



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação**

Alexandre Felipe

**Um algoritmo de busca local baseado em LMIs  
para computar ganhos de realimentação  
estabilizantes diretamente como variáveis de  
otimização**

Campinas  
2017

Alexandre Felipe

**Um algoritmo de busca local baseado em LMIs para  
computar ganhos de realimentação estabilizantes  
diretamente como variáveis de otimização**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

**Orientador: Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA PELO ALUNO ALEXANDRE FELIPE E ORIENTADA PELO PROF. DR. RICARDO CORAÇÃO DE LEÃO FONTOURA DE OLIVEIRA.

Campinas  
2017

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** Não se aplica.

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

F335a Felipe, Alexandre, 1987-  
Um algoritmo de busca local baseado em LMIs para computar ganhos de realimentação estabilizantes diretamente como variáveis de otimização / Alexandre Felipe. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas lineares. 2. Otimização robusta. 3. Realimentação. 4. Desigualdades matriciais lineares. I. Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura de, 1978-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** An LMI-based local search algorithm to compute stabilizing feedback gains directly as optimization variables

**Palavras-chave em inglês:**

Linear systems

Robust optimization

Feedback

Linear matrix inequalities

**Área de concentração:** Automação

**Titulação:** Mestre em Engenharia Elétrica

**Banca examinadora:**

Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira [Orientador]

Alexandre Trofino Neto

Paulo Augusto Valente Ferreira

**Data de defesa:** 07-12-2017

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Elétrica

## COMISSÃO JULGADORA — DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Candidato:** Alexandre Felipe

**RA:** 152432

**Data da Defesa:** 07/12/2017

**Título da Dissertação:** “Um algoritmo de busca local baseado em LMIs para computar ganhos de realimentação estabilizantes diretamente como variáveis de otimização”

Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira (presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto (DAS/CTC-UFSC)

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

# Agradecimentos

Ao CPqD, pelo apoio ao meu desenvolvimento acadêmico;  
Ao Prof. Ricardo, pelo papel de revisor incansável;  
À minha esposa, Laurilyn Rojas, pelo encorajamento;  
A Deus, por quem existem todas as coisas.

*“Science is ever discovering new wonders; but she brings from her research nothing that, rightly understood, conflicts with divine revelation.”*

*– Ellen G. White*

# Resumo

Esta dissertação trata do problema de estabilização robusta de sistemas lineares incertos por realimentação estática de estados e de saídas. São investigados sistemas contínuos e discretos no tempo, com as matrizes do sistema pertencendo a um domínio politópico. Diferentemente dos métodos de estabilização robusta disponíveis na literatura, nos quais o produto entre a matriz de Lyapunov (ou a variável de folga) e o ganho de controle é transformado em uma nova variável, nesta dissertação é proposto um novo paradigma, evitando a mudança de variável e fornecendo condições de síntese que tratam o ganho de controle diretamente como uma variável de otimização. O procedimento de síntese é formulado em termos de um algoritmo iterativo com convergência local baseado em desigualdades matriciais lineares, tendo como principais novidades os seguintes pontos: tanto a matriz de Lyapunov como a matriz dinâmica de malha fechada aparecem de forma afim nas condições; apenas variáveis de folga são fixas a cada iteração, evitando a alternância clássica entre a matriz de Lyapunov e o ganho de controle; inicialização independente das matrizes do sistema, garantindo a existência de soluções factíveis a cada iteração; critério de parada baseado em uma condição de análise de estabilidade robusta. Comparações numéricas exaustivas mostram que o método proposto apresenta eficácia maior que todos os métodos da literatura, sendo especialmente adequado para tratar os problemas de realimentação de saída e controle descentralizado.

**Palavras-chaves:** sistemas lineares incertos, estabilização robusta, realimentação de estados, realimentação de saída, controle descentralizado, desigualdades matriciais lineares.

# Abstract

This dissertation addresses the problem of robust stabilization of uncertain linear systems by static state- and output-feedback control laws. Continuous- and discrete-time systems with matrices belonging to a polytopic domain are investigated. Differently from the robust stabilization methods available in the literature, where the product between the Lyapunov matrix (or slack variable) and the control gain is transformed into a new variable, in this dissertation a new paradigm is proposed, avoiding the change of variable and providing synthesis conditions that handle the control gain directly as an optimization variable. The synthesis procedure is formulated in terms of a locally convergent iterative algorithm based on linear matrix inequalities, with the following points as main novelties: both the Lyapunov and closed-loop dynamic matrices appear affinely in the conditions; only slack variables are fixed at each iteration, avoiding the classic alternation between the Lyapunov matrix and the control gain; initialization independent of the matrices of the system, ensuring the existence of feasible solutions at each iteration; stopping criterion based on a robust stability analysis condition. Exhaustive numerical comparisons show that the proposed method can outperform all the conditions from the literature in terms of effectiveness, being specially suitable to deal with output-feedback and decentralized control problems.

**Keywords:** uncertain linear systems, robust stabilization, state-feedback, static output-feedback, decentralized control, linear matrix inequalities.



# Lista de Ilustrações

Figura 1 – Ilustração da região de possível localização dos autovalores de $A(\alpha)$ dada uma solução factível para (3.1). . . . .	39
Figura 2 – Sistemas estabilizados por realimentação de estados “centralizada” usando o Algoritmo 1 com $(g, d) \in \{(1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$ e alguns métodos da literatura para sistemas de uma entrada ( $m = 1$ ). . . . .	44
Figura 3 – Porcentagem de sistemas estabilizados por realimentação de estados “descentralizada”, atendendo as estruturas dadas na Tabela 2 e usando o Algoritmo 1 com $(g, d) = (1, 0)$ e alguns métodos da literatura. . . . .	44
Figura 4 – Limitante para a magnitude dos autovalores de $A(\alpha)$ dada uma solução para (4.8). . . . .	50
Figura 5 – Análise de estabilidade robusta para sistemas classificados por ordem ou número de vértices. . . . .	58
Figura 6 – Estabilização robusta por realimentação de estados para sistemas classificados por ordem ou por número de vértices. . . . .	65
Figura 7 – Estabilização robusta por realimentação de saída para sistemas classificados por ordem ou por número de vértices. . . . .	68
Figura 8 – Estabilização robusta por realimentação de estados com estrutura descentralizada classificados por ordem ou por número de vértices. . . . .	71
Figura 9 – Efetividade da condição proposta comparada às condições da literatura para tratar diferentes problemas associados a sistemas contínuos. . . . .	76
Figura 10 – Tempo computacional da condição proposta comparada às condições da literatura para tratar diferentes problemas associados a sistemas contínuos. . . . .	77
Figura 11 – Efetividade da condição proposta comparada às condições da literatura para tratar diferentes problemas associados a sistemas discretos. . . . .	78
Figura 12 – Tempo computacional da condição proposta comparada às condições da literatura para tratar diferentes problemas associados a sistemas contínuos. . . . .	79

# Lista de Tabelas

Tabela 1	–	Condições de Lyapunov para estabilidade assintótica do sistema 2.3.	27
Tabela 2	–	Máscaras $M_{dc}$ de ganhos descentralizados em função da ordem $n$ dos sistemas investigados.	44
Tabela 3	–	Efetividade e tempo médio demandado pelo resolvedor referente à análise de estabilidade robusta, em termos de número máximo de iterações internas, estrutura de $X_3(\alpha)$ , e resolvedor empregado.	57
Tabela 4	–	Efetividade e tempo computacional das condições de análise de estabilidade robusta escolhidas da literatura para os diferentes resolvedores considerados.	59
Tabela 5	–	Efetividade e tempo computacional das condições de estabilização robusta por realimentação de estados escolhidas da literatura para os diferentes resolvedores considerados (sistemas de uma e duas entradas).	63
Tabela 6	–	Efetividade e tempo médio demandado pelo resolvedor referente à estabilização robusta de sistemas com uma entrada por realimentação de estados, em termos de número máximo de iterações internas, estrutura de $X_3(\alpha)$ , e resolvedor empregado.	63
Tabela 7	–	Efetividade e tempo médio demandado pelo resolvedor referente à estabilização robusta de sistemas com duas entradas por realimentação de estados, em termos de número máximo de iterações internas, estrutura de $X_3(\alpha)$ , e resolvedor empregado.	64
Tabela 8	–	Efetividade e tempo computacional das condições de estabilização robusta por realimentação de saída escolhidas da literatura para os diferentes resolvedores considerados (sistemas de uma e duas entradas).	66
Tabela 9	–	Efetividade e tempo médio demandado pelo resolvedor referente à estabilização robusta de sistemas com uma entrada e uma saída por realimentação de saída, em termos de número máximo de iterações internas, estrutura de $X_3(\alpha)$ , e resolvedor empregado.	67
Tabela 10	–	Efetividade e tempo médio demandado pelo resolvedor referente à estabilização robusta de sistemas com duas entradas e duas saídas por realimentação de saída, em termos de número máximo de iterações internas, estrutura de $X_3(\alpha)$ , e resolvedor empregado.	67
Tabela 11	–	Máscaras de ganhos descentralizados testadas.	70
Tabela 12	–	Comparação entre as diferentes formulações da condição proposta para estabilização robusta de sistemas contínuos.	75

Tabela 13 – Comparação entre as diferentes formulações da condição proposta para estabilização robusta de sistemas discretos. . . . .	75
---	----

# Sumário

<b>Lista de Ilustrações</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>10</b>
<b>Sumário</b>	<b>12</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>14</b>
<b>I Fundamentos</b>	<b>18</b>
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>19</b>
2.1 Desigualdades matriciais	20
2.2 Sinais e sistemas	24
2.3 Projeto de controle estabilizante por LMIs	26
2.4 Estabilidade de sistemas lineares	26
2.5 Condições de estabilização robusta	28
2.5.1 Realimentação de estados para sistemas contínuos	28
2.5.2 Realimentação de estados para sistemas discretos	29
2.5.3 Realimentação de saída	30
2.5.4 Realimentação de estados com variáveis de folga	31
2.5.5 Realimentação de saída com variáveis de folga	34
2.5.6 Técnica de <i>dois estágios</i>	35
2.6 Motivação	36
<b>II Contribuições</b>	<b>37</b>
<b>3 Primeira contribuição</b>	<b>38</b>
3.1 Experimentos numéricos	42
<b>4 Segunda contribuição</b>	<b>46</b>
4.1 Relaxações LMI para análise de estabilidade robusta	48
4.1.1 Relaxação para sistemas contínuos	48
4.1.2 Relaxação para sistemas discretos	49
4.2 Algoritmo de relaxações sucessivas	50
4.2.1 Análise robusta por relaxações sucessivas	52
4.3 Experimentos numéricos de análise de estabilidade robusta	55
4.4 Estabilização robusta por relaxações sucessivas	58
4.5 Experimentos numéricos de estabilização	61
4.5.1 Estabilização por realimentação de estados	62
4.5.2 Estabilização por realimentação de saída	65

4.5.3	Estabilização por realimentação de estados com estrutura descentralizada . . . . .	69
4.6	Relaxação adicional por meio de variável escalar . . . . .	70
4.6.1	Caso contínuo . . . . .	70
4.6.2	Caso Discreto . . . . .	73
4.7	Experimentos numéricos com relaxações adicionais . . . . .	74
4.8	Visão geral . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>80</b>
5.1	Perspectivas de investigações futuras . . . . .	81
5.2	Trabalhos Produzidos . . . . .	81
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>83</b>

# 1 Introdução

Considere as seguintes desigualdades dependentes de parâmetros

$$\left(A(\alpha) + B(\alpha)KC(\alpha)\right)'P(\alpha) + P(\alpha)\left(A(\alpha) + B(\alpha)KC(\alpha)\right) \prec \mathbf{0}, \quad P(\alpha) \succ \mathbf{0} \quad (1.1)$$

em que  $P(\alpha) = P(\alpha)'$  e  $K$  são variáveis de otimização. Essas desigualdades são obtidas por meio da teoria de estabilidade de Lyapunov aplicada a uma equação diferencial linear (representada em espaço de estados) com matrizes incertas e uma lei de controle por realimentação de saída. Para facilitar a apresentação, considere que  $\alpha$  está em um domínio compacto, como um hipercubo ou um simplex unitário. Se  $C(\alpha) = I$ , a condição resultante caracteriza o bem conhecido problema de estabilização por *realimentação de estados*. Para uma  $C(\alpha)$  genérica, as desigualdades resultantes representam o que talvez seja o mais importante problema na teoria de controle robusto de sistemas lineares, o problema de estabilização robusta por *realimentação estática de saída* (SYRMOS *et al.*, 1997; SADABADI; PEAUCELLE, 2016). Antes de continuar a discussão sobre esses problemas basilares em teoria de controle, em que a principal dificuldade é decorrente do produto entre duas variáveis de decisão (não convexidade) na primeira desigualdade, considere o caso mais simples em que  $K = 0$  (o sistema em malha aberta), ou seja, o problema de análise de estabilidade robusta da matriz  $A(\alpha)$ . Nessa situação, as desigualdades são lineares na variável de decisão  $P(\alpha)$ , e são conhecidas como desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) dependentes de parâmetros. A única dificuldade a ser superada nesse caso é a natureza de dimensão infinita do problema, e a primeira *relaxação* para resolver o problema foi a estabilidade quadrática (BARMISH, 1985). Cerca de vinte anos depois, o problema é considerado *bem resolvido* por meio de aproximações polinomiais construídas em termos de LMIs (HENRION *et al.*, 2004; CHESI *et al.*, 2005; OLIVEIRA; PERES, 2007; OLIVEIRA *et al.*, 2008). Por outro lado, de volta aos problemas de controle, a situação é muito mais complicada, mesmo para o problema de realimentação de estados.

Para motivar a abordagem proposta nesta dissertação, é importante revisar algumas técnicas importantes para obter soluções para as desigualdades em (1.1) resolvendo problemas convexos, em geral introduzindo conservadorismo. Considere primeiro o caso de realimentação de estados e a relaxação provida pela estabilidade quadrática, *i.e.*, fixando  $P(\alpha) = P$ . Usando uma transformação de congruência (ou investigando a estabilidade do sistema dual), é possível linearizar as desigualdades com uma mudança de variáveis dada por  $KP = Z$ , e se as desigualdades lineares resultantes são factíveis, então  $K = ZP^{-1}$  é um ganho estabilizante robusto (BERNUSSOU *et al.*, 1989; GEROMEL *et al.*, 1991a). Note que se as matrizes do sistema são livres de incertezas, ou seja,  $A(\alpha) = A$  e  $B(\alpha) = B$ , sempre que o sistema for estabilizável, então um ganho estabilizante  $K$  pode

ser determinado (a LMI resultante é necessária e suficiente). Ademais, essa mudança de variáveis também foi usada para ajudar na linearização de outros problemas importantes de controle, como a realimentação dinâmica de saída de ordem completa (GAHINET; APKARIAN, 1994; SCHERER *et al.*, 1997; MASUBUCHI *et al.*, 1998) e a filtragem de ordem completa para sistemas lineares (GEROMEL, 1999; GEROMEL *et al.*, 2000). O próximo resultado importante foi a introdução de variáveis adicionais, conhecidas como *variáveis de folga*, (GEROMEL *et al.*, 1998a; DE OLIVEIRA *et al.*, 1999; EBIHARA *et al.*, 2015). Dentre muitas versões disponíveis na literatura (DE OLIVEIRA *et al.*, 1999; TROFINO; DE SOUZA, 1999; SHAKED, 2001; EBIHARA; HAGIWARA, 2004; PIPELEERS *et al.*, 2009), considere as seguintes desigualdades

$$He \left( \begin{bmatrix} X(\alpha)'(A(\alpha) + B(\alpha)KC(\alpha)) & P(\alpha) \\ -X(\alpha) + \xi X(\alpha)'(A(\alpha) + B(\alpha)KC(\alpha)) & -\xi X(\alpha) \end{bmatrix} \right) \prec 0, \quad P(\alpha) \succ 0 \quad (1.2)$$

em que  $He(\cdot) = (\cdot) + (\cdot)'$  é uma matriz simétrica. Essas desigualdades são equivalentes às dadas em (1.1) na busca por um ganho  $K$  para qualquer  $\xi$  positivo e  $X(\alpha)$  é a variável de folga (PIPELEERS *et al.*, 2009). Para realizar a síntese por realimentação de estados ( $C(\alpha) = I$ ) por meio de desigualdades convexas, basicamente é necessário fixar  $X(\alpha) = X$ , e fazer uma troca de variáveis (depois de possivelmente aplicar alguma transformação de congruência ou investigar o sistema dual)  $KX = Z$ . Note que neste caso a matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$  pode ser dependente de parâmetros, e isso pode ser considerado como a maior vantagem deste método quando comparado com a estabilidade quadrática, em geral provendo resultados menos conservadores. Antes de continuar com a discussão, note que a restrição  $X(\alpha) = X$  é uma fonte de conservadorismo e esta abordagem é, em última análise, baseada no paradigma de mudança de variáveis.

Agora considere o problema de realimentação estática de saída, que é mais desafiador mesmo para sistemas sem incertezas. Depois dos resultados de realimentação de estados, não demorou muito até que o primeiro resultado baseado em LMIs aparecesse na literatura para tratar a realimentação de saída. Se a matriz de saída ou a matriz de entrada é livre de incertezas (precisamente conhecida), então os resultados para realimentação de estados podem ser adaptados para tratar o problema de realimentação de saída, ao preço de introduzir mais conservadorismo, geralmente impondo restrições de estrutura às variáveis de otimização, requerendo a aplicação de transformações de similaridade (independentes de parâmetros) às matrizes do sistema ou incluindo restrições de igualdade (PERES *et al.*, 1993b; PERES *et al.*, 1993a; GEROMEL *et al.*, 1996; GEROMEL *et al.*, 1998b; CRUSIUS; TROFINO, 1999). Utilizando estratégias similares, o importante problema de controle descentralizado (ŠILJAK, 2011), em que o ganho de controle deve ter alguns elementos nulos, também pôde ser tratado (GEROMEL *et al.*, 1994). Soluções para o caso geral ( $B(\alpha)$  e  $C(\alpha)$  incertas) apareceram depois, com ênfase para a abordagem de *dois estágios*, iniciada em (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001b; ARZELIER *et al.*, 2003) e aprimorada em (MOREIRA *et al.*, 2011; AGULHARI *et al.*, 2012a). Novamente, pode-se

dizer que os resultados baseados em variáveis de folga são menos conservadores, pois a matriz de Lyapunov pode ser procurada livremente. Para um apanhado geral atualizado dos métodos de realimentação de saída, sugere-se a leitura de (SADABADI; PEAUCELLE, 2016).

Além das técnicas mencionadas, critérios de desempenho baseados, por exemplo, nas normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  podem ser incorporados sem maiores dificuldades técnicas (GEROMEL *et al.*, 1991b; GEROMEL *et al.*, 1992; DE OLIVEIRA *et al.*, 2002; DE SOUZA *et al.*, 2000). Mais importante, as abordagens originalmente desenvolvidas para tratar sistemas incertos com incerteza hipercúbica ou politópica foram estendidas para tratar muitas outras classes de sistemas lineares, como sistemas lineares com parâmetros variantes (MOHAMMADPOUR; SCHERER, 2012), sistemas chaveados (LIBERZON, 2003), sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (COSTA *et al.*, 2005; COSTA *et al.*, 2013), sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno (TANAKA; WANG, 2001), sistemas lineares com atraso (FRIDMAN, 2014), sistemas lineares com entradas saturadas (TARBOURIECH *et al.*, 2011), entre outras. Como uma evidência óbvia, se as matrizes do sistema em todas essas classes de sistemas lineares são afetadas por incertezas politópicas ou hipercúbicas, as condições de síntese (com ou sem variáveis de folga) sofrerão da mesma fonte de conservadorismo discutida nos últimos parágrafos. É possível até mesmo arriscar-se e dizer que o conservadorismo inerente a todos esses métodos é um legado do *paradigma de mudança de variáveis*, que requer variáveis independentes de parâmetros para fornecer o ganho robusto.

Continuando com a revisão, existe pouco para enfatizar depois da introdução das variáveis de folga. Talvez a exceção seja o uso de busca por escalares combinados com condições LMIs (SHAKED, 2001; EBIHARA; HAGIWARA, 2004; GEROMEL; KOROGUI, 2006; PIPELEERS *et al.*, 2009; OLIVEIRA *et al.*, 2011; VIEIRA *et al.*, 2015). Por exemplo, após a linearização das desigualdades dadas em (1.2), a condição resultante não é mais factível para qualquer valor de  $\xi$ . Assim é necessário otimizar (por exemplo, em termos de um procedimento de bissecção ou simplesmente testar um conjunto de valores preestabelecido) em termos de  $\xi$ , potencialmente, melhorando os resultados. O preço a ser pago é um custo computacional maior. O que pode ser observado na última década é que as contribuições para resolver (1.1) com menos conservadorismo são cada vez mais raras.

Antes de apresentar a proposta desta dissertação, também é importante mencionar que o problema de estabilização robusta de um sistema incerto pode ser investigado por uma técnica diferente da teoria de estabilidade de Lyapunov. Por exemplo, usando o critério de Hermite, é possível expressar a solução como um problema de otimização polinomial em que o ganho  $K$  é a única variável de decisão, e métodos de otimização como as relaxações baseadas na teoria de momentos (LASSERRE, 2001; HENRION; LASSERRE, 2006) e soma de quadrados (CHESI, 2014) podem ser aplicados. O inconveniente dessas



abordagens é o rápido aumento do custo computacional e, mais importante, a não extensão imediata para tratar todas as classes de sistemas listadas anteriormente. Motivado por esse último argumento, nesta dissertação é proposto um novo procedimento de projeto de controladores estabilizantes robustos usando a teoria de estabilidade de Lyapunov, ou, em outras palavras, uma abordagem diferente para resolver (1.1). No entanto, a principal contribuição desta dissertação é propor uma técnica distinta dos métodos comumente encontrados na literatura. Mais precisamente, não é empregado o paradigma de mudança de variáveis, e o ganho  $K$  é uma variável de otimização do problema. Como consequência, a principal vantagem é que os problemas de realimentação de estados, ou realimentação estática de saída e controle descentralizado são tratados de maneira similar.

Esta dissertação está organizada em 4 capítulos, e um breve resumo de cada é apresentado a seguir.

**Capítulo 2:** Introduce a notação, a terminologia e conceitos básicos necessários para a compreensão do restante do texto. Além disso, também são apresentadas as principais condições de estabilização robusta baseadas em LMIs na literatura. O leitor com o embasamento teórico correspondente pode dirigir-se diretamente ao Capítulo 3.

**Capítulo 3:** Apresenta a primeira contribuição desta dissertação, que consiste em um procedimento iterativo que combina a solução de LMIs sujeitas a minimização de uma função objetivo, dando origem ao primeiro algoritmo proposto para resolver o problema de estabilização robusta de sistemas lineares politópicos a tempo contínuo por realimentação de estados. Experimentos numéricos ilustrando a aplicação da técnica no problema de controle descentralizado também são apresentados.

**Capítulo 4:** A técnica introduzida no Capítulo 2 é aprimorada neste capítulo. São introduzidas variáveis de folga que melhoram consideravelmente a efetividade do método; também são propostas condições para tratar sistemas discretos. Uma comparação mais extensa é realizada, aplicando as condições resultantes com diferentes configurações (número de iterações, restrições de estrutura e diferentes resolvidores) a diferentes problemas (análise de estabilidade robusta, estabilização robusta por realimentação de estados, estabilização robusta por realimentação de saída e estabilização robusta por realimentação de estados descentralizada).

Parte I

Fundamentos

## 2 Fundamentação Teórica

Os objetivos desta seção são apresentar as notações que serão empregadas ao longo desta dissertação, introduzir o conceito de desigualdades matriciais, e relações de equivalência que permitem manipular desigualdades matriciais.

Sejam  $m$  e  $n$  inteiros positivos; a família das matrizes com  $m$  linhas e  $n$  colunas com elementos reais usualmente é denotada como  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Nesta dissertação, no entanto, é utilizada a notação  $\mathbb{M}(m, n)$ , por ser considerada mais adequada especialmente quando  $m$  e  $n$  são expressões (e.g.  $\mathbb{M}(3 \times n, m)$  eliminando a ambiguidade que existiria em  $\mathbb{R}^{3 \times n \times m}$ ). A notação  $\mathbb{M}$  pode ser usada para representar o conjunto de matrizes de qualquer dimensão. Todas as matrizes usadas nesta dissertação são definidas sobre o conjunto dos números reais, com as operações usuais.

**Notação 1** (Conjunto dos números naturais). *Conjunto dos números Naturais é denotado como  $\mathbb{N}$  e corresponde ao conjunto dos números inteiros não negativos  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .*

**Notação 2** (Conjunto dos números naturais não nulos). *O conjunto dos números naturais não nulos é denotado como  $\mathbb{N}^*$  e corresponde ao conjunto dos naturais excluindo-se o zero, ou seja  $\{1, 2, 3, \dots\}$ .*

**Notação 3** (Conjunto dos números inteiros). *O conjunto dos números inteiros é denotado como  $\mathbb{Z}$ .*

**Notação 4** (Conjunto dos números reais). *O conjunto dos números reais é denotado como  $\mathbb{R}$ .*

**Notação 5** (Elemento de matriz). *Seja  $A \in \mathbb{M}(n, m)$  e  $i \leq m, j \leq n, i, j \in \mathbb{N}^*$ ;  $(A)_{i,j}$  é o elemento na linha  $i$ , e na coluna  $j$ .*

**Notação 6** (Produto matricial). *Sejam  $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathbb{M}(m, n)$ ,  $B \in \mathbb{M}(n, p)$ ,  $AB$  denota o produto matricial convencional definido como  $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (A)_{i,k} (B)_{j,k}$ .*

**Notação 7** (Adição e subtração matricial). *Sejam  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B \in \mathbb{M}(m, n)$ ,  $A + B$  denota a soma matricial convencional, definida como  $(A + B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}$  e  $A - B$  denota a diferença matricial convencional, definida como  $(A - B)_{i,j} = (A)_{i,j} - (B)_{i,j}$ .*

**Notação 8** (Produto de Hadamard). *Sejam  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B \in \mathbb{M}(m, n)$ ,  $A \circ B$  denota o produto de Hadamard, definido como  $(A \circ B)_{i,j} = (A)_{i,j} \cdot (B)_{i,j}$ .*

**Notação 9** (Transposição). *Seja  $A \in \mathbb{M}(m, n)$ ,  $A' \in \mathbb{M}(n, m)$  denota a transposta da matriz  $A$ , isto é,  $(A')_{j,i} = (A)_{i,j}$ .*

**Definição 1** (Matriz simétrica). *Uma matriz simétrica é uma matriz quadrada  $A \in \mathbb{M}(n, n)$  tal que  $A = A'$ .*

**Notação 10.** *O conjunto das matrizes simétricas de dimensão  $n$  é denotado como  $\mathbb{S}(n)$ .*

**Notação 11** (Complemento simétrico). *Dada uma matriz  $A \in \mathbb{M}(n, n)$ ,  $He(A) := A + A'$  é uma matriz simétrica e a notação  $He(\cdot)$  tem sido utilizada extensivamente em trabalhos relacionados. A origem dessa notação é a palavra “Hermitiana” que generaliza o conceito de simetria para matrizes sobre o conjunto dos números complexos.*

## 2.1 Desigualdades matriciais

**Notação 12** (Forma quadrática). *A forma quadrática é uma função  $Q_n : (\mathbb{M}(n, n) \times \mathbb{M}(n, 1)) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q(A, x) = (x'Ax)_{1,1}$ , e pode ser denotada simplesmente como  $x'Ax$ , omitindo o índice.*

Quatro classes de desigualdades matriciais são definidas a seguir.

