UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Samuel Augusto Wainer

Representação Spinorial de Subvariedades $Spin^{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{R}^n$

CAMPINAS
2017

Samuel Augusto Wainer

Representação Spinorial de Subvariedades $Spin^{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{R}^n$

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Rafael de Freitas Leão

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Samuel Augusto Wainer, e orientada pelo Prof. Dr. Rafael de Freitas Leão.

Campinas
2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 140098/2016-0; CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

W133r

Wainer, Samuel Augusto, 1989-
Representação spinorial de subvariedades SpinC em Rn / Samuel Augusto Wainer. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Rafael de Freitas Leão.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria. 2. Imersões (Matemática). 3. Subvariedades. 4. Dirac, Equação de. 5. Spinor - Análise. I. Leão, Rafael de Freitas,1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Spinorial representation of SpinC submanifolds in Rn
Palavras-chave em inglês:
Geometry
Immersions (Mathematics)
Submanifolds
Dirac equation
Spinor - Analysis
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Rafael de Freitas Leão [Orientador]
Alberto Vazquez Saa
Ricardo Antonio Mosna
Llohann Dallagnol Sperança
Carlos Henrique Grossi Ferreira
Data de defesa: 18-08-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 18 de agosto de 2017 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO

Prof(a). Dr(a). ALBERTO VAZQUEZ SAA

Prof(a). Dr(a). RICARDO ANTONIO MOSNA

Prof(a). Dr(a). LLOHANN DALLÁGNOL SPERANÇA

Prof(a). Dr(a). CARLOS HENRIQUE GROSSI FERREIRA

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Dedico ao meu professor e amigo Waldyr Alves Rodrigues Jr.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, pela capacitação concedida, sem a qual não poderia ter sido realizado o presente trabalho.

Agradeço a minha famíilia que, com muito carinho e apoio, não mediu esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Agradeço a Maiara, por toda sua ajuda, que mesmo nos momentos mais difíceis esteve ao meu lado.

Agradeço à CAPES e ao CNPQ pelo suporte financeiro.

Finalmente, agradeço ao meu orientador pela paciência e dedicação com que orientou meus estudos, e pelo entusiasmo com que esclareceu minhas dúvidas.

Resumo

Dois tópicos de pesquisa bem conhecidos no século XX, na área de geometria diferencial, são a equação de Dirac e imersões minimais de superfícies. Em 1998, Thomas Friedrich, elucidou a relação entre imersões isométricas de superfícies com uma dada curvatura média e soluções da equação de Dirac. Na literatura, outros autores abordaram o problema da relação entre soluções da equação de Dirac e imersões isométricas para outras variedades *Spin* em espaços de dimensões maiores. O objetivo desta tese é apresentar uma caracterização spinorial de imersões isométricas de variedades que possuem uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ de dimensão arbitrária em $\mathbb{R}^n$ para algum n, já que essas estruturas são mais naturais no contexto de variedades quase-complexas. Para alcançarmos nosso objetivo, resolvemos esse problema por meio de duas abordagens. Na primeira, mostramos a equivalência entre imersões isométricas de variedades $Spin^{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{R}^n$ e uma solução de uma equação tipo-Killing para spinores do tipo $Spin-$Clifford, que por serem inversíveis nos permitem uma manipulação mais simples. Na segunda, utilizando ideais minimais na álgebra de Clifford complexa, traduzimos a solução encontrada anteriormente para a linguagem de spinores clássicos, isto é, spinores provenientes da restrição de uma representação irredutível complexa da álgebra de Clifford complexa. Observe que nossa contribuição é mais geral do que as apresentadas na literatura, pois consideramos variedades e fibrados vetoriais $Spin^{\mathbb{C}}$ que não são necessariamente *Spin*.

Palavras-chave: Geometria, Imersões, Subvariedades, Spinor - análise, Equação de Dirac.

Abstract

Two well known research topics in 20th century in differential geometry are the Dirac equation and minimal immersion of surfaces. In 1998, Thomas Friedrich, elucidated the relationship between isometric immersions of surfaces and solutions of the Dirac equation. In literature, some authors have addressed the problem about the relationship between solutions of Dirac equation and isometric immersions to different *Spin* manifolds in spaces with higher dimensions. This thesis presents a spinorial characterization of isometric immersions of Riemannian $Spin^{\mathbb{C}}$ manifolds with arbitrary dimension in $\mathbb{R}^n$ for some n. Note that these structures are more natural in the context of almost complex manifolds. To achieve our goal, we solve this problem through two approaches. Initially, we show the equivalence between isometric immersions of Riemannian $Spin^{\mathbb{C}}$ manifolds in $\mathbb{R}^n$ and a solution of a Killing-like equation for *Spin*-Clifford spinors, which, because of their invertible property, allows simpler manipulation. In our second approach, we translate the solution found previously, employing minimal ideals in complex Clifford algebra, to classical spinors language, that is, spinors that came from the restriction of a irreducible complex Clifford algebra representation. The description by ideals elucidates the advantage of the description by $Spin-$Clifford spinors due to its simplicity. It is important to point out that our contribution is more general than those presented in the literature, since we consider $Spin^{\mathbb{C}}$ manifolds and vector bundles that are not necessarily *Spin*.

Keywords: Geometry, Immersions, Submanifolds, Spinor Analysis, Dirac Equation.

Sumário

Introdução

Esta tese trata de imersões isométricas de variedades utilizando spinores. Para tanto considere uma variedade Riemanniana $(N, \mathbf{g})$ com uma dada estrutura *Spin* e $M \hookrightarrow N$ uma subvariedade n-dimensional imersa (também com uma dada estrutura *Spin*) com a métrica induzida por N. Sabe-se que as derivadas covariantes dos fibrados spinorias de N (denotado por ΣN) e da sua restrição à M (denotado por Σ^{ad}) se relacionam pela chamada fórmula de Gauss spinorial [2]

$$\nabla_X^{\Sigma N}\varphi - \nabla_X^{\Sigma^{ad}}\varphi = \frac{1}{2}\sum_i^n e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \varphi,$$

onde B é a segunda forma fundamental da imersão e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é uma base ortonormal local de TM.

Essa expressão, nos mostra que, quando a variedade N possui um campo spinorial φ especial, por exemplo paralelo, sua restrição à variedade M, obedecerá uma fórmula específica envolvendo a segunda forma fundamental B

$$\nabla_X^{\Sigma^{ad}}\varphi = -\frac{1}{2}\sum_i^n e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \varphi.$$

Se tomarmos o traço dessa equação teremos a seguinte equação de Dirac

$$D\varphi = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \varphi,$$

onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média.

Notando isso, Friedrich [10] resolveu o problema recíproco para o caso $N = \mathbb{R}^3$: a existência de um campo spinorial satisfazendo a equação de Dirac numa superfície Riemanniana simplesmente conexa 2-dimensional M implica a existência de uma imersão isométrica de M em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média H.

Guiados pelo trabalho de Friedrich, alguns autores demonstraram resultados similares. Em 2004 Bertrand Morel [24] estendeu a representação spinorial de imersões isométricas em $\mathbb{R}^3$ de Friedrich para $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$. Em 2008 Marie-Amelie Lawn [16] mostrou, a partir de uma equação de Dirac, como uma dada superfície lorentziana (M^2, g) pode ser imersa no espaço pseudo-riemanniano $\mathbb{R}^{2,1}$. Em 2010 Lawn e Julien Roth [17] apresentaram uma caracterização spinorial de superfícies Riemannianas isometricamente imersas nos espaços 4-dimensionais $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{M}^3 \simeq (\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3)$. Usando as mesmas técnicas, Lawn e Roth [18] em 2011, apresentaram a caracterização spinorial de superfícies de métrica arbitrária isometricamente imersas numa forma espacial pseudo-Riemanniana 3-dimensional, generalizando assim o trabalho de Lawn em $\mathbb{R}^{2,1}$. Em 2013 Pierre Bayard, Roth e Lawn [4] provaram que uma imersão de uma superfície Riemanniana M^2 no espaço de Minkowski 4-dimensional $\mathbb{R}^{1,3}$, com um dado fibrado vetorial

E e um dado vetor de curvatura média $\vec{H} \in \Gamma(E)$, é equivalente a existência de um campo spinorial normalizado que é solução da equação de Dirac $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$ na superfície. Em 2016 Bayard, Lawn e Roth [6] apresentaram a caracterização spinorial de subvariedades de qualquer dimensão e codimensão em $\mathbb{R}^n$, sendo esse o trabalho que inspirou esta tese. E, finalmente em 2017 Bayard, Roth e Jimenez [7] apresentaram essa caracterização spinorial de subvariedades, de qualquer dimensão e codimensão, em grupos de Lie equipados com uma métrica invariante à esquerda.

Todos esses resultados, se restringem a supor que os objetos em questão admitem uma estrutura *Spin*. O objetivo desta tese é estudar a representação spinorial de subvariedades $Spin^{\mathbb{C}}$ de qualquer dimensão e codimensão em $\mathbb{R}^n$, estendendo-a para uma classe maior de variedades, como por exemplo variedades quase-complexas que admitem uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ canônica.

No Capítulo 1,introduzimos brevemente os conceitos e ferramentas de álgebras de Clifford, onde apresentamos os grupos *Pin* e *Spin* com suas álgebras de Lie, bem como o grupo $Spin^{\mathbb{C}}$ e um pouco de teoria de representações desses grupos.

No Capítulo 2, tratamos da definição e condições de existência de estrutura *Spin* e $Spin^{\mathbb{C}}$, para com isso apresentarmos a definição e os conceitos básicos dos fibrados dos spinores, bem como seu produto hermitiano canônico e suas conexões naturais induzidas, podendo assim introduzir o operador de Dirac.

No Capítulo 3, fazemos uma breve revisão da literatura clássica sobre este problema da caracterização spinorial de imersões isométricas, apresentando os resultados de Friedrich e Morel que trabalham com spinores clássicos.

No Capítulo 4, apresentamos também uma breve revisão da literatura recente com as principais contribuições que serviram de embasamento teórico para esse trabalho.

O Capítulo 5 é dedicado à apresentação da nossa primeira contribuição, tendo como principal resultado a representação spinorial, utilizando-se spinores *Spin*-Clifford, de uma variedade M, com uma dada estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$, com fibrado normal E, também $Spin^{\mathbb{C}}$ em algum $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1. *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial sobre $\mathbb{R}$ de posto m, assuma que TM e E são orientados e $Spin^{\mathbb{C}}$. Suponha que $B : TM \times TM \to E$ é uma aplicação simétrica e bilinear. Assim as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um campo spinorial φ Spin-Clifford tal que*

$$\nabla_X^{\Sigma^{ad}} \varphi = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \varphi + \frac{1}{2} i \ A(X) \cdot \varphi, \quad \forall X \in TM,$$

onde iA é a expressão local da conexão induzida no fibrado S^1-principal associado à estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$.

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \mathbb{R}^{(n+m)}$ com fibrado normal N e segunda forma fundamental B.*

Além disso, $dF = \xi$ onde ξ é uma 1-forma $\mathbb{R}^{(n+m)}$-valorada definida por

$$\xi(X) := \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle, \quad \forall X \in TM.$$

Após mostrarmos que uma solução da equação de Killing generalizada apresentada no item 1 do Teorema 1 é equivalente às equações de Gauss, Ricci e Codazzi das imersões isométricas, tem-se uma aplicação interessante que é uma demonstração alternativa (para o caso de variedades *Spin*$^{\mathbb{C}}$) do teorema fundamental de subvariedades: as equações de Gauss, Ricci e Codazzi são equivalentes à uma imersão isométrica de M em $\mathbb{R}^{(n+m)}$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B. É importante salientar que o nosso teorema é menos restritivo do que o apresentado em [6], aqui consideramos a variedade M e o fibrado vetorial E sobre M apenas *Spin*$^{\mathbb{C}}$ e não necessariamente *Spin*.

No Capítulo 6, utilizamos spinores clássicos que são provenientes de representações complexas irredutíveis das álgebras de Clifford complexas para apresentar a caracterização spinorial de imersões isométricas de variedades Riemannianas *Spin*$^{\mathbb{C}}$ em algum $\mathbb{R}^n$. Para isso, admitimos que tais variedades possuem dimensão arbitrária com fibrado normal E também *Spin*$^{\mathbb{C}}$ de dimensão arbitrária. Essa caracterização é apresentada através do seguinte teorema:

Teorema 2. *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial real de posto m, assuma que TM e E são orientados e Spin$^{\mathbb{C}}$. Suponha que $B : TM \times TM \to E$ é uma aplicação bilinear e simétrica . Assim as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. ***Para o caso*** $n + m = 2k$ ***par:***

   Existem 2^k spinores clássicos φ_i que satisfazem as equações

   $$\nabla_X^{\Sigma^{ad}} \varphi_i = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi_i + \frac{1}{2} i\ A(X) \cdot \varphi_i, i = 1, \cdots, 2^k,$$

   onde iA é a expressão local da conexão induzida no fibrado S^1-principal associado à estrutura Spin$^{\mathbb{C}}$.

   Para o caso $n + m = 2k + 1$ ***ímpar:***

   Existem 2^k spinores clássicos $\varphi_{i;0}$ provenientes de uma das classes de representações irredutíveis da álgebra de Clifford $Cl(n + m)$ e existem outros 2^k spinores clássicos $\varphi_{i;1}$ provenientes da outra classe de representação irredutível de $Cl(n + m)$ que satisfazem as equações

   $$\nabla_X^{\Sigma^{ad}} \varphi_{i;\lambda} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi_{i;\lambda} + \frac{1}{2} i\ A^l(X) \cdot \varphi_{i;\lambda}, i = 1, \cdots, 2^k, \lambda = 0, 1,$$

   onde iA é a expressão local da conexão induzida no fibrado S^1-principal associado à estrutura Spin$^{\mathbb{C}}$.

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \mathbb{R}^{(n+m)}$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

Além disso, $dF = \xi$ onde ξ é uma 1-forma $\mathbb{R}^{(n+m)}$-valorada definida por
Para o caso $n + m = 2k$ ***par:***

$$\begin{aligned}
\xi(X) &= \sum_{i,j}^{2^k} \xi_{ij}(X), \\
\xi_{ij}(X) &= \langle\langle X \cdot \varphi_i, \varphi_j \rangle\rangle, i, j = 1, \cdots, 2^k, \quad \forall X \in TM.
\end{aligned}$$

Para o caso $n+m=2k$ ***ímpar:***

$$\begin{aligned}\xi(X) &= \sum_{\lambda=0}^{1}\sum_{i,j}^{2^k}\xi_{ij;\lambda}(X)\\ \xi_{ij;\lambda}(X) &= \langle\langle X\cdot\varphi_{i;\lambda},\varphi_{j;\lambda}\rangle\rangle\,, i,j=1,\cdots,2^k,\lambda=0,1,\quad \forall X\in TM.\end{aligned}$$

Capítulo 1

Álgebras de Clifford

Este capítulo baseia-se nas seguintes referências clássicas [9, 11, 19, 21, 22, 23, 28, 35].

Seja $(V, \mathbf{q})$ um espaço quadrático arbitrário de dimensão n definido sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica diferente de 2. Denotamos por $T(V)$ a álgebra tensorial do espaço V e por $I_{\mathbf{q}}(V)$ o ideal de $T(V)$ gerado por todos elementos da forma $v \otimes v + \mathbf{q}(v)1$, com $v \in V$.

Definição 3. *A **álgebra de Clifford** $\mathcal{C}\ell(V, \mathbf{q})$ associada a $(V, \mathbf{q})$ é a álgebra associativa e com unidade determinada pelo quociente $T(V)/I_{\mathbf{q}}(V)$ e equipada com a multiplicação*

$$[A][B] = [A \otimes B]. \tag{1.0.1}$$

As álgebras de Clifford contam com a seguinte propriedade universal:

Proposição 4. *Seja A uma álgebra associativa e com unidade, definida sobre o corpo $\mathbb{F}$. Toda transformação linear $f : V \to A$ satisfazendo a relação*

$$f(v) \cdot f(v) = -\mathbf{q}(v)1_A, \forall v \in V, \tag{1.0.2}$$

admite uma única extensão a um homomorfismo de álgebras $\tilde{f} : \mathcal{C}\ell(V, \mathbf{q}) \to A$, ou seja, existe um único homomorfismo $\tilde{f} : \mathcal{C}\ell(V, \mathbf{q}) \to A$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}\ell(V,q) \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ V \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd} \tag{1.0.3}$$

Demonstração. A transformação linear f pode ser unicamente estendida a um homomorfismo de álgebras $\bar{f} : T(V) \to A$. Esta extensão é tal que a restrição de $\bar{f}$ a $I_q(V)$ é identicamente nula, pois os elementos $v \otimes v + q(v)1$ geram o ideal $I_q(V)$ e

$$\bar{f}(v \otimes v + q(v)1) = f(v) \cdot f(v) + q(v)1_A, \tag{1.0.4}$$

onde $f(v) \cdot f(v) = -q(v)1_A$ por hipótese. Assim, podemos definir $\tilde{f}([A]) = \bar{f}(A)$. □

Por causa dessa propriedade, existe a menos de isomorfismo uma única álgebra de Clifford associada a cada espaço quadrático $(V, \mathbf{q})$:

Proposição 5. *A álgebra $\mathcal{C}\ell(V, \mathbf{q})$ é, a menos de isomorfismo, a única álgebra associativa e com unidade, que satisfaz a propriedade da proposição anterior.*

Temos também a seguinte

Proposição 6. *A* ***álgebra de Clifford*** $\mathcal{C}\ell(V,\mathbf{q})$ *associada a* $(V,\mathbf{q})$ *é a álgebra associativa e com unidade de todas as palavras geradas por* $1 \in \mathbb{F}$ *e* V*, com multiplicação dada por justaposição, satisfazendo a relação* $v^2 = -\mathbf{q}(v)$ *para todo* $v \in V$*.*

Se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *é uma base ortonormal de* V*, então o conjunto*

$$\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} \in \mathcal{C}\ell(V,\mathbf{q}) | \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}\}, \tag{1.0.5}$$

é uma base da álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V,\mathbf{q})$*.*

Um elemento de $Aut(\mathcal{C}\ell(V,\mathbf{q}))$ de particular importância no estudo das álgebras de Clifford é o automorfismo $\alpha : \mathcal{C}\ell(V,\mathbf{q}) \to \mathcal{C}\ell(V,\mathbf{q})$ que estende o operador linear $\alpha(v) = -v$ definido em V. Como este automorfismo é uma involução, existe uma decomposição

$$\mathcal{C}\ell(V,\mathbf{q}) = \mathcal{C}\ell^0(V,\mathbf{q}) \oplus \mathcal{C}\ell^1(V,\mathbf{q}), \tag{1.0.6}$$

onde

$$\mathcal{C}\ell^i(V,\mathbf{q}) = \{w \in \mathcal{C}\ell(V,\mathbf{q}) | \alpha(w) = (-1)^i w\}. \tag{1.0.7}$$

Para simplificarmos a notação, denotamos $\alpha(w) := \tilde{w}$.

Definição 7. *Dizemos que* $\mathcal{C}\ell^0(V,\mathbf{q})$ *e* $\mathcal{C}\ell^1(V,\mathbf{q})$ *são respectivamente, a* ***parte par*** *e a* ***parte ímpar*** *da álgebra de Clifford* $\mathcal{C}\ell(V,\mathbf{q})$*.*

Outra involução de fundamental importância no estudo das álgebras de Clifford é a **transposição** $(\cdot)^t : \mathcal{C}\ell(V,\mathbf{q}) \to \mathcal{C}\ell(V,\mathbf{q})$, definida na base (1.0.5) por

$$(e_{i_1}\cdots e_{i_k})^t = e_{i_k}\cdots e_{i_1}, \tag{1.0.8}$$

diferentemente de α, a transposição é um anti-automorfismo.

A composição da involução α com a transposição $(\cdot)^t$ é chamada de involução principal que vamos denotar por $\overline{(\cdot)} := (\alpha(\cdot))^t = \alpha((\cdot)^t)$.

1.1 Classificação das Álgebras de Clifford

Se V é um espaço vetorial real n-dimensional munido de uma forma bilinear simétrica não-degenerada $\mathbf{g} : V \times V \to \mathbb{R}$, então existe uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V tal que $\mathbf{g}(e_i, e_i) = \mathbf{q}(e_i) = \pm 1$ e $\mathbf{g}(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$.

Definição 8. *Seja* $\mathbb{R}^{p,q}$ $(p + q = n)$ *o espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *munido de um tensor métrico* $\mathbf{g}$ *de assinatura* (p, q)*. Denotaremos por* $Cl_{p,q} = \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q},\mathbf{g})$ *a álgebra de Clifford de* $\mathbb{R}^{p,q}$*, em particular se a assinatura for* $(n, 0)$ *denotamos a álgebra por* Cl_n*.*

Não é difícil de mostrar o seguinte isomorfismo:

Proposição 9. *Existe um isomorfismo de álgebras* $Cl_{p,q} \cong Cl^0_{p+1,q}$*, em particular* $Cl_n \cong Cl^0_{n+1}$*.*

Demonstração. Escolha uma base $\mathbf{g}$-ortogonal $e_1, \cdots, e_{p+q+1}$ de $\mathbb{R}^{p+1,q}$ tal que $\mathbf{g}(e_i, e_i) = 1,\ 1 \leq i \leq (p+1)$ e $\mathbf{g}(e_i, e_i) = -1,\ (p+2) \leq i \leq p+q+1$. Seja $\mathbb{R}^{p,q} = span\{e_i,\ i \neq p+1\}$, o isomorfismo será dado pela extensão da seguinte transformação:

$$f : \mathbb{R}^{p,q} \to Cl^0_{p+1,q}, f(e_i) = e_{p+1}e_i. \tag{1.1.1}$$

□

Veremos agora que as álgebras de Clifford $Cl_{p,q}$ são isomorfas a álgebras de matrizes sobre $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Proposição 10. *Seja $\mathbb{K}(n)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$, então,*

$$\begin{array}{c} \text{i) } Cl_{1,0} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad \text{ii) } Cl_{0,1} \simeq \mathbb{C}, \quad \text{iii) } Cl_{2,0} \simeq \mathbb{R}(2), \\ \text{iv) } Cl_{0,2} \simeq \mathbb{H}, \quad \text{v) } Cl_{1,1} \simeq \mathbb{R}(2). \end{array} \tag{1.1.2}$$

Demonstração. Nesta demonstração usaremos a propriedade universal e definiremos uma bijeção entre bases tal que a Eq.(1.0.2) seja válida.

i) Se e_1 é base de $\mathbb{R}$, $\{\mathbf{1}, e_1\}$ com $e_1^2 = 1$ é uma base de $\mathbb{R}_{1,0}$. Assim definimos o isomorfismo $Cl_{1,0} \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \mapsto (1,1), \\ e_1 \mapsto (1,-1), \end{array} \tag{1.1.3}$$

onde o produto em $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ é dado pelo produto em $\mathbb{R}$ coordenada a coordenada.

ii) Se e_1 é base de $\mathbb{R}$, $\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1\}$ com $e_1^2 = -1$ é uma base de $Cl_{0,1}$. Assim definimos o isomorfismo $Cl_{0,1} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \mapsto 1, \\ e_1 \mapsto \mathbf{i}. \end{array} \tag{1.1.4}$$

iii) Se $\{e_1, e_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, $\{\mathbf{1}, e_1, e_2, e_1e_2\}$ com $e_i^2 = 1, i = 1,2$ e $e_1e_2 = -e_2e_1$ é uma base de $Cl_{2,0}$. Assim definimos o isomorfismo $Cl_{2,0} \to \mathbb{R}(2)$ tal que

$$\begin{array}{cc} \mathbf{1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & e_1e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array} \tag{1.1.5}$$

iv) Se $\{e_1, e_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, $\{\mathbf{1}, e_1, e_2, e_1e_2\}$ com $e_i^2 = -1, i = 1,2$ e $e_1e_2 = -e_2e_1$ é uma base de $Cl_{0,2}$. Assim definimos o isomorfismo $Cl_{2,0} \to \mathbb{H}$ tal que

$$\begin{array}{cc} \mathbf{1} \mapsto 1, & e_1 \mapsto \mathbf{i}, \\ e_2 \mapsto \mathbf{j}, & e_1e_2 \mapsto \mathbf{k} = \mathbf{ij}. \end{array} \tag{1.1.6}$$

v) Se $\{e_1, e_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, $\{\mathbf{1}, e_1, e_2, e_1e_2\}$ com $e_1^2 = 1, e_2^2 = -1$ e $e_1e_2 = -e_2e_1$ é uma base de $Cl_{1,1}$. Assim definimos o isomorfismo $Cl_{1,1} \to \mathbb{R}(2)$ tal que

$$\begin{array}{cc} \mathbf{1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & e_1e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}. \tag{1.1.7}$$

□

Teorema 11.

$$\begin{aligned} &\text{i) } Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \simeq Cl_{0,n+2}, \\ &\text{ii) } Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \simeq Cl_{n+2,0}, \\ &\text{iii) } Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1} \simeq Cl_{p+1,q+1}. \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Demonstração. i) Seja $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}^{n+2}$ com produto interno tal que $\mathbf{q}(e_i) = -1, i = 1, \ldots, n+2$. Considere $e'_1, \ldots, e'_n$ os geradores básicos ortogonais de $Cl_{n,0}$ com produto tais que $\mathbf{q}(e'_i) = 1, i = 1, \ldots, n$ e e''_1, e''_2 os geradores básicos ortogonais de $Cl_{0,2}$ tais que $\mathbf{q}(e''_i) = -1, i = 1, 2$. Defina

$$\phi : \mathbb{R}^{n+2} \to Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \text{ por} \tag{1.1.9}$$
$$\phi(e_i) = \begin{cases} e'_i \otimes e''_1 e''_2 \text{ para } 1 \leq i \leq n, \\ \mathbf{1} \otimes e''_{i-n} \text{ para } i = n+1, n+2. \end{cases}$$

Temos $(\phi(e_i))^2 = \mathbf{q}(e_i) \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ para $i = 1, \ldots, n+2$. Estendendo por linearidade temos $(\phi(\mathbf{v}))^2 = \mathbf{q}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+2}$. Logo pela propriedade universal Prop.(4), ϕ se estende ao homomorfismo $\tilde{\phi} : Cl_{0,n+2} \to Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$. Como $\tilde{\phi}$ leva um conjunto de geradores de $Cl_{0,n+2}$ a um conjunto de geradores de $Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$ e $\dim(Cl_{0,n+2}) = \dim(Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2})$ temos que $\tilde{\phi}$ é um isomorfismo.

ii) Análogo a i).

iii) Seja $\{e_1, \ldots, e_{p+1}, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{q+1}\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}^{p+q+2}$ com produto interno tal que $\mathbf{q}(e_i) = 1, i = 1, \ldots, p+1$ e $\mathbf{q}(\bar{e}_j) = -1, j = 1, \ldots, q+1$. Sejam $e'_1, \ldots, e'_n; \bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n$ e $e''_1, \bar{e}''_1$ os geradores de $Cl_{p,q}$ e $Cl_{1,1}$ respectivamente. Defina

$$\phi : \mathbb{R}^{p+q+2} \to Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1} \text{ por} \tag{1.1.10}$$
$$\phi(e_i) = \begin{cases} e'_i \otimes e''_1 \bar{e}''_1 \text{ para } 1 \leq i \leq p, \\ \mathbf{1} \otimes e''_1 \text{ para } i = p+1. \end{cases}$$
$$\phi(\bar{e}_j) = \begin{cases} \bar{e}'_j \otimes e''_1 \bar{e}''_1 \text{ para } 1 \leq j \leq q, \\ \mathbf{1} \otimes \bar{e}''_1 \text{ para } j = q+1. \end{cases}$$

Estendendo por linearidade temos $(\phi(\mathbf{v}))^2 = \mathbf{q}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p+q+2}$. Logo pela propriedade universal Prop.(4) ϕ se estende ao homomorfismo $\tilde{\phi} : Cl_{p+1,q+1} \to Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$ e como no caso acima o resultado segue. □

Se usarmos os isomorfismos do Teorema (11) repetidas vezes teremos o seguinte corolário, que classifica todas as álgebras de Clifford reais.

Corolário 12. (***Periodicidade***) *Para $n \geq 0$ existem isomorfismos*

$$\begin{aligned} &\text{i) } Cl_{n+8,0} \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}, \\ &\text{ii) } Cl_{0,n+8} \simeq Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,8}, \\ &\text{iii) } Cl_{p,q+8} \simeq Cl_{p,q} \otimes Cl_{0,8}, \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

onde $Cl_{0,8} \simeq Cl_{8,0} \simeq \mathbb{R}(16)$.

Podemos reunir esses resultados na tabela a seguir (onde $\mu = [n/2]$ é a parte inteira de $n/2$):

$p-q \mod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$Cl_{p,q}$	$\mathbb{R}(2^{\mu})$	$\mathbb{R}(2^{\mu}) \oplus \mathbb{R}(2^{\mu})$	$\mathbb{R}(2^{\mu})$	$\mathbb{C}(2^{\mu})$	$\mathbb{H}(2^{\mu-1})$	$\mathbb{H}(2^{\mu-1}) \oplus \mathbb{H}(2^{\mu-1})$	$\mathbb{H}(2^{\mu-1})$	$\mathbb{C}(2^{\mu})$

Tabela 1.1: Representação das álgebras Clifford $Cl_{p,q}$ como álgebras de matrizes

Para o caso complexo precisamos definir:

Definição 13. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ tal que $\dim_{\mathbb{R}} V = 2m = n$. Uma aplicação linear*

$$\mathbf{J} : V \rightarrow V, \tag{1.1.12}$$

tal que

$$\mathbf{J}^2 = -Id_V, \tag{1.1.13}$$

é chamada de estrutura complexa.

Definição 14. *Seja V como na definição anterior. Denote por $V_{\mathbb{C}}$ o espaço vetorial complexo definido por $\mathbf{J}$. Isto é,*

$$zv = (a+ib)v = av + b\mathbf{J}v, \tag{1.1.14}$$

onde $z = (a+ib) \in \mathbb{C}$ e $v \in V$. Teremos $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = m$.

Definição 15. *Uma complexificação de V é a estrutura complexa associada ao espaço vetorial real $V \oplus V$, onde $\mathbf{J}(v,w) = (-w,v)$. O espaço vetorial complexo resultante é denotado por $V^{\mathbb{C}}$. Tome $v, w \in V$, elementos de $V^{\mathbb{C}}$ são normalmente denotados por $c = v+iw$, e se $\mathbb{C} \ni z = a+ib$ teremos*

$$zc = (av - bw) + i(bv + aw), \tag{1.1.15}$$

claramente, temos que $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$. Podemos notar ainda que $\mathbb{C} \otimes V \simeq V^{\mathbb{C}}$ onde o isomorfismo é dado por $z \otimes v \mapsto zv$. Dada uma forma bilinear simétrica $\mathbf{g}$ em V, definimos a sua extensão $\mathbf{g}^{\mathbb{C}}$ para $V^{\mathbb{C}}$ por $\mathbb{C}$-linearidade, i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2, w_1 + iw_2) &= (\mathbf{g}(v_1, w_1) - \mathbf{g}(v_2, w_2)) + i(\mathbf{g}(v_1, w_2) + \mathbf{g}(v_2, w_1)), \\ \mathbf{g}^{\mathbb{C}}(v_1 \otimes z_1, v_2 \otimes z_2) &= \mathbf{g}(v_1, v_2) \otimes z_1 z_2. \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Proposição 16. *Seja o par $(V, \mathbf{g})$ um espaço quadrático sobre $\mathbb{R}$ e $\mathcal{C}\ell(V, \mathbf{g})$ a sua álgebra de Clifford real. Considere a álgebra de Clifford complexa $\mathcal{C}\ell(V^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}})$ para o espaço quadrático complexificado $(V^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}})$. Então*

$$\mathcal{C}\ell(V^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(V, \mathbf{g}). \tag{1.1.17}$$

Demonstração. Defina $\phi : \mathbb{C} \otimes \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ de forma que tenhamos $\phi(a \otimes \mathbf{v}) = a \otimes \mathbf{v}$, onde subentendemos que $\mathbf{v} = i_{\mathbf{g}}(\mathbf{v})$ do lado direito dessa equação. Assim $(\phi(a \otimes \mathbf{v}))^2 = (a \otimes \mathbf{v})(a \otimes \mathbf{v}) = aa \otimes \mathbf{vv} = \mathbf{g}^{\mathbb{C}}(a \otimes \mathbf{v}, a \otimes \mathbf{v}) \cdot 1 \otimes \mathbf{1}$. Logo, pela propriedade universal, ϕ se estende ao homomorfismo $\tilde{\phi} : \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. Como $\tilde{\phi}$ leva um conjunto de geradores de $\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}})$ a um conjunto de geradores de $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ e $\dim(\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}}) = \dim(\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g}))$, temos que $\tilde{\phi}$ é um isomorfismo. $\square$

Para o caso complexo temos apenas uma forma $\mathbb{C}$-bilinear não degenerada, assim definimos $\mathbb{C}l_n := Cl_{p,q} \otimes \mathbb{C}$ para qualquer p, q tal que $p + q = n$.

Desta forma, para as álgebras de Clifford complexas, a classificação fica

n par	$\mathbb{C}_{2k} = \mathbb{C}(2^k)$
n ímpar	$\mathbb{C}_{2k+1} = \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k)$

Tabela 1.2: Representação das álgebras Clifford $\mathbb{C}_n$ como álgebras de matrizes

1.2 Transformações Ortogonais e o Teorema de Cartan-Dieudonné

1.2.1 Transformações Ortogonais

Seja $\mathbf{g}$ uma forma bilinear simétrica de assinatura (p, q) no espaço vetorial $V = \mathbb{R}^{p+q}$ e $\mathbf{q}$ sua forma quadrática correspondente. Uma aplicação linear $T : V \to V$ é dita uma *isometria* ou uma *transformação ortogonal* se

$$\mathbf{g}(T(u), T(v)) = \mathbf{g}(u, v), \forall u, v \in V. \tag{1.2.1}$$

Definindo T_i^j através de $T(e_i) = T_i^j e_j$ e $g_{ij} = \mathbf{g}(e_i, e_j)$ a equação pode ser reescrita como $T_i^k g_{kl} T_j^l = g_{ij}$. Matricialmente podemos reescrever $T^t G T = G$. Portanto

$$(\det T)^2 = 1. \tag{1.2.2}$$

O conjunto das isometrias do espaço V munido da forma métrica $\mathbf{g}$ de assinatura (p, q) forma um grupo chamado de *grupo ortogonal* que é denotado por $O(p, q)$. As transformações ortogonais tais que $\det T = 1$ são chamadas de rotações e aquelas que $\det T = -1$ são chamadas de reflexões. O subgrupo de $O(p, q)$ formado apenas por rotações é chamado de *grupo ortogonal especial* e denotamos por $SO(p, q)$.

