UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Cristyan Chayenne Valino Pinheiro

Análise Matemática da Interação entre um Fluido e um Spray

CAMPINAS

2017

Cristyan Chayenne Valino Pinheiro

Análise Matemática da Interação entre um Fluido e um Spray

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientadora: Gabriela Del Valle Planas

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Cristyan Chayenne Valino Pinheiro e orientada pela Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas.

Campinas

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES; CNPq, 140713/2016-6

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P655a Pinheiro, Cristyan Chayenne Valino, 1987-
Análise matemática da interação entre um fluido e um spray / Cristyan Chayenne Valino Pinheiro. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Gabriela del Valle Planas.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Dinâmica dos fluidos. 2. Sprays (Matemática). 3. Navier-Stokes, Equações de. I. Planas, Gabriela del Valle, 1972-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Mathematical analysis of the interaction between a fluid and a spray
Palavras-chave em inglês:
Fluid dynamics
Sprays (Mathematics)
Navier-Stokes equations
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Gabriela del Valle Planas [Orientador]
Anne Caroline Bronzi
José Luiz Boldrini
César Javier Niche Mazzeo
Anderson Luis Albuquerque de Araújo
Data de defesa: 30-11-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 30 de novembro de 2017 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof(a). Dr(a). ANNE CAROLINE BRONZI

Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof(a). Dr(a). CÉSAR JAVIER NICHE MAZZEO

Prof(a). Dr(a). ANDERSON LUIS ALBUQUERQUE DE ARAÚJO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Agradecimentos

Gostaria de agradecer minha orientadora, Professora Gabriela Del Valle Planas, que com muita paciência e apoio, me permitiu concluir mais esta fase em minha vida.

Gostaria de agradecer à minha mãe, que sempre foi e sempre será a base de tudo que sou hoje e com certeza sem todo o seu cuidado e carinho, eu não poderia estar aqui hoje.

Quero agradecer também à minha companheira Anny Silva, que além de me dar todo o seu amor, carinho e compreensão, sempre esteve do meu lado e deu o melhor de sí para me ajudar em tudo que podia.

Quero agradecer aos novos amigos que conheci durante o curso, sem dúvida dividir esta experiência com eles tornou tudo mais fácil diversas vezes.

Agradeço aos professores e funcionários do IMECC por todos os ensinamentos e apoio fornecidos.

Agradeço a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro durante o meu doutorado.

Resumo

Neste trabalho, investigamos a interação de um spray de partículas finas com um fluido Newtoniano, viscoso e incompreensível. O fluido é governado pelas equações de α-Navier-Stokes, enquanto que as partículas/gotículas do spray são descritas por uma função de densidade que satisfaz uma equação do tipo Vlasov ou, quando for levada em consideração a difusão das partículas, uma equação do tipo Vlasov-Fokker-Planck. As equações são acopladas através de uma força de arrasto, que depende da velocidade relativa do fluido e das partículas do spray, e da função densidade. Iremos abordar o caso tridimensional com condições periódicas no domínio espacial. Para o sistema de equações de α-Navier-Stokes-Vlasov provamos existência e regularidade de soluções fracas globais no tempo. Além disso, investigamos o comportamento das soluções quando o parâmetro α tende a 0. Para o sistema de equações de α-Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck analisamos a existência de soluções fracas globais no tempo.

Palavras-chave: Equações de α-Navier-Stokes, Equação de Vlasov, Equação de Vlasov-Fokker-Planck.

Abstract

In this work, we investigate the interaction of a spray of thin particles with a Newtonian, viscous and incompressible fluid. The fluid is governed by the α-Navier-Stokes equations, whereas the particles/droplets of the spray are described by a density function that satisfies a Vlasov type equation or, when the particles' diffusion is considered, an equation of Vlasov-Fokker-Planck type. The equations are coupled by a drag force, which depends on the relative velocity of the fluid and the spray particles, and the density function. We will address the three-dimensional case with periodic conditions in the spatial domain. For the system of α-Navier-Stokes-Vlasov equations we prove existence and regularity of global in-time weak solutions. Furthermore, we investigate the behavior of the solutions when the parameter α tends to 0. For the system of equations of α -Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck we analyze the existence of global in-time weak solutions.

Keywords: α-Navier-Stokes equations, Vlasov equation, Vlasov-Fokker-Planck equation.

Conteúdo

Introdução

A investigação da interação entre sprays de partículas/gotículas e fluidos têm recebido grande atenção devido às suas aplicações em aerossóis, biotecnologia, medicina, teoria da combustão e sprays, veja [3, 7, 40, 41], por exemplo.

Entre os fenômenos investigados podem-se considerar sprays espessos e finos. No caso de sprays espessos é levada em consideração a interação entre as partículas, enquanto que para sprays finos esta interação é desprezada. Para modelarmos o spray podem ser consideradas as equações de Vlasov (modelo sem difusão) ou Vlasov-Fokker-Planck (modelo com a influência da difusão). Além disso, a equação de Boltzmann poderá ser acoplada ao sistema para levar em consideração a colisão entre as partículas do spray. Diversas equações para descrever o escoamento do fluido tem sido usadas, entre elas podemos destacar as equações de Euler (quando a viscosidade é nula) e de Navier-Stokes (para fluidos viscosos), nos casos incompressível e compressível (densidade constante ou não, respectivamente). Em geral, o acoplamento é dado através da força de arrasto que leva em consideração o atrito entre o fluido e o spray.

Entre os primeiros resultados a cerca de modelos que descrevem a interação entre um fluido e um spray, podemos citar Anoshchenko e Boutet de Monvel [2], onde provaram a existência de solução generalizada do sistema tridimensional de equações de Vlasov-Navier-Stokes, com a solução dependendo do raio das partículas do spray. Por sua vez, Hamdache [26] estudou as equações de Vlasov-Stokes sobre um domínio limitado com condições de fronteira de reflexão (as partículas são refletidas pela fronteira seguindo a lei da reflexão especular), obtendo existência de solução para qualquer dimensão $n \geq 2$ e comportamento assintótico para $n = 2, 3$. Entre outras análises, temos Goudon *et al.* [24, 25] que investigaram o limite hidrodinâmico para o sistema de equações de

Vlasov-Navier-Stokes. Enquanto que Baranger e Desvillettes [4] estudaram as equações de Euler-Vlasov no caso compressível, obtendo soluções clássicas locais no tempo.

Para uma análise do sistema de equações de Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck, podemos citar Mellet e Vasseur [29] que provaram a existência de solução fraca, para o caso compressível com condições de fronteira de Dirichlet e de reflexão para dimensão $n = 3$. Além disso, os mesmos autores analisaram o comportamento assintótico do sistema em [30]. A existência de solução forte global perto do equilíbrio para o sistema de equações de Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck no caso incompressível foi tratada por Goudon *et al.* [23]. Enquanto Carrillo *et al.* [10] estudaram o caso correspondente para o sistema de equações de Vlasov-Fokker-Planck-Euler. Em [11], Chae *et al.* estudaram a existência de solução fraca global para o sistema de equações de Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck, para os casos bidimensional e tridimensional. Além disso, obtiveram existência e unicidade de solução global para o caso bidimensional. Por outro lado, Chae *et al.* [12] provaram a existência de solução forte perto do equilíbrio para o mesmo tipo de sistema.

Novos resultados para o sistema de equações de Navier-Stokes-Vlasov foram obtidos por Boudin *et al.* [6] ao provarem a existência global de solução fraca para o modelo tridimensional e periódico em relação a variável espacial. Uma extensão dos resultados de [6], pode ser visto em Yu [42], onde o autor estudou o sistema de equações Navier-Stokes-Vlasov sobre um domínio limitado com condições de fronteira de reflexão para os casos bidimensional e tridimensional. Recentemente, Boudin *et al.* [8] estenderam o resultado de [6] para domínios dependentes do tempo. Também podemos citar o trabalho de Mathiaud [28] que obteve existência local de soluções regulares para o sistema tridimensional de equações de Euler-Vlasov-Boltzmann no caso compressível. Além disso, para um fluido compressível podemos citar Wang and Yu [39], que provaram a existência de solução fraca global para o sistema de equações de Navier-Stokes-Vlasov.

Recentemente, foram consideradas outras equações para o fluido, como em Chen *et al.* [13] que investigou o acoplamento entre as equações de Vlasov e de magneto-hidrodinâmica no caso incompressível.

Neste trabalho investigamos a interação de um spray de partículas finas com um fluido

Newtoniano, viscoso e incompressível. O fluido é governado pelas equações de α-Navier-Stokes, com velocidades associadas $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ para o fluido e $\boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x})$ para a velocidade de transporte, as respectivas pressões hidrostáticas $\pi(t,\boldsymbol{x})$ e $p(t,\boldsymbol{x}) = \pi(t,\boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} - \alpha^2\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\cdot\Delta\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$, onde $\mathbb{T}^3$ denota o toro tridimensional. O parâmetro constante $\nu > 0$ denota a viscosidade do fluido (durante este trabalho iremos considerar $\nu = 1$); $\alpha > 0$ é uma constante dada, associada a velocidade de transporte regularizada no modelo de α-Navier-Stokes. As partículas do spray são descritas por uma função de densidade f no espaço de fase, que satisfaz uma equação do tipo Vlasov (para $\sigma = 0$) ou uma equação do tipo Vlasov-Fokker-Planck (para $\sigma > 0$); $\sigma \geq 0$ é uma constante dada e representa o coeficiente de difusão do spray. A quantidade $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ é a densidade das partículas localizadas em $\boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^3$, no tempo t que tem a velocidade $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$. As equações serão acopladas através de uma força de arrasto, que depende da velocidade relativa do fluido e das partículas, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, e da função densidade f. Mais precisamente, f, $\boldsymbol{u}$ e p satisfazem o seguinte sistema:

$$
\begin{aligned}
\partial_t f + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{v}}\cdot[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})f - \sigma\nabla_{\boldsymbol{v}} f] &= 0 && \text{em } (0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3,\\
\partial_t \boldsymbol{w} - \nu\Delta\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{w}) + \nabla p &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{v} && \text{em } (0,T)\times\mathbb{T}^3,\\
\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u} - \alpha^2\Delta\boldsymbol{u} && \text{em } (0,T)\times\mathbb{T}^3,\\
\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{u} &= 0 && \text{em } (0,T)\times\mathbb{T}^3,\\
f(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) &= f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) && \text{em } \mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3,\\
\boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}) && \text{em } \mathbb{T}^3,
\end{aligned}
$$

sendo $f_{\mathtt{in}} \geq 0$ e $\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}$ os dados iniciais.

Iremos abordar o caso tridimensional (embora todos os cálculos utilizados se estendam automaticamente para o caso bidimensional) e estamos supondo condições periódicas no domínio espacial.

Organizamos este trabalho como segue. No Capítulo 1, introduzimos as notações e espaços de funções utilizados durante este trabalho. Enunciamos e provamos caso necessário, alguns resultados que vamos utilizar no decorrer do texto, incluindo alguns resultados a respeito da existência, unicidade e regularidade de soluções para as equações de Vlasov, Vlasov-Fokker-Planck e α-Navier-Stokes. No Capítulo 2, analisamos as equações de α-Navier-Stokes-Vlasov (correspondente ao caso $\sigma = 0$). Mostramos a existência de solução fraca global no tempo, alguns resultados de regularidade e investigamos o comportamento das soluções encontradas quando o parâmetro $\alpha \to 0^+$. No Capítulo 3, estudamos as equações de α-Navier-Stokes acopladas à equação de Vlasov-Fokker-Planck (correspondente ao caso $\sigma > 0$). Mostramos a existência de solução fraca global no tempo no caso tridimensional de forma semelhante ao que foi feito no Capítulo 2.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados que serão ferramentas importantes no desenvolvimento do trabalho.

1.1 Notações e Espaços Funcionais

As seguintes notações serão usadas no trabalho:

$\mathbb{R}^n$ representará espaço euclidiano n-dimensional.

$\mathbb{T}^n$ representará o toro n-dimensional.

Q representará o cubo n-dimensional $[0,1]^n$.

As derivadas parciais serão representadas por u' ou $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i}\right)_{i=1}^{n}$ representará o operador gradiente.

$\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}_i^2}$ representará o operador Laplaciano.

Um vetor da forma $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ composto por inteiros não negativos é chamado de multi-índice de ordem

$$|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n.$$

Dado um multi-indice β definimos

$$D^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial \boldsymbol{x}_1^{\beta_1} \cdots \partial \boldsymbol{x}_n^{\beta_n}}.$$

$|\boldsymbol{x}| = \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i^2\right)^{1/2}$ e $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}_i}\right)^2\right)^{1/2}$ são a norma euclidiana de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e do vetor gradiente.

$B(\boldsymbol{x}, R)$ representará a bola n-dimensional $\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n; |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}| < R\}$.

Diremos que $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é periódica com período Q (ou apenas periódica quando não houver confusão quanto ao período), se para todo $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n$, temos $u(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}) = u(\boldsymbol{x})$, para qualquer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Se $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função periódica e localmente integrável, então

$$\int_{\mathbb{T}^n} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} := \int_{[0,1]^n} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

$C^m(\mathbb{T}^n)$ é o espaço das funções periódicas com todas as derivadas de ordem menor ou igual a m contínuas em $\mathbb{R}^n$ (m inteiro positivo ou $m = \infty$).

$L^q(\mathbb{T}^n)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções periódicas $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mensuráveis (no sentido de Lebesgue) e localmente q-integráveis ($q \geq 1$) cuja norma é dada por

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{T}^n} |u(\boldsymbol{x})|^q \, d\boldsymbol{x}\right)^{1/q} && (1 \leq q < \infty), \\ \|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} &= \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in [0,1]^n} |u(\boldsymbol{x})| && (q = \infty). \end{aligned}$$

$W^{m,p}(\mathbb{T}^n)$ é o espaço de Banach (com m inteiro) das funções $u \in L^p(\mathbb{T}^n)$ com derivadas generalizadas (no sentido usual) de ordem menor ou igual a m que pertencem a $L^p(\mathbb{T}^n)$ e cuja norma é dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{T}^n)} = \sum_{|\beta| \leq m} \left\|D^\beta u\right\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}.$$

Observação 1.1. Para o caso particular de $p = 2$, a notação dos espaços de Sobolev será $W^{m,2}(\mathbb{T}^n) = H^m(\mathbb{T}^n)$.

Observação 1.2. O produto escalar em $\left(L^2(\mathbb{T}^n)\right)^n$ será denotado por $(\cdot, \cdot)$. Além disso, para $\alpha > 0$, definimos

$$(u, w)_\alpha = (u, w) + \alpha^2 (\nabla u, \nabla w),$$

$$\|u\|_\alpha = \sqrt{\|u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} + \alpha^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}},$$

sobre $H^1(\mathbb{T}^n)$.

Notemos que

$$\min(1,\alpha)\|u\|_{H^1(\mathbb{T}^n)} \leq \|u\|_\alpha \leq \max(1,\alpha)\|u\|_{H^1(\mathbb{T}^n)},$$

para todo $u, w \in H^1(\mathbb{T}^n)$.

Seja $T > 0$. Uma função vetorial é uma função $\boldsymbol{w}(t)$ que para cada $t \in (0,T)$ associa um elemento $\boldsymbol{w}(t)$ do espaço de Banach X. Dizemos que $\boldsymbol{w} : (0,T) \to X$ é *fortemente mensurável* se a função $t \longmapsto \|\boldsymbol{w}(t)\|_X$ é mensurável. Representamos por $L^p(0,T;X)$ com $p \geq 1$, o espaço das funções fortemente mensuráveis $\boldsymbol{w} : (0,T) \to X$ tais que

$$\|\boldsymbol{w}\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|\boldsymbol{w}(t)\|_X^p\right)^{1/p} < \infty \quad \text{se} \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|\boldsymbol{w}\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0\leq t\leq T} ess \ \|\boldsymbol{w}(t)\|_X < \infty \quad \text{se} \quad p = \infty.$$

Representaremos por $C([0,T];X)$ o espaço das funções contínuas $\boldsymbol{w} : [0,T] \to X$ com a norma

$$\|\boldsymbol{w}\|_{C([0,T];X)} = \max_{0\leq t\leq T} \|\boldsymbol{w}(t)\|_X .$$

Observação 1.3. Observe que, para $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ tais que $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ tem-se $L^{p_2}(0,T;X) \subset L^{p_1}(0,T;X)$.

Definição 1.1. Uma **sequência regularizante** $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é qualquer sequência de funções sobre $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\theta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp}\theta_k \subset \overline{B(0,1/k)}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \theta_k(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = 1, \quad \theta_k \geq 0 \text{ sobre } \mathbb{R}^n.$$

Observação 1.4. Durante este trabalho iremos usar $\theta_k(\boldsymbol{x}) = k^n\theta(k\boldsymbol{x})$, com $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que θ é uma função não nula, $\operatorname{supp}\theta \subset \overline{B(0,1)}$, $\theta \geq 0$ sobre $\mathbb{R}^n$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \theta\,d\boldsymbol{x} = 1$.

Definição 1.2. Uma **sequência de corte** $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (*cut-off*) é qualquer sequência de funções sobre $\mathbb{R}^n$ da forma $\gamma_k(\boldsymbol{x}) = \gamma(k^{-1}\boldsymbol{x})$, com $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \gamma \leq 1$ e

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |\boldsymbol{x}| < 1, \\ 0 & \text{se} \quad |\boldsymbol{x}| \geq 2. \end{cases}$$

1.2 Resultados Auxiliares

Lembremos do Teorema de Banach-Alaoglu que pode ser encontrado em Brezis [9, p. 66].

Teorema 1.1. Seja B uma espaço de Banach reflexivo. Se a sequência $(w_k)_{k=1}^{\infty} \subset B$ é limitada, então existe uma subsequência $(w_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ e $w \in B$ tais que w_{k_j} converge fracamente para w (escrevemos $w_{k_j} \rightharpoonup w$).

Imersões de Sobolev

Os seguintes Teoremas se encontram em Temam [37, p. 11].

Teorema 1.2. As seguintes imersões são contínuas:

$$\begin{aligned} &H^m(\mathbb{T}^n) \subset L^q(\mathbb{T}^n) \quad \text{para } 2m < n, \quad q = 2n/(n-2m), \\ &H^m(\mathbb{T}^n) \subset C(\mathbb{T}^n) \quad \text{para } 2m > n. \end{aligned}$$

Teorema 1.3. Sejam $m_1, m_2, \theta, q \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq m_1 \leq m_2$, $\theta \in (0,1)$ e $q = (1-\theta)m_1 + \theta m_2$, então valem as seguintes desigualdades de interpolação

$$\|u\|_{H^q(\mathbb{T}^n)} \leq \|u\|_{H^{m_1}(\mathbb{T}^n)}^{(1-\theta)} \|u\|_{H^{m_2}(\mathbb{T}^n)}^{\theta}, \ \forall u \in H^{m_2}(\mathbb{T}^n).$$

Além disso, para $q > n/2$ ou $q = n/2$ e $0 \leq m_1 < n/2 < m_2$ temos

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \leq C \|u\|_{H^{m_1}(\mathbb{T}^n)}^{(1-\theta)} \|u\|_{H^{m_2}(\mathbb{T}^n)}^{\theta}, \ \forall u \in H^{m_2}(\mathbb{T}^n).$$

Encontramos o seguinte resultado em Evans [20, p. 294] para domínios limitados que pode ser imediatamente aplicado a $\mathbb{T}^n$.

Lema 1.4. Seja $\boldsymbol{u} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$, então $\boldsymbol{u}$ é Lipschitz contínua se e somente se, $\boldsymbol{u} \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}^n)$. Além disso,

$$|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| \leq |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}| \, \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)},$$

para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{T}^n$.

Derivada generalizada de funções vetoriais

Vamos introduzir a noção de derivada fraca de uma função vetorial.

Lema 1.5. Seja X um espaço de Banach e X' seu dual. Sejam u e g funções de $L^1(a,b;X)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) u é q.t.p. igual a primitiva de g,

$$u(t) = \xi + \int_a^t g(s)ds, \qquad \xi \in X, \text{ q.t.p } t \in [a,b]; \tag{1.1}$$

(ii) Para cada $\phi \in C_c^\infty((a,b))$,

$$\int_a^b u(t)\phi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\phi(t)dt, \qquad \left(\phi' = \frac{d\phi}{dt}\right); \tag{1.2}$$

(iii) Para cada $\eta \in X'$

$$\frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle_{X'} = \langle \eta, g(t)\rangle_{X'}, \tag{1.3}$$

no sentido das distribuições sobre (a,b).

Se (i)-(iii) são satisfeitas, em particular, u é q.t.p. igual a uma função de $C([a,b];X)$. A demonstração deste Lema pode ser encontrada em Temam [36, p. 250].

O Lema 1.5 sugere a seguinte definição:

Definição 1.3. A função g dada no Lema 1.5 é chamada derivada fraca de u e será representada pelos símbolos usuais, isto é,

$$g = u' = \frac{du}{dt}.$$

Lema 1.6. Sejam X_0, X, X_1 espaços de Banach tais que $X_0 \subset X \subset X_1$ com imersões contínuas e com a imersão de $X_0 \to X$ compacta. Então, para $0 < T < \infty$ e $1 < \alpha_0, \alpha_1 < \infty$ fixados, temos que o espaço

$$W = W(\alpha_0, \alpha_1, X_0, X_1) = \{v \in L^{\alpha_0}(0,T;X_0),\ v' \in L^{\alpha_1}(0,T;X_1)\}$$

munido da norma

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{\alpha_0}(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L^{\alpha_1}(0,T;X_1)}$$

é um espaço de Banach e a imersão de W em $L^{\alpha_0}(0,T;X)$ é compacta. Além disso, se $\alpha_0 = \infty$ e $\alpha_1 > 1$, então a imersão de W em $C([0,T];X)$ é compacta.

A demonstração deste Lema pode ser encontrada em Simon [35, p. 85].

Lema 1.7. Sejam V, H dois espaços de Hilbert separáveis tais que $V \subset H$ com imersão contínua e V denso em H. Definamos $D(S)$ o conjunto de todos os $u \in V$ tais que a aplicação linear

$$v \to (u, v)_V$$

é contínua sobre V equipado com a topologia induzida por H. Então, $D(S)$ é um espaço vetorial normado equipado da norma

$$\|u\|_{D(S)} = \left\{ \|u\|_H^2 + \|Su\|_H^2 \right\}^{1/2}.$$

Seja $S : D(S) \subset V \to H$ um operador tal que

$$(Su, v)_H = (u, v)_V.$$

Com as notações anteriores, as seguintes imersões são contínuas

$$W(2, 2, V, V') \hookrightarrow C([0, T]; H),$$

$$W(2, 2, D(S), H) \hookrightarrow C([0, T]; V).$$

A demonstração deste Lema pode ser encontrada em Dautray e Lions [18, p. 480] e Lions e Magenes [27, p. 18].

Algumas Desigualdades

Lembremos algumas desigualdades que iremos utilizar com frequência no texto.

Desigualdade de Hölder: Se $u \in L^p(\mathbb{T}^n)$ e $v \in L^q(\mathbb{T}^n)$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, com $1 < p < \infty$, então

$$\int_{\mathbb{T}^n} |u\, v| dx \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \|v\|_{L^q(\mathbb{T}^n)}.$$

Desigualdade de Young: Para todo $a, b, \varepsilon > 0$ e para p, q tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, com $1 < p < \infty$ tem-se

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q,$$

onde $C(\varepsilon) = (p\varepsilon)^{-q/p} q^{-1}$.

Desigualdade de Young para convoluções: Sejam p, q, r tais que $p^{-1}+q^{-1} = 1+r^{-1}$. Se $u \in L^p(\mathbb{T}^n)$ e $v \in L^q(\mathbb{T}^n)$, então $u * v \in L^r(\mathbb{T}^n)$. Além disso,

$$\|u * v\|_{L^r(\mathbb{T}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \|v\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} .$$

Os próximos dois Lemas para desigualdades do tipo Gronwall podem ser encontrados em Mitrinović *et al.* [31, p. 356, 360]:

Lema 1.8 (Lema de Gronwall)**.** Sejam x, a, b e k funções mensuráveis tais que kx, ka e kb sejam integráveis sobre $J = [\alpha, \beta]$, com b e k não negativas. Suponhamos que

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_\alpha^t k(s)x(s)\, ds,\ \forall t \in J,$$

então

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_\alpha^t a(s)k(s) \exp\left(\int_s^t b(r)k(r)\, dr\right) ds,\ \forall t \in J.$$

Em particular, para a não decrescente e $b \equiv 1$,

$$x(t) \leq a(t) \exp\left(\int_\alpha^t k(r)\, dr\right),\ \forall t \in J.$$

Lema 1.9 (Lema de Gronwall não-linear)**.** Seja $u(t)$ uma função não-negativa satisfazendo a desigualdade integral

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t \left(a(s)u(s) + b(s)u(s)^\beta\right) ds,\quad c \geq 0,\ \beta \geq 0,$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas e não-negativas para $t \geq t_0$.

Para $0 \leq \beta < 1$ temos

$$u(t) \leq \left\{c^{1-\beta} \exp\left[(1-\beta)\int_{t_0}^t a(s)\, ds\right] + (1-\beta)\int_{t_0}^t b(s) \exp\left[(1-\beta)\int_s^t a(r)\, dr\right] ds\right\}^{\frac{1}{1-\beta}};$$

para $\beta = 1$

$$u(t) \leq c \exp\left\{\int_{t_0}^t [a(s) + b(s)]\, ds\right\};$$

e para $\beta > 1$, com a hipótese adicional

$$c < \left\{\exp\left[(1-\beta)\int_{t_0}^{t_0+h} a(s)\, ds\right]\right\}^{\dfrac{1}{\beta-1}} \left\{(\beta-1)\int_{t_0}^{t_0+h} b(s)\, ds\right\}^{\dfrac{1}{1-\beta}},$$

para algum $h > 0$, então

$$u(t) < c\left\{\exp\left[(1-\beta)\int_{t_0}^t a(s)\, ds\right] - c^{-1}(\beta-1)\int_{t_0}^t b(s) \exp\left[(1-\beta)\int_s^t a(r)\, dr\right] ds\right\}^{\dfrac{1}{\beta-1}},$$

para todo $t \in [t_0, t_0+h]$.

A seguir, apresentaremos duas versões do Lema de Gronwall na forma discreta:

Lema 1.10. Sejam $T > 0$ e (a_n) uma sequência de funções contínuas não-negativas sobre $[0, T]$. Suponha que (a_n) satisfaz, para qualquer n,

$$a_{n+1}(t) \leq A + B \int_0^t a_n(s)\, ds + C \int_0^t a_{n+1}(s)\, ds,$$

com A, B, C constantes não-negativas.

(i) Se $A = 0$, existe uma constante $K \geq 0$ tal que

$$a_n(t) \leq \frac{K^{n+1} t^n}{n!},$$

para $t \in [0, T]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Se $A > 0$, então existe uma constante $K \geq 0$, dependendo de A, B, C tal que

$$a_n(t) \leq K \exp(Kt),$$

para $t \in [0, T]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

A demonstração deste Lema pode ser vista em Boudin *et al.* [6, p. 1270].

Lema 1.11. Sejam $T > 0$ e (a_n) uma sequência de funções contínuas não-negativas sobre $[0, T]$. Suponhamos que (a_n) satisfaz, para qualquer n,

$$a_{n+1}(t) \leq A \int_0^t a_{n+1}(s)\, ds + B \int_0^t a_n(s)\, ds + C \int_0^t \left(\int_0^s (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} a_n(\tau)^{\frac{1}{2}}\, d\tau \right)^2 ds,$$

com A, B, C constantes não-negativas. Então existe uma constante $K \geq 0$ tal que

$$a_n(t) \leq \frac{K^{n+1} t^n}{n!},$$

para $t \in [0, T]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Se $A = 0$, então basta escolhermos $K = \max\left(\max_{t \in [0,T]} a_0, B + 4TC \right)$. Demonstraremos o resultado por indução. Para $n = 0$, o resultado é imediato. Agora, suponhamos que o resultado é válido para $n = m$, então

$$\begin{aligned}
a_{m+1}(t) &\leq B\int_0^t a_m(s)\,ds + C\int_0^t \left(\int_0^s (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} a_m(\tau)^{\frac{1}{2}}\,d\tau\right)^2 ds \\
&\leq B\frac{K^{m+1}}{m!}\int_0^t s^m\,ds + C\frac{K^{m+1}}{m!}\int_0^t \left(\int_0^s (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{m}{2}}\,d\tau\right)^2 ds \\
&\leq B\frac{K^{m+1}}{m!}\int_0^t s^m\,ds + C\frac{K^{m+1}}{m!}\int_0^t s^m \left(\int_0^s (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\,d\tau\right)^2 ds \\
&\leq B\frac{K^{m+1}}{m!}\int_0^t s^m\,ds + C\frac{K^{m+1}}{m!}\int_0^t s^m\,ds \left(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\,d\tau\right)^2 \\
&\leq \frac{K^{m+1}t^{m+1}}{(m+1)!}(B + 4TC) \leq \frac{K^{m+2}t^{m+1}}{(m+1)!}.
\end{aligned}$$

Se $A > 0$, então aplicamos a desigualdade de Gronwall para função $a_{n+1}(t)$ e obtemos

$$a_{n+1}(t) \leq Be^{AT}\int_0^t a_n(s)\,ds + Ce^{AT}\int_0^t \left(\int_0^s (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} a_n(\tau)^{\frac{1}{2}}\,d\tau\right)^2 ds.$$

Logo, basta aplicar o caso anterior para obtermos o resultado. ■

Finalmente, introduzimos os momentos de uma função e uma estimativa que os relaciona.