**Notação 13** (Matriz definida-negativa). *Uma matriz definida-negativa de dimensão  $n$  é uma matriz  $A \in \mathbb{M}(n, n)$ , representada com a notação  $A \prec \mathbf{0}$ , tal que para qualquer vetor  $x \in \mathbb{M}(n, 1)$ ,  $x \neq \mathbf{0} \Rightarrow x'Ax < 0$ .*

**Notação 14** (Matriz semidefinida-negativa). *Uma matriz semidefinida-negativa de dimensão  $n$  é uma matriz  $A \in \mathbb{M}(n, n)$ , representada com a notação  $A \preceq \mathbf{0}$ , tal que para qualquer vetor  $x \in \mathbb{M}(n, 1)$ ,  $x'Ax \leq 0$ .*

**Notação 15** (Matriz definida-positiva). *Uma matriz definida-positiva de dimensão  $n$  é uma matriz  $A \in \mathbb{M}(n, n)$ , representada com a notação  $A \succ \mathbf{0}$ , tal que para qualquer vetor  $x \in \mathbb{M}(n, 1)$ ,  $x \neq \mathbf{0} \Rightarrow x'Ax > 0$ .*

**Notação 16** (Matriz semidefinida-positiva). *Uma matriz semidefinida-positiva de dimensão  $n$  é uma matriz  $A \in \mathbb{M}(n, n)$ , representada com a notação  $A \succeq \mathbf{0}$ , tal que para qualquer vetor  $x \in \mathbb{M}(n, 1)$ ,  $x'Ax \geq 0$ .*

**Lema 1.**  $A \prec \mathbf{0} \iff -A \succ \mathbf{0}$

*Demonstração.* Dado  $x \in \mathbb{M}(n, 1)$ ,  $x \neq \mathbf{0}$  temos do lado esquerdo  $x'Ax < 0$ , e do lado direito temos  $x'((-1)A)x > 0$ , pela comutatividade de produto entre matriz e escalar temos  $(x'Ax) < 0 \iff -(x'Ax) > 0$ . □

**Lema 2.**  $A \preceq \mathbf{0} \iff -A \succeq \mathbf{0}$

*Demonstração.* Similar a do Lema 1. □

**Lema 3.**  $A \prec \mathbf{0} \Rightarrow A \preceq \mathbf{0}$

*Demonstração.* Dado  $x \in \mathbb{M}(n, 1)$ , se  $x = \mathbf{0}$  então  $x'Ax = 0 \leq 0$ . Por outro lado se  $x \neq 0$ , por premissa temos que  $x'Ax < 0$  e por consequência  $x'Ax \leq 0$ .  $\square$

**Lema 4.**  $A \succ \mathbf{0} \Rightarrow A \succeq \mathbf{0}$

*Demonstração.* Esse resultado é consequência dos resultados anteriores, combinando (Lema 1)  $A \succ \mathbf{0} \iff -A \prec \mathbf{0}$  e (Lema 2)  $A \succeq \mathbf{0} \iff -A \preceq \mathbf{0}$ . Assim temos como argumento  $-A \prec \mathbf{0} \Rightarrow -A \preceq \mathbf{0}$  que é o argumento do Lema 3.  $\square$

**Definição 2** (Matriz com sinal). *Uma matriz  $A \in \mathbb{M}(n, n)$  que satisfaça  $A \preceq \mathbf{0}$  ou  $A \succeq \mathbf{0}$  e dita matriz com sinal.*

**Definição 3** (Cone convexo). *Um cone convexo é um subconjunto de um espaço vetorial que é fechado sob multiplicação por escalar positivo e sob adição. Consequentemente é um conjunto convexo.*

**Lema 5.** *Os conjuntos das matrizes simétricas com sinal são cones convexos. Podemos ressaltar quatro classes de cones convexos*

1. (Cone das matrizes simétricas semidefinidas-positivas) de dimensão  $n$ :  $\{A \in \mathbb{M}(n, n) \mid A \succeq \mathbf{0}\}$ ;
2. (Cone das matrizes simétricas definidas-positivas) de dimensão  $n$ :  $\{A \in \mathbb{M}(n, n) \mid A \succ \mathbf{0}\}$ ;
3. (Cone das matrizes simétricas semidefinidas-negativas) de dimensão  $n$ :  $\{A \in \mathbb{M}(n, n) \mid A \preceq \mathbf{0}\}$ ;
4. (Cone das matrizes simétricas definidas-negativas) de dimensão  $n$ :  $\{A \in \mathbb{M}(n, n) \mid A \prec \mathbf{0}\}$ ;

*Demonstração.* Sejam duas matrizes  $A$  e  $B$  simétricas de dimensão  $n \times n$  e números reais  $a$  e  $b$ . Temos a seguinte relação  $x'(aA + bB)x = x'Ax + x'Bx$ . A combinação convexa de  $A$  e  $B$  é  $(1 - m)A + mB$  com  $0 \leq m \leq 1$ , e sua forma quadrática é  $x'((1 - m)A + mB)x = (1 - m)(x'Ax) + m(x'Bx)$ . Dado que  $A \succeq \mathbf{0} \Rightarrow x'Ax \geq 0$  e  $B \succeq \mathbf{0} \Rightarrow x'Bx \geq 0$ , conclui-se que  $(1 - m)(x'Ax) + m(x'Bx) \geq 0$  e portanto a combinação convexa de  $A$  e  $B$  é semidefinida positiva; logo, o conjunto das matrizes semidefinidas-positivas é convexo; Raciocínio similar permite demonstrar o mesmo para os três outros casos.  $\square$

**Definição 4** (Transformação de similaridade). *Uma transformação de similaridade aplicada a uma matriz  $A$  consiste em multiplicar uma matriz de transformação  $T$  de posto completo pela direita e a sua inversa pela esquerda, isto é  $T^{-1}AT$ .*

Uma propriedade importante é que a transformação de similaridade preserva os autovalores da matriz  $A$ .

**Definição 5** (Transformação de congruência). *Uma transformação de congruência aplicada a uma matriz  $A$  consiste em multiplicar uma matriz de transformação  $T$  de posto completo pela direita, e a sua transposta pela esquerda, isto é  $T'AT$ .*

**Lema 6.** *Seja  $A \in \mathbb{M}(n, n)$  uma matriz com sinal, e  $T \in \mathbb{M}(n, m)$  uma matriz de posto completo  $m \leq n$ . O resultado da transformação de congruência  $T'AT$  é uma matriz de dimensão  $m \times m$  com mesmo sinal que  $A$ , i.e.*

1.  $A \prec \mathbf{0} \Rightarrow T'AT \prec \mathbf{0}$

2.  $A \preceq \mathbf{0} \Rightarrow T'AT \preceq \mathbf{0}$

3.  $A \succ \mathbf{0} \Rightarrow T'AT \succ \mathbf{0}$

4.  $A \succeq \mathbf{0} \Rightarrow T'AT \succeq \mathbf{0}$

*Demonstração.* Note que a forma quadrática aplicada sobre  $T'AT$  também se reduz a uma forma quadrática aplicada diretamente a  $A$ ,  $x'T'ATx = (Tx)'A(Tx) = y'Ay$ . Com isso pode-se concluir sobre as proposições 2 e 4. Para provar as proposições 1 e 3, é necessário observar que, como  $T$  tem posto  $m$ , temos  $Tx = y = 0 \Rightarrow x = 0$ .  $\square$

Caso  $T$  não tenha posto completo as proposições 1 e 3 do Lema 6 continuariam válidas se as consequências fossem desigualdades semidefinidas (não estritas).

**Lema 7.** *Sejam  $\mathbb{K} \subset \mathbb{S}(n)$  um cone convexo, um polinômio matricial  $\mathcal{P} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ ,  $\mathcal{P}(\alpha) := \sum P_i m_i(\alpha)$  em que  $m_i : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{R}$  representa cada um dos monômios de  $\mathcal{P}(\alpha)$ , e  $P_i \in \mathbb{K}$  são os respectivos coeficientes matriciais; Então  $\mathcal{P}(\alpha) \in (\mathbb{K} \cup \{\mathbf{0}\}) \forall \alpha \in [0, \infty)^N$ .*

*Demonstração.* Cada monômio  $m_i(\alpha)$  é positivo pois, por hipótese, ele é o produto de números não negativos, os elementos de  $\alpha$ ; cada coeficiente  $P_i$  pertence ao cone  $\mathbb{K}$ , então  $(m_i(\alpha)P_i) \in \mathbb{K}$ ; por fim como um cone convexo é fechado sob a soma,  $\mathcal{P}(\alpha) = \sum P_i m_i(\alpha) \in \mathbb{K}$  exceto no caso em que  $\sum m_i(\alpha) = 0$ , em tal caso  $\mathcal{P}(\alpha) = \mathbf{0}$ .  $\square$

O Lema 7 permite obter relaxações para desigualdades do tipo  $\mathcal{P}(\alpha) \preceq \mathbf{0}$ ,  $\mathcal{P}(\alpha) \succeq \mathbf{0}$ . Para tratar desigualdades em cones que não incluem o zero é introduzido o Lema 8 no qual as funções são expressas com um simplex unitário como domínio.

**Definição 6** (Simplex unitário). *O simplex unitário de dimensão  $N$  é um conjunto  $\Lambda_N \subset \mathbb{R}^N$  definido como*

$$\Lambda_N = \left\{ \alpha \in [0, 1]^N \mid \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (2.1)$$

**Lema 8.** *Sejam  $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}(n)$  um cone convexo, um polinômio matricial homogêneo de grau  $g$   $\mathcal{P} : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ ,  $\mathcal{P}(\alpha) := \sum P_i m_i(\alpha)$ , em que cada monômio  $m_i(\alpha)$  é o produto entre  $g$  elementos de  $\alpha$ , possivelmente com repetições, e  $P_i \in \mathbb{K}$  é o respectivo coeficiente matricial; em que os coeficientes são não nulos para todos os monômios da forma  $\alpha_i^g$ ; Então  $\mathcal{P}(\alpha) \in \mathbb{K}$ .*

*Demonstração.* Como  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ , ao menos um elemento de  $\alpha$  deve ser positivo digamos  $\alpha_k > 0$  para algum  $k$  entre 1 e  $N$ . Como  $\alpha_k > 0$ , garante-se  $\mathcal{P}(\alpha) \neq \mathbf{0}, \forall \alpha \in \Lambda_N$  a menos que  $P_k = \mathbf{0}$ , que só é possível se  $\mathbf{0} \in \mathbb{K}$ . Conclui-se, portanto, que  $\mathcal{P}(\alpha) = \sum P_i m_i(\alpha) \in \mathbb{K}, \forall \alpha \in \Lambda_N$   $\square$

O Lema 8 permite obter relaxações para as desigualdades matriciais do tipo  $\mathcal{P}(\alpha) \succ \mathbf{0}, \mathcal{P}(\alpha) \prec \mathbf{0}, \mathcal{P}(\alpha) \succeq \mathbf{0}, \mathcal{P}(\alpha) \preceq \mathbf{0}$ , apresentadas ao longo desta dissertação.

**Lema 9** (Complemento de Schur). *Sejam as matrizes  $A \in \mathbb{S}(n), B \in \mathbb{M}(n, m), C \in \mathbb{S}(m)$ , então as seguintes desigualdades matriciais são equivalentes:*

1.  $\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}$
2.  $A \succ \mathbf{0}$  e  $C - B'A^{-1}B \succ \mathbf{0}$
3.  $C \succ \mathbf{0}$  e  $A - BC^{-1}B' \succ \mathbf{0}$

**Lema 10** (Lema de Finsler). *Considere  $w \in \mathbb{M}(n, 1), Q \in \mathbb{S}(n)$  e  $B \in \mathbb{M}(m, n)$  com posto menor que  $n$ , e  $B^\perp$  uma base para o espaço nulo de  $B$  (isto é,  $BB^\perp = \mathbf{0}$ ). Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1.  $w'Qw \prec \mathbf{0}, \forall w \neq \mathbf{0} : Bw = \mathbf{0}$
2.  $B^{\perp'}QB^\perp \prec \mathbf{0}$
3.  $\exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu B'B \prec \mathbf{0}$
4.  $\exists X \in \mathbb{M}(n, m) : Q + XB + B'X' \prec \mathbf{0}$

*Demonstração.* Ver (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001)  $\square$

**Definição 7** (SDP). *Um problema de programação semidefinida (do inglês, Semidefinite Programming — SDP) é dado na forma*

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && \langle c, x \rangle \\ & \text{sujeito a} && F_0 + \sum_{i=1}^V F_i x_i \preceq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.2}$$

em que  $x \in \mathbb{R}^V$  é o vetor de variáveis do problema e  $F_i$  são matrizes simétricas dadas. O vetor  $x$  deve ser determinado de modo que uma combinação afim das matrizes  $F_i$  com coeficientes  $x_i$  resultem em uma matriz semidefinida negativa.

## 2.2 Sinais e sistemas

**Definição 8** (Sinal). *Uma função cujo domínio está contido em  $\mathbb{R}$  e sua imagem é uma extensão de  $\mathbb{R}$ , é por vezes chamada de sinal. A dimensão do sinal é a dimensão da sua imagem.*

O termo “função” aqui se refere à entidade matemática que a cada elemento do seu domínio associa um elemento de sua imagem. O termo “sinal” pode ser definido de modo mais específico: “*uma grandeza que varia no tempo*” quando estudando problemas físicos ou “*uma grandeza que varia no tempo e transporta informação*” quando se trata de comunicações. Um sinal não precisa carregar informação, embora sua medição possa fornecer alguma informação. Um sinal pode ser função de outras variáveis. Por exemplo, no caso de imagens o sinal é função do espaço. Contudo, aqui trabalha-se exclusivamente com sinais que são função de uma variável escalar. O sinal também não precisa representar grandezas físicas, por exemplo, indicadores socioeconômicos, indicadores climáticos, estatísticas de acesso a um determinado *website*, ou probabilidades de certos eventos. A linguagem empregada ao longo do texto trata sinais sempre como função do tempo. Na prática, as técnicas propostas nesta dissertação podem nunca virem a ser usadas com sinais de outra variável que não o tempo, no entanto, isso não é uma limitação das técnicas, se problemas com sinais em outras variáveis puderem ser modelados apropriadamente.

**Definição 9** (Sistema). *Um sistema ou, mais especificamente, sistema dinâmico, é uma entidade que associa três sinais: o estado  $x(t)$ , uma entrada  $u(t)$  e uma saída  $y(t)$ , de modo que conhecendo o estado para instantes anteriores e o sinal de entrada é possível determinar o estado em qualquer instante posterior. A saída em um instante pode ser unicamente determinada dado o estado e a entrada naquele instante.*

**Definição 10** (Sinal contínuo). *Um sinal contínuo é um sinal cujo domínio é  $\mathbb{R}$ .*

**Definição 11** (Sinal discreto). *Um sinal discreto é um sinal cujo domínio é  $\mathbb{Z}$ .*

**Definição 12** (Sistema contínuo). *Um sistema contínuo é um sistema em que o estado, a entrada e a saída são sinais contínuos.*

**Definição 13** (Sistema discreto). *Um sistema discreto é um sistema em que o estado, a entrada e a saída são sinais discretos.*

**Definição 14** (Sistema invariante no tempo). *Um sistema que se para uma entrada  $u(t + \tau)$  e um estado inicial  $x(\tau)$ , o estado associado é  $x(t + \tau)$  e a saída é  $y(t + \tau)$ , é dito invariante no tempo para todo  $t, \tau \in \mathbb{R}$ .*

**Definição 15** (Sistema linear). *Um sistema linear tem as seguintes propriedades*



1. (*superposição*) se para uma entrada  $u_1(t)$ , e um estado inicial  $x_1(0)$  o estado associado é  $x_1(t)$ , e a saída  $y_1(t)$ , e para uma segunda entrada  $u_2(t)$ , e um estado inicial  $x_2(0)$  o estado associado é  $x_2(t)$ , e a saída  $y_2(t)$ , então para uma entrada  $u_1(t) + u_2(t)$ , e um estado inicial  $x_1(0) + x_2(0)$  o estado associado é  $x_1(t) + x_2(t)$ , e a saída  $y_1(t) + y_2(t)$ ;
2. (*homogeneidade*) se para uma entrada  $u(t)$ , e um estado inicial  $x(0)$  o estado associado é  $x(t)$ , e a saída  $y(t)$ , então dado qualquer escalar  $m$  para uma entrada  $mu(t)$ , e um estado inicial  $mx(0)$  o estado associado é  $mx(t)$ , e a saída  $my(t)$ .

**Definição 16** (Sistema LTI). *Se um sistema é linear e invariante no tempo, diz-se que ele é LTI (do inglês, Linear Time Invariant).*

**Definição 17** (Ordem). *A ordem de um sistema é a dimensão do seu vetor de estado.*

**Notação 17** (Norma). *A norma euclidiana de um vetor  $x \in \mathbb{M}(n, 1)$  denotada como  $\|x\|$  é dada por  $((x'x)_{1,1})^{1/2} = (\sum x_i^2)^{1/2}$*

**Definição 18** (Sistema LTI incerto politópico). *Um sistema LTI incerto politópico de ordem  $n$ , com  $N$  vértices, entrada de dimensão  $p$ , e saída de dimensão  $q$ , é aquele cujas matrizes dinâmicas não são precisamente conhecidas, mas podem ser expressas pela combinação convexa de  $N$  sistemas LTI precisamente conhecidos. As incertezas são representadas em termos de um vetor de parâmetros  $\alpha \in \Lambda_N$ , e para que o sistema seja invariante no tempo é necessário que  $\alpha$ , embora indeterminado, seja invariante ao longo do tempo; O modelo é escrito em termos das seguintes matrizes dependentes de parâmetros:*

- *Os vértices são  $N$  itens de uma coleção,  $(A_i, B_i, C_i) \in \mathbb{M}(n, n) \times \mathbb{M}(n, p) \times \mathbb{M}(q, n)$  indexados para  $i$  de 1 até  $N$ .*
- *$A : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i$*
- *$B : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, p)$ ,  $B(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i$*
- *$C : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(q, n)$ ,  $C(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i C_i$*

*A entrada, o estado e a saída são mapeados em matrizes de dimensão  $p \times 1$ ,  $n \times 1$  e  $q \times 1$  respectivamente, de modo que a evolução do estado possa ser descrita da seguinte maneira*

$$\begin{cases} \Delta[x(t)] = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \\ y(t) = C(\alpha)x(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

*Sendo*

$$\Delta[x(t)] = \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) & \text{para sistemas contínuos} \\ x(t+1) & \text{para sistemas discretos} \end{cases} \quad (2.4)$$

Por simplicidade, sempre que o sistema (2.3) for mencionado ao longo do texto (tanto no caso contínuo quanto no caso discreto), é assumido implicitamente que as definições e hipóteses estabelecidas na Definição 18 estão atendidas.

## 2.3 Projeto de controle estabilizante por LMIs

Nesta seção são apresentados métodos consolidados na literatura de controle por desigualdades matriciais lineares que permitem projetar ganhos de controle robustos (que não dependem de  $\alpha$ ) para sistemas lineares com incertezas. Esses métodos são construídos combinando duas classes de ferramentas, a teoria de estabilidade de Lyapunov, que é capaz de obter condições de estabilidade, e os métodos de otimização semidefinida, que permitem resolver SDPs eficientemente (complexidade polinomial). A teoria de Lyapunov aplicada a sistemas lineares incertos provê condições de estabilidade expressas em termos de desigualdades matriciais simétricas dependentes de parâmetros.

## 2.4 Estabilidade de sistemas lineares

O conjunto dos pontos de equilíbrio formam um espaço linear, definido como  $\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) = 0$  para sistemas contínuos (o espaço nulo de  $A(\alpha)$ ), ou como  $x(t+1) = A(\alpha)x(t) = x(t)$  (o espaço nulo de  $(A(\alpha) - I)$ ). Vamos delinear aqui a teoria de estabilidade de Lyapunov para o caso em que o único ponto de equilíbrio é 0, ou seja não existem modos estacionários na dinâmica do sistema, para qualquer valor de  $\alpha$ .

**Definição 19** (Estabilidade assintótica). *Um sistema LTI é assintoticamente estável se para qualquer estado inicial  $x(0)$ , a resposta homogênea tende para zero, isto é:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

**Definição 20** (Estabilidade exponencial). *Um sistema LTI é exponencialmente estável se para qualquer estado inicial em uma vizinhança da origem  $\|x(0)\| < \delta$ , a resposta homogênea se aproxima exponencialmente da origem, isto é:*

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \|x(t)\| < \alpha e^{-\beta t} \quad \forall t > 0$$

**Lema 11.** *Para um sistema LTI as duas afirmações a seguir são equivalentes*

1. *O sistema é assintoticamente estável;*
2. *O sistema é exponencialmente estável.*

**Lema 12.** *Seja a função de Lyapunov  $v(x, \alpha) := x'P(\alpha)x \forall \alpha \in \Lambda_N$ , com a matriz  $P(\alpha) \succ 0$  e  $x(t)$  a resposta homogênea de um sistema LTI, então o sistema é assintoticamente estável se  $v(x(t), \alpha)$  é estritamente decrescente no tempo.*

Tabela 1 – Condições de Lyapunov para estabilidade assintótica do sistema 2.3.

<b>Definição</b>	
$v(x, \alpha) = x'P(\alpha)x$	
<b>Positividade</b>	
$v(x, \alpha) > 0, \forall x \neq 0 \iff P(\alpha) \succ 0$	
<b>Decrescente</b>	
tempo contínuo	tempo discreto
$(\partial/\partial t)(v(x(t), \alpha)) < 0$	$v(x(t+1), \alpha) < v(x(t), \alpha)$
$\dot{x}(t)'P(\alpha)x(t) + x(t)'P(\alpha)\dot{x}(t) < 0$	$x(t+1)'P(\alpha)x(t+1) < x(t)'P(\alpha)x(t)$
$(A(\alpha)x)'P(\alpha)x + x'P(\alpha)(A(\alpha)x) < 0$	$x'P(\alpha)x - (A(\alpha)x)'P(\alpha)A(\alpha)x > 0$
$x'(A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha))x < 0, \forall x \neq 0$	$x'(P(\alpha) - A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha))x > 0, \forall x \neq 0$
<b>Desigualdade matricial</b>	
tempo contínuo	tempo discreto
$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) \prec 0$	$P(\alpha) - A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) \succ 0$

Neste trabalho estamos interessados na estabilidade de sistemas incertos. As condições de estabilidade, que servem de base para as condições de síntese, são construídas a partir da teoria de estabilidade de Lyapunov e são mostradas na Tabela 1. O Lema 13, apresentado na sequência, resume os resultados em termos das LMIs dependentes de parâmetros que precisam ser verificadas.

**Lema 13.** *Seja  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ , com  $P(\alpha) \succ \mathbf{0}$ , e a função de Lyapunov  $v : \mathbb{M}(n, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(x, \alpha) := x'P(\alpha)x$ ; o sistema (2.3) é assintoticamente estável para todo  $\alpha$  em  $\Lambda_N$  se e somente se*

1.  $A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) \prec 0, \forall \alpha \in \Lambda_N$  para sistemas contínuos;
2.  $\begin{bmatrix} P(\alpha) & A(\alpha)'P(\alpha) \\ P(\alpha)A(\alpha) & P(\alpha) \end{bmatrix} \succ 0, \forall \alpha \in \Lambda_N$ , para sistemas discretos;

Dado que  $\alpha \in \Lambda_N$ , garantir que a matriz  $A(\alpha)$  seja estável é um problema de dimensão infinita pois existem infinitos sistemas cuja estabilidade precisa ser verificada. Nesse caso a matriz de Lyapunov, solução das desigualdades  $P(\alpha) \succ \mathbf{0}$  e  $A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) \prec \mathbf{0}$  para sistemas a tempo contínuo, ou solução das desigualdades  $P(\alpha) \succ \mathbf{0}$  e  $P(\alpha) - A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) \succ \mathbf{0}$  para sistemas a tempo discreto, é uma função do parâmetro  $\alpha$ . Em princípio a forma (estrutura) como  $P(\alpha)$  depende de  $\alpha$  é desconhecida mas, como provado em (BLIMAN, 2004b; BLIMAN *et al.*, 2006), sempre que existe uma solução  $P(\alpha)$  então também existe uma solução  $P(\alpha)$  polinomial de grau finito no parâmetro  $\alpha$ . Em resumo, soluções polinomiais são suficientes (embora o grau seja desconhecido *a priori*) para aproximar as LMIs dependentes de parâmetros, e portanto concluir sobre a estabilidade do sistema. Impondo um grau em  $P(\alpha)$ , isto é, resolvendo um problema relaxado, é possível testar a positividade (ou negatividade) do polinômio resultante explorando propriedades dos polinômios com variáveis no simplex, como por exemplo, o Teorema de Pólya. Assim,

o espaço de solução desse problema relaxado é convexo nas variáveis de decisão, dando origem a problemas de otimização bem comportados, que possuem métodos de solução com complexidade polinomial e implementações satisfatórias prontas para serem usadas, com destaque para SeDuMi, um resolvidor de código aberto (STURM, 1999), e Mosek, um resolvidor comercial (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000).

## 2.5 Condições de estabilização robusta

Se o objetivo é a estabilização robusta de sistemas LTI incertos por meio de leis de controle por realimentação de estados ou por realimentação de saída, as condições de análise de estabilidade robusta podem ser facilmente adaptadas para tratar os sistemas em malha fechada, bastando introduzir o ganho de realimentação como uma variável de decisão adicional do problema. Contudo, esse procedimento em geral faz com que o problema de otimização resultante deixe de ser linear nas variáveis de decisão, e os métodos de programação semidefinida não são capazes de resolver esse problema satisfatoriamente (não há garantia de convergência para qualquer condição inicial). A seguir são apresentadas algumas técnicas para contornar essa dificuldade (tornar o problema convexo) que deram origem aos métodos que são utilizados nas comparações numéricas apresentadas nesta dissertação.

### 2.5.1 Realimentação de estados para sistemas contínuos

**Lema 14.** *O sistema (2.3) a tempo contínuo realimentado pela lei de controle  $u(t) = Kx(t)$ , é robustamente estável, se e somente se existir  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$  tal que para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $P(\alpha) \succ 0$  e*

$$(A(\alpha) + B(\alpha)K)'P(\alpha) + P(\alpha)(A(\alpha) + B(\alpha)K) \prec 0 \quad (2.5)$$

Ao expandir o lado esquerdo de (2.5) percebe-se a bilinearidade entre  $P(\alpha)$  e  $K$ . Com vistas a um procedimento de convexificação desse produto de variáveis, a primeira etapa consiste em aplicar uma transformação de congruência baseada na inversa da matriz  $P(\alpha)$ , dada por

$$P(\alpha)^{-1}(A(\alpha) + B(\alpha)K)' + (A(\alpha) + B(\alpha)K)P(\alpha)^{-1} \prec 0 \quad (2.6)$$

Para obter uma condição linear nas variáveis de decisão basta impor as seguintes restrições de estrutura e mudança de variável:  $W = P(\alpha)^{-1}$ ,  $Z = KW$ . Note que a escolha  $P(\alpha) = W^{-1}$  torna a matriz de Lyapunov (que certifica a estabilidade do sistema em malha fechada) independente de parâmetros, sendo uma fonte severa de conservadorismo desse processo de linearização. A condição linearizada é dada pelas seguintes LMIs dependentes de parâmetros

$$WA(\alpha)' + A(\alpha)W + Z'B(\alpha)' + B(\alpha)Z \prec 0, W \succ 0 \quad (2.7)$$

que pode ser resolvida por meio da programação de uma LMI para cada vértice dos politopos associados às matrizes  $A(\alpha)$  e  $B(\alpha)$ . Caso o problema de otimização expresso em termos de LMIs (convexo) tenha solução, o ganho estabilizante por realimentação de estados procurado é dado por  $K = ZW^{-1}$ . Essa técnica é conhecida na literatura como “estabilização quadrática” (BERNUSSOU *et al.*, 1989; GEROMEL *et al.*, 1991a).

## 2.5.2 Realimentação de estados para sistemas discretos

A condição de estabilização robusta por realimentação de estados para sistemas discretos consiste em resolver as desigualdades

$$P(\alpha) - (A(\alpha) + B(\alpha)K)'P(\alpha)(A(\alpha) + B(\alpha)K) \succ \mathbf{0}, P(\alpha) \succ \mathbf{0} \quad (2.8)$$

com  $K$  e  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$  variáveis de otimização. Inicialmente percebe-se que a mudança de variável usada no caso contínuo não pode ser aplicada de forma imediata. Considere  $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K$ . As desigualdades em (2.8) podem ser colocadas em termos de uma única desigualdade “bloco diagonal”, dada na forma

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - A_{cl}(\alpha)'P(\alpha)A_{cl}(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P(\alpha) \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Em seguida escreve-se essa matriz em termos de uma transformação de congruência, obtendo uma representação equivalente

$$\begin{bmatrix} I & -A_{cl}(\alpha)' \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\alpha) - A_{cl}(\alpha)'P(\alpha)A_{cl}(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\alpha) & A_{cl}(\alpha)'P(\alpha) \\ P(\alpha)A_{cl}(\alpha) & P(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ -A_{cl}(\alpha) & I \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Assim obtemos uma nova condição de estabilidade robusta

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A_{cl}(\alpha)'P(\alpha) \\ P(\alpha)A_{cl}(\alpha) & P(\alpha) \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (2.11)$$

Substituindo  $A_{cl}(\alpha)$  por  $A(\alpha) + B(\alpha)K$ , fixando  $P(\alpha) = W^{-1}$ ,  $Z = KW$  e fazendo uma transformação de congruência com  $\text{diag}(W, W)$ , obtém-se a seguinte condição de estabilização robusta

$$\begin{bmatrix} W & WA(\alpha)' + ZB(\alpha)' \\ A(\alpha)W + B(\alpha)Z & W \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (2.12)$$

Assim como no caso de sistemas contínuos, a LMI dependente de parâmetros (2.12) pode ser resolvida por meio da programação de uma LMI para cada vértice do politopo e, em caso de solução, o ganho robusto estabilizante por realimentação de estados é dado por  $K = ZW^{-1}$ .

### 2.5.3 Realimentação de saída

As condições de estabilizabilidade robusta por realimentação de saída são obtidas seguindo a mesma abordagem, isto é, substituindo a matriz dinâmica de malha fechada nas condições de estabilidade.

Para sistemas contínuos, tem-se

$$(A(\alpha)+B(\alpha)KC(\alpha))'P(\alpha)+P(\alpha)(A(\alpha)+B(\alpha)KC(\alpha))\prec\mathbf{0}, \quad P(\alpha)\succ\mathbf{0} \quad (2.13)$$

e para sistemas discretos

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & (A(\alpha)+B(\alpha)KC(\alpha))'P(\alpha) \\ P(\alpha)(A(\alpha)+B(\alpha)KC(\alpha)) & P(\alpha) \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \quad (2.14)$$

Nesses casos a mudança de variável empregada no caso de realimentação de estados não pode ser aplicada de forma imediata, pois o ganho aparece entre duas matrizes incertas  $B(\alpha)$  e  $C(\alpha)$ . Contudo, se ao menos uma dessas matrizes for precisamente conhecida, ou seja, independente dos parâmetros incertos  $\alpha$ , é possível realizar um tratamento baseado em transformação de similaridade, viabilizando a linearização das desigualdades.