1.2.2 As Componentes do Grupo Ortogonal

Os grupos $O(n, 0)$ e $O(0, n)$ possuem duas componentes conexas, aquelas com $\det T = 1$ são respectivamente $SO(n, 0)$ e $SO(0, n)$.

Já os grupos $O(p, q)$ possuem *quatro componentes*. Considere uma base de $\mathbb{R}^{p,q}$ tal que

$$G = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}, \tag{1.2.3}$$

onde 1_p e 1_q denotam as matrizes de ordem p e q respectivamente. Representando T através da matriz

$$T = \begin{pmatrix} A_p & B_{p,q} \\ C_{q,p} & D_q \end{pmatrix}. \tag{1.2.4}$$

A condição $T^tGT = G$ implica que

$$\begin{aligned} A_p^t A_p - C_{q,p}^t C_{q,p} &= 1_p, \\ D_q^t D_q - B_{p,q}^t B_{p,q} &= 1_q, \\ A_p^t B_{p,q} &= C_{q,p}^t D_q. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Não é difícil vermos que as matrizes A_p e D_q satisfazem $\det A_p \neq 0$ e $\det D_q \neq 0$. Vamos ver isso para a matriz A_p - o outro caso é completamente análogo. A matriz A_p deve satisfazer $A_p^t A_p = 1_p + C_{q,p}^t C_{q,p}$. Disso segue

$$(\det A_p)^2 = det(1_p + C_{q,p}^t C_{q,p}). \tag{1.2.6}$$

Suponha que $\det(1_p + C_{q,p}^t C_{q,p}) = 0$. Nesse caso a equação $(1_p + C_{q,p}^t C_{q,p})X = 0$ possui uma solução não trivial. Portanto $X = -C_{q,p}^t C_{q,p} X$ e aí

$$X^t X = -X^t C_{q,p}^t C_{q,p} X = -(C_{q,p}X)^t C_{q,p} X. \tag{1.2.7}$$

O que é uma contradição, pois $X^t X, (C_{q,p}X)^t C_{q,p} X \in \mathbb{R}$ são as normas de vetores não nulos X e $C_{q,p}X$. Portanto $\det A_p \neq 0$ e $\det D_q \neq 0$.

Podemos então dividir as transformações ortogonais $T \in O(p,q)$ em quatro classes [1]

$$\begin{aligned} O_+^{\uparrow}(p,q) &: \det A_p > 0 \text{ e } \det D_q > 0 \\ O_-^{\uparrow}(p,q) &: \det A_p > 0 \text{ e } \det D_q < 0 \\ O_+^{\downarrow}(p,q) &: \det A_p < 0 \text{ e } \det D_q > 0 \\ O_-^{\downarrow}(p,q) &: \det A_p < 0 \text{ e } \det D_q < 0 \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

1.2.3 Simetrias Ortogonais e Reflexões

Seja um vetor $u \in V$ tal que $\mathbf{g}(u,u) \neq 0$. Podemos escrever um vetor $v \in V$ na forma $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ onde $\mathbf{g}(v_{\perp}, u) = 0$. É fácil vermos que

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp} = \left(\frac{\mathbf{g}(v,u)}{\mathbf{g}(u,u)}u\right) + \left(v - \frac{\mathbf{g}(v,u)}{\mathbf{g}(u,u)}u\right). \tag{1.2.9}$$

Definimos a reflexão através do hiperplano ortogonal a u como:

$$S_u(v) = S_u(v_{\parallel} + v_{\perp}) = -v_{\parallel} + v_{\perp} = v - 2\frac{\mathbf{g}(v,u)}{\mathbf{g}(u,u)}u. \tag{1.2.10}$$

Proposição 17. *Quaisquer dois vetores v e u não-isotrópicos e de mesmo comprimento, ou seja $\mathbf{g}(v,v) = \mathbf{g}(u,u) \neq 0$, podem ser relacionados através de no máximo duas reflexões.*

Demonstração. Teremos aqui dois casos: $\mathbf{g}(u-v, u-v) \neq 0$ ou $\mathbf{g}(u-v, u-v) = 0$.

[1] Note que nenhuma dessas classes é vazia. Por exemplo as matrizes: $id, diag(1,1,1,\cdots,1,1,-1), diag(-1,1,1,\cdots 1,1,1), diag(-1,1,1,\cdots,1,1,-1)$, pertencem, respectivamente, a cada uma das classes.

Primeiramente suponha que $\mathbf{g}(u-v,u-v)\neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
S_{v-u}(v) &= v-2\frac{\mathbf{g}(v,v-u)}{\mathbf{g}(v-u,v-u)}(v-u)\\
&= v-2\frac{\mathbf{g}(v,v)-\mathbf{g}(v,u)}{\mathbf{g}(v,v)+\mathbf{g}(u,u)-2\mathbf{g}(u,v)}(v-u)\\
&= v-\frac{\mathbf{g}(v,v)-\mathbf{g}(v,u)}{\mathbf{g}(v,v)-\mathbf{g}(u,v)}(v-u)\\
&= v-(v-u)=u. \qquad (1.2.11)
\end{aligned}$$

Se $\mathbf{g}(u-v,u-v)=0$ então $\mathbf{g}(v,v)=\mathbf{g}(u,u)=\mathbf{g}(v,u)\neq 0$ e nesse caso $\mathbf{g}(u+v,u+v)\neq 0$, então

$$\begin{aligned}
S_{v+u}(v) &= v-2\frac{\mathbf{g}(v,v+u)}{\mathbf{g}(v+u,v+u)}(v+u)\\
&= v-2\frac{\mathbf{g}(v,v)+\mathbf{g}(v,u)}{\mathbf{g}(v,v)+\mathbf{g}(u,u)+2\mathbf{g}(u,v)}(v+u)\\
&= v-\frac{\mathbf{g}(v,v)+\mathbf{g}(v,u)}{\mathbf{g}(v,v)+\mathbf{g}(u,v)}(v+u)\\
&= v-(v+u)=-u, \qquad (1.2.12)
\end{aligned}$$

e daí

$$S_u(S_{v+u}(v))=S_u(-u)=-u-2\frac{\mathbf{g}(-u,u)}{\mathbf{g}(u,u)}u=u. \qquad (1.2.13)$$

□

1.2.4 Teorema de Cartan-Dieudonné

Teorema 18. *Qualquer transformação ortogonal T em um espaço vetorial V de dimensão finita, pode ser expressa como produto de simetrias (reflexões) com relação a hiperplanos não isotrópicos.*

Demonstração. Vamos demonstrar por indução na dimensão $\dim V=n$. Para $n=1$ não há nada a fazer. Vamos então assumir que a afirmação é válida para $\dim V=n$ e mostrar que neste caso ela vale para $\dim V=n+1$.

Seja $v\in V$ tal que $\mathbf{g}(v,v)\neq 0$ e suponha $\dim V=n+1$, seja $U=span\{v\}$. O subespaço $U^\perp$ tem dimensão n. Vamos considerar agora a transformação ortogonal T. Por definição $\mathbf{g}(T(v),T(v))=\mathbf{g}(v,v)$ e portanto podemos relacionar $T(v)$ e v por no máximo duas reflexões S. Então $S(T(v))=v$. Como o espaço U é invariante pela transformação $S\circ T$, $U^\perp$ também é invariante por essa transformação que é uma transformação ortogonal. Como $\dim U^\perp=n$ então $S\circ T$ é o produto Σ de um número finito de reflexões e portanto $T=S^{-1}\circ\Sigma$. □

Observação 19 ([1], pp.129)**.** *A Versão mais forte do teorema de Cartan-Dieudonné diz que se* $\dim V=n$*, então T ($T\neq Id$) pode ser expresso como o produto de no máximo n simetrias.*

1.3 Os Grupos Pin e Spin

Continuemos a considerar espaços quadráticos não-degenerados e de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$.

Seja $\mathcal{C}\ell^{\times}(V,\mathbf{g})$ o grupo multiplicativo dos elementos inversíveis de $\mathcal{C}\ell(V,\mathbf{g})$, isto é

$$\mathcal{C}\ell^{\times}(V,\mathbf{g}) = \{w \in \mathcal{C}\ell(V,\mathbf{g}) : \exists w^{-1} \in \mathcal{C}\ell(V,\mathbf{g}) \text{ com } w^{-1}w = ww^{-1} = 1\}. \tag{1.3.1}$$

Os elementos de $\mathcal{C}\ell^{\times}(V,\mathbf{g})$ agem como automorfismos da álgebra de Clifford por meio da **representação adjunta torcida**:

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad} &: \mathcal{C}\ell^{\times}(V,\mathbf{g}) \to Aut(\mathcal{C}\ell(V,\mathbf{g})), \\ \widetilde{Ad}(w)(x) &= \alpha(w)xw^{-1} = \tilde{w}xw^{-1}. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Denote $\widetilde{Ad}(w)(x) := \widetilde{Ad}_w(x)$. Também definimos $Ad_w(x) := wxw^{-1}$.

Proposição 20. *Se $u \in V \subset \mathcal{C}\ell(V,\mathbf{g})$ é tal que $\mathbf{q}(u) \neq 0$, então*

$$\widetilde{Ad}_u(v) = S_u(v) = v - 2\frac{\mathbf{g}(v,u)}{\mathbf{g}(u,u)}u = -uvu^{-1} = \tilde{u}vu^{-1}. \tag{1.3.3}$$

Demonstração. Na álgebra $\mathcal{C}\ell(V,\mathbf{g})$ temos $vu + uv = 2\mathbf{g}(u,v)$. Daí $u^2 = \mathbf{g}(u,u) = q(u)$. Portanto

$$u^{-1} = \frac{u}{\mathbf{g}(u,u)} = \frac{u}{u^2}, \tag{1.3.4}$$

assim podemos escrever

$$S_u(v) = v - \frac{vu+uv}{\mathbf{g}(u,u)}u = v - (vu+uv)u^{-1} = v - v - uvu^{-1}, \tag{1.3.5}$$

ou seja,

$$S_u(v) = -uvu^{-1} = \tilde{u}vu^{-1}. \tag{1.3.6}$$

□

Usando a representação adjunta torcida, defina o subgrupo

$$\tilde{P}(V,\mathbf{q}) = \{w \in \mathcal{C}\ell^{\times}(V,\mathbf{g}) : \widetilde{Ad}_w(V) = V\} \tag{1.3.7}$$

de $\mathcal{C}\ell^{\times}(V,\mathbf{g})$. Temos a seguinte

Proposição 21. *O núcleo do homomorfismo $\widetilde{Ad} : \tilde{P}(V,\mathbf{q}) \to Gl(V)$ é exatamente o grupo $\mathbb{F}^{\times}$ dos elementos inversíveis do corpo $\mathbb{F}$.*

Demonstração. Seja w um elemento de $\mathcal{C}\ell^{\times}(V,\mathbf{g})$ e suponha que $w \in Ker(\widetilde{Ad})$. Então $\widetilde{Ad}_w(v) = v, \forall v \in V$. Portanto

$$\tilde{w}v = vw, \forall v \in V. \tag{1.3.8}$$

Decomponha w em suas partes par e ímpar,

$$w = w_0 + w_1, w_0 \in \mathcal{C}\ell^0(V,\mathbf{g}), w_1 \in \mathcal{C}\ell^1(V,\mathbf{g}). \tag{1.3.9}$$

Da Eq.(1.3.8) segue que

$$vw_0 = w_0 v \text{ e } -vw_1 = w_1 v, \tag{1.3.10}$$

qualquer que seja $v \in V$. Podemos convenientemente escrever

$$w_0 = w_0^{'} + e_1 w_0^{''} \text{ e } w_1 = w_1^{'} + e_1 w_1^{''}, \tag{1.3.11}$$

onde $w_0^{'}, w_0^{''}, w_1^{'}$ e $w_1^{''}$ não envolvem e_1. Por sua vez, aplicações do automorfismo α às expressões acima mostram que

$$w_0 = w_0^{'} + e_1 w_0^{''} = \alpha(w_0) = \alpha(w_0^{'}) - e_1 \alpha(w_0^{''}), \tag{1.3.12}$$

e

$$-w_1 = -w_1^{'} - e_1 w_1^{''} = \alpha(w_1) = \alpha(w_1^{'}) - e_1 \alpha(w_1^{''}), \tag{1.3.13}$$

vemos assim que $w_0^{'}$ e $w_1^{''}$ são elementos pares, já $w_0^{''}$ e $w_1^{'}$ são ímpares. Temos também:

$$e_1 w_0 = e_1 w_0^{'} + e_1^2 w_0^{''} = w_0 e_1 = w_0^{'} e_1 + e_1 w_0^{''} e_1 = e_1 w_0^{'} - e_1^2 w_0^{''} \tag{1.3.14}$$

e

$$e_1 w_1 = e_1 w_1^{'} + e_1^2 w_1^{''} = -w_1 e_1 = -w_1^{'} e_1 - e_1 w_1^{''} e_1 = e_1 w_1^{'} - e_1^2 w_1^{''} \tag{1.3.15}$$

Portanto $w_0^{''} = w_1^{''} = 0$. Assim w_0 e w_1 não dependem de e_1. Como V é um espaço vetorial de dimensão finita, podemos repetir este procedimento mais algumas vezes e concluir que w_0 e w_1 não dependem de nenhum dos vetores $e_{1,\cdots,}e_n$. Nesse caso, ambos pertencem a $\mathbb{F}$. Como $w \in \mathcal{C}\ell^{\times}(V, \mathbf{g})$ temos $w \neq 0$. □

Introduzimos em $\mathcal{C}\ell(V, \mathbf{g})$ a seguinte função norma

$$\begin{array}{rcl} N & : & \mathcal{C}\ell(V, \mathbf{g}) \to \mathcal{C}\ell(V, \mathbf{g}) \\ w & \mapsto & N(w) = w\alpha(w^t) \end{array} \tag{1.3.16}$$

Proposição 22. *A restrição da função norma N ao grupo $\tilde{P}(V, \mathbf{q})$ fornece um homomorfismo $N : \tilde{P}(V, \mathbf{q}) \to \mathbb{F}^{\times}$.*

Demonstração. Se $w \in \tilde{P}(V, q)$ temos por definição que $\alpha(w)vw^{-1} \in V, \forall v \in V$. Como

$$V \ni \alpha(w)vw^{-1} = (\alpha(w)vw^{-1})^t = (w^{-1})^t v \alpha(w)^t = (w^t)^{-1} v \alpha(w^t), \tag{1.3.17}$$

então também,

$$v = w^t \alpha(w) v w^{-1} \alpha(w^t)^{-1} = \alpha[\alpha(w^t)w] v [\alpha(w^t)w]^{-1} = \widetilde{Ad}_{\alpha(w^t)w}(v), \forall v \in V. \tag{1.3.18}$$

De forma que $\alpha(w^t)w \in Ker(\widetilde{Ad})$. Temos $\alpha(w^t)w \in \tilde{P}(V, q)$ pois $\widetilde{Ad}_{\alpha(w^t)w}(V) = V$. Assim, pela proposição anterior $\alpha(w^t)w \in \mathbb{F}^{\times}$. Aplicando α temos

$$w^t \alpha(w) = N(w^t) \in \mathbb{F}^{\times}. \tag{1.3.19}$$

Como temos que o antiautomorfismo transposição preserva $\tilde{P}(V, q)$, concluímos que $N(w) \in \mathbb{F}^{\times}, \forall w \in \tilde{P}(V, q)$.

Por fim para $w_1, w_2 \in \tilde{P}(V, q)$, vemos que

$$N(w_1 w_2) = w_1 w_2 \alpha(w_2^t) \alpha(w_1^t) = w_1 N(w_2) \alpha(w_1^t) = N(w_1) N(w_2). \tag{1.3.20}$$

Logo, N é um homomorfismo. □

Corolário 23. *As transformações* $\widetilde{Ad}_w : V \to V$ *para* $w \in \tilde{P}(V, \mathbf{q})$ *preservam a forma quadrática* $\mathbf{q}$ *de* V*. Portanto, a restrição* $\widetilde{Ad}_w\Big|_{\tilde{P}(V,\mathbf{q})}$ *da representação adjunta torcida toma valores em* $O(V, \mathbf{q})$*.*

Demonstração. Como para $w \in \tilde{P}(V, q)$ temos

$$N(\alpha(w)) = \alpha(w)w^t = \alpha(w\alpha(w^t)) = \alpha(N(w)) = N(w), \tag{1.3.21}$$

então, para $v \in V$, temos

$$N(\widetilde{Ad}_w(v)) = N(\alpha(w)vw^{-1}) = N(\alpha(w))N(v)N(w^{-1}) = N(w)N(w^{-1})N(v) = N(v). \tag{1.3.22}$$

Como $N(v) = v\alpha(v^t) = q(v), \forall v \in V$, vemos que $\widetilde{Ad}_w$ é q-ortogonal. $\square$

Seja $V^\times = \{v \in V : \mathbf{q}(v) \neq 0\}$. Seja

$$P(V, \mathbf{q}) = \{v_1 \cdots v_r \in \mathcal{C}\ell(V, \mathbf{g}) | v_1, \cdots, v_r \in V^\times\}. \tag{1.3.23}$$

Note que os elementos de $P(V, \mathbf{q})$ são os elementos homogêneos de $\tilde{P}(V, \mathbf{q})$.

Definição 24. *O* ***grupo Pin*** *de um espaço quadrático* $(V, \mathbf{q})$ *é o subgrupo* $Pin(V, \mathbf{q})$ *de* $P(V, \mathbf{q})$ *gerado pelos elementos* $v \in V^\times$ *tais que* $\mathbf{q}(v) = \pm 1$*. O* ***grupo Spin*** *associado a ele é definido por*

$$Spin(V, \mathbf{q}) = Pin(V, \mathbf{q}) \cap \mathcal{C}\ell^0(V, \mathbf{g}). \tag{1.3.24}$$

Mais precisamente:

$$\begin{aligned} Pin(V, \mathbf{q}) &= \{v_1 \cdots v_r \in P(V, \mathbf{q}) | \mathbf{q}(v_i) = \pm 1 \text{ para todo } i = 1, \cdots, r\}, && (1.3.25)\\ Spin(V, \mathbf{q}) &= \{v_1 \cdots v_r \in Pin(V, \mathbf{q}) | r \text{ é um número par}\}. && (1.3.26) \end{aligned}$$

Note que $P(V, \mathbf{q}) \subset \tilde{P}(V, \mathbf{q})$. Assim $\widetilde{Ad} : P(V, \mathbf{q}) \to O(V, \mathbf{q})$ é tal que $\widetilde{Ad}_{v_1 \cdots v_r} = \rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_r}$, onde

$$\rho_v(w) = w - 2\frac{\mathbf{g}(w, v)}{\mathbf{q}(v)}v \tag{1.3.27}$$

é a reflexão em $v^\perp$. Isto quer dizer que a imagem de $P(V, \mathbf{q})$ pela representação adjunta torcida é exatamente o grupo gerado por reflexões. Ocorre que o grupo ortogonal $O(V, \mathbf{q})$ de um espaço quadrático não-degenerado de dimensão finita também é gerado por reflexões (teorema de Cartan-Dieudonné). Então, esta imagem deve coincidir com o próprio $O(V, \mathbf{q})$.

Se definirmos

$$SP(V, \mathbf{q}) = P(V, \mathbf{q}) \cap \mathcal{C}\ell^0(V, \mathbf{g}), \tag{1.3.28}$$

então $\widetilde{Ad} : SP(V, \mathbf{q}) \to SO(V, \mathbf{q})$ também é uma sobrejeção, pois $\det \rho_v = -1$ e $SO(V, \mathbf{q})$ é gerado por um número par de tais reflexões.

Observe que para todo $t \in \mathbb{F}^\times$

$$\widetilde{Ad}_{tv}w = \alpha(tv)wt^{-1}v^{-1} = \alpha(v)wv^{-1} = \widetilde{Ad}_v w. \tag{1.3.29}$$

Assim a representação adjunta torcida não percebe a norma do vetor v, i.e., $\widetilde{Ad}_{tv} = \widetilde{Ad}_v$, então teremos também aplicações sobrejetivas em Pin e $Spin$:

Teorema 25. *Seja $(V, \mathbf{q})$ um espaço quadrático não-degenerado, de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica diferente de dois na qual ao menos uma das equações $t^2 = a$ e $t^2 = -a$ pode ser resolvida para cada elemento não nulo $a \in \mathbb{F}^\times$. Então, existem sequências exatas curtas*

$$1 \rightarrow F \rightarrow Spin(V, \mathbf{q}) \overset{\widetilde{Ad}}{\rightarrow} SO(V, \mathbf{q}) \rightarrow 1, \tag{1.3.30}$$

$$1 \rightarrow F \rightarrow Pin(V, \mathbf{q}) \overset{\widetilde{Ad}}{\rightarrow} O(V, \mathbf{q}) \rightarrow 1, \tag{1.3.31}$$

onde

$$F = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\} \text{ se } \sqrt{-1} \notin \mathbb{F}, \\ \mathbb{Z}_4 = \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\}, \text{ caso contrário.} \end{cases} \tag{1.3.32}$$

Demonstração. Suponha que $w =\in Pin(V, q)$ também seja um elemento de $\ker(\widetilde{Ad})$. Então $w \in \mathbb{F}^\times$. Assim,

$$w^2 = N(w) = N(v_1) \cdots N(v_r) = q(v_1) \cdots q(v_r) = \pm 1, \tag{1.3.33}$$

portanto, w é uma raíz de um dos polinômios $x^2 \pm 1$ com coeficientes em $\mathbb{F}$.

Note que todo $v \in V^\times$ pode ser normalizado, pois $q(tv) = t^2 q(v)$ vemos que existe t tal que $q(tv) = \pm 1$.

O teorema de Cartan-Dieudonné garante que toda trasformação ortogonal $T \in O(V, q)$ é tal que

$$T = \widetilde{Ad}_{v_1 \cdots v_r}, \tag{1.3.34}$$

para algum $v_1 \cdots v_r \in P(V, q)$. Assim segue que

$$T = \widetilde{Ad}_{(t_1 v_1) \cdots (t_r v_r)}, \tag{1.3.35}$$

com t_i apropriadamente escolhido para que $q(t_i v_i) = \pm 1, i = 1, \cdots r$. Logo, a restrição da representação adjunta torcida à $Pin(V, q)$ é sobrejetora. De maneira análoga mostra-se a sobrejetividade da restrição da representação adjunta à $Spin(V, q)$. □

Considerando a restrição ao grupo *Spin*, as representações adjunta e adjunta torcida coincidem $\widetilde{Ad}\big|_{Spin(V, \mathbf{q})} = Ad|_{Spin(V, \mathbf{q})}$.

Lembramos que para o caso da forma quadrática $\mathbf{q}$ ter assinatura (p, q) definimos

$$O_{p,q} := O(V, \mathbf{q}), \quad SO_{p,q} := SO(V, \mathbf{q}), \quad Pin_{p,q} := Pin(V, \mathbf{q}), \quad Spin_{p,q} := Spin(V, \mathbf{q}), \tag{1.3.36}$$

também definimos:

$$O_{p,0} := O_p, \quad SO_{p,0} := SO_p, \quad Pin_{p,0} := Pin_p, \quad Spin_{p,0} := Spin_p. \tag{1.3.37}$$

Com essa notação temos o seguinte

Teorema 26. *Existem sequências exatas*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Spin_{p,q} \overset{Ad}{\rightarrow} SO(V, \mathbf{q}) \rightarrow 1, \tag{1.3.38}$$

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Pin_{p,q} \overset{\widetilde{Ad}}{\rightarrow} O(V, \mathbf{q}) \rightarrow 1, \tag{1.3.39}$$

em particular,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Spin_n \overset{Ad:=\lambda}{\rightarrow} SO_n \rightarrow 1. \tag{1.3.40}$$

Como o grupo fundamental de SO_n é $\mathbb{Z}_2$, para $n \geq 3$ [[29] pp.263], da sequência exata Eq.(1.3.40) segue que $\pi_1(Spin_n) = 1$ e o mapa $Ad := \lambda : Spin_n \rightarrow SO_n$ representa o homomorfismo de recobrimento universal de SO_n para todo $n \geq 3$. Para $n = 2$, $SO_2 \cong S^1$, $Spin_2 \cong S^1$ e $\lambda : Spin_2 \rightarrow SO_2,\ \lambda(z) = z^2$.

1.3.1 O grupo $Spin^{\mathbb{C}}$

Nesta seção vamos definir e explorar algumas propriedades do grupo $Spin^{\mathbb{C}}$

Definição 27. *O grupo $Spin_n^{\mathbb{C}}$ é o grupo definido por*

$$Spin_n^{\mathbb{C}} = \frac{Spin_n \times S^1}{\{(-1,-1)\}}, \tag{1.3.41}$$

onde $S^1 = U(1) \subset \mathbb{C}$ denota o grupo dos complexos unitários.

Este grupo fica melhor compreendido dentro da álgebra de Clifford complexa $\mathbb{C}l_n = \mathbb{C} \otimes Cl_n = Cl(\mathbb{C}^n)$. $Spin_n$ e S^1 são subgrupos do grupo dos elementos inversíveis dessa álgebra, além disso

$$Spin_n \cap S^1 = \{1, -1\}. \tag{1.3.42}$$

Portanto $Spin_n^{\mathbb{C}}$ é dado pelas classes de equivalênia do produto direto $Spin_n \times S^1$ pela relação de equivalência $(p,s) \cong (-p,-s)$, obtida a partir de $-1 \in \mathbb{C}l_n$. Podemos usar a seguinte notação $Spin_n^{\mathbb{C}} = Spin_n \otimes S^1 \subset Cl_n \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}l_n$.

Para o grupo $Spin_n^{\mathbb{C}}$ vamos definir os seguintes homomorfismos

$$\lambda^{\mathbb{C}}: \quad Spin_n^{\mathbb{C}} \to SO_n, \text{dado por } \lambda^{\mathbb{C}}([p,s]) = \lambda(p). \tag{1.3.43}$$

$$i^{\mathbb{C}}: \quad Spin_n \to Spin_n^{\mathbb{C}} \text{ a inclusão natural, } i^{\mathbb{C}}(p) = [p,1]. \tag{1.3.44}$$

$$j^{\mathbb{C}}: \quad S^1 \to Spin_n^{\mathbb{C}} \text{ a inclusão natural, } j^{\mathbb{C}}(s) = [1,s]. \tag{1.3.45}$$

$$l^{\mathbb{C}}: \quad Spin_n^{\mathbb{C}} \to S^1 \text{ dado por } l^{\mathbb{C}}([p,s]) = s^2. \tag{1.3.46}$$

$$p^{\mathbb{C}} = \quad \lambda^{\mathbb{C}} \times l^{\mathbb{C}} : Spin_n^{\mathbb{C}} \to SO_n \times S^1 \text{ dado por } l^{\mathbb{C}}([p,s]) = (\lambda(p), s^2). \tag{1.3.47}$$

Assim o grupo $Spin_n^{\mathbb{C}}$ produz a seguinte sequência exata:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin_n^{\mathbb{C}} \xrightarrow{p^{\mathbb{C}}} SO_n \times S^1 \longrightarrow 1. \tag{1.3.48}$$

1.4 Representações

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $\mathbf{q}$ uma forma quadrática em V e $\mathbb{A}$ um corpo contendo $\mathbb{K}$.

Definição 28. *Uma $\mathbb{A}$-representação para $Cl(V,\mathbf{q})$ é um $\mathbb{K}$-homomorfismo de álgebras*

$$\rho : Cl(V,\mathbf{q}) \to End_{\mathbb{A}}(W), \tag{1.4.1}$$

onde W é um $\mathbb{A}$-espaço vetorial de dimensão finita. O espaço vetorial W é chamado de $Cl(V,\mathbf{q})$-módulo sobre $\mathbb{A}$.

Definição 29. *Uma $\mathbb{A}$ representação $\rho : Cl(V,\mathbf{q}) \to End_{\mathbb{A}}(W)$ será dita redutível se o espaço vetorial W puder ser escrito como uma soma não trivial sobre $\mathbb{A}$*

$$W = W_1 \oplus W_2, \tag{1.4.2}$$

tal que $\rho(\varphi)(W_j) \subset W_j$ para $j = 1,2$, $\varphi \in Cl(V,\mathbf{q})$. Nesse caso escrevemos

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2, \tag{1.4.3}$$

*onde $\rho_j := \rho|_{W_j}$, $j = 1,2$. Uma representação é chamada **irredutível** se ela não é redutível.*

Quando V tem dimensão finita, já sabemos que as álgebras $Cl(V,\mathbf{q})$ têm dimesão finita, são simples ou soma de simples. Vide tabela 1.3. Do fato de W ter dimensaõ finita obtemos rapidamente a seguinte:

Proposição 30. *Toda $\mathbb{A}$-representação ρ de uma álgebra de Clifford $Cl(V,\mathbf{q})$ pode ser decomposta numa soma direta $\rho=\rho_1\oplus\cdots\oplus\rho_m$ de representações irredutíveis.*

Definição 31. *Duas representações $\rho_j : Cl(V,\mathbf{q})\to End_{\mathbb{A}}(W_j), j=1,2$ são ditas equivalentes se existe um A-isomorfismo linear $F : W_1\to W_2$ tal que $F\circ\ \rho_1(\varphi)\circ F^{-1}=\rho_2(\varphi)$ para todo $\varphi\in Cl(V,\mathbf{q})$.*

Da classificação das álgebras de Clifford da Seção 1.1 sabemos que toda álgebra $Cl_{p,q}$ é da forma $\mathbb{K}(2^n)$ ou $\mathbb{K}(2^n)\oplus\mathbb{K}(2^n)$ com $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$. Assim a teoria das representações dessas álgebras é relativamente simples.

Proposição 32. *Seja $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ e considere $K(n)$ o anel das matrizes $n\times n$ sobre $\mathbb{R}$. A representação natural ρ de $K(n)$ sobre K^n é a única, módulo equivalência, representação real irredutível de $K(n)$. $K(n)\oplus K(n)$ tem exatamente duas classes de represetações reais irredutíveis dadas por*

$$\rho_1(\varphi_1,\varphi_2)=\rho(\varphi_1),\quad \rho_2(\varphi_1,\varphi_2)=\rho(\varphi_2), \tag{1.4.4}$$

agindo em K^n.

Demonstração. Segue do fato que as álgebras $K(n)$ são simples, álgebras simples têm apenas uma representação irredutível, módulo equivalência [[15] pp.653]. □

Agora vamos restringir nossa atenção às álgebras $Cl_n=Cl_{n,0}$ e $\mathbb{C}l_n=\mathbb{C}\otimes Cl_n$. Comecemos com algumas definições: para cada n, seja ν_n o número de representações reais irredutíveis não equivalentes de Cl_n e denote por $\nu_n^{\mathbb{C}}$ o número de representações complexas irredutíveis não equivalentes de $\mathbb{C}l_n$. Seja $d_n=\dim_{\mathbb{R}}W$ onde W é um $\mathbb{R}$-módulo irredutível de Cl_n. Analogamente seja $d_n^{\mathbb{C}}=\dim_{\mathbb{R}}W'$ onde W' é um $\mathbb{C}$-módulo irredutível de Cl_n e portanto também de $\mathbb{C}l_n$.

Da classificação da Seção 1.1, Tabelas 1.1 e 1.2, segue o seguinte:

Teorema 33. *Para $1\le n\le 8$ os valores de $\nu_n,\nu_n^{\mathbb{C}},d_n,d_n^{\mathbb{C}}$ são dados na seguite tabela:*

n	Cl_n	ν_n	d_n	$\mathbb{C}l_n$	$\nu_n^{\mathbb{C}}$	$d_n^{\mathbb{C}}$
1	$\mathbb{C}$	1	2	$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$	2	1
2	$\mathbb{H}$	1	4	$\mathbb{C}(2)$	1	2
3	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	2	4	$\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$	2	2
4	$\mathbb{C}(2)$	1	8	$\mathbb{C}(4)$	1	4
5	$\mathbb{C}(4)$	1	8	$\mathbb{C}(4)\oplus\mathbb{C}(4)$	2	4
6	$\mathbb{R}(8)$	1	8	$\mathbb{C}(8)$	1	8
7	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	2	8	$\mathbb{C}(8)\oplus\mathbb{C}(8)$	2	8
8	$\mathbb{R}(16)$	1	16	$\mathbb{C}(16)$	1	16

Tabela 1.3: Valores de $\nu_n,\nu_n^{\mathbb{C}},d_n,d_n^{\mathbb{C}}$.

Para $n > 8$ esses elementos podem ser calculados usando o seguinte ($m, k \geq 1$):

$$\begin{aligned} \nu_{m+8k} &= \nu_m, \quad \nu^{\mathbb{C}}_{m+2k} = \nu^{\mathbb{C}}_m, \\ d_{m+8k} &= 2^{4k} d_m, \quad d^{\mathbb{C}}_{m+2k} = 2^k d^{\mathbb{C}}_m. \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

O elemento de volume exerce um papel importante na caracterização dessas representações irredutíveis. O elemento de volume em Cl_n é

$$\omega = e_1 \cdots e_n, \tag{1.4.6}$$

onde $e_1, \cdots, e_n$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, positivamente orientada, dada uma escolha de orientação em $\mathbb{R}^n$. Já para o caso complexo consideramos o elemento de volume dado por

$$\omega_{\mathbb{C}} = i^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} e_1 \cdots e_n. \tag{1.4.7}$$

Note que se n é ímpar temos que ω e $\omega_{\mathbb{C}}$ são centrais (estão contidos no centro), vale também que

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 1 \text{ se } n \equiv 3 \text{ ou } 4 \ (mod\ 4), \\ \omega^2_{\mathbb{C}} &= 1 \text{ para todo } n. \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

Assim existem as seguintes decomposições das álgebras:

$$\begin{aligned} Cl_n &= Cl_n^+ \oplus Cl_n^-, \text{ se } n \equiv 3 \text{ ou } 4 \ (mod\ 4), \\ \mathbb{C}l_n &= \mathbb{C}l_n^+ \oplus \mathbb{C}l_n^-, \text{ para todo } n, \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

onde

$$Cl_n^{\pm} = (1 \pm \omega) Cl_n \text{ e } \mathbb{C}l_n^{\pm} = (1 \pm \omega)\mathbb{C}l_n. \tag{1.4.10}$$

Proposição 34. *Seja $\rho : Cl_n \to End_{\mathbb{R}}(W)$ uma representação real irredutível onde $n = 4m+3$. Então teremos duas possibilidades*

$$\rho(\omega) = Id \text{ ou } \rho(\omega) = -Id. \tag{1.4.11}$$

Ambas as possibilidades podem ocorrer, e as representações correspondentes não são equivalentes.