Definição 1.4. Para todo $\beta \geq 0$, definimos os momentos de $f : [0, T] \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$m_\beta f(t, \boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}|^\beta\,d\boldsymbol{v}, \qquad M_\beta f(t) = \iint_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n} f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}|^\beta\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}.$$

Lema 1.12. Sejam $\beta > 0$ e $g \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ uma função não-negativa, tal que $m_\beta g(t, \boldsymbol{x}) < +\infty$, para quase todo $(t, \boldsymbol{x})$. A seguinte estimativa vale, para qualquer $0 \leq \gamma < \beta$:

$$m_\gamma g(t, \boldsymbol{x}) \leq \Big(\omega(n)\,\|g(t, \boldsymbol{x}, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + 1\Big)\, m_\beta g(t, \boldsymbol{x})^{\frac{\gamma+n}{\beta+n}},$$

com $\omega(n)$ o volume da bola de raio unitário em $\mathbb{R}^n$.

A demonstração deste Lema pode ser vista em Boudin *et al.* [6, p. 1261] para $n = 3$.

1.3 Equações de α-Navier-Stokes

Nesta seção iremos resumir as principais propriedades e resultados para as equações de α-Navier-Stokes, necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Lembremos que as equações de α-Navier-Stokes consistem no seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{w} - \nu\Delta\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{w}) + \nabla p = \boldsymbol{f} &\qquad \text{em } (0,T)\times\mathbb{T}^3, \\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \alpha^2\Delta\boldsymbol{u} &\qquad \text{em } (0,T)\times\mathbb{T}^3, \\ \nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{u} = 0 &\qquad \text{em } (0,T)\times\mathbb{T}^3, \\ \boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) &\qquad \text{em } \mathbb{T}^3, \end{aligned} \tag{1.4}$$

com $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ velocidades associadas a um fluido, com respectivas pressões hidrostáticas π e $p = \pi + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} - \alpha^2(\boldsymbol{u}\cdot\Delta\boldsymbol{u})$. O parâmetro constante $\nu > 0$ denota a viscosidade do fluido; $\alpha > 0$ é uma constante dada, associada a velocidade de transporte regularizada.

Primeiramente, precisamos definir dois espaços que são frequentemente usados na teoria das equações de Navier-Stokes:

$$H = \{\boldsymbol{u} \in \left(L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^3;\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0\}, \qquad V = \{\boldsymbol{u} \in \left(H^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)^3;\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0\},$$

equipados com as normas induzidas por $(L^2(\mathbb{T}^3))^3$ e $(H^1(\mathbb{T}^3))^3$, respectivamente.

Denotaremos por $\mathbb{P}$ a projeção ortogonal de $\left(L^2(\mathbb{T}^3)\right)^3$ em H, $\mathrm{A} = -\mathbb{P}\Delta$ o operador de Stokes com domínio $D(\mathrm{A}) = \left(H^2(\mathbb{T}^3)\right)^3 \cap V$. Além disso, para $S_\alpha := I + \alpha^2\mathrm{A}$, temos que S_α é um operador auto-adjunto, positivo e seu inverso é compacto (em Temam [36, p. 249] vemos este operador quando o domínio é um aberto ilimitado). Portanto, existe uma base ortonormal $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de H formada por autofunções de S_α; denotaremos por λ_i o autovalor associado à autofunção $\boldsymbol{v}_i$.

Notemos que da periodicidade espacial das funções em $\left(H^2(\mathbb{T}^3)\right)^3$, existe $C > 0$ tal que

$$C\,\|\boldsymbol{u}\|_{D(A)} \le \|\boldsymbol{u}\|_{H^2(\mathbb{T}^3)} \le C^{-1}\,\|\boldsymbol{u}\|_{D(A)}\,,$$

onde

$$\|\boldsymbol{u}\|_{D(A)} = \left\{\|\boldsymbol{u}\|^2_H + \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}\|^2_H\right\}^{1/2}.$$

Denotaremos o produto de dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle_{D(A)'}$ apenas por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definamos as formas bilineares

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) &= \mathbb{P}[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{w}], \\ \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) &= -\mathbb{P}(\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{w})), \end{aligned}$$

para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V$.

Podemos verificar que

$$(\mathrm{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w}) = -(\mathrm{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}),$$

e pela identidade

$$(\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} + \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{a}_j \nabla \boldsymbol{b}_j = -\boldsymbol{b} \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) + \nabla(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}),$$

para todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, obtemos

$$(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w}) = (\mathrm{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w}) - (\mathrm{B}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{u}),$$

para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in V$.

O seguinte Lema tem sua demonstração em Foias *et al.* [21, p. 6-7] e explicita as principais propriedades de A e $\widetilde{\mathrm{B}}$:

Lema 1.13. Sejam A e $\widetilde{\mathrm{B}}$ definidos como anteriormente, então

(i) O operador A pode ser estendido continuamente ao espaço V com valores em V' tal que

$$\langle \mathrm{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle_{V'} = (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{w}),$$

para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V$.

(ii) Analogamente, o operador A^2 pode ser estendido continuamente ao espaço $D(\mathrm{A})$ assumindo valores em $D(\mathrm{A})'$, de forma que

$$\left\langle \mathrm{A}^2 \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \right\rangle = (\mathrm{A}\boldsymbol{u}, \mathrm{A}\boldsymbol{w}),$$

para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in D(\mathrm{A})$.

(iii) O operador $\widetilde{\mathrm{B}}$ pode ser estendido continuamente de $V \times V$ com valores em V' e em particular satisfaz

$$\left| \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w} \right\rangle_{V'} \right| \leq c \left\| \boldsymbol{u} \right\|_H^{1/2} \left\| \boldsymbol{u} \right\|_V^{1/2} \left\| \nabla \boldsymbol{z} \right\|_H \left\| \boldsymbol{w} \right\|_V$$

e

$$\left| \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w} \right\rangle_{V'} \right| \leq c \left\| \boldsymbol{u} \right\|_V \left\| \nabla \boldsymbol{z} \right\|_H \left\| \boldsymbol{w} \right\|_H^{1/2} \left\| \boldsymbol{w} \right\|_V^{1/2},$$

para todos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in V$. Além disso,

$$\left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w} \right\rangle_{V'} = -\left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{u} \right\rangle_{V'}, \text{ para todos } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in V$$

e em particular

$$\left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{u} \right\rangle_{V'} = 0, \text{ para todos } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z} \in V.$$

(iv) Para $\boldsymbol{u} \in H$, $\boldsymbol{z} \in V$ e $\boldsymbol{w} \in D(\mathrm{A})$, temos

$$\left|\left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w} \right\rangle\right| \leq c \left\|\boldsymbol{u}\right\|_H \left\|\nabla \boldsymbol{z}\right\|_H \left\|\boldsymbol{w}\right\|_V^{1/2} \left\|\boldsymbol{w}\right\|_{D(A)}^{1/2}$$

e para $\boldsymbol{u} \in D(\mathrm{A})$, $\boldsymbol{z} \in V$ e $\boldsymbol{w} \in H$, temos

$$\left|(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w})\right| \leq c \left\|\boldsymbol{u}\right\|_V^{1/2} \left\|\boldsymbol{u}\right\|_{D(A)}^{1/2} \left\|\nabla \boldsymbol{z}\right\|_H \left\|\boldsymbol{w}\right\|_H .$$

(v) Para $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{z} \in H$ e $\boldsymbol{w} \in D(\mathrm{A})$, temos

$$\left|\left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w} \right\rangle\right| \leq C \left(\left\|\boldsymbol{u}\right\|_H^{1/2} \left\|\boldsymbol{u}\right\|_V^{1/2} \left\|\boldsymbol{z}\right\|_H \left\|\boldsymbol{w}\right\|_{D(A)} + \left\|\nabla \boldsymbol{u}\right\|_H \left\|\boldsymbol{z}\right\|_H \left\|\boldsymbol{w}\right\|_V^{1/2} \left\|\boldsymbol{w}\right\|_{D(A)}^{1/2} \right).$$

(vi) Para $\boldsymbol{u} \in D(\mathrm{A})$, $\boldsymbol{z} \in H$ e $\boldsymbol{w} \in V$, temos

$$\left|\left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w} \right\rangle_{V'}\right| \leq C \left(\left\|\boldsymbol{u}\right\|_V^{1/2} \left\|\boldsymbol{u}\right\|_{D(A)}^{1/2} \left\|\boldsymbol{z}\right\|_H \left\|\nabla \boldsymbol{w}\right\|_H + \left\|\boldsymbol{u}\right\|_{D(A)} \left\|\boldsymbol{z}\right\|_H \left\|\boldsymbol{w}\right\|_H^{1/2} \left\|\boldsymbol{w}\right\|_V^{1/2} \right).$$

Agora iremos introduzir em que sentido procuramos uma solução de (1.4):

Definição 1.5. Dizemos que $\boldsymbol{u}$ é solução fraca de (1.4) se:

- $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; D(\mathrm{A})) \cap C([0, T]; V)$;
- $\partial_t \boldsymbol{u} \in L^2(0, T; H)$;
- $\boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ em V;
- $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \alpha^2 \mathrm{A}\boldsymbol{u}$;
- Para todo $\boldsymbol{\psi} \in L^2(0, T; D(\mathrm{A}))$ temos

$$\int_0^T \left\langle \partial_t \boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{\psi}(s) \right\rangle ds + \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(s), \boldsymbol{w}(s)), \boldsymbol{\psi}(s) \right\rangle ds + \nu \int_0^T \left\langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{\psi}(s) \right\rangle ds = \int_0^T (\boldsymbol{f}(s), \boldsymbol{\psi}(s))\, ds. \quad (1.5)$$

Observação 1.5. Como $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A})) \cap C([0,T];V)$ com $\partial_t \boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H)$, então $\boldsymbol{w} \in L^2(0,T;H) \cap C([0,T];V')$ com $\partial_t \boldsymbol{w} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A})')$. Portanto, faz sentido procurarmos soluções satisfazendo (1.5).

Finalmente, podemos enunciar o principal resultado desta seção

Teorema 1.14. Sejam $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))$, $\boldsymbol{u}_0 \in V$ e $0 < T < \infty$ fixados. Então o problema (1.4) tem uma única solução fraca.

Demonstração: Procederemos como em Foias *et al.* [21], onde é considerada $\boldsymbol{f}$ independente do tempo e com média nula.

Primeiro iremos mostrar a existência de solução:

• **Existência**

Para mostrarmos a existência de solução fraca do problema (1.4) vamos aplicar o *método de Faedo-Galerkin*. Para isto, sejam $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ a base de H formada pelas autofunções do operador S_α e H_m o espaço gerado por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$. Definamos o seguinte problema aproximado: para cada m fixo, encontrar uma solução

$$\boldsymbol{u}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\boldsymbol{v}_i,$$

satisfazendo, para $1 \leq j \leq m$,

$$(\boldsymbol{w}_m'(t), \boldsymbol{v}_j) + \nu(\boldsymbol{w}_m(t), \mathrm{A}\boldsymbol{v}_j) + \left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), \boldsymbol{v}_j\right) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_j), \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{u}_m(0) = P_m \boldsymbol{u}_0, \tag{1.7}$$

com $\boldsymbol{w}_m = S_\alpha \boldsymbol{u}_m$ e P_m a projeção ortogonal de H em H_m.

Lembremos que λ_i é o autovalor associado à autofunção $\boldsymbol{v}_i$, então o problema (1.6)-(1.7) é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} g_{jm}'(t) + \dfrac{\nu}{\alpha^2}(\lambda_j - 1)g_{jm} + \displaystyle\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{\lambda_j} g_{im}(t) g_{km}(t)\left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k), \boldsymbol{v}_j\right) = \dfrac{1}{\lambda_j}(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_j), \\ g_{jm}(0) = (P_m \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_j), \end{cases} \tag{1.8}$$

para $1 \leq j \leq m$.

Agora, pelo Teorema de Carathéodory em Coddington e Levinson [17, p. 43, 45], o sistema (1.8) tem uma única solução maximal e absolutamente contínua $g_m = (g_{1m}, \dots, g_{mm})$ no intervalo $[0, t_m]$ para algum $t_m \leq T$.

Se $t_m < T$, então necessariamente temos que

$$\lim_{t \to t_m^-} \|\boldsymbol{u}_m(t)\|_H = \infty.$$

Portanto, se mostrarmos que $\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_H$ é limitada independente de m e t, então provaremos que $t_m = T$ e portanto, $\boldsymbol{u}_m(t)$ será uma solução global de (1.6)-(1.7), para cada $m \in \mathbb{N}$.

Para isto, iremos multiplicar (1.6) por $g_{jm}(t)$ e somar as equações, para $j = 1, \dots, m$, para obter

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_\alpha^2 + \nu\left(\|\nabla \boldsymbol{u}_m(t)\|_H^2 + \alpha^2 \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_m(t)\|_H^2\right) + \left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), \boldsymbol{u}_m(t)\right) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t))$$

e pelo Lema 1.13 (iii), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_\alpha^2 + \nu\left(\|\nabla \boldsymbol{u}_m(t)\|_H^2 + \alpha^2 \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_m(t)\|_H^2\right) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t)).$$

Aplicando a desigualdade de Young

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_\alpha^2 + 2\nu\left(\|\nabla \boldsymbol{u}_m(t)\|_H^2 + \alpha^2 \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_m(t)\|_H^2\right) \leq \|\boldsymbol{f}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\boldsymbol{u}_m(t)\|_\alpha^2. \tag{1.9}$$

Pela desigualdade de Gronwall

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_m(t)\|_\alpha^2 &\leq e^t \left(\|\boldsymbol{u}_m(0)\|_\alpha^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{f}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \, ds\right) \\ &\leq e^T \left(\|\boldsymbol{u}_0\|_\alpha^2 + \int_0^T \|\boldsymbol{f}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \, ds\right) := C_1, \end{aligned} \tag{1.10}$$

portanto, $(\boldsymbol{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0, T; V)$.

Notemos que (1.10) implica que $(\boldsymbol{w}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0, T; V')$. De fato, para $\boldsymbol{v} \in V$

$$|(\boldsymbol{w}_m(t), \boldsymbol{v})| \leq |(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v})| + \alpha^2 |(\nabla \boldsymbol{u}_m(t), \nabla \boldsymbol{v})| \leq C \|\boldsymbol{u}_m(t)\|_V \|\boldsymbol{v}\|_V,$$

então da estimativa (1.10) concluímos que $\|\boldsymbol{w}_m(t)\|_{V'} \leq C$.

Agora, integrando (1.9) de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_\alpha^2 + 2\nu \int_0^t (\ \|\nabla \boldsymbol{u}_m(s)\|_H^2 + \alpha^2 \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_m(s)\|_H^2) \ ds & \\ \leq \|\boldsymbol{u}_0\|_\alpha^2 + \int_0^t \left(\|\boldsymbol{f}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \|\boldsymbol{u}_m(s)\|_\alpha^2 \right) \ ds & \\ \leq \|\boldsymbol{u}_0\|_\alpha^2 + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))}^2 + TC_1, & \end{aligned} \tag{1.11}$$

logo, $(\boldsymbol{u}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;D(A))$. Esta estimativa também implica que $(\boldsymbol{w}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;H)$.

Agora, iremos mostrar que $(\boldsymbol{w}_m')_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;D(\mathrm{A})')$. Para isto notemos que para todo $\boldsymbol{\varphi} \in D(\mathrm{A})$, temos

$$(\boldsymbol{w}_m', \boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{w}_m', P_m\boldsymbol{\varphi}) = -\nu(\boldsymbol{w}_m, \mathrm{A}P_m\boldsymbol{\varphi}) - \left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_m), P_m\boldsymbol{\varphi}\right) + (\boldsymbol{f}, P_m\boldsymbol{\varphi}).$$

Então, iremos estimar os termos do lado direito da equação: aplicando o Lema 1.13 (v) e (1.10)

$$\begin{aligned}\left|\left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_m), P_m\boldsymbol{\varphi}\right)\right| \leq & C \|\boldsymbol{u}_m\|_H^{1/2} \|\boldsymbol{u}_m\|_V^{1/2} \|\boldsymbol{w}_m\|_H \|P_m\boldsymbol{\varphi}\|_{D(A)} \\ & + C \|\nabla \boldsymbol{u}_m\|_H \|\boldsymbol{w}_m\|_H \|P_m\boldsymbol{\varphi}\|_V^{1/2} \|P_m\boldsymbol{\varphi}\|_{D(A)}^{1/2} \\ \leq & C \|\boldsymbol{\varphi}\|_{D(A)} \|\boldsymbol{u}_m\|_{D(A)},\end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned}|\,(\boldsymbol{w}_m, \mathrm{A}P_m\boldsymbol{\varphi})\,| = |(\boldsymbol{w}_m, \mathrm{A}\boldsymbol{\varphi})| \leq \|\boldsymbol{w}_m\|_H \|\mathrm{A}\boldsymbol{\varphi}\|_H \leq C \|\boldsymbol{u}_m\|_{D(A)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{D(A)}, \\ |(\boldsymbol{f}(t), P_m\boldsymbol{\varphi})| \leq \|\boldsymbol{f}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|P_m\boldsymbol{\varphi}\|_H \leq C \|\boldsymbol{f}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{D(A)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\boldsymbol{w}_m'\|_{L^2(0,T;D(A)')} \leq C \left(\|\boldsymbol{u}_m\|_{L^2(0,T;D(A))} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} \right),$$

de onde concluímos que

$$\|\boldsymbol{u}_m'\|_{L^2(0,T;H)} \leq \left\|S_\alpha^{-1}\right\| \|\boldsymbol{w}_m'\|_{L^2(0,T;D(A)')} \leq C.$$

Pelo Lema 1.6, temos que existe $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(\mathrm{A})) \cap C([0,T];H)$, tal que, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_m \rightharpoonup \boldsymbol{u} \quad & \text{em} \quad L^2(0,T;D(\mathrm{A})), \\ \boldsymbol{u}_m \to \boldsymbol{u} \quad & \text{em} \quad L^2(0,T;V), \\ \boldsymbol{u}_m \to \boldsymbol{u} \quad & \text{em} \quad C([0,T];H).\end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_m &\rightharpoonup \boldsymbol{w} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H), \\ \boldsymbol{w}_m &\to \boldsymbol{w} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V'), \\ \boldsymbol{w}_m &\to \boldsymbol{w} \quad \text{em} \quad C([0,T];D(\mathrm{A})'). \end{aligned}$$

Notemos que (1.6)-(1.7) é equivalente a

$$(\boldsymbol{w}_m'(t),\boldsymbol{z}) + \nu(\boldsymbol{w}_m(t),\mathrm{A}\boldsymbol{z}) + \left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{w}_m(t)),\boldsymbol{z}\right) = (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{z}), \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{u}_m(0) = P_m\boldsymbol{u}_0, \tag{1.13}$$

para todo $\boldsymbol{z} \in H_m$ e q.t.p. em $[0,T]$.

Seja $\psi \in C^1([0,T])$ tal que $\psi(T)=0$. Multiplicando (1.12) por $\psi(t)$, integrando em $[0,T]$ e tomando $\boldsymbol{z} = P_m\boldsymbol{v}$, com $\boldsymbol{v} \in D(\mathrm{A})$, tem-se

$$\int_0^T (\boldsymbol{w}_m'(t),\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt + \nu\int_0^T (\boldsymbol{w}_m(t),\mathrm{A}\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt + \int_0^T \left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{w}_m(t)),P_m\boldsymbol{v}\right)\psi(t)\,dt$$
$$= \int_0^T (\boldsymbol{f}(t),P_m\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt.$$

Mas, por integração por partes, temos

$$\int_0^T (\boldsymbol{w}_m'(t),\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt = -(\boldsymbol{w}_m(0),\boldsymbol{v})\psi(0) - \int_0^T (\boldsymbol{w}_m(t),\boldsymbol{v})\psi'(t)\,dt.$$

Logo,

$$-\int_0^T (\boldsymbol{w}_m(t),\boldsymbol{v})\psi'(t)\,dt + \nu\int_0^T (\boldsymbol{w}_m(t),\mathrm{A}\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt + \int_0^T \left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{w}_m(t)),P_m\boldsymbol{v}\right)\psi(t)\,dt$$
$$= (P_m\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v})_\alpha\psi(0) + \int_0^T (\boldsymbol{f}(t),P_m\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt.$$

Usando que $\boldsymbol{w}_m \rightharpoonup \boldsymbol{w}$ em $L^2(0,T;H)$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\int_0^T (\boldsymbol{w}_m(t),\boldsymbol{v})\psi'(t)\,dt &= \int_0^T (\boldsymbol{w}(t),\boldsymbol{v})\psi'(t)\,dt, \\ \lim_{m\to\infty}\int_0^T (\boldsymbol{w}_m(t),\mathrm{A}\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt &= \int_0^T (\boldsymbol{w}(t),\mathrm{A}\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Além disso,

$$\left|\int_0^T \left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t),\boldsymbol{w}_m(t)),P_m\boldsymbol{v}\right)\psi(t)\,dt - \int_0^T \left\langle\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{w}(t)),\boldsymbol{v}\right\rangle\psi(t)\,dt\right| \le I_m^{(1)} + I_m^{(2)} + I_m^{(3)},$$

com

$$
I_m^{(1)} = \left| \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), P_m\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \right\rangle \psi(t)\, dt \right|,
$$

$$
I_m^{(2)} = \left| \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t) - \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}_m(t)), \boldsymbol{v} \right\rangle \psi(t)\, dt \right|,
$$

$$
I_m^{(3)} = \left| \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}_m(t) - \boldsymbol{w}(t)), \boldsymbol{v} \right\rangle \psi(t)\, dt \right|.
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
I_m^{(1)} &\leq C \left\| P_m\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \right\|_{D(A)} \int_0^T \left\| \boldsymbol{u}_m(t) \right\|_V \left\| \boldsymbol{w}_m(t) \right\|_H |\psi(t)|\, dt \\
&\leq C \left\| P_m\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \right\|_{D(A)} \left\| \boldsymbol{u}_m \right\|_{L^2(0,T;V)} \left\| \boldsymbol{w}_m \right\|_{L^2(0,T;H)} \left\| \psi \right\|_{L^\infty(0,T)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
I_m^{(2)} &\leq C \left\| \boldsymbol{v} \right\|_{D(A)} \int_0^T \left\| \boldsymbol{u}_m(t) - \boldsymbol{u}(t) \right\|_V \left\| \boldsymbol{w}_m(t) \right\|_H |\psi(t)|\, dt \\
&\leq C \left\| \boldsymbol{v} \right\|_{D(A)} \left\| \boldsymbol{u}_m - \boldsymbol{u} \right\|_{L^2(0,T;V)} \left\| \boldsymbol{w}_m \right\|_{L^2(0,T;H)} \left\| \psi \right\|_{L^\infty(0,T)}
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\lim_{m\to\infty} I_m^{(1)} = \lim_{m\to\infty} I_m^{(2)} = 0.
$$

Além disso, como a aplicação

$$
\boldsymbol{h} \mapsto \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{h}(t)), \boldsymbol{v} \right\rangle \psi(t)\, dt
$$

é um funcional contínuo sobre $L^2(0,T;H)$ e $\boldsymbol{w}_m \rightharpoonup \boldsymbol{w}$ em $L^2(0,T;H)$, então

$$
\lim_{m\to\infty} I_m^{(3)} = 0.
$$

Logo,

$$
\lim_{m\to\infty} \int_0^T \left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), P_m\boldsymbol{v} \right) \psi(t)\, dt = \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}(t)), \boldsymbol{v} \right\rangle \psi(t)\, dt,
$$

com isso concluímos

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T (\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{v})\psi'(t)\, dt + \nu \int_0^T (\boldsymbol{w}(t), \mathrm{A}\boldsymbol{v})\psi(t)\, dt + \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}(t)), \boldsymbol{v} \right\rangle \psi(t)\, dt \\
= (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v})_\alpha \psi(0) + \int_0^T (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})\psi(t)\, dt. \quad (1.15)
\end{aligned}
$$

Logo, se $\psi \in \mathcal{D}((0,T))$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{w}(t),\boldsymbol{v}) + \nu(\boldsymbol{w}(t),\mathrm{A}\boldsymbol{v}) + \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{w}(t)),\boldsymbol{v}\right\rangle = (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v})$$

em $\mathcal{D}((0,T))$, $\forall \boldsymbol{v} \in D(\mathrm{A})$.

Ou ainda, tomando

$$g(t) = (\boldsymbol{w}(t),\boldsymbol{v}) \text{ e } h(t) = -\nu(\boldsymbol{w}(t),\mathrm{A}\boldsymbol{v}) - \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{w}(t)),\boldsymbol{v}\right\rangle + (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}),$$

temos que

$$g(t) = g(0) + \int_0^t h(s)\,ds.$$

Então, para todo $\psi \in C^1([0,T])$, com $\psi(T) = 0$, temos

$$\int_0^T g(t)\psi'(t)\,dt = \int_0^T \left(g(0) + \int_0^t h(s)\,ds\right)\psi'(t) = -g(0)\psi(0) - \int_0^T h(t)\psi(t)\,dt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\boldsymbol{w}(t),\boldsymbol{v})\psi'(t)\,dt + \nu\int_0^T (\boldsymbol{w}(t),\mathrm{A}\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt + \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{w}(t)),\boldsymbol{v}\right\rangle \psi(t)\,dt \\ = (\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{v})_\alpha\psi(0) + \int_0^T (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Comparando (1.15) e (1.16) tem-se

$$(\boldsymbol{u}(0) - \boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v})_\alpha\psi(0) = 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in D(\mathrm{A}).$$

Logo, para $\psi(0) \neq 0$ e usando o fato que $V = \overline{D(\mathrm{A})}^V$, temos $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$.

Com isso concluímos a prova da existência de solução e agora iremos mostrar a unicidade.

• **Unicidade**

Para mostrarmos a unicidade do problema, suponhamos que $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ são soluções e denotemos $\overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1$ e $\overline{\boldsymbol{w}} = \overline{\boldsymbol{u}} + \alpha^2\mathrm{A}\overline{\boldsymbol{u}}$. Por (1.5) temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t\overline{\boldsymbol{w}}(s),\boldsymbol{\psi}(s)\rangle\,ds + \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_2(s),\boldsymbol{w}_2(s)),\boldsymbol{\psi}(s)\right\rangle ds \\ - \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_1(s),\boldsymbol{w}_1(s)),\boldsymbol{\psi}(s)\right\rangle ds + \nu\int_0^T \langle \mathrm{A}\overline{\boldsymbol{w}}(s),\boldsymbol{\psi}(s)\rangle\,ds = 0, \end{aligned}$$

ou ainda, usando o fato de que $\widetilde{\mathrm{B}}$ é bilinear

$$\int_0^T \langle \partial_t \overline{\boldsymbol{w}}(s), \boldsymbol{\psi}(s) \rangle \; ds + \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\overline{\boldsymbol{u}}(s), \boldsymbol{w}_2(s)), \boldsymbol{\psi}(s) \right\rangle \; ds$$
$$+ \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_1(s), \overline{\boldsymbol{w}}(s)), \boldsymbol{\psi}(s) \right\rangle \; ds + \nu \int_0^T \langle \mathrm{A}\overline{\boldsymbol{w}}(s), \boldsymbol{\psi}(s) \rangle \; ds = 0.$$

Agora, como $\overline{\boldsymbol{u}} \in L^2(0, T; D(\mathrm{A}))$, podemos escolher $\boldsymbol{\psi} = \overline{\boldsymbol{u}}$ e aplicando o Lema 1.13 (iii) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\overline{\boldsymbol{u}}\|_\alpha^2 + \nu \left(\|\nabla \overline{\boldsymbol{u}}\|_H^2 + \alpha^2 \|\mathrm{A}\overline{\boldsymbol{u}}\|_H^2 \right) + \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_1, \overline{\boldsymbol{w}}), \overline{\boldsymbol{u}} \right\rangle = 0.$$

Pelo Lema 1.13 (vi)

$$\begin{aligned}\left| \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_1, \overline{\boldsymbol{w}}), \overline{\boldsymbol{u}} \right\rangle \right| &\leq c \left(\|\boldsymbol{u}_1\|_V^{1/2} \|\boldsymbol{u}_1\|_{D(A)}^{1/2} \|\overline{\boldsymbol{w}}\|_H \|\nabla \overline{\boldsymbol{u}}\|_H + \|\boldsymbol{u}_1\|_{D(A)} \|\overline{\boldsymbol{w}}\|_H \|\overline{\boldsymbol{u}}\|_H^{1/2} \|\overline{\boldsymbol{u}}\|_V^{1/2} \right) \\ &\leq c \|\boldsymbol{u}_1\|_{D(A)} \|\overline{\boldsymbol{w}}\|_H \|\overline{\boldsymbol{u}}\|_V ,\end{aligned}$$

aplicando a desigualdade de Young

$$\left| \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_1, \overline{\boldsymbol{w}}), \overline{\boldsymbol{u}} \right\rangle \right| \leq c \|\boldsymbol{u}_1\|_{D(A)}^2 \|\overline{\boldsymbol{u}}\|_V^2 + \frac{\nu}{2\alpha^2} \|\overline{\boldsymbol{w}}\|_H^2 ,$$

agora notando que

$$\|\overline{\boldsymbol{w}}\|_H^2 = \|\overline{\boldsymbol{u}}\|_\alpha^2 + \alpha^2 (\|\nabla \overline{\boldsymbol{u}}\|_H^2 + \alpha^2 \|\mathrm{A}\overline{\boldsymbol{u}}\|_H^2),$$

obtemos

$$\left| \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_1, \overline{\boldsymbol{w}}), \overline{\boldsymbol{u}} \right\rangle \right| \leq c \|\boldsymbol{u}_1\|_{D(A)}^2 \|\overline{\boldsymbol{u}}\|_\alpha^2 + \frac{\nu}{2\alpha^2} \|\overline{\boldsymbol{u}}\|_H^2 + \frac{\nu}{2} (\|\nabla \overline{\boldsymbol{u}}\|_H^2 + \alpha^2 \|\mathrm{A}\overline{\boldsymbol{u}}\|_H^2).$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \|\overline{\boldsymbol{u}}(t)\|_\alpha^2 + \nu \left(\|\nabla \overline{\boldsymbol{u}}(t)\|_H^2 + \alpha^2 \|\mathrm{A}\overline{\boldsymbol{u}}(t)\|_H^2 \right) \leq c \left(\|\boldsymbol{u}_1(t)\|_{D(A)}^2 + 1 \right) \|\overline{\boldsymbol{u}}(t)\|_\alpha^2$$

e pela desigualdade de Gronwall

$$\|\overline{\boldsymbol{u}}(t)\|_\alpha^2 \leq \|\overline{\boldsymbol{u}}(0)\|_\alpha^2 \exp \left[c \int_0^t \left(\|\boldsymbol{u}_1(s)\|_{D(A)}^2 + 1 \right) \; ds \right] = 0,$$

portanto (1.4) possui uma única solução. ∎

Regularidade

Agora, iremos enunciar dois resultados para a regularidade de solução de (1.14).

