades que serão úteis no decorrer da Tese:

Teorema 1.3.2. *As seguintes propriedades são demonstráveis em* $\boldsymbol{PC}^{\supset}$*:*
(i) $p \supset [p \vee q]$
(ii) $q \supset [p \vee q]$
(iii) $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$
(iv) $(p \supset r) \supset [(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r)]$
(v) $p \vee (p \supset q)$
(vi) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
(vii) $[p \vee (q \vee r)] \supset [(p \vee q) \vee r]$
(viii) $[(p \vee q) \vee r] \supset [p \vee (q \vee r)]$

Demonstração. Usando a definição, acima, devemos mostrar o seguinte:
(i) $p \supset [(p \supset q) \supset q]$. Uso direto do Teorema da Dedução.
(ii) $q \supset [(p \supset q) \supset q]$: Instância do axioma (**A1**).
(iii) $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

1.	$p \supset q$	[Hip.]
2.	$q \supset r$	[Hip.]
3.	$(p \supset q) \supset \{[p \supset (q \supset r)] \supset (p \supset r)\}$	[(**A2**)]
4.	$[p \supset (q \supset r)] \supset (p \supset r)$	[(**MP**) em 1 e 3]
5.	$(q \supset r) \supset [p \supset (q \supset r)]$	[(**A1**)]
6.	$p \supset (q \supset r)$	[(**MP**) em 5 e 2]
7.	$(p \supset r)$	[(**MP**) em 6 e 4]

(iv) $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ([(p \supset q) \supset q] \supset r))$

1.	$p \supset r$	[Hip.]
2.	$q \supset r$	[Hip.]
3.	$(p \supset q) \supset q$	[Hip.]
4.	$(p \supset q) \supset r$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 3 e 2]
5.	$(p \supset r) \supset [((p \supset q) \supset r) \supset r]$	[(**A3**)]
6.	$((p \supset q) \supset r) \supset r$	[(**MP**) em 1 e 5]
7.	r	[(**MP**) em 4 e 6]

(v) $[p \supset (p \supset q)] \supset (p \supset q)$

1.	$p \supset (p \supset q)$	[Hip.]
2.	$p \supset [(p \supset q) \supset q]$	[Teo. 1.3.2 (i)]
3.	$p \supset (p \supset q) \supset [p \supset [(p \supset q) \supset q] \supset (p \supset q)]$	[(**A2**)]
4.	$p \supset [(p \supset q) \supset q] \supset (p \supset q)$	[(**MP**) em 1 e 3]
5.	$p \supset q$	[(**MP**) em 2 e 4]

(vi) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

1.	$p \supset (q \vee p)$	[Teo. 1.3.2 (ii)]
2.	$q \supset (q \vee p)$	[Teo. 1.3.2 (i)]
3.	$(p \vee q) \supset (q \vee p)$	[Teo. 1.3.2 (v) em 1 e 2]

(vii) $[p \vee (q \vee r)] \supset [(p \vee q) \vee r]$

1.	$p \supset (p \vee q)$	[Teo. 1.3.2 (i)]
2.	$(p \vee q) \supset [(p \vee q) \vee r)]$	[Teo. 1.3.2 (i)]
3.	$p \supset [(p \vee q) \vee r]$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 1 e 2]
4.	$q \supset [(p \vee q) \vee r]$	[Análogo de 1-3]
5.	$r \supset [(p \vee q) \vee r]$	[Teo. 1.3.2 (ii)]
6.	$(q \vee r) \supset [(p \vee q) \vee r]$	[Teo. 1.3.2 (iv) em 4 e 5]
7.	$p \vee (q \vee r) \supset [(p \vee q) \vee r]$	[Teo. 1.3.2 (iv) em 3 e 6]

(viii) $[(p \vee q) \vee r] \supset [p \vee (q \vee r)]$

1.	$q \supset (q \vee r)$	[Teo. 1.3.2 (i)]
2.	$r \supset (q \vee r)$	[Teo. 1.3.2 (ii)]
3.	$p \supset [p \vee (q \vee r)]$	[Teo. 1.3.2 (i)]
4.	$(q \vee r) \supset [p \vee (q \vee r)]$	[Teo. 1.3.2 (ii)]
5.	$r \supset [p \vee (q \vee r)]$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 2 e 4]
6.	$q \supset [p \vee (q \vee r)]$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 1 e 4]
7.	$(p \vee q) \supset [p \vee (q \vee r)]$	[Teo. 1.3.2 (iv) em 3 e 6]
8.	$(p \vee q) \vee r \supset [p \vee (q \vee r)]$	[Teo. 1.3.2 (iv) em 7 e 5]

$\square$

A completude construtiva para $\mathbf{PC}^{\supset}$ com relação às valorações proposicionais para a implicação pode ser encontrada no artigo de 1949 de Henkin em [Hen49]. Embora (**US**) não seja considerada como regra de inferência no sistema original de Henkin, o acréscimo de tal regra não influencia nos argumentos para a prova de completude pelo fato de que o Teorema da Dedução, como vimos, continua sendo um resultado válido no sistema.

A prova da completude para $\mathbf{PC}^{\supset}$, apresentada em [Hen49], faz uso de uma estratégia muito parecida com a demonstração da completude construtiva de Kalmár para o cálculo proposicional clássico. O próprio Henkin não tinha atentado para esse fato, de acordo com palavras dele próprio em uma nota de rodapé em [Hen49]:

> "The author wishes to thank Prof. Church for bringing Kalmár's paper to his attention after an earlier version of the present paper had been submitted."

Antes de adornar $\mathbf{PC}^{\supset}$ com operadores modais, vamos introduzir um outro sistema positivo acrescentando o conectivo de conjunção ($\wedge$) à linguagem do sistema de Henkin - tal sistema também será acrescido de operadores modais. Nos capítulos subseqüentes empregaremos esses sistemas modais positivos, chamados anódicos, para estabelecer uma conexão com os sistemas modais usuais por intermédio das lógicas da inconsistência formal.

Seja $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$ o sistema positivo obtido por acrescentar o conectivo de conjunção ($\wedge$) à assinatura de $\mathbf{PC}^{\supset}$. O conjunto das fórmulas de $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$ pode ser obtido acrescentando-se às cláusulas de formação do conjunto das fórmulas de $\mathbf{PC}^{\supset}$ a seguinte cláusula:

- Se α e β são fórmulas, então $\alpha \wedge \beta$ é fórmula.

Os axiomas e regras de $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$ são os de $\mathbf{PC}^{\supset}$ acrescido dos seguintes:

(**A4**) $p \supset (q \supset (p \wedge q))$

(**A5**) $(p \wedge q) \supset p$

(**A6**) $(p \wedge q) \supset q$

Em [Hen49], Henkin propôs um outro conjunto de axiomas[7] para estender $\mathbf{PC}^{\supset}$ e conjecturou que esse conjunto de axiomas fosse correto e completo. Barrero, em sua Dissertação de Mestrado (veja [Bar04]), mostrou que a conjectura de Henkin estava correta. Propusemos um outro conjunto de axiomas para estender $\mathbf{PC}^{\supset}$, mesmo sabendo de antemão que tal sempre é possível. De fato, nas primeiras linhas de seu artigo, Henkin esclarece que:

> "In this paper we generalize Kalmár's method to indicate how to obtain a complete axiomatization of any fragment of the propositional calculus which includes material implication."

Contudo, nosso objetivo é atingir a hierarquia das LFIs por meio de uma axiomática mais enxuta. No Teorema 1.3.6 mostramos que essa abordagem, mais elegante, também é correta e completa por meios construtivos.

O próximo resultado técnico será útil para as seções subsequentes.

Lema 1.3.3. *As seguintes fórmulas são teoremas de* $\boldsymbol{PC}^{\supset,\wedge}$*:*

(i) $(\alpha \supset \beta) \supset [(\alpha \supset \gamma) \supset (\alpha \supset (\beta \wedge \gamma))]$;

(ii) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \supset (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.

Demonstração. (i) O resultado segue facilmente usando Teorema da Dedução, (**A4**) e (**MP**).

(ii) Usando a definição de $\vee$ devemos provar que:

$\alpha \wedge [(\beta \supset \gamma) \supset \gamma] \supset [(\alpha \wedge \beta) \supset (\alpha \wedge \gamma)] \supset (\alpha \wedge \gamma)$.

[7] Os axiomas propostos por Henkin são:

Ax1. $((p \supset r) \supset r) \supset [((q \supset r) \supset r) \supset (((p \wedge q) \supset r) \supset r)]$

Ax2. $((p \supset r) \supset r) \supset [(q \supset r) \supset ((p \wedge q) \supset r)]$

Ax3. $(p \supset r) \supset [((q \supset r) \supset r) \supset ((p \wedge q) \supset r)]$

Ax4. $(p \supset r) \supset [(q \supset r) \supset ((p \wedge q) \supset r)]$

1.	$\alpha \wedge [(\beta \supset \gamma) \supset \gamma]$	[Hip.]
2.	$(\alpha \wedge \beta) \supset (\alpha \wedge \gamma)$	[Hip.]
3.	α	[(**A5**) e (**MP**) em 1]
4.	$(\beta \supset \gamma) \supset \gamma$	[(**A6**) e (**MP**) em 1]
5.	$(\beta \supset \gamma) \supset \alpha$	[(**A1**) e (**MP**) em 3]
6.	$(\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \wedge \gamma)$	[Lema. 1.3.3 (i) em 4 e 5]
7.	$\beta \supset \alpha$	[(**A1**) e (**MP**) em 3]
8.	$\beta \supset \beta$	[Teorema de $\mathbf{PC}^{\supset}$]
9.	$\beta \supset (\alpha \wedge \beta)$	[Lema. 1.3.3 (i) em 7 e 8]
10.	$\beta \supset (\alpha \wedge \gamma)$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 9 e 2]
11.	$\beta \vee (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \wedge \gamma)$	[Teo. 1.3.2 (iv) em 6 e 10]
12.	$\beta \vee (\beta \supset \gamma)$	[Teo. 1.3.2 (v)]
13.	$(\alpha \wedge \gamma)$	[(**MP**) em 12 e 11]

□

A completude construtiva de $\mathbf{PC}^{\supset}$, isto é, sem uso de nenhuma forma do Axioma da Escolha, em relação às valorações proposicionais para a implicação e conjunção (definidas de modo usual) é obtida internalizando o efeito semântico das variáveis de uma fórmula por meios sintáticos, por intermédio de um processo de "retificação" definido sobre fórmulas. Usamos esse mesmo aparato para mostrar que $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$ tem uma completude construtiva.

Definição 1.3.4. *Seja v uma valoração proposicional para a implicação e conjunção e α uma fórmula arbitrária. Definimos α^* como a retificação de α através de v da seguinte maneira:*

$$\alpha^* = \begin{cases} (\alpha \supset \gamma) \supset \gamma & se\ v(\alpha) = 1 \\ (\alpha \supset \gamma) & se\ v(\alpha) = 0 \end{cases}$$

para γ uma fórmula arbitrária.

O lema a seguir mostra que a retificação das variáveis atômicas de qualquer fórmula α com relação à valoração v produz uma retificação de α com relação à mesma valoração.

Lema 1.3.5. *(Lema da Retificação)*
Seja v qualquer valoração e $p_1, \cdots, p_n$ as variáveis que ocorrem em α. Então $p_1^*, \cdots, p_n^* \vdash \alpha^*$.

Demonstração. A demonstração é feita por indução no comprimento de α. Os casos em que α é atômica e da forma $\beta \supset \delta$ estão tratados em [Hen49]. Para completar a prova no caso de $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$, resta considerar o caso em que α é do tipo $\beta \wedge \delta$.

- Suponha $v(\beta \wedge \delta) = 1$. Mostraremos que $p_1^*, \cdots, p_n^* \vdash [(\beta \wedge \delta) \supset \gamma] \supset \gamma$.

  Por definição de valoração temos que $v(\beta \wedge \delta) = 1$ see $v(\beta) = v(\delta) = 1$. Pela hipótese de indução temos que:

$$p_1^*, \cdots, p_n^* \vdash (\beta \supset \gamma) \supset \gamma \ \text{ e } \ p_1^*, \cdots, p_n^* \vdash (\delta \supset \gamma) \supset \gamma$$

  Para simplicidade de notação vamos ocultar as hipóteses $p_1^*, \cdots, p_n^*$ da hipótese de indução. A monotonicidade do operador de conseqüência de $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$ (denotado por $\vdash$) é usada no argumento sem menção explícita, e o Teorema de Dedução (denotado por Teo. Ded.) é usado indiscriminadamente nos dois sentidos.

1.	$\vdash \beta \supset [\delta \supset (\beta \wedge \delta)]$	[(**A4**)]
2.	$\vdash (\beta \supset \gamma) \supset \gamma$	[Hip. Ind.]
3.	$\vdash (\delta \supset \gamma) \supset \gamma$	[Hip. Ind.]
4.	$\beta,\ \delta \vdash \beta \wedge \delta$	[Teo. Ded. em 1]
5.	$\vdash (\beta \wedge \delta) \supset [((\beta \wedge \delta) \supset \gamma) \supset \gamma]$	[Modus Ponens]
6.	$\beta, \delta \vdash ((\beta \wedge \delta) \supset \gamma) \supset \gamma$	[(**MP**) em 4 e 5]
7.	$\beta, \delta, (\beta \wedge \delta) \supset \gamma \vdash \gamma$	[Teo. Dedução em 6]
8.	$\delta, (\beta \wedge \delta) \supset \gamma \vdash \beta \supset \gamma$	[Teo. Dedução em 7]
9.	$\delta, (\beta \wedge \delta) \supset \gamma \vdash \gamma$	[(**MP**) em 8 e 2]
10.	$(\beta \wedge \delta) \supset \gamma \vdash \delta \supset \gamma$	[Teo. Ded. em 9]
11.	$(\beta \wedge \delta) \supset \gamma \vdash \gamma$	[(**MP**) em 10 e 3]
12.	$\vdash [(\beta \wedge \delta) \supset \gamma] \supset \gamma$	[Teo. Ded. em 11]

  Portanto, $p_1^*, \cdots, p_n^* \vdash [(\beta \wedge \delta) \supset \gamma] \supset \gamma$.

- Suponha $v(\beta \wedge \delta) = 0$. Mostraremos que $p_1^*, \cdots, p_n^* \vdash (\beta \wedge \delta) \supset \gamma$.

  Por definição de valoração temos que $v(\beta \wedge \delta) = 0$ see $v(\beta) = 0$ ou $v(\delta) = 0$. Pela hipótese de indução temos que:

$$p_1^*, \cdots, p_n^* \vdash \beta \supset \gamma \quad \text{ou} \quad p_1^*, \cdots, p_n^* \vdash \delta \supset \gamma$$

  Considere o caso em que $v(\beta) = 0$, o outro é análogo.

  1. $\vdash (\beta \wedge \delta) \supset \beta$ [(**A5**)]
  2. $\vdash \beta \supset \gamma$ [Hip. Ind.]
  3. $\vdash (\beta \wedge \delta) \supset \gamma$ [Teo. 1.3.2 (iii) em 1 e 2]

  Portanto, $p_1^*, \cdots, p_n^* \vdash (\beta \wedge \delta) \supset \gamma$.

□

A prova de corretude é a usual e não será explicitada aqui. Basta verificar, usando as tabelas de verdade clássicas para os conectivos $\supset$ e $\wedge$, que cada axioma do sistema é uma tautologia e que as regras de inferência preservam a verdade.

Teorema 1.3.6. *(Completude de $\boldsymbol{PC}^{\supset,\wedge}$)*
Se α é uma tautologia de $\boldsymbol{PC}^{\supset,\wedge}$, então α é um teorema de $\boldsymbol{PC}^{\supset,\wedge}$ (notação: $\vdash \alpha$).

Demonstração. A prova é uma extensão do argumento apresentado por Henkin em [Hen49] para $\mathbf{PC}^{\supset}$, e é obtida usando a versão estendida do Lema da Retificação (Lema 1.3.5). Resumidamente, o argumento faz uso do Teorema da Dedução, do axioma (**A3**), do teorema $\alpha \supset \alpha$ e do Lema 1.3.5. □

Deve-se observar que nossa prova, tanto quanto a de Henkin em [Hen49], é construtiva porque se baseia no Lema da Retificação (que não usa nenhuma forma do Axioma da Escolha), um processo finitário que descarta as variáveis retificadas. Observe que o que se obtém é um teorema de "completude fraca" (sem premissas); usando os métodos de Henkin em [Hen49], pode-se obter a completude forte para $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$ por métodos tão construtivos quanto os de Henkin. Contudo, ivestigar métodos construtivos não é nosso objetivo nesta Tese.

Nosso próximo passo será estender os sistemas positivos com operadores modais. Primeiramente, enriquecemos a linguagem apenas com o operador modal de necessidade $\Box$. Dessa forma, obtemos os primeiros *sistemas modais anódicos* – também chamamos tais sistemas de *lógicas modais anódicas*.

Definição 1.3.7. *Chamamos **S** de sistema modal normal anódico minimal (ou lógica modal normal anódica minimal) se **S** é estendido com o seguinte axioma e com a seguinte regra:*

*(**K**)* $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$ *(Axioma da Distribuição)*

*(**Nec**)* $\vdash \alpha$ *implica* $\vdash \Box\alpha$ *(Regra de Necessitação)*

Denotamos por $\mathbf{K}^{\supset}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ os sistemas modais anódicos minimais que estendem, respectivamente, os fragmentos $\mathbf{PC}^{\supset}$ e $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$.

Nesses sistemas o conceito de dedução é o mesmo dado na Definição 1.3.1 e a partir daí provamos que o Teorema da Dedução vale nos sistemas modais.

Teorema 1.3.8. *(Teorema da Dedução)*
Seja $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ *um conjunto de fórmulas de* $\boldsymbol{K}^{\supset}$*, então:* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *sse* $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$*.*

Demonstração. Pela Definição 1.3.1, sabemos que se $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, então a seqüência $\beta_1, \cdots, \beta_n$ é uma dedução de β, onde $\beta_n = \beta$ e cada $\beta_i \in \Gamma \cup \{\alpha\}$, para $1 \leq i \leq n$.

A prova é por indução no comprimento da dedução de β. Resta considerar o caso em que β_n é obtida por aplicação de (**Nec**) em algum β_i $(i < n)$ que é teorema de $\mathbf{K}^{\supset}$, isto é, $\beta_n = \Box\beta_i$. Os demais casos são como em $\mathbf{PC}^{\supset}$.

Claramente $\vdash \Box\beta_i$, desde que (**Nec**) preserva teoremas. Portanto, pela monotonicidade e axioma (**A1**) temos que $\Gamma \vdash \alpha \supset \Box\beta_i$. $\Box$

Note que o Teorema 1.3.8, acima, é válido também para $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$, pois o argumento não se altera para a parte clássica. A partir daí, podemos derivar em $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ o seguinte.

Lema 1.3.9. *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *um conjunto de fórmulas de* $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge}$*. Então,* $\Gamma \vdash \alpha$ *sse existe um conjunto finito* $\{\gamma_1, \cdots \gamma_n\} \subseteq \Gamma$ *tal que* $\vdash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \supset \alpha$*.*

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Suponha $\vdash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \supset \alpha$. Pela monotonicidade segue $\Gamma \vdash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \supset \alpha$. Por outro lado, sabemos que $\Gamma \vdash \gamma_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Aplicando n-vezes (**A4**) e (**MP**) temos que $\Gamma \vdash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$. Logo, por (**MP**), segue que $\Gamma \vdash \alpha$.

($\Longrightarrow$) Suponha $\Gamma \vdash \alpha$. Pela finitariedade da relação $\vdash$, temos $\{\gamma_1, \cdots \gamma_n\} \vdash \alpha$ e daí, pelo Teorema da Dedução, temos $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-2}\} \vdash \gamma_{n-1} \supset (\gamma_n \supset \alpha)$. Pelo axioma (**A5**) temos que $\vdash (\gamma_{n-1} \wedge \gamma_n) \supset \gamma_{n-1}$. Pela monotonicidade e transitividade da implicação segue $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-2}\} \vdash (\gamma_{n-1} \wedge \gamma_n) \supset (\gamma_n \supset \alpha)$. Do axioma (**A6**) e monotonicidade temos que $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-2}\} \vdash (\gamma_{n-1} \wedge \gamma_n) \supset \gamma_n$ daí, por (**A3**) e (**MP**) duas vezes segue que $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-2}\} \vdash (\gamma_{n-1} \wedge \gamma_n) \supset \alpha$. Iterando o mesmo raciocínio, concluímos que $\vdash (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \supset \alpha$. $\square$

É esperado, em lógica modal, que o operador modal $\square$ se distribua bem com relação à conjunção, e o operador modal $\lozenge$ se distribua bem com relação à disjunção. Uma rápida reflexão, a partir de uma mínima experiência com a semântica das modalidades, revela que tal é o caso porque $\square$ tem um parentesco semântico com o quantificador universal, enquanto que $\lozenge$ é semanticamente aparentado com o quantificador existencial. Ainda não temos $\lozenge$ como um operador da linguagem; esse ponto será analisado no Capítulo 2. O lema a seguir mostra que em $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ tal distribuição se verifica. No caso do sistema $\mathbf{K}^{\supset}$, o operador $\square$ é apenas semi-distributivo com relação à disjunção.

Lema 1.3.10. *São teoremas de $\mathcal{L}$:*

- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{K}^{\supset}$:*
  (i) $(\square\alpha \vee \square\beta) \supset \square(\alpha \vee \beta)$

- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{K}^{\supset,\wedge}$:*
  (ii) $\square(\alpha \wedge \beta) \supset \square\alpha \wedge \square\beta$*;*
  (iii) $\square\alpha \wedge \square\beta \supset \square(\alpha \wedge \beta)$.

Demonstração. (i)

1.	$\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$	[Lema 1.3.2 (i)]
2.	$\beta \supset (\alpha \vee \beta)$	[Lema 1.3.2 (ii)]
3.	$\Box\alpha \supset \Box(\alpha \vee \beta)$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 1]
4.	$\Box\beta \supset \Box(\alpha \vee \beta)$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 2]
5.	$(\Box\alpha \vee \Box\beta) \supset \Box(\alpha \vee \beta)$	[Lema 1.3.2 (iv) em 3 e 4]

(ii)

1.	$(\alpha \wedge \beta) \supset \alpha$	[(**A5**)]
2.	$(\alpha \wedge \beta) \supset \beta$	[(**A6**)]
3.	$\Box(\alpha \wedge \beta) \supset \Box\alpha$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 1]
4.	$\Box(\alpha \wedge \beta) \supset \Box\beta$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 2]
5.	$\Box(\alpha \wedge \beta) \supset \Box\alpha \wedge \Box\beta$	[Lema 1.3.3 (i) em 3 e 4]

(iii) Usando o Teorema da Dedução:

1.	$(\Box\alpha \wedge \Box\beta)$	[Hip.]
2.	$\Box\alpha$	[(**A5**) e (**MP**) em 1]
3.	$\Box\beta$	[(**A6**) e (**MP**) em 1]
4.	$\alpha \supset [\beta \supset (\alpha \wedge \beta)]$	[(**A4**)]
5.	$\Box\alpha \supset \Box[\beta \supset (\alpha \wedge \beta)]$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 4]
6.	$\Box[\beta \supset (\alpha \wedge \beta)]$	[(**MP**) em 2 e 5]
7.	$\Box\beta \supset \Box(\alpha \wedge \beta)$	[(**K**) e (**MP**) em 6]
8.	$\Box(\alpha \wedge \beta)$	[(**MP**) em 3 e 6]

$\Box$

A próxima seção se ocupa em mostrar que os sistemas modais anódicos normais minimais apresentados nesta seção são corretos e completos com relação à classe de todos os modelos relacionais onde a relação não exige propriedade específica, ou, visto de outra maneira, com relação à classe dos modelos que inclui todas as relações definidas sobre o conjunto de mundos.

1.4 A completude dos sistemas $\boldsymbol{K}^{\supset}$ e $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge}$

Para demonstrar o resultado de completude para sistemas modais que têm presente em sua linguagem o conectivo de negação, o procedimento padrão recorre ao conceito de *consistência* – ausência de contradição – atrelado ao conjunto das fórmulas do sistema em questão. No caso dos sistemas positivos, a ausência de negação poderia colocar um impedimento intransponível, mas existe uma maneira de contornar o problema que será essencial no presente trabalho: é possivel substituir o conceito de consistência pelo de *não-trivialidade* − existência de uma fórmula α que não é derivada a partir de um conjunto de fórmulas do sistema. Embora ambos os conceitos coincidam na lógica clássica, podemos mesmo dizer que o fato de esses não serem conceitos coincidentes é o esteio das provas de completude de diversas das chamadas lógicas não-clássicas. Voltaremos a esse ponto mais adiante.

Todo o aparato definicional que precisamos para a obtenção da completude para os sistemas $\mathbf{K}^{\supset}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ está inserido no corpo do texto. Seguimos a mesma linha de argumentação apresentada por Carnielli e Pizzi no capítulo 4 do livro [CP08]. Tanto quanto possível, usamos esse mesmo roteiro para a obtenção da completude para os demais sistemas que consideramos na Tese.

Nesta seção usaremos a notação $\mathcal{L}$ nos enunciados de definições, lemas e teoremas para indicar o uso indiscriminado dos sistemas anódicos $\mathbf{K}^{\supset}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$. Com base na Definição 1.2.1 contruímos os modelos da seguinte forma.

Definição 1.4.1. *Um modelo relacional $\mathfrak{M}$ para $\mathcal{L}$ (ou $\mathcal{L}$-model) é um par $\langle \mathfrak{F}, v \rangle$, onde $\mathfrak{F}$ é um enquadramento para $\mathcal{L}$ (veja p. 24) e $v : Var \times W \longrightarrow \{0,1\}$ uma função satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{K}^{\supset}$:*
  - (*i*) $v(p,w) = 1$ *ou* $v(p,w) = 0$;
  - (*ii*) $v(\alpha \supset \beta, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w) = 0$ *ou* $v(\beta, w) = 1$;
  - (*iii*) $v(\Box\alpha, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w') = 1$, *para todo* $w' \in W$ *tal que* wRw'.
- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{K}^{\supset,\wedge}$ acrescenta-se:*
  - (*iv*) $v(\alpha \wedge \beta, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w) = 1$ *e* $v(\beta, w) = 1$.

Os conceitos de satisfatibilidade e validade num modelo, e de validade num enquadramento, são definidos como anteriormente, mas os retomamos aqui a fim de ajustar a notação à definição de modelo expressada pela Definição 1.4.1. Uma fómula α é *satisfeita* pelo modelo $\mathfrak{M}$, se existe um $w \in W$ tal que $v(\alpha, w) = 1$. Uma fórmula é $\mathfrak{M}$-*válida* se $v(\alpha, w) = 1$ para todo

$w \in W$ (notação: $\mathfrak{M} \vDash \alpha$). Uma fórmula α é *válida* no enquadramento $\mathfrak{F}$ se α é válida em todo modelo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F}$ (notação: $\mathfrak{F} \vDash \alpha$).

Definição 1.4.2. *Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas de $\boldsymbol{S}$. Dizemos que α é conseqüência semântica de Γ com respeito à classe de enquadramentos $\mathcal{F}$ se:*

$$\mathfrak{F} \vDash \Gamma \textit{ implica } \mathfrak{F} \vDash \alpha$$

para cada $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$, onde $\mathfrak{F} \vDash \Gamma$ significa que $\mathfrak{F} \vDash \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, o que denotamos por $\Gamma \vDash^{S}_{\mathcal{F}} \alpha$.

Quando não houver risco de confusão ocultaremos o sobrescrito **S** de $\Gamma \vDash^{S}_{\mathcal{F}} \alpha$.

A corretude para os sistemas anódicos é análoga à estabelecida para os sistemas modais usuais, pelo fato de a negação não estar envolvida na argumentação referente à parte modal, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 1.4.3. *(Corretude para $\boldsymbol{K}^{\supset}$ e $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge}$)*
Cada teorema de $\mathcal{L}$ é válido na classe de todos os enquadramentos $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ nos quais a relação R não requer propriedade específica.

Demonstração. Detalhamos apenas os casos modais.

- Axiomas de $\mathbf{PC}^{\supset}$ e $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$
  Basta notar que as valorações são definidas em um único mundo, e daí tudo se passa como no caso clássico. Para cada axioma α, $v(\alpha, w) = 1$ para cada $w \in W$, dado que α é tautologia clássica. Portanto α é válida em todo modelo $\mathfrak{M}$ de cada $\mathfrak{F}$, logo $\mathcal{F} \vDash \alpha$.

- Axioma (**K**)
  Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}$ baseado sobre $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$. Pela definição de validade, temos que existe $w \in W$ tal que $v(\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q), w) = 0$. Pela Definição 1.4.1 (ii), $v(\Box(p \supset q), w) = 1$, $v(\Box p, w) = 1$, e $v(\Box q, w) = 0$.

  Aplicando a cláusula (iv) da Definição 1.4.1 temos:

  1. $v(\Box p, w) = 1$ sse $v(p, w') = 1$ *para todo* $w' \in W$ tal que wRw';

2. $v(\Box q, w) = 0$ sse $v(q, w'') = 0$ *para algum* $w'' \in W$ tal que wRw'';
3. $v(\Box(p \supset q), w) = 1$ sse $v(p \supset q, w''') = 1$ *para todo* $w''' \in W$ tal que wRw''', sse *para todo* $w''' \in W$ tal que wRw''', $v(p, w''') = 0$ (absurdo com o ítem 1) ou $v(q, w''') = 1$ (absurdo com o ítem 2).

Portanto, $\mathfrak{M} \vDash \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$ para todo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$.

- Regra (**Nec**)
  Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}$, baseado em algum $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$, tal que $\mathfrak{M}, w \nvDash \Box\alpha$ para algum $w \in W$. Isso significa que $v(\Box\alpha, w) = 0$. Pela Definição 1.4.1 (iii), temos que existe $w' \in W$ tal que wRw' e $v(\alpha, w') = 0$. Logo, $\mathfrak{M}, w' \nvDash \alpha$ e daí $\mathfrak{F} \nvDash \alpha$, para algum $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$. Absurdo.

□

O que segue pretende obter um resultado de completude para os sistemas $\mathbf{K}^{\supset}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ no estilo de Henkin. As definições a seguir, como discutimos, sugerem como substituir a noção de consistência pela de não-trivialidade, com a finalidade de suprir a ausência da negação nesses sistemas.

Definição 1.4.4. *Seja $\boldsymbol{S} = \langle For, \vdash \rangle$ um sistema lógico e $\Delta \subseteq For$. Dizemos que Δ é não-trivial se $\Delta \nvdash \alpha$ para alguma fórmula α de For; caso contrário é chamado trivial.*

A partir deste ponto apresentaremos algumas definições e alguns resultados em uma formulação um tanto geral com finalidade de aproveitá-los nos capítulos seguintes. Para o propósito deste capítulo será suficiente considerar tais resultados nas versões particularizadas.

Definição 1.4.5. *Seja $\boldsymbol{S} = \langle For, \vdash \rangle$ um sistema lógico, Δ e Λ subconjuntos não-triviais de For tais que $\Delta \cap \Lambda = \varnothing$. Dizemos que Δ é não-trivial Λ-maximal se:*
(i) $\Delta \nvdash \lambda$, para toda $\lambda \in \Lambda$;
(ii) Para cada $\alpha \in For$ tal que $\alpha \notin \Delta$ tem-se $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash \lambda$, para algum $\lambda \in \Lambda$.

Quando tomamos $\Lambda = \{\lambda\}$ na Definição 1.4.5, o conjunto Δ é comumente chamado de *λ-saturado*. Essa definição é interessante porque o caso onde Λ é o complemento de Δ, isto é, onde Δ é não-trivial $\overline{\Delta}$-maximal, ela define a noção de teoria, como não é difícil verificar.

É fácil ver também que a noção usual de *teoria não-trivial maximal* também pode ser expressada em termos da noção de não-trivial Λ-maximalidade.

Teorema 1.4.6. *Δ é não-trivial maximal sse Δ é não-trivial e λ-saturado, para todo λ tal que $\lambda \notin \Delta$.*

Demonstração.
($\Longrightarrow$) Seja $\mathcal{L} = \langle For, \vdash\rangle$ uma lógica e suponha Δ não-trivial maximal. Então para cada $\lambda \in For$, tal que $\Delta \nvdash \lambda$ (existe pelo menos um tal λ, já que Δ é não-trivial), se β é tal que $\beta \notin \Delta$, então para todo $\gamma \in For$ segue que $\Delta \cup \{\beta\} \vdash \gamma$, pois Δ é não-trivial maximal. Em particular, $\Delta \cup \{\beta\} \vdash \lambda$. Portanto Δ é λ-saturado para cada λ tal que $\lambda \notin \Delta$.
($\Longleftarrow$) Suponhamos Δ não-trivial e λ-saturado para todo $\lambda \in For$. Claramente Δ é não-trivial. Para mostrar que Δ é não-trivial maximal resta mostrar o seguinte:

$$\Delta \cup \beta \text{ é trivial para cada } \beta \notin \Delta \tag{1.1}$$

Suponha, por absurdo, que $\Delta \cup \{\beta\}$ seja não-trivial para algum $\beta \notin \Delta$. Isso significa que existe $\gamma \in For$ tal que $\Delta \cup \{\beta\} \nvdash \gamma$ daí, pela monotonicidade da relação de conseqüência, temos que $\Delta \nvdash \gamma$ e portanto, pela reflexividade da relação de conseqüência, $\gamma \notin \Delta$. Porém, por hipótese, Δ é λ-saturado para todo $\lambda \notin \Delta$, logo Δ é γ-saturado e portanto $\Delta \cup \{\beta\} \vdash \gamma$. Absurdo. □

Uma discussão a respeito de conjuntos saturados e conjuntos não-triviais maximais em termos abstratos é empreendida por Béziau em [Béz01]. Nesse artigo ele mostra que no âmbito da lógica clássica tais noções coincidem, porém tal não é o caso quando tratadas em um nível mais abstrato. Mostra também que o conceito de conjunto saturado é minimal; de acordo com o próprio autor, p. 4.

> "I distinguised four kinds of Lindenbaum's extensions (two involving the concept of maximal set, two the concept of saturated set), all equivalent in classical logic but that I proved to be all distinct at the abstract level. Moreover I succeeded to prove that the semantics of saturated sets is minimal."

Não é nossa intenção discutir essa questão aqui. Para nosso propósito, o importante é que tais noções permitem, pelo menos, duas caracterizações distintas para os sistemas anódicos; uma na classe dos modelos em sentido amplo e a outra numa classe de modelos restrita. Voltaremos a essa questão mais à frente depois que apresentarmos todo o aparato técnico para a obtenção da completude.

Definição 1.4.7. *Um conjunto* Δ *de fórmulas é chamado* $\boldsymbol{S}$*-teoria, ou uma teoria de* $\boldsymbol{S}$*, se satisfaz a condição:* $\Delta \vdash \delta$ *implica* $\delta \in \Delta$*.*

Definição 1.4.8. *Um conjunto* Δ *de fórmulas de* $\boldsymbol{S}$ *é chamado primo se é não-trivial e satisfaz a seguinte condição:* $\Delta \vdash \alpha \vee \beta$ *implica* $\Delta \vdash \alpha$ *ou* $\Delta \vdash \beta$*.*

O resultado a seguir mostra que, se um conjunto Δ é maximal não-trivial com relação a um conjunto unitário, então Δ é um conjunto primo.

Lema 1.4.9. *Se* Δ *é* λ*-saturado, então* Δ *é primo.*

Demonstração. Suponha, por redução ao absurdo, que $\Delta \vdash \alpha \vee \beta$, $\Delta \nvdash \alpha$ e $\Delta \nvdash \beta$. Dado que Δ é λ-saturado então $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash \lambda$ e $\Delta \cup \{\beta\} \vdash \lambda$ daí, pelo Teorema da Dedução, temos que $\Delta \vdash \alpha \supset \lambda$ e $\Delta \vdash \beta \supset \lambda$. Pelo Teorema 1.3.2 (iv) segue que $\Delta \vdash (\alpha \vee \beta) \supset \lambda$. Portanto, por (**MP**), segue que $\Delta \vdash \lambda$. Absurdo. □

Para a completude no estilo do método de Henkin precisamos definir o modelo canônico para $\mathbf{K}^{\supset}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$. Considere $\mathit{Den}(\Delta)$ o conjunto, chamado de *denecessitação* de Δ, definido como:

$$\mathit{Den}(\Delta) = \{\alpha : \Box\alpha \in \Delta\}$$

Definição 1.4.10. *O modelo canônico de* $\mathcal{L}$ *é uma terna* $\langle \widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V} \rangle$ *com as seguintes propriedades:*

(i) $\widehat{W} = \{\Delta : \Delta$ *é não-trivial maximal.*$\}$*;*
(ii) $\Delta\widehat{R}\Delta'$ *sse* $\boldsymbol{Den}(\Delta) \subseteq \Delta'$*, para cada* Δ*,* Δ' *em* $\widehat{W}$*;*
(iii) Cada $v_\Delta \in \widehat{V}$ *é uma valoração modal de* $\mathcal{L}$*, definida a partir de algum* $\Delta \in \widehat{W}$*, por:*

$$v_\Delta(p) = \begin{cases} 1 & se\ p \in \Delta \\ 0 & se\ p \notin \Delta \end{cases}$$

Lema 1.4.11. *Se* Δ *é um conjunto de* $\mathcal{L}$*-fórmulas não-trivial* Λ*-maximal, então:*

- *Para* $\mathcal{L} = \boldsymbol{K}^{\supset}$*.*
  (i) Δ *é uma* $\mathcal{L}$*-teoria;*
  (ii) Se $\alpha \in \Delta$ *e* $\alpha \supset \beta \in \Delta$*, então* $\beta \in \Delta$*;*
  (iii) Se Δ *é primo então:* $\alpha \supset \beta \in \Delta$ *sse* $\alpha \notin \Delta$ *ou* $\beta \in \Delta$*;*
  (iv) Se Δ *é primo, então para cada* $\alpha \in \boldsymbol{For}$ *e cada* $\lambda \in \Lambda$*, temos que* $\alpha \in \Delta$ *ou* $\alpha \supset \lambda \in \Delta$*, mas não ambas.*

- *Para* $\mathcal{L} = \boldsymbol{K}^{\supset,\wedge}$ *acrescenta-se:*
  (v) $\alpha \wedge \beta \in \Delta$ *sse* $\alpha \in \Delta$ *e* $\beta \in \Delta$*.*

Demonstração.

(i) Suponha, por redução ao absurdo, que $\Delta \vdash \alpha$ e $\alpha \notin \Delta$ para algum $\alpha \in \boldsymbol{For}$. Dado, por hipótese, que Δ é não-trivial Λ-maximal, então existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash \lambda$. Pelo Teorema da Dedução temos que $\Delta \vdash \alpha \supset \lambda$. Por (**MP**), segue que $\Delta \vdash \lambda$ para algum $\lambda \in \Lambda$. Absurdo.

(ii) Se $\alpha \in \Delta$ e $\alpha \supset \beta \in \Delta$, então pela reflexividade da relação, $\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \vdash \alpha \supset \beta$. Por (**MP**), temos que $\Delta \vdash \beta$. Como, por (i), Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria segue que $\beta \in \Delta$.

(iii) ($\Longleftarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, $\alpha \supset \beta \in \Delta$, $\alpha \in \Delta$ e $\beta \notin \Delta$. Pela reflexividade temos que $\Delta \vdash \alpha \supset \beta$ e $\Delta \vdash \alpha$. Por (**MP**) segue que $\Delta \vdash \beta$. Dado, por (i), que Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria, então $\beta \in \Delta$. Absurdo.
($\Longrightarrow$) Suponha $\alpha \notin \Delta$ ou $\beta \in \Delta$:

- Caso 1: suponha, por redução ao absurdo, que $\alpha \notin \Delta$ e $\alpha \supset \beta \notin \Delta$. Considere a hipótese $\alpha \notin \Delta$. Dado que Δ é não-trivial Λ-maximal, temos que $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash \lambda_1$, para algum $\lambda_1 \in \Lambda$ daí, pelo Teorema da Dedução, temos que $\Delta \vdash \alpha \supset \lambda_1$. Dado que $\vdash \lambda_1 \supset (\lambda_1 \vee \lambda_2)$ é um teorema de $\mathcal{L}$ (veja Teorema 1.3.2 (i)) então, pela Monotonicidade e Teorema 1.3.2 (iii) segue que $\Delta \vdash \alpha \supset (\lambda_1 \vee \lambda_2)$. Analogamente, se $\alpha \supset \beta \notin \Delta$ então $\Delta \vdash (\alpha \supset \beta) \supset (\lambda_1 \vee \lambda_2)$. Usando (**A3**) e (**MP**) temos que $\Delta \vdash \lambda_1 \vee \lambda_2$ daí, como Δ é primo, $\Delta \vdash \lambda_1$ ou $\Delta \vdash \lambda_2$ para $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Absurdo.

- Caso 2: se $\beta \in \Delta$, então $\Delta \vdash \beta$. Pelo axioma (**A1**) e monotonicidade temos que $\Delta \vdash \beta \supset (\alpha \supset \beta)$ daí, por (**MP**), $\Delta \vdash \alpha \supset \beta$. Como, por (i), Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria, então $\alpha \supset \beta \in \Delta$.

(iv) Suponha Δ primo.

- Caso 1: suponha, por redução ao absurdo, que para toda fórmula $\lambda \in \Lambda$ seja o caso de $\alpha \in \Delta$ e $\alpha \supset \lambda \in \Delta$ para alguma $\alpha \in For$. Pela reflexividade, temos que $\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \vdash \alpha \supset \lambda$ daí, por (**MP**), $\Delta \vdash \lambda$. Absurdo com o fato de Δ ser não-trivial Λ-maximal.

- Caso 2: suponha, por redução ao absurdo, que $\alpha \notin \Delta$ e $\alpha \supset \lambda \notin \Delta$. Com o mesmo raciocínio do ítem (iii), Caso 1, temos $\Delta \vdash (\lambda_1 \vee \lambda_2)$ para $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Como Δ é primo, segue que $\Delta \vdash \lambda_1$ ou $\Delta \vdash \lambda_2$ para $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Absurdo, desde que Δ é não-trivial Λ-maximal.

(v) ($\Longleftarrow$) Suponha $\alpha \in \Delta$ e $\beta \in \Delta$. Pela Reflexividade da relação $\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \vdash \beta$. Por (**A4**) e monotonicidade temos que $\Delta \vdash \alpha \supset (\beta \supset (\alpha \wedge \beta))$ e por (**MP**) segue $\Delta \vdash \alpha \wedge \beta$ daí, por (i), $\alpha \wedge \beta \in \Delta$.
($\Longrightarrow$) Suponha $\alpha \wedge \beta \in \Delta$. Pela Reflexividade da relação $\Delta \vdash \alpha \wedge \beta$. Como (**A5**) e (**A6**) são axiomas de $\mathcal{L}$, segue por (**MP**) que $\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \vdash \beta$. Portanto, por (i), $\alpha \in \Delta$ e $\beta \in \Delta$.

□

O resultado a seguir é uma adaptação do conhecido Lema de Lindenbaum para conjuntos Λ-maximais que será essencial para a obtenção da completude.

Teorema 1.4.12. *Seja* $\boldsymbol{S} = \langle For, \vdash \rangle$ *um sistema lógico,* Δ *e* Λ *subconjuntos não-triviais de* For *tal que* $\Delta \cap \Lambda = \varnothing$*. Então existe um conjunto* Π *que é não-trivial* Λ*-maximal tal que* $\Delta \subset \Pi$ *e* $\Pi \cap \Lambda = \varnothing$*.*

Demonstração. Considerando For é enumerável, considere a seqüência de extensões $\{\alpha_i : i < \aleph_0\}$, que enumera For. Defina as seguintes extensões de Γ.

$$\Gamma_0 = \quad \Delta$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} \nvdash \lambda, \text{ para toda } \lambda \in \Lambda \\ \Gamma_n & \text{se } \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} \vdash \lambda, \text{ para alguma } \lambda \in \Lambda \end{cases}$$

Sabemos, por construção, que cada Γ_i é tal que $\Gamma_i \nvdash \lambda$, para toda $\lambda \in \Lambda$. Considere:

$$\Pi = \bigcup_{i<\aleph_0} \Gamma_i.$$

Vejamos que Π é não-trivial Λ-maximal.

1. $\Pi \cap \Lambda = \varnothing$;
   Suponha, por redução ao absurdo, que $\alpha \in \Pi \cap \Lambda$ então, $\alpha \in \Pi$ e $\alpha \in \Lambda$. Como $\alpha \in \Pi$ então existe $\Gamma_{i+1} \subseteq \Pi$ tal que $\alpha \in \Gamma_{i+1}$. Pela construção de Π sabemos que $\Gamma_i \cup \{\alpha\} \nvdash \lambda$, para nenhum $\lambda \in \Lambda$. Por outro lado, pela reflexividade, temos que $\Gamma_i \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$ e $\alpha \in \Lambda$. Absurdo.

2. $\Pi \nvdash \lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.
   Suponha, por redução ao absurdo, que $\Pi \vdash \lambda_0$ para algum $\lambda_0 \in \Lambda$. Pela compacidade temos que existe Π_{fin} finito tal que $\Pi_{fin} \subseteq \Pi$ e $\Pi_{fin} \vdash \lambda_0$. Por construção, temos que existe Γ_i tal que $\Pi_{fin} \subseteq \Gamma_i \subseteq \Pi$. Agora, como $\Pi_{fin} \vdash \lambda_0$ então, pela monotonicidade, $\Gamma_i \vdash \lambda_0$, para algum $\lambda_0 \in \Lambda$. Absurdo.

3. Se $\alpha \notin \Pi$, então $\Pi \cup \{\alpha\} \vdash \lambda$, para algum $\lambda \in \Lambda$.

Se $\alpha \notin \Pi$ então $\alpha \notin \Gamma_i$ para todo $i < \aleph_0$. Por construção, para cada $i < \aleph_0$, temos que $\Gamma_i \cup \{\alpha\} \vdash \lambda$ para algum $\lambda \in \Lambda$. Dado que cada $\Gamma_i \subset \Pi$ então, pela monotonicidade, segue que $\Pi \cup \{\alpha\} \vdash \lambda$ para algum $\lambda \in \Lambda$.

Portanto Π é não-trivial Λ-maximal e claramente, por construção, $\Delta \subset \Pi$ e $\Pi \cap \Lambda = \varnothing$. □

O corolário a seguir é uma versão um pouco mais restrita do Lema de Lindenbaum que será útil no Capítulo 2 quando considerarmos os modelos canônicos construídos com base nas extensões primas maximais.

Definição 1.4.13. *Um conjunto Γ de fórmulas é fechado por disjunção se $\gamma_k, \gamma_l \in \Gamma$ implica $\gamma_k \vee \gamma_l \in \Gamma$.*

Corolário 1.4.14. *Seja $\boldsymbol{S} = \langle For, \vdash \rangle$ um sistema lógico, Δ e Λ subconjuntos não-triviais de For tal que $\Delta \cap \Lambda = \varnothing$ e Λ fechado por disjunção. Então existe um conjunto Π que é não-trivial Λ-maximal primo tal que $\Delta \subset \Pi$ e $\Pi \cap \Lambda = \varnothing$.*

Demonstração. Note que o mesmo argumento que embasa o Teorema 1.4.12 continua válido quando Λ é fechado por disjunção. Portanto, para concluir a prova, basta verificar que Π satisfaz a seguinte propriedade:

- Se $\alpha \vee \beta \in \Pi$, então $\alpha \in \Pi$ ou $\beta \in \Pi$.

Suponha, por redução ao absurdo, que $\alpha \vee \beta \in \Pi$, $\alpha \notin \Pi$ e $\beta \notin \Pi$. Dado que Π é não-trivial Λ-maximal, então $\Pi \cup \{\alpha\} \vdash \lambda_1$, para $\lambda_1 \in \Lambda$. Pelo Teorema da Dedução, $\Pi \vdash \alpha \supset \lambda_1$ daí, pelo Teorema 1.3.2 (i) e (iii) temos que $\Pi \vdash \alpha \supset (\lambda_1 \vee \lambda_2)$. Analogamente, se $\beta \notin \Pi$, então $\Pi \vdash \beta \supset (\lambda_1 \vee \lambda_2)$, para $\lambda_2 \in \Lambda$. Pelo Teorema 1.3.2 (iv) segue que $\Pi \vdash (\alpha \vee \beta) \supset (\lambda_1 \vee \lambda_2)$ e, por (**MP**), $\Pi \vdash \lambda_1 \vee \lambda_2$. Dado que Λ é fechado por disjunção então $(\lambda_1 \vee \lambda_2) \in \Lambda$, logo um absurdo. □

Os resultados que seguem têm o propósito de conseguir a completude para os sistemas anódicos $\mathbf{K}^{\supset}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$.

Fato 1.4.15. *Se Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria, então $Den(\Delta)$ é uma $\mathcal{L}$-teoria.*

Demonstração. Suponhamos $Den(\Delta) \vdash \alpha$. Pela compacidade de $\vdash$ temos que existe $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\} \subseteq Den(\Delta)$ tal que $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\} \vdash \alpha$. Pelo Teorema da Dedução, $\vdash \beta_1 \supset (\beta_2 \supset \cdots (\beta_n \supset \alpha) \cdots)$. Aplicando (**Nec**), (**K**) e (**MP**) n-vezes temos $\vdash \Box\beta_1 \supset (\Box\beta_2 \supset \cdots (\Box\beta_n \supset \Box\alpha) \cdots)$. Pela monotonicidade do operador $\vdash$ segue que $\Delta \vdash \Box\beta_1 \supset (\Box\beta_2 \supset \cdots (\Box\beta_n \supset \Box\alpha) \cdots)$. Por outro lado, cada $\beta_i \in Den(\Delta)$, para $1 \leq i \leq n$, é tal que $\Box\beta_i \in \Delta$, logo $\Delta \vdash \Box\beta_i$. Portanto, aplicando (**MP**) n-vezes segue que $\Delta \vdash \Box\alpha$. Como Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria, então $\Box\alpha \in \Delta$. Portanto, pela definição de $Den(\Delta)$, $\alpha \in Den(\Delta)$. Logo $Den(\Delta)$ é uma $\mathcal{L}$-teoria. □

Lema 1.4.16. *Seja $\mathcal{L} = \langle For, \vdash \rangle$ um sistema lógico, $\alpha \in For$ e Δ uma $\mathcal{L}$-teoria tal que $\Box\alpha \notin \Delta$. Então $Den(\Delta)$ é não-trivial.*

Demonstração. Se $Den(\Delta)$ fosse trivial então $Den(\Delta) \vdash \alpha$. Como Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria, pelo Fato 1.4.15, temos que $Den(\Delta)$ é uma $\mathcal{L}$-teoria, daí $\alpha \in Den(\Delta)$. Portanto, pela definição de $Den(\Delta)$, segue que $\Box\alpha \in \Delta$. Absurdo. □

É claro que, para todo conjunto Δ não-trivial Λ-maximal, a função característica v_Δ é uma valoração binária para o sistema lógico dado, uma vez que Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria.

O resultado a seguir mostra que a valoração binária v_Δ do modelo canônico define uma valoração para $\mathcal{L}$. Essa valoração também é chamada "valoração diádica", de acordo com Caleiro *et allia* em [CCCM05].

Teorema 1.4.17. *(Teorema Fundamental do Modelo Canônico)*
Seja $\langle \widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V} \rangle$ o modelo canônico para $\mathcal{L}$, onde $\mathcal{L}$ é $\boldsymbol{K}^{\supset}$ ou $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge}$. Então, para qualquer fórmula α e qualquer $\Delta \in \widehat{W}$, temos:

$$v_\Delta(\alpha) = \begin{cases} 1 & se\ \alpha \in \Delta \\ 0 & se\ \alpha \notin \Delta \end{cases}$$

Demonstração. Por indução na complexidade das fórmulas. O único caso não trivial é onde $\alpha = \Box\beta$, os demais são como no caso clássico.

1. Suponha que $\Box\beta \in \Delta$ então, por definição, temos que $\beta \in Den(\Delta)$. Para cada $\Pi \in \widehat{W}$, tal que $Den(\Delta) \subseteq \Pi$, temos que $\beta \in \Pi$ e $\Delta\widehat{R}\Pi$. Pela hipótese de indução temos que $v_\Pi(\beta) = 1$, para todo Π tal que $\Delta\widehat{R}\Pi$, portanto $v_\Delta(\Box\beta) = 1$.

2. Suponha que $\Box\beta \notin \Delta$. Como $\Delta \in \widehat{W}$ então, pelo Lema 1.4.16, temos que $Den(\Delta)$ é não-trivial. Claramente $Den(\Delta) \nvdash \beta$, caso contrário, $\beta \in Den(\Delta)$, e daí o absurdo, pois $\Box\beta \in \Delta$.

   Tomando $\Lambda = \{\beta\}$ temos que $Den(\Delta) \cap \Lambda = \varnothing$. Pelo Teorema 1.4.12, existe um conjunto $\Pi \in \widehat{W}$ tal que $Den(\Delta) \subseteq \Pi$ e $\Pi \cap \Lambda = \varnothing$ que é não-trivial Λ-maximal, isto é, $\Pi \nvdash \beta$ para $\beta \in \Lambda$ (note que $\Lambda = \{\beta\}$). Considerando que $\Pi \cap \Lambda = \varnothing$, então $\beta \notin \Pi$ e, pela hipótese de indução, temos que $v_\Pi(\beta) = 0$. Portanto, existe Π tal que $\Delta\widehat{R}\Pi$ e $v_\Pi(\beta) = 0$, logo $v_\Delta(\Box\beta) = 0$.

□

Como conseqüência imediata do Teorema 1.4.17 obtém-se a completude. A idéia é usar o modelo canônico como um contra-modelo no argumento por contraposição.

Corolário 1.4.18. *(Completude para $\boldsymbol{K}^{\supset}$ e $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge}$)*
Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de sentenças da linguagem de $\mathcal{L}$, onde $\mathcal{L}$ é $\boldsymbol{K}^{\supset}$ ou $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge}$. Nessas condições, respectivamente, se $\Gamma \vDash_{\mathcal{L}} \alpha$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$.

Demonstração. Suponha que $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \alpha$. Claro que Γ é não-trivial e $\Gamma \cap \{\alpha\} = \varnothing$. Pelo Lema 1.4.12, existe um conjunto Δ não-trivial $\{\alpha\}$-maximal tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Delta \cap \{\alpha\} = \varnothing$ daí, $\alpha \notin \Delta$. Dado que Δ é uma extensão não-trivial maximal de um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$, então $\Delta \in \widehat{W}$ daí, pelo Teorema 1.4.17, $v_\Delta(\alpha) = 0$ e $v_\Delta(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Portanto $\Gamma \nvDash_{\mathcal{L}} \alpha$. □

No Capítulo 2 analisaremos o sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ que é obtido por acréscimo, à linguagem de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$, do operador de possibilidade $\Diamond$. A semântica para esse sistema tem a particularidade de lidar apenas com mundos não-triviais, ou também chamados *factuais*, no sentido em que tais conjuntos são não-triviais com relação a fórmulas do tipo $\Diamond\alpha$. Esse importante ponto será pormenorizadamente discutido no próximo capítulo.

2. LÓGICAS BI-MODAIS ANÓDICAS: COMPLETUDE E INCOMPLETUDE

O propósito deste capítulo é investigar a questão da completude, com ênfase também no fenômeno da incompletude, no âmbito das lógicas bi-modais anódicas. A motivação para esse estudo é estabelecer uma base lógica positiva e modal que possa ser estendida tanto modalmente como negativamente, no sentido de construir sistemas que possam comportar acréscimo de negações, gradualmente mais potentes, cujo limite naturalmente é a negação clássica.

Um sistema é classificado como *bi-modal* quando tem dois operadores modais como primitivos na linguagem. No presente caso, assumimos como primitivos o operador modal $\Box$ e o seu dual, $\Diamond$. Dessa forma, se acrescentamos o operador $\Diamond$ à linguagem de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ obtemos o sistema bi-modal $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$.

O sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é interessante para nosso propósito porque, partindo de um fragmento implicativo do sistema modal $\mathbf{K}$, é possível mostrar, por exemplo, que propriedades duais mostram-se válidas, mesmo na ausência da negação. Uma outra vantagem, é que $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ permite extensões à uma classe infinita de sistemas anódicos. A Seção 2.1 da Tese é inteiramente dedicada ao sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$. Nas seções subsequentes mostraremos que suas extensões são corretas e completas com relação à semântica de mundos possíveis *à la* Kripke.

É interessante salientar que, para o tratamento semântico de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, consideraremos o que chamamos de mundos *factuais* − mundos $\Diamond$-não-triviais, ou ainda não-triviais com relação às sentenças do tipo $\Diamond\alpha$. Essa é uma singularidade dos sistemas anódicos que consideramos aqui como uma estratégia que permite uma abordagem estritamente positiva aos sistemas modais implicativos com conjunção. Tal estratégia nos permite tratar sistemas sem que seja necessário acrescentar à linguagem uma partícula minimal como $\perp$.

Se adicionarmos ao sistema **K** usual o esquema $\Box p$ (denominado *Verum*) obtém-se o sistema **Ver** (veja Carnielli e Pizzi em [CP08], capítulo 2).

O sistema modal resultante **Ver** é modalmente banal, no sentido em que a sentença $\Box\alpha$ é teorema para toda sentença α, mas no entanto **Ver** é consistente, ainda que a sentença $\Box\perp$ seja de fato um teorema desse sistema.

É claro que todo sistema modal trivial é desinteressante, mas a par disso assume-se ainda que nenhum sistema modalmente banal é interessante. Apesar disso, é tecnicamente conveniente admitir sistemas modalmente banais como casos-limite de sistemas modais.

O que acontece aqui, então, é que podemos legitimamente, do ponto de vista lógico, considerar um sistema como **Ver** por força de adicionar o esquema *Verum*; se a banalidade modal deve ser excluída, não o é por razões lógico-matemáticas.

O aspecto interessante é que uma situação dual ou simétrica acontece com o sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$: se em **Ver** é "imperioso" acrescentar (por meios lógicos) o esquema $\Box p$ que impõe uma "necessidade universal", em $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é "inexeqüível" excluir (por meios lógicos) alguma sentença da forma $\Diamond p$, o que torna inevitável uma "possibilidade universal". Isso pode ser tolerável se somente raciocinamos de forma hipotética, mas inaceitável se pretendemos raciocinar com fatos.

Dessa forma, como discutiremos, só poderemos garantir completude com relação às deduções onde pelo menos alguma das premissas seja livre de $\Diamond$ (o que justifica a Definição 2.1.5), se bem que o sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ seja consistente. Isso mostra, a nosso ver, uma instigante dualidade entre **Ver** e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, uma paridade que a presença da negação obscurece.

Em certo sentido, quando dizemos que uma determinada fórmula do tipo $\Diamond\alpha$ é "globalmente excluída" então α pode ser entendida como uma espécie de elemento lógico minimal (*falsum*), e nesse caso a denotamos por $\perp$. Nesse sentido, quando consideramos mundos factuais, podemos olhar para α como uma espécie de "proto-falsum". Além disso, devido ao fato de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ ter presente na linguagem uma implicação com as propriedades da implicação clássica, a presença de $\perp$ na linguagem permitiria definir, de maneira imediata, uma negação clássica[1] (veja Fato 2.1.6), nesse caso estaríamos frente ao conhecido sistema modal **K**.

Celani e Jansana, em [CJ97], propuseram um sistema modal positivo que tem presente na linguagem a partícula $\bot$. É verdade que o fato de o sistema ter sido apresentado por meio de um cálculo de seqüentes impede que a negação seja definida dentro da linguagem. No entanto, parece um tanto questionável classificar como positivo um sistema munido da partícula falsa $\bot$, dado que em circunstâncias usuais $\bot$ é uma sentença dedutivamente explosiva. Dessa forma, dado que o $\bot$ está presente na linguagem, o sistema positivo de Celani e Jansana, fica impedido de ser estendido positivamente sem cair em um sistema com negação. Isso pode ser explicado pelo fato de que nesse sistema existe, de certa forma, um tipo de "negação impedida". Nesse sentido, os sistemas positivos que estamos propondo podem ser vistos como "genuinamente positivos". O preço que pagamos é trabalhar com os mundos factuais.

Separamos em dois capítulos o estudo dos sistemas modais anódicos porque, em cada caso, o aparato formal apresenta diferenças metodológicas significativas. O leitor irá notar que o modelo canônico para $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é construído com base em extensões *primas maximais*, Definição 1.4.8, em vez de maximais. Essa diferença, sensível à primeira vista, necessita um aparato formal diferenciado daquele exposto no Capítulo 1 para os sistemas $\mathbf{K}^{\supset}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$. O modelo canônico para o sistema bi-modal $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ tem a particularidade de atender às modalidades duais $\Box$ e $\Diamond$ em posse de uma relação de acessibilidade comum às duas modalidades mesmo sem a presença de negação (veja Teorema 2.1.12). Dessa forma, mostra-se a completude para $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, com base em uma semântica de Kripke apoiada na idéia dos mundos factuais.

A Seção 2.2 ocupa-se de investigar uma classe de infinitos sistemas bi-

[1] De acordo com Carnielli, Coniglio e Marcos em [CCM07], página 25, uma negação $\neg$ é classificada como "clássica" num sistema **S** sse as seguintes propriedades são demonstráveis em **S**:

$\alpha \vee \neg\alpha$;

$\alpha \supset (\neg\alpha \supset \beta)$.

modais anódicos. Essa classe pode ser obtida adicionando-se ao sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ instâncias do conhecido esquema de axiomas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, introduzido por Lemmon e Scott nas famosas "Lemmon Notes", em [LS77], texto que circulou mimeografado por décadas e que somente foi publicado, editado por Segerberg, após a morte de Lemmon. O esquema de axiomas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, isto é, $\Diamond^k\Box^l p \supset \Box^m\Diamond^n p$, é precisamente o que na literatura (partindo de Lemmon e Scott em [LS77]) foi chamado de "incestual".

Dado que no sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$, embora sejam duais, não são interdefiníveis, o sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ terá que ser estendido não com uma instância do axioma $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, mas com duas instâncias – a cada instância $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ considerada, adiciona-se também sua instância dual, ou seja, a instância $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$. Por esse motivo, os sistemas serão denotados por $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond} + \mathbf{G}^{k,l,m,n} + \mathbf{G}^{m,n,k,l}$.

Por tratarmos de sistemas eminentemente positivos, caberia de imediato a suspeita de que, procedendo dessa forma, poder-se-ia demonstrar que todo sistema fosse completo. É surpreendente que tal não é o caso: de fato, pode-se demonstrar, como faremos ainda neste capítulo, que resultados de incompletude podem ser obtidos mesmo na ausência de negação.

2.1 O sistema anódico bi-modal $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$

Muitos trabalhos têm sido dedicados ao estudo de sistemas bi-modais. Pode-se dizer que os exemplos mais interessantes de sistemas bi-modais concentram-se nas lógicas temporais – lógicas que capturam as várias noções de tempo natural e de tempos verbais por meio das modalidades "passado" e "futuro". Uma apresentação acurada desse tema foi feita por Pizzi no livro "La Logica del Tempo" em [Piz74]. Essa, contudo, não é a única maneira de tratar com as bi-modalidades. Há sistemas que misturam modalidades de diversos tipos, por exemplo: "aléticas" com "deônticas", "deônticas" com "epistêmicas" e assim por diante. Vários exemplos podem ser encontrados em [CP08], capítulo 8, de Carnielli e Pizzi.

O enfoque bi-modal que estamos tratando não tem como objetivo lidar com modalidades opostas, como no caso das lógicas temporais; ao contrário, procuramos expressar as duas modalidades primitivas, tanto quanto possível, como modalidades duais, devido à ausência da negação. Nesse sentido, podemos pensar nosso enfoque, mais do que tudo, como uma perspectiva metodológica, e nossa intenção é atingir a interdefinibilidade dos operadores modais duais quando estivermos de posse de algum tipo de negação, mesmo de negações fracas. Queremos mostrar, em outras palavras, como obter os sistemas modais usuais a partir de sistemas desprovidos de negação.

Dado que partimos de um sistema implicativo, onde a implicação básica é clássica, tal sistema não pode ser estendido a um sistema modal intuicionista usual. Para esse tema, muito já se tem feito na literatura. Por exemplo, Michael Dunn, em [Dun95], propõe um sistema bi-modal positivo, por meio de um cálculo de sequentes, em uma linguagem composta dos seguintes conectivos $\{\vee, \wedge, \Box, \Diamond\}$. Nesse artigo, o autor demonstra a completude baseada nos modelos de Kripke usuais e discute como estender tal sistema com as constantes $\bot$ e $\top$. Não é difícil ver que esse sistema é um fragmento de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$. De fato, dado que o conectivo de disjunção é definido a partir da implicação, então mostra-se que todos os axiomas e regras do sistema de Dunn podem ser derivados em $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$. Esses pontos serão melhor esclarecidos no decorrer do capítulo.

Celani e Jansana, em [CJ97], propõem um outro sistema modal positivo, diferente do de Dunn, na linguagem $\{\vee, \wedge, \Box, \Diamond, \bot, \top\}$ com o intuito de obter uma teoria da dualidade, *à la* Priestley, para *reticulados distributivos limitados com operadores modais.* O aparato semântico que eles adotam, para a obtenção da completude, é uma estrutura de Kripke enriquecida com uma relação de quase-ordem, $\leq$, entre os conjuntos de mundos, satisfazendo às seguintes condições:

1. $(\leq \circ R) \subseteq (R \circ \leq)$;[2]

2. $(\leq^{-1} \circ R) \subseteq (R \circ \leq^{-1})$.

Nos modelos baseados em tais enquadramentos, apenas as *valorações crescentes* são admissíveis, isto é, valorações relativas à quase-ordem. Esse sis-

[2] Božić e Došen, em [BD84], definem essa cláusula para obter enquadramentos para sistemas de lógica modal intuicionista.

tema é capaz de separar fórmulas do tipo $\Box p \vdash \Box\Box p$ de sua formulação dual $\Diamond\Diamond p \vdash \Diamond p$, a qual não pode ser separada pelo sistema de Dunn, o que sinaliza uma incompletude do sistema.

A crítica acima, reconhecida pelo próprio Dunn em [Dun95], não parece estar muito bem fundamentada. Embora Celani e Jansana não concordem, dado que eles argumentam que o sistema bi-modal que propõem em [CJ97] tem vantagens sobre o sistema de Dunn por ser o primeiro sistema capaz de separar $\Box p \vdash \Box\Box p$ de sua formulação dual $\Diamond\Diamond p \vdash \Diamond p$ sem incorrer em incompletude, como é o caso do segundo. De fato isso é possível, mas ao custo de descaracterizar os modelos de Kripke, como vimos acima.

Vejamos porque a crítica, acima, não procede. Considere um enquadramento $\mathfrak{F} = \langle W, R_\Box, R_\Diamond \rangle$, onde $R_\Box$ é a relação para a modalidade $\Box$ e $R_\Diamond$ a relação para a modalidade $\Diamond$. *Grosso modo*, podemos considerar duas situações para os enquadramentos: $R_\Box \cap R_\Diamond \neq \varnothing$ ou $R_\Box \cap R_\Diamond = \varnothing$. No primeiro caso, todo modelo que valida uma das instâncias valida também a sua instância dual; nesse caso, para se ter uma completude é necessário que ambas as relações de acessibilidade satisfaçam às mesmas propriedades, caso contrário não se tem sequer uma completude, e daí a incompletude parece óbvia. No segundo caso, se as relações são independentes, então o enquadramento irá separar as fórmulas dado que as relações satisfazem propriedades independentes. Por exemplo, uma relação pode ser reflexiva e a outra não satisfazer propriedade específica alguma. Nesse caso, o axioma (**T**) será validado para uma relação, e sua instância dual não será na outra. Essa diferença é detalhada na Seção 2.2, onde estabelecemos uma completude para uma classe de infinitos sistemas, e o exemplo citado se obtém como um caso particular.

Agora, uma crítica que se pode levantar tanto ao sistema de Dunn (com $\bot$ na linguagem) quanto ao sistema de Celani e Jansana, é que em ambos os sistemas é impossível estender tais sistemas positivamente sem que se obtenha uma negação definida dentro do sistema. De fato, deve-se notar que temos 16 possibilidades de definir conectivos vero-funcionais binários, dos quais quatro possibilidades já estão sendo consideradas no sistema ($\bot$, $\top$, $\wedge$, $\vee$) e duas delas são inócuas, a saber, as funções identidades em duas variáveis $f(x, y) = x$ e $f(x, y) = y$. Nem mesmo faz sentido considerar essas funções como conectivos, uma vez que não desempenham papel algum no sistema. Para os demais casos uma negação pode ser definida no sistema estendido com um desses conectivos alternativos[3] – com um simples cálculo pode-se verificar esse fato (para detalhes veja o Apêndice). Nesse sentido, podemos dizer que esses sistemas não admitem extensões positivas sem cair em um sistema modal usual, mesmo com a ausência da implicação na linguagem. Esse fenômeno também ocorre em $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, o que era de se esperar, uma vez que estamos considerando uma extensão positiva máxima, no sentido em que consideramos uma linguagem com todos os conectivos clássicos que não a negação. O que percebemos é que tanto no sistema de Dunn quanto no sistema de Celani e Jansana, de certa forma, a implicação pode ser simulada pelo cálculo de seqüêntes. Dessa forma, tais sistemas têm uma espécie de "negação impedida", já que não é possível obter uma negação definida nesses sistemas. Contudo, com a presença de $\bot$ na linguagem, fica difícil aceitar que tais sistemas sejam classificados como positivos.

Por outro lado, o sistema que estamos propondo é um sistema bi-modal eminentemente positivo. O único tipo de negação que poderia ser possível definir neste sistema seria um tipo de "negação positiva", como por exemplo $p \supset \Box\Diamond p$[4]. De fato, dado que $\Diamond p$ não é demonstrável em nosso sistema, o que será estabelecido no Corolário 2.1.17, e tendo em conta a interpretação de $\Box$ como "é demonstrável nesse sistema", então $\Box\Diamond p$ nunca será uma tautologia e daí $p \supset \Box\Diamond p$ exerce o papel de uma "negação positiva" de p.

Além da falta de negação (a não ser a "negação positiva" sugerida acima) o fato de estarmos mantendo uma implicação clássica, torna impossível estender tal sistema a um sistema modal intuicionista. Contudo, o sistema modal positivo de Dunn, assim como o de Celani e Jansana, permitem tal extensão pelo fato de não terem implicação envolvida na linguagem. Como comentamos acima, podemos considerar enquadramentos bi-modais em que as relações tenham ou não interseção vazia. Em nosso caso, consideramos

[3] Se estendemos um sistema que tem $\bot$ na linguagem com a implicação, $\neg p$ pode ser definida de modo padrão como $p \supset \bot$. De maneira análoga define-se a negação compondo a variável p com $\bot$, $\top$ ou mesmo p, com cada conectivo alternativo.

[4] Essa observação deve-se ao Prof. Claudio Pizzi, em comunicação pessoal, mas não será investigada aqui.

enquadramentos onde as relações têm uma interseção não vazia, em razão de pretender tratar com sistemas nos quais as modalidades duais possam ser interdefiníveis na presença da negação. Dessa forma, almejamos que os operadores modais duais satisfaçam tantas propriedades positivas quanto possível, as mesmas (ou quase todas) que esses satisfazem quando interdefiníveis no sistema. Assim, as relações de acessibilidade dos enquadramentos deverão ter uma interseção não-vazia. No caso limite elas irão coincidir devido à presença de uma negação clássica no sistema. Como se pode notar, os demais casos fogem do escopo desta Tese por expressar situações em que as modalidades são independentes. Deixamos para investigar tais casos omissos em trabalhos futuros.

Definição 2.1.1. *Seja* $\boldsymbol{S}$ *um sistema anódico minimal. O sistema bi-modal normal anódico minimal (ou lógica bi-modal normal anódica minimal), é obtido a partir de* $\boldsymbol{S}$*, se acrescentamos a sua linguagem o operador de possibilidade* $\Diamond$*, juntamente com os seguintes axiomas:*

(K1) $\Box(p \supset q) \supset (\Diamond p \supset \Diamond q)$

(K2) $\Diamond(p \vee q) \supset \Diamond p \vee \Diamond q$

(K3) $(\Diamond p \supset \Box q) \supset \Box(p \supset q)$

Observe que no sistema modal usual **K** os axiomas (**K1**), (**K2**) e (**K3**) são todos equivalentes ao axioma (**K**).

De acordo com a Definição 2.1.1, $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é um sistema *bi-modal* obtido acrescentado-se o operador modal $\Diamond$ à linguagem de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$. Para nosso propósito, é mais vantajoso considerar a extensão bi-modal anódica de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$, ao invés da de $\mathbf{K}^{\supset}$, porque essa é a extensão anódica que mais se aproxima dos sistemas modais usuais. Por exemplo, pelos Lema 1.3.10 e Lema 2.1.2, notamos que as modalidades $\Box$ e $\Diamond$, em $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, se distribuem bem com relação aos conectivos de conjunção ($\wedge$) e disjunção ($\vee$), respectivamente.

Deixamos como um problema aberto encontrar uma semântica adequada para uma extensão bi-modal de $\mathbf{K}^{\supset}$. Conjecturamos que a extensão de $\mathbf{K}^{\supset}$ com o mesmo aparato formal usado para estender $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ não seja possível. O leitor irá notar que a conjunção ($\wedge$) desempenha papel importante para a obtenção de alguns resultados técnicos, cruciais à completude.

Dado que $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ foi estendido apenas com a adição de novos axiomas à linguagem, então o Teorema da Dedução continua válido nessa extensão.

Seja $\mathfrak{F} = \langle W, R_\Box, R_\Diamond \rangle$ um enquadramento, onde $R_\Box$ e $R_\Diamond$ são relações binárias entre elementos de W. Para nosso propósito, será conveniente considerar os enquadramentos $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, onde $R = R_\Box \cap R_\Diamond$. Há outras possibilidades para considerar os enquadramentos, por exemplo, considerar $R_\Box \subseteq R_\Diamond$ ou $R_\Diamond \subseteq R_\Box$, ou ainda em enquadramentos em que $R_\Box$ e $R_\Diamond$ são independentes. Considerando os modelos baseados em tais enquadramentos, como na Definição 2.1.3, é fácil ver que em cada caso devemos excluir um dos axiomas:

- Se $R_\Box \subseteq R_\Diamond$, então (**K1**) deve ser excluído.
- Se $R_\Diamond \subseteq R_\Box$, então (**K3**) deve ser excluído.

Dada a semelhança desses enquadramentos com os enquadramentos adequados à "lógica da modalidade física"[5], poderíamos pensar em substituir a falta de tais axiomas por versões positivas do axioma (**LP**), *logical physical bridge axiom*. Dessa forma, $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ poderia ser visto como uma versão positiva da lógica da modalidade física. Contudo, tal façanha não parece ser possível quando partimos de um sistema bi-modal com $\Box$ e $\Diamond$ como primitivos. Note que nesses sistemas (**LP**) não pode ser definido sem a presença da negação, dado que ele relaciona duas modalidades necessárias $\Box$ e $\boxdot$. De fato, suponhamos que $\Box\alpha \supset \Diamond\alpha$, com $\Diamond$ correspondendo à modalidade física $\boxdot$, fosse uma versão positiva de (**LP**) no sistema que exclui (**K1**), isto é, para os enquadramentos em que $R_\Box \subseteq R_\Diamond$. Considere o modelo composto de um único mundo. É fácil ver que todos os axiomas de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ são válidos

[5] A lógica da modalidade física é um sistema bi-modal que tem como primitivos na linguagem duas modalidades necessárias; $\boxdot$ para a necessidade física e $\Box$ para a necessidade lógica. Dado que esse sistema é munido de uma negação clássica, as modalidades duais $\diamonddot$ e $\Diamond$ são definidas de modo padrão. Nesse sistema, (**LP**) é o axioma que conecta a modalidade lógica com a modalidade física:
(**LP**) $\Box\alpha \supset \boxdot\alpha$.
Para mais detalhes a respeito desse sistema indicamos o capítulo 6 do livro "Modalities and Multimodalities" de Carnielli e Pizzi, em [CP08].

nesse modelo, dado que nos pontos terminais fórmulas do tipo $\Box\alpha$ são sempre verdadeiras, e do tipo $\Diamond\alpha$ são sempre falsas. É fácil ver que nesse modelo (**LP**) é falsificada.