O mesmo resultado vale para o caso complexo $\mathbb{C}l_n$ quando n é ímpar.

Demonstração. Como $\rho(\omega)^2 = \rho(\omega^2) = Id$, podemos decompor $W = W^+ \oplus W^-$ onde W^+ e W^- são os autoespaços de ω com autovalores $+1$ e -1 respectivamente. Como ω é central W^+ e W^- são Cl_n invariantes. Pela irredutibilidade da representação teremos $W = W^+$ ou $W = W^-$. Assim $\rho(\omega) = Id$ ou $\rho(\omega) = -Id$.

Seja $F : W \to W'$ um isomorfismo qualquer. Sejam as representações ρ_+ e ρ_- tais que $\rho_{\pm}(\omega) = \pm Id$. Então $F \circ \rho_{\pm}(\omega) \circ F^{-1} = \pm Id : W' \to W'$, de forma que as representações não são equivalentes.

Para vermos que ambas as possibilidades de representações podem acontecer, consideramos as representações $\rho_{\pm} : Cl_n \to End_{\mathbb{R}}(Cl_n^{\pm})$ dada pela multiplicação à esquerda e tomamos o fator irredutível dessas repreentações.

O caso de $\mathbb{C}l_n$ quando n é ímpar é completamente análogo. $\square$

Proposição 35. *Seja* $\rho : Cl_n \to End_{\mathbb{R}}(W)$ *uma representação real irredutível onde* $n = 4m$. *Considere a decomposição*

$$W = W^+ \oplus W^-, \tag{1.4.12}$$

onde $W^\pm = (1 \pm \rho(\omega))W$. *Então, cada um dos subespaços* W^+ *e* W^- *é invariante sob a ação da álgebra* Cl_n^0. *Sob o isomorfismo* $Cl_n^0 \simeq Cl_{n-1}$, *esses espaços correspondem às duas representações irredutíveis de* Cl_{n-1}.

O mesmo resultado é válido para o caso de $\mathbb{C}l_n$ *com* n *par.*

Demonstração. Do fato de ω comutar com todos elementos de Cl_n^0 segue que os espaços W^+ e W^- são Cl_n^0-invariantes. Sob o isomorfismo $Cl_n^0 \simeq Cl_{n-1}$, o elemento de volume $\omega' = e_1 \cdots e_{n-1}$ vai no elemento de volume $\omega \in Cl_n^0$ pois

$$(e_1 e_n) \cdots (e_{n-1} e_n) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} e_1 \cdots e_n. \tag{1.4.13}$$

Assim ω' age como Id em W^+ e age como $-Id$ em W^-. Daqui pela proposição anterior segue que essas representações de Cl_{n-1} não são equivalentes.

O caso complexo é completamente análogo usando a forma volume $\omega_{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}l_n$. $\square$

1.4.1 Representação de $\mathbb{C}l_{2n}$ no espaço de formas

Identifique $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$ munido de uma estrutura complexa J. Considere em $\mathbb{C}^n$ a métrica hermitiana usual e defina a aplicação

$$\rho_v(\varphi) = v \wedge \varphi - v \lrcorner \varphi, \ \forall v \in \mathbb{C}^n, \varphi \in \bigwedge^* \mathbb{C}^n, \tag{1.4.14}$$

onde $v \lrcorner \varphi$ é a contração por v segundo a métrica hermitiana de $\mathbb{C}^n$

$$v \lrcorner (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \langle v_i, v \rangle \, v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots v_k. \tag{1.4.15}$$

Com a identificação de $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$, obtemos o seguinte mapa $\mathbb{R}$-linear

$$\rho : \mathbb{R}^{2n} \to End_{\mathbb{C}} \left(\bigwedge^* \mathbb{C}^n \right). \tag{1.4.16}$$

Não é muito difícil verificarmos que este mapa tem a seguinte propriedade

$$\rho_v \circ \rho_v = - \|v\|^2, \tag{1.4.17}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma canônica de $\mathbb{R}^{2n}$. Assim, devido à universalidade das álgebras de Clifford, a aplicação $\rho : \mathbb{R}^{2n} \to End_{\mathbb{C}} \left(\bigwedge^* \mathbb{C}^n \right)$ se estende para um homomorfismo de álgebras sobre $\mathbb{R}$

$$\rho : Cl_{2n} \to End_{\mathbb{C}} \left(\bigwedge^* \mathbb{C}^n \right), \tag{1.4.18}$$

isto é, uma representação de Cl_{2n} em $\bigwedge^* \mathbb{C}^n$. Estendendo esta representação por linearidade sobre $\mathbb{C}$ teremos uma representação de $\mathbb{C}l_{2n}$. Como $\dim_{\mathbb{C}} \bigwedge^* \mathbb{C}^n = 2^n$ e nesse caso temos apenas uma representação irredutível, pela Tabela 1.3 essa deve ser a representação de $\mathbb{C}l_{2n}$.

1.4.2 Representação Spin

Considere uma representação irredutível de $\mathbb{C}l_n := Cl_n \otimes \mathbb{C}$

$$\bar{\rho}_n^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(S_n). \tag{1.4.19}$$

Onde S_n é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial tal que $dim_{\mathbb{C}} S_n = 2^{\frac{n}{2}}$ se n é par e $dim_{\mathbb{C}} S_n = 2^{\frac{n-1}{2}}$ se n é ímpar.

Definimos $\rho_n^{\mathbb{C}}$ a representação *Spin* complexa como sendo a restrição de $\bar{\rho}_n^{\mathbb{C}}$ dada pelas inclusões

$$\begin{aligned} Spin_n &\subset Cl_n^0 \subset Cl_n \subset \mathbb{C}l_n, \\ \rho_n^{\mathbb{C}} &: = \bar{\rho}_n^{\mathbb{C}}\Big|_{Spin_n} : Spin_n \to Aut_{\mathbb{C}}(S_n), \end{aligned} \tag{1.4.20}$$

dizemos que S_n é o espaço que carrega a representação de $Spin_n$.

Proposição 36. *Quando n é ímpar, a definição (1.4.20) de $\rho_n^{\mathbb{C}}$ é independente de qual representação irredutível de $\mathbb{C}l_n$ é usada. Além disso, quando n é ímpar, essa representação $\rho_n^{\mathbb{C}}$ é irredutível. Quando n é par, existe a seguinte decomposição*

$$\rho_n^{\mathbb{C}} = \left(\rho_n^{\mathbb{C}}\right)^+ \oplus \left(\rho_n^{\mathbb{C}}\right)^- \tag{1.4.21}$$

como a soma de duas representações complexas irredutíveis não equivalentes de $Spin_n$.

Demonstração. Se n é ímpar teremos duas representações complexas irredutíveis não equivalentes:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{n,1}^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(S_{n,1}), &\qquad \bar{\rho}_{n,2}^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(S_{n,2}), \\ \bar{\rho}_{n,1}^{\mathbb{C}}(\omega_n^{\mathbb{C}}) = Id, &\qquad \bar{\rho}_{n,2}^{\mathbb{C}}(\omega_n^{\mathbb{C}}) = -Id, \end{aligned} \tag{1.4.22}$$

as duas representações diferem pela ação do automorfismo α ($\alpha(v) = -v$, $v \in \mathbb{R}^n$), portanto são equivalentes quando restritas à $Cl_n^0 \simeq Cl_{n-1}$. Olhando na tabela 1.3 vemos que para n ímpar teremos $d_n^{\mathbb{C}} = d_{n-1}^{\mathbb{C}}$ assim a restrição

$$\bar{\rho}_{n,i}^{\mathbb{C}} : Cl_n^0 \simeq Cl_{n-1} \to End_{\mathbb{C}}(S_{n,i}), \tag{1.4.23}$$

é irredutível, lembrando que uma representação complexa de Cl_{n-1} se estende a uma representação complexa de $\mathbb{C}l_{n-1}$.

Quando n é par temos apenas uma representação complexa irredutível $\bar{\rho}_n^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(S_n)$, pela proposição 35 sabemos que a restrição de $\bar{\rho}_n^{\mathbb{C}}$ à Cl_n^0 decompõe-se em duas representações complexas irredutíveis não equivalentes $\bar{\rho}_n^{\mathbb{C}} = \left(\bar{\rho}_n^{\mathbb{C}}\right)^+ \oplus \left(\bar{\rho}_n^{\mathbb{C}}\right)^-$.

Para finalizar a demonstração devemos observar que uma representação irredutível de Cl_n^0 restringe para uma representação irredutível de $Spin_n$, pois $Spin_n$ contém uma base de Cl_n^0. □

Para simplificar a notação, quando não houver risco de confusão, denotaremos simplesmente $\bar{\rho}_n^{\mathbb{C}} = \rho_n^{\mathbb{C}} = \rho_n$.

1.5 Representação spinorial complexa dada por ideais

Caso n par

Para o caso $n = 2k$ par, pela tabela de classificação 1.2, temos o seguinte isomorfismo

$$i_{2k} : \mathbb{C}l_{2k} \to \mathbb{C}(2^k). \tag{1.5.1}$$

Considere os elementos $\mathrm{f}_i \in \mathbb{C}l_{2k}, i = 1, \cdots, 2^k$ tais que

$$i_{2k}(\mathrm{f}_i) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}. \tag{1.5.2}$$

Os elementos f_i são idempotentes primitivos ortogonais entre si: $\mathrm{f}_i^2 = \mathrm{f}_i, \forall i$ e $\mathrm{f}_i\mathrm{f}_j = 0, i \neq j$. Considerando o isomorfismo com a álgebra de matrizes fica óbvio que os subconjuntos

$$I_i = \mathbb{C}l_{2k}\mathrm{f}_i = \{a\mathrm{f}_i : a \in \mathbb{C}l_{2k}\}, i = 1, \cdots, 2^k, \tag{1.5.3}$$

são ideais minimais à esquerda de $\mathbb{C}l_{2k}$ com $\dim_{\mathbb{C}} I_i = 2^k$, $I_i \cap I_j = \varnothing, i \neq j$

$$i_{2k}(I_i) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{2^k} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{onde } a_j \in \mathbb{C}, j = 1, \cdots, 2^k, \tag{1.5.4}$$

e também fica claro que $\mathrm{f}_i I_i \mathrm{f}_i \simeq \mathbb{C}\mathrm{f}_i \simeq \mathbb{C}$. Da identidade $1 = \mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_{2^k}$ segue que a álgebra $\mathbb{C}l_{2k}$ se decompõe como a soma dos ideais minimais

$$\mathbb{C}l_{2k} = \mathbb{C}l_{2k}\mathrm{f}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}l_{2k}\mathrm{f}_{2^k} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_{2^k}. \tag{1.5.5}$$

Considere a representação regular à esquerda nos ideais I_i

$$\begin{aligned} \rho_i : \mathbb{C}l_{2k} \to End_{\mathbb{C}}(I_i) \quad &, \quad i = 1, \cdots, 2^k; \\ a \mapsto \rho_i(a) : I_i \quad &\to \quad I_i \\ \rho_i(a)\nu \quad &= \quad a\nu, \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

pela tabela 1.3 segue que as ρ_i são irredutíveis e equivalentes.

Caso n ímpar

Para o caso $n = 2k+1$ ímpar, pela tabela de classificação 1.2, temos o seguinte isomorfismo

$$i_{2k+1} : \mathbb{C}l_{2k+1} \to \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k). \tag{1.5.7}$$

Considere os elementos $\mathrm{f}_{i;1}, \mathrm{f}_{i;2} \in \mathbb{C}l_{2k}, i = 1, \cdots, 2^k$ tais que

$$
\begin{aligned}
i_{2k+1}(\mathrm{f}_{i;1}) &= \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \\
i_{2k+1}(\mathrm{f}_{i;2}) &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.
\end{aligned}
\tag{1.5.8}
$$

Os elementos $\mathrm{f}_{i;l}, i = 1, \cdots, 2^k; l = 0, 1$ são idempotentes primitivos ortogonais entre si:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{f}_{i;l}^2 &= \mathrm{f}_{i,l}, \forall i, l, \\
\mathrm{f}_{i;1}\mathrm{f}_{j;2} &= 0, \forall i, j \\
\mathrm{f}_{i;l}\mathrm{f}_{j;l} &= 0, i \neq j, l = 0, 1.
\end{aligned}
\tag{1.5.9}
$$

Considerando o isomorfismo com a álgebra de matrizes fica óbvio que os subconjuntos

$$
I_{i;l} = \mathbb{C}l_{2k+1}\mathrm{f}_{i;l} = \{a\mathrm{f}_{i;l} : a \in \mathbb{C}l_{2k+1}\}, i = 1, \cdots, 2^k; l = 0, 1 \tag{1.5.10}
$$

são ideais minimais à esquerda de $\mathbb{C}l_{2k+1}$ com $\dim_{\mathbb{C}} I_{i;l} = 2^k$, $I_{i;1} \cap I_{j;2} = \varnothing, \forall i, j,$ $I_{i;1} \cap I_{j;2} = \varnothing$, $i \neq j, l = 0, 1$,

$$
\begin{aligned}
i_{2k+1}(I_{i;1}) &= \left\{ \begin{array}{c} \quad\quad i \quad\quad \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{2^k} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{array}{c} a_j \in \mathbb{C}, \\ j = 1, \cdots, 2^k \end{array} \right\}, \\
i_{2k+1}(I_{i;2}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{array}{c} \quad\quad i \quad\quad \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{2^k} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} a_j \in \mathbb{C}, \\ j = 1, \cdots, 2^k \end{array} \right\}
\end{aligned}
\tag{1.5.11}
$$

Também fica claro que $\mathrm{f}_{i;l} I_i \mathrm{f}_{i;l} \simeq \mathbb{C}\mathrm{f}_{i;l} \simeq \mathbb{C}$. Da identidade

$$
1 = \left(\mathrm{f}_{1;1} + \cdots + \mathrm{f}_{2^k;1}\right) + \left(\mathrm{f}_{1;2} + \cdots + \mathrm{f}_{2^k;2}\right), \tag{1.5.12}
$$

segue que a álgebra $\mathbb{C}l_{2k+1}$ se decompõe como a soma dos ideais minimais

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{C}l_{2k+1} \\
= & \left(\mathbb{C}l_{2k+1}\mathrm{f}_{1;1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}l_{2k+1}\mathrm{f}_{2^k;1}\right) \oplus \left(\mathbb{C}l_{2k+1}\mathrm{f}_{1;2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}l_{2k+1}\mathrm{f}_{2^k;2}\right) \\
= & \left(I_{1;1} \oplus \cdots \oplus I_{2^k;1}\right) \oplus \left(I_{1;2} \oplus \cdots \oplus I_{2^k;2}\right)
\end{aligned}
\tag{1.5.13}
$$

Considere a representação regular à esquerda nos ideais $I_{i;l}$

$$\begin{aligned} \rho_{i;l} : \mathbb{C}l_{2k} &\to End_{\mathbb{C}}(I_{i;l}), i = 1, \cdots, 2^k, l = 0, 1; \\ a &\mapsto \rho_{i;l}(a) : I_{i;l} \to I_{i;l} \\ &\quad \rho_{i;l}(a)\nu = a\nu \end{aligned} \tag{1.5.14}$$

pela tabela 1.3 sabemos que temos duas classes de representações irredutíveis nesse caso. Da teoria de representação de matrizes não é difícil vermos que essas duas classes são

$$\begin{aligned} \rho_{1;1} &\simeq \cdots \simeq \rho_{2^k;1}, \\ \rho_{1;2} &\simeq \cdots \simeq \rho_{2^k;2}. \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

1.6 Soma de Módulos de Spinores

Vamos seguir a construção apresentada em [2]. Considere S um espaço vetorial orientado de dimensão n com base ortonormal orientada $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Denotamos a álgebra de Clifford complexa de S por $\mathbb{C}l(S)$.

Se n é par, $\mathbb{C}l(S)$ tem apenas uma representação irredutível, $\rho_S : \mathbb{C}l(S) \to End_{\mathbb{C}}(S_n)$, cujo módulo irredutível, denotado por S_n, tem dimensão $\dim_{\mathbb{C}} S_n = 2^{\frac{n}{2}}$. Chamaremos S_n de módulo dos spinores. À ação de $\mathbb{C}l(S)$ em S_n dada pela representação ρ_S daremos o nome de multiplicação de Clifford. A forma de volume complexa $\rho_S(\omega_{\mathbb{C}}) = \rho_S(i^{\frac{n}{2}} e_1 \cdots e_n)$ é tal que $\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1$, de forma que o módulo dos spinores decompõe-se em $S_n = S_n^+ \oplus S_n^-$ onde $\omega_{\mathbb{C}}$ age como $+Id$ em S_n^+ e $-Id$ em S_n^-. A essa decomposição damos o nome de spinores pares e ímpares.

Se n é ímpar, $\mathbb{C}l(S)$ tem duas representações irredutíveis $\rho_{S,j} : \mathbb{C}l(S) \to End_{\mathbb{C}}(S_n^j)$ cujos módulos irredutíveis denotados por S_n^j tem dimensão $\dim_{\mathbb{C}} S_n^j = 2^{\frac{n-1}{2}}$, $j = 0, 1$. Esses dois módulos de spinores podem ser distinguidos pela ação do elemento de volume complexo $\rho_{S,0}(\omega_{\mathbb{C}}) = \rho_{S,0}(i^{\frac{n+1}{2}} e_1 \cdots e_n) = Id$ e $\rho_{S,1}(\omega_{\mathbb{C}}) = \rho_{S,1}(i^{\frac{n+1}{2}} e_1 \cdots e_n) = -Id$. A relação de $\rho_{S,0}$ com $\rho_{S,1}$ é dada pelo isomorfismo $\Phi : S_n^0 \to S_n^1$ tal que $\Phi \circ \rho_{S,0}(X) = -\rho_{S,1}(X) \circ \Phi$, para todo $X \in E$.

Agora considere S e R dois espaços vetoriais euclidianos orientados, $\dim S = n$ e $\dim R = m$. Vamos construir os módulos de spinores de $S \oplus R$ a partir dos módulos de spinores de S e R.

Caso 1: n **e** m **são pares**

Primeiramente considere $\Sigma_{n+m} := S_n \otimes R_m$ e defina

$$\begin{aligned} \rho &: S \oplus R \to End_{\mathbb{C}}(\Sigma_{n+m}), \\ \rho(X)(\sigma \otimes \tau) &: = (\rho_S(X)\sigma) \otimes \tau, \\ \rho(Y)(\sigma \otimes \tau) &: = (-1)^{\deg \sigma} \sigma \otimes (\rho_R(Y)\tau), \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

onde $X \in S, Y \in R, \sigma \in S_n, \tau \in R_m$ e $\deg \sigma$ é tal que $\rho_E(\omega_{\mathbb{C}})\sigma = (-1)^{\deg \sigma}\sigma$. Não é difícil ver que

$$\rho(X + Y) \circ \rho(X + Y)(\sigma \otimes \tau) = -|X + Y|^2 \sigma \otimes \tau, \tag{1.6.2}$$

de forma que ρ se estende para um homomorfismo $\rho : \mathbb{C}l(S \oplus R) \to End_{\mathbb{C}}(\Sigma_{n+m})$. Vemos, pela tabela 1.3, que nesse caso temos apenas uma classe de representação irredutível, além disso Σ_{n+m} é um $\mathbb{C}l(S \oplus R)$-módulo de dimensão $2^{\frac{(n+m)}{2}}$, de forma que a representação ρ :

$\mathbb{C}l(S\oplus R)\to End_{\mathbb{C}}(\Sigma_{n+m})$ deve ser equivalente à $\rho_{S\oplus R}:\mathbb{C}l(S\oplus R)\to End_{\mathbb{C}}(S\oplus R)_{n+m}$. Ademais vale a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned}(S\oplus R)^{+}_{n+m} &= (S^{+}_{n}\otimes R^{+}_{m})\oplus(S^{-}_{n}\otimes R^{-}_{m}),\\ (S\oplus R)^{-}_{n+m} &= (S^{+}_{n}\otimes R^{-}_{m})\oplus(S^{-}_{n}\otimes R^{+}_{m}).\end{aligned}\tag{1.6.3}$$

Caso 2: n é par m é ímpar
Primeiramente considere $\Sigma^{j}:=S_{n}\otimes R^{j}_{m}$, $j=0,1$ e defina

$$\begin{aligned}\rho_j &: S\oplus R\to End_{\mathbb{C}}(\Sigma^{j}),\\ \rho_j(X)(\sigma\otimes\tau) &: =(\rho_S(X)\sigma)\otimes\tau,\\ \rho_j(Y)(\sigma\otimes\tau) &: =(-1)^{\deg\sigma}\sigma\otimes(\rho_{R,j}(Y)\tau).\end{aligned}\tag{1.6.4}$$

Como no caso 1 novamente teremos que os Σ^{j} são $\mathbb{C}l(S\oplus R)$-módulos tais que $dim_{\mathbb{C}}\Sigma^{i}=2^{\frac{n+m-1}{2}}$. Não é difícil vermos que o elemento de volume complexo de $\mathbb{C}l(S\oplus R)$ age em Σ^{j} como $(-1)^{j}$. Assim, novamente usando a tabela 1.3 e com o mesmo argumento na dimensão do módulo, segue que as representações $\rho_j:\mathbb{C}l(S\oplus R)\to End_{\mathbb{C}}(\Sigma^{j})$ são equivalentes à $\rho_{S\oplus R,j}:\mathbb{C}l(S\oplus R)\to End_{\mathbb{C}}((S\oplus R)^{j}_{(n+m)})$.
Caso 3: n é ímpar m é par
Primeiramente considere $\Sigma^{j}:=S^{j}_{n}\otimes R_{m}$, $j=0,1$ e defina

$$\begin{aligned}\rho_j &: S\oplus R\to End_{\mathbb{C}}(\Sigma^{j}),\\ \rho_j(X)(\sigma\otimes\tau) &: =(-1)^{\deg\tau}(\rho_{S,j}(X)\sigma)\otimes\tau,\\ \rho_j(Y)(\sigma\otimes\tau) &: =\sigma\otimes(\rho_R(Y)\tau),\end{aligned}\tag{1.6.5}$$

Como no caso 1 novamente teremos que os Σ^{j} são $\mathbb{C}l(S\oplus R)$-módulos tais que $dim_{\mathbb{C}}\Sigma^{i}=2^{\frac{n+m-1}{2}}$. Não é difícil ver que o elemento de volume complexo de $\mathbb{C}l(S\oplus R)$ age em Σ^{j} como $(-1)^{j}$. Similarmente ao caso anterior as representações $\rho_j:\mathbb{C}l(S\oplus R)\to End_{\mathbb{C}}(\Sigma^{j})$ são equivalentes à $\rho_{S\oplus R,j}:\mathbb{C}l(S\oplus R)\to End_{\mathbb{C}}((S\oplus R)^{j}_{(n+m)})$.
Caso 4: n é ímpar m é ímpar
Primeiramente considere

$$\begin{aligned}\Sigma^{+} &: =S^{0}_{n}\otimes R^{0}_{m},\\ \Sigma^{-} &: =S^{0}_{n}\otimes R^{1}_{m},\\ \Sigma &: =\Sigma^{+}\oplus\Sigma^{-}.\end{aligned}\tag{1.6.6}$$

Aqui vamos usar o isomorfismo entre espaços vetoriais $\Phi_R:R^{0}\to R^{1}$ tal que $\Phi_R\circ\rho_{R,0}(Y)=-\rho_{R,1}(Y)\circ\Phi_R$ para todo $Y\in R$. Com respeito à decomposição $\Sigma=\Sigma^{+}\oplus\Sigma^{-}$ defina

$$\begin{aligned}\rho &: S\oplus R\to End_{\mathbb{C}}(\Sigma),\\ \rho(X) &: =i\begin{pmatrix}0 & \rho_{S,0}(X)\otimes\Phi_R^{-1}\\ -\rho_{S,0}(X)\otimes\Phi_R & 0\end{pmatrix},\\ \rho(Y) &: =\begin{pmatrix}0 & Id\otimes(\Phi_R^{-1}\circ\rho_{R,1}(Y))\\ -Id\otimes(\Phi_R\circ\rho_{R,0}(Y)) & 0\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{1.6.7}$$

e note que

$$\rho(X+Y)\circ\rho(X+Y)(\sigma\otimes\tau)=-\left|X+Y\right|^{2}\sigma\otimes\tau,\tag{1.6.8}$$

de forma que ρ se estende para um homomorfismo $\rho : \mathbb{C}l(S\oplus R) \to End_{\mathbb{C}}(\Sigma)$. Σ é um $\mathbb{C}l(S\oplus R)$-módulo tal que $dim_{\mathbb{C}}\Sigma = 2^{\frac{n+m}{2}}$. O elemento de volume complexo de $\mathbb{C}l(S \oplus R)$ age em Σ^+ como $+1$ e em Σ^- como -1.

Com o mesmo argumento dos casos anteriores, concluímos que a representação $\rho : \mathbb{C}l(S \oplus R) \to End_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ é equivalente à $\rho_{S\oplus R} : \mathbb{C}l(S \oplus R) \to End_{\mathbb{C}}((S \oplus R)_{n+m})$ e $\Sigma := \Sigma^+ \oplus \Sigma^-$ é sua decomposição usual em spinores pares e ímpares.

1.7 Álgebra de Lie de Spin

Vamos agora descrever a álgebra de Lie do grupo $Spin_n$. Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{R}$ associativa e seja $A^* \subset A$ o grupo de seus elementos inversíveis. A^* é um subconjunto aberto de A e também um grupo de Lie. Sua álgebra de Lie $\mathfrak{a}^*$ é identificada com $T_1A^* \simeq A$. O comutador de dois elementos $a_1, a_2 \in A = \mathfrak{a}^*$ é dado por $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$, com mapa exponencial dado pela série de potências da função exponencial

$$\begin{aligned} \exp \quad &: \quad \mathfrak{a}^* = A \to A^*, \\ \exp(a) \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}. \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Para descrever a álgebra de Lie $\mathfrak{spin}(n)$, vamos determinar o espaço tangente $T_1(Spin(n))$. Seja $\gamma(t) = \gamma_1(t)\cdots\gamma_{2k}(t)$ um caminho em $Spin_n$, $\gamma(t)$ é o produto de Clifford de vetores $\gamma_i(t) \in \mathbb{R}^n \subset Cl_n$ tais que $\|\gamma_i(t)\| = 1$ e $\gamma(0) = 1$, $i = 1, \cdots, 2k$. O vetor tangente à γ em $t = 0$ é

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = \frac{d\gamma_1}{dt}(0)\gamma_2(0)\cdots\gamma_{2k}(0) + \gamma_1(t)\cdots\frac{d\gamma_{2k}}{dt}(t) \tag{1.7.2}$$

Seja $\mathfrak{m}_2 \subset Cl_n$ o subespaço de Cl_n gerado pelo produto de Clifford e_ke_l, $1 \le k < l \le n$. Como $\gamma(0) = \gamma_1(0)\cdots\gamma_{2k}(0) = 1$, $\gamma_{i+1}(0)\cdots\gamma_{2k}(0) = \gamma_i^{-1}(0)\cdots\gamma_1^{-1}(0)$, teremos

$$\gamma_1(0)\cdots\frac{d\gamma_i}{dt}(0)\cdots\gamma_{2k}(0) = \gamma_1(0)\cdots\gamma_{i-1}(0)\frac{d\gamma_i}{dt}(0)\gamma_i^{-1}(0)\cdots\gamma_1^{-1}(0) \tag{1.7.3}$$

$$= -\gamma_1(0)\cdots\gamma_{i-1}(0)\frac{d\gamma_i}{dt}(0)\gamma_{i-1}^{-1}(0)\cdots\gamma_1^{-1}(0) \tag{1.7.4}$$

$$= -\left\{\gamma_1(0)\cdots\gamma_{i-1}(0)\frac{d\gamma_i}{dt}(0)\gamma_{i-1}^{-1}(0)\cdots\gamma_1^{-1}(0)\right\}\cdot \tag{1.7.5}$$

$$\left\{\gamma_1(0)\cdots\gamma_{i-1}(0)\gamma_i(0)\gamma_{i-1}^{-1}(0)\cdots\gamma_1^{-1}(0)\right\} \tag{1.7.6}$$

Como $\|\gamma_i(t)\| = 1$, temos que $\frac{d\gamma_i}{dt}(0)$ e $\gamma_i(0)$ são ortogonais. Os vetores

$$\left\{\gamma_1(0)\cdots\gamma_{i-1}(0)\frac{d\gamma_i}{dt}(0)\gamma_{i-1}^{-1}(0)\cdots\gamma_1^{-1}(0)\right\} \text{ e } \left\{\gamma_1(0)\cdots\gamma_{i-1}(0)\gamma_i(0)\gamma_{i-1}^{-1}(0)\cdots\gamma_1^{-1}(0)\right\} \tag{1.7.7}$$

são perpendiculares, portanto cada termo $\gamma_1(0)\cdots\frac{d\gamma_i}{dt}(0)\cdots\gamma_{2k}(0)$ da Eq.(1.7.2) pertence à $\mathfrak{m}_2$.

Com isso conseguimos a seguinte proposição:

Proposição 37. *1. O subespaço vetorial* $\mathfrak{m}_2 \subset Cl_n$

$$\mathfrak{m}_2 = span\{e_ke_l, 1 \le k < l \le n\} \subset Cl_n, \tag{1.7.8}$$

com comutador definido por $[x, y] := xy - yx$ *é a álgebra de Lie do grupo* $Spin_n \subset Cl_n$.

2. A aplicação exponencial é dada por

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}. \tag{1.7.9}$$

3. Se $\rho : Cl_n \to End(V)$ *é uma representação (real ou complexa) de* Cl_n *cuja restrição é* $\rho_{Spin_n} : Spin_n \to Aut(V)$, *então sua diferencial*

$$(\rho_{Spin_n})_* : \mathfrak{spin}(n) = \mathfrak{m}_2 \to End(V) \tag{1.7.10}$$

é dada por $\left(\rho|_{Spin_n}\right)_* = \rho|_{\mathfrak{m}_2}$.

Demonstração. Com os comentários acima mostramos que $\mathfrak{spin}(n) \subset \mathfrak{m}_2$. Do fato que $dim_{\mathbb{R}}(Spin_n) = dim_{\mathbb{R}}(SO_n) = \frac{n(n-1)}{2}$ e também de $dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_2) = \frac{n(n-1)}{2}$ concluímos 1) e 2). E 3) segue dos seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m}_2 \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "exp"] & End(V) \arrow[d, "exp"] \\ Spin_n \arrow[r, "\rho"] & Aut(V) \end{tikzcd} \tag{1.7.11}$$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m}_2 \arrow[r, "\rho_*"] \arrow[d, "exp"] & End(V) \arrow[d, "exp"] \\ Spin_n \arrow[r, "\rho"] & Aut(V) \end{tikzcd} \tag{1.7.12}$$

□

Considere o recobrimento universal $\lambda : Spin_n \to SO_n$ e seu diferencial $\lambda_* : \mathfrak{spin}(n) \to \mathfrak{so}(n)$. Sabemos que $\mathfrak{so}(n)$ é o conjunto das matrizes anti-simétricas, uma base para esse espaço é formada pelas matrizes E_{ij} $(i < j)$ dadas por

$$E_{ij} := \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & -1 & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & 1 & & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array}. \tag{1.7.13}$$

Considere o caminho $\gamma(t) = \cos(t) + \sin(t)e_ie_j = -(\cos(\frac{t}{2})e_i + \sin(\frac{t}{2})e_j)(\cos(\frac{t}{2})e_i - \sin(\frac{t}{2})e_j)$ tal que $\frac{d\gamma}{dt}(0) = e_ie_j$. Além disso

$$\begin{aligned} \lambda(\gamma(t))e_k &= e_k, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \lambda(\gamma(t))e_k = 0 \quad k \neq i, j, \\ \lambda(\gamma(t))e_i &= \cos(2t)e_i + \sin(2t)e_j, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \lambda(\gamma(t))e_i = 2e_j, \\ \lambda(\gamma(t))e_j &= \cos(2t)e_j - \sin(2t)e_i, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \lambda(\gamma(t))e_j = -2e_i, \end{aligned} \tag{1.7.14}$$

portanto $\lambda_*(e_ie_j) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \lambda(\gamma(t)) = 2E_{ij}$.

Capítulo 2

Estruturas Spin e Operador de Dirac

Esse capítulo baseia-se nas seguintes referências clássicas [19, 11, 21, 23, 26, 27].

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial de dimensão n, orientado e munido de uma métrica Riemanniana. Seja $P_{SO(E)} \xrightarrow{\pi} M$ o fibrado principal dos referenciais ortonormais orientados a ele associado.

Definição 38. *Suponha que $n \geq 3$. Se λ é o recobrimento duplo de SO_n (dado pelo representação adjunta), então uma* ***estrutura spin*** *no fibrado vetorial $\pi : E \to M$ é um fibrado $Spin_n$-principal $P_{Spin_n}(E)$, juntamente com um mapa de recobrimento de duas folhas $\Lambda : P_{Spin_n}(E) \to P_{SO_n}(E)$, para os quais o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & Spin_n \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[d, hook] & & SO_n \arrow[d, hook] \\
\mathbb{Z}_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & P_{Spin_n}(E) \arrow[rr, "\Lambda"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & P_{SO_n}(E) \arrow[dl, "\pi"] \\
 & & M &
\end{tikzcd} \tag{2.0.1}$$

comuta.

Note também que as restrições de Λ às fibras correspondem a representação adjunta torcida. De fato, pois se fixarmos um de seus pontos, digamos $p_0 \in \pi'^{-1}(m)$, para serir de identidade e fazer a fibra $\pi'^{-1}(m)$ um grupo isomorfo a $Spin_n$, fixamos também uma identidade $\Lambda(p_0)$ nas fibras $\Lambda(\pi'^{-1}(m))$. Neste caso,

$$\Lambda(g) = \Lambda(p_0 \cdot g) = \Lambda(p_0) \cdot \lambda(g) = \lambda(g), \tag{2.0.2}$$

para todo $g \in Spin_n$

Reciprocamente, suponha que $\Lambda : P \to P_{SO_n}(E)$ é um recobrimento de duas folhas, que é não trivial nas fibras de M.

Tomando $\pi' = \pi \circ \Lambda$ fazemos de P um fibrado sobre M, pois Λ é um homeomorfismo local. Para torná-lo um fibrado principal com grupo de estrutura $Spin_n$, nós precisamos levantar a ação de SO_n sobre $P_{SO_n}(E)$ para uma ação compatível de $Spin_n$ sobre P. Para isso observe que

$$P_{SO_n}(E) \times Spin_n \xrightarrow{(id,\lambda)} P_{SO_n}(E) \times SO_n \to P_{SO_n}(E) \tag{2.0.3}$$

fornece uma aplicação $Spin_n \overset{\xi_1}{\to} P_{SO_n}(E)$, dada por $g \mapsto p \cdot g := p \cdot \lambda(g)$, para um ponto $p \in P_{SO_n}(E)$ fixado.