Proposição 1.15. Suponhamos que $\boldsymbol{u}_0 \in D(\mathrm{A})$ e $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))$. Se $\boldsymbol{u}$ é a solução de (1.14), então $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;(H^3(\mathbb{T}^3))^3 \cap V) \cap C([0,T];D(\mathrm{A}))$ com $\partial_t \boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)$.

Demonstração: Primeiramente, vamos escolher $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{w}_m(t)$ em (1.12)

$$(\boldsymbol{w}_m'(t), \boldsymbol{w}_m(t)) + \nu(\boldsymbol{w}_m(t), \mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)) + \Big(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), \boldsymbol{w}_m(t)\Big) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{w}_m(t)),$$

logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 + \nu\|\nabla\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 \le \left|\Big(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), \boldsymbol{w}_m(t)\Big)\right| + |(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{w}_m(t))|.$$

Pelo Lema 1.13 (iv)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 + \nu\|\nabla\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 \le C\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_{D(A)}\|\nabla\boldsymbol{w}_m(t)\|_H\|\boldsymbol{w}_m(t)\|_H + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\boldsymbol{w}_m(t)\|_H$$

e pela Desigualdade de Young

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 + \nu\|\nabla\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 &\le C\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_{D(A)}^2\|\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 + \frac{\nu}{2}\|\nabla\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{f}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 + \nu\|\nabla\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 \le \|\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2\Big(C\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_{D(A)}^2 + 1\Big) + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2. \quad (1.17)$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 &\le \left(\|\boldsymbol{w}_m(0)\|_H^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{f}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2\right)\exp\left[\int_0^t \Big(C\|\boldsymbol{u}_m(s)\|_{D(A)}^2 + 1\Big)\,ds\right] \\ &\le \Big(\|\boldsymbol{w}_0\|_H^2 + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))}^2\Big)\exp\left[\int_0^T \Big(C\|\boldsymbol{u}_m(s)\|_{D(A)}^2 + 1\Big)\,ds\right],\end{aligned}$$

com $\boldsymbol{w}_0 = S_\alpha \boldsymbol{u}_0$.

Como $(\boldsymbol{u}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;D(A))$, por (1.11), então $(\boldsymbol{w}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;H)$, o que implica que $\boldsymbol{w} \in L^\infty(0,T;H)$, ou equivalentemente, $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;D(A))$.

Por outro lado, integrando (1.17) de 0 a t, temos

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 + \nu\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{w}_m(s)\|_H^2\,ds &\le \|\boldsymbol{w}_m(0)\|_H^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{w}_m(s)\|_H^2\Big(C\|\boldsymbol{u}_m(s)\|_{D(A)}^2 + 1\Big)\,ds \\ &\quad + \int_0^t \|\boldsymbol{f}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2\,ds \\ &\le \|\boldsymbol{w}_0\|_H^2 + \Big(C\|\boldsymbol{u}_m\|_{L^\infty(0,T;D(A))}^2 + 1\Big)\|\boldsymbol{w}_m\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))}^2 \le C.\end{aligned}$$

Portanto $(\boldsymbol{w}_m)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;V)$, o que implica que $\boldsymbol{w} \in L^2(0,T;V)$, ou equivalentemente, $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;(H^3(\mathbb{T}^3))^3 \cap V)$.

Por outro lado, para todo $\boldsymbol{\varphi} \in V$

$$(\boldsymbol{w}_m'(t), \boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{w}_m'(t), P_m\boldsymbol{\varphi}) = -\nu(\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t), P_m\boldsymbol{\varphi}) - (\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), \boldsymbol{\varphi}) + (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{\varphi}),$$

$$|(\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t), P_m\boldsymbol{\varphi})| = |(\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t), \boldsymbol{\varphi})| = |(\nabla\boldsymbol{w}_m(t), \nabla\boldsymbol{\varphi})| \leq \|\nabla\boldsymbol{w}_m(t)\|_H \|\boldsymbol{\varphi}\|_V .$$

Pelo Lema 1.13 (iv)

$$\begin{aligned}\left|\left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), P_m\boldsymbol{\varphi}\right)\right| &\leq C\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_{D(A)} \|\nabla\boldsymbol{w}_m(t)\|_H \|P_m\boldsymbol{\varphi}\|_H \\ &\leq C\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_{D(A)} \|\nabla\boldsymbol{w}_m(t)\|_H \|\boldsymbol{\varphi}\|_H\end{aligned}$$

e por fim

$$|(\boldsymbol{f}, P_m\boldsymbol{\varphi})| \leq \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|P_m\boldsymbol{\varphi}\|_H \leq \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_H .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{w}_m'\|^2_{L^2(0,T;V')} &\leq C\int_0^T \|\nabla\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 \left(1 + \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2_{D(A)}\right) dt + \|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} \\ &\leq C\|\nabla\boldsymbol{w}_m\|^2_{L^2(0,T;H)} \left(1 + \|\boldsymbol{u}_m\|^2_{L^\infty(0,T;D(A))}\right) + \|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))} \leq C,\end{aligned}$$

logo $\boldsymbol{w}' \in L^2(0,T;V')$, ou equivalentemente, $\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;V)$.

Finalmente, como $\boldsymbol{w} \in W(2,2,V,V')$, então pelo Lema 1.7, $\boldsymbol{w} \in C([0,T];H)$, ou equivalentemente $\boldsymbol{u} \in C([0,T];D(\mathrm{A}))$. ■

Proposição 1.16. Suponhamos que $\boldsymbol{u}_0 \in (H^3(\mathbb{T}^3))^3 \cap V$ e $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))$. Se $\boldsymbol{u}$ é a solução de (1.14), então $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;(H^4(\mathbb{T}^3))^3 \cap V) \cap C([0,T];(H^3(\mathbb{T}^3))^3 \cap V)$ com $\partial_t\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$.

Demonstração: Primeiramente, vamos escolher $\boldsymbol{z} = \mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)$ em (1.12)

$$(\boldsymbol{w}_m'(t), \mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)) + \nu(\boldsymbol{w}_m(t), \mathrm{A}^2\boldsymbol{w}_m(t)) + \left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), \mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)\right) = (\boldsymbol{f}(t), \mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)),$$

logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 + \nu\|\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 \leq \left|\left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), \mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)\right)\right| + |(\boldsymbol{f}(t), \mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t))|.$$

Pelo Lema 1.13 (iv)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla \boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2 + \nu \left\|\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2 \leq C \left\|\boldsymbol{u}_m(t)\right\|_{D(A)} \left\|\nabla \boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H \left\|\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H$$
$$+ \left\|\boldsymbol{f}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \left\|\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H$$

e pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla \boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2 + \nu \left\|\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2 \leq& C \left\|\boldsymbol{u}_m(t)\right\|_{D(A)}^2 \left\|\nabla \boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2 + \frac{\nu}{4}\left\|\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2 \\ &+ \frac{1}{\nu}\left\|\boldsymbol{f}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 + \frac{\nu}{4}\left\|\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\left\|\nabla \boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2 + \nu \left\|\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2 \leq C \left\|\boldsymbol{u}_m(t)\right\|_{D(A)}^2 \left\|\nabla \boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2 + \frac{2}{\nu}\left\|\boldsymbol{f}(t)\right\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2. \quad (1.18)$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall

$$\begin{aligned}\left\|\nabla \boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2 &\leq \left(\left\|\nabla \boldsymbol{w}_m(0)\right\|_H^2 + \frac{2}{\nu}\int_0^t \left\|\boldsymbol{f}(s)\right\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds\right) \exp\left[C\int_0^t \left\|\boldsymbol{u}_m(s)\right\|_{D(A)}^2 ds\right] \\ &\leq \left(\left\|\nabla \boldsymbol{w}_0\right\|_H^2 + \frac{2}{\nu}\left\|\boldsymbol{f}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))}^2\right) \exp\left[C\int_0^T \left\|\boldsymbol{u}_m(s)\right\|_{D(A)}^2 ds\right].\end{aligned}$$

Como $(\boldsymbol{u}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;D(A))$, então $(\boldsymbol{w}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;V)$, o que implica que $\boldsymbol{w} \in L^\infty(0,T;V)$, ou equivalentemente, $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;(H^3(\mathbb{T}^3))^3 \cap V)$.

Por outro lado, integrando (1.18) de 0 a t, temos

$$\begin{aligned}\left\|\nabla \boldsymbol{w}_m(t)\right\|_H^2 + \nu\int_0^t \left\|\mathrm{A}\boldsymbol{w}_m(s)\right\|_H^2 ds \leq \left\|\nabla \boldsymbol{w}_m(0)\right\|_H^2 + C\int_0^t \left\|\boldsymbol{u}_m(s)\right\|_{D(A)}^2 \left\|\nabla \boldsymbol{w}_m(s)\right\|_H^2 ds \\ + \frac{2}{\nu}\int_0^t \left\|\boldsymbol{f}(s)\right\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 ds,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nu \left\|A\boldsymbol{w}_m\right\|_{L^2(0,T;H)}^2 \leq \left\|\nabla \boldsymbol{w}_0\right\|_H^2 + C\left\|\boldsymbol{u}_m\right\|_{L^\infty(0,T;D(A))}^2 \left\|\nabla \boldsymbol{w}_m\right\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \frac{2}{\nu}\left\|\boldsymbol{f}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))}^2.$$

Portanto $(\boldsymbol{w}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$, o que implica que $\boldsymbol{w} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$, ou equivalentemente, $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;(H^4(\mathbb{T}^3))^3 \cap V)$.

Por outro lado, escolhendo $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{w}_m'(t)$ em (1.12)

$$(\boldsymbol{w}_m'(t), \boldsymbol{w}_m'(t)) + \nu(\boldsymbol{w}_m(t), \mathrm{A}\boldsymbol{w}_m'(t)) + \left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), \boldsymbol{w}_m'(t)\right) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{w}_m'(t)),$$

logo,

$$\|\boldsymbol{w}_m'(t)\|_H^2 + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 \leq |\left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}_m(t)), \boldsymbol{w}_m'(t)\right)| + |(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{w}_m'(t))|.$$

Integrando de 0 a t

$$\int_0^t \|\boldsymbol{w}_m'(s)\|_H^2 \, ds + \frac{\nu}{2}\|\nabla \boldsymbol{w}_m(t)\|_H^2 \leq \frac{\nu}{2}\|\nabla \boldsymbol{w}_m(0)\|_H^2 + \int_0^t \left|\left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_m(s), \boldsymbol{w}_m(s)), \boldsymbol{w}_m'(s)\right)\right| ds + \int_0^t |(\boldsymbol{f}(s), \boldsymbol{w}_m'(s))| \, ds,$$

pelo Lema 1.13 (iv) e a desigualdade de Young

$$\int_0^t \|\boldsymbol{w}_m'(s)\|_H^2 \, ds \leq \frac{\nu}{2}\|\nabla \boldsymbol{w}_0\|_H^2 + C\int_0^t \|\boldsymbol{u}_m(s)\|_{D(A)}^2 \|\nabla \boldsymbol{w}_m(s)\|_H^2 \, ds + \frac{1}{4}\int_0^t \|\boldsymbol{w}_m'(s)\|_H \, ds + \int_0^t \|\boldsymbol{f}(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}^2 \, ds + \frac{1}{4}\int_0^t \|\boldsymbol{w}_m'(s)\|_H \, ds.$$

Portanto,

$$\int_0^t \|\boldsymbol{w}_m'(s)\|_H^2 \, ds \leq \nu \|\nabla \boldsymbol{w}_0\|_H^2 + C\|\boldsymbol{u}_m\|_{L^\infty(0,T;D(A))}^2 \|\nabla \boldsymbol{w}_m\|_{L^2(0,T;H)}^2 + 2\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))}^2,$$

de onde segue que $\boldsymbol{w}' \in L^2(0,T;H)$, ou equivalentemente, $\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$.

Finalmente, como $\boldsymbol{w} \in W(2,2,D(\mathrm{A}),H)$, então pelo Lema 1.7, $\boldsymbol{w} \in C([0,T];V)$, ou equivalentemente $\boldsymbol{u} \in C([0,T];(H^3(\mathbb{T}^3))^3 \cap V)$. ■

1.4 Equação de Vlasov

Nesta seção iremos estudar as principais propriedades da seguinte equação:

$$\begin{aligned} \partial_t f + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{v}}\cdot[(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{v})f] &= 0 \qquad \text{em } (0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3, \\ f(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) &= f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \qquad \text{em } \mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{1.19}$$

onde $\boldsymbol{F} : [0,T]\times\mathbb{T}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Seja $\boldsymbol{G} : [0,T]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

(P1) $\boldsymbol{G} \in C([0,T]\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$;

(P2) $\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G} \in C([0,T]\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$;

(P3) $|\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x})| \leq \kappa(1+|\boldsymbol{x}|)$, para algum $\kappa > 0$ e para todo $(t,\boldsymbol{x}) \in [0,T]\times\mathbb{R}^m$.

Lema 1.17. Seja $\boldsymbol{G} : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo (P1)-(P3), então para cada $(t,\boldsymbol{x}) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$ fixado, a equação diferencial

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}'(s) &= \boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{X}(s)), \\ \boldsymbol{X}(t) &= \boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{1.20}$$

possui uma única solução $\boldsymbol{X}(s;t,\boldsymbol{x})$ definida para todo $s \in [0,T]$. Além disso, $\boldsymbol{X} \in C^1([0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R}^n)$.

A demonstração deste Lema pode ser encontrada em Golse [22, p. 18] e Mouzoni [33, p. 11].

Observação 1.6. Se $\boldsymbol{F} : [0,T]\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ satisfaz (P1)-(P3) com respeito a $(t,\boldsymbol{x})$, então $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{v})$ satisfaz (P1)-(P3) com respeito a $(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$. De fato, (P1) e (P2) são satisfeitas imediatamente. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})|^2 = |\boldsymbol{v}|^2 + |\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{v}|^2 \leq 3|\boldsymbol{v}|^2 + 2|\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})|^2 \leq 3|\boldsymbol{v}|^2 + 2\kappa^2(1+|\boldsymbol{x}|)^2 \\ \leq \max(\sqrt{3},\sqrt{2}\kappa)^2(1+|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})|)^2, \end{aligned}$$

portanto,

$$|\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})| \leq \bar{\kappa}(1+|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})|),$$

o que mostra que $\boldsymbol{G}$ satisfaz (P3).

A demonstração dos seguintes Teoremas podem ser encontradas em Golse [22, p. 21] e Mouzoni [33, p. 27].

Teorema 1.18. Sejam $f_{\mathtt{in}} \in C^1(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$, $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{v})$ e $\boldsymbol{F}$ satisfazendo (P1)-(P3), então existe uma única solução clássica $f \in C^1([0,T]\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$ de (1.19). Além disso,

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = e^{3t} f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{\chi}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})), \tag{1.21}$$

com $\boldsymbol{\chi}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{X}(0;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ e $\boldsymbol{X}(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ a única solução de (1.20).

Definição 1.6. Dizemos que f é solução fraca de (1.19), se para todo $\phi \in C^1([0,T]\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$ com suporte compacto na variável $\boldsymbol{v}$ e $\phi(T,\cdot,\cdot) = 0$, temos

$$-\int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f[\partial_t\phi + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi + (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\phi]\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}}\phi(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}.$$

Teorema 1.19. Sejam $f_{\mathtt{in}} \in L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v})$ e $\boldsymbol{F}$ satisfazendo (P1)-(P3), então existe uma única solução fraca $f \in C([0,T]; L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$ de (1.19). Além disso,

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = e^{3t} f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{\chi}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})), \tag{1.22}$$

com $\boldsymbol{\chi}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{X}(0;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ e $\boldsymbol{X}(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ a única solução de (1.20).

1.5 Equação de Vlasov-Fokker-Planck

Nesta seção iremos resumir resultados a respeito da existência, unicidade e regularidade da solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \partial_t f + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{v}} \cdot [(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}) f - \nabla_{\boldsymbol{v}} f] = 0 \text{ em } (0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \text{ em } \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{1.23}$$

onde $\boldsymbol{E} : [0,T] \times \mathbb{T}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $f_0 : \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ são dados.

Para analisar a existência e unicidade de solução de (1.23), precisamos supor que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\boldsymbol{E}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} < \infty, \qquad \sup_{t\in[0,T]} \|\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{E}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} < \infty.$$

Agora, iremos introduzir o conceito de solução fundamental.

Definição 1.7. Uma solução fundamental de (1.23) é uma função $\Gamma(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})$ definida para $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}),(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$ e $0 \le \tau < t \le T$, satisfazendo as seguintes condições:

- Para cada $(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) \in [0,T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$ fixado, $\Gamma(\cdot,\cdot,\cdot,\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})$ satisfaz

$$\partial_t f + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{v}} \cdot [(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{v}) f - \nabla_{\boldsymbol{v}} f] = 0 \text{ em } (\tau,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

- Para cada função $f_0 : \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ contínua e limitada

$$\lim_{t\to\tau} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \Gamma(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) f_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} = f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}).$$

Para encontrarmos Γ, primeiro precisamos introduzir o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \partial_t G + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} G - \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}} G - \Delta_{\boldsymbol{v}} G = 0 \text{ em } (\tau,T) \times \mathbb{R}^6, \\ G(\tau,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\nu}) \text{ em } \mathbb{R}^6. \end{aligned} \tag{1.24}$$

De forma análoga à definição anterior iremos definir o que é uma solução fundamental para (1.24).

Definição 1.8. Uma solução fundamental de (1.24) é uma função $G(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})$ definida para $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}), (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^6$ e $0 \leq \tau < t \leq T$, satisfazendo as seguintes condições:

- Para cada $(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^6$ fixado, $G(\cdot, \cdot, \cdot, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})$ satisfaz

$$\partial_t f + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f - \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}} f - \Delta_{\boldsymbol{v}} f = 0 \text{ em } (\tau, T) \times \mathbb{R}^6.$$

- Para cada função $f_0 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ contínua e limitada

$$\lim_{t \to \tau} \iint_{\mathbb{R}^6} G(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) f_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \, d\boldsymbol{\xi} \, d\boldsymbol{\nu} = f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}).$$

Considerando estes problemas e definições, temos o seguinte resultado

Lema 1.20. Existe uma única solução fundamental de (1.24) dada por

$$\begin{aligned} G(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = {} & \left[\frac{e^{t-\tau}}{4\pi \zeta^{1/2}(t-\tau)} \right]^3 \exp\left\{ -\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\nu}|^2}{4(t-\tau)} \right\} \\ & \times \exp\left\{ -\frac{\left| \dfrac{e^{t-\tau} - 1}{t - \tau} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{v} e^{t-\tau} \right|^2}{4(t-\tau)^{-1} \zeta(t-\tau)} \right\}, \end{aligned}$$

onde

$$\zeta(t) = \frac{e^{2t} - 1}{2} t - (e^t - 1)^2.$$

A demonstração deste Lema pode ser encontrada em O'Dwyer [34, p. 21] e Victory e O'Dwyer [38, p. 111].

Definamos

$$H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^3} G(t, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^3} G(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\nu}).$$

Os seguintes resultados podem ser encontrados em Clark [16, p. 8-27]:

Lema 1.21. Existe uma única Γ solução fundamental de (1.23). Além disso, Γ satisfaz a seguinte equação integral

$$\begin{aligned} \Gamma(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = {} & H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \\ & + \int_\tau^t \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \nabla_{\boldsymbol{\nu}'} H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau', \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\nu}') \boldsymbol{E}(\tau', \boldsymbol{\xi}') \Gamma(\tau', \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\nu}', \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \, d\boldsymbol{\xi}' \, d\boldsymbol{\nu}' \, d\tau'. \end{aligned}$$

Definição 1.9. Dizemos que $f : [0,T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ é uma **solução clássica** de (1.23), se satisfaz (1.23) pontualmente, se f é contínua com as derivadas de primeira ordem em relação as variáveis $\boldsymbol{x}, t$ contínuas e com as derivadas até a segunda ordem em relação a variável $\boldsymbol{v}$ contínuas.

Teorema 1.22. Se f_0 é uma função contínua e limitada, então existe uma única solução clássica de (1.23) dada por

$$f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \Gamma(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) f_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu},$$

com Γ a única solução fundamental de (1.23).

Observação 1.7. Notemos que f pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = &\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) f_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} \\ &+ \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_{\boldsymbol{\nu}'} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau',\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\nu}') \boldsymbol{E}(\tau',\boldsymbol{\xi}') f(\tau',\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\nu}')\, d\boldsymbol{\xi}'\, d\boldsymbol{\nu}'\, d\tau'. \end{aligned}$$

Finalmente, enunciamos propriedades de H e Γ que serão utilizadas no texto.

Lema 1.23. Sejam H e Γ definidas como anteriormente, então

$$|\nabla_{\boldsymbol{\nu}'} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau',\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\nu}')| \leq C(\beta)(t-\tau')^{-1/2} H(t,\beta\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{v},\tau',\beta\boldsymbol{\xi}',\beta\boldsymbol{\nu}'), \tag{1.25}$$

para todo $0 < \beta < 1$. Além disso,

$$\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \Gamma(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} = e^{3(t-\tau)}, \tag{1.26}$$

sempre que $t - \tau > 0$, e

$$\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \Gamma(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} = 1, \tag{1.27}$$

sempre que $t - \tau > 0$.

Capítulo 2

Equações de α-Navier-Stokes-Vlasov

Neste Capítulo vamos considerar as equações de α-Navier-Stokes para o fluido, acopladas com uma equação do tipo Vlasov para a densidade das partículas, que modelam a interação entre um fluido e um spray. As equações são acopladas através de uma força de arrasto, que depende da velocidade relativa do fluido e das partículas, ou seja, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, e na função densidade f. Mais precisamente, $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ e $p(t, \boldsymbol{x})$ satisfazem o seguinte sistema:

$$
\begin{aligned}
\partial_t f + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{v}} \cdot [(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) f] = 0 &\qquad \text{em } (0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (2.1)\\
\partial_t \boldsymbol{w} - \nu \Delta \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{w}) + \nabla p & \\
= - \int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} &\qquad \text{em } (0,T) \times \mathbb{T}^3, \quad (2.2)\\
\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \alpha^2 \Delta \boldsymbol{u} &\qquad \text{em } (0,T) \times \mathbb{T}^3, \quad (2.3)\\
\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u} = 0 &\qquad \text{em } (0,T) \times \mathbb{T}^3, \quad (2.4)\\
f(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) &\qquad \text{em } \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (2.5)\\
\boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}) &\qquad \text{em } \mathbb{T}^3, \quad (2.6)
\end{aligned}
$$

sendo $0 < T < \infty$, $f_{\mathtt{in}}$ e $\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}$ dados.

Observação 2.1. Iremos considerar o parâmetro $\nu = 1$.

Iremos analisar as seguintes questões referentes às soluções de (2.1)-(2.6):

— existência de solução fraca;

— regularidade da solução;

— comportamento das soluções quando $\alpha \to 0^+$.

2.1 Existência de Solução Fraca

Com relação aos dados, assumimos que

- $f_{\texttt{in}} \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$,
- $|\boldsymbol{v}|^2 f_{\texttt{in}} \in L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$,
- $f_{\texttt{in}} \geq 0$,
- $\boldsymbol{u}_{\texttt{in}} \in V$.

Agora, iremos introduzir o conceito de solução fraca de (2.1)-(2.6):

Definição 2.1. Dizemos que $(\boldsymbol{u}, f)$ é solução fraca de (2.1)-(2.6) se:

- $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A})) \cap C([0,T];V)$;
- $\partial_t \boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H)$;
- $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \geq 0$, $(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \in (0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$;
- $f \in L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$;
- $f|\boldsymbol{v}|^2 \in L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$;
- Para todo $\phi \in C^1([0,T]\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$ com suporte compacto na variável $\boldsymbol{v}$ e $\phi(T,\cdot,\cdot) = 0$, temos
$$-\int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f[\partial_t\phi+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\phi]\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\texttt{in}}\phi(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}.$$
- Para todo $\boldsymbol{\psi} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$ temos
$$\int_0^T \langle \partial_t \boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{\psi}(s)\rangle\,ds + \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(s),\boldsymbol{w}(s)), \boldsymbol{\psi}(s)\right\rangle ds + \int_0^T \langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{\psi}(s)\rangle\,ds$$
$$= -\int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds,$$

com $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \alpha^2 \mathrm{A}\boldsymbol{u}$.

Observação 2.2. Pela definição de $\boldsymbol{w}$ e a regularidade de $\boldsymbol{u}$, temos que $\boldsymbol{w} \in L^2(0,T,H) \cap C([0,T],V')$ e $\partial_t \boldsymbol{w} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A})')$, portanto a formulação fraca está bem definida.

A seguir enunciamos o principal resultado desta seção:

Teorema 2.1. Para cada $T > 0$ existe pelo menos uma solução fraca $(\boldsymbol{u}, f)$ de (2.1)-(2.6) satisfazendo a seguinte desigualdade de energia:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} M_2 f(t) + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}(t)\|_\alpha^2 + \int_0^t \left(\|\nabla \boldsymbol{u}(s)\|_H^2 + \alpha^2 \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}(s)\|_H^2 \right) ds \\ &+ \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2 \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v} \, ds \leq \frac{1}{2} M_2 f_{\mathtt{in}} + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\|_\alpha^2 , \end{aligned} \tag{2.7}$$

para quase todo $t \in [0,T]$. Além disso,

$$\|f\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq e^{3T} \|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} .$$

Para provarmos este Teorema, precisaremos de 4 passos intermediários:

— Vamos propor uma versão regularizada de (2.1)-(2.6);

— Vamos considerar um esquema iterativo e provar que as suas soluções formam uma sequência que converge para uma solução do problema regularizado;

— Provar que existe uma sequência de soluções do problema regularizado que converge para uma solução local de (2.1)-(2.6);

— Estender a solução local a todo intervalo $[0,T]$.

2.1.1 Problema Regularizado

Agora iremos introduzir uma versão regularizada de (2.1)-(2.6), afim de aplicar os resultados desenvolvidos nas seções 1.3 e 1.4.

Sejam $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência regularizante e $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de corte, ambas sobre $\mathbb{R}^3$ e definamos o seguinte problema

$$\partial_t f_k + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f_k + \nabla_{\boldsymbol{v}} \cdot [(\theta_k * \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v}) f_k] = 0 \quad \text{em} \quad (0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{2.8}$$

$$\partial_t \boldsymbol{w}_k - \Delta \boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{u}_k \times (\nabla \times \boldsymbol{w}_k) + \nabla p_k = -\int_{\mathbb{R}^3} f_k (\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v}) \gamma_k(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} \quad \text{em} \quad (0,T) \times \mathbb{T}^3, \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{u}_k - \alpha^2 \Delta \boldsymbol{u}_k \quad \text{em} \quad (0,T) \times \mathbb{T}^3, \tag{2.10}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}_k = 0 \quad \text{em} \quad (0,T) \times \mathbb{T}^3, \tag{2.11}$$

$$f_k(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = f^k_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \quad \text{em} \quad \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{u}_k(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}) \quad \text{em} \quad \mathbb{T}^3, \tag{2.13}$$

com $f^k_{\mathtt{in}} = \bar{\theta}_k * g_k$, sendo $(\bar{\theta}_k)$ uma sequência regularizante sobre $\mathbb{R}^6$; $g_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \chi_k(\boldsymbol{v}) f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ e χ_k é a função característica do conjunto $B(0,k)$.

Observação 2.3. Da definição de $f^k_{\mathtt{in}}$ temos que

- $f^k_{\mathtt{in}} \in C^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$;
- $f^k_{\mathtt{in}}$ possui suporte compacto em $\boldsymbol{v}$;
- $f^k_{\mathtt{in}} \to f_{\mathtt{in}}$ em $L^p(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, para todo $1 \leq p < \infty$;
- $f^k_{\mathtt{in}} \overset{*}{\rightharpoonup} f_{\mathtt{in}}$, a menos de subsequência, em $L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Além disso, ainda temos as seguintes propriedades.