Um terceiro caso seria considerar o enquadramento onde as relações $R_\Diamond$ e $R_\Box$ são independentes (ou opostas), de maneira análoga às "lógicas modais temporais" ou também chamadas ***PF***-*lógicas*[6]. Porém, essa abordagem se afastaria muito da nossa, dado que teríamos que excluir tanto o axioma (**K1**) quanto (**K3**) − axiomas que relacionam as modalidades $\Box$ e $\Diamond$.

Para o nosso propósito, consideramos os enquadramentos com uma única relação R, definida a partir de $R_\Box$ e $R_\Diamond$, com $R = R_\Box \cap R_\Diamond$. Dessa forma, temos um sistema que tende a um sistema modal usual. De forma intuitiva, temos que na medida em que a negação adquire poder expressivo temos que a relação R tende a se igualar tanto a $R_\Box$ quanto a $R_\Diamond$. Nesse caso, estaríamos face a um sistema monomodal usual.

O seguinte lema mostra alguns resultados que valem em $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, que podem ser usados para comparar nossa axiomática com a apresentada por Dunn em [Dun95].

Lema 2.1.2. *As seguintes fórmulas são teoremas de* $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$*:*

(i) $\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta \supset \Diamond(\alpha \vee \beta)$;

(ii) $\Diamond(\alpha \wedge \beta) \supset \Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta$;

(iii) $\Box(\alpha \vee \beta) \supset \Box\alpha \vee \Diamond\beta$;

(iv) $\Diamond(\alpha \supset \beta) \supset (\Box\alpha \supset \Diamond\beta)$.

Demonstração. Em (i) e (ii) basta trocar (**K**) por (**K1**) na prova dos ítens (i) e (ii) do Lema 1.3.10.

(iii)

[6] $\mathbf{K^{PF}}$ é o sistema básico minimal das **PF**-lógicas. Os axiomas e regras que governam $\mathbf{K^{PF}}$ são os axiomas de **PC** acrescidos de duas versões de (**K**) e de (**Nec**), uma para a modalidade "futuro" e outra para a modalidade "passado". Para mais detalhes ver [CP08].

1.	$\Box(\alpha \vee \beta)$	[Hip.]
2.	$(\alpha \vee \beta) \supset (\beta \vee \alpha)$	[Teo.1.3.2 (vi)]
3.	$\Box(\alpha \vee \beta) \supset \Box(\beta \vee \alpha)$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 2]
4.	$\Box(\beta \vee \alpha)$	[(**MP**) em 1 e 3]
5.	$\Box[(\beta \supset \alpha) \supset \alpha]$	[$Def_\vee$ em 4]
6.	$\Box(\beta \supset \alpha) \supset \Box\alpha$	[(**K**) e (**MP**) em 5]
7.	$(\Diamond\beta \supset \Box\alpha) \supset \Box(\beta \supset \alpha)$	[(**K3**)]
8.	$(\Diamond\beta \supset \Box\alpha) \supset \Box\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 7 e 6]
9.	$\Diamond\beta \vee \Box\alpha$	[$Def_\vee$ em 8]
10.	$\Box\alpha \vee \Diamond\beta$	[Teo. 1.3.2 (vi) e (**MP**) em 9]

(iv)

1.	$\Diamond(\alpha \supset \beta)$	[Hip.]
2.	$\Box\alpha$	[Hip.]
3.	$\Box[(\alpha \supset \beta) \supset \beta] \supset [\Diamond(\alpha \supset \beta) \supset \Diamond\beta]$	[(**K1**)]
4.	$\Box(\alpha \vee \beta) \supset [\Diamond(\alpha \supset \beta) \supset \Diamond\beta]$	[$Def_\vee$ em 3]
5.	$\Box\alpha \supset \Box(\alpha \vee \beta)$	[Teo. 1.3.2 (i), (**K**) e (**Nec**)]
6.	$\Box(\alpha \vee \beta)$	[(**MP**) em 2 e 5]
7.	$\Diamond(\alpha \supset \beta) \supset \Diamond\beta$	[(**MP**) em 6 e 4]
8.	$\Diamond\beta$	[(**MP**) em 1 e 7]

$\Box$

Um modelo relacional para $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é uma extensão de um modelo para $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$, dado pela Definição 1.4.1.

Definição 2.1.3. *Um modelo relacional $\mathfrak{M}$ para $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é um modelo para $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge}$ acrescido da seguinte cláusula:*

(*v*) $v(\Diamond\alpha, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w') = 1$, *para algum* $w' \in W$ *tal que* wRw'.

Note que os modelos estão baseados nos enquadramentos em que a relação é definida como $R = R_\Box \cap R_\Diamond$. Vejamos que $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é correto com relação aos modelos baseados em tais enquadramentos.

Teorema 2.1.4. *(Corretude para $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$)*
Cada teorema de $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é válido na classe de todos os enquadramentos $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$, onde R não requer propriedade específica.

Demonstração. Precisamos mostrar que todos os axiomas de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ são válidos. Resta mostrar que os novos axiomas adicionados à linguagem são corretos, os demais estão feitos no Teorema 1.4.3.

- Axioma (**K1**)
  Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}$ baseado sobre $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash \Box(p \supset q) \supset (\Diamond p \supset \Diamond q)$. Pela definição de validade, temos que existe $w \in W$ tal que $v(\Box(p \supset q) \supset (\Diamond p \supset \Diamond q), w) = 0$. Pela Definição 1.4.1 (ii) temos: $v(\Box(p \supset q), w) = 1$, $v(\Diamond p, w) = 1$, e $v(\Diamond q, w) = 0$. Aplicando as cláusulas (ii), (iii) e (v) da Definição 2.1.3 temos:

  1. $v(\Diamond p, w) = 1$ sse *existe* $w' \in W$ tal que wRw', $v(p, w') = 1$;
  2. $v(\Diamond q, w) = 0$ sse *para todo* $w'' \in W$ tal que wRw'', $v(q, w'') = 0$;
  3. $v(\Box(p \supset q), w) = 1$ sse, *para todo* $w''' \in W$ tal que wRw''', temos que $v(p \supset q, w''') = 1$ see $v(p, w''') = 0$ (contradiz 1) ou $v(q, w''') = 1$ (contradiz 2).

  Portanto, $\mathfrak{M} \vDash \Box(p \supset q) \supset (\Diamond p \supset \Diamond q)$ para todo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$.

- Axioma (**K2**)
  Suponha, por redução ao absurdo, que $\mathfrak{M} \nvDash \Diamond(\alpha \vee \beta) \supset \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta$. Então, existe $w \in W$ tal que $v(\Diamond(\alpha \vee \beta) \supset \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta, w) = 0$. Pela Definição 1.4.1 (ii) temos: $v(\Diamond(\alpha \vee \beta), w) = 1$, $v(\Diamond\alpha, w) = 0$ e $v(\Diamond\beta, w) = 0$. Aplicando as cláusulas (ii), (iii) e (v) da Definição 2.1.3 temos:

  1. $v(\Diamond\alpha, w) = 0$ sse *para todo* $w' \in W$ tal que wRw', $v(\alpha, w') = 0$;
  2. $v(\Diamond\beta, w) = 0$ sse *para todo* $w'' \in W$ tal que wRw'', $v(\beta, w'') = 0$;
  3. $v(\Diamond(\alpha \vee \beta), w) = 1$ sse *existe* $w''' \in W$ t.q. wRw''', $v(\alpha \vee \beta, w''') = 1$ sse $v(\alpha, w''') = 1$ (contradiz 1) ou $v(\beta, w''') = 1$ (contradiz 2).

  Portanto, $\mathfrak{M} \vDash \Diamond(\alpha \vee \beta) \supset \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta$ para todo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$.

- Axioma (**K3**)

  Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}$ baseado sobre $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash (\Diamond p \supset \Box q) \supset \Box(p \supset q)$. Pela definição de validade, temos que existe $w \in W$ tal que $v(\Diamond p \supset \Box q, w) = 1$ e $v(\Box(p \supset q), w) = 0$. Pela Definição 2.1.3 temos:

  1. $v(\Diamond p \supset \Box q, w) = 1$ sse $v(\Diamond p, w) = 0$ ou $v(\Box q, w) = 1$ sse para todo w' tal que wRw', $v(p, w') = 0$ ou $v(q, w') = 1$. Logo, $v(p \supset q, w') = 1$ para todo w' tal que wRw'.
  2. $v(\Box(p \supset q), w) = 0$ sse existe w'' tal que wRw'' e $v(p \supset q, w'') = 0$. Absurdo com (1).

  Portanto, $\mathfrak{M} \vDash (\Diamond p \supset \Box q) \supset \Box(p \supset q)$ para todo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$.

□

A definição seguinte será de fundamental importância para a construção do modelo canônico para $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, devido (como já deve ser claro) à ausência de negação no sistema.

Definição 2.1.5. *Seja $S = \langle For, \vdash \rangle$ um sistema lógico e A um subconjunto de For. Dizemos que A é factual se existe uma fórmula $\alpha \in For$ tal que $A \nvdash \Diamond\alpha$. Caso contrário, A é chamado hipotético.*

Considere os sistemas que têm a constante $\perp$ na linguagem. Nesses sistemas podemos dizer que essa constante é "globalmente excluída", dado que $\perp \notin A$, para todo conjunto de fórmulas A. Nos modelos relacionais, podemos interpretar esse fato como $v(\perp, w) = 0$, para todo $w \in W$. Nesse caso, pela Definição 2.1.3, temos que $v(\Diamond\perp, w) = 0$ em todo $w \in W$. Dessa forma, como temos *Modus Pones* como regra de inferência, os sistemas que têm $\perp$ na linguagem devem assumir como axioma $\Diamond\perp \supset \perp$, a fim de evitar que $\perp$ seja validado por algum mundo do modelo.

De maneira análoga, olhando para a Definição 2.1.5, podemos pensar num modelo em que W é composto por conjuntos factuais. Então, para cada $w \in W$ existe α tal que $v(\Diamond\alpha, w) = 0$. Pela Definição 2.1.3, segue que

$v(\alpha, w') = 0$, para todo $w' \in W$ tal que wRw'. Dessa forma, poderíamos interpretar que a falta de $\Diamond\alpha$ em w acarreta que $\alpha \notin w'$, para cada w' tal que wRw'. Dado que α não é, necessariamente, rejeitada em cada w de W, isto é, α é rejeitada somente pela vizinhança relacional de w, então poderíamos classificar α como "proto-falsum" nessa vizinhança. Quando $\Diamond\alpha$ for globalmente excluída, então α será excluída em todas as vizinhanças, isto é, α será "globalmente excluída", nesse caso α pode ser vista como "falsum".

Fato 2.1.6. *Seja* $\boldsymbol{S}$ *o sistema* $\boldsymbol{PC}^{\supset}$*, cuja linguagem é estendida com* $\perp$*. Então* $\boldsymbol{S}$ *tem uma negação clássica.*

Demonstração. Defina a negação, $\sim p$, como $p \supset \perp$ em $\mathbf{S}$. Vejamos que $\sim$ é uma negação clássica. Pelo Teorema 1.3.2 temos que $p \vee (p \supset \perp)$ é teorema, ou seja, $p \vee \sim p$ é teorema. Para que $\mathbf{S}$ seja um sistema completo devemos, pelo menos, acrescentar como axioma $\perp \supset \beta$, para toda fórmula β. Usando o Teorema da Dedução, vejamos que $\alpha \supset (\sim\alpha \supset \beta)$ também é derivada em $\mathbf{S}$:

1. α [Hip.]
2. $\sim\alpha$ [Hip.]
3. $\alpha \supset \perp$ [$\mathrm{Def}_{\perp}$ em 2]
4. $\perp$ [(**MP**) em 1 e 3]
5. $\perp \supset \beta$ [axioma]
6. β [(**MP**) em 4 e 5]

Portanto, $\sim$ é uma negação clássica. □

O Fato 2.1.6 mostra o quanto é delicado adicionar $\perp$ à linguagem de um sistema positivo com implicação clássica. O sistema $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$, nesse sentido, é uma extensão positiva *maximal* de $\mathbf{PC}^{\supset}$ pelo fato de que qualquer outra extensão permite definir $\perp$ na linguagem e, pelo Fato 2.1.6, obtemos como resultante o sistema $\mathbf{PC}$. Da mesma forma, o sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é uma extensão bi-modal maximal de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$.

A estratégia usada por Dunn em [Dun95], e também por Celani e Jansana em [CJ97], para adicionar $\perp$ à linguagem sem que fosse possível definir uma negação, foi apelar a um cálculo de sequentes que, de certa forma, substitui a implicação (ou melhor, reproduz certas propriedades da implicação mas fora do sistema, em um nível matalinguístico). Da mesma forma que $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ não admite uma extensão sem cair no sistema modal **K**, o sistema de Dunn e o de Celani e Jansana também são maximais nesse sentido. A vantagem é que $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é maximal sem o elemento *falsum*. Nesse sentido, podemos afirmar que nossa abordagem é eminentemente positiva.

Para a demonstração do Teorema Fundamental do Modelo Canônico para o sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ nos inspiramos no artigo de Celani e Jansana em [CJ97]. Fazemos a construção do modelo canônico baseando-se na noção de *teorias primas maximais*, introduzidas por Dunn em [Dun95].

Seja $Dep(\Delta)$ o conjunto *depossibilitação*, onde Δ é um conjunto de fórmulas de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, definido da seguinte maneira:[7]

$$Dep(\Delta) = \{\alpha : \Diamond\alpha \in \Delta\}$$

Para A um conjunto qualquer, denotamos por $\overline{A}$ o conjunto *complementar* de A, isto é, $\overline{A} = \{\alpha : \alpha \notin A\}$. Com base na definição acima e na Definição 1.4.13, temos o seguinte resultado.

Fato 2.1.7. *Se Δ é primo maximal, então $\overline{Dep(\Delta)}$ é fechado por disjunções.*

Demonstração. Seja $\Diamond\alpha \notin \Delta$ e $\Diamond\beta \notin \Delta$ e suponha, por redução ao absurdo, que $\alpha \vee \beta \in Dep(\Delta)$. Pela definição de $Dep(\Delta)$ temos que $\Diamond(\alpha \vee \beta) \in \Delta$, isto é, $\Delta \vdash \Diamond(\alpha \vee \beta)$. Por (**K2**) e monotonicidade temos que $\Delta \vdash \Diamond(\alpha \vee \beta) \supset \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta$ daí, por (**MP**), segue que $\Delta \vdash \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta$. Como Δ é primo, então $\Delta \vdash \Diamond\alpha$ ou $\Delta \vdash \Diamond\beta$. Dado que Δ é maximal, pelo Lema 1.4.11 (i), sabemos que Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria, daí $\Diamond\alpha \in \Delta$ ou $\Diamond\beta \in \Delta$. Absurdo. $\square$

Usando a Definição 1.4.8 e a Definição 1.4.5 definimos o *enquadramento canônico*. Seja $\mathfrak{F} = \langle \widehat{W}, \widehat{R}_\Box, \widehat{R}_\Diamond \rangle$ um enquadramento, onde $\widehat{W}$ é composto por extensões maximais primas. Sejam Δ e Δ' elementos de $\widehat{W}$. As relações de acessibilidade $\widehat{R}_\Box$ e $\widehat{R}_\Diamond$ são definidas da seguinte forma:

[7] Em [Dun95], Dunn denota os conjuntos $Den(\Delta)$ e $Dep(\Delta)$, respectivamente, por $\Box^{-1}(\Delta)$ e $\Diamond^{-1}(\Delta)$. O termo "depossibilitação" está sendo introduzido aqui de forma a marcar a analogia com o termo *denecessitation*, introduzido em [CP08], e que traduzimos como *denecessitação*.

1. $\Delta \widehat{R}_{\Box} \Delta'$ sse existe Π primo maximal tal que $Den(\Pi) \subseteq \Delta' \subseteq Dep(\Pi)$ e $\Delta \subseteq \Pi$.

2. $\Delta \widehat{R}_{\Diamond} \Delta'$ sse existe Π primo maximal tal que $Den(\Delta) \subseteq \Pi \subseteq Dep(\Delta)$ e $\Delta' \subseteq \Pi$.

O modelo canônico para $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é definido com base em um enquadramento no qual $\widehat{R} = \widehat{R}_{\Box} \cap \widehat{R}_{\Diamond}$. O Teorema 2.1.12 mostra que a relação $\widehat{R}$ está bem definida.

Definição 2.1.8. *Seja $\mathcal{L} = \langle For, \vdash \rangle$ o sistema $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$. O modelo canônico para $\mathcal{L}$ é uma terna $\langle \widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V} \rangle$ com as seguintes propriedades:*
(i) $\widehat{W} = \{\Delta \subseteq For : \Delta$ é primo factual maximal$\}$;
(ii) $\Delta \widehat{R} \Delta'$ sse $Den(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep(\Delta)$, para cada Δ, Δ' em $\widehat{W}$;
(iii) Cada $v_\Delta \in \widehat{V}$ é uma valoração modal de $\mathcal{L}$, definida a partir de algum $\Delta \in \widehat{W}$, por:

$$v_\Delta(p) = \begin{cases} 1 & se\ p \in \Delta \\ 0 & se\ p \notin \Delta \end{cases}$$

Note que os resultados referentes aos conjuntos primos maximais, apresentados no Capítulo 1, serão úteis neste capítulo para a demonstração de completude para $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$. Considere $Pos(\Delta)$ o conjunto, chamado de *possibilitação* de Δ, definido como:

$$Pos(\Delta) = \{\Diamond\alpha : \alpha \in \Delta\}$$

De maneira análoga, definimos também o conjunto *necessitação* de Δ como:

$$Nec(\Delta) = \{\Box\alpha : \alpha \in \Delta\}$$

Fato 2.1.9. *Se Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria, então $Pos(\Delta)$ é uma $\mathcal{L}$-teoria.*

Demonstração. Raciocínio análogo ao usado para demonstrar o Fato 1.4.15 trocando o axioma (**K**) pelo (**K1**). □

Definição 2.1.10. *Uma teoria T é gerada por um conjunto Δ se $T = \{\alpha : \Delta \vdash \alpha\}$.*

No Lema 1.4.11 (iv) mostramos que as teorias de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ são *fechadas por conjunção.* O Fato 2.1.9, acima, garante que $Pos(\Delta)$ é uma teoria de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ sempre que Δ é uma teoria de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$. Compondo esses resultados concluímos que se Δ é uma teoria de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, então $Pos(\Delta)$ é uma teoria de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ fechada por conjunção. Essa observação será relevante para elaborar o argumento do Lema 2.1.11 a seguir, dado que neste capítulo estamos assumindo $\mathcal{L} = \mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$.

Lema 2.1.11. *Sejam Δ e Δ' conjuntos factuais primos maximais de sentenças em $\mathcal{L}$. Então:*
(i) $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ sse $\Delta R_\Box \Delta'$;
(ii) $\Delta' \subseteq Dep(\Delta)$ sse $\Delta R_\Diamond \Delta'$.

Demonstração. O argumento dos ítens (i) e (ii) são divididos em sub-argumentos, como veremos a seguir.
(i)
($\Leftarrow$) Se $\Delta R_\Box \Delta'$ então, por definição de $R_\Box$, temos que $Den(\Pi) \subseteq \Delta' \subseteq Dep(\Pi)$ e $\Delta \subseteq \Pi$. Dado que $\Delta \subseteq \Pi$ então $Den(\Delta) \subseteq Den(\Pi)$ daí, como $Den(\Pi) \subseteq \Delta'$ então $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$.

($\Rightarrow$) Considere T a $\mathcal{L}$-teoria gerada pelo conjunto $\Delta \cup Pos(\Delta')$. Note que $Nec(\overline{\Delta'}) \neq \varnothing$ dado que Δ' é primo maximal, ou seja, é não-trivial, temos $\overline{\Delta'} \neq \varnothing$. Claramente $T \neq \varnothing$ pela própria definição de T.

$$T \cap Nec(\overline{\Delta'}) = \varnothing \tag{2.1}$$

Suponha, por absurdo, que $\beta \in T \cap Nec(\overline{\Delta'})$ então, $\beta \in T$ e $\beta \in Nec(\overline{\Delta'})$. Pela definição de T, temos que $\Delta \cup Pos(\Delta') \vdash \beta$. Dado que Δ e Δ' são conjuntos primos maximais de sentenças de $\mathcal{L}$, então Δ e $Pos(\Delta')$ são fechados por conjunções então, sem perda de generalidade, sabemos que existem $\psi \in \Delta$ e $\lambda \in \Delta'$ tal que $\{\psi, \Diamond\lambda\} \vdash \beta$. Como $\beta \in Nec(\overline{\Delta'})$ então existe $\alpha \notin \Delta'$ tal que β é $\Box\alpha$, dessa forma, $\{\psi, \Diamond\lambda\} \vdash \Box\alpha$. Pelo Teorema da Dedução temos que $\vdash \psi \supset (\Diamond\lambda \supset \Box\alpha)$. Por monotonicidade e (**MP**) temos que $\Delta \vdash \Diamond\lambda \supset \Box\alpha$. Por

(**K3**) e (**MP**) temos que $\Delta \vdash \Box(\lambda \supset \alpha)$. Sabemos, pelo Lema 1.4.11 (i), que Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria e disso segue que $\Box(\lambda \supset \alpha) \in \Delta$, daí $\lambda \supset \alpha \in Den(\Delta)$. Por hipótese, $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$, logo $\lambda \supset \alpha \in \Delta'$ e assim, $\Delta' \vdash \lambda \supset \alpha$. Como $\lambda \in \Delta'$ segue que $\alpha \in \Delta'$. Absurdo.

$$Nec(\overline{\Delta'}) \text{ é fechado por disjunções} \tag{2.2}$$

Sejam $\Box\alpha, \Box\beta \in Nec(\overline{\Delta'})$ e suponha, por absurdo, que $\Box\alpha \vee \Box\beta \notin Nec(\overline{\Delta'})$.

1. Se $\Box\alpha \in Nec(\overline{\Delta'})$ e $\Box\beta \in Nec(\overline{\Delta'})$ então $\alpha \notin \Delta'$ e $\beta \notin \Delta'$ daí, pelos axiomas (**A5**) e (**A6**), temos que $\alpha \wedge \beta \notin \Delta'$.

2. Se $\Box\alpha \vee \Box\beta \notin Nec(\overline{\Delta'})$, então $\Box\alpha \notin Nec(\overline{\Delta'})$ e $\Box\beta \notin Nec(\overline{\Delta'})$ daí, $\alpha \notin \overline{\Delta'}$ e $\beta \notin \overline{\Delta'}$. Logo, $\alpha \in \Delta'$ e $\beta \in \Delta'$ e daí, pelo axioma (**A4**) e (**MP**), segue que $\alpha \wedge \beta \in \Delta'$. Absurdo com (1).

Como (2.1) e (2.2) são válidas então, pelo Corolário 1.4.14, existe uma $\mathcal{L}$-teoria prima maximal Π tal que $T \subseteq \Pi$ e $\Pi \cap Nec(\overline{\Delta'}) = \varnothing$.

$$\Delta' \subseteq Dep(\Pi) \tag{2.3}$$

De fato, se $\alpha \in \Delta'$, então $\Diamond\alpha \in Pos(\Delta')$. Como T é gerada por $\Delta \cup Pos(\Delta')$ então $\Delta \cup Pos(\Delta') \subseteq T$ daí, $\Diamond\alpha \in T$. Como $T \subseteq \Pi$, então $\Diamond\alpha \in \Pi$. Portanto, $\alpha \in Dep(\Pi)$.

$$Den(\Pi) \subseteq \Delta' \tag{2.4}$$

Suponha, por redução ao absurdo, que $\alpha \in Den(\Pi)$ e $\alpha \notin \Delta'$. Como $\alpha \notin \Delta'$ então $\alpha \in \overline{\Delta'}$ daí, $\Box\alpha \in Nec(\overline{\Delta'})$. Como $\alpha \in Den(\Pi)$ então $\Box\alpha \in \Pi$. Portanto $\Pi \cap Nec(\overline{\Delta'}) \neq \varnothing$. Absurdo.

Dado que $\Delta \cup Pos(\Delta') \subseteq T$, claramente $\Delta \subseteq T$. Daí, a partir de (2.4) e (2.3), e do fato que $T \subseteq \Pi$, segue que $Den(\Pi) \subseteq \Delta' \subseteq Dep(\Pi)$ e $\Delta \subseteq \Pi$, ou seja, $\Delta R_{\Box} \Delta'$

(ii)
($\Leftarrow$) Se $\Delta R_{\Diamond} \Delta'$ então, por definição, $Den(\Delta) \subseteq \Pi \subseteq Dep(\Delta)$ e $\Delta' \subseteq \Pi$. Portanto,

$\Delta' \subseteq Dep(\Delta)$.

($\Rightarrow$) Considere T a $\mathcal{L}$-teoria gerada pelo conjunto $\Delta' \cup Den(\Delta)$. Claramente $T \neq \varnothing$. Temos também que $\overline{Dep(\Delta)} \neq \varnothing$. De fato, caso contrário, $Dep(\Delta)$ seria trivial, nesse caso, $\Diamond\alpha \in \Delta$ para toda α. Absurdo, desde que Δ é factual.

$$T \cap \overline{Dep(\Delta)} = \varnothing \tag{2.5}$$

Suponha, por absurdo, que $\beta \in T \cap \overline{Dep(\Delta)}$ então, $\beta \in T$ e $\beta \in \overline{Dep(\Delta)}$. Dado que Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria então, pelo Fato 1.4.15, $Den(\Delta)$ é uma $\mathcal{L}$-teoria daí, pelo Lema 1.4.11 (iv), Δ e $Den(\Delta)$ são fechados por conjunções. Sem perda da generalidade, dado que $\beta \in T$, temos que existem δ_1, δ_2 tais que $\Box\delta_1 \in \Delta$ e $\delta_2 \in \Delta'$ e $\{\delta_1, \delta_2\} \vdash \beta$. Pelo Teorema da Dedução temos que $\vdash \delta_1 \supset (\delta_2 \supset \beta)$. Por (**Nec**) e (**K**) temos que $\vdash \Box\delta_1 \supset \Box(\delta_2 \supset \beta)$. Pela monotonicidade e (**MP**) temos que $\Delta \vdash \Box(\delta_2 \supset \beta)$ e por (**K1**) e (**MP**) segue que $\Delta \vdash \Diamond\delta_2 \supset \Diamond\beta$. Dado que $\delta_2 \in \Delta'$ e, por hipótese, $\Delta' \subseteq Dep(\Delta)$ então $\delta_2 \in Dep(\Delta)$ daí, $\Diamond\delta_2 \in \Delta$. Portanto, $\Delta \vdash \Diamond\beta$, daí $\Diamond\beta \in \Delta$. Logo, $\beta \in Dep(\Delta)$, ou seja, $\beta \notin \overline{Dep(\Delta)}$. Absurdo.

Sabemos, pelo Fato 2.1.7, que $\overline{Dep(\Delta)}$ é fechado por disjunções, como (2.5) é válida então, aplicando o Corolário 1.4.14, temos que existe uma $\mathcal{L}$-teoria prima maximal Π tal que $T \subseteq \Pi$ e $\Pi \cap \overline{Dep(\Delta)} = \varnothing$.

1. Dado que $T \subseteq \Pi$ e T é gerada por $Den(\Delta) \cup \Delta'$, então $Den(\Delta) \subseteq T$ e $\Delta' \subseteq T$ daí, $Den(\Delta) \subseteq \Pi$ e $\Delta' \subseteq \Pi$.

2. Dado que $\Pi \cap \overline{Dep(\Delta)} = \varnothing$, então $\Pi \subseteq Dep(\Delta)$.

Portanto, de (1) e (2) temos $Den(\Delta) \subseteq \Pi \subseteq Dep(\Delta)$ e $\Delta' \subseteq \Pi$, ou seja, $\Delta R_\Diamond \Delta'$. $\Box$

Teorema 2.1.12. $\widehat{R} = \widehat{R}_\Box \cap \widehat{R}_\Diamond$.

Demonstração. Aplicando a Definição 2.1.8 e Lema 2.1.11 temos:
$\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \widehat{R}_\Box \cap \widehat{R}_\Diamond$ sse $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \widehat{R}_\Box$ e $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \widehat{R}_\Diamond$ sse $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ e $\Delta' \subseteq Dep(\Delta)$ sse $Den(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep(\Delta)$ sse $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \widehat{R}$. $\Box$

Pelo Lema 1.4.11 (i) vimos que os conjuntos maximais de uma dada lógica $\mathcal{L}$ são, na verdade, teorias de $\mathcal{L}$. Dessa forma, os conjuntos primos maximais de $\mathcal{L}$ são $\mathcal{L}$-teorias primas maximais. Para simplicidade, nos resultados que seguem, usamos essas duas conotações indiferentemente.

Teorema 2.1.13. *Seja Δ uma $\mathcal{L}$-teoria factual prima maximal. Então: $\Box\varphi \in \Delta$ sse $\varphi \in \Delta'$ para toda $\mathcal{L}$-teoria facual prima maximal Δ' tal que $\Delta\widehat{R}\Delta'$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponha $\Box\varphi \in \Delta$ e seja Δ' tal que $\Delta\widehat{R}\Delta'$. Vejamos que $\varphi \in \Delta'$. De fato, dado que $\Delta\widehat{R}\Delta'$ então $\mathit{Den}(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq \mathit{Dep}(\Delta)$. Como $\Box\varphi \in \Delta$ então $\varphi \in \mathit{Den}(\Delta)$. Logo $\varphi \in \Delta'$.

($\Rightarrow$) Vejamos, por contraposição, que se $\Box\varphi \notin \Delta$ então existe uma $\mathcal{L}$-teoria prima Δ' tal que $\Delta\widehat{R}\Delta'$ e $\varphi \notin \Delta'$. Considere $\Omega = \{\varphi \vee \alpha : \alpha \notin \mathit{Dep}(\Delta)\}$ para $\Box\varphi \notin \Delta$ e seja Λ o fecho disjuntivo de Ω. A demonstração é elaborada em sub-argumentos, como mostramos a seguir:

$$\text{Se } \beta \in \Lambda, \text{ existe } \psi \in \Omega \text{ tal que } \vdash \beta \supset \psi \text{ e } \vdash \psi \supset \beta \tag{2.6}$$

De fato, se $\beta \in \Lambda$ então, pela definição de Ω, temos que existem $\alpha_1 \notin \mathit{Dep}(\Delta)$ e $\alpha_2 \notin \mathit{Dep}(\Delta)$ tal que $\beta = (\varphi \vee \alpha_1) \vee (\varphi \vee \alpha_2)$. Sabe-se, pelo Fato 2.1.7, que $\overline{\mathit{Dep}(\Delta)}$ é fechado por disjunções, então $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \notin \mathit{Dep}(\Delta)$. Por definição, $\varphi \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2) \in \Omega$. Pelo Teorema 1.3.2 sabemos que a disjunção é associativa e comutativa daí, é fácil ver que $\vdash [\varphi \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2)] \supset \beta$ e $\vdash \beta \supset [\varphi \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2)]$. Portanto, cada fórmula de Λ é equivalente a uma fórmula de Ω.

Dado que $\mathit{Dep}(\Delta)$ é não-trivial em face de Δ ser factual, então $\Omega \neq \emptyset$ daí, $\Lambda \neq \emptyset$. Claramente $\mathit{Den}(\Delta) \neq \emptyset$ dado que Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria.

$$\mathit{Den}(\Delta) \cap \Lambda = \emptyset \tag{2.7}$$

Suponha, por redução ao absurdo, que $\psi \in \mathit{Den}(\Delta) \cap \Lambda$. Então, $\psi \in \mathit{Den}(\Delta)$ e $\psi \in \Lambda$ daí, por (2.6), temos que existe $\alpha \notin \mathit{Dep}(\Delta)$ tal que $\varphi \vee \alpha \in \Omega$ e $\vdash \psi \supset (\varphi \vee \alpha)$. Por (**Nec**), (**K**) e (**MP**) segue que $\vdash \Box\psi \supset \Box(\varphi \vee \alpha)$. Dado que

$\psi \in Den(\Delta)$ então $\Box\psi \in \Delta$ logo, por monotonicidade e (**MP**), $\Delta \vdash \Box(\varphi \vee \alpha)$. Pelo Lema 2.1.2 e (**MP**) segue que $\Delta \vdash \Box\varphi \vee \Diamond\alpha$ daí, como Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria prima segue que $\Box\varphi \in \Delta$ ou $\Diamond\alpha \in \Delta$. Em ambos os casos derivamos uma contradição uma vez que $\Box\varphi \notin \Delta$ e $\alpha \notin Dep(\Delta)$.

Por construção Λ é fechado por disjunções e daí, pelo Corolário 1.4.14 e (2.7), sabemos que existe uma $\mathcal{L}$-teoria prima maximal Δ' tal que $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ e $\Delta' \cap \Lambda = \emptyset$. Dado que Δ é $\mathcal{L}$-teoria prima maximal e $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$. Pelo Lema 2.1.11 (i) segue que $\Delta R_{\Box} \Delta'$. Pela construção de Λ temos que $\overline{Dep(\Delta)} \subseteq \Lambda$ daí, $\overline{\Lambda} \subseteq Dep(\Delta)$. Como $\Delta' \cap \Lambda = \emptyset$, então $\Delta' \subseteq Dep(\Delta)$. Dessa forma, temos que $Den(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep(\Delta)$, ou seja, $\Delta \widehat{R} \Delta'$, para algum Δ'.

$$\varphi \notin \Delta' \tag{2.8}$$

Dado que $\Delta' \cap \Lambda = \emptyset$, então $\lambda \notin \Delta'$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Por (2.6) sabemos que existe α_i tal que $\alpha_i \notin Dep(\Delta)$, onde λ equivale a $\varphi \vee \alpha_i$, daí $\varphi \vee \alpha_i \notin \Delta'$. Pelo Teorema 1.3.2 (i), temos que $\varphi \supset (\varphi \vee \alpha_i) \in \Delta'$, daí $\varphi \notin \Delta'$.

Portanto existe uma $\mathcal{L}$-teoria prima Δ' tal que $\Delta \widehat{R} \Delta'$ e $\varphi \notin \Delta'$. $\Box$

Teorema 2.1.14. *Seja Δ uma $\mathcal{L}$-teoria factual prima maximal. Então $\Diamond\varphi \in \Delta$ sse existe uma $\mathcal{L}$-teoria factual prima Δ' maximal tal que $\Delta \widehat{R} \Delta'$ e $\varphi \in \Delta'$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Se $\Delta \widehat{R} \Delta'$, então $Den(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep(\Delta)$ daí, se $\varphi \in \Delta'$ então $\varphi \in Dep(\Delta)$. Portanto $\Diamond\varphi \in \Delta$.

($\Rightarrow$) Suponha que $\Diamond\varphi \in \Delta$ e seja T a $\mathcal{L}$-teoria gerada por $Den(\Delta) \cup \{\varphi\}$. Sabemos, usando o mesmo argumento dado no Lema 2.1.11 (ii), que os conjuntos $Dep(\Delta)$ e T são não-vazios. Primeiramente, vejamos que:

$$T \cap \overline{Dep(\Delta)} = \emptyset \tag{2.9}$$

Suponha, por absurdo, que $\beta \in T \cap \overline{Dep(\Delta)}$ então, $\beta \in T$ e $\beta \in \overline{Dep(\Delta)}$. Como Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria então, pelo Fato 1.4.15, $Den(\Delta)$ é $\mathcal{L}$-teoria daí, pelo

Lema 1.4.11 (iv), temos que $Den(\Delta)$ é fechado por conjunção. Sem perda de generalidade, dado que $\beta \in T$, temos que existem δ_1 e φ tais que $\Box\delta_1 \in \Delta$ e $\varphi \in \{\varphi\}$ e $\{\delta_1, \varphi\} \vdash \beta$. Pelo Teorema da Dedução temos que $\vdash \delta_1 \supset (\varphi \supset \beta)$. Por (**Nec**), (**K**) e (**MP**), segue que $\vdash \Box\delta_1 \supset \Box(\varphi \supset \beta)$. Pela monotonicidade e (**MP**) temos que $\Delta \vdash \Box(\varphi \supset \beta)$. Então, por (**K1**) e (**MP**), temos que $\Delta \vdash \Diamond\varphi \supset \Diamond\beta$, ou seja, $(\Diamond\varphi \supset \Diamond\beta) \in \Delta$. Dado que supusemos $\beta \notin Dep(\Delta)$, isto é, $\Diamond\beta \notin \Delta$, então $\Diamond\varphi \notin \Delta$. Absurdo.

Sabemos, pelo Fato 2.1.7, que $\overline{Dep(\Delta)}$ é fechado por disjunções, como (2.9) é válida então, aplicando o Corolário 1.4.14, temos que existe uma $\mathcal{L}$-teoria prima maximal Δ' tal que $T \subseteq \Delta'$ e $\Delta' \cap \overline{Dep(\Delta)} = \varnothing$.

1. Dado que T é gerada por $Den(\Delta) \cup \{\varphi\}$, então $Den(\Delta) \subseteq T$ e $\{\varphi\} \subseteq T$. Como $T \subseteq \Delta'$, então $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ e $\{\varphi\} \subseteq \Delta'$.

2. Dado que $\Delta' \cap \overline{Dep(\Delta)} = \varnothing$, então $\Delta' \subseteq Dep(\Delta)$.

Portanto, de (1) e (2) temos $Den(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep(\Delta)$ e $\varphi \in \Delta'$, ou seja, existe uma $\mathcal{L}$-teoria prima maximal Δ' tal que $\Delta\widehat{R}\Delta'$ e $\varphi \in \Delta'$. $\Box$

Teorema 2.1.15. *(Teorema Fundamental do Modelo Canônico)*
Seja $\langle \widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V} \rangle$ um modelo canônico para $\mathcal{L}$. Então, para qualquer fórmula α e qualquer $\Delta \in \widehat{W}$, temos:

$$v_\Delta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \in \Delta \\ 0 & \text{se } \alpha \notin \Delta \end{cases}$$

Demonstração. Por indução na complexidade das fórmulas. Os únicos casos não-triviais são para $\alpha = \Box\beta$ e $\alpha = \Diamond\beta$, os demais são como no caso clássico.

1. Pelo Teorema 2.1.13 temos que $\Box\beta \in \Delta$ sse $\beta \in \Delta'$ para todo Δ' tal que $\Delta\widehat{R}\Delta'$. Pela hipótese de indução, $v_{\Delta'}(\beta) = 1$ em cada Δ' tal que $\Delta\widehat{R}\Delta'$, logo $v_\Delta(\Box\beta) = 1$. Portanto $\Box\beta \in \Delta$ sse $v_\Delta(\Box\beta) = 1$.

2. Pelo Teorema 2.1.14 temos que $\Diamond\beta \in \Delta$ sse para algum Δ' tal que $\Delta\widehat{R}\Delta'$ e $\beta \in \Delta'$. Pela hipótese de indução $v_{\Delta'}(\beta) = 1$ para algum Δ' tal que $\Delta\widehat{R}\Delta'$, logo $v_\Delta(\Diamond\beta) = 1$. Portanto $\Diamond\beta \in \Delta$ sse $v_\Delta(\Diamond\beta) = 1$.

□

A partir da Definição 2.1.5 definimos o que entendemos por uma dedução factual.

Definição 2.1.16. *Seja $\Gamma \vdash \alpha$ a dedução de α a partir Γ. A dedução é chamada factual se Γ é um conjunto factual.*

A completude forte para o sistema anódico bi-modal $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ fica, dessa forma, restringida às deduções factuais, como mostramos a seguir.

Corolário 2.1.17. *(Completude para $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$)*
Seja $\mathcal{L} = \langle For \vdash \rangle$ o sistema $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ e $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For$, com Γ factual. Se $\Gamma \vDash \alpha$, então $\Gamma \vdash \alpha$.

Demonstração. Dado que Γ é factual então existe β tal que $\Diamond\beta \notin \Gamma$. Suponha $\Gamma \nvdash \alpha$, claramente Γ é não-trivial e $\Gamma \cap \{\alpha, \Diamond\beta\} = \varnothing$. Pelo Corolário 1.4.14, existe uma teoria prima maximal Δ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Delta \cap \{\alpha, \Diamond\beta\} = \varnothing$. Claramente $\alpha \notin \Delta$ e Δ é factual, logo $\Delta \in \widehat{W}$. Pelo Teorema 2.1.15, $v_\Delta(\alpha) = 0$ e $v_\Delta(\Gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Portanto $\Gamma \nvDash \alpha$. □

É evidente que a restrição às deduções factuais mencionada acima não é necessária para a completude fraca (isto é, para Γ um conjunto vazio).

Na próxima seção mostramos que o sistema bi-modal anódico $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ pode ser estendido a uma classe infinita de sistemas, obtida adicionando-se instâncias do esquema de axiomas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, proposto por Lemmon e Scott, ao sistema bi-modal anódico $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$.

2.2 Uma hierarquia infinita de sistemas anódicos

O sistema anódico bi-modal $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, estudado na seção anterior, em certo sentido, pode ser classificado como *modalmente mínimo*, no sentido que permite ser estendido com axiomas modais específicos dando origem, assim, a uma infinidade de sistemas bi-modais anódicos.

Esse aparato mínimo serve de alicerce para a construção não de um sistema modal anódico em particular, mas de uma classe infinita de sistemas modais anódicos. De acordo com Carnielli e Pizzi em [CP08], página 92, investigar propriedades comuns a uma classe de sistemas é importante para a análise de sistemas modais.

> "An important progress in the analysis of modal systems has been attained by studying not only the properties of a single system, but the properties of an unlimited number of systems belonging to the same class."

Essa extensão será lograda adicionando-se a $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ instâncias do esquema de axiomas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ o qual engloba grande parte dos axiomas modais conhecidos da literatura. Esse esquema foi proposto por Lemmon e Scott em [LS77] e permite tratar simultaneamente de uma classe de sistemas anódicos, como veremos mais adiante.

Nosso propósito em investigar tal classe de sistemas tenciona, em um segundo momento, estendê-la com diferentes tipos de negação a fim de contribuir para o esclarecimento do papel da negação no âmbito das modalidades. Por um lado estamos estabelecendo uma metodologia para obter lógicas modais de diferentes tipos, e por outro lado mostraremos que esse aparato permite identificar, por exemplo, a importância da negação para a solução de alguns paradoxos deônticos e epistêmicos.

A classe de lógicas que consideramos será obtida por extensão dos sistemas modais anódicos minimais com o esquema de axiomas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, onde os índices numéricos indicam o número de ocorrências de cada operador modal na interação entre eles:

$$\mathbf{G}^{k,l,m,n} \qquad \Diamond^k \Box^l \alpha \supset \Box^m \Diamond^n \alpha$$

Esse esquema nos permite escrever diversos dos axiomas conhecidos na literatura, bastando escolher adequadamente os índices numéricos, porém o conhecido e problemático axioma de McKinsey não é expressado por esse esquema (veja Capítulo 5, página 200). Vejamos alguns exemplos:

Tabela 2.2.1. *Instâncias conhecidas de* $\boldsymbol{G}^{k,l,m,n}$.

Nome	*Instância*	*Axioma*
*(**T**)*	$\boldsymbol{G}^{0,1,0,0}$	$\Box p \supset p$
*(**D**)*	$\boldsymbol{G}^{0,1,0,1}$	$\Box p \supset \Diamond p$
*(**B**)*	$\boldsymbol{G}^{0,0,1,1}$	$p \supset \Box\Diamond p$
*(**4**)*	$\boldsymbol{G}^{0,1,2,0}$	$\Box p \supset \Box\Box p$
*(**5**)*	$\boldsymbol{G}^{1,0,1,1}$	$\Diamond p \supset \Box\Diamond p$

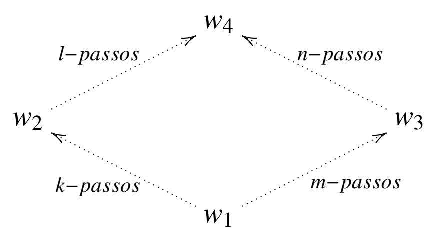
Nas lógicas modais usuais, da mesma forma que cada axioma modal faz corresponder uma propriedade à relação de acessibilidade (por exemplo, ao axioma (**T**) corresponde a relação reflexiva), também existe uma correspondência abstrata entre o esquema de axiomas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ e um esquema de propriedades que denotamos por $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$. Em [CP08] essa propriedade é chamada de *propriedade diamante* enquanto Chellas, em [Che80], a nomeia como *propriedade incestual*. Nas Ciências da Computação essa propriedade é conhecida como *propriedade de Church-Rosser*, em referência (apenas uma analogia) a uma famosa propriedade de confluência demonstrada por Alonzo Church e J. Barkley Rosser para o λ-cálculo. Para ilustrar essa propriedade considere a seguinte convenção:

- $w_i R^0 w_j$ significa que $w_i = w_j$;
- $w_i R^m w_j$ denota que w_j é acessível a partir de w_i em m-passos, ou seja, existem $m-1$ mundos $w_{i+1} \cdots w_{i+(m-1)}$ tal que $w_i R w_{i+1} \cdots w_{i+(m-1)} R w_j$.

O esquema de propriedades pode ser expresso em linguagem de primeira ordem como:

$$\mathbf{P}^{k,l,m,n} \quad \forall w_1 \forall w_2 \forall w_3((w_1 R^k w_2 \wedge w_1 R^m w_3) \supset \exists w_4(w_2 R^l w_4 \wedge w_3 R^n w_4))$$

Geometricamente, visualizamos a propriedade da relação por meio do seguinte esquema:



Essa versão generalizada dos sistemas modais, em que a relação entre os mundos w e w' é dada em r-passos, para $r \in \{k, l, m, n\}$, requer alguns ajustes óbvios nas definições usadas anteriormente para que se possa demonstrar a completude. Por exemplo, a fórmula $\Box^2\alpha$ é uma abreviação para $\Box\Box\alpha$. Desse modo, de forma iterada temos que a valoração v, no modelo, de fórmulas do tipo $\Box^r\alpha$ e $\Diamond^r\alpha$ são expressas da seguinte forma:

- $v(\Box^r\alpha, w) = 1$ sse $v(\alpha, w') = 1$ para todo $w' \in W$ tal que $wR^r w'$.
- $v(\Diamond^r\alpha, w) = 1$ sse $v(\alpha, w') = 1$ existe $w' \in W$ tal que $wR^r w'$.

Usando as convenções acima temos o seguinte resultado.

Fato 2.2.2. *(i)* $\Box^n(\alpha \supset \beta) \supset \Box^n\alpha \supset \Box^n\beta$.
(ii) $\Box^n(\alpha \supset \beta) \supset \Diamond^n\alpha \supset \Diamond^n\beta$.
(iii) $\Diamond^n(\alpha \vee \beta) \supset \Diamond^n\alpha \vee \Diamond^n\beta$.
(iv) $\Diamond^n(\alpha \supset \beta) \supset \Box^n\alpha \supset \Diamond^n\beta$

Demonstração. O resultado segue por iteração do processo.
(i)

1.	$\Box(\alpha \supset \beta) \supset \Box\alpha \supset \Box\beta$	[(**K**)]
2.	$\Box[\Box(\alpha \supset \beta) \supset \Box\alpha \supset \Box\beta]$	[(**Nec**) em 1]
3.	$\Box\Box(\alpha \supset \beta) \supset \Box(\Box\alpha \supset \Box\beta)$	[(**K**) e (**MP**) em 2]
4.	$\Box(\Box\alpha \supset \Box\beta) \supset \Box\Box\alpha \supset \Box\Box\beta$	[(**K**)]
5.	$\Box\Box(\alpha \supset \beta) \supset \Box\Box\alpha \supset \Box\Box\beta$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 3 e 4]
6.	$\Box^2(\alpha \supset \beta) \supset \Box^2\alpha \supset \Box^2\beta$	[Notação em 5]

(ii) Mesmo argumento usado em (i), trocando (**K**) por (**K1**).
(iii) Mesmo argumento usado em (i), trocando (**K**) por (**K2**).
(iv) Mesmo argumento usado em (i), trocando (**K**) pelo Lema 2.1.2 (iv).

□

Como mostraremos mais adiante, através do Teorema 2.2.6, no caso dos sistemas bi-modais anódicos, não será suficiente adicionar uma única instância do axioma $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ a $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ para a obtenção da completude. Dado que não temos negação no sistema, o que resulta na impossbilidade de se definir uma modalidade em função da outra, para que a relação de acessibilidade possa satisfazer a propriedade $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$ deve-se acrescentar a cada instância de $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ também a sua instância dual (isto é, $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$) a fim de expressar a bi-modalidade do sistema. Por exemplo, no caso do sistema anódico bi-modal **T**, para que a relação de acessibilidade seja reflexiva, ao tomarmos a instância $\mathbf{G}^{0,1,0,0}$ (isto é, $\Box\alpha \supset \alpha$), deve-se adicionar também a instância dual $\mathbf{G}^{0,0,0,1}$ (isto é, $\alpha \supset \Diamond\alpha$).

Denotamos por $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$+$\mathbf{G}^{k,l,m,n}$+$\mathbf{G}^{m,n,k,l}$ a extensão de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ com as instâncias $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$. Para mostrar que essa classe de sistemas é correta basta mostrar que $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ é validada por todos os enquadramentos no qual a relação de acessibilidade satisfaz a propriedade $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 2.2.3. *Toda instância de $G^{k,l,m,n}$ é válida em todos os enquadramentos nos quais R satisfaz à condição $P^{k,l,m,n}$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que alguma instância do esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ não seja válida. Então, deve existir um mundo w_1 tal que:
(a) $v(\Diamond^k\Box^l\alpha, w_1) = 1$
(b) $v(\Box^m\Diamond^n\alpha, w_1) = 0$

A partir de (a) e da definição de valoração no modelo, segue que existe um mundo w_2 tal que $w_1R^kw_2$ e $v(\Box^l\alpha, w_2) = 1$, e disso segue que α é verdadeira em *todo* mundo acessível a partir de w_2, em l-passos.

A partir de (b) e da definição de valoração no modelo, segue que existe um mundo w_3 tal que $w_1R^mw_3$ e $v(\Diamond^n\alpha, w_3) = 0$, e conseqüentemente α é falsa em *algum* mundo acessível a partir de w_3, em n-passos.

Dado que $w_1R^kw_2$ e $w_1R^mw_3$, e como a relação R satisfaz à propriedade $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$, então existe um mundo w_4 tal que $w_2R^lw_4$ e $w_3R^nw_4$, daí, a partir de (a) e (b) segue respectivamente que $v(\alpha, w_4) = 1$ e que $v(\alpha, w_4) = 0$. Contradição. □

Dado que os axiomas de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ são validados pelos enquadramentos nos quais a relação de acessibilidade não requer propriedade específica alguma, segue, nos casos particulares em que a relação de acessibilidade requer alguma restrição, que os axiomas de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ continuam sendo validados nesses enquadramentos, e conseqüentemente no caso particular em que a relação satisfaz a propriedade diamante $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$ temos o resultado a seguir.

Corolário 2.2.4. *(Corretude para $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}+\boldsymbol{G}^{k,l,m,n}+\boldsymbol{G}^{m,n,k,l}$)*
Cada teorema de $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}+\boldsymbol{G}^{k,l,m,n}+\boldsymbol{G}^{m,n,k,l}$ é válido em todos os enquadramentos nos quais R satisfaz à propriedade $\boldsymbol{P}^{k,l,m,n}$.

Demonstração. Conseqüência imediata do Teorema 2.1.4 e Teorema 2.2.3. □

Para mostrar que essa classe de sistemas é completa deve-se verificar que a relação de acessibilidade do modelo canônico para $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ satisfaz a propriedade $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$ sempre que adicionamos as intâncias $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$ ao sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, como mostramos no Teorema 2.2.6, a seguir.

Considere a versão generalizada dos conjuntos $Den(w)$ e $Dep(w)$:

$$Den^n(w) = \{\alpha : \Box^n\alpha \in w\} \quad \text{e} \quad Dep^n(w) = \{\alpha : \Diamond^n\alpha \in w\}$$

A generalização do Fato 1.4.15 é válida para o conjunto $Den^n(\Delta)$, conforme mostra o resultado a seguir.

Fato 2.2.5. *Se Δ é uma $\mathcal{L}$-teoria, então $Den^n(\Delta)$ é uma $\mathcal{L}$-teoria.*

Demonstração. Mesmo argumento usado no Fato 1.4.15 trocando (**K**) pelo Fato 2.2.2 (i) e $Den(\Delta)$ por $Den^n(\Delta)$. □

Da mesma forma que a completude para $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ foi baseada na construção do modelo canônico, para o sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}+\mathbf{G}^{k,l,m,n}+\mathbf{G}^{m,n,k,l}$ resta mostrar que a relação do modelo canônico satisfaz a propriedade descrita por $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$.

Teorema 2.2.6. *Seja $\mathcal{L} = \langle For, \vdash\rangle$ o sistema $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}+\boldsymbol{G}^{k,l,m,n}+\boldsymbol{G}^{m,n,k,l}$. A relação de acessibilidade do enquadramento canônico de $\mathcal{L}$ satisfaz à seguinte propriedade $\boldsymbol{P}^{k,l,m,n}$: $\Delta_1\widehat{R^k}\Delta_2$ e $\Delta_1\widehat{R^m}\Delta_3$ implica que existe Δ_4 tal que $\Delta_2\widehat{R^l}\Delta_4$ e $\Delta_3\widehat{R^n}\Delta_4$.*

Demonstração. Sabemos que cada $\Delta \in \widehat{W}$ do modelo canônico de $\mathcal{L}$ contém as seguintes fórmulas:

(G1) $\Diamond^k\Box^l\alpha \supset \Box^m\Diamond^n\alpha$

(G2) $\Diamond^m\Box^n\alpha \supset \Box^k\Diamond^l\alpha$.

Das hipóteses $\Delta_1\widehat{R^k}\Delta_2$ e $\Delta_1\widehat{R^m}\Delta_3$, temos:

(Hip.1) $\Delta_1\widehat{R^k}\Delta_2$ sse $Den^k(\Delta_1) \subseteq \Delta_2 \subseteq Dep^k(\Delta_1)$

(Hip.2) $\Delta_1\widehat{R^m}\Delta_3$ sse $Den^m(\Delta_1) \subseteq \Delta_3 \subseteq Dep^m(\Delta_1)$

Considere Λ o fecho disjuntivo do conjunto Ω, formado pela união dos conjuntos $\overline{Dep^l(\Delta_2)}$ e $\overline{Dep^n(\Delta_3)}$, ou seja:

$$\Omega = \{\varphi : \Diamond^l\varphi \notin \Delta_2\} \cup \{\psi : \Diamond^n\psi \notin \Delta_3\}$$

Seja T a $\mathcal{L}$-teoria gerada pelo conjunto $\mathcal{H}$, formado pela união dos conjuntos $Den^l(\Delta_2)$ e $Den^n(\Delta_3)$, ou seja:

$$\mathcal{H} = \{\alpha : \Box^l\alpha \in \Delta_2\} \cup \{\beta : \Box^n\beta \in \Delta_3\}$$

Primeiramente, devemos observar que $\Lambda \neq \varnothing$. De fato, se assim não fosse, teríamos que $\Omega = \varnothing$ daí, $\{\varphi : \Diamond^l\varphi \notin \Delta_2\} = \varnothing$ e $\{\psi : \Diamond^l\psi \notin \Delta_3\} = \varnothing$. Nesse caso, $Dep^l(\Delta_2)$ e $Dep^n(\Delta_3)$ seriam triviais. Absurdo, desde que Δ_2 e Δ_3 são factuais. Vejamos que:

$$T \text{ é não-trivial} \tag{2.10}$$

Suponha, por redução ao absurdo, que T seja trivial, isto é, $T \vdash \gamma$, para toda $\gamma \in For$. Em particular, $T \vdash \lambda$ para $\lambda \in \Omega$. Nesse caso, temos que $\Diamond^n \lambda \notin \Delta_3$ ou $\Diamond^l \lambda \notin \Delta_2$. Vejamos o caso em que $\Diamond^l \lambda \notin \Delta_2$, o outro caso é análogo. Se $T \vdash \lambda$, para $\Diamond^l \lambda \notin \Delta_2$, então, pela compacidade, temos que $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s\} \vdash \lambda$ onde $\alpha_i \in Den^l(\Delta_2)$, para $1 \leq i \leq r$; e $\beta_j \in Den^n(\Delta_3)$, para $1 \leq j \leq s$. Pelo Fato 2.2.5 temos que $Den^l(\Delta_2)$ e $Den^n(\Delta_3)$ são $\mathcal{L}$-teorias daí, pelo Lema 1.4.11 (v), temos que $Den^l(\Delta_2)$ e $Den^n(\Delta_3)$ são fechados por conjunções então, sem perda de generalidade, podemos tomar $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$ tais que:

$$\alpha = (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r) \quad \text{e} \quad \beta = (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_s)$$

onde $\Box^l \alpha \in \Delta_2$ e $\Box^n \beta \in \Delta_3$. Dessa forma, temos que $\{\alpha, \beta\} \vdash \lambda$. Pelo Teorema da Dedução temos que $\vdash \alpha \supset (\beta \supset \lambda)$. Aplicando (**Nec**), (**K**) e (**MP**) l-vezes temos $\vdash \Box^l \alpha \supset \Box^l(\beta \supset \lambda)$. Pela monotonicidade e (**MP**) segue que $\Delta_2 \vdash \Box^l(\beta \supset \lambda)$, pelo Fato 2.2.2 (ii) e (**MP**), segue que $\Delta_2 \vdash \Diamond^l \beta \supset \Diamond^l \lambda$. Dado que Δ_2 é prima então, pelo Lema 1.4.11 (iii), segue que $\Diamond^l \beta \notin \Delta_2$ ou $\Diamond^l \lambda \in \Delta_2$.

1. Se $\Diamond^l \lambda \in \Delta_2$, temos um absurdo imediato dado que T é gerada por Ω.

2. Se $\Diamond^l \beta \notin \Delta_2$, como, pela (Hip.1), $Den^k(\Delta_1) \subseteq \Delta_2$, então $\Diamond^l \beta \notin Den^k(\Delta_1)$, daí, $\Box^k \Diamond^l \beta \notin \Delta_1$. Por (G2) segue que $\Diamond^m \Box^n \beta \notin \Delta_1$ daí, $\Box^n \beta \notin Dep^m(\Delta_1)$. Como, pela (Hip.2), $\Delta_3 \subseteq Dep^m(\Delta_1)$, então $\Box^n \beta \notin \Delta_3$. Absurdo.

Portanto, a teoria T é não-trivial.

Para poder aplicar o Corolário 1.4.14, resta mostra que:

$$T \cap \Lambda = \varnothing \tag{2.11}$$

Suponha, por redução ao absurdo, que $\alpha \in T \cap \Lambda$ então, $\alpha \in T$ e $\alpha \in \Lambda$ daí temos: ($\Box^l \alpha \in \Delta_2$ ou $\Box^n \alpha \in \Delta_3$) e ($\Diamond^l \alpha \notin \Delta_2$ ou $\Diamond^n \alpha \notin \Delta_3$). Logo temos quatro possibilidades para considerar.

(a) $\Box^l \alpha \in \Delta_2$ e $\Diamond^l \alpha \notin \Delta_2$;

(b) $\Box^l \alpha \in \Delta_2$ e $\Diamond^n \alpha \notin \Delta_3$;

(c) $\Box^n \alpha \in \Delta_3$ e $\Diamond^l \alpha \notin \Delta_2$;

(d) $\Box^n \alpha \in \Delta_3$ e $\Diamond^n \alpha \notin \Delta_3$.

Caso (a): considerando que $\Box^l\alpha \in \Delta_2$ e $\Diamond^l\alpha \notin \Delta_2$ então $\Box^l\alpha \supset \Diamond^l\alpha \notin \Delta_2$ daí, pelo Fato 2.2.2 (iv), temos que $\Diamond^l(\alpha \supset \alpha) \notin \Delta_2$. Como, pela (Hip.1), $\boldsymbol{Den}^k(\Delta_1) \subseteq \Delta_2$, então $\Diamond^l(\alpha \supset \alpha) \notin \boldsymbol{Den}^k(\Delta_1)$ ou seja, $\Box^k\Diamond^l(\alpha \supset \alpha) \notin \Delta_1$. Por (G2) temos que $\Diamond^m\Box^n(\alpha \supset \alpha) \notin \Delta_1$ daí, $\Box^n(\alpha \supset \alpha) \notin \boldsymbol{Dep}^m(\Delta_1)$. Pela (Hip.2) sabemos que $\Delta_3 \subseteq \boldsymbol{Dep}^m(\Delta_1)$, logo $\Box^n(\alpha \supset \alpha) \notin \Delta_3$. Portanto $\alpha \supset \alpha \notin \boldsymbol{Den}^n(\Delta_3)$. Absurdo, desde que, pelo Fato 2.2.5, $\boldsymbol{Den}^n(\Delta_3)$ é uma $\mathcal{L}$-teoria.

Caso (b): dado que $\Box^l\alpha \in \Delta_2$ então, pela (Hip.1), segue que $\Box^l\alpha \in \boldsymbol{Dep}^k(\Delta_1)$, ou seja, $\Diamond^k\Box^l\alpha \in \Delta_1$. Pelo axioma (G1) e (**MP**) segue que $\Box^m\Diamond^n\alpha \in \Delta_1$.

Dado que $\Diamond^n\alpha \notin \Delta_3$ então, pela (Hip.2), segue que $\Diamond^n\alpha \notin \boldsymbol{Den}^m(\Delta_1)$, ou seja, $\Box^m\Diamond^n\alpha \notin \Delta_1$. Absurdo.

Caso (c): dado que $\Box^n\alpha \in \Delta_3$ então, pela (Hip.2), segue que $\Box^n\alpha \in \boldsymbol{Dep}^m(\Delta_1)$, ou seja, $\Diamond^m\Box^n\alpha \in \Delta_1$. Pelo axioma (G2) e (**MP**) segue que $\Box^k\Diamond^l\alpha \in \Delta_1$.

Dado que $\Diamond^l\alpha \notin \Delta_2$ então, pela (Hip.1), segue que $\Diamond^l\alpha \notin \boldsymbol{Den}^k(\Delta_1)$, ou seja, $\Box^k\Diamond^l\alpha \notin \Delta_1$. Absurdo.

Caso (d): argumento similar ao caso (a).

Portanto, pelo Corolário 1.4.14, temos que existe uma $\mathcal{L}$-teoria prima maximal Δ_4 tal que $T \subseteq \Delta_4$ e $\Delta_4 \cap \Lambda = \varnothing$. Então:

1. Considere $T \subseteq \Delta_4$. Dado que T é gerada por $\mathcal{H}$, melhor dizendo, $\boldsymbol{Den}^l(\Delta_2) \cup \boldsymbol{Den}^n(\Delta_3) \subseteq T$, então $\boldsymbol{Den}^l(\Delta_2) \cup \boldsymbol{Den}^n(\Delta_3) \subseteq \Delta_4$. Portanto, $\boldsymbol{Den}^l(\Delta_2) \subseteq \Delta_4$ e $\boldsymbol{Den}^n(\Delta_3) \subseteq \Delta_4$.

2. Considere $\Delta_4 \cap \Lambda = \varnothing$ daí, temos $\Delta_4 \subseteq \overline{\Lambda}$. Considerando que Λ é o fecho disjuntivo do conjunto Ω então $\Omega \subseteq \Lambda$, ou seja, $\overline{\Lambda} \subseteq \overline{\Omega}$. Logo, $\Delta_4 \subseteq \overline{\Omega}$, ou seja, $\Delta_4 \subseteq \boldsymbol{Dep}^l(\Delta_2) \cap \boldsymbol{Dep}^n(\Delta_3)$. Portanto, $\Delta_4 \subseteq \boldsymbol{Dep}^l(\Delta_2)$ e $\Delta_4 \subseteq \boldsymbol{Dep}^n(\Delta_3)$.

De (1) e (2) temos $\boldsymbol{Den}^l(\Delta_2) \subseteq \Delta_4 \subseteq \boldsymbol{Dep}^l(\Delta_2)$ e $\boldsymbol{Den}^n(\Delta_3) \subseteq \Delta_4 \subseteq \boldsymbol{Dep}^n(\Delta_3)$.

Portanto, existe Δ_4 tal que $\Delta_2\widehat{R^l}\Delta_4$ e $\Delta_3\widehat{R^n}\Delta_4$ □

Corolário 2.2.7. *(Completude para* $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond} + \boldsymbol{G}^{k,l,m,n} + \boldsymbol{G}^{m,n,k,l}$*)*
Se $\Gamma \vDash \alpha$*, então* $\Gamma \vdash \alpha$*.*

Demonstração. Seja $\mathcal{L}$ o sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}+\mathbf{G}^{k,l,m,n}+\mathbf{G}^{m,n,k,l}$. Suponha que $\Gamma \nvdash \alpha$ para algum α então, pelo Corolário 1.4.14, podemos estender Γ a uma $\mathcal{L}$-teoria Δ que é α-saturada. Como $\Delta \nvdash \alpha$ então $\alpha \notin \Delta$ daí, pelo Teorema 2.1.15, temos que $v_\Delta(\alpha) = 0$. Portanto, existe um modelo que falsifica α, a saber, o modelo canônico para $\mathcal{L}$, daí $\Delta \nvDash \alpha$. Como $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Gamma \nvDash \alpha$. $\square$

É importante observar que o resultado de completude que obtivemos não se restringe aos casos em que o sistema é estendido com apenas uma única instância de $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$; de fato, a completude se preserva com um número arbitrário de instâncias (veja Teorema 3.2.16). No caso dos sistemas anódicos não podemos esquecer que a cada instância do esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, devemos adicionar também a sua correspondente dual, como mostramos no Teorema 2.2.6. Com isso, o acréscimo de axiomas deve ser duplicado, e mesmo isso não invalida o método.

Fazemos uma discussão detalhada desse tema no final da Seção 3.2, que trata da completude para a classe dos sistemas catódicos, e mostramos como generalizar o método de completude para tais classes. O Teorema 3.2.16 pode, facilmente, ser adaptado para a classe dos sistemas anódicos que acabamos de apresentar.

Até aqui examinamos a questão do esquema geral de provas de completude para os sistemas bi-modais anódicos, ou seja, totalmente desprovidos de negação. O objetivo da próxima seção é mostrar que a noção adotada e que tão frutiferamente levou a tais resultados de completude não é trivial: de fato, existem sistemas modais anódicos que são incompletos com relação a determinadas classes de enquadramentos. Isso significa que, mesmo em nosso amplo panorama semântico há sistemas que não são caracterizados por *quaisquer* classes de enquadramentos.

2.3 O fenômeno da incompletude

Nesta seção mostramos que a incompletude dos sistemas modais surge já na parte positiva dos sistemas bi-modais, evidenciando que esse fenômeno independe da presença de negação. O atributo das bi-modalidades parece ser essencial, já que, como ficará claro a seguir, a incompletude modal clássica leva em conta a interação entre as duas modalidades aléticas usuais, $\Box$ e $\Diamond$.

Poderia parecer um fato pouco surpreendente que se conseguisse algum resultado de incompletude para sistemas bi-modais positivos, tendo em conta que se um sistema lógico dotado de certos recursos (por exemplo, com negação) é incompleto, então sua forma abrandada (por exemplo, sem negação) seria de se esperar que fosse também incompleta. Esse raciocínio, porém, é enganoso: é claro que eliminar conectivos e axiomas de um sistema lógico em nada contribui para a completude, e se já contássemos com a incompletude tal mutilação só pioraria a situação. Basta imaginar as conseqüências de se extirpar axiomas ou conectivos de **PC**. O sistema modal incompleto **KVB**, devido a van Benthem (veja [vB78]), é uma extensão de **K**, que é completo; o que se deseja saber é se existe algum subsistema *completo* de **K** cuja extensão seja incompleta!

Muitos resultados (como, por exemplo, os Teoremas da Incompletude de Gödel) sugerem que em Lógica, e de resto em Filosofia, nem tudo o que se espera efetivamente se obtém, e nem tudo o que se pergunta tem resposta. Desse modo, a surpresa é que *de fato* se possa demonstrar pelos nossos métodos, uma incompletude desse tipo para sistemas positivos: mostraremos que o sistema completo $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, subsistema de **K**, pode ser estendido a um sistema incompleto (e de fato incompletável).

O sistema que consideramos é uma versão positiva do sistema **KVB**, proposto por van Benthem para a demonstração de incompletude para as lógicas modais, e o denotamos por $\mathbf{KVB}^{\supset,\wedge,\Diamond}$. Para simplicidade da notação denotamo-lo simplesmente por $\mathbf{KVB}^{+}$.

A estratégia do argumento será apontar uma falha quanto à expressividade dos enquadramentos para $\mathbf{KVB}^{+}$ por meio dos chamados "enquadramentos generalizados". Como não temos negação, estamos definindo aqui uma noção mais geral do conceito de enquadramentos generalizados, adaptada para sistemas definidos em linguagens contendo $\supset$, $\wedge$, $\Box$ e $\Diamond$ como primitivos. Isso exige refazer diversas das demonstrações a respeito de **KVB**, como veremos em seguida.

O sistema $\mathbf{KVB}^{+}$ é $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ acrescido do seguinte axioma:

(**VB**) $\Diamond\Box p \vee \Box[\Box(\Box q \supset q) \supset q]$

Primeiramente consideramos a fórmula $\Box p \vee \Diamond\Box p$, que denotamos por (**MV**), e mostramos que todo enquadramento que é adequado para (**VB**) é também um enquadramento adequado para (**MV**). Com o intuito de apontar a falha de tais enquadramentos, definiremos em seguida um modelo, baseado num enquadramento generalizado, que é adequado para $\mathbf{KVB}^+$, porém invalida (**MV**).

Lema 2.3.1. *Se* $\mathcal{F} \vDash \Diamond\Box p \vee \Box[\Box(\Box q \supset q) \supset q]$ *então* $\mathcal{F} \vDash \Diamond\Box p \vee \Box p$.

Demonstração. Considerando que a estratégia da demonstração para o caso clássico, como exposto por exemplo em Carnielli e Pizzi em [CP08] independe do fato de se estar lidando com enquadramentos canônicos compostos por extensões consistentes maximais ou com enquadramentos compostos por extensões não-triviais maximais (em virtude de não se ter a negação presente), e tendo em conta que $\alpha \vee \beta$ é definido como $(\alpha \supset \beta) \supset \beta$ no fragmento implicativo $\mathbf{PC}^{\supset}$, o mesmo argumento exposto em [CP08] se mantém aqui. □

Definição 2.3.2. *Um enquadramento generalizado* $\mathfrak{G}$ *é uma terna* $\langle W, R, \Pi\rangle$, *onde* $\langle W, R\rangle$ *é um enquadramento não-trivial e* Π *é fechado pelas seguintes cláusulas, onde* $\cup$ *e* $^{-}$ *são as operações de união e complementar:*
(a) Se $X, Y \in \Pi$ *então* $\overline{X} \cup Y \in \Pi$*;*
(b) Se $X, Y \in \Pi$ *então* $X \cap Y \in \Pi$*;*
(c) Se $X \in \Pi$ *então* $\{w \in W : \forall w' \in W(wRw' \text{ implica } w' \in X)\} \in \Pi$*;*
(d) Se $X \in \Pi$ *então* $\{w \in W : \exists w' \in W(wRw' \text{ e } w' \in X)\} \in \Pi$.

Considere o seguinte enquadramento generalizado $\mathfrak{G}_0 = \langle W_0, R_0, \Pi_0\rangle$ definido como:

- $W_0 = \mathbb{N} \cup \{\omega, \omega + 1\}$
- $w_i R_0 w_j$ sse $\begin{cases} w_i = \omega + 1 \text{ e } w_j = \omega \\ w_i \neq \omega + 1 \text{ e } w_j < w_i \end{cases}$

- Π_0 é uma coleção de subconjuntos de W_0, chamados *admissíveis*, satisfazendo uma das seguintes cláusulas:
  (a) $\omega \notin A$ e A é finito;
  (b) $\omega \in A$ e $\overline{A}$ é finito.

Seja $V : Var \longrightarrow \wp(W)$ uma valoração, chamada *valoração implícita*, onde para cada variável p temos que $V(p)$ indica o conjunto dos mundos no qual p é membro. Essa forma de apresentar a valoração é mais adequada quando se pretende tratar com os chamados *conjuntos admissíveis*, ou seja, conjunto de mundos que satisfazem determinadas propriedades. A apresentação da valoração dessa maneira é equivalente à apresentada no início do Capítulo 1 no seguinte sentido:

$$v(p, w) = 1 \text{ sse } w \in V(p)$$

Definição 2.3.3. *Um modelo $\mathfrak{M}$ é chamado admissível se, para cada fórmula α, tivermos que $V(\alpha)$ é um conjunto de elementos admissíveis.*

Lema 2.3.4. *$\mathfrak{G}_0$ é um enquadramento generalizado.*

Demonstração. Basta mostrar que Π_0 cumpre as condições de fechamento exigidas pela Definição 2.3.2.

(a) Se $A, B \in \Pi_0$, então $\overline{A} \cup B \in \Pi_0$. Nesse caso, há quatro possibilidades a considerar:

1. Suponha A e B finitos e $\omega \notin A$ e $\omega \notin B$. Dado que $A \cap \overline{B} \subseteq A$ e A é finito, então $A \cap \overline{B}$ é finito. Desde que $\overline{\overline{A}} = A$, segue que $\overline{\overline{A}} \cap \overline{B}$ é finito. Mas $\overline{\overline{A}} \cap \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup B}$, então $\overline{\overline{A} \cup B}$ é finito. Dado que $\omega \notin A$, então $\omega \in \overline{A}$, daí $\omega \in \overline{A} \cup B$. Portanto, $\overline{A} \cup B \in \Pi_0$.
2. Suponha $\overline{A}$ e $\overline{B}$ finitos e $\omega \in A$ e $\omega \in B$. Raciocínio análogo ao ítem anterior. Note que $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{B}$ e $\overline{B}$ é finito, logo $\overline{\overline{A} \cup B}$ é finito. Dado que $\omega \in B$, então $\omega \in \overline{A} \cup B$. Portanto, $\overline{A} \cup B \in \Pi_0$.
3. Suponha A e $\overline{B}$ finitos e $\omega \notin A$ e $\omega \in B$. Dado que $\overline{\overline{A}} = A$ é finito, então $\overline{\overline{A}} \cap \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup B}$ é finito. Dado que $\omega \in B$, então $\omega \in \overline{A} \cup B$. Portanto, $\overline{A} \cup B \in \Pi_0$.

4. Suponha $\overline{A}$ e B finitos e $\omega \in A$ e $\omega \notin B$. Análogo ao anterior.

(b) Se $A, B \in \Pi_0$, então $A \cap B \in \Pi_0$. Nesse caso, há quatro possibilidades a considerar:

1. Suponha A e B finitos e $\omega \notin A$ e $\omega \notin B$. Claramente $A \cap B$ é finita e $\omega \notin A \cap B$. Portanto, $A \cap B \in \Pi_0$.
2. Suponha $\overline{A}$ e $\overline{B}$ finitos e $\omega \in A$ e $\omega \in B$. Claramente $\overline{A} \cup \overline{B}$ é finita e $\omega \in A \cap B$. Sabemos que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$. Portanto, $A \cap B \in \Pi_0$.
3. Suponha A e $\overline{B}$ finitos e $\omega \notin A$ e $\omega \in B$. Dado que A é finito então $A \cap B$ é finita. Como $\omega \notin A$ e $\omega \in B$ então $\omega \notin A \cap B$. Portanto, $A \cap B \in \Pi_0$.
4. Suponha $\overline{A}$ e B finitos e $\omega \in A$ e $\omega \notin B$. Análogo ao anterior.