Como Λ é um mapa de recobrimento por hipótese, podemos aplicar o critério de levantamento para espaços de recobrimento e assim obter um levantamento $\tilde{\xi_1}$ de ξ_1 para P, se

$$\xi_{1*}(\pi_1(Spin_n)) \subset \Lambda_*(\pi_1(P_{Spin_n}(E))) \tag{2.0.4}$$

$$\begin{tikzcd} & P_{Spin_n}(E) \arrow[d, "\Lambda"] \\ Spin_n \arrow[ur, dotted, "\tilde{\xi_1}"] \arrow[r, "\xi_1"'] & P_{SO_n}(E) \end{tikzcd} \tag{2.0.5}$$

Este é o caso, porque $Spin_n$ é simplesmente conexo para $n \geq 3$ e $Spin_2 = \{a + be_1e_2 \in \mathcal{C}\ell_2\} \simeq S^1 \simeq SO_2$ satisfaz o critério de levantamento mesmo não sendo um espaço simplesmente conexo. Concluímos daí o seguinte ([19] pp.81):

Teorema 39. *Existe uma correspondência biunívoca entre as estruturas spin no fibrado vetorial E e os recobrimentos de duas folhas de $P_{SO_n}(E)$ não-triviais nas fibras de π.*

2.1 Existência de Estrutura Spin

A pergunta natural agora é quando existe uma estrutura *Spin* em um fibrado vetorial E de dimensão n?

Vamos seguir nessa seção a construção de [26]. Note que a existência de uma estrutura spin

$$\Lambda : P_{Spin_n}(E) \to P_{SO_n}(E), \tag{2.1.1}$$

em E pode ser definida por funções de transição $\tilde{t}_{ij}(x) \in \mathrm{Spin}_n$ tais que

$$\lambda(\tilde{t}_{ij}) = t_{ij},\ \tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = \mathrm{Id}, \tilde{t}_{ii} = \mathrm{Id}. \tag{2.1.2}$$

O interessante é notarmos que nem todo fibrado E admite uma estrutura spin. Esse fato é medido pela segunda classe de Stiefel-Whitney que toma valores no segundo grupo de cohomologia de M com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ denotado por $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$. Como temos apenas uma teoria de cohomologia, módulo isomorfismo [[34] pp.184], veremos como a classe de Stiefel-Whitney pode ser adequadamente entendida no segundo grupo de cohomologia de Čech $\check{H}^2(M, \mathbb{Z}_2)$.

2.1.1 Grupos de Cohomologia de Čech

A cohomologia de Čech é usualmente definida como uma cohomologia com coeficientes em feixes, aqui vamos considerar o caso do feixe constante $\mathbb{Z}_2$.

Seja $\mathbb{Z}_2$ o grupo multiplicativo $\{-1, +1\}$. Seja $U_\Lambda = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ uma cobertura aberta de M, uma *r-cocadeia de Čech* é uma função

$$f : \underbrace{\Lambda \times \cdots \times \Lambda}_{(r+1)\ times} \to \mathbb{Z}_2, \tag{2.1.3}$$

$f(i_0, i_1, \ldots, i_r) \in \mathbb{Z}_2$, onde $i_0, i_1, \ldots, i_r \in \Lambda$ são tais que $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_r} \neq \emptyset$ e f é simétrica sob uma permutação P,

$$f(i_{P(0)}, i_{P(1)}, \ldots, i_{P(r)}) = f(i_0, i_1, \ldots, i_r). \tag{2.1.4}$$

Seja $C^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ o grupo multiplicativo das r-cocadeias de Čech, com a multiicação dada pela composição. Definimos o operador de cobordo $\delta : C^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2) \to C^{r+1}(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ por

$$\delta f(i_0, \ldots, i_{r+1}) = \prod_{j=0}^{r+1} f(i_0, \ldots, \check{i}_j, \ldots, i_{r+1}), \tag{2.1.5}$$

onde a variável com $^\vee$ é omitida. Note que δ é nilpotente

$$\delta^2 f(i_0, \ldots, i_{r+2}) = \prod_{\substack{j,k=0 \\ j \neq k}}^{r+2} f(i_0, \ldots, \check{i}_j, \ldots, \check{i}_k, \ldots, i_{r+2}) = 1, \tag{2.1.6}$$

pois -1 aparece um número par de vezes nessa multiplicação (por exemplo, se tivermos que $f(i_0, \ldots, \check{i}_j, \ldots, \check{i}_k, \ldots, i_{r+2}) = -1$, teremos $f(i_0, \ldots, \check{i}_k, \ldots, \check{i}_j, \ldots, i_{r+2}) = -1$). Assim, se f é uma r-cocadeia de Čech

$$\delta^2 f = 1. \tag{2.1.7}$$

O grupo dos r-cociclos $Z^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ e o grupo dos r-cobordos $B^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ são definidos por

$$\begin{aligned} Z^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2) &= \{f \in C^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2); \delta f = 1\}, \\ B^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2) &= \{f \in C^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2); \exists \tilde{f} \in C^{r-1}(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2), f = \delta \tilde{f}\}. \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Agora definimos o r-ésimo grupo de cohomologia de Čech subordinado à cobertura $U_\Lambda = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ por

$$H^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2) = \ker \delta_r / Im \delta_{r-1} = Z^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2)/B^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2). \tag{2.1.9}$$

A cohomologia de Čech de M é definida considerando refinamentos das coberturas abertas. Se V_Γ é um refinamento de U_Λ existe um mapa induzido nas cohomologias $H^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2) \to H^r(V_\Gamma, \mathbb{Z}_2)$. As coberturas abertas de M formam um conjunto dirijido sob refinamentos e os mapas induzidos nas cohomologias nos dão sistemas diretos de de grupos abelianos. Os grupos de cohomologia de Čech de M com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ são definidos como o limite direto desses sistemas:

$$H^r(M, \mathbb{Z}_2) := \varinjlim_{U_\Lambda} H^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2). \tag{2.1.10}$$

2.1.2 Classes de Stiefel-Whitney

Seja $U_\Gamma = \{U_i : i \in \Gamma\}$, onde $(U_i, \varphi_i)_{i \in \Gamma}$ é uma cobertura por cartas locais de M, tal que a intersecção de qualquer número de cartas ou é vazia ou um aberto contrátil. Chamaremos aqui essa tal cobertura de cobertura acíclica, para variedades Riemannianas essa cobertura sempre existe, basta considerar uma cobertura por vizinhanças completamente normais, de forma que qualquer interseção de elementos da cobertura será geodesicamente convexa. O teorema de Leray ([12] pág.40) nos garante que $H^r(U_\Gamma, \mathbb{Z}_2) \cong H^r(M, \mathbb{Z}_2)$, assim não precisamos calcular o limite direto sobre todas as coberturas; quando estamos numa cobertura acíclica já estamos nesse limite. A classe de *Stiefel-Whitney* w_r é uma classe característica que toma valores em $H^r(M,\mathbb{Z}_2)$.

Seja $E \to M$ um fibrado vetorial munido de uma métrica Riemanniana sobre M com grupo de estrutura O_n. Considere $t_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{O}_n$ as funções de transição do fibrado, seja $\{e_{i\alpha}\}_{\alpha=1}^n \subset P_{O(n)}(E)$ um referencial ortonormal sobre U_i, temos $e_{i\alpha} = t_{ij}e_{j\alpha}$, definimos a 1-cocadeia de Čech $f(i,j)$ por

$$f(i,j) := \det(t_{ij}) = \pm 1. \tag{2.1.11}$$

Note que realmente temos um elemento de $C^1(M,\mathbb{Z}_2)$ pois $f(i,j) = f(j,i)$. Da condição de cociclo $t_{ij}t_{jk}t_{ki} = \mathrm{Id}$, temos

$$\delta f(i,j,k) = \det(t_{ij})\det(t_{jk})\det(t_{ki}) = \det(t_{ij}t_{jk}t_{ki}) = 1. \tag{2.1.12}$$

Assim $f \in Z^1(M,\mathbb{Z}_2)$ e portanto define um elemento $[f] \in H^1(M,\mathbb{Z}_2)$. Note que este elemento é independente do referencial local escolhido. Seja $\{\bar{e}_{i\alpha}\}$ outro referencial em U_i tal que $\bar{e}_{i\alpha} = h_i e_{i\alpha}$, tal que $h_i \in O_n$. De $\bar{e}_{i\alpha} = \bar{t}_{ij}\bar{e}_{j\alpha}$, temos $\bar{t}_{ij} = h_i t_{ij} h_j^{-1}$. Se definirmos a 0-cocadeia f_0 por $f_0(i) := \det h_i$, teremos

$$\begin{aligned}\bar{f}(i,j) = \det(h_i t_{ij} h_j^{-1}) &= \det(h_i)\det(h_j)^{-1}\det(t_{ij}) = \\ &= \det(h_i)\det(h_j)\det(t_{ij}) = \delta f_0(i,j) f(i,j).\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Portanto $[f] = [\bar{f}]$. Esse elemento $w_1(E) := [f] \in H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ é chamado a *primeira classe de Stiefel-Whitney de E.*

Proposição 40. *Seja $E \to M$ é um fibrado vetorial munido de uma métrica Riemanniana sobre M. E é orientável se e somente se $w_1(E)$ é trivial.*

Demonstração. Se E é orientável, o grupo de estrutura pode ser reduzido para SO_n e $f(i,j) := \det(t_{ij}) = 1$, daqui $w_1(E) = 1 \in \mathbb{Z}_2$.

Reciprocamente, suponha que $w_1(E)$ é trivial, teremos $H^1(M,\mathbb{Z}_2) \ni [f] = 1 \Rightarrow f \in B^1(M,\mathbb{Z}_2)$, assim

$$f(i,j) = \delta f_1(i,j) = f_1(i)f_1(j). \tag{2.1.14}$$

Como $f_0(i) \in \mathbb{Z}_2$, podemos sempre escolher $h_i \in O_n$ tal que $\det h_i = f_0(i)$ para cada i. Defina novas funções de transição por $t'_{ij} := t_{ij}h_i h_j$. Assim

$$\det(t'_{ij}) = \det(t_{ij}h_i h_j) = \det(t_{ij})\det(h_i)\det(h_j) = f(i,j)f_1(i)f_1(j) = f(i,j)f(i,j) = +1. \tag{2.1.15}$$

Portanto E é orientável. □

Essa proposição nos diz que a primeira classe de Stiefel-Whitney é uma obstução à orientabilidade. Seja agora então $E \to M$ um fibrado vetorial *orientado* munido de uma métrica Riemanniana sobre M. Para as funções de transição $t_{ij} \in SO_n$, sejam $\tilde{t}_{ij} \in Spin_n$ tais que

$$\lambda(\tilde{t}_{ij}) = t_{ij}, \tilde{t}_{ji} = \tilde{t}_{ij}^{-1}, \tag{2.1.16}$$

onde $\lambda : \mathrm{Spin}_{p,q}(E) \to \mathrm{SO}_{p,q}(E)$ é o mapa de recobrimento $2:1$, note que podemos escolher $\lambda(\tilde{t}_{ij}) = t_{ij}$ ou $\lambda(-\tilde{t}_{ij}) = t_{ij}$. Esse levantamento sempre existe localmente, pois estamos com cobertura acíclica. Note que

$$\lambda(\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki}) = t_{ij}t_{jk}t_{ki} = \mathrm{Id}, \tag{2.1.17}$$

teremos $\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} \in \ker\lambda = \{\pm \mathrm{Id}\}$. Para $\tilde{t}_{ij}$ definir um fibrado $P_{Spin_{p,q}}(M)$ sobre M, eles precisam satisfazer a condição de cociclo

$$\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = \mathrm{Id}. \tag{2.1.18}$$

Defina a 2-cocadeia de Čech $f : U_i \cap U_j \cap U_k \to \mathbb{Z}_2$ por

$$\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = f(i,j,k)\mathrm{Id}. \tag{2.1.19}$$

Perceba que f é simétrica e fechada ($\delta f = 1$), assim f define um elemento $w_2(M) = [f] \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ chamado de segunda classe de Stiefel-Whitney. Com algum trabalho vemos que $[f]$ independe da escolha do referencial local e da escolha de $\tilde{t}_{ij}$ ou -$\tilde{t}_{ij}$. Note também que podemos fazer essa mesma construção para $\mathrm{SO}^e_{p,q}$, considerando o homomorfismo $2:1$ $\mathrm{Spin}^e_{p,q} \xrightarrow{\lambda} \mathrm{SO}^e_{p,q}$.

Teorema 41. *Seja TM o fibrado tangente sobre uma variedade orientável M. Existe uma estrutura spin sobre M se e somente se $w_2(M)$ é trivial.*

Demonstração. Suponha que exista uma estrutura spin sobre M, teremos então que as funções de transição $\tilde{t}_{ij}$ satisfazem $\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = \mathrm{Id}$ na interseção das cartas $U_i \cap U_j \cap U_k$, e segue portanto que $w_2(M)$ é trivial.

Reciprocamente, suponha que $w_2(M)$ é trivial, teremos $H^2(M, \mathbb{Z}_2) \ni [f] = 1 \Rightarrow f \in B^2(M, \mathbb{Z}_2)$, tal que

$$f(i,j,k) = \delta f_1(i,j,k) = f_1(i,j)f_1(j,k)f_1(k,i). \tag{2.1.20}$$

Se escolhermos como novas funções de transição $\tilde{t}'_{ij} = \tilde{t}_{ij} f_1(i,j)$, teremos

$$\tilde{t}'_{ij}\tilde{t}'_{jk}\tilde{t}'_{ki} = \tilde{t}_{ij}f_1(i,j)\tilde{t}_{jk}f_1(j,k)\tilde{t}_{ki}f_1(k,i) = (f(i,j,k))^2 = \mathrm{Id}, \tag{2.1.21}$$

de onde vemos que $\{\tilde{t}'_{ij}\}$ define uma estrutura spin sobre M. □

2.2 Operadores de Dirac e Spinores

Nesta seção seja $(M, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana orientada de dimensão n. Lembramos que o fibrado de referenciais ortonormais orientados de M é um SO_n-fibrado principal que normalmente denotamos por P_{SO_n}. Podemos construir o fibrado de Clifford como um fibrado associado de P_{SO_n}. De fato, considere a representação usual $\tilde{\lambda} : SO_n \to Gl(\mathbb{R}^n)$, como essa representação preserva a forma quadrática euclidiana de $\mathbb{R}^n$, ela se estende para uma ação sobre Cl_n, $\tilde{\lambda} : SO_n \to Aut_{\mathbb{R}}(Cl_n)$. Assim podemos construir o fibrado associado com fibra Cl_n.

Definição 42. *O fibrado de Clifford é o fibrado vetorial, com fibra Cl_n, associado a P_{SO} através da ação natural de $\tilde{\lambda} : SO_n \to Gl(\mathbb{R}^n)$*

$$Cl(M, \mathbf{g}) = P_{SO_n} \times_{\tilde{\lambda}} Cl_n. \tag{2.2.1}$$

Podemos olhar para esse fibrado da seguinte maneira: o espaço tangente da variedade Riemanniana T_pM em um ponto $p \in M$, possui a métrica g_p, podemos assim definir a álgebra de Clifford desta fibra $Cl(T_pM, g_p)$; assim o fibrado de Clifford é o fibrado que sobre o ponto $p \in M$ possui a fibra $Cl(T_pM, g_p)$.

Podemos considerar a seguinte representação $\phi : Spin_n \to Aut_{\mathbb{R}^n}(Cl_n)$ tal que $\phi = \tilde{\lambda} \circ \lambda$ onde $\lambda : Spin_n \to SO_n$ é o mapa de recobrimento duplo. Com isso não é difícil vermos que [1]

$$Cl(M, \mathbf{g}) = P_{Spin_n} \times_{\phi} Cl_n. \tag{2.2.2}$$

Considere a variedade Riemanniana $(M, \mathbf{g})$. A conexão de Levi-Civita de $\mathbf{g}$ pode ser vista como uma conexão no fibrado principal P_{SO_n}, ou seja, uma 1-forma (SO_n-equivariante [14] pp.64) com valores na álgebra de Lie de SO_n

$$\omega : T\left(P_{SO_n}\right) \to \mathfrak{so}_n, \tag{2.2.3}$$

onde $T\left(P_{SO_n}\right)$ é o espaço tangente de P_{SO_n}, $\mathfrak{so}_n$ é a álgebra de Lie de SO_n. A derivada covariante induzida naturalmente por ω coincide com a da conexão de Levi-Civita de $\mathbf{g}$

$$\begin{aligned} \nabla &: \Gamma(TM) \to \Gamma(TM^* \otimes TM), \\ \nabla_{e_k} e_i &= \sum_{j=1}^{n} \bar{\omega}_{ji}(e_k) e_j, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

onde $s = (e_1, \cdots, e_n) : U \subset M \to P_{SO_n}$ é um referencial local, $(\bar{\omega}_{ij}) := s^*\omega : TU \to \mathfrak{so}_n$.

Uma vez que P_{SO_n} possui uma conexão, podemos induzir conexões nos seus fibrados associados; assim $Cl(M, \mathbf{g})$ possui uma conexão ∇^{Cl} proveniente da conexão de Levi-Civita de $(M, \mathbf{g})$. Seja $\alpha = [p, c] \in \Gamma(Cl(M, \mathbf{g}))$, uma seção de $Cl(M, \mathbf{g})$, onde $p \in \Gamma(P_{SO_n}), c : M \to Cl_n$ então [[11] pp.166]

$$\nabla^{Cl}_X \alpha := \nabla^{Cl}_X [p, c] := [p, X(c) + \tilde{\lambda}_*(\omega(dp(X)))], \;\; X \in \Gamma(M). \tag{2.2.5}$$

Note que essa forma coincide com a usual expressão local da derivada covariante $\nabla = d + A$.

2.2.1 O operador de Dirac

Nesta subseção vamos seguir as seguintes referências clássicas [11, 27]. Seja $\Sigma \to M$ um fibrado de $Cl(M, \mathbf{g})$-módulo complexo, ou seja, um fibrado vetorial complexo cujas fibras Σ_p são módulos sobre as fibras $Cl(M, \mathbf{g})_p$, $p \in M$. Suponha que Σ tenha uma estrutura hermitiana e também uma conexão ∇^{Σ} compatível com essa estrutura. Com isso podemos definir o operador de Dirac

Definição 43. *Com relação a um referencial ortonormal $\{e_i\}$ de P_{SO_n} definimos o operador*

$$\begin{aligned} D &: \Gamma(\Sigma) \to \Gamma(\Sigma) \\ D\psi &= \sum_{j=1}^{n} e_i \cdot \nabla^{\Sigma}_{e_i} \psi, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

onde $\cdot$ representa a ação de $Cl(M, \mathbf{g})$ em Σ proveniente da estrutura de módulo.

Com essa definição podemos definir o operador de Dirac para qualquer fibrado de módulos Σ. Mas como Σ é munido de uma estrutura hermitiana, gostaríamos que a ação por elementos de $Cl(M, \mathbf{g})$ tenha alguma compatibilidade. Também esperamos que a conexão ∇^{Σ} tenha compatibilidade com as estruturas de M.

[1] Em variedades que não admitem esrtutura *Spin*, $Cl(M, \mathbf{g})$ é definido normalmente pela Eq.(2.2.1).

Definição 44. *Um fibrado hermitiano de módulos com conexão* Σ*, é dito um* ***fibrado de Dirac****, se são satisfeitas as seguintes condições:*

1. *A ação de campos de vetores unitários* $v \in TM \subset Cl(M, \mathbf{g})$ *deve ser unitária, ou seja*

$$\langle v \cdot \varphi, v \cdot \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle, \tag{2.2.7}$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ *é a estrutura Riemanniana de* Σ*,* $\varphi, \psi \in \Sigma$*.*

2. *A conexão* ∇^Σ *de* Σ *deve se comportar como uma derivação*

$$\nabla^\Sigma(c \cdot \varphi) = \left(\nabla^{Cl} c\right) \cdot \varphi + c \cdot \nabla^\Sigma \varphi. \tag{2.2.8}$$

Uma maneira natural de construirmos fibrados de Dirac ocorre quando a variedade M possui uma estrutura *Spin*. Para uma variedade M com estrutura *Spin* podemos construir o fibrado dos spinores propriamente dito

Definição 45. *O fibrado dos* ***spinores*** *de uma variedade Riemanniana orientada* $(M, \mathbf{g})$ *de dimensão* n*, com estrutura Spin* P_{Spin} *é o fibrado associado*

$$\Sigma = P_{Spin_n} \times_\rho S_n, \tag{2.2.9}$$

onde $\rho : Cl_n \to End_{\mathbb{C}}(S_n)$ *é uma representação irredutível, e sua restrição à* $Spin_n \subset Cl_n$ *também é denotada por* ρ*.*

Essa forma de considerarmos fibrado de módulos é interessantes pois podemos considerar a seguinte ação que em cada fibra é dada por

$$\begin{gathered} Cl(M, \mathbf{g}) \times \Sigma \to \Sigma, \\ ([p, c], [p, s]) \mapsto [p, c] \cdot [p, s] = [p, c \cdot s]. \end{gathered} \tag{2.2.10}$$

Como $Spin_n$ é compacto, existe um produto hermitiano invariante em S_n de forma que temos a seguinte

Proposição 46. *Seja* Σ *como acima; então existe um produto hermitiano* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{C}$*, tal que* Σ *munido com a conexão induzida pela conexão de Levi-Civita em* P_{SO_n} *é um fibrado de Dirac.*

Demonstração. Confira [11] pp.24. □

Dada uma estrutura hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em Σ podemos definir uma estrutura Riemanniana $(\cdot, \cdot) := Re \langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.2.2 Estrutura Spin$^{\mathbb{C}}$

Seja $E \to M$ um fibrado vetorial sobre a variedade riemaniana $(M, \mathbf{g})$ e seja $P_{SO_n}(E)$ o fibrado de referenciais de E. Pelo Teorema 39 vemos que as estruturas *Spin* são classificadas como recobrimentos duplos de $P_{SO_n}(E)$ não triviais na fibra. Para o caso de variedades quase-complexas, a estrutura natural, como veremos adiante, é a estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$, que também será classificada por um recobrimento duplo.

Seguindo como modelo a Definição 38, façamos primeiramente a seguinte

Definição 47. *Uma **estrutura** $Spin^{\mathbb{C}}$ em $E \to M$ é um fibrado $Spin_n^{\mathbb{C}}$-principal $P_{Spin_n^{\mathbb{C}}}(E)$, juntamente com um mapa $\tilde{\Lambda}^{\mathbb{C}} : P_{Spin_n^{\mathbb{C}}}(E) \to P_{SO_n}(E)$ tal que o diagrama abaixo seja comutativo*

$$\begin{tikzcd} Spin_n^{\mathbb{C}} \arrow[r, "\lambda^{\mathbb{C}}"] \arrow[d, hook] & SO_n \arrow[d, hook] \\ P_{Spin_n^{\mathbb{C}}}(E) \arrow[r, "\tilde{\Lambda}^{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "\pi'"'] & P_{SO_n}(E) \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd} \tag{2.2.11}$$

Dizemos que uma variedade Riemanniana possui estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ se $E = TM$.

Considere uma cobertura $\{U_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ de M, com as funções de transição do fibrado $P_{SO_n}(E)$ dadas por

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to SO_n. \tag{2.2.12}$$

Também existem obstruções para a existência da estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$, no entanto elas são menos restritivas do que no caso da estrutura $Spin$. Como $Spin_n^{\mathbb{C}} = \frac{Spin_n \times S^1}{\mathbb{Z}_2}$, um levantamento

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to Spin_n^{\mathbb{C}} \tag{2.2.13}$$

é equivalente a dois levantamentos

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &: U_{\alpha\beta} \to Spin_n, \\ z_{\alpha\beta} &: U_{\alpha\beta} \to S^1, \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

onde $\lambda(h_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$. Aqui a condição de cociclo é expressa como

$$(h_{\alpha\beta}h_{\beta\gamma}h_{\gamma\alpha}, z_{\alpha\beta}z_{\beta\gamma}z_{\gamma\alpha}) \in \{(-1,-1),(1,1)\}. \tag{2.2.15}$$

Defina $\lambda_{\alpha\beta} = z_{\alpha\beta}^2$ e note é imediato ver que se a condições de cociclo Eq.(2.2.15) são satisfeitas, então $\lambda_{\alpha\beta}$ satisfaz as condições de cociclo $\lambda_{\alpha\beta}\lambda_{\beta\gamma}\lambda_{\gamma\alpha} = 1$, definindo assim um S^1-fibrado principal $P_{S^1}(E)$ sobre M, e equivalentemente um fibrado de linha complexo $\mathcal{L}$.

Com isso temos o seguinte recobrimento de duas folhas como queríamos

$$\begin{tikzcd} & Spin_n^{\mathbb{C}} \arrow[rr, "p^{\mathbb{C}} = \lambda^{\mathbb{C}} \times l^{\mathbb{C}}"] \arrow[d, hook] & & SO_n \times S^1 \arrow[d, hook] \\ \mathbb{Z}_2 \arrow[ur] \arrow[r] & P_{Spin_n^{\mathbb{C}}}(E) \arrow[rr, "\Lambda^{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & P_{SO_n}(E) \times_M P_{S^1}(E) \arrow[dl, "\pi"] \\ & & M & \end{tikzcd} \tag{2.2.16}$$

Usando a inclusão $i^{\mathbb{C}} : Spin_n \to Spin_n^{\mathbb{C}}$ vemos que cada estrutura $Spin$, denotada por P_{Spin_n}, induz uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ dada por $P_{Spin_n^{\mathbb{C}}} := P_{Spin_n} \times_{i^{\mathbb{C}}} Spin_n^{\mathbb{C}}$.

Pode-se mostrar ([11] pp.49) que a condição para a existência da estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ é

Proposição 48. *Uma fibrado vetorial $E \to M$ possui uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ se existe uma fibrado de linha complexo $\mathcal{L}$ tal que*

$$c^1(\mathcal{L}) = w_2(E)\ mod2, \tag{2.2.17}$$

onde $c^1(\mathcal{L})$ é a primeira classe de Chern do fibrado $\mathcal{L}$.

Note que a hipótese da variedade admitir uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ é muito menos restritiva do que admitir uma estrutura *Spin*. Conforme veremos, toda variedade quase complexa admite uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$, mas o mesmo não é válido para estrutura *Spin* (por exemplo todo $\mathbb{C}P^n$ com n par não admite estrutura *Spin*). Outro exemplo disto é que toda 4-variedade orientada admite uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ ([25] pp.25), o que claramente não é verdade para estrutura *Spin*.

Lembrando da inclusão $Spin_n^{\mathbb{C}} \subset Cl_n \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}l_n$, suponha que uma variedade Riemanniana possua uma estrutura $Spin_n^{\mathbb{C}}$ denotada por $P_{Spin_n^{\mathbb{C}}}$. Podemos definir

Definição 49. *O fibrado de **spinores complexos** de uma variedade Riemanniana $(M, \mathbf{g})$ é o fibrado associado*

$$\Sigma_{\mathbb{C}} = P_{Spin_n^{\mathbb{C}}} \times_\rho S_n, \tag{2.2.18}$$

onde $\rho : \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(S_n)$ é uma representação irredutível, e sua restrição à $Spin_n^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}l_n$ também é denotada por ρ.

Para definirmos uma conexão em $P_{Spin_n^{\mathbb{C}}}$, não basta apenas considerarmos a conexão de Levi-Civita em M. Além da conexão de Levi-Civita de M precisamos fixar uma conexão

$$A : TP_{S^1} \to i\mathbb{R} \tag{2.2.19}$$

no fibrado S^1-principal P_{S^1} da estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$. Dessa maneira a conexão induzida no fibrado dos spinores complexos $\Sigma_{\mathbb{C}}$ depende de uma conexão arbitrária A.

Fixe em P_{SO_n} a conexão de Levi-Civita $\omega : TP_{SO_n} \to \mathfrak{so}(n)$ e uma conexão $A : TP_{S^1} \to i\mathbb{R}$. Devido ao recobrimento

$$P_{Spin_n^{\mathbb{C}}} \xrightarrow{\Lambda^{\mathbb{C}}} P_{SO_n} \times_M P_{S^1}, \tag{2.2.20}$$

temos um isomorfismo $d\Lambda^{\mathbb{C}} =: TP_{Spin_n^{\mathbb{C}}} \longrightarrow TP_{SO_n} \oplus TP_{S^1}$. Dada a aplicação $p^{\mathbb{C}} : Spin_n^{\mathbb{C}} \to SO_n \times S^1$ temos o seguinte isomorfismo entre as álgebras de Lie $p_*^{\mathbb{C}} : \mathfrak{spin}^{\mathbb{C}}(n) \to \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R}$. Daqui definimos a 1-forma de conexão $\omega^{\mathbb{C}}$ em $P_{Spin_n^{\mathbb{C}}}$ como o levantamento de $(\omega \oplus iA)$ para $\mathfrak{spin}^{\mathbb{C}}(n)$, i.e.,

$$\begin{aligned} \omega^{\mathbb{C}} \quad &: \quad TP_{Spin_n^{\mathbb{C}}} \to \mathfrak{spin}^{\mathbb{C}}(n) = \mathfrak{spin}(n) \oplus i\mathbb{R}, \\ p_*^{\mathbb{C}} \circ \omega^{\mathbb{C}} \quad &= \quad (\omega \oplus iA) \in \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Fixe uma seção local $P^{\mathbb{C}} : U \subset M \to P_{Spin_n^{\mathbb{C}}}$, $\Lambda^{\mathbb{C}} \circ P^{\mathbb{C}} = (p, l)$, $p = (e_1, \cdots, e_n)$. Dado $\varphi = \left[P^{\mathbb{C}}, [\varphi]\right] \in \Gamma(\Sigma_{\mathbb{C}})$ teremos que a expressão da derivada covariante $\nabla^{\Sigma_{\mathbb{C}}}$ induzida por $\omega^{\mathbb{C}}$ será

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\Sigma_{\mathbb{C}}} \varphi \quad &= \quad \nabla_X^{\Sigma_{\mathbb{C}}} \left[P^{\mathbb{C}}, [\varphi]\right] = \left[P^{\mathbb{C}}, X[\varphi] + \rho_*\Big(\omega^{\mathbb{C}}\Big(dP^{\mathbb{C}}(X)\Big)\Big)[\varphi]\right] \\ &= \quad \left[P^{\mathbb{C}}, X[\varphi] + \rho_* \circ (p_*^{\mathbb{C}})^{-1}\Big(\omega\Big(dp(X)\Big) \oplus iA\Big(dl(X)\Big)\Big)[\varphi]\right] \\ &= \quad \left[P^{\mathbb{C}}, X[\varphi] + \frac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ij}(X) e_i e_j [\varphi] + \frac{1}{2} i A^l(X)[\varphi]\right], \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

onde $\Big(\omega_{ij}(X)\Big) := \omega\Big(dp(X)\Big) \in \mathfrak{so}(n)$, $iA^l(X) := iA^l\Big(dl(X)\Big) \in i\mathbb{R}$. Aqui usamos que

$$\begin{aligned} p_*^{\mathbb{C}} \quad &: \quad \mathfrak{spin}(n) \oplus i\mathbb{R} \to \mathfrak{so}(n) \oplus i\mathbb{R}, \\ p_*^{\mathbb{C}}(\omega, A) \quad &= \quad \Big(\lambda_*(e_i e_j), iA\Big) = (2E_iE_j, 2iA). \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Com isso segue

Proposição 50. *Temos que $\Sigma_{\mathbb{C}}$, com a conexão induzida a partir da conexão de Levi-Civita de M e de A em P_{S^1}, é um fibrado de Dirac para qualquer escolha de conexão A.*

O cálcula da curvatura $R^{\Sigma_{\mathbb{C}}}$ de $\nabla^{\Sigma_{\mathbb{C}}}$ simplifica-se considerávelmente com a seguinte expressão obtida diretamente da Eq.(2.2.22)

$$R^{\Sigma_{\mathbb{C}}}(X,Y)\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \langle R(X,Y)e_i, e_j\rangle \, e_ie_j \cdot \varphi + \frac{1}{2} i(dA)(X,Y) \cdot \varphi, \tag{2.2.24}$$

onde $\langle \ , \ \rangle = g(\ , \ )$ é a métrica em M e R é curvatura da conexão de Levi-Civita de $(M, \mathbf{g})$.

2.2.3 Estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ de variedades quase-complexas

A classe das variedades quase-complexas é uma classe bastante importante de variedades que admitem naturalmente uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$. Lembramos que uma variedade M é dita quase-complexa se existe um endomorfismo $J : TM \to TM$, tal que $J^2 = -Id$. Note que toda variedade quase complexa deve ter dimensão par $2n$.

Toda variedade quase-complexa possui uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ canônninca. Para vermos isso identifique $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$ e note que existe um morfismo natural das matrizes unitárias $U(n)$ em $SO(2n)$

$$i : U(n) \to SO(2n). \tag{2.2.25}$$

Além disso, existe um morfismo canônico

$$F : U(n) \to Spin_n^{\mathbb{C}}, \tag{2.2.26}$$

que é o levantamento do homomorfismo $U(n) \to SO(2n) \times S^1$ dado por $g \mapsto (i(g), \det g)$. Assim teremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & Spin_n^{\mathbb{C}} \arrow[d, "p^{\mathbb{C}}"] \\ U(n) \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "g"] & SO(2n) \times S^1 \end{tikzcd} \tag{2.2.27}$$

No caso de uma variedade quase-complexa M, o fibrado TM é definido através de funções de transição que tomam valores em $U(n)$

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to U(n), \tag{2.2.28}$$

onde $\{U_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ é uma cobertura de M. Podemos assim considerar as seguintes funções de transição

$$\begin{aligned} F(g_{\alpha\beta}) &: U_{\alpha\beta} \to Spin_n^{\mathbb{C}}, \\ F(g_{\alpha\beta}) &= [h_{\alpha\beta}, z_{\alpha\beta}],\ h_{\alpha\beta} \in Spin_n, z_{\alpha\beta} \in S^1. \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Como $g_{\alpha\beta}$ satisfaz a condição de cociclo $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1 \in U(n)$ é imediato que

$$F(g_{\alpha\beta})F(g_{\beta\gamma})F(g_{\gamma\alpha}) = 1 \in Spin_n^{\mathbb{C}}. \tag{2.2.30}$$

Considerando a complexificação do fibrado tangente de M, $T^{\mathbb{C}}M := T_{\mathbb{R}}M \otimes \mathbb{C}$, podemos olhar para os auto espaços da estrutura quase complexa J. Denotando $T_{1,0}$ o auto-fibrado associado ao auto-valor i e por $T_{1,0}$ o auto-fibrado associado ao auto-valor $-i$ e $T^{1,0}, T^{0,1}$ seus respectivos duais [27].