**Lema 15.** *Seja o sistema (2.3), com  $C(\alpha) = C$  (precisamente conhecida), de posto completo de linhas. É possível obter uma realização do sistema na forma dada a seguir*

$$\begin{cases} \Delta[\tilde{x}(t)] = \tilde{A}(\alpha)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(\alpha)u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

em que  $\tilde{C} = [I \quad \mathbf{0}]$ .

*Demonstração.* Seja  $T = [C'(CC')^{-1} \quad C^\perp]$ , em que  $C^\perp$  é uma base para o espaço nulo de  $C$ , ou seja  $CC^\perp = \mathbf{0}$ . Substituindo  $x(t) = T\tilde{x}(t)$ , em (2.3), tem-se

$$\begin{cases} T\Delta[\tilde{x}(t)] = A(\alpha)T\tilde{x}(t) + B(\alpha)u(t) \\ y(t) = C(\alpha)T\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

Isolando  $\Delta[\tilde{x}(t)]$ , tem-se

$$\begin{cases} \Delta[\tilde{x}(t)] = (T^{-1}A(\alpha)T)\tilde{x}(t) + (T^{-1}B(\alpha)u(t)) \\ y(t) = (C(\alpha)T)\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

que tem a forma do sistema (2.15), com as seguintes mudanças de variáveis

$$\tilde{A}(\alpha) = T^{-1}A(\alpha)T \quad (2.18)$$

$$\tilde{B}(\alpha) = T^{-1}B(\alpha) \quad (2.19)$$

$$\tilde{C}(\alpha) = CT \quad (2.20)$$

$$= C [C'(CC')^{-1} \quad C^\perp] \quad (2.21)$$

$$= [I \quad \mathbf{0}] \quad (2.22)$$

□

A matriz dinâmica de malha fechada desse sistema é  $\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)K\tilde{C}$  e, dada a escolha de  $T$ , temos que  $\tilde{C} = CT = [C'(C'C)^{-1}C \quad CC^{-1}]' = [I \quad \mathbf{0}]'$ . Assim, aplicando as mesmas transformações usadas no caso de realimentação de estados, são obtidas condições com o termo  $\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}K [I \quad \mathbf{0}]$ , em que  $K \in \mathbb{M}(p, q)$ .

Prosseguindo com a mudança de variável  $[K \quad \mathbf{0}]W = [Z \quad \mathbf{0}]$ , para que a igualdade se mantenha, uma possível solução consiste em restringir a estrutura de  $W$  como  $\begin{bmatrix} W_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_{2,2} \end{bmatrix}$ , sendo  $W_{1,1} \in \mathbb{S}(q)$  e  $W_{2,2} \in \mathbb{S}(n - q)$ .

Para o caso contínuo, tem-se

$$W\tilde{A}(\alpha)' + [Z \quad \mathbf{0}]' \tilde{B}(\alpha)' + \tilde{A}(\alpha)W + \tilde{B}(\alpha) [Z \quad \mathbf{0}] \prec \mathbf{0}, W \succ \mathbf{0} \quad (2.23)$$

e para o caso discreto

$$\begin{bmatrix} W & W\tilde{A}(\alpha)' + [Z \quad \mathbf{0}]' \tilde{B}(\alpha)' \\ \tilde{A}(\alpha)W + \tilde{B}(\alpha) [Z \quad \mathbf{0}] & W \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \quad (2.24)$$

De maneira semelhante ao caso de realimentação de estados, para sintetizar um ganho robustamente estabilizante, basta programar uma LMI para cada vértice do politopo e, em caso de solução factível, o ganho robusto por realimentação estática de saída é dado por  $K = ZW_{1,1}^{-1}$ . Note que a matriz  $T$  utilizada não é única, e outras escolhas poderiam fornecer resultados diferentes (mais ou menos conservadores).

#### 2.5.4 Realimentação de estados com variáveis de folga

As condições apresentadas anteriormente surgem diretamente da condição de estabilidade de Lyapunov, sendo que a matriz de Lyapunov precisa ser independente dos parâmetros incertos no caso de estabilização robusta. No caso de realimentação de saída a situação é ainda pior, pois alguns blocos da matriz de Lyapunov precisam ser zerados para que o ganho de realimentação possa ser recuperado de forma consistente.

Uma mudança de paradigma aconteceu com o trabalho (DE OLIVEIRA *et al.*, 1999), que apresenta condições para tratar o problema de estabilização de sistemas discretos com a matriz de Lyapunov dependente dos parâmetros incertos. A partir da condição de estabilidade

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A(\alpha)'G(\alpha)' \\ G(\alpha)A(\alpha) & G(\alpha)' + G(\alpha) - P(\alpha) \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \quad (2.25)$$

que é equivalente à condição de Lyapunov  $P(\alpha) - A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) \succ \mathbf{0}$ , uma condição de síntese por realimentação de estados que é linear nas variáveis de decisão pôde ser obtida impondo  $G(\alpha) = G$  (independente dos parâmetros incertos) como mostrado no lema a seguir.

**Lema 16** (dOBG99). *Seja o sistema (2.3) a tempo discreto, se existirem  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ ,  $L \in \mathbb{M}(p, n)$  e  $G \in \mathbb{M}(n, n)$ , tais que*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A(\alpha)G + B(\alpha)L \\ (A(\alpha)G + B(\alpha)L)' & G + G' - P(\alpha) \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, P(\alpha) \succ \mathbf{0}, \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (2.26)$$

então  $K = LG^{-1}$  é um ganho de realimentação de estados robustamente estabilizante.

Em seguida surgiram condições para tratar sistemas contínuos usando o mesmo paradigma, isto é, recuperando o ganho por meio de uma mudança de variável envolvendo a variável de folga ao invés da matriz de Lyapunov.

**Lema 17** (ATB01). *Seja o sistema (2.3) a tempo contínuo, se existirem  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ ,  $L \in \mathbb{M}(p, n)$  e  $G \in \mathbb{M}(n, n)$ , tais que para todo  $\alpha \in \Lambda_N$*

$$\begin{bmatrix} G + G' & G'A(\alpha)' + L'B(\alpha)' + P(\alpha) & G \\ A(\alpha)G + B(\alpha)L + P(\alpha) & -P(\alpha) & \mathbf{0} \\ G & \mathbf{0} & -P(\alpha) \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (2.27)$$

então  $K = LG^{-1}$  é um ganho de realimentação de estados robustamente estabilizante.

Simplificando as condições apresentadas em (SHAKED, 2001), que além de garantirem a estabilidade robusta, também asseguram um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada, obtém-se a condição de estabilidade apresentada no Lema 18, a partir da qual pode-se obter uma família de condições de síntese de realimentação de estados por meio da escolha do parâmetro escalar  $\epsilon$ . Note que o valor de  $\epsilon$  é desconhecido, mas um procedimento de busca, que obviamente aumenta a complexidade computacional do teste, pode aumentar as chances de encontrar um ganho estabilizante.

**Lema 18** (Sha01). *Seja o sistema (2.3) a tempo contínuo  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , se existirem  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $P(\alpha) = P(\alpha)'$ ,  $L \in \mathbb{M}(p, n)$  e  $G \in \mathbb{M}(n, n)$ , tais que para todo  $\alpha \in \Lambda_N$*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - G - G' & G' + \epsilon G'A(\alpha)' + \epsilon L'B(\alpha) \\ G + \epsilon A(\alpha)G + B(\alpha)L & -P(\alpha) \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (2.28)$$

então  $K = LG^{-1}$  é um ganho de realimentação de estados robustamente estabilizante.

Outra contribuição baseada em variáveis de folga foi introduzida por (EBIHARA; HAGIWARA, 2004), em que condições “dilatadas” para restringir os autovalores de uma matriz em regiões do plano complexo simétricas em relação ao eixo real, em formas circulares, setores cônicos, ou em semiplanos foram obtidas. Esta última é reproduzida a seguir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -P(\alpha) & P(\alpha) \\ -P(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P(\alpha) & \mathbf{0} & -\frac{1}{2}\theta^{-1}P(\alpha) \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} A(\alpha) \\ I \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} G(\alpha) \begin{bmatrix} I & -\xi I & \xi I \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0} \quad (2.29)$$



com o semiplano definido à esquerda do valor dado por  $\theta$ . Permitindo que  $\theta$  esteja suficientemente próximo de zero, pelo complemento de Schur percebe-se que a condição se reduz à seguinte condição de estabilidade

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -P(\alpha) \\ -P(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} A(\alpha) \\ I \end{bmatrix} G(\alpha) \begin{bmatrix} I & -\xi I \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0} \quad (2.30)$$

da qual se obtém a condição de síntese apresentada a seguir.

**Lema 19** (EH04). *Seja o sistema (2.3) a tempo contínuo e  $\xi \in \mathbb{R}$ , se existirem  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ ,  $L \in \mathbb{M}(p, n)$  e  $G \in \mathbb{M}(n, n)$ , tais que para todo  $\alpha \in \Lambda_N$*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -P(\alpha) \\ -P(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} A(\alpha)G + B(\alpha)L \\ G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\xi I \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0}, P(\alpha) \succ \mathbf{0} \quad (2.31)$$

então  $K = LG^{-1}$  é um ganho de realimentação de estados robustamente estabilizante.

De maneira semelhante à condição do Lema 18, a condição do Lema 19 também produz uma família de condições de síntese, uma para cada escolha de  $\xi$ .

A extensão do Lema 19 para tratar sistemas discretos surgiu um tempo depois, e é apresentada no próximo lema.

**Lema 20** (MBOP13). *Seja o sistema (2.3) a tempo discreto e  $\xi \in (-1, 1)$ , se existirem  $W : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ ,  $L \in \mathbb{M}(p, n)$  e  $G \in \mathbb{M}(n, n)$ , tais que para todo  $\alpha \in \Lambda_N$*

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W(\alpha) \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} A(\alpha)G + B(\alpha)L \\ -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi I \\ I \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0}, W(\alpha) \succ \mathbf{0} \quad (2.32)$$

então  $K = LG^{-1}$  é um ganho de realimentação de estados robustamente estabilizante.

Por fim uma condição proposta recentemente em (RODRIGUES *et al.*, 2015) baseada em uma condição de estabilidade com dois parâmetros escalares

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -W(\alpha) \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} \epsilon A(\alpha) - I/(2\epsilon) \\ -\epsilon A(\alpha) - I/(2\epsilon) \end{bmatrix} X(\alpha) \begin{bmatrix} I & \xi I \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0} \quad (2.33)$$

que dá origem ao procedimento de síntese apresentado a seguir

**Lema 21** (ROC15). *Seja o sistema (2.3) a tempo contínuo e  $\xi \in (-1, 1)$ ,  $\epsilon \neq 0 \in \mathbb{R}$ , se existirem  $W : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ ,  $L \in \mathbb{M}(p, n)$  e  $G \in \mathbb{M}(n, n)$ , tais que para todo  $\alpha \in \Lambda_N$*

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -W(\alpha) \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} \epsilon A(\alpha)G - G/(2\epsilon) + \epsilon B(\alpha)L \\ -\epsilon A(\alpha)G - G/(2\epsilon) - \epsilon B(\alpha)L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \xi I \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0} \quad (2.34)$$

então  $K = LG^{-1}$  é um ganho de realimentação de estados robustamente estabilizante.

### 2.5.5 Realimentação de saída com variáveis de folga

As condições de síntese por realimentação de estados, que recuperam o ganho estabilizante por meio de uma mudança de variáveis, podem ser adaptadas para tratar o problema de realimentação estática de saída, caso a matriz  $C(\alpha)$  seja precisamente conhecida, empregando a técnica introduzida por (GEROMEL *et al.*, 1996), de maneira análoga ao que já foi apresentado na Seção 2.5.3. Na Seção 2.5.4 tomou-se o cuidado de padronizar as condições da literatura de modo que o ganho robustamente estabilizante seja recuperado como  $K = LG^{-1}$ . Nesta seção simplesmente é mostrado como adaptar aquelas condições para tratar o caso de estabilização robusta por realimentação estática de saída.

**Lema 22** (Realimentação estática de saída). *Se um problema de controle por realimentação de estados pode ser resolvido por meio de um conjunto de LMIs dependentes de parâmetros, com a recuperação do ganho estabilizante dada na forma  $K = LG^{-1}$ , então para um sistema em que  $C(\alpha)$  é precisamente conhecida, o ganho de realimentação estática de saída pode ser obtido por meio do mesmo conjunto de LMIs com as seguintes restrições adicionais:*

1. A matriz  $G$  tem uma estrutura bloco triangular inferior, ou seja  $G_{1,1} \in \mathbb{M}(q, q)$ ,  $G_{2,1} \in \mathbb{M}(n - q, q)$ ,  $G_{2,2} \in \mathbb{M}(n - q, n - q)$ ,

$$G = \begin{bmatrix} G_{1,1} & \mathbf{0} \\ G_{2,1} & G_{2,2} \end{bmatrix}$$

2. A matriz  $L$  tem as últimas  $n - q$  colunas nulas,  $L_1 \in \mathbb{M}(p, q)$ ,

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

3. O problema é resolvido com as matrizes do sistema em uma representação de estados tal que  $\tilde{C} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , obtida conforme o Lema 15.

*Demonstração.* Comparando as entradas de controle no caso de realimentação de estados,  $Kx(t)$  e no caso de realimentação de saída,  $K_s y(t) = K_s \tilde{C} \tilde{x}(t)$ , pode-se afirmar que no problema resolvido para realimentação de estados tem-se  $K_s \tilde{C} = LG^{-1}$ , que pelas restrições adicionais pode ser escrito como

$$K_s \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{1,1}^{-1} & \mathbf{0} \\ -G_{2,2}^{-1} G_{2,1} G_{1,1}^{-1} & G_{2,2}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\begin{bmatrix} K_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 G_{1,1}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Desse modo o ganho pode ser recuperado como  $K_s = L_1 G_{1,1}^{-1}$ . Note que as restrições nas estruturas de  $L$  e  $G$  são suficientes, mas não necessárias (fonte de conservadorismo), para que  $LG^{-1}$  tenha zeros nas últimas  $n - q$  colunas.  $\square$

### 2.5.6 Técnica de *dois estágios*

As condições de síntese apresentadas nas seções anteriores se aplicam apenas a sistemas sem incertezas na matriz de saída ou na matriz de entrada (nesse caso pode-se tratar o sistema dual) com a técnica apresentada na seção 2.5.5. Caso o sistema sob investigação apresente incertezas tanto em  $B(\alpha)$  quanto em  $C(\alpha)$ , uma alternativa é utilizar uma estratégia conhecida na literatura como “técnica de dois estágios”. O método, inicialmente proposto em (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001a; ARZELIER *et al.*, 2003) e aprimorado em (MOREIRA *et al.*, 2011; AGULHARI *et al.*, 2010a; AGULHARI *et al.*, 2010b; AGULHARI *et al.*, 2012a), consiste em realizar a síntese do ganho robusto em dois estágios. No primeiro estágio é calculado um ganho por realimentação de estados dependente de parâmetros (o qual pode ser obtido facilmente) que, no segundo estágio, é usado como um parâmetro de entrada. Em caso de solução factível, tem-se um ganho robusto (por realimentação de estados ou de saída) estabilizante. Esta técnica é considerada como o estado da arte para a estabilização robusta de sistemas lineares politópicos. A seguir é a apresentada a versão fornecida em (AGULHARI *et al.*, 2012a).

**Lema 23** (AOP12). *Sejam o sistema (2.3) e  $K : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(p, n)$ , de modo que  $A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)$  é estável para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ , se existirem  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n), F, G : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n), H \in \mathbb{M}(p, p), L \in \mathbb{M}(p, q)$  tais que, para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $P(\alpha) \succ \mathbf{0}$  e*

$$He \left( \begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)' \\ -I \\ B(\alpha)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(\alpha)' \\ G(\alpha)' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & C(\alpha)'L' - K(\alpha)'H \\ P(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ LC(\alpha) - HK(\alpha) & \mathbf{0} & -H - H' \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

no caso de um sistema a tempo contínuo, ou

$$He \left( \begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)' \\ -I \\ B(\alpha)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(\alpha)' \\ G(\alpha)' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{0} & C(\alpha)'L' - K(\alpha)'H \\ \mathbf{0} & P(\alpha) & \mathbf{0} \\ LC(\alpha) - HK(\alpha) & \mathbf{0} & -H - H' \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

no caso de um sistema a tempo discreto, com  $A_{cl}(\alpha) = (A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha))$ , então  $K_s = H^{-1}L$  é um ganho de realimentação estática de saída robustamente estabilizante.

A condição do Lema 23 pode ser facilmente adaptada para tratar o problema de realimentação de estados robusta usando  $C(\alpha) = I$ . O ganho de realimentação de estados que é parâmetro de entrada da condição pode ser determinado, por exemplo, usando o Lema 19 considerando  $L = L(\alpha)$ . Nessa condição, além da função de Lyapunov  $P(\alpha)$ , as variáveis de folga são dependentes de parâmetros, fornecendo a essa condição uma grande vantagem em relação a todas as outras condições da literatura. Finalmente note que é necessário restringir as variáveis  $H$  e  $L$  como independentes dos parâmetros e que o ganho robusto resultante (em caso de factibilidade) é recuperado por meio de uma mudança de variável ( $K_s = H^{-1}L$ ).

## 2.6 Motivação

Com exceção da técnica baseada em dois estágios, todas as outras condições de estabilização robusta são construídas a partir da mesma “receita”, basicamente seguindo os passos apresentados a seguir:

1. Obtém uma condição de estabilidade robusta para o sistema em malha fechada;
2. Aplica manipulações algébricas usando, por exemplo, *Lema da projeção*, *complemento de Schur*, *Lema de Finsler*, obtendo uma condição de estabilidade diferente;
3. Aplica-se *majorações* quando necessário;
4. Toma-se o cuidado de que as variáveis associadas ao ganho de controle não apareçam multiplicando variáveis distintas. Se isso acontecer, vale impor que todas são iguais, ou que são múltiplas em termos de um escalar;
5. Impõe-se que qualquer matriz que multiplique as variáveis associadas aos ganhos de controle seja independente de parâmetros;
6. Por meio de mudanças de variáveis obtêm-se desigualdades lineares nas variáveis de decisão;

O item 1 pode ser considerado como um passo lógico e intuitivo e, em princípio, necessário para solução do problema e as manipulações do item 2 podem ser usadas para obter condições sem introduzir conservadorismo em algumas situações. Contudo, os passos de 3 a 5 vão, invariavelmente, introduzir conservadorismo na solução final, embora essa possa ser expressa em termos de um procedimento convexo de otimização (LMIs). Note que o procedimento de dois estágios também emprega os itens 4 e 5.

O objetivo dessa dissertação é, abandonando o paradigma vigente, propor uma abordagem diferente da descrita acima nos pontos em que conservadorismo é introduzido.

Parte II

Contribuições

### 3 Primeira contribuição

Como primeira contribuição desta dissertação, é apresentada uma condição LMI dependente de parâmetros, para sistemas contínuos, em que a matriz dinâmica do sistema não aparece multiplicando nenhuma variável de decisão do problema. A condição é obtida aplicando o Lema de Finsler de forma conveniente à condição de estabilidade Hurwitz do sistema (Lema 14).

**Teorema 1.** *Sejam  $P_0 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ ,  $\mu_0 : \Lambda_N \rightarrow (0, \infty)$ ,  $P_0(\alpha) \succ \mathbf{0}, \forall \alpha \in \Lambda_N$ . Se existirem  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ , tal que  $P(\alpha) \succ \mathbf{0}$ ,  $\mu : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{R}$ , uma matriz  $K \in \mathbb{M}(p, n)$ , um grau de relaxação de Pólya  $d \in \mathbb{N}$  e  $r \in \mathbb{R}$  tais que as seguintes LMIs robustas sejam verificadas em todo domínio  $\alpha \in \Lambda_N$*

$$\left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^d \begin{bmatrix} -P(\alpha)P_0(\alpha) - P_0(\alpha)P(\alpha) & \star \\ A(\alpha) + B(\alpha)K - rI + \mu_0(\alpha)P(\alpha) + \mu(\alpha)P_0(\alpha) & -2\mu(\alpha)\mu_0(\alpha)I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (3.1)$$

então  $K$  é um ganho robusto tal que os autovalores de  $A(\alpha) + B(\alpha)K$  têm parte real à esquerda de  $r$  para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ .

*Demonstração.* Dado que  $(\sum_{i=1}^N \alpha_i) = 1, \forall \alpha \in \Lambda_N$ , (3.1) é equivalente a

$$\mathcal{Q}(\alpha) - \mathcal{C}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) - \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{C}(\alpha)' \prec \mathbf{0} \quad (3.2)$$

com

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \star \\ (A(\alpha) + B(\alpha)K - rI) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathcal{C}(\alpha) = \begin{bmatrix} P(\alpha) \\ -\mu(\alpha)I \end{bmatrix}, \mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} P_0(\alpha) & -\mu_0(\alpha)I \end{bmatrix}$$

Notando que

$$[P(\alpha) \quad -\mu(\alpha)I] = \mu(\alpha) [P(\alpha)\mu(\alpha)^{-1} \quad -I] = \mu(\alpha) [\tilde{P}(\alpha) \quad -I], \quad (3.3)$$

tem-se que  $(\mathcal{C}(\alpha)^\perp)'\mathcal{C}(\alpha) = \mathbf{0}$  com

$$\mathcal{C}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} I \\ \tilde{P}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}(\alpha) = P(\alpha)\mu(\alpha)^{-1}.$$

De modo similar,  $(\mathcal{B}(\alpha)^\perp)'\mathcal{B}(\alpha) = \mathbf{0}$  com

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} I \\ \tilde{P}_0(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_0(\alpha) = P_0(\alpha)\mu_0(\alpha)^{-1}$$

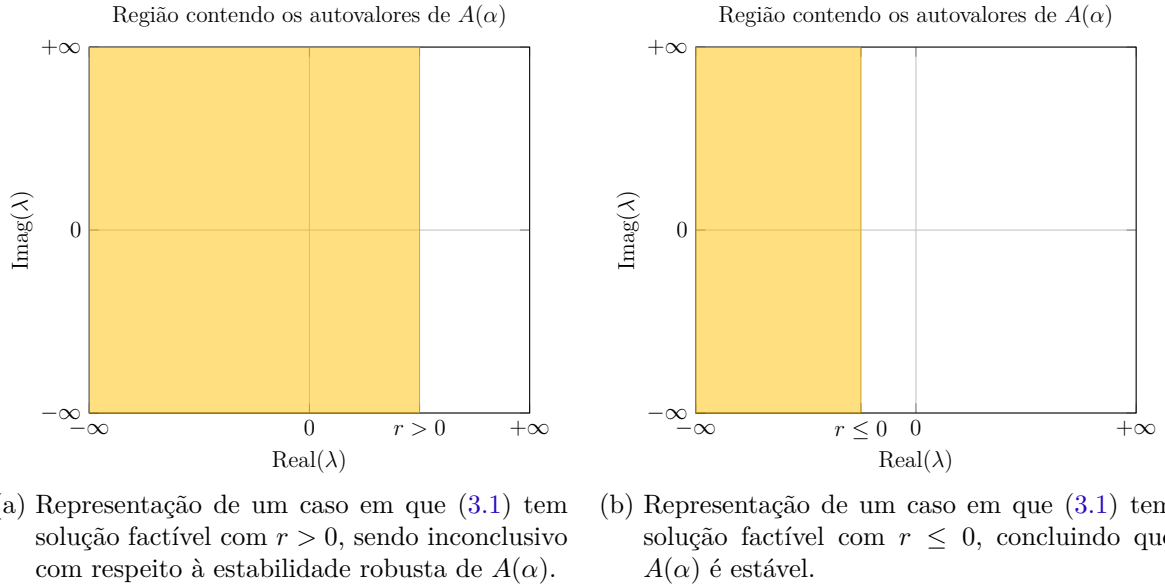


Figura 1 – Ilustração da região de possível localização dos autovalores de  $A(\alpha)$  dada uma solução factível para (3.1).

Aplicando transformações de congruência em (3.2), usando  $\mathcal{C}^\perp(\alpha)$  ou  $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ , resulta nas seguintes LMIs dependentes de parâmetros

$$\mathcal{B}(\alpha)^{\perp'} \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)^\perp = (A_{cl}(\alpha) - rI)' \tilde{P}_0(\alpha) + \tilde{P}_0(\alpha) (A_{cl}(\alpha) - rI) \prec \mathbf{0}$$

$$\mathcal{C}(\alpha)^{\perp'} \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{C}(\alpha)^\perp = (A_{cl}(\alpha) - rI)' \tilde{P}(\alpha) + \tilde{P}(\alpha) (A_{cl}(\alpha) - rI) \prec \mathbf{0}$$

com  $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K$ . Note que o termo na diagonal  $2\mu(\alpha)\mu_0(\alpha)I$  na desigualdade (3.1) requer que  $\mu(\alpha) > 0 \forall \alpha \in \Lambda_N$ , uma vez que por hipótese  $\mu_0(\alpha) > 0 \forall \alpha \in \Lambda_N$ . E assim garante-se que  $\tilde{P}(\alpha) \succ \mathbf{0}$  e  $\tilde{P}_0(\alpha) \succ \mathbf{0}$  e ambas certificam que  $K$  é um ganho tal que os autovalores do sistema em malha fechada têm parte real menor que  $r$ . Além disso, se  $r < 0$ , o ganho  $K$  é robustamente estabilizante.  $\square$

O primeiro comentário importante sobre o Teorema 1 é relacionado à presença do parâmetro escalar  $r$ , que não aparece nas condições de estabilidade apresentadas no capítulo anterior. De fato, a factibilidade das condições dadas em (3.1) garante que os autovalores de  $A(\alpha)$  estejam em um semiplano à esquerda de  $r$  e, para certificar-se a estabilidade robusta do sistema em malha fechada, é necessário que  $r < 0$ . Contudo, impor um valor negativo de  $r$  em (3.1) diminui drasticamente as chances de se encontrar uma solução factível, pois a matriz arbitrada inicialmente  $P_0(\alpha)$  dificilmente irá certificar a estabilidade do sistema. Assim, o parâmetro  $r$  é deixado como uma variável de decisão do problema a ser minimizada durante a otimização, fazendo com que o valor final de  $r$  seja o menor possível.

Terminada a otimização das condições do Teorema 1, o valor resultante de  $r$  fornece duas interpretações com relação à posição dos autovalores de  $A(\alpha)$ , como ilustra a Figura 1. Se  $r \leq 0$ , temos a figura da direita, que é conclusiva sobre a estabilidade robusta

do sistema. Contudo, a figura da esquerda não é conclusiva nem sobre a estabilidade e nem sobre a instabilidade. Note que o valor de  $r$  de uma solução para (3.1) é apenas um limitante superior para a parte real de qualquer autovalor de  $A(\alpha)$ , e o valor da parte real do autovalor mais à direita (em geral chamado de autovalor de pior caso)  $r^*$  pode ser menor. A principal razão para a possibilidade de existir o *gap* entre  $r$  e  $r^*$  é o fato de  $P_0(\alpha)$  estar sendo arbitrada.

```

1  $P_0(\alpha) \leftarrow I_n, \mu_0(\alpha) \leftarrow 1, K_{sol} \leftarrow \emptyset, K_{ac} \leftarrow \mathbf{0}, k \leftarrow 1;$ 
2 enquanto  $k \leq it_{max}$  faça
3   • Teste o Teorema 1 com  $P_0(\alpha)$  e  $\mu_0(\alpha)$ , minimizando o valor de  $r$ ;
4   se infectível então
5     | • abandone;
6   fim
7   •  $r_k \leftarrow r$ ;
8   •  $A_{cl}(\alpha) \leftarrow A(\alpha) + B(\alpha)K$ ;
9   •  $K_{ac} \leftarrow K_{ac} + K$ ;
10  se  $r < 0$  então
11    | •  $K_{sol} \leftarrow K_{ac}$ , abandone;
12  senão
13    | se  $\lambda_{max}(\{A_{cl}\}_i) < 0$  então
14      | • Teste o Lema 13 com  $A_{cl}(\alpha)$ ;
15      | •  $k = k + 1$ ;
16      | se factível então
17        | •  $K_{sol} \leftarrow K_{ac}$ , abandone;
18      | fim
19    | fim
20  fim
21  •  $A(\alpha) \leftarrow A_{cl}(\alpha)$ ;
22  •  $P_0(\alpha) \leftarrow P(\alpha), \mu_0(\alpha) \leftarrow \mu(\alpha), k = k + 1;$ 
23 fim
24 se  $K_{sol} = \emptyset$  então
25   | • declara(“Solução não encontrada”);
26 senão
27   | • declara(“ $K_{sol}$  é um ganho robusto estabilizante”);
28 fim

```

**Algoritmo 1:** Algoritmo de estabilização robusta.

Em resumo, a minimização de  $r$  sob as restrições do Teorema 1 permite encontrar um ganho robusto  $K$  de modo a posicionar os autovalores do sistema em malha fechada o mais à esquerda possível, eventualmente estabilizando o sistema se o valor resultante de  $r$  for menor que zero. Se  $r$  for maior que zero, é possível testar as condições do Teorema 1 novamente adotando  $P_0(\alpha) = P(\alpha)$  e  $\mu_0(\alpha) = \mu(\alpha)$ , e tendo como garantia nesse caso que o novo valor de  $r$  será menor ou igual (no pior caso) ao valor computado anteriormente. Essa estratégia pode ser generalizada em termos de um procedimento iterativo em que os valores sucessivos de  $r$  são não crescentes.