(c) Se $A \in \Pi_0$ então $A^* \in \Pi_0$, onde A^* corresponde ao seguinte conjunto: $\{w \in W_0 : \forall w' \in W_0(wR_0w'$ implica $w' \in A)\}$. Nesse caso, há duas possibilidades a considerar:

1. Suponha A finito e $\omega \notin A$. Vejamos que $\omega \notin A^*$; de fato, caso contrário teríamos $A = \mathbb{N}$, dado que $\omega R_0 n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, contrariando a hipótese de que A é finito. Um raciocínio análogo mostra que A^* é finito; de fato, se A^* fosse infinito conteria uma coleção infinita a_k de elementos positivos. Dessa forma, como $a_kR_0a_{k-1}$, A conteria uma família infinita a_{k-1}, o que é absurdo. Portanto $A^* \in \Pi_0$.
2. Suponha $\overline{A}$ finito e $\omega \in A$. Para mostrar que $A^* \in \Pi_0$ vejamos, primeiramente, que (2.12) e (2.13) são válidas.

$$\overline{A^*} \text{ é finito} \tag{2.12}$$

Suponha, por redução ao absurdo, que $\overline{A^*}$ seja infinito. Observe que $\overline{A^*} = \{w \in W_0 : \exists w' \in W_0(wR_0w'$ e $w' \notin A)\}$. Sabemos, pela definição de $\overline{A^*}$, que para cada $a_k \in \overline{A^*}$, existe $a_{k-1} \in W_0$ tal que $a_kR_0a_{k-1}$ e $a_{k-1} \notin A$. Dado que $\overline{A^*}$ é infinito então, pela definição de R_0, temos que existem infinitos elementos $a_{k-1} \in \overline{A}$. Absurdo desde que A é finito.

$$\omega \in A^* \tag{2.13}$$

Suponha, por redução ao absurdo, que $\omega \notin A^*$. Pela definição de A^* temos que existe $w' \in W_0$ tal que wR_0w' e $w' \notin A$. Dado que $\omega R_0 n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então, $n \in \overline{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Absurdo, desde que $\overline{A}$ é finito.

Portanto, a partir de (2.12) e (2.13), segue que $A^* \in \Pi_0$.

(d) Se $A \in \Pi_0$ então $A^* \in \Pi_0$, onde $A^* = \{w \in W_0 : \exists w' \in W_0(wR_0w' \text{ e } w' \in A)\}$. Nesse caso, há duas possibilidades a considerar:

1. Suponha A finito e $\omega \notin A$. Seja a_k o menor natural elemento de A. Independentemente de $\omega + 1$ pertencer ou não a A, sabe-se que, para todo a_l tal que $k < l$, vale $a_l R_0 a_k$ e $a_k \in A$. Nesse caso, pela definição de A^*, segue que $a_l \in A^*$, para todo l tal que $k < l$. Dado que $\omega R_0 a_k$, então $\omega \in A^*$. Logo, temos que $[a_{k+1}, \infty[\cup \{\omega\} \subseteq A^*$ daí, $\overline{A^*}$ é finito. Portanto, segue que $A^* \in \Pi_0$.
2. Suponha $\overline{A}$ finito e $\omega \in A$. Claramente A é co-finito daí, existe um $k \in A$ tal que o intervalo $[k, \infty[$ está em A. Dado que $\omega \in A$ então $\omega R_0 a$ para todo a em $[k, \infty[$. Portanto $\omega \in A^*$, mais ainda, nR_0k para todo $n > k$, logo A^* é co-finito, daí $\overline{A^*}$ é finito e $\omega \in A^*$. Portanto, $A^* \in \Pi_0$.

□

Definição 2.3.5. *Uma fórmula α é dita $\mathfrak{G}_0$-válida se α for válida em todo modelo admissível sobre $\mathfrak{G}_0$.*

Lema 2.3.6. *Um modelo $\mathfrak{M}$ baseado sobre $\mathfrak{G}$ é admissível, se $V(p)$ é admissível para toda variável p.*

Demonstração. Devemos mostrar que, se $V(p)$ é um conjunto admissível, então $V(\alpha)$ também é um conjuto admissível, e a prova é produzida por indução na complexidade de α.

1. Considere α como $\beta \supset \gamma$.

   Dado que β e γ são subfórmulas de α, são portanto de complexidade menor que α. Pela hipótese de indução, temos que $V(\beta) \in \Pi$ e $V(\gamma) \in \Pi$. Daí, pela cláusula (a) da Definição 2.3.2, segue que $\overline{V(\beta)} \cup V(\gamma) \in \Pi$.

   Como $V(\beta) = \{w \in W : v(\beta, w) = 1\}$, então $\overline{V(\beta)} = \{w \in W : v(\beta, w) = 0\}$. Portanto, $\overline{V(\beta)} \cup V(\gamma) = \{w \in W : v(\beta, w) = 0 \text{ ou } v(\gamma, w) = 1\} = V(\beta \supset \gamma)$.

2. Considere α como $\beta \wedge \gamma$.

   Dado que β e γ são subfórmulas de α então, pela hipótese de indução, temos que $V(\beta) \in \Pi$ e $V(\gamma) \in \Pi$. Portanto, pela cláusula (b) da Definição 2.3.2, segue que $V(\beta) \cap V(\gamma) \in \Pi$.

   Mas $V(\beta) \cap V(\gamma) = \{w \in W : v(\beta, w) = v(\gamma, w) = 1\} = V(\beta \wedge \gamma)$.

3. Considere α como $\Box\beta$.

   Dado que β é subfórmula de α, tem então complexidade menor que α. Pela hipótese de indução, temos que $V(\beta) \in \Pi$. Daí, pela cláusula (c) da Definição 2.3.2, segue que $\{w \in W : \forall w'[wRw' \text{ implica } w' \in V(\beta)]\} \in \Pi$.

   Por outro lado, temos que $V(\Box\beta) = \{w \in W : v(\Box\beta, w) = 1\}$. Temos também que $v(\Box\beta, w) = 1$ sse $v(\beta, w') = 1$ para todo $w' \in W$ tal que wRw', ou seja, $V(\Box\beta) = \{w \in W : \forall w'[wRw' \text{ implica } v(\beta, w') = 1]\}$, ou equivalentemente, $V(\Box\beta) = \{w \in W : \forall w'[wRw' \text{ implica } w' \in V(\beta)]\}$. Portanto, $V(\Box\beta) \in \Pi$.

4. Considere α como $\Diamond\beta$.

   Dado que β é subfórmula de α, pela hipótese de indução, $V(\beta) \in \Pi$. Pela Definição 2.3.2 (d), segue que $\{w \in W : \exists w'[wRw' \text{ e } w' \in V(\beta)]\} \in \Pi$.

   Por outro lado, temos que $V(\Diamond\beta) = \{w \in W : v(\Diamond\beta, w) = 1\}$. Temos também que $v(\Diamond\beta, w) = 1$ sse $v(\beta, w') = 1$ para algum $w' \in W$ tal que wRw', ou seja, $V(\Diamond\beta) = \{w \in W : \exists w'[wRw' \text{ e } v(\beta, w') = 1]\}$, ou equivalentemente, $V(\Diamond\beta) = \{w \in W : \exists w'[wRw' \text{ e } w' \in V(\beta)]\}$. Portanto, $V(\Diamond\beta) \in \Pi$.

Logo, $V(\alpha)$ é um conjunto admissível. □

Os resultados a seguir mostram que o enquadramento $\mathfrak{G}_0$ não valida a fórmula (**MV**), porém valida todos os teoremas de **KVB**$^+$.

Teorema 2.3.7. *($\boldsymbol{MV}$) não é uma fórmula $\mathfrak{G}_0$-válida.*

Demonstração. Considere o modelo $\mathfrak{M}_0$ baseado sobre o enquadramento $\mathfrak{G}_0$ definido acima, em que $V(p) = \varnothing$. Vejamos que $V(p)$ é um conjunto admissível: sabemos que $\varnothing \in \Pi_0$ e $\omega \notin \varnothing$, mais ainda, $\varnothing$ é finito, logo cumpre a cláusula (a) dos conjuntos admissíveis.

Vejamos, agora, que $\mathfrak{M}_0 \nvDash \Diamond\Box p \vee \Box p$: dado que $v(p, n) = 0$ e que $\omega R_0 n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $v(\Box p, \omega) = 0$. Temos também que $v(p, \omega) = 0$ e que $\omega + 1 R_0 \omega$. Daí, concluímos que $v(\Diamond\Box p, \omega + 1) = 0$ e $v(\Box p, \omega + 1) = 0$. Portando, $v(\Diamond\Box p \vee \Box p, \omega + 1) = 0$, logo $\mathfrak{G}_0 \nvDash (\mathbf{MV})$. □

Teorema 2.3.8. *Todo teorema de $\boldsymbol{KVB}^+$ é $\mathfrak{G}_0$-válido.*

Demonstração. É fácil ver que todo axioma de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ é $\mathfrak{G}_0$-válido. De fato, para cada $w \in \mathbb{N}/\{0\} \cup \{\omega, \omega + 1\}$ e cada axioma $(\mathbf{Ax})$ de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, para ver que $v((\mathbf{Ax}), w) = 1$ em cada w, basta fazer um argumento análogo ao usado para mostrar a corretude de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$. Suponha que $v((\mathbf{Ax}), w) = 0$ e a contradição aparece no w' tal que wR_0w'. Para verificar que cada axioma $(\mathbf{Ax})$ também é válido no mundo terminal 0, basta observar que em 0 fórmulas do tipo $\Box\alpha$ são sempre válidas, e do tipo $\Diamond\alpha$ são sempre inválidas. O caso não-trivial é o axioma $(\mathbf{VB})$.

1. Pela definição de $\mathfrak{G}_0$, é fácil ver que 0 é ponto terminal, daí, por vacuidade, temos que $v(\Box[\Box(\Box q \supset q) \supset q], 0) = 1$ e $v(\Box p, 0) = 1$. Dado que $\omega R_0 0$ e $nR_0 0$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, então $v(\Diamond\Box p, \omega) = 1$ e $v(\Diamond\Box p, n) = 1$. Portanto, $v((\mathbf{MV}), \omega) = 1$ e $v((\mathbf{MV}), n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Falta mostrar que $v((\mathbf{MV}), \omega + 1) = 1$. Suponha por redução ao absurdo que exista um modelo $\mathfrak{M}_0$ sobre $\mathfrak{G}_0$, tal que $v((\mathbf{MV}), \omega + 1) = 0$. Então:

   Se $v(\Box[\Box(\Box q \supset q) \supset q], \omega + 1) = 0$, então $v(\Box(\Box q \supset q) \supset q, \omega) = 0$, e disso segue que $v(\Box(\Box q \supset q), \omega) = 1$ e $v(q, \omega) = 0$. Dado que $\omega R_0 n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $v(\Box q \supset q, n) = 1$. Vejamos, por indução em n, que $v(q, n) = 1$:

   - Para $n = 0$.

Dado que 0 é ponto terminal, então $v(\Box q, 0) = 1$, daí, por (**MP**), segue que $v(q, 0) = 1$.

- Suponha que $v(q, m) = 1$, para todo $m < k$, e vejamos que $v(q, k) = 1$.

  Da hipótese de indução e do fato que kR_0m, para todo $m < k$, segue que $v(\Box q, k) = 1$. Nesse caso, por (**MP**), $v(q, k) = 1$.

  Portanto, $v(q, n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Claramente $V(q)$ é infinito ($v(q, n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$) e $\omega \notin V(q)$ ($v(q, \omega) = 0$). Nesse caso, $V(q) \notin \Pi_0$, por descumprir a cláusula (a) da definição de Π_0. Absurdo, dado que o modelo $\mathfrak{M}_0$ é admissível.

□

Com isso, demonstra-se imediatamente o resultado de incompletude para $\mathbf{KVB}^+$ com relação aos enquadramentos:

Teorema 2.3.9. *$\boldsymbol{KVB}^+$ é um sistema modal positivo incompleto.*

Demonstração. Por um lado, o Lema 2.3.1 assegura que qualquer enquadramento que valida (**VB**) também valida (**MV**) e, por outro lado, o Teorema 2.3.8 garante que o modelo $\mathfrak{M}_0$ baseado sobre o enquadramento $\mathfrak{G}_0$ valida todos os teoremas de $\mathbf{KVB}^+$, enquanto o Teorema 2.3.7 mostra que esse mesmo modelo invalida (**MV**), ou seja, mostra que a sentença (**MV**) não é um teorema de $\mathbf{KVB}^+$. Portanto, não pode haver qualquer enquadramento que caracterize $\mathbf{KVB}^+$, dado que qualquer enquadramento "candidato" validaria o não-teorema (**MV**). □

É claro que o Lema 2.3.1 implica que $\mathbf{KVB}^+$ é de fato incompletável, em razão de que quaisquer novos axiomas a ele juntados resultarão num sistema trivial ou num sistema validado por alguma classe de enquadramentos, a qual também validará (**MV**).

Um problema que deixamos em aberto (final da Seção 2.1) diz respeito a caracterizar o sistema $\mathbf{K}^{\supset,\Diamond}$. Se a resposta fosse positiva, teríamos como conseqüência direta mais um resultado de incompletude, dessa vez para o sistema $\mathbf{KVB}^{\supset,\Diamond}$. Caminharíamos, dessa forma, para a compreensão de um problema difícil, e que já escapa dos interesses desta Tese (mas nem por isso deve deixar de ser mencionado): qual é o menor subsistema completo de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\lozenge}$ que se revela incompleto quando estendido com (**VB**)?

3. CONTROLANDO A NEGAÇÃO: LÓGICAS MODAIS E INCONSISTÊNCIA FORMAL

Após termos mostrado quanto a negação formal pode ser inócua no tratamento lógico de sistemas modais, nosso próximo objetivo é investigar o comportamento dos sistemas modais face a negações fracas. Para tanto, é conveniente usar o aparato das lógicas paraconsistentes, especialmente das lógicas da inconsistência formal, de maneira a servir como lógica de base para a construção de sistemas modais paraconsistentes, os quais serão definidos e tratados em detalhes neste capítulo.

Muito se tem feito na tentativa de combinar lógicas modais entre si, ou com outras lógicas, o que pode ser obtido por diversas maneiras diferentes, tais como *fusão*, *produto* e especialmente *fibrilação algébrica*, como esclarece detalhadamente a entrada "Combining Logics" de Carnielli e Coniglio da Stanford Encyclopedia of Philosophy em [CC08a]. O tratamento formal desse tema é tratado por Carnielli, Coniglio, Gabbay, Gouveia e Sernadas em [CCG+08], e uma abordagem conceitual a respeito da aplicação da combinação de lógicas em temas filosóficos é tratada por Costa-Leite em [CL07]. Voltamos a esse tema na Seção 3.2 onde apresentamos as classes de sistemas catódicos (que do ponto de vista da combinação de lógicas, podem ser entendidos como combinação de lógicas modais com lógicas paraconsistentes).

Uma maneira direta de combinar, que vai corresponder a uma particular formulação da fibrilação algébrica, consiste em substituir axiomaticamente a base clássica da lógica modal por uma base não clássica. Costa-Leite em [CL03] estudou um determinado sistema modal paraconsistente, com o objetivo de investigar uma possível solução para o "Paradoxo de Fitch", também conhecido por "Paradoxo da Cognoscibilidade", que afirma: "se existe alguma proposição verdadeira, cuja verdade ninguém conhece (ou conhecerá), então existe uma proposição verdadeira a qual ninguém poderá saber que é verdadeira". A estratégia usada por Costa-Leite foi adornar a lógica paraconsistente **Ci** (uma componente da família das LFIs) com operadores modais da lógica epistêmica, com a finalidade de propor uma solução ao paradoxo[1]. O que se depreende da tentativa de se resolver o Paradoxo da Cognoscibilidade é uma tendência que favorece a tese que aqui defendemos, a saber, que faz sentido estudar, com a maior profundidade conceitual possível, as lógicas com negação débil – e quanto mais pudermos controlar o poder da negação, melhor!

Uma outra proposta envolvendo combinação entre lógica modal e paraconsistência já aparece em [dCC86], de da Costa e Carnielli, onde os autores defendem o uso da lógica modal paraconsistente para permitir que dilemas morais possam ser legitimamente *expressos*, contrariando certas posições filosóficas, como conhecidas opiniões de Kant, que alegam que conflitos entre deveres e obrigações (ou outros dilemas morais) são inconcebíveis; conforme mostra McConnell, em [McC08]:

> "Ethicists as diverse as Kant [1971/1797], Mill [1979/1861], and Ross [1930 and 1939] have assumed that an adequate moral theory should not allow for the possibility of genuine moral dilemmas. Only recently – in the last fifty years or so – have philosophers begun to challenge that assumption. And the challenge can take at least two different forms. Some will argue that it is *not possible* to preclude genuine moral dilemmas. Others will argue that even if it were possible, it is *not desirable* to do so."

De fato, não só não é o caso que eles deixem de ser concebíveis, como (de acordo com McConnell) alguns eticistas argumentarão que não é nem mesmo desejável excluir dilemas morais do âmbito da lógica. Se a lógica de base é paraconsistente, o fato de dilemas e conflitos serem ou não inevitáveis passa a ser uma segunda questão; a primeira questão, no caso, seria capacitar os

[1] A solução proposta por Alexandre Costa-Leite, em sua Dissertação de Mestrado, foi refutada por Andréa Loparic em Campinas, durante o workshop SeMe "Semantics and Meanings", em 2005. O problema levantado é que de fato **Ci** é ainda uma lógica "forte demais", e a asserção de Fitch, evitada de uma certa maneira, reapareceria em outro formato, uma vez que a negação clássica pode ser definida nesse sistema.

sistemas a expressar tais dilemas morais e raciocínios com base neles.

A partir de [dCC86], uma outra linha de ataque aos paradoxos deônticos, por meio de modalidades deônticas combinadas com LFIs, foi desenvolvida por Coniglio em [Con07], e por Peron e Coniglio em [PC08].

Exemplos de paradoxos (não necessariamente antinomias) são abundantes: exposições mais profundas sobre as causas e conseqüências (lógicas e filosóficas) desse tipo de paradoxos foram dadas por Aqvist e encontram-se em [Aqv84] e [Aqv88]. Uma referência mais acessível é o verbete "Deontic Logic" ainda da Stanford Encyclopedia of Philosophy, de autoria de Macnamara, em [McN08], onde diversas dessas antinomias são apresentadas. Como exemplo de um desses argumentos onde a negação teria um papel importante citamos o chamado "Paradoxo de Urmson-Indiferença versus Opcionalidade", proposto por Urmson em [Urm58]. É usual que se use na linguagem natural, por exemplo, a seguinte sentença:

"É opcional que você assista ou não à conferência, mas sua escolha não é indiferente".

Aparentemente, as noções de "opcional" (Opc) e "indiferente" (Ind) poderiam ser definidas, respectivamente, como: $Opc(q) = \Diamond q \wedge \Diamond {\sim} q$ e $Ind(q) = {\sim}\Box q \wedge {\sim}\Box{\sim} q$, onde $\Diamond$ e $\Box$ estão sendo interpretados, respectivamente, como "permitido" e "obrigatório" e $\sim$ é a negação clássica.

É claro que se deriva, numa lógica deôntica com base clássica, a equivalência entre Opc e Ind, tendo em conta a definição de $\Diamond$ a partir de $\Box$, que se apóia na negação clássica. Dessa forma, nada pode ser "opcional" e "não indiferente".

Mas, nesse caso, a questão é contornável: seria, sim, possível aqui pensar em uma outra definição para a noção de "indiferença", com base em uma negação mais fraca, de tal forma que se pudesse expressar a sentença conflitante, acima, sem resvalar em um paradoxo.

Fica patente, dessa forma, o interesse em termos à disposição uma variedade de sistemas modais com diferentes tipos gradativos de negação. O preço que se paga é não rejeitar um pluralismo lógico, pelo qual uma lógica com negação diferente da clássica seria plenamente aceitável.

O capítulo está dividido em três seções: na Seção 3.1 fazemos uma apresentação das lógicas da inconsistência formal (LFIs), procurando enfatizar os resultados referentes à negação; nossa atenção está voltada para os sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci** e nosso interesse é apresentar uma metodologia para a obtenção dos sistemas catódicos como base paraconsistente (em especial, com base nas LFIs). A Seção 3.2, a principal do capítulo, concentra esforços para definir os sistemas catódicos $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ e mostrar os principais resultados a respeito desses sistemas; no caso dos três últimos sistemas, mostramos como obter a interdefinibilidade dos operadores modais $\Box$ e $\Diamond$, a custo de se acrescentar dois novos axiomas, fazendo com que esses sistemas deixem de ser bi-modais; ainda nessa seção, mostramos que os axiomas referentes ao operador modal $\Diamond$ podem ser eliminados e finalizamos com a completude para esses sistemas. A Seção 3.3 é reservada ao estudo do sistema $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$; do fato desse sistema ser catódico e bi-modal resulta que a completude para esse sistema seja obtida por meio de uma composição entre a completude dos sistemas anódicos e os sistemas catódicos (monomodais), como discutimos ao longo da seção; mais ainda, a particularidade de $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ permite que se mostre um resultado de incompletude também para a classe dos sistemas catódicos.

3.1 As lógicas da inconsistência formal (LFIs)

As lógicas da inconsistência formal (LFIs) são lógicas paraconsistentes que internalizam os conceitos de consistência (denotado por $\circ$) e inconsistência (denotado por $\bullet$) em sua linguagem. As LFIs apareceram pela primeira vez na literatura em [CM02], num artigo de Carnielli e Marcos que propõe uma taxonomia para os sistemas paraconsistentes. Carnielli, Coniglio e Marcos, em [CCM07], apresentam uma versão melhorada e mais concisa dessa taxonomia, e apresentam as LFIs como tema central desse artigo. De maneira geral e abstrata, algumas possibilidades de formalização e novas abordagens da relação entre os conceitos de consistência, inconsistência, contraditoriedade e trivialidade são explorados no artigo.

As lógicas paraconsistentes foram introduzidas em 1963 por da Costa em [dC63] (veja também [dC74]). É patente que tais lógicas são capazes de suportar contradições sem cair na banalidade dedutiva. A completude detalhada de C_1, primeira componente de uma hierarquia de lógicas paraconsistentes, foi apresentada na Dissertção de Mestrado de Alves em [Alv76], onde foi introduzida a conhecida semântica de quase-matrizes, e publicada por Alves e da Costa em [dCA77]. Os autores pensavam que a completude para toda a hieraquia C_n, $1 \leq n < \omega$, poderia ser obtida por uma simples adaptação daquela prova, porém, Loparíc e Alves em [LA80] mostraram que tal não era o caso. A completude para esses cálculo foi obtida por meio de uma semântica de valorações.

Uma característica marcante das lógicas paraconsistentes é o rompimento entre os conceitos de consistência e não-trivialidade, no sentido em que eles não necessariamente equivalem. No caso das LFIs, para se obter a trivialização é necessário que a seguinte equação seja satisfeita:

$$\text{Contradição} + \text{Consistência} = \text{Trivialidade}$$

A hierarquia C_n de da Costa aparece, na versão das LFIs, como uma sub-classe dos C-sistemas, chamados dC-sistemas. Nos C-sistemas o conceito de consistência não precisa ser expressado por meio de um conectivo primitivo da linguagem, mas pode ser representado por meio de uma fórmula da linguagem.

Na referida taxonomia, **mbC** é o primeiro sistema das LFIs, isto é, o sistema mais fraco que tem em sua linguagem o conectivo de consistência como primitivo. Uma axiomatização no estilo de Hilbert para **mbC** é apresentada por Carnielli, Coniglio e Marcos, em [CCM07], e são expostas duas provas de completude: uma por meio da semântica de valorações, e outra por meio das semânticas de traduções possíveis (um detalhamento sobre esse tema aparece no Capítulo 4 desta Tese).

A partir de **mbC** se constrói uma hierarquia de LFIs de acordo com o poder expressivo dado à negação do respectivo sistema. **Ci** é o primeiro sistema dessa hierarquia que apresenta o conectivo de inconsistência definido a partir dos conectivos de consistência e da negação.

Para o propósito deste capítulo, vamos considerar quatro sistemas com negações pouco expressivas: **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci**. Desses sistemas, **PI** é o único que não é classificado como LFI por ser escrito numa linguagem deficiente de operadores de consistência e inconsitência; os demais alcançam o *status* de ser LFI. Uma característica comum às LFIs é o fato de a linguagem ter poder expressivo suficiente para definir uma negação clássica no sistema. Dessa forma, poderíamos ousar classificar as LFIs como sistemas paraconsistentes com capacidade para definir negação clássica na linguagem. Quando combinamos modalidades com LFIs, o fato de termos à disposição uma negação clássica, por um lado, faz com que alguns resultados possam ser obtidos com menos dificuldade, mas por outro lado bloqueia a proposta de solução de alguns paradoxos, por exemplo a solução do paradoxo de Fitch apresentada por Costa-Leite em [CL03].

O sistema **mbC** é, como notamos, o primeiro elemento das LFIs. Esse sistema apresenta o operador de consistência ($\circ$) como primitivo na linguagem e com isso recupera, de forma elegante, o princípio da explosão apoiada na noção de consistência. **bC** é um sistema que estende **mbC** com o acréscimo de um axioma que fortalece a negação. No sistema **Ci** a negação passa a ter uma força de expressão tal que permite que se defina o operador de inconsistência ($\bullet$) a partir da negação e do operador de consistência. Com isso, temos uma amostra de sistemas paraconsistentes cuja negação apresenta graus de complexidade que permitem personalizar cada um dos sistemas considerados.

É notável que a negação, aos poucos, torna-se mais exigente no sentido em que é governada em cada sistema por mais axiomas, e com isso obtemos uma hierarquia de sistemas com negações gradativas. O caso limite dessa gradação é a negação clássica. Como mostramos na Figura 3.1, **PC** pode ser alcançado por diferentes vias na medida em que a negação paraconsistente aproxima-se da negação clássica.

Podemos estabelecer um elo entre o fragmento implicativo $\mathbf{PC}^{\supset}$ e o cálculo proposicional **PC**, descrito em três linguagens distintas, da seguinte forma: um na assinatura proposicional usual, outro na assinatura com o operador de consistência e o terceiro numa assinatura mista, com os operadores de consistência e inconsistência. Assim, os sistemas ficam hierarquizados de acordo com o poder expressivo da negação. Para a elaboração da Figura 3.1 usamos a seguinte convenção: na primeira linha estão os sistemas escritos na linguagem proposicional usual; na segunda a linguagem é equipada com o operador de consistência e os sistemas da terceira linha estão escritos na linguagem com os operadores de consistência e inconsistência.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{PC}^{\supset} \arrow[r] & \mathbf{PC}^{\supset,\wedge} \arrow[r] & \mathbf{PI} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{PId} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{PIde} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{PC} \\
 & & \mathbf{mbC} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{bC} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{bCe} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{PC}^{\circ} \\
 & & \mathbf{mCi} \arrow[r] & \mathbf{Ci} \arrow[r] & \mathbf{Cie} \arrow[r] & \mathbf{PC}^{\circ\bullet}
\end{tikzcd}
$$

Fig. 3.1: Relação entre sistemas clássicos e paraconsistentes

Convencionamos que o sistema à esquerda de uma seta é um subsistema do sistema à direita da seta. Assim sendo, cada um dos sistemas é um subsistema do cálculo proposicional clássico $\mathbf{PC}$[2]. Para detalhamento a respeito dos demais sistemas que apararecem na Figura 3.1, veja Marcos em [Mar08].

Como dissemos nos capítulos precedentes, os sistemas paraconsistentes que tratamos nesta Tese são apresentados a partir de uma axiomática mais enxuta, obtida a partir da assinatura contendo $\{\supset, \wedge, \neg\}$. Por essa razão optamos por não usar a nomenclatura original dos axiomas que caracterizam cada um dos sistemas paraconsistentes. Carnielli e Marcos, em [CM02], adotam uma nomenclatura com intenção mnemônica, uma vez que parte da preocupação está pautada na taxonomia dos sistemas e essa mesma notação é mantida por Carnielli, Coniglio e Marcos em [CCM07]. Para nomear os axiomas característicos de cada sistema paraconsistente que estamos considerando, usamos a mesma convenção adotada nos Capítulos 1 e 2 para nomear os axiomas modais – o nome do sistema aparece entre parênteses para indicar o axioma característico desse sistema.

De forma breve, apresentamos os sistema paraconsistentes **PI**, **mbC**, **bC**

[2] Denotamos por **PC** as diferentes versões do cálculo proposicional pelo fato de serem inócuos os operadores $\circ$ e $\bullet$ que foram inseridos na linguagem dessas versões.

e **Ci** procurando salientar de que forma cada sistema pode ser visto como uma extensão do sistema $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$. Para nosso propósito, destacamos somente os resultados desses sistemas que serão relevantes ao desenvolvimento da Tese, procurando dar destaque as cláusulas das valorações proposicionais responsáveis para a obtenção de completude via semântica de valorações.

Nosso objetivo, neste capítulo, é investigar sistemas modais munidos de negações fracas. Os modelos relacionais adequados a esses sistemas serão construídos com base naquelas valorações que vamos enfatizar, como mostra a Definição 3.2.6. Desenvolvemos esse tema na Seção 3.2.

Pode-se dizer que as lógicas paraconsistentes consistem, entre outras coisas, de sistemas que buscam investigar as propriedades inerentes à negação, na tentativa de caracterizar a capabilidade dedutiva dos diversos conectivos frente à própria negação. A idéia é identificar fórmulas do sistema que se comportam como uma negação. Nessa busca, um dos objetivos é saber quais dentre essas fórmulas com comportamento de negação podem ser classificadas como uma negação clássica. Para tanto, as negações classificam-se como *suplementares* e *complementares*. Se uma negação for tanto complementar quanto suplementar, então é uma *negação clássica*.

Dizemos que um sistema **S** tem *partícula minimal*, ou *Falsum*, se tem em sua linguagem uma fórmula que implica todas as fórmulas de **S**. Dizemos que **S** tem *partícula maximal*, ou *Verum*, se tem em sua linguagem uma fórmula que é implicada por todas as fórmulas de **S**.

De acordo com a definição acima, todos os teoremas de $\mathbf{PC}^{\supset}$ são implicados por todas as fórmulas de $\mathbf{PC}^{\supset}$ devido ao axioma (**A1**). Portanto em toda extensão de $\mathbf{PC}^{\supset}$ temos que os teoremas são equivalentes ao *Verum*, e que usualmente é denotado por $\top$.

Não é nosso intuito refazer toda essa discussão; para nossos propósitos basta considerar a noção intuitiva de "negação suplementar" e "negação complementar"[3], que descrevemos da seguinte forma:

- Uma fórmula é classificada como *negação suplementar* no sistema **S**

[3] Em [CCM07], a definição 5 exprime o conceito formal de "negação suplementar", e a definição 8 a de "negação complementar".

se não é um *Falsum* e satisfaz à lei *Reductio ad Absurdum*[4].

- Uma fórmula é classificada como *negação complementar* se não é um *Verum* e satisfaz à *Consequentia Mirabilis*[5].

As negações clássicas definidas em **S** serão denotadas por $\overset{p}{\sim}$, para cada variável p. Dado que esses sistemas permitem separar a negação clássica das negações do sistema, temos com isso um mecanismo para controlar a negação.

Como vimos na Figura 3.1, os sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci** são extensões de $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$, ou melhor, extensões conservativas como mostramos a seguir.

Seja **PI** o sistema obtido acrescentando-se à assinatura de $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$ o conectivo $\neg$, também chamado *negação fraca* ou *quase-negação*.[6] O conjunto das fórmulas de **PI** pode ser obtido acrescentando-se às cláusulas de formação do conjunto das fórmulas de $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$ a seguinte cláusula:

- Se α é fórmula, então $\neg\alpha$ é fórmula.

Os axiomas e regras de **PI** são os de $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$ acrescidos do seguinte axioma:

(**PI**) $\quad p \vee \neg p$

Aplicando o Teorema 1.3.2 (vi) e a definição da disjunção (ver Seção 1.3, p. 26) ao axioma (**PI**), temos como resultante a fórmula $(\neg p \supset p) \supset p$, ou seja, a negação $\neg$, em **PI**, satisfaz a *Consequentia Mirablilis*. Dessa forma, dado que p não é um *Verum* (ou $\top$), temos portanto que $\neg$ em **PI** é uma negação complementar. Contudo, não é possível definir em **PI** uma negação

[4] Também chamado "Princípio da Explosão", pode ser representado pela fórmula $\alpha \supset (\sim\alpha \supset \beta)$.

[5] Também conhecida por "Lei de Clavius", pode ser representada pela fórmula $(\sim\alpha \supset \alpha) \supset \alpha$.

[6] O sitema **PI** foi originalmente apresentado por Batens em [Bat80]. Em [CCM07], **PI** aparece axiomatizado pelos seguintes axiomas: (**A1**), (**A2**), (**A4**), (**A5**), (**A6**) e os ítens (i), (ii), (iv), (v) do Teorema 1.3.2 mais o axioma (**PI**) e a regra (**MP**).

Na versão original, apresentada em [Bat80], **PI** tem entre seus axiomas a fórmula $[(p \supset q) \supset p] \supset p$ ao invés da fórmula $p \vee (p \supset q)$. É fácil ver, por intermédio da definição de $\vee$, que essa fórmula é conseqüência do Teorema 1.3.2 (v) e (vi), que mostramos nesta Tese.

suplementar, mostrado em [CCM07], teorema 39. Em conseqüência, não é possível definir uma negação clássica em **PI**.

Tal impossibilidade em se definir uma negação clássica em **PI** acarretará que a extensão modal de **PI** fique mais próxima do sistema anódico $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ (no sentido em que o sistema mantém seu caráter bi-modal) do que das demais extensões que vamos considerar no decorrer deste capítulo. De fato, na medida em que tenhamos à disposição uma negação clássica, incorreremos na perda da bi-modalidade uma vez que recuperamos nessas extensões a equivalência entre $\Box\alpha$ e $\overset{p}{\sim}\Diamond\overset{p}{\sim}\alpha$.

Em **PI** vale o Teorema da Dedução uma vez que não foram acrescentadas novas regras de inferência. As valorações que estabelecem uma completude para **PI** são as valorações de $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$, acrescidas da seguinte valoração para a negação:

- Se $v(\alpha) = 0$, então $v(\neg\alpha) = 1$.

Como conseqüência imediata do Teorema da Dedução e do axioma (**PI**) temos que vale em **PI** a "prova por casos", como mostra o lema a seguir.

Lema 3.1.1. *Se $\alpha \vdash \beta$ e $\neg\alpha \vdash \beta$, então $\vdash \beta$.*

Demonstração. Conseqüência do Teorema da Dedução, Teorema 1.3.2 (iv) e axioma (**PI**). □

A *substituição por equivalentes demonstráveis* é um resultado que falha já em **PI**, isto é, para qualquer escolha de fórmulas $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$ e da fórmula $\varphi(p_1, \cdots, p_n)$, não vale em **PI**:

$$\alpha_1 \dashv\vdash \beta_1 \text{ e } \cdots \text{ e } \alpha_n \dashv\vdash \beta_n \text{ implica } \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \dashv\vdash \varphi(\beta_1, \cdots, \beta_n)$$

Esse resultado também não se cumpre nas LFIs (propriamente contidas em **PC**) que estendem **PI** e como conseqüência tal resultado falhará nas extensões modais baseadas nesses sistemas. Por outro lado, a ausência do operador de consistência na linguagem de **PI** não permite classificá-lo como LFI. A seguir apresentamos a primeira componente da hierarquia das LFIs, o sistema **mbC**.

Acrescentando-se o operador de consistência ($\circ$) à linguagem de **PI** obtém-se o sistema **mbC**. O conjunto das fórmulas de **mbC** pode ser obtido acrescentando-se às cláusulas de formação do conjunto das fórmulas de **PI** a seguinte cláusula:

- Se α é uma fórmula, então $\circ\alpha$ é uma fórmula.

Os axiomas e regras de **mbC** são os de **PI** acrescidos do seguinte axioma:

(**mbC**) $\quad \circ p \supset [p \supset (\neg p \supset q)]$

Em [CM02], Carnielli e Marcos apresentam o axioma (**mbC**) em formato de regra e a nomeiam de "Princípio da Explosão Gentil"[7]. Esse sistema, conhecido por **mbC**, é a primeira componente da classe das chamadas LFIs, lógicas que apresentam o operador de consistência como primitivo na linguagem e que satisfazem o Princípio da Explosão Gentil. Esse é justamente o príncípio que separa as LFIs da lógica clássica: a lógica clássica está pautada no princípio de que "nada pode ser contraditório" enquanto que as LFIs, no princípio de que "nada pode ser consistente e contraditório".

De certa forma, podemos dizer que a negação fraca se aproxima da negação clássica na medida em que ampliamos o escopo das entidades consistentes. Não é o papel da lógica dizer quem são essas entidades, porém a lógica consegue saber o que escapa desse escopo, como mostra o fato a seguir.

Fato 3.1.2. *Vale em **mbC**:* $(\alpha \wedge \neg\alpha) \supset \neg \circ \alpha$

Demonstração. Aplicando o Teorema da Dedução no axioma (**mbC**) temos que $\circ\alpha, \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$ para toda fórmula β, em particular $\circ\alpha, \alpha, \neg\alpha \vdash \neg \circ \alpha$. Pela reflexividade do operador de conseqüência, temos que $\neg \circ \alpha, \alpha, \neg\alpha \vdash \neg \circ \alpha$. Pelo Teorema da Dedução, $\circ\alpha \vdash \alpha \supset (\neg\alpha \supset \neg \circ \alpha)$ e $\neg \circ \alpha \vdash \alpha \supset (\neg\alpha \supset \neg \circ \alpha)$ daí, pelo Lema 3.1.1, segue que $\vdash \alpha \supset (\neg\alpha \supset \neg \circ \alpha)$. Novamente, dos axiomas (**A5**) e (**A6**) temos que $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \alpha$ e $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \neg\alpha$ daí, por monotonicidade e (**MP**), segue que $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \neg \circ \alpha$. Portanto $\vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \supset \neg \circ \alpha$. □

[7] Em [CCM07] o axioma (**mbC**) aparece denotado por (bc1), mesma notação usada em [CM02] para denotar o "Princípio da Explosão Gentil".

Dessa forma, temos que em **mbC** "contradição" implica "não-consistência" mas não o contrário.

As valorações que estabelecem a completude para **mbC** por meio de uma semântica de valorações, são as valorações de **PI** acrescidas da seguinte cláusula de valoração para o operador de consistência:

- Se $v(\circ\alpha) = 1$, então $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$.

O resultado a seguir mostra que **mbC** tem uma infinidade de partículas minimais, uma para cada variável proposicional p da linguagem. Denotamo-las por $\bot_p$.

Fato 3.1.3. *Para cada variável p de **mbC** temos que $p \wedge (\neg p \wedge \circ p)$ é uma partícula minimal.*

Demonstração. De fato, para cada variável p, temos $v(p \wedge (\neg p \wedge \circ p)) = 0$ em cada modelo para **mbC**. Suponha, por absurdo, que $v(p \wedge (\neg p \wedge \circ p)) = 1$. Dado que a valoração de fórmulas conjuntivas é como no caso clássico, então $v(p) = 1$, $v(\neg p) = 1$ e $v(\circ p) = 1$. Pela clásula de valoração em **mbC** temos que se $v(\circ p) = 1$, então $v(\neg p) = 1$ ou $v(\circ p) = 1$. Absurdo em ambos os casos. □

Como conseqüência do Fato 3.1.3 podemos definir em **mbC** uma infinidade de negações, uma para cada variável p, da seguinte forma:

$$\overset{\mathrm{p}}{\sim} \alpha \overset{\mathrm{Def}}{=} \alpha \supset [p \wedge (\neg p \wedge \circ p)]$$

No Fato 3.1.4 mostramos que tais negações são clássicas. Dado que não vale a substituição por equivalentes demonstráveis em **mbC** não podemos substituir indistintamente tais negações. Para contornar esse problema, devemos tomar o cuidado de tratar sempre com a mesma negação. Sem perda de generalidade e para simplicidade na notação, escolhemos a variável p_0 como um representante para as negações clássicas e a denotamos por $\sim\alpha$. Nas demonstrações de algumas das propriedades relacionadas com a negação $\sim$ será conveniente denotá-la como $\alpha \supset \bot$. Usamos as duas notações indistintamente conforme a conveniência.

Fato 3.1.4. *Em* ***mbC*** *a fórmula* $\sim\alpha$ *é uma negação suplementar e complementar.*

Demonstração. Vejamos que $\sim\alpha$ é suplementar.

1. Pelo Fato 3.1.3 temos que $\perp$ é uma partícula minimal, ou seja, $v(\perp) = 0$. No caso de $v(\alpha) = 0$ temos que $v(\alpha \supset \perp) = 1$, isto é, $\sim\alpha$ não é o *Falsum*, ou seja, $\sim\alpha \neq \perp$.

2. Vale *Reductio ad Absurdum* para $\sim\alpha$, ou seja, $\sim\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$.

1.	$\sim\alpha$	[Hip.]
2.	α	[Hip.]
3.	$\alpha \supset [p \wedge (\neg p \wedge \circ p)]$	[Def. $\sim$ em 1]
4.	$p \wedge (\neg p \wedge \circ p)$	[(**MP**) em 2 e 3]
5.	p	[(**A5**) e (**MP**) em 4]
6.	$\neg p$	[Análogo ao 5]
7.	$\circ p$	[Análogo ao 5]
8.	$\circ p \supset [p \supset (\neg p \supset \beta)]$	[(**mbC**)]
9.	β	[(**MP**) 3× em 8]

Vejamos que $\sim\alpha$ é complementar.

1. Pelo Fato 3.1.3 temos que $v(\perp) = 0$. No caso de $v(\alpha) = 1$ temos que $v(\alpha \supset \perp) = 0$, isto é, $\sim\alpha$ não é o *Verum*, ou seja, $\sim\alpha \neq \top$.

2. Vale *Consequentia Mirabilis* para $\sim\alpha$, ou seja, $(\sim\alpha \supset \alpha) \supset \alpha$.

1.	$\sim\alpha \supset \alpha$	[Hip.]
2.	$(\alpha \supset \perp) \supset \alpha$	[Def. $\sim$ em 1]
3.	$\alpha \vee (\alpha \supset \perp)$	[Teo. 1.3.2 (v)]
4.	$[\alpha \supset (\alpha \supset \perp)] \supset (\alpha \supset \perp)$	[Def. $\vee$ em 3]
5.	$[\alpha \supset (\alpha \supset \perp)] \supset \alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 4 e 2]
6.	$\alpha \supset \alpha$	[$\mathbf{PC}^{\supset}$]
7.	$(\alpha \supset \alpha) \supset \{\{[\alpha \supset (\alpha \supset \perp)] \supset \alpha\} \supset \alpha\}$	[(**A3**)]
8.	$\{[\alpha \supset (\alpha \supset \perp)] \supset \alpha\} \supset \alpha$	[(**MP**) em 6 e 7]
9.	α	[(**MP**) em 5 e 8]

□

O resultado a seguir mostra algumas propriedades da negação $\sim$. Embora sejam propriedades conhecidas, achamos conveniente reproduzi-las, aqui, a fim de tornar a leitura confortável. Tais propriedades serão úteis para mostrar uma série de resultados a respeito dos sistemas catódicos que iremos definir na próxima seção.

Fato 3.1.5. *As seguintes propriedades são válidas em* $\boldsymbol{mbC}$.
(i) $\alpha \vee {\sim}\alpha$;
(ii) $\alpha \supset {\sim}{\sim}\alpha$;
(iii) ${\sim}{\sim}\alpha \supset \alpha$;
(iv) $(\alpha \supset \beta) \supset ({\sim}\beta \supset {\sim}\alpha)$;
(v) $({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta) \supset {\sim}(\alpha \vee \beta)$;
(vi) $({\sim}\alpha \vee \beta) \supset (\alpha \supset \beta)$;
(vii) $(\alpha \supset \beta) \supset ({\sim}\alpha \vee \beta)$;
(viii) $(\alpha \vee \beta) \supset ({\sim}\alpha \supset \beta)$;
(ix) ${\sim}(\alpha \wedge \beta) \supset ({\sim}\alpha \vee {\sim}\beta)$.

Demonstração. (i) Considere a instância $\alpha \vee (\alpha \supset \bot)$ do Teorem 1.3.2 (v) e aplique a definição de $\sim$. Disso segue $\alpha \vee {\sim}\alpha$.

(ii) Considere a instância $\alpha \supset (\alpha \vee \bot)$ do Teorema 1.3.2 (i). Usando a definição de $\vee$ temos que $\alpha \supset [(\alpha \supset \bot) \supset \bot]$. Portanto, pela definição de $\sim$, segue que $\alpha \supset {\sim}{\sim}\alpha$.

(iii)

1.	$\bot \supset \bot$	[$\mathbf{PC}^{\supset}$]
2.	${\sim}\bot \supset (\bot \supset \alpha)$	[Fato 3.1.4]
3.	$(\bot \supset \bot) \supset (\bot \supset \alpha)$	[Def. $\sim$ em 2]
4.	$\bot \supset \alpha$	[(**MP**) em 1 e 3]
5.	$\alpha \supset \alpha$	[$\mathbf{PC}^{\supset}$]
6.	$(\alpha \vee \bot) \supset \alpha$	[Teo. 1.3.2 (iv) em 5 e 4]
7.	$[(\alpha \supset \bot) \supset \bot] \supset \alpha$	[Def. $\vee$ em 6]
8.	${\sim}{\sim}\alpha \supset \alpha$	[Def. $\sim$ em 7]

(iv)

1. $\alpha \supset \beta$ [Hip.]
2. $\sim\beta$ [Hip.]
3. $\beta \supset \bot$ [Def. $\sim$ em 2]
4. $\alpha \supset \bot$ [Teo. 1.3.2 (iii) em 1 e 3]
5. $\sim\alpha$ [Def. $\sim$ em 4]

(v)

1. $\sim\alpha \wedge \sim\beta$ [Hip.]
2. $\sim\alpha$ [(**A5**) e (**MP**) em 1]
3. $\sim\beta$ [(**A6**) e (**MP**) em 1]
4. $\alpha \supset \bot$ [Def. $\sim$ em 2]
5. $\beta \supset \bot$ [Def. $\sim$ em 3]
6. $(\alpha \vee \beta) \supset \bot$ [Teo. 1.3.2 (iv) em 4 e 5]
7. $\sim(\alpha \vee \beta)$ [Def. $\sim$ em 6]

(vi)

1. $\sim\alpha \vee \beta$ [Hip.]
2. $\beta \vee \sim\alpha$ [Teo. 1.3.2 (vi) em 1]
3. $(\beta \supset \sim\alpha) \supset \sim\alpha$ [Def. $\vee$ em 2]
4. $\sim\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$ [Fato. 3.1.4]
5. $(\beta \supset \sim\alpha) \supset (\alpha \supset \beta)$ [Teo. 1.3.2 (iii) em 3 e 4]
6. $\beta \supset (\alpha \supset \beta)$ [(**A1**)]
7. $(\alpha \supset \beta)$ [(**A3**) e (**MP**) em 5 e 6]

(vii) Usando a definição de $\vee$, é equivalente mostrar $(\alpha \supset \beta) \supset [(\sim\alpha \supset \beta) \supset \beta]$.

1. $\alpha \supset \beta$ [Hip.]
2. $\sim\alpha \supset \beta$ [Hip.]
3. $(\alpha \vee \sim\alpha) \supset \beta$ [Teo. 1.3.2 (iv) em 1 e 2]
4. $(\alpha \vee \sim\alpha)$ [Fato. 3.1.5 (i)]
5. β [(**MP**) em 4 e 3]

(viii)

1.	$(\alpha \vee \beta)$	[Hip.]
2.	$\sim\alpha$	[Hip.]
3.	$(\alpha \supset \beta) \supset \beta$	[Def. $\vee$ em 1]
4.	$\alpha \supset \bot$	[Def. $\bot$ em 2]
5.	$\sim\alpha \supset (\alpha \supset \beta)$	[Fato 3.1.4]
6.	$\alpha \supset \beta$	[(**MP**) em 2 e 5]
7.	β	[(**MP**) em 6 e 3]

(ix) Pelo Fato 3.1.5 (iv), (iii) e (**MP**), equivale mostrar $\sim(\sim\alpha \vee \sim\beta) \supset (\alpha \wedge \beta)$.

1.	$\sim(\sim\alpha \vee \sim\beta)$	[Hip.]
2.	$(\sim\alpha \vee \sim\beta) \supset \bot$	[Def. $\sim$ em 1]
3.	$\sim\alpha \supset (\sim\alpha \vee \sim\beta)$	[Teo. 1.3.2 (i)]
4.	$\sim\alpha \supset \bot$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 3 e 2]
5.	$\sim\sim\alpha$	[Def. $\sim$ em 4]
6.	α	[Fato 3.1.5 (iii) e (**MP**) em 5]
7.	β	[Análogo de 1 à 6]
8.	$\alpha \wedge \beta$	[(**A4**) e (**MP**) em 6 e 7]

$\square$

Em [CCM07], são reservadas três seções para o estudo do sistema **mbC**. Na verdade, **mbC** é tomado como um exemplo paradigmático com o intuito de solucionar um problema deixado em aberto, por dois dos autores em [CM02]:

> "...this should not be a impediment for the reader to study still weaker and more basic logics, such as **mbC**..."

Nesse artigo é estabelecida a completude para **mbC** por meio de uma semântica de valorações e outra por meio das semânticas de traduções possíveis. É apresentado também um cálculo de tablôs para esse sistema. Um outro sistema de tablôs para **mbC**, mais voltado para interesses de implementação, foi proposto por Adolfo Serra Seca, em sua Tese de Doutorado em [SSN07], com intenção de implementar um provador de teoremas multiestratégia baseado em método de tablôs KE. **mbC** serviu de base para a construção de um desses provadores[8], e que podemos dizer que é o primeiro provador de teoremas baseado em uma lógica paraconsistente.

O próximo sistema da hierarquia é **bC**, escrito na mesma linguagem de **mbC**, como vemos a seguir.

Os axiomas e regras de **bC** são os de **mbC** acrescidos do seguinte axioma:

(**bC**) $\quad \neg\neg p \supset p$

As valorações que estabelecem uma completude para **bC**, por meio de um semântica de valorações, são as de **mbC** acrescidas da seguinte cláusula:

- Se $v(\neg\neg\alpha) = 1$, então $v(\alpha) = 1$.

A completude para **bC** foi estabelecida em [CM02] por Carnielli e Marcos por meio de uma semântica de valorações e uma outra por intermédio das semânticas de traduções possíveis.

O último sistema que vamos considerar é o sistema **Ci**. Há duas versões equivalentes de **Ci**, a que estamos considerando é a versão simplificada que aparece em [CCM07], teorema 101.

O sistema **Ci** tem a particularidade de poder expressar a noção de inconsistência a partir da consistência, como veremos logo a seguir. O Fato 3.1.2, mostra que em **mbC** "contradição" implica "não-consistência", mas não o contrário. O acréscimo do axioma (**Ci**) permitirá que tais conceitos coincidam.

O sistema **Ci** estende **bC** com o acréscimo do seguinte axioma:

(**Ci**) $\quad \neg \circ p \supset (p \wedge \neg p)$

Com isso, podemos representar em **Ci** o conceito de inconsistência, denotado por ($\bullet$), da seguinte maneira:

$$\bullet\alpha \stackrel{\text{Def}}{=} \neg \circ \alpha$$

[8] Adolfo propôs provadores de teoremas baseados também na lógica clássica e na lógica paraconsistente **mCi**.

Com essa definição temos como conseqüência que o conceito de “inconsistência” coincide com o de “não-consistência”, o que não ocorria nos sistemas prévios.

As valorações que estabelecem a completude para **Ci** por meio de uma semântica de valorações, são as valorações de **bC** acrescidas da seguinte:

- Se $v(\neg \circ \alpha) = 1$, então $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\alpha) = 1$.

A completude para **Ci** foi estabelecida em [CM02] por Carnielli e Marcos por meio de uma semântica de valorações e uma outra por intermédio das semânticas de traduções possíveis.

A próxima seção se ocupa de estender $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}+\mathbf{G}^{k,l,m,n}+\mathbf{G}^{m,n,k,l}$ com os axiomas característicos dos sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci**, apresentados nesta seção, originando assim os sistemas que chamamos *catódicos*.

3.2 As classes de sistemas catódicos $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$

Do ponto de vista de combinações de lógicas os sistemas catódicos que vamos considerar nesta seção podem, de certa forma, ser vistos como extensões de *fusão*[9] de lógicas (modais e não modais).

Antes de prosseguir com a discussão convém alertar o leitor para o fato de que a fusão de lógicas é um caso particular da fibrilação (*fibring*), conforme o detalhado e aprofundado tratamento do tema combinação e decomposição de lógicas de Carnielli, Coniglio, Gabbay, Gouveia e Sernadas em [CCG+08]. A fusão entre lógicas modais é uma construção universal (em termos categoriais), ou seja, a menor lógica que contém as lógicas de partida como fragmentos: de fato, considerando que estruturas de Kripke e seus morfismos constituem uma categoria, a fusão de lógicas modais forma um *pushout* nessa categoria, como mostram os autores em [CCG+08].

Uma outra questão ligada à fusão de lógicas é a preservação de propriedades das lógicas de partida, tais como decidibilidade e completude entre outras. Diversos resultados sobre preservação de completude para linguagens envolvendo a negação clássica foram estudados por Wolter em [Wol98],

[9] Fusão é um método específico de combinar lógicas modais.

por Kit Fine e Schurz em [FS96], e por Kracht e Wolter em [KW91]. A fusão de lógicas não-normais foi também estudada por Fajardo e Finger em [FF03]. Nenhum desses métodos, contudo, se aplica a lógicas sem negação, ou com negação mais fraca que a clássica, e portanto as lógicas anódicas e catódicas estão fora de seu escopo.

Não restam dúvidas, por outro lado, de que os sistemas que estudamos aqui, e os resultados de completude em especial, poderiam, com algum esforço, ser reconstruídos como casos de preservação de completude via fibrilação algébrica, na perspectiva dos poderosos métodos de combinação de lógicas, apresentados em [CCG⁺08] (*op. cit.*), que permitem, em princípio, tratar lógicas anódicas e catódicas. De fato, para se ter uma idéia das potencialidades desses métodos é interessante notar que embora não existissem métodos (tanto quanto seja de nosso conhecimento) de fusão entre lógicas normais e não-normais, esse tipo de combinação pode ser expresso como fibrilação algébrica (veja [CCG⁺08]). Mas, mesmo que possam ser reconstruídos como fibrilação algébrica, de maneira nenhuma a fibrilação algébrica o faria de maneira automática ou imediata: falta-lhe a capacidade de propor axiomas de interação, e essa é uma parte essencial do nosso trabalho. Como reconhecem explicitamente os autores em [CCG⁺08], páginas 179 e 180, referindo-se ao sistema de da Costa e Carnielli em [dCC86]:

> "The system C_1^D of paraconsistent modal logic, introduced in [75], is then taken as an application example. It should be reasonable to expect that the mixed logic C_1^D could be recovered by fibring the underlying modal and paraconsistent logics. However, the fibring of the two fragments (the modal with the paraconsistent), using the method we propose, produces a logic which is a little weaker than the original C_1^D. There is a simple explanation for this problem: C_1^D contains an essential interaction axiom that cannot even be expressed in either of the logics being fibred"

Fenômeno similar ocorre com todos os nossos sistemas, onde axiomas de interação precisam ser laboriosamente estudados de forma a completar a personalidade lógica dos sistemas em questão. Que isso possa ser feito *a posteriori*, e que a preservação de propriedades de nossos sistemas possa ser reescrita através da fibrilação algébrica é uma outra questão que, se positivada, pode render bons exemplos ao método de fibrilação algébrica.

Na seção anterior vimos como nas LFIs é possível definir negações clássicas nos sistemas **mbC**, **bC** e **Ci**. Isso irá acarretar que as extensões modais que obtemos nesta seção irão perder o *status* da bi-modalidade, e com isso, parte do aparato formal usado no Capítulo 2 pode ser descartado, como mostramos, por exemplo, no Lema 3.2.2 e no Teorema 3.2.3.

Seguindo na mesma linha dos capítulos anteriores, enriquecemos a linguagem de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$+$\mathbf{G}^{k,l,m,n}$+$\mathbf{G}^{m,n,k,l}$ com negações fracas e obtemos, dessa forma, o que chamamos de *sistemas catódicos*.

Definição 3.2.1. *Chamamos catódico ao sistema obtido como extensão do sistema anódico* $\boldsymbol{S}$ *pelo acréscimo do conectivo de negação* $\neg$ *e do operador de consistência* $\circ$ *à linguagem de* $\boldsymbol{S}$*.*

Restringimo-nos, nesta Tese, ao estudo dos seguintes sistemas catódicos:

- $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$: $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$+$\mathbf{G}^{k,l,m,n}$+$\mathbf{G}^{m,n,k,l}$ acrescido de (**PI**);
- $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$: $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ acrescido de (**mbC**);
- $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$: $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ acrescido de (**bC**);
- $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$: $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ acrescido de (**Ci**).

Devemos observar que no caso da classe $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ estamos abusando da notação. Das classes de sistemas que estamos considerando, essa é a única cuja linguagem não permite definir uma negação clássica. Tal impossibilidade implica que a classe $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ seja composta de sistemas catódicos bimodais, e nesse caso a presença de $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ requer o acréscimo de sua instância dual $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$, da mesma forma que fizemos no Capítulo 2. Nas demais classes de sistemas catódicos a presença da negação clássica permite mostrar que as duas instâncias equivalem, como mostramos no Lema 3.2.5. Isso é possível devido ao acrécimo de dois *axiomas de ligação*, os quais fazem uso da negação clássica e permitem mostrar que a bi-modalidade torna-se descartável nesses sistemas. Tais resultados evidenciam que na medida em que a negação ganha força, os sistemas catódicos aproximam-se dos sistemas modais usuais.

Dada a diferença entre a classe de sistemas $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ e as demais classes que estamos considerando, será conveniente apresentar a completude de $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ em uma seção separada em razão da diferença metodológica. Contudo, é essencial apresentar, já nesta seção, todo o artefato definicional de $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, sem o que não teria sentido tratar de suas extensões.

Nos sistemas mais fortes que $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ podemos definir uma negação clássica, que denotamos por $\sim$, como foi mostrado na Seção 3.1. Para alcançarmos a monomodalidade, será conveniente adicionar a esses sistemas dois novos axiomas modais chamados *axiomas ligação* ou também *bridge principle*:

(**BP1**) $\quad \Box{\sim}p \supset {\sim}\Diamond p$

(**BP2**) $\quad {\sim}\Diamond p \supset \Box{\sim}p$

Em posse desses axiomas de ligação estabelece-se uma conexão entre as noções de possibilidade e necessidade: com a negação fraca $\neg$, "não é possível que não" e "é necessário que" jamais coincidem, ao passo que com uma negação clássica essa conexão esperada se restabelece, como mostramos no Lema 3.2.2. Mais ainda, no Teorema 3.2.3 mostramos que os axiomas (**K1**), (**K2**) e (**K3**) tornam-se redundantes, o que não é surpresa em vista do fato que esses axiomas são instâncias do axioma (**K**) nos sistemas modais usuais, como comentamos na Seção 2.1, página 55.

O resultado a seguir mostra que o operador $\Diamond$ pode ser expressado por meio do operador $\Box$ e $\sim$ como nos sistemas modais usuais.

Lema 3.2.2. *As seguintes relações são válidas em* $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$*:*
(i) $\Diamond\alpha \supset {\sim}\Box{\sim}\alpha$;
(ii) ${\sim}\Box{\sim}\alpha \supset \Diamond\alpha$;
(iii) $\Box\alpha \supset {\sim}\Diamond{\sim}\alpha$;
(iv) ${\sim}\Diamond{\sim}\alpha \supset \Box\alpha$.

Demonstração. O resultado segue por iteração do processo.

(i)

1.	$\Box{\sim}\alpha \supset {\sim}\Diamond\alpha$	[(**BP1**)]
2.	${\sim}{\sim}\Diamond\alpha \supset {\sim}\Box{\sim}\alpha$	[Fato 3.1.5 (iv) e (**MP**) em 1]
3.	$\Diamond\alpha \supset {\sim}{\sim}\Diamond\alpha$	[Fato 3.1.5 (ii)]
4.	$\Diamond\alpha \supset {\sim}\Box{\sim}\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 3 e 2]

(ii) Análogo ao (i), usando o axioma (**BP2**).

(iii)

1.	$\Box{\sim}{\sim}\alpha \supset {\sim}\Diamond{\sim}\alpha$	[(**BP1**)]
2.	$\alpha \supset {\sim}{\sim}\alpha$	[Fato 3.1.5 (ii)]
3.	$\Box\alpha \supset \Box{\sim}{\sim}\alpha$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 2]
4.	$\Box\alpha \supset {\sim}\Diamond{\sim}\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 3 e 1]

(iv) Análogo ao (iii), usando o axioma (**BP2**).

$\Box$

Com base no resultado acima, que estabelece uma relação estreita entre as modalidades $\Box$ e $\Diamond$, estamos em condições de mostrar que os axiomas (**K1**), (**K2**) e (**K3**) podem ser derivados em $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ e em suas extensões.

Teorema 3.2.3. *As seguintes fórmulas são teoremas de* $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$.
(i) $\Box(\alpha \supset \beta) \supset (\Diamond\alpha \supset \Diamond\beta)$;
(ii) $\Diamond(\alpha \vee \beta) \supset \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta$;
(iii) $\Diamond\alpha \supset \Box\beta \supset \Box(\alpha \supset \beta)$.

Demonstração. (i)

1.	$\Box(\alpha \supset \beta)$	[Hip.]
2.	$\Box\alpha \supset \Box\beta$	[(**K**) e (**MP**) em 1]
3.	$(\alpha \supset \beta) \supset ({\sim}\beta \supset {\sim}\alpha)$	[Fato. 3.1.5 (iv)]
4.	$\Box(\alpha \supset \beta) \supset \Box({\sim}\beta \supset {\sim}\alpha)$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 3]
5.	$\Box({\sim}\beta \supset {\sim}\alpha)$	[(**MP**) em 1 e 4]
6.	$\Box{\sim}\beta \supset \Box{\sim}\alpha$	[(**K**) e (**MP**) em 5]
7.	$(\Box{\sim}\beta \supset \Box{\sim}\alpha) \supset ({\sim}\Box{\sim}\alpha \supset {\sim}\Box{\sim}\beta)$	[Fato 3.1.5 (iv)]
8.	${\sim}\Box{\sim}\alpha \supset {\sim}\Box{\sim}\beta$	[(**MP**) em 6 e 7]
9.	$\Diamond\alpha \supset {\sim}\Box{\sim}\alpha$	[Lema 3.2.2 (i)]
10.	${\sim}\Box{\sim}\beta \supset \Diamond\beta$	[Lema 3.2.2 (ii)]
11.	$\Diamond\alpha \supset {\sim}\Box{\sim}\beta$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 9 e 8]
12.	$\Diamond\alpha \supset \Diamond\beta$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 11 e 10]

(ii)

1.	$({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta) \supset {\sim}(\alpha \vee \beta)$	[Fato 3.1.5 (v)]
2.	$\Box({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta) \supset \Box{\sim}(\alpha \vee \beta)$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 1]
3.	${\sim}\Box{\sim}(\alpha \vee \beta) \supset {\sim}\Box({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta)$	[Fato 3.1.5 (iv) em 2]
4.	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \supset {\sim}\Box{\sim}(\alpha \vee \beta)$	[Lema 3.2.2 (i)]
5.	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \supset {\sim}\Box({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta)$	[Teo 1.3.2 (iii) em 4 e 3]
6.	$(\Box{\sim}\alpha \wedge \Box{\sim}\beta) \supset \Box({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta)$	[Lema. 1.3.10 (iii)]
7.	${\sim}\Box({\sim}\alpha \wedge {\sim}\beta) \supset {\sim}(\Box{\sim}\alpha \wedge \Box{\sim}\beta)$	[Fato 3.1.5 (iv) em 6]
8.	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \supset {\sim}(\Box{\sim}\alpha \wedge \Box{\sim}\beta)$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 5 e 7]
9.	${\sim}(\Box{\sim}\alpha \wedge \Box{\sim}\beta) \supset ({\sim}\Box{\sim}\alpha \vee {\sim}\Box{\sim}\beta)$	[Fato 3.1.5 (ix)]
10.	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \supset ({\sim}\Box{\sim}\alpha \vee {\sim}\Box{\sim}\beta)$	[Teo 1.3.2 (iii) em 8 e 9]
11.	${\sim}\Box{\sim}\alpha \supset \Diamond\alpha$	[Lema 3.2.2 (ii)]
12.	$\Diamond\alpha \supset \Diamond\alpha \vee \Diamond\beta$	[Teo 1.3.2 (i)]
13.	${\sim}\Box{\sim}\alpha \supset (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$	[Teo 1.3.2 (iii) em 11 e 12]
14.	${\sim}\Box{\sim}\beta \supset (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$	[Análogo de 11 à 13]
15.	$({\sim}\Box{\sim}\alpha \vee {\sim}\Box{\sim}\beta) \supset (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$	[Teo. 1.3.2 (iv) em 13 e 14]
16.	$\Diamond(\alpha \vee \beta) \supset (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 10 e 15]

(iii)

1.	$(\sim\alpha \vee \beta) \supset (\alpha \supset \beta)$	[Fato 3.1.5 (vi)]
2.	$\Box(\sim\alpha \vee \beta) \supset \Box(\alpha \supset \beta)$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 1]
3.	$\beta \supset \sim\alpha \vee \beta$	[Teo. 1.3.2 (ii)]
4.	$\Box\beta \supset \Box(\sim\alpha \vee \beta)$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 3]
5.	$\Box\sim\alpha \supset \Box(\sim\alpha \vee \beta)$	[Analogamente de 3 à 4]
6.	$\sim\Diamond\alpha \supset \Box\sim\alpha$	[(**BP2**)]
7.	$\sim\Diamond\alpha \supset \Box(\sim\alpha \vee \beta)$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 6 e 5]
8.	$(\sim\Diamond\alpha \vee \Box\beta) \supset \Box(\sim\alpha \vee \beta)$	[Teo. 1.3.2 (iv) em 7 e 4]
9.	$(\Diamond\alpha \supset \Box\beta) \supset (\sim\Diamond\alpha \vee \Box\beta)$	[Fato 3.1.5 (vii)]
10.	$(\Diamond\alpha \supset \Box\beta) \supset \Box(\sim\alpha \vee \beta)$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 9 e 8]
11.	$(\Diamond\alpha \supset \Box\beta) \supset \Box(\alpha \supset \beta)$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 10 e 2]

□

No resultado a seguir mostramos que as relações estabelecidas entre as modalidades $\Box$ e $\Diamond$, por intermédio dos axiomas (**BP1**) e (**BP2**), podem ser generalizadas. Tais resultados serão relevantes para a obtenção da completude.

Lema 3.2.4. *As seguintes fórmulas são teoremas em* $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$.
(i) $\sim\Diamond^n\sim\alpha \supset \Box^n\alpha$;
(ii) $\Box^n\alpha \supset \sim\Diamond^n\sim\alpha$;
(iii) $\Box^n\sim\alpha \supset \sim\Diamond^n\alpha$;
(iv) $\sim\Diamond^n\alpha \supset \Box^n\sim\alpha$;
(v) $\Diamond^n\sim\alpha \supset \sim\Box^n\alpha$;
(vi) $\sim\Box^n\alpha \supset \Diamond^n\sim\alpha$;
(vii) $\Diamond^n\alpha \supset \sim\Box^n\sim\alpha$.

Demonstração. Os resultados seguem por iteração do processo.

(i)

1.	$\sim\Diamond\sim\alpha \supset \Box\alpha$	[Lema 3.2.2 (iv)]
2.	$\Box\sim\Diamond\sim\alpha \supset \Box\Box\alpha$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 1]
3.	$\sim\Box\Box\alpha \supset \sim\Box\sim\Diamond\sim\alpha$	[Fato 3.1.5 (iv) em 2]
4.	$\sim\Box\sim\Diamond\sim\alpha \supset \Diamond\Diamond\sim\alpha$	[Lema 3.2.2 (ii)]
5.	$\sim\Box\Box\alpha \supset \Diamond\Diamond\sim\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 3 e 4]
6.	$\sim\Diamond\Diamond\sim\alpha \supset \sim\sim\Box\Box\alpha$	[Fato 3.1.5 (iv) em 5]
7.	$\sim\sim\Box\Box\alpha \supset \Box\Box\alpha$	[Fato 3.1.5 (iii)]
8.	$\sim\Diamond\Diamond\sim\alpha \supset \Box\Box\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 6 e 7]
9.	$\sim\Diamond^2\sim\alpha \supset \Box^2\alpha$	[Notação em 8]

(ii) Análogo ao (i), usando o Lema 3.2.2 (iii) no lugar do Lema 3.2.2 (iv).

(iii)

1.	$\Box\sim\alpha \supset \sim\Diamond\alpha$	[(**BP1**)]
2.	$\Box\Box\sim\alpha \supset \Box\sim\Diamond\alpha$	[(**Nec**), (**K**) e (**MP**) em 1]
3.	$\Box\sim\Diamond\alpha \supset \sim\Diamond\Diamond\alpha$	[(**BP1**)]
4.	$\Box\Box\sim\alpha \supset \sim\Diamond\Diamond\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 2 e 3]
5.	$\Box^2\sim\alpha \supset \sim\Diamond^2\alpha$	[Notação em 4]

(iv) Análogo ao (iii), usando (**BP2**) no lugar de (**BP1**).

(v)

1.	$\Diamond^n\sim\alpha$	[Hip.]
2.	$\Diamond^n\sim\alpha \supset \sim\sim\Diamond^n\sim\alpha$	[Fato 3.1.5 (ii)]
3.	$\sim\sim\Diamond^n\sim\alpha$	[(**MP**) em 1 e 2]
4.	$\sim\Diamond^n\sim\alpha \supset \bot$	[Def. $\sim$ em 3]
5.	$\Box^n\alpha \supset \sim\Diamond^n\sim\alpha$	[Lema 3.2.4 (ii)]
6.	$\Box^n\alpha \supset \bot$	[Teo. 1.3.2 (iv) em 5 e 4]
7.	$\sim\Box^n\alpha$	[Def. $\sim$ em 6]

(vi)

1.	$\sim\Box^n\alpha$	[Hip.]
2.	$\Box^n\alpha \supset \bot$	[Def. $\bot$ em 1]
3.	$\sim\Diamond^n{\sim}\alpha \supset \Box^n\alpha$	[Lema 3.2.4 (i)]
4.	$\sim\Diamond^n{\sim}\alpha \supset \bot$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 3 e 2]
5.	$\sim\sim\Diamond^n{\sim}\alpha$	[Def. $\bot$ em 4]
6.	$\sim\sim\Diamond^n{\sim}\alpha \supset \Diamond^n{\sim}\alpha$	[Fato 3.1.5 (iii)]
7.	$\Diamond^n{\sim}\alpha$	[(**MP**) em 5 e 6]

(vii) Mesmo argumento do Lema 3.2.2 (i), usando Lema 3.2.4 (iii).

□

Vimos, no Capítulo 2, que as extensões modais obtidas pelo acréscimo do axioma esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ ao sistema bi-modal $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ requerem também a instância dual desse axioma devido à falta de uma negação que fosse capaz de definir a modalidade $\Diamond$ por meio da modalidade $\Box$. O resultado a seguir mostra que na classe $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ o axioma esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ equivale à sua instância dual, diretamente em razão de termos à disposição uma negação clássica.

Lema 3.2.5. *Em $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$ os esquemas $\boldsymbol{G}^{k,l,m,n}$ e $\boldsymbol{G}^{m,n,k,l}$ são equivalentes.*

Demonstração. Vejamos que $\Diamond^k\Box^l\alpha \supset \Box^m\Diamond^n\alpha$ implica $\Diamond^m\Box^n\alpha \supset \Box^k\Diamond^l\alpha$.

1.	$\Diamond^k\Box^l{\sim}\alpha \supset \Box^m\Diamond^n{\sim}\alpha$	[$\mathbf{G}^{k,l,m,n}$]
2.	$\Diamond^n{\sim}\alpha \supset {\sim}\Box^n{\sim}{\sim}\alpha$	[Lema 3.2.4 (vii)]
3.	$\Box^m\Diamond^n{\sim}\alpha \supset \Box^m{\sim}\Box^n{\sim}{\sim}\alpha$	[Fato 2.2.2 (i) em 2]
4.	$\Diamond^k\Box^l{\sim}\alpha \supset \Box^m{\sim}\Box^n{\sim}{\sim}\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 1 e 3]
5.	${\sim}\Box^m{\sim}\Box^n{\sim}{\sim}\alpha \supset {\sim}\Diamond^k\Box^l{\sim}\alpha$	[Fato 3.1.5 (iv) em 4]
6.	${\sim}\Diamond^k\Box^l{\sim}\alpha \supset \Box^k{\sim}\Box^l{\sim}\alpha$	[Lema 3.2.4 (iv)]
7.	${\sim}\Box^m{\sim}\Box^n{\sim}{\sim}\alpha \supset \Box^k{\sim}\Box^l{\sim}\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 5 e 6]
8.	${\sim}\Box^m{\sim}\Box^n\alpha \supset {\sim}\Box^m{\sim}\Box^n{\sim}{\sim}\alpha$	[Fato 3.1.5 (ii) e (iv) e Fato 2.2.2 (i)]
9.	${\sim}\Box^m{\sim}\Box^n\alpha \supset \Box^k{\sim}\Box^l{\sim}\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 8 e 7]
10.	$\Diamond^m\Box^n\alpha \supset {\sim}\Box^m{\sim}\Box^n\alpha$	[Lema 3.2.4 (vii)]
11.	$\Diamond^m\Box^n\alpha \supset \Box^k{\sim}\Box^l{\sim}\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 10 e 9]
12.	${\sim}\Box^l{\sim}\alpha \supset \Diamond^l{\sim}{\sim}\alpha$	[Lema 3.2.4 (vi)]
13.	$\Box^k{\sim}\Box^l{\sim}\alpha \supset \Box^k\Diamond^l{\sim}{\sim}\alpha$	[Fato 2.2.2 (i) em 12]
14.	$\Box^k\Diamond^l{\sim}{\sim}\alpha \supset \Box^k\Diamond^l\alpha$	[Fato 2.2.2 (i) e (ii) em Fato 3.1.5 (iii)]
15.	$\Box^k{\sim}\Box^l{\sim}\alpha \supset \Box^k\Diamond^l\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 13 e 14]
16.	$\Diamond^m\Box^n\alpha \supset \Box^k\Diamond^l\alpha$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 11 e 15]

A recíproca é análoga. $\Box$

O Lema 3.2.2 mostra que na presença dos axiomas de ligação, (**BP1**) e (**BP2**), é possível derivar a modalidade $\Diamond$ a partir da modalidade $\Box$. Mais ainda, o Teorema 3.2.3 mostra que podemos eliminar todos os axiomas que governam a modalidade $\Diamond$ nos sistemas anódicos. Não é difícil notar, à luz do Lema 3.2.2, que poderíamos também escrever o axioma esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ apenas em função de $\Box$ e $\sim$, daí em $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, e conseqüentemente nas suas extensões, a modalidade $\Diamond$ é supérflua. Portanto, as classes $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ deixam de ser bi-modais.