Pela comutatividade do diagrama 2.2.27 devemos ter $(\xi_0(h_{\alpha\beta}), z_{\alpha\beta}^2) = (g_{\alpha\beta}, \det g_{\alpha\beta})$, de forma que o fibrado de linha associado a essa estrutura $Spin_n^{\mathbb{C}}$ é exatamente o fibrado anti-canônico de M, $k_M^{-1} = \det_{\mathbb{C}} TM^{1,0} = \bigwedge_{n,0} M \simeq \bigwedge^{n,0} M$.

Para variedades quase-complexas, que como vimos acima possuem estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ natural, podemos dar uma descrição explícita do fibrado de spinores complexos.

Seja M uma variedade quase complexa de dimensão $2n$.

A ação de $\mathbb{C}l_n$ em $\bigwedge^* \mathbb{C}^n$ dada pela Eq.(1.4.18) é independente de coordenadas, produzindo assim uma ação no fibrado vetorial $\bigwedge^* T^{\mathbb{C}}M$ com fibra $\bigwedge^* \mathbb{C}^n$ transformando-o em um fibrado de Dirac. Da irredutibilidade da representação $\rho : \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}\left(\bigwedge^* \mathbb{C}^n\right)$ segue que o fibrado

$$\Sigma_{\mathbb{C}} = P_{Spin_n^{\mathbb{C}}} \times_\rho \bigwedge^* \mathbb{C}^n, \tag{2.2.31}$$

é tal que

$$\Sigma_{\mathbb{C}} \simeq \bigwedge^* T^{\mathbb{C}}M \simeq \bigwedge^* T^{0,1} := \bigwedge^{0,*} M. \tag{2.2.32}$$

Essa caracterização é interessante pois temos uma descrição explicita da ação de $Cl(TM) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}l_{2n}$. Se $\{e^j, Je^j\}_{j=1}^n$ é uma base para TM, podemos considerar a base de $TM \otimes \mathbb{C}$ para os auto-espaços da extansão $\mathbb{C}$-linear de J

$$\begin{aligned} \xi^i &: = \{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^j + iJe^j\right)\}_{j=1}^n, \\ \bar{\xi}^i &= \{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^j - iJe^j\right)\}_{j=1}^n. \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

Em termos desta base a ação de $\mathbb{C}l_{2n}$ assume uma forma bastante simples. Se $\varphi \in \Gamma(\Sigma_{\mathbb{C}})$ temos

$$\begin{aligned} \xi^i \cdot \varphi &: = -\sqrt{2}\xi^i \lrcorner \varphi, \\ \bar{\xi}^i \cdot \varphi &: = \sqrt{2}\bar{\xi}^i \wedge \varphi. \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

No caso de uma variedade Riemanniana $(M, \mathbf{g})$ com estrutura *Spin* possuir também uma estrutura quase-complexa, podemos considerar também a estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ associada. Dessa forma o fibrado dos spinores Σ e o fibrado dos spinores complexos $\Sigma_{\mathbb{C}}$ estão conectados pela seguinte

Proposição 51. *Seja M uma variedade Riemanniana com estrutura Spin e estrutura Spin^C proveniente de uma estrutura quase-complexa e considere o fibrado dos spinores Σ e o fibrado dos spinores complexos $\Sigma_{\mathbb{C}}$. Então vale a seguinte relação*

$$\Sigma_{\mathbb{C}} = \Sigma \otimes k_M^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2.35}$$

onde k_M denota o fibrado canônico de M.

Demonstração. Confira [19] pp.396. □

Capítulo 3

Uma Breve Revisão da Literatura Clássica

No que segue, apresentaremos as principais contribuições que serviram de embasamento teórico para esse trabalho. As demonstrações não serão apresentadas por razões de espaço.

3.1 O teorema fundamental de subvariedades

Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional isometricamente imersa em $\mathbb{R}^{n+m}$, com fibrado normal N m-dimensional, seja $B : TM \times TM \to N$ a segunda forma fundamental dessa imersão, denote por $\mathcal{A} : N \times TM \to TM$ a forma bilinear definida por:

$$\langle \mathcal{A}(N, X), Y \rangle_M := \langle B(X, Y), N \rangle_N . \tag{3.1.1}$$

Sejam R e R^N, respectivamente, os tensores de curvatura das conexões métricas ∇ em TM e ∇^N em N. Sabemos então ([8] pp.134) que as seguintes equações são satisfeitas:

1. Equação de Gauss:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle_M &= \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle_N - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle_N \\ &= \langle \mathcal{A}(B(Y, Z), X), W \rangle_M - \langle \mathcal{A}(B(X, Z), Y), W \rangle_M . \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

2. Equação de Codazzi:

$$(\nabla_X B)(Y, Z) = (\nabla_Y B)(X, Z). \tag{3.1.3}$$

3. Equação de Ricci:

$$\left\langle R^N(X, Y)N, Q \right\rangle_N = \langle B(X, \mathcal{A}(N, Y)), Q \rangle_N - \langle B(Y, \mathcal{A}(N, X)), Q \rangle_N . \tag{3.1.4}$$

Um teorema de fundamental importância nesse trabalho é o recíproco do resultado acima, que estabelece condições suficientes para existência de uma imersão isométrica local de M em $\mathbb{R}^{n+m}$:

Teorema 52. *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional e N um fibrado vetorial m-dimensional com métricas Riemannianas e com conexões compatíveis. Seja $B : TM \times TM \to N$ bilinear, simétrica e $\mathcal{A}$ dada pela Eq.(3.1.1). Então se as equações de Gauss, Codazzi e Ricci (3.1.2,3.1.3,3.1.4) são satisfeitas, existe uma imersão isométrica local $f : U \subset M \to \mathbb{R}^{n+m}$ de forma que podemos identificar o fibrado normal dessa imersão com o fibrado N e a métrica induzida no fibrado normal coincide com a métrica original em N. A segunda forma fundamental e conexão induzidas pela imersão coincidem com as conexões originais em TM e N. Além disso, essa imersão é única a menos de movimento rígido. No caso de M ser simplesmente conexa essa imersão é global.*

Demonstração. Uma demonstração pode ser encontrada em [33] pp.26. □

3.2 Os trabalhos de Friedrich e Morel

A fórmula de Weierstrass descreve uma imersão conforme minimal de uma superfície Riemanniana M^2 no espaço euclidiano 3-dimensional $\mathbb{R}^3$. Ela expressa a imersão em termos de uma 1-forma μ holomorfa e de uma função meromorfa g (de forma que $g^2\mu$ seja holomorfa) como a integral:

$$f = Re\left(\int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\mu\right) : M^2 \to \mathbb{R}^3. \tag{3.2.1}$$

Por outro lado considere o fibrado dos spinores complexos $\Sigma_{\mathbb{C}}$ sobre M^2. Se M admitir uma estrutura quase-complexa, esse fibrado vetorial 2-dimensional sobre $\mathbb{C}$, conforme vimos na Eq.(2.2.32), decompõem-se em

$$\Sigma_{\mathbb{C}} = \Sigma_{\mathbb{C}}^{+} \oplus \Sigma_{\mathbb{C}}^{-} = \bigwedge\nolimits^{0,0} M^2 \oplus \bigwedge\nolimits^{0,1} M^2, \tag{3.2.2}$$

de forma que o par (g, μ) pode ser considerado com um campo spinorial φ na superfície Riemanniana. Em [10], Friedrich relembra que as equações de Cauchy-Riemann para g e μ são equivalentes à equação de Dirac homogênea

$$D(\varphi) = 0, \tag{3.2.3}$$

assim imersões mínimas estão intimamente relacionadas com soluções da equação de Dirac Eq.(3.2.3).

Uma descrição similar para uma superfície orientável arbitrária $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ é possível. Essa representação de uma superfície M^2 em $\mathbb{R}^3$ por um campo spinorial φ de M^2 satisfazendo a seguinte equação de Dirac não-homogênea

$$D(\varphi) = H\varphi, \tag{3.2.4}$$

envolvendo a curvatura média H de M^2 é encontrada em alguns artigos (e.g. [20, 30, 31, 32]), onde, os autores descrevem a relação entre superfícies em $\mathbb{R}^3$ e solução da Eq.(3.2.4) em termos locais.

Em 1998 Thomas Friedrich [10] apresentou a representação de superfícies em $\mathbb{R}^3$ mencionada acima com soluções da equação $D(\varphi) = H\varphi$ de uma forma geometricamente invariante.

Sua ideia foi considerar uma imersão $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície M^2 orientada e fixar um spinor paralelo Φ em $\mathbb{R}^3$. Por restrição, uma estrutura *Spin* em $\mathbb{R}^3$ induz canonicamente uma estrutura *Spin* em M^2. A restrição $\varphi = \Phi|_{M^2}$ de Φ para a superfície é (com respeito à geometria intrínseca de M^2) um campo spinorial não trivial em M^2. Após considerar a seguinte fórmula de Gauss spinorial

$$\nabla^{\mathbb{R}^3}_X \Phi = \nabla^{M^2}_X \varphi - (\nabla_X N)\, e_1 e_2 \cdot \varphi, \tag{3.2.5}$$

que relaciona a conexão spinorial $\nabla^{\mathbb{R}^3}_X$ de $\mathbb{R}^3$ com a $\nabla^{M^2}_X$ de M^2, onde $X \in TM^2$, N é o vetor normal à M^2 e $\nabla_X N$ o mapa de Weiengarten da imersão, o autor então, considerando Φ paralelo, define um campo spinorial específico $\varphi^* := \varphi^+ - i\varphi^- \in \bigwedge^{0,0} M^2 \oplus \bigwedge^{0,1} M^2$, que devido à Eq.(3.2.5) tem norma constante e é solução da equação de Dirac não homogênea

$$D(\varphi^*) = H\varphi^*. \tag{3.2.6}$$

Por outro lado, dada uma solução φ da Eq.(3.2.4) com norma constante existe um endomorfismo simétrico $E : T(M^2) \to T(M^2)$ tal que o campo spinorial satisfaz uma "equação do tipo twistor"

$$\nabla^{M^2}_X \varphi = E(X) \cdot \varphi, \tag{3.2.7}$$

onde ∇^{M^2} é a conexão induzida no fibrado dos spinores de M^2.

Friedrich mostra que uma solução da Eq.(3.2.7) é equivalente às equações de Gauss e Codazzi das imersões isométricas. Como consequência, a solução φ da equação de Dirac

$$D(\varphi) = H\varphi, \quad |\varphi| = const > 0 \tag{3.2.8}$$

produz, devido ao teorema 52, uma imersão isométrica de M^2 em $\mathbb{R}^3$.

O resultado principal demonstrado por Friedrich em seu artigo é

Teorema 53. *Seja (M^2, g) uma variedade Riemanniana 2-dimensional orientada e $H : M^2 \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) *Existe uma imersão isométrica $(\tilde{M}^2, g) \to \mathbb{R}^3$ do recobrimento universal de M^2 ($\tilde{M}^2$) em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média H.*

(b) *Existe uma solução φ, de norma constante $|\varphi| = 1$, da equação de Dirac $D\varphi = H\varphi$.*

(c) *Existe um par (φ, E) consistindo de um endomorfismo simé trico E tal que $tr(E) = -H$ e um campo spinorial φ tal que $\nabla^{M^2}_X \varphi = E(X) \cdot \varphi$.*

Guiados pelo trabalho de Friedrich, alguns autores provaram resultados similares que serão apresentados a seguir.

Em 2004 B. Morel [24] generalizou a caracterização spinorial de imersões isométricas dada por Friedrich para superfícies em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$. Seu argumento consiste em considerar uma variedade Riemanniana 3-dimensional N^3 orientada e com uma estrutura *Spin* fixa. O autor admite ainda uma imersão $M^2 \hookrightarrow N^3$ de uma variedade 2-dimensional M^2 orientada, de forma que M^2 tem uma estruturas Riemanniana e *Spin* induzidas de N^3. Assuma que N^3 tenha um campo spinoral Φ não trivial de Killing, isto é

$$\nabla^{N^3}_X \Phi = \eta X \cdot \Phi, \tag{3.2.9}$$

onde $X \in TN^3$ e η é uma constante real ou complexa. Morel considerou os seguintes espaços modelo com suas respectivas métricas padrões: $\mathbb{R}^3$ com $\eta = 0$, $\mathbb{S}^3$ com $\eta = \frac{1}{2}$, e $\mathbb{H}^3$ com $\eta = \frac{i}{2}$; o caso $\eta = 0$ foi o tratado por Friedrich. A restrição de campos spinoriais de Killing Φ em N^3 com constante η para M^2 produz um campo φ que satisfaz a seguinte equação de Dirac

$$D\varphi = H\varphi - 2i\eta\bar{\varphi}, \tag{3.2.10}$$

onde $\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \in \bigwedge^{0,0} M^2 \oplus \bigwedge^{0,1} M^2$ e $\bar{\varphi} = \varphi^+ - \varphi^-$.

Por outro lado, Morel mostrou que dada uma solução φ da Eq.(3.2.10) com norma constante existe um endomorfismo simétrico $E : T(M^2) \to T(M^2)$ tal que o campo spinorial satisfaz uma equação que ele chama de "tipo killing restrita"

$$\nabla^{M^2}_X \varphi = E(X) \cdot \varphi - i\eta X \cdot \bar{\varphi}, \tag{3.2.11}$$

onde ∇^{M^2} é a conexão no fibrado spinorial de M^2.

Morel também mostra que uma solução da Eq.(3.2.11) é equivalente às equações de Gauss e Codazzi das imersões isométricas. Como consequência, a solução φ da equação de Dirac

$$D(\varphi) = D\varphi = H\varphi - 2i\eta\bar{\varphi}, , \quad |\varphi| = const > 0 \tag{3.2.12}$$

produz, devido ao teorema 52, uma imersão isométrica de M^2 em $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{H}^3$ nos casos de $\eta = \frac{1}{2}$ ou $\eta = \frac{i}{2}$ respectivamente.

Os resultados principais de seu artigo são

Teorema 54. *Seja (M^2, g) uma variedade 2-dimensional orientada, e $H : M^2 \to \mathbb{R}$, uma função suave. Então as seguintes afirmativas são equivalentes:*

1. *Existe uma imersão isométrica $(\tilde{M}^2, g) \to \mathbb{S}^3$ do recobrimento universal de M^2 na esfera 3 -dimensional $\mathbb{S}^3$ com curvatura média H.*

2. *Existe uma solução φ da equação de Dirac*

$$D\varphi = H\varphi - i\bar{\varphi}, \tag{3.2.13}$$

com norma constante.

3. *Existe um par (φ, E) consistindo de um endomorfismo simétrico E tal que $tr(E) = -H$ e um campo spinorial φ satisfazendo a seguinte equação*

$$\nabla^{M^2}_X \varphi - E(X) \cdot \varphi - \frac{i}{2} X \cdot \bar{\varphi} = 0. \tag{3.2.14}$$

Teorema 55. *Seja (M^2, g) uma variedade 2-dimensional orientada, e $H : M^2 \to \mathbb{R}$, uma função suave. Então os seguintes são equivalentes:*

1. *Existe uma imersao isométrica $(\tilde{M}^2, g) \to \mathbb{H}^3$ do recobrimento universal de M^2 no espaço hiperb ólico 3-dimensional $\mathbb{H}^3$ com curvatura média H.*

2. *Existe uma solução nunca nula φ da equação de Dirac*

$$D\varphi = H\varphi + \bar{\varphi}, \tag{3.2.15}$$

satisfazendo

$$X |\varphi|^2 = -Re \langle X \cdot \bar{\varphi}, \varphi \rangle , \ X \in \Gamma(TM). \tag{3.2.16}$$

3. *Existe um par* (φ, E) *consistindo de um endomorfismo simétrico* E *tal que* $tr(E) = -H$ *e um campo spinorial* φ *satisfazendo a seguinte equação*

$$\nabla_X^{M^2} \varphi - E(X) \cdot \varphi + \frac{1}{2} X \cdot \bar{\varphi} = 0. \tag{3.2.17}$$

Capítulo 4

Literatura Recente

Em 2008 **Marie-Amelie Lawn** [16] mostrou como uma dada superfície lorentziana (M^2, g) pode ser imersa em $\mathbb{R}^3$ com uma métrica de assinatura $(2, 1)$, que denotaremos por $\mathbb{R}^{2,1}$.

A ideia apresentada por Lawn é análoga a de Friedrich, ou seja, considera-se uma imersão $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, Φ_1 um campo spinorial paralelo em $\mathbb{R}^{2,1}$ e $\phi_1 := \Phi_1|_{M^2}$ sua restrição à M^2. Também mostra que essa restrição satisfaz a seguinte equação

$$\nabla_X^{M^2} \phi_1 = E(X) \cdot \phi_1, \tag{4.0.1}$$

onde E é o mapa de Weiengarten da imersão. Além disso, considera-se o campo spinorial $\phi_2 = N \cdot \phi_1$ (N é o vetor normal à superfície) mostrando que é uma solução da seguinte equação

$$\nabla_X^{M^2} \phi_2 = -E(X) \cdot \phi_2. \tag{4.0.2}$$

Soluções das Equações (4.0.1) e (4.0.2) são também equivalentes às equações de Gauss e Codazzi, de forma que o resultado principal demonstrado em seu artigo é

Teorema 56. *Seja (M^2, g) uma variedade Riemanniana 2-dimensional de assinatura $(1, 1)$ orientada, orientada no tempo e $H : M^2 \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Então são equivalentes as seguintes afirma ções:*

1. *Existe uma imersão isométrica tipo espaço $(\tilde{M}^2, g) \to \mathbb{R}^3$ do recobrimento universal de M^2 $(\tilde{M}^2)$ em $\mathbb{R}^{2,1}$ com curvatura média H e segunda forma fundamental E.*

2. *ϕ_1 e ϕ_2 são soluções não nulas e não isotrópicas das equações de Dirac acopladas $D\phi_1 = H\phi_1$ e $D\phi_2 = -H\phi_2$, com $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 1$.*

3. *ϕ_1 e ϕ_2 são soluções não nulas e não isotrópicas das equações*

$$\nabla_X^{M^2} \phi_1 = E(X) \cdot \phi_1, \quad \nabla_X^{M^2} \phi_2 = -E(X) \cdot \phi_2, \tag{4.0.3}$$

onde $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 1$ e $E : TM^2 \to TM^2$ é um endomorfismo g-simétrico tal que $\frac{1}{2} tr(E) = H$.

Em 2010 **Lawn e Roth** [17] deram uma caracterização de hipersuperfícies imersas em formas espaciais $\mathbb{M}^4(\kappa)$[1] 4-dimensionais e espaços produto $\mathbb{M}^3(\kappa) \times \mathbb{R}$ em termos da existência de um campo spinorial particular. Aqui $\mathbb{M}^n(\kappa)$ denota a forma espacial n-dimensional

[1] Aqui utilizaremos "formas espaciais" como a tradução de "space forms" em conformidade com o livro [8].

simplesmente conectada de curvatura seccional κ e

$$\begin{cases} \mathbb{M}^n(\kappa) = \mathbb{S}^n(\kappa), & \text{quando } \kappa > 0 \\ \mathbb{M}^n(\kappa) = \mathbb{R}^n, & \text{quando } \kappa = 0 \\ \mathbb{M}^n(\kappa) = \mathbb{H}^n(\kappa), & \text{quando } \kappa < 0. \end{cases} \tag{4.0.4}$$

Assim como nos casos anteriores, os autores consideram uma hipersuperfície M^3 imersa em $\mathbb{M}^4(\kappa)$ (ou $\mathbb{M}^3(\kappa) \times \mathbb{R}$) e tomam um campo spinoral não trivial de Killing em $\mathbb{M}^4(\kappa)$ (ou $\mathbb{M}^3(\kappa) \times \mathbb{R}$) que quando restrito à M^3 produz dois campos spinoriais φ_1 e $\varphi_2 = N \cdot \varphi_1$ (N vetor normal à imersão) que, em cada caso, satisfazem as Equações de Dirac e de Killing generalizadas apropriadas.

Reciprocamente, supondo que existam tais campos spinoriais φ_1 e φ_2 que são soluções dessas soluções de Equações de Dirac e de Killing generalizadas, com condições apropriadas (que vamos apresentar nos teoremas abaixo) na norma dos spinores, teremos que as Equações de Gauss, Ricci e Codazzi apropriadas a cada caso serão válidas, de forma que os resultados principais do artigo são os teoremas que seguem:

Teorema 57. *Seja (M^3, g) uma variedade spin 3-dimensional, $H : M^3 \to \mathbb{R}$ uma função suave, E um endomorfismo simétrico de TM. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1. *Os campos spinoriais $\varphi_j, j = 1, 2$ são soluções não nulas das equações de Dirac:*

$$\begin{aligned} D\varphi_1 &= \left(\frac{3}{2}H + 3\eta\right)\varphi_1, \\ D\varphi_2 &= -\left(\frac{3}{2}H + 3\eta\right)\varphi_2, \end{aligned} \tag{4.0.5}$$

onde

$$\begin{aligned} |\varphi_j|^2 &= \textit{constante}, & \textit{se } \eta \in \mathbb{R}, \\ X|\varphi_j|^2 &= 2Re\langle \eta X \cdot \varphi_j, \varphi_j \rangle, & \textit{se } \eta \in i\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.0.6}$$

2. *Os campos spinoriais $\varphi_j, j = 1, 2$ são soluções não nulas das equações de Killing generalizadas*

$$\begin{aligned} \nabla^M_X \varphi_1 &= -\frac{1}{2}E(X) \cdot \varphi_1 - \eta X \cdot \varphi_1, \\ \nabla^M_X \varphi_2 &= \frac{1}{2}E(X) \cdot \varphi_2 + \eta X \cdot \varphi_2, \end{aligned} \tag{4.0.7}$$

com $\frac{1}{2}tr(E) = -H$.

Além disso essas duas afirmações implicam na afirmação

3. *Existe uma imersão isométrica, do recobrimento universal de M^3, $F : \tilde{M}^3 \to \mathbb{M}^4(\kappa)$ na forma espacial 4-dimensional de curvatura $\kappa = 4\eta^2$ com curvatura média H e tensor de Weiengarten E.*

Teorema 58. *Seja (M^3, g) uma variedade Spin 3-dimensional, $f, H : M^3 \to \mathbb{R}$ duas funções suaves, suponha que existam T um campo vetorial em M e E um endomorfismo simétrico de TM, tais que*

$$\begin{aligned} |T|^2 + f^2 &= 1, \\ \nabla_X T &= -fE(X), \\ df(X) &= \langle E(X), T \rangle . \end{aligned} \tag{4.0.8}$$

Então os seguintes são equivalentes

1. *Os campos spinoriais $\varphi_j, j = 1, 2$ são soluções não nulas das equações de Dirac generalizadas:*

$$\begin{aligned} D\varphi_1 &= \left(\frac{3}{2}H - 2\eta T - 3\eta f\right) \cdot \varphi_1, \\ D\varphi_2 &= \left(-\frac{3}{2}H - 2\eta T + 3\eta f\right) \cdot \varphi_2, \end{aligned} \tag{4.0.9}$$

   onde

$$\begin{aligned} |\varphi_j|^2 &= \mathit{constante}, && \text{se } \eta \in \mathbb{R}, \\ X|\varphi_j|^2 &= 2Re \langle iX \cdot T \cdot \varphi_j + ifX \cdot \varphi_j, \varphi_j \rangle , && \text{se } \eta \in i\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.0.10}$$

2. *Os campos spinoriais $\varphi_j, j = 1, 2$ são soluções não nulas das equações de Killing generalizadas*

$$\begin{aligned} \nabla^M_X \varphi_1 &= \frac{1}{2}E(X) \cdot \varphi_1 + \eta X \cdot T \cdot \varphi_1 + \eta f X \cdot \varphi_1 + \eta \langle X, T \rangle \cdot \varphi_1, \\ \nabla^M_X \varphi_2 &= -\frac{1}{2}E(X) \cdot \varphi_2 + \eta X \cdot T \cdot \varphi_2 - \eta f X \cdot \varphi_2 + \eta \langle X, T \rangle \cdot \varphi_2, \end{aligned} \tag{4.0.11}$$

   com $\frac{1}{2}tr(E) = -H$.

   Essas duas afirmações implicam em

3. *Existe uma imersão isométrica do recobrimento universal de M^3, $F : \tilde{M}^3 \to \mathbb{M}^3(\kappa) \times \mathbb{R}$, com $\kappa = 4\eta^2$, de curvatura média H e tensor de Weiengarten E relativo à normal ν e*

$$\frac{\partial}{\partial t} = dF(T) + f\nu, \tag{4.0.12}$$

   $\frac{\partial}{\partial t}$ é o vetor tangente relativo componente $\mathbb{R}$ de $\mathbb{M}^3(\kappa) \times \mathbb{R}$.

Em 2011**, novamente Lawn e Roth** [18] deram uma caracterização de superfícies de assinatura arbitrária isometricamente imersas em formas espaciais 3-dimensionais, generalizando assim o trabalho [16] sobre superfícies lorentzianas tipo-espaço imersas em $\mathbb{R}^{2,1}$ para outras formas espaciais. Consequentemente, foi obtida uma descrição spinorial completa para esta classe de imersões Riemannianas e pseudo-Riemannianas. Aqui $(M^{p,q}, g)$ é uma superfície Riemanniana ou pseudo Riemanniana de assinatura (p, q) e φ um campo spinorial em $M^{p,q}$. É introduzido o parâmetro ε da seguinte forma:

$$\begin{cases} \varepsilon = i, & \text{se a imersão é tipo-tempo} \\ \varepsilon = 1, & \text{se a imersão é tipo-espaço.} \end{cases} \tag{4.0.13}$$

ν é o vetor unitário normal à superfície, $\eta \in \mathbb{R}$ ou $i\mathbb{R}$. Diz-se que φ satisfaz as hipóteses de norma $N_{\pm}(p,q,\eta,\varepsilon)$ se é válido

1. Para $p=2, q=0$ ou $p=0, q=2$:

$$\begin{aligned} \text{Se } \varepsilon &= 1, \text{ então } X\left|\varphi\right|^2 = \pm 2Re\left\langle i\eta X\cdot\bar{\varphi},\varphi\right\rangle. \\ \text{Se } \varepsilon &= i, \text{ então } X\left\langle\varphi,\bar{\varphi}\right\rangle = \pm 2Re\left\langle i\eta X\cdot\varphi,\varphi\right\rangle. \end{aligned} \tag{4.0.14}$$

2. Para $p=1$ e $q=1$: φ é não isotrópico.

Uma vez fixadas essas notações, o resultado principal apresentado em [18] é o seguinte

Teorema 59. *Seja $(M^{p,q},g)$, com $p+q=2$, uma superfície Riemanniana ou pseudo-Riemanniana orientada e orientada no tempo. Seja $H : M^{p,q} \to \mathbb{R}$ uma função suave. Assim as seguintes afirmações são equivalentes*

1. *Existem dois campos spinoriais nunca nulos φ_1 e φ_2 satisfazendo as hipóteses de norma $N_+(p,q,\eta,\varepsilon)$ e $N_-(p,q,\eta,\varepsilon)$, respectivamente, e*

$$\begin{aligned} D\varphi_1 &= 2\varepsilon H\varphi_1 + 2i\eta\overline{\varphi_1}, \\ D\varphi_2 &= -2\varepsilon H\varphi_2 - 2i\eta\varphi_2. \end{aligned} \tag{4.0.15}$$

2. *Existem dois campos spinoriais nunca nulos φ_1 e φ_2 satisfazendo*

$$\begin{aligned} \nabla^M_X\varphi_1 &= -\frac{\varepsilon}{2}E(X)\cdot\varphi_1 - i\eta X\cdot\overline{\varphi_1}, \\ \nabla^M_X\varphi_2 &= +\frac{\varepsilon}{2}E(X)\cdot\varphi_2 + i\eta X\cdot\overline{\varphi_2}, \end{aligned} \tag{4.0.16}$$

onde E é um endomorfismo g-simétrico e $\frac{1}{2}tr(E) = -H$.

3. *Existe uma imersão isométrica local $F : M^{p,q} \to \mathbb{M}^{p+1,q}(4\eta^2)$ se $\varepsilon = 1$ (respectivamente $F : M^{p,q} \to \mathbb{M}^{p,q+1}(4\eta^2)$ se $\varepsilon = i$) com curvatura média H e tensor de Weiengarten E.*

Note que nesse resultado, dois campos spinoriais são necessários para termos uma imersão isométrica. Entretanto, para o caso de superfícies Riemannianas em formas espaciais Riemannianas ([10],[24]) apenas uma das soluções das duas equações é suficiente. Este também é o caso de superfícies de assinatura $(0,2)$ em formas espaciais de assinatura $(0,3)$.

Em 2013 **Pierre Bayard, Lawn e Roth** [4] apresentaram uma representação spinorial de superfícies em formas espaciais 4-dimensionais. Para o espaço euclidiano eles obtiveram uma fórmula que generaliza a fórmula de representação de Weierstrass de superfícies mínimas.

Nesse trabalho os autores consideram (M^2,g) uma superfície Riemanniana orientada isometricamente imersa numa forma espacial 4-dimensional $\mathbb{M}^4(\kappa)$, denotam por E seu fibrado normal e por $B : TM\times TM \to E$ sua segunda forma fundamental. É um fato bem conhecido [2] que existe uma identificação do fibrado dos spinores de $\mathbb{M}^4(\kappa)$ restrito à M^2 e o fibrado dos spinores de M^2 torcido pelo fibrado dos spinores de E

$$\Sigma\mathbb{M}^4(\kappa)\Big|_{M^2} = \Sigma M^2 \otimes \Sigma E. \tag{4.0.17}$$

Entretanto, tem-se a seguinte fórmula de Gauss spinorial

$$\nabla_X^{\Sigma\mathbb{M}^4}\varphi = \nabla_X^{\Sigma M^2}\varphi + \frac{1}{2}\sum_{j=1,2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \tag{4.0.18}$$

onde $\nabla^{\Sigma\mathbb{M}^4}$ é a conexão spinorial em $\Sigma\mathbb{M}^4$ e ∇^{Σ} é a conexão spinorial em Σ definida como

$$\nabla^{\Sigma} := \nabla^{\Sigma M^2} \otimes Id_{\Sigma E} + Id_{\Sigma M^2} \otimes \nabla^{\Sigma E}. \tag{4.0.19}$$

Assim se φ é um campo spinorial de Killing em $\mathbb{M}^4(\kappa)$

$$\nabla_X^{\Sigma\mathbb{M}^4}\varphi = \eta X \cdot \varphi, \tag{4.0.20}$$

onde a constante de Killing η é 0 para o espaço euclidiano, $\frac{1}{2}$ para a esfera, $\frac{i}{2}$ para o espaço hiperbólico, teremos que a restrição de φ à M^2 satisfaz

$$\nabla_X^{\Sigma M^2}\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1,2} e_j \cdot B(X, e_j)X \cdot \varphi + \eta X \cdot \varphi, \tag{4.0.21}$$

da qual, se tirarmos o traço, conseguimos a seguinte equação de Dirac

$$D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi - 2\eta\varphi, \tag{4.0.22}$$

aqui $\vec{H} = \frac{1}{2}\sum_{j=1,2} B(e_j, e_j)$ é o vetor curvatura média.

Reciprocamente, os autores consideram (M^2, g) uma superfície Riemanniana orientada com uma dada estrutura *Spin*, E um fibrado vetorial orientado e *Spin* de posto 2 em M^2 e consideram o seguinte fibrado spinorial

$$\Sigma = \Sigma M \otimes \Sigma E. \tag{4.0.23}$$

Se $\vec{H}$ é uma seção de E e $\eta \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ os autores mostram que as equações

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\Sigma M^2}\varphi &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1,2} e_j \cdot B(X, e_j)X \cdot \varphi + \eta X \cdot \varphi, \\ D\varphi &= \vec{H} \cdot \varphi - 2\eta\varphi, \end{aligned} \tag{4.0.24}$$

implicam nas equações de Gauss, Ricci e Codazzi para M^2 e E. Demonstrando assim o seguinte teorema:

Teorema 60. *Sejam (M^2, g) uma superfície Riemanniana orientada com uma dada estrutura Spin e E um fibrado vetorial orientado e Spin de posto 2 em M^2. Sejam o fibrado spinorial $\Sigma = \Sigma M \otimes \Sigma E$ e D seu operador de Dirac. Sejam $\eta \in \mathbb{R}$ ou $\eta \in i\mathbb{R}$ uma constante e $\vec{H}$ é uma seção de E. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1. *Existe um campo spinorial $\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \in \Gamma(\Sigma) = \Gamma(\Sigma^+ \oplus \Sigma^-)$ solução da equação de Dirac*

$$D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi - 2\eta\varphi, \tag{4.0.25}$$

tal que $\varphi^+ \in \Gamma(\Sigma^+)$ e $\varphi^- \in \Gamma(\Sigma^-)$ nunca se anulam e satisfazem

$$X\left|\varphi^+\right|^2 = 2Re\left\langle \eta X \cdot \varphi^-, \varphi^+\right\rangle \text{ e } X\left|\varphi^-\right|^2 = 2Re\left\langle \eta X \cdot \varphi^+, \varphi^-\right\rangle. \tag{4.0.26}$$

2. Existe um campo spinorial $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$ *solução de*

$$\nabla_X^{\Sigma M^2}\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1,2} e_j \cdot B(X,e_j)X \cdot \varphi + \eta X \cdot \varphi, \tag{4.0.27}$$

onde $B : TM^2 \times TM^2 \to E$ *é bilinear,* $\frac{1}{2}tr(B) = \vec{H}$ *e* φ^+ *e* φ^- *nunca se anulam.*

3. Existe uma imersão local de (M^2, g) *em* $\mathbb{M}^4(\kappa)$, $\kappa = 4\eta^2$, *com fibrado normal* E, *segunda forma fundamental* B *e curvatura média* $\vec{H}$.

Também em 2013, **Bayard** [5], publicou um resultado provando que uma imersão isométrica de uma superfície Riemanniana M, simplesmente conexa, no espaço de Minkowski 4-dimensional $\mathbb{R}^{1,3}$, com um dado fibrado normal E e com vetor curvatura média $\vec{H} \in \Gamma(E)$ é equivalente Ã existência de um campo spinorial normalizado $\varphi \in \Gamma(\Sigma M \otimes \Sigma E)$ que é solução da equação de Dirac $D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi$ na superfície.