O Algoritmo 1 é a principal contribuição deste capítulo, e alguns comentários e observações importantes são apresentados na sequência. Considere as notações: o símbolo  $\leftarrow$  indica a atribuição de um valor a uma variável;  $\lambda_{max}(X)$  indica o autovalor com maior parte real da matriz  $X$ ;  $it_{max}$  é o número máximo de iterações.

Na linha 1 é feita a inicialização das variáveis  $P_0(\alpha)$  e  $\mu_0(\alpha)$  do Teorema 1. O objetivo dessas escolhas particulares é mostrar que mesmo para inicializações simples, o algoritmo pode fornecer bons resultados. Se o teste da linha 10 for verificado, ou seja, se o valor de  $r$  for menor do que zero, então um ganho robusto estabilizante foi encontrado. Contudo, os códigos entre as linhas 12 e 20 apresentam um detalhe chave do algoritmo. Note que o valor de  $r$  obtido precisa ser certificado, isto é, é preciso assegurar que o sistema em malha fechada tenha autovalores com parte real à esquerda de  $r$ , com duas matrizes de Lyapunov distintas,  $P_0(\alpha)$  e a matriz  $P(\alpha)$  solução do procedimento de otimização. Isso significa que  $r$  é apenas um limitante superior para  $\lambda_{max}(A_{cl}(\alpha))$ . Portanto, o real valor  $\lambda_{max}(A_{cl}(\alpha))$  pode ser menor do que  $r$ , eventualmente até menor do que zero, o que significa que o ganho  $K$  encontrado pode ser estabilizante. O teste da linha 13 é um cálculo “barato” para verificar se o sistema em malha fechada tem chance de ser estável, ou seja, testa-se apenas se o sistema é estável para os valores de  $\alpha$  correspondentes aos vértices do politopo, isto é, para  $\alpha_i = 1, \alpha_j = 0, j \neq i$ . Se o sistema passar pelo teste de estabilidade nos vértices do politopo, então um teste mais rigoroso (em verdade um certificado), é feito na linha 14 por meio do Lema 13, que determina se o sistema em malha fechada é robustamente estável. Note que se o algoritmo chegar na linha 14, então um novo problema LMI é resolvido, aumentando a complexidade dessa iteração do algoritmo. Esse aspecto é levado em conta nas comparações numéricas realizadas com outros métodos da literatura que também são baseados em iterações.

Outro ponto que merece uma explicação é o código da linha 21. Note que a matriz dinâmica do sistema está sendo modificada a cada iteração em função do ganho  $K$  calculado. Assim, um eventual ganho robusto estabilizante não é o ganho  $K$  calculado na iteração atual, mas sim o resultado da acumulação de todos os ganhos calculados desde a primeira iteração (note que isso só é possível pelo fato de que a matriz de malha fechada é sempre uma expressão linear em  $K$ ). Essa “acumulação” é realizada pelo código da linha 9. É importante mencionar que esse procedimento de acumulação do ganho não é necessário, sendo introduzido como uma tentativa heurística de melhorar a convergência do algoritmo. Basicamente a ideia consiste em buscar ganhos  $K$  que possuem entradas cada vez mais próximas de zero à medida que o número de iterações cresce. Contudo, as melhorias observadas nos testes numéricos foram pouco significativas (menores que 1%).

Como destacado anteriormente, uma importante propriedade do algoritmo proposto é que a matriz dinâmica de malha fechada  $A_{cl}(\alpha)$  aparece linearmente nas condições do Teorema 1. Se por um lado essa escolha produz o termo bilinear  $P(\alpha)P_0(\alpha)$ , que introduz conservadorismo ao realizar-se a linearização, isto é, ao arbitrar-se um valor para

$P_0(\alpha)$  na primeira iteração, por outro lado muitas vantagens são obtidas. Por exemplo, o problema de controle descentralizado pode ser tratado sem introduzir nenhum conservadorismo suplementar, pois o algoritmo trabalha diretamente no espaço das entradas do ganho  $K$ . Em geral as outras condições da literatura recuperam o ganho estabilizante por meio de mudanças de variáveis, e por essa razão restrições de estruturas (que são apenas suficientes) são impostas, aumentando o conservadorismo. Outra particularidade interessante da técnica é que o tratamento do sistema dual, isto é, a investigação da estabilidade da matriz  $A_{cl}(\alpha)'$ , é imediato. Essa característica contrasta com os métodos que seguem o paradigma vigente, que em geral requerem transformações de congruência e mudanças de variáveis durante a linearização das condições de síntese.

É importante mencionar que o Teorema 1 foi apresentado em termos de LMIs robustas, ou seja, em termos de problemas de otimização de dimensão infinita. Relaxações podem ser obtidas por meio da imposição de estruturas particulares para as variáveis de otimização, resultando em condições LMIs programáveis. Como mostrado em (BLIMAN *et al.*, 2006), sempre que uma LMI robusta com parâmetros no simplex for solucionável, existe também uma solução polinomial homogênea de grau finito. Note ainda que quando estruturas polinomiais são impostas para as variáveis do problema, as condições do Teorema 1 apresentam um grau de relaxação extra dado por  $d$ , que representa o número de relaxações de Pólya aplicadas, eventualmente reduzindo o conservadorismo para um grau fixo das variáveis de decisão.

### 3.1 Experimentos numéricos

A avaliação do desempenho do Algoritmo 1 é feita por meio de simulações numéricas estatísticas. Com esse objetivo, é utilizada a base de sistemas incertos instáveis proposta em (OLIVEIRA *et al.*, 2011), com sistemas que são garantidamente estabilizáveis por realimentação de estados, mas não por um ganho quadraticamente estabilizante, o que torna os sistemas “difíceis” de serem estabilizados. São testados 100 sistemas para cada combinação das seguintes dimensões:  $n = 2, \dots, 5$  e  $N = 2, \dots, 5$ , e  $p = 1$  (total de 1600 sistemas).

Para a solução numérica das desigualdades matriciais as variáveis de decisão do problema são fixadas com polinômios homogêneos de grau  $g$ . A programação das LMIs foi realizada com a ajuda do interpretador ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2012b), de modo a facilitar a manipulação de polinômios e a extração das condições LMIs de dimensão finita (obtidas via relaxações) que, se satisfeitas, garantem a factibilidade das LMIs dependentes de parâmetros.

Os testes foram executados num computador pessoal com as seguintes configurações: Intel Core i7, 8 GB RAM, Windows 7 64 bit, Matlab R2014a, Yalmip (versão 21.02.2014) e SeDuMi 1.3. Os métodos da literatura utilizados nas comparações são

(EBIHARA; HAGIWARA, 2004) (EH04), (VIEIRA *et al.*, 2014) (VOP14), (SHAKED, 2001) (Sha01) e (APKARIAN *et al.*, 2001) (ATB01). Com exceção de ATB01, os demais são baseados em LMIs com busca em escalares. Os métodos EH04 e Sha01 requerem a busca de um escalar, procurado no conjunto (como proposto em (OLIVEIRA *et al.*, 2011))

$$\Xi = \{10^{-6}, 10^{-5}, \dots, 1, \dots, 10^5, 10^6\} \quad (3.4)$$

que possui 13 valores numa escala logarítmica (testados sequencialmente da esquerda para a direita). A busca dos escalares do método VOP14 é realizada de acordo com (VIEIRA *et al.*, 2014, Equação (14)). Como os métodos da literatura podem executar até 13 problemas de otimização baseados em LMIs, o algoritmo proposto é limitado do mesmo modo, isto é, tomando  $it_{max} = 13$  e incrementando o valor de  $k$  sempre que o passo 14 (que requer a solução de uma LMI) do algoritmo for executado. O algoritmo proposto é aplicado em três diferentes configurações:  $(g, d) \in \{(1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$ , sendo que  $d$  denota a ordem da relaxação de Pólya, e  $g$  o grau das variáveis do problema. O objetivo é mostrar que tanto  $d$  como  $g$  são graus de liberdade que podem aumentar a efetividade do algoritmo.

Primeiramente os métodos são aplicados nos sistemas da base de dados considerando um ganho de realimentação de estados sem restrições (centralizado). Os resultados são mostrados na Figura 2. Como pode ser visto, na média, o algoritmo proposto em sua configuração mais conservadora ( $g = 1, d = 0$ ) fornece resultados bem próximos do melhor método da literatura precedente (VOP14). Aplicando apenas uma relaxação de Pólya, ou seja, mantendo as variáveis de otimização com dependência afim nos parâmetros (assim como os outros métodos da literatura), verifica-se que a estratégia proposta é capaz de superar VOP14. Finalmente, considerando variáveis com dependência quadrática nos parâmetros, a técnica proposta aumentou em 6.7% o número de sistemas estabilizados em relação ao melhor método da literatura. Para fins de comparação em termos do esforço computacional, foi calculado o tempo médio em segundos (considerando todos 1600 sistemas) demandado para computar um ganho estabilizante por todas as condições analisadas. Os resultados foram:  $ALG_{(1,0)} = 0.69$ ,  $ALG_{(1,1)} = 0.76$ ,  $ALG_{(2,0)} = 2.17$ ,  $VOP14=1.29$ ,  $EH04=0.33$ ,  $Sha01=0.26$ ,  $ATB01=0.03$ . Note que os tempos das condições que realizam busca em escalar dependem da ordem na qual os escalares são testados.

O próximo teste consiste em avaliar o desempenho dos métodos quando um ganho de realimentação de estados com restrições (descentralizado) é desejado. Ao tentar estabilizar sistemas com a lei de controle  $u(t) = (M_{dc} \circ K)x(t)$ , a dinâmica em malha fechada se torna  $A(\alpha) + B(\alpha)(M_{dc} \circ K)$ , sendo  $M_{dc}$  a “máscara” utilizada para criar a restrição (elementos nulos) no ganho de realimentação. Na Tabela 2 são listadas todas as máscaras  $M_{dc}$  utilizadas no experimento em função da ordem  $n$  do sistema. Levando em conta o número de estruturas consideradas, e as dimensões dos sistemas disponíveis na base de dados, são realizados 800 testes para  $n = 2$ , 1200 testes para  $n = 3$ , 1600 testes para  $n = 4$  e 2000 testes para  $n = 5$ . A porcentagem total de sistemas estabilizados é mostrada na Figura 3.

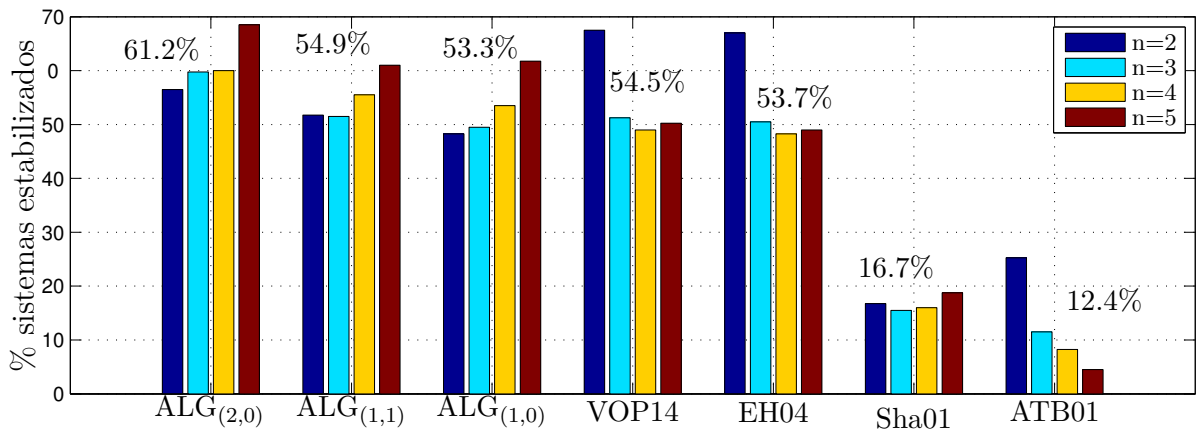


Figura 2 – Sistemas estabilizados por realimentação de estados “centralizada” usando o Algoritmo 1 com  $(g, d) \in \{(1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$  e alguns métodos da literatura para sistemas de uma entrada ( $m = 1$ ).

Tabela 2 – Máscaras  $M_{dc}$  de ganhos descentralizados em função da ordem  $n$  dos sistemas investigados.

$n$	$M_{dc}$																									
2					0	1			1	0																
3					0	1	1			1	0	1			1	1	0									
4					0	1	1	1			1	0	1	1			1	1	1	0						
5	0	1	1	1	1			1	0	1	1	1			1	1	0	1	1			1	1	1	1	0

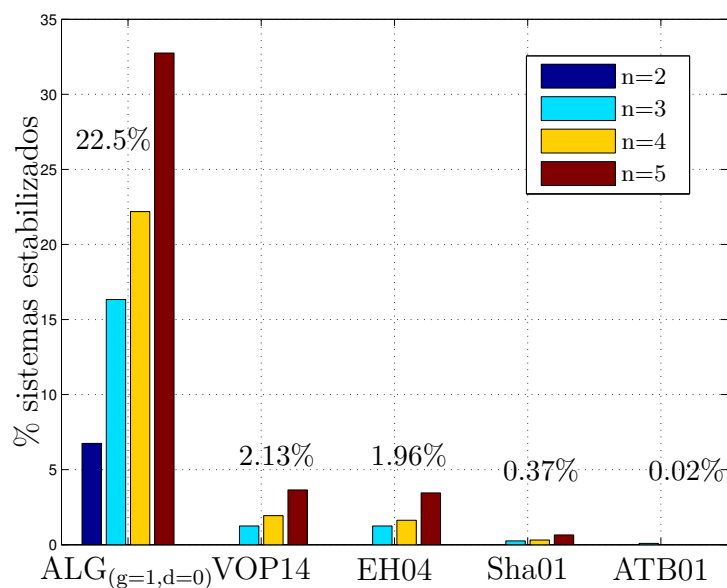


Figura 3 – Porcentagem de sistemas estabilizados por realimentação de estados “descentralizada”, atendendo as estruturas dadas na Tabela 2 e usando o Algoritmo 1 com  $(g, d) = (1, 0)$  e alguns métodos da literatura.

Embora não seja garantido que os sistemas da base sejam estabilizáveis com essa restrição na estrutura do ganho de realimentação, como esperado, todos os métodos perderam desempenho quando as estruturas descentralizadas foram impostas. Contudo, a perda de desempenho do método proposto (testado apenas na sua versão mais conservadora  $(g, d) = (1, 0)$ ) foi muito menor do que todas as outras condições da literatura. A razão para esse fato é que todos os métodos da literatura necessitam impor restrições de estrutura nas variáveis de otimização (conforme discutido na seção 2.5.5, aumentando o conservadorismo dos resultados. Por outro lado, o método proposto não requer nenhuma restrição de estrutura nas variáveis do problema, pois trabalha diretamente no espaço das variáveis que compõem o ganho de realimentação.

## 4 Segunda contribuição

Uma contribuição adicional foi a proposição de outra condição de estabilização robusta em que a matriz dinâmica do sistema também aparece linearmente a partir de condições de estabilidade que possuem variáveis de folga. Empregando a mesma metodologia utilizada no capítulo anterior, mas agora diretamente em condições de análise com variáveis de folga, é possível obter condições em que a matriz Lyapunov também aparece linearmente, não necessitando de um valor inicial arbitrado. Como resultado, chega-se em novas condições de síntese que fornecem resultados menos conservadores, superando todas as condições disponíveis na literatura em termos de testes estatísticos.

Como ponto de partida, considere as seguintes condições de estabilidade robusta que usam variáveis de folga

**Lema 24.** *O sistema (2.3) é robustamente estável se, e somente se, existirem matrizes dependentes de parâmetros,  $F : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $G : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ ,  $P(\alpha) \succ \mathbf{0} \quad \forall \alpha \in \Lambda_N$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) \\ P(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} F(\alpha) \\ G(\alpha) \end{bmatrix} [A(\alpha) \quad -I] \right) \prec \mathbf{0}, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (4.1)$$

para o caso de sistemas a tempo contínuo ou

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P(\alpha) \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} F(\alpha) \\ G(\alpha) \end{bmatrix} [A(\alpha) \quad -I] \right) \prec \mathbf{0}, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (4.2)$$

para o caso de sistemas a tempo discreto.

Do ponto de vista da análise de estabilidade, as variáveis de folga adicionais apresentadas no Lema 24 proveem vantagens com respeito às desigualdades do Lema 13 quando estruturas particulares são impostas às variáveis de otimização (OLIVEIRA; PERES, 2007). Aplicando o Lema de Finsler mais uma vez nas desigualdades (4.1) e (4.2), é possível obter novas condições em que tanto a matriz  $A(\alpha)$  quanto a matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$  aparecem linearmente, o que é favorável para procedimentos de síntese.

**Teorema 2.** *O sistema (2.3) é robustamente estável se, e somente se, existirem  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ ,  $X_1 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $X_2 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $X_3 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $Y_1 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $Y_2 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $Y_3 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ , tais que  $P(\alpha) \succ \mathbf{0} \quad \forall \alpha \in \Lambda_N$ , e adicionalmente*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & A(\alpha)' \\ P(\alpha) & \mathbf{0} & -I \\ A(\alpha) & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1(\alpha) & Y_2(\alpha) & Y_3(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \right) \prec \mathbf{0}, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (4.3)$$

para sistemas a tempo contínuo, ou

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{0} & A(\alpha)' \\ \mathbf{0} & P(\alpha) & -I \\ A(\alpha) & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1(\alpha) & Y_2(\alpha) & Y_3(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \right) \prec \mathbf{0}, \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (4.4)$$

para sistemas a tempo discreto.

*Demonstração.* Note que a desigualdade (4.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & F(\alpha) \\ \mathbf{0} & I & G(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}^{\perp'}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & A(\alpha)' \\ P(\alpha) & \mathbf{0} & -I \\ A(\alpha) & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \\ F(\alpha)' & G(\alpha)' \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}^{\perp}} \prec \mathbf{0}$$

Essa desigualdade assume a forma (2) do Lema de Finsler, e a matriz  $\tilde{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} F(\alpha)' & G(\alpha)' & -I \end{bmatrix}$  satisfaz a restrição algébrica  $\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}^{\perp} = \mathbf{0}$  necessária para a aplicação da condição na forma (4) do Lema de Finsler. É imediato verificar que  $\mathcal{B} = Y_3(\alpha)\tilde{\mathcal{B}}$  também satisfaz  $\mathcal{B}\mathcal{B}^{\perp} = \mathbf{0}$ . Considerando as relações

$$\begin{cases} \mathcal{B} = Y_3(\alpha)\tilde{\mathcal{B}} \\ \tilde{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} F(\alpha)' & G(\alpha)' & -I \end{bmatrix} \\ \mathcal{B} = \begin{bmatrix} Y_1(\alpha) & Y_2(\alpha) & Y_3(\alpha) \end{bmatrix} \end{cases}$$

é possível determinar  $F(\alpha) = -(Y_3(\alpha)^{-1}Y_1(\alpha))'$ ,  $G(\alpha) = -(Y_3(\alpha)^{-1}Y_2(\alpha))'$ . O bloco referente à terceira linha e terceira coluna do lado esquerdo da equação (4.3) requer que  $Y_3(\alpha)'X_3(\alpha)' + X_3(\alpha)Y_3(\alpha) \prec \mathbf{0}$ , assim, tanto  $X_3(\alpha)$  como  $Y_3(\alpha)$  são garantidamente não singulares (e portanto invertíveis). A condição (4.3) está na forma (4) do Lema de Finsler com  $\mathcal{X}' = \begin{bmatrix} X_1(\alpha)' & X_2(\alpha)' & X_3(\alpha)' \end{bmatrix}$ . A prova para o caso discreto é análoga.  $\square$

As condições do Teorema 2 são equivalentes às condições do Lema 24 e apresentam uma característica muito desejada, a saber, tanto a matriz dinâmica do sistema como a matriz de Lyapunov aparecem linearmente no problema, diferentemente de todas as condições conhecidas na literatura e das condições do Teorema 1. No entanto duas dificuldades podem ser imediatamente identificadas: as condições são mais complexas em função do maior número de variáveis de decisão e um espaço de dimensão maior ( $3n \times 3n$ ); as condições estão na forma de desigualdades matriciais bilineares (BMIs), e não é conhecido até o momento, um algoritmo eficiente para resolver problemas com esse tipo de restrição, mesmo para sistemas sem incertezas.

Com respeito à bilinearidade, o método de solução é o mesmo empregado no capítulo anterior, isto é, fixando algumas variáveis. Embora as condições resultantes também só sejam suficientes, os resultados apresentados na seção de experimentos numéricos deste capítulo mostram que essa nova formulação pode ser bem menos conservadora que

as condições do capítulo anterior e da literatura. Outra vantagem do Teorema 2 é a possibilidade de tratar sistemas a tempo discreto com uma pequena modificação (mudando apenas a posição e o sinal de  $P(\alpha)$ ).

## 4.1 Relaxações LMI para análise de estabilidade robusta

Uma prática comum e óbvia para linearizar as desigualdades do Teorema 2 é fixar  $\mathcal{B}$ , obtendo as condições linearizadas (4.5) e (4.6), em que  $\bar{Y}_1(\alpha)$ ,  $\bar{Y}_2(\alpha)$  e  $\bar{Y}_3(\alpha)$  denotam as escolhas iniciais para as variáveis  $Y_1(\alpha)$ ,  $Y_2(\alpha)$  e  $Y_3(\alpha)$ , respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & A(\alpha)' \\ P(\alpha) & \mathbf{0} & -I \\ A(\alpha) & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1(\alpha) & \bar{Y}_2(\alpha) & \bar{Y}_3(\alpha) \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0} \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{0} & A(\alpha)' \\ \mathbf{0} & P(\alpha) & -I \\ A(\alpha) & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1(\alpha) & \bar{Y}_2(\alpha) & \bar{Y}_3(\alpha) \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0} \quad (4.6)$$

A factibilidade das condições (4.5) e (4.6) pode ser testada eficientemente usando relaxações LMIs, entretanto ainda não existe interesse em prosseguir com essa prática, uma vez que é muito improvável que alguém possa fazer eficientemente escolhas apropriadas para  $\bar{Y}_1(\alpha)$ ,  $\bar{Y}_2(\alpha)$  e  $\bar{Y}_3(\alpha)$  de modo que essas condições sejam factíveis.

Por outro lado, o fato de a matriz  $A(\alpha)$  aparecer linearmente provê uma característica única, que pode ser explorada oportunamente. Seguindo a metodologia apresentada no capítulo anterior, é possível obter variações do problema que garantem que os autovalores de  $A(\alpha)$  pertençam a uma região bem definida no plano. Ainda que essa técnica não forneça um certificado de estabilidade, ela pode ajudar a obter boas escolhas para os valores iniciais de  $\bar{\mathcal{B}}$ .

### 4.1.1 Relaxação para sistemas contínuos

Usando a mesma abordagem aplicada no Teorema 1, se a matriz  $A(\alpha)$  for substituída por  $A(\alpha) - rI$ , a condição resultante dada em (4.7) é relaxada em relação a (4.5), no sentido de exigir apenas que os autovalores de  $A(\alpha)$  estejam à esquerda de um eixo vertical posicionado em  $r$ , (uma prova desta afirmação é dada na Seção 4.2.1). O primeiro avanço advindo dessa pequena mudança é que a limitação indicada anteriormente, relacionada à escolha das variáveis  $\bar{Y}_1(\alpha)$ ,  $\bar{Y}_2(\alpha)$  e  $\bar{Y}_3(\alpha)$ , pode ser superada, pois é possível que escolhas particulares para estas variáveis garantam a factibilidade de (4.5) ou (4.6) para um valor de  $r$  suficientemente grande. Assim, a desigualdade (4.7) pode ser resolvida em termos de um problema de otimização, mais especificamente, minimizando  $r$  sujeito à condição (4.7) e  $P(\alpha)' = P(\alpha) \succ \mathbf{0}$ . Como consequência é possível encontrar o menor



valor de  $r$  que pode ser certificado por uma matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$ , para as escolhas iniciais de  $\bar{Y}_1(\alpha)$ ,  $\bar{Y}_2(\alpha)$  e  $\bar{Y}_3(\alpha)$ . Claramente, se  $r \leq 0$ , então  $A(\alpha)$  é robustamente estável, caso contrário nada pode ser concluído.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & A(\alpha)' - rI \\ P(\alpha) & \mathbf{0} & -I \\ A(\alpha) - rI & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1(\alpha) & \bar{Y}_2(\alpha) & \bar{Y}_3(\alpha) \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0} \quad (4.7)$$

As mesmas considerações feitas sobre a condição de projeto (3.1) proposta no capítulo anterior se aplicam à condição (4.7), ou seja, uma solução com  $r \leq 0$  é suficiente para certificar a estabilidade robusta de  $A(\alpha)$  e uma solução com  $r > 0$  é inconclusiva sobre a estabilidade de  $A(\alpha)$ .

### 4.1.2 Relaxação para sistemas discretos

De maneira similar ao desenvolvimento na seção 4.1.1 pode-se obter uma condição mais relaxada para a condição dada em (4.6), que trata de sistemas discretos. A relaxação mais natural é permitir que os autovalores de  $A(\alpha)$  fiquem dentro de um círculo cuja magnitude pode ser ajustada. Assim, como a matriz  $A(\alpha)$  aparece linearmente, é possível multiplicá-la por um escalar e ajustar a magnitude dos seus autovalores.

Para manter a coerência entre as condições para sistemas contínuos e discretos, propõe-se a condição (4.8). Note que ao invés de simplesmente multiplicar por  $r$ , a matriz  $A(\alpha)$  aparece sendo multiplicada por  $1 - r$ . Desse modo, com  $r \leq 0$ , a factibilidade de (4.8) implica que (4.6) é factível.

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{0} & (1-r)A(\alpha)' \\ \mathbf{0} & P(\alpha) & -I \\ (1-r)A(\alpha) & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1(\alpha) & \bar{Y}_2(\alpha) & \bar{Y}_3(\alpha) \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0} \quad (4.8)$$

Comparando as condições dadas em (4.8) e (4.6) percebe-se que (4.8) testa se todos os autovalores de  $(1-r)A(\alpha)$  estão dentro do círculo unitário, ou seja, se  $A(\alpha)$  tem todos os autovalores no círculo de raio  $1/(1-r)$ . Para  $r < 1$ , a função  $1/(1-r)$  é sempre crescente e positiva, podendo assumir qualquer valor positivo. Em outras palavras, quanto menor for o valor de  $r$ , menor é o raio do círculo que garantidamente contém os autovalores de  $A(\alpha)$ .

Na Figura 4 é demonstrado como, a partir do valor de  $r$  para o qual (4.8) é factível, pode-se delimitar uma região que contém todos os autovalores de  $A(\alpha)$ , para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ . Como ilustração, suponha um caso hipotético em que sabe-se que (4.8) é factível com  $r > 0$ , por exemplo  $r = 3/8$ . Sabe-se que todos os autovalores de  $A(\alpha)$  estão dentro da região delimitada pela circunferência em vermelho, a fronteira da região  $|\lambda| < 8/5$ . Portanto não se pode concluir nada a respeito da estabilidade robusta do sistema. Com

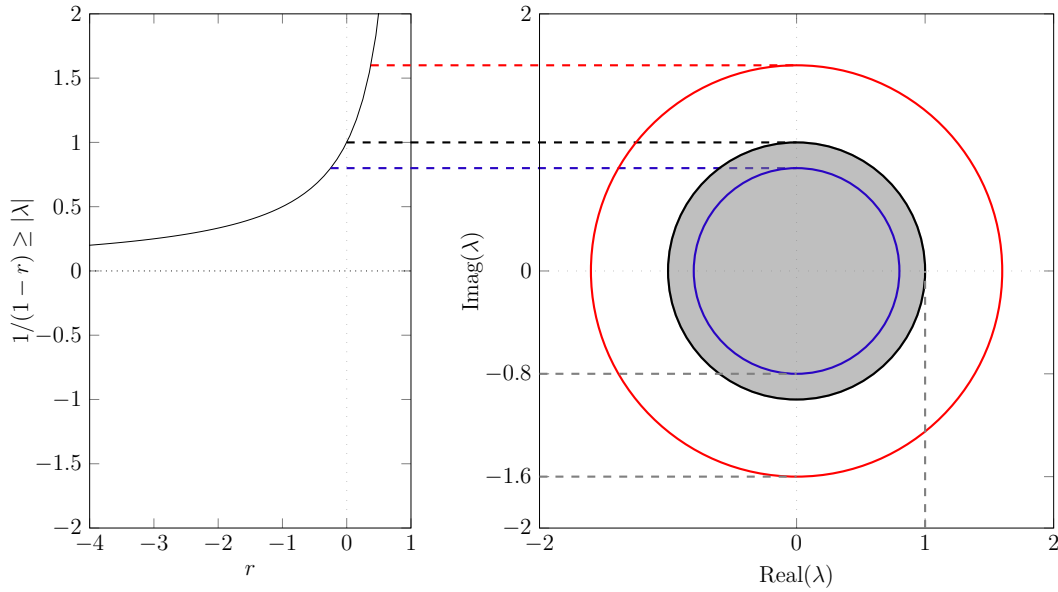


Figura 4 – Limitante para a magnitude dos autovalores de  $A(\alpha)$  dada uma solução para (4.8).