Uma maneira mais simples de se obter a classe dos sistemas catódicos é partir diretamente dos sistemas proposicionais **mbC**, **bC** e **Ci**, e estendê-los com (**K**), (**Nec**) e $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, definindo a modalidade $\Diamond$ de modo padrão a partir de $\Box$ e $\sim$. Para manter a continuidade do trabalho optamos por obter tais classes a partir dos sistemas anódicos, que investigamos nos Capítulos 1 e 2, ao invés das LFIs.

Os modelos para os sistemas catódicos são uma extensão dos modelos para $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}+\mathbf{G}^{k,l,m,n}+\mathbf{G}^{m,n,k,l}$, estabelecida na Definição 2.1.3. Para os sistemas catódicos que passam de bi-modal a monomodal, algumas cláusulas da definição tornam-se redundantes e naturalmente podem ser excluídas. Nesses modelos a relação de acessibilidade satisfaz a propriedade $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$, dado que temos presente o axioma esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ em cada classe de sistemas.

Definição 3.2.6. *Seja $\mathcal{L}$ um sistema catódico. Um modelo relacional bivalente $\mathfrak{M}_{\mathtt{Biv}} = \langle W, R, v\rangle$, para $\mathcal{L}$, é um modelo para $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}+\boldsymbol{G}^{k,l,m,n}+\boldsymbol{G}^{m,n,k,l}$, em que R satisfaz a condição $\boldsymbol{P}^{k,l,m,n}$ e a valoração v satisfaz as seguintes cláusulas:*

- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{PI}^{k,l,m,n}$:*

  (vi) $v(\alpha, w) = 0$ *implica* $v(\neg\alpha, w) = 1$;

- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$ acrescenta-se:*

  (vii) $v(\circ\alpha, w) = 1$ *implica* $v(\alpha, w) = 0$ *ou* $v(\neg\alpha, w) = 0$.

- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$ acrescenta-se:*

  $(viii)$ $v(\neg\neg\alpha, w) = 1$ *implica* $v(\alpha, w) = 1$.

- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$ acrescenta-se:*

  (ix) $v(\neg\circ\alpha, w) = 1$ *implica* $v(\alpha, w) = 1$ *e* $v(\neg\alpha, w) = 1$.

Ou seja, em cada caso a valoração do modelo relacional é, respectivamente, uma **PI**-valoração, uma **mbC**-valoração, uma **bC**-valoração e uma **Ci**-valoração.

Para a prova da corretude, dada a definição de $\sim$, é conveniente estabelecer a valoração derivada para fórmulas do tipo $\sim\alpha$, o que ocorre como no caso clássico:

- $v(\sim\alpha) = 1$ sse $v(\alpha) = 0$

De fato, usando a definição de $\sim$, temos que $v(\sim\alpha) = 1$ see $v(\alpha \supset \bot) = 1$ sse $v(\alpha) = 0$.

Dessa forma estamos em condições de mostrar a corretude para as classes de sistemas catódicos $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$.

Teorema 3.2.7. *(Corretude para $\boldsymbol{PI}^{k,l,m,n}$, $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$, $\boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$ e $\boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$) Seja $\mathcal{L} = \langle For, \vdash \rangle$ um sistema catódico. Cada teorema de $\mathcal{L}$ é válido na classe de todos os enquadramentos $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, onde R satisfaz a propriedade $\boldsymbol{P}^{k,l,m,n}$.*

Demonstração. O Teorema 1.4.3 mostra que os axiomas (**A1**)–(**A6**) e (**K**) são válidos e as regras (**MP**), (**US**) e (**Nec**) preservam a validade. No Teorema 2.2.3 mostramos que o axioma $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ é válido nos enquadramentos $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ em que a relação de acessibilidade R satisfaz a propriedade $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$. Resta mostrar a validade dos axiomas específicos de cada sistema $\mathcal{L}$.

- Para $\mathcal{L} = \mathbf{PI}^{k,l,m,n}$:
  Dado que $\mathcal{L}$ é bi-modal, devemos mostrar também que os axiomas (**K1**)–(**K3**) são válidos. Neste caso veja Teorema 2.1.4.

  Axioma (**PI**)

  Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}$ baseado sobre $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{M} \not\models p \vee \neg p$, ou seja, pela definição de $\vee$ temos que $\mathfrak{M} \not\models (p \supset \neg p) \supset \neg p$. Pela definição de validade, temos que existe $w \in W$ tal que $v((p \supset \neg p) \supset \neg p, w) = 0$. Pela Definição 1.4.1 (ii) temos: $v(p \supset \neg p, w) = 1$ e $v(\neg p, w) = 0$ daí, temos duas possibilidades:

  1. $v(p, w) = 0$ e $v(\neg p, w) = 0$. Dado que $v(p, w) = 0$ então, pela Definição 3.2.6 (vi), segue que $v(\neg p, w) = 1$. Absurdo.
  2. $v(\neg p, w) = 1$ e $v(\neg p, w) = 0$. Absurdo.

  Portanto, $\mathfrak{M} \models p \vee \neg p$ para todo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$.

- Para $\mathcal{L} = \mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ são os axiomas de $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ mais os seguintes:

  Axioma (**mbC**)

  Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}$ baseado sobre $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{M} \not\models \circ p \supset [p \supset (\neg p \supset q)]$. Pela definição de validade, temos que existe $w \in W$ tal que $v(\circ p \supset [p \supset (\neg p \supset q)], w) = 0$. Pela Definição 1.4.1 (ii) temos: $v(\circ p, w) = v(p, w) = v(\neg p, w) = 1$ e $v(q, w) = 0$. Dado que $v(\circ p, w) = 1$ então, pela Definição 3.2.6 (vii), temos que $v(p, w) = 0$ ou $v(\neg p, w) = 0$. Absurdo.

Portanto, $\mathfrak{M} \vDash \circ p \supset [p \supset (\neg p \supset q)]$ para todo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$.

Axioma (**BP1**)

Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}$ baseado sobre $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash \Box{\sim}p \supset {\sim}\Diamond p$. Pela definição de validade, temos que existe $w \in W$ tal que $v(\Box{\sim}p \supset {\sim}\Diamond p, w) = 0$. Pela Definição 1.4.1 (ii) temos $v(\Box{\sim}p, w) = 1$ e $v({\sim}\Diamond p, w) = 0$ daí, pela Definição 2.1.3 temos:

1. $v(\Box{\sim}p, w) = 1$ sse *para todo* $w' \in W$ tal que wRw', $v({\sim}p, w') = 1$ sse $v(p, w') = 0$;
2. $v({\sim}\Diamond p, w) = 0$ sse $v(\Diamond p, w) = 1$ sse *existe* $w'' \in W$ tal que wRw'', $v(p, w'') = 1$ (contradiz 1).

Portanto, $\mathfrak{M} \vDash \Box{\sim}p \supset {\sim}\Diamond p$ para todo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$.

Axioma (**BP2**)

Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}$ baseado sobre $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash {\sim}\Diamond p \supset \Box{\sim}p$. Pela definição de validade, temos que existe $w \in W$ tal que $v({\sim}\Diamond p \supset \Box{\sim}p, w) = 0$. Pela Definição 1.4.1 (ii) temos $v({\sim}\Diamond p, w) = 1$ e $v(\Box{\sim}p, w) = 0$ daí, pela Definição 2.1.3 temos:

1. $v({\sim}\Diamond p, w) = 1$ sse $v(\Diamond p, w) = 0$ sse *para todo* $w' \in W$ tal que wRw', $v(p, w') = 0$;
2. $v(\Box{\sim}p, w) = 0$ sse *existe* $w'' \in W$ tal que wRw'', $v({\sim}p, w'') = 0$ sse $v(p, w'') = 1$ (contradiz 1).

Portanto, $\mathfrak{M} \vDash {\sim}\Diamond p \supset \Box{\sim}p$ para todo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$.

- Para $\mathcal{L} = \mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ são os axiomas de $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ mais o seguinte:

Axioma (**bC**)

Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}$ baseado sobre $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash \neg\neg p \supset p$. Pela definição de validade, temos que existe $w \in W$ tal que $v(\neg\neg p \supset p, w) = 0$. Pela Definição 1.4.1 (ii) temos: $v(\neg\neg p, w) = 1$ e $v(p, w) = 0$ daí, pela Definição 3.2.6

(viii), temos que $v(p, w) = 1$ e $v(p, w) = 0$. Absurdo.
Portanto, $\mathfrak{M} \vDash \neg\neg p \supset p$ para todo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$.

- Para $\mathcal{L} = \mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ são os axiomas de $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ mais o seguinte:

Axioma (**Ci**)

Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}$ baseado sobre $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{M} \nvDash \neg \circ p \supset (p \wedge \neg p)$. Pela definição de validade, temos que existe $w \in W$ tal que $v(\neg \circ p \supset (p \wedge \neg p), w) = 0$. Pela Definição 1.4.1 (ii) temos: $v(\neg \circ p, w) = 1$ e $v(p \wedge \neg p, w) = 0$. Dado que $v(\neg \circ p, w) = 1$ então, pela Definição 3.2.6 (ix), segue que $v(p, w) = 1$ e $v(\neg p, w) = 1$, daí $v(p \wedge \neg p, w) = 1$. Absurdo.
Portanto, $\mathfrak{M} \vDash \neg \circ p \supset (p \wedge \neg p)$ para todo $\mathfrak{M}$ baseado em $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$.

□

Para obter a completude para as classes $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$, como é usual, vamos definir o modelo canônico para essas classes de sistemas levando em conta a valoração estabelecida em cada caso e mostrar que a função característica definida no modelo canônico é de fato uma valoração que respeita as cláusulas de valoração estabelecidas na Definição 3.2.6.

Definição 3.2.8. *O modelo canônico de $\mathcal{L} = \langle For, \vdash \rangle$ é uma terna $\langle \widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V} \rangle$ com as seguintes propriedades:*
(i) $\widehat{W} = \{\Delta \subseteq For : \Delta$ maximal é não-trivial$\}$;
(ii) $\Delta \widehat{R} \Delta'$ sse $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$, para cada Δ, Δ' em $\widehat{W}$;
(iii) Cada $v_\Delta \in \widehat{V}$ é uma valoração modal de $\mathcal{L}$, definida a partir de algum $\Delta \in \widehat{W}$, por:

$$v_\Delta(p) = \begin{cases} 1 & se\ p \in \Delta \\ 0 & se\ p \notin \Delta \end{cases}$$

O resultado a seguir é uma ampliação do Lema 1.4.11, a fim de adaptá-lo aos sistemas catódicos que estamos considerando. Adicionamos a cláusula referente à negação clássica $\sim$, embora não seja necessária, para facilitar a elaboração de alguns argumentos.

Lema 3.2.9. *Se Δ é um conjunto primo não-trivial Λ-maximal de $\mathcal{L}$-fórmulas, então:*

- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{PI}^{k,l,m,n}$:*
  (vi) $\alpha \notin \Delta$ implica $\neg\alpha \in \Delta$;
- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$ acrescenta-se:*
  (vii) $\circ\alpha \in \Delta$ implica $\alpha \notin \Delta$ ou $\neg\alpha \notin \Delta$;
  (viii) $\sim\alpha \in \Delta$ sse $\alpha \notin \Delta$;
- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$ acrescenta-se:*
  (ix) $\neg\neg\alpha \in \Delta$ implica $\alpha \in \Delta$;
- *Para $\mathcal{L} = \boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$ acrescenta-se:*
  (x) $\neg \circ \alpha \in \Delta$ implica $\alpha \in \Delta$ e $\neg\alpha \in \Delta$.

Demonstração.

(vi) Suponha, por redução ao absurdo, que $\alpha \notin \Delta$ e $\neg\alpha \notin \Delta$. Dado que Δ é não-trivial Λ-maximal, então existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tal que $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash \lambda_1$ e $\Delta \cup \{\neg\alpha\} \vdash \lambda_2$. Pelo Teorema da Dedução temos que $\Delta \vdash \alpha \supset \lambda_1$ e $\Delta \vdash \neg\alpha \supset \lambda_2$. Com o mesmo raciocínio usado no Caso 1 do Lema 1.4.11 (iii), temos que $\Delta \vdash (\alpha \vee \neg\alpha) \supset \lambda_1 \vee \lambda_2$. Pela monotonicidade, (**PI**) e (**MP**) segue que $\Delta \vdash \lambda_1 \vee \lambda_2$. Dado que Δ é primo, então $\Delta \vdash \lambda_1$ ou $\Delta \vdash \lambda_2$. Absurdo.

(vii) Suponha, por redução ao absurdo, que $\circ\alpha \in \Delta$, $\alpha \in \Delta$ e $\neg\alpha \in \Delta$. Das hipóteses, temos $\Delta \vdash \circ\alpha$, $\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \vdash \neg\alpha$. Dado que (**mbC**) é axioma de $\mathcal{L}$, então $\Delta \vdash \circ\alpha \supset [\alpha \supset (\neg\alpha \supset \lambda)]$, para algum $\lambda \in \Lambda$. Por (**MP**), segue que $\Delta \vdash \lambda$, para algum $\lambda \in \Lambda$. Absurdo.

(viii) ($\Longrightarrow$) Suponha $\sim\alpha \in \Delta$, ou seja, $\Delta \vdash \sim\alpha$. Pela definição de $\sim$ temos que $\Delta \vdash \alpha \supset \bot$. Dado que $\bot$ é, por definição, $(\circ p \wedge \neg p \wedge p)$ então, $\Delta \vdash \alpha \supset (\circ p \wedge \neg p \wedge p)$. Por (**A5**), (**A6**) e Teorema 1.3.2 (iii) temos: $\Delta \vdash \alpha \supset \circ p$, $\Delta \vdash \alpha \supset \neg p$ e $\Delta \vdash \alpha \supset p$. Pelo axioma (**mbC**) e monotonicidade temos que $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash \circ p \supset [p \supset (\neg p \supset \lambda)]$, para algum $\lambda \in \Lambda$ daí, por (**MP**) três vezes, segue que $\Delta \cup \{\alpha\} \vdash \lambda$, isto é, $\Delta \vdash \alpha \supset \lambda$ para algum $\lambda \in \Lambda$. Dado que Δ é não-trivial Λ-maximal, então $\alpha \notin \Delta$, caso contrário teríamos um absurdo.

($\Longleftarrow$) Argumento análogo ao do ítem (vi), acima, trocando (**PI**) pelo Fato 3.1.5 (i).

(ix) Suponha $\neg\neg\alpha \in \Delta$, ou seja, $\Delta \vdash \neg\neg\alpha$. Dado que (**bC**) é axioma de $\mathcal{L}$ então $\Delta \vdash \neg\neg\alpha \supset \alpha$ daí, por (**MP**), segue que $\Delta \vdash \alpha$. Portanto, pelo Lema 1.4.11 (i), $\alpha \in \Delta$.

(x) Suponha $\neg \circ \alpha \in \Delta$, isto é, $\Delta \vdash \neg \circ \alpha$. Dado que (**Ci**) é axioma de $\mathcal{L}$ então $\Delta \vdash \neg \circ \alpha \supset (\alpha \wedge \neg\alpha)$ daí, por (**MP**), segue que $\Delta \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$. Pelo Lema 1.4.11 (i), temos que $\alpha \wedge \neg\alpha \in \Delta$. Agora, pelo ítem (v) do Lema 1.4.11, segue que $\alpha \in \Delta$ e $\neg\alpha \in \Delta$.

□

No Capítulo 2 inserimos o conceito de mundo factual a fim de tratar com a modalidade $\Diamond$ na ausência plena de negação. O resultado a seguir mostra que, tendo uma negação clássica à disposição, podemos abrir mão de tal conceito.

Lema 3.2.10. *Seja $\mathcal{L}$ um sistema catódico que permite definir uma negação clássica $\sim$. Se Δ é extensão não-trivial maximal de $\mathcal{L}$, então Δ é factual.*

Demonstração. De fato, para cada axioma α de $\mathcal{L}$ temos que $\Delta \vdash \alpha$ daí, por (**Nec**), segue que $\Delta \vdash \Box\alpha$. Pelo Lema 3.2.2 (iii) e (**MP**) segue que $\Delta \vdash {\sim}\Diamond{\sim}\alpha$ daí, pelo Lema 1.4.11 (i), temos ${\sim}\Diamond{\sim}\alpha \in \Delta$. Pelo Lema 3.2.9 (viii), segue que $\Diamond{\sim}\alpha \notin \Delta$. Portanto Δ é factual. □

O resultado a seguir será útil para mostrar que a valoração v_Δ do modelo canônico de $\mathcal{L}$ define uma $\mathcal{L}$-valoração, onde $\mathcal{L}$ representa as classes $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ ou $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$.

Lema 3.2.11. *Seja $\mathcal{L} = \langle For, \vdash \rangle$ um sistema catódico e Δ um conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas não-trivial Λ-maximal tal que $\Box\alpha \notin \Delta$. Então:*
(i) $Den(\Delta) \cup \{\neg\alpha\}$ é não-trivial, para $\mathcal{L}$=$\boldsymbol{PI}^{k,l,m,n}$;
(ii) $Den(\Delta) \cup \{{\sim}\alpha\}$ é não-trivial, para $\mathcal{L}$=$\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$, $\boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$ ou $\boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$.

Demonstração.

(i) Suponha que $Den(\Delta) \cup \{\neg\alpha\}$ seja trivial, então $Den(\Delta) \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$. Pelo Teorema da Dedução, temos que $Den(\Delta) \vdash \neg\alpha \supset \alpha$. Por outro lado, sabemos que $Den(\Delta) \vdash \alpha \supset \alpha$ daí, pelo Teorema 1.3.2 (iv), temos que $Den(\Delta) \vdash (\alpha \vee \neg\alpha) \supset \alpha$. Como (**PI**) é axioma de $\mathcal{L}$ então, pela monotonicidade, temos que $Den(\Delta) \vdash \alpha \vee \neg\alpha$ e daí, por (**MP**), $Den(\Delta) \vdash \alpha$. Como $Den(\Delta)$ é uma $\mathcal{L}$-teoria (veja Fato 1.4.15) temos que $\alpha \in Den(\Delta)$. Portanto, pela definição de $Den(\Delta)$, temos que $\Box\alpha \in \Delta$. Absurdo.

(ii) Análogo ao ítem (i) usando o Fato 3.1.5 (i) no lugar do axioma (**PI**).

□

No caso específico de $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$, no Lema 3.2.11, poderíamos mostrar, alternativamente, que o conjunto $Den(\Delta) \cup \{\circ\alpha, \neg\alpha\}$ é não-trivial. Isso é possível porque em **Ci** pode-se definir a negação clássica de duas formas distintas. Detalhes desse argumento alternativo podem ser encontrados na Dissertação de Mestrado de Costa-Leite em [CL03].

Teorema 3.2.12. *(Teorema Fundamental do Modelo Canônico)*
Seja $\mathcal{L}$ o sistema $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$, $\boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$ ou $\boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$. A valoração v_Δ do modelo canônico de $\mathcal{L}$ define uma $\mathcal{L}$-valoração.

Demonstração. Os casos $\supset$ e $\wedge$ não serão tratados já que o argumento é o mesmo do caso clássico. Vejamos apenas as valorações específicas de cada sistema de $\mathcal{L}$ envolvendo $\Box$, $\neg$ e $\circ$. O operador modal $\Diamond$ não precisa ser tratado em vista do Lema 3.2.2.

O caso do operador $\Box$ é comum às classes $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ em razão de que a negação $\sim$ pode ser definida a partir do sistema **mbC**, como visto no Lema 3.1.4.

(i) $v_\Delta(\Box\alpha) = 1$ sse $v_\Gamma(\alpha) = 1$ para todo $\Gamma \in \widehat{W}$ tal que $\Delta\widehat{R}\,\Gamma$.

($\Longrightarrow$) Se $v_\Delta(\Box\alpha) = 1$ então, como v_Δ é a função característica de Δ, temos que $\Box\alpha \in \Delta$ daí, $\alpha \in Den(\Delta)$. Para cada $\Gamma \in \widehat{W}$ tal que $Den(\Delta) \subseteq \Gamma$

temos que $\Delta\widehat{R}\,\Gamma$ (por definição da relação de acessibilidade no modelo canônico) e $\alpha \in \Gamma$. Como v_Γ é a função característica de Γ, segue que $v_\Gamma(\alpha) = 1$ para todo $\Gamma \in \widehat{W}$ tal que $\Delta\widehat{R}\,\Gamma$.

($\Longleftarrow$) Se $v_\Delta(\Box\alpha) = 0$ então, como v_Δ é a função característica de Δ, temos que $\Box\alpha \notin \Delta$ daí, pelo Lema 3.2.11 (ii), $Den(\Delta) \cup \{{\sim}\alpha\}$ é não-trivial. Pelo Teorema 1.4.12, existe $\Gamma \in \widehat{W}$ tal que $Den(\Delta) \cup \{{\sim}\alpha\} \subseteq \Gamma$, ou seja, $Den(\Delta) \subseteq \Gamma$ e ${\sim}\alpha \in \Gamma$ daí, pelo Lema 3.2.9 (viii), temos que $\alpha \notin \Gamma$. Como v_Γ é a função característica de Γ, segue que $v_\Gamma(\alpha) = 0$. Portanto, $v_\Gamma(\alpha) = 0$ para algum $\Gamma \in \widehat{W}$ tal que $\Delta\widehat{R}\,\Gamma$.

Cuidamos, agora, dos casos proposicionais para cada sistema específico.

- Para $\mathcal{L}$=$\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ devemos mostrar que:

  (ii) $v_\Delta(\alpha) = 0$ implica $v_\Delta(\neg\alpha) = 1$.
  Se $v_\Delta(\alpha) = 0$ então, como v_Δ é uma função característica, $\alpha \notin \Delta$ daí, pelo Lema 3.2.9 (vi), segue que $\neg\alpha \in \Delta$. Portanto, pela definição de v_Δ segue que $v_\Delta(\neg\alpha) = 1$.

  (iii) $v_\Delta(\circ\alpha) = 1$ implica $v_\Delta(\alpha) = 0$ ou $v_\Delta(\neg\alpha) = 0$.
  Se $v_\Delta(\circ\alpha) = 1$ então, pela definição de valoração canônica, temos que $\circ\alpha \in \Delta$ daí, pelo Lema 3.2.9 (vii), segue que $\alpha \notin \Delta$ ou $\neg\alpha \notin \Delta$. Portanto, pela definição de v_Δ, segue que $v_\Delta(\alpha) = 0$ ou $v_\Delta(\neg\alpha) = 0$

- Para $\mathcal{L}$=$\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$, as propriedades característica da valoração são as de $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ mais a seguinte:

  (iv) $v_\Delta(\neg\neg\alpha) = 1$, então $v_\Delta(\alpha) = 1$.
  Se $v_\Delta(\neg\neg\alpha) = 1$ então, pela definição de valoração canônica, temos que $\neg\neg\alpha \in \Delta$ daí, pelo Lema 3.2.9 (ix), segue que $\alpha \in \Delta$. Portanto, pela definição de v_Δ, segue que $v_\Delta(\alpha) = 1$.

- Para $\mathcal{L}$=$\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$, as propriedades característica da valoração são as de $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ mais a seguinte:

(v) $v_\Delta(\neg \circ \alpha) = 1$ implica $v_\Delta(\alpha) = 1$ e $v_\Delta(\neg\alpha) = 1$.
Se $v_\Delta(\neg \circ \alpha) = 1$ então, pela definição de valoração canônica, temos que $\neg \circ \alpha \in \Delta$ daí, pelo Lema 3.2.9 (x), segue que $\alpha \in \Delta$ e $\neg\alpha \in \Delta$. Portanto, pela definição de v_Δ, segue que $v_\Delta(\alpha) = 1$ e $v_\Delta(\neg\alpha) = 1$.

Portanto, a função canônica v_Δ é uma $\mathcal{L}$-valoração. □

Com base nas definições generalizadas dos conjuntos $Den(\Delta)$ e $Pos(\Delta)$ apresentadas no Capítulo 2, páginas 63 e 75, e sando o fato de que as classes $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ estão em posse de uma negação clássica, o seguinte resultado será útil para a obtenção da completude dessas classes.

Corolário 3.2.13. *Sejam Δ e Δ' extensões não-triviais Λ-maximais de $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$. Então:*

$$Den^n(\Delta) \subseteq \Delta' \textit{ sse } Pos^n(\Delta') \subseteq \Delta.$$

Demonstração.
($\Longrightarrow$) Considere $\Diamond^n\alpha \in Pos^n(\Delta')$, então por definição de $Pos^n(\Delta')$ temos que $\alpha \in \Delta'$. Pelo Lema 3.2.9 (viii) segue que $\sim\alpha \notin \Delta'$. Dado que $Den^n(\Delta) \subseteq \Delta'$, temos que $\sim\alpha \notin Den^n(\Delta)$ daí, pela definição de $Den^n(\Delta)$, temos que $\Box^n{\sim}\alpha \notin \Delta$. Pelo Lema 3.2.4 (iv) segue que $\sim\Diamond^n\alpha \notin \Delta$. Portanto, pelo Lema 3.2.9 (viii), segue que $\Diamond^n\alpha \in \Delta$.

($\Longleftarrow$) Considere $\alpha \in Den^n(\Delta)$, pela definição de $Den^n(\Delta)$ temos que $\Box^n\alpha \in \Delta$. Pelo Lema 3.2.9 (viii) segue que $\sim\Box^n\alpha \notin \Delta$ daí, pelo Lema 3.2.4 (v), $\Diamond^n{\sim}\alpha \notin \Delta$. Dado que $Pos^n(\Delta') \subseteq \Delta$, então $\Diamond^n{\sim}\alpha \notin Pos^n(\Delta')$ daí, pela definição de $Pos^n(\Delta')$, segue que $\sim\alpha \notin \Delta'$. Portanto, pelo Lema 3.2.9 (viii), temos que $\alpha \in \Delta'$. □

Observe que o resultado acima é válido também para as classes $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ pelo fato de serem extensões de $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$. Com isso mostra-se a completude para tais classes de sistemas catódicos.

Corolário 3.2.14. *(Completude para $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$, $\boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$ ou $\boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$)*
Seja $\mathcal{L} = \langle For, \vdash\rangle$ um dos sistemas catódicos $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$, $\boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$ ou $\boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$. Se $\Gamma \vDash \alpha$, então $\Gamma \vdash \alpha$.

Demonstração. Suponha que $\Gamma \nvdash \alpha$, para algum $\alpha \in For$. Claramente $\alpha \notin \Gamma$ e $\Gamma \cap \{\alpha\} = \varnothing$. Pelo Teorema 1.4.12, podemos estender Γ a um conjunto Δ não-trivial $\{\alpha\}$-maximal tal que $\Delta \nvdash \alpha$, daí $\alpha \notin \Delta$. Pela definição de valoração no modelo canônico de $\mathcal{L}$, temos que $v_\Delta(\alpha) = 0$. Como $\Gamma \subseteq \Delta$ então, $v_\Delta(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$. Portanto, α é falsificada pelo modelo canônico de $\mathcal{L}$ que valida todo elemento de Γ, daí $\Gamma \nvDash \alpha$. □

Para concluir, falta mostrar que a relação de acessibilidade do respectivo enquadramento canônico para $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ satisfaz a propriedade $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$. Nessa direção, resta mostrar o seguinte resultado.

Teorema 3.2.15. *Seja $\mathcal{L} = \langle For, \vdash \rangle$ um dos sistemas $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$, $\boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$ ou $\boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$. A relação de acessibilidade do enquadramento canônico para $\mathcal{L}$ satisfaz à propriedade $\boldsymbol{P}^{k,l,m,n}$.*

Demonstração. Sabemos que cada $\Delta \in \widehat{W}$ do modelo canônico de $\mathcal{L}$ contém a fórmula $\Diamond^k \Box^l \alpha \supset \Box^m \Diamond^n \alpha$ ao qual denotamos, aqui, por (G). Das hipóteses $\Delta_1 \widehat{R^k} \Delta_2$ e $\Delta_1 \widehat{R^m} \Delta_3$ e Corolário 3.2.13, temos:

(Hip.1) $\Delta_1 \widehat{R^k} \Delta_2$ sse $Den^k(\Delta_1) \subseteq \Delta_2$ sse $Pos^k(\Delta_2) \subseteq \Delta_1$

(Hip.2) $\Delta_1 \widehat{R^m} \Delta_3$ sse $Den^m(\Delta_1) \subseteq \Delta_3$ sse $Pos^m(\Delta_3) \subseteq \Delta_1$

Considere Λ o fecho disjuntivo do conjunto

$$\Omega = \{\varphi : \Diamond^l \varphi \notin \Delta_2\} \cup \{\psi : \Diamond^n \psi \notin \Delta_3\}$$

Seja T a $\mathcal{L}$-teoria gerada por:

$$\mathcal{H} = \{\alpha : \Box^l \alpha \in \Delta_2\} \cup \{\beta : \Box^n \beta \in \Delta_3\}$$

Primeiramente, devemos observar que $\Lambda \neq \varnothing$. De fato, se assim não fosse, teríamos que $\{\varphi : \Diamond^l \varphi \notin \Delta_2\} = \varnothing$ e $\{\psi : \Diamond^l \psi \notin \Delta_3\} = \varnothing$. Nesse caso, $Dep^l(\Delta_2)$ e $Dep^n(\Delta_3)$ seriam triviais. Absurdo, desde que Δ_2 e Δ_3 são factuais, em virtude do Lema 3.2.10.

$$T \text{ é não-trivial} \tag{3.1}$$

Suponha, por redução ao absurdo, que T seja trivial, isto é, $T \vdash \gamma$, para toda $\gamma \in For$, em particular, $T \vdash \bot$. Pela compacidade e pelo mesmo argumento usado no Teorema 2.2.6, temos que existem $\alpha, \beta \in T$ tais que $\Box^l \alpha \in \Delta_2$ e $\Box^n \beta \in \Delta_3$ de forma que $\{\alpha, \beta\} \vdash \bot$. Pelo Teorema da Dedução temos que $\vdash \alpha \supset (\beta \supset \bot)$. Pela definição de $\sim$ temos que $\vdash \alpha \supset \sim\beta$ daí, por (**Nec**), (**K**) e (**MP**) l-vezes temos $\vdash \Box^l \alpha \supset \Box^l \sim\beta$. Pela monotonicidade e (**MP**) segue que $\Delta_2 \vdash \Box^l \sim\beta$, ou seja, $\Box^l \sim\beta \in \Delta_2$. Pela definição de $Pos^k(\Delta_2)$ temos que $\Diamond^k \Box^l \sim\beta \in Pos^k(\Delta_2)$. Pela (Hip.1), segue que $\Diamond^k \Box^l \sim\beta \in \Delta_1$ daí, por (G) e (**MP**), segue que $\Box^m \Diamond^n \sim\beta \in \Delta_1$. Pela definição $Den^m(\Delta_1)$ temos que $\Diamond^n \sim\beta \in Den^m(\Delta_1)$ e daí, pela (Hip.2), temos que $\Diamond^n \sim\beta \in \Delta_3$, ou seja, $\Delta_3 \vdash \Diamond^n \sim\beta$. Pelo Lema 3.2.4 (v), temos que $\vdash \Diamond^n \sim\beta \supset \sim\Box^n \beta$ daí, por monotonicidade e (**MP**), segue que $\Delta_3 \vdash \sim\Box^n \beta$, ou seja, $\sim\Box^n \beta \in \Delta_3$. Portanto, pelo Lema 3.2.9 (viii), segue que $\Box^n \beta \notin \Delta_3$. Absurdo. Logo, T é não-trivial.

Claramente $T \neq \varnothing$, caso contrário Δ_2 e Δ_3 teriam que ser vazios, o que não é o caso.

$$T \cap \Lambda = \varnothing \tag{3.2}$$

Suponha, por redução ao absurdo, que $\alpha \in T \cap \Lambda$ então, $\alpha \in T$ e $\alpha \in \Lambda$ daí temos: ($\Box^l \alpha \in \Delta_2$ ou $\Box^n \alpha \in \Delta_3$) e ($\Diamond^l \alpha \notin \Delta_2$ ou $\Diamond^n \alpha \notin \Delta_3$). Logo temos quatro possibilidades para considerar.

(a) $\Box^l \alpha \in \Delta_2$ e $\Diamond^l \alpha \notin \Delta_2$;

(b) $\Box^l \alpha \in \Delta_2$ e $\Diamond^n \alpha \notin \Delta_3$;

(c) $\Box^n \alpha \in \Delta_3$ e $\Diamond^l \alpha \notin \Delta_2$;

(d) $\Box^n \alpha \in \Delta_3$ e $\Diamond^n \alpha \notin \Delta_3$.

Caso (a): considerando que $\Box^l \alpha \in \Delta_2$ e $\Diamond^l \alpha \notin \Delta_2$ então $\Box^l \alpha \supset \Diamond^l \alpha \notin \Delta_2$ daí, pelo Fato 2.2.2 (iv), temos que $\Diamond^l(\alpha \supset \alpha) \notin \Delta_2$ daí, pela (Hip.1), segue que $\Diamond^l(\alpha \supset \alpha) \notin Den^k(\Delta_1)$, ou seja, $\Box^k \Diamond^l(\alpha \supset \alpha) \notin \Delta_1$. Dado que (G) é axioma de $\mathcal{L}$ então, pelo Lema 3.2.5, temos que $\Diamond^m \Box^n \alpha \supset \Box^k \Diamond^l \alpha$ é teorema de $\mathcal{L}$, daí $\Diamond^m \Box^n(\alpha \supset \alpha) \notin \Delta_1$. Como, pela (Hip.2), $Pos^m(\Delta_3) \subseteq \Delta_1$ então, $\Diamond^m \Box^n(\alpha \supset \alpha) \notin Pos^m(\Delta_3)$, ou seja, $\Box^n(\alpha \supset \alpha) \notin \Delta_3$. Por outro lado, dado que $\alpha \supset \alpha$ é teorema de $\mathcal{L}$, temos que $\Delta_3 \vdash \alpha \supset \alpha$ daí, aplicando (**Nec**) n-vezes, temos que $\Delta_3 \vdash \Box^n(\alpha \supset \alpha)$, ou seja, $\Box^n(\alpha \supset \alpha) \in \Delta_3$. Absurdo.

Caso (b): dado que $\Diamond^n\alpha \notin \Delta_3$ então, pela (Hip.2), segue que $\Diamond^n\alpha \notin Den^m(\Delta_1)$, ou seja, $\Box^m\Diamond^n\alpha \notin \Delta_1$ daí, por (G), segue que $\Diamond^k\Box^l\alpha \notin \Delta_1$. Pela (Hip.1), segue que $\Diamond^k\Box^l\alpha \notin Pos^k(\Delta_2)$, ou seja, $\Box^l\alpha \notin \Delta_2$. Absurdo.

Caso (c): argumento similar ao caso (b), usando o Lema 3.2.5 que garante que $\Diamond^m\Box^n\alpha \supset \Box^k\Diamond^l\alpha$ é teorema de $\mathcal{L}$.

Caso (d): argumento similar ao caso (a).

Portanto, pelo Teorema 1.4.12, temos que existe um conjunto Δ_4 não-trivial Λ-maximal tal que $T \subseteq \Delta_4$ e $\Delta_4 \cap \Lambda = \varnothing$ daí, pelo mesmo argumento usado no Teorema 2.2.6, segue que $\Delta_2\widehat{R^l}\Delta_4$ e $\Delta_3\widehat{R^n}\Delta_4$ □

No Capítulo 2 mostramos que a falta da negação nos sistemas anódicos requeria que se adicionasse o axioma $\mathbf{G}^{m,n,k,l}$ sempre que fosse adicionado o axioma $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ a esses sistemas, porém nada se sabe quanto ao acréscimo de outras instâncias de $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, que não a instância dual, aos sistemas anódicos. Por exemplo, poderíamos pensar em um sistema anódico estendido com os axiomas (**T**), (**B**) e (**4**), que são instâncias de $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ (veja página 71). No entanto, o Teorema 2.2.6 não se ocupa dessa tarefa (no caso dos sistemas anódicos) da mesma forma que o Teorema 3.2.15 também nada diz a esse respeito no caso dos sistemas catódicos.

A seguir vamos mostrar que o resultado geral de completude é válido também com o acréscimo de inúmeras instâncias de $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ aos sistemas catódicos (anódicos). Por exemplo, no sistema **S5** a relação de acessibilidade é ao mesmo tempo reflexiva, transitiva e simétrica em razão dos axiomas (**T**), (**B**) e (**4**) serem adicionados ao sistema **K**. Esse mesmo resultado pode ser facilmente adaptado para a classe de sistemas anódicos $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}+\mathbf{G}^{k,l,m,n}+\mathbf{G}^{m,n,k,l}$ que apresentamos no Capítulo 2.

Dessa forma, é fácil ver que as classes dos sistemas catódicos permite expressar versões paraconsistentes de inúmeros sistemas modais conhecidos na literatura. Por exemplo, usando a mesma notação de Costa-Leite em [CL03], $\mathbf{mbC}^{S4}$, $\mathbf{bC}^{S4}$ e $\mathbf{Ci}^{S4}$. Da mesma forma, obtemos as versões paraconsistentes de **S5**, **KDB**, **KD4** e de muitas outras combinações.

Para mostrar tal resultado nos inspiramos no argumento usado por Carnielli e Pizzi em [CP08], capítulo 4. Demonstraremos que os sistemas catódicos $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ quando estendidos com um número finito arbitrário de instâncias de $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ são completos.

Suponha que tenhamos juntado r-instâncias de $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$. Devemos nos certificar de que a classe de relações R, obtida pela interseção das relações determinadas por $\mathbf{P}^{k_1,l_1,m_1,n_1}, \cdots, \mathbf{P}^{k_r,l_r,m_r,n_r}$, é não vazia. Para simplicidade de notação, denotamos a propriedade $\mathbf{P}^{k_i,l_i,m_i,n_i}$ simplesmente por $\mathbf{P}_i$, para $1 \leq i \leq r$.

De fato, considere o seguinte enquadramento $\mathfrak{F} = \langle \mathbb{Q}, R_{\mathbb{Q}} \rangle$, onde $\mathbb{Q}$ indica o conjunto dos números racionais e $R_{\mathbb{Q}}$ a relação universal em $\mathbb{Q}$ (a saber, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$). Para mostrar que a relação $R_{\mathbb{Q}}$ está na interseção das relações determinadas por $\mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_r$ devemos mostrar o seguinte:

Sejam w_1, w_2 e w_3 elementos de $\mathbb{Q}$ e suponha que $w_1 R_{\mathbb{Q}}^{k_i} w_2$ e $w_1 R_{\mathbb{Q}}^{m_i} w_3$, para cada $1 \leq i \leq r$. Devemos mostrar que existe $w_4 \in \mathbb{Q}$ tal que $w_2 R_{\mathbb{Q}}^{l_i} w_4$ e $w_3 R_{\mathbb{Q}}^{n_i} w_4$, para cada $1 \leq i \leq r$.

A figura abaixo retrata a reta em que os mundos w_1, w_2, w_3 e w_4 representam números racionais dispostos da seguinte maneira:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dash] & w_1 \arrow[r, dash] \arrow[r, bend left, "k\text{−}passos"] \arrow[rr, bend right, "m\text{−}passos"'] & w_2 \arrow[r, dash] \arrow[rr, bend left, "l\text{−}passos"] & w_3 \arrow[r, dash] \arrow[r, bend right, "n\text{−}passos"'] & w_4 \arrow[r, dash] & {}
\end{tikzcd}
$$

Desde que o conjunto de números racionais $\mathbb{Q}$ é denso com respeito à ordem usual (i.e., entre quaisquer dois números racionais w e w' existe um outro racional), interprete $w R_{\mathbb{Q}}^{n_i} w'$ como "existe pelo menos n racionais entre w e w'". Desse modo, a partir das hipóteses, tomando qualquer ponto $w_4 \in \mathbb{Q}$, e levando em conta que existem infinitos pontos entre w_2 e w_4, e infinitos pontos entre w_3 e w_4, concluímos que existe $w_4 \in \mathbb{Q}$ tal que $w_2 R_{\mathbb{Q}}^{l_i} w_4$ e $w_3 R_{\mathbb{Q}}^{n_i} w_4$, para cada $1 \leq i \leq r$. Portanto, a interseção das classes R é não vazia, pois pelo menos $R_{\mathbb{Q}}$ pertence a essa interseção.

Como comentamos anteriormente, a classe de sistemas $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ pode ser obtida a partir do sistema anódico $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ pelo acréscimo dos axiomas (**mbC**) e $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$. Analogamente obtemos também as classes $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$.

No teorema a seguir, consideramos $\mathcal{L}$ como representando um dos sistemas $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$+(**mbC**), $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$+(**bC**) ou $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$+(**Ci**). Vamos mostrar que podemos acrescentar um número arbitrário finito de instâncias de $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ a $\mathcal{L}$. Começamos com o caso mais simples que é adicionar duas instâncias. O caso geral se obtém facilmente por iteração do processo.

Teorema 3.2.16. *Sejam $\boldsymbol{G}_1$ e $\boldsymbol{G}_2$ instâncias distintas do esquema $\boldsymbol{G}^{k,l,m,n}$. Então o sistema $\mathcal{L}+\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{G}_2$ obtido por estender $\mathcal{L}$ com $\boldsymbol{G}_1$ e $\boldsymbol{G}_2$ é correto e completo com relação à classe de enquadramentos no qual a relação R satisfaz, simultaneamente, às propriedades correspondentes $\boldsymbol{P}_1$ e $\boldsymbol{P}_2$.*

Demonstração. Primeiramente, note que $\mathcal{L}+\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$ é consistente, dado que esse sistema é válido no enquadramento $\mathfrak{F} = \langle \mathbb{Q}, R_{\mathbb{Q}} \rangle$, como observamos acima. É fácil ver que o Teorema 3.2.15 pode ser refeito para o caso em que $\mathcal{L}$ é estendido com as instâncias $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$. Basta duplicar o argumento da seguinte forma: considere as seguintes hipóteses $\Delta_1 R^{k_1} \Delta_2$ e $\Delta_1 R^{k_2} \Delta_2$, e $\Delta_1 R^{m_1} \Delta_3$ e $\Delta_1 R^{m_2} \Delta_3$, onde os índices 1 e 2 em k_1, k_2, m_1 e m_2 referem-se, respectivamente, às propriedades $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, e por uma duplicação do resultado mostra-se que existem Δ_4 e Δ_4' tal que $\Delta_2 R^{l_1} \Delta_4$ e $\Delta_2 R^{l_2} \Delta_4'$, e $\Delta_3 R^{n_1} \Delta_4$ e $\Delta_3 R^{n_2} \Delta_4'$. Com isso fica mostrado que a relação de acessibilidade do enquadramento canônico para $\mathcal{L}+\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$ satisfaz as propriedades $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ simultaneamente, dado que os mundos estão fixados.

Por outro lado, é claro que se α é um teorema de $\mathcal{L}+\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$, então α é válida em todos os enquadramentos na qual R satisfaz as propriedades $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$. Conseqüentemente, o sistema $\mathcal{L}+\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$ é caracterizado pela classe de enquadramentos no qual R satisfaz as propriedades $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$. □

Não devemos esquecer que o Teorema 3.2.16, no caso dos sistemas anódicos, tem que considerar as instâncias duais de $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$. Com isso, o resultado pode ser facilmente adaptado substituindo o Teorema 3.2.15 pelo Teorema 2.2.6 na demonstração acima.

A seguir discutimos não só a questão da completude como também da incompletude para os sistemas bi-modais catódicos baseados no sistema **PI**.

3.3 A classe de sistemas catódicos bi-modais $\boldsymbol{PI}^{k,l,m,n}$

A classe de sistemas catódicos $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, como vimos na seção anterior, é uma classe composta de sistemas intermediários entre os sistemas bi-modais anódicos (Capítulo 1 e 2) e os sistemas monomodais catódicos (Capítulo 3). Essa particularidade torna $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ uma classe heterogênea, no sentido em que seus elementos são *catódicos* e *bi-modais*. Uma outra singularidade atrelada à classe $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ é a questão da incompletude. Dentre os sistemas catódicos, mostramos que um certo sistema que estende modalmente **PI** é incompleto, a saber, o sistema **PIVB**, obtido a partir do sistema completo $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$+(**PI**) pelo acréscimo do axioma (**VB**).

Um ponto a ressaltar é a dificuldade a respeito de se obter extensões *incompletas* de sistemas catódicos *completos* que incorporam à linguagem o operador de consistência. Discutimos tais questões no final desta seção. O ponto importante é que a heterogeneidade de $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ permite obter um tal sistema incompleto, como veremos. Com isso, mostramos que o fenômeno da incompletude não é um privilégio apenas da classe dos sistemas anódicos. A questão que colocamos é: quais outros sistemas podemos definir entre os anódicos e os catódicos que são completos, como o caso de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$+(**PI**), mas tais que, estendidos de uma certa maneira natural tornam-se incompletos?

Para obter a completude para a classe de sistemas $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ vamos compor, de modo informal, os resultados que obtivemos até agora para as classes anódicas e catódicas e mostrar como extrair daí tal resultado.

Não podemos deixar de observar a potencialidade do método que foi apresentado para a obtenção da completude dos sistemas anódicos. O arsenal usado mostra-se apto para abrigar não apenas os sistemas anódicos, mas também certos sistemas catódicos, como mostramos a seguir. No entanto, esse método simplifica-se à medida em que o sistema de base tem poder expressivo suficiente para definir uma negação clássica, como é o caso das classes $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ já estudadas. Obviamente, o fato de $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ ser uma classe de sistemas heterogêneos permite compor resultados inerentes aos sistemas bi-modais com inerentes aos catódicos para a obtenção da completude de tal classe.

A corretude de $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ foi estabelecida no Teorema 3.2.7 e o que segue busca entrelaçar os resultados a fim de mostrar como a completude pode ser alcançada.

Toda a estratégia, como é usual em lógica, baseia-se na construção do modelo que, na verdade, serve de contra-modelo na argumentação da completude: o modelo canônico (veja Definição 2.1.8). Para manipular duas modalidades independentes, $\Box$ e $\Diamond$, por intermédio de uma única relação de acessibilidade no modelo, precisamos estreitar a definição de relação de acessibilidade no modelo canônico, impondo que $Den(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep(\Delta)$, para cada Δ, Δ' no conjunto $\widehat{W}$ das extensões não-triviais maximais do sistema anódico em questão.

No caso específico da classe $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, mostramos que os conjuntos não-triviais maximais que estendem $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ satisfazem também a seguinte cláusula: $\alpha \notin \Delta$ implica $\neg\alpha \in \Delta$ (veja Lema 3.2.9 (vi)). Essa manobra permite mostrar que a valoração canônica v_Δ, ou seja, a função característica da extensão não-trivial maximal Δ, é uma **PI**-valoração (veja Teorema 3.2.12 (ii)). Observe que embora a relação de acessibilidade do modelo canônico para sistemas anódicos seja definida diferentemente do caso dos sistemas catódicos, tal discrepância não surte efeito para mostrar que v_Δ é uma **PI**-valoração, uma vez que a relação de acessibilidade não interfere nesse argumento. Com isso, sobrepujamos a parte delicada para mostrar que a classe $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ é completa.

No que concerne à parte bi-modal, todo a estratégia empregada para mostrar que a relação de acessibilidade do modelo canônico é bem definida está conectada às fórmulas modais. Dessa forma, a inserção do axioma (**PI**) à linguagem de $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$ não afeta os resultados obtidos. Como não se define em **PI** uma negação clássica, então não é possível abrir mão da noção de mundos factuais (veja Definição 2.1.5). O Lema 3.2.10 mostra apenas que a noção de mundo factual é supérflua na presença de uma negação clássica. Falta mostrar que tal não é possível na ausência de negação clássica, porém não atacamos essa questão por se tratar de uma questão menor, não relevante para o propósito desta Tese. Conjecturamos que não seja possível mostrar que a factualidade dos mundos possa ser obtida a partir da noção de negações fracas, por exemplo, a negação de **PI**. Portanto, a classe de sistemas catódicos bi-modais $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ é correta e completa com relação às deduções factuais (veja Definição 2.1.16).

Nosso interesse, agora, é mostrar que dentre os sistemas catódicos obtém-se pelo menos um sistema que é incompleto, ou seja, mostramos que a incompletude dos sistemas bi-modais anódicos pode ser estendida para os sistemas catódicos. O problema que deixamos em aberto é o seguinte: existe um sistema catódico monomodal e incompleto?

Da mesma forma que antes, nosso interesse é obter extensões incompletas de sistemas completos. Observe que, embora a completude bi-modal catódica tenha sido obtida para a classe de sistemas $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, não é difícil notar que o sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$+(**PI**) também é completo, dado que os axiomas desse sistema são válidos na classe dos enquadramentos em que a relação de acessibilidade não requer propriedades específicas (veja Teorema 2.1.4). A parte que faltaria mostrar tem relação com o axioma (**PI**). Mas isso vale diretamente, dado que não há modalidade envolvida (veja Teorema 3.2.7).

Considere o sistema $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$+(**PI**) e seja **PIVB** o sistema obtido pelo acréscimo do axioma (**VB**), devido a van Benthem, o qual foi apresentado na página 80 desta Tese. O que segue almeja mostrar que **PIVB** é um sistema incompleto.

Seguindo a mesma estratégia usada na Seção 2.3 para mostrar que $\mathbf{KVB}^{+}$ é incompleto, nosso objetivo é apontar uma falha quanto à expressividade dos enquadramentos para **PIVB**. Para se obter tal empreitada precisamos, primeiramente, fazer uso de uma noção abstrata de enquadramentos, os chamados "enquadramentos generalizados". Uma vez que temos presente na linguagem de **PIVB** um conectivo de negação, devemos adequar a Definição 2.3.2 com o intuito de acomodar esse novo conectivo.

Considerando a fórmula (**MV**), definida na página 81, o primeiro resultado que obtemos é que toda classe de enquadramentos que valida a fórmula (**VB**) também valida a fórmula (**MV**), como mostramos no Lema 2.3.1. Agora estamos interessados em encontrar um enquadramento que valide todos os axiomas de **PIVB** e que invalide a fórmula (**MV**). Esse resultado pode ser obtido tendo em conta os enquadramentos generalizados que definimos a seguir.

Definição 3.3.1. *Um enquadramento generalizado* $\mathfrak{G}$ *é uma terna* $\langle W, R, \Pi \rangle$*, onde* $\langle W, R \rangle$ *é um enquadramento não-trivial e* Π *é fechado pelas seguintes cláusulas, onde* $\cup$ *e* $^{-}$ *são as operações de união e complementar:*
(a) Se $X \in \Pi$ *então* $\overline{X} \in \Pi$*;*
(b) Se $X, Y \in \Pi$ *então* $\overline{X} \cup Y \in \Pi$*;*
(c) Se $X, Y \in \Pi$ *então* $X \cap Y \in \Pi$*;*
(d) Se $X \in \Pi$ *então* $\{w \in W : \forall w' \in W(wRw' \text{ implica } w' \in X)\} \in \Pi$*;*
(e) Se $X \in \Pi$ *então* $\{w \in W : \exists w' \in W(wRw' \text{ e } w' \in X)\} \in \Pi$*.*

A definição acima, colocada em termos abstratos, precisa ser particularizada de forma adequada. Seja $\mathfrak{G}_0$ um enquadramento generalizado, definido como na página 81. Seja $V : Var \longrightarrow \wp(W)$ uma valoração em que $V(p)$ representa o conjunto dos mundos no qual p é membro.

O próximo passo é mostrar que esse enquadramento particular satisfaz as condições requeridas na Definição 3.3.1.

Lema 3.3.2. $\mathfrak{G}_0$ *é um enquadramento generalizado.*

Demonstração. Basta mostrar que Π_0 cumpre as condições de fechamento exigidas pela Definição 3.3.1. As cláusulas (b)–(e) estão demonstradas no Lema 2.3.4, resta mostrar que: $A \in \Pi_0$ implica $\overline{A} \in \Pi_0$, isto é, considerando que $A \in \Pi_0$, vamos mostrar que $\omega \in \overline{A}$ e que $\overline{\overline{A}}$ é finito.

Há duas possibilidades a serem consideradas:

1. Suponha A finito e $\omega \notin A$.
   Se $\omega \notin A$ então $\omega \in \overline{A}$. Vejamos que $\overline{\overline{A}}$ é finito. Dado que $\overline{\overline{A}} = A$ então, pela hipótese, temos que $\overline{\overline{A}}$ é finito.

2. Suponha $\overline{A}$ finito e $\omega \in A$.
   Claramente segue das hipóteses que $\omega \notin \overline{A}$ e que $\overline{A}$ é finito.

Portanto, em ambos os casos $\overline{A} \in \Pi_0$. □

Agora devemos mostrar que o conjunto dos p-mundos, ou seja, dos mundos que validam p, é um conjunto admissível no enquadramento particularizado $\mathfrak{G}_0$, como mostra o resultado a seguir.

Lema 3.3.3. *Um modelo $\mathfrak{M}$ baseado sobre $\mathfrak{G}$ é admissível, se $V(p)$ é admissível para toda variável p.*

Demonstração. Devemos mostrar que, se $V(p)$ é um conjunto admissível, então $V(\alpha)$ também é um conjuto admissível, e a prova é produzida por indução na complexidade de α. O único caso que falta demonstrar é o caso em que $\alpha = \neg p$, os demais aparecem demonstrados no Lema 2.3.6.

Pela hipótese de indução temos que $V(p)$ é admissível, ou seja, $V(p) \in \Pi$ daí, pela Definição 3.3.1 (a), segue que $\overline{V(p)} \in \Pi$.

Como $V(p) = \{w \in W : v(p, w) = 1\}$ então $\overline{V(p)} = \{w \in W : v(p, w) = 0\}$. Pela definição de valoração em **PI** temos: $v(p, w) = 0$ implica $v(\neg p, w) = 1$. Daí, temos que $\{w \in W : v(\neg p, w) = 1\} \in \Pi$, ou seja, $V(\neg p) \in \Pi$.

Portanto, $V(\alpha)$ é um conjunto admissível. □

A prova de que o enquadramento $\mathfrak{G}_0$ não valida a fórmula (**MV**) é dada no Teorema 2.3.7. Para finalizar o argumento que mostra que **PIVB** é incompleto, falta mostrar que o axioma (**PI**) é validado pelo enquadramento $\mathfrak{G}_0$.

Teorema 3.3.4. *Todo teorema de **PIVB** é $\mathfrak{G}_0$-válido.*

Demonstração. Os axiomas referentes ao sistema **KVB**$^+$ estão mostrados no Teorema 2.3.8. O único caso que falta ser considerado é o axioma (**PI**).

Vejamos que para cada $w \in \mathbb{N} \cup \{\omega, \omega + 1\}$, $v((\mathbf{PI}), w) = 1$. De fato, basta fazer um argumento análogo ao usado para mostrar a corretude de $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ no Teorema 3.2.7. Suponha que $v((\mathbf{PI}), w) = 0$ e a contradição acontece no próprio w dado que não há modalidade envolvida. □

Portanto o sistema catódico bi-modal **PIVB** é incompleto.

Uma questão instigante é a incompletude relacionada aos sistemas catódicos que permitem definir uma negação clássica. Como comentamos, a negação clássica aparece em certos sistemas catódicos devido ao acréscimo do operador de consistência à linguagem, como é o caso das classes $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ que investigamos nesta Tese.

A dificuldade para se obter um resultado de incompletude para essas classes de sistemas concerne ao fato de que tais classes têm a presença de fórmulas do tipo $\circ\alpha$ na linguagem. Não é imediato imaginar como seriam os conjuntos admissíveis para fórmulas desse tipo. Uma proposta seria trabalhar com classes de conjuntos admissíveis em vez de simples conjuntos, e duplicar os mundos em "mundos consistentes" e "mundos inconsistentes", de forma a modelar a ação do axioma (**mbC**). Esse problema, contudo, fica em aberto: poderia haver sistemas catódicos incompletos que permitem definir uma negação clássica? Uma resposta a tal questão, tanto positiva quanto negativa, teria já um interesse independente do tema desta Tese.

Os resultados que obtivemos bastam para caracterizar a seguinte situação: J. van Benthem definiu em [vB78] o sistema **KVB**, extensão do sistema completo **K**, que ele mostrou ser incompleto. Avançamos tal resultado de incompletude mostrando, na Seção 2.3, que a classe dos sistemas anódicos, muito mais restritos, já que são desprovidos de negação, também comporta um resultado de incompletude, já que o sistema anódico $\mathbf{KVB}^{+}$ é incompleto. É importante ressaltar que $\mathbf{KVB}^{+}$ estende por sua vez o sistema completo $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$, o que garante que nosso resultado é significativo: de fato, não estamos meramente mostrando que existe um sistema estritamente mais fraco que o sistema incompleto **KVB**, que é também incompleto (isso não traria surpresa alguma), mas que existe uma extensão anódica de um sistema anódico completo que é incompleta.

Similarmente, mostramos que a classe dos sistemas catódicos comporta também um resultado de incompletude, já que o sistema catódico bi-modal **PIVB** é incompleto. De novo, a significância desse resultado reside no fato de que **PIVB** é uma extensão catódica incompleta do sistema catódico completo $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}$+(**PI**).

Pode-se dizer então, em retrospectiva, que o resultado seminal de J. van Benthem sobre a incompletude em sistemas modais clássicos se replica tanto nos sistemas anódicos quanto nos catódicos. A relevância desse fato surpreendente talvez possa ser entendida como mais um indício de quanto a negação é independente dos demais conceitos lógicos.

4. NOVAS SEMÂNTICAS PARA LÓGICAS MODAIS CATÓDICAS

Desde seus primórdios as lógicas paraconsistentes e as lógicas modais mostram familiaridade uma com a outra: já em 1948 S. Jaśkowski discute as razões para apresentar um cálculo proposicional que fosse capaz de lidar com situações contraditórias (veja [Jaś69]). Para explicar tais situações, Jaśkowski sugere interpretar a implicação discussiva $p \to q$, de seu sistema, como "$\Diamond p \supset q$" no sistema modal **S5** de Lewis, e com isso propôs o que ele chamou de *lógica discussiva*, conhecida na literatura por **D2**.

Em [Mar05a], Marcos mostra que o sistema **D2** é uma legítima LFI, embora, mesmo sendo um fragmento de **S5**, falhe em ser um sistema modal, segundo os critérios adotados no artigo. Com isso, apesar da falha de **D2** em se constituir em uma legítima lógica modal, segundo esse ponto de vista, pode-se dizer que a idéia de interpretar, ou mesmo explicar, uma contradição (em **D2**) por intermédio de um sistema modal (no caso, **S5**), ou de forma mais abrangente, por meio de um outro sistema, surge já em 1948.

As semânticas de traduções possíveis, propostas por Carnielli em [Car90] e retomadas por Marcos em [Mar99], fazem uso dessa idéia de modo amplo no sentido em que não é, necessariamente, usado um único sistema para servir de "oráculo" do sistema de base, com finalidade de interpretar os cenários conflitantes que ocorrem nesse sistema. Por intermédio das *traduções* e baseando-se na noção de *distribuir a decisão*, as semânticas de traduções possíveis conseguem generalizar a idéia germinal de Jaśkowski: uma fórmula α é interpretada de acordo com a "opinião conjunta", estabelecida, nesse caso, por meio da unanimidade a respeito das traduções de α.

A analogia com o oráculo pode ser instrutiva quando se lembram as lendárias proezas do famoso Oráculo de Delfos, a boca dos deuses, para explicar certas aparentes contradições, como o caso do Creso, poderoso rei da Lídia, que foi consultar o Oráculo de Delfos enquanto se preparava para atacar o império persa em 550 a.C. "Se Creso for para a guerra, um grande império será destruído". Os persas derrotam os lídios, e quando Creso questiona o Oráculo sobre sua suposta traição, compreende que Creso de fato destruiu um grande império: o seu próprio. Ou ainda quando o Oráculo revela a Querofonte que "não há alguém mais sábio que Sócrates", e os Sofistas se queixam ao Oráculo, para descobrir que não era necessariamente o caso que Sócrates fosse o mais sábio de todos os homens, somente que não havia alguém mais sábio que ele, e possivelmente que os próprios Sofistas. Talvez tenha sido a primeira vez em que a distinção entre máximo ("Sócrates é mais sábio que qualquer um") e maximal ("não há alguém mais sábio que Sócrates") tenha sido usada – o que diz muito sobre a grande sabedoria do Oráculo!

Quando Jaśkowski em [Jaś69] propôs seu cálculo, capaz de lidar com situações contraditórias, uma de suas pretensões era lograr uma interpretação intuitiva para tais situações contraditórias. Embora da Costa tenha vencido a corrida na elaboração de um cálculo capaz de lidar com contradições, tendo em conta que os cálculos de da Costa, além de disporem de completude, podem facilmente ser estendidos a cálculos de predicados (com e sem igualdade), a semântica proposta por da Costa descumpria um postulado de Jaśkowski, uma vez que a proposta semântica de valorações consiste em mera transcrição semântica da parte sintática.

Uma primeira resposta nessa direção é devida a D'Ottaviano e da Costa, em [DdC70], onde os autores propõem o cálculo paraconsistente J_3 atendendo ao quesito semântico de Jaśkowski[1], no entanto, a resposta definitiva

[1] J_3 é um cálculo paraconsistente caracterizado por matrizes trivalentes. Esse sistema mostra-se muito natural, tanto que reapareceu na literatura diversas vezes, com outras designações, não somente em trabalhos independentes mas obtido como solução de questões diferentes: em [Sch60], Schütte chama de Φ_v; em [Bat89], Batens nomeia por **CLuNs**; em [Car00], Carnielli chama de LCD; em [Mar99], Marcos a nomeia $\mathcal{W}_3$ e atenta para esse fato histórico; em [CMdA00], Carnielli Marcos e de Amo a chamam de **LFI1** para destacar sua expressão com uma lógica da inconsistência formal; e finalmente, em [Bue04], resolvi nomeá-la por $Trad_{C_1}$ pelo fato de que tais versões servem de base para uma caracterização de C_1 via semântica de traduções possíveis.

veio por intermédio das semânticas de traduções possíveis, proposta por Carnielli em [Car90]. Essa semântica além de caracterizar os cálculos C_n, e algumas de suas estensões, atende também à classe das lógicas da inconsistência formal, que mostramos no Capítulo 3.

Tanto os sistemas modais quanto a vasta maioria das lógicas da inconsistência formal (que doravante designamos por LFIs) desfrutam de um resultado limitativo a respeito da caracterização semântica por matrizes finitas. No caso das LFIs tal impossibilidade foi mostrada por Carnielli, Coniglio e Marcos em [CCM07], teorema 121; vale lembrar que, para o caso modal, tal resultado fora mostrado muito antes da existência das lógicas paraconsistentes, no resultado devido a Dugundji (veja [Dug40]). Ou seja, tanto as lógicas paraconsistentes (em geral) quanto as lógicas modais normais não podem ser caracterizadas por matrizes finitárias multi-valoradas. Dessa forma, tais resultados implicam quase diretamente que os sistemas catódicos também não podem ser caracerizados por matrizes finitárias multi-valoradas: de fato, se algum deles o fosse, seu fragmento proposicional também seria, contrariando o resultado limitativo de [CCM07].

Por outro lado, no caso das LFIs, existe uma forma de prover uma caracterização a mais próxima possível das matrizes multi-valoradas através das chamadas semânticas de traduções possíveis, dado que a vasta maioria das LFIs são tradutíveis em matrizes trivalentes.

Antes de prosseguir, uma nota sobre a nomenclatura: a escola polonesa de lógica consagrou o uso da expressão "semântica matricial" para designar semânticas determinadas por coleções de tabelas finitárias ou infinitárias. Designaremos informalmente por *matriz* o procedimento de definir uma semântica dessa maneira, chamando *tabela* cada um dos elementos que o compõe.

Nosso objetivo neste capítulo é ampliar o aparato das semânticas de traduções possíveis a fim de adaptar tal semântica para os sistemas catódicos. Chamamos a essa nova semântica de *semântica modal de traduções possíveis*. Dessa forma, as contradições, no âmbito das modalidades, poderão ser interpretadas por meio de classes de modelos relacionais multi-valorados. A partir deste ponto usamos também a designação modelos de Kripke bivalentes para nos referirmos a modelos relacionais com valorações bi-valentes. No capítulo anterior mostramos a completude para os sistemas catódicos com relação às classes de enquadramentos com bi-valorações *não*-verofucionais. A semântica que propomos permite interpretar os sistemas catódicos por meio de semânticas de Kripke trivalentes com intermediação de traduções, resgatando dessa forma a vero-funcionalidade da valoração nos modelos de Kripke.

Nossa estratégia é traduzir o sistema catódico em questão a modelos de Kripke trivalentes. Tais modelos são obtidos a partir da mesma classe de enquadramentos usadas para construir os modelos de Kripke com bi-valorações paraconsistentes, os modelos de Kripke bivalentes que propusemos no Capítulo 3 para caracterizar os sistemas catódicos.

4.1 As semânticas de traduções possíveis

As semânticas de traduções possíveis foram introduzidas por Carnielli, em [Car90], e são bastante aptas para tratar com contradições, uma vez que tais contradições aconteçam, mas não partem de qualquer pressuposto acerca da existência de contradições, como é o caso das "lógicas dialeteístas" de Priest (veja [Pri02]).

Divulgadas com a denominação de *semânticas não-determinísticas*, por exemplo em Carnielli e D'Ottaviano, em [CD97], o termo *semântica de traduções possíveis* reaparece na literatura 10 anos mais tarde na Dissertação de Mestrado de Marcos, em [Mar99]. Nesse trabalho o autor justifica, logo nas primeiras páginas, a troca do termo argumentando que "não-determinístico" é um termo muito sobrecarregado de significação, conforme citação abaixo:

> "Embora tenha parecido atraente em certo momento, esta designação foi abandonada por revelar-se obscura – afinal o que sabemos sobre uma semântica quando sabemos que ela é não-determinística? – e, mais ainda, inoportuna. De fato, nas ciências da computação, o termo "não-determinístico" já se encontra sobrecarregado de significações."

Contudo, apesar de sobrecarregado, o termo *semântica não-determinística*" é retomado por A. Avron para se referir a uma classe particular de semântica de traduções possíveis (veja [AL05], [AK05], [AK07], [Avr07] e [Avr05]).

As semânticas de traduções possíveis não são aptas apenas para prover completude aos sistemas paraconsistentes: mais do que isso, *explicam* as contradições toleradas por um sistema, o que não se consegue por meio das semânticas de valorações, uma vez que essas se reduzem a transcrições da sintaxe. Para prover situações contraditórias de significado, as semânticas de traduções possíveis usam a arte de combinar modelos com o mesmo tipo de similaridade da lógica a ser interpretada (veja Carnielli em [Car00]):

> "The idea behind possible-translations semantics is to combine two or more basic semantic models (of the same similarity type) in order to construct a new semantic interpretation which depends upon the basic ones in a certain non-deterministic way. Possible-translations semantics can also be seen as a generalization of Kripke structures in which one can have worlds of completely different nature, and also localize the satisfiability in a given world."

As semânticas de traduções possíveis sugerem que contradições acontecem no âmbito da sociedade, e não do indivíduo, da mesma forma como imaginava Jaśkowski, o idealizador de uma lógica que pudesse tratar racionalmente de contradições[2]. Nesse contexto cada "modelo" funciona como um indivíduo da sociedade, e a "classe dos modelos" como a própria sociedade. A "tradução" é o elo de comunicação entre cada indivíduo (modelo) e o objeto que queremos interpretar (lógicas exóticas).

Vale lembrar que a idéia de "tradução entre lógicas" foi introduzida em 1925 por Kolmogorov em [Kol67], com o intuito de investigar a consistência relativa da lógica clássica com relação à lógica intuicionista. Outros nomes que merecem destaque nesse campo são Glivenko, Gödel e Gentzen. Glivenko, em [Gli29], "se α é um teorema do cálculo proposicional clássico, então $\neg\neg\alpha$ é um teorema do cálculo proposicional intuicionista". Gödel, em

[2] O termo lógica paraconsistente foi proposto em 1976 pelo filósofo Francisco Miró-Quesada no III Simpósio Latino-Americano de Lógica Matemática, realizado na Universidade Estadual de Campinas.

[Göd86b], mostra que "se α é um teorema do cálculo proposicional clássico então, sob uma tradução específica g, $g(\alpha)$ é um teorema do cálculo proposicional intuicionista de Heyting"; nesse mesmo artigo, Gödel mostra ainda que esse resultado também é válido relativamente a aritmética intuicionista e teoria de números clássica. Gödel, em [Göd86a], introduz uma "tradução" que preserva teoremas do cálculo proposicional intuicionista de Heyting em um sistema, que em certo sentido é "equivalente" ao sistema modal **S4**, o que permitiu uma interpretação direta da lógica intuicionista por meio de modelos de Kripke. Gentzen, em [Gen69], introduz uma tradução t do cálculo proposicional clássico no cálculo proposicional intuicionista e prova que "α é um teorema clássico sse $t(\alpha)$ é um teorema intuicionista"; apresenta ainda uma prova construtiva da consistência da aritmética clássica elementar relativamente à aritmética intuicionista.

Depois disso muitos outros trabalhos sobre traduções entre lógicas aparecem na literatura, mas a atenção não estava voltada especificamente para uma noção de "tradução", tanto que aparecem os termos "interpretação" e "transformação" ao invés de "tradução". Uma primeira tentativa de refinar tal conceito é devida a Prawitz e Malmnäs, em [PM68], onde aparece pela primeira vez o conceito geral de *tradução entre lógicas* e de *tradução esquemática*.

Um avanço nessa direção é devido a Wójcicki e Epstein (veja [Wój88] e [Eps90]) em que um estudo sistemático e geral a respeito de traduções entre lógicas fica estabelecido.

No entanto, a idéia de traduções entre sistemas lógicos apoiada na idéia de comparar relações de conseqüência abstratas (no sentido de Tarski) foi introduzido na literatura em 1999 por da Silva, D'Ottaviano e Sette, em [dSDS99], no âmbito do projeto temático Fapesp, n^o 93/00925-9, intitulado "Aspectos temáticos e computacionais das traduções entre lógicas", no período de 1994 a 1997. A idéia de tomar uma função que "preserva a derivabilidade" foi usada por D'Ottaviano, em [D'O73], para estabelecer uma tradução entre duas estruturas de fecho. Feitosa, orientado por D'Ottaviano, em sua Tese de Doutorado (veja [Fei97]), aprofunda a pesquisa a respeito da tradução entre lógicas, dando continuidade ao estudo iniciado em [dSDS99] (*op. cit.*), focando a atenção nas chamadas *traduções conservativas*. Nesse trabalho, Feitosa mostra que as classes das lógicas e das traduções conservativas determinam uma sub-categoria co-completa da categoria bi-completa cujos objetos são lógicas e cujos morfismos são traduções. Uma discussão minuciosa a respeito das novas dimensões das traduções entre lógicas é dada por Carnielli, Coniglio e D'Ottaviano em [CCD09].

As semânticas de traduções possíveis baseiam-se no conceito de *tradução* entre lógicas, como em [dSDS99] (*op. cit.*), para prover significado às lógicas paraconsistentes. Nossa atenção está voltada para os sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci** que até agora serviram de base para ilustrar o mecanismo de se obter sistemas catódicos. Da mesma maneira, vamos mostrar como podemos caracterizar esses sistemas por intermédio da semântica de traduções possíveis para depois ampliar essa semântica de forma a atender os sistemas que aqui propusemos.

Definição 4.1.1. *Sejam $\boldsymbol{S} = \langle For, \vdash_S \rangle$ e $\boldsymbol{S'} = \langle For', \vdash_{S'} \rangle$ sistemas dedutivos. Uma tradução* $\mathtt{t}$ *de* $\boldsymbol{S}$ *em* $\boldsymbol{S}$*' é uma função entre seus conjuntos de fórmulas, a qual preserva a derivabilidade:*

$$\Gamma \vdash_S \alpha \quad \textit{implica} \quad \mathtt{t}(\Gamma) \vdash_{S'} \mathtt{t}(\alpha).$$

Quando "se $\cdots$, então" é substituído por "se, e somente se", a tradução é dita conservativa.

Primeiramente, vamos considerar o conjunto das tabelas trivalentes que serão capazes de garantir uma completude para os sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci** através das traduções possíveis. Vamos tratar simultâneamente dos quatro sistemas, referindo-nos a eles simplesmente como $\mathcal{L}$, fazendo distinções adequadas quando for o caso.

Devemos lembrar que os sistemas **mbC**, **bC** e **Ci** são descritos pelas assinaturas que contêm precisamente $\supset$, $\wedge$, $\neg$ e $\circ$, enquanto a assinatura de **PI** contém apenas $\supset$, $\wedge$, $\neg$. Em todos esses sistemas podemos definir o conectivo $\vee$. Por simplicidade, consideramos também esse conectivo nas definições que seguem.

O primeiro passo é encontrar matrizes nas quais possamos interpretar o sistema $\mathcal{L}$. Essas matrizes devem ter o mesmo tipo de similaridade da assinatura de $\mathcal{L}$. Claramente não há um algoritmo para encontrar tais matrizes e é nesse ponto que entra a criatividade.

Considere $\mathscr{A} = \langle\{T, t, F\}, \sqcap, \sqcup, \sqsupset, \neg_1, \neg_2, \neg_3, \circ_1 \circ_2, \circ_3\rangle$ uma Σ-álgebra, onde Σ indica assinatura de $\mathcal{L}$. As operações da Σ-álgebra $\mathscr{A}$ estão determinadas na Tabela 4.1.2.

Especificando T e t como valores-verdade distinguidos, designamos tal classe de matrizes como $\mathscr{M} = \langle\mathscr{A}, \{T, t\}\rangle$. Indicamos por $\mathscr{M}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathscr{M}$ a subclasse das matrizes candidatas a caracterizar $\mathcal{L}$ através das semânticas de traduções possíveis (veja Tabela 4.1.5).

Tabela 4.1.2. *Tabelas trivalentes de $\mathscr{M}$.*

$\sqcap$	T	t	F
T	t	t	F
t	t	t	F
F	F	F	F

$\sqcup$	T	t	F
T	t	t	t
t	t	t	t
F	t	t	F

$\sqsupset$	T	t	F
T	t	t	F
t	t	t	F
F	t	t	t

	$\neg_1$	$\neg_2$	$\neg_3$
T	F	F	F
t	F	t	t
F	T	t	T

	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$
T	T	t	F
t	F	F	F
F	T	t	F

Os valores-verdade dados nas tabelas acima são interpretados da seguinte forma: t indica "verdade por falha" enquanto T e F têm a interpretação usual "verdadeiro" e "falso". Em [CCM07], Carnielli, Coniglio e Marcos sugerem a seguinte interpretação para esses valores:

> "The truth-value t may be interpreted as 'true by default', or 'true by lack of evidence to the contrary', and T and F are, as usual, 'true' and 'false'. The truth-tables for conjunction, disjunction and implication never return

> the value T, so, in principle, one is never absolutely sure about the truth-status of some compound sentences. There are two distinct interpretations for negation, $\neg$, and for the consistency operator, $\circ$. The basic intuition is the idea of multiple scenarios concerning the dynamics of evaluation of propositions: One may think that there are two kinds of situations concerning non-true propositions with respect to successive moments of time. In the first situation, a true-by-default proposition is treated as a true proposition with respect to the negation $\neg_1$. In the other situation, one can consider the case in which the negation of any other value than 'true' becomes true-by-default – this is expressed by the negation $\neg_2$. On what concerns the consistency operator $\circ$, the first interpretation $\circ_1$ only considers as true-by-default the 'classical' values T and F, while $\circ_2$ assigns falsehood to every truth-value."