Teorema 61. *Seja* (M^2, g) *uma superfície Riemanniana orientada,* E *um fibrado vetorial lorentziano orientado e orientado no tempo de posto* 2 *em* M^2, *com respectivas estruturas Spin. Seja o fibrado spinorial* $\Sigma = \Sigma M^2 \otimes \Sigma E$ *e* $\vec{H}$ *uma seção de* E. *Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1. Existe um campo spinorial $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$, *com* $\langle\langle\varphi, \varphi\rangle\rangle = 1$ *solução da equação de Dirac*

$$D\varphi = \vec{H} \cdot \varphi. \tag{4.0.28}$$

2. Existe um campo spinorial $\varphi \in \Gamma(\Sigma)$ *solução de*

$$\nabla_X^{\Sigma M^2}\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1,2} e_j \cdot B(X,e_j) \cdot \varphi, \tag{4.0.29}$$

onde $B : TM^2 \times TM^2 \to E$ *é bilinear,* $\frac{1}{2}tr(B) = \vec{H}$.

3. Existe uma imersão isométrica local, tipo espaço, de (M^2, g) *em* $\mathbb{R}^{1,3}$, *com fibrado normal* E, *segunda forma fundamental* B *e curvatura média* $\vec{H}$. *Se* M^2 *é simplesmente conexa, a imersão isométrica é definida globalmente em* M^2.

Uma ideia interessante apresentada no trabalho de Bayard foi considerar uma forma bilinear específica

$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{H} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{H}^{\mathbb{C}}, \tag{4.0.30}$$

com a qual define-se uma 1-forma $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$-valorada ξ dada por

$$\xi(X) := \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle \in \mathbb{H}^{\mathbb{C}}, \tag{4.0.31}$$

onde φ é solução de (4.0.28). O interessante dessa 1-forma é a propriedade dada conforme a proposição a seguir

Proposição 62. *São válidas as seguintes afirmações:*

1. *A* 1*-forma* $\xi \in \Omega^1(M^2, \mathbb{H}^{\mathbb{C}})$ *toma valores em* $\mathbb{R}^{1,3} \simeq \{ix_0 1 + x_1 I + x_2 J + x_3 K, (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4\} \subset \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$.

2. *A* 1*-forma* $\xi \in \Omega^1(M^2, \mathbb{R}^{1,3})$ *é fechada, ou seja,* $d\xi = 0$.

Assuma que M^2 é simplesmente conexa, então existe uma função $F : M^2 \to \mathbb{R}^{1,3}$ tal que $dF = \xi$. Bayard demonstra o seguinte teorema

Proposição 63. *São válidas as seguintes afirmações:*

Teorema 64. 1. *A aplicação* $F = (F_0, F_1, F_2, F_3) : M^2 \to \mathbb{R}^{1,3}$ *é uma imersão isométrica.*

2. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi_E \quad &: \quad E \to M^2 \times \mathbb{R}^{1,3} \\ X \quad &\in \quad E_m \mapsto (F(m), \xi(X)) \end{aligned} \tag{4.0.32}$$

é uma isometria entre E *e o fibrado normal* $N(F(M^2))$ *de* $F(M)$ *em* $\mathbb{R}^{1,3}$*, preservando conexão e segunda forma fundamental.*

Ou seja, ξ é uma generalização da representação de Weierstrass para imersões em $\mathbb{R}^{1,3}$.

Recentemente, no ano de 2016**, Bayard, Lawn e Roth** [6] estudaram a representação spinorial de subvariedades de qualquer dimensão e qualquer codimensão em formas espaciais Riemannianas em termos da existência de spinores de Killing generalizados.

A ideia dos autores nesse artigo, que inspirou nosso trabalho, consiste em considerar a representação regular à esquerda de Cl_n

$$\begin{aligned} \rho : Cl_n \quad &\to \quad End_{\mathbb{R}}(Cl_n) \\ a \quad &\mapsto \quad \xi \mapsto a\xi \end{aligned} \tag{4.0.33}$$

cuja restrição ao grupo $Spin_n$, $\rho|_{Spin_n} : Cl_n \to Aut_{\mathbb{R}}(Cl_n)$, é a representação por eles utilizada.

Tal representação não é a adjunta do grupo *Spin* na álgebra de Clifford, mas sim a dada pela multiplicação à esquerda. Dess forma, os autores não estão tomando, como usual, a restrição de uma representação irredutível da álgebra de Clifford para o grupo *Spin*, mas sim uma restrição de uma representação cujo módulo é a álgebra inteira.

Se $p + q = n$, tem-se o seguinte mapa natural[2] $i : Spin(p) \times Spin(q) \hookrightarrow Spin(n)$ associado à decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$ e o correspondente isomorfismo de álgebras $Cl_p \hat{\otimes} Cl_q = Cl_n$, onde $\hat{\otimes}$ é o produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado, permitindo assim restringir $\rho : Spin(p) \times Spin(q) \to Aut_{\mathbb{R}}(Cl_n)$.

[2]Se considerarmos $\{e_1, \cdots, e_p\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^p$, $\{f_1, \cdots, f_q\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^q$ e $\{e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^{p+q}$, podemos entender $i : Spin(p) \times Spin(q) \hookrightarrow Spin(n)$ como a concatentação dada pelo produto de Clifford de elementos de $Spin(p)$ e $Spin(q)$ em $Spin(n)$.

$$i(e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}, f_{j_1} \cdots f_{j_{2l}}) = e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} f_{j_1} \cdots f_{j_{2l}}.$$

Seja M uma variedade Riemanniana p-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial sobre $\mathbb{R}$ de posto q com métrica e conexão compatível. Supõe-se que TM e E são orientados e *Spin*, com estruturas *Spin* dadas por

$$P_{Spin_p}(TM) \longrightarrow P_{SO_p}(TM) \text{ e } P_{Spin_q}(E) \longrightarrow P_{SO_q}(E), \tag{4.0.34}$$

onde $P_{SO_p}(TM)$ e $P_{SO_q}(E)$ são os fibrados dos referenciais orientados positivamente de TM e E. É considerado então o seguinte fibrado sobre M

$$P_{Spin_p \times Spin_q} := P_{Spin_p}(TM) \times_M P_{Spin_q}(E), \tag{4.0.35}$$

que é um fibrado $Spin_p \times Spin_q$-principal, com o qual é definido o seguinte fibrado associado

$$\Sigma := P_{Spin_p \times Spin_q} \times_\rho Cl_n, \tag{4.0.36}$$

e sua restrição

$$U\Sigma := P_{Spin_p \times Spin_q} \times_\rho Spin_n \subset \Sigma, \tag{4.0.37}$$

lembrando que ρ é a representação regular à esquerda.

Note novamente que este fibrado dos spinores Σ é um fibrado vetorial real cuja fibra é toda a álgebra de Clifford Cl_n e não, como habitual, um módulo complexo irredutível de Cl_n. Logo, elementos de Σ não são spinores autênticos.

O fibrado vetorial Σ é equipado com a derivada covariante ∇^Σ naturalmente associada às conexões spinoriais em $P_{Spin_p}(TM)$ e $P_{Spin_q}(E)$.

Observação 65. *O fibrado Σ é um fibrado spinorial em TM torcido por um fibrado spinorial em E. Para ver isso, considere as representações*

$$\rho_1 : Spin_p \to Aut_{\mathbb{R}}(Cl_p) \text{ e } \rho_2 : Spin_q \to Aut_{\mathbb{R}}(Cl_q), \tag{4.0.38}$$

dadas pela multiplicação à esquerda, e os respectivos fibrados associados

$$\Sigma_1 := P_{Spin_p} \times_{\rho_1} Cl_p \text{ e } \Sigma_2 := P_{Spin_q} \times_{\rho_2} Cl_q \tag{4.0.39}$$

equipados com as conexões naturais induzidas de $P_{Spin_p}(TM)$ e $P_{Spin_q}(E)$, ∇^1 e ∇^2. Portanto, do isomorfismo natural $Cl_n \simeq Cl_p \hat{\otimes} Cl_q$ segue que

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \tilde{\otimes} \Sigma_2 &\simeq \Sigma \\ \nabla^1 \tilde{\otimes} Id_{\Sigma_2} + Id_{\Sigma_1} \tilde{\otimes} \nabla^2 &\simeq \nabla^\Sigma. \end{aligned} \tag{4.0.40}$$

Denota-se, em seguida, por $\tau : Cl_n \to Cl_n$ o anti-automorfismo de Cl_n tal que

$$\tau(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) := x_k \cdot \dots \cdot x_2 \cdot x_1, \tag{4.0.41}$$

para $x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{R}^n \subset Cl_n$, com o qual é possível definir a seguinte aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : Cl_n \times Cl_n &\to Cl_n, \\ (\xi, \xi') &\mapsto \tau(\xi')\xi. \end{aligned} \tag{4.0.42}$$

Não é difícil ver que esta aplicação é $Spin_n$-invariante

$$\langle\langle g\xi, g\xi' \rangle\rangle = \tau(\xi')\tau(g)g\xi = \tau(\xi')\xi = \langle\langle \xi, \xi' \rangle\rangle, \tag{4.0.43}$$

e induz assim uma aplicação Cl_n-valorada

$$\begin{aligned} \langle\langle \cdot,\cdot\rangle\rangle : \Sigma\times\Sigma &\rightarrow Cl_n, \\ (\varphi,\varphi') &\mapsto \langle\langle [\varphi],[\varphi']\rangle\rangle\,, \end{aligned} \tag{4.0.44}$$

onde $\varphi=[p,[\varphi]]\in\Gamma(\Sigma)$, $\varphi'=[p,[\varphi']]\in\Gamma(\Sigma)$ e $p\in\Gamma(P_{Spin_p\times Spin_q})$ é um referencial spinorial.
Essa aplicação satisfaz as propriedades que serão apresentadas nos lemas a seguir.

Lema 66. *Se $\varphi,\psi\in\Gamma(\Sigma)$ e $X\in\Gamma(TM)$, então*

$$\begin{aligned} \langle\langle\varphi,\psi\rangle\rangle &= \tau\,\langle\langle\psi,\varphi\rangle\rangle\,, \\ \langle\langle X\cdot\varphi,\psi\rangle\rangle &= \langle\langle\varphi,X\cdot\psi\rangle\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.0.45}$$

Lema 67. *A conexão ∇^Σ definida no Lemma 66 é compatível com o produto $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$:*

$$X\,\langle\langle\varphi,\psi\rangle\rangle=\left\langle\left\langle\nabla^\Sigma_X\varphi,\psi\right\rangle\right\rangle+\left\langle\left\langle\varphi,\nabla^\Sigma_X\psi\right\rangle\right\rangle, \tag{4.0.46}$$

para $\varphi,\psi\in\Gamma(\Sigma)$ e $X\in\Gamma(TM)$.

Então, assim como feito por Friedrich, admite-se a priori que M é uma subvariedade *Spin* de $\mathbb{R}^n$ e $E\rightarrow M$ seu fibrado normal. Sabe-se que existe uma identificação do fibrado dos spinores de $\mathbb{R}^n$ restrito à M, $P_{Spin_n}(T\mathbb{R}^n)|_M\times_\rho Cl_n$, e o fibrado dos spinores Σ

$$\Sigma\simeq P_{Spin_n}(T\mathbb{R}^n)|_M\times_\rho Cl_n. \tag{4.0.47}$$

Duas conexões são então definidas em Σ: a conexão ∇^Σ já introduzida e a conexão $\nabla^{\Sigma\mathbb{R}^n}$ induzida de $P_{Spin_n}(T\mathbb{R}^n)$. Não é difícil de mostrar que essas conexões satisfazem a seguinte fórmula de Gauss spinorial

$$\nabla^{\Sigma\mathbb{R}^n}\varphi=\nabla^\Sigma\varphi+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi, \tag{4.0.48}$$

para $\varphi\in\Gamma(\Sigma)$, $X\in\Gamma(TM)$, onde $B:TM\times TM\rightarrow E$ é a segunda forma fundamental da imersão $M\hookrightarrow\mathbb{R}^n$. Logo, um spinor paralelo $\nabla^{\Sigma\mathbb{R}^n}\varphi=0$, implica em uma solução da seguinte equação

$$\nabla^\Sigma\varphi=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi. \tag{4.0.49}$$

Reciprocamente, seja M é uma variedade Riemanniana p-dimensional, $E\rightarrow M$ um fibrado vetorial sobre $\mathbb{R}$ de posto q com métrica e conexão compatível. Suponha que TM e E são orientados e *Spin*. Considere o fibrado dos spinores Σ, então a seguinte proposição é válida:

Proposição 68. *Assuma que $\varphi\in\Gamma(U\Sigma)$ é uma solução da Eq.(4.0.49), defina a forma Cl_n-valorada como*

$$\xi(X):=\langle\langle X\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle\,, \tag{4.0.50}$$

onde $X\in\Gamma(TM)$. Então

1. *ξ toma valores em $\mathbb{R}^n\subset Cl_n$;*

2. *ξ é uma 1-forma fechada: $d\xi=0$.*

Assim, assumindo que M é simplesmente conexa, desde que ξ é fechada, existe $F : M \to \mathbb{R}^n$ tal que $dF = \xi$. Com isso os autores expõem o resultado que segue.

Proposição 69. *O seguintes itens são válidos:*

1. *A aplicação $F : M \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão isométrica.*

2. *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_E & : & E \to M^2 \times \mathbb{R}^n \\ X & \in & E_m \mapsto (F(m), \xi(X)) \end{array} \tag{4.0.51}$$

   é uma isometria entre E e o fibrado normal $N(F(M^2))$ de $F(M)$ em $\mathbb{R}^n$, preservando conexão e segunda forma fundamental.

Por fim, tem-se o importante teorema:

Teorema 70. *Seja M é uma variedade Riemanniana p-dimensional simplesmente conexa, $E \to M$ um fibrado vetorial sobre $\mathbb{R}$ de posto q com métrica e conexão compatível, suponha que TM e E são orientados e Spin. Seja $B : TM \times TM \to E$ bilinear e simétrica. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe uma seção $\varphi \in \Gamma(U\Sigma)$ tal que*

$$\nabla^{\Sigma}\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \tag{4.0.52}$$

   para todo $X \in \Gamma(TM)$.

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \mathbb{R}^n$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

   Além disso, $dF = \xi$, onde ξ é a 1-forma $\mathbb{R}^n$ -valorada definida por

$$\xi(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle\,, \tag{4.0.53}$$

   para todo $X \in \Gamma(TM)$.

A fórmula de representação Eq.(4.0.53) generaliza a clássica fórmula de representação de Weierstrass.

Observação 71. *Tomando-se o traço da Eq.(4.0.52) obtém-se*

$$D\varphi = \frac{p}{2}\vec{H} \cdot \varphi, \tag{4.0.54}$$

onde $D = \sum_{j=1}^{p} e_j \cdot \nabla^{\Sigma}_{e_j}\varphi$ e $\vec{H} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} B(e_j, e_j)$ é o vetor curvatura média de M em $\mathbb{R}^n$. Essa equação de Dirac é conhecida por ser equivalente à Eq.(4.0.52) para os casos $p = 2, 3$ [10, 17, 18, 4, 5].

Considerando a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$; os autores demostram ainda, os Teoremas 72 e 73.

Teorema 72. *Seja M uma variedade Riemanniana p-dimensional simplesmente conexa, $E \to M$ um fibrado vetorial sobre $\mathbb{R}$ de posto q com métrica e conexão compatível, suponha que TM e E são orientados e Spin. Seja $B : TM \times TM \to E$ bilinear e simétrica. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe uma seção $\varphi \in \Gamma(U\Sigma)$ tal que*
$$\nabla^{\Sigma}\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi + \frac{1}{2}X \cdot \nu \cdot \varphi, \tag{4.0.55}$$
para todo $X \in \Gamma(TM)$, ν é o vetor unitário normal à $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \mathbb{S}^n$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

   Além disso, a fórmula de representação é dada por
$$F = \langle\langle \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{4.0.56}$$

Teorema 73. *Seja M uma variedade Riemanniana p-dimensional simplesmente conexa, $E \to M$ um fibrado vetorial sobre $\mathbb{R}$ de posto q com métrica e conexão compatível, suponha que TM e E são orientados e Spin. Seja $B : TM \times TM \to E$ bilinear e simétrica. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe uma seção $\varphi \in \Gamma(U\Sigma)$ tal que*
$$\nabla^{\Sigma}\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi - \frac{1}{2}X \cdot \nu \cdot \varphi, \tag{4.0.57}$$
para todo $X \in \Gamma(TM)$, ν é o vetor unitário normal à $\mathbb{H}^n$ em $\mathbb{R}^{n,1}$.

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \mathbb{S}^n$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

   Além disso, a fórmula de representação é dada por
$$F = \langle\langle \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \in \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n,1}. \tag{4.0.58}$$

Em 2017, **Bayard, Roth e Berenice Jimenez** [7] apresentaram essa caracterização para o caso de imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M em um grupo de Lie G equipado com uma métrica invariante à esquerda g.

Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. Considerando M uma variedade Riemanniana p-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial sobre $\mathbb{R}$ de posto q com métrica e conexão compatíveis. Supõe-se que TM e E são orientados e *Spin*, com estruturas *Spin* dadas por
$$P_{Spin_p(\mathfrak{g})}(TM) \longrightarrow P_{SO_p}(TM) \text{ e } P_{Spin_q(\mathfrak{g})}(E) \longrightarrow P_{SO_q}(E), \tag{4.0.59}$$
onde $P_{SO_p}(TM)$ e $P_{SO_q}(E)$ são os fibrados dos referenciais orientados positivamente de TM e E. É considerado então o seguinte fibrado sobre M
$$P_{Spin_p(\mathfrak{g})\times Spin_q(\mathfrak{g})} := P_{Spin_p(\mathfrak{g})}(TM) \times_M P_{Spin_q}(E), \tag{4.0.60}$$

que é um fibrado $Spin_p(\mathfrak{g}) \times Spin_q(\mathfrak{g})$-principal, com o qual é definido o seguinte fibrado de spinores associado

$$\Sigma := P_{Spin_p(\mathfrak{g})\times Spin_q(\mathfrak{g})} \times_\rho Cl(\mathfrak{g}), \tag{4.0.61}$$

e sua restrição

$$U\Sigma := P_{Spin_p(\mathfrak{g})\times Spin_q(\mathfrak{g})} \times_\rho Spin_n(\mathfrak{g}) \subset \Sigma, \tag{4.0.62}$$

lembrando que ρ é a representação regular à esquerda.

Denotando-se o antiautomorfismo $\tau : Cl(\mathfrak{g}) \to Cl(\mathfrak{g})$ definido como o da Eq.(4.0.41) é possível definir a seguinte aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : Cl(\mathfrak{g}) \times Cl(\mathfrak{g}) &\to Cl(\mathfrak{g}), \\ (\xi, \xi') &\mapsto \tau(\xi')\xi. \end{aligned} \tag{4.0.63}$$

que induz assim uma aplicação $Cl(\mathfrak{g})$-valorada

$$\begin{aligned} \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \Sigma \times \Sigma &\to Cl(\mathfrak{g}), \\ (\varphi, \varphi') &\mapsto \langle\langle [\varphi], [\varphi'] \rangle\rangle . \end{aligned} \tag{4.0.64}$$

Seja $B : TM \times TM \to E$ uma forma bilinear e simétrica, considere a conexão de Levi-Civita ∇^G de (G, g) e a seguinte aplicação

$$\Upsilon : \mathfrak{g} \to \bigwedge^2 \mathfrak{g}, \tag{4.0.65}$$

ta que para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\nabla^G_X Y = \Upsilon(X)Y. \tag{4.0.66}$$

Para enunciar o resultado principal desse trabalho os autores precisam fazer algumas outras suposições:

1. Existe um isomorfismo de fibrados

$$f : TM \oplus E \to M \times \mathfrak{g}, \tag{4.0.67}$$

que preserva métrica; esse isomorfismo permite definir a seguinte

$$\Pi : TM \oplus E \to \bigwedge^2 (TM \oplus E)\,, \tag{4.0.68}$$

tal que, para todo $X, Y \in \Gamma(TM \oplus E)$

$$f(\Pi(X)Y) = \Upsilon(f(X))(f(Y)). \tag{4.0.69}$$

2. Seja $Z = Z^T + Z^N \in \Gamma(TM \oplus E)$ então

$$\nabla_X Z = \Pi(X)Z - B(X, Z^T) + \mathcal{A}(X, Z^N), \tag{4.0.70}$$

onde $\mathcal{A}$ é dado pela Eq.(3.1.1).

Fixada essa notação os autores demonstram o seguinte teorema:

Teorema 74. *Seja M uma variedade Riemanniana p-dimensional simplesmente conexa, $E \to M$ um fibrado vetorial real de posto q com métrica e conexão compatíveis, suponha que TM e E são orientados e Spin. Seja $B : TM \times TM \to E$ uma forma bilinear e simétrica. Suponha que as equações de compatibilidade (4.0.69, 4.0.70) são satisfeitas. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe uma seção $\varphi \in \Gamma(U\Sigma)$ tal que*

$$\nabla^\Sigma \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi + \frac{1}{2}\Pi(X) \cdot \varphi, \tag{4.0.71}$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$.

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to G$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

Além disso, se φ é uma solução de 4.0.71, substituindo φ por $\varphi \cdot a$ ($a \in Spin(\mathfrak{g})$) se necessário, a seguinte 1-forma:

$$\xi(X) := \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle, \ \forall X \in TM,$$

é fechada e $\mathfrak{g}$-valorada. Assim a fórmula $F^*\omega_G = \xi$ [3] define uma imersão isométrica $F : M \to G$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B. Reciprocamente, uma imersão $M \to G$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B pode também ser escrita nessa forma.

[3] Aqui $\omega_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ é a forma de Maurer-Cartan de G.

Capítulo 5

Representação de Subvariedades $Spin^{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{R}^n$ através de spinores $Spin$-Clifford

Este capítulo é dedicado à apresentação das nossas contribuições. Os resultados aqui explicitados foram guiados, principalmente, por [6, 7, 4, 10]. No contexto de variedades quase-complexas a estrutura canônica, conforme vimos no capítulo 2, é a estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$. Portanto é natural nos perguntarmos se a formulação apresentada em [6, 7] se adapta ao caso de variedades $Spin^{\mathbb{C}}$. Respondendo a esta pergunta, neste capítulo descrevemos a representação spinorial de subvariedades $Spin^{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{R}^n$, onde é importante frisar seu caráter menos restritivo (Proposição (48)) do que o apresentado em [6, 7], pois a variedade M e o fibrado vetorial E sobre M considerados em nosso estudo são $Spin^{\mathbb{C}}$ e não necessariamente $Spin$.

5.1 Fórmula de Gauss para a estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$

5.1.1 Notação

Neste trabalho sempre que utilizarmos o substantivo subvariedades estaremos nos referindo ao conceito de subvariedade imersa. Lembre-se que que uma variedade M é dita subvariedade imersa de N se existe uma aplicação suave $F : M \to N$ injetiva com derivada $dF : TM \to TN$ injetiva (confira [34] pp.22).

Para fixarmos a notação, lembre-se que Cl_n denota a álgebra de Clifford real em $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual, $\mathbb{C}l_n = Cl_n \otimes \mathbb{C}$ é sua complexificação e os mapas de recobrimento duplos dos grupos $Spin$ são representados por

$$\begin{gathered}
\lambda_n : Spin(n) \to SO(n), \\
u \mapsto \lambda_n(u) \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n);\ \lambda_n(u)(v) := uvu^{-1}, \qquad (5.1.1)\\
\lambda_n^{\mathbb{C}} : Spin^{\mathbb{C}}(n) = \tfrac{Spin(n)\times S^1}{\mathbb{Z}_2} \to SO(n)\times S^1, \\
[u,s] \mapsto (\lambda_n(u), s^2). \qquad (5.1.2)
\end{gathered}$$

Será relevante para nosso estudo considerar a seguinte inclusão:

$$\begin{aligned}
SO(n)\times SO(m) &\subset SO(n+m) \\
(\lambda_n(u), \lambda_m(w)) &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\
(\lambda_n(u), \lambda_m(w))(v_1, v_2) &= (\lambda_n(u)v_1, \lambda_m(w)v_2). \qquad (5.1.3)
\end{aligned}$$

Definição 75. *Definimos o grupo Spin adaptado como*

$$\mathcal{S} := \{uv; u \in Spin(n), v \in Spin(m)\} \subset Spin(n+m) \tag{5.1.4}$$

e note que $\mathcal{S} = \lambda^{-1}_{(n+m)}\left(SO(n) \times SO(m)\right)$ *e* $\mathcal{S} \simeq \frac{Spin(n)\times Spin(m)}{(1,1),(-1,-1)}$.

Teremos que, $\lambda_{(n+m)}\Big|_{S} : \mathcal{S} \to SO(n) \times SO(m)$ é uma aplicação de recobrimento duplo, onde

$$\begin{aligned} \lambda_{(n+m)}\Big|_{S}(uw)(v_1, v_2) &= \lambda_{(n+m)}(uw)(v_1 + v_2) = \\ uw(v_1 + v_2)w^{-1}u^{-1} &= uv_1u^{-1} + wv_2w^{-1} = (uv_1u^{-1}, wv_2w^{-1}), \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

aqui identificamos $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ com $v_1 + v_2 \in \mathbb{R}^{n+m}$.

5.1.2 Estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ Adaptada

Nesta subseção, adaptamos a ideia apresentada em [2] para o caso de subvariedades $Spin^{\mathbb{C}}$. Seja Q uma variedade Riemanniana $(n+m)$-dimensional $Spin^{\mathbb{C}}$ e $M \hookrightarrow Q$ uma subvariedade n-dimensional $Spin^{\mathbb{C}}$. Dê a M a métrica induzida pela métrica de Q. Considere $P_{SO(n+m)}$ o fibrado dos referenciais positivamente orientados de Q e $P_{SO(n)}$ o fibrado dos referenciais positivamente orientados de M. P_{S^1} é o fibrado de linha associado à estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ de Q e $P^1_{S^1}$ é o fibrado S^1-principal associado à estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ de M.

Denotamos por $P_{SO(n+m)}\Big|_M$ o fibrado dos frames de Q restritos à M com grupo de estrutura $SO(n) \times SO(m)$. O mesmo para $P_{S^1}|_M$ com grupo de estrutura S^1.

Seja $e_1, ..., e_n$ uma base local positivamente orientada do fibrado tangente de M ao redor de p, e $f_1, ..., f_m$ uma base local positivamente orientada do fibrado normal E ao redor de p. Fixe $h = h_1 \oplus h_2 = (e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_m) : M \to P_{SO(n+m)}\Big|_M$ uma seção local do fibrado dos frames de Q restritos à M e $l : M \to P_{S^1}|_M$ uma seção local do fibrado S^1-principal associado. Sejam

$$\Lambda^{\mathbb{C}Q} : P_{Spin^{\mathbb{C}}_{(n+m)}} \to P_{SO(n+m)} \times P_{S^1}, \tag{5.1.6}$$

a estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ de Q e

$$\Lambda^{1\mathbb{C}} : P_{Spin^{\mathbb{C}}_{(n)}} \to P_{SO(n)} \times P^1_{S^1}, \tag{5.1.7}$$

a estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ de M.

Utilizando a inclusão natural $P_{SO(n+m)}\Big|_M \subset P_{SO(n+m)}$, defina o fibrado $\mathcal{S} \times S^1$-principal:

$$P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M := \left(\Lambda^{\mathbb{C}Q}\right)^{-1} \left(P_{SO(n+m)}\Big|_M \times P_{S^1}|_M\right). \tag{5.1.8}$$

Se denotarmos as funções de transição de $P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M$ por $\tilde{g}_{\alpha\beta} = [h_{\alpha\beta}, z_{\alpha\beta}] \in Spin^{\mathbb{C}}$ e as funções de transição de $P_{Spin^{\mathbb{C}}_{(n)}}$ por $\tilde{g}^1_{\alpha\beta} = \left[h^1_{\alpha\beta}, z^1_{\alpha\beta}\right] \in Spin^{\mathbb{C}}$ não é difícil definirmos uma estrutura $Spin^{\mathbb{C}}$ em E

$$\Lambda^{2\mathbb{C}Q} : P_{Spin^{\mathbb{C}}_{(m)}} \to P_{SO(m)} \times P^2_{S^1}, \tag{5.1.9}$$

onde o fibrado $P_{Spin^{\mathbb{C}}_{(m)}}$ é tal que suas funções de transição $\tilde{g}^2_{\alpha\beta} = \left[h^2_{\alpha\beta}, z^2_{\alpha\beta}\right]$ satisfazem $\tilde{g}^1_{\alpha\beta}\tilde{g}^2_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta}$.

As funções de transição que definem $P_{S^1}|_M$ são o produto das funções de transição de $P^1_{S^1}$ e $P^2_{S^1}$, existindo assim um morfismo canônico $\Phi : P^1_{S^1} \times_M P^2_{S^1} \to P_{S^1}|_M$ tal que $\Phi(p_1 \cdot s_1, p_2 \cdot s_2) = \Phi(p_1, p_2)s_1s_2$, $p_1 \in P^1_{S^1}$, $p_2 \in P^2_{S^1}$, $s_1, s_2 \in S^1$, que numa trivialização local faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} P^1_{S^1} \times_M P^2_{S^1} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & P_{S^1}|_M \arrow[d] \\ U_\alpha \times S^1 \times S^1 \arrow[r, "\phi_\alpha"] & U_\alpha \times S^1 \end{tikzcd} \tag{5.1.10}$$

onde $\phi_\alpha(x, r, s) = (x, rs)$.

Admita a seguinte 1-forma de conexão:

$$w^{\mathbb{C}Q} = w^Q \oplus iA : T(P_{SO(n+m)} \times P_{S^1}) \to \mathfrak{so}(n+m) \oplus i\mathbb{R}, \tag{5.1.11}$$

onde $w^Q : T(P_{SO(n+m)}) \to \mathfrak{so}(n+m)$ é a conexão de Levi-Civita de $P_{SO(n+m)}$ e $iA : TP_{S^1} \to i\mathbb{R}$ é uma conexão arbitrária em P_{S^1}.

A 1-forma de conexão em $\left. P_{SO(n+m)}\right|_M \times P_{S^1}|_M$ será definida por

$$\begin{aligned} & w^{\mathbb{C}ad} : T\left(\left. P_{SO(n+m)}\right|_M \times P_{S^1}|_M \right) \to (\mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{so}(m)) \oplus i\mathbb{R}, \\ & w^{\mathbb{C}ad}(dh(X) \oplus dl(X)) = (w^M \oplus w^\perp)(dh(X)) \oplus iA(dl(X)), \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

onde $w^M : TP_{SO(n)} \to \mathfrak{so}(n)$ é a conexão de Levi-Civita de $P_{SO(n)}$, $w^\perp : TP_{SO(m)} \to \mathfrak{so}(m)$ é a conexão normal. Para $p \in M$ e $X \in T_pM$ a fórmula de Gauss nos diz que, com respeito à decomposição $T_pQ = T_pM \oplus E_p$,

$$\begin{aligned} \nabla^Q_X &= \begin{pmatrix} \nabla^M_X & -B(X,\ )^* \\ B(X,\ ) & \nabla^\perp_X \end{pmatrix}, \\ \nabla^Q_X - \nabla^M_X \oplus \nabla^\perp_X &= \begin{pmatrix} 0 & -B(X,\ )^* \\ B(X,\ ) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

Que em forma matricial pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & w^{\mathbb{C}Q}(dh(X) \oplus dl(X)) - w^{\mathbb{C}ad}(dh(X) \oplus dl(X)) \\ = \ & w^Q(dh(X)) \oplus iA(dl(X)) - (w^M \oplus w^\perp)(dh(X)) \oplus iA(dl(X)) \\ = \ & \begin{pmatrix} 0 & -\langle B(X, e_i), f_j\rangle_{j,i} \\ \langle B(X, e_i), f_j\rangle_{i,j} & 0 \end{pmatrix} \oplus 0. \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

Considere $w^{Spin^{\mathbb{C}}Q} : TP_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)} \to \mathfrak{spin}(n+m) \oplus i\mathbb{R}$ a 1-forma levantada para $\mathfrak{spin}(n+m) \oplus i\mathbb{R}$, pelo isomorfismo $\mathfrak{spin}(n+m) \oplus i\mathbb{R} \simeq \mathfrak{so}(n+m) \oplus i\mathbb{R}$; e $w^{Spin^{\mathbb{C}}ad} : T\ \left. P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\right|_M \to \mathfrak{spin}(n) \oplus \mathfrak{spin}(m) \oplus i\mathbb{R} \subset \mathfrak{spin}(n+m) \oplus i\mathbb{R}$ a 1-forma levantada para $\mathfrak{spin}(n) \oplus \mathfrak{spin}(m) \oplus i\mathbb{R} \subset \mathfrak{spin}(n+m) \oplus i\mathbb{R}$:

$$\lambda^{\mathbb{C}}_{m*}\left(w^{Spin^{\mathbb{C}}Q}(dh(X) \oplus dl(X)) \right) = w^{\mathbb{C}Q}(dh(X) \oplus dl(X)); \tag{5.1.15}$$

$$\lambda^{\mathbb{C}}_{m*}\left(w^{Spin^{\mathbb{C}}ad}(dh(X) \oplus dl(X)) \right) = w^{\mathbb{C}ad}(dh(X) \oplus dl(X)). \tag{5.1.16}$$

Da Eq.(5.1.14) teremos:

$$
\begin{aligned}
& \lambda^{\mathbb{C}}_{m*}\left(w^{Spin^{\mathbb{C}}Q}(dh(X)\oplus dl(X))\right) - \lambda^{\mathbb{C}}_{m*}\left(w^{Spin^{\mathbb{C}}ad}(dh(X)\oplus dl(X))\right) \\
= & \begin{pmatrix} 0 & -\langle B(X,e_i),f_j\rangle_{j,i} \\ \langle B(X,e_i),f_j\rangle_{i,j} & 0 \end{pmatrix} \oplus 0, \\
& \left(w^{Spin^{\mathbb{C}}Q}(dh(X)\oplus dl(X))\right) - w^{Spin^{\mathbb{C}}ad}(dh(X)\oplus dl(X)) \\
= & \frac{1}{2}\sum_{i=1}\sum_{j=1}\langle B(X,e_i),f_j\rangle\, e_i\cdot f_j \oplus 0. \qquad (5.1.17)
\end{aligned}
$$

5.1.3 Fibrados $Spin^{\mathbb{C}}$-Clifford

Lembre-se que $Spin_{(n+m)} \subset Cl_{(n+m)}$, e usando esse fato já havíamos notado que é fácil incluir $Spin^{\mathbb{C}}_{(n+m)} \subset \mathbb{C}l_{(n+m)}$

Tome a representação regular à esquerda na álgebra $\mathbb{C}l_{(n+m)}$

$$
\begin{aligned}
\rho_{(n+m)} : \mathbb{C}l_{(n+m)} &\to End(\mathbb{C}l_{(n+m)}), \\
a &\mapsto \beta \mapsto a\beta, \qquad (5.1.18)
\end{aligned}
$$

sua restrição ao grupo $Spin^{\mathbb{C}}_{(n+m)}$ também será denotada por ρ. Note que essa representação não é irredutível, mas se quebra como soma de irredutíveis onde os módulos irredutíveis são os ideais minimais de $\mathbb{C}l_{(n+m)}$.