Lema 2.2. Seja $f^k_{\mathtt{in}}$ definida anteriormente, então

$$M_2 f^k_{\mathtt{in}} \leq 4(\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} + M_2 f_{\mathtt{in}}), \tag{2.14}$$

$$\lim_{k \to \infty} M_2 f^k_{\mathtt{in}} = M_2 f_{\mathtt{in}}, \tag{2.15}$$

$$\left\| f^k_{\mathtt{in}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq \|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)} . \tag{2.16}$$

Lembremos que

$$M_2 f^k_{\mathtt{in}} = \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^2 f^k_{\mathtt{in}}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}$$

é o segundo momento de $f^k_{\mathtt{in}}$.

Demonstração: Primeiramente, notemos que trocando a ordem de integração temos que

$$\begin{aligned} M_2 f_{\texttt{in}}^k &= \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^2 \left(\iint_{\mathbb{R}^6} \bar{\theta}_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\chi_k(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\nu}) f_{\texttt{in}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\nu}) d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} \right) d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^6} \bar{\theta}_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) \left(\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^2 \chi_k(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\nu}) f_{\texttt{in}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\nu}) d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} \right) d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo uma mudança de variáveis

$$\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^2 \chi_k(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\nu}) f_{\texttt{in}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\nu}) d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{Q_{\boldsymbol{\xi}}} |\bar{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{\nu}|^2 \chi_k(\bar{\boldsymbol{v}}) f_{\texttt{in}}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{v}}) d\bar{\boldsymbol{x}}\, d\bar{\boldsymbol{v}},$$

com $Q_{\boldsymbol{\xi}} = [0,1]^3 - \boldsymbol{\xi}$.

Como $f_{\texttt{in}}$ é periódica em $\boldsymbol{x}$, então

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{Q_{\boldsymbol{\xi}}} |\bar{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{\nu}|^2 \chi_k(\bar{\boldsymbol{v}}) f_{\texttt{in}}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{v}}) d\bar{\boldsymbol{x}}\, d\bar{\boldsymbol{v}} = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\bar{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{\nu}|^2 \chi_k(\bar{\boldsymbol{v}}) f_{\texttt{in}}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{v}}) d\bar{\boldsymbol{x}}\, d\bar{\boldsymbol{v}}.$$

Além disso,

$$|\bar{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{\nu}|^2 \le 2(|\bar{\boldsymbol{v}}|^2 + |\boldsymbol{\nu}|^2) \le 2(1+|\bar{\boldsymbol{v}}|^2)(1+|\boldsymbol{\nu}|^2),$$

logo,

$$M_2 f_{\texttt{in}}^k \le 2(\|f_{\texttt{in}}\|_{L^1(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + M_2 f_{\texttt{in}}) \iint_{\mathbb{R}^6} \bar{\theta}_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})(1+|\boldsymbol{\nu}|^2)\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^6} \bar{\theta}_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})(1+|\boldsymbol{\nu}|^2)\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} &= \iint_{B(0,1/k)} \bar{\theta}_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})(1+|\boldsymbol{\nu}|^2)\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} \\ &\le (1+k^{-2}) \iint_{B(0,1/k)} \bar{\theta}_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} \le 2, \end{aligned}$$

então obtemos (2.14).

Agora,

$$M_2 f^k_{\mathtt{in}} - M_2 f_{\mathtt{in}} = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \iint_{\mathbb{R}^6} \bar{\theta}_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \left(|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\nu}|^2 \chi_k(\boldsymbol{v}) - |\boldsymbol{v}|^2\right)\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}$$

$$= \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \iint_{\mathbb{R}^6} \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \left(|\boldsymbol{v}+k^{-1}\boldsymbol{\nu}|^2 \chi_k(\boldsymbol{v}) - |\boldsymbol{v}|^2\right)\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}$$

$$= \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \iint_{\mathbb{R}^6} \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) |\boldsymbol{v}|^2 \left(\chi_k(\boldsymbol{v}) - 1\right)\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}$$

$$+ \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \iint_{\mathbb{R}^6} \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \chi_k(\boldsymbol{v}) \left(2k^{-1}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nu} + k^{-2}|\boldsymbol{\nu}|^2\right)\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}$$

e como $2\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nu} \leq |\boldsymbol{v}|^2 + |\boldsymbol{\nu}|^2$, temos que

$$|M_2 f^k_{\mathtt{in}} - M_2 f_{\mathtt{in}}| \leq \iint_{\mathbb{R}^6} \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) |\boldsymbol{v}|^2 \left(1 - \chi_k(\boldsymbol{v})\right)\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}$$

$$+ k^{-1} \iint_{\mathbb{R}^6} \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \chi_k(\boldsymbol{v}) |\boldsymbol{v}|^2\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}$$

$$+ k^{-1}(k^{-1}+1) \iint_{\mathbb{R}^6} \bar{\theta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) |\boldsymbol{\nu}|^2\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \chi_k(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}$$

$$\leq \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) |\boldsymbol{v}|^2 \left(1 - \chi_k(\boldsymbol{v})\right)\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} + k^{-1}(M_2 f_{\mathtt{in}} + (k^{-1}+1) M_0 f_{\mathtt{in}}),$$

como $\chi_k \to 1$ pontualmente e $|v|^2 f_{\mathtt{in}} \in L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, então do Teorema da convergência dominada, o lado direito da desigualdade tende a zero quando $k \to \infty$, de onde concluímos (2.15).

Por último, da definição de $f^k_{\mathtt{in}}$ e aplicando a desigualdade de Young para convoluções estimamos

$$\left\| f^k_{\mathtt{in}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq \left\| \bar{\theta}_k \right\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \left\| g_k \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq \left\| f_{\mathtt{in}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)},$$

de onde segue (2.16). ■

Agora estamos prontos para definir em que sentido $(\boldsymbol{u}_k, f_k)$ é uma solução fraca de (2.8)-(2.13).

Definição 2.2. Dizemos que $(\boldsymbol{u}_k, f_k)$ é solução fraca de (2.8)-(2.13) se:

- $\boldsymbol{u}_k \in L^2(0,T;D(\mathrm{A})) \cap C([0,T];V)$;
- $\partial_t \boldsymbol{u}_k \in L^2(0,T;H)$;
- $\boldsymbol{u}_k(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}$ em V;
- $f_k \in C^1([0,T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ tal que o suporte de f_k em relação a $\boldsymbol{v}$ é compacto;
- f_k é solução clássica de (2.9) com condição inicial (2.12);
- Para todo $\boldsymbol{\psi} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$ temos

$$\begin{aligned}\langle \partial_t \boldsymbol{w}_k(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle + \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k(t), \boldsymbol{w}_k(t), \boldsymbol{\psi}(t)\right\rangle + \langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}_k(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle \\ = -\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(t)(\boldsymbol{u}_k(t) - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi}(t)\, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x},\end{aligned} \tag{2.17}$$

  para quase todo t em $(0,T)$.

2.1.2 Esquema Iterativo

Para encontrarmos uma solução de (2.8)-(2.13), teremos que analisar um sistema auxiliar.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado e para qualquer $n \in \mathbb{N}$, desejamos encontrar uma sequência $(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, f_k^n)$ satisfazendo o seguinte esquema iterativo:

$$\partial_t f_k^n + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} f_k^n + \nabla_{\boldsymbol{v}}\cdot[(\theta_k * \boldsymbol{u}_k^n - \boldsymbol{v})f_k^n] = 0 \quad \text{em} \quad (0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3, \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \boldsymbol{w}_k^{n+1} - \Delta \boldsymbol{w}_k^{n+1} - \boldsymbol{u}_k^{n+1} \times (\nabla \times \boldsymbol{w}_k^{n+1}) + \nabla p_k^{n+1} \\ = -\int_{\mathbb{R}^3} f_k^n(\boldsymbol{u}_k^n - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} \quad \text{em} \quad (0,T)\times\mathbb{T}^3,\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{w}_k^{n+1} = \boldsymbol{u}_k^{n+1} - \alpha^2 \Delta \boldsymbol{u}_k^{n+1} \quad \text{em} \quad (0,T)\times\mathbb{T}^3, \tag{2.20}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot \boldsymbol{u}_k^{n+1} = 0 \quad \text{em} \quad (0,T)\times\mathbb{T}^3, \tag{2.21}$$

$$f_k^n(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = f_{\mathtt{in}}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \quad \text{em} \quad \mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3, \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{u}_k^{n+1}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}) \quad \text{em} \quad \mathbb{T}^3, \tag{2.23}$$

com $\boldsymbol{u}_k^0 = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}$.

Vamos introduzir o conceito de solução fraca de (2.18)-(2.23):

Definição 2.3. Dizemos que $(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, f_k^n)$ é solução fraca de (2.18)-(2.23) se:

- $\boldsymbol{u}_k^{n+1} \in C([0,T];V) \cap L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$;
- $\partial_t \boldsymbol{u}_k^{n+1} \in L^2(0,T;H)$;
- $\boldsymbol{u}_k^{n+1}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x})$ em V;
- $f_k^n \in C^1([0,T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap L^\infty((0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$;
- Para todo $\boldsymbol{\psi} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$ temos
$$\begin{aligned}\left\langle \partial_t \boldsymbol{w}_k^{n+1}(t), \boldsymbol{\psi}(t)\right\rangle + \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}(t), \boldsymbol{w}_k^{n+1}(t)), \boldsymbol{\psi}(t)\right\rangle + \left\langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}_k^{n+1}(t), \boldsymbol{\psi}(t)\right\rangle \\ = -\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k^n(t)(\boldsymbol{u}_k^n(t) - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\psi}(t)\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v},\end{aligned} \tag{2.24}$$
para quase todo t em $[0,T]$.

A seguinte Proposição garante a existência e unicidade de solução fraca do esquema iterativo (2.18)-(2.23):

Proposição 2.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um único par $(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, f_k^n)$ satisfazendo (2.18)-(2.23).

Demonstração: Por simplicidade, escreveremos $\boldsymbol{u}^n$ e f^n ao invés de $\boldsymbol{u}_k^n$ e f_k^n. Para mostrarmos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um único par $(\boldsymbol{u}^{n+1}, f^n)$, iremos aplicar o processo de indução finita:

(i) $n = 0$.

Temos que $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}$ é dado. Além disso, como $\theta_k * \boldsymbol{u}^0$ satisfaz as propriedades (P1)-(P3) vistas na Seção 1.4 e tendo em vista a Observação 1.6, temos que para cada $(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ fixado, podemos aplicar o Lema 1.17 para garantir que existe uma única solução $(\boldsymbol{X}^0(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \boldsymbol{V}^0(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))$ da equação diferencial
$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{X}^0}{ds}(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{V}^0(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}),\\ \frac{d\boldsymbol{V}^0}{ds}(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) &= (\theta_k * \boldsymbol{u}^0)(s, \boldsymbol{X}^0(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) - \boldsymbol{V}^0(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}),\\ \boldsymbol{X}^0(t;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{V}^0(t;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v},\end{aligned}$$

para todo $s \in [0,T]$.

Além disso, $f^k_{\texttt{in}} \in C^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, então aplicando o Teorema 1.18, temos que para $n = 0$, a equação (2.18) com a condição inicial (2.22) possui uma única solução $f^0 \in C^1([0,T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ dada por

$$f^0(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = e^{3t} f^k_{\texttt{in}}(\boldsymbol{\chi}^0(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})), \tag{2.25}$$

com $\boldsymbol{\chi}^0(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{X}^0(0;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \boldsymbol{V}^0(0;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))$.

Por outro lado, como $f^k_{\texttt{in}} \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, então $f^0 \in L^\infty((0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Além disso, $\boldsymbol{u}^0 \in V$ e

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{F}^0(t,\boldsymbol{x})| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} f^0(\boldsymbol{u}^0 - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} \right| &\leq \left\| f^0 \right\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \int_{B(0,2k)} |\boldsymbol{u}^0| + |\boldsymbol{v}|\, d\boldsymbol{v} \\ &\leq C(k) \left\| f^0 \right\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} (|\boldsymbol{u}^0| + 1). \end{aligned}$$

Portanto, $\boldsymbol{F}^0 \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))$ e como $\boldsymbol{u}_{\texttt{in}} \in V$, temos pelo Teorema 1.14 que existe uma única $\boldsymbol{u}^1 \in C([0,T];V) \cap L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$ tal que $\partial_t \boldsymbol{u}^1 \in L^2(0,T;H)$, $\boldsymbol{u}^1(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\texttt{in}}(\boldsymbol{x})$ em V e satisfazendo (2.24) (para $n = 0$).

(ii) Suponhamos agora que a nossa afirmação é válida para $n = m - 1$, para algum $m \in \mathbb{N}$, ou seja, existe um par $(\boldsymbol{u}^m, f^{m-1})$ solução fraca de (2.18)-(2.23) (para $n = m - 1$). Então iremos provar que existe $(\boldsymbol{u}^{m+1}, f^m)$ solução fraca de (2.18)-(2.23) (para $n = m$).

Por argumentos análogos ao caso $n = 0$, temos que existe uma única solução $(\boldsymbol{X}^m(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \boldsymbol{V}^m(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))$ da equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{X}^m}{ds}(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{V}^m(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \\ \frac{d\boldsymbol{V}^m}{ds}(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) &= (\theta_k * \boldsymbol{u}^m)(s,\boldsymbol{X}^m(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) - \boldsymbol{V}^m(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \\ \boldsymbol{X}^m(t;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{V}^m(t;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

para todo $s \in [0,T]$.

Além disso, para $n = m$, a equação (2.18) com a condição inicial (2.22) possui uma única solução $f^m \in C^1([0,T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap L^\infty((0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ dada por

$$f^m(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = e^{3t} f^k_{\texttt{in}}(\boldsymbol{\chi}^m(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})), \tag{2.27}$$

com $\boldsymbol{\chi}^m(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{X}^m(0;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \boldsymbol{V}^m(0;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))$.

Por outro lado, para

$$\boldsymbol{F}^m(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f^m(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{v},$$

temos que $\boldsymbol{F}^m \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))$ e assim como antes, existe uma única $\boldsymbol{u}^{m+1} \in C([0,T];V) \cap L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$ tal que $\partial_t \boldsymbol{u}^{m+1} \in L^2(0,T;H)$, $\boldsymbol{u}^{m+1}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x})$ em V e satisfazendo (2.24) (para $n = m$). ■

O seguinte Lema nos da estimativas independentes de n para a solução fraca do esquema iterativo (2.18)-(2.23).

Lema 2.4. A sequência $(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, f_k^n)$ satisfaz as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
\|f_k^n\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} &\leq e^{3T}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}, &(2.28)\\
\left\|\boldsymbol{u}_k^{n+1}\right\|_{L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;D(A))} &\leq C(k), &(2.29)\\
\left\|\partial_t \boldsymbol{u}_k^{n+1}\right\|_{L^2(0,T;H)} &\leq C(k), &(2.30)
\end{aligned}$$

com $C(k)$ independente de n.

Demonstração: Novamente escreveremos $\boldsymbol{u}^n$ e f^n ao invés de $\boldsymbol{u}_k^n$ e f_k^n. Temos de (2.27) que

$$\|f^n\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq e^{3T}\left\|f_{\mathtt{in}}^k\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}$$

e de (2.16)

$$\left\|f_{\mathtt{in}}^k\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq \|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)},$$

portanto, obtemos (2.28).

Por outro lado, escolhendo $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}^{n+1}$ em (2.24) obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\langle \partial_t \boldsymbol{w}^{n+1}(t), \boldsymbol{u}^{n+1}(t)\right\rangle + \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}^{n+1}(t), \boldsymbol{w}^{n+1}(t)), \boldsymbol{u}^{n+1}(t)\right\rangle + \left\langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}^{n+1}(t), \boldsymbol{u}^{n+1}(t)\right\rangle\\
&= -\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f^n(t)(\boldsymbol{u}^n(t) - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\cdot \boldsymbol{u}^{n+1}(t)\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}, \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0,T]$.

Observamos que o primeiro termo pode ser reescrito como

$$\left\langle \partial_t \boldsymbol{w}^{n+1}(t), \boldsymbol{u}^{n+1}(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\boldsymbol{u}^{n+1}(t)\right\|_\alpha^2,$$

(veja por exemplo Temam [36, p. 260]).

Agora, aplicando o Lema 1.13

$$\left\langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}^{n+1}(t), \boldsymbol{u}^{n+1}(t) \right\rangle = \left\| \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}^{n+1} \right\|_H^2 + \alpha^2 \left\| \mathrm{A}\boldsymbol{u}^{n+1} \right\|_H^2,$$

$$\left\langle \widetilde{B}(\boldsymbol{u}^{n+1}(t), \boldsymbol{w}^{n+1}(t)), \boldsymbol{u}^{n+1}(t) \right\rangle = 0.$$

Além disso, usando (2.28) e a desigualdade de Young, temos

$$\left| \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}^{n+1}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} \right|$$

$$\leq \|f^n\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \left(m_0\gamma_k \int_{\mathbb{T}^3} |\boldsymbol{u}^n||\boldsymbol{u}^{n+1}|\, d\boldsymbol{x} + m_1\gamma_k \int_{\mathbb{T}^3} |\boldsymbol{u}^{n+1}| d\boldsymbol{x} \right)$$

$$\leq C(k,T)\, \|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{|\boldsymbol{u}^n|^2}{2} + \frac{|\boldsymbol{u}^{n+1}|^2}{2}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1}{2} + \frac{|\boldsymbol{u}^{n+1}|^2}{2}\, d\boldsymbol{x} \right)$$

$$\leq C(k,T) \left(1 + \|\boldsymbol{u}^n\|_H^2 + \left\| \boldsymbol{u}^{n+1} \right\|_H^2 \right).$$

Observação 2.4. Lembremos que para $\beta \geq 0$,

$$m_\beta\gamma_k = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_k(\boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}|^\beta\, d\boldsymbol{v}.$$

Portanto,

$$\left| \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}^{n+1}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} \right| \leq C(k,T,\alpha) \left(1 + \|\boldsymbol{u}^n\|_\alpha^2 + \left\| \boldsymbol{u}^{n+1} \right\|_\alpha^2 \right).$$

Combinando os resultados anteriores a (2.31), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\boldsymbol{u}^{n+1}\|_\alpha^2 + \Big(\|\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}^{n+1}\|_H^2 &+ \alpha^2 \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}^{n+1}\|_H^2 \Big) \\ &\leq C(k,T,\alpha) \left(1 + \|\boldsymbol{u}^n\|_\alpha^2 + \|\boldsymbol{u}^{n+1}\|_\alpha^2 \right), \end{aligned} \tag{2.32}$$

ou ainda, integrando a desigualdade anterior de 0 a t concluímos

$$\left\| \boldsymbol{u}^{n+1}(t) \right\|_\alpha^2 \leq C(k,T,\alpha) \left(1 + \int_0^t \|\boldsymbol{u}^n(s)\|_\alpha^2\, ds + \int_0^t \left\| \boldsymbol{u}^{n+1}(s) \right\|_\alpha^2\, ds \right),$$

logo pelo Lema de Gronwall discreto (Lema 1.10),

$$\|\boldsymbol{u}^n(t)\|_\alpha^2 \leq C \exp(CT), \tag{2.33}$$

com C uma constante dependendo de k, T e α, mas independente de n.

Além disso, integrando (2.32) de 0 a t e usando a estimativa (2.33), obtemos

$$\left\|\boldsymbol{u}^{n+1}(t)\right\|_{\alpha}^{2}+\int_{0}^{t}\left(\left\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}^{n+1}(s)\right\|_{H}^{2}+\alpha^{2}\left\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}^{n+1}(s)\right\|_{H}^{2}\right)ds\leq C(k,T,\alpha). \tag{2.34}$$

Portanto, combinando as estimativas (2.33) e (2.34) obtemos a estimativa (2.29).

Provaremos agora (2.30) e para isso lembremos que do Lema 1.13, item (v), temos que

$$\left|\left\langle\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}^{n}(t),\boldsymbol{w}^{n}(t)),\boldsymbol{\psi}(t)\right\rangle\right| \;\leq\; C\left\|\boldsymbol{\psi}(t)\right\|_{D(A)}\left\|\boldsymbol{u}^{n}(t)\right\|_{V}\left\|\boldsymbol{w}^{n}(t)\right\|_{H}.$$

Consequentemente, por (2.29)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{T}\left|\left\langle\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}^{n}(t),\boldsymbol{w}^{n}(t)),\boldsymbol{\psi}(t)\right\rangle\right|dt &\leq C\left\|\boldsymbol{\psi}\right\|_{L^{2}(0,T;D(A))}\left\|\boldsymbol{u}^{n}\right\|_{L^{\infty}(0,T;V)}\left\|\boldsymbol{w}^{n}\right\|_{L^{2}(0,T;H)}\\ &\leq C(k)\left\|\boldsymbol{\psi}\right\|_{L^{2}(0,T;D(A))}.\end{aligned}$$

Além disso, novamente de (2.29)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{T}\left|\left\langle\mathrm{A}\boldsymbol{w}^{n},\boldsymbol{\psi}\right\rangle\right|dt &\leq \int_{0}^{T}\left\|\boldsymbol{w}^{n}\right\|_{H}\left\|\mathrm{A}\boldsymbol{\psi}\right\|_{H}dt\\ &\leq \left\|\boldsymbol{w}^{n}\right\|_{L^{2}(0,T;H)}\left\|\boldsymbol{\psi}\right\|_{L^{2}(0,T;D(A))}\\ &\leq C(k)\left\|\boldsymbol{\psi}\right\|_{L^{2}(0,T;D(A))},\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{T}\left|\iint_{\mathbb{T}^{3}\times\mathbb{R}^{3}}f^{n}(\boldsymbol{u}^{n}-\boldsymbol{v})\gamma_{k}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{\psi}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\right|dt\\ &\quad\leq\left\|f^{n}\right\|_{L^{\infty}((0,T)\times\mathbb{T}^{3}\times\mathbb{R}^{3})}\left(m_{0}\gamma_{k}\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{T}^{3}}|\boldsymbol{u}^{n}||\boldsymbol{\psi}|\,d\boldsymbol{x}\,dt+m_{1}\gamma_{k}\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{T}^{3}}|\boldsymbol{\psi}|d\boldsymbol{x}\,dt\right)\\ &\quad\leq C(k,T)\left\|f_{\mathtt{in}}\right\|_{L^{\infty}(\mathbb{T}^{3}\times\mathbb{R}^{3})}\left(\int_{0}^{T}\left\|\boldsymbol{u}^{n}\right\|_{H}\left\|\boldsymbol{\psi}\right\|_{H}dt+\left\|\boldsymbol{\psi}\right\|_{L^{1}(0,T;L^{1}(\mathbb{T}^{3}))}\right)\\ &\quad\leq C(k,T)\left\|f_{\mathtt{in}}\right\|_{L^{\infty}(\mathbb{T}^{3}\times\mathbb{R}^{3})}\left\|\boldsymbol{\psi}\right\|_{L^{2}(0,T;H)}\left(\left\|\boldsymbol{u}^{n}\right\|_{L^{2}(0,T;H)}+1\right),\end{aligned}$$

temos finalmente de (2.29)

$$\int_{0}^{T}\left|\iint_{\mathbb{T}^{3}\times\mathbb{R}^{3}}f^{n}(\boldsymbol{u}^{n}-\boldsymbol{v})\gamma_{k}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{\psi}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\right|dt\leq C(k,T)\left\|\boldsymbol{\psi}\right\|_{L^{2}(0,T;D(A))}.$$

Então, usando estas estimativas em (2.24) concluímos

$$\left| \int_0^T \left\langle \partial_t \boldsymbol{w}^{n+1}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle \, dt \right| \leq C(k,T) \left\| \boldsymbol{\psi} \right\|_{L^2(0,T;D(A))}$$

e com isso obtemos

$$\left\| \partial_t \boldsymbol{w}^{n+1} \right\|_{L^2(0,T,D(A)')} \leq C(k,T),$$

ou equivalentemente (2.30). ■

Observação 2.5. Notemos que (2.29) e (2.30) são equivalentes as estimativas

$$\left\| \boldsymbol{w}_k^{n+1} \right\|_{L^\infty(0,T;V') \cap L^2(0,T;H)} \leq C(k),$$
$$\left\| \partial_t \boldsymbol{w}_k^{n+1} \right\|_{L^2(0,T;D(A)')} \leq C(k),$$

respectivamente.

Apesar das estimativas da Proposição anterior serem essenciais para encontrarmos uma solução fraca de (2.8)-(2.13), elas não são suficientes, pois garantem apenas que alguma subsequência de $(\boldsymbol{u}_k^n, f_k^n)$ converge, quando $n \to \infty$. Então, para encontrarmos a solução fraca, vamos provar que a própria sequência converge.

Lema 2.5. A sequência $(\boldsymbol{u}_k^n, f_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^\infty(0,T;V) \times L^\infty((0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ e portanto convergente.

Demonstração: Escrevemos $\boldsymbol{u}_k^n = \boldsymbol{u}^n$ e $f_k^n = f^n$ por simplicidade. Denotemos $\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1} = \boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n$ e $\overline{\boldsymbol{w}}^{n+1} = \boldsymbol{w}^{n+1} - \boldsymbol{w}^n$, então subtraindo a equação (2.24) para $\boldsymbol{w}^n$ da equação (2.24) para $\boldsymbol{w}^{n+1}$ temos

$$\left\langle \partial_t \overline{\boldsymbol{w}}^{n+1}, \boldsymbol{\psi} \right\rangle + \left\langle \mathrm{A} \overline{\boldsymbol{w}}^{n+1}, \boldsymbol{\psi} \right\rangle + \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}^{n+1}, \boldsymbol{w}^{n+1}), \boldsymbol{\psi} \right\rangle - \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{w}^n), \boldsymbol{\psi} \right\rangle$$
$$= - \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^n (\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v}) \gamma_k(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v} + \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f^{n-1} (\boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{v}) \gamma_k(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v}.$$

Como $\widetilde{\mathrm{B}}$ é bilinear, podemos reescrever

$$\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}^{n+1}, \boldsymbol{w}^{n+1}) - \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{w}^n) = \widetilde{\mathrm{B}}(\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}, \boldsymbol{w}^{n+1}) + \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}^n, \overline{\boldsymbol{w}}^{n+1}) \text{ em } D(\mathrm{A})'.$$

Logo, escolhendo $\boldsymbol{\psi} = \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}$, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1} \right\|_\alpha^2 + \left(\left\| \nabla_{\boldsymbol{x}} \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1} \right\|_H^2 + \alpha^2 \left\| \mathrm{A} \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1} \right\|_H^2 \right) + \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}, \boldsymbol{w}^{n+1}), \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1} \right\rangle + \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}^n, \overline{\boldsymbol{w}}^{n+1}), \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1} \right\rangle$$

$$= -\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f^n(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\cdot\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v} + \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f^{n-1}(\boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\cdot\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}.$$

Denotemos

$$I_1(t) = \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}, \boldsymbol{w}^{n+1}), \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\right\rangle + \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}^n, \overline{\boldsymbol{w}}^{n+1}), \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\right\rangle,$$

$$I_2(t) = -\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f^n(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\cdot\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v} + \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f^{n-1}(\boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\cdot\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}.$$

Pelo item (vi) do Lema 1.13

$$\left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t), \boldsymbol{w}^{n+1}(t)), \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\rangle = 0$$

e

$$\left|\left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}^n(t), \overline{\boldsymbol{w}}^{n+1}(t)), \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\rangle\right| \le C\left\|\boldsymbol{u}^n(t)\right\|_{D(A)}\left\|\overline{\boldsymbol{w}}(t)^{n+1}\right\|_H\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_V.$$

Assim, aplicando a desigualdade de Young podemos estimar

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le C(\alpha)\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\right\|_V^2\left\|\boldsymbol{u}^n\right\|_{D(A)}^2 + \frac{1}{2\alpha^2}\left\|\overline{\boldsymbol{w}}^{n+1}\right\|_H^2\\
&= C(\alpha)\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\right\|_V^2\left\|\boldsymbol{u}^n\right\|_{D(A)}^2 + \frac{1}{2\alpha^2}\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\right\|_\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(\left\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\right\|_H^2 + \alpha^2\left\|\mathrm{A}\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\right\|_H^2\right)\\
&\le C(\alpha)\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\right\|_\alpha^2\left(\left\|\boldsymbol{u}^n\right\|_{D(A)}^2 + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\left\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\right\|_H^2 + \alpha^2\left\|\mathrm{A}\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\right\|_H^2\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, reescrevendo I_2, temos

$$I_2(t) = -\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \overline{f}^n(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\cdot\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v} - \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f^{n-1}\overline{\boldsymbol{u}}^n\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\gamma_k(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}.$$

Pela estimativa (2.29)

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \overline{f}^n(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\cdot\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\right|\\
&\qquad\le C(k)\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H\left(\left\|\boldsymbol{u}^n(t)\right\|_H + 1\right)\left\|\overline{f}^n(t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\\
&\qquad\le C(k)\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H\left\|\overline{f}^n(t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

e pela estimativa (2.28)

$$\begin{aligned}
\left|\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f^{n-1}\overline{\boldsymbol{u}}^n\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}\gamma_k(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\right| &\le C(k)\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^n(t)\right\|_H\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H\left\|f^{n-1}\right\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\\
&\le C(k)\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^n(t)\right\|_H\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H.
\end{aligned}$$