Observe que na Tabela 4.1.2 temos três possibilidades de interpretação para a negação, e três possibilidades para o operador de consistência. A interpretação dada acima continua válida para os sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci** dado que, na prática, precisamos no máximo de duas escolhas em cada caso, nesse sentido, a explicação dada acima continua a vigorar para nosso caso.

Todos os resultados apresentados nesta seção foram retirados de [Mar08], de Marcos, mas algumas adaptações de notação foram necessárias a fim de evitar ambigüidades com o texto. Nesse artigo, o autor mostra a completude via semântica de traduções possíveis para todos os sistemas paraconsistentes lincados na Figura 3.1. Embora estejamos considerando apenas 4 sistemas dentre as 9 possibilidades, é igualmente possível estender os resultados que obtivemos também para os outros sistemas, tanto no que concerne às extensões catódicas, quanto na obtenção de completude via semântica *modal* de traduções possíveis, que proporemos ainda neste capítulo.

Para obter uma caracterização para $\mathcal{L}$ por meio das semânticas de traduções possíveis precisamos controlar as traduções. Novamente, a escolha de tais restrições também foge do escopo da lógica. A idéia é impor limites às traduções à medida que encontramos divergência quanto à aceitabilidade de uma fórmula com relação ao grupo, ou seja, permitimos apenas as traduções aceitas por todos os contextos, o que significa que a unanimidade da sociedade é respeitada.

Tabela 4.1.3. *Seja* $\mathtt{Tr}$ *a classe das traduções* $\mathtt{t} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathscr{M}$*:*

$(Tr.1)$	$\mathtt{t}(p)$	$=$	p
$(Tr.2)$	$\mathtt{t}(\alpha \supset \beta)$	$=$	$\mathtt{t}(\alpha) \sqsupset \mathtt{t}(\beta)$
$(Tr.3)$	$\mathtt{t}(\alpha \wedge \beta)$	$=$	$\mathtt{t}(\alpha) \sqcap \mathtt{t}(\beta)$
$(Tr.4)$	$\mathtt{t}(\alpha \vee \beta)$	$=$	$\mathtt{t}(\alpha) \sqcup \mathtt{t}(\beta)$
$(Tr.5)$	$\mathtt{t}(\neg\alpha)$	$\in$	$\{\neg_1\mathtt{t}(\alpha),\ \neg_2\mathtt{t}(\alpha)\}$
$(Tr.6)$	$\mathtt{t}(\neg\alpha)$	$\in$	$\{\neg_1\mathtt{t}(\alpha),\ \neg_3\mathtt{t}(\alpha)\}$
$(Tr.7)$	$\mathtt{t}(\circ\alpha)$	$\in$	$\{\circ_2\mathtt{t}(\alpha),\ \circ_3\mathtt{t}(\alpha),\ \circ_2\mathtt{t}(\neg\alpha),\ \circ_3\mathtt{t}(\neg\alpha)\}$
$(Tr.8)$	$\mathtt{t}(\circ\alpha)$	$\in$	$\{\circ_1\mathtt{t}(\alpha),\ \circ_1\mathtt{t}(\neg\alpha)\}$
$(Tr.9)$	$\mathtt{t}(\neg\alpha) = \neg_1\mathtt{t}(\alpha)$	*implica*	$\mathtt{t}(\circ\alpha) = \circ_1\mathtt{t}(\neg\alpha)$

Para cada caso específico devemos escolher as traduções adequadas a $\mathcal{L}$. Em termos mais precisos, deveríamos escrever $\mathtt{Tr}_{\mathcal{L}}$ para indicar que estamos considerando apenas as traduções relativas ao sistema $\mathcal{L}$, mas para não sobrecarregar a notação usamos apenas $\mathtt{Tr}$. As escolhas específicas para cada caso estão dadas na Figura 4.1.4. Para evitar confusão, lembraremos o leitor quando for o caso.

Tabela 4.1.4. *Restrições sobre as traduções de $\mathcal{L}$.*

Lógica	*Restrições sobre as traduções*
$\boldsymbol{PI}$	*(Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4) e (Tr.5)*
$\boldsymbol{mbC}$	*(Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4), (Tr.5) e (Tr.7)*
$\boldsymbol{bC}$	*(Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4), (Tr.6) e (Tr.7)*
$\boldsymbol{Ci}$	*(Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4), (Tr.6), (Tr.8) e (Tr.9)*

A partir das restrições sobre as traduções para $\mathcal{L}$, é possível determinar o conjunto das matrizes $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$ capazes de caracterizar $\mathcal{L}$ por meio de uma semântica de traduções possíveis.

Tabela 4.1.5. *Tabelas trivalentes de $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$.*

$\mathcal{L}$	$\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$ *é composta pelas tabelas:*
$\boldsymbol{PI}$	$\sqsupset$, $\sqcap$, $\sqcup$, $\neg_1$ *e* $\neg_2$
$\boldsymbol{mbC}$	$\sqsupset$, $\sqcap$, $\sqcup$, $\neg_1$, $\neg_2$, $\circ_2$ *e* $\circ_3$
$\boldsymbol{bC}$	$\sqsupset$, $\sqcap$, $\sqcup$, $\neg_1$, $\neg_3$, $\circ_2$ *e* $\circ_3$
$\boldsymbol{Ci}$	$\sqsupset$, $\sqcap$, $\sqcup$, $\neg_1$, $\neg_3$ *e* $\circ_1$

Agora temos todo o aparato adequado para definir as semânticas de traduções possíveis adequadas a $\mathcal{L}$, partindo das matrizes $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$ dadas na Tabela 4.1.5 e das restrições em $\mathtt{Tr}$ dadas na Tabela 4.1.4.

Definição 4.1.6. *Uma estrutura de traduções possíveis para o sistema dedutivo $\mathcal{L}$ é o par $\mathtt{TP} = \langle \mathscr{M}_{\mathcal{L}}, \mathtt{Tr}\rangle$, onde:*
(i) $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$ é o conjunto de tabelas para $\mathcal{L}$ dado na Tabela 4.1.5;
(ii) $\mathtt{Tr} = \{\mathtt{t}_i : \mathcal{L} \longrightarrow \mathscr{M}_{\mathcal{L}}\}$ é uma família de traduções governadas pelas restrições dadas na Tabela 4.1.4.

A seguir definimos a relação de conseqüência na estrutura $\mathtt{TP}$.

Definição 4.1.7. *Sejam* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *um conjunto de* $\mathcal{L}$*-fórmulas e* $\vDash_{\mathscr{M}_{\mathcal{L}}}$ *a relação de conseqüência determinada por* $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$*. A relação de conseqüência em* $\mathtt{TP}$*, denotada por* $\vDash_{\mathtt{TP}}$*, é definida como:*

$$\Gamma \vDash_{\mathtt{TP}} \alpha \textit{ sse } \mathtt{t}(\Gamma) \vDash_{\mathscr{M}_{\mathcal{L}}} \mathtt{t}(\alpha), \textit{ para toda tradução } \mathtt{t} \in \mathtt{Tr}.$$

Teorema 4.1.8. *(Corretude para **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci**)*
Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *um conjunto de fórmulas de* $\mathcal{L}$*. Então:* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ *implica* $\Gamma \vDash_{\mathtt{TP}} \alpha$*.*

Demonstração. Devemos mostrar que as traduções dos axiomas de $\mathcal{L}$ são tautologias nas matrizes $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$.

Observe que as traduções dos axiomas (**A1**)–(**A6**) são tautologias em $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$, dado que as tabelas $\sqcap$, $\sqcup$ e $\sqsupset$ têm um comportamento clássico na valoração t (veja Tabela 4.1.2). Da mesma forma, é fácil verificar que as regras (**MP**) e (**US**) também são preservadas por $\mathtt{t}$. Resta então verificar que as traduções dos axiomas (**PI**), (**mbC**), (**bC**) e (**Ci**) são tautologias em $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$:

- Para $\mathcal{L}$ = **PI**;

  O único caso a considerar é o axioma (**PI**). As traduções possíveis nesse caso são:

$$\mathtt{t}(p \vee \neg p) = \begin{cases} p \sqcup \neg_1 p & \text{para} \quad \mathtt{t}(\neg p) = \neg_1 p \\ p \sqcup \neg_2 p & \text{para} \quad \mathtt{t}(\neg p) = \neg_2 p \end{cases}$$

  Basta verificar que cada tabela verdade das traduções de (**PI**) recebe apenas valores distinguidos T ou t:

p	$\neg_1 p$	$\neg_2 p$	$p \sqcup \neg_1 p$	$p \sqcup \neg_2 p$
T	F	F	t	t
t	F	t	t	t
F	T	t	t	t

- Para $\mathcal{L}$ = **mbC**;

  Devemos considerar os axiomas (**PI**) e (**mbC**). Pela Figura 4.1.4, vemos que a tradução referente à negação é como no sistema **PI**, daí resta verificar o axioma (**mbC**). As traduções possíveis de (**mbC**) são:

$$\mathtt{t}(\circ p \supset [p \supset (\neg p \supset q)]) = \begin{cases} \circ_2 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)] & (T_1) \\ \circ_2 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_2 p \sqsupset q)] & (T_2) \\ \circ_3 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)] & (T_3) \\ \circ_3 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_2 p \sqsupset q)] & (T_4) \\ \circ_3 \neg_1 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)] & (T_5) \\ \circ_2 \neg_1 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)] & (T_6) \\ \circ_2 \neg_2 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_2 p \sqsupset q)] & (T_7) \\ \circ_3 \neg_2 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_2 p \sqsupset q)] & (T_8) \end{cases}$$

Observe que as fórmulas T_3, T_4, T_5 e T_8 são tautologias em razão de $\circ_3(p)$ ser sempre F (veja Tabela 4.1.2). Resta, portanto, analisar os casos T_1, T_2, T_6 e T_7.

Considere, na tabela abaixo, $X = p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)$ e $Y = p \sqsupset (\neg_2 p \sqsupset q)$:

p	q	$\neg_1 p$	$\neg_2 p$	$(\neg_1 p \sqsupset q)$	$(\neg_2 p \sqsupset q)$	X	Y	$\circ_2 p$	T_1	T_2
T	T	F	F	t	t	t	t	t	t	t
T	t	F	F	t	t	t	t	t	t	t
T	F	F	F	t	t	t	t	t	t	t
t	T	F	t	t	t	t	t	F	t	t
t	t	F	t	t	t	t	t	F	t	t
t	F	F	t	t	F	t	F	F	t	t
F	T	T	t	t	t	t	t	t	t	t
F	t	T	t	t	t	t	t	t	t	t
F	F	T	t	F	F	t	t	t	t	t

$\circ_2\neg_1 p$	$\circ_2\neg_2 p$	X	Y	T_6	T_7
t	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t
t	F	t	t	t	t
t	F	t	t	t	t
t	F	t	F	t	t
t	F	t	t	t	t
t	F	t	t	t	t
t	F	t	t	t	t

- Para $\mathcal{L} = \mathbf{bC}$;
  Devemos considerar os axiomas (**PI**), (**mbC**) e (**bC**).

  1. As traduções possíveis de (**PI**) são:

$$\mathtt{t}(p \vee \neg p) = \begin{cases} p \sqcup \neg_1 p & \text{para} \quad \mathtt{t}(\neg p) = \neg_1 p \\ p \sqcup \neg_3 p & \text{para} \quad \mathtt{t}(\neg p) = \neg_3 p \end{cases}$$

p	$\neg_1 p$	$\neg_3 p$	$p \sqcup \neg_1 p$	$p \sqcup \neg_3 p$
T	F	F	t	t
t	F	t	t	t
F	T	T	t	t

  2. As traduções possíveis de (**mbC**) são:

$$\mathtt{t}(\circ p \supset [p \supset (\neg p \supset q)]) = \begin{cases} \circ_2 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)] & (T_1) \\ \circ_2 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_3 p \sqsupset q)] & (T_2) \\ \circ_3 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)] & (T_3) \\ \circ_3 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_3 p \sqsupset q)] & (T_4) \\ \circ_3 \neg_1 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)] & (T_5) \\ \circ_2 \neg_1 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)] & (T_6) \\ \circ_2 \neg_3 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_3 p \sqsupset q)] & (T_7) \\ \circ_3 \neg_3 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_3 p \sqsupset q)] & (T_8) \end{cases}$$

Observe que as fórmulas T_3, T_4, T_5 e T_8 são tautologias em razão de $\circ_3(p)$ ser sempre F (veja Tabela 4.1.2). Resta, portanto, verificar os casos T_1, T_2, T_6 e T_7.

Considere $X = p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)$ e $Y = p \sqsupset (\neg_3 p \sqsupset q)$:

p	q	$\neg_1 p$	$\neg_3 p$	$(\neg_1 p \sqsupset q)$	$(\neg_3 p \sqsupset q)$	X	Y	$\circ_2 p$	T_1	T_2
T	T	F	F	t	t	t	t	t	t	t
T	t	F	F	t	t	t	t	t	t	t
T	F	F	F	t	t	t	t	t	t	t
t	T	F	t	t	t	t	t	F	t	t
t	t	F	t	t	t	t	t	F	t	t
t	F	F	t	t	F	t	F	F	t	t
F	T	T	T	t	t	t	t	t	t	t
F	t	T	T	t	t	t	t	t	t	t
F	F	T	T	F	F	t	t	t	t	t

$\circ_2\neg_1 p$	$\circ_2\neg_3 p$	X	Y	T_6	T_7
t	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t
t	F	t	t	t	t
t	F	t	t	t	t
t	F	t	F	t	t
t	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t

3. As traduções possíveis de (**bC**) são:

$$\mathtt{t}(\neg\neg p \supset p) = \begin{cases} \neg_1\neg_3 p \sqsupset p & (T_1) \\ \neg_1\neg_1 p \sqsupset p & (T_2) \\ \neg_3\neg_1 p \sqsupset p & (T_3) \\ \neg_3\neg_3 p \sqsupset p & (T_4) \end{cases}$$

p	$\neg_1 p$	$\neg_3 p$	$\neg_1\neg_3 p$	$\neg_1\neg_1 p$	$\neg_3\neg_1 p$	$\neg_3\neg_3 p$	T_1	T_2	T_3
T	F	F	T	T	T	T	t	t	t
T	F	F	T	T	T	T	t	t	t
T	F	F	T	T	T	T	t	t	t
t	F	t	F	T	T	t	t	t	t
t	F	t	F	T	T	t	t	t	t
t	F	t	F	T	T	t	t	t	t
F	T	T	F	F	F	F	t	t	t
F	T	T	F	F	F	F	t	t	t
F	T	T	F	F	F	F	t	t	t

- Para $\mathcal{L} = \mathbf{Ci}$;
  Devemos considerar os axiomas (**PI**), (**mbC**), (**bC**) e (**Ci**):

1. Para (**PI**) o mesmo argumento usado no caso do sistema **bC**.
2. As traduções possíveis de (**mbC**) são:

$$\mathtt{t}(\circ p \supset [p \supset (\neg p \supset q)]) = \begin{cases} \circ_1 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_3 p \sqsupset q)] & (T_1) \\ \circ_1 \neg_1 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)] & (T_2) \\ \circ_1 \neg_3 p \sqsupset [p \sqsupset (\neg_3 p \sqsupset q)] & (T_3) \end{cases}$$

Considere $X = p \sqsupset (\neg_1 p \sqsupset q)$ e $Y = p \sqsupset (\neg_3 p \sqsupset q)$:

p	q	$\neg_1 p$	$\neg_3 p$	$(\neg_1 p \sqsupset q)$	$(\neg_3 p \sqsupset q)$	X	Y	$\circ_1 p$	T_1
T	T	F	F	t	t	t	t	T	t
T	t	F	F	t	t	t	t	T	t
T	F	F	F	t	t	t	t	T	t
t	T	F	t	t	t	t	t	F	t
t	t	F	t	t	t	t	t	F	t
t	F	F	t	t	F	t	F	F	t
F	T	T	T	t	t	t	t	T	t
F	t	T	T	t	t	t	t	T	t
F	F	T	T	F	F	t	t	T	t

Y	$\neg_1 p$	$\neg_3 p$	$\circ_1 \neg_1 p$	$\circ_1 \neg_3 p$	T_2	T_3
t	F	F	T	T	t	t
t	F	F	T	T	t	t
t	F	F	T	T	t	t
t	F	t	T	F	t	t
t	F	t	T	F	t	t
F	F	t	T	F	t	t
t	T	T	T	T	t	t
t	T	T	T	T	t	t
t	T	T	T	T	t	t

3. Para (**bC**) emprega-se o mesmo argumento usado no caso do sistema **bC**.
4. As traduções possíveis de (**Ci**) são:

$$\mathtt{t}(\neg \circ p \supset (p \wedge \neg p)) = \begin{cases} (\neg_3 \circ_1 p) \sqsupset (p \sqcap \neg_3 p) & (T_1) \\ (\neg_1 \circ_1 p) \sqsupset (p \sqcap \neg_3 p) & (T_2) \\ (\neg_3 \circ_1 \neg_1 p) \sqsupset (p \sqcap \neg_1 p) & (T_3) \\ (\neg_1 \circ_1 \neg_1 p) \sqsupset (p \sqcap \neg_1 p) & (T_4) \\ (\neg_3 \circ_1 \neg_3 p) \sqsupset (p \sqcap \neg_3 p) & (T_5) \\ (\neg_1 \circ_1 \neg_3 p) \sqsupset (p \sqcap \neg_3 p) & (T_6) \end{cases}$$

Considere, nas tabelas abaixo $X = (p \sqcap \neg_1 p)$ e $Y = (p \sqcap \neg_3 p)$:

p	$\neg_1 p$	$\neg_3 p$	X	Y	$\circ_1 p$	$\neg_3 \circ_1 p$	$\neg_1 \circ_1 p$	T_1	T_2
T	F	F	F	F	T	F	F	t	t
t	F	t	F	t	F	T	T	t	t
F	T	F	F	F	T	F	F	t	t

X	Y	$\circ_1 \neg_1 p$	$\neg_3 \circ_1 \neg_1 p$	$\neg_1 \circ_1 \neg_1 p$	T_3	T_4
F	F	T	F	F	t	t
F	t	T	F	F	t	t
F	F	T	F	F	t	t

Y	$\circ_1 \neg_3 p$	$\neg_3 \circ_1 \neg_3 p$	$\neg_1 \circ_1 \neg_3 p$	T_5	T_6
F	T	F	F	t	t
t	F	T	T	t	t
F	T	F	F	t	t

Portanto, como a tradução de cada axioma de $\mathcal{L}$ é uma tautologia em $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$, e as regras preservam a validade em $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$, então $\mathtt{t}(\Gamma) \vDash_{\mathscr{M}_{\mathcal{L}}} \mathtt{t}(\alpha)$ daí, pela Definição 4.1.7, segue que $\Gamma \vDash_{\mathtt{TP}} \alpha$. $\square$

Definição 4.1.9. *Seja $\boldsymbol{S}$ um sistema dedutivo, e $\boldsymbol{For}$ o conjunto das fórmulas de $\boldsymbol{S}$. A função $\ell : \boldsymbol{For} \longrightarrow \mathbb{N}$ denota a medida da complexidade das fórmulas, e é definida como:*

(i) $\ell(p) = 0$, *para* $p \in Var$;

(ii) $\ell(\neg\alpha) = \ell(\alpha) + 1$;

(iii) $\ell(\alpha \bowtie \beta) = \mathtt{max}\{\ell(\alpha), \ell(\beta)\} + 1$, *para* $\bowtie \in \{\supset, \wedge, \vee\}$;

(iv) $\ell(\circ\alpha) = \ell(\alpha) + 2$;

(v) $\ell(\Box\alpha) = \ell(\alpha) + 1$.

A estratégia para se obter uma caracterização via semântica de traduções possíveis para um sistema $\mathcal{L}$ é compor a “completude”, obtida por intermédio da semântica de valorações, com um “Lema de Representabilidade”, que consiste em mostrar que para cada $\mathcal{L}$-valoração v existe uma tradução $\mathtt{t}$ e uma valoração trivalente $\overline{v}$ que satisfazem:

$$\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha)) \in \{T, t\} \text{ sse } v(\alpha) = 1.$$

Depois de demonstrar a Representabilidade (denotada por Repres), a Completude em relação a $\mathtt{Biv}_{\mathcal{L}}$ (denotada por Cpt) e a Corretude em relação a $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$ (denotada por Crt), podemos, facilmente, caracterizar $\mathcal{L}$ com relação às classes de modelos $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$ (completude) e $\mathtt{Biv}_{\mathcal{L}}$ (corretude), como esquematizamos na Figura 4.1 abaixo.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L} \arrow[dl, "Crt"] \arrow[dr, dotted, bend left, "Crt"] & \\
\mathscr{M}_{\mathcal{L}} \arrow[ur, dotted, bend left, "Cpt"] & & \mathtt{Biv}_{\mathcal{L}} \arrow[ul, "Cpt"'] \arrow[ll, Rightarrow, "Repres"']
\end{tikzcd}$$

Fig. 4.1: Caracterização de $\mathcal{L}$

A seguir mostramos, separadamente, o “Lema da Representabilidade”, que relaciona modelos bivalentes e trivalentes, para cada um dos sistemas paraconsistentes que estamos tratando nesta Tese.

Lema 4.1.10. *($\boldsymbol{PI}$-Representabilidade)*
Dada uma $\boldsymbol{PI}$-valoração v existe uma tradução $\mathtt{t}$ em $\mathtt{Tr}$ e uma valoração $\overline{v}$ em $\mathscr{M}_{PI}$ tal que, para toda fórmula α em $\boldsymbol{PI}$:

(*i*) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha)) = t$ *sse* $v(\alpha) = 1$

(*ii*) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha)) = F$ *sse* $v(\alpha) = 0$

Demonstração. Considere a seguinte função de atribuição $\overline{v} : Var \longrightarrow \{T, t, F\}$ para as variáveis proposicionais:

$$\overline{v}(p) = \begin{cases} F & \text{se } v(p) = 0 \\ t & \text{se } v(p) = 1 \end{cases}$$

A atribuição acima pode ser estendida homomorficamente para a Σ-álgebra $\mathscr{A}$. Define-se a tradução da seguinte forma:

($T1$) $\mathtt{t}(p) = p$

($T2$) $\mathtt{t}(\alpha \supset \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqsupset \mathtt{t}(\beta)$

($T3$) $\mathtt{t}(\alpha \wedge \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcap \mathtt{t}(\beta)$

($T4$) $\mathtt{t}(\alpha \vee \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcup \mathtt{t}(\beta)$

($T5$) $\mathtt{t}(\neg\alpha) = \begin{cases} \neg_1 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\neg\alpha) = 0 \\ \neg_2 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\neg\alpha) = 1 \end{cases}$

Observe que as escolhas são de fato permitidas pelas restrições (Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4) e (Tr.5) que caracterizam as traduções admissíveis para **PI**. O enunciado pode ser provado, de maneira usual, por indução na medida de complexidade ℓ. Detalhes do argumento são dados por Marcos em [Mar08], teorema 24. □

Lema 4.1.11. *($\boldsymbol{mbC}$-Representabilidade)*
Dada uma $\boldsymbol{mbC}$-valoração v existe uma tradução $\mathtt{t}$ em $\mathtt{Tr}$ e uma valoração $\overline{v}$ em $\mathscr{M}_{mbC}$ tal que, para toda fórmula α em $\boldsymbol{mbC}$:

(*i*) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha)) = T$ *implica* $v(\neg\alpha) = 0$

(*ii*) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha)) = F$ *sse* $v(\alpha) = 0$

Demonstração. Considere a seguinte função de atribuição $\overline{v} : Var \longrightarrow \{T, t, F\}$ para as variáveis proposicionais:

$$\overline{v}(p) = \begin{cases} F & \text{se } v(p) = 0 \\ T & \text{se } v(\neg p) = 0 \\ t & \text{se } v(p) = 1 \end{cases}$$

Novamente, a atribuição pode ser estendida homomorficamente para a Σ-álgebra $\mathscr{A}$. Nesse caso, a tradução pode ser definida da seguinte forma:

$(T1)$ $\mathtt{t}(p) = p$

$(T2)$ $\mathtt{t}(\alpha \supset \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqsupset \mathtt{t}(\beta)$

$(T3)$ $\mathtt{t}(\alpha \wedge \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcap \mathtt{t}(\beta)$

$(T4)$ $\mathtt{t}(\alpha \vee \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcup \mathtt{t}(\beta)$

$(T5)$ $\mathtt{t}(\neg\alpha) = \begin{cases} \neg_1 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\neg\alpha) = 0 \text{ ou } v(\alpha) = 0 = v(\neg\neg\alpha) \\ \neg_2 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\neg\alpha) = 1 \end{cases}$

$(T6)$ $\mathtt{t}(\circ\alpha) = \begin{cases} \circ_3 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 0 \\ \circ_2 \mathtt{t}(\neg\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 1 \text{ e } v(\neg\alpha) = 0 \\ \circ_2 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 1 \end{cases}$

As escolhas são, nesse caso, permitidas pelas restrições (Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4), (Tr.5) e (Tr.7) que caracterizam as traduções admissíveis para **mbC**. Detalhes do argumento (de novo por indução na medida de complexidade ℓ) podem ser encontrados em [Mar08] (*op. cit.*), teorema 25. □

Lema 4.1.12. *(**bC**-Representabilidade)*
*Dada uma **bC**-valoração v existe uma tradução* $\mathtt{t}$ *em* $\mathtt{Tr}$ *e uma valoração* $\overline{v}$ *em* $\mathscr{M}_{bC}$ *tal que, para toda fórmula* α *em **bC**:*

(*i*) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha)) = T$ *implica* $v(\neg\alpha) = 0$

(*ii*) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha)) = F$ *sse* $v(\alpha) = 0$

Demonstração. Considere a seguinte função de atribuição $\overline{v} : Var \longrightarrow \{T, t, F\}$ para as variáveis proposicionais:

$$\overline{v}(p) = \begin{cases} F & \text{se } v(p) = 0 \\ T & \text{se } v(\neg p) = 0 \\ t & \text{se } v(p) = 1 \end{cases}$$

A atribuição se estende homomorficamente para a Σ-álgebra $\mathscr{A}$. Defina para o presente caso a tradução da seguinte forma:

$(T1)$ $\mathtt{t}(p) = p$

$(T2)$ $\mathtt{t}(\alpha \supset \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqsupset \mathtt{t}(\beta)$

$(T3)$ $\mathtt{t}(\alpha \wedge \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcap \mathtt{t}(\beta)$

$(T4)$ $\mathtt{t}(\alpha \vee \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcup \mathtt{t}(\beta)$

$(T5)$ $\mathtt{t}(\neg\alpha) = \begin{cases} \neg_3 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\alpha) = 1 = v(\neg\alpha) \\ \neg_1 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\alpha) = 0 \end{cases}$

$(T6)$ $\mathtt{t}(\circ\alpha) = \begin{cases} \circ_3 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 0 \\ \circ_2 \mathtt{t}(\neg\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 1 \text{ e } v(\neg\alpha) = 0 \\ \circ_2 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 1 \end{cases}$

Agora as escolhas são permitidas pelas restrições (Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4), (Tr.6) e (Tr.7) que caracterizam as traduções admissíveis para **bC**. Novamente, o argumento indutivo se encontra em [Mar08] (*op. cit.*), teorema 28. □

Lema 4.1.13. *(**Ci**-Representabilidade)*
*Dada uma **Ci**-valoração v existe uma tradução $\mathtt{t}$ em $\mathtt{Tr}$ e uma valoração $\overline{v}$ em $\mathscr{M}_{Ci}$ tal que, para toda fórmula α em **Ci**:*
(i) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha)) = T$ *implica* $v(\neg\alpha) = 0$
(ii) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha)) = F$ *sse* $v(\alpha) = 0$

Demonstração. Considere a seguinte função de atribuição $\overline{v} : Var \longrightarrow \{T, t, F\}$ para as variáveis proposicionais:

$$\overline{v}(p) = \begin{cases} F & \text{se } v(p) = 0 \\ T & \text{se } v(\neg p) = 0 \\ t & \text{se } v(p) = 1 \end{cases}$$

Estende-se a atribuição acima homomorficamente, de maneira usual, para a Σ-álgebra $\mathscr{A}$. A tradução é definida como:

$(T1)$ $\mathtt{t}(p) = p$

$(T2)$ $\mathtt{t}(\alpha \supset \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqsupset \mathtt{t}(\beta)$

$(T3)$ $\mathtt{t}(\alpha \wedge \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcap \mathtt{t}(\beta)$

$(T4)$ $\mathtt{t}(\alpha \vee \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcup \mathtt{t}(\beta)$

$(T5)$ $\mathtt{t}(\neg\alpha) = \begin{cases} \neg_3 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\alpha) = 1 = v(\neg\alpha) \\ \neg_1 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\alpha) = 0 \end{cases}$

$(T6)$ $\mathtt{t}(\circ\alpha) = \begin{cases} \circ_1 \mathtt{t}(\neg\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 1 \\ \circ_1 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 0 \end{cases}$

As escolhas são coerentes com as restrições (Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4), (Tr.6), (Tr.8) e (Tr.9) que caracterizam as traduções admissíveis para **Ci**. O resultado pode ser provado também por indução na medida de complexidade ℓ; veja [Mar08] (*op. cit.*), teorema 29, para detalhes. □

Pelo Lema de Representabilidade para cada um dos sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci**, mostrado nos Lemas 4.1.10, 4.1.11, 4.1.12 e 4.1.13, podemos obter a completude, por meio das semânticas de traduções possíveis, em cada caso como mostramos a seguir.

Corolário 4.1.14. *(Completude para **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci**)*
Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$. Então $\Gamma \vDash_{\mathtt{TP}} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$.

Demonstração. Suponha $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \alpha$; então, dado que $\mathcal{L}$ é correto e completo em relação às $\mathcal{L}$-valorações, existe uma $\mathcal{L}$-valoração v tal que $v(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v(\alpha) = 0$. Pelo Lema de Representabilidade de $\mathcal{L}$, é possível definir uma tradução $\mathtt{t}$ em $\mathtt{Tr}$ e uma valoração $\bar{v}$ em $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$ tal que, $\bar{v}(\mathtt{t}(\Gamma)) \in \{T, t\}$ e $\bar{v}(\mathtt{t}(\alpha)) = F$ daí, $\mathtt{t}(\Gamma) \nvDash_{\mathscr{M}_{\mathcal{L}}} \mathtt{t}(\alpha)$. Portanto, pela Definição 4.1.7, $\Gamma \nvDash_{\mathtt{TP}} \alpha$. □

O objetivo da próxima seção é estender o método ilustrado acima a fim de obter uma caracterização via semântica modal de traduções possíveis para os sistemas catódicos que estudamos no Capítulo 3. A estratégia é conseguir resultados de representabilidade entre classes de modelos de Kripke trivalentes, $\mathfrak{M}_{\mathtt{Triv}}$, com classes de modelos de Kripke bivalentes, $\mathfrak{M}_{\mathtt{Biv}}$.

4.2 A semântica modal de traduções possíveis

Assim como no caso dos sistemas paraconsistentes proposicionais, os sistemas catódicos carecem de semântica que explique os cenários contraditórios que tais sistemas podem tolerar. É crucial ter uma base semântica sólida, porque tais cenários conflitantes no ambiente modal seriam capazes de servir de base para uma teoria dos "mundos impossíveis", como a defendida por Zalta em [Zal97], se entendermos os mundos que podem abrigar contradições como sendo, precisamente, os "mundos impossíveis". Os sistemas catódicos parecem mostrar-se aptos para especificar semanticamente tais mundos impossíveis. Na medida em que a semântica modal de traduções possíveis parece ser o maquinário semântico por excelência que permite explicar tais cenários contraditórios, tal semântica permitiria uma interpretação filosófica aceitável para a ocorrência de tais mundos impossíveis.

Nesta seção nos ocupamos em mostrar como funciona a semântica modal de traduções possíveis, exemplificando como essa semântica provê completude para os sistemas catódicos (precisamente para aqueles que apresentamos no Capítulo 3). Por uma questão prática, nos restringimos a uma definição particular adequada a esses sistemas mas, como o leitor poderá notar, não é difícil perceber como seria uma definição geral.

Nossos esforços estão concentrados em mostrar como obter modelos de Kripke trivalentes a partir de modelos trivalentes pré-existentes. Tais modelos são obtidos estendendo os modelos trivalentes que provêem completude para os sistemas paraconsistentes que analisamos na Seção 4.1. Nosso objetivo está voltado para mostrar um resultado de representabilidade entre esses modelos de Kripke trivalentes e os modelos de Kripke com bi-valorações paraconsistentes que serviram de base para a caracterização dos sistemas catódicos que mostramos no Capítulo 3.

Basta que nos concentremos no caso trivalente porque os sistemas paraconsistentes que nos servem de base são caracterizados, via semântica de traduções possíveis, por modelos trivalentes. Contudo, como dissemos, a mesma técnica pode ser aplicada para sistemas (paraconsistentes ou não) que exijam modelos com n valores de verdade para uma caracterização via semântica de traduções possíveis.

É interessante observar que a maneira que vamos obter os modelos de Kripke trivalentes, embora bastante natural, difere do que se tem na literatura. Fitting em [Fit91] e [Fit92] considera dois tipos de sistemas modais n-valentes: no primeiro caso se apóia em lógicas cujos valores de verdade são organizados segundo uma estrutura de reticulados que de certa forma simula a lógica clássica. Assim, apenas uma determinada classe de lógicas pode ser tratada pelo método de Fitting – uma classe que não inclui aquelas que nos interessam nesse trabalho; a segunda classe parte para uma generalização da primeira em que as relações de acessibilidade são n-valentes, obtendo, por sua vez, uma classe que também não coincide com nossos interesses.

Devemos deixar claro que as classes que Fitting investiga acima não esgota a classe das lógicas modais n-valentes que podem ser estendidas com operadores modais. Morikawa, em [Mor89], investiga uma classe bastante geral de lógicas modais com bases trivalentes. Contudo, Morikawa se restringe à extensões modais dos sistemas usuais **K**, **S4**, **S5**, entre outros e também não engloba todos os casos que nos interessam.

Da mesma forma que os trabalhos citados não cobrem todos os casos que teriam interesse para nosso trabalho, diversos outros são inadequados para nossos propósitos, segundo a descrição dada por Thomason em [Tho78]:

> "Several authors have proved completeness and decidability theorems for particular many-valued modal systems analogous to familiar two-valued modal systems. Schotch *et allia* [2] consider two three-valued analogues of **K**, which differ in the interpretation given to $\Box$. Morgan studies a class of many-valued analogus of **T**. Segerberg [3] examines three-valued analogues **K**, **T**, **S4**, **B** and **S5** having two $\Box$-operators, one stronger than the other. The general flavour of all this work is: given a two-valued modal system S which is canonical (the Lemmon-Scott canonical model for the system is based on a frame for the system, so in particular the system is complete), and given a many-valued truth-functional logic $\mathscr{M}_0$ of sufficient expressive power (enough connectives are definable in it), and given a reasonable way Ψ of evaluating $\Box p$ at a possible world in terms of the values of p at alternatives

possible worlds, one can find axioms and rules of inference for a system $S^{\mathscr{M}}$ analogous to S, but based on $\mathscr{M}_0$ and Ψ, and prove completeness of $S^{\mathscr{M}}$ by a canonical model construction."

Observe que estamos propondo a extensão modal de *modelos trivalentes*, diferentemente do que se faz nos trabalhos acima, os quais partem de sistemas axiomáticos conhecidos e a partir daí investigam em que condições interpretativas tais sistemas requerem uma caracterização via modelos de Kripke n-valentes. Nossos propósitos não exigem que modelos tenham, necessariamente, uma contra-parte axiomática que os caracterize. Deixamos, de toda forma, essa questão de caracterizar axiomaticamente tais sistemas (dados, aqui, como uma relação de conseqüência semântica) como um problema aberto.

Antes de darmos continuidade à seção devemos fazer alguns esclarecimentos quanto a notação. Nesta seção denotamos por $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ os sistemas catódicos estendidos com $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ (i.e., as classes $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$), e por $\mathcal{L}$ os sistemas paraconsistentes que serviram de base para se obter $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$, isto é, os sistemas **PI**, **mbC**, **bC** e **Ci**. Dado que $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ são caracterizados por dois tipos de semânticas (uma por meio das bi-valorações e a outra por meio das traduções possíveis), usando o mesmo princípio notacional usado para nomear os sistemas, nomeamos os modelos relacionais obtidos respectivamente a partir das bi-valorações e a partir das valorações trivalentes, da seguinte forma: $\mathfrak{M}_{\mathtt{Biv}}$ e $\mathfrak{M}_{\mathtt{Triv}}$. Quando quisermos ser mais específicos, usamos a notação como os índices k, l, m, n para indicar que o modelo refere-se ao sistema estendido com $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, da seguinte forma: $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Biv}}$ e $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$.

No Capítulo 3 caracterizamos os sistemas catódicos $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ por meio de modelos de Kripke munidos com $\mathcal{L}$-valorações bivalentes, e dessa forma permitimos lidar com as contradições toleradas em $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$. No entanto tais semânticas não cumprem, como discutimos na seção anterior, uma das exigências de Jaśkowski para semânticas que se propõem a interpretar contradições. Como dissemos, as semânticas modais de traduções possíveis procuram preencher essa lacuna.

Basicamente, vamos nos concentrar em estabelecer resultados de representabilidade entre as extensões modais das classes de modelos $\mathfrak{M}_{\mathtt{Biv}}$ e $\mathfrak{M}_{\mathtt{Triv}}$.

Depois de demonstrar o Lema da Representabilidade para $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ (denotado, na Figura 4.2, por Repres.), a Completude em relação a $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Biv}}$ (denotada, na Figura 4.2, por Cpt) e a Corretude em relação a $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ (denotada, na Figura 4.2, por Crt), podemos caracterizar $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ com relação às classes de modelos $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ (completude) e $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Biv}}$ (corretude), como esquematizamos abaixo.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{L}^{k,l,m,n} \arrow[dl, "Crt"'] \arrow[dr, dotted, bend left, "Crt"] & \\
\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}} \arrow[ur, dotted, bend left, "Cpt"] & & \mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Biv}} \arrow[ul, "Cpt"'] \arrow[ll, Rightarrow, "Repres."']
\end{tikzcd}$$

Fig. 4.2: Caracterização de $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$

Primeiramente estendemos a Σ-álgebra $\mathscr{A}$ com os operadores modais $\boxdot$ e $\Diamonddot$, e obtemos a $\Sigma_{\Box,\Diamond}$-álgebra $\mathscr{A}' = \langle\{T,t,F\}, \sqsupset, \sqcap, \sqcup, \neg_1, \neg_2, \neg_3, \circ_1, \circ_2, \circ_3, \boxdot, \Diamonddot\rangle$, de mesmo tipo de similaridade da assinatura $\Sigma_{\Box,\Diamond}$ de $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$.

A interpretação dos operadores modais $\boxdot$ e $\Diamonddot$ é dada como:

$$\overline{v}(\boxdot\alpha, w) = \begin{cases} t & \text{se } \overline{v}(\alpha, w') \in \{T, t\}, \text{ para todo } w' \in W \text{ tal que } wRw'; \\ F & \text{se } \overline{v}(\alpha, w') = F, \text{ para algum } w' \in W \text{ tal que } wRw'. \end{cases}$$

$$\overline{v}(\Diamonddot\alpha, w) = \begin{cases} t & \text{se } \overline{v}(\alpha, w') \in \{T, t\}, \text{ para algum } w' \in W \text{ tal que } wRw'; \\ F & \text{se } \overline{v}(\alpha, w') = F, \text{ para todo } w' \in W \text{ tal que } wRw'. \end{cases}$$

Observe que o valor verdade T fica absorvido pelas modalidades $\boxdot$ e $\Diamonddot$. Isso é coerente com as tabelas trivalentes dos conectivos $\sqsupset$, $\sqcap$ e $\sqcup$ que igualmente absorvem o valor-verdade T (veja Tabela 4.1.2). Note que, para esses casos, os conectivos têm comportamento clássico com relação à valoração t.

Para construir a classe dos modelos de Kripke trivalentes $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ (candidato a caracterizar $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ através de uma semântica modal de traduções possíveis) procedemos como a seguir. Considere os modelos trivalentes determinados pelas matrizes $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$, adequados a $\mathcal{L}$, e a classe $\mathcal{F}^{k,l,m,n}$ dos enquadramentos $\mathfrak{F}^{k,l,m,n} = \langle W, R\rangle$ para $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ (veja página 24), a partir dos quais os modelos de Kripke bivalentes $\mathfrak{M}^{k,l,m,n}_{\mathtt{Biv}}$ foram construídos. A classe dos modelos $\mathfrak{M}^{k,l,m,n}_{\mathtt{Triv}}$ é obtida estendendo-se cada enquadramento $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$ com valorações trivalentes dadas pelas matrizes $\mathscr{M}_{\mathcal{L}}$, juntamente com as cláusulas de valoração para $\boxdot$ e $\diamonddot$. Formalmente, a definição é a seguinte:

Definição 4.2.1. *Um modelo relacional trivalente $\mathfrak{M}_{\mathtt{Triv}}$ é um par $\langle \mathfrak{F}, \overline{v}\rangle$, onde $\mathfrak{F}$ é um enquadramento e $\overline{v} : Var \times W \longrightarrow \{T, t, F\}$ é a valoração trivalente determinada por $\mathscr{M}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

(*i*) $\overline{v}(p, w) \in \{T, t, F\}$, *para* $p \in Var$;

(*ii*) $\overline{v}(\alpha \bowtie \beta, w) = \overline{v}(\alpha, w) \bowtie \overline{v}(\beta, w)$, *para* $\bowtie \in \{\sqsupset, \sqcap, \sqcup\}$;

(*iii*) $\overline{v}(\neg_i \alpha, w) = \neg_i \overline{v}(\alpha, w)$ *para* $1 \leq i \leq 3$;

(*iv*) $\overline{v}(\circ_i \alpha, w) = \circ_i \overline{v}(\alpha, w)$ *para* $1 \leq i \leq 3$;

(*v*) $\overline{v}(\boxdot \alpha, w) = \begin{cases} t & \textit{se } \overline{v}(\alpha, w') \in \{T, t\}, \textit{ para todo } w' \in W \textit{ tal que } wRw' \\ F & \textit{se } \overline{v}(\alpha, w') = F, \textit{ para algum } w' \in W \textit{ tal que } wRw' \end{cases}$

(*vi*) $\overline{v}(\diamonddot \alpha, w) = \begin{cases} t & \textit{se } \overline{v}(\alpha, w') = \{T, t\}, \textit{ para algum } w' \in W \textit{ tal que } wRw'; \\ F & \textit{se } \overline{v}(\alpha, w') = F, \textit{ para todo } w' \in W \textit{ tal que } wRw' \end{cases}$

Na tabela abaixo elencamos as cláusulas satisfeitas pela valoração $\overline{v}$ de cada modelo relacional trivalente específico $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ em $\mathfrak{M}_{\mathtt{Triv}}$ relativo ao sistema catódico $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$.

Tabela 4.2.2. *Modelos de Kripke trivalentes para* $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$.

$\mathcal{L}^{k,l,m,n}$	Modelo de Kripke trivalente $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$
$\boldsymbol{PI}^{k,l,m,n}$	(i), (ii), $\overline{v}(\neg_1\alpha, w)$, $\overline{v}(\neg_2\alpha, w)$, (v) e (vi)
$\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$	(i), (ii), $\overline{v}(\neg_1\alpha, w)$, $\overline{v}(\neg_2\alpha, w)$, $\overline{v}(\circ_2\alpha, w)$, $\overline{v}(\circ_3\alpha, w)$, (v) e (vi)
$\boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$	(i), (ii), $\overline{v}(\neg_1\alpha, w)$, $\overline{v}(\neg_3\alpha, w)$, $\overline{v}(\circ_2\alpha, w)$, $\overline{v}(\circ_3\alpha, w)$, (v) e (vi)
$\boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$	(i), (ii), $\overline{v}(\neg_1\alpha, w)$, $\overline{v}(\neg_3\alpha, w)$, $\overline{v}(\circ_1\alpha, w)$, (v) e (vi)

Dizemos que uma fómula α é *satisfeita* pelo modelo relacional trivalente $\mathfrak{M}_{\mathtt{Triv}}$, se existe um $w \in W$ tal que $\overline{v}(\alpha, w) \in \{T, t\}$. Dizemos que uma fórmula é $\mathfrak{M}_{\mathtt{Triv}}$-*válida* se $\overline{v}(\alpha, w) \in \{T, t\}$ para todo $w \in W$ (notação: $\mathfrak{M}_{\mathtt{Triv}} \vDash \alpha$). Uma fórmula α é *válida* no enquadramento $\mathfrak{F}$ se α é válida em todo modelo $\mathfrak{M}_{\mathtt{Triv}}$ baseado em $\mathfrak{F}$ (notação: $\mathfrak{F} \vDash \alpha$).

Definição 4.2.3. *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *um conjunto de fórmulas de* $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$. *Dizemos que* α *é* conseqüência semântica *de* Γ *com respeito à classe de enquadramentos* $\mathcal{F}^{k,l,m,n}$ *se:*

$$\mathfrak{F}^{k,l,m,n} \vDash \Gamma \textit{ implica } \mathfrak{F}^{k,l,m,n} \vDash \alpha$$

para cada $\mathfrak{F}^{k,l,m,n} \in \mathcal{F}$, *onde* $\mathfrak{F}^{k,l,m,n} \vDash \Gamma$ *significa que* $\mathfrak{F}^{k,l,m,n} \vDash \gamma$ *para todo* $\gamma \in \Gamma$. *Quando isso acontece, escrevemos* $\Gamma \vDash_{\mathcal{F}^{k,l,m,n}} \alpha$.

Resta expandir as cláusulas das traduções dadas na Tabela 4.1.3 para os operadores modais. Seja $\mathtt{Tr}$' a classe das traduções de $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ em $\mathscr{A}'$, obtida a partir de $\mathtt{Tr}$, pelo acréscimo das seguintes cláusulas:

$(Tr.10)$ $\quad \mathtt{t}(\Box\alpha) = \boxdot\mathtt{t}(\alpha)$

$(Tr.11)$ $\quad \mathtt{t}(\Diamond\alpha) = \diamonddot\mathtt{t}(\alpha)$

Note que para as classes $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ não precisamos adicionar (Tr.11) dado $\Diamond$ pode ser obtido a partir de $\Box$ e $\sim$, como mostramos no Lema 3.2.2. Já na classe bi-modal $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$ essa cláusula é essencial. A mesma observação pode ser feita com relação à cláusula (vi) presente nos modelos de Kripke trivalentes $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ dados na Tabela 4.2.2.

Estamos agora em condições de definir o mais importante conceito do capítulo: a noção de semântica modal de traduções possíveis para a classe de sistemas $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$.

Definição 4.2.4. *Uma estrutura modal de traduções possíveis para o sistema catódico* $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ *é uma terna* $\mathtt{MTP} = \langle \mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}, \mathtt{Tr}', \mathfrak{F}^{k,l,m,n} \rangle$ *tal que:*
(i) $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ *é um modelo relacional trivalente no sentido da Tabela 4.2.2;*
(ii) $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$ *é um enquadramento para* $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$*;*
(iii) $\mathtt{Tr}$*' é a extensão modal de* $\mathtt{Tr}$*, como acima descrita*
tal que $\langle \mathscr{M}_{\mathcal{L}}, \mathtt{Tr} \rangle$ *é uma estrutura* $\mathtt{TP}$ *de traduções possíveis para* $\mathcal{L}$.

A relação de conseqüência na estrutura $\mathtt{MTP}$ apóia-se no conceito de conseqüência semântica na classe de enquadramentos, dada na Definição 4.2.3.

Definição 4.2.5. *Sejam* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *um conjunto de* $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$*-fórmulas e* $\vDash_{\mathfrak{F}^{k,l,m,n}}$ *a relação de conseqüência em* $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$. *A relação de conseqüência em* $\mathtt{MTP}$, *denotada por* $\vDash_{\mathtt{MTP}}$, *é definida como:*

$$\Gamma \vDash_{\mathtt{MTP}} \alpha \quad sse \quad \mathtt{t}(\Gamma) \vDash_{\mathfrak{F}^{k,l,m,n}} \mathtt{t}(\alpha)$$

para toda tradução $\mathtt{t} \in \mathtt{Tr}'$.

Faremos agora um exemplo concreto que ilustra cada passo da construção do modelo relacional trivalente e a interpretação através da semântica modal de traduções possíveis.

Exemplo 4.2.6. *Considere o sistema catódico obtido por estender* ***Ci*** *com os seguintes axiomas e regras:*

($\boldsymbol{K}$) $\Box(\alpha \supset \beta) \supset (\Box\alpha \supset \Box\beta)$

($\boldsymbol{D}$) $\Box\alpha \supset \Diamond\beta$

($\boldsymbol{Nec}$) $\vdash \alpha$ *implica* $\vdash \Box\alpha$

Observe que estamos falando do sistema $\boldsymbol{Ci}^{0,1,0,1}$. *Para simplicidade de notação, denotamos esse sistema por* $\boldsymbol{Ci}^D$. *Como vimos no Capítulo 3 esse sistema é correto e completo de acordo com o Teorema 3.2.7 e o Corolário 3.2.14. A completude, nesse caso, foi obtida com relação à classe dos enquadramentos seriais, dado que o axioma (**D**) requer que a relação de acessibilidade entre os mundos seja serial para que se tenha corretude (veja página 23). Dessa forma temos que* $\boldsymbol{Ci}^D$ *tem uma completude com relação à classe dos enquadramentos seriais. Vamos denotá-la por* $\mathcal{F}^{serial}$.

Para obter uma caracterização para $\boldsymbol{Ci}^D$ *por meio de uma semântica modal de traduções possíveis procedemos da seguinte maneira:*

1. *Temos a disposição uma semântica matricial trivalente* $\mathscr{M}_{Ci}$, *capaz de prover uma completude via semântica de traduções possíveis para o sistema* $\boldsymbol{Ci}$.

2. *A partir da classe de enquadramentos* $\mathcal{F}^{serial}$ *e da semântica matricial trivalente* $\mathscr{M}_{Ci}$, *construímos os* modelos de Kripke trivalentes *e os denotamos por* $\mathfrak{M}^{serial}_{\mathtt{Triv}}$.

3. *A classe das traduções* $\mathtt{Tr}_{Ci^D} = \mathtt{Tr}_{Ci} \cup \{\mathtt{t}(\Box\alpha) = \boxdot\mathtt{t}(\alpha)\}$.

Dessa forma, a semântica modal de traduções possíveis *para* $\boldsymbol{Ci}^D$ *será determinada pela terna* $\langle \mathfrak{M}^{serial}_{\mathtt{Triv}}, \mathtt{Tr}_{Ci^D}, \mathcal{F}^{serial} \rangle$ *que consiste na estrutura modal de traduções possíveis para* $\boldsymbol{Ci}^D$. *O próximo passo é mostrar que* $\mathfrak{M}^{serial}_{\mathtt{Triv}}$ *pode ser representado pelo modelo* $\mathfrak{M}^{serial}_{\mathtt{Biv}}$ *através de uma tradução* $\mathtt{t}$ *e uma valoração trivalente* $\overline{v}$. *Com isso obtemos a caracterização de* $\boldsymbol{Ci}^D$, *esquematizada abaixo, desde que tenhamos previamente obtido o Lema de Representabilidade e a Corretude para* $\boldsymbol{Ci}^D$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{Ci}^D \arrow[dl, "Crt"'] \arrow[dr, dotted, bend left, "Crt"] & \\
\mathfrak{M}^{serial}_{\mathtt{Triv}} \arrow[ur, dotted, bend left, "Cpt"] & & \mathfrak{M}^{serial}_{\mathtt{Biv}} \arrow[ul, "Cpt"'] \arrow[ll, Rightarrow, "Repres"']
\end{tikzcd}$$

Fig. 4.3: Caracterização de $\mathbf{Ci}^D$

Voltamos agora ao caso geral. Primeiramente mostramos um resultado geral de corretude para $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ com relação aos modelos de Kripke trivalentes $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ por intermédio das traduções.

Teorema 4.2.7. *(Corrtetude)*
Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *um conjunto de* $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$*-fórmulas e* $\mathcal{F}^{k,l,m,n}$ *a classe de enquadramentos para* $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$*. Então:*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}^{k,l,m,n}} \alpha \ \textit{implica} \ \ \Gamma \vDash_{\mathtt{MTP}} \alpha$$

Demonstração. Devemos mostrar que a tradução $\mathtt{t}$ aplicada aos axiomas de $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ são validados pelo modelo de Kripke trivalente $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$. A parte não-modal é análoga ao Teorema 4.1.8, dado que as valorações trivalentes para esses casos independem da relação de acessibilidade entre os mundos. Resta mostrar que as traduções de (**K**) e $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ são válidas em $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ e a regra (**Nec**) preserva a validade.

- Axioma (**K**)
  Pelas cláusulas (Tr.1), (Tr.2) e (Tr.10) temos que:

  $$\mathtt{t}(\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)) = \boxdot(p \sqsupset q) \sqsupset (\boxdot p \sqsupset \boxdot q).$$

  Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ baseado sobre $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$ tal que $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}} \nvDash \boxdot(p \sqsupset q) \sqsupset (\boxdot p \sqsupset \boxdot q)$. Pela definição de validade num modelo trivalente de Kripke, temos que existe $w \in W$

tal que $\overline{v}(\boxdot(p \sqsupset q) \sqsupset (\boxdot p \sqsupset \boxdot q), w) = F$ daí, pela Tabela 4.1.2, temos: $\overline{v}(\boxdot(p \sqsupset q), w) \in \{T, t\}$, $\overline{v}(\boxdot p, w) \in \{T, t\}$, e $\overline{v}(\boxdot q, w) = F$.

Aplicando a cláusula (v) da Definição 4.2.1 temos:

1. $\overline{v}(\boxdot p, w) \in \{T, t\}$ sse $\overline{v}(p, w') \in \{T, t\}$ *para todo* $w' \in W$ tal que wRw';
2. $\overline{v}(\boxdot q, w) = F$ sse $\overline{v}(q, w'') = F$ *para algum* $w'' \in W$ tal que wRw'';
3. $\overline{v}(\boxdot(p \sqsupset q), w) \in \{T, t\}$ sse $\overline{v}(p \sqsupset q, w''') = t$ *para todo* $w''' \in W$ tal que wRw''', sse *para todo* $w''' \in W$ tal que wRw''', $\overline{v}(p, w''') = F$ (absurdo com 1) ou $\overline{v}(q, w''') \in \{T, t\}$ (absurdo com 2).

Portanto, $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\texttt{Triv}} \vDash \boxdot(p \sqsupset q) \sqsupset (\boxdot p \sqsupset \boxdot q)$ para todo $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\texttt{Triv}}$ baseado em $\mathfrak{F}^{k,l,m,n} \in \mathcal{F}$.

- Axioma esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$

Pelas cláusulas (Tr.1), (Tr.2), (Tr.10) e (Tr.11) temos que:

$$\mathtt{t}(\Diamond^k \Box^l \alpha \supset \Box^m \Diamond^n \alpha) = \diamondsuit^k \boxdot^l \alpha \sqsupset \boxdot^m \diamondsuit^n \alpha.$$

Suponha, por absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\texttt{Triv}}$ baseado sobre $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$ tal que $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\texttt{Triv}} \nvDash \diamondsuit^k \boxdot^l \alpha \sqsupset \boxdot^m \diamondsuit^n \alpha$. Então, deve existir um mundo $w_1 \in W$ tal que:

(a) $\overline{v}(\diamondsuit^k \boxdot^l \alpha, w_1) \in \{T, t\}$

(b) $\overline{v}(\boxdot^m \diamondsuit^n \alpha, w_1) = F$

A partir de (a) e da Definição 4.2.1 (vi), segue que existe um mundo $w_2 \in W$ tal que $w_1 R^k w_2$ e $\overline{v}(\boxdot^l \alpha, w_2) \in \{T, t\}$, e disso segue que $\overline{v}(\alpha) \in \{T, t\}$ em *todo* mundo acessível a partir de w_2, em l-passos.

A partir de (b) e da Definição 4.2.1 (v), segue que existe um mundo w_3 tal que $w_1 R^m w_3$ e $\overline{v}(\diamondsuit^n \alpha, w_3) = F$, e conseqüentemente $\overline{v}(\alpha) = F$ em *algum* mundo acessível a partir de w_3, em n-passos.

Dado que $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$ é um enquadramento para $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ então a relação R do modelo trivalente $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\texttt{Triv}}$ construído a partir de $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$ satisfaz a propriedade $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$. Dado que $w_1 R^k w_2$ e $w_1 R^m w_3$ então existe um mundo w_4 tal que $w_2 R^l w_4$ e $w_3 R^n w_4$, daí, a partir de (a) e (b) segue respectivamente que $\overline{v}(\alpha, w_4) \in \{T, t\}$ e que $\overline{v}(\alpha, w_4) = F$. Contradição.

- Regra (**Nec**)

  Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$, baseado em algum $\mathfrak{F}^{k,l,m,n} \in \mathcal{F}$, tal que $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}, w \nvDash \boxdot\alpha$ para algum $w \in W$. Isso significa que $\overline{v}(\boxdot\alpha, w) = F$. Pela Definição 4.2.1 (v), temos que existe $w' \in W$ tal que wRw' e $\overline{v}(\alpha, w') = F$. Logo, $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}, w' \nvDash \alpha$ e daí $\mathfrak{F}^{k,l,m,n} \nvDash \alpha$, para algum $\mathfrak{F}^{k,l,m,n} \in \mathcal{F}$. Absurdo.

Logo, para toda $\mathtt{t} \in \mathtt{Tr'}$, temos que $\mathtt{t}(\Gamma) \vDash_{\mathfrak{M}} \mathtt{t}(\alpha)$, para todo $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ baseado em $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$. Portanto, pela Definição 4.2.5, segue que $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}^{k,l,m,n}} \alpha$ implica $\Gamma \vDash_{\mathtt{MTP}} \alpha$. □

Lema 4.2.8. *($\boldsymbol{PI}^{k,l,m,n}$-Representabilidade)*
Dada uma $\boldsymbol{PI}$-valoração v em $\mathfrak{M}^{PI^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Biv}}$ e um enquadramento $\mathfrak{F}^{k,l,m,n} = \langle W, R\rangle$ para $\boldsymbol{PI}^{k,l,m,n}$ é possível definir uma tradução $\mathtt{t}$ em $\mathtt{Tr'}$, uma valoração $\overline{v}$ e um modelo de Kripke trivalente $\mathfrak{M}^{PI^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ tal que, para toda fórmula α em $\boldsymbol{PI}^{k,l,m,n}$ e todo $w \in W$:

(*i*) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = t$ *sse* $v(\alpha, w) = 1$

(*ii*) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = F$ *sse* $v(\alpha, w) = 0$

Demonstração. Considere $\overline{v} : Var \times W \longrightarrow \{T, t, F\}$ definida como:

$$(Val) \quad \overline{v}(p, w) = \begin{cases} F & \text{se } v(p, w) = 0 \\ t & \text{se } v(p, w) = 1 \end{cases}$$

Claramente $\overline{v}$ pode ser estendida homomorficamente para a $\Sigma_{\square,\Diamond}$-álgebra $\mathscr{A}'$. Defina a tradução da seguinte forma:

$(T1)$ $\mathtt{t}(p) = p$

$(T2)$ $\mathtt{t}(\alpha \supset \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqsupset \mathtt{t}(\beta)$

$(T3)$ $\mathtt{t}(\alpha \wedge \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcap \mathtt{t}(\beta)$

$(T4)$ $\mathtt{t}(\alpha \vee \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcup \mathtt{t}(\beta)$

$$(T5) \quad \mathtt{t}(\neg\alpha) = \begin{cases} \neg_1 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\neg\alpha, w) = 0 \\ \neg_2 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\neg\alpha, w) = 1 \end{cases}$$

$(T6)$ $\mathtt{t}(\square\alpha) = \boxdot\mathtt{t}(\alpha)$

$(T7)$ $\mathtt{t}(\Diamond\alpha) = \diamonddot\mathtt{t}(\alpha)$

Note que as escolhas são de fato permitidas pelas restrições (Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4), (Tr.5), (Tr.10) e (Tr.11) que caracterizam as traduções admissíveis de $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$. O modelo $\mathfrak{M}^{PI^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ é obtido estendendo $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$ com a valoração $\overline{v}$ definida acima. O enunciado é provado por indução na medida de complexidade ℓ.

1. O caso atômico segue de (Val) e (T1).

2. Considere que as hipóteses de indução são válidas para toda fórmula α com $\ell(\alpha) \leq k$, para um dado k:

   (HIa) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = t$ sse $v(\alpha, w) = 1$
   (HIb) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = F$ sse $v(\alpha, w) = 0$

3. Considere $\alpha = \beta \supset \gamma$:

   - Parte A: $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta \supset \gamma), w) = t$ sse $v(\beta \supset \gamma, w) = 1$.
     ($\Rightarrow$) Se $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta \supset \gamma), w) = t$, por (T2), temos que $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta) \sqsupset \mathtt{t}(\gamma), w) = t$. Pela Definição 4.2.1 (ii), segue que $[\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) \sqsupset \overline{v}(\mathtt{t}(\gamma), w)] = t$. Pela tabela de $\sqsupset$ temos: $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = F$ ou $\overline{v}(\mathtt{t}(\gamma), w) \in \{T, t\}$. Pelas hipóteses (HIa) e (HIb), segue que $v(\beta, w) = 0$ ou $v(\gamma, w) = 1$ daí, $v(\beta \supset \gamma, w) = 1$.
     ($\Leftarrow$) Análogo.
   - Parte B: $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = F$ sse $v(\alpha, w) = 0$.
     ($\Rightarrow$) Se $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta \supset \gamma), w) = F$, por (T2), segue $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta) \sqsupset \mathtt{t}(\gamma), w) = F$. Pela Definição 4.2.1 (ii), segue que $[\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) \sqsupset \overline{v}(\mathtt{t}(\gamma), w)] = F$. Pela tabela de $\sqsupset$ temos: $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) \in \{T, t\}$ e $\overline{v}(\mathtt{t}(\gamma), w) = F$. Pelas hipóteses (HIa) e (HIb), segue que $v(\beta, w) = 1$ ou $v(\gamma, w) = 0$ daí, $v(\beta \supset \gamma, w) = 0$.
     ($\Leftarrow$) Análogo.

4. Para os casos em que $\alpha = \beta \wedge \gamma$ e $\alpha = \beta \vee \gamma$ é análogo ao caso anterior.

5. Considere $\alpha = \neg\beta$:

   - Parte A: $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = t$ sse $v(\neg\beta, w) = 1$.
     ($\Rightarrow$) Suponha $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = t$. Por (T5), temos que $\overline{v}(\neg_1 \mathtt{t}(\beta), w) = t$

ou $\overline{v}(\neg_2 \mathtt{t}(\beta), w) = t$. Pelas tabelas de $\neg_1$ e $\neg_2$, vê-se que estamos falando de $\overline{v}(\neg_2 \mathtt{t}(\beta), w) = t$. Nesse caso, por (T5), $v(\neg\beta, w) = 1$.

($\Leftarrow$) Suponha $v(\neg\beta, w) = 1$. Por (T5), temos que $\mathtt{t}(\neg\beta) = \neg_2 \mathtt{t}(\beta)$ daí, $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = \overline{v}(\neg_2 \mathtt{t}(\beta), w)$. Pela Definição 4.2.1 (iii), temos que $\overline{v}(\neg_2 \mathtt{t}(\beta), w) = \neg_2 \overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w)$. Daí, $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = \neg_2 \overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w)$. Pelas hipóteses (HIa) e (Hib) temos duas possibilidades de valoração para $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w)$:

- $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = t$. Pela tabela do $\neg_2$, segue que $\neg_2 \overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = t$.
- $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = F$. Pela tabela do $\neg_2$, segue que $\neg_2 \overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = t$.

Portanto, $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = t$.

- Parte B: $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = F$ sse $v(\neg\beta, w) = 0$.
  ($\Rightarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, $v(\neg\beta, w) = 1$. Por (T5), temos que $\mathtt{t}(\neg\beta) = \neg_2 \mathtt{t}(\beta)$. Novamente, pela Definição 4.2.1 (iii), segue que $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = \neg_2 \overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w)$. Portanto, tanto no caso em que $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = t$ ou $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = F$ segue que $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = t$. Absurdo.

  ($\Leftarrow$) Suponha $v(\neg\beta, w) = 0$. Pela **PI**-valoração segue que $v(\beta, w) = 1$ daí, pela hipótese de indução (HIa), $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = t$. Pela tabela do $\neg_1$ segue que $\neg_1 \overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = F$ daí, pela Definição 4.2.1 (iii), temos $\overline{v}(\neg_1 \mathtt{t}(\beta), w) = F$. Portanto, por (T5), segue que $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = F$.

6. Considere $\alpha = \Box\beta$:

   - Parte A: $\overline{v}(\mathtt{t}(\Box\beta), w) = t$ sse $v(\Box\beta, w) = 1$.
     $\overline{v}(\mathtt{t}(\Box\beta), w) = t$ see$_{(T6)}$ $\overline{v}(\boxdot \mathtt{t}(\beta), w) = t$ sse$_{\text{Def. 4.2.1 (v)}}$ $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w') = t$ para todo $w' \in W$ tal que wRw' sse$_{(HIb)}$ $v(\beta, w) = 1$ para todo $w' \in W$ tal que wRw' sse $v(\Box\beta, w) = 1$.
   - Parte B: $\overline{v}(\mathtt{t}(\Box\beta), w) = F$ sse $v(\Box\beta, w) = 0$.
     $\overline{v}(\mathtt{t}(\Box\beta), w) = F$ see$_{(T6)}$ $\overline{v}(\boxdot \mathtt{t}(\beta), w) = F$ sse$_{\text{Def. 4.2.1}}$ $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w') = F$ para algum $w' \in W$ tal que wRw' sse$_{(HIb)}$ $v(\beta, w) = 0$ para algum $w' \in W$ tal que wRw' sse $v(\Box\beta, w) = 0$.

7. O caso em que $\alpha = \Diamond\beta$ é análogo ao anterior.

$\square$

Lema 4.2.9. *($\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$-Representabilidade)*
Dada uma $\boldsymbol{mbC}$-valoração v em $\mathfrak{M}_{\mathtt{Biv}}^{mbC^{k,l,m,n}}$ e um enquadramento $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$ para $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$ é possível encontrar uma tradução $\mathtt{t}$ em $\mathtt{Tr'}$, uma valoração $\overline{v}$ e um modelo de Kripke trivalente $\mathfrak{M}_{\mathtt{Triv}}^{mbC^{k,l,m,n}}$ tal que toda fórmula α em $\boldsymbol{mbC}^{k,l,m,n}$ e todo $w \in W$:

(i) $\quad \overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = T \quad$ *implica* $\quad v(\neg\alpha, w) = 0$

(ii) $\quad \overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = F \quad$ *sse* $\quad v(\alpha, w) = 0$

Demonstração. Considere $\overline{v} : Var \times W \longrightarrow \{T, t, F\}$ definida como:

$$(Val) \quad \overline{v}(p, w) = \begin{cases} F & \text{se } v(p, w) = 0 \\ T & \text{se } v(\neg p, w) = 0 \\ t & \text{se } v(p, w) = 1 \end{cases}$$

Claramente $\overline{v}$ pode ser estendida homomorficamente para a $\Sigma_{\square,\Diamond}$-álgebra $\mathscr{A}'$. Defina a tradução da seguinte forma:

$(T1) \quad \mathtt{t}(p) = p$

$(T2) \quad \mathtt{t}(\alpha \supset \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqsupset \mathtt{t}(\beta)$

$(T3) \quad \mathtt{t}(\alpha \wedge \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcap \mathtt{t}(\beta)$

$(T4) \quad \mathtt{t}(\alpha \vee \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcup \mathtt{t}(\beta)$

$$(T5) \quad \mathtt{t}(\neg\alpha) = \begin{cases} \neg_1 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\neg\alpha) = 0 \text{ ou } v(\alpha) = 0 = v(\neg\neg\alpha) \\ \neg_2 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\neg\alpha) = 1 \end{cases}$$

$$(T6) \quad \mathtt{t}(\circ\alpha) = \begin{cases} \circ_3 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 0 \\ \circ_2 \mathtt{t}(\neg\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 1 \text{ e } v(\neg\alpha) = 0 \\ \circ_2 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 1 \end{cases}$$

$(T7) \quad \mathtt{t}(\square\alpha) = \boxdot \mathtt{t}(\alpha)$

$(T8) \quad \mathtt{t}(\Diamond\alpha) = \Diamond\!\!\cdot\, \mathtt{t}(\alpha)$

Note que as escolhas são de fato permitidas pelas restrições (Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4), (Tr.5), (Tr.7), (Tr.10) e (Tr.11) que caracterizam as traduções admissíveis de **mbC** ^{k,l,m,n}. O modelo $\mathfrak{M}_{\mathtt{Triv}}^{mbC^{k,l,m,n}}$ é obtido estendendo $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$

com a valoração $\overline{v}$ definida acima. O enunciado é provado por indução na medida de complexidade ℓ.

1. O caso atômico segue de (Val) e (T1).

2. Considere que as hipóteses de indução são válidas para toda fórmula α com $\ell(\alpha) \leq k$, para um dado k:

$$\begin{array}{llcl} \text{(HIa)} & \overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = T & \text{implica} & v(\neg\alpha, w) = 0 \\ \text{(HIb)} & \overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = F & \text{sse} & v(\alpha, w) = 0 \end{array}$$

3. Considere $\alpha = \beta \supset \gamma$

   - Parte A: $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta \supset \gamma), w) = T$ implica $v(\neg(\beta \supset \gamma), w) = 0$.
   Dado que $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta \supset \gamma), w) = T$ nunca acontece, o resultado segue por vacuidade.
   - Parte B: $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta \supset \gamma), w) = F$ sse $v(\beta \supset \gamma, w) = 0$
   ($\Rightarrow$) Se $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta \supset \gamma), w) = F$, por (T2), temos $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta) \sqsupset \mathtt{t}(\gamma), w) = F$ daí, pela Definição 4.2.1 (ii), segue que $[\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) \sqsupset \overline{v}(\mathtt{t}(\gamma), w)] = F$. Pela tabela do $\sqsupset$, temos que $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) \in \{T, t\}$ e $\overline{v}(\mathtt{t}(\gamma), w) = F$ daí, pelas hipóteses de indução (HIa) e (HIb), segue que $v(\neg\beta, w) = 0$ e $v(\gamma, w) = 0$. Pela valoração de **PI** segue que $v(\beta, w) = 1$ e $v(\gamma, w) = 0$. Portanto, $v(\beta \supset \gamma, w) = 0$.
   ($\Leftarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta \supset \gamma), w) \in \{T, t\}$. Por (T2), temos $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta) \sqsupset \mathtt{t}(\gamma), w) \in \{T, t\}$ daí, pela Definição 4.2.1 (ii), segue que $[\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) \sqsupset \overline{v}(\mathtt{t}(\gamma), w)] \in \{T, t\}$. Pela tabela do $\sqsupset$, temos que $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = F$ ou $\overline{v}(\mathtt{t}(\gamma), w) \in \{T, t\}$ daí, pelas hipóteses de indução (HIa) e (HIb), segue que $v(\beta, w) = 0$ ou $v(\neg\gamma, w) = 0$. Pela valoração de **PI** segue que $v(\beta, w) = 0$ ou $v(\gamma, w) = 1$. Portanto, $v(\beta \supset \gamma, w) = 1$. Absurdo.

4. Para os casos em que $\alpha = \beta \wedge \gamma$ e $\alpha = \beta \vee \gamma$ é análogo ao ítem anterior.

5. Considere $\alpha = \neg\beta$

   - Parte A: $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = T$ implica $v(\neg(\neg\beta), w) = 0$
   Se $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = T$ então, por (T5), segue que $\overline{v}(\neg_1 \mathtt{t}(\beta), w) = T$ ou

$\overline{v}(\neg_2\mathtt{t}(\beta), w) = T$. Pelas tabelas de $\neg_1$ e $\neg_2$ vê-se que estamos falando de $\overline{v}(\neg_1\mathtt{t}(\beta), w) = T$, nesse caso, por (T5), $v(\neg\neg\beta, w) = 0$.

- Parte B: $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = F$ sse $v(\neg\beta, w) = 0$
  ($\Rightarrow$) Se $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = F$ então, por (T2), temos $\overline{v}(\neg_1\mathtt{t}(\beta), w) = F$ ou $\overline{v}(\neg_2\mathtt{t}(\beta), w) = F$. Em ambos os casos, olhando para as tabelas $\neg_1$ e $\neg_2$ e pelas hipóteses de indução (HIa) e (HIb), segue que $v(\neg\beta, w) = 0$.
  ($\Leftarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) \in \{T, t\}$. Por (T5), temos $\overline{v}(\neg_1\mathtt{t}(\beta), w) \in \{T, t\}$ ou $\overline{v}(\neg_2\mathtt{t}(\beta), w) \in \{T, t\}$. Pela Definição 4.2.1 (iii), $\neg_1\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) \in \{T, t\}$ ou $\neg_2\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) \in \{T, t\}$, daí pela tabela do $\neg_1$ e $\neg_2$, temos $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = F$ ou $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) \in \{t, F\}$. Claramente a hipótese de indução aplica-se apenas para o valor F daí, por (HIb), segue que $v(\beta, w) = 0$ daí, pela valoração de **PI**, segue que $v(\neg\beta, w) = 1$. Absurdo.

6. Considere $\alpha = \circ\beta$

- Parte A: $\overline{v}(\mathtt{t}(\circ\beta), w) = T$ implica $v(\neg(\circ\beta), w) = 0$
  Se $\overline{v}(\mathtt{t}(\circ\beta), w) = T$ então, por (T6), temos três possibilidades de tradução: $\overline{v}(\circ_3\mathtt{t}(\beta), w) = T$, $\overline{v}(\circ_2\mathtt{t}(\neg\beta), w) = T$ ou $\overline{v}(\circ_2\mathtt{t}(\beta), w) = T$. Pelas tabelas de $\circ_3$ e $\circ_2$ vê-se que é impossível obter tais valores. Neste caso o resultado segue por vacuidade.

- Parte B: $\overline{v}(\mathtt{t}(\circ\beta), w) = F$ sse $v(\circ\beta, w) = 0$
  ($\Rightarrow$) Suponha, por absurdo, $\overline{v}(\mathtt{t}(\circ\beta), w) = F$ e $v(\circ\beta, w) = 0$. Da hipótese $v(\circ\beta, w) = 0$ temos, pela **mbC**-valoração, que $v(\beta, w) = 0$ ou $v(\neg\beta, w) = 0$. Vejamos cada uma das possibilidades:

  (a) Se $v(\circ\beta, w) = 0$ então, pela hipótese de indução (HIb) temos que $\overline{v}(\mathtt{t}(\beta), w) = F$ daí, por (T6), a única possibilidade de tradução é $\mathtt{t}(\beta) = \circ_2\beta$, considerando a suposição inicial. Portanto, pela tabela de $\circ_2$, temos que $\overline{v}(\circ_2\mathtt{t}(\beta), w) = t$. Dado que $\overline{v}(\mathtt{t}(\circ\beta), w) = F$, por (T6), segue que $\overline{v}(\circ_2\mathtt{t}(\beta), w) = F$. Absurdo.

  (b) Se $v(\neg\beta, w) = 0$, como $\ell(\neg\beta) < \ell(\circ\beta)$ então, pela hipótese de

indução (HIb), segue que $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = F$. Por outro lado, considere a hipótese $\overline{v}(\mathtt{t}(\circ\beta), w) = F$. Daí, como $v(\circ\beta, w) = 1$, a única possibilidade de tradução é $\overline{v}(\circ_2\mathtt{t}(\neg\beta), w) = F$. Pela Definição 4.2.1 (v), temos $\circ_2\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = F$ daí, pela tabela do $\circ_2$, temos que $\overline{v}(\mathtt{t}(\neg\beta), w) = t$. Absurdo.