Como vimos anteriormente, existe uma aplicação natural $i : Spin_n \times Spin_m \to Spin_{(n+m)}$ dada pela concatenação, correspondente ao isomorfismo de álgebras de Clifford $i : \mathbb{C}l_n\hat{\otimes}\mathbb{C}l_m \simeq \mathbb{C}l_{(n+m)}$. Podemos definir os seguintes fibrados de spinores complexos

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits^{\mathbb{C}} Q \ &: = P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)} \times_{\rho_{(n+m)}} \mathbb{C}l_{(n+m)},\ \sum\nolimits^{\mathbb{C}} M := P_{Spin^{\mathbb{C}}n} \times_{\rho_n} \mathbb{C}l_{(n)}, \qquad (5.1.19)\\
\sum\nolimits^{\mathbb{C}} E \ &: = P_{Spin^{\mathbb{C}}m} \times_{\rho_m} \mathbb{C}l_{(m)},\ \sum\nolimits^{\mathbb{C}} Q\Big|_M := P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho_{(n+m)}} \mathbb{C}l_{(n+m)}. \qquad (5.1.20)
\end{aligned}
$$

Chamaremos esses fibrados de fibrados $Spin^{\mathbb{C}}$-Clifford.

Usando o isomorfismo $i : \mathbb{C}l_n\hat{\otimes}\mathbb{C}l_m \simeq \mathbb{C}l_{(n+m)}$ e o fato de que as funções de transição de $P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M$ são o produto das funções de transição de $P_{Spin^{\mathbb{C}}_n}$ e de $P_{Spin^{\mathbb{C}}_m}$, não é difícil obtermos:

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits^{\mathbb{C}} M\hat{\otimes}\sum\nolimits^{\mathbb{C}} E &= \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_{\rho_n} \mathbb{C}l_n\right)\hat{\otimes}\left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)} \times_{\rho_m} \mathbb{C}l_m\right) \qquad (5.1.21)\\
&\simeq \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_M P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right) \times_{\rho_n\hat{\otimes}\rho_m} \mathbb{C}l_n\hat{\otimes}\mathbb{C}l_m \qquad (5.1.22)\\
&\simeq \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_M P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right) \times_{\rho_{n+m}\circ i} \mathbb{C}l_{(n+m)} \qquad (5.1.23)\\
&\simeq P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho_{n+m}} \mathbb{C}l_{(n+m)}. \qquad (5.1.24)
\end{aligned}
$$

Por simplicidade, vamos suprimir o isomorfismo i. Denotaremos

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits^{ad\mathbb{C}} \ &: = \sum\nolimits^{\mathbb{C}} M\hat{\otimes}\sum\nolimits^{\mathbb{C}} E \simeq \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_M P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right) \times_{\rho_{n+m}} \mathbb{C}l_{(n+m)} \qquad (5.1.25)\\
N\sum\nolimits^{ad\mathbb{C}} \ &: = \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_M P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right) \times \rho_{n+m} Spin^{\mathbb{C}}_{(n+m)} \qquad (5.1.26)
\end{aligned}
$$

e fixe $\nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}, \nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}M}$ e $\nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}E}$ as conexões em $\sum^{\mathbb{C}} Q, \sum^{\mathbb{C}} M$ e $\sum^{\mathbb{C}} E$ respectivamente. A conexão em $\sum^{ad\mathbb{C}}$ será dada por

$$\nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}M\hat{\otimes}\Sigma E^{\mathbb{C}}} := \nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}M}\hat{\otimes}Id + Id\hat{\otimes}\nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}E} := \nabla^{\Sigma^{ad\mathbb{C}}} \tag{5.1.27}$$

a partir da qual, usando a Eq.(5.1.17), segue que:

$$\nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q} - \left(\nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}M}\hat{\otimes}Id + Id\hat{\otimes}\nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}E}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle B(X,e_i), f_j\rangle\, e_i\cdot f_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i\cdot B(X,e_i)\cdot \tag{5.1.28}$$

5.2 Um produto hermitiano $\mathbb{C}l_{(n+m)}$-valorado

Vamos definir o seguinte anti automorfismo

$$\begin{aligned} \tau \quad &: \quad \mathbb{C}l_{(n+m)} \to \mathbb{C}l_{(n+m)} \\ \tau(a\ e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}) \quad &: \quad = (-1)^k\bar{a}\ e_{i_k}\cdots e_{i_2}e_{i_1}, \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

onde $\{e_1,\cdots e_{(n+m)}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+m}$ e $a\in\mathbb{C}$. Para simplificar, podemos escrever $\tau(\xi)=\bar{\xi}$, $\xi\in\mathbb{C}l_{(n+m)}$.

Com isso podemos apresentar a seguinte:

Definição 76. *Seja o seguinte protudo hermitiano $\mathbb{C}l_{(n+m)}$-valorado*

$$\begin{aligned} \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle \quad &: \quad \mathbb{C}l_n\times\mathbb{C}l_n \to \mathbb{C}l_n \\ (\xi_1,\xi_2) \quad &\mapsto \quad \langle\langle\xi_1,\xi_2\rangle\rangle = \tau(\xi_2)\xi_1. \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Note que $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ é claramente $Spin^{\mathbb{C}}_{(n+m)}$-invariante:

$$\begin{aligned} \langle\langle(g\otimes s)\xi_1,(g\otimes s)\xi_2\rangle\rangle \quad &= \quad s\bar{s}\tau(\xi_2)\tau(g)g\xi_1 = \tau(\xi_2)\xi_1 = \langle\langle\xi_1,\xi_2\rangle\rangle\,, \\ g\otimes s \quad &\in \quad Spin^{\mathbb{C}}_{(n+m)}\subset\mathbb{C}l_{(n+m)}, \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

pois $Spin_{(n+m)}\subset\{g\in Cl^0_n;\bar{g}g=1\}$ e $s\in S^1\subset\mathbb{C}$.

Agora a Eq.(5.2.2) induz a seguinte aplicação $\mathbb{C}l_{(n+m)}$-valorada:

$$\begin{gathered} \sum\nolimits^{\mathbb{C}} Q\times\sum\nolimits^{\mathbb{C}} Q\to\mathbb{C}l_{(n+m)} \\ (\varphi_1,\varphi_2)=([p,[\varphi_1]],[p,[\varphi_2]])\mapsto\langle\langle[\varphi_1],[\varphi_2]\rangle\rangle=\tau([\varphi_2])[\varphi_1], \end{gathered} \tag{5.2.4}$$

onde $[\varphi_1]$, $[\varphi_2]$ são os representante de φ_1,φ_2 num dado $Spin^{\mathbb{C}}(n+m)$-referencial $p\in\Gamma\left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\right)$.

Lema 77. *A conexão $\nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}$ é compatível com o produto $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$*

Demonstração. Fixe $s=(e_1,...,e_{(n+m)}):U\subset M\subset Q\to P_{SO(n+m)}$ uma seção local do fibrado dos frames, $l:U\subset M\subset Q\to P_{s^1}$ uma seção local do fibrado S^1-principal, $w^Q:T(P_{SO(n+m)})\to so(n+m)$ a conexão de Levi-Civita de $P_{SO(n+m)}$ e $iA:TP_{S^1}\to i\mathbb{R}$ uma conexão arbitrária em P_{S^1}, denote por $w^Q(ds(X))=(w_{ij}(X))\in so(n+m)$, $iA(dl(X))=iA^l(X)$.

Se $\psi = [p, [\psi]]$ e $\psi' = [p, [\psi']]$ são seções de $\sum^{\mathbb{C}} Q$ teremos:

$$\nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}\psi = \left[p, X([\psi]) + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i<j} w_{ij}(X)e_ie_j \cdot [\psi] + \frac{1}{2}iA^l(X)[\psi]\right], \tag{5.2.5}$$

$$\left\langle\left\langle\nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}\psi, \psi'\right\rangle\right\rangle = \overline{[\psi']}\left(X([\psi]) + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i<j} w_{ij}e_ie_j \cdot [\psi] + \frac{1}{2}iA^l(X)[\psi]\right), \tag{5.2.6}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle\left\langle\psi, \nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}\psi'\right\rangle\right\rangle &= \overline{\left(X([\psi']) + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i<j} w_{ij}e_ie_j[\psi'] + \frac{1}{2}A^l[\psi']\right)}[\psi] \\
&= \left(X(\overline{[\psi']}) + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i<j} w_{ij}\overline{e_ie_j[\psi']} + \frac{1}{2}\overline{A^l[\psi']}\right)[\psi] \\
&= \left(X(\overline{[\psi']}) - \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i<j} w_{ij}\overline{[\psi']}e_ie_j - \frac{1}{2}A^l\overline{[\psi']}\right)[\psi],
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

então

$$\left\langle\left\langle\nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}\psi, \psi'\right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle\psi, \nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}\psi'\right\rangle\right\rangle = \overline{[\psi']}X(\xi) + X(\overline{[\psi']})[\psi], \tag{5.2.8}$$

$$X\left\langle\left\langle\psi, \psi'\right\rangle\right\rangle = X\left(\overline{\xi'}\xi\right) = X(\overline{\xi'})\xi + \overline{\xi'}X(\xi). \tag{5.2.9}$$

□

Lema 78. *A aplicação* $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle : \sum^{\mathbb{C}} Q \times \sum^{\mathbb{C}} Q \to \mathbb{C}l_{(n+m)}$ *satisfaz:*

1. $\langle\langle X \cdot \psi, \varphi\rangle\rangle = -\langle\langle\psi, X \cdot \varphi\rangle\rangle$, $\psi, \varphi \in \sum^{\mathbb{C}} Q$, $X \in TQ$.

2. $\tau\langle\langle\psi, \varphi\rangle\rangle = \langle\langle\varphi, \psi\rangle\rangle$, $\psi, \varphi \in \sum^{\mathbb{C}} Q$

Demonstração. 1. $\langle\langle X \cdot \psi, \varphi\rangle\rangle = \tau[\varphi][X \cdot \psi] = \tau[\varphi][X][\psi] = -\tau[\varphi]\tau[X][\psi] = -\langle\langle\psi, X \cdot \varphi\rangle\rangle$

2. $\tau\langle\langle\psi, \varphi\rangle\rangle = \tau(\tau[\varphi][\psi]) = \tau[\psi][\varphi] = \langle\langle\varphi, \psi\rangle\rangle$.

□

Note que a mesma ideia, produto e propriedades são válidas para os fibrados $\sum^{\mathbb{C}} Q$, $\sum^{\mathbb{C}} M$, $\sum^{\mathbb{C}} E$, $\sum^{ad\mathbb{C}}$.

5.3 Representação por spinores Spin-Clifford de Subvariedades $Spin^{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{R}^{n+m}$

Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial real de posto m e assuma que TM e E são orientados e $Spin^{\mathbb{C}}$. Denote por P_{SO_n} o fibrado dos frames de TM e por P_{SO_m} o fibrado dos frames de E. As respectivas estruturas $Spin^{\mathbb{C}}$ são representadas como

$$\Lambda^{1\mathbb{C}} : P_{Spin^{\mathbb{C}}_{(n)}} \to P_{SO(n)} \times P^1_{S^1}, \tag{5.3.1}$$

$$\Lambda^{2\mathbb{C}} : P_{Spin^{\mathbb{C}}_{(m)}} \to P_{SO(m)} \times P^2_{S^1}. \tag{5.3.2}$$

Defina aqui o fibrado S^1-principal P_{S^1} como o fibrado cujas funções de transição são definidas como o produto das funções de transição de $P^1_{S^1}$ e $P^2_{S^1}$. Não é difícil vermos assim que existe um morfismo canônninco entre fibrados: $\Phi : P^1_{S^1} \times_M P^2_{S^1} \to P_{S^1}$ com $\Phi(p^1 \cdot s^1, p^2 \cdot s^2) = \Phi(p^1, p^2)s^1s^2$, $p_1 \in P^1_{S^1}$, $p_2 \in P^2_{S^1}$, $s_1, s_2 \in S^1$, que numa trivialização local faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} P^1_{S^1} \times_M P^2_{S^1} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & P_{S^1} \arrow[d] \\ U_\alpha \times S^1 \times S^1 \arrow[r, "\phi_\alpha"] & U_\alpha \times S^1 \end{tikzcd} \tag{5.3.3}$$

onde $\phi_\alpha(x, r, s) = (x, rs)$.

Lembre-se que

$$\sum\nolimits^{ad\mathbb{C}} \; : \; = \sum\nolimits^{\mathbb{C}} M \otimes \sum\nolimits^{\mathbb{C}} E \simeq \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_M P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right) \times_{\rho_{n+m}} \mathbb{C}l_{(n+m)}, \tag{5.3.4}$$

$$N \sum\nolimits^{ad\mathbb{C}} \; : \; = \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_M P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right) \times_{\rho_{n+m}} Spin^{\mathbb{C}}_{(n+m)}. \tag{5.3.5}$$

Aqui $iA^1 : TP^1_{S^1} \to i\mathbb{R}$, $iA^2 : TP^2_{S^1} \to i\mathbb{R}$ são conexões arbitrárias em $P^1_{S^1}$ e $P^2_{S^1}$. Fixe seções locais $s = (e_1, \cdots, e_n) : U \to P_{SO_n}$, $l_1 : U \to P^1_{S^1}$, $l_2 : U \to P^2_{S^1}$, $l = \Phi(l_1, l_2) : U \to P_{S^1}$. Agora $iA : TP_{S^1} \to i\mathbb{R}$ é a conexão definida por $iA(d\Phi(l_1, l_2)) = iA_1(dl_1) + iA_2(dl_2)$. Estabelecida toda essa notação, teremos o seguinte:

Teorema 79. *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial sobre $\mathbb{R}$ de posto m, assuma que TM e E são orientadas e $Spin^{\mathbb{C}}$. Suponha que $B : TM \times TM \to N$ é uma aplicação simétrica e bilinear. Assim as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe uma seção $\varphi \in \Gamma(N \sum^{ad\mathbb{C}})$ tal que*

$$\nabla^{\Sigma^{ad\mathbb{C}}}_X \varphi = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \varphi + \frac{1}{2} i \; A^l(X) \cdot \varphi, \quad \forall X \in TM. \tag{5.3.6}$$

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \mathbb{R}^{(n+m)}$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

Além disso, a 1-forma definida por

$$\xi(X) := \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle, \quad \forall X \in TM. \tag{5.3.7}$$

é $\mathbb{R}^{(n+m)}$-valorada, fechada e $dF = \xi$.

Demonstração. 2) $\Rightarrow$ 1) Desde que $\mathbb{R}^{n+m}$ é contrátil, existe uma seção global $s : \mathbb{R}^{n+m} \to P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}$, e as correspondentes bases ortonormais[1] $h = (E_1, \cdots, E_{n+m}) : \mathbb{R}^{n+m} \to P_{SO(n+m)}$, e $l' : \mathbb{R}^{n+m} \to P_{S^1}$, $h = p_1 \circ \Lambda^{\mathbb{C}\mathbb{R}^{n+m}}(s)$, $l' = p_2 \circ \Lambda^{\mathbb{C}\mathbb{R}^{n+m}}(s)$. Fixe uma constante $[\varphi] \in Spin^{\mathbb{C}}(n+m) \subset \mathbb{C}l_{(n+m)}$ e defina o seguinte campo spinorial $\varphi = [s, [\varphi]] \in \sum^{\mathbb{C}} \mathbb{R}^{n+m} := P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)} \times \mathbb{C}l_{(n+m)}$; novamente denote $w^Q(dh(X)) = (w^h_{ij}(X)) \in \mathfrak{so}(n+m)$, $iA(dl'(X)) = iA^{l'}(X) \in i\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}_X \varphi &= \left[s, X([\varphi]) + \left\{\frac{1}{2} \sum\nolimits_{i<j} w^h_{ij}(X) E_i E_j + \frac{1}{2} i \; A^{l'}(X)\right\} \cdot [\varphi]\right] \\ &= \left[s, \frac{1}{2} i \; A^{l'}(X) \cdot [\varphi]\right]. \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

[1]Aqui a seção h é tal que $E_i(x) = (x, (0, \cdots, \underbrace{1}_{\text{i-ésima posição}}, \cdots, 0))$ onde $x \in \mathbb{R}^{n+m}$. Por isso segue que $w^h_{ij}(X) = 0, \forall X \in \Gamma(TM)$.

Numa seção local adaptada $\tilde{s} : U \subset M \subset \mathbb{R}^{n+m} \to P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \subset P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}$ ($\tilde{s} = s \cdot (g \otimes 1), g \in Spin_{n+m}, 1 \in S^1$), com as correspondentes bases locais ortonormais $\tilde{h} = (e_1, \cdots, e_{n+m}) : U \subset M \subset \mathbb{R}^{n+m} \to P_{SO(n+m)}\Big|_M$, e $l = l'|_M : U \subset M \subset \mathbb{R}^{n+m} \to P_{S^1}|_M$, a Eq.(5.3.8) é escrita para $\varphi = [\tilde{s}, \widetilde{[\varphi]}]$ como

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}\varphi &= \left[\tilde{s}, X(\widetilde{[\varphi]}) + \left\{\frac{1}{2}\sum\nolimits_{i<j} w_{ij}^{\tilde{h}}(X)e_ie_j + \frac{1}{2}i\ A^l(X)\right\} \cdot \widetilde{[\varphi]}\right] \\
&= \Big[\tilde{s}, X((g\otimes 1)^{-1}[\varphi]) + (g\otimes 1)^{-1}\left\{\frac{1}{2}\sum\nolimits_{i<j} w_{ij}^{h}(X)E_iE_j + \frac{1}{2}i\ A^{l'}(X)\right\}(g\otimes 1)\cdot(g\otimes 1)^{-1}[\varphi] \\
&\quad +(g\otimes 1)^{-1}d(g\otimes 1)^{-1}(X)(g\otimes 1)^{-1}[\varphi]\Big] \\
&= \left[\tilde{s}, \frac{1}{2}i\ A^l(X)\cdot(g\otimes 1)^{-1}[\varphi]\right] = \left[\tilde{s}, \frac{1}{2}i\ A^l(X)\cdot\widetilde{[\varphi]}\right] \qquad (5.3.9) \\
&= \frac{1}{2}i\ A^l(X)\cdot\varphi.
\end{aligned}$$

Finalmente aplicando a fórmula de Gauss spinorial Eq.(5.1.28)

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}\varphi - \nabla_X^{\Sigma^{ad\mathbb{C}}}\varphi &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i\cdot B(X,e_i)\cdot\varphi \\
\frac{1}{2}i\ A^l(X)\cdot\varphi - \nabla_X^{\Sigma^{ad\mathbb{C}}}\varphi &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i\cdot B(X,e_i)\cdot\varphi \\
\nabla_X^{\Sigma^{ad\mathbb{C}}}\varphi &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i\cdot B(X,e_i)\cdot\varphi + \frac{1}{2}i\ A^l(X)\cdot\varphi. \qquad (5.3.10)
\end{aligned}$$

1) $\Rightarrow$ 2) A ideia aqui é provar que a 1-form ξ Eq.(5.3.7) produz uma imersão preservando a métrica, a segunda forma fundamental e a conexão normal. Para isso, vamos apresentar os seguintes lemas:

Lema 80. *Suponha que $\varphi \in \Gamma(N\sum^{ad\mathbb{C}})$ satisfaz a Eq.(5.3.6) e defina ξ pela Eq.(5.3.7), então*

1. *ξ é uma 1-forma $\mathbb{R}^{(n+m)}$-valorada.*
2. *ξ é uma 1-forma fechada, $d\xi = 0$.*

Demonstração. 1. Se $\varphi = [p,[\varphi]], X = [p,[X]]$, onde $[\varphi]$ e $[X]$ representam φ e X num dado referencial $\tilde{s} \in \Gamma\left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right)$,

$$\xi(X) := \tau[\varphi][X][\varphi] \in \mathbb{R}^n \subset Cl_n \subset \mathbb{C}l_n,\ \text{pois } [\varphi] \in Spin^{\mathbb{C}}. \qquad (5.3.11)$$

2. Para simplificar suponha que no ponto $x_0 \in M$ tenhamos $\nabla^M X = \nabla^M Y = 0$, e escreva $\nabla_X^{\Sigma^{ad\mathbb{C}}}\varphi = \nabla_X\varphi$ e $\nabla^M X = \nabla X$,

$$\begin{aligned}
X(\xi(Y)) &= \langle\langle Y\cdot\nabla_X\varphi, \varphi\rangle\rangle + \langle\langle Y\cdot\varphi, \nabla_X\varphi\rangle\rangle = (id-\tau)\langle\langle Y\cdot\varphi, \nabla_X\varphi\rangle\rangle \\
&= (id-\tau)\left\langle\left\langle\varphi, \frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^{n} Y\cdot e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi - \frac{1}{2}A^l(X)iY\cdot\varphi\right\rangle\right\rangle, \qquad (5.3.12) \\
Y(\xi(X)) &= (id-\tau)\left\langle\left\langle\varphi, \frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^{n} X\cdot e_j\cdot B(Y,e_j)\cdot\varphi - \frac{1}{2}A^l(Y)iX\cdot\varphi\right\rangle\right\rangle, \qquad (5.3.13)
\end{aligned}$$

daqui, segue que

$$\begin{aligned} d\xi(X,Y) &= X(\xi(Y)) - Y(\xi(X)) \\ &= (id-\tau)\left\langle\left\langle \varphi, \frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\left[Y\cdot e_j\cdot B(X,e_j) - X\cdot e_j\cdot B(Y,e_j)\right]\cdot\varphi \right.\right. \\ &\quad \left.\left. +\frac{1}{2}i\left(A^l(Y)X - A^l(X)Y\right)\cdot\varphi\right\rangle\right\rangle \\ &= (id-\tau)\left\langle\left\langle \varphi, C\cdot\varphi\right\rangle\right\rangle, \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

com $C = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}[Y\cdot e_j\cdot B(X,e_j) - X\cdot e_j\cdot B(Y,e_j)] + \frac{1}{2}A^l(Y)iX - \frac{1}{2}A^l(X)iY$. Escreva $X = \sum_{k=1}^{n} x^k e_k$; $Y = \sum_{k=1}^{n} y^k e_k$ então

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{k=1}^{n} X\cdot e_k\cdot B(Y,e_k) &= \sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} x^k e_k\cdot e_j\cdot B(Y,e_j) \\ &= -B(Y,X) + \sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} x^k e_k\cdot e_j\cdot B(Y,e_j) \quad (5.3.15) \\ \sum\nolimits_{k=1}^{m} Y\cdot e_k\cdot B(X,e_k) &= \sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} y^k e_k\cdot e_j\cdot B(X,e_j) \\ &= -B(X,Y) + \sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} y^k e_k\cdot e_j\cdot B(X,e_j) \quad (5.3.16) \end{aligned}$$

das quais concluimos

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}\left[\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} e_k\cdot e_j\cdot\left[y^k B(X,e_j) - x^k B(Y,e_j)\right] + i(A^l(Y)X - A^l(X)Y)\right] \\ \tau([C]) &= -\frac{1}{2}\left[\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left[y^k B(X,e_j) - x^k B(Y,e_j)\right]\right]\cdot e_j\cdot e_k + \frac{i}{2}(A^l(Y)\,[X] - A^l(X)\,[Y]) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} e_k\cdot e_j\cdot\left[y^k B(X,e_j) - x^k B(Y,e_j)\right]\right] \\ &\quad +\frac{i}{2}(A^l(Y)\,[X] - A^l(X)\,[Y]) = [C]. \end{aligned} \tag{5.3.17}$$

O que implica que

$$d\xi(X,Y) = (id-\tau)\left\langle\left\langle\varphi, C\cdot\varphi\right\rangle\right\rangle = (id-\tau)(\tau[\varphi]\tau[C][\varphi]) = 0. \tag{5.3.18}$$

□

Do fato que M é simplesmente conexa e ξ é fechada, segue do lema de Poincaré que existe uma função

$$F : M \to \mathbb{R}^{(n+m)} \tag{5.3.19}$$

tal que $dF = \xi$. O próximo lema nos permite concluir a demonstração do teorema:

Lema 81. *1. A aplicação $F : M \to \mathbb{R}^{n+m}$, é uma imersão isométrica.*

2. A aplicação

$$\begin{aligned} \Phi_E &: N \to M\times\mathbb{R}^{n+m} \\ X &\in N_m \mapsto (F(m),\xi(X)) \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

é uma isometria entre E e o fibrado normal de $F(M)$ em $\mathbb{R}^{(n+m)}$, presevando conexão e segunda forma fundamental.

Demonstração. 1. Seja $X, Y \in \Gamma(TM \oplus E)$, consequentemente

$$\begin{aligned}
\langle \xi(X), \xi(Y) \rangle &= -\frac{1}{2}\left(\xi(X)\xi(Y) - \xi(Y)\xi(X)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\tau[\varphi][X][\varphi]\tau[\varphi][Y][\varphi] - \tau[\varphi][Y][\varphi]\tau[\varphi][X][\varphi]\right) \\
&= -\frac{1}{2}\tau[\varphi]\left([X][Y] - [Y][X]\right)[\varphi] = \tau[\varphi]\left(\langle X, Y \rangle\right)[\varphi] \\
&= \langle X, Y \rangle\, \tau[\varphi][\varphi] = \langle X, Y \rangle\,. \qquad (5.3.21)
\end{aligned}$$

Isso implica que F é uma isometria com sua imagem, e que Φ_N é um mapa de fibrados entre E e o fibrado normal de $F(M)$ em $\mathbb{R}^n$ que preserva a métrica das fibras.

2. Denote por B_F e ∇'^F a segunda forma fundamental e a conexão normal da imersão F respectivamente. Gostaríamos de mostrar que:

$$\begin{aligned}
i)\xi(B(X,Y)) &= B_F(\xi(X), \xi(Y)), \qquad (5.3.22) \\
ii)\xi(\nabla'_X \eta) &= (\nabla'^F_{\xi(X)}\xi(\eta)), \qquad (5.3.23)
\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $\eta \in \Gamma(E)$.

$i)$ Primeiramente note que:

$$B^F(\xi(X), \xi(Y)) := \{\nabla^F_{\xi(X)}\xi(Y)\}^{\perp} = \{X(\xi(Y))\}^{\perp}, \qquad (5.3.24)$$

onde o símbolo $\perp$ significa que estamos considerando a componente do vetor que é normal à imersão. Sabemos que

$$\begin{aligned}
X(\xi(Y)) &= (id - \tau)\left\langle\!\left\langle \varphi, \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} Y \cdot e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi - \frac{1}{2}A^l(X)iY \cdot \varphi \right\rangle\!\right\rangle \\
&= (id - \tau)\left\langle\!\left\langle \varphi, \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y^k e_k \cdot e_j \cdot B(X, e_j) - A^l(X)iY\right) \cdot \varphi \right\rangle\!\right\rangle \\
&= (id - \tau)\left\langle\!\left\langle \varphi, \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} y^j e_j \cdot e_j \cdot B(X, e_j)\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1, k\neq j}^{n} y^k e_k \cdot e_j \cdot B(X, e_j) - A^l(X)iY\right) \cdot \varphi \right\rangle\!\right\rangle \\
&= (id - \tau)\left\langle\!\left\langle \varphi, \frac{1}{2}\left(-B(X,Y) + D\right) \cdot \varphi \right\rangle\!\right\rangle, \qquad (5.3.25)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1, k\neq j}^{n} y^k e_k \cdot e_j \cdot B(X, e_j) - A^l(X)iY \\
\tau[D] &= [D]. \qquad (5.3.26)
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
X(\xi(Y)) &= \frac{1}{2}(id - \tau)\left\langle\!\left\langle \varphi, (-B(X,Y) + D) \cdot \varphi \right\rangle\!\right\rangle \\
&= -\tau[\varphi]\tau[B(X,Y)][\varphi] = \langle\!\langle \varphi, B(X,Y) \cdot \varphi \rangle\!\rangle \\
&= \xi(B(X,Y)). \qquad (5.3.27)
\end{aligned}$$

Portanto concluímos que

$$\begin{aligned} B^F(\xi(X),\xi(Y)) \quad &: \quad = B^F(\xi(X),\xi(Y)) := \{\nabla^F_{\xi(X)}\xi(Y)\}^{\perp} = \{X(\xi(Y))\}^{\perp} \\ &= \quad \{\xi(B(X,Y))\}^{\perp} = \xi(B(X,Y)), \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

aqui foi usado o fato que $F = \int \xi$ é uma isometria: $B(X,Y) \in E \Rightarrow \xi(B(X,Y)) \in TF(M)^{\perp}$. Portanto a afirmação $i)$ segue.

$ii)$ Primeiramente note que

$$\begin{aligned} \nabla^F_{\xi(X)}\xi(\eta) &= \{X(\xi(\eta))\}^{\perp} = \{X\langle\langle\eta\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle\}^{\perp} \\ &= \langle\langle\nabla_X\eta\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle^{\perp} + \langle\langle\eta\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle\rangle^{\perp} + \langle\langle\eta\cdot\varphi,\nabla_X\varphi\rangle\rangle^{\perp}. \end{aligned} \tag{5.3.29}$$

Vamos mostrar que:

$$\langle\langle\eta\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle\rangle^{\perp} + \langle\langle\eta\cdot\varphi,\nabla_X\varphi\rangle\rangle^{\perp} = 0. \tag{5.3.30}$$

De fato

$$\begin{aligned} &\langle\langle\eta\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle\rangle + \langle\langle\eta\cdot\varphi,\nabla_X\varphi\rangle\rangle \\ = \ &(id-\tau)\langle\langle\eta\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle\rangle \\ = \ &(-id+\tau)\left\langle\left\langle\left[\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\eta\cdot e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi - \frac{1}{2}A^l(X)i\eta\cdot\varphi\right],\varphi\right\rangle\right\rangle \\ = \ &(-id+\tau)\left\langle\left\langle\left[-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{p=1}^{m}\sum\nolimits_{k=1}^{m}n^n b^k_j e_j\cdot f_p\cdot f_k - \frac{1}{2}A^l(X)i\eta\right]\cdot\varphi,\varphi\right\rangle\right\rangle \\ = \ &(-id+\tau)\left\langle\left\langle\left[\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{p=1}^{m}n^n b^n_j e_j\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left.-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{p=1}^{m}\sum\nolimits_{k=1,k\neq p}^{m}n^n b^k_j e_j\cdot f_l\cdot f_k - \frac{1}{2}A^l(X)i\eta\right]\cdot\varphi,\varphi\right\rangle\right\rangle, \end{aligned} \tag{5.3.31}$$

da qual segue que

$$\begin{aligned} &\langle\langle\eta\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle\rangle + \langle\langle\eta\cdot\varphi,\nabla_X\varphi\rangle\rangle \\ = \ &\tau[\varphi][\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}n^l b^l_j e_j][\varphi] + \tau[\varphi][\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}n^l b^l_j e_j][\varphi] \\ = \ &\tau[\varphi][\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}n^l b^l_j e_j][\varphi] = \tau[\varphi][V][\varphi] =: \xi(V) \in TF(M) \\ \Rightarrow \ &\langle\langle\eta\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle\rangle^{\perp} + \langle\langle\eta\cdot\varphi,\nabla_X\varphi\rangle\rangle^{\perp} = 0. \end{aligned} \tag{5.3.32}$$

Concluindo

$$\nabla^F_{\xi(X)}\xi(\eta) = \langle\langle\nabla_X\eta\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle^{\perp} = \langle\langle\nabla_X\eta\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle^{\perp} = \xi(\nabla_X\eta)^{\perp} = \xi(\nabla'_X\eta). \tag{5.3.33}$$

Por fim $ii)$ segue.