$r = 0$  certifica-se que o sistema é robustamente estável pois garante-se, para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ , que os autovalores de  $A(\alpha)$  estão em um círculo unitário, que coincide com a região em cinza delimitada pela circunferência preta. Com  $r < 0$ , ilustra-se um caso hipotético em que sabe-se que (4.8) é factível com  $r = -1/4$ . Nesse caso, tem-se uma região delimitada pela circunferência azul de raio  $4/5$  que contém todos os autovalores de  $A(\alpha)$ , para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ .

## 4.2 Algoritmo de relaxações sucessivas

As técnicas e heurísticas introduzidas no capítulo anterior, que deram origem ao Algoritmo 1, foram consideradas promissoras e merecedoras de uma investigação mais aprofundada, principalmente depois dos resultados favoráveis à condição proposta nos experimentos numéricos. Como uma generalização do Algoritmo 1, nesta seção é proposto o Algoritmo 2, aplicável na solução de qualquer BMI dada na forma  $\mathcal{Q} + He(\mathcal{X}\mathcal{B}) \prec \mathbf{0}$ , que contempla inúmeros problemas de síntese robusta no contexto de sistemas lineares. Como aprimoramento teórico, as garantias de convergência local e correção do algoritmo são estabelecidas de maneira formal pelos Teoremas 3 e 4, respectivamente.

Algumas observações com respeito à inicialização e alguns passos cruciais do Algoritmo 2 são feitas na sequência. O algoritmo recebe como entrada as matrizes  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'$ ,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$  e  $\mathcal{X}$ .  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{X}$  dependem de forma afim das variáveis de decisão, exceto de  $r$ .  $\mathcal{R}$  é independente das variáveis de decisão e aparece no problema multiplicando a variável escalar  $r$  em um termo que serve como uma relaxação para o problema, pois com  $r = 0$ , a solução da LMI fornecida pelo Algoritmo 2 provê uma solução para a BMI de interesse.

$\bar{\mathcal{B}}_1$  é a escolha inicial para o valor de  $\bar{\mathcal{B}}$ , a ser usada na primeira iteração, e  $it_{max}$  é o número máximo de iterações realizadas pelo algoritmo.

$\bar{\mathcal{Q}}_0$  e  $r_0 > 0$  são parâmetros associados a uma solução conhecida e são usados apenas se o algoritmo terminar na primeira iteração. Note que o problema de otimização resolvido na linha 5 é uma LMI robusta e o termo  $\bar{\mathcal{B}}_k$  é fixo em cada iteração. Uma característica crucial do algoritmo é que  $\mathcal{X}'$  e  $\mathcal{B}$  são intercambiáveis, pois  $He(\mathcal{X}\mathcal{B}) = He(\mathcal{B}'\mathcal{X}')$  e todos os valores possíveis para  $\mathcal{X}$  são escolhas válidas para  $\mathcal{B}$ . Assim o valor de  $\mathcal{X}'$ , determinado na linha 5, é usado como escolha para o valor  $\bar{\mathcal{B}}_{k+1}$ , utilizado na iteração seguinte.

**Teorema 3.** *Se o problema é factível para uma escolha inicial  $\bar{\mathcal{B}}_1 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(m, n)$ , então o Algoritmo 2 produz uma sequência de soluções para  $\mathcal{Q} + r\mathcal{R} + He(\mathcal{X}\mathcal{B}) \prec \mathbf{0}$ , com  $r_k$  não crescente.*

*Demonstração.* Se o problema  $\mathcal{Q} + r\mathcal{R} + He(\mathcal{X}\bar{\mathcal{B}}_1) \prec \mathbf{0}$  é factível, sendo  $\bar{\mathcal{B}}_1$  a escolha inicial fornecida para o algoritmo, um valor finito é atribuído a  $r_1$  quando o problema de otimização na linha 5 for resolvido na primeira iteração.  $r_k$  é o menor valor de  $r$  tal que  $\mathcal{Q} + r\mathcal{R} + He(\mathcal{X}\bar{\mathcal{B}}_k) \prec \mathbf{0}$  é factível, sendo  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Q}$  variáveis de decisão. Em particular  $\mathcal{X} = \bar{\mathcal{B}}_k$ ,  $r = r_k$  é uma solução (encontrada na iteração  $k - 1$ ); para  $k > 1$ , sabe-se que  $\bar{\mathcal{Q}}_{k-1} + r_{k-1}\mathcal{R} + He(\bar{\mathcal{B}}'_{k-1}\bar{\mathcal{B}}_k) \prec \mathbf{0}$  é satisfeita, pela iteração anterior; sendo assim conclui-se que,  $r_k \leq r_{k-1}$ .  $\square$

O Teorema 4 estabelece algumas condições sob as quais o Algoritmo 2 tem garantia de funcionar corretamente.

**Teorema 4.** *Sejam  $\mathcal{Q} : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $\mathcal{B} : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(m, n)$  e  $\mathcal{X} : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, m)$ , operadores afins das variáveis de decisão;  $\mathcal{R} : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ , uma matriz simétrica dependente de parâmetros;  $r \in \mathbb{R}$ , uma variável escalar, sendo que  $\mathcal{Q}(\alpha)$ ,  $\mathcal{X}(\alpha)$  e  $\mathcal{B}(\alpha)$  não dependem de  $r$ ; e  $\bar{\mathcal{B}}_1(\alpha)$  uma escolha para o valor de  $\mathcal{B}$  tal que (4.10) seja satisfeita com algum  $r_0 > 0$ , e algum  $\bar{\mathcal{Q}}_0(\alpha)$ . Se o Algoritmo 2 terminar na linha 9, então*

- (a) a minimização de  $r$  sujeito à condição (4.9) fornece  $r \leq 0$ , com  $\mathcal{Q}(\alpha)$  e  $\mathcal{B}(\alpha)$  determinadas em termos da saída produzida pelo algoritmo;
- (b) a BMI (4.11) é factível com  $\mathcal{Q}(\alpha)$  e  $\mathcal{B}(\alpha)$  determinadas em termos das saídas do algoritmo para alguma  $\mathcal{X}(\alpha)$ .

$$\mathcal{Q} + r\mathcal{R} + He(\mathcal{X}\mathcal{B}) \prec \mathbf{0} \quad (4.9)$$

$$\bar{\mathcal{Q}}_0 + r_0\mathcal{R} + He(\bar{\mathcal{B}}'_0\bar{\mathcal{B}}_1) \prec \mathbf{0}, \quad r_0 > 0 \quad (4.10)$$

$$\mathcal{Q} + He(\mathcal{X}\mathcal{B}) \prec \mathbf{0} \quad (4.11)$$

*Demonstração.* (a) Se o Algoritmo 2 retornar uma solução significa que na linha 5, foram encontradas variáveis que satisfizeram  $\bar{Q}_k + r_k \mathcal{R} + He(\bar{\mathcal{B}}_{k+1} \bar{\mathcal{B}}_k) \prec \mathbf{0}$  com algum  $r_k \leq 0$  e isso é suficiente para concluir que a minimização de  $r$  sujeito a (4.9) provê  $r \leq 0$ . (b) Também é sabido que  $\bar{Q}_{k-1} + r_{k-1} \mathcal{R} + He(\bar{\mathcal{B}}_k \bar{\mathcal{B}}_{k-1}) \prec \mathbf{0}$  é satisfeita com algum  $r_{k-1} > 0$  e se  $k > 1$  então  $r_{k-1} > 0$ , caso contrário o algoritmo teria terminado na linha 9 (se  $k = 1$ , por hipótese ela é satisfeita para algum  $r_0 > 0$ ). Escrevendo uma combinação convexa das duas condições anteriores, com coeficientes  $-r_k/(r_{k-1} - r_k)$  e  $r_{k-1}/(r_{k-1} - r_k)$  tem-se

$$\frac{-r_k}{r_{k-1} - r_k} (\bar{Q}_{k-1} + r_{k-1} \mathcal{R} + He(\bar{\mathcal{B}}'_k \bar{\mathcal{B}}_{k-1})) + \frac{r_{k-1}}{r_{k-1} - r_k} (\bar{Q}_k + r_k \mathcal{R} + He(\bar{\mathcal{B}}'_{k+1} \bar{\mathcal{B}}_k)) \prec \mathbf{0}$$

Os termos com  $\mathcal{R}$  se cancelam, e multiplicando a desigualdade por  $(r_{k-1} - r_k)$  tem-se

$$(r_{k-1} \bar{Q}_k - r_k \bar{Q}_{k-1}) + He(\bar{\mathcal{B}}'_k (r_{k-1} \bar{\mathcal{B}}_{k+1} - r_k \bar{\mathcal{B}}_{k-1})) \prec \mathbf{0} \quad (4.12)$$

Provando que com a escolha  $\mathcal{X} = (r_{k-1} \bar{\mathcal{B}}_{k+1} - r_k \bar{\mathcal{B}}_{k-1})$  a BMI (4.11) é satisfeita com  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{B}$  obtidas em termos da saída do algoritmo.  $\square$

```

1 Função RelaxaçõesSucessivas(operador afim  $\mathcal{Q}(\alpha)$ , operador afim  $\mathcal{X}(\alpha)$ ,
   constante  $\mathcal{R}(\alpha)$ , constantes  $(\bar{\mathcal{B}}_1(\alpha), r_0, \bar{Q}_0(\alpha))$ ,  $it_{max} \in \mathbb{N}$ )
2    $k \leftarrow 0$ ;
3   Enquanto  $k < it_{max}$  faça
4      $k \leftarrow k + 1$ ;
5     minimize  $r_k$  sujeito a  $\mathcal{Q}(\alpha) + r_k \mathcal{R}(\alpha) + He(\mathcal{X}(\alpha) \bar{\mathcal{B}}_k(\alpha)) \prec \mathbf{0}$ ;
6      $\bar{\mathcal{B}}_{k+1}(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}(\alpha)'$  da solução;
7      $\bar{Q}_k(\alpha) \leftarrow \mathcal{Q}(\alpha)$  da solução;
8     Se  $r_k \leq 0$  então
9       Retorna  $(\bar{Q}_k, r_k, \bar{Q}_{k-1}, r_{k-1}, \bar{\mathcal{B}}_k)$ ;
10 Fim

```

**Algoritmo 2:** Solução heurística para BMIs na forma (4) do Lema de Finsler.

O Algoritmo 2 é uma versão consolidada do Algoritmo 1 expressando de maneira mais geral a ideia fundamental que sustenta a metodologia de síntese robusta proposta nesta dissertação, a qual pode ser adaptada (com pequenos ajustes) para tratar outros problemas similares associados a sistemas lineares incertos.

#### 4.2.1 Análise robusta por relaxações sucessivas

O Algoritmo 2 explora a capacidade dos resolvidores de problemas SDP de otimizar alguma função objetivo afim nas variáveis de decisão, obtendo soluções refinadas a cada iteração, e possivelmente encontrando uma solução para o problema BMI original. No Corolário 1 apresentado na sequência é indicado como aplicar o Algoritmo 2 de modo a tratar as condições de estabilidade robusta para sistemas contínuos propostas no Teorema 2.

**Corolário 1.** *Sejam*

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & A(\alpha)' \\ P(\alpha) & \mathbf{0} & -I \\ A(\alpha) & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{B}}_1' = \begin{bmatrix} I \\ I \\ -I \end{bmatrix}, \mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix}$$

as entradas do Algoritmo 2 em que  $X_1 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $X_2 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $X_3 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ , dependendo das variáveis de decisão de forma afim, com  $\mathbf{0} \prec P(\alpha) \forall \alpha \in \Lambda_N$ . Então a condição (4.10) é satisfeita com  $\bar{\mathcal{B}}_0 = -r_0\bar{\mathcal{B}}_1/2$ , para algum  $0 < r_0 \in \mathbb{R}$ , e se o Algoritmo 2 provê uma solução, então a estabilidade robusta do sistema a tempo contínuo (2.3) é certificada.

*Demonstração.* Primeiramente, é provada a factibilidade das escolhas para  $\mathcal{B}_1(\alpha)$ . Substituindo  $\mathcal{X}' = r_0\bar{\mathcal{B}}_1/2$  e  $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{B}}_1$  em (4.10), tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & A(\alpha) - r_0I \\ \star & \mathbf{0} & -I \\ \star & \star & \mathbf{0} \end{bmatrix} - (r_0/2)He \left( \begin{bmatrix} I \\ I \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \\ -I \end{bmatrix}' \right) = \begin{bmatrix} -r_0I & P(\alpha) - r_0I & A(\alpha) \\ \star & -r_0I & (r_0 - 1)I \\ \star & \star & -r_0I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (4.13)$$

Escolhendo  $P(\alpha) = r_0I$  e aplicando o complemento de Schur resulta em

$$-r_0I - [A(\alpha) \quad (r_0 - 1)I] (-r_0I)^{-1} [A(\alpha) \quad (r_0 - 1)I]' \prec \mathbf{0}$$

que é equivalente a  $(r_0^2 - (r_0 - 1)^2)I - A(\alpha)A(\alpha)' = (2r_0 - 1)I - A(\alpha)A(\alpha)' \succ \mathbf{0}$ , que por sua vez é satisfeita com qualquer  $r_0$  tal que  $(2r_0 - 1)$  seja maior que o raio espectral de  $A(\alpha)A(\alpha)'$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda_N$ .

Em seguida demonstra-se que se uma solução  $\bar{\mathcal{Q}}_k + r_k\mathcal{R} + He(\bar{\mathcal{B}}_{k+1}'\bar{\mathcal{B}}_k) \prec \mathbf{0}$  com  $r_k \leq 0$  for encontrada, então o sistema a tempo contínuo (2.3) é robustamente estável. Considere a transformação de congruência  $\mathcal{T}'(\bar{\mathcal{Q}}_k + r_k\mathcal{R} + He(\bar{\mathcal{B}}_{k+1}'\bar{\mathcal{B}}_k))\mathcal{T} \prec \mathbf{0}$ , em que  $\mathcal{T}$  é o produto entre  $[I \quad (A(\alpha) - r_kI)']$  e alguma base para o espaço nulo de  $\bar{\mathcal{B}}_{k+1} = \mathcal{X}$ , por exemplo

$$T = \begin{bmatrix} I \\ (A(\alpha) - r_kI) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & -X_1(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \\ \mathbf{0} & I & -X_2(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} = \quad (4.14)$$

$$[I \quad (A(\alpha) - r_kI) \quad (((r_kI - A(\alpha))X_1(\alpha) - X_2(\alpha))X_3(\alpha)^{-1})]$$

resultando em  $(A(\alpha) - r_kI)'P(\alpha) + P(\alpha)(A(\alpha) - r_kI)$ , que pode ser particionada como se segue

$$\underbrace{A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha)}_{\text{estabilidade de } A(\alpha)} = \underbrace{(A(\alpha) - r_kI)'P(\alpha) + P(\alpha)(A(\alpha) - r_kI)}_{\text{estabilidade de } (A(\alpha) - r_kI)} + \underbrace{2r_kP(\alpha)}_{\text{termo negativo-definido}}$$

$$\underbrace{([A(\alpha) - r_k I]' P(\alpha) + P(\alpha) [A(\alpha) - r_k I]) \prec \mathbf{0}}_{\text{estabilidade de } (A(\alpha) - r_k I)} \Rightarrow \underbrace{A(\alpha)' P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) \prec \mathbf{0}}_{\text{estabilidade de } A(\alpha)}$$

Portanto, a estabilidade robusta do sistema a tempo contínuo é certificada.  $\square$

De maneira similar, no Corolário 2 é mostrado como aplicar o Algoritmo 2 de modo a tratar as condições de estabilidade robusta para sistemas discretos propostas no Teorema 2.

**Corolário 2.** *Sejam*

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{0} & A(\alpha)' \\ \mathbf{0} & P(\alpha) & -I \\ A(\alpha) & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -A(\alpha)' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -A(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{B}}_1' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \\ -I \end{bmatrix}, \mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix}$$

as entradas do Algoritmo 2 em que  $X_1 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $X_2 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $X_3 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ , dependendo das variáveis de decisão de forma afim, com  $\mathbf{0} \prec P(\alpha) \forall \alpha \in \Lambda_N$ ; então a condição (4.10) é satisfeita com  $\bar{\mathcal{B}}_0 = -\bar{\mathcal{B}}_1/2$  para  $r_0 = 1$ , e se o Algoritmo 2 provê uma solução, então a estabilidade robusta do sistema a tempo discreto (2.3) é certificada.

*Demonstração.* Primeiramente é provada a factibilidade das escolhas iniciais de  $\bar{\mathcal{B}}_1$  e  $r_0$ . A condição (4.10) resulta em

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P(\alpha) & -I \\ \mathbf{0} & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix} - (1/2)He \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \\ -I \end{bmatrix}' \right) = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P(\alpha) - I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

que é satisfeita escolhendo  $P(\alpha) = pI$  para  $p \in (0, 1)$ .

Em seguida demonstra-se que se uma solução  $\bar{\mathcal{Q}}_k + r_k \mathcal{R} + He(\bar{\mathcal{B}}_{k+1}' \bar{\mathcal{B}}_k) \prec \mathbf{0}$  com  $r_k \leq 0$  for encontrada, então o sistema a tempo discreto (2.3) é robustamente estável. A transformação de congruência  $\mathcal{T}'(\bar{\mathcal{Q}}_k + r_k \mathcal{R} + He(\bar{\mathcal{B}}_{k+1}' \bar{\mathcal{B}}_k))\mathcal{T} \prec \mathbf{0}$ , na qual  $\mathcal{T}$  é o produto entre  $\begin{bmatrix} I & (A(\alpha) - r_k I)' \end{bmatrix}$  e alguma base para o espaço nulo de  $\bar{\mathcal{B}}_{k+1} = \mathcal{X}$ , por exemplo

$$T = \begin{bmatrix} I \\ (A(\alpha) - r_k I) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & -X_1(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \\ \mathbf{0} & I & -X_2(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} = \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} I & (A(\alpha) - r_k I) & (((r_k I - A(\alpha))X_1(\alpha) - X_2(\alpha))X_3(\alpha)^{-1}) \end{bmatrix}$$

resulta em  $P(\alpha) - [(1 - r_k)A(\alpha)]' P(\alpha) [(1 - r_k)A(\alpha)]$  que pode ser particionada como se segue

$$\underbrace{P(\alpha) - [(1 - r_k)A(\alpha)]' P(\alpha) [(1 - r_k)A(\alpha)]}_{\text{estabilidade de } (1 - r_k)A(\alpha)} + \underbrace{((1 - r_k)^2 - 1) [A(\alpha)' P(\alpha) A(\alpha)]}_{\text{semidefinida-positiva para } r_k < 0 \text{ e } P(\alpha) \succ \mathbf{0}} =$$

$$\underbrace{P(\alpha) - [(1 - r_k)A(\alpha)]' P(\alpha) [(1 - r_k)A(\alpha)]}_{\text{estabilidade de } (1 - r_k)A(\alpha)} \succ \mathbf{0} \Rightarrow \underbrace{P(\alpha) - A(\alpha)' P(\alpha) A(\alpha)}_{\text{estabilidade de } A(\alpha)} \succ \mathbf{0}$$

Como consequência, a estabilidade robusta do sistema a tempo discreto é certificada.  $\square$

As provas para as condições de estabilidade fornecidas nos Corolários 1 e 2 em termos de  $\bar{Q}_k$ ,  $\bar{B}_k$  e  $\bar{B}_{k+1}$  são válidas sem o conhecimento de  $\bar{Q}_{k-1}$  ou  $r_{k-1}$ , diferentemente da prova para o caso geral baseada na solução associada a (4.12). Portanto,  $\bar{Q}_0$ , e  $r_0$  não precisam ser determinadas e essas entradas podem ser omitidas ao executar o Algoritmo 2 para testar a estabilidade por meio desses corolários.

### 4.3 Experimentos numéricos de análise de estabilidade robusta

Antes de discutir a extensão da abordagem proposta para tratar do problema de síntese, é interessante comparar a precisão e eficiência das condições de estabilidade robusta propostas com os métodos existentes na literatura. Por um lado é sabido há mais de uma década, que o problema de análise de estabilidade robusta pode ser resolvido por relaxações LMI convergentes (BLIMAN, 2004a; HENRION *et al.*, 2004; CHESI *et al.*, 2005; OLIVEIRA; PERES, 2007), basicamente aumentando o grau polinomial associado à matriz de Lyapunov. Por outro lado, entretanto, seria injusta a comparação com essas condições, já que elas não podem ser estendidas para tratar o problema de síntese sem introduzir conservadorismo. Assim, a comparação apresentada nesta seção considera apenas as condições de síntese disponíveis (as melhores conhecidas até o momento) com a matriz de entrada  $B(\alpha) = \mathbf{0}$ , de modo que o sistema em malha fechada e conseqüentemente as LMIs sejam independentes do ganho de realimentação.

Primeiramente, para obter condições LMIs programáveis a partir das desigualdades de dimensão infinita dos Corolários 1 e 2, uma estrutura polinomial homogênea é imposta às variáveis do problema, como é usual nos métodos da literatura. Como a maioria das condições da literatura são baseadas em variáveis de otimização com dependência afim dos parâmetros incertos, todas as variáveis nas condições propostas são definidas com grau um (pretendendo fazer uma comparação justa). O passo seguinte é aplicar o teste de positividade (baseado em relaxações de Pólya) e extrair as LMIs. Para realizar estas manipulações polinomiais empregam-se os pacotes ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2012b) e Yalmip (LÖFBERG, 2004). As condições LMIs resultantes foram testadas utilizando o resolvidor de código aberto SeDuMi (versão 1.3) (STURM, 1999) ou o resolvidor comercial Mosek, versões 7 e 8 (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000). Os scripts foram executados usando MATLAB (R2014a) 64 bits para Linux, em uma máquina com processador Intel Core i7-2600 (3.40 GHz) e 3.8 GB de RAM.



Note que os métodos de pontos interiores implementados pelos resolvedores empregados são iterativos, e ao serem combinados com o procedimento iterativo proposto, resultam em uma abordagem que é, de fato, “duplamente” iterativa. A iteração externa funciona como uma realimentação para o resolvidor SDP, dando uma nova direção às trajetórias no espaço de variáveis do problema. Portanto, se o máximo número de iterações internas (executadas pelo resolvidor SDP) for limitado, a efetividade e eficiência geral do algoritmo pode ser modificada (possivelmente melhorada). Dentro do conhecimento do autor, é a primeira vez que se investiga em tão baixo nível métodos LMIs iterativos ((DE OLIVEIRA; GEROMEL, 1997; El Ghaoui *et al.*, 1997; CAO *et al.*, 1998)).

Note também que  $X_3(\alpha)$  poderia ser fixada como a matriz identidade (veja a prova do Teorema 2 para mais detalhes), mas ela é considerada como uma variável de decisão do problema, para potencialmente melhorar a convergência das relaxações sucessivas. Com respeito a sua estrutura, testes numéricos mostram que a estrutura mais complexa não necessariamente provê os melhores resultados. Por exemplo, a matriz de estrutura arbitrária forneceu os piores resultados quando comparada com as matrizes com estrutura simétrica, diagonal, ou a matriz identidade multiplicada por um escalar. Esse padrão só não se repetiu para sistemas contínuos empregando-se o Mosek 8 como resolvidor.

Para avaliar o desempenho do método proposto em comparação com as técnicas da literatura, uma análise estatística é realizada usando a base de dados de sistemas robustamente estáveis apresentados em (OLIVEIRA; PERES, 2006). Para cada combinação de  $n \in \{2, 3, 4\}$  e  $N \in \{2, 3, 4\}$ , a base de dados contém 1000 sistemas robustamente estáveis (construídos aleatoriamente) na forma politópica, tanto para tempo contínuo como para tempo discreto (total de 18000 sistemas). Para o caso a tempo discreto, o Algoritmo 2 aplicado conforme o Corolário 2 é comparado com as condições suficientes dadas em (DE OLIVEIRA *et al.*, 1999), (MORAIS *et al.*, 2013) e com a bem conhecida estabilidade quadrática. Para o caso a tempo contínuo, o Algoritmo 2, aplicado conforme o Corolário 1, é comparado com os métodos de (SHAKED, 2001), (EBIHARA; HAGIWARA, 2004), (RODRIGUES *et al.*, 2015) e (VIEIRA *et al.*, 2015). O Algoritmo 2 é chamado com  $it_{max} = 15$ , e o número de iterações internas (do resolvidor) é limitado a 10 ou 20. A efetividade é avaliada em termos do número de sistemas que um dado método é capaz de certificar a estabilidade. O tempo computacional é medido como o tempo gasto pelo resolvidor acumulado durante a análise de todos os sistemas na base de dados dividido pelo número de sistemas na base.

Na Tabela 3 é apresentado o resultado dos testes de análise de estabilidade robusta para sistemas contínuos e discretos em diversas configurações da técnica proposta. Para cada uma delas são incluídas a porcentagem dos sistemas cuja estabilidade robusta foi certificada e o tempo médio gasto nos testes (contemplando todos os testes, factíveis e infactíveis). Na Figura 5 são apresentadas a efetividade do método proposto e a dos



Tabela 3 – Efetividade e tempo médio demandado pelo resolvidor referente à análise de estabilidade robusta, em termos de número máximo de iterações internas, estrutura de  $X_3(\alpha)$ , e resolvidor empregado.

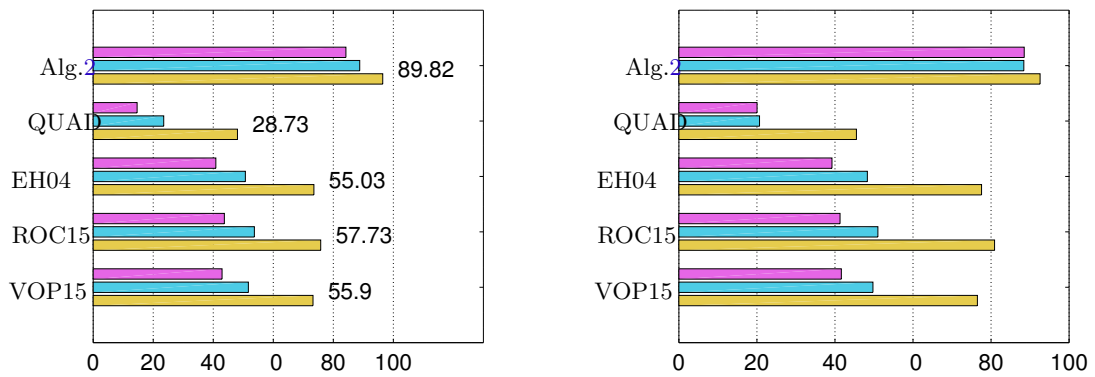
	$X_3(\alpha)$	iterações internas	Mosek 7		Mosek 8		SeDuMi	
tempo contínuo	Arbitrária	10	51.42%	0.215 s	93.54%	0.116 s	61.92%	1.742 s
		20	50.30%	0.242 s	93.48%	0.118 s	61.87%	3.652 s
	Simétrica	10	89.70%	0.176 s	89.31%	0.105 s	89.82%	0.861 s
		20	88.83%	0.187 s	89.08%	0.108 s	89.28%	2.036 s
	Diagonal	10	87.61%	0.160 s	87.20%	0.099 s	87.33%	0.862 s
		20	86.21%	0.192 s	86.44%	0.106 s	86.09%	2.104 s
	Escalar	10	84.97%	0.164 s	85.34%	0.100 s	85.13%	0.880 s
		20	83.77%	0.217 s	84.47%	0.105 s	83.93%	2.252 s
tempo discreto	Arbitrária	10	30.18%	0.261 s	83.78%	0.174 s	25.69%	2.534 s
		20	28.46%	0.254 s	80.68%	0.215 s	18.34%	4.600 s
	Simétrica	10	89.89%	0.167 s	88.86%	0.122 s	90.49%	0.809 s
		20	82.87%	0.286 s	83.96%	0.180 s	85.13%	2.322 s
	Diagonal	10	88.86%	0.165 s	87.71%	0.106 s	89.13%	0.803 s
		20	80.72%	0.298 s	80.99%	0.163 s	82.24%	2.394 s
	Escalar	10	89.02%	0.159 s	87.30%	0.103 s	88.72%	0.783 s
		20	79.06%	0.308 s	78.18%	0.161 s	80.39%	2.372 s

métodos selecionados da literatura. As figuras 5b e 5a devem ser interpretadas de acordo com o auxílio das legendas nas figuras 5d e 5c, respectivamente. Nas Figuras 5a e 5b são apresentadas as efetividades das quatro condições da literatura para tratar estabilização de sistemas contínuos e do Algoritmo 2, na análise de estabilidade robusta dos sistemas classificados por ordem ou por número de vértices. Nas Figuras 5c e 5d são apresentadas as efetividades das condições da literatura para tratar estabilização de sistemas discretos e do Algoritmo 2, classificados por ordem do sistema e número de vértices. Os resultados apresentados na Figura 5 referentes ao Algoritmo 2 correspondem à seguinte configuração:  $X_3(\alpha)$  com estrutura simétrica, resolvendo com no máximo 10 iterações internas usando o resolvidor SeDuMi.