Destas estimativas e da desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C(k)\left(\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(t)\|_H + \left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H \left\|\overline{f}^n(t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\right) \\ &\leq C(k)\left(\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H^2 + \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(t)\|_H^2 + \left\|\overline{f}^n(t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}^2\right). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Agora, vamos estimar $\overline{f}^n$ em termos de $\overline{\boldsymbol{u}}^n$. Pelo Teorema do valor médio

$$\left|\overline{f}^n(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\right| \leq e^{3T}\left\|\nabla f^k_{\mathtt{in}}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\left|(\boldsymbol{\chi}^n - \boldsymbol{\chi}^{n-1})(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\right|. \tag{2.36}$$

Por outro lado, para cada $(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \in (0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3$ fixado e para todo $0 \leq s \leq t$ temos

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{V}^n - \boldsymbol{V}^{n-1})(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})| &= \left|\int_s^t e^{r-s}[(\theta_k * \boldsymbol{u}^n)(r,\boldsymbol{X}^n(r)) - (\theta_k * \boldsymbol{u}^{n-1})\left(r,\boldsymbol{X}^{n-1}(r)\right)]\,dr\right| \\ &\leq J_1 + J_2, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_s^t e^{r-s}\left|(\theta_k * \overline{\boldsymbol{u}}^n)(r,\boldsymbol{X}^n(r))\right|\,dr, \\ J_2 &= \int_s^t e^{r-s}\left|(\theta_k * \boldsymbol{u}^{n-1})(r,\boldsymbol{X}^n(r)) - (\theta_k * \boldsymbol{u}^{n-1})\left(r,\boldsymbol{X}^{n-1}(r)\right)\right|\,dr. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young para convoluções

$$J_1 \leq \int_s^t e^{r-s}\left\|\theta_k * \overline{\boldsymbol{u}}^n(r)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}\,dr \leq e^T\|\theta_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\int_s^t \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(r)\|_H\,dr.$$

Agora iremos estimar J_2. Aplicando o Lema 1.4 temos

$$J_2 \leq \int_s^t e^{r-s}\left\|\nabla_{\boldsymbol{x}}(\theta_k * \boldsymbol{u}^{n-1})(r)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)}\left|(\boldsymbol{X}^n - \boldsymbol{X}^{n-1})(r)\right|dr.$$

Aplicando novamente a desigualdade de Young para convoluções

$$J_2 \leq e^T\|\nabla\theta_k\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\int_s^t \left\|\boldsymbol{u}^{n-1}(r)\right\|_H\left|(\boldsymbol{X}^n - \boldsymbol{X}^{n-1})(r)\right|dr$$

e da estimativa (2.29)

$$J_2 \leq C(k,T)\int_s^t \left|(\boldsymbol{X}^n - \boldsymbol{X}^{n-1})(r)\right|dr.$$

Notemos que por (2.26)

$$\begin{aligned} \int_s^t \left|(\boldsymbol{X}^n - \boldsymbol{X}^{n-1})(r)\right|dr &= \int_s^t\left(\int_r^t \left|(\boldsymbol{V}^n - \boldsymbol{V}^{n-1})(\tau)\right|d\tau\right)dr \\ &\leq (t-s)\int_s^t \left|(\boldsymbol{V}^n - \boldsymbol{V}^{n-1})(\tau)\right|d\tau \\ &\leq T\int_s^t \left|(\boldsymbol{V}^n - \boldsymbol{V}^{n-1})(\tau)\right|d\tau, \end{aligned} \tag{2.37}$$

portanto,

$$J_2 \leq C(k,T) \int_s^t |(\boldsymbol{V}^n - \boldsymbol{V}^{n-1})(r)|\, dr.$$

Usando as estimativas de J_1 e J_2 concluímos

$$|(\boldsymbol{V}^n - \boldsymbol{V}^{n-1})(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})| \leq C(k,T) \left(\int_s^t \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(r)\|_H \, dr + \int_s^t |(\boldsymbol{V}^n - \boldsymbol{V}^{n-1})(r)|\, dr \right).$$

Logo, pela desigualdade de Gronwall

$$|(\boldsymbol{V}^n - \boldsymbol{V}^{n-1})(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})| \leq C(k,T)\, e^{(t-s)C(k,T)} \int_s^t \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(r)\|_H \, dr.$$

Além disso, novamente de (2.26) e (2.37)

$$|(\boldsymbol{X}^n - \boldsymbol{X}^{n-1})(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})| \leq C(k,T) \int_s^t \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(r)\|_H \, dr,$$

portanto

$$|(\boldsymbol{\chi}^n - \boldsymbol{\chi}^{n-1})(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})| \leq C(k,T) \int_0^t \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(s)\|_H \, ds, \tag{2.38}$$

e consequentemente de (2.36) concluímos que

$$\left\|\overline{f}^n(t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq C(k,T) \int_0^t \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(s)\|_H \, ds. \tag{2.39}$$

Assim, combinando (2.39) com (2.35), temos que

$$|I_2| \leq C(k,T) \left(\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H^2 + \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(t)\|_H^2 + \int_0^t \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(s)\|_H^2 \, ds \right).$$

Das estimativas de I_1 e I_2, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_\alpha^2 + \left(\left\|\nabla_{\boldsymbol{x}} \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H^2 + \alpha^2 \left\|\mathrm{A}\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H^2 \right) \\ &\qquad \leq C \left[\left(\|\boldsymbol{u}^n(t)\|_{D(A)}^2 + 1 \right) \left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_\alpha^2 + \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(t)\|_\alpha^2 + \int_0^t \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(s)\|_\alpha^2 \, ds \right], \end{aligned}$$

com $C := C(k,T,\alpha)$.

Usando a desigualdade de Gronwall e (2.29) segue que

$$\begin{aligned} \left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_\alpha^2 &\leq C \exp\left[C \int_0^T \left(\|\boldsymbol{u}^n(s)\|_{D(A)}^2 + 1 \right) ds \right] \int_0^t \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(s)\|_\alpha^2 \, ds \\ &\leq C \int_0^t \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(s)\|_\alpha^2 \, ds. \end{aligned}$$

Então, pelo Lema 1.10

$$\|\overline{\boldsymbol{u}}^n(t)\|_\alpha^2 \leq \frac{C^n t^n}{n!} \leq C.$$

Portanto, $(\boldsymbol{u}^n)$ converge em $L^\infty(0,T;V)$ e combinando esta convergência com a desigualdade (2.39), temos que (f^n) converge em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$. ■

2.1.3 Existência de Solução do Problema Regularizado

Agora iremos provar que o limite da sequência $(\boldsymbol{u}_k^n, f_k^n)$ é solução fraca de (2.8)-(2.13).

Proposição 2.6. Existe pelo menos uma solução fraca de (2.8)-(2.13).

Demonstração: Acabamos de concluir que existe $(\boldsymbol{u}_k, f_k) \in L^\infty(0,T;V) \times L^\infty((0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_k^n &\to \boldsymbol{u}_k \text{ em } L^\infty(0,T;V), \\ f_k^n &\to f_k \text{ em } L^\infty((0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Além disso, de (2.29), (2.30) e do Lema 1.6

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{u}_k^n &\rightharpoonup \partial_t \boldsymbol{u}_k \text{ em } L^2(0,T;H), \\ \boldsymbol{u}_k^n &\rightharpoonup \boldsymbol{u}_k \text{ em } L^2(0,T;D(\mathrm{A})), \\ \boldsymbol{u}_k^n &\to \boldsymbol{u}_k \text{ em } C([0,T];H). \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{w}_k^n &\rightharpoonup \partial_t \boldsymbol{w}_k \text{ em } L^2(0,T;D(\mathrm{A})'), \\ \boldsymbol{w}_k^n &\rightharpoonup \boldsymbol{w}_k \text{ em } L^2(0,T;H), \\ \boldsymbol{w}_k^n &\to \boldsymbol{w}_k \text{ em } L^\infty(0,T;V'), \\ \boldsymbol{w}_k^n &\to \boldsymbol{w}_k \text{ em } C([0,T];D(A)'). \end{aligned}$$

Portanto, conseguimos as seguintes convergências

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle \partial_t \boldsymbol{w}_k^{n+1}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle \, dt = \int_0^T \left\langle \partial_t \boldsymbol{w}_k(t), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle \, dt$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}_k^{n+1}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle \, dt &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(\boldsymbol{w}_k^{n+1}(t), \mathrm{A}\boldsymbol{\psi}(t) \right) \, dt \\ &= \int_0^T \left(\boldsymbol{w}_k(t), \mathrm{A}\boldsymbol{\psi}(t) \right) \, dt. \end{aligned}$$

Agora, usando que $\widetilde{\mathrm{B}}$ é bilinear, temos que

$$\left| \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}(t), \boldsymbol{w}_k^{n+1}(t)), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle \, dt - \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k(t), \boldsymbol{w}_k(t)), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle \, dt \right| \leq I_n^{(1)} + I_n^{(2)},$$

onde

$$I_n^{(1)} = \left| \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}(t) - \boldsymbol{u}_k(t), \boldsymbol{w}_k^{n+1}(t)), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle \, dt \right|,$$

$$I_n^{(2)} = \left| \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k(t), \boldsymbol{w}_k^{n+1}(t) - \boldsymbol{w}_k(t)), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle \, dt \right|.$$

Pelo item (iv) do Lema 1.13,

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &\leq C \int_0^T \left\| (\boldsymbol{u}_k^{n+1} - \boldsymbol{u}_k)(t) \right\|_V \left\| \boldsymbol{w}_k^{n+1}(t) \right\|_H \| \boldsymbol{\psi}(t) \|_{D(A)} \, dt \\ &\leq C \left\| \boldsymbol{u}_k^{n+1} - \boldsymbol{u}_k \right\|_{L^2(0,T;V)} \left\| \boldsymbol{w}_k^{n+1} \right\|_{L^2(0,T;H)} \| \boldsymbol{\psi} \|_{L^\infty(0,T;D(A))}, \end{aligned}$$

portanto, pela convergência de $\boldsymbol{u}_k^{n+1} \to \boldsymbol{u}_k$ em $L^\infty(0,T;V)$, quando $n \to \infty$, e da estimativa uniforme de $(\boldsymbol{w}_k^{n+1})$ com relação a n

$$\lim_{n \to \infty} I_n^{(1)} = 0.$$

Como a aplicação

$$\boldsymbol{h} \mapsto \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k(t), \boldsymbol{h}(t)), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle \, dt$$

é um funcional linear contínuo sobre $L^2(0,T;H)$ e $\boldsymbol{w}_k^{n+1} \rightharpoonup \boldsymbol{w}_k$ em $L^2(0,T;H)$, quando $n \to \infty$, então

$$\lim_{n \to \infty} I_n^{(2)} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}(t), \boldsymbol{w}_k^{n+1}(t)), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle \, dt = \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k(t), \boldsymbol{w}_k(t)), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle \, dt.$$

Finalmente temos que

$$\left| \int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} \left(f_k^n (\boldsymbol{u}_k^n - \boldsymbol{v}) \gamma_k(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\psi} - f_k (\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v}) \gamma_k(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{\psi} \right) \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v} \, dt \right| \leq I_n^{(3)} + I_n^{(4)} + I_n^{(5)},$$

onde

$$\begin{aligned} I_n^{(3)} &= \int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f_k^n - f_k) \gamma_k(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{u}_k^n \boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v} \, dt, \\ I_n^{(4)} &= \int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_k \gamma_k(\boldsymbol{v}) (\boldsymbol{u}_k^n - \boldsymbol{u}_k) \boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v} \, dt, \\ I_n^{(5)} &= \int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} (f_k - f_k^n) \gamma_k(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} \boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v} \, dt. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e usando a estimativa (2.29)

$$\begin{aligned}
\left|I_n^{(3)}\right| &\leq C(k) \left\| f_k^n - f_k \right\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \left\| \boldsymbol{u}_k^n \right\|_{L^2(0,T;H)} \left\| \boldsymbol{\psi} \right\|_{L^2(0,T;H)} \\
&\leq C(k) \left\| f_k^n - f_k \right\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \left\| \boldsymbol{\psi} \right\|_{L^2(0,T;H)},
\end{aligned}$$

como $f_k^n \to f_k$ em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$, então $I_n^{(3)} \to 0$, quando $n \to \infty$.

Novamente pela desigualdade de Hölder

$$\left|I_n^{(4)}\right| \leq C(k) \left\| f_k \right\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \left\| \boldsymbol{u}_k^n - \boldsymbol{u}_k \right\|_{L^2(0,T;H)} \left\| \boldsymbol{\psi} \right\|_{L^2(0,T;H)},$$

como $\boldsymbol{u}_k^n \to \boldsymbol{u}_k$ em $L^2(0,T;V)$, então $I_n^{(4)} \to 0$, quando $n \to \infty$.

De forma análoga,

$$\left|I_n^{(5)}\right| \leq C(k) \left\| f_k^n - f_k \right\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \left\| \boldsymbol{\psi} \right\|_{L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^3))},$$

logo $I_n^{(5)} \to 0$, quando $n \to \infty$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k^n(\boldsymbol{u}_k^n - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt = \int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt.$$

Estas convergências permitem passar ao limite (2.24) e concluir que (2.17) é satisfeita.

Para provarmos que f_k também satisfaz a equação (2.8) com condição inicial (2.12), consideremos para cada $(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \in [0,T]\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3$ o par de funções $(\boldsymbol{X}_k(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \boldsymbol{V}_k(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))$, como a única solução da equação diferencial

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{X}_k}{ds}(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{V}_k(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \\
\frac{d\boldsymbol{V}_k}{ds}(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) &= (\theta_k * \boldsymbol{u}_k)(s,\boldsymbol{X}_k(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) - \boldsymbol{V}_k(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}), \\
\boldsymbol{X}_k(t;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{V}_k(t;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Então, por cálculos análogos aos feitos para provarmos a estimativa (2.38) obtemos

$$|(\boldsymbol{V}_k^n - \boldsymbol{V}_k)(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})| \leq C(k,T) \int_s^t \left\| (\boldsymbol{u}_k^n - \boldsymbol{u}_k)(r) \right\|_H dr.$$

Como $\boldsymbol{u}_k^n \to \boldsymbol{u}_k$ em $L^2(0,T;V)$, concluímos que $\boldsymbol{V}_k^n(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{V}_k(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ uniformemente.

Além disso, como

$$\boldsymbol{X}_k^n(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = -\int_s^t \boldsymbol{V}_k^n(r;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,dr + \boldsymbol{x},$$

então, $\boldsymbol{X}_k^n(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{X}_k(s;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ uniformemente.

Desta forma obtemos que $f_k^n(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = e^{3t} f_{\mathtt{in}}^k(\boldsymbol{\chi}_k^n(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})) \to e^{3t} f_{\mathtt{in}}^k(\boldsymbol{\chi}_k(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))$ uniformemente, com $\boldsymbol{\chi}_k(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{X}_k(0;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}),(\boldsymbol{V}_k(0;t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}))$. Portanto,

$$f_k(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = e^{3t} f_{\mathtt{in}}^k(\boldsymbol{\chi}_k(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})), \tag{2.41}$$

desta identidade e do Teorema 1.18, temos que $f_k \in C^1([0,T]\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$ e satisfaz a equação (2.8) com condição inicial (2.12).

Portanto, $(\boldsymbol{u}_k, f_k)$ é solução de (2.8)-(2.13). ■

2.1.4 Existência de Solução Local

Agora iremos mostrar que existe um par de funções $(\boldsymbol{u}, f)$, solução fraca local de (2.1)-(2.6).

Provaremos o seguinte Lema, que fornece estimativas independentes de k para a sequência $(\boldsymbol{u}_k, f_k)$:

Lema 2.7. Existe $T^* \in (0,T]$, tal que a solução $(\boldsymbol{u}_k, f_k)$ satisfaz

$$\|f_k\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \le e^{3T}\,\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\,, \tag{2.42}$$

$$\|\boldsymbol{u}_k\|_{L^\infty(0,T^*;V)} + \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^2(0,T^*;D(A))} + \|M_2 f_k\|_{L^\infty(0,T^*)} \le C, \tag{2.43}$$

com C independente de k.

Demonstração: De (2.16) e (2.41) segue imediatamente (2.42).

Como o suporte de f_k em relação a $\boldsymbol{v}$ é compacto, então multiplicando a equação (2.8) por $|\boldsymbol{v}|^2$ e integrando sobre $(0,t)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3$, conseguimos a seguinte igualdade

$$\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(t)|\boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v} - \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} 2f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}}^k|\boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
M_2 f_k(t) + 2\int_0^t M_2 f_k(s)\,ds &= M_2 f_{\mathtt{in}}^k + 2\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds \\
&\leq M_2 f_{\mathtt{in}}^k + 2\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\theta_k * \boldsymbol{u}_k| m_1 f_k\,d\boldsymbol{x}\,ds.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Por outro lado, pelo Lema 1.12 e (2.42) temos

$$\begin{aligned}
0 \leq m_1 f_k(t,\boldsymbol{x}) &\leq \left(\frac{4}{3}\pi \|f_k\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\right) m_2 f_k(t,\boldsymbol{x})^{4/5} \\
&\leq \left(\frac{4}{3}\pi e^{3T} \|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\right) m_2 f_k(t,\boldsymbol{x})^{4/5},
\end{aligned}$$

logo,

$$\|m_1 f_k(t)\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)} \leq C\,(M_2 f_k(t))^{4/5}. \tag{2.45}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder em (2.44) temos

$$\begin{aligned}
M_2 f_k(t) + 2\int_0^t M_2 f_k(s)\,ds &\leq M_2 f_{\mathtt{in}}^k + 2\int_0^t \|\theta_k * \boldsymbol{u}_k\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \|m_1 f_k\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)}\,ds \\
&\leq M_2 f_{\mathtt{in}}^k + C\int_0^t \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} (M_2 f_k)^{4/5}\,ds,
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Young para convoluções e (2.45).

Portanto, pela desigualdade de Young

$$M_2 f_k(t) + 2\int_0^t M_2 f_k(s)\,ds \leq M_2 f_{\mathtt{in}}^k + C\int_0^t \|\boldsymbol{u}_k(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}^5\,ds + 2\int_0^t M_2 f_k(s)\,ds,$$

ou seja,

$$M_2 f_k(t) \leq M_2 f_{\mathtt{in}}^k + C\int_0^t \|\boldsymbol{u}_k(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}^5\,ds.$$

Ainda pelo Lema 2.2 e a imersão $H^1(\mathbb{T}^3) \hookrightarrow L^5(\mathbb{T}^3)$, concluímos

$$M_2 f_k(t) \leq C\left(1 + \int_0^t \|\boldsymbol{u}_k(s)\|_V^5\,ds\right). \tag{2.46}$$

Por outro lado, tomando $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}_k$ em (2.17), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_k\|_\alpha^2 + \left(\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_k\|_H^2 + \alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_k\|_H^2\right) &= -\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v} \\
&\leq \int_{\mathbb{T}^3} |\boldsymbol{u}_k| m_1 f_k\,d\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

pois

$$\left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{w}_k),\boldsymbol{u}_k\right\rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad -\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k|^2\gamma_k(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v} \leq 0.$$

Usando a desigualdade de Hölder, a imersão $H^1(\mathbb{T}^3) \hookrightarrow L^5(\mathbb{T}^3)$, (2.45) e (2.46)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_k\|_\alpha^2 + \left(\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_k\|_H^2 + \alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_k\|_H^2\right) &\leq \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}\|m_1 f_k\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)} \\ &\leq C\|\boldsymbol{u}_k\|_V\left(1+\int_0^t\|\boldsymbol{u}_k\|_V^5\,ds\right)^{4/5}.\end{aligned}$$

Das desigualdades de Young e Hölder

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_k\|_\alpha^2 + \left(\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_k\|_H^2 + \alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_k\|_H^2\right) \leq \|\boldsymbol{u}_k\|_V^2 + C\left(1+\int_0^t\|\boldsymbol{u}_k\|_V^8\,ds\right)$$

e consequentemente

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_k\|_\alpha^2 + C\|\boldsymbol{u}_k\|_{D(A)}^2 \leq C\left(\|\boldsymbol{u}_k\|_V^2 + \int_0^t\|\boldsymbol{u}_k\|_V^8\,ds + 1\right),$$

Denotando

$$g(t) = \|\boldsymbol{u}_k(t)\|_\alpha^2 + C\int_0^t\|\boldsymbol{u}_k(s)\|_{D(A)}^2\,ds,$$

e integrando de 0 a t, vemos que

$$g(t) \leq C\left(\int_0^t g(s)\,ds + \int_0^t g(s)^4\,ds + 1\right).$$

Logo, aplicando o Lema 1.9 para $\beta = 4$, existe $T^* > 0$ tal que

$$g(t) = \|\boldsymbol{u}_k(t)\|_\alpha^2 + C\int_0^t\|\boldsymbol{u}_k(s)\|_{D(A)}^2\,ds \leq C,$$

para quase todo $t \in [0, T^*]$.

Observação 2.6. Para usarmos o Lema 1.9 para $\beta = 4$, precisamos da condição adicional

$$C < e^{-hC}(3hC)^{-1/3},$$

para algum $0 < h \leq T$. Para isto podemos tomar

$$h = \min\left(T, \frac{e^{-3TC}}{6C^4}\right),$$

por exemplo.

Além disso, pela desigualdade (2.46) temos que $M_2 f_k(t) \leq C$ para quase todo $t \in [0, T^*]$. ■

Proposição 2.8. Existe $(\boldsymbol{u}, f)$ solução fraca local de (2.1)-(2.6).

Demonstração: Agora, iremos provar que $\boldsymbol{u}_k$ converge para uma solução fraca de (2.2)-(2.4) com condição inicial (2.6) . Para isso precisamos de convergência forte para passar ao limite nos termos não lineares. Portanto, vamos estimar a norma da sequência $(\partial_t \boldsymbol{w}_k)$ em $L^2(0, T^*; D(\mathrm{A})')$. Como

$$\int_0^{T^*} \langle \partial_t \boldsymbol{w}_k(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle \, dt = -\int_0^{T^*} \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k(t), \boldsymbol{w}_k(t)), \boldsymbol{\psi}(t)\right\rangle + \langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}_k(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle \, dt$$
$$- \int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(t)(\boldsymbol{u}_k(t) - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\psi}(t) \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v} \, dt,$$

basta estimar o lado direito desta identidade. De fato, pelo Lema 1.13 e pela estimativa (2.43) temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{T^*} \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k(s), \boldsymbol{w}_k(s)), \boldsymbol{\psi}(s)\right\rangle ds \right| &\le C \int_0^{T^*} \|\boldsymbol{u}_k(s)\|_V \|\boldsymbol{w}_k(s)\|_H \|\boldsymbol{\psi}(s)\|_{D(A)} \, ds \\ &\le C \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^\infty(0,T^*;V)} \|\boldsymbol{w}_k\|_{L^2(0,T^*;H)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T^*;D(A))} \\ &\le C \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T^*;D(A))} . \end{aligned}$$

Estimamos o segundo termo usando o Lema 2.7,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{T^*} \langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{\psi}\rangle \, dt \right| = \left| \int_0^{T^*} (\boldsymbol{w}_k, \mathrm{A}\boldsymbol{\psi}) \, dt \right| &\le \|\boldsymbol{w}_k\|_{L^2(0,T^*,H)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T^*;D(A))} \\ &\le C \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T^*;D(A))} . \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} \, ds \right| \\ &\quad \le \int_0^{T^*} \int_{\mathbb{T}^3} m_0 f_k |\boldsymbol{u}_k||\boldsymbol{\psi}| \, d\boldsymbol{x} \, ds + \int_0^{T^*} \int_{\mathbb{T}^3} m_1 f_k |\boldsymbol{\psi}| \, d\boldsymbol{x} \, ds \\ &\quad \le \int_0^{T^*} \|m_0 f_k\|_{L^{3/2}(\mathbb{T}^3)} \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^6(\mathbb{T}^3)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^6(\mathbb{T}^3)} \, ds + \int_0^{T^*} \|m_1 f_k\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \, ds \\ &\quad \le \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^2(0,T^*;L^6(\mathbb{T}^3))} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T^*;L^6(\mathbb{T}^3))} \|m_0 f_k\|_{L^\infty(0,T^*;L^{3/2}(\mathbb{T}^3))} \\ &\qquad + \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T^*;L^5(\mathbb{T}^3))} \|m_1 f_k\|_{L^2(0,T^*;L^{5/4}(\mathbb{T}^3))} . \end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 1.12 e pelas estimativas (2.43) e (2.42)

$$\|m_0 f_k\|_{L^\infty(0,T^*;L^{5/3}(\mathbb{T}^3))} \le C \|M_2 f_k\|^{3/5}_{L^\infty(0,T^*)} \le C,$$

$$\|m_1 f_k\|_{L^\infty(0,T^*;L^{5/4}(\mathbb{T}^3))} \leq C \|M_2 f_k\|^{4/5}_{L^\infty(0,T^*)} \leq C.$$

Então, pelas imersões

$$L^\infty(0,T^*;L^{5/3}(\mathbb{T}^3)) \hookrightarrow L^\infty(0,T^*;L^{3/2}(\mathbb{T}^3)),$$

$$L^\infty(0,T^*;L^{5/4}(\mathbb{T}^3)) \hookrightarrow L^2(0,T^*;L^{5/4}(\mathbb{T}^3))$$

e pela estimativa (2.42) temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds\right| &\leq C \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T^*;L^6(\mathbb{T}^3))} \\ &\leq C \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T^*;D(A))}.\end{aligned}$$

Segue destas estimativas que $(\partial_t \boldsymbol{w}_k)$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T^*;D(\mathrm{A})')$.

Finalmente, pelos Lemas 2.7 e 1.6 provamos que existe um par $(\boldsymbol{u}, f)$, tal que, a menos de subsequência,

- $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$,
- $\boldsymbol{u}_k \rightharpoonup \boldsymbol{u}$ em $L^2(0,T^*;D(\mathrm{A}))$,
- $\boldsymbol{u}_k \to \boldsymbol{u}$ em $L^2(0,T^*;V)\cap C([0,T^*];H)$,
- $\partial_t \boldsymbol{u}_k \rightharpoonup \partial_t \boldsymbol{u}$ em $L^2(0,T^*;H)$.

Portanto conseguimos as seguintes convergências de forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.6

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{T^*} \langle \partial_t \boldsymbol{w}_k(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle\, dt = \int_0^{T^*} \langle \partial_t \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle\, dt;$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{T^*} \langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}_k(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle\, dt = \int_0^{T^*} \langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\psi}(t)\rangle\, dt;$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{T^*} \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k(t), \boldsymbol{w}_k(t)), \boldsymbol{\psi}(t)\right\rangle\, dt = \int_0^{T^*} \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{w}(t)), \boldsymbol{\psi}(t)\right\rangle\, dt.$$

Por outro lado, temos que

$$\left|\int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} [f_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})]\, \boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt\right| \leq \left|I_k^{(1)}\right| + \left|I_k^{(2)}\right| + \left|I_k^{(3)}\right|,$$

onde

$$
\begin{aligned}
I_k^{(1)} &= \int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})(\gamma_k - 1)\boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt,\\
I_k^{(2)} &= \int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u})\boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt,\\
I_k^{(3)} &= \int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} (f_k - f)(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt.
\end{aligned}
$$

Denotando $h_k = f_k(1-\gamma_k)$, temos que

$$
I_k^{(1,1)} = \int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} h_k|\boldsymbol{u}_k||\boldsymbol{\psi}|\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt \le \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^2(L^6)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(L^6)} \|m_0 h_k\|_{L^\infty(0,T;L^{3/2}(\mathbb{T}^3))},
$$

com $L^2(L^6) = L^2(0,T;L^6(\mathbb{T}^3))$.

O Lema 1.12 implica que

$$
\begin{aligned}
m_0 h_k(t,\boldsymbol{x}) &\le \Big(C\|h_k\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\Big)\, m_{3/2}h_k(t,\boldsymbol{x})^{2/3}\\
&\le \Big(C\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\Big)\, m_{3/2}h_k(t,\boldsymbol{x})^{2/3},
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\|m_0 h_k(t)\|_{L^{3/2}(\mathbb{T}^3)} \le C M_{3/2} h_k(t)^{2/3}.
$$

Observemos que

$$
M_{3/2}h_k(t) = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^{3/2} f_k(1-\gamma_k)\, d\boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} \le \iint_{\mathbb{T}^3\times\{|\boldsymbol{v}|\ge k\}} |\boldsymbol{v}|^{3/2} f_k\, d\boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} \le k^{-1/2} M_2 f_k(t).
$$

Como $(M_2 f_k)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T^*)$, então $(m_0 h_k)$ converge para 0 em $L^\infty(0,T^*;L^{3/2}(\mathbb{T}^3))$ quando $k\to\infty$. Além disso, por (2.43) $(\boldsymbol{u}_k)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T^*;V)$, então $I_k^{(1,1)}$ converge para 0 quando $k\to\infty$.