($\Leftarrow$) Se $v(\circ\alpha, w) = 0$ então, por (T6), temos que $\mathtt{t}(\circ\alpha) = \circ_3\mathtt{t}(\alpha)$ daí, $\overline{v}(\mathtt{t}(\circ\alpha), w) = \overline{v}(\circ_3\mathtt{t}(\alpha), w)$. Pela Definição 4.2.1 (v), temos $\overline{v}(\circ_3\mathtt{t}(\alpha), w) = \circ_3\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w)$. Portanto, pela tabela de $\circ_3$, segue que $\overline{v}(\mathtt{t}(\circ\alpha), w) = F$.

7. Considere $\alpha = \Box\beta$

   - Parte A: $\overline{v}(\mathtt{t}(\Box\beta), w) = T$ implica $v(\neg(\Box\beta), w) = 0$
     Se $\overline{v}(\mathtt{t}(\Box\beta), w) = T$ então, pela Definição 4.2.1 (v), $\overline{v}(\boxdot\mathtt{t}(\beta), w) = T$. Dado que tal valoração é impossível, então o resultado segue por vacuidade.
   - Parte B: $\overline{v}(\mathtt{t}(\Box\beta), w) = F$ sse $v(\Box\beta, w) = 0$
     Imediato a partir da Definição 4.2.1 (v) e hipótese (HIb).

8. Para o caso em que $\alpha = \Diamond\beta$ é análogo ao anterior.

$\Box$

Lema 4.2.10. *($\boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$-Representabilidade)*
Dada uma $\boldsymbol{bC}$-valoração v em $\mathfrak{M}^{bC^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Biv}}$ e um enquadramento $\mathfrak{F}^{k,l,m,n} = \langle W, R\rangle$ para $\boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$ é possível encontrar uma tradução $\mathtt{t}$ em $\mathtt{Tr'}$, uma valoração $\overline{v}$ e um modelo de Kripke trivalente $\mathfrak{M}^{bC^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ tal que, para toda fórmula α em $\boldsymbol{bC}^{k,l,m,n}$ e todo $w \in W$:
(*i*) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = T$ *implica* $v(\neg\alpha, w) = 0$
(*ii*) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = F$ *sse* $v(\alpha, w) = 0$

Demonstração. Considere $\overline{v} : Var \times W \longrightarrow \{T, t, F\}$ definida como:

$$(Val) \quad \overline{v}(p, w) = \begin{cases} F & \text{se } v(p, w) = 0 \\ T & \text{se } v(\neg p, w) = 0 \\ t & \text{se } v(p, w) = 1 \end{cases}$$

Claramente $\overline{v}$ pode ser estendida homomorficamente para a $\Sigma_{\Box,\Diamond}$-álgebra $\mathscr{A}'$. Defina a tradução da seguinte forma:

$(T1)$ $\mathtt{t}(p) = p$

$(T2)$ $\mathtt{t}(\alpha \supset \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqsupset \mathtt{t}(\beta)$

$(T3)$ $\mathtt{t}(\alpha \wedge \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcap \mathtt{t}(\beta)$

$(T4)$ $\mathtt{t}(\alpha \vee \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcup \mathtt{t}(\beta)$

$$(T5)\quad \mathtt{t}(\neg\alpha) = \begin{cases} \neg_3\mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\alpha) = 1 = v(\neg\alpha) \\ \neg_1\mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$(T6)\quad \mathtt{t}(\circ\alpha) = \begin{cases} \circ_3\mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 0 \\ \circ_2\mathtt{t}(\neg\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 1 \text{ e } v(\neg\alpha) = 0 \\ \circ_2\mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 1 \end{cases}$$

$(T7)$ $\mathtt{t}(\Box\alpha) = \boxdot\mathtt{t}(\alpha)$

$(T8)$ $\mathtt{t}(\Diamond\alpha) = \diamond\mathtt{t}(\alpha)$

Note que as escolhas são de fato permitidas pelas restrições (Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4), (Tr.6), (Tr.7), (Tr.10) e (Tr.11) que caracterizam as traduções admissíveis de $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$. O modelo $\mathfrak{M}^{bC^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ é obtido estendendo $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$ com a valoração $\overline{v}$ definida acima. O enunciado pode ser provado de forma rotineira por indução na medida de complexidade ℓ com o mesmo procedimento usado no Lema 4.2.8 e Lema 4.2.9. □

Lema 4.2.11. *($\boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$-Representabilidade)*
Dada uma $\boldsymbol{Ci}$-valoração v em $\mathfrak{M}^{Ci^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Biv}}$ e um enquadramento $\mathfrak{F}^{k,l,m,n} = \langle W, R\rangle$ para $\boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$ é possível definir uma tradução $\mathtt{t}$ em $\mathtt{Tr'}$, uma valoração $\overline{v}$ e um modelo de Kripke trivalente $\mathfrak{M}^{Ci^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ tal que, para toda fórmula α em $\boldsymbol{Ci}^{k,l,m,n}$ e todo $w \in W$:

(i) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = T$ *implica* $v(\neg\alpha, w) = 0$

(ii) $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = F$ *sse* $v(\alpha, w) = 0$

Demonstração. Considere $\overline{v} : Var \times W \longrightarrow \{T, t, F\}$ definida como:

$$(Val)\quad \overline{v}(p, w) = \begin{cases} F & \text{se } v(p, w) = 0 \\ T & \text{se } v(\neg p, w) = 0 \\ t & \text{se } v(p, w) = 1 \end{cases}$$

Claramente $\bar{v}$ pode ser estendida homomorficamente para a $\Sigma_{\Box,\Diamond}$-álgebra $\mathscr{A}'$. Defina a tradução da seguinte forma:

$(T1)$ $\mathtt{t}(p) = p$

$(T2)$ $\mathtt{t}(\alpha \supset \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqsupset \mathtt{t}(\beta)$

$(T3)$ $\mathtt{t}(\alpha \wedge \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcap \mathtt{t}(\beta)$

$(T4)$ $\mathtt{t}(\alpha \vee \beta) = \mathtt{t}(\alpha) \sqcup \mathtt{t}(\beta)$

$(T5)$ $\mathtt{t}(\neg\alpha) = \begin{cases} \neg_3 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\alpha) = 1 = v(\neg\alpha) \\ \neg_1 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\alpha) = 0 \end{cases}$

$(T6)$ $\mathtt{t}(\circ\alpha) = \begin{cases} \circ_1 \mathtt{t}(\neg\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 1 \\ \circ_1 \mathtt{t}(\alpha) & \text{se } v(\circ\alpha) = 0 \end{cases}$

$(T7)$ $\mathtt{t}(\Box\alpha) = \boxdot\mathtt{t}(\alpha)$

$(T8)$ $\mathtt{t}(\Diamond\alpha) = \diamond\!\!\cdot\,\mathtt{t}(\alpha)$

Note que as escolhas são de fato permitidas pelas restrições (Tr.1), (Tr.2), (Tr.3), (Tr.4), (Tr.6), (Tr.8), (Tr.9), (Tr.10) e (Tr.11) que caracterizam as traduções admissíveis de $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$. O modelo $\mathfrak{M}^{Ci^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ é obtido estendendo $\mathfrak{F}^{k,l,m,n}$ com a valoração $\bar{v}$ definida acima. Como é de se esperar, o enunciado pode ser provado por indução na medida de complexidade ℓ com o mesmo procedimento usado no Lema 4.2.8 e Lema 4.2.9. □

Pelo Lema de Representabilidade para cada uma das classes $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$, mostrado nos Lemas 4.2.8, 4.2.9, 4.2.10 e 4.2.11, podemos mostrar a completude, por meio das semânticas modais de traduções possíveis, em cada caso, como mostramos a seguir.

Corolário 4.2.12. *(Completude)*
Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *um conjunto de fórmulas de* $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$*. Então:*

$$\Gamma \vDash_{\mathtt{MTP}} \alpha \quad \textit{implica} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}^{k,l,m,n}} \alpha$$

Demonstração. Suponha que $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}^{k,l,m,n}} \alpha$; então, dado que $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ é correto e completo em relação aos modelos de Kripke bivalentes $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Biv}}$ (Corolário 3.2.14 e Seção 3.3), existe $w \in W$ e uma $\mathcal{L}$-valoração v tal que $v(\gamma, w) = 1$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v(\alpha, w) = 0$. Pelo Lema de Representabilidade específico de cada $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$ (a saber, Lemas 4.2.8, 4.2.9, 4.2.10 e 4.2.11), é possível encontrar uma tradução $\mathtt{t}$ em $\mathtt{Tr'}$ e uma valoração $\overline{v}$ em $\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}$ tal que, $\overline{v}(\mathtt{t}(\Gamma), w) \in \{T, t\}$ e $\overline{v}(\mathtt{t}(\alpha), w) = F$ daí, $\mathtt{t}(\Gamma) \nvDash_{\mathfrak{M}^{\mathcal{L}^{k,l,m,n}}_{\mathtt{Triv}}} \mathtt{t}(\alpha)$. Portanto, pela Definição 4.2.5, $\Gamma \nvDash_{\mathtt{MTP}} \alpha$. □

Com o intuito de ilustrar a explosão controlada nos sistemas catódicos considere as seguintes situações, onde w_1, w_2, w_3 e w_4 representam mundos de um enquadramento contendo as seguintes sentenças:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \{\Box\alpha, \neg\Box\alpha, \circ\Box\alpha\}\\
w_2 &= \{\Box\alpha, \Box\neg\alpha, \Box\circ\alpha\}\\
w_3 &= \{\Box\alpha, \neg\Box\alpha, \Box\circ\alpha\}\\
w_4 &= \{\Box\alpha, \Box\neg\alpha, \circ\Box\alpha\}
\end{aligned}
$$

Olhando para os mundos temos as seguintes situações:

1. Em w_1 a explosão ocorre imediatamente independente da relação de acessibilidade entre os mundos do modelo.

2. Em w_2 a explosão ocorre em cada mundo w' tal que $w_2 R w'$. A explosão não ocorre *somente* nos enquadramentos onde w_2 é um "ponto terminal" ou um "ponto isolado".

3. Nos demais casos para que se tenha explosão é preciso ter mais informação a respeito da relação de acessibilidade dos enquadramentos associados ao modelo.

O conceito de "mundos impossíveis" de Zalta ou "mundos não-*standard*" é imaginado como uma forma de modelar certas noções lógicas que não podem ser adequadamente expressas por meio dos mundos possíveis usuais. Às vezes, mundos impossíveis são considerados "mundos não-normais" e eles são importantes para invalidar hipoteticamente certas leis lógicas ou mesmo separar leis lógicas. Por exemplo Zalta, em [Zal97], propõe uma teoria metafísica do que ele chama "mundos impossíveis genuínos" e defende que sua teoria não é uma teoria *ersatz* de mundos impossíveis, mas uma genuína noção wittgensteiniana de mundo no sentido de 'tudo que é o caso':

> "In the foregoing, we have developed a methaphysical theory, not a semantic model, of impossible worlds. Our impossible worlds are not primitive elements of some set-theoretic model which are stipulated to obey certain constraints. Although our possible world are not concrete objects, they are not "ersatz impossible worlds," but rather conform to the Wittgensteinian notion of world (i.e., defined in terms of 'all that is the case'). Impossible worlds are abstract objects which have an intrinsic nature as maximal situations that are individuated by the incompatible states of affairs that obtain there. They are a species of "impossible" object, for they "have," in a precise theoretical sense, incompatible properties."

Os modelos de nossas lógicas modais paraconsistentes, em especial os modelos descritos pelas semânticas modais de traduções possíveis, são bons candidatos para os "mundos impossíveis reais", no sentido em que Zalta os defende. Para ele, um mundo impossível é definido da seguinte forma (veja [Zal97]:

> "At last we come to the definition which express our theory of impossible worlds.
>
> $$\mathit{ImpossibleWorld}(s) \quad =_{df} \quad \mathit{Maximal}(s) \ \&\ \neg \mathit{Possible}(s).$$
>
> Thus, an impossible world is a maximal situation s such that it is impossible for all states of affairs true in s to be true."

Dado que nossos mundos são paraconsistentes, não são neles válidas todas as verdades clássicas, e nesse sentido nossos modelos poderiam servir como modelos para uma teoria dos mundos impossíveis. Tais modelos também não seriam *ersatz* uma vez que são objetos matemáticos com os quais podemos fazer deduções lógicas, e nesse sentido 'estão no mundo'.

Se interpretássemos a noção de *mundo impossível* como um mundo que admite contradições sem explodir então, na ilustração acima, w_3 seria um exemplo de um mundo impossível e w_4 um mundo que tem acesso a mundos impossíveis no sentido em que para cada w'' tal que $w_4 R w''$, w'' é um mundo impossível desde que $\circ\alpha$, α e $\neg\alpha$ pertencem a w''. Deste modo, o maquinário das lógicas catódicas é apto para expressar noções de mundos impossíveis ou mesmo explicar como mundos impossíveis podem ser acessados a partir de mundos possíveis.

Em [Nol97], Nolan argumenta que existe uma variedade de áreas onde pode ser muito útil raciocinar com impossibilidades em um modo dedutivamente não-trivial, mas ele argumenta também que modificar a noção de conseqüência lógica a fim de acomodar situações impossíveis é um engano, da mesma forma que impossibilidades podem sobreviver em raciocínios clássicos. Agora, o que nossos sistemas modais paraconsistentes fazem é apenas ampliar a noção de conseqüência lógica, mas não por meio de um raciocínio modal não-clássico, tanto que raciocínios clássicos podem ser recuperados dentro de nossos sistemas.

O mesmo procedimento usado para estender as semânticas de traduções possíveis para o caso modal pode ser adaptado para as semânticas não-determinísticas de Avron (veja [AK07]), e nesse caso teríamos “semânticas modais não-determinísticas” para uma outra família de sistemas catódicos, as baseadas em lógicas relacionadas às LFIs.

De fato, de acordo com Marcos em [Mar08], nota 18, dado que as “semânticas não-determinísticas” de Avron estão relacionadas com as “semânticas de traduções possíveis” no sentido em que existe um procedimento mecânico para passar de uma “semântica não-determinística” para uma versão equivalente de “semântica de traduções possíveis”, então o método que apresentamos pode facilmente ser adaptado às “semânticas não-determinísticas”.

De uma maneira mais abstrata, Carnielli e Coniglio em [CC05] mostraram que as semânticas não-determinísticas são nada mais que um caso particular das semânticas de traduções possíveis, o que então plenamente justifica nossos comentários acima.

> “As a quick assessment of what has been accomplished so far, Theorem 21, 38 and 37 prove that, for structural logics, matrix semantics, possible-

translations semantics and multiple nondeterministic matrix semantics are essentially equivalent."

Uma outra questão que pode ser investigada diz respeito a algebrização dos sistemas catódicos. Em [Bue04], [BSC05] e [BSCC07] propus, juntamente com Carnielli e Coniglio, um novo conceito de algebrização que se apóia no conceito das semânticas de traduções possíveis conectado à noção de algebrização proposta por Blok e Pigozzi (veja [BP89]). Esse novo conceito, o qual chamamos "semântica algébrica de traduções possíveis", mostra-se apto para algebrizar sistemas tolerantes a contradições. Nesses trabalhos são mostrados vários exemplos de lógicas paraconsistentes algebrizáveis nessa nova acepção. Não é difícil perceber que o mesmo poderia ser feito para os sistemas catódicos. Para tanto, bastaria mostrar que os modelos trivalentes de Kripke, adequados à classe $\mathcal{L}^{k,l,m,n}$, são algebrizáveis usando um ferramental adequado às lógicas modais, por exemplo, veja capítulo 5 de [BdRV02] de Blackburn, de Rijke e Venema. Essa é uma questão interessante e que requer um tratamento algébrico específico, por isso reservamos a investigação da algebrização dos sistemas catódicos para trabalhos futuros.

5. NA DIREÇÃO DAS MULTIMODALIDADES

Os sistemas monomodais tratam os operadores lógicos um a um, tal como são tratadas as noções de possibilidade em **K**, **KT**, **S4**, **S5**, etc. Esse enfoque simplista, contudo, pode ser criticado já a partir da perspectiva histórica: Aristóteles e comentadores já se referiam explicitamente (entre outros) ao interesse em argumentos que podem ser vistos como combinação entre tempo e modalidade e, portanto, como uma legítima multimodalidade (veja, por exemplo, *De Caelo* 1: 11-12). De acordo com Kuhn [Kuh98] (página 3), Aristóteles cataloga quatro sentidos para "necessidade" na Metafísica V, capítulo 5, e faz várias distinções similares em outros pontos, o que significa que a lógica modal já nasceu com vocação multimodal.

Críticas ao monomodalismo já foram lançadas há quase quatro décadas por Scott in [Sco70], que escreveu o seguinte, embora seu próprio manuscrito com Lemmon (veja [LS77]) dificilmente possa ser visto como avançando na direção das multimodalidades:

> "Here is what I consider one of the biggest mistakes of all in modal logic: concentration on a system with just one modal operator"

Talvez por força da crítica, ou por força da necessidade dos próprios contextos onde as modalidades são usadas (ou pelas duas razões), a investigação a respeito das multimodalidades tem sido empreendida seriamente há mais de três décadas. Como, por exemplo, por van Benthem, em [vB83b] e [vB83a], e por Segerberg, em [Seg77].

A abordagem que faremos aqui, mostrando como se pode obter teoremas gerais de completude para sistemas multimodais anódicos e catódicos estudados nesta Tese, segue na mesma linha de Carnielli e Pizzi em [CP08], que por sua vez simplificam e detalham as de Catach em [Cat91] e Baldoni, Giordano e Martelli em [BGM98].

Na Seção 5.1 do presente capítulo mostramos as definições a respeito dos sistema multimodais anódicos e catódicos e demonstramos a corretude para esses sistemas com relação aos chamados modelos multi-relacionais. Esses sistemas servem de base para se obter três tipos de extensões: as basilares, as afirmativas e as do tipo Catach-Sahlqvist.

A Seção 5.2 é dedicada ao estudo dos sistemas multimodais do tipo basilar. Mostramos como essa classe de sistemas generaliza as classes de sistemas anódicos e catódicos estudadas nos Capítulos 2 e 3 desta Tese e finalizamos com a caracterização desses sistemas.

A Seção 5.3 dedica-se às extensões do tipo afirmativa. Apresentamos todo o aparato definicional que conduz a uma caracterização desses sistemas. São também delineados todos os passos para se obter a completude para essas classes de sistemas. Finalizamos a seção introduzindo os sistemas do tipo Catach-Sahlqvist a título de complementação.

5.1 *Multimodalidades anódicas e catódicas*

Como vimos no Capítulo 2, um sistema é classificado como multimodal quando apresenta mais de um operador modal como primitivo na linguagem. Nossa intenção nesta seção é fazer um ensaio de como estender os sistemas anódicos e catódicos, apresentados nos Capítulos 2 e 3, a sistemas multimodais, respectivamente, anódicos e catódicos. De acordo com Carnielli e Pizzi, em [CP08], um dos aspectos importantes em se considerar sistemas multimodais, entre outros, está na possibilidade de modelar múltiplos cenários por intermédio de um agente que interage com outros agentes, tendo em conta que essa interação pode produzir uma modificação nesses cenários.

> "One of the main reasons for the interest in multimodal systems rests on the possibility of modeling the several scenarios by which an agent may reason (i.e. operate deductions), by which (s)he interacts with other agents and by which it may produce changes in the scenarios themselves. In specific cases, this involves either the representation of the dynamic aspects of the agents or the reasoning about their actions in time."

Nosso objetivo é obter classes ainda mais gerais de sistemas anódicos e catódicos, as chamadas classes de sistemas multimodais *basilares* (obtidas por intermédio de uma generalização do esquema de axiomas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$). Há ainda outras duas classes de sistemas multimodais: a classe dos sistemas *afirmativos*, obtida por meio de uma generalização dos sistemas basilares; e a classe dos sistemas do tipo *Catach-Sahlqvist*, que generaliza os sistemas afirmativos.

No caso dos sistemas multimodais é preciso adequar a linguagem para se obter uma generalização dos sistemas anódicos e catódicos para sistemas basilares e afirmativos. Tanto quanto possível, manteremos a convenção adotada nos capítulos anteriores para nomear os sistemas multimodais. Como o leitor poderá notar, muitos resultados são generalizações imediatas de resultados obtidos no caso monomodal e bi-modal, em tais casos faremos apenas uma apreciação desses resultados com algumas indicações a respeito das demonstrações. As definições e resultados a respeito dos sistemas multimodais anódicos e catódicos, sempre que possível, serão apresentados juntamente, lembrando que a diferença entre um caso e outro é referente à negação.

Uma *linguagem proposicional multimodal* consiste de uma classe de variáveis proposicionais (Var), um conjunto de conectivos (Σ), tomados como primitivos na linguagem, e um conjunto fixado de *parâmetros modais atômicos* (Φ_0). A partir daí, mostramos como se obter os operadores modais por intermédio dos *operadores de formação* $\cup$ e $\odot$.

Os elementos de Φ_0 são indicados por letras alfabéticas minúsculas a, b, c, etc. Dentre os parâmetros modais atômicos destacamos dois deles: o *parâmetro identidade*, denotado por *1*, e o *parâmetro nulo*, denotado por *0*. A *linguagem multimodal* é definida como $MML = \langle Var, \Sigma, \langle \Phi_0, \odot, \cup \rangle \rangle$. No caso dos sistemas anódicos temos que $\Sigma = \{\supset, \wedge\}$, $1 \in \Phi_0$ e $0 \notin \Phi_0$. No caso dos sistemas catódicos temos que $\Sigma = \{\supset, \wedge, \neg\}$ ou $\Sigma = \{\supset, \wedge, \neg, \circ\}$, $1 \in \Phi_0$ e $0 \in \Phi_0$.

Com base em Φ_0 definimos a classe dos *parâmetros multimodais.*

Definição 5.1.1. *A classe* Φ *de parâmetros multimodais sobre* Φ_0 *é definida*

pelas seguintes condições de fechamento:
(i) $a \in \Phi_0$ *implica* $a \in \Phi$*;*
(ii) $a, b \in \Phi$ *implica* $a \cup b \in \Phi$*;*
(iii) $a, b \in \Phi$ *implica* $a \odot b \in \Phi$*.*

A classe Θ dos *operadores modais indexados por parâmetros* é formada pelo conjunto $\{[a] : a \in \Phi\} \cup \{\langle a \rangle : a \in \Phi\}$. Devemos lembrar que no caso dos sistemas catódicos que *permitem* definir uma negação clássica, por exemplo nos sistemas que estendem **mbC**, **bC** e **Ci**, pode-se eliminar os operadores multimodais, por exemplo, do tipo $\langle a \rangle$. Para tanto, devemos acrescentar os axiomas de ligação (**BP1**) e (**BP2**), para cada parâmetro $a \in \Phi$ (veja Seção 3.2, página 109). Para simplificar vamos considerar os dois tipos de operadores multimodais como primitivos nos sistemas no decorrer deste capítulo.

O conjunto das *fórmulas* dos sistemas multimodais anódicos (catódicos) pode ser obtido acrescentando-se às cláusulas de formação do conjunto das fórmulas do respectivo sistema anódico (catódico) a seguinte cláusula:

- Se α é uma fórmula e $[a] \in \Theta$, então $[a]\alpha$ e $\langle a \rangle\alpha$ são fórmulas.

Os sistemas multimodais anódicos e catódicos que consideramos são denotados por $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Phi}$, $\mathbf{PI}^{\Phi}$, $\mathbf{mbC}^{\Phi}$, $\mathbf{bC}^{\Phi}$ e $\mathbf{Ci}^{\Phi}$, onde Φ indica os parâmetros multimodais usados para a obtenção dos operadores multimodais em cada caso. A seguir mostramos quais são os axiomas e regras que governam os sistemas multimodais.

Definição 5.1.2. *Um sistema multimodal anódico (catódico) baseado sobre* Θ *é uma coleção de fórmulas multimodais anódicas (catódicas) contendo todas as tautologias de* $\boldsymbol{PC}^{\supset,\wedge}$ *(**PI**, **mbC**, **bC** ou **Ci**) e fechado por (**MP**) e (**US**).*

Na Definição 5.1.3, e para o resto do capítulo, escrevemos $\alpha \equiv \beta$ como abreviação da fórmula $(\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$.

Definição 5.1.3. *Um sistema multimodal anódico (catódico)* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$ *é chamado:*
(i) Normal se satisfaz os seguintes axiomas e regras, para cada parâmetro modal $a \in \Phi_0$*, cada* $p, q \in Var$*, e* α *uma fórmula multimodal:*

(K**$_a$**) $[a](p \supset q) \supset ([a]p \supset [a]q)$, *para cada* $a \in \Phi_0$

(K1**$_a$**) $[a](p \supset q) \supset (\langle a\rangle p \supset \langle a\rangle q)$, *para cada* $a \in \Phi_0$

(K2**$_a$**) $\langle a\rangle(p \vee q) \supset (\langle a\rangle p \vee \langle a\rangle q)$, *para cada* $a \in \Phi_0$

(K3**$_a$**) $(\langle a\rangle p \supset [a]q)p \supset [a](p \supset q)$, *para cada* $a \in \Phi_0$

(Nec**$_a$**) $\vdash \alpha$ *implica* $\vdash [a]\alpha$

(ii) Padrão se satisfaz também os seguintes axiomas multimodais, para todo parâmetro multimodal $a, b \in \Phi$ *e* $p \in Var$*:*

(MM1) $[a \cup b]p \equiv [a]p \wedge [b]p$

(MM2) $\langle a \cup b\rangle p \equiv \langle a\rangle p \vee \langle b\rangle p$

(MM3) $[a \odot b]p \equiv [a][b]p$

(MM4) $\langle a \odot b\rangle p \equiv \langle a\rangle\langle b\rangle p$

(MM5) $[1]p \equiv p$

(MM6) $\langle 1\rangle p \equiv p$

No caso dos sistemas catódicos acrescentam-se as seguintes cláusulas referentes ao parâmetro modal nulo:

(MM7) $[0]p \equiv \top$

(MM8) $\langle 0\rangle p \equiv \bot$

A vantagem em se trabalhar com uma notação paramétrica é que podemos escrever um sistema multimodal anódico (catódico) em função de um único parâmetro modal mais complexo, um parâmetro multimodal, manejando os parâmetros multimodais por intermédio dos operadores de formação $\cup$ e $\odot$, como mostram os axiomas multimodais (**MM1**)–(**MM8**).

Para evitar problemas com relação à redundância de operadores multimodais trabalhamos com o conjunto das classes de equivalência dos parâmetros modais, que denotamos por $\Phi/_\approx$. As classes são separadas pela seguinte relação de equivalência, para todo $p \in Var$:

- $a \approx b$ sse $\vdash [a]p \equiv [b]p$ e $\vdash \langle a \rangle p \equiv \langle b \rangle p$.

Daqui para frente consideramos $\Phi/_{\approx}$ como o conjunto dos parâmetros multimodais.

Devemos observar que o Teorema da Dedução continua válido para os sistemas multimodais. De fato, dada a presença de parâmetros multimodais na linguagem, a rigor, deveríamos repetir o argumento referente à regra de necessitação para cada parâmetro $a \in \Phi$. O Teorema 5.1.4 (i) mostra que os operadores de formação ($\cup$ e $\odot$) não alteram a regra (**Nec**) nos sistema multimodais, e daí o argumento consiste em uma mera transcrição do Teorema 1.3.8, usando a nova notação. O resultado a seguir é válido tanto para os sistemas multimodais anódicos quanto para os catódicos.

Teorema 5.1.4. *Para todo sistema multimodal anódico (catódico)* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$*, e para cada parâmetro* $c \in \Phi$*, é válido em* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$*:*

(i) *Se* $\vdash \alpha$*, então* $\vdash [c]\alpha$*;*

(ii) $[c](p \supset q) \supset ([c]p \supset [c]q)$*;*

(iii) $[c](p \supset q) \supset (\langle c \rangle p \supset \langle c \rangle q)$*;*

(iv) $\langle c \rangle (p \vee q) \supset (\langle c \rangle p \vee \langle c \rangle q)$*;*

(v) $(\langle c \rangle p \supset [c]q) \supset [c](p \supset q)$.

Demonstração. (i) A prova segue por indução na complexidade do parâmetro multimodal c. O caso atômico é garantido pela Definição 5.1.2. Suponha que ($\mathbf{Nec}_a$) seja válida para cada parâmetro multimodal a de complexidade menor que c.

- Se c é $a \cup b$.
  Suponha $\vdash \alpha$. Pela hipótese de indução temos que $\vdash [a]\alpha$ e $\vdash [b]\alpha$. Pelo axioma (**A4**) temos que $\vdash [a]\alpha \supset ([b]\alpha \supset ([a]\alpha \wedge [b]\alpha))$. Por (**MP**) segue que $\vdash [a]\alpha \wedge [b]\alpha$ daí, por (**MM1**), segue que $\vdash [a \cup b]\alpha$

- Se c é $a \odot b$.
  Se $\vdash \alpha$ então, por ($\mathbf{Nec}_a$) temos $\vdash [a]\alpha$, e por ($\mathbf{Nec}_b$) temos $\vdash [b][a]\alpha$ daí, por (**MM2**), segue $\vdash [a \odot b]\alpha$.

(ii) Devemos mostrar que ($\mathbf{K}_a$) é válida para todo parâmetro multimodal a. A prova novamente segue por indução na complexidade do parâmetro multimodal c. Suponhamos, por hipótese de indução, que ($\mathbf{K}_a$) seja válida para cada parâmetro multimodal a de complexidade menor que c.

- Se c é $a \cup b$.

1.	$[a \cup b](p \supset q)$	[Hip.]
2.	$[a \cup b](p \supset q) \equiv [a](p \supset q) \wedge [b](p \supset q)$	[(**MM1**)]
3.	$[a](p \supset q) \wedge [b](p \supset q)$	[(**MP**) em 1 e 2]
4.	$[a](p \supset q)$	[(**A4**) e (**MP**) em 3]
5.	$[b](p \supset q)$	[(**A5**) e (**MP**) em 3]
6.	$[a]p \supset [a]q$	[($\mathbf{K}_a$) e (**MP**) em 4]
7.	$[b]p \supset [b]q$	[($\mathbf{K}_b$) e (**MP**) em 5]
8.	$([a]p \wedge [b]p) \supset [a]p$	[(**A4**)]
9.	$([a]p \wedge [b]p) \supset [a]q$	[Teo. 1.3.2 (iii) 8 e 6]
10.	$([a]p \wedge [b]p) \supset [b]p$	[(**A5**)]
11.	$([a]p \wedge [b]p) \supset [b]q$	[Teo. 1.3.2 (iii) 9 e 7]
12.	$([a]p \wedge [b]p) \supset ([a]q \wedge [b]q)$	[Lema 1.3.3 (i) 9 e 11]
13.	$[a \cup b]p \supset [a \cup b]q$	[(**MM1**) em 12]

- Se c é $a \odot b$.

1.	$[a \odot b](p \supset q)$	[Hip.]
2.	$[a \odot b](p \supset q) \equiv [a][b](p \supset q)$	[(**MM3**)]
3.	$[a][b](p \supset q)$	[(**MP**) em 1 e 2]
4.	$[b](p \supset q) \supset ([b]p \supset [b]q)$	[($\mathbf{K}_b$)]
5.	$[a]([b](p \supset q) \supset ([b]p \supset [b]q))$	[($\mathbf{Nec}_a$) em 4]
6.	$[a][b](p \supset q) \supset [a]([b]p \supset [b]q)$	[($\mathbf{K}_a$) e (**MP**) em 5]
7.	$[a]([b]p \supset [b]q)$	[(**MP**) em 3 e 6]
8.	$[a]([b]p \supset [b]q) \supset ([a][b]p \supset [a][b]q)$	[($\mathbf{K}_a$)]
9.	$[a][b]p \supset [a][b]q$	[(**MP**) em 7 e 8]
10.	$[a \odot b]p \supset [a \odot b]q$	[(**MM3**) em 9]

(iii) Devemos mostrar que ($\mathbf{K1}_a$) é válida para todo parâmetro multimodal a. A prova é feita, mais uma vez, por indução na complexidade do parâmetro multimodal c. Suponhamos, por hipótese de indução, que ($\mathbf{K1}_a$) seja válida para cada parâmetro multimodal a de complexidade menor que c.

- Se c é $a \cup b$.

1.	$[a \cup b](p \supset q)$	[Hip.]
2.	$[a](p \supset q) \wedge [b](p \supset q)$	[(**MM1**) e (**MP**) em 1]
3.	$[a](p \supset q)$	[(**A4**) e (**MP**) em 2]
4.	$[b](p \supset q)$	[(**A5**) e (**MP**) em 2]
5.	$\langle a\rangle p \supset \langle a\rangle q$	[($\mathbf{K1}_a$) e (**MP**) em 3]
6.	$\langle b\rangle p \supset \langle b\rangle q$	[($\mathbf{K1}_b$) e (**MP**) em 4]
7.	$\langle a\rangle q \supset (\langle a\rangle q \vee \langle b\rangle q)$	[Teo. 1.3.2 (i)]
8.	$\langle a\rangle p \supset (\langle a\rangle q \vee \langle b\rangle q)$	[Teo. 1.3.2 (iii) 5 e 7]
9.	$\langle b\rangle q \supset (\langle a\rangle q \vee \langle b\rangle q)$	[Teo. 1.3.2 (ii)]
10.	$\langle b\rangle p \supset (\langle a\rangle q \vee \langle b\rangle q)$	[Teo. 1.3.2 (iii) 6 e 9]
11.	$(\langle a\rangle p \vee \langle b\rangle p) \supset (\langle a\rangle q \vee \langle b\rangle q)$	[Teo. 1.3.2 (iv) em 8 e 10]
12.	$\langle a \cup b\rangle p \supset \langle a \cup b\rangle q$	[(**MM2**) em 11]

- Se c é $a \odot b$.

1.	$[a \odot b](p \supset q)$	[Hip.]
2.	$[a][b](p \supset q)$	[(**MM2**) e (**MP**) em 1]
3.	$[b](p \supset q) \supset \langle b\rangle p \supset \langle b\rangle q$	[($\mathbf{K1}_b$)]
4.	$[a][b](p \supset q) \supset [a](\langle b\rangle p \supset \langle b\rangle q)$	[($\mathbf{Nec}_a$), ($\mathbf{K}_a$) e (**MP**) em 3]
5.	$[a](\langle b\rangle p \supset \langle b\rangle q)$	[(**MP**) em 2 e 4]
6.	$\langle a\rangle\langle b\rangle p \supset \langle a\rangle\langle b\rangle q$	[($\mathbf{K1}_a$) e (**MP**) em 5]
7.	$\langle a \odot b\rangle p \supset \langle a \odot b\rangle q$	[(**MM4**) em 6]

(iv) Devemos mostrar que ($\mathbf{K2}_a$) é válida para todo parâmetro multimodal a. A prova é ainda por indução na complexidade do parâmetro multimodal c. Suponhamos, por hipótese de indução, que ($\mathbf{K2}_a$) seja válida para cada parâmetro multimodal a de complexidade menor que c. Na argumentação do primeiro caso o Teorema 1.3.2 (iii) está denotado por (Trans.), o Teorema 1.3.2 (vii) por (Comut.) e o Teorema 1.3.2 (iv) por (Taut.).

- Se c é $a \cup b$.

1. $\langle a\rangle(p \vee q) \supset (\langle a\rangle p \vee \langle a\rangle q)$ [$(\mathbf{K2}_a)$]
2. $(\langle a\rangle p \vee \langle a\rangle q) \supset (\langle a\rangle p \vee \langle a\rangle q \vee \langle b\rangle p \vee \langle b\rangle q)$ [Teo. 1.3.2 (i)]
3. $\langle a\rangle(p \vee q) \supset (\langle a\rangle p \vee \langle a\rangle q \vee \langle b\rangle p \vee \langle b\rangle q)$ [Trans. em 1 e 2]
4. $\langle a\rangle(p \vee q) \supset (\langle a\rangle p \vee \langle b\rangle p \vee \langle a\rangle q \vee \langle b\rangle q)$ [Comut. em 3]
5. $\langle a\rangle(p \vee q) \supset (\langle a \cup b\rangle p \vee \langle a \cup b\rangle q)$ [$(\mathbf{MM2})$ em 4]
6. $\langle b\rangle(p \vee q) \supset (\langle a \cup b\rangle p \vee \langle a \cup b\rangle q)$ [Idem de 1 à 5]
7. $\langle a\rangle(p \vee q) \vee \langle b\rangle(p \vee q) \supset (\langle a \cup b\rangle p \vee \langle a \cup b\rangle q)$ [Taut. em 5 e 6]
8. $\langle a \cup b\rangle(p \vee q) \supset (\langle a \cup b\rangle p \vee \langle a \cup b\rangle q)$ [$(\mathbf{MM2})$ em 7]

- Se c é $a \odot b$.

1. $\langle a \odot b\rangle(p \vee q)$ [Hip.]
2. $\langle a\rangle\langle b\rangle(p \vee q)$ [$(\mathbf{MM4})$ em 1]
3. $\langle b\rangle(p \vee q) \supset \langle b\rangle p \vee \langle b\rangle q$ [$(\mathbf{K2}_b)$]
4. $[a](\langle b\rangle(p \vee q) \supset \langle b\rangle p \vee \langle b\rangle q)$ [$(\mathbf{Nec}_a)$ em 3]
5. $\langle a\rangle\langle b\rangle(p \vee q) \supset \langle a\rangle(\langle b\rangle q \vee \langle b\rangle q)$ [$(\mathbf{K1}_a)$ e $(\mathbf{MP})$ em 4]
6. $\langle a\rangle(\langle b\rangle q \vee \langle b\rangle q)$ [$(\mathbf{MP})$ em 2 e 5]
7. $\langle a\rangle(\langle b\rangle p \vee \langle b\rangle q) \supset \langle a\rangle\langle b\rangle p \vee \langle a\rangle\langle b\rangle q$ [$(\mathbf{K2}_a)$]
8. $\langle a\rangle\langle b\rangle p \supset \langle a\rangle\langle b\rangle q$ [$(\mathbf{MP})$ em 6 e 7]
9. $\langle a \odot b\rangle p \supset \langle a \odot b\rangle q$ [$(\mathbf{MM4})$ em 8]

(v) Devemos mostrar que $(\mathbf{K3}_a)$ é válida para todo parâmetro multimodal a. A prova é também feita por indução na complexidade do parâmetro multimodal c. Suponhamos, por hipótese de indução, que $(\mathbf{K3}_a)$ seja válida para cada parâmetro multimodal a de complexidade menor que c.

- Se c é $a \cup b$.

1.	$\langle a \cup b\rangle p \supset [a \cup b]q$	[(Hip.)]
2.	$(\langle a\rangle p \vee \langle b\rangle p) \supset ([a]q \wedge [b]q)$	[(**MM2**) e (**MM1**) em 1]
3.	$\langle a\rangle p \supset (\langle a\rangle p \vee \langle b\rangle p)$	[Teo. 1.3.2 (i)]
4.	$\langle a\rangle p \supset ([a]q \wedge [b]q)$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 3 e 2]
5.	$([a]q \wedge [b]q) \supset [a]q$	[(**A4**)]
6.	$\langle a\rangle p \supset [a]q$	[Teo. 1.3.2 (iii) em 4 e 5]
7.	$(\langle a\rangle p \supset [a]q) \supset [a](p \supset q)$	[($\mathbf{K3}_a$)]
8.	$[a](p \supset q)$	[(**MP**) em 6 e 7]
9.	$[b](p \supset q)$	[Análogo de 1 à 8]
10.	$[a](p \supset q) \wedge [b](p \supset q)$	[(**A4**) em 8 e 9]
11.	$[a \cup b](p \supset q)$	[(**MM1**) em 10]

- Se c é $a \odot b$.

1.	$\langle a \odot b\rangle p \supset [a \odot b]q$	[Hip.]
2.	$\langle a\rangle\langle b\rangle p \supset [a][b]q$	[(**MM4**) e (**MM3**) em 1]
3.	$(\langle b\rangle p \supset [b]q) \supset [b](p \supset q)$	[($\mathbf{K3}_b$)]
4.	$[a]((\langle b\rangle p \supset [b]q) \supset [b](p \supset q))$	[($\mathbf{Nec}_a$) em 3]
5.	$[a](\langle b\rangle p \supset [b]q) \supset [a][b](p \supset q)$	[($\mathbf{K}_a$) e (**MP**) em 4]
6.	$(\langle a\rangle\langle b\rangle p \supset [a][b]q) \supset [a](\langle b\rangle p \supset [b]q)$	[($\mathbf{K3}_a$)]
7.	$[a](\langle b\rangle p \supset [b]q)$	[(**MP**) em 2 e 6]
8.	$[a][b](p \supset q)$	[(**MP**) em 7 e 5]
9.	$[a \odot b](p \supset q)$	[(**MM3**) em 8]

□

É importante notar que os sistemas multimodais que obtivemos até agora consistem de versões duplicadas do sistema normal **K** na versão anódica e catódica, ou seja, os sistemas multimodais anódicos (catódicos) são os análogos dos sistemas minimais anódicos (catódicos) que estudamos nos capítulos anteriores.

Como discutimos no Capítulo 2 os enquadramentos para sistemas bi-modais requerem duas relações de acessibilidade, de tal forma a corresponder uma relação para cada modalidade primitiva do sistema. Da mesma forma que acontece com os sistemas bi-modais os enquadramentos para os sistemas multimodais requerem um projeto análogo: devemos dispor da mesma quantidade de relações de acessibilidade quantos forem os operadores modais indexados por parâmetros tomados como primitivos no sistema multimodal.

Seja W o conjunto de mundos possíveis. As seguintes relações de acessibilidade são tomadas como primitivas:

$\mathbf{0} = \emptyset$ (Relação Vazia)

$\mathbf{1} = W \times W$ (Relação Universal)

$\mathbf{Id} = \{\langle w, w\rangle : \ w \in W\}$ (Relação Identidade)

As seguintes são *operações sobre relações*:

1. $R \cup S = \{\langle w, w'\rangle : \ wRw' \text{ ou } wSw'\}$ (União)
2. $R \cap S = \{\langle w, w'\rangle : \ wRw' \text{ e } wSw'\}$ (Interseção)
3. $R \odot S = \{\langle w, w'\rangle : \ \exists w''(wRw'' \text{ e } w''Sw')\}$ (Produto Relativo)
4. $R^{-1} = \{\langle w, w'\rangle : \ \langle w', w\rangle \in R\}$ (Inversa)
5. $R \Rightarrow S = \{\langle w, w'\rangle : \ \forall w''(wRw'' \text{ implica } w''Sw')\}$ (Implicação Relativa)

Um enquadramento *multi-relacional* é um par $\mathfrak{F}^{\Phi} = \langle W, \Omega\rangle$ onde W é um conjunto de mundos e Ω um conjunto de relações binárias sobre W. O próximo passo é encontrar operações que associam parâmetros multimodais de um sistema multimodal $\mathbf{S}^{\Phi}$ com as relações binárias em Ω.

Para determinar as relações de acessibilidades faremos uso de uma álgebra de relações que está relacionada com a álgebra dos parâmetros modais, estabelendo um homomorfismo entre tais estruturas.

Definição 5.1.5. *Seja $\boldsymbol{S}^{\Phi}$ um sistema multimodal anódico (catódico). Dizemos que $\mathfrak{F}^{\Phi} = \langle W, \Omega\rangle$ é um enquadramento multi-relacional para $\boldsymbol{S}^{\Phi}$ se existe uma função $\rho : \Phi \longrightarrow \Omega$ tal que $\rho(a) = R_a$ para todo parâmetro multimodal $a \in \Phi$, satisfazendo as seguintes condições:*

- *Para* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$ *um sistema multimodal anódico:*
  (i) $\rho(1) = \boldsymbol{Id}$ *(i.e.* $R_1 = \boldsymbol{Id}$*)*
  (ii) $\rho(a \cup b) = \rho(a) \cup \rho(b)$ *(i.e.* $R_{a\cup b} = R_a \cup R_b$*)*
  (iii) $\rho(a \odot b) = \rho(a) \odot \rho(b)$ *(i.e.* $R_{a\odot b} = R_a \odot R_b$*)*

- *Para* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$ *um sistema multimodal catódico acrescenta-se:*
  (iv) $\rho(0) = \boldsymbol{0}$ *(i.e.* $R_0 = \emptyset$*)*

Observe, na Definição 5.1.5, que os símbolos $\cup$ e $\odot$ estão sendo usados em duas acepções: enquanto $a \cup b$ e $a \odot b$ denotam operações sobre os parâmetros multimodais, $\rho(a) \cup \rho(b)$ e $\rho(a) \odot \rho(b)$ denotam operações sobre as relações (União e Composição de relações, respectivamente).

A seguir definimos o *modelo multi-relacional* para sistemas multimodais anódicos e catódicos de modo padrão, como vemos a seguir.

Definição 5.1.6. *Um modelo multi-relacional* $\mathfrak{M}^{\Phi}$ *para um sistema multimodal* $\mathcal{L}^{\Phi}$ *é uma terna* $\langle W, \Omega, v\rangle$*, onde* W *é um conjunto de mundos,* Ω *um conjunto de relações binárias e* $v : Var \times W \longrightarrow \{0, 1\}$ *uma função satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *Para* $\mathcal{L}^{\Phi} = \boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Phi}$*:*
  (i) $v(p, w) = 1$ *ou* $v(p, w) = 0$*;*
  (ii) $v(\alpha \supset \beta, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w) = 0$ *ou* $v(\beta, w) = 1$*;*
  (iii) $v(\alpha \wedge \beta, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w) = 1$ *e* $v(\beta, w) = 1$*;*
  (iv) $v([a]\alpha, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w') = 1$*, para todo* $w' \in W$ *tal que* wR_aw'*, para cada* $a \in \Phi$*;*
  (v) $v(\langle a\rangle\alpha, w) = 1$ *sse* $v(\alpha, w') = 1$*, para algum* $w' \in W$ *tal que* wR_aw'*, para cada* $a \in \Phi$*.*

- *Para* $\mathcal{L}^{\Phi} = \boldsymbol{PI}^{\Phi}$ *acrescenta-se:*
  (vi) $v(\alpha, w) = 0$ *implica* $v(\neg\alpha, w) = 1$*.*

- *Para* $\mathcal{L}^{\Phi} = \boldsymbol{mbC}^{\Phi}$ *acrescenta-se:*
  (vii) $v(\circ\alpha, w) = 1$ *implica* $v(\alpha, w) = 0$ *ou* $v(\neg\alpha, w) = 0$*.*

- *Para* $\mathcal{L}^{\Phi} = \boldsymbol{bC}^{\Phi}$ *acrescenta-se:*
  (viii) $v(\neg\neg\alpha, w) = 1$ *implica* $v(\alpha, w) = 1$*.*

- *Para $\mathcal{L}^\Phi = \boldsymbol{Ci}^\Phi$ acrescenta-se:*
  (ix) $v(\neg \circ \alpha, w) = 1$ *implica* $v(\alpha, w) = 1$ *e* $v(\neg\alpha, w) = 1$.

A noção de satisfatibilidade de uma fórmula α em um modelo multi-relacional $\mathfrak{M}^\Phi$ é dada como antes, veja página 37, mas agora levando-se em consideração que os operadores modais estão indexados por parâmetros.

Teorema 5.1.7. *(Corretude para $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Phi}$, $\boldsymbol{PI}^\Phi$, $\boldsymbol{mbC}^\Phi$, $\boldsymbol{bC}^\Phi$ e $\boldsymbol{Ci}^\Phi$)*
Seja $\mathcal{L}^\Phi$ um dos sistemas $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Phi}$, $\boldsymbol{PI}^\Phi$, $\boldsymbol{mbC}^\Phi$, $\boldsymbol{bC}^\Phi$ ou $\boldsymbol{Ci}^\Phi$. Cada teorema de $\mathcal{L}^\Phi$ é válido na classe dos enquadramentos multi-relacionais $\mathfrak{F}^\Phi = \langle W, \Omega\rangle$ nos quais as relações em Ω independem de qualquer propriedade específica.

Demonstração. Precisamos nos ocupar apenas dos casos multimodais, os demais estão feitos no Teorema 1.4.3 e Teorema 3.2.7. No caso dos axiomas ($\mathbf{K}_a$), ($\mathbf{K1}_a$), ($\mathbf{K2}_a$), ($\mathbf{K3}_a$) e a regra ($\mathbf{Nec}_a$), levando em conta o Teorema 5.1.4, temos que o argumento é análogo ao estabelecido no Teorema 1.4.3 e Teorema 2.1.4 substituindo as modalidades $\Box$ e $\Diamond$ pelas respectivas modalidades $[a]$ e $\langle a\rangle$ e considerando que a relação de acessibilidade é a indexada pelo parâmetro multimodal $a \in \Phi$. Precisamos nos ocupar apenas dos axiomas multimodais (**MM1**)–(**MM8**).

- Axioma (**MM1**)
  ($\Rightarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo multi-relacional $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado sobre $\mathfrak{F}^\Phi$ tal que $\mathfrak{M}^\Phi \nvDash [a \cup b]p \supset [a]p \wedge [b]p$. Pela definição de validade no modelo multi-relacional temos que existe $w \in W$ tal que $v([a \cup b]p \supset [a]p \wedge [b]p), w) = 0$. Pela Definição 5.1.6 (ii) temos que $v([a \cup b]p), w) = 1$ e $v([a]p \wedge [b]p, w) = 0$.

  1. $v([a \cup b]p), w) = 1$ sse $v(p, w') = 1$ *para todo* $w' \in W$ tal que $wR_{a\cup b}w'$.
  2. $v([a]p \wedge [b]p, w) = 0$ sse $v([a]p, w) = 0$ ou $v([b]p, w) = 0$. Considere o caso $v([a]p, w) = 0$, o outro é análogo:
     $v([a]p, w) = 0$ sse $v(p, w') = 0$ para *algum* $w' \in W$ tal que $wR_a w'$. Dado que $R_a \subseteq R_a \cup R_b$ e como $R_a \cup R_b = R_{a\cup b}$ (Definição 5.1.5 (ii)), então $wR_{a\cup b}w'$, o que contradiz o item 1.

($\Leftarrow$) Com o mesmo raciocínio mostra-se que $[a]p \wedge [b]p \supset [a \cup b]p$ é validada pelo modelo multi-relacional.

Portanto, $\mathfrak{M}^\Phi \vDash [a \cup b]p \equiv [a]p \wedge [b]p$ para todo $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado em $\mathfrak{F}^\Phi \in \mathcal{F}$.

- Axioma (**MM2**)

  ($\Rightarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo multi-relacional $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado sobre $\mathfrak{F}^\Phi$ tal que $\mathfrak{M}^\Phi \nvDash \langle a \cup b \rangle p \supset \langle a \rangle p \vee \langle b \rangle p$. Pela definição de validade no modelo multi-relacional temos que existe $w \in W$ tal que $v(\langle a \cup b \rangle p \supset \langle a \rangle p \vee \langle b \rangle p, w) = 0$. Pela Definição 5.1.6 (ii) temos que $v(\langle a \cup b \rangle p), w) = 1$ e $v(\langle a \rangle p \vee \langle b \rangle p, w) = 0$.

  1. $v(\langle a \cup b \rangle p), w) = 1$ sse $v(p, w') = 1$ *para algum* $w' \in W$ t.q. $wR_{a \cup b}w'$. Pela Definição 5.1.5 (ii) temos que $R_{a \cup b} = R_a \cup R_b$ daí, pela União de relações temos que $v(p, w') = 1$ para algum w' tal que wR_aw' ou wR_bw';
  2. $v(\langle a \rangle p \vee \langle b \rangle p, w) = 0$ sse $v(\langle a \rangle p, w) = 0$ e $v(\langle b \rangle p, w) = 0$. Vamos considerar $v(\langle a \rangle p, w) = 0$, para o outro caso o raciocínio é análogo.

     $v(\langle a \rangle p, w) = 0$ sse $v(p, w') = 0$ para *todo* $w' \in W$ tal que wR_aw' (contradiz 1).

  ($\Leftarrow$) Com o mesmo raciocínio mostra-se que $\langle a \rangle p \vee \langle b \rangle p \supset \langle a \cup b \rangle p$ é validada pelo modelo multi-relacional.

  Portanto, $\mathfrak{M}^\Phi \vDash \langle a \cup b \rangle p \equiv \langle a \rangle p \wedge \langle b \rangle p$ para todo $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado em $\mathfrak{F}^\Phi \in \mathcal{F}$.

- Axioma (**MM3**)

  ($\Rightarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo multi-relacional $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado sobre $\mathfrak{F}^\Phi$ tal que $\mathfrak{M}^\Phi \nvDash [a \odot b]p \supset [a][b]p$. Pela definição de validade no modelo multi-relacional temos que existe $w \in W$ tal que $v([a \odot b]p \supset [a][b]p), w) = 0$. Pela Definição 5.1.6 (ii) temos que $v([a \odot b]p), w) = 1$ e $v([a][b]p, w) = 0$.

  1. $v([a \odot b]p), w) = 1$ sse *para todo* $w' \in W$ tal que $wR_{a \odot b}w'$, $v(p, w') = 1$.
  2. $v([a][b]p, w) = 0$ sse $v([b]p, w) = 0$ para algum $w' \in W$ tal que wR_aw'. Novamente, $v([b]p, w) = 0$ sse $v(p, w'') = 0$ para algum $w'' \in W$ tal

que $w'R_bw''$. Por outro lado, dado que wR_aw' e $w'R_bw''$ para algum $w'' \in W$ então, pela definição de Produto Relativo, temos que $wR_a \odot R_bw''$ daí, pela Definição 5.1.5 (iii), temos que $wR_{a\odot b}w''$ e $v(p, w'') = 0$, o que contradiz o item 1. O outro caso é análogo.

($\Leftarrow$) Com o mesmo raciocínio mostra-se que $[a][b]p \supset [a \odot b]p$ é validada pelo modelo multi-relacional.

Portanto, $\mathfrak{M}^\Phi \vDash [a \odot b]p \equiv [a][b]p$ para todo $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado em $\mathfrak{F}^\Phi \in \mathcal{F}$.

- Axioma (**MM4**)

($\Rightarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo multi-relacional $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado sobre $\mathfrak{F}^\Phi$ tal que $\mathfrak{M}^\Phi \nvDash \langle a \odot b\rangle p \supset \langle a\rangle\langle b\rangle p$. Pela definição de validade no modelo multi-relacional temos que existe $w \in W$ tal que $v(\langle a \odot b\rangle p \supset \langle a\rangle\langle b\rangle p, w) = 0$. Pela Definição 5.1.6 (ii) temos que $v(\langle a \odot b\rangle p), w) = 1$ e $v(\langle a\rangle\langle b\rangle p, w) = 0$.

1. $v(\langle a \odot b\rangle p), w) = 1$ sse $v(p, w') = 1$ *para algum* $w' \in W$ t.q. $wR_{a\odot b}w'$.
2. $v(\langle a\rangle\langle b\rangle p, w) = 0$ sse $v(\langle b\rangle p, w) = 0$ para todo $w' \in W$ tal que wR_aw'. Novamente, $v(\langle b\rangle p, w) = 0$ sse $v(p, w'') = 0$ para todo $w'' \in W$ tal que $w'R_bw''$. Por outro lado, dado que wR_aw' e $w'R_bw''$ para todo $w'' \in W$ então, pela definição de Produto Relativo, temos que $wR_a \odot R_bw''$ daí, pela Definição 5.1.5 (iii), temos que $wR_{a\odot b}w''$ e $v(p, w'') = 0$, contradizendo o item 1.

($\Leftarrow$) Com o mesmo raciocínio mostra-se que $\langle a\rangle\langle b\rangle p \supset \langle a \odot b\rangle p$ é validada pelo modelo multi-relacional.

Portanto, $\mathfrak{M}^\Phi \vDash \langle a \odot b\rangle p \equiv \langle a\rangle\langle b\rangle p$ para todo $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado em $\mathfrak{F}^\Phi \in \mathcal{F}$.

- Axioma (**MM5**)

($\Rightarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo multi-relacional $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado sobre $\mathfrak{F}^\Phi$ tal que $\mathfrak{M}^\Phi \nvDash [\mathit{1}]p \supset p$. Pela definição de validade no modelo multi-relacional temos que existe $w \in W$ tal que $v([\mathit{1}]p \supset p), w) = 0$. Pela Definição 5.1.6 (ii) temos que $v([\mathit{1}]p), w) = 1$ e $v(p, w) = 0$.

$v([1]p, w) = 1$ sse $v(p, w') = 1$ *para todo* $w' \in W$ tal que wR_1w'. Pela Definição 5.1.5 (i) temos que $R_1 = \mathbf{Id}$, daí $w = w'$ e nesse caso temos um absurdo.
($\Leftarrow$) Com o mesmo raciocínio mostra-se que $p \supset [1]p$ é validada pelo modelo multi-relacional.

Portanto, $\mathfrak{M}^\Phi \vDash [1]p \equiv p$ para todo $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado em $\mathfrak{F}^\Phi \in \mathcal{F}$.

- Axioma (**MM6**)
($\Rightarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo multi-relacional $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado sobre $\mathfrak{F}^\Phi$ tal que $\mathfrak{M}^\Phi \nvDash \langle 1\rangle p \supset p$. Pela definição de validade no modelo multi-relacional temos que existe $w \in W$ tal que $v(\langle 1\rangle p \supset p), w) = 0$. Pela Definição 5.1.6 (ii) temos que $v(\langle 1\rangle p), w) = 1$ e $v(p, w) = 0$.

  $v(\langle 1\rangle p, w) = 1$ sse $v(p, w') = 1$ *para algum* $w' \in W$ tal que wR_1w'. Pela Definição 5.1.5 (i) temos que $R_1 = \mathbf{Id}$, daí $w = w'$, e de novo, nesse caso, temos um absurdo.
($\Leftarrow$) Com o mesmo raciocínio mostra-se que $p \supset \langle 1\rangle p$ é validada pelo modelo multi-relacional.

  Portanto, $\mathfrak{M}^\Phi \vDash \langle 1\rangle p \equiv p$ para todo $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado em $\mathfrak{F}^\Phi \in \mathcal{F}$.

- Axioma (**MM7**)
($\Rightarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo multi-relacional $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado sobre $\mathfrak{F}^\Phi$ tal que $\mathfrak{M}^\Phi \nvDash [0]p \supset \top$. Pela definição de validade no modelo multi-relacional temos que existe $w \in W$ tal que $v([0]p \supset \top, w) = 0$. Pela Definição 5.1.6 (ii) temos que $v([0]p, w) = 1$ e $v(\top, w) = 0$. Absurdo, dado que $\top$ é verdadeira em todos os mundos possíveis.
($\Leftarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo multi-relacional $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado sobre $\mathfrak{F}^\Phi$ tal que $\mathfrak{M}^\Phi \nvDash \top \supset [0]p$. Pela definição de validade no modelo multi-relacional temos que existe $w \in W$ tal que $v(\top \supset [0]p, w) = 0$. Pela Definição 5.1.6 (ii) temos que $v(\top, w) = 1$ e $v([0]p, w) = 0$ daí, segue que $v(p, w') = 0$ para algum $w' \in W$ tal que wR_0w'. Pela Definição 5.1.5 (iv) temos que R_0 é a Relacão Vazia.

Absurdo, desde que $\langle w, w' \rangle \in R_0$.

Portanto, $\mathfrak{M}^\Phi \vDash [0]p \equiv \top$ para todo $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado em $\mathfrak{F}^\Phi \in \mathcal{F}$.

- Axioma (**MM8**)

  ($\Rightarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo multi-relacional $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado sobre $\mathfrak{F}^\Phi$ tal que $\mathfrak{M}^\Phi \nvDash \langle 0 \rangle p \supset \bot$. Pela definição de validade no modelo multi-relacional temos que existe $w \in W$ tal que $v(\langle 0 \rangle p \supset \bot, w) = 0$. Pela Definição 5.1.6 (ii) temos que $v(\langle 0 \rangle p, w) = 1$ e $v(\bot, w) = 0$. Pela Definição 5.1.6 (v), temos que $v(\langle 0 \rangle p, w) = 1$ sse $v(p, w') = 1$ para algum w' tal que wR_0w'. Mas, pela Definição 5.1.5 (iv) temos que R_0 é a Relacão Vazia. Absurdo.

  ($\Leftarrow$) Suponha, por redução ao absurdo, que existe um modelo multi-relacional $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado sobre $\mathfrak{F}^\Phi$ tal que $\mathfrak{M}^\Phi \nvDash \bot \supset \langle 0 \rangle p$. Pela definição de validade no modelo multi-relacional temos que existe $w \in W$ tal que $v(\bot \supset \langle 0 \rangle p, w) = 0$. Pela Definição 5.1.6 (ii) temos que $v(\bot, w) = 1$ e $v(\langle 0 \rangle p, w) = 0$. Absurdo, desde que $v(\bot, w) = 0$ para todo mundo possível.

  Portanto, $\mathfrak{M}^\Phi \vDash \langle 0 \rangle p \equiv \bot$ para todo $\mathfrak{M}^\Phi$ baseado em $\mathfrak{F}^\Phi \in \mathcal{F}$.

$\square$

A completude para os sistemas multimodais $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Phi}$, $\mathbf{PI}^{\Phi}$, $\mathbf{mbC}^\Phi$, $\mathbf{bC}^\Phi$ e $\mathbf{Ci}^\Phi$ pode ser obtida como um caso particular do Teorema 5.2.8, o que mostramos na próxima seção.

5.2 Sistemas basilares anódicos e catódicos

Os sistemas multimodais anódicos e catódicos, que tratamos na seção anterior, podem ser classificados como *mínimos* por se tratarem de versões multimodais (anódicas e catódicas) do sistema modal usual **K**. Nosso objetivo, nesta seção, é estender os sistemas multimodais anódicos e catódicos minimais com instâncias do axioma multimodal $\mathbf{G}(a, b, c, d)$, que generaliza o esquema de axiomas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ de Lemmon e Scott (veja Capítulo 2), dando origem aos assim chamados *sistemas basilares.*

Chamamos *basilar* ao sistema $\mathbf{S}^{\Phi}(a,b,c,d)$ obtido a partir do sistema multimodal $\mathbf{S}^{\Phi}$ (veja Definição 5.1.3) acrescido do seguinte esquema de axiomas:

$\mathbf{G}(a,b,c,d)$ $\quad \langle a\rangle[b]p \supset [c]\langle d\rangle p$, para $a,b,c,d \in \Phi$

Vejamos como esse axioma é uma generalização direta do esquema de axiomas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$. Considere que o parâmetro multimodal r seja representado pelo número natural n, e seja $[r] = \Box$. Pelo axioma (**MM3**), temos o seguinte:

$$[\underbrace{r \odot \cdots \odot r}_{n-vezes}]p \equiv [r]\cdots[r]p = \Box\cdots\Box p$$

Analogamente, pelo axioma (**MM4**), e considerando $\langle r\rangle = \Diamond$, temos que:

$$\langle\underbrace{r \odot \cdots \odot r}_{n-vezes}\rangle p \equiv \langle r\rangle\cdots\langle r\rangle p = \Diamond\cdots\Diamond p$$

Dessa forma, para cada r que ocorre em $\mathbf{G}(a,b,c,d)$, associamos um número natural $n \in \{k,l,m,n\}$ de forma que o esquema de axiomas $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ possa ser expresso em termos de r e do operador de formação $\odot$.

No que concerne à notação, os *sistemas multimodais anódicos basilares* serão denotados por $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Phi}$+$\mathbf{G}(a,b,c,d)$+$\mathbf{G}(c,d,a,b)$, onde Φ indica o conjunto dos parâmetros multimodais. Note que o mesmo artifício usado na Seção 2.2 com finalidade de suprir a ausência da negação, está sendo repetido aqui para os sistemas multimodais anódicos basilares.

No caso dos *sistemas multimodais catódicos basilares* vamos considerar 4 classes de sistemas, baseadas nos sistemas paraconsistentes tratados na Seção 3.1, da seguinte forma:

- $\mathbf{PI}^{\Phi}(a,b,c,d)$ é $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Phi}$+$\mathbf{G}(a,b,c,d)$+$\mathbf{G}(c,d,a,b)$ acrescido de (**PI**);
- $\mathbf{mbC}^{\Phi}(a,b,c,d)$ é $\mathbf{PI}^{\Phi}(a,b,c,d)$ acrescido de (**mbC**);
- $\mathbf{bC}^{\Phi}(a,b,c,d)$ é $\mathbf{mbC}^{\Phi}(a,b,c,d)$ acrescido de (**bC**);
- $\mathbf{Ci}^{\Phi}(a,b,c,d)$ é $\mathbf{bC}^{\Phi}(a,b,c,d)$ acrescido de (**Ci**).

Convém esclarecer que estamos abusando da notação no caso dos sistemas catódicos, quando não distinguimos a parte anódica da catódica no caso minimal (denotamos simplesmente por $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Phi}$), entendendo que Φ se ocupa dessa tarefa. Não devemos esquecer que os sistemas catódicos, de acordo com a Definição 5.1.3, têm (**MM7**) e (**MM8**) entre seus axiomas em razão de Φ ter o parâmetro nulo entre seus elementos. A única exceção é o sistema $\mathbf{PI}^{\Phi}(a,b,c,d)$, que como vimos no Capítulo 3, embora seja um sistema catódico, não define uma negação clássica. Por tal razão esse sistema não pode definir uma partícula *Falsum*. Dado que o parâmetro nulo $\mathit{0}$ está associado à constante $\bot$, devemos tratar o sistema $\mathbf{PI}^{\Phi}(a,b,c,d)$ de forma análoga à que tratamos os sistemas anódicos. Para uma discussão detalhada a respeito da completude de sistemas baseados em **PI**, veja Seção 3.3.

A partir deste ponto mostramos os resultados a respeito de $\mathbf{PI}^{\Phi}(a,b,c,d)$ juntamente com os outros sistemas catódicos basilares sem fazer as ressalvas sobre essas diferenças metodológicas referentes ao sistema **PI**. Na Seção 5.3, os sistemas afirmativos receberão também um tratamento análogo.

No Capítulo 3, com o intuito de resgatar a monomodalidade de certos sistemas catódicos, adicionamos aos sistemas que permitem definir uma negação clássica os axiomas (**BP1**) e (**BP2**) e mostramos no Lema 3.2.2 que as relações entre as modalidades $\Box$ e $\Diamond$ podiam ser resgatadas e, com isso, mostramos no Teorema 3.2.3 que alguns axiomas eram redundantes. Não é difícil ver que é igualmente possível refazer esses resultados no âmbito multimodal e que isso permitiria derivar os axiomas duais nesses sistemas multimodais catódicos, entendendo que para cada parâmetro multimodal $a \in \Phi$, temos que $[a]$ e $\langle a \rangle$ são operadores modais duais.

É interessante observar, ainda, que embora os sistemas basilares sejam mais gerais que os sistemas estendidos com $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$, esses sistemas também não derivam o problemático axioma de McKinsey. Quando adicionamos esse axioma ao sistema, os enquadramentos requerem que a relação de acessibilidade satisfaça a propriedade da atomicidade; contudo, tal propriedade não pode ser expressa em primeira ordem, como esclarecem Carnielli e Pizzi em [CP08], páginas 67 e 68.

Sabemos que os modelos multi-relacionais dispõem da mesma quantidade de relações de acessibilidade quantos são os operadores modais indexados por parâmetros tomados como primitivos na linguagem multimodal. Dada a presença do axioma esquema $\mathbf{G}(a,b,c,d)$ nos sistemas basilares anódicos e catódicos, a questão, agora, é saber como relacionar as propriedades requeridas pelas relações de acessibilidade com os parâmetros multimodais obtidos por meio dos operadores de formação dos parâmetros multimodais. Nossa tarefa, agora, é mostrar como sobrepujar esse obstáculo.

No que concerne ao esquema de axiomas $\mathbf{G}(a,b,c,d)$, que caracteriza os sistemas basilares, temos que as relações de acessibilidade nos modelos multi-relacionais devem satisfazer uma propriedade correspondente ao esquema de axiomas, a qual denotamos por $\mathbf{P}(a,b,c,d)$, onde $a,b,c,d \in \Phi$, da mesma forma que fizemos para o esquema $\mathbf{G}^{k,l,m,n}$ no Capítulo 2, chamada *propriedade de* (a,b,c,d)*-interação.* Tal propriedade é descrita como:

$$\mathbf{P}(a,b,c,d) \qquad \rho(a)^{-1} \odot \rho(c) \subseteq \rho(b) \odot \rho(d)^{-1}$$

Considerando a Definição 5.1.5, a propriedade de (a,b,c,d)-interação corresponde a $R_a^{-1} \odot R_c \subseteq R_b \odot R_d^{-1}$. Isso significa que para cada $\langle w,w'\rangle \in R_a^{-1} \odot R_c$ é tal que $\langle w,w'\rangle \in R_b \odot R_d^{-1}$ daí, pelas operações de Produto relativo e Inversa temos que:
Para todo w, w' e w'', se $\langle w'',w\rangle \in R_a$ e $\langle w'',w'\rangle \in R_c$, então existe w''' tal que $\langle w,w'''\rangle \in R_b$ e $\langle w',w'''\rangle \in R_d$.

Dessa forma, é fácil ver que a propriedade $\mathbf{P}(a,b,c,d)$ é uma generalização da propriedade $\mathbf{P}^{k,l,m,n}$ (veja página 72), associando cada parâmetro multimodal a,b,c,d aos respectivos números naturais k,l,m,n.

Teorema 5.2.1. *Toda instância de $\mathbf{G}(a,b,c,d)$ é válida em todos os enquadramentos multi-relacionais $\mathfrak{F}^{\Phi}$ nos quais as relações de acessibilidade em Ω satisfazem a propriedade de (a,b,c,d)-interação.*

Demonstração. Sejam $R_a, R_b, R_c, R_d \in \Omega$ relações que satisfazem a propriedade de (a,b,c,d)-interação. Suponha, por absurdo, que alguma instância do esquema $\mathbf{G}(a,b,c,d)$ não seja válida em algum modelo multi-relacional baseado em $\mathfrak{F}^{\Phi}$. Então, deve existir um mundo w_1 tal que:
(a) $\quad v(\langle a\rangle[b]\alpha, w_1) = 1$
(b) $\quad v([c]\langle d\rangle\alpha, w_1) = 0$

A partir de (a) e da definição de valoração no modelo multi-relacional, segue que existe um mundo w_2 tal que $w_1 R_a w_2$ e $v([b]\alpha, w_2) = 1$, e disso segue que $v(\alpha, w') = 1$ em *todo* w' tal que $w_2 R_b w'$.

A partir de (b) e da definição de valoração no modelo multi-relacional, segue que existe um mundo w_3 tal que $w_1 R_v w_3$ e $v(\langle d \rangle\alpha, w_3) = 0$, e conseqüentemente $v(\alpha, w'') = 0$ em *todo* w'' tal que $w_3 R_d w''$.

Dado que $w_1 R_a w_2$ e $w_1 R_c w_3$ então, pela Inversa, temos que $w_2 R_a^{-1} w_1$ e $w_1 R_c w_3$ daí, pelo Produto Relativo, temos que $\langle w_2, w_3 \rangle \in R_a^{-1} \odot R_c$. Dado que o modelo multi-relacional satisfaz a propriedade da (a, b, c, d)-interação então $R_a^{-1} \odot R_c \subseteq R_b \odot R_d^{-1}$ e, nesse caso, $\langle w_2, w_3 \rangle \in R_b \odot R_d^{-1}$. Pelo Produto Relativo temos que existe w_4 tal que $\langle w_2, w_4 \rangle \in R_b$ e $\langle w_4, w_3 \rangle \in R_d^{-1}$. Pela Inversa temos que $\langle w_2, w_4 \rangle \in R_b$ e $\langle w_3, w_4 \rangle \in R_d$, para algum w_4. Mas, a partir de (a) e (b) segue, respectivamente, que $v(\alpha, w_4) = 1$ e que $v(\alpha, w_4) = 0$. Contradição. $\square$

Uma vez que os axiomas dos sistemas multimodais são validados pelos enquadramentos multi-relacionais nos quais as relações de acessibilidade independem de qualquer propriedade específica, claramente esses mesmos axiomas são validados naqueles sistemas em que as relações de acessibilidade tenham que satisfazer alguma propriedade. No caso dos sistemas multimodais basilares anódicos e catódicos, dada a presença do axioma $\mathbf{G}(a, b, c, d)$, temos que as relações de acessibilidade nos modelos multi-relacionais para esses sistemas satisfazem a propriedade $\mathbf{P}(a, b, c, d)$. Resta, agora, demonstrar que o Teorema de Corretude para os sistemas multimodais basilares anódicos e catódicos via esses modelos multi-relacionais.

Corolário 5.2.2. *(Corretude para os sistemas basilares)*
Seja $\mathcal{L}$ um dos sistemas $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Phi} + \boldsymbol{G}(a, b, c, d) + \boldsymbol{G}(c, d, a, b)$, $\boldsymbol{PI}^{\Phi}(a, b, c, d)$, $\boldsymbol{mbC}^{\Phi}(a, b, c, d)$, $\boldsymbol{bC}^{\Phi}(a, b, c, d)$ e $\boldsymbol{Ci}^{\Phi}(a, b, c, d)$. Cada teorema de $\mathcal{L}$ é válido em todos os enquadramentos multi-relacionais nos quais as relações em Ω satisfazem à propriedade $\boldsymbol{P}(a, b, c, d)$.

Demonstração. Conseqüência imediata do Teorema 5.1.7 e Teorema 5.2.1. $\square$

O próximo passo é construir os modelos canônicos multi-relacionais e mostrar que tais modelos satisfazem todas as propriedades requeridas pelos modelos multi-relacionais.

A definição de conjunto de fórmulas não-trivial Λ-maximal é a mesma dada para o caso monomodal (veja Definição 1.4.5), assim como as demais definições que independem do tipo de fórmula considerado. As propriedades referentes a conjuntos não-triviais Λ-maximais continuam válidas para os sistemas multimodais anódicos e catódicos, tanto para os do tipo basilar quanto para os do tipo afirmativo (que tratamos na Seção 5.3), em razão de não serem específicas para as fórmulas modais. Veja, por exemplo, o Lema 1.4.11 e o Lema 3.2.9. Da mesma forma, o Teorema 1.4.12 e o Corolário 1.4.14, que são os análogos do Lema de Lindenbaum para conjuntos não-triviais Λ-maximais, continuam válidos para os sistemas multimodais pelo fato de que o argumento não depende do tipo de fórmula que está sendo considerado. Denotamos por Δ os conjuntos não-triviais Λ-maximais que estendem os respectivos conjuntos de fórmulas de $\mathbf{S}^{\Phi}$.

Sejam $Den_a(\Delta)$ e $Dep_a(\Delta)$ os conjuntos indexados pelo parâmetro multimodal $a \in \Phi$ chamados, respectivamente, *denecessitação de* Δ *indexado por* a, e *depossibilitação de* Δ *indexado por* a, definidos da seguinte forma:

$$Den_a(\Delta) = \{\alpha : \ [a]\alpha \in \Delta \text{ e } a \in \Phi\} \quad \text{e} \quad Dep_a(\Delta) = \{\alpha : \ \langle a\rangle\alpha \in \Delta \text{ e } a \in \Phi\}$$

É evidente, a partir da definição de $Den_a(\Delta)$ e $Dep_a(\Delta)$, e com base no Teorema 5.1.4, que todos os resultados técnicos referentes a esses conjuntos podem ser refeitos substituindo os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ pelos respectivos operadores multimodais $[a]$ e $\langle a\rangle$, indexados pelo perâmetro multimodal $a \in \Phi$. Considerando que o leitor já esteja familiarizado com as estratégias de prova, usamos tais resultados para obter a completude dos sistemas multimodais basilares anódicos e catódicos de maneira informal sem a preocupação de lembrar o leitor de que tais resultados podem ser adaptados para o caso multimodal.