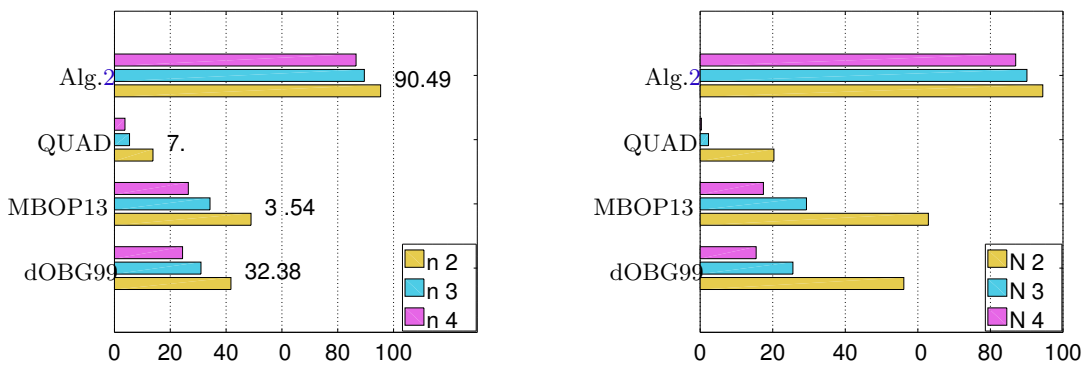
Pelos resultados da Tabela 3 percebe-se que para sistemas discretos o desempenho depende mais do número de iterações e menos da estrutura de  $X_3(\alpha)$  em comparação com o caso para sistemas contínuos. É interessante observar que empregando a versão 8 do resolvidor Mosek, o uso de  $X_3(\alpha)$  com estrutura arbitrária proveu os melhores desempenhos. Nota-se também que, de modo geral, as configurações com maior efetividade tendem a ser mais eficientes. Isso deve-se ao fato de um menor número de iterações ser necessário para certificar a estabilidade de um dado sistema quando se testa com uma condição mais relaxada.

As condições da literatura foram comparadas com o método proposto usando  $X_3(\alpha)$  com estrutura simétrica e resolvidor de código aberto SeDuMi limitando a 10 ite-

rações internas para cada problema SDP. Os resultados apresentados na Figura 5 revelam que o método proposto tem um desempenho superior às condições baseadas em busca por escalares, que apresentam efetividades muito próximas umas das outras. Vale também ressaltar que a configuração escolhida não foi a que proveu os melhores resultados, mas sim aquela que se espera ser mais facilmente reproduzível.



(a) Percentual de sistemas a tempo contínuo com estabilidade certificada para  $n \in \{2, \dots, 5\}$  (b) Percentual de sistemas a tempo contínuo com estabilidade certificada para  $N \in \{2, \dots, 5\}$



(c) Percentual de sistemas a tempo discreto com estabilidade certificada para  $n \in \{2, \dots, 5\}$  (d) Percentual de sistemas a tempo discreto com estabilidade certificada para  $N \in \{2, \dots, 5\}$

Figura 5 – Análise de estabilidade robusta para sistemas classificados por ordem ou número de vértices.

Na Tabela 4 são apresentadas a taxa de efetividade e o tempo computacional das condições escolhidas da literatura. Para essas condições a efetividade é praticamente independente do resolvidor, e os tempos computacionais estão na mesma ordem de grandeza dos tempos computacionais das condições propostas.

#### 4.4 Estabilização robusta por relaxações sucessivas

Em princípio o Algoritmo 2 poderia ser aplicado diretamente para tratar o problema de estabilização robusta, simplesmente substituindo  $A(\alpha)$  pela matriz dinâmica de malha fechada e adicionando o ganho de realimentação às variáveis de decisão

Tabela 4 – Efetividade e tempo computacional das condições de análise de estabilidade robusta escolhidas da literatura para os diferentes resolvedores considerados.

Condição		Resolvidor					
		SeDuMi		Mosek8		Mosek7	
Contínuo	VOP15	55.96%	2.581 s	55.40%	0.270 s	55.96%	0.466 s
	ROC15	57.73%	0.775 s	57.73%	0.062 s	57.73%	0.058 s
	EH01	55.03%	0.844 s	55.03%	0.061 s	55.03%	0.058 s
	QUAD	28.73%	0.065 s	28.73%	0.005 s	28.73%	0.004 s
Discreto	dOBG99	32.38%	0.064 s	32.38%	0.006 s	32.38%	0.007 s
	MBOP13	36.54%	1.231 s	36.54%	1.230 s	36.54%	1.231 s
	QUAD	7.66%	0.056 s	7.66%	0.005 s	7.66%	0.006 s

do problema. No entanto, com pequenos ajustes pode-se melhorar consideravelmente o desempenho do algoritmo. Para tornar esse ajuste mais claro, considere por exemplo a desigualdade (4.7). O valor obtido de  $r$  é certificado por uma mesma matriz de Lyapunov e dois conjuntos de variáveis de folga. Mas como um conjunto de variáveis de folga, a saber  $\bar{Y}_i(\alpha)$ , é fixo e além disso a estrutura de  $P(\alpha)$  e  $X_i(\alpha)$  são restritas a polinômios de grau fixo, o valor resultante de  $r$  pode ser conservador (apenas um limitante superior). Particularmente no cenário de síntese, é possível verificar a estabilidade de malha fechada aplicando uma condição de estabilidade robusta *a posteriori* e, no caso de factibilidade, o algoritmo pode ser terminado, pois  $K$  é um ganho robustamente estabilizante. Claramente, o teste de estabilidade robusta requer a solução de um novo problema LMI, aumentando a complexidade do algoritmo, mas pode aumentar consideravelmente a efetividade do método. O Algoritmo 3 é uma variação do Algoritmo 2 especializada para tratar o problema de estabilização.

O teste na linha 11 do Algoritmo 3 é um problema de análise de estabilidade robusta, sendo muito menos desafiador que o problema de estabilização robusta. O Algoritmo 5 permite detectar precocemente a estabilidade de  $A_{cl}(\alpha)$ , e o custo desse teste é reduzido por meio do Algoritmo 4, que testa uma condição necessária (mas não suficiente) para a estabilidade robusta de  $A_{cl}(\alpha)$  que se baseia nos autovalores de  $A_{cl}(\alpha)$  para  $\alpha$  nos vértices de  $\Lambda_N$ . Note que podem existir casos em que a instabilidade da matriz  $A_{cl}(\alpha)$  é detectada testando os seus autovalores nos vértices de  $\Lambda_N$  e o esforço computacional de resolver um problema SDP é poupado.

No que se segue, é demonstrado como o Algoritmo 3 pode ser aplicado para tratar problemas de estabilização robusta por realimentação de estados ou realimentação de saída, possivelmente com estrutura descentralizada.

**Corolário 3.** *Sejam,  $X_1 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $X_2 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $X_3 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $P : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ , dependendo das variáveis de decisão de forma afim,  $K \in \mathbb{M}(p, q)$ , sendo  $\mathbf{0} \prec P(\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda_N$ , e as entradas do Algoritmo 3 definidas como*

```

1 Função Relaxações Sucessivas(função das variáveis de decisão  $A_{cl}(\alpha)$ ,
   operador afim  $\mathcal{Q}(\alpha)$ , operador afim  $\mathcal{X}(\alpha)$ , constante  $\mathcal{R}(\alpha)$ , constantes
    $(\bar{\mathcal{B}}_1(\alpha), r_0, \bar{\mathcal{Q}}_0(\alpha))$ ,  $it_{max} \in \mathbb{N}$ )
2    $k \leftarrow 0$ ;
3   Enquanto  $k < it_{max}$  faça
4      $k \leftarrow k + 1$ ;
5     minimize  $r_k$  sujeito a  $\mathcal{Q}(\alpha) + r_k \mathcal{R}(\alpha) + He(\mathcal{X}(\alpha) \bar{\mathcal{B}}_k(\alpha)) \prec \mathbf{0}$  ;
6      $\bar{\mathcal{B}}_{k+1}(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}(\alpha)'$  da solução;
7      $\bar{\mathcal{Q}}_k(\alpha) \leftarrow \mathcal{Q}(\alpha)$  da solução;
8      $\bar{A}_{cl}(\alpha) \leftarrow A_{cl}(\alpha)$  da solução;
9     Se  $r_k \leq 0$  então
10      | Retorna  $(\bar{A}_{cl}(\alpha))$  ;
11     Se  $\bar{A}_{cl}(\alpha)$  é certamente robustamente estável então
12      | Retorna  $(\bar{A}_{cl}(\alpha))$ ;
13 Fim

```

**Algoritmo 3:** Solução heurística para problemas de estabilização por meio de condições BMIs da forma (4) do Lema de Finsler.

```

1 Função Tem Vertices Instáveis( $A_{cl}(\alpha)$ )
2   for  $i \in \{1, \dots, N\}$  do
3      $\bar{\alpha}_j \leftarrow \begin{cases} 1, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{se } j \neq i \end{cases}$  ;
4      $A_i \leftarrow A_{cl}(\bar{\alpha})$ ;
5     Se caso discreto então
6       | Se  $\exists \lambda | \det(A_i - \lambda I) = 0, |\lambda| \geq 1$  então
7         | | Retorna Sim;
8     senão
9       | Se  $\exists \lambda | \det(A_i - \lambda I) = 0, \text{real}(\lambda) \geq 0$  então
10        | | Retorna Sim;
11   end
12   Retorna Não;
13 Fim

```

**Algoritmo 4:** Condição de baixo custo computacional necessária (mas não suficiente) para a estabilidade robusta de um sistema com matriz dinâmica  $A_{cl}(\alpha)$ .

```

1 Função Robustamente estável( $A_{cl}(\alpha)$ )
2   | Se  $A_{cl}(\alpha)$  Tem Vértices Instáveis então
3   |   | Retorna Não;
4   | Se Condição de estabilidade robusta garante estabilidade de  $A_{cl}(\alpha)$  então
5   |   | Retorna Sim;
6   | senão
7   |   | Retorna Não;
8 Fim

```

**Algoritmo 5:** Condição suficiente com custo computacional amortizado com o uso de uma condição necessária para estabilidade robusta de  $A_{cl}(\alpha)$ .

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & A_{cl}(\alpha)' \\ P(\alpha) & \mathbf{0} & -I \\ A_{cl}(\alpha) & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathcal{B}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} I \\ I \\ I \end{bmatrix},$$

com  $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)KC(\alpha)$ , no caso de sistemas a tempo contínuo, ou

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & \star & \star \\ \mathbf{0} & P(\alpha) & \star \\ (A(\alpha) + B(\alpha)\tilde{K}C(\alpha)) & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -A(\alpha)' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -A(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathcal{B}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \\ I \end{bmatrix},$$

com  $K = (1 - r)^{-1}\tilde{K}$  para o caso de sistemas a tempo discreto, e as demais entradas do algoritmo e

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix},$$

em ambos os casos. Se o Algoritmo 3 provê uma solução, então a estabilidade robusta do sistema (2.3) em malha fechada é certificada. Portanto,  $K$  é um ganho robustamente estabilizante.

*Demonstração.* Para algum  $r_0$  real positivo no caso de sistemas contínuos, ou com  $r_0 = 1$  no caso de sistemas discretos, a condição (4.10) é satisfeita com  $\bar{\mathcal{B}}_0 = -r_0\bar{\mathcal{B}}_1/2$  na primeira iteração. Se o Algoritmo 3 chegar na linha 10, então a estabilidade robusta da matriz em malha fechada é certificada pela solução do problema resolvido na linha 5. Se o algoritmo chegar na linha 12, a estabilidade robusta do sistema em malha fechada é certificada pela condição de análise de estabilidade robusta presente na linha 11. Caso contrário o algoritmo termina sem retornar uma solução.  $\square$

## 4.5 Experimentos numéricos de estabilização

A avaliação do algoritmo de estabilização robusta proposto também foi realizada em termos de análise estatística. Com esse propósito, para sistemas a tempo

contínuo, a base de dados de sistemas incertos instáveis em malha aberta proposta em (OLIVEIRA *et al.*, 2011) é usada. Para sistemas discretos é utilizada a base fornecida em (MORAIS *et al.*, 2013). Essas bases de dados contêm apenas sistemas incertos que são garantidamente robustamente estabilizáveis por realimentação de estados, mas não podem ser estabilizados usando a estabilização quadrática. Essa característica torna os sistemas “difíceis” de serem estabilizados. Com respeito às dimensões, as bases de dados têm 100 sistemas para cada combinação de  $p = q \in \{1, 2\}$ ,  $n \in \{p + 1, \dots, 5\}$ , e  $N \in \{2, \dots, 5\}$ . A efetividade é avaliada em termos do número de sistemas que um dado método é capaz de estabilizar robustamente (fornecendo um certificado de estabilidade para o sistema em malha fechada). O tempo computacional é medido como o tempo gasto pelo resolvidor durante as tentativas de estabilização de todos os sistemas na base de dados por meio de um dado método dividido pelo número de sistemas na base.

A estabilização quadrática é excluída das comparações pois as bases são constituídas apenas por sistemas que não são quadraticamente estabilizáveis. Outra classe de métodos incorporada nas comparações é aquela que contempla as técnicas conhecidas na literatura como “técnica de dois estágios”, em que no primeiro estágio um ganho de realimentação dependente de parâmetros é projetado, e então usado como entrada para o segundo estágio, que obtém, se possível, um ganho de realimentação robusto. Essa técnica foi proposta originalmente em (PEAUCELLE; ARZELIER, 2001a; ARZELIER *et al.*, 2003) para realimentação de saída e depois aplicada à realimentação robusta de estados em (MOREIRA *et al.*, 2011). A versão mais geral do algoritmo, proposta em (AGULHARI *et al.*, 2012a), foi usada com um ganho dependente dos parâmetros incertos de forma afim no primeiro estágio ((AGULHARI *et al.*, 2012a, Theorem 1) e o espaço de busca para o parâmetro escalar  $\xi$  foi  $\Xi$  (definido em (3.4)). O segundo estágio emprega (AGULHARI *et al.*, 2012a, Theorem 2) adaptado para tratar apenas estabilização. Note que em cada iteração desse método, dois problemas baseados em LMIs precisam ser resolvidos.

### 4.5.1 Estabilização por realimentação de estados

Os resultados apresentados nesta seção referem-se ao Algoritmo 3 aplicado ao problema de realimentação de estados, usando o Lema 13 como condição de estabilidade robusta (aplicada na linha 4 do Algoritmo 5), e permitindo que no máximo 13 problemas SDP sejam resolvidos. Na Tabela 6 são apresentados a taxa de efetividade e o tempo médio gasto pelo resolvidor com o Algoritmo 3 em diferentes configurações para os sistemas com uma entrada, e na Tabela 7 para sistemas com duas entradas. Na Figura 6 são apresentadas as efetividades de diferentes métodos de estabilização robusta (os mesmos utilizados na seção de análise mais o método baseado em dois estágios), classificando os sistemas por ordem  $n$  ou por número de vértices  $N$ , e fornecendo a média entre os resultados obtidos para sistemas de uma e duas entradas. Nas Figuras 6a e 6b são apresentadas as efetividades da estabilização robusta de sistemas contínuos por meio das condições selecionadas

Tabela 5 – Efetividade e tempo computacional das condições de estabilização robusta por realimentação de estados escolhidas da literatura para os diferentes resolvidores considerados (sistemas de uma e duas entradas).

Condição		Resolvidor					
		SeDuMi		Mosek8		Mosek7	
Contínuo	VOP15	65.75%	2.257 s	53.39%	0.385 s	65.82%	0.569 s
	ROC15	65.04%	0.578 s	65.00%	0.044 s	65.04%	0.073 s
	EH01	62.11%	1.104 s	62.04%	0.058 s	62.11%	0.100 s
	AOP12	79.00%	1.087 s	79.00%	1.101 s	79.00%	1.078 s
Discreto	dOBG99	93.52%	0.066 s	93.52%	0.009 s	93.52%	0.008 s
	MBOP13	94.10%	0.431 s	94.10%	0.404 s	94.10%	0.404 s
	AOP12	97.43%	0.582 s	97.43%	0.580 s	97.43%	0.581 s

Tabela 6 – Efetividade e tempo médio demandado pelo resolvidor referente à estabilização robusta de sistemas com uma entrada por realimentação de estados, em termos de número máximo de iterações internas, estrutura de  $X_3(\alpha)$ , e resolvidor empregado.

		$X_3(\alpha)$	iterações internas	Mosek 7		Mosek 8		SeDuMi	
tempo contínuo	Arbitrária	10	28.88%	0.372 s	70.19%	0.712 s	34.50%	4.302 s	
		20	24.31%	0.498 s	67.63%	0.877 s	29.94%	8.526 s	
	Simétrica	10	76.63%	0.435 s	77.62%	0.536 s	76.06%	1.953 s	
		20	74.75%	0.820 s	75.00%	0.636 s	73.94%	4.337 s	
	Diagonal	10	72.56%	0.379 s	72.94%	0.449 s	73.06%	1.885 s	
		20	70.50%	0.708 s	70.81%	0.576 s	69.62%	4.273 s	
	Escalar	10	71.81%	0.372 s	72.50%	0.432 s	72.38%	1.872 s	
		20	70.69%	0.682 s	70.87%	0.546 s	68.56%	4.258 s	
tempo discreto	Arbitrária	10	95.25%	0.067 s	99.50%	0.067 s	95.81%	0.591 s	
		20	94.00%	0.075 s	99.44%	0.070 s	94.87%	1.210 s	
	Simétrica	10	99.75%	0.060 s	99.69%	0.057 s	98.69%	0.447 s	
		20	99.75%	0.067 s	99.75%	0.061 s	98.81%	0.886 s	
	Diagonal	10	99.50%	0.046 s	99.62%	0.051 s	98.62%	0.434 s	
		20	99.44%	0.056 s	99.44%	0.055 s	98.56%	0.879 s	
	Escalar	10	99.38%	0.046 s	99.25%	0.051 s	98.31%	0.436 s	
		20	99.25%	0.056 s	99.25%	0.054 s	98.44%	0.895 s	

da literatura e do Algoritmo 3. Nas Figuras 6c e 6d são apresentadas as efetividades da estabilização robusta de sistemas discretos por meio das condições selecionadas da literatura e do Algoritmo 3. Na tabela 5 encontram-se os resultados das condições da literatura com diferentes resolvidores.

De maneira similar ao observado no problema de análise de estabilidade robusta, no problema de estabilização robusta o uso de  $X_3(\alpha)$  com estrutura arbitrária forneceu resultados piores que as outras estruturas, com exceção do caso em que é utilizado o resolver Mosek 8 (resultados levemente inferiores aos da estrutura simétrica).

Tabela 7 – Efetividade e tempo médio demandado pelo resolvedor referente à estabilização robusta de sistemas com duas entradas por realimentação de estados, em termos de número máximo de iterações internas, estrutura de  $X_3(\alpha)$ , e resolvedor empregado.

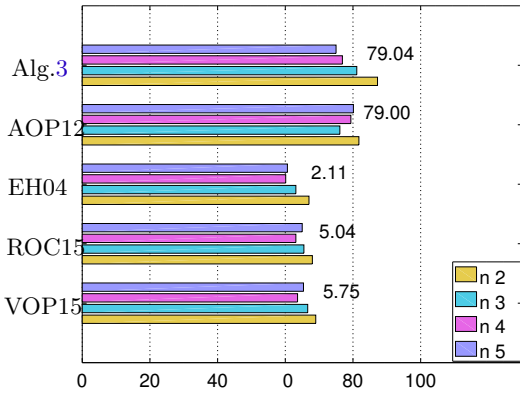
	$X_3(\alpha)$	iterações internas	Mosek 7		Mosek 8		SeDuMi	
tempo contínuo	Arbitrária	10	15.50%	0.433 s	78.58%	0.970 s	19.50%	5.696 s
		20	8.08%	0.596 s	74.17%	1.432 s	8.25%	13.059 s
	Simétrica	10	86.92%	0.498 s	85.25%	0.660 s	83.00%	2.082 s
		20	80.92%	1.122 s	80.83%	0.895 s	73.17%	5.199 s
	Diagonal	10	83.50%	0.415 s	80.83%	0.546 s	79.92%	1.991 s
		20	76.67%	0.933 s	77.42%	0.796 s	73.08%	4.860 s
	Escalar	10	83.17%	0.410 s	82.42%	0.522 s	79.67%	1.991 s
		20	75.67%	0.869 s	77.58%	0.773 s	71.50%	4.740 s
tempo discreto	Arbitrária	10	96.33%	0.094 s	99.67%	0.086 s	95.50%	0.545 s
		20	95.42%	0.121 s	99.58%	0.095 s	93.83%	1.243 s
	Simétrica	10	99.58%	0.076 s	99.58%	0.076 s	98.67%	0.430 s
		20	99.58%	0.093 s	99.50%	0.082 s	98.67%	0.879 s
	Diagonal	10	99.33%	0.058 s	99.25%	0.066 s	98.42%	0.419 s
		20	99.42%	0.073 s	99.25%	0.072 s	98.50%	0.864 s
	Escalar	10	99.33%	0.057 s	99.25%	0.063 s	98.33%	0.417 s
		20	99.17%	0.076 s	99.17%	0.069 s	98.33%	0.872 s

Dentre as configurações testadas, o método proposto apresenta um desempenho melhor, e menos dependente do resolvedor ao usar  $X_3(\alpha)$  simétrica e limitando a 10 o número de iterações realizadas pelo resolvedor. Dos métodos da literatura o que apresenta os melhores resultados é o método de dois estágios (AOP12).

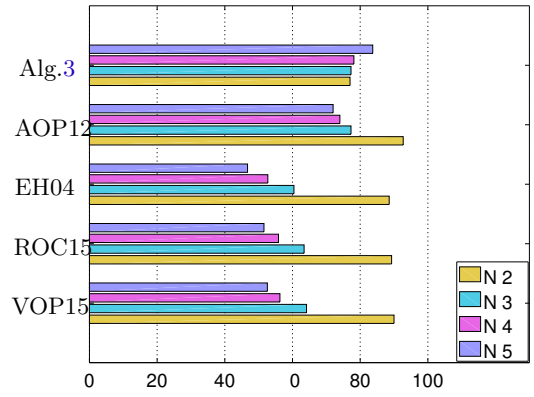
A efetividade do método proposto foi similar à efetividade do método de dois estágios (AOP12) para o caso contínuo. Com o resolvedor SeDuMi o tempo computacional do método proposto é maior que o tempo computacional do método de dois estágios, entretanto, empregando o resolvedor Mosek o tempo computacional do método proposto é aproximadamente a metade do tempo computacional do método de dois estágios.

Para sistemas discretos tanto o método proposto como o método de dois estágios foram capazes de estabilizar a grande maioria dos sistemas e a superioridade do método proposto é mais evidente ao considerar a porcentagem de sistemas não estabilizados, que é 2.57% para o método AOP12 (que representa o estado da arte anterior), e apenas 1.32% para o método proposto. Ou seja, a condição proposta falha em menos de um quinto do número de vezes que falharia qualquer das condições da literatura com que foi comparada. Os tempos computacionais do método proposto foi menor que o tempo computacional do método de dois estágios independentemente do resolvedor, e o tempo demandado pelo resolvedor Mosek ao aplicar o método proposto é cerca de 15% do tempo demandado ao aplicar o método AOP12.

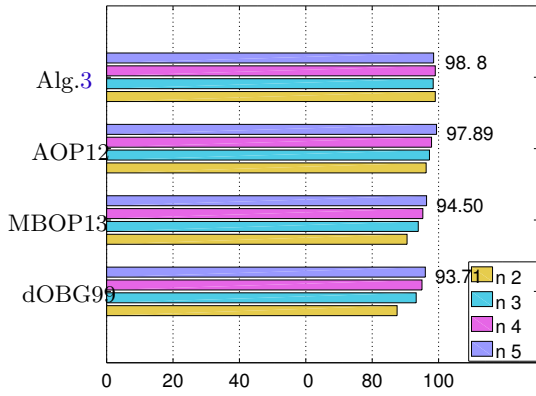




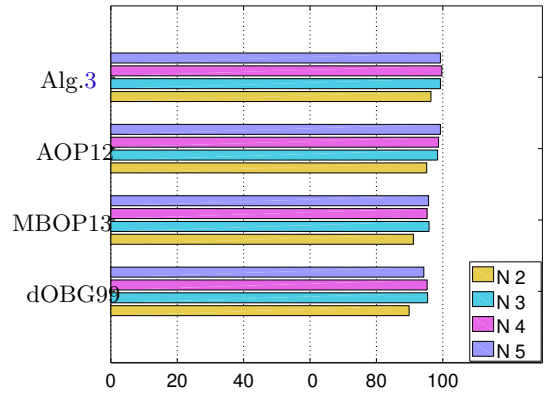
(a) Percentual de sistemas a tempo contínuo estabilizados para  $n \in \{2, \dots, 5\}$



(b) Percentual de sistemas a tempo contínuo estabilizados para  $N \in \{2, \dots, 5\}$



(c) Percentual de sistemas a tempo discreto estabilizados para  $n \in \{2, \dots, 5\}$



(d) Percentual de sistemas a tempo discreto estabilizados para  $N \in \{2, \dots, 5\}$

Figura 6 – Estabilização robusta por realimentação de estados para sistemas classificados por ordem ou por número de vértices.

### 4.5.2 Estabilização por realimentação de saída

Para testar o algoritmo em problemas de realimentação de saída, as mesmas bases de dados usadas para testar realimentação de estados foram utilizadas, mas com uma pequena adaptação. As bases de dados trazem um ganho de realimentação de estados robustamente estabilizante ( $K_{stab}$  tal que  $A(\alpha) + B(\alpha)K_{stab}$  é robustamente estável), e este é utilizado como matriz de saída ( $C(\alpha) = K_{stab}$ ). Como consequência o ganho de realimentação de saída  $K = I$  é um ganho estabilizante, pois a matriz em malha fechada com realimentação de saída se torna  $A(\alpha) + B(\alpha)KC(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K_{stab}$ . Com exceção da condição AOP12, as outras condições da literatura foram adaptadas conforme proposto em (GEROMEL *et al.*, 1996) para tratar a realimentação de saída, dado que a matriz de saída é precisamente conhecida (independente dos parâmetros incertos).

Na Tabela 9 são apresentadas a taxa de efetividade e o tempo médio gasto pelo resolvidor com o Algoritmo 3 em diferentes configurações para os sistemas com uma

Tabela 8 – Efetividade e tempo computacional das condições de estabilização robusta por realimentação de saída escolhidas da literatura para os diferentes resolvedores considerados (sistemas de uma e duas entradas).

Condição		Resolvidor					
		SeDuMi		Mosek8		Mosek7	
Contínuo	VOP15	6.32%	7.054 s	2.93%	1.285 s	6.46%	1.587 s
	ROC15	6.07%	1.561 s	6.04%	0.140 s	6.07%	0.128 s
	EH01	4.96%	2.516 s	4.96%	2.482 s	4.96%	2.486 s
	AOP12	48.89%	2.401 s	48.89%	2.353 s	48.89%	2.360 s
Discreto	dOBG99	57.18%	0.107 s	57.11%	0.009 s	57.11%	0.009 s
	MBOP13	59.64%	1.299 s	59.64%	1.282 s	59.64%	1.281 s
	AOP12	94.25%	0.897 s	94.25%	0.895 s	94.25%	0.900 s

entrada (e uma saída). Na Figura 7 são apresentadas as efetividades de diferentes métodos de estabilização robusta. Nas Figuras 7a e 7b são apresentadas as efetividades da estabilização robusta de sistemas contínuos por meio das condições selecionadas da literatura e do Algoritmo 3. Nas Figuras 7c e 7d são apresentadas as efetividades da estabilização robusta de sistemas discretos por meio das condições selecionadas da literatura e do Algoritmo 3.

Os resultados mostram que além da generalidade da formulação algébrica, as condições LMIs combinadas com o Algoritmo 3 resultam em uma ferramenta versátil e eficaz em diferentes cenários. No caso de sistemas contínuos a efetividade da condição proposta cai 14,25% em comparação com o problema de realimentação de estados, enquanto a condição AOP12, que representa o estado da arte anterior, teve sua efetividade reduzida em 34,90%. As condições baseadas apenas em busca por escalares tiveram resultados muito inferiores, mostrando-se inadequadas para tratar esse problema. Para o caso discreto as penalidades foram pouco significativas em todas as condições.

A Tabela 8 mostra a efetividade e os tempos computacionais das condições da literatura para estabilização por realimentação de saída. No problema de realimentação de saída para sistemas contínuos as diferenças entre os métodos se tornam mais evidentes. As condições da literatura que empregam busca por escalar apresentam efetividades inferiores a 10% e o método de dois estágios apresenta uma efetividade próxima a 50%, com um aumento de praticamente 100% no tempo computacional em relação ao problema de realimentação de estados. A condição proposta apresentou, para o caso de  $X_3(\alpha)$  simétrica e com 10 iterações do resolvidor SeDuMi, uma efetividade de 58.44% e 71.33% para sistemas com uma ou duas entradas, respectivamente. O tempo computacional da condição proposta também manteve-se similar ao do caso de realimentação de estados. Empregando o resolvidor Mosek, o tempo computacional torna-se muito menor em relação ao método de dois estágios, e mantendo uma efetividade maior.

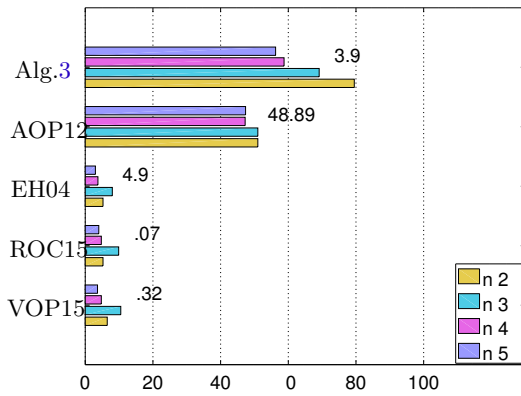
Para o caso discreto os métodos da literatura que empregam busca por escalar

Tabela 9 – Efetividade e tempo médio demandado pelo resolvidor referente à estabilização robusta de sistemas com uma entrada e uma saída por realimentação de saída, em termos de número máximo de iterações internas, estrutura de  $X_3(\alpha)$ , e resolvidor empregado.