Por outro lado,

$$
I_k^{(1,2)} = \int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} h_k|v||\boldsymbol{\psi}|\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt \le \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^1(0,T;L^6(\mathbb{T}^3))} \|m_1 h_k\|_{L^\infty(0,T;L^{6/5}(\mathbb{T}^3))},
$$

Novamente, pelo Lema 1.12 temos que

$$
\begin{aligned}
m_1 h_k(t,\boldsymbol{x}) &\le \Big(C\|h_k\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\Big)\, m_{9/5}h_k(t,\boldsymbol{x})^{5/6}\\
&\le \Big(C\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\Big)\, m_{9/5}h_k(t,\boldsymbol{x})^{5/6},
\end{aligned}
$$

e daí obtemos

$$\|m_1 h_k(t)\|_{L^{6/5}(\mathbb{T}^3)} \leq C M_{9/5} h_k(t)^{5/6}.$$

Notemos

$$M_{9/5} h_k(t) = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^{9/5} f_k (1-\gamma_k)\, d\boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} \leq \iint_{\mathbb{T}^3\times\{|\boldsymbol{v}|\geq k\}} |\boldsymbol{v}|^{9/5} f_k\, d\boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} \leq k^{-1/5} M_2 f_k(t).$$

Assim, como $(M_2 f_k)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T^*)$, então $(m_1 h_k)$ converge para 0 em $L^\infty(0,T^*; L^{6/5}(\mathbb{T}^3))$ quando $k\to\infty$. Portanto, $I_k^{(1,2)}$ converge para 0 quando $k\to\infty$. Como $\left|I_k^{(1)}\right| \leq I_k^{(1,1)} + I_k^{(1,2)}$, então

$$\lim_{k\to\infty} I_k^{(1)} = 0.$$

Agora, iremos analisar $I_k^{(2)}$. Notemos que

$$\begin{aligned} I_k^{(2)} &\leq \|\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T^*;L^5(\mathbb{T}^3))} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T^*;L^5(\mathbb{T}^3))} \|m_0 f_k\|_{L^\infty(0,T^*;L^{5/3}(\mathbb{T}^3))} \\ &\leq C \|\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T^*;L^5(\mathbb{T}^3))} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T^*;L^5(\mathbb{T}^3))} \|M_2 f_k\|_{L^\infty(0,T^*)}^{3/5}. \end{aligned}$$

Como $(M_2 f_k)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T^*)$ e $\boldsymbol{u}_k \to \boldsymbol{u}$ em $L^2(0,T^*;V)$, então $I_k^{(2)}$ converge para 0 quando $k\to\infty$.

Finalmente, para passarmos ao limite em $I_k^{(3)}$, consideremos γ_m uma sequência de corte. Logo, para cada m fixado

$$\int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}| \boldsymbol{\psi} \gamma_m(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt \leq m_0\gamma_m \|\boldsymbol{u}\|_{L^2} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2} + m_1\gamma_m \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^1} < \infty.$$

Como $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$, então

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} (f_k - f)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi}\gamma_m(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt = 0.$$

Por outro lado, definindo $g_k = |f_k - f|$ e aplicando cálculos análogos aos feitos para $I_k^{(1)}$, temos

$$\begin{aligned} &\int_0^{T^*} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} g_k |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}||\boldsymbol{\psi}|(1-\gamma_m(\boldsymbol{v}))\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt \\ &\qquad \leq C \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;L^6(\mathbb{T}^3))} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T;L^6(\mathbb{T}^3))} \left(m^{-1/2} \|M_2 g_k\|_{L^\infty(0,T^*)}\right)^{2/3} \\ &\qquad\quad + C \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^1(0,T;L^6(\mathbb{T}^3))} \left(m^{-1/5} \|M_2 g_k\|_{L^\infty(0,T^*)}\right)^{5/6}, \end{aligned}$$

como $(M_2 g_k)$ é limitada em $L^\infty(0,T^*)$ independentemente de k, então

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} g_k|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}||\boldsymbol{\psi}|(1-\gamma_m(\boldsymbol{v}))\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,dt = 0.$$

Consequentemente,

$$\lim_{k\to\infty} I_k^{(3)} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,dt = \int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,dt.$$

Com isso, podemos integrar (2.17) de 0 a T^* e passar ao limite quando $k\to\infty$. Assim, demonstramos que $(\boldsymbol{u}, f)$ satisfaz

$$\int_0^{T^*}\langle\partial_t\boldsymbol{w}(s),\boldsymbol{\psi}(s)\rangle\,ds + \int_0^{T^*}\left\langle\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(s),\boldsymbol{w}(s)),\boldsymbol{\psi}(s)\right\rangle ds + \int_0^{T^*}\langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}(s),\boldsymbol{\psi}(s)\rangle\,ds$$

$$= -\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi}\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds,$$

para todo $\boldsymbol{\psi}\in L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$ e $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\alpha^2\mathrm{A}\boldsymbol{u}$.

Finalmente, multiplicando (2.8) por $\phi\in C^1([0,T^*]\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$ com suporte compacto em relação a $\boldsymbol{v}$ e $\phi(T^*,\cdot,\cdot)=0$; integrando sobre $(0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3$ e aplicando integração por partes, obtemos

$$-\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k[\partial_t\phi+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi+(\theta_k*\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{v})\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\phi]\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}}^k\phi(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}.$$

Notemos que da definição de $f_{\mathtt{in}}^k$, da convergência $f_k\overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$ e da classe de funções teste escolhida, obtemos imediatamente

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k L[\phi]\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds = \int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f L[\phi]\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds,$$

$$\lim_{k\to\infty}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}}^k\phi(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v} = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}}\phi(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v},$$

com $L[\phi]=\partial_t\phi+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi-\boldsymbol{v}\nabla_{\boldsymbol{v}}\phi$. Por fim, pela desigualdade de Hölder e Young para convoluções

$$\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3}|\theta_k*\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}||\nabla_{\boldsymbol{v}}\phi|\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds$$

$$\leq \left(\|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H)}+\|\theta_k*\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H)}\right)\|m_0|\nabla_{\boldsymbol{v}}\phi|\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{T}^3)},$$

portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \|(\theta_k * \boldsymbol{u}_k)\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\phi - \boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\phi\|_{L^1((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \to 0,$$

consequentemente,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k)\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\phi\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f\boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\phi\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds,$$

de onde obtemos o resultado desejado. ■

2.1.5 Existência de Solução Global

Para provarmos que a solução local pode ser estendida para uma solução global, vamos mostrar que $(\boldsymbol{u}, f)$ satisfaz uma desigualdade de energia e que f satisfaz o principio do máximo.

Lema 2.9. A solução $(\boldsymbol{u}, f)$ obtida anteriormente, satisfaz as seguintes desigualdades para quase todo $t \le T^*$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M_2 f(t) + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|_\alpha^2 + \int_0^t \|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}(s)\|_H^2 + \alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}(s)\|_H^2\, ds \\ + \int_0^t\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds \le \frac{1}{2}M_2 f_{\mathtt{in}} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\|_\alpha^2,\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\|f\|_{L^\infty((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \le e^{3T}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}. \tag{2.48}$$

Demonstração: Como $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$ e f_k satisfaz (2.42), então

$$\|f\|_{L^\infty((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \le \liminf_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^\infty((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \le e^{3T}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}$$

e com isso concluímos (2.48).

Por outro lado, multiplicando a equação (2.8) por $|\boldsymbol{v}|^2$ e integrando sobre $(0,t)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3$, conseguimos

$$\frac{1}{2}M_2 f_k(t) + \int_0^t\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{v}|^2\, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds = \int_0^t\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds + \frac{1}{2}M_2 f_{\mathtt{in}}^k,$$

que reescrevemos na forma

$$\frac{1}{2}M_2 f_k(t) + \int_0^t\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v}|^2\, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds$$

$$= \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \left[f_k|\boldsymbol{u}_k|^2 - f_k\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}_k + f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{v} \right] \, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds + \frac{1}{2} M_2 f_{\mathtt{in}}^k.$$

Agora, escolhemos $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}_k$ em (2.17),

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_k(t)\|_\alpha^2 + \int_0^t \|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_k(s)\|_H^2 + \alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_k(s)\|_H^2 \, ds$$

$$= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\|_\alpha^2 - \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \left(f_k\gamma_k(\boldsymbol{v})|\boldsymbol{u}_k|^2 - f_k\gamma_k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{v} \right) \, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds.$$

Somando estas duas identidades, temos

$$\frac{1}{2}M_2 f_k(t) + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_k(t)\|_\alpha^2 + \int_0^t \|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_k(s)\|_H^2 + \alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_k(s)\|_H^2 \, ds$$
$$+ \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v}|^2 \, d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{v} ds = \frac{1}{2}M_2 f_{\mathtt{in}}^k + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\|_\alpha^2 + I_k(t), \qquad (2.49)$$

onde $I_k = I_k^1 + I_k^2 + I_k^3$ com

$$I_k^1(t) = \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k|^2(1-\gamma_k(\boldsymbol{v}))\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds,$$

$$I_k^2(t) = \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{v}(\gamma_k(\boldsymbol{v})-1)\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds,$$

$$I_k^3(t) = \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds.$$

Definindo $h_k = f_k(1-\gamma_k)$, temos

$$|I_k^1(t)| \leq T^* \|m_0 h_k\|_{L^\infty(0,T^*;L^{3/2}(\mathbb{T}^3))} \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^\infty(0,T^*;L^6(\mathbb{T}^3))}^2.$$

O Lema 1.12 implica que

$$m_0 h_k(t,\boldsymbol{x}) \leq \left(C\|h_k\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1 \right) m_{3/2}h_k(t,\boldsymbol{x})^{2/3}$$
$$\leq \left(C\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1 \right) m_{3/2}h_k(t,\boldsymbol{x})^{2/3},$$

logo,

$$\|m_0 h_k(t)\|_{L^{3/2}(\mathbb{T}^3)} \leq C M_{3/2}h_k(t)^{2/3}.$$

Observemos que

$$M_{3/2}h_k(t) = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^{3/2} f_k(1-\gamma_k)\, d\boldsymbol{v} d\boldsymbol{x}$$
$$\leq \iint_{\mathbb{T}^3\times\{|\boldsymbol{v}|\geq k\}} |\boldsymbol{v}|^{3/2} f_k \, d\boldsymbol{v} d\boldsymbol{x}$$
$$\leq k^{-1/2} M_2 f_k(t).$$

Como $(M_2 f_k)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T^*)$, então $(m_0 h_k)$ converge para 0 em $L^\infty(0,T^*;L^{3/2}(\mathbb{T}^3))$ quando $k\to\infty$. Além disso, por (2.43) $(\boldsymbol{u}_k)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T^*;V)$, então (I_k^1) converge para 0 quando $k\to\infty$.

Por outro lado,

$$|I_k^2(t)| \le T^* \left\|m_1 h_k\right\|_{L^\infty(0,T^*;L^{6/5}(\mathbb{T}^3))} \left\|\boldsymbol{u}_k\right\|_{L^\infty(0,T^*;L^6(\mathbb{T}^3))}.$$

Novamente, pelo Lema 1.12 temos que

$$\begin{aligned} m_1 h_k(t,\boldsymbol{x}) &\le \Big(C\left\|h_k\right\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}+1\Big)\, m_{9/5}h_k(t,\boldsymbol{x})^{5/6} \\ &\le \Big(C\left\|f_{\mathtt{in}}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}+1\Big)\, m_{9/5}h_k(t,\boldsymbol{x})^{5/6}, \end{aligned}$$

daí obtemos

$$\left\|m_1 h_k(t)\right\|_{L^{6/5}(\mathbb{T}^3)} \le C M_{9/5}h_k(t)^{5/6}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} M_{9/5}h_k(t) &= \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^{9/5} f_k(1-\gamma_k)\, d\boldsymbol{v}d\boldsymbol{x} \\ &\le \iint_{\mathbb{T}^3\times\{|\boldsymbol{v}|\ge k\}} |\boldsymbol{v}|^{9/5} f_k\, d\boldsymbol{v}d\boldsymbol{x} \\ &\le k^{-1/5} M_2 f_k(t). \end{aligned}$$

Assim, como $(M_2 f_k)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T^*)$, então $(m_1 h_k)$ converge para 0 em $L^\infty(0,T^*;L^{6/5}(\mathbb{T}^3))$ quando $k\to\infty$. Além disso, como $(\boldsymbol{u}_k)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T^*;V)$, então (I_k^2) converge para 0 quando $k\to\infty$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} |I_k^3(t)| &\le \int_0^{T^*}\int_{\mathbb{T}^3} |\boldsymbol{u}_k-\theta_k*\boldsymbol{u}_k| m_1 f_k\, d\boldsymbol{x}\, dt \\ &\le \int_0^{T^*} \left\|\boldsymbol{u}_k-\theta_k*\boldsymbol{u}_k\right\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} \left\|m_1 f_k\right\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)}\, dt \\ &\le \left\|\boldsymbol{u}_k-\theta_k*\boldsymbol{u}_k\right\|_{L^1(0,T^*;L^5(\mathbb{T}^3))} \left\|m_1 f_k\right\|_{L^\infty(0,T^*;L^{5/4}(\mathbb{T}^3))} \\ &\le C\left\|\boldsymbol{u}_k-\theta_k*\boldsymbol{u}_k\right\|_{L^1(0,T^*;L^5(\mathbb{T}^3))} \left\|M_2 f_k\right\|_{L^\infty(0,T^*)}^{5/4}, \end{aligned}$$

onde usamos (2.45). Observemos que $\left\|\boldsymbol{u}_k-\theta_k*\boldsymbol{u}_k\right\|_{L^1(0,T^*;L^5(\mathbb{T}^3))}\to 0$ pois

$$\begin{aligned} \left\|\boldsymbol{u}_k-\theta_k*\boldsymbol{u}_k\right\|_X &\le \left\|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}\right\|_X + \left\|\boldsymbol{u}-\theta_k*\boldsymbol{u}\right\|_X + \left\|\theta_k*(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_k)\right\|_X \\ &\le 2\left\|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}\right\|_X + \left\|\boldsymbol{u}-\theta_k*\boldsymbol{u}\right\|_X, \end{aligned}$$

onde $X = L^1(0, T^*; L^5(\mathbb{T}^3))$ e usamos a desigualdade de Young para convoluções. Logo, tomando $k \to \infty$, temos que o lado direito da desigualdade anterior converge para 0. Portanto, $I_k^3 \to 0$ e consequentemente $I_k \to 0$ em $L^\infty(0, T^*)$, quando $k \to \infty$.

Lembremos que

$$\frac{1}{2}M_2 f_k(t)+\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{u}_k(t)\right\|_\alpha^2+\int_0^t \left\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_k(s)\right\|_H^2+\alpha^2\left\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_k(s)\right\|_H^2\,ds+\int_0^t\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds$$
$$\leq \frac{1}{2}M_2 f_{\mathtt{in}}^k + \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\right\|_\alpha^2 + \left\|I_k\right\|_{L^\infty(0,T^*)}.$$

Usando que $M_2 f_{\mathtt{in}}^k \to M_2 f_{\mathtt{in}}$ e que $I_k \to 0$ em $L^\infty(0, T^*)$, segue que

$$\liminf_{k\to\infty}\left\|M_2 f_k\right\|_{L^\infty(0,T^*)} \leq M_2 f_{\mathtt{in}} + \left\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\right\|_\alpha^2.$$

Seja γ_m uma sequência de corte. Então, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, temos que

$$\left\|M_2(f_k\gamma_m)\right\|_{L^\infty(0,T^*)} \leq \left\|M_2 f_k\right\|_{L^\infty(0,T^*)}.$$

Por outro lado, como $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$, então $M_2(f_k\gamma_m) \overset{*}{\rightharpoonup} M_2(f\gamma_m)$ em $L^\infty(0, T^*)$. Assim, temos que

$$\left\|M_2(f\gamma_m)\right\|_{L^\infty(0,T^*)} \leq \liminf_{k\to\infty}\left\|M_2(f_k\gamma_m)\right\|_{L^\infty(0,T^*)}.$$

Finalmente pelo Lema de Fatou

$$M_2 f(t) \leq \liminf_{m\to\infty} M_2(f\gamma_m)(t)$$

e das estimativas anteriores segue que,

$$M_2 f(t) \leq \liminf_{k\to\infty}\left\|M_2 f_k\right\|_{L^\infty(0,T^*)}.$$

De forma análoga,

$$\liminf_{k\to\infty}\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}ds \leq \frac{1}{2}\left(M_2 f_{\mathtt{in}} + \left\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\right\|_\alpha^2\right)$$

e para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado

$$\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{v}|^2\gamma_m(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds \leq \int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds.$$

Além disso, como $\boldsymbol{u}_k \to \boldsymbol{u}$ em $L^2(0,T^*;H)$ e

$$\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \left||\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{v}|^2-|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2\right|\gamma_m(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\,dt \leq C(T^*,m)\,\|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H)},$$

então,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{v}|^2\gamma_m(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds = \int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2\gamma_m(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds.$$

Pelo Lema de Fatou

$$\int_0^{t}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds \leq \liminf_{m\to\infty}\int_0^{t}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2\gamma_m(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds.$$

Destas estimativas deduzimos

$$\int_0^{t}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds \leq \liminf_{k\to\infty}\int_0^{T^*}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds.$$

Além disso, como $\boldsymbol{u}_k \to \boldsymbol{u}$ fortemente em $L^2(0,T;V)$ e fracamente em $L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|_\alpha^2 &+ \int_0^t \|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}(s)\|_H^2+\alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}(s)\|_H^2\,ds\\ &\leq \liminf_{k\to 0}\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_k(t)\|_\alpha^2+\int_0^t \|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_k(s)\|_H^2+\alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_k(s)\|_H^2\,ds\right),\end{aligned}$$

para quase todo $t\in[0,T]$.

Com isso, de (2.49) concluímos (2.47). ■

Agora iremos mostrar que o Lema 2.9 garante que a solução $(\boldsymbol{u},f)$ pode ser estendida:

Extensão

Pelo Lema 2.9, temos que existe $\mu \geq 0$ tal que

$$\boldsymbol{u}(T^*-\mu)\in V, \qquad f(T^*-\mu)\in L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3), \qquad M_2 f(T^*-\mu)<\infty.$$

Por outro lado, para $K>0$ tal que

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\|_\alpha^2+\frac{1}{2}M_2 f_{\mathtt{in}} \leq K, \qquad e^{3T}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\leq K,$$

temos que a constante C em (2.43) depende apenas de T e K. Portanto, existe $\tau>0$, dependendo somente de T e K, tal que podemos tomar $T^*\in[\tau,T]$.

Desta forma, podemos resolver novamente o sistema (2.1)-(2.6), com condições iniciais $\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}(T^*-\mu)$ e $f(0)=f(T^*-\mu)$, estendendo a solução $(\boldsymbol{u},f)$ ao intervalo $(T^*-\mu, T^*-\mu+\tau)$. Assim, podemos repetir este processo até estendermos a solução para todo o intervalo $[0,T]$. Com isto, está demonstrado o Teorema 2.1.

2.2 Regularidade da Solução

Nesta seção, vamos estudar a regularidade da solução do problema (2.1)-(2.6) encontrada no Teorema 2.1. Primeiramente, iremos mostrar que se o dado inicial $f_{\mathtt{in}}$ possui momentos de ordem maior finitos, então a solução f também os terá.

Teorema 2.10. Suponhamos que $M_p f_{\mathtt{in}} < \infty$, para algum $p > 2$. Então, $M_q f \in L^\infty(0,T)$, para todo $q \le p$.

Demonstração: Primeiro, iremos mostrar que $M_p f \in L^\infty(0,T)$. Multiplicando a equação (2.8) por $|\boldsymbol{v}|^p$ e integrando sobre $(0,t) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$, obtemos

$$\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(t)|\boldsymbol{v}|^p \, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} = p\int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})\cdot \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}|^{p-2}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds + \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f^k_{\mathtt{in}}|\boldsymbol{v}|^p\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} M_p f_k(t) + p\int_0^t M_p f_k(s)\, ds &= p\int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k)\cdot \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}|^{p-2}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds + M_p f^k_{\mathtt{in}} \\ &\le p\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\theta_k * \boldsymbol{u}_k| m_{p-1} f_k\, d\boldsymbol{x}\, ds + M_p f^k_{\mathtt{in}}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e o Lema 1.12

$$\begin{aligned} M_p f_k(t) + p\int_0^t M_p f_k(s)\, ds &\le p\int_0^t \|\theta_k * \boldsymbol{u}_k\|_{L^{p+3}(\mathbb{T}^3)} \|m_{p-1} f_k\|_{L^{\frac{p+3}{p+2}}(\mathbb{T}^3)}\, ds + M_p f^k_{\mathtt{in}} \\ &\le C(\|f_k\|_{L^\infty} + 1)\int_0^t \|\theta_k * \boldsymbol{u}_k\|_{L^{p+3}(\mathbb{T}^3)} (M_p f_k)^{1-\frac{1}{p+3}}\, ds + M_p f^k_{\mathtt{in}} \end{aligned}$$

e finalmente pelo Lema 1.9

$$\begin{aligned} M_p f_k(t) &\le \left(\left(M_p f^k_{\mathtt{in}}\right)^{\frac{1}{p+3}} + \frac{C}{p+3}(\|f_k\|_{L^\infty} + 1)\int_0^t \|\theta_k * \boldsymbol{u}_k\|_{L^{p+3}(\mathbb{T}^3)}\, ds \right)^{p+3} \\ &\le C\left((M_0 f_{\mathtt{in}} + M_p f_{\mathtt{in}})^{\frac{1}{p+3}} + (\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty} + 1)\int_0^T \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^{p+3}(\mathbb{T}^3)}\, ds \right)^{p+3}. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema de Fatou

$$M_p f(t) \le \liminf_{m\to\infty} M_p(f\gamma_m)(t),$$

onde γ_m é uma sequência de corte.

Como $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{T}^3)$, então $M_p(f_k\gamma_m) \overset{*}{\rightharpoonup} M_p(f\gamma_m)$ em $L^\infty(0,T)$ e

$$\|M_p(f\gamma_m)\|_{L^\infty(0,T)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|M_p(f_k\gamma_m)\|_{L^\infty(0,T)}.$$

Portanto,

$$M_pf(t) \leq \liminf_{k\to\infty} \|M_pf_k\|_{L^\infty(0,T)}.$$

Então, basta observar que $(\boldsymbol{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitado em $L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$ para concluirmos que $M_pf \in L^\infty(0,T)$.

Agora, pelo Lema 1.12, temos que para $q < p$

$$m_qf(t,\boldsymbol{x}) \leq \left(C\|f\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\right) m_pf(t,\boldsymbol{x})^{\frac{q+3}{p+3}},$$

logo, integrando e aplicando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
M_qf(t) &\leq \left(C\|f\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\right) \int_{\mathbb{T}^3} m_pf(t,\boldsymbol{x})^{\frac{q+3}{p+3}}\,d\boldsymbol{x} \\
&\leq \left(C\|f\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\right) (M_pf(t))^{\frac{q+3}{p+3}} \\
&\leq \left(C\|f\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\right) \|M_pf\|_{L^\infty(0,T)}^{\frac{q+3}{p+3}},
\end{aligned}$$

portanto, $M_qf \in L^\infty(0,T)$, para todo $q \leq p$. ■

Além disso, também temos o seguintes resultados:

Teorema 2.11. Seja $(\boldsymbol{u}, f)$ a solução encontrada no Teorema 2.1. Suponhamos que $\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}} \in H^3(\mathbb{T}^3)\cap V$ e $M_5f_{\mathtt{in}} < \infty$, então

- $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;(H^4(\mathbb{T}^3))^3\cap V)\cap C([0,T];(H^3(\mathbb{T}^3))^3\cap V)$;
- $\partial_t\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$;
- $f \in C([0,T];L^1(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3))\cap L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Primeiramente, notemos que pelo Teorema 2.10, a condição $M_5f_{\mathtt{in}} < \infty$, implica que $M_pf \in L^\infty(0,T)$, para $p \leq 5$. Por outro lado, para

$$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}) = -\int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{v},$$

temos que

$$\int_0^T\int_{\mathbb{T}^3} |\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt \leq \int_0^T\int_{\mathbb{T}^3} |\boldsymbol{u}|^2(m_0f)^2 + (m_1f)^2\,d\boldsymbol{x}\,dt$$

$$\leq \int_0^T \left(\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|m_0 f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \|m_1 f\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \right) dt,$$

então, pelo Lema 1.12

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} |\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x} \, dt \leq C \left(\|\boldsymbol{u}\|_{L^1(0,T;L^\infty(\mathbb{T}^3))} \|M_3 f\|_{L^\infty(0,T)} + \|M_5 f\|_{L^\infty(0,T)} \right),$$

com $C = \left(C \|f\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1 \right)$.

Portanto, $\boldsymbol{F} \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))$. Agora, pelo Teorema 1.14, temos que $\boldsymbol{u}$ é a única solução de (2.2)-(2.4) com condição inicial (2.6) e além disso, como $\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}} \in H^3(\mathbb{T}^3) \cap V$ então da Proposição 1.16, $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;(H^4(\mathbb{T}^3))^3 \cap V) \cap C([0,T];(H^3(\mathbb{T}^3))^3 \cap V)$ com $\partial_t \boldsymbol{u} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$.

Finalmente, como $\boldsymbol{u} \in C([0,T] \times \mathbb{T}^3)$ e $\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u} \in C([0,T] \times \mathbb{T}^3)$, então pelo Teorema 1.19, f é a única solução do problema (2.1) com condição inicial (2.5) e além disso $f \in C([0,T];L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$. ■

Corolário 2.12. Seja $(\boldsymbol{u}, f)$ a solução encontrada no Teorema 2.1. Suponhamos que $\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}} \in H^3(\mathbb{T}^3) \cap V$, $f_{\mathtt{in}} \in C^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ e $M_5 f_{\mathtt{in}} < \infty$, então

- $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;(H^4(\mathbb{T}^3))^3 \cap V) \cap C([0,T];(H^3(\mathbb{T}^3))^3 \cap V)$;
- $\partial_t \boldsymbol{u} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$;
- $f \in C^1([0,T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Como $f_{\mathtt{in}} \in C^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, então podemos revisitar a demonstração do Teorema 2.11 e aplicar o Teorema 1.18 ao invés do Teorema 1.19 no último paragrafo, obtendo assim $f \in C^1([0,T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$. ■

2.3 Limite quando $\alpha \to 0^+$

Nesta seção, iremos mostrar que é possível obtermos soluções do problema de Navier-Stokes-Vlasov quando o parâmetro α tende a 0.

Teorema 2.13. Suponhamos que $f_{\mathtt{in}} \in L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, $M_2 f_{\mathtt{in}} < \infty$ e $\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}} \in V$. Se $(\boldsymbol{u}_\alpha, f_\alpha)$ é uma solução de (2.1)-(2.6) para $\alpha \in (0,1]$ e $\boldsymbol{w}_\alpha = \boldsymbol{u}_\alpha + \alpha^2 \mathrm{A} \boldsymbol{u}_\alpha$, então existe $(\boldsymbol{u}, f)$ tal que, a menos de subsequência,

- $\boldsymbol{u}_\alpha \to \boldsymbol{u}$ fortemente em $L^2(0,T;H)$ e fracamente em $L^2(0,T;V)$;
- $\boldsymbol{w}_\alpha \to \boldsymbol{u}$ fracamente em $L^2(0,T;H)$ e fortemente em $L^2(0,T;V')$;
- $f_\alpha \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$;

quando $\alpha \to 0^+$.

Além disso, $(\boldsymbol{u}, f)$ é uma solução fraca do sistema de Navier-Stokes-Vlasov.

Demonstração: Pelo Lema 2.9 temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M_2 f_\alpha(t) + \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{u}_\alpha(t)\right\|_\alpha^2 + \int_0^t \left(\left\|\nabla\boldsymbol{u}_\alpha(s)\right\|_H^2 + \alpha^2\left\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_\alpha(s)\right\|_H^2\right)\,ds \\ + \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_\alpha|\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{v}\,ds \le \frac{1}{2}M_2 f_{\mathtt{in}} + \frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\right\|_\alpha^2,\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\left\|f_\alpha\right\|_{L^\infty((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \le e^{3T}\left\|f_{\mathtt{in}}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}, \tag{2.51}$$

logo

- $\boldsymbol{u}_\alpha$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$ com respeito a α;
- $M_2 f_\alpha$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T)$ com respeito a α;
- f_α é uniformemente limitada em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$ com respeito a α.

Além disso,

$$\left\|\boldsymbol{w}_\alpha\right\|_H^2 = \left\|\boldsymbol{u}_\alpha\right\|_\alpha^2 + \alpha^2\left(\left\|\nabla\boldsymbol{u}_\alpha\right\|_H^2 + \alpha^2\left\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_\alpha\right\|_H^2\right).$$

Portanto,

- $\boldsymbol{w}_\alpha$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;H)$.

Estas estimativas nos permitem concluir que existem $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ e f tais que, a menos de subsequência,

- $\boldsymbol{u}_\alpha \rightharpoonup \boldsymbol{u}$ em $L^2(0,T;V)$;
- $\boldsymbol{w}_\alpha \rightharpoonup \boldsymbol{w}$ em $L^2(0,T;H)$;
- $f_\alpha \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$.

Relembrando que $S_\alpha = I + \alpha^2 \mathrm{A}$ e denotando $S_1 := S$, temos

$$S^{-1}\left(\boldsymbol{u}_\alpha'(t)\right) + S^{-1}\left(\mathrm{A}\boldsymbol{u}_\alpha(t)\right) + S^{-1}S_\alpha^{-1}\left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha(t), \boldsymbol{w}_\alpha(t))\right)$$
$$= S^{-1}S_\alpha^{-1}\left(-\int_{\mathbb{R}^3} f_\alpha(t)(\boldsymbol{u}_\alpha(t) - \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v}\right), \text{ em } D(\mathrm{A}),$$

para quase todo $t \in [0, T]$.