Na seqüência definimos o modelo canônico para os sistemas multimodais anódicos e catódicos. Novamente, devemos separar os modelos canônicos para sistemas anódicos daqueles adequados aos sistemas catódicos, de maneira anóloga ao que fizemos no Capítulo 2 e Capitulo 3. Esses modelos serão adequados tanto para os sistemas do tipo basilar quanto para os do tipo afirmativo que veremos na próxima seção.

Definição 5.2.3. *O modelo multi-relacional canônico para um sistema multimodal anódico* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$ *é uma tripla* $\mathfrak{M}^{\Phi} = \langle \widehat{W}, \widehat{\Omega}, \widehat{v} \rangle$ *onde:*
(i) $\widehat{W}$ *é uma classe de extensões não-triviais primas maximais de* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$*;*
(ii) $\Delta \widehat{R_a} \Delta'$ *sse* $\boldsymbol{Den}_a(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq \boldsymbol{Dep}_a(\Delta)$*, para cada* $\widehat{R_a} \in \widehat{\Omega}$ *e todo* $a \in \Phi$*;*
(iii) Cada $\widehat{v_\Delta} \in \widehat{V}$ *é uma valoração multimodal de* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$*, definida a partir de algum* $\Delta \in \widehat{W}$*, por:*

$$\widehat{v_\Delta}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \textit{se } \alpha \in \Delta \\ 0 & \textit{se } \alpha \notin \Delta \end{cases}$$

No caso dos sistemas multimodais catódicos a diferença está na relação de acessibilidade, da mesma forma que fizemos anteriormente.

Definição 5.2.4. *O modelo multi-relacional canônico para um sistema multimodal catódico* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$ *é uma tripla* $\mathfrak{M}^{\Phi} = \langle \widehat{W}, \widehat{\Omega}, \widehat{v} \rangle$ *onde:*
(i) $\widehat{W}$ *é uma classe de extensões não-triviais maximais de* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$*;*
(ii) $\Delta \widehat{R_a} \Delta'$ *sse* $\boldsymbol{Den}_a(\Delta) \subseteq \Delta'$*, para cada* $\widehat{R_a} \in \widehat{\Omega}$ *e todo* $a \in \Phi$*;*
(iii) Cada $\widehat{v_\Delta} \in \widehat{V}$ *é uma valoração multimodal de* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$*, definida a partir de algum* $\Delta \in \widehat{W}$*, por:*

$$\widehat{v_\Delta}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \textit{se } \alpha \in \Delta \\ 0 & \textit{se } \alpha \notin \Delta \end{cases}$$

Resta mostrar que os dois tipos de enquadramentos multi-relacionais canônicos, nos quais os modelos canônicos multi-relacionais foram baseados, satisfazem as condições requeridas pela Definição 5.1.5.

Lema 5.2.5. *Sejam* $\mathfrak{F}^{\Phi} = \langle \widehat{W}, \widehat{\Omega} \rangle$ *um enquadramento canônico multi-relacional para um sistema multimodal anódico* $\boldsymbol{S}^{\Phi}$ *e* $\rho : \Phi \longrightarrow \widehat{\Omega}$ *definida como* $\rho(a) = \widehat{R_a}$*. Então* ρ *satisfaz as seguintes condições:*
(i) $\rho(1) = \boldsymbol{Id}$*;*
(ii) $\rho(a \cup b) = \rho(a) \cup \rho(b)$*;*
(iii) $\rho(a \odot b) = \rho(a) \odot \rho(b)$*.*

Demonstração. Usando a Definição 5.1.5 devemos mostrar que:

(i) $\widehat{R}_1 = \mathbf{Id}$.

($\Rightarrow$) Se $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_1$, então, pela Definição 5.2.3, $Den_1(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep_1(\Delta)$, ou seja, $\{\alpha : [1]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta' \subseteq \{\alpha : \langle 1 \rangle \alpha \in \Delta\}$. Sabemos, pelos axiomas (**MM5**) e (**MM6**), respectivamente, que $[1]\alpha \equiv \alpha$ e $\langle 1 \rangle \alpha \equiv \alpha$, e disso seque que $\{\alpha : \alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta' \subseteq \{\alpha : \alpha \in \Delta\}$, isto é, $\Delta \subseteq \Delta' \subseteq \Delta$. Portanto, temos que Δ e Δ' são iguais daí, $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \mathbf{Id}$.

($\Leftarrow$) Se $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \mathbf{Id}$, então, $\Delta = \Delta'$ daí, $\{\alpha : \alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta' \subseteq \{\alpha : \alpha \in \Delta\}$. Por (**MM5**) e (**MM6**) temos que $\{\alpha : [1]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta' \subseteq \{\alpha : \langle 1 \rangle \alpha \in \Delta\}$, ou seja, $Den_1(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep_1(\Delta)$. Pela Definição 5.2.3 concluímos que $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_1$.

(ii) $\widehat{R}_{a \cup b} = \widehat{R}_a \cup \widehat{R}_b$.

($\Rightarrow$) Vamos mostrar que se $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_{a \cup b}$ então $\Delta \widehat{R}_a \Delta'$ ou $\Delta \widehat{R}_b \Delta'$.

Suponha que $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_{a \cup b}$ então, pela Definição 5.2.3, $\langle \Delta, \Delta' \rangle$ cumpre as seguintes condições:

(a1) Se $[a \cup b]\alpha \in \Delta$, então $\alpha \in \Delta'$ para todo α;

(a2) Se $\delta \in \Delta'$, então $\langle a \cup b \rangle \delta \in \Delta$ para todo δ

Suponha, por redução ao absurdo, que $\langle \Delta, \Delta' \rangle \notin \widehat{R}_a$ e $\langle \Delta, \Delta' \rangle \notin \widehat{R}_b$. Isso significa que:

$$\text{Para } \langle \Delta, \Delta' \rangle \notin \widehat{R}_a : \begin{cases} (b1) \quad [a]\beta \in \Delta \ \text{ e } \ \beta \notin \Delta', \text{ para algum } \beta \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ (b2) \quad \delta' \in \Delta' \ \text{ e } \ \langle a \rangle \delta' \notin \Delta, \text{ para algum } \delta' \end{cases}$$

$$\text{Para } \langle \Delta, \Delta' \rangle \notin \widehat{R}_a : \begin{cases} (c1) \quad [b]\gamma \in \Delta \ \text{ e } \ \gamma \notin \Delta', \text{ para algum } \gamma \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ (c2) \quad \delta'' \in \Delta' \ \text{ e } \ \langle b \rangle \delta'' \notin \Delta, \text{ para algum } \delta'' \end{cases}$$

Nesse caso, temos quatro possibilidades a considerar:

1. (b1) e (c1)
2. (b1) e (c2)

3. (b2) e (c1)
4. (b2) e (c2)

Vejamos que em cada caso obtemos uma contradição:

Caso 1: Suponhamos que:

(b1) $[a]\beta \in \Delta$ e $\beta \notin \Delta'$, para algum β

(c1) $[b]\gamma \in \Delta$ e $\gamma \notin \Delta'$, para algum γ

Dado que $[a]\beta \in \Delta$ então, pelo Teorema 1.3.2 (i) e (**MP**), segue que $[a]\beta \vee [a]\gamma \in \Delta$. Pelo Lema 1.3.10 (i) e Teorema 5.1.4, temos que $[a]\beta \vee [a]\gamma \supset [a](\beta \vee \gamma)$ daí, por (**MP**), $[a](\beta \vee \gamma) \in \Delta$. Analogamente, dado que $[b]\gamma \in \Delta$, e usando o Teorema 1.3.2 (ii), temos que $[b](\beta \vee \gamma) \in \Delta$. Por (**A4**), $[a](\beta \vee \gamma) \wedge [b](\beta \vee \gamma) \in \Delta$ daí, pelo axioma (**MM1**), temos que $[a \cup b](\beta \vee \gamma) \in \Delta$. Portanto, por (a1), segue que $(\beta \vee \gamma) \in \Delta'$. Dado que Δ' é não-trivial Λ-maximal então, $\beta \in \Delta'$ (contradizendo (b1)) ou $\gamma \in \Delta'$ (contradizendo (c1)).

Caso 2: Suponhamos que:

(b1) $[a]\beta \in \Delta$ e $\beta \notin \Delta'$, para algum β

(c2) $\delta'' \in \Delta'$ e $\langle b\rangle\delta'' \notin \Delta$, para algum δ''

Dado que $\langle b\rangle\delta'' \notin \Delta$ e Δ é primo então, pelo Lema 1.4.11 (iii), segue que $\langle b\rangle\delta'' \supset [b]\beta \in \Delta$ e daí, por ($\mathbf{K3}_b$) e (**MP**), temos que $[b](\delta'' \supset \beta) \in \Delta$. Novamente, dado que $[a]\beta \in \Delta$ então, pelo Lema 1.4.11 (iii), segue que $\langle a\rangle\delta'' \supset [a]\beta \in \Delta$ e daí, por ($\mathbf{K3}_a$) e (**MP**), temos que $[a](\delta'' \supset \beta) \in \Delta$. Pelo axioma (**A4**) segue que $[a](\delta'' \supset \beta) \wedge [b](\delta'' \supset \beta) \in \Delta$ daí, pelo axioma (**MM1**), segue que $[a \cup b](\delta'' \supset \beta) \in \Delta$. Portanto, por (a1), segue que $(\delta'' \supset \beta) \in \Delta'$. Dado que $\delta'' \in \Delta'$ então, por (**MP**), segue que $\beta \in \Delta'$, o que contradiz (b1).

Caso 3: Suponhamos que:

(b2) $\delta' \in \Delta'$ e $\langle a\rangle\delta' \notin \Delta$, para algum δ'

(c1) $[b]\gamma \in \Delta$ e $\gamma \notin \Delta'$, para algum γ

Argumento análogo ao do Caso 2.

Caso 4: Suponhamos que:

(b2) $\delta' \in \Delta'$ e $\langle a\rangle\delta' \notin \Delta$, para algum δ'

(c2) $\delta'' \in \Delta'$ e $\langle b\rangle\delta'' \notin \Delta$, para algum δ''

Dado que $\langle a\rangle\delta' \notin \Delta$ então, por (**A5**), temos que $\langle a\rangle\delta' \wedge \langle a\rangle\delta'' \notin \Delta$. Pelo Lema 2.1.2 (ii) e Teorema 5.1.4, temos que $\langle a\rangle(\delta' \wedge \delta'') \notin \Delta$. Analogamente, usando o axioma (**A6**) e o fato de que $\langle b\rangle\delta'' \notin \Delta$, temos que $\langle b\rangle(\delta' \wedge \delta'') \notin \Delta$. Como Δ é não-trivial Λ-maximal, segue que $\langle a\rangle(\delta' \wedge \delta'') \vee \langle b\rangle(\delta' \wedge \delta'') \notin \Delta$. Pelo axioma (**MM2**), temos que $\langle a \cup b\rangle(\delta' \wedge \delta'') \notin \Delta$.

Por outro lado, dado que $\delta' \in \Delta'$ e $\delta'' \in \Delta'$ então, por (**A4**), temos que $\delta' \wedge \delta'' \in \Delta'$ daí, por (a2), segue que $\langle a \cup b\rangle(\delta' \wedge \delta'') \in \Delta$. Absurdo.

Portanto, $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_a \cup \widehat{R}_b$.

($\Leftarrow$) Se $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_a \cup \widehat{R}_b$, então $\Delta\widehat{R}_a\Delta'$ ou $\Delta\widehat{R}_b\Delta'$. Pela Definição 5.2.3, temos que $Den_a(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep_a(\Delta)$ ou $Den_b(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep_b(\Delta)$.

1. Dado que $Den_a(\Delta) \subseteq \Delta'$ ou $Den_b(\Delta) \subseteq \Delta'$, disso concluímos que $Den_a(\Delta) \cap Den_b(\Delta) \subseteq \Delta'$, isto é, $\{\alpha : [a]\alpha \wedge [b]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$. Pelo axioma (**MM1**) sabemos que $\{\alpha : [a \cup b]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$ e portanto temos que $Den_{a\cup b}(\Delta) \subseteq \Delta'$.
2. Dado que $\Delta' \subseteq Dep_a(\Delta)$ ou $\Delta' \subseteq Dep_b(\Delta)$, a partir daí concluímos que $\Delta' \subseteq Dep_a(\Delta) \cup Dep_b(\Delta)$, ou seja, $\Delta' \subseteq \{\alpha : \langle a\rangle\alpha \vee \langle b\rangle\alpha \in \Delta\}$. Pelo axioma (**MM2**), temos que $\Delta' \subseteq \{\alpha : \langle a \cup b\rangle\alpha \in \Delta\}$ e portanto temos que $\Delta' \subseteq Dep_{a\cup b}(\Delta)$.

De (1) e (2) segue que $Den_{a\cup b}(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep_{a\cup b}(\Delta)$. Pela definição da relação no modelo canônico (veja Definição 5.2.3) concluímos que $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_{a\cup b}$.

(iii) $\widehat{R}_{a \odot b} = \widehat{R}_a \odot \widehat{R}_b$.

($\Rightarrow$) Tome $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_{a \odot b}$. Pela Definição 5.2.3 temos que:

(Hip) $\quad Den_{a \odot b}(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq Dep_{a \odot b}(\Delta)$

Pela definição de $Den_{a \odot b}(\Delta)$ sabemos que $[a \odot b]\alpha \in \Delta$ então, pelo axioma (**MM3**), temos que $[a][b]\alpha \in \Delta$. Isso significa que para todo Δ'' tal que $\Delta \widehat{R}_a \Delta''$, a fórmula $[b]\alpha \in \Delta''$. Resta mostrar que $\Delta'' \widehat{R}_b \Delta'$. Dividimos o argumento em dois sub-argumentos:

$$\Delta' \subseteq Dep_b(\Delta'') \tag{5.1}$$

Tome $\alpha \in \Delta'$ então, pela (Hip), temos que $\alpha \in Dep_{a \odot b}(\Delta)$ daí, pela definição de $Dep_{a \odot b}(\Delta)$ temos que $\langle a \odot b \rangle \alpha \in \Delta$. Pelo axioma (**MM4**), temos que $\langle a \rangle \langle b \rangle \alpha \in \Delta$. Dado que $\Delta \widehat{R}_a \Delta''$ então, para algum Δ'', temos que $\langle b \rangle \alpha \in \Delta''$, ou seja, $\alpha \in Dep_b(\Delta'')$.

$$Den_b(\Delta'') \subseteq \Delta' \tag{5.2}$$

Suponha, por redução ao absurdo, que $\alpha \in Den_b(\Delta'')$ e $\alpha \notin \Delta'$.

1. Se $\alpha \in Den_b(\Delta'')$ então, pela definição de $Den_b(\Delta'')$ temos que $[b]\alpha \in \Delta''$. Dado que $\Delta \widehat{R}_a \Delta''$ então $[a][b]\alpha \in \Delta$ daí, pelo axioma (**MM3**), segue que $[a \odot b]\alpha \in \Delta$.
2. Se $\alpha \notin \Delta'$ então, pela (Hip), temos que $\alpha \notin Den_{a \odot b}(\Delta)$ daí, pela definição de $Den_{a \odot b}(\Delta)$, segue que $[a \odot b]\alpha \notin \Delta$. Absurdo com (1).

Portanto, de (5.1) e (5.2), temos que $Den_b(\Delta'') \subseteq \Delta' \subseteq Dep_b(\Delta'')$ para algum Δ'' tal que $\Delta \widehat{R}_a \Delta''$. Pela Definição 5.2.3 temos que $\Delta \widehat{R}_a \Delta''$ e $\Delta'' \widehat{R}_b \Delta'$, para algum Δ'' daí, pela Composição, $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_a \odot \widehat{R}_b$.

($\Leftarrow$) Se $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_a \odot \widehat{R}_b$, então, pela Composição, existe Δ'' tal que $\langle \Delta, \Delta'' \rangle \in \widehat{R}_a$ e $\langle \Delta'', \Delta' \rangle \in \widehat{R}_b$ daí, pela Definição 5.2.3, temos que:

(Hip1) $\quad Den_a(\Delta) \subseteq \Delta'' \subseteq Dep_a(\Delta)$

(Hip2) $\quad Den_b(\Delta'') \subseteq \Delta' \subseteq Dep_b(\Delta'')$.

O resultado é obtido por meio dos seguintes sub-argumentos:

$$\Delta' \subseteq \boldsymbol{Dep}_{a\odot b}(\Delta) \tag{5.3}$$

Tome $\alpha \in \Delta'$. Como, pela (Hip2), $\Delta' \subseteq \boldsymbol{Dep}_b(\Delta'')$ então $\alpha \in \boldsymbol{Dep}_b(\Delta'')$ daí, pela definição de $\boldsymbol{Dep}_b(\Delta'')$ temos que $\langle b\rangle\alpha \in \Delta''$. Pela (Hip1) temos que $\Delta'' \subseteq \boldsymbol{Dep}_a(\Delta)$ daí, $\langle b\rangle\alpha \in \boldsymbol{Dep}_a(\Delta)$, ou seja, $\langle a\rangle\langle b\rangle\alpha \in \Delta$. Pelo axioma (**MM4**) sabemos que $\langle a \odot b\rangle\alpha \equiv \langle a\rangle\langle b\rangle\alpha$ daí, $\langle a \odot b\rangle\alpha \in \Delta$. Portanto, pela definição de $\boldsymbol{Dep}_{a\odot b}(\Delta)$, temos que $\alpha \in \boldsymbol{Dep}_{a\odot b}(\Delta)$.

$$\boldsymbol{Den}_{a\odot b}(\Delta) \subseteq \Delta' \tag{5.4}$$

Suponha, por redução ao absurdo, que $\alpha \in \boldsymbol{Den}_{a\odot b}(\Delta)$ e $\alpha \notin \Delta'$.

1. Se $\alpha \in \boldsymbol{Den}_{a\odot b}(\Delta)$ então, por definição, temos que $[a \odot b]\alpha \in \Delta$ daí, pelo axioma (**MM3**) temos que $[a][b]\alpha \in \Delta$. Pela definição de $\boldsymbol{Den}_a(\Delta)$ temos que $[b]\alpha \in \boldsymbol{Den}_a(\Delta)$. Pela (Hip1) temos que $\boldsymbol{Den}_a(\Delta) \subseteq \Delta''$ daí, $[b]\alpha \in \Delta''$.
2. Se $\alpha \notin \Delta'$ como, pela (Hip2), $\boldsymbol{Den}_b(\Delta'') \subseteq \Delta'$, então $\alpha \notin \boldsymbol{Den}_b(\Delta'')$ daí, $[b]\alpha \notin \Delta''$. Absurdo com (1).

Portanto, a partir de (5.4) e (5.3) temos que $\boldsymbol{Den}_{a\odot b}(\Delta) \subseteq \Delta' \subseteq \boldsymbol{Dep}_{a\odot b}(\Delta)$ daí, pela Definição 5.2.3, concluímos que $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_{a\odot b}$.

□

Um teorema bastante análogo ao que acabamos de obter para sistemas anódicos obtém-se para sistemas catódicos; a demonstração é na verdade uma simplificação da demonstração do Lemma 5.2.5, mas para que os resultados fiquem auto-contidos julgamos conveniente refazer todos os passos do argumento.

Lema 5.2.6. *Sejam $\mathfrak{F}^\Phi = \langle \widehat{W}, \widehat{\Omega} \rangle$ um enquadramento multi-relacional canônico para um sistema multimodal catódico $\boldsymbol{S}^\Phi$ e $\rho : \Phi \longrightarrow \widehat{\Omega}$ definida como $\rho(a) = \widehat{R}_a$. Então ρ satisfaz as seguintes condições:*
(i) $\rho(1) = \boldsymbol{Id}$;

(ii) $\rho(a \cup b) = \rho(a) \cup \rho(b)$;
(iii) $\rho(a \odot b) = \rho(a) \odot \rho(b)$;
(iv) $\rho(0) = \boldsymbol{0}$.

Demonstração. Usando a Definição 5.1.5 devemos mostrar que:

(i) $\widehat{R}_1 = \mathbf{Id}$.

($\Rightarrow$) Se $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \widehat{R}_1$, então, pela Definição 5.2.4, $Den_1(\Delta) \subseteq \Delta'$, ou seja, $\{\alpha : [1]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$. Sabemos, pelo axioma (**MM5**), que $[1]\alpha \equiv \alpha$, daí $\{\alpha : \alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$, isto é, $\Delta \subseteq \Delta'$. Como Δ e Δ' são extensões não-triviais maximais de $\mathbf{S}$, então vale a igualdade. Portanto $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \mathbf{Id}$.

($\Leftarrow$) Se $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \mathbf{Id}$, então, $\Delta = \Delta'$ daí, $\{\alpha : \alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$. Pelo axioma (**MM5**) temos que $\{\alpha : [1]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$, ou seja, $Den_1(\Delta) \subseteq \Delta'$. Pela Definição 5.2.4 segue que $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \widehat{R}_1$.

(ii) $\widehat{R}_{a\cup b} = \widehat{R}_a \cup \widehat{R}_b$.

($\Rightarrow$) Análogo ao Caso (1), item (ii), do Lema 5.2.5.

($\Leftarrow$) Se $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \widehat{R}_a \cup \widehat{R}_b$, então $\Delta\widehat{R}_a\Delta'$ ou $\Delta\widehat{R}_b\Delta'$. Pela Definição 5.2.4, temos que $Den_a(\Delta) \subseteq \Delta'$ ou $Den_b(\Delta) \subseteq \Delta'$ daí, $Den_a(\Delta) \cap Den_b(\Delta) \subseteq \Delta'$, ou seja, $\{\alpha : [a]\alpha \wedge [b]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$. Pelo axioma (**MM1**) temos que $\{\alpha : [a \cup b]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$. Portanto, $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \widehat{R}_{a\cup b}$.

(iii) $\widehat{R}_{a\odot b} = \widehat{R}_a \odot \widehat{R}_b$.

($\Rightarrow$) Tome $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \widehat{R}_{a\odot b}$. Pela Definição 5.2.4 temos que $Den_{a\odot b}(\Delta) \subseteq \Delta'$, ou seja, $\{\alpha : [a \odot b]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$ (observe que $\alpha \in \Delta'$). Sabemos, pelo axioma (**MM3**), que $[a \odot b]\alpha \equiv [a][b]\alpha$, daí $\{\alpha : [a][b]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$ (observe que $[a][b]\alpha \in \Delta$). Dado que $[a][b]\alpha \in \Delta$, então $[b]\alpha \in \Delta''$, para todo Δ'' tal que $\Delta\widehat{R}_a\Delta''$. Como $\alpha \in \Delta'$ e $[b]\alpha \in \Delta''$, então existe Δ'' tal que $\langle\Delta, \Delta''\rangle \in \widehat{R}_a$ e $\langle\Delta'', \Delta'\rangle \in \widehat{R}_b$. Portanto, pela operação de Composição, segue que $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \widehat{R}_a \odot \widehat{R}_b$.

($\Leftarrow$) Se $\langle\Delta, \Delta'\rangle \in \widehat{R}_a \odot \widehat{R}_b$, existe Δ'' tal que $\langle\Delta, \Delta''\rangle \in \widehat{R}_a$ e $\langle\Delta'', \Delta'\rangle \in \widehat{R}_b$ daí, pela Definição 5.2.4, temos que $Den_a(\Delta) \subseteq \Delta''$ e $Den_b(\Delta'') \subseteq \Delta'$.

Como $\{\alpha : [b]\alpha \in \Delta''\} \subseteq \Delta'$, isso significa que para todo $\alpha \in \Delta'$, $[b]\alpha \in \Delta''$. Como $Den_a(\Delta) \subseteq \Delta''$ então $[a][b]\alpha \in \Delta$, para todo $\alpha \in \Delta'$. Portanto, $\{\alpha : [a][b]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$ daí, por (**MM3**), $\{\alpha : [a \odot b]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$, isto é, $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_{a \odot b}$.

(iv) $\widehat{R}_{0} = \emptyset$.

Suponha, por absurdo que $\widehat{R}_{0} \neq \emptyset$, isto é, que $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \widehat{R}_{0}$. Pela Definição 5.2.4, $Den_0(\Delta) \subseteq \Delta'$, ou seja, $\{\alpha : [0]\alpha \in \Delta\} \subseteq \Delta'$. Pelo axioma (**MM7**), temos que $[0]\alpha \equiv \top$. Dado que $\top \in \Delta$, então $\alpha \in \Delta'$, para todo α, logo Δ' é trivial. Absurdo com o fato de Δ e Δ' serem maximais não-triviais.

$\square$

Com isso mostramos que o enquadramento multi-relacional canônico satisfaz os requerimentos da Definição 5.1.5. Resta mostrar que a valoração no modelo multi-relacional canônico (tanto para os sistemas anódicos quanto para os catódicos) satisfaz as propriedades de uma função característica.

Usando o fato de que todos os resultados obtidos nos Capítulos 2 e 3, relevantes para a obtenção da completude dos sistemas anódicos e catódicos, podem ser refeitos para o caso multimodal, em face do Teorema 5.1.4, o Teorema Fundamental do Modelo Canônico pode ser igualmente obtido para os modelos canônicos multi-relacionais, como mostramos a seguir. Restringimo-nos para o caso mais amplo, dos sistemas basilares, que é de nosso particular interesse para esse capítulo. O caso multimodal pode ser obtido de modo padrão, restringindo os argumentos.

Teorema 5.2.7. *(Teorema Fundamental dos modelos canônicos multi-relacionais anódicos e catódicos).*
Seja $\boldsymbol{S}^{\Phi}(a,b,c,d)$ um sistema basilar anódico (catódico) e $\langle \widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V} \rangle$ um modelo multi-relacional canônico para $\boldsymbol{S}^{\Phi}(a,b,c,d)$. Então, para qualquer fórmula multimodal α e qualquer $\Delta \in \widehat{W}$, temos:

$$v_{\Delta}(\alpha) = \begin{cases} 1 & se\ \alpha \in \Delta \\ 0 & se\ \alpha \notin \Delta \end{cases}$$

Demonstração. A prova é por indução na complexidade das fórmulas e sub-indução na complexidade do parâmetro multimodal c. A indução referente ao parâmetro multimodal é a mesma do Teorema 5.1.4 que mostra a validade dos axiomas $(\mathbf{K}_a)$–$(\mathbf{K3}_a)$ e a regra de $(\mathbf{Nec}_a)$ para todo $a \in \Phi$. A indução na complexidade das fórmulas é como a do Teorema 2.1.15 no caso de $\mathbf{S}^{\Phi}(a, b, c, d)$ ser anódico, e como a do Teorema 3.2.12 no caso de $\mathbf{S}^{\Phi}(a, b, c, d)$ ser catódico. Em outras palavras, o argumento pode facilmente ser refeito trocando-se as modalidades $\Box$ e $\Diamond$ pelas respectivas modalidades $[r]$ e $\langle r \rangle$, para $r \in \Phi$, nos referidos teoremas. $\Box$

Passamos agora ao resultado mais importante referente aos sistemas multimodais basilares, que é sua caracterização semântica por meio dos enquadramentos multi-relacionais correspondentes. É importante ressaltar, para os sistemas anódicos, que os operadores modais $[r]$ e $\langle r \rangle$, para cada $r \in \Phi$, são tomados como primitivos, já que esses são desprovidos da negação que os faria interdependentes. Por essa razão, como amplamente discutido no Capítulo 2, a completude para os sistemas basilares anódicos só caracteriza as deduções factuais (veja Definição 2.1.16). Por outro lado, nos sistemas catódicos que definem uma negação clássica todas as deduções são factuais (veja Lema 3.2.10).

Teorema 5.2.8. *(Completude para os sistemas basilares)*
Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de sentenças da linguagem multimodal de $\mathcal{L}$, onde $\mathcal{L}$ representa um dos sistemas basilares $\boldsymbol{K}^{\supset,\wedge,\Phi}+\boldsymbol{G}(a,b,c,d)+\boldsymbol{G}(a,b,c,d)$, $\boldsymbol{PI}^{\Phi}(a,b,c,d)$, $\boldsymbol{mbC}^{\Phi}(a,b,c,d)$, $\boldsymbol{bC}^{\Phi}(a,b,c,d)$ ou $\boldsymbol{Ci}^{\Phi}(a,b,c,d)$. Nessas condições, respectivamente, se $\Gamma \vDash \alpha$, então $\Gamma \vdash \alpha$.

Demonstração. Suponha que $\Gamma \nvdash \alpha$ para algum α então, pelo Corolário 1.4.14, podemos estender Γ a uma $\mathcal{L}$-teoria Δ que é α-saturada. Como $\Delta \nvdash \alpha$ então $\alpha \notin \Delta$ e daí, pelo Teorema 5.2.7, temos que $v_{\Delta}(\alpha) = 0$. Portanto, existe um modelo multi-relacional que falsifica α, a saber, o modelo multi-relacional canônico para $\mathcal{L}$, daí $\Delta \nvDash \alpha$. Como $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Gamma \nvDash \alpha$. $\Box$

As classes dos sistemas multimodais analisadas nesta seção atingem uma generalidade considerável, embora sujeitas à seguinte crítica: qual é a finalidade de sistemas tão gerais, se os sistemas mais interessantes (ou mais investigados) são justamente aqueles que podem ser obtidos como casos particulares dos sistemas já estudados nos capítulos iniciais desta Tese?

A diferença básica entre os sistemas multimodais (tratados nesta seção) e os sistemas meramente modais (tratados nos primeiros capítulos) é que no caso dos sistemas multimodais os modelos permitem uma quantidade arbitrária de relações de acessibilidade. Nos modelos relacionais (mono-relacionais) mesmo naqueles adequados a certos sistemas bi-modais (veja Capítulo 2), a relação de acessibilidade é a mesma para ambas as modalidades tomadas como primitivas. Isso quer dizer que os operadores modais primitivos daqueles sistemas são indexados pelo mesmo parâmetro multimodal, o que equivale a dizer que os operadores modais são intrinsicamente duais.

Justamente para escapar dessa dualidade intrínsica é que nos dedicamos a estudar detalhadamente as classes de sistemas multimodais basilares. Isso nos possibilita tratar sistemas que permitem misturar modalidades de diferentes tipos. Por exemplo, com o estudo dos sistemas basilares podemos agora pensar em versões anódicas e catódicas de sistemas que lidam com modalidades referentes ao tempo: podemos conceber agora uma modalidade para expressar o passado, e outra para expressar o futuro. Essas são as chamadas *lógicas temporais*. O estudo dos sistemas basilares anódicos e catódicos nos abre caminho para analisar questões importantes nos diversos sistemas temporais, levando em conta que a negação não precisa ser necessariamente clássica, ou que sequer possa existir, e isso nos dá uma perspectiva completamente nova a respeito do tempo.

A próxima seção analisa as dificuldades em se caracterizar uma classe de sistemas ainda mais geral: a classe dos sistemas afirmativos.

5.3 Sistemas afirmativos

Nesta seção fazemos apenas um ensaio a respeito da caracterização dos sistemas afirmativos anódicos e catódicos. Um estudo detalhado a respeito dos sistemas afirmativos (com negação clássica) é dado por Carnielli e Pizzi, em

[CP08]. Nossa abordagem segue essa mesma linha. Demonstramos apenas os resultados que aparecem como exercício em [CP08] e que independem da negação do sistema.

Muitos dos resultados obtidos nas seções anteriores são válidos também para os sistemas afirmativos anódicos e catódicos. O grande resultado da seção, crucial para a caracterização dos sistemas afirmativos, é o Teorema Fundamental para sistemas afirmativos para o caso anódico e catódico (veja Teorema 5.3.5 e Teorema 5.3.6), no entanto as demonstrações desses teoremas são deixadas para trabalhos futuros.

O que segue será relevante para definir os chamados *sistemas multimodais afirmativos*. Para tanto, recorremos a algumas definições.

A noção de *ocorrência negativa* e *afirmativa* de uma variável p numa dada fórmula α é definida indutivamente da seguinte forma:

1. p não ocorre em $\bot$ nem em q, para todo $q \neq p$;
2. p é afirmativa em p;
3. Se p é afirmativa em α, então p é afirmativa em $\beta \supset \alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\beta \wedge \alpha$, $\circ\alpha$, $[c]\alpha$, $\langle c\rangle\alpha$, para todo $c \in \Phi$;
4. Nos demais casos a ocorrência de p é negativa.

Por exemplo, na implicação $p \supset q$, a ocorrência de q é afirmativa, enquanto que a ocorrência de p é negativa. Da mesma forma a ocorrência de p em $p \supset p$ é negativa no antecedente da implicação, e afirmativa no conseqüente.

Definição 5.3.1. *Um fórmula α é chamada afirmativa na variável p se toda ocorrência de p for afirmativa em α. Caso contrário α é negativa.*

Para os sistemas que têm presente o conectivo de negação ($\neg$) na linguagem, temos que se α é afirmativa (negativa), então $\neg\alpha$ é negativa (afirmativa). Se α é negativa (afirmativa) ou β é afirmativa, então $\alpha \supset \beta$ é afirmativa (negativa). Se α e β são ambas afirmativas (ambas negativas), então $\alpha \wedge \beta$ é afirmativa (negativa).

Chamamos *afirmativo* ao sistema $\mathbf{S}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ obtido a partir do sistema multimodal $\mathbf{S}^{\Phi}$ (veja Definição 5.1.3) acrescido do seguinte esquema de axiomas:

$\mathbf{G}(a,b,\varphi)$ $\quad\langle a\rangle[b]p \supset \varphi,$

onde $a, b \in \Phi$ e φ é uma fórmula afirmativa que tem apenas p como variável proposicional.

Denotamos por $\mathbf{G}(\varphi,a,b)$ a instância dual do esquema $\mathbf{G}(a,b,\varphi)$, dada pela fórmula $\varphi \supset [a]\langle b\rangle p$. Note que a instância dual também é um esquema afirmativo, uma vez que a fórmula $[a]\langle b\rangle p$ é uma fórmula afirmativa que depende somente da variável p.

Não é difícil ver que o axioma $\mathbf{G}(a,b,\varphi)$ generaliza o axioma $\mathbf{G}(a,b,c,d)$ dado que $[c]\langle d\rangle p$ é uma fórmula afirmativa que tem somente p como variável proposicional. Mais ainda, embora sejam mais gerais, os sistemas afirmativos também excluem o axioma de McKinsey, como advertem Carnielli e Pizzi em [CP08]:

> "The before stated properties show that the $G(a,b,\varphi)$ axioms are much more comprehensive than the $G(a,b,c,d)$ axioms. Their generality notwithstanding, they do not cover some cases such as:
>
> *(i)* $[a]\langle b\rangle\alpha \supset \langle c\rangle[d]\alpha$, which is a generalization of the known McKinsey axiom and does not correspond to any first-order property (see Section 5.1);
>
> *(ii)* $[a]([a]p \vee p) \supset \langle a\rangle([a]p \wedge p)$, which equally does not correspond to any first-order property."

Denotamos por $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Phi}$+$\mathbf{G}(a,b,\varphi)$+$\mathbf{G}(\varphi,a,b)$ a classe dos *sistemas multimodais anódicos afirmativos*, onde φ é uma fórmula afirmativa que depende de p e Φ indica o conjunto dos parâmetros multimodais.

Assim como no caso basilar, as classes dos *sistemas multimodais catódicos afirmativos* são separadas em 4 classes:

- $\mathbf{PI}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ é $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Phi}$+$\mathbf{G}(a,b,\varphi)$+$\mathbf{G}(\varphi,a,b)$ acrescido de (**PI**);
- $\mathbf{mbC}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ é $\mathbf{PI}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ acrescido de (**mbC**);
- $\mathbf{bC}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ é $\mathbf{mbC}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ acrescido de (**bC**);

- $\mathbf{Ci}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ é $\mathbf{bC}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ acrescido de $(\mathbf{Ci})$.

A completude para os sistemas afirmativos $\mathbf{S}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ é similar à dos sistemas basilares $\mathbf{S}^{\Phi}(a,b,c,d)$, com um pouco mais de sofisticação. A seguir, mostramos alguns resultados que conduzem à completude dos sistemas afirmativos $\mathbf{S}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ anódicos e catódicos.

Na Definição 5.1.5 vimos que os enquadramentos multi-relacionais $\mathfrak{F}^{\Phi}$ dependem da existência de uma função ρ que relaciona parâmetros multimodais com as relações de acessibilidade em $\mathfrak{F}^{\Phi}$. No caso dos sistemas afirmativos, dado que o esquema $\mathbf{G}(a,b,\varphi)$ é obtido substituindo-se em $\mathbf{G}(a,b,c,d)$ a subfórmula $[c]\langle d\rangle p$ (que depende apenas de p) pela fórmula afirmativa φ que depende de p, a Definição 5.3.2, a seguir, mostra como substituir a relação determinada por ρ que depende apenas dos parâmetros c e d, por uma operação F^{φ} que depende somente de φ.

Definição 5.3.2. *Seja $\boldsymbol{S}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ um sistema afirmativo anódico (catódico) e $\mathfrak{F}^{\Phi}$ um enquadramento multi-relacional para $\boldsymbol{S}^{\Phi}(a,b,\varphi)$. Para cada fórmula afirmativa φ, a operação $F^{\varphi}:\Omega \longrightarrow \Omega$ baseada em φ sobre a classe Ω de relações binárias é definida indutivamente da seguinte forma:*
(i) $F^{p}(R) = R$, *onde* $p \in Var$;
(ii) $F^{\perp}(R) = \boldsymbol{0}$ *(somente para os catódicos);*
(iii) $F^{\top}(R) = \boldsymbol{Id}$;
(iv) $F^{\alpha\wedge\beta}(R) = F^{\alpha}(R) \cap F^{\beta}(R)$;
(v) $F^{\alpha\vee\beta}(R) = F^{\alpha}(R) \cup F^{\beta}(R)$;
(vi) $F^{\langle a\rangle\alpha}(R) = R_a \odot F^{\alpha}(R)$;
(vii) $F^{[a]\alpha}(R) = R_a \Rightarrow F^{\alpha}(R)$.

Da mesma forma que ao esquema de axiomas $\mathbf{G}(a,b,c,d)$ corresponde a propriedade de (a,b,c,d)-interação, ao esquema de axiomas $\mathbf{G}(a,b,\varphi)$ associa-se a *propriedade de (a,b,φ)-interação*, também denotada por $\mathbf{P}(a,b,\varphi)$, expressada como:

$$\mathbf{P}(a,b,\varphi) \qquad R_a \subseteq F^{\varphi}(R_b^{-1})$$

A corretude dos sistemas afirmativos anódicos e catódicos pode ser obtida pelo corolário a seguir e pelo Teorema 5.1.7.

Corolário 5.3.3. *Toda instância de* $\boldsymbol{S}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ *é valida em todos os enquadramentos muti-relacionais* $\mathfrak{F}^{\Phi}$ *nos quais as relações em* Ω *satisfazem a propriedade* $\boldsymbol{P}(a,b,\varphi)$.

Demonstração. Sejam $R_a, R_b \in \Omega$ relações que satisfazem $\mathbf{P}(a,b,\varphi)$. Suponha, por absurdo, que alguma instância do esquema $\mathbf{G}(a,b,\varphi)$ não seja válida em algum modelo multi-relacional baseado em $\mathfrak{F}^{\Phi}$. Então, deve existir um mundo w_1 tal que:

(a) $v(\langle a\rangle[b]\alpha, w_1) = 1$

(b) $v(\varphi, w_1) = 0$

A partir de (a) e da definição de valoração no modelo multi-relacional, segue que existe um mundo w_2 tal que $w_1 R_a w_2$ e $v([b]\alpha, w_2) = 1$, e disso segue que $v(\alpha, w') = 1$ em *todo* w' tal que $w_2 R_b w'$.

Dado que $R_a \subseteq F^{\varphi}(R_b^{-1})$ então, se $\langle w_1, w_2\rangle \in R_a$ então $\langle w_1, w_2\rangle \in F^{\varphi}(R_b^{-1})$. Para concluir o argumento devemos mostrar, por indução na complexidade de φ, que o absurdo acontece em cada caso, usando a Definição 5.3.2. $\square$

O teorema a seguir é essencial para mostrar que a propriedade $\mathbf{P}(a,b,\varphi)$ é de fato uma generalização da propriedade $\mathbf{P}(a,b,c,d)$, e aparece como um exercício em [CP08] (veja exercício 8.12). Por isso julgamos interessante apresentar os detalhes do argumento.

Teorema 5.3.4. *Seja* φ *uma fórmula afirmativa. Então as seguintes igualdades são válidas para a operação* F^{φ}*:*

(i) $F^{\langle 1\rangle\varphi}(R) = F^{\varphi}(R)$;

(ii) $F^{[1]\varphi}(R) = F^{\varphi}(R)$;

(iii) $F^{\langle a\cup b\rangle\varphi}(R) = (R_a \cup R_b) \odot F^{\varphi}(R)$;

(iv) $F^{[a\cup b]\varphi}(R) = (R_a \cup R_b) \Rightarrow F^{\varphi}(R)$;

(v) $F^{\langle a\odot b\rangle\varphi}(R) = (R_a \odot R_b) \odot F^{\varphi}(R)$;

(vi) $F^{[a\odot b]\varphi}(R) = (R_a \odot R_b) \Rightarrow F^{\varphi}(R)$;

(vii) $F^{[0]\varphi}(R) = 0 \Rightarrow F^{\varphi}(R) = \mathbf{1}$;

(viii) $F^{\langle 0\rangle\varphi}(R) = 0 \odot F^{\varphi}(R) = 0$.

Demonstração. (i) Conseqüência imediata de (**MM6**).

(ii) Conseqüência imediata de (**MM5**).

(iii) Primeiramente vejamos que:

$$F^{\langle a\cup b\rangle\varphi}(R) = [R_a \odot F^{\varphi}(R)] \cup [R_b \odot F^{\varphi}(R)] \tag{5.5}$$

De fato, por (**MM2**), Definição 5.3.2 (v) e (vi), a seguinte igualdade é mantida: $F^{\langle a\cup b\rangle\varphi}(R) \overset{(MM2)}{=} F^{\langle a\rangle\varphi\vee\langle b\rangle\varphi}(R) \overset{(v)}{=} F^{\langle a\rangle\varphi}(R) \cup F^{\langle b\rangle\varphi}(R) \overset{(vi)}{=} [R_a \odot F^{\varphi}(R)] \cup [R_b \odot F^{\varphi}(R)]$.

($\Rightarrow$) Usando a igualdade (5.5), devemos mostrar que:

$$[R_a \odot F^{\varphi}(R)] \cup [R_b \odot F^{\varphi}(R)] \subseteq (R_a \cup R_b) \odot F^{\varphi}(R)$$

Se $\langle w, w'\rangle \in [R_a \odot F^{\varphi}(R)] \cup [R_b \odot F^{\varphi}(R)]$, então $\langle w, w'\rangle \in R_a \odot F^{\varphi}(R)$ ou $\langle w, w'\rangle \in R_b \odot F^{\varphi}(R)$.

Considere o primeiro caso, o outro é análogo. Pelo Produto Relativo de relações temos que existe w'' tal que $\langle w, w''\rangle \in R_a$ e $\langle w'', w'\rangle \in F^{\varphi}(R)$. Temos também que se $\langle w, w''\rangle \in R_a$ então $\langle w, w''\rangle \in R_a \cup R_b$ daí, pela Composição de relações temos que $\langle w, w'\rangle \in (R_a \cup R_b) \odot F^{\varphi}(R)$.

($\Leftarrow$) Usando a igualdade (5.5), devemos mostrar que:

$$(R_a \cup R_b) \odot F^{\varphi}(R) \subseteq [R_a \odot F^{\varphi}(R)] \cup [R_b \odot F^{\varphi}(R)]$$

Tome $\langle w, w'\rangle \in (R_a \cup R_b) \odot F^{\varphi}(R)$, pela Composição de relações temos que existe w'' tal que $\langle w, w''\rangle \in R_a \cup R_b$ e $\langle w'', w'\rangle \in F^{\varphi}(R)$. Agora, se $\langle w, w''\rangle \in R_a \cup R_b$ então $\langle w, w''\rangle \in R_a$ ou $\langle w, w''\rangle \in R_b$ daí, temos que $[\langle w, w''\rangle \in R_a$ e $\langle w'', w'\rangle \in F^{\varphi}(R)]$ ou $[\langle w, w''\rangle \in R_b$ e $\langle w'', w'\rangle \in F^{\varphi}(R)]$. Isso significa que $\langle w, w'\rangle \in [R_a \odot F^{\varphi}(R)] \cup [R_b \odot F^{\varphi}(R)]$.

(iv) Primeiramente vejamos que:

$$F^{[a\cup b]\varphi}(R) = [R_a \Rightarrow F^{\varphi}(R)] \cap [R_b \Rightarrow F^{\varphi}(R)] \tag{5.6}$$

De fato, por (**MM1**), Definição 5.3.2 (iv) e (vii), a seguinte igualdade é mantida: $F^{[a\cup b]\varphi}(R) \overset{(MM1)}{=} F^{[a]\varphi\wedge[b]\varphi}(R) \overset{(iv)}{=} F^{[a]\varphi}(R) \cap F^{[b]\varphi}(R) \overset{(vii)}{=} [R_a \Rightarrow F^{\varphi}(R)] \cap [R_b \Rightarrow F^{\varphi}(R)]$.

($\Rightarrow$) Usando a igualdade (5.6), devemos mostrar que:

$$[R_a \Rightarrow F^{\varphi}(R)] \cap [R_b \Rightarrow F^{\varphi}(R)] \subseteq (R_a \cup R_b) \Rightarrow F^{\varphi}(R)$$

Se $\langle w, w' \rangle \in [R_a \Rightarrow F^{\varphi}(R)] \cap [R_b \Rightarrow F^{\varphi}(R)]$, então $\langle w, w' \rangle \in R_a \Rightarrow F^{\varphi}(R)$ e $\langle w, w' \rangle \in R_b \Rightarrow F^{\varphi}(R)$. Pela Implicação Relativa, para todo w'' temos que $\langle w, w'' \rangle \in R_a$ implica $\langle w'', w' \rangle \in F^{\varphi}(R)$ e também $\langle w'', w' \rangle \in R_b$ implica $\langle w'', w' \rangle \in F^{\varphi}(R)$. Logo, temos que para todo w'' $\langle w, w'' \rangle \in R_a \cup R_b$ implica $\langle w'', w' \rangle \in F^{\varphi}(R)$. Portanto, $\langle w, w' \rangle \in (R_a \cup R_b) \Rightarrow F^{\varphi}(R)$.

($\Leftarrow$) Usando a igualdade (5.6), devemos mostrar que:

$$(R_a \cup R_b) \Rightarrow F^{\varphi}(R) \subseteq [R_a \Rightarrow F^{\varphi}(R)] \cap [R_b \Rightarrow F^{\varphi}(R)]$$

Suponha que $\langle w, w' \rangle \notin [R_a \Rightarrow F^{\varphi}(R)] \cap [R_b \Rightarrow F^{\varphi}(R)]$. Disso segue que $\langle w, w' \rangle \notin [R_a \Rightarrow F^{\varphi}(R)]$ ou $\langle w, w' \rangle \notin [R_b \Rightarrow F^{\varphi}(R)]$.

Se $\langle w, w' \rangle \notin [R_a \Rightarrow F^{\varphi}(R)]$ então, pela definição de Implicação Relativa temos que existe w'' tal que $\langle w, w'' \rangle \in R_a$ e $\langle w'', w' \rangle \notin F^{\varphi}(R)$. Analogamente, $\langle w, w'' \rangle \in R_b$ e $\langle w'', w' \rangle \notin F^{\varphi}(R)$.

Dado que $\langle w, w'' \rangle \in R_a$ ou $\langle w, w'' \rangle \in R_b$, então $\langle w, w' \rangle \in (R_a \cup R_b)$ e também $\langle w'', w' \rangle \notin F^{\varphi}(R)$. Portanto, pela Implicação Relativa, temos que $\langle w, w' \rangle \notin (R_a \cup R_b) \Rightarrow F^{\varphi}(R)$.

(v) Pela Definição 5.3.2 (vi) temos que $F^{\langle a \odot b \rangle \varphi}(R) = R_{a \odot b} \odot F^{\varphi}(R)$ daí, pelo Lema 5.2.5 (iii) (no caso dos sistemas catódicos use o Lema 5.2.6 (iii)), temos que $R_{a \odot b} \odot F^{\varphi}(R) = (R_a \odot R_b) \odot F^{\varphi}(R)$. Portanto, segue que $F^{\langle a \odot b \rangle \varphi}(R) = (R_a \odot R_b) \odot F^{\varphi}(R)$.

(vi) Pela Definição 5.3.2 (vii) temos que $F^{[a \odot b] \varphi}(R) = R_{a \odot b} \Rightarrow F^{\varphi}(R)$ daí, pela Definição 5.1.5 (iii), temos que $R_{a \odot b} \Rightarrow F^{\varphi}(R) = (R_a \odot R_b) \Rightarrow F^{\varphi}(R)$. Portanto, $F^{[a \odot b] \varphi}(R) = (R_a \odot R_b) \Rightarrow F^{\varphi}(R)$.

(vii) Pelo Lema 5.2.6 (iv), sabemos que $\rho(\mathit{0}) = \mathbf{0}$, ou seja, $R_{\mathit{0}} = \mathbf{0}$. Usando esse fato mais a Definição 5.3.2 (vii) mostra-se a seguinte igualdade:

$$F^{[\mathit{0}] \varphi}(R) = (\mathbf{0} \Rightarrow F^{\varphi}(R)) \tag{5.7}$$

De fato, $F^{[0]\varphi}(R) \stackrel{5.3.2}{=} (R_0 \Rightarrow F^{\varphi}(R)) \stackrel{5.2.6}{=} (\mathbf{0} \Rightarrow F^{\varphi}(R))$.

Falta mostrar que a igualdade (5.7) corresponde à Relação Universal. Basta mostrar que $(\mathbf{0} \Rightarrow F^{\varphi}(R)) = \mathbf{1}$.

Tome $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in (\mathbf{0} \Rightarrow F^{\varphi}(R))$. Pela Implicação Relativa, para todo Δ'', temos que $\langle w, w'' \rangle \in R_0$ implica $\langle w'', w' \rangle \in F^{\varphi}(R)$. Dado que não existe w'' que falsifique essa implicação então, por vacuidade, todo par $\langle w, w'' \rangle$ satifaz a implicação. Portanto $(\mathbf{0} \Rightarrow F^{\varphi}(R)) = \mathbf{1}$.

(viii) A partir da Definição 5.3.2 (vi) temos que $F^{\langle 0 \rangle \varphi}(R) = R_0 \odot F^{\varphi}(R)$. Pelo Lema 5.2.6 (iv) temos que $R_0 \odot F^{\varphi}(R) = \emptyset \odot F^{\varphi}(R)$. Pela Composição, temos que $\emptyset \odot F^{\varphi}(R) = \{\langle w, w' \rangle : \exists w''(\langle w, w'' \rangle \in \emptyset \text{ e } \langle w'', w' \rangle \in F^{\varphi}(R))\}$.

Dado que o conjunto vazio não tem elementos, a situação acima não acontece daí, $\emptyset \odot F^{\varphi}(R) = \emptyset$. Portanto, $F^{\langle 0 \rangle \varphi}(R) = \emptyset$.

□

Os enquadramentos e os modelos canônicos multi-relacionais para os sistemas afirmativos anódicos e catódicos são, respectivamente, os dados na Definição 5.2.3 e na Definição 5.2.4. Para concluir o argumento a respeito da completude dos sistemas multimodais afirmativos anódicos e catódicos devemos mostrar os seguintes resultados.

Teorema 5.3.5. *(Teorema Fundamental para sistemas afirmativos anódicos) Seja φ uma fórmula afirmativa que depende de p, $\varphi(\alpha)$ denota a susbtituição de p por α em φ, Δ e Δ' são extensões não-triviais maximais de $\boldsymbol{S}^{\Phi}(a, b, \varphi)$ e $a \in \Phi$. Então:*

$$\langle \Delta, \Delta' \rangle \in F^{\varphi}(R_a^{-1}) \text{ sse } \{\varphi(\alpha) : [a]\alpha \in \Delta'\} \subseteq \Delta \subseteq \{\varphi(\alpha) : \langle a \rangle \alpha \in \Delta'\}$$

onde F^{φ} é a operação definida acima.

Demonstração. Indução na complexidade das fórmulas. □

O resultado a seguir é a versão catódica do teorema acima. A demonstração para esse caso é mais natural dado que a definição de modelo canônico para os sistemas catódicos (que definem uma negação clássica) é análoga às definições padrão de modelo canônico para as lógicas modais usuais. O caso mais complicado é o referente aos sistemas anódicos dada a escassez de recursos. A demonostração é bastante intrincada e não será feita aqui, embora possamos com segurança conjecturar que tais resultados possam ser obtidos.

Teorema 5.3.6. *(Teorema Fundamental para sistemas afirmativos)*
Seja φ uma fórmula afirmativa que depende de p, $\varphi(\alpha)$ denota a susbtituição de p por α em φ, Δ e Δ' são extensões não-triviais maximais de $\boldsymbol{S}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ e $a \in \Phi$. Então:

$$\langle \Delta, \Delta' \rangle \in F^{\varphi}(R_a^{-1}) \text{ sse } \{\varphi(\alpha) : [a]\alpha \in \Delta'\} \subseteq \Delta$$

onde F^{φ} é a operação definida acima.

Demonstração. Indução na complexidade de φ. □

Com isso, pode-se estabelecer a caracterização dos sistemas afirmativos anódicos e catódicos através dos enquadramentos multi-relacionais.

Teorema 5.3.7. *(Completude dos sistemas afirmativos)*
Seja $\boldsymbol{S}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ um sistema multimodal afirmativo anódico (catódico) axiomatizado pela instância $\boldsymbol{G}(a,b,\varphi)$. Então $\boldsymbol{S}^{\Phi}(a,b,\varphi)$ é correto e completo com relação à classe de enquadramentos multi-relacionais que satisfazem a propriedade $R_a \subseteq F^{\varphi}(R_b^{-1})$.

Demonstração. Argumento padrão para demonstrar a completude. □

Uma outra classe de sistemas multimodais, ainda mais geral, pode ser obtida acrescentando-se aos sistemas multimodais anódicos e catódicos o esquema de axiomas $\mathbf{G}(\varphi, \psi)$, onde φ e ψ são fórmulas afirmativas. Esses sistemas são chamados de *Catach-Sahlqvist*.

$\mathbf{G}(\varphi, \psi)$ $\quad [a]^n(\varphi \supset \psi)$

para φ e ψ fórmulas afirmativas, $a \in \Phi$, $a \neq 0$ e φ satisfazendo certas condições.

Embora seja matematicamente interessante tratar com generalizações de sistemas, devemos admitir que num determinado ponto devemos lançar mão da intuição em prol da generalidade. Não é o objetivo desta Tese analisar os sistemas que fogem à intuição, por isso optamos em não apresentar um estudo detalhado dos sistemas do tipo Catach-Sahlqvist. Devemos observar que todo o aparato definicional que foi apresentado nesta Tese pode serveir de subsídio para a caracterização dos sistemas anódicos (catódicos) do tipo *Catach-Sahlqvist*, e deixamos mais essa tarefa para trabalhos futuros.

EPÍLOGO

O resultado das relações entre negação e modalidade tem sido um tema recorrente, e há na verdade muitas maneiras de se abordar tais relações. Por exemplo, como nota Hughes e Cresswell em [HC96], página 62, a dupla negação em lógica intuicionista é muito semelhante a uma modalidade do "sistema Brouweriano"; tal relação pode ser vista no teorema S5(8), que mostra que a sentença $p \supset \Box\Diamond p$ é um teorema de **S5**, sentença esta denotada nesta Tese por (**B**), como mostra a Tabela 2.2.1. Na nota 5, da página 70, encontra-se o esclarecimento sobre a origem do termo "Brouweriano", numa menção à página 497 do livro de Lewis e Langford (veja [LL32]), e a respeito do fato que acrescentando-se o axioma (**B**) a **S4** obtém-se **S5** (na citação abaixo escrevemos $\Box$ e $\Diamond$ ao invés de L e M, respectivamente):

> "This formula derives from Becker 1930, p. 509. An alternative version of **B** is of course $\sim p \supset \Box\sim\Box p$. Some authors have called **B** the *Brouwersche* axiom, and the system the *Brouwersche* system, perhaps because in Lewis and Langford 1932, p. 497, Becker's German phrase 'Brouwerische Axiom' is quoted untranslated. The name derives from L. E. J. Brouwer, the founder of the intuitionist school of mathematics. In the intuitionistic propositional calculus the law of double negation is not valid as an equivalence. More precisely, $p \supset \sim\sim p$ is valid but $\sim\sim p \supset p$ is not. One way of making this sound reasonable has been to suppose that in this calculus $\sim$ means something like 'it is not possible that', i.e. that it means what we usually mean by $\Box\sim$. Now if we replace $\sim$ by $\Box\sim$ then $\sim\sim p \supset p$ becomes $\Box\sim\Box\sim p \supset p$, i.e. $\Box\Diamond p \supset p$, and $p \supset \sim\sim p$ becomes $p \supset \Box\Diamond p$, i.e. **B**. On this view **B** therefore represents the intuitionistically acceptable direction of the double negation law, and so has a connection, albeit somewhat tenuous, with Brouwer."

Essa intuição básica entre negação e modalidade é muito melhor aprofundada na literarura contemporânea, principalmente por Došen em vários trabalhos desde 1986 (veja [Dos99], [Dos86c], [Dos86a], [Dos86b] e [Dos84]); em [Dos99] ele propõe que se pode modelar a negação em semânticas relacionais através de uma relação R_{not} da seguinte maneira: *notA* vale em um mundo x sse A deixa de ser válida em todo mundo y acessível pela relação R_{not} a partir de x. Essa idéia aparentemente óbvia, explorada de maneira competente, tem muitas consequências interessantes: entre outras coisas, Došen mostra como a negação intuicionista pode ser vista como um operador de *impossibilidade*. Došen defende ainda que há *invariantes* na teoria modal; tais invariantes seriam aquelas propriedades que não dependem da base proposicional, como por exemplo o fato de que as relações de acessibilidade ligadas a **S4** definem sempre uma *pré-ordem*, e as de **S5** formam uma *relação de equivalência*. No nosso caso, o papel dos invariantes da teoria modal se reflete na semântica modal de traduções possíveis. No Capítulo 4 pudemos notar que a preservação dos invariantes se evidencia pela cláusula de tradução $\mathtt{t}(\Box\alpha) = \boxdot\mathtt{t}(\alpha)$.

A questão é muito mais profunda, e nosso trabalho no Capítulo 4, tanto quanto os resultados de incompletude no Capítulo 2 e no Capítulo 3 (e mesmo diversos resultados de completude) evidenciam o quanto o tratamento formal, nesses casos, independe da particular lógica de base; nesse sentido, as componentes modais desses sistemas são invariantes. De fato, em [Dos99], página 79, Došen adverte:

> "A limitation of contemporary modal logic is that it nearly exclusively studies unary operators added to a Boolean base; i.e., the non-modal context in which these operators are introduced is pratically always classical. A really general theory of unary operators should pay more attention to unary operators in nonclassical logics."

Possivelmente essa perspectiva da negação intuicionista como impossibilidade tenha inspirado Béziau em [Béz05] a propor uma abordagem sobre a negação paraconsistente em termos de 'não-necessidade'. Dessa forma pode-se ver a negação paraconsistente de forma diferente da qual a via Jaśkowski, e ao mesmo tempo de forma distinta da qual a via Lukasiewicz, e ainda assim propor uma interpretação quadrivalente para essa negação 'não necessária'.

Por razões diferentes Harvey e Hintikka em [HH91] e Krysztofiak em [Kry92] já defendiam também entre 1991 e 1992 a negação como "modalidade", de certa forma "criadora de mundos possíveis".

Ainda por volta de 2005 Marcos propôs em [Mar05b] uma interpretação da lógica modal como uma teoria das oposições e negações, substituindo quadrados e losangos por uma ou mais negações e operadores relacionados a tais negações. Em [Mar05a], Marcos mostra, por um lado, que lógicas paraconsistentes podem ter semânticas modais usuais, e por outro lado, que lógicas modais não-degeneradas podem ser vistas como paraconsistentes (veja também [Mar05b]).

O que se vê é que a idéia da negação como modalidade está no ar desde pelo menos 75 anos, e que mesmo assim não se fez muito a respeito. Nossa visão das diversas negações, que podem ser vistas como "graus de não-necessidade", pretende contribuir para a questão.

Nossa intenção é discutir, na seqüência, as várias possibilidades que os sistemas lógicos tratados neste trabalho podem abrir para a argumentação nos casos em que a presença da negação envolve algum risco de se desembocar numa contradição, num paradoxo ou em alguma anomalia.

Modalidades anódicas e a distinção de re versus de dicto

Como sugere Kit Fine logo no início de seu ensaio "The question of realism", em [Fin01], a dificuldade em formular questões em filosofia surge antes mesmo de tentarmos resolvê-las.

> "... as is so often true in philosophy, the difficulties begin with the formulation of the question rather than with the attempt at an answer."

Mediante um exemplo, Kit Fine aponta para a dificuldade de se manter uma posição filosófica diante de certos fatos: um *anti-realista* a respeito de números pode argumentar que "números não existem". Por outro lado, a maior parte das pessoas concordam que "existem números primos entre 1 e 10". Essa sentença é aceita por um "realista" a respeito de números, por exemplo um matemático. Claramente a segunda afirmação implica a primeira, daí um anti-realista a respeito dos números não deveria aceitar a segunda afirmação. Esse dilema é discutido por Kit Fine em [Fin01], e no final ele defende o interesse de um conceito primitivo (ou "metafísico", como ele coloca) de realidade como um pressuposto para toda investigação sobre a existência, independente de posições filosóficas "realistas" ou "anti-realistas". Não queremos sugerir, aqui, que existe uma divisão patente entre essas posições filosóficas, ao contrário, concordando com Miller em [Mil08]:

> "...it is misleading to think that there is a straightforward and clear-cut choice between being a realist and a non-realist about a particular subject matter. It is rather the case that one can be more-or-less realist about a particular subject matter. Also, there are many different forms that realism and non-realism can take."

O *realismo*, doutrina que defende a *existência* de universais, e o *platonismo*, doutrina que mantém que *há* de fato objetos abstratos, surgiram na Idade Média como uma proposta de solução ao "problema dos universais" e dos "particulares" juntamente com o "conceitualismo" e o "nominalismo". Dessa discussão, o que nos interessa, na verdade, é que há duas formas de nominalismo: uma que mantém que *não existem* universais; e outra que mantém que *não há* objetos abstratos. Considerando o realismo e o platonismo pode-se imaginar como as posições filosóficas são difíceis de esclarecer e diferenciar, mostrando o quanto a advertência de Kit Fine se aplica.

Modalidades em geral, tais como 'é necessário que' e 'é possível que' são ditas constituirem contextos *opacos*, no sentido em que não permitem substituição de termos *salva veritate*. Essa dificuldade dá origem à chamada distinção *de re* versus *de dicto*, e está na base de várias discussões metafísicas, tanto antigas quanto contemporâneas. No que nos concerne, a discussão metafísica tem um paralelo, com relação à modalidade, na discussão travada, entre o *possibilismo*, atribuído figurativamente a David Lewis e o *atualismo*, atribuido a Alvin Plantinga.

A distinção *de re* versus *de dicto* significa coisas diferentes para pessoas diferentes, e alguns autores como Cocchiarella e Freund, em [CF08], defendem que a distinção só tem sentido em lógica modal de primeira ou de segunda ordem. Fica patente que as modalidades *de dicto*, por expressarem propriedades, fazem parte das formas lógicas da linguagem, enquanto as modalidades *de re*, se referem à dimensão ontológica dos conceitos. Isso explica, pelo menos em parte, as dificuldades colocadas por princípios tais como as chamadas fórmulas de Barcan ($\forall x \Box P(x) \supset \Box \forall x P(x)$ e $\Diamond \exists x P(x) \supset \exists x \Diamond P(x)$, que são equivalentes na presença da negação clássica). Já que a recíproca de tais fórmulas é aceita em qualquer sistema modal normal quantificado mínimo (veja, por exemplo [CP08], página 248), as fórmulas de Barcan, na verdade, igualam o conteúdo conceitual das modalidades *de dicto* com as *de re*. No entanto, parece claro que as lógicas anódicas pelo menos, com seu alto grau de independência entre operadores modais, recolocam a distinção entre *de re* e *de dicto* em termos puramente proposicionais.

Quine, num famoso artigo de 1956 em [Qui56], ilustra didaticamente a questão com seu exemplo: "Ralfo acredita que alguém é espião". Essa sentença pode ser entendida como:

(1) "Ralfo acredita que há espiões" ou

(2) "Alguém é tal que Ralfo acredita que ele é espião"

Obviamente, as sentenças (1) e (2) são bastante distintas: (2) é muito mais grave que (1).

A sentença "Ralfo acredita que alguém é espião" tem uma conotação de quantificação existencial, e isso faz pensar que a questão só faça sentido em termos quantificacionais, mas isso não é indiscutível. Considere, por exemplo: "Ralfo acredita que é possível espionar nas segundas-feiras".

Temos aqui uma combinação de operadores modais (crença e possibilidade), e no entanto ainda podemos dar duas leituras distintas:

(3) "Ralfo acredita que há episódios de espionagem nas segundas-feiras" ou

(4) "Algum episódio às segundas-feiras é tal que Ralfo acredita que seja espionagem"

O fato de a interpretação ser melhor compreendida em termos de quantificação existencial (como “Ralfo acredita que existam episódios de espionagem”, e “Existe um episódio tal que Ralfo acredita que seja espionagem”) pode não ser nada mais que reflexo do fato de que grande parte da lógica modal é expressável em primeira-ordem (vide a bem-conhecida Teoria da Correspondência de van Benthem em [vB84]), ou ainda em segunda ordem.

Em [MN08], McKay e Nelson definem uma sentença como *semanticamente de re* somente no caso em que essa sentença permite substituição *salva veritate*. Caso contrário a sentença é *semanticamente de dicto*. McKay e Nelson definem ainda o que sejam atribuições *metafisicamente de re* em relação a um objeto como aquelas que diretamente atribuem uma propriedade ao objeto. Caso contrário, seriam *metafisicamente de dicto*. Por exemplo, suponhamos que Ralfo acredita que João é um espião, segue daí que João *possui* essa propriedade de ser tido como espião por Ralfo?

Suponhamos, no nosso exemplo, que às segundas-feiras sempre ocorram reuniões do grupo de lógica. Se a atitude de Ralfo é expressa pela sentença (4), isto é, se Ralfo acredita que algum episódio às segundas-feiras seja de espionagem, é claro que Ralfo não acredita necessariamente que as reuniões do grupo de lógica sejam epísódios de espionagem; isso significa, precisamente, que (4) é uma interpretação semanticamente *de dicto* da sentença “Ralfo acredita que é possível espionar nas segundas-feiras” já que essa sentença não permite substituição *salva veritate*.

Na Definição 2.1.5 definimos um conjunto A de sentenças num sistema lógico $\mathbf{S}$ como factual se existe uma sentença α em $\mathbf{S}$ tal que $\Diamond\alpha \notin A$. Caso contrário, A é dito hipotético.

É claro que um conjunto ou uma teoria factual não permite substituições *salva veritate*, pois se existe α em $\mathbf{S}$ tal que $\Diamond\alpha \notin A$ e α' é equivalente a α não segue que $\Diamond\alpha' \notin A$. Dessa forma, pela definição acima de McKay e Nelson, teorias factuais são semanticamente *de dicto*. Seriam as hipotéticas semanticamente *de re*?

O que isso mostra é que a composição de modalidades independentes – e essa independência é garantida na falta da negação, pelo menos nos sistemas anódicos – pode revelar nuances proposicionais escondidas, que retomam questões profundas e que ficam mascaradas quando a negação, essa peculiar modalidade, embaralha os contextos com seu "poder definidor". Portanto, mais uma boa razão para estudarmos mais profundamente as lógicas sem negação e com negação controlada.

Quine, em [Qui66], foi quem pela primeira vez chamou a atenção para o fato que a legitimidade da lógica modal (e, nesse caso, sempre com mais ênfase a lógica modal quantificada) deve levar em conta um certo "essencialismo aristotélico" se quiser ser vista como uma simples extensão combinatória da lógica proposicional clássica. E daí Quine deriva muitas da suas críticas à lógica modal. Contudo, tais críticas não têm ficado sem resposta: uma objeção aos argumentos quineanos se acha, em Baker, em [Bak78]. Mas a questão, fora dos limites da lógica modal de predicados, também afeta a lógica modal proposicional, e de certa forma o enfoque que desenvolvemos também tocou essa questão.

O que se denomina *atualismo* é a posição que rejeita que existam indivíduos "não-atuais" ou "reais". Em outras palavras, o atualismo é a posiçao filosófica de que tudo que pode ser dito que existe, de fato existe. Ou ainda em outros termos, o atualismo nega que exista um tipo de ser para além da atualidade: 'ser' é ser real ou atual. Dessa forma, o atualismo se contrapõe diretamente ao *possibilismo*, que considera que "haver" ou "existir" inclui objetos possíveis.

Não é fácil defender o atualismo, e é por isso mesmo que aqueles atualistas se colocam numa posição filosoficamente interessante, já que, por exemplo, parece não haver maneira óbvia de aceitar a sentença "é possível que haja algum ser extraterrestre" sem apelar para objetos possíveis mas não atuais ou reais. Menzel, em [Men08], avalia o desafio dos possibilistas ao atualismo, e esclarece como a questão concerne à lógica modal.

A semântica dos mundos possíveis é extremamente poderosa, e na verdade muitos atualistas preferem amenizar sua posição apelando para uma maneira menos radical pela qual mundos possíveis são concebidos como objetos que existem, mas que são abstratos. Muitas teorias desse tipo têm sido propostas, como por exemplo por Plantinga em [Pla74] (veja também [Pla76]), onde a tese do atualismo, já sugerida por Kripke em [Kri80], é desenvolvida.

Contudo, uma forte objeção à posição de Plantinga é dada por David Lewis em [Lew01]. No seu famoso "On the Plurality of Worlds", Lewis é incisivimente claro em ostentar sua posição em relação ao realismo modal; ele é firme em sua posição de não identificar os mundos possíveis com quaisquer entidades lingüísticas:

> "The worlds are something like remote planets; except that most of them are much bigger than mere planets, and they are not remote. Neither are they nearby. They are not at any spatial distance whatever from here. They are not far in the past or future, nor for that matter near; they are not at any temporal distance whatever from now. They are isolated: they are no spatiotemporal relations at all between things that belong to different worlds."

Dessa forma, Lewis se opõe ao "atualismo desinfetado" de Plantinga, e defende que todos os mundos possíveis são igualmente reais. Para uma discussão sobre a controvérsia Plantinga versus Lewis veja van Inwagen em [vI86], e para um debate sobre o Realismo Modal de David Lewis, veja Mortari em [Mor].

Para Lewis, o mundo em que vivemos é um dentre uma possível infinidade de outros mundos possíveis. Alguns podem ser muito parecidos com o nosso, diferenciando-se apenas por um detalhe, como a cor dos meus sapatos, outros muito diferentes. Outros podem até ter diferentes leis físicas ou serem habitados por bruxas (veja [Lew01], página 2). Mas será que poderiam ter outras leis matemáticas? Parece que não, já que Lewis defende que podemos conhecer algo sobre os mundos, apesar de serem eles isolados e causalmente incomunicáveis, da mesma forma como obtemos conhecimento matemático.

De fato, fica menos difícil aceitar a posição de Lewis quando nos colocamos na posição de quem aceita a postulação miraculosa dos conjuntos, e do Axioma do Infinito, mesmo sem falar no Axioma da Escolha e na Hipótese do Contínuo.

Mais ainda, Lewis considera que podem haver dois mundos exatamente iguais até um certo momento, e que passam a divergir depois. Por mais estranho que possa parecer, esse tipo de estrutura não se diferencia muito dos modelos não-*standard* da Aritmética – que tipo de existência têm esses modelos? Estaríamos sendo razoáveis se jogássemos fora a existência dos mundos de Lewis para conservar os modelos não-*standard* da Aritmética? Se não, como nos desfazer desses?

Contudo, nossa intenção não é primordialmente uma discussão sobre a questão do atualismo versus realismo, ou mesmo versus possibilismo, mas sim uma apreciação sobre como e quanto os resultados que obtemos nesta Tese podem contribuir para a questão, como discutiremos a seguir.

Em [Zal97], Zalta deriva uma teoria metafísica sobre mundos impossíveis a partir de uma teoria axiomática de objetos abstratos. Os "mundos impossíveis" assim caracterizados têm características que os filósofos de fato esperariam. Embora contradições possam ser "verdadeiras" em mundos impossíveis, nenhuma consequência desse fato, no entanto, implica que existam contradições verdadeiras, como quer a paraconsistência dialeteísta advogada principalmente por Priest, e que não adotamos aqui.

Esta concepção de mundos impossíveis, obtida a partir de uma posição clássica (e não a partir de qualquer pressuposto paraconsistente), dá um formidável sustento para as lógicas paraconsistentes e demonstra cabalmente que não é necessário qualquer conflito entre as leis das lógicas paraconsistentes e as leis da lógica clássica, dado que elas governam tipos de mundos diferentes. Zalta argumenta que esses mundos impossíveis seriam coerentes, e defende seu interesse como alternativas válidas e interessantes na análise de questões filosóficas. Dessa forma, lógicas paraconsistentes, na avaliação de Zalta, teriam um tema específico, que seria se ocupar de situações impossíveis. Contudo, avançando sobre as intuições de Zalta, deve-se ter em conta que situações impossíveis podem perfeitamente ser originadas por situações linguísticas impossíveis, informações conflitantes ou outro tipo de cenário que não obrigatoriamente "impossiblidades" físicas.

As lógicas paraconsistentes são mais prudentes ou conservadoras que a lógica clássica, que se apressa em explodir dedutivamente a partir de uma simples contradição. É devido a essa característica de se mostrar conservadora, e contudo não perder qualquer capacidade da dedução clássica, já que incluem todos os raciocínios clássicos (no caso dos sistemas estudados nesta Tese, por meio do conectivo de consistência das LFIs) que as linguagens paraconsistentes podem ser mais expressivas do que os seus homólogos clássicos, incluindo a hierarquia das meta-linguagens, tarskianas por exemplo, de acordo com Feferman em [Fef84]:

> "...natural language abounds with directly or indirectly self-referential yet apparently harmless expressions-all of which are excluded from the Tarskian framework."

É exatamente essa limitação na expressividade que pode ser superada pelas lógicas paraconsistentes.

Em áreas fora da matemática, como informática, teoria da informação lingüística formal, entre outras, contradições são inevitáveis: se, como defendem Carnielli, Coniglio e Marcos em [CCM07], teorias contraditórias aparecem apenas por engano, ou são devidas a algum tipo de limitação de recursos em computadores, ou têm algum tipo de existência real, o fato é que contradições dificilmente podem ser impedidas de serem tomadas em consideração enquanto objeto de argumentação. Assim, a questão fundamental desloca-se de se teorias contraditórias existem, para a tarefa filosoficamente muito mais relevante de como tratar com tais teorias, ainda que hipotéticas. O ponto fundamental é que teorias contraditórias são, em geral, bastante informativas, como argumentam e exemplificam os autores em [CCM07].

Esse ponto é levado em conta no tratamento do colapso de conflitos e obrigações impossíveis em [McN08] por McNamara, onde o enfoque paraconsistente de da Costa e Carnielli, em [dCC86], é explicitamente mencionado como uma saída legítima para os paradoxos deônticos.