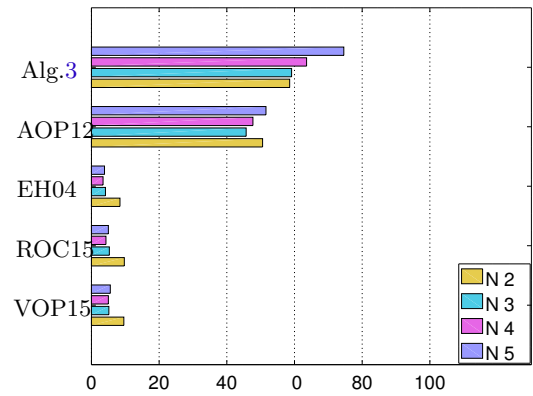
	$X_3(\alpha)$	iterações internas	Mosek 7		Mosek 8		SeDuMi	
tempo contínuo	Arbitrária	10	31.50%	0.340 s	51.87%	0.774 s	39.25%	4.011 s
		20	29.19%	0.465 s	51.13%	0.845 s	37.38%	6.921 s
	Simétrica	10	56.00%	0.487 s	56.69%	0.565 s	58.44%	2.294 s
		20	55.12%	0.806 s	56.31%	0.610 s	57.00%	4.571 s
	Diagonal	10	54.37%	0.462 s	56.12%	0.495 s	56.94%	2.190 s
		20	53.25%	0.820 s	55.56%	0.580 s	55.00%	4.408 s
Escalar	10	54.31%	0.425 s	55.31%	0.486 s	56.88%	2.179 s	
	20	54.62%	0.790 s	55.94%	0.558 s	54.63%	4.414 s	
tempo discreto	Arbitrária	10	91.56%	0.092 s	99.25%	0.085 s	91.81%	0.788 s
		20	90.44%	0.114 s	99.44%	0.084 s	91.25%	1.540 s
	Simétrica	10	99.56%	0.064 s	99.56%	0.068 s	98.94%	0.523 s
		20	99.44%	0.080 s	99.56%	0.073 s	98.94%	1.016 s
	Diagonal	10	99.38%	0.058 s	99.50%	0.063 s	98.56%	0.515 s
		20	99.31%	0.074 s	99.50%	0.066 s	98.50%	1.019 s
Escalar	10	99.38%	0.055 s	99.38%	0.062 s	98.56%	0.510 s	
	20	99.13%	0.081 s	99.31%	0.066 s	98.38%	1.031 s	

Tabela 10 – Efetividade e tempo médio demandado pelo resolvidor referente à estabilização robusta de sistemas com duas entradas e duas saídas por realimentação de saída, em termos de número máximo de iterações internas, estrutura de  $X_3(\alpha)$ , e resolvidor empregado.

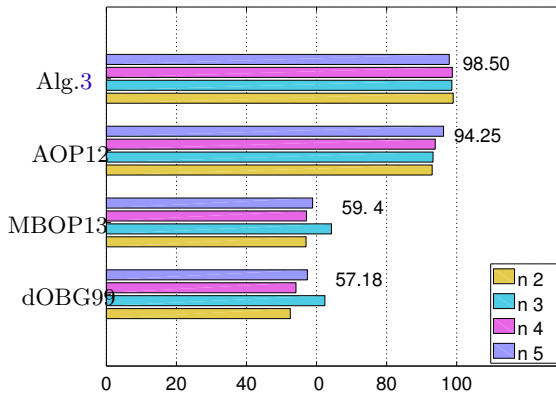
	$X_3(\alpha)$	iterações internas	Mosek 7		Mosek 8		SeDuMi	
tempo contínuo	Arbitrária	10	10.17%	0.592 s	58.08%	1.234 s	19.17%	5.660 s
		20	6.08%	0.823 s	53.50%	1.581 s	10.92%	11.652 s
	Simétrica	10	71.50%	0.626 s	71.25%	0.803 s	71.33%	2.584 s
		20	70.08%	1.186 s	69.25%	0.993 s	65.92%	5.555 s
	Diagonal	10	68.92%	0.608 s	69.33%	0.678 s	71.00%	2.407 s
		20	65.83%	1.097 s	66.42%	0.920 s	63.50%	5.275 s
Escalar	10	67.17%	0.502 s	67.00%	0.671 s	67.67%	2.409 s	
	20	64.58%	1.127 s	65.58%	0.858 s	62.58%	5.157 s	
tempo discreto	Arbitrária	10	91.58%	0.137 s	98.58%	0.134 s	88.50%	0.921 s
		20	88.92%	0.189 s	98.67%	0.142 s	84.83%	2.090 s
	Simétrica	10	98.75%	0.090 s	98.67%	0.103 s	97.92%	0.572 s
		20	98.50%	0.127 s	98.58%	0.119 s	97.92%	1.158 s
	Diagonal	10	98.25%	0.077 s	98.17%	0.091 s	97.67%	0.550 s
		20	97.92%	0.124 s	98.00%	0.105 s	97.42%	1.142 s
Escalar	10	98.42%	0.078 s	98.33%	0.089 s	97.58%	0.547 s	
	20	98.08%	0.124 s	98.08%	0.100 s	96.83%	1.162 s	



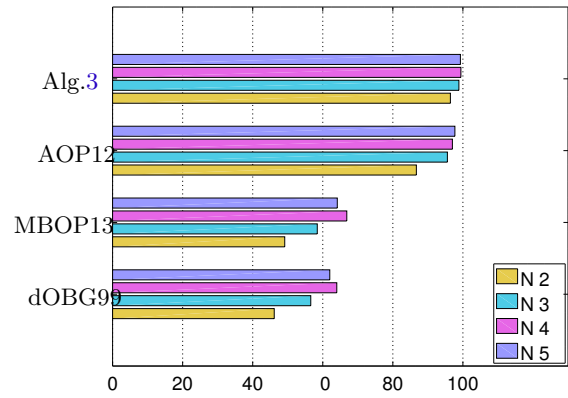
(a) Percentual de sistemas a tempo contínuo estabilizados para  $n \in \{2, \dots, 5\}$



(b) Percentual de sistemas a tempo contínuo estabilizados para  $N \in \{2, \dots, 5\}$



(c) Percentual de sistemas a tempo discreto estabilizados para  $n \in \{2, \dots, 5\}$



(d) Percentual de sistemas a tempo discreto estabilizados para  $N \in \{2, \dots, 5\}$

Figura 7 – Estabilização robusta por realimentação de saída para sistemas classificados por ordem ou por número de vértices.

apresentam efetividade entre 57.11% e 59.64%, ao passo que o método de dois estágios apresenta uma efetividade de 94.25%, e o método proposto apresenta uma efetividade de 98.33% usando o resolvidor SeDuMi. Novamente a superioridade do método proposto torna-se mais evidente ao notar que ele falha em 1.77% dos casos enquanto a melhor condição disponível na literatura falha em 5.75% dos casos, com um tempo computacional menor. Empregar o resolvidor Mosek não afeta significativamente as características do método AOP12, enquanto melhora tanto a efetividade como a eficiência do método proposto.

### 4.5.3 Estabilização por realimentação de estados com estrutura descentralizada

Para testar a estabilização por controle descentralizado, novas adaptações foram realizadas nas bases de dados utilizadas anteriormente de modo a garantir que todos os sistemas testados admitam um ganho descentralizado estabilizante. Dada uma máscara de ganho descentralizado  $M_{dc}$ ,  $K_{dc}$  é construído com uma restrição de estrutura de modo que  $K_{dc} = K_{dc} \circ M_{dc}$ , ou seja, os elementos de  $K_{dc}$  devem ser 0 sempre que  $M_{dc} \neq 1$ . A matriz de malha aberta é modificada de modo que possa ser estabilizada por um ganho descentralizado. Dado que os sistemas nas bases podem ser estabilizados com um ganho conhecido  $K_{stab}$ , a matriz de malha aberta é obtida como  $A_{dc}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)(K_{stab} - K_{stab} \circ M_{dc})$ , de modo que o ganho descentralizado  $K_{dc} = K_{stab} \circ M_{dc}$  é um ganho robustamente estabilizante pois  $A_{dc}(\alpha) + B(\alpha)(K_{stab} \circ M_{dc}) = A(\alpha) + B(\alpha)(K_{stab} - K_{stab} \circ M_{dc}) + B(\alpha)(K_{stab} \circ M_{dc}) = A(\alpha) + B(\alpha)K_{stab}$ .

Na Tabela 11 são apresentadas as máscaras de ganho descentralizado testadas para cada combinação de  $n$  e  $p$ . Cada máscara é aplicada a 400 sistemas (com  $N \in \{2, 3, 4, 5\}$ ), portanto, 9200 testes são feitos com cada condição de estabilização descentralizada. Na Figura 8 são apresentadas as efetividades de diferentes métodos de estabilização robusta por realimentação descentralizada. Nas Figuras 8a e 8b são apresentadas as efetividades das condições selecionadas da literatura e do Algoritmo 3 aplicados ao problema de estabilização robusta de sistemas contínuos. Nas Figuras 8c e 8d são apresentadas as efetividades das condições selecionadas da literatura e do Algoritmo 3 aplicados ao problema de estabilização robusta de sistemas discretos.

Os resultados para a estabilização por realimentação de estados descentralizada mostram que as condições baseadas apenas em busca por escalar também são inadequadas para tratar esse problema no caso de sistemas contínuos. Todas as condições da literatura mostraram-se inadequadas para tratar o caso dos sistemas contínuos de ordem  $n = 2$ . No caso discreto a penalidade foi muito menor. O fato de a descentralização introduzir um conservadorismo menor para os sistemas de maior ordem, e de haver um maior número de máscaras a serem testadas para os casos de maior ordem, fez com que a efetividade média geral das condições da literatura fossem maiores no tratamento da descentralização. A condição proposta não teve a mesma variação de desempenho em função da ordem do sistema, e teve uma efetividade média menor no caso de estabilização por realimentação de estados com estrutura descentralizada que no caso de realimentação de estados, mas ainda assim apresentou melhor efetividade que todas as condições da literatura.

Tabela 11 – Máscaras de ganhos descentralizados testadas.

<b>p</b>	<b>n</b>	$M_{dc}$
1	2	$[0 \ 1], [1 \ 0]$
	3	$[0 \ 1 \ 1], [1 \ 0 \ 1], [1 \ 1 \ 0]$
	4	$[0 \ 1 \ 1 \ 1], [1 \ 0 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 0 \ 1], [1 \ 1 \ 1 \ 0]$
	5	$[0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$
2	3	$[1 \ 0 \ 1], [1 \ 1 \ 0], [0 \ 1 \ 1], [1 \ 0 \ 1]$
	4	$[1 \ 0 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 0 \ 1], [1 \ 1 \ 1 \ 0], [0 \ 1 \ 1 \ 1], [1 \ 0 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 0 \ 1]$
	5	$[1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1], [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0], [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$

## 4.6 Relaxação adicional por meio de variável escalar

Os algoritmos propostos têm como única fonte de conservadorismo a imposição de valores fixos nas variáveis  $\bar{Y}_i(\alpha)$  em cada iteração. Na sequência é proposta uma estratégia que pode aliviar um pouco essa limitação. A técnica consiste em introduzir uma variável escalar multiplicando cada variável  $\bar{Y}_i(\alpha)$ , e depois linearizar as desigualdades resultantes utilizando transformações de congruência e mudanças de variáveis.

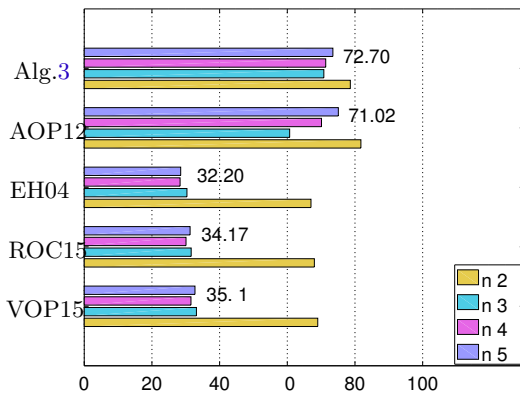
### 4.6.1 Caso contínuo

Introduzindo as variáveis  $y_i(\alpha)$  multiplicando as matrizes  $\bar{Y}_i(\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, 3$  na desigualdade (4.7), tem-se a seguinte condição

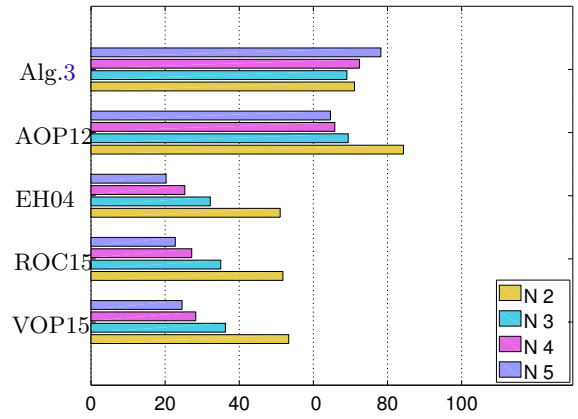
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & A(\alpha)' - rI \\ P(\alpha) & \mathbf{0} & -I \\ A(\alpha) - rI & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(\alpha)\bar{Y}_1(\alpha)' \\ y_2(\alpha)\bar{Y}_2(\alpha)' \\ y_3(\alpha)\bar{Y}_3(\alpha)' \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0} \quad (4.16)$$

que é uma BMI por conta dos produtos entre  $X_i(\alpha)$  e as variáveis escalares. Considere agora uma transformação de congruência utilizando uma matriz na forma

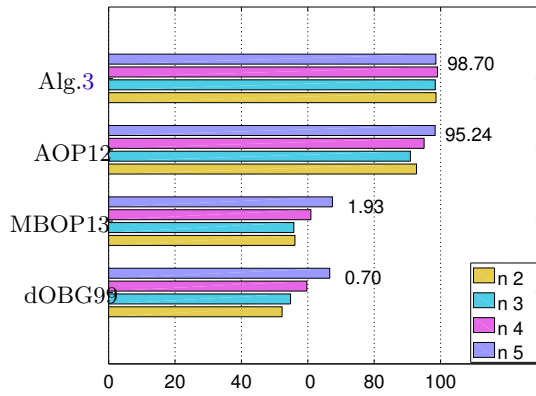
$$\begin{bmatrix} (1/y_1(\alpha))I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (1/y_2(\alpha))I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (1/y_3(\alpha))I \end{bmatrix}$$



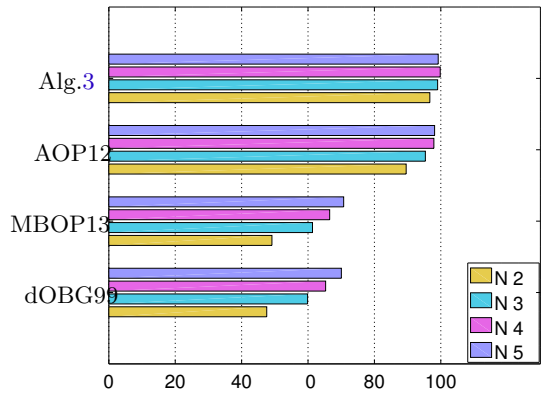
(a) Percentual de sistemas a tempo contínuo estabilizados para  $n \in \{2, \dots, 5\}$



(b) Percentual de sistemas a tempo contínuo estabilizados para  $N \in \{2, \dots, 5\}$



(c) Percentual de sistemas a tempo discreto estabilizados para  $n \in \{2, \dots, 5\}$



(d) Percentual de sistemas a tempo discreto estabilizados para  $N \in \{2, \dots, 5\}$

Figura 8 – Estabilização robusta por realimentação de estados com estrutura descentralizada classificados por ordem ou por número de vértices.

que fornece

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{0} & P(\alpha)/(y_1(\alpha)y_2(\alpha)) & (A(\alpha)' - rI)/(y_1(\alpha)y_3(\alpha)) \\
 * & \mathbf{0} & -I/(y_2(\alpha)y_3(\alpha)) \\
 * & * & \mathbf{0}
 \end{bmatrix} +
 \begin{bmatrix}
 X_1(\alpha)/y_1(\alpha) & \bar{Y}_1(\alpha)' \\
 X_2(\alpha)/y_2(\alpha) & \bar{Y}_2(\alpha)' \\
 X_3(\alpha)/y_3(\alpha) & \bar{Y}_3(\alpha)'
 \end{bmatrix}' < \mathbf{0} \tag{4.17}$$

Restringindo  $y_1(\alpha)y_3(\alpha) > 0, \forall \alpha \in \Lambda_N$ , pode-se multiplicar (4.17) por  $y_1(\alpha)y_3(\alpha)$  mantendo a expressão no mesmo cone (pois cones são fechados sob multi-

plicação por escalar positivo), obtendo-se

$$He \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha)y_3(\alpha)/y_2(\alpha) & (A(\alpha)' - rI) \\ \star & \mathbf{0} & -I y_1(\alpha)/y_2(\alpha) \\ \star & \star & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} X_1(\alpha) & y_3(\alpha) \\ X_2(\alpha) & y_1(\alpha)y_2(\alpha)/y_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) & y_1(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1(\alpha)' \\ \bar{Y}_2(\alpha)' \\ \bar{Y}_3(\alpha)' \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0} \quad (4.18)$$

Por meio das mudanças de variáveis

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_1(\alpha) \\ \tilde{X}_2(\alpha) \\ \tilde{X}_3(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(\alpha)y_3(\alpha) \\ X_2(\alpha) y_1(\alpha)y_2(\alpha)/y_2(\alpha) \\ X_3(\alpha)y_3(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\tilde{P}(\alpha) = P(\alpha)y_3(\alpha)/y_2(\alpha) \quad (4.20)$$

$$\gamma(\alpha) = y_1(\alpha)/y_2(\alpha) \quad (4.21)$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{P}(\alpha) & A(\alpha)' - rI \\ \tilde{P}(\alpha) & \mathbf{0} & -\gamma(\alpha)I \\ A(\alpha) - rI & -\gamma(\alpha)I & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(\alpha) \\ \tilde{X}_2(\alpha) \\ \tilde{X}_3(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1(\alpha)' \\ \bar{Y}_2(\alpha)' \\ \bar{Y}_3(\alpha)' \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Note que  $P(\alpha)$  não é mais variável do problema, e para garantir que a condição  $P(\alpha) \succ \mathbf{0}$  seja satisfeita, é suficiente impor  $\tilde{P}(\alpha) \succ \mathbf{0}$  e  $y_3(\alpha)/y_2(\alpha) > 0$ . Para garantir que  $y_3(\alpha)/y_2(\alpha) > 0$ , uma nova variável  $\gamma(\alpha) = y_1(\alpha)/y_2(\alpha)$  é introduzida, de modo que

$$y_3(\alpha)/y_2(\alpha) = \underbrace{y_1(\alpha)/y_2(\alpha)}_{\gamma(\alpha)} y_3(\alpha)/y_1(\alpha) = \gamma(\alpha)y_3(\alpha)y_1(\alpha)/y_1(\alpha)^2 \quad (4.23)$$

lembrando que por hipóteses assumidas anteriormente  $y_3(\alpha)y_1(\alpha) > 0$  e  $y_1(\alpha)^2 \neq 0$ , tem-se que  $\gamma(\alpha) > 0 \iff y_3(\alpha)/y_2(\alpha) > 0$ . O resultado obtido é formalizado no Lema 25.

**Lema 25.** *Sejam  $\bar{Y}_1 : \Lambda_N \rightarrow \mathbf{M}(n, n)$ ,  $\bar{Y}_2 : \Lambda_N \rightarrow \mathbf{M}(n, n)$ ,  $\bar{Y}_3 : \Lambda_N \rightarrow \mathbf{M}(n, n)$ , matrizes dependentes de parâmetros dadas; Se existirem  $\tilde{X}_1 : \Lambda_N \rightarrow \mathbf{M}(n, n)$ ,  $\tilde{X}_2 : \Lambda_N \rightarrow \mathbf{M}(n, n)$ ,  $\tilde{X}_3 : \Lambda_N \rightarrow \mathbf{M}(n, n)$ ,  $\tilde{P} : \Lambda_N \rightarrow \mathbf{S}(n)$ ,  $\gamma : \Lambda_N \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $r \in \mathbf{R}$ , tais que  $\tilde{P}(\alpha) \succ \mathbf{0} \forall \alpha \in \Lambda_N$ ,  $\gamma(\alpha) > 0 \forall \alpha \in \Lambda_N$ ,  $r < 0$  e adicionalmente*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{P}(\alpha) & A(\alpha)' - rI \\ \tilde{P}(\alpha) & \mathbf{0} & -\gamma(\alpha)I \\ A(\alpha) - rI & -\gamma(\alpha)I & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(\alpha) \\ \tilde{X}_2(\alpha) \\ \tilde{X}_3(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1(\alpha)' \\ \bar{Y}_2(\alpha)' \\ \bar{Y}_3(\alpha)' \end{bmatrix} \right) \prec \mathbf{0}, \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (4.24)$$

então o sistema a tempo contínuo (2.3) é robustamente estável.



*Demonstração.* Se a condição (4.24) é satisfeita, então  $X_3(\alpha)$  é invertível para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ , como discutido na prova do Teorema 2. Aplicando uma transformação de congruência com  $\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & X_1(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \\ \mathbf{0} & I & X_2(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}$  à condição (4.24), tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{P}(\alpha) \\ \tilde{P}(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} A(\alpha)' - rI \\ -\gamma(\alpha)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \\ X_2(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}' \right) \prec \mathbf{0}$$

Finalmente, aplicando outra transformação de congruência com

$$\begin{bmatrix} \gamma(\alpha)I & A(\alpha)' - rI \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

tem-se a condição

$$(A(\alpha)' - rI)\gamma(\alpha)\tilde{P}(\alpha) + \gamma(\alpha)\tilde{P}(\alpha)(A(\alpha)' - rI)' \prec \mathbf{0} \quad (4.26)$$

que, por sua vez, com  $r < 0$  equivale a

$$A(\alpha)'\tilde{P}(\alpha) + \tilde{P}(\alpha)A(\alpha) \prec 2r\tilde{P}(\alpha) \prec \mathbf{0} \quad (4.27)$$

que garante a estabilidade robusta do sistema (2.3).  $\square$

Note que, a partir da prova do Lema 25, é possível extrair uma interpretação interessante sobre a introdução das variáveis escalares. De fato, em última instância, introduzir os escalares consiste em testar a estabilidade da matriz “escalonada”  $\gamma(\alpha)(A(\alpha) - rI)$ , que é robustamente estável se e somente  $(A(\alpha) - rI)$  é estável para  $\gamma(\alpha) > 0$ . Em termos técnicos, essa “escala” introduz uma variável de otimização que aparece linearmente nas condições de síntese.

## 4.6.2 Caso Discreto

Desenvolvimento similar ao do caso de sistemas a tempo contínuo resulta em uma condição de estabilidade para sistemas discretos formalizada no Lema 26.

**Lema 26.** *Sejam  $\bar{Y}_1 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $\bar{Y}_2 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $\bar{Y}_3 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ , matrizes dependentes de parâmetros dadas; Se existirem  $\tilde{X}_1 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $\tilde{X}_2 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $\tilde{X}_3 : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ ,  $\tilde{P} : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{S}(n)$ ,  $\gamma : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , tais que  $\tilde{P}(\alpha) \succ \mathbf{0} \forall \alpha \in \Lambda_N$ ,  $|\gamma(\alpha)| \leq 1 \forall \alpha \in \Lambda_N$ ,  $r < 0$  e adicionalmente*

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P}(\alpha) & \mathbf{0} & (1-r)A(\alpha)' \\ \mathbf{0} & \tilde{P}(\alpha) & -\gamma(\alpha)I \\ (1-r)A(\alpha) & -\gamma(\alpha)I & \mathbf{0} \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(\alpha) \\ \tilde{X}_2(\alpha) \\ \tilde{X}_3(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1(\alpha)' \\ \bar{Y}_2(\alpha)' \\ \bar{Y}_3(\alpha)' \end{bmatrix}' \right) \prec \mathbf{0}, \forall \alpha \in \Lambda_N \quad (4.28)$$

então o sistema a tempo discreto (2.3) é robustamente estável.

*Demonstração.* Se a condição (4.28) é satisfeita, então  $X_3(\alpha)$  é invertível para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ , como discutido na prova do Teorema 2. Aplicando uma transformação de congruência com  $\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} & X_1(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \\ \mathbf{0} & I & X_2(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}$  à condição (4.28), tem-se

$$\begin{bmatrix} -\tilde{P}(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{P}(\alpha) \end{bmatrix} + He \left( \begin{bmatrix} (1-r)A(\alpha)' \\ -\gamma(\alpha)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \\ X_2(\alpha)X_3(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}' \right) \prec \mathbf{0}$$

□

Finalmente, aplicando outra transformação de congruência com

$$\begin{bmatrix} \gamma(\alpha)I & (1-r)A(\alpha)' \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

tem-se a condição

$$-\gamma(\alpha)^2 P(\alpha) + (1-r)^2 A(\alpha)' \tilde{P}(\alpha) A(\alpha) \prec \mathbf{0} \quad (4.30)$$

equivalente a

$$P(\alpha) - \frac{(1-r)^2}{\gamma(\alpha)^2} A(\alpha)' \tilde{P}(\alpha) A(\alpha) \succ \mathbf{0} \quad (4.31)$$

Por hipóteses  $r < 0$  e  $|\gamma(\alpha)| \leq 1, \forall \alpha \in \Lambda_N$ , logo  $(1-r)^2/\gamma(\alpha)^2 - 1 > 0 \forall \alpha \in \Lambda_N$ , e a seguinte desigualdade é sempre satisfeita

$$\left( \frac{(1-r)^2}{\gamma(\alpha)^2} - 1 \right) A(\alpha)' \tilde{P}(\alpha) A(\alpha) \succeq \mathbf{0}. \quad (4.32)$$

Somando as desigualdades (4.31) e (4.32), obtém-se

$$P(\alpha) - A(\alpha)' \tilde{P}(\alpha) A(\alpha) \succ \left( \frac{(1-r)^2}{\gamma(\alpha)^2} - 1 \right) A(\alpha)' \tilde{P}(\alpha) A(\alpha) \succeq \mathbf{0}, \quad (4.33)$$

que é uma condição suficiente para garantir a estabilidade robusta do sistema discreto (2.3).

Além da introdução da variável escalar  $\gamma(\alpha)$ , note que outra possível fonte de relaxação é a substituição do Lema 13 pelo Lema 24 na análise de estabilidade robusta realizada na linha 4 do Algoritmo 5. De fato, a presença de variáveis de folga do Lema 24 possibilita uma avaliação menos conservadora quando a mesma estrutura é imposta para as variáveis de otimização (OLIVEIRA; PERES, 2006). O preço a ser pago é um maior esforço computacional para cada teste realizado. Por outro lado, é possível que o Algoritmo 3 termine com um número menor de iterações. Na próxima seção é feita uma comparação do algoritmo proposto em função da presença da variável  $\gamma(\alpha)$  e do uso do Lema 24.

## 4.7 Experimentos numéricos com relaxações adicionais

As Tabelas 12 e 13 (casos contínuo e discreto, respectivamente) mostram os resultados obtidos entre as diferentes formulações do algoritmo proposto. O uso de  $\gamma(\alpha)$

Tabela 12 – Comparação entre as diferentes formulações da condição proposta para estabilização robusta de sistemas contínuos.

relaxação	análise	realimentação de estados		realimentação de saída		realimentação descentralizada	
Corolário 3	Lema 13	79.04 %	2.008 s	63.96 %	2.419 s	72.71 %	2.273 s
Corolário 3	Lema 24	81.36 %	2.136 s	67.11 %	2.651 s	75.08 %	2.427 s
Lema 25	Lema 13	90.82 %	1.200 s	81.04 %	1.713 s	87.58 %	1.379 s
Lema 25	Lema 24	91.79 %	1.297 s	83.39 %	1.914 s	89.09 %	1.495 s

Tabela 13 – Comparação entre as diferentes formulações da condição proposta para estabilização robusta de sistemas discretos.

relaxação	análise	realimentação de estados		realimentação de saída		realimentação descentralizada	
Corolário 3	Lema 13	98.68 %	0.440 s	98.50 %	0.544 s	98.70 %	0.489 s
Corolário 3	Lema 24	99.00 %	0.482 s	99.11 %	0.537 s	99.07 %	0.506 s
Lema 26	Lema 13	98.71 %	0.441 s	98.32 %	0.550 s	98.63 %	0.492 s
Lema 26	Lema 24	99.04 %	0.472 s	99.11 %	0.537 s	99.04 %	0.522 s

fixo (igual a um) é representado pelo Corolário 3, enquanto que o uso de  $\gamma(\alpha)$  como uma variável polinomial (de grau 1) é representado pelos Lemas 25 e 26. As análises de estabilidade são representadas pelos Lemas 13 (sem variáveis de folga) e 24 (com variáveis de folga). A configuração escolhida para o algoritmo iterativo foi: estrutura simétrica, 10 iterações e SeDuMi.