Agora, precisamos estimar $(\boldsymbol{u}_\alpha')$ em $L^2(0,T; D(\mathrm{A})')$ independentemente de α. Para isto, primeiro notemos que

$$\|\boldsymbol{u}_\alpha'\|_{D(\mathrm{A})'} = \sup_{\|\boldsymbol{\psi}\|_{D(\mathrm{A})} \le 1} \left|(S^{-1}\boldsymbol{u}_\alpha', S\boldsymbol{\psi})\right| \le C\left\|S^{-1}\boldsymbol{u}_\alpha'\right\|_H,$$

portanto, basta estimarmos $(S^{-1}\boldsymbol{u}_\alpha')$ em $L^2(0,T;H)$ independentemente de α. Para isto, façamos as seguintes estimativas:

$$\left\|S^{-1}\left(\mathrm{A}\boldsymbol{u}_\alpha\right)\right\|_H^2 \le \left\|S^{-1}\left(\mathrm{A}\boldsymbol{u}_\alpha\right)\right\|_H^2 + 2\left\|S^{-1}\left(\nabla\boldsymbol{u}_\alpha\right)\right\|_H^2 + \left\|S^{-1}\boldsymbol{u}_\alpha\right\|_H^2 = \|\boldsymbol{u}_\alpha\|_H^2 \le C,$$

pois

$$\|S\boldsymbol{u}_\alpha\|_H^2 = \|\boldsymbol{u}_\alpha\|_H^2 + 2\|\nabla\boldsymbol{u}_\alpha\|_H^2 + \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_\alpha\|_H^2.$$

Por outro lado, pelo Lema 1.13

$$\begin{aligned}\left\|S^{-1}S_\alpha^{-1}\left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{w}_\alpha)\right)\right\|_H &\le \left\|S^{-1}\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{w}_\alpha)\right\|_H \\ &\le C(\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_H^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_V^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{w}_\alpha\|_H + \|\nabla\boldsymbol{u}_\alpha\|_H\|\boldsymbol{w}_\alpha\|_H) \\ &\le C\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_V(\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_H + \alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_\alpha\|_H),\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\|S^{-1}S_\alpha^{-1}\left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{w}_\alpha)\right)\right\|_H^2 dt &\le C\int_0^T \left(\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_V^2\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_H^2 + (\alpha^2\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_V^2)(\alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_\alpha\|_H^2)\right) dt \\ &\le C\int_0^T \left(\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_V^2 + \alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_\alpha\|_H^2\right) dt \le C.\end{aligned}$$

Seja

$$\boldsymbol{F}_\alpha = -\int_{\mathbb{R}^3} f_\alpha(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v},$$

então,

$$\begin{aligned}\left\|S^{-1}S_\alpha^{-1}\boldsymbol{F}_\alpha\right\|_H \le \left\|S^{-1}\boldsymbol{F}_\alpha\right\|_H &= \sup_{\|\boldsymbol{\psi}\|_H \le 1}\left|(S^{-1}\boldsymbol{F}_\alpha, \boldsymbol{\psi})\right| \\ &= \sup_{\|\boldsymbol{\psi}\|_H \le 1}\left|\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_\alpha(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{v})S^{-1}\boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\right|.\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 1.12 e pela estimativa (2.51)

$$
\begin{aligned}
m_0 f_\alpha(t,\boldsymbol{x}) &\leq \Big(C\,\|f_\alpha\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}+1\Big)\, m_2 f_\alpha(t,\boldsymbol{x})^{3/5}\\
&\leq \Big(C\,\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}+1\Big)\, m_2 f_\alpha(t,\boldsymbol{x})^{3/5}
\end{aligned}
$$

e pela estimativa (2.50)

$$
\|m_0 f_\alpha(t)\|_{L^{5/3}(\mathbb{T}^3)} \leq C M_2 f_\alpha(t)^{3/5} \leq C.
$$

De maneira análoga,

$$
\begin{aligned}
m_1 f_\alpha(t,\boldsymbol{x}) &\leq \Big(C\,\|f_\alpha\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}+1\Big)\, m_2 f_\alpha(t,\boldsymbol{x})^{4/5}\\
&\leq \Big(C\,\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}+1\Big)\, m_2 f_\alpha(t,\boldsymbol{x})^{4/5},
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\|m_1 f_\alpha(t)\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)} \leq C M_2 f_\alpha(t)^{4/5} \leq C.
$$

Destas estimativas concluímos que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{T}^3} \boldsymbol{F}_\alpha S^{-1}\boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{x}\right| &\leq \Big(\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}\,\|m_0 f_\alpha\|_{L^{5/3}(\mathbb{T}^3)} + \|m_1 f_\alpha\|_{L^{5/4}(\mathbb{T}^3)}\Big)\,\left\|S^{-1}\boldsymbol{\psi}\right\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}\\
&\leq C\left[\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_V (M_2 f_\alpha)^{3/5} + (M_2 f_\alpha)^{4/5}\right]\|\boldsymbol{\psi}\|_H\\
&\leq C(\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_V + 1)\,\|\boldsymbol{\psi}\|_H\,,
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\left\|S^{-1}S_\alpha^{-1}\boldsymbol{F}_\alpha\right\|_H \leq C(\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_V + 1).
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\left\|S^{-1}\boldsymbol{u}_\alpha'(t)\right\|_H \leq{}& \left\|S^{-1}\mathrm{A}\boldsymbol{u}_\alpha(t)\right\|_H\\
&+\left\|S^{-1}S_\alpha^{-1}\left(\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha(t),\boldsymbol{w}_\alpha(t))\right)\right\|_H + \left\|S^{-1}S_\alpha^{-1}\boldsymbol{F}_\alpha\right\|_H,
\end{aligned}
$$

então $(\boldsymbol{u}_\alpha')$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;D(\mathrm{A})')$. Portanto, pelo Lema 1.6, a menos de subsequência,

- $\boldsymbol{u}_\alpha \to \boldsymbol{u}$ em $L^2(0,T;H)$.

Além disso,

$$
\int_0^T \|\boldsymbol{w}_\alpha - \boldsymbol{u}_\alpha\|_H^2\, ds = \alpha^4 \int_0^T \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_\alpha\|_H^2\, ds \leq \alpha^2 C.
$$

Como $\boldsymbol{w}_\alpha - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}_\alpha - \boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}$, então

- $\boldsymbol{w}_\alpha \to \boldsymbol{u}$ em $L^2(0,T;H)$

e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$ q.t.p.

Seja $\boldsymbol{z} \in D(\mathrm{A})$ e $\psi \in C^1([0,T])$, tal que $\psi(T) = 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \boldsymbol{w}_\alpha'(t), \boldsymbol{z}\rangle \,\psi(t)\,dt &= -(\boldsymbol{w}_\alpha(0), \boldsymbol{z})\psi(0) - \int_0^T (\boldsymbol{w}_\alpha(t), \boldsymbol{z})\psi'(t)\,dt \\ &= -(\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}, S_\alpha \boldsymbol{z})\psi(0) - \int_0^T (\boldsymbol{w}_\alpha(t), \boldsymbol{z})\psi'(t)\,dt,\end{aligned}$$

logo

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^T \langle \boldsymbol{w}_\alpha'(t), \boldsymbol{z}\rangle \,\psi(t)\,dt = -(\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}, \boldsymbol{z})\psi(0) - \int_0^T (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{z})\psi'(t)\,dt.$$

Além disso

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^T \langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}_\alpha(t), \boldsymbol{z}\rangle \,\psi(t)\,dt &= \lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^T (\boldsymbol{w}_\alpha(t), \mathrm{A}\boldsymbol{z})\psi(t)\,dt \\ &= \int_0^T (\boldsymbol{u}(t), \mathrm{A}\boldsymbol{z})\psi(t)\,dt \\ &= \int_0^T (\nabla\boldsymbol{u}(t), \nabla\boldsymbol{z})\psi(t)\,dt\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{w}_\alpha - \boldsymbol{u}), \boldsymbol{z}\right\rangle\,dt\right| &\le C\int_0^T \|\boldsymbol{u}_\alpha\|_V \,\|\boldsymbol{w}_\alpha - \boldsymbol{u}\|_H \,\|\boldsymbol{z}\|_{D(\mathrm{A})}\,dt \\ &\le C\,\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_{L^2(0,T;V)}\,\|\boldsymbol{w}_\alpha - \boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H)}\,\|\boldsymbol{z}\|_{D(\mathrm{A})},\end{aligned}$$

como $(\boldsymbol{u}_\alpha)$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;V)$ e $\boldsymbol{w}_\alpha \to \boldsymbol{u}$ em $L^2(0,T;H)$, então

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{w}_\alpha - \boldsymbol{u}), \boldsymbol{z}\right\rangle\,dt = 0. \tag{2.52}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{z}\right\rangle\,dt\right| &\le C\int_0^T \|\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}\|_H \,\|\boldsymbol{u}\|_V \,\|\boldsymbol{z}\|_{D(\mathrm{A})}\,dt \\ &\le C\,\|\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H)}\,\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;V)}\,\|\boldsymbol{z}\|_{D(\mathrm{A})},\end{aligned}$$

como $\boldsymbol{u}_\alpha \to \boldsymbol{u}$ em $L^2(0,T;H)$, então

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{z}\right\rangle\,dt = 0. \tag{2.53}$$

Como

$$\widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{w}_\alpha) - \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{w}_\alpha - \boldsymbol{u}) + \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}),$$

então combinando (2.52) e (2.53) obtemos

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{w}_\alpha), \boldsymbol{z} \right\rangle dt = \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{z} \right\rangle dt = \int_0^T \langle \mathrm{B}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{z} \rangle \, dt.$$

Sejam $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{z}\psi$ e $(\gamma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de corte, então podemos escrever

$$\int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_\alpha(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} \, dt = J^1_{\alpha,m} + J^2_{\alpha,m},$$

onde

$$\begin{aligned} J^1_{\alpha,m} &= \int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_\alpha \gamma_m(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} \, dt; \\ J^2_{\alpha,m} &= \int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_\alpha (1-\gamma_m(\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} \, dt. \end{aligned}$$

Para analisarmos $J^1_{\alpha,m}$, primeiro notemos que

$$\left| \int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} (\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u})\gamma_m(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} \, dt \right| \le \|\gamma_m\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \|\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;H)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(0,T;H)},$$

logo

$$(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{v})\gamma_m\boldsymbol{\psi} \to (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\gamma_m\boldsymbol{\psi} \quad \text{em } L^1((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3),$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ quando $\alpha \to 0^+$.

Como $f_\alpha \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$, então

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{\alpha\to 0^+} J^1_{\alpha,m} = \int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} \, dt.$$

Por outro lado, denotando $h_{\alpha,m} = f_\alpha(1-\gamma_m)$, temos que

$$\left|J^2_{\alpha,m}\right| \le \|\boldsymbol{u}_\alpha\|_{L^2(L^6)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(L^6)} \|m_0 h_{\alpha,m}\|_{L^\infty(0,T;L^{3/2}(\mathbb{T}^3))},$$

com $L^2(L^6) = L^2(0,T;L^6(\mathbb{T}^3))$.

O Lema 1.12 implica que

$$\begin{aligned} m_0 h_{\alpha,m}(t,\boldsymbol{x}) &\le \left(C \|h_{\alpha,m}\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1 \right) m_{3/2} h_{\alpha,m}(t,\boldsymbol{x})^{2/3} \\ &\le \left(C \|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1 \right) m_{3/2} h_{\alpha,m}(t,\boldsymbol{x})^{2/3}, \end{aligned}$$

logo,

$$\|m_0 h_{\alpha,m}(t)\|_{L^{3/2}(\mathbb{T}^3)} \leq C M_{3/2} h_{\alpha,m}(t)^{2/3}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} M_{3/2} h_{\alpha,m}(t) &= \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}|^{3/2} f_\alpha (1-\gamma_m)\, d\boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} \\ &\leq \iint_{\mathbb{T}^3\times\{|\boldsymbol{v}|\geq m\}} |\boldsymbol{v}|^{3/2} f_\alpha\, d\boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} \\ &\leq m^{-1/2} M_2 f_\alpha(t). \end{aligned}$$

Como $(M_2 f_\alpha)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T)$, então $(m_0 h_{\alpha,m})$ converge para 0 em $L^\infty(0,T;L^{3/2}(\mathbb{T}^3))$ quando $m\to\infty$, uniformemente com respeito a α. Além disso, $(\boldsymbol{u}_\alpha)$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;V)$, então

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\alpha\to 0^+} J^2_{\alpha,m} = \lim_{m\to\infty}\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_\alpha(1-\gamma_m(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{u}_\alpha \boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, dt = 0.$$

Com estas convergências podemos passar ao limite na formulação fraca de (2.1)-(2.6) e mostrar que $(\boldsymbol{u}, f)$ satisfaz:

$$-\int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f[\partial_t\phi + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi + (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot\nabla_{\boldsymbol{v}}\phi]\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}}\phi(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v},$$

pata toda $\phi\in C^1([0,T]\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$ com suporte compacto em $\boldsymbol{v}$ e $\phi(T,\cdot,\cdot)=0$; e

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\boldsymbol{u}, \partial_t\boldsymbol{\psi})\, ds + &\int_0^T (\mathrm{B}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\psi})\, ds + \int_0^T (\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{\psi})\, ds \\ &= -\int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds + (\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}, \boldsymbol{\psi}(0)), \end{aligned}$$

para todo $\boldsymbol{\psi}\in C^1([0,T]\times\mathbb{T}^3)$ com $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0$ e $\boldsymbol{\psi}(T)=0$.

Portanto, temos o resultado desejado. ■

Capítulo 3

Equações de α-Navier-Stokes Vlasov-Fokker-Planck

Neste capítulo, vamos considerar novamente equações para um fluido e um spray que são acopladas através de uma força de arrasto, que depende da velocidade relativa do fluido e das partículas e da função densidade f, no entanto, desta vez vamos considerar um efeito de difusão na velocidade (por simplicidade assumimos $\sigma = 1$). Mais precisamente, $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ e $p(t, \boldsymbol{x})$ (como definidas para as equações de α-Navier-Stokes-Vlasov) satisfazem o seguinte sistema:

$$
\begin{aligned}
\partial_t f + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f + \nabla_{\boldsymbol{v}} \cdot [(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) f - \nabla_{\boldsymbol{v}} f] &= 0 && \text{em } (0, T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, && (3.1)\\
\partial_t \boldsymbol{w} - \Delta \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{w}) + \nabla p & \\
= - \int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \, d\boldsymbol{v} & && \text{em } (0, T) \times \mathbb{T}^3, && (3.2)\\
\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u} - \alpha^2 \Delta \boldsymbol{u} && \text{em } (0, T) \times \mathbb{T}^3, && (3.3)\\
\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u} &= 0 && \text{em } (0, T) \times \mathbb{T}^3, && (3.4)\\
f(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) &= f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) && \text{em } \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, && (3.5)\\
\boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}) && \text{em } \mathbb{T}^3, && (3.6)
\end{aligned}
$$

sendo $f_{\mathtt{in}}$ e $\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}$ dados.

Vamos provar a existência global de uma solução fraca para o problema acima.

Observamos que, de forma análoga ao problema α-Navier-Stokes-Vlasov, podemos estudar o comportamento das soluções de (3.1)-(3.6) quando $\alpha \to 0^+$, assim obtendo uma versão correspondente do Teorema 2.13 para este caso. Ou seja, quando $\alpha \to 0^+$, as soluções de (3.1)-(3.6) convergem para uma solução fraca do sistema Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck.

3.1 Existência de Solução Fraca

Suponhamos a seguinte regularidade para os dados iniciais

- $f_{\mathtt{in}} \geq 0$,
- $f_{\mathtt{in}} \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$,
- $|\boldsymbol{v}|^2 f_{\mathtt{in}} \in L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$,
- $\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}} \in V$.

Agora iremos introduzir a definição de solução fraca de (3.1)-(3.6):

Definição 3.1. Dizemos que $(\boldsymbol{u}, f)$ é solução fraca de (3.1)-(3.6) se:

- $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; D(\mathrm{A})) \cap C([0, T]; V)$,
- $\partial_t \boldsymbol{u} \in L^2(0, T; H)$,
- $\boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x})$ em V,
- $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \geq 0$, $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \in (0, T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3$,
- $f \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$,
- $f|\boldsymbol{v}|^2 \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$,
- $\nabla_{\boldsymbol{v}} f \in L^2((0, T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

- Para todo $\phi \in C^2([0, T] \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$ com suporte compacto em $\boldsymbol{v}$ e $\phi(T, \cdot, \cdot) = 0$, temos

$$-\int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f[\partial_t \phi + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \phi + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}} \phi + \Delta_{\boldsymbol{v}} \phi] \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v} \, ds = \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}} \phi(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v}.$$

- Para todo $\boldsymbol{\psi} \in L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$, temos

$$\int_0^T \langle \partial_t \boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{\psi}(s) \rangle \, ds + \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}(s), \boldsymbol{w}(s)), \boldsymbol{\psi}(s) \right\rangle ds + \int_0^T \langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}(s), \boldsymbol{\psi}(s) \rangle \, ds$$
$$= -\int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \boldsymbol{\psi} \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v} \, ds,$$

  com $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \alpha^2 \mathrm{A}\boldsymbol{u}$.

A seguir enunciamos o principal resultado deste Capítulo.

Teorema 3.1. Para cada $T > 0$ existe pelo menos uma solução fraca $(\boldsymbol{u}, f)$ de (3.1)-(3.6). Além disso,

$$\|f\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq e^{3T} \|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} .$$

Para provarmos este Teorema, procederemos de forma análoga à prova do Teorema 2.1. A saber:

— Vamos propor uma versão regularizada de (3.1)-(3.6);

— Vamos considerar um esquema iterativo e provar que as suas soluções formam uma sequência que converge para uma solução do problema regularizado;

— Provar que existe uma sequência de soluções do problema regularizado que converge para uma solução local de (3.1)-(3.6);

— Estender a solução local a todo intervalo $[0, T]$.

3.1.1 Problema Regularizado

Mais uma vez, iremos introduzir uma versão regularizada do problema proposto, afim de aplicar os resultados desenvolvidos no Capítulo 1.

Sejam $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência regularizante e $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de corte, ambas sobre $\mathbb{R}^3$ e definamos o seguinte problema

$$\partial_t f_k + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f_k + \nabla_{\boldsymbol{v}} \cdot [(\theta_k * \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v}) f_k - \nabla_{\boldsymbol{v}} f_k] = 0 \quad \text{em} \quad (0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{3.7}$$

$$\partial_t \boldsymbol{w}_k - \Delta \boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{u}_k \times (\nabla \times \boldsymbol{w}_k) + \nabla p_k = -\int_{\mathbb{R}^3} f_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} \quad \text{em} \quad (0,T) \times \mathbb{T}^3, \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{u}_k - \alpha^2 \Delta \boldsymbol{u}_k \quad \text{em} \quad (0,T) \times \mathbb{T}^3, \tag{3.9}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}_k = 0 \quad \text{em} \quad (0,T) \times \mathbb{T}^3, \tag{3.10}$$

$$f_k(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = f^k_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \quad \text{em} \quad \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{u}_k(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}) \quad \text{em} \quad \mathbb{T}^3, \tag{3.12}$$

com $f^k_{\mathtt{in}} = \bar{\theta}_k * g_k$, sendo $(\bar{\theta}_k)$ uma sequência regularizante sobre $\mathbb{R}^6$; $g_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \chi_k(\boldsymbol{v}) f_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ e χ_k é a função característica do conjunto $B(0, k)$.

Vamos introduzir a definição de solução fraca de (3.7)-(3.12):

Definição 3.2. Dizemos que $(\boldsymbol{u}_k, f_k)$ é solução fraca de (3.7)-(3.12) se:

- $\boldsymbol{u}_k \in L^2(0, T; D(\mathrm{A})) \cap C([0, T]; V)$;
- $\partial_t \boldsymbol{u}_k \in L^2(0, T; H)$;
- $\boldsymbol{u}_k(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}$ em V;
- $f_k \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3))$;
- f_k é solução clássica de (3.7) com condição inicial (3.11);
- Para todo $\boldsymbol{\psi} \in L^2(0, T; D(\mathrm{A}))$ temos

$$\int_0^T \langle \partial_t \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{\psi} \rangle\, ds + \int_0^T \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_k), \boldsymbol{\psi} \right\rangle ds + \int_0^T \langle \mathrm{A}\boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{\psi} \rangle\, ds = -\int_0^T \iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\psi}\, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds, \tag{3.13}$$

  com $\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{u}_k + \alpha^2 \mathrm{A} \boldsymbol{u}_k$.

3.1.2 Esquema Iterativo

Embora o sistema (3.7)-(3.12) tenha mais regularidade que o problema proposto, ainda precisamos introduzir um problema auxiliar para resolve-lo.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado e para qualquer $n \in \mathbb{N}$, desejamos encontrar uma sequência $(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, f_k^n)$ satisfazendo o seguinte esquema iterativo:

$$\partial_t f_k^n + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f_k^n + \nabla_{\boldsymbol{v}} \cdot [(\theta_k * \boldsymbol{u}_k^n - \boldsymbol{v}) f_k^n - \nabla_{\boldsymbol{v}} f_k^n] = 0 \text{ em } (0,T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{3.14}$$

$$\partial_t \boldsymbol{w}_k^{n+1} - \Delta \boldsymbol{w}_k^{n+1} - \boldsymbol{u}_k^{n+1} \times (\nabla \times \boldsymbol{w}_k^{n+1}) + \nabla p_k^{n+1} = -\int_{\mathbb{R}^3} f_k^n (\boldsymbol{u}_k^n - \boldsymbol{v}) \gamma_k(\boldsymbol{v}) \, d\boldsymbol{v} \text{ em } (0,T) \times \mathbb{T}^3, \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{w}_k^{n+1} = \boldsymbol{u}_k^{n+1} - \alpha^2 \Delta \boldsymbol{u}_k^{n+1} \text{ em } (0,T) \times \mathbb{T}^3, \tag{3.16}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}_k^{n+1} = 0 \text{ em } (0,T) \times \mathbb{T}^3, \tag{3.17}$$

$$f_k^n(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = f_{\mathtt{in}}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \text{ em } \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3, \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{u}_k^{n+1}(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x}) \text{ em } \mathbb{T}^3, \tag{3.19}$$

com $\boldsymbol{u}_k^0 = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}$.

Definição 3.3. Dizemos que $(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, f_k^n)$ é solução fraca de (3.14)-(3.19) se:

- $\boldsymbol{u}_k^{n+1} \in C([0,T]; V) \cap L^2(0,T; D(\mathrm{A}))$;
- $\partial_t \boldsymbol{u}_k^{n+1} \in L^2(0,T; H)$;
- $\boldsymbol{u}_k^{n+1}(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x})$ em V;
- f_k^n é solução clássica de (3.14) com condição inicial (3.18);
- Para todo $\boldsymbol{\psi} \in L^2(0,T; D(\mathrm{A}))$ temos

$$\left\langle \partial_t \boldsymbol{w}_k^{n+1}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle + \left\langle \widetilde{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}(t), \boldsymbol{w}_k^{n+1}(t)), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle + \left\langle \mathrm{A} \boldsymbol{w}_k^{n+1}(t), \boldsymbol{\psi}(t) \right\rangle = -\iint_{\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3} f_k^n(t) (\boldsymbol{u}_k^n(t) - \boldsymbol{v}) \gamma_k(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\psi}(t) \, d\boldsymbol{x} \, d\boldsymbol{v}, \tag{3.20}$$

  com $\boldsymbol{w}_k^{n+1} = \boldsymbol{u}_k^{n+1} + \alpha^2 \mathrm{A} \boldsymbol{u}_k^{n+1}$ e para quase todo t em $[0,T]$.

A seguinte Proposição garante a existência e unicidade de solução fraca para o esquema iterativo (3.14)-(3.19):

Proposição 3.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma única solução $(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, f_k^n)$ de (3.14)-(3.19).

Demonstração: Por simplicidade, escreveremos $\boldsymbol{u}^n$ e f^n ao invés de $\boldsymbol{u}_k^n$ e f_k^n. Para mostrarmos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um único par $(\boldsymbol{u}^{n+1}, f^n)$, iremos aplicar o processo de indução finita:

(i) Para $n = 0$, temos que $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}$. Logo,

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|\theta_k * \boldsymbol{u}^0(t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} < \infty,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|\nabla_{\boldsymbol{x}}(\theta_k * \boldsymbol{u}^0)(t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} < \infty.$$

Além disso, $f_{\mathtt{in}}^k \in C^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, então aplicando o Teorema 1.22, temos que para $n = 0$, a equação (3.14) com a condição inicial (3.18), possui uma única solução clássica f^0 dada por

$$f^0(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \Gamma^0(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, 0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) f_{\mathtt{in}}^k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}, \tag{3.21}$$

com Γ^0 satisfazendo

$$\begin{aligned}\Gamma^0(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) &= H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \\ &+ \int_\tau^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_{\boldsymbol{\nu}'} H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau', \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\nu}')\theta_k * \boldsymbol{u}^0(\tau', \boldsymbol{\xi}')\Gamma^0(\tau', \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\nu}', \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}'\, d\tau'.\end{aligned}$$

Além disso, como $f_{\mathtt{in}}^k \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, então pelo Lema 1.23

$$|f^0(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})| \le \left\|f_{\mathtt{in}}^k\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \Gamma^0(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, 0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} = e^{3t} \left\|f_{\mathtt{in}}^k\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)},$$

logo $f^0 \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Por outro lado, para

$$\boldsymbol{F}^0(t, \boldsymbol{x}) = -\int_{\mathbb{R}^3} f^0(\boldsymbol{u}^0 - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v},$$

vimos na demonstração da Proposição 2.3 que para $\boldsymbol{u}^0 \in V$ conseguimos $\boldsymbol{F}^0 \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^3))$. Em adição, $\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}} \in V$, portanto pelo Teorema 1.14, existe uma única $\boldsymbol{u}^1 \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; D(\mathrm{A}))$ tal que $\partial_t \boldsymbol{u}^1 \in L^2(0, T; H)$, $\boldsymbol{u}^1(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x})$ em V e satisfazendo (3.20) (para $n = 0$).

(ii) Suponhamos agora que a nossa afirmação é válida para $n = m - 1$, para algum $m \in \mathbb{N}$, ou seja, existe um par $(\boldsymbol{u}^m, f^{m-1})$ solução fraca de (3.14)-(3.19) (para $n = m - 1$). Então iremos provar que existe $(\boldsymbol{u}^{m+1}, f^m)$ solução fraca de (3.14)-(3.19) (para $n = m$).

De forma análoga ao caso para $n = 0$, temos

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\theta_k * \boldsymbol{u}^m(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} < \infty,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\nabla_{\boldsymbol{x}}(\theta_k * \boldsymbol{u}^m)(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} < \infty,$$

logo pelo Teorema 1.22, a equação (3.14) com a condição inicial (3.18) (com $n = m$) possui uma única solução clássica f^m dada por

$$f^m(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \Gamma^m(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, 0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) f^k_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}, \tag{3.22}$$

com Γ^m satisfazendo

$$\begin{aligned}\Gamma^m(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) &= H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \\ &+ \int_\tau^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_{\boldsymbol{\nu}'} H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \tau', \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\nu}')\theta_k * \boldsymbol{u}^m(\tau', \boldsymbol{\xi}')\Gamma^m(\tau', \boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\nu}', \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}'\, d\tau'.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Além disso, como $f^k_{\mathtt{in}} \in L^\infty(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, então

$$|f^m(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})| \leq \left\|f^k_{\mathtt{in}}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \Gamma^m(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, 0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu},$$

mas pelo Lema 1.23

$$\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \Gamma^m(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, 0, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} = e^{3t},$$

de onde conseguimos

$$|f^m(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})| \leq e^{3t} \left\|f^k_{\mathtt{in}}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}, \tag{3.24}$$

logo $f^m \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Por outro lado, para

$$\boldsymbol{F}^m(t, \boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f^m(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v},$$

novamente, como na demonstração da Proposição 2.3, conseguimos $\boldsymbol{F}^m \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))$ e pelo Teorema 1.14, existe uma única $\boldsymbol{u}^{m+1} \in C([0,T];V)\cap L^2(0,T;D(\mathrm{A}))$ tal que $\partial_t \boldsymbol{u}^{m+1} \in L^2(0,T;H)$, $\boldsymbol{u}^{m+1}(0,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}(\boldsymbol{x})$ em V e satisfazendo (3.20) (para $n = m$). ■

Agora, provaremos que a sequência $(\boldsymbol{u}_k^n, f_k^n)$ satisfaz estimativas independente de n:

Lema 3.3. A sequência $(\boldsymbol{u}_k^n, f_k^n)$ satisfaz as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \|f_k^n\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} &\leq e^{3T}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}, && (3.25)\\ \|\boldsymbol{u}_k^n\|_{L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;D(A))} &\leq C(k), && (3.26)\\ \|\partial_t \boldsymbol{u}_k^n\|_{L^2(0,T;H)} &\leq C(k), && (3.27)\end{aligned}$$

com $C(k)$ independente de n.

Demonstração: Temos de (3.24) que

$$|f^n(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})| \leq e^{3t}\left\|f_{\mathtt{in}}^k\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}$$

e de (2.16)

$$\left\|f_{\mathtt{in}}^k\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq \|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)},$$

portanto obtemos (3.25).