Dessa forma, nenhum dos sistemas que tratamos aqui pode ser acusado de artificialidade, na medida em que representam desenvolvimento de técnicas e teorias em princípio imensamente ricas em expressividade, e muito bem fundamentadas do ponto de vista matemático. Quanto ricas e expressivas são, e quão interessantes sejam suas bases lógico-matemáticas, foi a que nos dedicamos a mostrar neste trabalho.

Dilemas normativos na perspectiva dos sistemas catódicos

Podemos tomar as dificuldades com as lógicas deônticas como exemplos paradigmáticos de dilemas normativos. É um fato conhecido que muitas vezes somos confrontados com obrigações contraditórias: por exemplo, podemos estar dirigindo apressadamente, tentando chegar a um banco no último instante em que devemos pagar uma certa conta (obrigação financeira), mas não podemos ultrapassar a velocidade máxima (obrigação legal). É claro que na vida prática vamos escolher entre a menor sanção (a multa por atraso de pagamento ou a multa de trânsito) mas, como se resolve o dilema lógico *primeiro*, antes que se passe à etapa da tomada de decisões? É claro que por vias estritamente lógicas (clássicas) o dilema, que traz embutido uma contradição, causará uma explosão dedutiva: teremos o direito de deduzir qualquer coisa, inclusive que não existem leis de trânsito ou normas financeiras.

Indagações e questões sobre lógica deôntica, e a discussão da similaridade entre conteúdos aléticos e deônticos, remontam ao século XIV de acordo com Knuuttila em [Knu81]. A lógica deôntica contemporânea, vista propriamente como um ramo da lógica simbólica e não mais calcada na linguagem natural, originou-se em 1951 com o artigo seminal de von Wright em [vW51]. Esse artigo começou a marcar a diferença entre a lógica alética e a deôntica, apesar de que um quarto de século antes do texto de von Wright uma monografia de Mally dedicada às leis básicas da obrigação e aos elementos da lógica do querer, em [Mal26], já apresentava a lógica deôntica em termos simbólicos, cujo objetivo primeiro era estabelecer os fundamentos da ética pura, segundo Lokhorst em [Lok08]:

> "As Mally's words indicate, he was not primarily interested in deontic logic for its own sake: he mainly wanted to lay the foundation of "an exact system of pure ethics" (eine exakte reine Ethik). More than half of his book is devoted to the development of this exact system of ethics."

O sistema de Mally sofreu muitas críticas, assim como o sistema de von Wright, mas a conclusão a que Lokhorst chega, em [Lok08], é que tais críticas não são justas dado que é possível aproximar o sistema de Mally das versões modernas de lógicas deônticas:

> "Some authors have refused to view Mally's deontic logic as a "real" deontic system and say that they "mention it only by way of curiosity" (Meyer and Wieringa 1993, p. 4). The above shows that this judgment is too harsh. It is only a small step, not a giant leap, from Mally's system to modern systems of deontic logic, so Mally's pioneering effort deserves rehabilitation rather than contempt."

Gomes, em [Gom08], aborda com detalhes o desenvolvimento da lógica deôntica, com exemplos e retomadas conceituais e históricas bastante instrutivas. De especial interesse, e com isso concorda Gomes, em [Gom08], é o sistema SDL (*Standard Deontic Logic*) de von Wright (veja [vW51]). Esse sistema foi criticado pelas suas imperfeições, o que não parece muito surpreendente visto que ainda hoje a lógica deôntica é um dos campos mais abertos a desacordo na área de lógica. Em 1964 von Wright publicou um outro artigo (veja [vW64]) que significava uma espécie de retorno às idéias de Mally.

Duas referências importantes em termos de introdução à lógica deôntica, onde aparecem questões envolvendo conflitos de obrigações, são apresentadas por Aqvist em [Aqv84] e [Aqv88]. Na página 69, em [Aqv84], Aqvist reconhece que as altas expectativas de sucesso da aplicação da lógica deôntica em sistemas normativos (reais ou potencias) só foram realizadas em grau muito modesto, e em poucas palavras ele lembra que a lógica deôntica consiste de estudos normativos da linguagem que envolvem conceitos como *obrigação*, *proibição*, *permissão* e *compromisso*:

> "Resisting that temptation, thought, we say that deontic logic, broadly conceived, is the logical study of the normative use of language and that its subject matter is a variety of normative concepts, notably those of *obligation* (prescription), *prohibition* (forbiddance), *permission* and *commitment*."

Segundo da Costa e Carnielli em [dCC86] os dilemas morais podem acontecer quando alguém é exposto a duas obrigações simultâneas em determinadas circunstâncias:

> "In general, a moral dilemma is a predicament caused by the impossibility of a person being able to comply with two simultaneously compelling moral norms under certain circumstances."

A primeira tentativa de resolver dilemas morais trocando a lógica de base por uma lógica não-clássica é devida a Routley e Plumwood, em [RP84], onde eles trocam o sistema de base das lógicas deônticas pela lógica relevante de Anderson e Belnap (veja [AJ75]). Foi com esse espírito que da Costa e Carnielli propuseram os sistemas deônticos paraconsistentes:

> "Here we introduce some quite new systems of paraconsistent deontic logic which have a very different basis from those of Routley and Plumwood."

A idéia básica de da Costa e Carnielli em [dCC86] para tratar com os dilemas morais em lógica deôntica é controlar a relação entre os operadores de "obrigatoriedade" e "permissidade" atentando para a negação:

> "Since they do not exclude moral dilemmas on purely logical grounds we can conclude that the well-known axiom *ought* implies *can*, or that what is obligatory must be possible, is not necessarily true. Whether or not this axiom is true will depend on how we interpret the relations between negation, the deontic operators and the alethic modalities."

Aqvist em [Aqv84] já reconhecia a importância de se modificar as linguagens de sistemas deônticos, que são consideradas por ele inadequadas, a fim de poder lidar com problemas deônticos, o que vai de encontro com a nossa proposta:

> "Suppose we want to achieve a *logical* analysis [Oppenheim, 1944] or a *rational reconstruction* [Wedberg, 1951] of some system of positive law, say, some relevant part of any existing commercial or criminal code. It is then clear that the language of the current systems of deontic logic, which we will

> encounter below, are almost totally inadequate for the formulation of even very simple rules of the system. A main reason for this being so is that these languages are just propositional and thus lack quantificational resources of expression. What is even worse, they lack explicit *temporal* resources, which fact makes them especially useless from the legal point of the view."

Diversas tentativas recentes de solução de dilemas deônticos e morais seguem a proposta de da Costa e Carnielli em [dCC86], de substituir a lógica de base dos sistemas deônticos padrão por sistemas lógicos com negações mais flexíveis. Em nossa conceituação isso se reduz a considerar sistemas deônticos catódicos para lidar com tais conflitos no seguinte sentido:

> "We say that a deontic theory T, that is one including the deontic notion (of prohibition, etc.), is *deontically inconsistent* if every sentence of T is obligatory (forbidden, etc.); in such a theory some or all deontic concepts collapse. Otherwise, we say that T is deontically consistent."

A mesma atenção com a negação aparecem em [Con07], onde Coniglio prega que os paradoxos deônticos vistos na perspectiva das LFIs não são propriamente solucionados, mas sim os conjuntos de sentenças conflitantes nos sistemas de lógica deôntica usual podem ser reparados:

> "By using logics of deontic inconsistency, deontic paradoxes are not solved but, instead, the information set containing such conflictive sentences (for instance, a database) can be "repaired" and better understood."

Um dos grandes problemas nessa área é que princípios como os seguintes, que reconhecemos como válidos, sabidamente causam problemas ou perplexidades (alguns pontos são também levantados, na excelente resenha de [Aqv84] feita por Tomberlin em [Tom91]):

1. $\mathbf{F}\alpha \stackrel{\text{Def}}{=} \mathbf{O}\neg\alpha$ (Noção de "é proibido que")
2. $\mathbf{P}\alpha \stackrel{\text{Def}}{=} \neg\mathbf{O}\neg\alpha$ (Noção de " Permissão")
3. $\neg(\mathbf{O}\alpha \wedge \mathbf{O}\neg\alpha)$ (Consistência da Obrigatoriedade)

4. $\mathbf{O}\alpha \land \mathbf{O}\beta \equiv \mathbf{O}(\alpha \land \beta)$ (Aditividade da Obrigatoriedade)

5. $\mathbf{O}(\alpha \lor \neg\alpha)$ (Tautologicidade da Obrigatoriedade)

Além disso são suspeitos certos usos das regras Substituição Uniforme e Modus Ponens.

Um exemplo onde esses princípios interferem de forma a criar perplexidades argumentativas é o "Paradoxo de Urmson-Indiferença versus Opcionalidade" (proposto por Urmson em [Urm58]), analisado no Capítulo 3, onde (2) e (3) acima interferem.

Estaríamos preparados para abrir mão desses princípios? Na verdade, parece que não: mas por outro lado, os sistemas lógicos com que trabalhamos aqui, entre outros (os nossos não são os únicos candidatos), podem de fato ajudar a resolver algumas dessas questões, expressando os princípios e relações básicas e traduzindo as sentenças em linguagem natural de uma maneira alternativa, embora logicamente bem-fundada.

A lógica deôntica tem sido vista também como ligada a aspectos éticos e jurídicos (também chamados legais), o que resultou na avaliação crítica de sua capacidade de representar adequadamente mecanismos de raciocínio ou dedução nessas áreas. Desse modo, é natural que a lógica deôntica sofra críticas, já que cai sob o mais severo escrutínio filosófico. Por outro lado, a lógica deôntica está ganhando uma boa audiência, formada pelos cientistas da computação e da inteligência artificial interessados em sistemas de bases de dados e outras aplicações onde a distinção do comportamento normativo verus o não-normativo adquire cada vez maior significância. Exemplos são os trabalhos de Correia da Silva, como em [dS08], sobre jogos para computadores, onde os personagens devem se submeter a normas e em conseqüência disso, entram em conflitos ou criam conflitos. Mesmo nas situações mais corriqueiras como regras para funcionamento de bibliotecas ou normas de trânsito, expressar sistemas normativos que produzam o que deles se espera é tarefa bastante difícil.

Aparece então claramente nesses contextos o problema dos dilemas morais: um dilema moral, ou pelo menos a maioria deles, reduz-se a um conflito de obrigações enfrentado por um agente (o que não quer dizer que um conflito qualquer seja um dilema moral). Exemplos de dilemas morais não faltam na literatura e na história, mas fica claro então que não é somente nas preocupações da ciência jurídica ou da filosofia moral que a lógica deôntica encontra seus graves problemas, mas também nas dos cientistas da computação de vários matizes.

Contudo, há um debate sobre a existência real de dilemas morais. Enquanto alguns autores não aceitam sua existência, de acordo com Nute em [Nut97]:

> "We can show that if $T|\!\sim_{DSD} \phi$ and $T|\!\sim_{DSD} \neg\phi$, then $T|\!\sim_{DSD} \phi$ and $T|\!\sim_{DSD} \neg\phi$. Furthermore, if T is deontically closed, $T|\!\sim_{DSD} \bigcirc\phi$ and $T|\!\sim_{DSD} \bigcirc\neg\phi$, then $T|\!\sim_{DSD} \bigcirc\phi$ and $T|\!\sim_{DSD} \bigcirc\neg\phi$. So the only way a moral dillema can arise in our theory is if it implied by the strict rules alone. Thus there will be no moral dillemas if our moral theory includes only *prima facie* obligations."

outros, como McConnell em [McC08], vêem-nos como inevitáveis e até mesmo positivos, como observamos na citação da página 90.

Não existe obviamente uma lista exaustiva dos dilemas morais porque, primeiro, não há um consenso sobre quais seriam os dilemas morais verdadeiramente importantes, e segundo porque há autores, como vimos, que sequer aceitam a existênca de tal lista. Mas podemos listar, como consta da literatura, os chamados paradoxos deônticos mais conhecidos.

- Paradoxo de Ross: $\mathbf{O}\alpha \to \mathbf{O}(\alpha \vee \beta)$
- Interdição da Escolha: $\mathbf{P}\alpha \vee \mathbf{P}\beta \leftrightarrow \mathbf{P}(\alpha \vee \beta)$
- Paradoxo do Penitente: $\mathbf{F}\alpha \to \mathbf{F}(\alpha \wedge \beta)$
- Paradoxo do Bom Samaritano: $\alpha \to \beta \vdash \mathbf{O}\alpha \to \mathbf{O}\beta$
- Paradoxo de Chisholm: $(\mathbf{O}\alpha \wedge \mathbf{O}(\alpha \to \beta) \wedge (\neg\alpha \to \mathbf{O}\neg\beta) \wedge \neg\alpha) \to \perp$
- Paradoxo de Forrester ou do Assassino Gentil: é proibido matar, mas se matar deve-se matar gentilmente.

Como reconhecem Prakken e Sergot em [PS97], logo na primeira página do artigo, o Paradoxo de Forrester, proposto em [For84], é muito desafiador porque propostas de soluções para vários outros paradoxos falham justamente diante da dificuldade básica deste, de acordo com [PS97]:

> "A well-known example is Forrester's (1984) paradox of the gentle murderer: it is forbidden to kill, but if one kills, one ought to kill gently. Intuitively, one would feel that these sentences are consistent, but in SDL no (obvious) consistent formalisation is available: assuming that *kill-gently* logically implies *kill*, the formalisation
> (1) $\mathbf{O}\neg Kill$
> (2) $\mathbf{O}Kill - gentlly$
> is inconsistent, since SDL contains the inference rule of consequential closure:
>
> ROM $\quad \dfrac{A \rightarrow B}{\mathbf{O}A \rightarrow \mathbf{O}B}$
>
> and the valid scheme
>
> $D \quad \neg(\mathbf{O}A \wedge \mathbf{O}\neg A)$
>
> The reason why this paradox is so challenging is that some well-studied approaches that work for other paradoxes fail here."

Uma formulação mais direta do paradoxo, considerando que α expressa "matar" e β expressa "matar gentilmente", e tendo em conta as hipóteses abaixo, é a seguinte:

1. É obrigatório não matar: $\mathbf{O}\neg\alpha$
2. Se alguém matar, então é obrigatório que se mate gentilmente: $\alpha \supset \mathbf{O}\beta$
3. Se alguém matar gentilmente, então mata: $\beta \supset \alpha$

Considerando que ocorra α (isto é, uma situação em que se mata), obtém-se a seguinte antinomia que constitui o paradoxo:

1. α [Hip.]
2. $\alpha \supset \mathbf{O}\beta$ [Hip.]
3. $\mathbf{O}\beta$ [(**MP**) em 2 e 1]
4. $\beta \supset \alpha$ [Hip.]
5. $\mathbf{O}\beta \supset \mathbf{O}\alpha$ [(Nec) e (**K**) em 4]
6. $\mathbf{O}\alpha$ [(**MP**) em 3 e 5]
7. $\mathbf{O}\neg\alpha$ [Hip.]
8. $\mathbf{O}\alpha \wedge \mathbf{O}\neg\alpha$ [(**A4**) e (**MP**) em 6 e 7]

A contradição obtida acima fere, a partir das hipótese, o Princípio da Consistência da Obrigatoriedade do conhecido sistema padrão deôntico (SDL), isto é, $\neg(\mathbf{O}\alpha \wedge \mathbf{O}\neg\alpha)$

É importante notar que tais dilemas não envolvem, na verdade, nenhuma antinomia (ou contradição) da teoria deôntica, dado que sistemas lógicos tais como o sistema-padrão são consistentes (e caracterizados por semânticas legítimas). Os paradoxos deônticos surgem de premissas adjuntas à teoria, e da sua interpretação no âmbito da ação, e é nesse ponto exatamente que a lógica catódica, menos brutal do que a lógica clássica, mas ainda assim forte o suficiente para conduzir raciocínios interessantes, pode surgir como uma legítima opção. Isso nos autoriza a tentar uma solução baseada nos sistemas catódicos que propusemos nesta Tese. Vejamos, por exemplo, como seria uma solução para o caso do Paradoxo de Forrester usando um sistema deôntico catódico.

Em SDL o princípio $\neg(\mathbf{O}\neg\alpha \wedge \mathbf{O}\alpha)$ equivale à $\neg(\neg\mathbf{O}\alpha \wedge \mathbf{O}\alpha)$. Usando um sistema catódico, substituímos esse princípio pelo seguinte princípio mais cuidadoso: $\neg(\neg\mathbf{O}\alpha \wedge \mathbf{O}\alpha \wedge \circ\mathbf{O}\alpha)$, onde $\circ\mathbf{O}\alpha$ indica que a obrigatoriedade de α é consistente. A conseqüência dessa nova pressuposição é que para se obter o paradoxo devemos, agora, assumir a “obrigatoriedade de matar” como um ato consistente, o que não parece muito fácil de se aceitar. A virtude dessa solução é evidenciar uma suposição oculta, à qual não dávamos a devida atenção: teremos que assumir que faz algum sentido a obrigatoriedade do ato de matar.

A saída para o paradoxo ficaria então nas mãos de quem o propõe: ou se assume que faz algum sentido ser obrigatório matar (e essa é a raiz do paradoxo), ou então isso não faz sentido, e o paradoxo se dissolve. Não se trata de nenhuma solução *ad hoc*, mas embasada por um sistema lógico bem-fundado e perfeitamente caracterizado por uma semântica legítima (na verdade, qualquer sistema coincidente ou mais forte que $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$ fundamenta a solução).

A estratégia de trocar a lógica de base já foi proposta, como notamos, há mais de duas décadas por Routley e Plumwood, em [RP84], e da Costa e Carnielli em [dCC86]. Peron em [Per09], em sua dissertação de mestrado, avança nessa direção e detalha o estudo das lógicas da inconsistência deôntica, sob orientação de Coniglio que introduziu esse conceito em [Con07].

É fácil ver que os sistemas **DmbC** e **SDmbC** podem ser obtidos como fragmentos de sistemas catódicos do tipo $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, que estudamos no Capítulo 3. O sistema **DmbC**, foi proposto por Coniglio, em [Con07], e tem o intuito de investigar paradoxos ligados a obrigações contrárias ao dever (*contrary-to-duty obligations*); o sistema **SDmbC** foi proposto por Peron e Coniglio, em [PC08], com o propósito de analisar o paradoxo de Chisholm. Nesses artigos, os autores mostram, como aparentemente nunca antes proposto na literatura, que paradoxos deônticos são sensíveis à maneira como traduzimos as sentenças problemáticas, o que abre caminho para tratamentos distindos das negações envolvidas. Sem desmerecer essas propostas, já que sabemos o quanto é difícil tratar e caracterizar semanticamente fragmentos de sistemas lógicos, isso mostra, contudo, que outros fragmentos de nossos sistemas poderiam ser igualmente interessantes.

Um outro sistema considerado por Peron e Coniglio, em [PC08] é o sistema deôntico bi-modal denotado por **BDmbC**, onde **B** indica a bi-modalidade do sistema. Esse sistema, por sua vez, não pode ser derivado nas classes dos sistemas catódicos multimodais pelo fato de que nesse sistema os autores adicionam o axioma de ligação $\Box\alpha \supset [a]\alpha$, para $[a]$ um novo operador de necessidade, o qual não tratamos em nossos sistemas multimodais.

Uma abordagem relacionada a esta consiste em mudar não somente a lógica, mas também alterar a relação de acessibilidade, como proposta na

Tese de Doutorado de Casey McGinnis [McG07] (Departamento de Filosofia, Universidade de Minnesota, EUA).

Contudo, não é somente para as Lógicas Deônticas que os sistemas aqui desenvolvidos podem ter interesse: pretendemos levantar algumas questões em outras áreas e trabalhos correlatos, onde a argumentação sem negação ou com negação controlada pode ser relevante.

Como se depreende, a lógica deôntica continua a ser uma das áreas mais controversas. Resultado como os que estamos mostrando aqui, contudo, ajudam a esclarecer em que medida o tratamento da lógica deôntica como um ramo da lógica modal pode ser errôneo, ou pelo menos controverso. Controvérsias às vezes se resolvem indo às últimas conseqüências, e talvez explorar as possibilidades de representação das lógicas deônticas por meio das lógicas modais catódicas nos aproxime desse ponto, ou nos convença de que tal controvérsia é apenas aparente.

Os sistemas catódicos na racionalidade e na inteligência artificial

O domínio do que tradicionalmente se denomina "racionalidade" costuma ser separado entre *razão prática*, que concerne à racionalidade da ação, ou intenção, ou desejo, e a *razão teórica* que se refere à racionalidade da crença, ou ainda dos graus de crença. Enquanto a razão teórica, vista nesses termos, levanta problemas ligados à cognição, como os paradoxos de natureza modal que vimos na seção anterior, há muitas outras áreas como psicologia, linguística, ciências da computação, lei, economia etc., onde o enfoque modal ou multimodal parece não ter recebido ainda a atenção devida no que concerne a aspectos da racionalidade. Mesmo assim, o trabalho que desenvolvemos nesta Tese toca na questão geral da racionalidade. Fazemos aqui um apanhado sucinto das conseqüências que nossos resultados poderiam ter nessa área.

Mele e Rawling, em [MR04], coletam vários tópicos ligados à racionalidade que são tratados de forma coerente. Nessa coletânea, Rovane (veja [Rov04], página 322) apresenta uma interessante discussão a respeito do papel da manutenção de crenças contraditórias na discussão das bases da racionalidade. Três aspectos fundamentais são elencados como *sine qua non* da racionalidade: *consistência* (ou não-contraditoriedade, de acordo com nossa análise que separa esses dois conceitos), *fechamento em termos de conseqüência* e *transitividade das preferências*:

> "All-things-considered judgments are the outcome of a variety of rational activities that together comprise a person's deliberations, such as the following: resolving contradictions among one's beliefs, working out the implications of one's beliefs and other attitudes, ranking one's preferences in a transitive ordering. Each of these rational activities is directed at meeting a specific normative requirement of rationality. In the cases just mentioned, they are the requirements of consistency, closure, and transitivity of preferences, respectively."

Especificamente no que concerne a contradição e crenças: se uma pessoa se recusa a satisfazer a exigência da consistência, e persiste em acreditar em uma contradição, então ela teria que desistir de buscar a melhor ação, porque uma crença a levaria na direção de uma determinada ação, e a crença contraditória àquela, na direção de outra ação. O que vemos aqui, dessa forma, é uma razão *completamente extra-lógica* para que se saia de um estado de contradição doxástica. Uma lógica, como os sistemas catódicos apresentados nesta Tese que permitem uma atividade racional mesmo num estado de contradição doxástica, é perfeitamente coerentes com a busca de se desviar da contradição. Ter à disposição lógicas que não se trivializam diante de contradições *não é ter à disposição lógicas que buscam a contradição ou que as perpetuam*!

O mais surpreendente é que Rovane, nesse capítulo, reconhece explicitamente como absolutamente coerente o fato fundador das semânticas de sociedade e das semânticas de traduções possíveis de Carnielli que pregam a diferença entre a racionalidade individual e grupal, e usam essa distinção para fundar uma nova semântica para as lógicas paraconsistentes. De fato, o mesmo capítulo reconhece que a exigência de consistência se refere a indíviduos não a grupos:

> "It is important to bear in mind that all of these normative requirements of rationality – both the overarching requirement to achieve overall rational unity and the other, more specific requirements like consistency – apply only to individual persons and not to groups of them. This can be seen from our critical reactions. If one person believes two contradictory propositions, then we are bound to regard this as a failure of rationality on that person's part. But if one person holds one belief while another person believes its contrary, then we are not bound to regard either person as guilty of a rational failure. For each of them might have reasoned correctly from its own point of view, by arriving at all-things-considered judgments that take all of its background attitudes into account.
>
> Here is another way to put the point. Persons who disagree are not under the same kind of rational pressure to resolve their disagreements that individual persons are under to avoid inconsistencies among their attitudes. A person's commitment to being rational always requires it to resolve the latter, whereas a person's commitment to being rational does not always require it to resolve the former. In fact, it can happen that this commitment actually requires a person not to resolve the former."

Esse aspecto é muito interesante, não só porque, entre suas várias aplicações, os conceitos de semânticas de sociedade e das semânticas de traduções possíveis constituem ferramentas fundamentais para a decomposição de sistemas lógicos, conforme detalhada descrição em [CC08a] e [CCG+08], mas também porque tais conceitos refletem em termos lógicos certos critérios absolutamente essenciais para se compreeender a racionalidade, tais como as distinções entre indivíduo e grupo. Como mostra o trecho acima, uma pessoa manter crenças contraditórias pode se constituir numa fallha da racionalidade (mesmo que esse comportamento, segundo nossas lógicas catódicas, não levem à trivialidade dedutiva), mas crenças contraditórias dentro de um grupo de agentes têm natureza completamente diferente.

Para nossos propósitos, o aspecto a ser enfatizado é quão importante pode ser a extensão dessas idéias no âmbito das modalidades. Essa é a melhor justificação possível para nos preocuparmos em encontrar semânticas de traduções possíveis para as lógicas catódicas investigadas nesta Tese. O fato que tais semânticas existam, e que se possa demonstrar que as lógicas modais catódicas são caracterizadas por meio dessas semânticas, é um triunfo da idéia de distinguir a racionalidade individual da racionalidade grupal, na medida em que os raciocínios modais possam legitimamente representar conhecimento, crença e ação de alguma forma.

Parece ainda nem ser bem reconhecido que pode haver vários tipos de contradição, e não um único. Ora, precisamente essa é uma, entre outras surpresas, que se revela no estudo sobre as lógicas anódicas e catódicas. O que buscamos mostrar nesta Tese é que existem inúmeros sistemas entre a lógica modal padrão e seu fragmento anódico: as hierarquias de sistemas catódicos (veja Capítulo 3). Vimos que esses sitemas suportam diferentes graus de contradição. Na medida em que a negação adquire "força" nesses sistemas, a contradição mostra-se mais ofensiva no sistema, podendo até mesmo simular um comportamento clássico.

O'Neill, em [O'N04], adverte para as dificuldades de se compreender Kant, e discute a chamada "fórmula da lei universal", a lei que Kant propõe como última para a razão prática (ou razão da ação, em contraste com a razão do mero comportamento, ou mesmo da crença). Uma bem conhecida formulação dessa lei, conforme O'Neill, seria:

> "*Act only in accordance with that maxim through which you can at the same time will that it become a universal law* (**G** 4:421)."

ou, tomando uma tradução reconhecida devida a Valério Rohden e Antonio Marques, em [Kan95]:

> "Age somente, segundo uma máxima tal, que possas querer ao mesmo tempo que se torne lei universal."

Kant, em [Kan75], divide o dever em duas classes, identificadas pelo que ele chama *contradições de concepção* e *contradições da vontade*, assim, algumas ações são constituídas de tal modo que não poderiam sequer ser pensadas como máximas, enquanto que em outras, mesmo que uma impossibilidade interna não fosse encontrada, seria ainda assim impossível que uma tal máxima fosse vista como uma lei universal, porque a vontade, nesse caso, é que seria contraditória consigo mesma. Ainda conforme O'Neill em [O'N04]:

> "He [Kant, na Crítica da Razão Pura, (Axii)] proposes a justification or vindication of reason, rather than a proof or foundation for reason. Justification differs from proof in that it is directed to some audience: and unconditional justification must be directed to audiences without assuming that they meet any specific conditions, so must be directed to all agents."

Não é impensável que uma tal busca de uma justificação dessa natureza possa receber grande auxílio de um cenário lógico como o que descrevemos, onde os sistemas podem suportar contradições em diferentes graus, nesse caso os sistemas catódicos poderiam ser uma boa alternativa.

Em [Roh02], Rohden, em sua resenha, enfatiza a discussão da fundamentação da chamada filosofia prática de Kant no próprio princípio, e não em supostos formalismos (e reconhece, em assim procedendo, o "alto teor filosófico' do trabalho que resenha), mas não desdenha o entendimento do imperativo como "um procedimento formal de resolução de conflitos morais":

> "Neste sentido, Dutra entendeu corretamente a reconstrução do imperativo como um procedimento formal de resolução de conflitos morais de forma racional, com as supostas vantagens de maior aplicabilidade e concretude, e levando em conta efeitos colaterais. Reconheceu com isso que no conteúdo da filosofia prática de Kant não estão em jogo questões de aplicação mas de justificação do ponto de vista moral."

Dessa forma não se pode dizer que haja algo de negativo em se buscar apoio a procedimentos formais para se tentar resolver conflitos morais. Se assim é, embora haja ainda muito o que se fazer nessa direção, e embora a filosofia de Kant não seja o objetivo desta Tese, pelo menos, modestamente, podemos contribuir para a elucidação do papel dos dilemas morais no âmbito da racionalidade.

No que concerne à computação, um artigo que pode dar uma dimensão do interesse que nossa investigação possa ter em relação às ciências da computação é "A bridge between modal logics and contextual reasoning" de

Massacci (veja [Mas95]). Nesse artigo Massacci constrói um sistema que permite combinar lógicas modais com o que ele chama de *raciocínio contextual*. O sitema resultante permite expressar bases de dados com asserções modais que, embora *localmente* consistentes, possam ser *globalmente* contraditórias.

Embora o próprio autor reconheça que seu enfoque nada tem a ver com a questão da paraconsistência (na medida em que ele reconhece o trabalho de Canielli e Lima-Marques, em [CLM92], como uma linha de trabalho paralela e independente da dele) sua proposta revela quão importante é se dispor, em inteligência artificial e em bases de dados, de métodos para raciocinar tendo em conta cenários contraditórios.

A solução apresentada consiste em um método ligado a tablôs que se aproxima de algo como a relação de conseqüência relevante, o que permite resolver alguns dos problemas levantados com um certo grau de sucesso, mas não se trata de discutir sobre princípios gerais como é a intenção desta Tese. Nessa direção, o que se deve mencionar aqui é o trabalho de de Amo, Carnielli e Marcos, em [dACM02], que trata a questão da integração de dados originários de múltiplas fontes que leva quase que inevitavelmente a bases de dados contraditórias. Esse artigo usa lógicas paraconsistentes trivalentes, em particular a chamada **LFI1** (equivalente ao sistema J_3 de D'Ottaviano, veja a nota da página 137), como base para sistemas de bases de dados que podem receber dados elementares contraditórios ou dados secundários, resultados de atualizações. O enfoque é bastante geral e permite aplicações reais.

Há literalmente centenas de trabalhos na literatura que aplicam lógicas paraconsistentes como alternativa para a solução de problemas em diferentes campos; diversos deles já foram inclusive citados no decorrer da Tese. Estender esse aparato para as lógicas modais, com sua já enorme gama de aplicações nos casos clássicos, com base nos resultados, como obtivemos nesta Tese, parece descrever um cenário muito promissor, muito embora não tenha só essa nova motivação. De fato, é quase temerário tentar prever o que possa resultar daí.

Uma das questões apontadas por alguns autores na área de engenharia de *software* é que um dos problemas de uma lógica paraconsistente que fosse seriamente utilizada como linguagem de programação (tipo Prolog[1]) seria a questão do Silogismo Disjuntivo. De fato, o Silogismo Disjuntivo é uma lei responsável pela trivialidade dedutiva, como se sabe desde o século XII, como afirmam Carnielli e Coniglio em [CC08c]:

> "A well known (by now) 12th century example of a derivation by Petrus Abelardus in his *Dialectica* is recalled at page 217 of W. Kneale and M. Kneale in [KK91]: the conclusion *si Socrates est lapis, est asinus* ("if Socrates is a stone, he is an ass") as a consequence of the validity of the Disjunctive Syllogism $\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vdash \beta$. Indeed, from the hypothesis *Socrates est lapis* one derives *Socrates est lapis* or *Socrates est asinus*. But surely *Socrates non est lapis*, ergo *Socrates est asinus*."

Por outro lado, não se pode simplesmente abandonar o Silogismo Disjuntivo quando se tem em mente aplicações, já que este é essencial para o desenvolvimento da programação lógica, que utiliza largamente a chamada "Regra de Resolução":

$$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \vdash \beta$$

Contudo, como notam os autores em [CC08c], o Silogismo Disjuntivo pode ser conservado numa versão bastante natural, já que se pode demonstrar na maioria das LFIs que esta regra vale para situações consistentes: Silogismo Disjuntivo não vale de forma irrestrita,

$$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \nvdash \beta$$

mas vale na forma

$$\circ\alpha, \alpha \vee \beta, \neg\alpha \vdash \beta$$

onde $\circ$ é o conectivo de consistência das LFIs (veja Capítulo 3).

Resultados desse tipo, que ilustram o poder expressivo da silogística da inconsistência formal, podem ser estendidos quase que imediatamente

[1] Prolog é a linguagem de programação que se enquadra no paradigma de Programação em Lógica Matemática. (fonte: Wikipédia).

às lógicas catódicas. Mais ainda, o fato de que tanto as primeiras quanto as últimas são caracteizáveis por semânticas ricas, como as semânticas de traduções possíveis, conferem a ambas as classes de lógicas um interesse particular, que faz urgente a tarefa de separá-las de outras: Carnielli e Coniglio em [CC08b], página 169, afirmam:

> "O que entendemos por 'lógica paraconsistente', 'paraconsistência' e 'paraconsistentismo' não coincide com a posição defendida por Graham Priest, no assim chamado 'dialeteísmo', como exposta em [Priest 1987] e em diversos artigos subsequentes. Dialeteísmo é a posição filosófica de que certas contradições são (ou podem ser consideradas como) verdadeiras. A defesa deste enfoque envolve uma visão particular e acanhada da paraconsistência, como nos faz ver [Slater 2007]. Em particular, uma grave questão para o daleteísmo é esclarecer se, e como, por 'contradições verdadeiras' entendem se 'contradições reais', mas este é (mais um) problema para os dialeteístas, não para nós. Problemas, diga se de passagem, não faltam à ideologia, dialeteísta, acusada mesmo de "confusão mental" (cf. [Slater 2007])."

Visto de uma perspectiva ainda mais ampla, pode se perguntar qual é o papel de uma "lógica alternativa" na resolução dos problemas levantados acima, assim como de outros tipos de problemas. Tais lógicas de fato resolvem tais problemas? Se sim, são necesárias? Mas essas questões são pouco discutidas, talvez pela dificuldade técnica em se compreender esses novos tipos de lógicas.

Mesmo reconhecendo que as chamadas "lógicas alternativas" têm um papel cada vez mais importante em computação, inteligência artificial, base de dados e tantas outras áreas, Haack em [Haa96], no texto que revisa seu conhecido "Deviant Logic" e que basicamente expande o anterior apenas com artigos a respeito da lógica difusa, examina as conseqüências filosóficas dessas lógicas de forma muito tímida, e avança muito pouco na direção das tais "lógicas altenativas", e *nada* na direção das lógicas paraconsistentes. Na revisão a autora decide incorporar "material que pode ser de interesse a leitores desse livro", como se vê na página 259:

> "On that principle, I have included some material on generalized, branching,

> etc., quantifiers and on relevance and paraconsistent logics, even though these are not discussed in the book."

Haack nada diz em contrário ao programa de revisão embutido em algumas (ou todas) as "lógicas alternativas", mas não vai longe. Por exemplo, na página 25:

> "Conversely, by the same token, no statement is immune to revision. Revision even of the logical law of the excluded middle has been proposed as a means of simplifying quantum mechanics..."

Arruda, em [Arr80], faz um apanhado geral sobre a trajetória da lógica paraconsistente, 14 anos antes da publicação do livro de Haack, o que reforça ainda mais sua timidez em ao menos tentar avaliar o papel do que ela chama "lógicas alternativas" para as ciências formais. De acordo com Haack (em [Haa96], página xxv e página 40), Aristóteles, inclusive, teria sido ele próprio um dos primeiros críticos da lógica e haveria mesmo proposto modificações. Contudo, embora o texto citado tenha suas qualidades, nada se discute sobre a relevância da paraconsistência nos tópicos pelos quais Haack considera a lógica difusa meritória de ser discutida e criticada em seu livro.

Esse tipo de enfoque a respeito da lógica paraconsistente tem mostrado, como aponta Carnielli e Coniglio em [CC08b], página 171, que antagonizar Aristóteles e a paraconsistência não é uma tarefa simples, e notam a esse respeito as bases para uma tentativa de conciliação entre Aristóteles e o paraconsistentismo no comentário de Gottlieb, em [Got08], à posição de Aristóteles a um oponente que rejeitasse o princípio da não-contradição:

> "While Aristotle is clearly not a dialetheist, it is not clear where he stands on the issue of paraconsistency. Although Aristotle does argue that if his opponent rejects PNC across the board, she is committed to a world in which anything goes, he never argues that if (*per impossibile*) his opponent is committed to one contradiction, she is committed to anything, and he even considers that the opponent's view might apply to some statements but not to others. (*Metaph* IV 4 1008a10-12)."

Talvez não haja melhor companhia para as propostas que levantamos nesta Tese.

Tarefas para o futuro

Partindo de um fragmento implicativo do cálculo proposicional clássico, e fortalecendo esse fragmento com o acréscimo de novos símbolos (conectivos lógicos, operadores modais e operadores de consistência), construímos uma cadeia de sistemas lógicos que passa dos sistemas anódicos e que segue em direção aos catódicos. Nesse caminho passamos por diversos problemas que merecem ser pontuados aqui.

No Capítulo 1 dedicamo-nos a estabelecer um sistema de base que admitesse extensões modais normais, e apresentamos os sistemas anódicos monomodais $\mathbf{K}^{\supset}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ que consistem de extensões modais dos fragmentos $\mathbf{PC}^{\supset}$ e $\mathbf{PC}^{\supset,\wedge}$, respectivamente. Esses sistemas, contudo, apresentam-se em um estágio primitivo de expressividade, o que impossibilita extensões modais (na mesma linguagem) que possam apresentar interesse.

Nossa tarefa no Capítulo 2 se dedica a expandir a linguagem dos sistemas anódicos monomodais com o operador de possibilidade, com isso obtendo os sistemas bi-modais anódicos $\mathbf{K}^{\supset,\wedge}$ e $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\lozenge}$. Nesse estágio, dada a presença dos operadores modais $\square$ e $\lozenge$ como primitivos podemos, agora sim, começar a explorar a selva das modalidades anódicas. Mostramos que essas classes são caracterizadas por semânticas relacionais bi-valoradas e finalizamos com um resultado de incompletude relativo a essas classes. Embora possa parecer bastante, a investigação nesse campo apenas começou. Resta ainda por fazer uma investigação mais refinada a respeito dos sistemas anódicos: estudar a questão da *bissimulação*, *definibilidade* em primeira e segunda ordem e problemas de *decidibilidade* por meio de modelos finitos, além da questão sobre a algebrização desses sistemas. Somente para o caso dos sistemas anódicos isso dá ensejo a um programa de pesquisa inteiramente voltado a tais questões.

O resultado de incompletude que obtivemos para os sistemas anódicos mantém uma paridade com o mencionado resultado de incompletude de van

Benthem no sentido em que a incompletude é obtida para uma extensão de um sistema completo – no caso de van Benthem trata-se do sistema **K** acrescido de (**VB**). Foi nessa mesma linha que obtivemos os nossos resultados de incompletude. A questão que deixamos aberta se refere à caracterização do sistema bi-modal anódico $\mathbf{K}^{\supset,\Diamond}$ – observe que esse sistema é desprovido de conjunção. A caracterização desse sistema tem interesse porque uma conseqüência imediata desse fato seria mais um resultado de incompletude que preservando a paridade com o resultado de van Benthem. Dessa forma, poderíamos pensar no seguinte problema específico: qual é o menor subsistema completo de $\mathbf{K}^{\supset,\Diamond}$ que se revela incompleto quando estendido com (**VB**)?

No Capítulo 3, com o intuito de compreender a negação como mais uma modalidade, introduzimos as famílias $\mathbf{PI}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$ dos chamados sistemas catódicos, sistemas que extendem a família de sistemas anódicos $\mathbf{K}^{\supset,\wedge,\Diamond}+\mathbf{G}^{k,l,m,n}+\mathbf{G}^{m,n,k,l}$.

Da mesma forma que podemos pensar num programa de pesquisa inteiramente voltado para os sistemas anódicos, podemos pensar para os catódicos. Um problema muito intrigante com que nos deparamos no Capítulo 3 é relativo à incompletude. Embora tivéssemos obtido um resultado de incompletude para a classe dos sistemas catódicos, não foi possível obter um resultado análogo para cada uma das famílias consideradas. Seria possível obter alguma extensão incompleta dos sistemas $\mathbf{mbC}^{k,l,m,n}$, $\mathbf{bC}^{k,l,m,n}$ e $\mathbf{Ci}^{k,l,m,n}$?

Uma outra abordagem que seria interessante, e que nos parece bastante viável, seria definir sistemas catódicos com base quantificada. Para tanto poderíamos considerar a abordagem de Menezes, em [dM08], onde são propostos sistemas de lógicas da inconsistência formal quantificada. O mesmo procedimento que usamos nesta Tese para obter os sistemas catódicos pode ser útil para avançar o estudo dos sitemas catódicos na direção das lógicas quantificadas.

O Capítulo 4 foi inteiramente dedicado a propor semânticas modais de traduções possíveis para as famílias de sistemas catódicos. Como comentamos acima, tais semânticas salientam a importância que teriam os sistemas catódicos para a solução de problemas relacionados à racionalidade presentes em diferentes áreas. A maneira como tais semânticas são elaboradas abre espaço para que se coloque o seguinte problema: encontrar uma contraparte axiomática para os modelos de Kripke n-valentes de modo a obter uma caracterização para esse sistema.

No Capítulo 5 expandimos as classes anódicas e catódicas de sistemas modais a classes anódicas e catódicas de sistemas multimodais, o que compõe uma grande variedade de sistemas modais e multimodais . A abordagem multimodal dos sistemas anódicos e catódicos permite olhar para os problemas clássicos de lógica temporal da perspectiva dos sistemas anódicos e catódicos, o que abre a possibilidade para mais um campo de pesquisa.

Por fim, deixamos em aberto a demonstração do Teorema 5.3.5 e do Teorema 5.3.6, lembrando que esses resultados são fundamentais para a caracterização dos sistemas multimodais afirmativos anódicos e catódicos e que vale a pena investir na sua solução.

APÊNDICE

Capítulo 1

Para um conectivo binário temos 16 possibilidades de construir tabelas:

c_1	0	1
0	0	0
1	0	0

c_2	0	1
0	1	1
1	1	1

c_3	0	1
0	0	0
1	0	1

c_4	0	1
0	0	1
1	1	1

c_5	0	1
0	1	1
1	0	1

c_6	0	1
0	1	0
1	1	1

c_7	0	1
0	1	0
1	0	1

c_8	0	1
0	0	0
1	1	0

c_9	0	1
0	0	1
1	0	0

c_{10}	0	1
0	1	0
1	0	0

c_{11}	0	1
0	1	1
1	1	0

c_{12}	0	1
0	0	0
1	1	1

c_{13}	0	1
0	0	1
1	0	1

c_{14}	0	1
0	0	1
1	1	0

c_{15}	0	1
0	1	0
1	1	0

c_{16}	0	1
0	1	1
1	0	0

Observe que a identidade com os conectivos clássicos:

- c_1 é $\perp$;

- c_2 é $\top$;
- c_3 é $\wedge$;
- c_4 é $\vee$;
- c_5 é $\supset$;
- c_7 é $\equiv$;

Observe que os conectivos c_{12} e c_{13} representam as funções identidades escritas em duas variáveis e não faz sentido considerá-las como conectivos.

Lema 5.3.8. *Considere* $\boldsymbol{S}$ *um sistema escrito na linguagem* $c_1, c_2, c_3, c_4, \Box, \Diamond$. *Então, qualquer extensão de* $\boldsymbol{S}$ *com um dos conectivos acima permite definir uma negação clássica.*

Demonstração.

- $\neg p \overset{\text{Def}}{=} p\ c_5\ \bot$
- $\neg p \overset{\text{Def}}{=} \bot\ c_6\ p$
- $\neg p \overset{\text{Def}}{=} p\ c_7\ \bot$
- $\neg p \overset{\text{Def}}{=} \top\ c_8 p$
- $\neg p \overset{\text{Def}}{=} p\ c_9\ \top$
- $\neg p \overset{\text{Def}}{=} p\ c_{10}\ \bot$
- $\neg p \overset{\text{Def}}{=} p\ c_{11}\ p$
- $\neg p \overset{\text{Def}}{=} p\ c_{14}\ \top$
- $\neg p \overset{\text{Def}}{=} p\ c_{15}\ p$
- $\neg p \overset{\text{Def}}{=} p\ c_{16}\ p$

$\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[AJ75] Anderson, A. R. e N. D. Belnap Jr.: *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Princeton University, 1975.

[AK05] Avron, A. e B. Konikowska: *Multi-valued calculi for logics based on non-determinism*. Logic Journal of the IGPL, 13(4):365–387, 2005.

[AK07] Avron, A. e B. Konikowska: *Non-deterministic semantics for logics with a consistency operator*. International Journal of Approximate Reasoning, 45:271–287, 2007.

[AL05] Avron, A. e I. Lev: *Non-deterministic multiple-valued structures*. Journal of Logic and Computation, 15(3):241–261, 2005.

[Alv76] Alves, E. H.: *Lógica e Inconsistência: um estudo dos cálculos* C_n, $1 \leq n \leq \omega$. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 1976.

[Aqv84] Aqvist, L.: *Deontic logic*. In Gabbay, D. M. e F. Guenthner (editores): *Handbook of Philosophical Logic*, volume 2, páginas 605–714, Amsterdã, 1984.

[Aqv88] Aqvist, L.: *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative System*, volume 2. Bibliopolis, Nápoles, 1988.

[Ari52a] Aristóteles: *On Interpretation (The Interpretatione)*, volume 1 de *Great Books of the Western World*, capítulo Logic (Organon), páginas 25–38. Encyclopædia Britannica, Inc., Chicago, Londres, Toronto, 1952. Traduzido por E. M. Edghill e editado por R. M. Hutchins, editor chefe.

[Ari52b] Aristóteles: *On the Heavens (The Caelo)*, volume 1 de *Great Books of the Western World*, capítulo Logic (Organon), páginas 359–405. Encyclopædia Britannica, Inc., Chicago, Londres, Toronto, 1952. Traduzido por J. L. Stocks e editado por R. M. Hutchins, editor chefe.

[Ari52c] Aristóteles: *Prior Analytics (Analytica Priora)*, volume 1 de *Great Books of the Western World*, capítulo Logic (Organon), páginas 39–96. Encyclopædia Britannica, Inc., Chicago, Londres, Toronto, 1952. Traduzido por A. J. Jenkinson e editado por R. M. Hutchins, editor chefe.

[Arr80] Arruda, A. I.: *A survey of paraconsistent logic*. In Arruda, A. I., N. C. A. da Costa, e R. Chuaqui (editores): *Proceedings of the Mathematical Logic in Latin America*, páginas 1–41, Amsterdã, 1980. North Holland.

[Avr05] Avron, A.: *Non-deterministic matrices and modular semantics of rules*. In Béziau, J. Y. (editor): *Logica Universalis*, volume 9 de *Studies in Logic*, páginas 149–167, Basiléia, Suiça, 2005. Birkhäuser Verlag.

[Avr07] Avron, A.: *Non-deterministic semantics for families of paraconsistent logics*. In Béziau, J. Y., W. Carnielli, e D. Gabbay (editores): *Handbook of Paraconsistency*, volume 9 de *Studies in Logic*, páginas 285–320, Londres, 2007. College Publications.

[Bak78] Baker, J. R.: *Some remarks on Quine's argument against modal logic*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 19(4):663–673, 1978.

[Bar04] Barrero, T.: *Lógica positiva: plenitude, potencialidade e problemas (do pensar sem negação)*. Dissertação de Mestrado, IFCH-Unicamp, Campinas, SP, Brasil, 2004.

[Bat80] Batens, D.: *Paraconsistent extensional propositional logics*. Logique et analyse, 90-91:195–234, 1980.

[Bat89] Batens, D.: *Dynamic dialectical logics.* In Priest, G., R. Routley, e J. Norman (editores): *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*, páginas 187–217, München, 1989. Philosophia Verlag.

[BC06] Barrero, T. e W. A. Carnielli: *Tableaux sin refutación.* Matemáticas: Enseñanza Universitária, 13(2):81–88, 2006.

[BD84] Božić, M. e K. Došen: *Models for normal intuitionistic modal logics.* Studia Logica, 43:217–245, 1984.

[BdRV02] Blackburn, P., M. de Rijke, e Y. Venema: *Modal Logic*, volume 2. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Bet56] Beth, E. W.: *Semantic construction of intuitionistic logic.* Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Mededelingen, Nieuwe Reeks, 19(11):357–388, 1956.

[Béz01] Béziau, J Y.: *From paraconsistent logic to universal logic.* Sorites, 12:5–32, 2001.

[BGM98] Baldoni, M., L. Giordano, e A. Marteli: *A tableau calculus for multimodal logics and some undecidability results.* In *Proceedings of Tableaux 98–International Conference on Tableaux Methods*, páginas 44–59, 1998.

[Boo93] Boolos, G.: *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[BP89] Blok, W. J. e D. Pigozzi: *Algebraizable Logics*, volume 396 de *Memoirs of the American Mathematical Society.* American Mathematical Society, 1989.

[BSC05] Bueno-Soler, J. e W. A. Carnielli: *Possible-translations algebraization for paraconsistent logics.* Bulletin of the Section of Logic, 34(2):77–92, 2005. Preprint available at *CLE e-Prints*, vol. 5, n. 6, 2005.
`http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol\_5,n\_6,2005.html`.

[BSCC07] Bueno-Soler, J., M. E. Coniglio, e W. A. Carnielli: *Possible-translations algebraizability.* In J.-Y. Béziau, W. A. Carnielli, D. Gabbay (editor): *Handbook of Paraconsistency*, páginas 321–340, Londres, 2007. College Publications.

[Bue04] Bueno, J.: *Semânticas algébricas de traduções-possíveis.* Dissertação de Mestrado, IFCH-Unicamp, Campinas, Brazil, 2004.

[Béz05] Béziau, J. Y.: *Paraconsistent logic from a modal viewpoint.* Journal of Applied Logic, 3(1):7–14, 2005.

[Car47] Carnap, R.: *Meaning and Necessity.* University of Chicago Press, Chicago U. P., 1947.

[Car90] Carnielli, W. A.: *Many-valued logic and plausible reasoning.* In *Proceedings of the 20th International Congress on Many-Valued Logics*, páginas 328–335, Universidade de Charlotte, Carolina do Norte, EUA, 1990. IEEE Computer Society.

[Car00] Carnielli, W. A.: *Possible-translations semantics for paraconsistent logics.* In Batens, D., C. Mortensen, G. Priest, e J. P. van Bendegem (editores): *Frontiers of Paraconsistent Logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency*, Logic and Computation Series, páginas 149–163. Baldock: Research Studies Press, King's College Publications, 2000.

[Cat91] Catach, L.: *Tableaux: a general theorem prover for modal logics.* Automated reasoning and nonclassical logics. J. Automat. Reason, 7(4):489–510, 1991.

[CC05] Carnielli, W. e M. E. Coniglio: *Splitting Logics.* In Artemov, S., H. Barringer, A. d'Avila Garcez, L. C. Lamb, e J. Woods (editores): *We will show them! Essays in honour of Dov Gabbay on his 60th birthday*, volume 1, páginas 389–414. College Publications, Londres, 2005.

[CC08a] Carnielli, W. e M. E. Coniglio: *Combining Logics*. In Zalta, Edward N. (editor): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. CSLI, Stanford University, Fall 2008. `http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/logic-combining/`.

[CC08b] Carnielli, W. A. e M. E. Coniglio: *Aristóteles, Paraconsistentismo e a Tradição Budista*. O que nos faz pensar, 23:163–175, 2008.

[CC08c] Carnielli, W. A. e M. E. Coniglio: *On discourses addressed by infidel logicians*. In *Fourth World Congress of Paraconsistency (WCP4)*, volume 1, páginas 16–18, Melbourne, 2008. Ormond College.

[CCCM05] Caleiro, C., W. A. Carnielli, M. E. Coniglio, e J. Marcos: *Two's company: "The humbug of many logical values"*. In Béziau, J. Y. (editor): *Logica Universalis*, páginas 169–189, Basiléia, 2005. Birkhäuser Verlag.

[CCD09] Carnielli, W. A., M. E. Coniglio, e I. M. L. D'Ottaviano: *New dimensions on translations between logics*. Logica Universalis, 2009. No prelo.

[CCG+08] Carnielli, W. A., M. E. Coniglio, D. Gabbay, P. Gouveia, e C. Sernadas: *Analysis and Synthesis of Logics*. Sringer, 2008.

[CCM07] Carnielli, W. A., M. E. Coniglio, e J. Marcos: *Logics of Formal Inconsistency*. In Gabbay, D. e F. Guenthner (editores): *Handbook of Philosophical Logic*, volume 14, páginas 1–93, Amsterdã, 2007. Springer-Verlag.

[CD97] Carnielli, W. A. e I. M. L. D'Ottaviano: *Translations between logical systems: a manifesto*. Logique et Analyse, 40(157):67–81, 1997.

[CDM95] Cignoli, R. L. O., I. M. L. D'Ottaviano, e D. Mundici: *Álgebras das Lógicas de Lukasiewicz*, volume 12 de *Coleção CLE*. CLE-Unicamp, Campinas, S.P, 1995. Segunda Edição.

[CF58] Curry, H. B. e R. Feys: *Combinatory Logic*, volume 1. North-Holland, Amsterdã, 1958.

[CF08] Cocchiarella, N. B. e M. A. Freund: *Modal Logic: An Introduction to its Syntax and Semantics*. Oxford University Press, 2008.

[Che80] Chellas, B. F.: *Modal Logic: an Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[Chu36] Church, A.: *An unsovable problem of elementary number theory*. American Journal of Mathematics, 58:345–363, 1936.

[CJ97] Celani, S. e R. Jansana: *A new semantics for positive modal logic*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 38(1):1–18, 1997.

[CL03] Costa-Leite, A.: *Paraconsistência, modalidades e cognoscibilidade*. Dissertação de Mestrado, IFCH-Unicamp, Campinas, SP, Brasil, 2003.

[CL07] Costa-Leite, A.: *Interactions of metaphysical and epistemic concepts*. Tese de Doutorado, Universidade de Neuchâtel, Neuchâtel, Suiça, 2007.

[CLM92] Carnielli, W. A. e M. Lima-Marques: *Reasoning Under Inconsistent Knowledge*. Journal of Applied Non-Classical Logics, 2(1):49–79, 1992.

[CM02] Carnielli, W. A. e J. Marcos: *A taxonomy of* **C***-systems*. In Carnielli, W. A., M. E. Coniglio, e I. M. L. D'Ottaviano (editores): *Paraconsistency - the Logical Way to the Inconsistent*, volume 228 de *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, páginas 1–94, Nova Iorque, 2002. Marcel Dekker.

[CMdA00] Carnielli, W. A., J. Marcos, e S. de Amo: *Formal Inconsistency and Evolutionary Databases.* Logic and Logical Philosophy, 8:115–152, 2000.

[Con07] Coniglio, M.E.: *Logics of deontic inconsistency.* CLE e-Prints, 7(4), 2007.

[CP01] Canielli, W. A. e C. Pizzi: *Modalità Multimodalità.* Franco Angeli, Milão, 2001.

[CP08] Canielli, W. A. e C. Pizzi: *Modalities and Multimodalities.* Springer, Amsterdã, 2008.

[Cun08] Cunning, D.: *Descartes' Modal Metaphysics.* In Zalta, Edward N. (editor): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* CSLI, Stanford University, Fall 2008. http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/descartes-modal/.

[Cur42] Curry, H. B.: *The inconsistency of certain formal logics.* Journal of Symbolic Logic, 7(3):115–117, 1942.

[dACM02] Amo, S. de, W. A. Carnielli, e J. Marcos: *A logical framework for integrating inconsistent information in multiple databases.* In *In International Symposium on Foundations of Information and Knowledge Systems*, páginas 67–84. Springer, 2002. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.19.5476.

[dC63] Costa, N. C. A. da: *Sistemas formais inconsistentes.* Tese de Cátedra, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil, 1963. Editado pela Editora UFPR, Curitiba, 1993.

[dC74] Costa, N. C. A. da: *On the theory of inconsistent formal systems.* Notre Dame Journal of Formal Logic, 15:497–510, 1974.

[dCA77] Costa, N. C. A. da e E. Alves: *A semantical analysis of the calculi* C_n. Notre Dame Journal of Formal Logic, 18(4):621–630, 1977.

[dCC86] Costa, N. C. A. da e W. A. Carnielli: *On Paraconsistent deontic logic.* Philosophia - the Philosophycal Quartely of Israel, 16(3/4):293–305, 1986.

[DdC70] D'Ottaviano, I. M. L. e N. C. A. da Costa: *Sur un problème de Jaśkowski.* Comptes Rendus de l'Academie de Siences de Paris, 270-A:1349–1353, 1970.

[Des73] Descartes, R.: *Meditações*, volume 15 de *Os Pensadores*, capítulo 2, páginas 93–150. Ed. Abril Cultural, São Paulo, 1973. Tradução de J. Guinsburg e B. Prado Jr.

[dM08] Menezes, R. P. B. de: *Lógicas da inconsistência formal quantificadas.* Dissertação de Mestrado, IFCH-Unicamp, Campinas, Brasil, 2008.

[D'O73] D'Ottaviano, I. M. L.: *Fechos caracterizados por interpretações.* Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, Campinas, SP, 1973.

[Dos84] Dosen, K.: *Intuitionistic double negation as a necessity operator.* Publications de l'Institut Mathématique, 35(49):15–20, 1984.

[Dos86a] Dosen, K.: *Modal translations and intuitionistic double negation.* Logique et Analyse, páginas 81–94, 1986.

[Dos86b] Dosen, K.: *Modal translations and intuitionistic double negation.* The Journal of Symbolic Logic, 51:485–486, 1986.

[Dos86c] Dosen, K.: *Negation as a Modal Operator.* Reports on Mathematical Logic, 20:15–27, 1986.

[Dos99] Dosen, K.: *Negation in the light of modal logic.* In Gabbay, D. M. e H. Wansing (editores): *What is Negation?*, páginas 77–86. Dordrecht: Kluwer, 1999.

[dS08] Silva, F. S. Correia da: *Knowledge-based Modality Selection for Information Presentation in a Mobile System for Primary

Homecare. In *Artificial Intelligence and Simulation of Behaviour - Proceedings of Workshop on Multimodal Output Generation*, Aberdeen, 2008.

[dSDS99] Silva, J. J. da, I. M. L. D'Ottaviano, e A. M. Sette: *Translations between Logics*. In Caicedo, X. e C. H. Montenegro (editores): *Models, Algebras and Proofs*, páginas 435–448, Nova Iorque, 1999. Marcel Dekker.

[Dug40] Dugundji, J.: *Note on a property of matrices for Lewis and Langford's calculi of propositions*. The Journal of Symbolic Logic, 5:150–151, 1940.

[Dug66] Dugundji, J.: *Topology*. McGraw-Hill Companies, Nova Iorque, 1966.

[Dun95] Dunn, J. M.: *Positive modal logic*. Studia Logica, 55(2):301–317, 1995.

[Eps90] Epstein, R. L.: *The semantic foundations of logic*, volume 1 de *Propositional logics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[Fef84] Feferman, S.: *Toward Useful Type-Free Theories, I*. The Journal of Symbolic Logic, 49(1):75–111, 1984.

[Fei97] Feitosa, H. A.: *Traduções conservativas*. Tese de Doutorado, IFCH-Unicamp, Campinas, Brasil, 1997.

[FF03] Fajardo, R. e M. Finger: *Non-normal modalisation*. In Balbiani, P., N. Y. Suzuki, F. Wolter, e M. Zakharyaschev (editores): *Advances in Modal Logic*, volume 4, páginas 83–95, Londres, 2003. King's College Publications.

[Fin01] Fine, K.: *The question of realism*. Philosophers Imprint, 1(1):1–30, 2001. http://www.philosophersimprint.org/images/3521354.0001.002.pdf.

[Fit91] Fitting, M.: *Many-valued modal logics.* Fundamenta Informaticæ, 15:235–254, 1991.

[Fit92] Fitting, M.: *Many-valued modal logics.* Fundamenta Informaticæ, 17:55–73, 1992.

[For84] Forrester, J. W.: *Gentle murder or the adverbial Samaritan.* Journal of Philosophy, 81(4):193–197, 1984.

[Fre79] Frege, G.: *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des Reinen Denkens.* L. Nebert, Halle, 1879. Reimpresso em 1964.

[FS96] Fine, K. e G. Schurz: *Transfer Theorems for stratified modal logics.* In Copeland, J. (editor): *Logic and Reality, Essays in Pure and Applied Logic*, páginas 169–213. Oxford University Press, 1996. In memory of Arthur Prior.

[Gen69] Gentzen, G.: *On the relation between intuitionist and classical arithmatic.* In Szabo, M. E. (editor): *The collected papers the Gerhard Gentzen*, páginas 53–67, Amsterdã, 1969. North Holland.

[Gli29] Glivenko, V.: *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer.* Bulletins de la Classe de Sciences, 15:183–188, 1929.

[Göd32] Gödel, K.: *Zum intuitionistischen aussagenkalkül.* Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, 69:65–66, 1932. mathematisch-naturwissenschaftiliche Klasse.

[Göd86a] Gödel, K.: *An interpretation of the intuitionistic propositional calculus.* In Feferman, S., J. W. Dawson Jr., W. Goldfarb, C. Parsons, e R. N. Solovay (editores): *Collected works*, volume 1, páginas 301–303, Oxford, 1986. Oxford University Press.

[Göd86b] Gödel, K.: *On intuitionistic arithimatic and number theory.* In Feferman, S., J. W. Dawson Jr., W. Goldfarb, C. Parsons, e R.

N. Solovay (editores): *Collected works*, volume 1, páginas 287–295, Oxford, 1986. Oxford University Press.

[Gom08] Gomes, N. G.: *Um panorama da lógica deôntica.* Kriterion (online), 49(117):9–38, 2008.
`http://www.scielo.br/pdf/kr/v49n117/a0249117.pdf`.

[Got08] Gottlieb, P.: *Aristotle on Non-contradiction.* In Zalta, Edward N. (editor): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* CSLI, Stanford University, 2008.
`http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/aristotle-noncontradiction/`.

[Haa96] Haack, S.: *Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism.* University of Chicago Press, 1996.

[HC96] Hughes, G. E. e M. J. Cresswell: *A New Introduction to Modal Logic.* Routledge, 1996.

[Hen49] Henkin, L.: *Fragments of the propositional calculus.* The Journal of Symbolic Logic, 14(1):42–48, 1949.

[Hen96] Henkin, L.: *The discovery of my completeness proofs.* The Bulletin of Symbolic Logic, 2(2):127–158, 1996.

[HH91] Harvey, C. W. e J. Hintikka: *Modalization and Modalities.* In *et allia*, T. M. Seebohm (editor): *Phenomenology and the Formal Sciences.* Dordrecht: Kluwer, 1991.

[Jaś69] Jaśkowski, S.: *Propositional calculus for contradictory deductive system.* Studia Logica, 24:143–157, 1969.

[Kan75] Kant, E.: *Fundamentos da Metafísica dos Costumes.* Clássicos de bolso. Ediouro, 1975. Tradução de Lourival de Queiroz Henkel.

[Kan95] Kant, E.: *Crítica da faculdade do juízo.* Forense Universitária, 2° edição, 1995. Tradução de Valério Rohden e Antonio Marques.

[KK91] Kneale, W. e M. Kneale: *O Desenvolvimento da Lógica*. Fundação Calouste Gulbenkian, 3° edição, 1991. Tradução de Manuel Lourenço.

[Knu81] Knuuttila, S.: *The emergence of deontic logic in the fourteenth century*. In Hilpinen, R. (editor): *New Studies in Deontic Logic: Norms, Actions and the Foundations of Ethics*, páginas 225–248. D. Reidel Publishing company, 1981.

[Kol67] Kolmogorov, A. N.: *On the principle of excluded middle*. In Heijenoort, J. Van (editor): *From Frege to Gödel*, páginas 414–437, Cambridge, 1967. Harvard University Press. Tradução da versão de 1925.

[Kri59] Kripke, S.: *A completeness theorem in modal logic*. The Journal of Symbolic Logic, 24:1–14, 1959.

[Kri65] Kripke, S.: *Semantical analyses of intuitionist logic I*. In Crossley, J. e M. A. E. Dummett (editores): *Formal systems and recursive functions*, páginas 92–130, Amsterdã, 1965. North Holland.

[Kri80] Kripke, S.: *Naming and necesity*. Harvard University Press, 1980.

[Kry92] Krysztofiak, W.: *Phenomenology, possible worlds and negation*. Husserl Studies, 8:205–220, 1992.

[Kuh98] Kuhn, S.: *Modal logic*. In Craig, E. (editor): *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Londres, 1998. Routledge.

[KW91] Kracht, M. e F. Wolter: *Properties of independently axiomatizable bimodal logics*. The Journal of Symbolic Logic, 56(4):1469–1485, 1991.

[LA80] Loparić, A. e E. H. Alves: *The semantics of the systems C_n of da Costa*. In Arruda, A. I., N. C. A. da Costa, e A. M.

Sette (editores): *Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic*, páginas 161–172, São Paulo, 1980. Sociedade Brasileira de Lógica.

[Lew18] Lewis, C. I.: *A Survey of Symbolic Logic*, volume 2. University of California Press, Berkeley, 1918.

[Lew01] Lewis, D.: *On the Plurality of Worlds*. Blackwell Publishing, 2001.

[LL32] Lewis, C. I. e C. H. Langford: *Symbolic Logic*. Dover, 1932.

[Lok08] Lokhorst, G. J.: *Mally's Deontic Logic*. In Zalta, Edward N. (editor): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. CSLI, Stanford University, 2008. `http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/mally-deontic/`.

[LS77] Lemmon, E. J. e D. Scott: *An introduction to modal logic*. In Segerberg, K. (editor): *The Lemmon Notes*. Oxford, Blackwell, 1977.

[LS07] Lindström, S. e K. Segerberg: *Modal logic and philosophy*. In Blackburn, P., J. van Benthem, e F. Wolter (editores): *Handbook of Modal Logic*, páginas 1153–1218, Amsterdã, 2007. Elsevier.

[Mal26] Mally, E.: *Grundgesetz der Sollens: Elemente der Logik des Willens*. Universitäts-Buchhandlung, 1926.

[Mar99] Marcos, J.: *Semânticas de traduções possíveis*. Dissertação de Mestrado, IFCH-Unicamp, Campinas, Brazil, 1999. `http://www.cle.unicamp.br/pub/thesis/J.Marcos/`.

[Mar05a] Marcos, J.: *Modality and paraconsistency*. In Bilkova, M. e L. Behounek (editores): *The Logica Yearbook 2004*, páginas 213–222, Praga, 2005. Filosofia.

[Mar05b] Marcos, J.: *Nearly every normal modal logic is paranormal.* Logique et Analyse, 48(189/192):279–300, 2005.

[Mar08] Marcos, J.: *Possible-translations semantics for some weak classically based paraconsistent logics.* Journal of Applied Non-Classical Logics, 18(1):07–28, 2008.

[Mas95] Massacci, F.: *A bridge between modal logics and contextual reasoning.* In Brézillon, P. e S. Abu-Hakima (editores): *IJCAI-95 International Workshop on Modeling Context in Knowledge Representation and Reasoning*, volume 95, páginas 89–98, Paris VI, 1995. Institut Blaise Pascal.
`http://www.ing.unitn.it/~massacci/Publications/Papers/mass95IJCAIWS.ps.gz`.

[McC08] McConnell, T.: *Moral Dilemmas.* In Zalta, Edward N. (editor): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* CSLI, Stanford University, 2008.
`http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/moral-dilemmas/`.

[McG07] McGinnis, C.: *Paraconsistency and deontic logic: some formal systems for reasoning with normative conflicts.* Tese de Doutoramento, University of Minnesota, 2007.

[McN08] McNamara, P.: *Deontic Logic.* In Zalta, Edward N. (editor): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* CSLI, Stanford University, Winter 2008.
`http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/logic-deontic/`.

[Men08] Menzel, C.: *Actualism.* In Zalta, Edward N. (editor): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* CSLI, Stanford University, Winter 2008.
`http://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/actualism/`.

[Mil08] Miller, A.: *Realism*. In Zalta, Edward N. (editor): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. CSLI, Stanford University, 2008. http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/realism/.

[MN08] McKay, T. e M. Nelson: *Propositional Attitude Reports*. In Zalta, Edward N. (editor): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. CSLI, Stanford University, 2008. http://plato.stanford.edu/entries/prop-attitude-reports/dere.html.

[Mor] Mortari, C. A.: *Interpretações das lógicas modais: o Realismo Modal de David Lewis*. Relatório Técnico de Pesquisa. A aparecer.

[Mor89] Morikawa, O.: *Some modal logics based on a three-valued logic*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 30(1):130–137, 1989.

[MR04] Mele, A. R. e P. (editores) Rawling: *The Oxford Handbook of Rationality*. Oxford University Press, EUA, 2004.

[Mur02] Murcho, D.: *Essencialismo Naturallizado. Aspectos da Metafísica da Modalidade*. Angelus Novus, 2002.

[Nol97] Nolan, D.: *Impossible Worlds: A Modest Approach*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 38(4):535–572, 1997.

[Nut97] Nute, D.: *Apparent obligation*. In Nute, D. (editor): *Defeasible Deontic Logic*, volume 263, páginas 287–316. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[O'N04] O'Neill, O.: *Kant: Rationality as Practical Reason*. In Mele, A. R. e P. Rawling (editores): *The Oxford Handbook of Rationality*, páginas 93–109, EUA, 2004. Oxford University Press.

[PC08] Peron, N. M. e M. E. Coniglio: *Logics of deontic inconsistencies and paradoxes*. CLE e-Prints, 8(6), 2008. ftp://logica.cle.unicamp.br/pub/e-prints/cle30anos/Peron-Coniglio.pdf.

[Per09] Peron, N. M.: *Lógicas da inconsistência deôntica*. Dissertação de Mestrado, IFCH-Unicamp, Campinas, Brasil, 2009. http://www.cle.unicamp.br/prof/coniglio/Dissertacao%20Newton.pdf.

[Piz74] Pizzi, C.: *La Logica del Tempo*. Boringhieri, Turin, 1974.

[Pla74] Plantinga, A.: *The nature of necessity*. Oxford University Press, 1974.

[Pla76] Plantinga, A.: *Actualism and Possible Worlds*. Theoria, 42:139–160, 1976.

[PM68] Prawitz, D. e P. E. Malmnäs: *A survey of some connections between classical intuitionistic and minimal logic*. In Schmidt, H., K. Schütte, e H. Thiele (editores): *Contributions to mathematical logic*, páginas 215–229, Amsterdã, 1968. North-Holland.

[Pri02] Priest, G.: *Paraconsistent logic*. In Gabbay, D. e F. Guenthner (editores): *Handbook of Philosophical Logic*, volume 6, páginas 259–358, Amsterdã, 2002. Kluwer Academic Publishers. Segunda Edição.

[PS97] Prakken, H. e M. Sergot: *Dyadic deontic logic and contrary-to-duty obligations*. In Nute, D. N. (editor): *Defeasible Deontic Logic*, volume 263, páginas 223–262, Holanda, 1997. Kluwer Publishing Company.

[Qui56] Quine, W. V.: *Quantifiers and propositional attitudes*. The Journal of Philosophy, LIII(5):177–187, 1956.

[Qui66] Quine, W. V.: *Three grades of modal involvement*. In *The Ways of Paradox*, páginas 185–196, Nova Iorque, 1966. Random House.

[Roh02] Rohden, V.: *Kant e Habermas: a reformulação discursiva da moral kantiana*. Ethic - Revista Internacional de Filosofia da Moral, 1(1):97–100, 2002. http://www.cfh.ufsc.br/ethic@/ETHIC1~7.PRN.pdf.

[Rov04] Rovane, C.: *Rationality and persons*. In Mele, A. R. e P. Rawling (editores): *The Oxford Handbook of Rationality*, páginas 320–343, EUA, 2004. Oxford University Press.

[RP84] Routley, R. e V. Plumwood: *Moral Dilemmas and the Logic of Deontic Notions*. Discussion Papers on Environmental Philosophy, 6, 1984.

[Sau06] Sautter, F. T.: *O argumento ontológico gödeliano*. In Branquinho, J., D. Murcho, e N. G. Gomes (editores): *Enciclopédia de Termos Lógico-Filosóficos*, volume Único, páginas 53–58, São Paulo, 2006. Martins Fontes.

[Sch60] Schütte, K.: *Beweistheorie*. Springer-Verlag, 1960.

[Sco70] Scott, D.: *Advice on modal logic*, capítulo Philosophical Problems in Logic. Some Recent Developments, páginas 143–173. Reidel, Dordrecht, 1970.

[Seg77] Segerberg, K.: *A completeness theorem in the modal logic of programs*. Notices of the American Mathematical Society, 4(6):1–552, 1977.

[SSN07] Serra-Seca-Neto, A. G.: *Um provador de teormas multi-estratégia*. Tese de Doutorado, IME-Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2007.
`http://www.ime.usp.br/~adolfo/teseAdolfoNeto_vfinal.pdf`.

[T.00] T., Sautter F.: *O argumento ontológico gödeliano para a existência de Deus*. Tese de Doutorado, IFCH-Unicamp, Campinas, Brasil, 2000.

[Tho78] Thomason, S. K.: *Possible worlds and many truth values*. Studia Logica, 37:195–204, 1978.

[Tom91] Tomberlin, J. E.: *Review of "Introduction to deontic logic and the theory of normative systems" by Lennart Aqvist*. Noûs, 25(1):109–116, 1991.

[Tro91] Troelstra, A. S.: *A History of Constructivism in the 20th Century*, volume 2. ITLI Prepublication Series - University of Amsterdam, Amsterdã, 1991.

[TvD88] Troelstra, A. S. e D. van Dalen: *Constructivism. An Introduction*, volume 2. North-Holland, Amsterdã, 1988.

[Urm58] Urmson, J. O.: *Saints and heroes.* In Melden, A. I. (editor): *Essays in Moral Philosophy*, Seattle, 1958. University of Washington Press.

[vB78] Benthem, J. van: *Two simple incomplete logics.* Theoria, 44:25–37, 1978.

[vB83a] Benthem, J. van: *The Logic of Time. A Model Theoretic Investigation in to the Varieties of Temporal Discourse.* Reidel, Dordrecht, 1983.

[vB83b] Benthem, J. van: *Modal Logic and Classical Logic.* Bibliopolis, Nápoles, 1983.

[vB84] Benthem, J. van: *Correspondence Theory.* In Gabbay, D. e F. Guenthner (editores): *Handbook of Philosophical Logic*, volume II, páginas 167–247, Dordrecht, 1984. Reidel.

[vI86] Inwagen, P. van: *Two Concepts of Possible Worlds.* Midwest Studies in Philosophy, 11:185–213, 1986.

[vW51] Wright, G. von: *Deontic logic.* Mind, 60:1–15, 1951.

[vW64] Wright, G. von: *A new system of deontic logic.* Danish Yearbook of Philosophy, 1:173–182, 1964.

[Wój88] Wójcicki, R.: *Theory of logical calculi: basic theory of consequence operations*, volume 199 de *Synthese Library.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.

[Wol98] Wolter, F.: *Fusions of modal logics revisited.* In Kracht, M., M. De Rijke, e H. Wansing and. M. Zakharyaschev (editores): *Advances in Modal Logic*, volume 1, páginas 361–379, Stanford, 1998. CSLI Publications.

[Zal97] Zalta, E. N.: *A Classically-Based Theory of Impossible Worlds.* Notre Dame Journal of Formal Logic, 38(4):640–660, 1997.

INDICE REMISSIVO

Autores

Conceitos