No caso de sistemas contínuos a introdução da variável  $\gamma(\alpha)$  melhorou consideravelmente tanto a efetividade (aumentos variando entre 11 e 18%) quanto a eficiência. Empregar condições com variável de folga na análise de estabilidade robusta trouxe pequenas melhoras na efetividade, mas nem sempre na eficiência (observa-se melhora apenas na realimentação de saída).

Diferentemente do caso contínuo, para caso discreto observa-se que a introdução da variável  $\gamma(\alpha)$  produziu variações pouco significativas na efetividade (melhorias apenas na realimentação de estados), e o uso de variáveis de folga nas condições de análise aumentou levemente a efetividade para os três problemas, embora os tempos computacionais tenham subido na maioria dos casos. A conclusão final sobre o caso discreto é que a base de dados utilizada não é adequada para avaliar a efetividade das diferentes condições de projeto. Grosso modo, os sistemas são “fáceis” de serem estabilizados. Outra peculiaridade é que a matriz de saída foi escolhida como o ganho estabilizante presente na base, ou seja, não existe incerteza na matriz de saída.

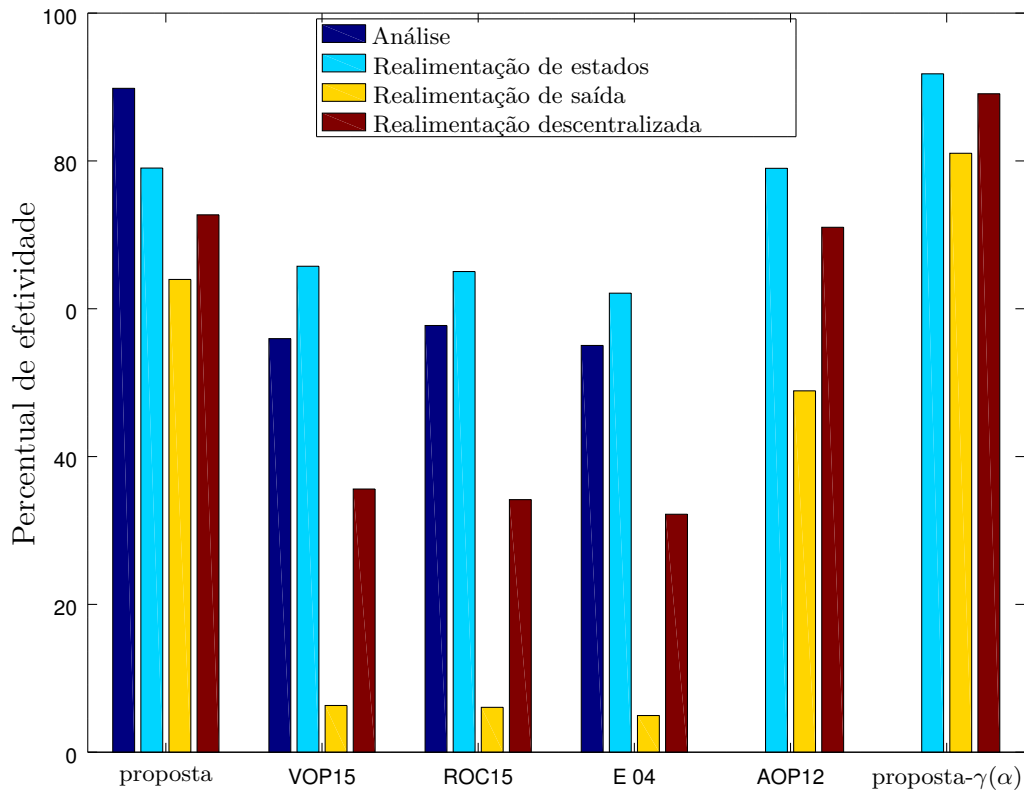


Figura 9 – Efetividade da condição proposta comparada às condições da literatura para tratar diferentes problemas associados a sistemas contínuos.

## 4.8 Visão geral

Nas Figuras 9 e 11 os resultados apresentados neste capítulo são sumarizados, mostrando a taxa de efetividade das diferentes condições para diferentes problemas para sistemas contínuos e sistemas discretos, respectivamente. Nas Figuras 10 e 12 são mostrados os tempos computacionais para as condições correspondentes usando o resolvidor de código aberto SeDuMi.

Com relação aos sistemas a tempo contínuo, o algoritmo proposto (com  $\gamma(\alpha)$ ) supera todas as condições da literatura em termos de efetividade, mas nem sempre em termos do tempo computacional. Contudo, note que o resolvidor SeDuMi é o “pior” para o algoritmo proposto, e o emprego do resolvidor Mosek pode melhorar um pouco mais os tempos computacionais (como pode ser constatado nas Tabelas 3, 6, 7, 9 e 10). Note que a introdução de  $\gamma(\alpha)$  por si só já produziu uma diminuição nos tempos, superando pelo menos AOP12.

Para sistemas discretos nota-se que o algoritmo proposto fornece resultados similares a AOP12 em termos de efetividade, e supera todos, com exceção de dOBG99 (que não realiza busca em escalares), em termos dos tempos computacionais.

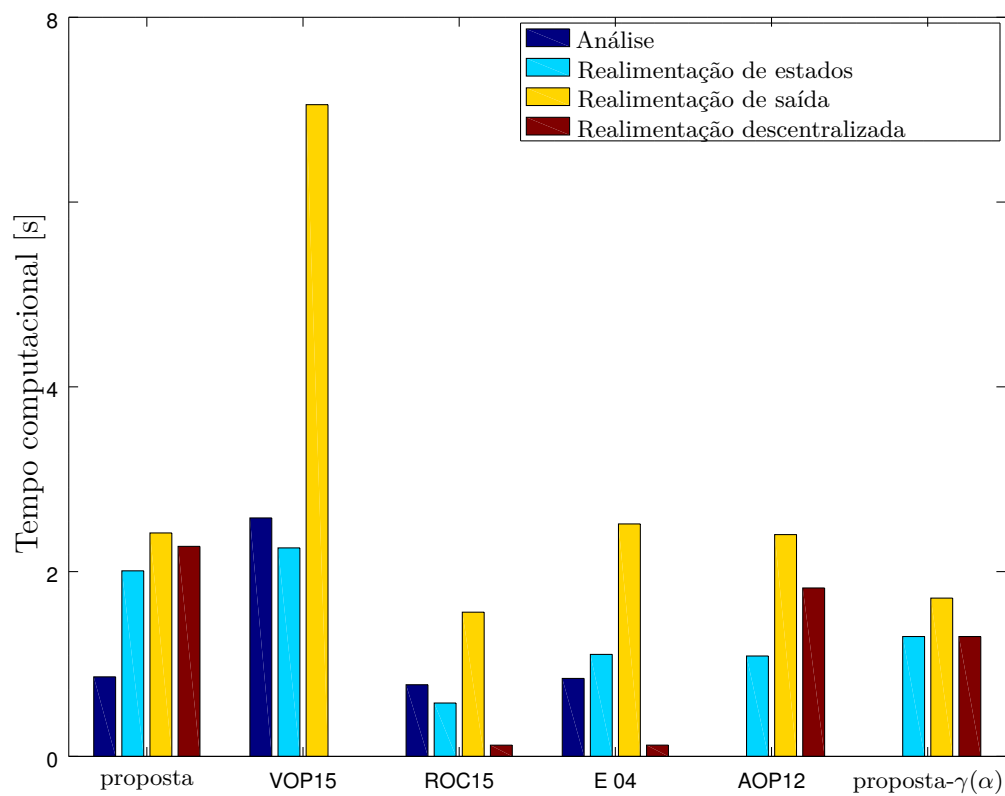


Figura 10 – Tempo computacional da condição proposta comparada às condições da literatura para tratar diferentes problemas associados a sistemas contínuos.

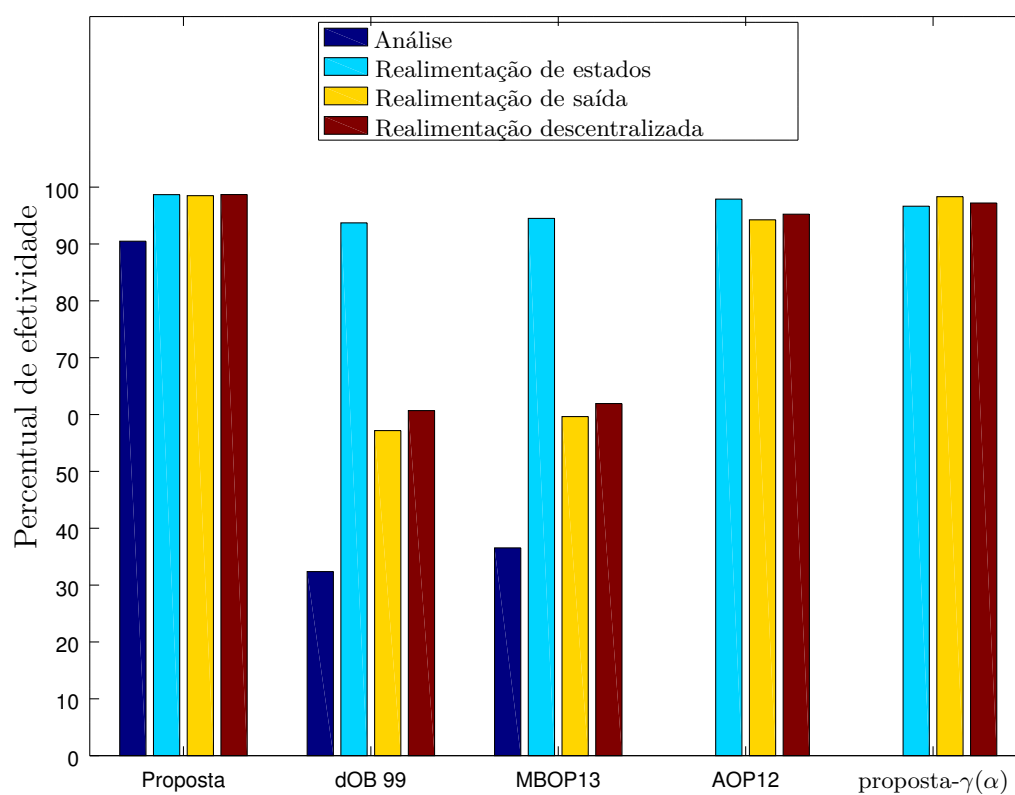


Figura 11 – Efetividade da condição proposta comparada às condições da literatura para tratar diferentes problemas associados a sistemas discretos.

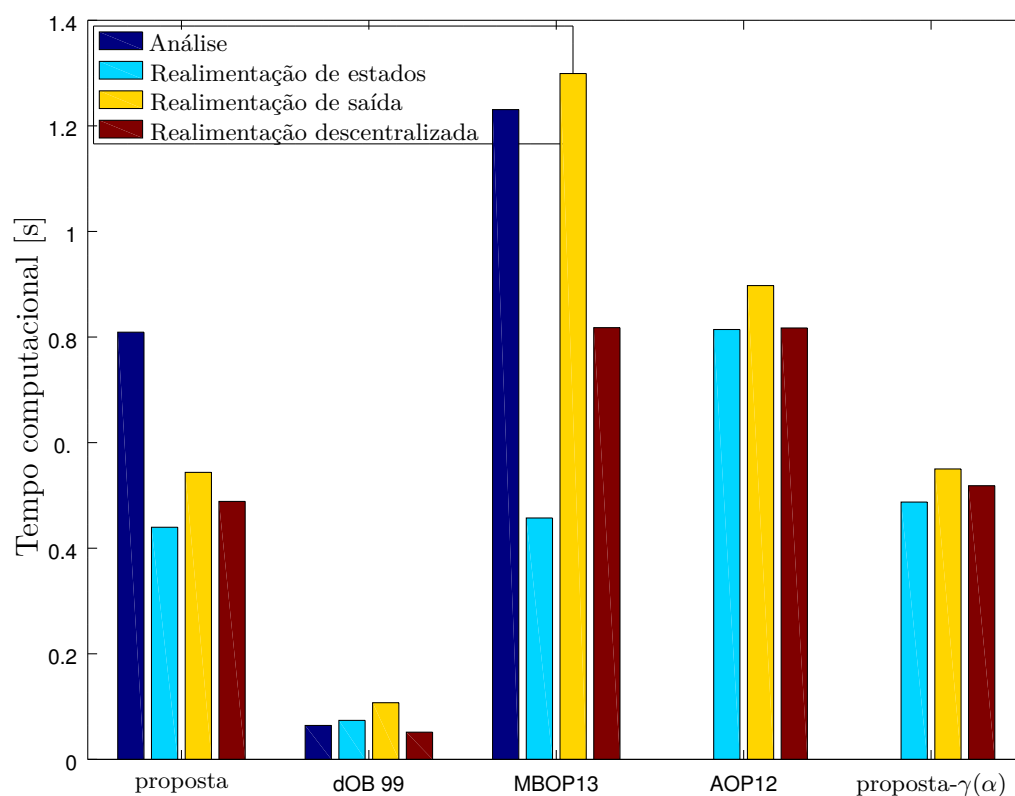


Figura 12 – Tempo computacional da condição proposta comparada às condições da literatura para tratar diferentes problemas associados a sistemas contínuos.

## 5 Considerações Finais

A estabilização robusta de sistemas incertos por meio de leis de controle por realimentação estática de estados e de saídas tem se mostrado um problema desafiador, no sentido de que há casos em que os ganhos de realimentação estabilizantes existem, mas as técnicas de estabilização disponíveis são incapazes de encontrá-los. Na década de 1990 a formulação da busca por ganhos estabilizantes em termos de problemas de otimização convexa (LMIs) surgiu como uma abordagem atraente. A mudança clássica de variáveis e o uso de variáveis de folga foram sem dúvida os resultados mais importantes nesse contexto, e como contribuições menores pode-se destacar a busca por parâmetros escalares e o método dos dois estágios. Mais de duas décadas depois o problema continua em aberto, e ainda que os avanços mencionados tenham sido extensivamente propagados em problemas de controle similares para muitas classes de sistemas lineares (variantes no tempo, chaveados, estocásticos, com atrasos, etc), resultados tratando especificamente do conservadorismo que surge da mudança de variáveis e restrições sobre as variáveis são cada vez mais raros.

Esta dissertação apresentou uma nova técnica de estabilização robusta, tendo como ponto de partida uma mudança de paradigma na construção do ganho estabilizante. Ao invés de utilizar as mudanças de variáveis clássicas, o ganho é procurado diretamente como uma variável de otimização. Duas abordagens iterativas localmente convergentes baseadas em LMIs foram propostas. Na primeira abordagem, apresentada no Capítulo 3, a matriz de Lyapunov é fixada em cada iteração e os resultados obtidos serviram como motivação para a construção da abordagem mais geral apresentada no Capítulo 4, que consiste na principal contribuição da dissertação. Com relação aos métodos iterativos disponíveis na literatura que tratam problemas similares, duas características principais diferenciam a abordagem proposta: *i*) nas condições LMIs resolvidas a cada iteração, quatro variáveis aparecem de forma afim: a matriz de Lyapunov, a matriz dinâmica de malha fechada (a única em que aparece o ganho de controle), o limitante  $r$  para a máxima parte real (ou módulo) dos autovalores da matriz de malha fechada (provado ser não crescente) e o parâmetro “escala”  $\gamma(\alpha)$  que regulariza variações de escala na matriz de malha fechada. Esse último parâmetro é uma contribuição muito interessante desta dissertação pois, pelo menos para sistemas a tempo contínuo, aumentou significativamente tanto a efetividade como a eficiência computacional da técnica. *ii*) critério de parada baseado numa condição de análise de estabilidade robusta.

Considerando a versão mais aprimorada proposta no Capítulo 4, que inclui o parâmetro  $\gamma(\alpha)$ , os resultados numéricos mostram uma significativa vantagem do método proposto em relação a todos os métodos da literatura, incluindo o método de dois estágios (estado da arte anterior), pelo menos em termos de efetividade. A vantagem do método



é mais aparente nos problemas de realimentação de saída e controle descentralizado. Embora não tenha sido explorado nos exemplos numéricos, o algoritmo proposto é capaz de tratar limitações nas entradas do ganho de controle (restrições lineares adicionais no problema de otimização), sendo essa uma característica rara de ser encontrada em outras abordagens, particularmente útil para tratar limitações no sinal de controle. Outra vantagem também não explorada nos exemplos numéricos é o tratamento do sistema dual, que pode ser realizado de forma imediata, bastando transpor a matriz dinâmica nas condições propostas. Como comentário final, é importante frisar que embora o método proposto seja apenas suficiente, a metodologia construída pode servir de base para o desenvolvimento de novos algoritmos para estabilização robusta (e extensões) de muitas classes de sistemas lineares.

## 5.1 Perspectivas de investigações futuras

- Estudar a conectividade do espaço de soluções. Ainda que o espaço de busca não seja convexo, é possível encontrar qualquer solução por meio de uma busca local caso o espaço de soluções tenha apenas uma componente conexa.
- Dado que o procedimento de busca consiste em uma busca local, existem diversas meta-heurísticas que permitem encontrar diferentes mínimos locais, e eventualmente um mínimo global. Especialmente, se for possível demonstrar que o espaço de soluções tem poucos mínimos locais, existem meta-heurísticas com garantia de encontrar uma boa solução.
- Aplicar a condição proposta em problemas similares como filtragem ou controle por realimentação dinâmica.
- Estudar extensões empregando o mesmo paradigma para problemas de controle ótimo. Por exemplo, utilizando as normas  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$ .
- Partir de uma solução estabilizante para obter soluções robustas em um domínio maior, por exemplo, maximizando o volume de um elipsoide inscrito no espaço das matrizes  $(A(\alpha), B(\alpha))$ , que pode ser expresso como um problema *LOGDET*.
- Estudar problemas com parâmetros variantes no tempo. Uma possibilidade é partir de uma solução para o caso invariante no tempo, buscando soluções para taxas de variações cada vez mais rápidas.

## 5.2 Trabalhos Produzidos

O algoritmo iterativo baseado no Teorema 1 foi publicado em:

- A. Felipe and R. C. L. F. Oliveira. Uma nova abordagem para estabilização robusta de sistemas lineares incertos com aplicação em controle descentralizado. Anais do XII Congresso Brasileiro de Automação Inteligente, pages 636-641, Natal, RN, Brasil, Outubro 2015.

Um estudo preliminar da extensão do algoritmo iterativo que incorpora as variáveis de folga foi publicado em

- A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. An iterative LMI based procedure for robust stabilization of continuous-time polytopic systems. In Proceedings of the 2016 American Control Conference, pages 3826-3831, Boston, MA, USA, July 2016.

e uma versão mais completa foi submetida para publicação em:

- A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira. An LMI-based algorithm to compute robust stabilizing feedback gains directly as optimization variables. IEEE Transactions on Automatic Control.

# Referências

- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. In: *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. Baltimore, MD, USA: [s.n.], 2010. p. 4677–4682. Citado na página 35.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Static output feedback control of polytopic systems using polynomial Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*. Atlanta, GA, USA: [s.n.], 2010. p. 6894–6901. Citado na página 35.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. LMI relaxations for reduced-order robust  $\mathcal{H}_\infty$  control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 6, p. 1532–1537, June 2012. Citado 3 vezes nas páginas 15, 35 e 62.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil: [s.n.], 2012. p. 2298–2305. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 55.
- ANDERSEN, E. D.; ANDERSEN, K. D. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In: FRENK, H.; ROOS, K.; TERLAKY, T.; ZHANG, S. (Ed.). *High Performance Optimization*. [S.l.]: Springer US, 2000, (Applied Optimization, v. 33). p. 197–232. <<http://www.mosek.com>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 55.
- APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and  $\mathcal{H}_2$  synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 12, p. 1941–1946, December 2001. Citado na página 43.
- ARZELIER, D.; PEAUCELLE, D.; SALHI, S. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: Improving the guaranteed performance bound. In: *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2003)*. Milan, Italy: [s.n.], 2003. p. 425–430. Citado 3 vezes nas páginas 15, 35 e 62.
- BARMISH, B. R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 46, n. 4, p. 399–408, August 1985. Citado na página 14.

- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, v. 13, n. 1, p. 65–72, July 1989. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 29.
- BLIMAN, P.-A. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 42, n. 6, p. 2016–2042, 2004. Citado na página 55.
- BLIMAN, P.-A. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Systems & Control Letters*, v. 51, n. 3-4, p. 165–169, March 2004. Citado na página 27.
- BLIMAN, P.-A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; MONTAGNER, V. F.; PERES, P. L. D. Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA: [s.n.], 2006. p. 1486–1491. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 42.
- CAO, Y.-Y.; LAM, J.; SUN, Y.-X. Static output feedback stabilization: An ILMI approach. *Automatica*, v. 34, n. 12, p. 1641–1645, December 1998. Citado na página 56.
- CHESI, G. Robust static output feedback controllers via robust stabilizability functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 59, n. 6, p. 1618–1623, June 2014. Citado na página 16.
- CHESI, G.; GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 3, p. 365–370, March 2005. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 55.
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. *Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 2005. Citado na página 16.
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; TODOROV, M. G. *Continuous-Time Markov Jump Linear Systems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2013. Citado na página 16.
- CRUSIUS, C. A. R.; TROFINO, A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, May 1999. Citado na página 15.
- DE OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, v. 37, n. 4, p. 261–265, July 1999. Citado 3 vezes nas páginas 15, 31 e 56.

- DE OLIVEIRA, M. C.; GEROMEL, J. C. Numerical comparison of output feedback design methods. In: *Proceedings of the 1997 American Control Conference*. Albuquerque, NM, USA: [s.n.], 1997. v. 1, p. 72–76. Citado na página 56.
- DE OLIVEIRA, M. C.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Extended  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, v. 75, n. 9, p. 666–679, June 2002. Citado na página 16.
- DE OLIVEIRA, M. C.; GEROMEL, J. C.; HSU, L. LMI characterization of structural and robust stability: The discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 296, n. 1–3, p. 27–38, June 1999. Citado na página 15.
- DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Reza Moheimani, S. O. (Ed.). *Perspectives in Robust Control*. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Science, v. 268). p. 241–257. Citado na página 23.
- DE SOUZA, C. E.; TROFINO, A.; DE OLIVEIRA, J. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  control of uncertain linear systems via parameter-dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia: [s.n.], 2000. p. 3194–3199. Citado na página 16.
- EBIHARA, Y.; HAGIWARA, T. New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis. *Automatica*, v. 40, n. 11, p. 2003–2009, November 2004. Citado 5 vezes nas páginas 15, 16, 32, 43 e 56.
- EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. *S-Variable Approach to LMI-Based Robust Control*. London, UK: Springer-Verlag, 2015. Citado na página 15.
- El Ghaoui, L.; OUSTRY, F.; Ait-Rami, M. A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 8, p. 1171–1176, August 1997. Citado na página 56.
- FRIDMAN, E. *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Switzerland: Birkhäuser, 2014. Citado na página 16.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 4, n. 4, p. 421–448, July–August 1994. Citado na página 15.
- GEROMEL, J. C. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, n. 1, p. 168–175, January 1999. Citado na página 15.

- GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J.; GARCIA, G.; DE OLIVEIRA, M. C.  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  robust filtering for discrete-time linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 38, n. 5, p. 1353–1368, May 2000. Citado na página 15.
- GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D. Decentralized control through parameter space optimization. *Automatica*, v. 30, n. 10, p. 1565–1578, October 1994. Citado na página 15.
- GEROMEL, J. C.; DE OLIVEIRA, M. C.; HSU, L. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 285, n. 1–3, p. 69–80, December 1998. Citado na página 15.
- GEROMEL, J. C.; DE SOUZA, C. C.; SKELTON, R. E. Static output feedback controllers: Stability and convexity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 43, n. 1, p. 120–125, January 1998. Citado na página 15.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 51, n. 12, p. 1984–1989, December 2006. Citado na página 16.
- GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D.; BERNUSSOU, J. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 29, n. 2, p. 381–402, March 1991. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 29.
- GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D.; SOUZA, S. R. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems with prescribed  $\mathcal{H}_\infty$  norm bounds. In: *Proceedings of the 1st IFAC Symposium on Design Methods of Control Systems*. Zurich, Switzerland: [s.n.], 1991. v. 1, p. 302–307. Citado na página 16.
- GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D.; SOUZA, S. R.  $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Systems & Control Letters*, v. 19, n. 1, p. 23–27, July 1992. Citado na página 16.
- GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D.; SOUZA, S. R. Convex analysis of output feedback control problems: Robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 7, p. 997–1003, July 1996. Citado 3 vezes nas páginas 15, 34 e 65.
- HENRION, D.; ARZELIER, D.; PEAUCELLE, D.; LASSERRE, J. B. On parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of linear systems. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Paradise Island, Bahamas: [s.n.], 2004. p. 887–892. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 55.
- HENRION, D.; LASSERRE, J. B. Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 51, n. 2, p. 192–202, February 2006. Citado na página 16.

LASSERRE, J. B. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 11, n. 3, p. 796–817, February 2001. Citado na página 16.

LIBERZON, D. *Switching in Systems and Control*. Boston, MA: Birkhäuser, 2003. (Systems and Control: Foundations and Applications). Citado na página 16.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. Citado na página 55.

MASUBUCHI, I.; OHARA, A.; SUDA, N.  $\mathcal{LMI}$ -based controller synthesis: a unified formulation and solution. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 8, p. 669–686, 1998. Citado na página 15.

MOHAMMADPOUR, J.; SCHERER, C. W. (Ed.). *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. New York: Springer, 2012. Citado na página 16.

MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust state feedback control for discrete-time linear systems via LMIs with a scalar parameter. In: *Proceedings of the 2013 American Control Conference*. Washington, DC, USA: [s.n.], 2013. p. 3876–3881. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 62.

MOREIRA, H. R.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust  $\mathcal{H}_2$  static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems. *Optimal Control Applications and Methods*, v. 32, n. 1, p. 1–13, January/February 2011. Citado 3 vezes nas páginas 15, 35 e 62.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; de Oliveira, M. C.; PERES, P. L. D. Convergent LMI relaxations for robust analysis of uncertain linear systems using lifted polynomial parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, v. 57, n. 8, p. 680–689, August 2008. Citado na página 14.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; DE OLIVEIRA, M. C.; PERES, P. L. D. Robust state feedback LMI methods for continuous-time linear systems: Discussions, extensions and numerical comparisons. In: *Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Denver, CO, USA: [s.n.], 2011. p. 1038–1043. Citado 4 vezes nas páginas 16, 42, 43 e 62.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, v. 55, n. 1, p. 52–61, January 2006. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 74.



OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, July 2007. Citado 3 vezes nas páginas 14, 46 e 55.

PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. An efficient numerical solution for  $\mathcal{H}_2$  static output feedback synthesis. In: *Proceedings of the 2001 European Control Conference*. Porto, Portugal: [s.n.], 2001. p. 3800–3805. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 62.

PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 4, p. 624–630, April 2001. Citado na página 15.

PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C.; SOUZA, S. R.  $\mathcal{H}_\infty$  robust control by static output feedback. In: *Proceedings of the 1993 American Control Conference*. San Francisco, CA, USA: [s.n.], 1993. v. 1, p. 620–621. Citado na página 15.

PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C.; SOUZA, S. R. Optimal  $\mathcal{H}_2$  control by output feedback. In: *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*. San Antonio, TX, USA: [s.n.], 1993. v. 1, p. 102–107. Citado na página 15.

PIPELEERS, G.; DEMEULENAERE, B.; SWEVER, J.; VANDENBERGHE, L. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, v. 58, n. 7, p. 510–518, July 2009. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

RODRIGUES, L. A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; CAMINO, J. F. New extended LMI characterization for state feedback control of continuous-time uncertain linear systems. In: *Proceedings of the 2015 European Control Conference*. Linz, Austria: [s.n.], 2015. p. 1992–1997. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 56.

SADABADI, M. S.; PEAUCELLE, D. From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey. *Annual Reviews in Control*, v. 42, p. 11–26, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.

SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 7, p. 896–911, July 1997. Citado na página 15.

SHAKED, U. Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 4, p. 652–656, April 2001. Citado 5 vezes nas páginas 15, 16, 32, 43 e 56.



- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1999. <<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 55.
- SYRMOS, V. L.; ABDALLAH, C. T.; DORATO, P.; GRIGORIADIS, K. Static output feedback – A survey. *Automatica*, v. 33, n. 2, p. 125–137, February 1997. Citado na página 14.
- TANAKA, K.; WANG, H. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. New York, NY: John Wiley & Sons, 2001. Citado na página 16.
- TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; Gomes da Silva Jr., J. M.; QUEINNEC, I. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. London, UK: Springer, 2011. Citado na página 16.
- TROFINO, A.; DE SOUZA, C. E. Bi-quadratic stability of uncertain linear systems. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Phoenix, AZ, USA: [s.n.], 1999. v. 5, p. 5016–5021. Citado na página 15.
- VIEIRA, H. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Relaxações LMIs com escalares para realimentação de estados robusta de sistemas politópicos. In: *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*. Belo Horizonte, MG, Brasil: [s.n.], 2014. p. 1112–1118. Citado na página 43.
- VIEIRA, H. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust stabilization and  $\mathcal{H}_\infty$  control by means of state-feedback for polytopic linear systems using LMIs and scalar searches. In: *Proceedings of the 2015 American Control Conference*. Chicago, IL, USA: [s.n.], 2015. p. 5966–5973. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 56.
- ŠILJAK, D. D. *Decentralized Control of Complex Systems*. [S.l.]: Dover Books on Electrical Engineering, 2011. Citado na página 15.