As estimativas (3.26) e (3.27) são obtidas de forma análoga as estimativas (2.29) e (2.30) do Lema 2.4. ■

Lema 3.4. A sequência $(\boldsymbol{u}_k^n, f_k^n)$ é de Cauchy em $L^\infty(0,T;V)\times L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$ e portanto convergente.

Demonstração: Denotemos $\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1} = \boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n$, $\overline{\boldsymbol{w}}^{n+1} = \boldsymbol{w}^{n+1} - \boldsymbol{w}^n$ e $\overline{f}^{n+1} = f^{n+1} - f^n$, então de forma análoga a demonstração do Lema 2.5

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_\alpha^2 + \left(\left\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H^2 + \alpha^2\left\|\mathrm{A}\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_H^2\right)\\ &\quad \leq C\left[\left(\|\boldsymbol{u}^n(t)\|_{D(A)}^2 + 1\right)\left\|\overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t)\right\|_\alpha^2 + \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(t)\|_\alpha^2 + \left\|\overline{f}^n(t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}^2\right], \qquad (3.28)\end{aligned}$$

com $C := C(k,T,\alpha)$.

Agora, precisamos estimar $\overline{f}^n$ em termos de $\overline{\boldsymbol{u}}^n$. De (3.22) e (3.23)

$$\begin{aligned}\overline{f}^n(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = &\int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_{\boldsymbol{\nu}} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\theta_k * \boldsymbol{u}^n(\tau,\boldsymbol{\xi}) f^n(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\tau\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} \\ &- \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_{\boldsymbol{\nu}} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\theta_k * \boldsymbol{u}^{n-1}(\tau,\boldsymbol{\xi}) f^{n-1}(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\tau\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu},\end{aligned}$$

ou ainda, reescrevendo $\overline{f}^n$

$$\begin{aligned}\overline{f}^n(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = &\int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_{\boldsymbol{\nu}} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\theta_k * \overline{\boldsymbol{u}}^n(\tau,\boldsymbol{\xi}) f^n(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\tau\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} \\ &+ \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_{\boldsymbol{\nu}} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\theta_k * \boldsymbol{u}^{n-1}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \overline{f}^n(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\tau\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}.\end{aligned}$$

Denotemos

$$\begin{aligned}J_1(t) &= \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_{\boldsymbol{\nu}} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\theta_k * \overline{\boldsymbol{u}}^n(\tau,\boldsymbol{\xi}) f^n(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\tau\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}, \\ J_2(t) &= \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_{\boldsymbol{\nu}} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\theta_k * \boldsymbol{u}^{n-1}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \overline{f}^n(\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\tau\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}.\end{aligned}$$

Aplicando a estimativa (1.25) em $J_1(t)$ obtemos para $0<\beta<1$,

$$\begin{aligned}J_1(t) \le C \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} &(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} H(t,\beta\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{v},\tau,\beta\boldsymbol{\xi},\beta\boldsymbol{\nu}) \\ &\times \|\theta_k * \overline{\boldsymbol{u}}^n(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|f^n(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\, d\tau\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}\end{aligned}$$

e pela identidade (1.26)

$$J_1(t) \le C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{3(t-\tau)} \|\theta_k * \overline{\boldsymbol{u}}^n(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|f^n(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\, d\tau.$$

Assim, de (3.25) concluímos que

$$J_1(t) \le C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \|\overline{\boldsymbol{u}}^n(\tau)\|_H\, d\tau,$$

com $C = C(\beta,k,T)$.

De forma análoga,

$$\begin{aligned}J_2(t) \le C \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} &(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} H(t,\beta\boldsymbol{x},\beta\boldsymbol{v},\tau,\beta\boldsymbol{\xi},\beta\boldsymbol{\nu}) \\ &\times \left\|\theta_k * \boldsymbol{u}^{n-1}(\tau)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \left\|\overline{f}^n(\tau)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\, d\tau\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu} \\ \le C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{3(t-\tau)} &\left\|\theta_k * \boldsymbol{u}^{n-1}(\tau)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \left\|\overline{f}^n(\tau)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\, d\tau\end{aligned}$$

$$\leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \left\| \boldsymbol{u}^{n-1}(\tau) \right\|_H \left\| \overline{f}^n(\tau) \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \, d\tau$$

e da estimativa (3.26)

$$J_2(t) \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \left\| \overline{f}^n(\tau) \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \, d\tau,$$

com $C = C(\beta, k, T)$.

Das estimativas de J_1 e J_2 temos

$$\left\| \overline{f}^n(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^n(\tau) \right\|_H \, d\tau + C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \left\| \overline{f}^n(\tau) \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \, d\tau.$$

Pela desigualdade de Gronwall

$$\left\| \overline{f}^n(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq C e^{2C\sqrt{t}} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^n(\tau) \right\|_H \, d\tau. \tag{3.29}$$

Assim, combinando as estimativas (3.28) e (3.29)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t) \right\|_\alpha^2 + \left(\left\| \nabla_{\boldsymbol{x}} \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t) \right\|_H^2 + \alpha^2 \left\| \mathrm{A} \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t) \right\|_H^2 \right) \\
&\quad \leq C \left[\left\| \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t) \right\|_\alpha^2 \left(\left\| \boldsymbol{u}^n(t) \right\|_{D(A)}^2 + 1 \right) + \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^n(t) \right\|_\alpha^2 + \left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^n(s) \right\|_\alpha \, ds \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

consequentemente integrando de 0 a t, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t) \right\|_\alpha^2 \leq C \int_0^t \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(s) \right\|_\alpha^2 \left(\left\| \boldsymbol{u}^n(s) \right\|_{D(A)}^2 + 1 \right) ds + C \int_0^t \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^n(s) \right\|_\alpha^2 \, ds \\
+ C \int_0^t \left(\int_0^s (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^n(\tau) \right\|_\alpha \, d\tau \right)^2 ds.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gronwall temos que

$$\left\| \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t) \right\|_\alpha^2 \leq C \left[\int_0^t \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^n(s) \right\|_\alpha^2 \, ds + \int_0^t \left(\int_0^s (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^n(\tau) \right\|_\alpha \, d\tau \right)^2 ds \right] e^{U(t)},$$

com

$$U(t) = C \int_0^t \left(\left\| \boldsymbol{u}^n(s) \right\|_{D(A)}^2 + 1 \right) ds.$$

Da estimativa (3.26)

$$\left\| \overline{\boldsymbol{u}}^{n+1}(t) \right\|_\alpha^2 \leq C \left[\int_0^t \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^n(s) \right\|_\alpha^2 \, ds + \int_0^t \left(\int_0^s (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \left\| \overline{\boldsymbol{u}}^n(\tau) \right\|_\alpha \, d\tau \right)^2 ds \right].$$

Aplicando o Lema 1.11 deduzimos a seguinte estimativa

$$\left\| \overline{\boldsymbol{u}}^n(t) \right\|_\alpha^2 \leq \frac{C^{n+1} t^n}{n!}.$$

Portanto, $\boldsymbol{u}_k^n \to \boldsymbol{u}_k$ em $L^\infty(0,T;V)$.

Além disso, da desigualdade (3.29)

$$\left\| \overline{f}^n(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq C \left(\frac{T^{n+1}}{n!} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, $f_k^n \to f_k$ em $L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$. ■

3.1.3 Existência de Solução do Problema Regularizado

Agora estamos em posição para encontrarmos uma solução fraca de (3.7)-(3.12):

Proposição 3.5. *Existe uma solução fraca do problema regularizado* (3.7)-(3.12).

Demonstração: Iremos provar que o limite da sequência $(\boldsymbol{u}_k^n, f_k^n)$ é solução fraca de (3.7)-(3.12). De fato, pelo Lema 3.4 existe $(\boldsymbol{u}_k, f_k) \in L^\infty(0,T;V) \times L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\boldsymbol{u}_k^n \to \boldsymbol{u}_k \text{ em } L^\infty(0,T;V),$$

$$f_k^n \to f_k \text{ em } L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3).$$

Além disso, das estimativas (3.26), (3.27) e Lema 1.6

$$\boldsymbol{u}_k^n \rightharpoonup \boldsymbol{u}_k \text{ em } L^2(0,T;D(\mathrm{A})),$$

$$\boldsymbol{u}_k^n \to \boldsymbol{u}_k \text{ em } C([0,T];H).$$

Como a demonstração que $(\boldsymbol{u}_k, f_k)$ satisfaz (3.13) é idêntica a demonstração contida na Proposição 2.6, iremos omitir os passos envolvidos. Agora, para provarmos que f_k também satisfaz a equação (3.7) com condição inicial (3.11), consideremos g_k a única solução clássica de

$$\partial_t g_k + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} g_k + \nabla_{\boldsymbol{v}}\cdot[(\theta_k * \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})g_k - \nabla_{\boldsymbol{v}} g_k] = 0 \quad \text{em} \quad (0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3, \tag{3.30}$$

$$g_k(0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = f_{\mathtt{in}}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \quad \text{em} \quad \mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3. \tag{3.31}$$

Logo, pelo Teorema 1.22

$$g_k(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \Gamma_k(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},0,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) f_{\mathtt{in}}^k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}, \tag{3.32}$$

com Γ_k satisfazendo

$$\Gamma_k(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) = H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu}) + \int_\tau^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_{\boldsymbol{\nu}'} H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\tau',\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\nu}')\theta_k * \boldsymbol{u}_k(\tau',\boldsymbol{\xi}')\Gamma_k(\tau',\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\nu}',\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{\nu}'\, d\tau'.$$

Então, por cálculos análogos aos feitos para provarmos a desigualdade (3.29) obtemos

$$\begin{aligned}|(f_k^n - g_k)(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})| &\le C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \|(\boldsymbol{u}_k^n - \boldsymbol{u}_k)(\tau)\|_H \, d\tau \\ &\le 2C\sqrt{t}\, \|\boldsymbol{u}_k^n - \boldsymbol{u}_k\|_{L^\infty(0,T;H)} .\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{u}_k^n \to \boldsymbol{u}_k$ em $L^\infty(0,T;V)$, então $f_k^n \to g_k$ em $C([0,T]\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)\cap L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$. Portanto, $f_k = g_k$ é solução clássica da equação (3.7) com condição inicial (3.11).■

3.1.4 Existência de Solução Local

Agora, provaremos o seguinte Lema, que fornece estimativas independentes de k para a solução do problema regularizado.

Lema 3.6. Existe $T^* \in (0,T]$, tal que a solução $(\boldsymbol{u}_k, f_k)$ satisfaz

$$\|f_k\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \le e^{3T}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}, \tag{3.33}$$

$$\|f_k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3))} \le e^{\frac{3T}{4}}\left\|f_{\mathtt{in}}^k\right\|_{L^2(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}, \tag{3.34}$$

$$\|\nabla_{\boldsymbol{v}} f_k\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \le e^{\frac{3T}{4}}\left\|f_{\mathtt{in}}^k\right\|_{L^2(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}, \tag{3.35}$$

$$\|\boldsymbol{u}_k\|_{L^\infty(0,T^*;V)} + \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^2(0,T^*;D(A))} + \|M_2 f_k\|_{L^\infty(0,T^*)} \le C, \tag{3.36}$$

com C independente de k.

Demonstração: De (3.25) temos imediatamente (3.33). Por outro lado, multiplicando a equação (3.7) por f_k e integrando sobre $(0,t)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |f_k(t)|^2\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} + &\int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\nabla_{\boldsymbol{v}} f_k(s)|^2\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds \\ &= \frac{3}{2}\int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |f_k(s)|^2\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds + \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |f_{\mathtt{in}}^k|^2\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v},\end{aligned}$$

logo, pelo Lema de Gronwall 1.8

$$\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |f_k(t)|^2\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} \le e^{\frac{3t}{2}} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |f_{\mathtt{in}}^k|^2\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v},$$

consequentemente

$$\int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |\nabla_{\boldsymbol{v}} f_k(s)|^2 \, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds \le e^{\frac{3t}{2}} \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} |f_{\mathtt{in}}^k|^2 \, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v},$$

com isso provamos (3.34) e (3.35).

Agora, multiplicando a equação (3.7) por $|\boldsymbol{v}|^2$ e integrando sobre $(0,t)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(t)|\boldsymbol{v}|^2 \, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} - 2\int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds \\ = \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_{\mathtt{in}}^k |\boldsymbol{v}|^2 \, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} + 6\int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k \, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds,\end{aligned}$$

onde usamos que $\Delta_{\boldsymbol{v}}|\boldsymbol{v}|^2 = 6$.

Além disso, pela expressão de f_k e aplicando (1.27) do Lema 1.23,

$$\|f_k(t)\|_{L^1(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} = \left\|f_{\mathtt{in}}^k\right\|_{L^1(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}.$$

Portanto,

$$M_2 f_k(t) + 2\int_0^t M_2 f_k(s)\, ds = 6tM_0 f_{\mathtt{in}}^k + M_2 f_{\mathtt{in}}^k + 2\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds. \tag{3.37}$$

Assim como na demonstração da Lema 2.7

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k)\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds \le C\int_0^t \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^5(\mathbb{T}^3)} (M_2 f_k)^{4/5}\, ds.$$

Portanto, pela desigualdade de Young

$$M_2 f_k(t) + 2\int_0^t M_2 f_k(s)\, ds \le 6tM_0 f_{\mathtt{in}}^k + M_2 f_{\mathtt{in}}^k + C\int_0^t \|\boldsymbol{u}_k(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}^5\, ds + 2\int_0^t M_2 f_k(s)\, ds,$$

ou seja,

$$M_2 f_k(t) \le 6tM_0 f_{\mathtt{in}}^k + M_2 f_{\mathtt{in}}^k + C\int_0^t \|\boldsymbol{u}_k(s)\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}^5\, ds.$$

Por outro lado, pelo Lema 1.12

$$m_0 f_{\mathtt{in}}^k(\boldsymbol{x}) \le \left(C\left\|f_{\mathtt{in}}^k\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\right) m_2 f_{\mathtt{in}}^k(\boldsymbol{x})^{3/5},$$

portanto

$$M_0 f_{\mathtt{in}}^k \le \left(C\left\|f_{\mathtt{in}}^k\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + 1\right)\left(M_2 f_{\mathtt{in}}^k\right)^{3/5}.$$

Concluímos pelo Lema 2.2 e da imersão $H^1(\mathbb{T}^3) \hookrightarrow L^5(\mathbb{T}^3)$,

$$M_2 f_k(t) \leq C\left(1 + \int_0^t \|\boldsymbol{u}_k(s)\|_V^5 \, ds\right). \tag{3.38}$$

Por outro lado, tomando $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}_k$ em (3.13), temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_k\|_\alpha^2 + \left(\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_k\|_H^2 + \alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_k\|_H^2\right) = -\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k \boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v})\gamma_k(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}$$

e mais uma vez, da mesma forma que na demonstração do Lema 2.7

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_k\|_\alpha^2 + \left(\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_k\|_H^2 + \alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_k\|_H^2\right) \leq \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^5(\mathbb{T}^3)}\,(M_2 f_k)^{4/5}.$$

Então, pela desigualdade (3.38) e pela imersão $H^1(\mathbb{T}^3) \hookrightarrow L^5(\mathbb{T}^3)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_k\|_\alpha^2 + \left(\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_k\|_H^2 + \alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_k\|_H^2\right) \leq C\|\boldsymbol{u}_k\|_V\left(1 + \int_0^t \|\boldsymbol{u}_k\|_V^5 \, ds\right)^{4/5}.$$

Logo, pelo Lema de Gronwall não-linear (Lema 1.9), existe $T^* > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{u}_k(t)\|_\alpha^2 + C\int_0^t \|\boldsymbol{u}_k(s)\|_{D(A)}^2 \, ds \leq C,$$

para quase todo $t \in [0, T^*]$.

Além disso, pela desigualdade (3.38) temos que $M_2 f_k(t) \leq C$ para quase todo $t \in [0, T^*]$. ■

Finalmente, das estimativas do Lema 3.6, conseguimos mostrar a existência de solução fraca local de (3.1)-(3.6).

Proposição 3.7. Existe $(\boldsymbol{u}, f)$ solução fraca local de (3.1)-(3.6).

Demonstração: Agora, iremos provar que $\boldsymbol{u}_k$ converge para uma solução fraca de (3.2)-(3.4) com condição inicial (3.6). Segue de forma análoga a Lema 2.7 que $(\partial_t \boldsymbol{w}_k)$ é uniformemente limitada em $L^2(0, T^*; D(\mathrm{A})')$.

Finalmente, provamos que existe um par $(\boldsymbol{u}, f)$, tal que, a menos de subsequência,

- $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty((0, T^*) \times \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$,
- $\boldsymbol{u}_k \rightharpoonup \boldsymbol{u}$ em $L^2(0, T^*; D(\mathrm{A}))$,
- $\boldsymbol{u}_k \to \boldsymbol{u}$ em $L^2(0, T^*; V) \cap C([0, T^*]; H)$.

Além disso, pela estimativa (3.35), obtemos que $\nabla_{\boldsymbol{v}} f$ existe e pertence a $L^2((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$. Estas convergências, nos permitem passar ao limite no problema regularizado de forma análoga à passagem ao limite feita na Proposição 2.8. ■

3.1.5 Existência de Solução Global

O seguinte Lema fornece estimativas para a solução local, que permitirá a extensão da solução ao intervalo $[0,T]$.

Lema 3.8. A solução $(\boldsymbol{u},f)$ obtida anteriormente, satisfaz as seguintes desigualdades para quase todo $t\le T^*$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M_2 f(t)+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|_\alpha^2+\int_0^t D(\boldsymbol{u}(s),f(s))\,ds&\\ \le 3T\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^1(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}+\frac{1}{2}M_2 f_{\mathtt{in}}+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\|_\alpha^2,&\end{aligned}\tag{3.39}$$

$$\|f\|_{L^\infty((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\le e^{3T}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)},\tag{3.40}$$

$$\|\nabla_{\boldsymbol{v}} f\|_{L^2((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\le e^{\frac{3T}{4}}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)},\tag{3.41}$$

onde

$$D(\boldsymbol{u}(t),f(t))=\|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}(t)\|_H^2+\alpha^2\|\mathrm{A}\boldsymbol{u}(t)\|_H^2+\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f(t)|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}|^2\,d\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}.$$

Demonstração: Como $f_k\overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty((0,T\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3))$ e f_k satisfaz (3.33), então

$$\|f\|_{L^\infty((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\le\liminf_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^\infty((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\le e^{3T}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}$$

e com isso obtemos (3.40).

Por outro lado, pela estimativa (3.35), temos que $\nabla_{\boldsymbol{v}} f_k$ converge fracamente para $\nabla_{\boldsymbol{v}} f$ em $L^2((0,T)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$. E pelo fato de $f_{\mathtt{in}}^k$ convergir para $f_{\mathtt{in}}$ em $L^2(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$, temos

$$\|\nabla_{\boldsymbol{v}} f\|_{L^2((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\le\liminf_{k\to\infty}\|\nabla_{\boldsymbol{v}} f_k\|_{L^2((0,T^*)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}\le e^{\frac{3T}{4}}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)}$$

e com isso provamos (3.41).

Por outro lado, multiplicando a equação (3.7) por $|\boldsymbol{v}|^2/2$ e integrando sobre $(0,t)\times\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3$, obtemos

$$\frac{1}{2}M_2 f_k(t)+\int_0^t\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(|\boldsymbol{v}|^2-3)\,d\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\,ds=\int_0^t\iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\theta_k*\boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\,ds+\frac{1}{2}M_2 f_{\mathtt{in}}^k$$

e reescrevemos na forma

$$\frac{1}{2}M_2 f_k(t) + \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v}|^2 \, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds - 3\int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k \, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds$$

$$= \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} \left[f_k|\boldsymbol{u}_k|^2 - f_k\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}_k + f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{v}\right] \, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds + \frac{1}{2}M_2 f^k_{\mathtt{in}}.$$

E escolhendo $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}_k$ em (3.8), obtemos

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_k(t)\|^2_\alpha + \int_0^t \|\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}_k(s)\|^2_H + \alpha^2 \|\mathrm{A}\boldsymbol{u}_k(s)\|^2_H \, ds$$

$$= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\|^2_\alpha - \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k\gamma_k(\boldsymbol{v})|\boldsymbol{u}_k|^2 - f_k\gamma_k(\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds.$$

Somando estas duas identidades, temos

$$\frac{1}{2}M_2 f_k(t) + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_k(t)\|^2_\alpha + \int_0^t D(\boldsymbol{u}_k(s), f_k(s))\, ds$$

$$= 3\int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k \, d\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, ds + \frac{1}{2}M_2 f^k_{\mathtt{in}} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\|^2_\alpha + I_k(t), \tag{3.42}$$

onde $I_k = I^1_k + I^2_k + I^3_k$,

$$I^1_k(t) = \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k|\boldsymbol{u}_k|^2(1-\gamma_k(\boldsymbol{v}))\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds;$$

$$I^2_k(t) = \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{v}(\gamma_k(\boldsymbol{v})-1)\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds;$$

$$I^3_k(t) = \int_0^t \iint_{\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3} f_k(\theta_k * \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_k)\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}\, ds.$$

Pelos mesmos cálculos do Lema 2.9, temos que $I_k \to 0$ em $L^\infty(0,T^*)$ quando $k\to\infty$. Como $f^k_{\mathtt{in}} \to f_{\mathtt{in}}$ em $L^1(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)$, então passando ao limite em (3.42) de maneira análoga ao Lema 2.9, obtemos (3.39). ■

Extensão

Pelo Lema 3.8, temos que existe $\mu \geq 0$ tal que

$$\boldsymbol{u}(T^*-\mu) \in V, \qquad f(T^*-\mu) \in L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3), \qquad M_2 f(T^*-\mu) < \infty.$$

Por outro lado, para $K>0$ tal que

$$3T\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^1(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_{\mathtt{in}}\|^2_\alpha + \frac{1}{2}M_2 f_{\mathtt{in}} \leq K,$$

$$e^{3T}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} + e^{\frac{3T}{4}}\|f_{\mathtt{in}}\|_{L^2(\mathbb{T}^3\times\mathbb{R}^3)} \leq K,$$

temos que a constante C em (2.43) depende apenas de T e K. Portanto, existe $\tau > 0$, dependendo somente de T e K, tal que podemos tomar $T^* \in [\tau, T]$.

Desta forma, podemos resolver novamente o sistema (3.1)-(3.6), com condições iniciais $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}(T^* - \mu)$ e $f(0) = f(T^* - \mu)$, estendendo a solução $(\boldsymbol{u}, f)$ ao intervalo $(T^* - \mu, T^* - \mu + \tau)$. Assim, podemos repetir este processo até estendermos a solução para todo o intervalo $[0, T]$.

Assim, concluímos a demonstração do Teorema 3.1.

Bibliografia

[1] Adams, R. A., Fournier, J. J., *Sobolev Spaces*. Second Edition. Academic Press, 2003.

[2] Anoshchenko, O., Monvel-Berthier, A. B., *The existence of the global generalized solution of the system of equations describing suspension motion*, Math. Methods Appl. Sci. 20(6), 495-519, 1997.

[3] Baranger, C., Boudin, L., Jabin, P.-E., Mancini, S., *A modelling of biospray for the upper airways*, CEMRACS 2004 -Mathematics and applications to biology and medicine, ESAIM Proc. 14, 41-47, 2005.

[4] Baranger, C., Desvillettes, L., *Coupling Euler and Vlasov equations in the context of sprays: the local-in-time, classical solutions*, J. Hyperbolic Differ. Equ. 3(1), 1-26, 2006.

[5] Bernard, E., Desvillettes, L., Golse, F., Ricci, V., *A derivation of the Vlasov-Navier-Stokes model for aerosol flows from kinetic theory*, Commun. Math. Sci. 15(6), 1703-1741, 2017.

[6] Boudin, L., Desvillettes, L., Grandmont, C., Moussa, A.,*Global Existance of Solutions for the Coupled Vlasov and Navier-Stokes Equations*. Differential Integral Equations, 22(11-12), 1247-1271, 2009.

[7] Boudin, L., Desvillettes, L., Motte, R., *A modelling of compressible droplets in a fluid*, Commun. Math. Sci. 1, 657-669, 2003.

[8] Boudin, L., Grandmont, C., Moussa, A., *Global existence of solutions to the incompressible Navier-Stokes-Vlasov equations in a time-dependent domain*, J. Differential Equations 262(3), 1317-1340, 2017.

[9] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.

[10] Carrillo, J., Duan, R., Moussa, A., *Global classical solutions close to equilibrium to the Vlasov-Fokker-Planck-Euler system*, Kinet. Relat. Models 4(1), 227-258, 2011.

[11] Chae, M., Kang, K., Lee, J., *Global existence of weak and classical solutions for the Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck equations*, J. Differential Equations 251(9), 2431-2465, 2011.

[12] Chae, M., Kang, K., Lee, J., *Global classical solutions for a compressible fluid-particle interaction model*, J. Hyperbolic Differ. Equ. 10(3), 537-562, 2013.

[13] Chen, R. M., Hu, J., Wang, D., *Global weak solutions to the magnetohydrodynamic and Vlasov equations*, J. Math. Fluid Mech. 18(2), 343-360, 2016.

[14] Choi, Y.-P., *Large-time behavior for the Vlasov/compressible Navier-Stokes equations*, J. Math. Phys., 57, 071501, 2016.

[15] Choi, Y.-P., Kwon, B., *Global well-posedness and large-time behavior for the inhomogeneous Vlasov-Navier-Stokes equations*, Nonlinearity 28(9), 3309-3336, 2015.

[16] Clark, M. L., *The Analysis of Periodic Vlasov Poisson Fokker Planck Equations*, Master of Science Thesis (Mathematics), Texas Tech University, 1993.

[17] Coddington, E. A., Levinson, N., *Theory of ordinary differential equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955.

[18] Dautray, R., Lions, J. L., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 5, Springer, Berlim, 1992.

[19] El Ghani, N., *Asymptotic analysis for a Vlasov-Navier-Stokes system in a bounded domain*, J. Hyperbolic Differ. Equ. 7(2), 191-210, 2010.

[20] Evans, L. C., *Partial diferential equations*. Graduate Studies in Mathematics, Vol.9, American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.

[21] Foias, C., Holm, D. D., Titi, E.S., *The Three Dimensional Viscous Camassa-Holm Equations, and Their Relation to the Navier-Stokes Equations and Turbulence Theory*. J. Dynam. Differential Equations 14(1), 1-35, 2002.

[22] Golse, F., *Mean Field Kinetic Equations*, Lecture notes, 2013.

[23] Goudon, T., He, L., Moussa, A.,Zhang, P., *The Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system near equilibrium*, SIAM J. Math. Anal. 42(5), 2177-2202, 2010.

[24] Goudon, T., Jabin, P.-E., Vasseur, A., *Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations, I:light particles regime*, Indiana Univ. Math. J. 53(6), 1495-1515, 2004.

[25] Goudon, T., Jabin, P.-E., Vasseur, A., *Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations, II:fine particles regime*, Indiana Univ. Math. J. 53(6), 1517-1536, 2004.

[26] Hamdache, K., *Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations*, Japan J. Indust. Appl. Math., 15, 51-74, 1998.

[27] Lions, J. L., Magenes, E. *Nonhomogeneous boundary value problems and applications*, Vol. 1, Springer, New York, 1972.

[28] Mathiaud, J., *Local smooth solutions of a thin spray model with collisions*, Math. Models Methods Appl. Sci. 20(2), 191-221, 2010.

[29] Mellet, A., Vasseur, A., *Global weak solutions for a Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes system of equations*, Math. Models Methods Appl. Sci. 17(7), 1039-1063, 2007.

[30] Mellet, A., Vasseur, A., *Asymptotic analysis for a Vlasov-Fokker-Planck /compressible Navier-Stokes system of equations*, Comm. Math. Phys. 281(3), 573-596, 2008.

[31] Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., Fink, A. M., *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*. Vol. 53. Springer Science & Business Media, 2012.

[32] Moussa, A., Sueur, F., *On a Vlasov-Euler system for 2D sprays with gyroscopic effects*, Asymptot. Anal. 81(1), 53-91, 2013.

[33] Mouzoni, C., *Topics in existence and uniqueness of solutions to Vlasov systems in kinetic theory*, Synthesis report.

[34] O'Dwyer, B. P., *On the Linear Vlasov-Fokker-Planck Equation in Kinetic Theory*, Master of Science Thesis (Mathematics), Texas Tech University, 1989.

[35] Simon, J., *Compact Sets in the Space* $L^p(0;T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), CXLVI, 65-96, 1987.

[36] Temam, R., *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, American Mathematical Society, 2001.

[37] Temam, R., *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*, Regional conference series in applied mathematics (66), 1995.

[38] Victory, H. D., Jr., O'Dwyer, B. P., *On Classical Solutions of Vlasov-Poisson-Fokker-Planck Systems*, Indiana Univ. Math. J. 39, 105-155, 1990.

[39] Wang, D., Yu, C., *Global weak solution to the inhomogeneous Navier-Stokes-Vlasov equations*, J. Differential Equations 259(8), 3976-4008, 2015.

[40] Williams, F. A., *Spray combustion and atomization*, Phys. Fluids 1, 541-555, 1958.

[41] Williams, F. A., *Combustion Theory*, second edition, Benjamin Cummings, 1985.

[42] Yu, C., *Global weak solutions to the incompressible Navier-Stokes-Vlasov equations*, J. Math. Pures Appl., 100(2), 275-293, 2013.

[43] Zeidler, E., *Nonlinear functional analysis and its applications II/A: Linear monotone operators*, Springer, New York, 1990.