$\square$

Com esses lemas acima o teorema está provado. $\square$

Observação 82. *O grupo* $Spin^{\mathbb{C}}$ *age naturalmente em* $N\sum^{ad\mathbb{C}}$ *por multiplicação à direita (essa ação à direita comuta com a ação à esquerda), e se* $\varphi = [p, [\varphi]] \in \Gamma(N\sum^{ad\mathbb{C}})$ *é uma solução da Eq.(5.3.6) e* $s = Spin^{\mathbb{C}}$*, então* $\varphi \cdot s = [p, [\varphi]] \cdot [p, s] = [p, [\varphi]s]$ *é também uma solução da Eq.(5.3.6):*

$$\begin{aligned} \nabla_X (\varphi \cdot s) &= (\nabla_X \varphi) \cdot s + \varphi \cdot \nabla_X s = (\nabla_X \varphi) \cdot s \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot (\varphi \cdot s) - Ai \cdot (\varphi \cdot s) \end{aligned} \tag{5.3.34}$$

Assim definindo uma imersão dada por

$$\begin{aligned} \xi^{\varphi \cdot s}(X) &= \langle\langle X \cdot (\varphi \cdot s), \varphi \cdot s \rangle\rangle = \tau[\varphi \cdot s][X][\varphi \cdot s] = \tau(s)\tau[\varphi][X][\varphi]s = \tau(a)\xi(X)a \\ \xi^{\varphi \cdot s} &= Ad(a) \circ \xi^{\varphi}. \end{aligned} \tag{5.3.35}$$

Note que $Ad(a) \in SO(n+m)$*, então* $F^{\varphi \cdot s}$ *e* F^{φ} *diferem por um movimento rígido*

$$\begin{aligned} \int \xi^{\varphi \cdot s} &= \int Ad(a) \circ \xi^{\varphi} + constante. \\ F^{\varphi \cdot s} &= Ad(a) \circ F^{\varphi} + constante. \end{aligned} \tag{5.3.36}$$

5.4 O teorema fundamental de subvariedades

Mantenha a notação das seções anteriores, denote por $\mathcal{A} : E \times TM \to TM$ a forma bilinear definida por:

$$\langle \mathcal{A}(N, X), Y \rangle_M := \langle B(X, Y), N \rangle_E \tag{5.4.1}$$

Seja R e R^E, respectivamente, os tensores de curvatura das conexões métricas ∇ em TM e ∇^E em E. Assim, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para a forma bilinear simétrica B são respectivamente:

1. Equação de Gauss:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle_M &= \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle_N - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle_E, \\ \langle R(X, Y)Z, W \rangle_M &= \langle \mathcal{A}(B(Y, Z), X), W \rangle_M - \langle \mathcal{A}(B(X, Z), Y), W \rangle_M. \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

2. Equação de Codazzi:

$$(\nabla_X B)(Y, Z) = (\nabla_Y B)(X, Z). \tag{5.4.3}$$

3. Equação de Ricci:

$$\left\langle R^E(X, Y)N, Q \right\rangle_E = \langle B(X, \mathcal{A}(N, Y)), Q \rangle_E - \langle B(Y, \mathcal{A}(N, X)), Q \rangle_E \tag{5.4.4}$$

Agora, estamos em condições de enunciar e provar:

Proposição 83. *As equações de Gauss, Codazzi e Ricci são equivalentes à existência de uma solução da Eq.(5.3.6).*

Demonstração. Assuma que $\varphi \in \Gamma(N\sum^{ad\mathbb{C}})$ é solução da Eq.(5.3.6), para simplificar, novamente suponha que em $x_0 \in M$ $\nabla X = \nabla Y = 0$ ($[X,Y]=0$), assim

$$
\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y\varphi &= \nabla_X\left(-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^n e_j\cdot B(Y,e_j)\cdot\varphi+\frac{1}{2}A^l(Y)i\cdot\varphi\right)= \\
&= \left(-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^n e_j\cdot(\nabla_X B)(Y,e_j)\cdot\varphi\right)+\left(-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^n e_j\cdot B(Y,e_j)\cdot\nabla_X\varphi\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}X(A^l(Y))i\cdot\varphi+\frac{1}{2}A^l(Y)i\cdot\nabla_X\varphi \\
&= \left(-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^n e_j\cdot(\nabla_X B)(Y,e_j)\cdot\varphi\right)-\left(\frac{1}{4}\sum\nolimits_{j=1}^n\sum\nolimits_{k=1}^n e_j\cdot e_k\cdot B(Y,e_j)\cdot B(X,e_k)\cdot\varphi\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^n\frac{1}{2}A(X)ie_j\cdot B(Y,e_j)\cdot\varphi+X(\frac{1}{2}A(Y))i\cdot\varphi \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{k=1}^n\frac{1}{2}A^l(Y)ie_k\cdot B(X,e_k)\cdot\varphi \\
&\quad +\frac{1}{4}A^l(Y)A^l(X)\cdot\varphi, \qquad (5.4.5) \\
\nabla_Y\nabla_X\varphi &= \left(-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^n e_j\cdot(\nabla_Y B)(X,e_j)\cdot\varphi\right)-\left(\frac{1}{4}\sum\nolimits_{j=1}^n\sum\nolimits_{k=1}^n e_j\cdot e_k\cdot B(X,e_j)\cdot B(Y,e_k)\cdot\varphi\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^n(\frac{1}{2}A^l(Y)i)e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi+Y(\frac{1}{2}A^l(X))i\cdot\varphi \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^n\frac{1}{2}A^l(X)ie_l\cdot B(Y,e_l)\cdot\varphi \\
&\quad +\frac{1}{4}A^l(X)A^l(Y)\cdot\varphi, \qquad (5.4.6) \\
\nabla_{[X,Y]}\varphi &= -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^n e_l\cdot B([X,Y],e_l)\cdot\varphi+\frac{1}{2}A^l([X,Y])i\cdot\varphi=0. \qquad (5.4.7)
\end{aligned}
$$

Agora, fica fácil colocar as peças no lugar

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)\varphi\ &:= \nabla_X\nabla_Y\varphi-\nabla_Y\nabla_X\varphi-\nabla_{[X,Y]}\varphi \\
&= \frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^n e_j\cdot((\nabla_Y B)(X,e_j)-(\nabla_X B)(Y,e_j))\cdot\varphi \\
&\quad +\frac{1}{4}\sum\nolimits_{j=1}^n\sum\nolimits_{k=1,k\neq j}^n e_j\cdot e_k\cdot[B(X,e_j)\cdot B(Y,e_k)-B(Y,e_j)\cdot B(X,e_k)]\cdot\varphi \\
&\quad -\frac{1}{4}\sum\nolimits_{j=1}^n[B(X,e_j)\cdot B(Y,e_j)-B(Y,e_j)\cdot B(X,e_j)]\cdot\varphi \\
&\quad +i\left(\frac{1}{2}X(A^l(Y))-\frac{1}{2}Y(A^l(X))\right)\cdot\varphi. \qquad (5.4.8)
\end{aligned}
$$

Vamos considerar cada termo separadamente

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A} \quad : \quad &= \frac{1}{4}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{k=1,k\neq j}^{n} e_j\cdot e_k\cdot[B(X,e_j)\cdot B(Y,e_k)-B(Y,e_j)\cdot B(X,e_k)] \\
&= \frac{1}{4}\sum\nolimits_{k\neq j}^{n} e_j\cdot e_k\cdot B(X,e_j)\cdot B(Y,e_k)-\frac{1}{4}\sum\nolimits_{k\neq j}^{n} e_k\cdot e_j\cdot B(Y,e_k)\cdot B(X,e_j) \\
&= \frac{1}{4}\sum\nolimits_{k\neq j}^{n} e_j\cdot e_k\cdot B(X,e_j)\cdot B(Y,e_k)+\frac{1}{4}\sum\nolimits_{k\neq j}^{n} e_j\cdot e_k\cdot B(Y,e_k)\cdot B(X,e_j) \\
&= -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{k\neq j}^{n}\langle B(X,e_j),B(Y,e_k)\rangle\, e_j\cdot e_k \\
&= -\frac{1}{4}\sum\nolimits_{k\neq j}^{n}(\langle B(X,e_j),B(Y,e_k)\rangle-\langle B(X,e_k),B(Y,e_j)\rangle)\, e_j\cdot e_l, \qquad (5.4.9)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B}: \quad &= \frac{1}{4}\sum\nolimits_{j=1}^{n}[B(Y,e_j)\cdot B(X,e_j)-B(X,e_j)\cdot B(Y,e_j)] \\
&= \frac{1}{4}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{k=1}^{m}\sum\nolimits_{p=1}^{m}[(\langle B(Y,e_j),f_p\rangle f_p)\cdot(\langle B(X,e_j),f_k\rangle f_k) \\
&\quad -(\langle B(X,e_j),f_p\rangle f_p)\cdot(\langle B(Y,e_j),f_k\rangle f_k)] \\
&= \frac{1}{4}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{k=1}^{m}\sum\nolimits_{p=1}^{m}[\langle B(Y,e_j),f_p\rangle\langle B(X,e_j),f_k\rangle-\langle B(X,e_j),f_p\rangle\langle B(Y,e_j),f_k\rangle]\, f_pf_k \\
&= \frac{1}{4}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sum\nolimits_{k=1}^{m}\sum\nolimits_{p=1}^{m}[\langle e_j,\mathcal{A}(f_p,Y)\rangle\langle e_j,\mathcal{A}(f_k,X)\rangle-\langle e_j,\mathcal{A}(f_p,X)\rangle\langle e_j,\mathcal{A}(f_k,Y)\rangle]\, f_pf_k \\
&= \frac{1}{4}\sum\nolimits_{k=1}^{m}\sum\nolimits_{p=1}^{m}[\langle B(X,\mathcal{A}(f_p,Y)),f_k\rangle-\langle B(Y,\mathcal{A}(f_p,X)),f_k\rangle]\, f_pf_k. \qquad (5.4.10)
\end{aligned}
$$

Mas, lembre-se que a conexão spinorial (Eq.(2.2.24)) satisfaz:

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)\varphi &= \frac{1}{4}\sum_{i,j}^{n}\left\langle R^T(X,Y)(e_i),e_j\right\rangle e_ie_j\cdot\varphi+\frac{1}{4}\sum_{i,j}^{m}\left\langle R^N(X,Y)(f_i),f_j\right\rangle f_if_j\cdot\varphi \\
&\quad +\frac{i}{2}\left(X(A^{\tilde{l}}(Y))-Y(A^{\tilde{l}}(X))\right)\cdot\varphi \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j}^{n}\left\langle R^T(X,Y)(e_i),e_j\right\rangle e_ie_j\cdot\varphi+\frac{1}{4}\sum_{i,j}^{m}\left\langle R^N(X,Y)(f_i),f_j\right\rangle f_if_j\cdot\varphi \\
&\quad +\frac{i}{2}\left(X(A^{l}(Y))-Y(A^{l}(X))\right)\cdot\varphi. \qquad (5.4.11)
\end{aligned}
$$

Agora comparando a Eq.(5.4.8) com a Eq.(5.4.11) e observando que $[\varphi]\in Spin^{\mathbb{C}}$ é inversível, teremos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j\cdot((\nabla_Y B)(X,e_j)-(\nabla_X B)(Y,e_j))=0 \\
&\quad\Rightarrow (\nabla_Y B)(X,e_j)-(\nabla_X B)(Y,e_j)=0, \qquad (5.4.12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A} \quad &= \quad \frac{1}{4}\sum_{l\neq j}^{n}[\langle B(X,e_l),B(Y,e_j)\rangle-\langle B(X,e_j),B(Y,e_l)\rangle]\, e_j\cdot e_l=\frac{1}{4}\sum_{j,l}^{n}\left\langle R^T(X,Y)(e_j),e_l\right\rangle e_je_l \\
&\Rightarrow \quad \langle B(X,e_j),B(Y,e_l)\rangle-\langle B(Y,e_j),B(X,e_l)\rangle=\left\langle R^T(X,Y)(e_j),e_l\right\rangle, \qquad (5.4.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B} &= \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left[\langle B(X,\mathcal{A}(f_l,Y)),f_k\rangle - \langle B(Y,\mathcal{A}(f_l,X)),f_k\rangle\right] f_l f_k = \frac{1}{4}\sum_{l,k}^{m}\left\langle R^N(X,Y)(f_l),f_k\right\rangle f_l f_k \\
\Rightarrow &\left\langle R^N(X,Y)f_l,f_k\right\rangle = \langle B(X,\mathcal{A}(f_l,Y)),f_k\rangle - \langle B(Y,\mathcal{A}(f_l,X)),f_k\rangle . \qquad (5.4.14)
\end{aligned}
$$

Assim, isso implica que se $\varphi \in \Gamma(N\sum^{ad\mathbb{C}})$ é uma solução da Eq.(5.3.6), teremos que as equações de Gauss, Ricci e Codazzi são satisfeitas.

Suponha agora que as equações de Gauss, Ricci e Codazzi são satisfeitas para as conexões ∇^T e ∇^E. Para todo $\varphi \in \Gamma(\sum^{ad\mathbb{C}})$, defina a seguinte derivada covariante:

$$
\nabla'_X\varphi = \nabla_X\varphi - E_X\varphi, \qquad (5.4.15)
$$

onde E é dado por

$$
E_X\varphi = -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^{n} e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi + \frac{1}{2}A^l(X)i\cdot\varphi. \qquad (5.4.16)
$$

Do mesmo modo que fizemos anteriormente, é simples verificarmos que

$$
\begin{aligned}
R'(X,Y)\varphi &= \frac{1}{2}\sum\nolimits_{j=1}^{n} e_j\cdot((\nabla_Y B)(X,e_j) - (\nabla_X B)(Y,e_j))\cdot\varphi \\
&+\mathbb{A}\cdot\varphi + \mathbb{B}\cdot\varphi + \frac{i}{2}\left(X(A^l(Y)) - Y(A^l(X))\right)\cdot\varphi \\
&-\frac{1}{4}\sum\nolimits_{i,j}^{n}\left\langle R^T(X,Y)(e_i),e_j\right\rangle e_ie_j\cdot\varphi + \frac{1}{4}\sum\nolimits_{i,j}^{m}\left\langle R^N(X,Y)(f_i),f_j\right\rangle f_if_j\cdot\varphi \\
&+\frac{i}{2}\left(X(A^l(Y)) - Y(A^l(X))\right)\cdot\varphi = 0. \qquad (5.4.17)
\end{aligned}
$$

Como estamos supondo que as equações de Gauss, Ricci e Codazzi são satisfeitas, então ∇'_X é uma conexão flat. Lembre-se que uma conexão flat num fibrado vetorial sempre admite uma base de seções locais paralelas ([13] pp.5) $s_\alpha : U\subset M \to \sum^{ad\mathbb{C}}, \alpha = 1,\cdots,\dim \mathbb{C}l_{(n+m)}$

$$
\nabla'_X s_\alpha = 0, \qquad (5.4.18)
$$

Com isso basta tomar uma combinação inteira adequada que teremos uma solução local da Eq.(5.3.6). Assim, demonstramos que as equações de Gauss, Ricci e Codazzi são equivalentes à existência de uma solução da Eq.(5.3.6). □

Mantendo as hipóteses sobre M e E conseguimos, como consequência, a seguinte

Proposição 84. *Assuma que (M,g) seja uma variedade n-dimensional, Riemanniana, Spin$^{\mathbb{C}}$, simplesmente conexa e que a aplcação $B: TM\times TM \to E$ é bilinear e simétrica, satisfazendo as equações de Gauss, Ricci e Codazzi. Então existe uma imersão isométrica de M em $\mathbb{R}^{n+m}$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

Capítulo 6

Representação Spinorial de Subvariedades de $\mathbb{R}^n$ através de Spinores de Ideais

Existe uma literatura tanto na área de física quanto em matemática na qual se olham representações complexas irredutíveis das álgebras de Clifford complexas para a definição do conceito de spinores.

Na parte de imersões, os trabalhos originais de Friedrich [10] e de Morel [24] consideram spinores definidos a partir de representações irredutíveis. Os trabalho subsequentes, por vezes, usam representações em outros locais, como por exemplo representações reais [4] e representações Spin-Clifford como o caso do Bayard [6], [7], ou seja, não são spinores no sentido clássico da palavra.

No capítulo anterior apresentamos, inspirados pelos trabalhos de Bayard [4], [6], [7], uma caracterização spinorial de imersões isométricas de variedades Riemannianas $Spin^{\mathbb{C}}$ de dimensão arbitrária em algum $\mathbb{R}^n$. A contribuição que apresentamos neste capítulo é respondermos como relacionamos nosso resultado do capítulo 5 com spinores clássicos.

6.1 Representação por Ideais e seus fibrados de spinores

Seja Q uma variedade Riemanniana $(n+m)$-dimensional $Spin^{\mathbb{C}}$ e $M \hookrightarrow Q$ uma variedade imersa n-dimensional $Spin^{\mathbb{C}}$ com fibrado normal E. Dê à M a métrica induzida de Q. Mantenha, nesta seção, as mesmas notações da seção 5.1.2.

Consideremos aqui as representações regulares à esquerda irredutíveis nos ideais minimais de $\mathbb{C}l_{(n+m)}$, conforme notação estabelecida na Seção (1.5)

$$\begin{array}{rcl} \rho_i^n & : & \mathbb{C}l_{2k} \to End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}l_{2k}\mathrm{f}_i) = End_{\mathbb{C}}(I_i^{(2k)}), i = 1, \cdots, 2^k, \\ a & \mapsto & \rho_i^n(a) : \beta\mathrm{f}_i \mapsto a\beta\mathrm{f}_i, \quad \text{para o caso } n = 2k \text{ par.} \\ \rho_{i;l}^n & : & \mathbb{C}l_{2k+1} \to End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}l_{(2k+1)}\mathrm{f}_{i;l}) = End_{\mathbb{C}}(I_{i;l}^{(2k+1)}), i = 1, \cdots, 2^k, l = 0, 1, \\ a & \mapsto & \rho_{i;l}^n(a) : \beta\mathrm{f}_{i;l} \mapsto a\beta\mathrm{f}_{i;l}, \quad \text{para o caso } n = 2k+1 \text{ ímpar.} \end{array} \tag{6.1.1}$$

Suas restrições ao grupo $Spin^{\mathbb{C}}_{(n+m)}$ também serão denotadas por ρ_i ou $\rho_{i;l}$. Lembre-se que as representações $\rho_1 \simeq \cdots \simeq \rho_{2^k}$ são equivalentes, assim como $\rho_{1;l} \simeq \cdots \simeq \rho_{2^k;l}$, $l = 0, 1$ também são equivalentes.

No que segue, sempre considerando as paridades de m e n, suprimiremos os índices i, j, l, quando não ouver risco de confusão. Uma descrição mais detalhada dos fibrados abaixo pode ser encontrada no Apêndice A.

Dadas essas representações irredutíveis, definimos os seguintes fibrados de spinores complexos:

$$\begin{aligned}\sum\nolimits^{\mathbb{C}} M \; &: = P_{Spin^{\mathbb{C}}_n} \times_{\rho^n} I^n, \; \sum\nolimits^{\mathbb{C}} E := P_{Spin^{\mathbb{C}}_m} \times_{\rho^m} I^m, \\ \sum\nolimits^{\mathbb{C}} Q \; &: = P_{Spin^{\mathbb{C}}_{(n+m)}} \times_{\rho^{(n+m)}} I^{(n+m)}, \; \sum\nolimits^{\mathbb{C}} Q\Big|_M := P_{Spin^{\mathbb{C}}_{(n+m)}}\Big|_M \times_{\rho^{(n+m)}} I^{(n+m)}.\end{aligned}$$

Utilizando as equações (1.6.1, 1.6.4, 1.6.5, 1.6.7) apresentadas na Seção (1.6) e o fato de que as funções de transição de $P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M$ são o produto das funções de transição de $P_{Spin^{\mathbb{C}}n}$ e de $P_{Spin^{\mathbb{C}}m}$, não é difícil obtermos:

Para o caso que n e m não são ambos ímpares:

$$\sum\nolimits^{ad\mathbb{C}} := \sum\nolimits^{\mathbb{C}} M \otimes \sum\nolimits^{\mathbb{C}} E \simeq \sum\nolimits^{\mathbb{C}} Q\Big|_M .$$

Para o caso que n e m são ambos ímpares:

$$\sum\nolimits^{ad\mathbb{C}} := \left(\sum\nolimits^{\mathbb{C}} M \otimes \sum\nolimits^{\mathbb{C}} E\right) \oplus \left(\sum\nolimits^{\mathbb{C}} M \otimes \sum\nolimits^{\mathbb{C}} E\right) \simeq \sum\nolimits^{\mathbb{C}} Q\Big|_M . \tag{6.1.2}$$

Fixe $\nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}, \nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}M}$ e $\nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}E}$ as conexões em $\sum^{\mathbb{C}} Q, \sum^{\mathbb{C}} M$ e $\sum^{\mathbb{C}} E$ respectivamente. A conexão em $\sum^{ad\mathbb{C}}$ será dada por

$$\nabla^{\Sigma^{ad\mathbb{C}}} := \nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}M} \otimes Id + Id \otimes \nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}E}, \tag{6.1.3}$$

a partir da qual, usando a Eq.(5.1.17), segue que:

$$\nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q} - \nabla_X^{\Sigma^{ad\mathbb{C}}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle B(X, e_i), f_j\rangle \, e_i \cdot f_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot B(X, e_i) \cdot \tag{6.1.4}$$

6.2 Um produto hermitiano $\mathbb{C}$-valorado no fibrado dos spinores

Vamos definir o seguinte antiautomorfismo

$$\begin{aligned}\tau \; &: \; \mathbb{C}l_n \to \mathbb{C}l_n \\ \tau(a \; e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}) \; &: \; = (-1)^k \bar{a} \; e_{i_k} \cdots e_{i_2} e_{i_1},\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

onde $\{e_1, \cdots e_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}l_n$ e $a \in \mathbb{C}$. Para simplificar, podemos escrever $\tau(\xi) = \bar{\xi}$, $\xi \in \mathbb{C}l_n$.

Lema 85. *Quando consideramos o isomorfismo (Seção 1.5) de $\mathbb{C}l_n$ com $\mathbb{C}(2^{\frac{n}{2}})$ ou $\mathbb{C}(2^{\frac{n-1}{2}}) \oplus \mathbb{C}(2^{\frac{n-1}{2}})$ o antiautomorfismo τ se traduz como o conjugado complexo na álgebra de matrizes.*

Demonstração. Se $n = 2k$ é par, considere o isomorfismo $i_{2k} : \mathbb{C}l_{2k} \to \mathbb{C}(2^k)$ e seja a representação regular à esquerda

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(2^k) \; &\to \; End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2^k}), \\ &A \mapsto i_{2k}(v)A.\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Sabemos ([11] pp.24) que existe em $\mathbb{C}^{2^k}$ um produto hermitiano $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tal que

$$\begin{aligned} \langle i_{2k}(v)A, B\rangle &= -\langle A, i_{2k}(v)B\rangle\,, \\ \forall A,B &\in \mathbb{C}^{2^k}; v\in\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}l_n, \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

mas $\tau(v)=-v$, portanto

$$\begin{aligned} \langle i_{2k}(v)A, B\rangle &= \langle A, i_{2k}(\tau(v))B\rangle\,, \\ \forall A,B &\in \mathbb{C}^{2^k}; v\in\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}l_n. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Assim , $i_{2k}(\tau(v))$ é o operador adjunto de $i_{2k}(v)$ com relação ao produto $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sem perda de generalidade, pois podemos escolher uma base conveniente, temos que $i_{2k}(\tau(v))$ é a matrix transposta conjugada de $i_{2k}(v)$. Como isso é válido para vetores então é válido para todo $\varphi\in\mathbb{C}l_n$, i.e.

$$\begin{aligned} i_{2k}(\tau(\varphi)) &= (i_{2k}(\varphi))^*\,, \\ \forall\varphi &\in \mathbb{C}l_n. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Ou seja, segundo o isomorfismo i_{2k}, o antiautomorfismo τ se traduz como o conjugado complexo na álgebra de matrizes.

Note que o mesmo vale se $n=2k+1$ ímpar, basta considerar as duas representações naturais não equivalentes $\mathbb{C}(2^k)\oplus\mathbb{C}(2^k)\to End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2^k})$. □

Com isso podemos apresentar a seguinte definição:

Definição 86. *Seja o seguinte produto hermitiano $\mathbb{C}l_n$-valorado*

$$\begin{aligned} \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle &: \mathbb{C}l_n\times\mathbb{C}l_n\to\mathbb{C}l_n \\ (\xi_1,\xi_2) &\mapsto \langle\langle\xi_1,\xi_2\rangle\rangle=\tau(\xi_2)\xi_1. \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Observação 87. *Note que são válidas as seguintes afirmações:*

1. $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ *é claramente $Spin_n^{\mathbb{C}}$-invariante:*

$$\begin{aligned} \langle\langle(g\otimes s)\xi_1,(g\otimes s)\xi_2\rangle\rangle &= s\bar{s}\tau(\xi_2)\tau(g)g\xi_1=\tau(\xi_2)\xi_1=\langle\langle\xi_1,\xi_2\rangle\rangle\,, \\ g\otimes s &\in Spin_n^{\mathbb{C}}\subset\mathbb{C}l_n, \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

pois $Spin_n\subset\{g\in Cl_n^0;\bar{g}g=1\}$ e $s\in S^1\subset\mathbb{C}$.

2. *A Eq.(6.2.6) induz a seguinte aplicação $\mathbb{C}$-valorada:*

$$\begin{gathered} \sum\nolimits^{\mathbb{C}}Q\times\sum\nolimits^{\mathbb{C}}Q\to\mathbb{C} \\ (\varphi_1,\varphi_2)=([p,[\varphi_1]],[p,[\varphi_2]])\mapsto\langle\langle[\varphi_1],[\varphi_2]\rangle\rangle=\tau([\varphi_2])[\varphi_1], \end{gathered} \tag{6.2.8}$$

onde $[\varphi_1],[\varphi_2]\in I^{(n+m)}=\mathbb{C}l_{(n+m)}\mathrm{f}$ são os representantes de φ_1,φ_2 num dado $Spin^{\mathbb{C}}(n+m)$-referencial $p\in\Gamma\left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\right)$.

$I^{(n+m)}=\mathbb{C}l_{(n+m)}\mathrm{f}$ é um ideal minimal, com f um idempotente primitivo.

Atente que $\langle\langle[\varphi_1],[\varphi_2]\rangle\rangle=\tau([\varphi_2])[\varphi_1]\in\tau(\mathrm{f})\mathbb{C}l_{(n+m)}\mathrm{f}=\mathrm{f}\mathbb{C}l_{(n+m)}\mathrm{f}\simeq\mathbb{C}$.

Esse caso é completamente análogo ao da seção 5.2. Obtemos assim os seguintes lemas:

Lema 88. *A conexão* $\nabla^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}$ *é compatível com o produto* $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$

Lema 89. *A aplicação* $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle:\sum^{\mathbb{C}}Q\times\sum^{\mathbb{C}}Q\to\mathbb{C}l_{(n+m)}$ *satisfaz:*

1. $\langle\langle X\cdot\psi,\varphi\rangle\rangle=-\langle\langle\psi,X\cdot\varphi\rangle\rangle\,,\ \psi,\varphi\in\sum^{\mathbb{C}}Q,\ X\in TQ.$
2. $\tau\langle\langle\psi,\varphi\rangle\rangle=\langle\langle\varphi,\psi\rangle\rangle\,,\ \psi,\varphi\in\sum^{\mathbb{C}}Q$

Note que a mesma ideia, produto e propriedades são válidas para os fibrados $\sum^{\mathbb{C}}Q$, $\sum^{\mathbb{C}}M$, $\sum^{\mathbb{C}}E$, $\sum^{ad\mathbb{C}}$.

6.3 Representação de subvariedades $Spin^{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{R}^{n+m}$ por spinores de ideias

Considere aqui $M\hookrightarrow Q=\mathbb{R}^{n+m}$. Desde que $\mathbb{R}^{n+m}$ é contrátil, existe uma seção global $s:\mathbb{R}^{n+m}\to P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}$, e as correspondentes base ortonormal $h=(E_1,\cdots,E_{n+m}):\mathbb{R}^{n+m}\to P_{SO(n+m)}$, e $l':\mathbb{R}^{n+m}\to P_{S^1}$, onde $(h,l')=\Lambda^{\mathbb{C}\mathbb{R}^{n+m}}(s)\in\Gamma(P_{SO(n+m)}\times P_{S^1})$. Numa seção local adaptada $\tilde{s}:U\subset M\subset\mathbb{R}^{n+m}\to P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\big|_M\subset P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}$ denotaremos as correspondentes bases locais ortonormais por $\tilde{h}=(e_1,\cdots,e_{n+m}):U\subset M\subset\mathbb{R}^{n+m}\to P_{SO(n+m)}\big|_M$, e $l=l'|_M:U\subset M\subset\mathbb{R}^{n+m}\to P_{S^1}|_M$. Seja $B:TM\times TM\to E$ a segunda forma fundamental dessa imersão.

Caso $n+m=2k$ par:

Lema 90. *Dada uma imersão $M\hookrightarrow Q=\mathbb{R}^{n+m}$, se $n+m=2k$ é par, teremos 2^k spinores clássicos (provenientes da restrição de uma representação irredutível $\rho_1^{(n+m)}:\mathbb{C}l_n\to End_{\mathbb{C}}(I_1^{(n+m)})$) $\varphi_i\in\Sigma_1^{ad\mathbb{C}}=P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\big|_M\times_{\rho_1^{(n+m)}}I_1^{(n+m)}$, ortonormais, segundo $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$, que satisfazem a seguinte equação*

$$\nabla_X^{\Sigma_1^{ad\mathbb{C}}}\varphi_i=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi_i+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\,A^l(X)\cdot\varphi_i,i=1,\cdots,2^k.\tag{6.3.1}$$

Demonstração. Fixe os elementos constantes

$$\begin{aligned}[\varphi_i]\ &\in\ I_1^{(n+m)}=\mathbb{C}l_{(n+m)}\mathrm{f}_1\subset\mathbb{C}l_{(n+m)},\ i=1,\cdots,2^k,\\ \text{tal que } i_{2k}\left([\varphi_i]\right)\ &=\ \begin{pmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}i\text{-ésima linha,}\end{aligned}\tag{6.3.2}$$

e defina os seguintes campos spinoriais $\varphi_i=[s,[\varphi_i]]\in\sum_1^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^{n+m}:=P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\times_{\rho_1^{(n+m)}}I_1^{(n+m)}$; novamente denote $w^Q(dh(X))=(w_{ij}^h(X))\in so(n+m)$, $\mathbf{i}A(dl'(X))=\mathbf{i}A^{l'}(X)\in\mathbf{i}\mathbb{R}$, de onde segue que

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}\varphi_i &= \left[s, X([\varphi_i]) + \left\{\frac{1}{2}\sum\nolimits_{i<j} w_{ij}^h(X)E_iE_j + \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^{l'}(X)\right\}\cdot[\varphi_i]\right] \\
&= \left[s, \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^{l'}(X)\cdot[\varphi_i]\right].\ i = 1,\cdots,2^k. \qquad (6.3.3)
\end{aligned}$$

Numa seção local adaptada $\tilde{s} : U \subset M \subset \mathbb{R}^{n+m} \to P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\big|_M \subset P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}$ $(\tilde{s} = s\cdot(g\otimes 1), g \in Spin_{n+m}, 1 \in S^1)$, com as correspondentes bases locais ortonormais $\tilde{h} = (e_1,\cdots,e_{n+m}) : U \subset M \subset \mathbb{R}^{n+m} \to P_{SO(n+m)}\big|_M$, e $l = l'|_M : U \subset M \subset \mathbb{R}^{n+m} \to P_{S^1}|_M$, a Eq.(6.3.3) é escrita para $\varphi_i = [\tilde{s}, \widetilde{[\varphi_i]}]$ como

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{\Sigma^{\mathbb{C}}Q}\varphi_i &= \left[\tilde{s}, X(\widetilde{[\varphi]}) + \left\{\frac{1}{2}\sum\nolimits_{i<j} w_{ij}^{\tilde{h}}(X)e_ie_j + \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^{l}(X)\right\}\cdot\widetilde{[\varphi]}\right] \\
&= \left[\tilde{s}, \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^{l}(X)\cdot(g\otimes 1)^{-1}[\varphi_i]\right] = \left[\tilde{s}, \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^{l}(X)\cdot\widetilde{[\varphi_i]}\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^l(X)\cdot\varphi_i.\ i = 1,\cdots,2^k. \qquad (6.3.4)
\end{aligned}$$

Finalmente aplicando a fórmula de Gauss spinorial Eq.(5.1.28)

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{\Sigma_1^{\mathbb{C}}Q}\varphi_i - \nabla_X^{\Sigma_1^{ad\mathbb{C}}}\varphi_i &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi_i \\
\frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^l(X)\cdot\varphi_i - \nabla_X^{\Sigma_1^{ad\mathbb{C}}}\varphi_i &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi_i \\
\nabla_X^{\Sigma_1^{ad\mathbb{C}}}\varphi_i &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi_i + \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^l(X)\cdot\varphi_i. \\
i &= 1,\cdots,2^k. \qquad (6.3.5)
\end{aligned}$$

Note que os spinores $\varphi_i = [\tilde{s}, \widetilde{[\varphi_i]}] \in \Sigma_1^{ad\mathbb{C}} \subset \sum_1^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^{n+m}$, $i = 1,\cdots,2^k$, são ortonormais segundo o produto $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle\rangle &= \tau\left(\widetilde{[\varphi_j]}\right)\widetilde{[\varphi_i]} = \tau\left((g\otimes 1)^{-1}[\varphi_j]\right)(g\otimes 1)^{-1}[\varphi_i] \\
&= \tau\left([\varphi_j]\right)\tau\left((g\otimes 1)^{-1}\right)(g\otimes 1)^{-1}[\varphi_i] \\
&= \tau\left([\varphi_j]\right)[\varphi_i]. \\
\langle\langle\varphi_i,\varphi_i\rangle\rangle &= 1;\quad \langle\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle\rangle = 0, i\neq j, \\
i,j &= 1,\cdots,2^k \qquad (6.3.6)
\end{aligned}$$

□

Observação 91. *Considerando os isomorfismos canônicos (coordenada a coordenada)* $\mathbb{C}^{2^k} \simeq I_1^{(n+m)} \simeq \cdots \simeq I_{2^k}^{(n+m)}$*, fixado* $\tilde{s}$*, podemos supor cada* $[\varphi_i] \in I_i^{(n+m)}$*,* $\widehat{[\varphi_i]} := \rho_i^{(n+m)}(g\otimes 1)^{-1}[\varphi_i] \in I_i^{(n+m)}, i = 1,\cdots,2^k$ *e formar o seguinte elemento* $\widehat{[\varphi]} = \widehat{[\varphi_1]} + \cdots + \widehat{[\varphi_{2^k}]} \in Spin^{\mathbb{C}}(n+m)$*.*

Caso $n+m = 2k+1$ **ímpar:**

Lema 92. *Dada uma imersão $M \hookrightarrow Q = \mathbb{R}^{n+m}$, se $n+m = 2k+1$ é ímpar, teremos 2^k spinores clássicos (provenientes da restrição de uma representação irredutível $\rho_{1;0}^{(n+m)} : \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(I_{1;0}^{(n+m)})$) $\varphi_{i;0} \in \Sigma_{1;0}^{ad\mathbb{C}} = P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\big|_M \times_{\rho_{1;0}^{(n+m)}} I_{1;0}^{(n+m)}$, ortonormais, segundo $\langle\langle \cdot,\cdot \rangle\rangle$, que satisfazem a seguinte equação*

$$\nabla_X^{\Sigma_{1;0}^{ad\mathbb{C}}} \varphi_i = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X,e_j)\cdot \varphi_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\, A^l(X)\cdot \varphi_i, i = 1,\cdots,2^k. \tag{6.3.7}$$

E também teremos 2^k spinores clássicos (provenientes da restrição de uma representação irredutível $\rho_{1;1}^{(n+m)} : \mathbb{C}l_n \to End_{\mathbb{C}}(I_{1;1}^{(n+m)})$) $\varphi_{i;1} \in \Sigma_{1;1}^{ad\mathbb{C}} = P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\big|_M \times_{\rho_{1;1}^{(n+m)}} I_{1;1}^{(n+m)}$, ortonormais, segundo $\langle\langle \cdot,\cdot \rangle\rangle$, que satisfazem a seguinte equação

$$\nabla_X^{\Sigma_{1;1}^{ad\mathbb{C}}} \varphi_{i;1} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X,e_j)\cdot \varphi_{i;1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\, A^l(X)\cdot \varphi_{i;1}, i = 1,\cdots,2^k. \tag{6.3.8}$$

Demonstração. O caso $n+m = 2k+1$ ímpar é completamente análogo ao par. Fixe os elementos constantes

$$\begin{aligned}
[\varphi_{i;0}] &\in I_{1;0}^{(n+m)} = \mathbb{C}l_{(n+m)}\mathrm{f}_{1;0} \subset \mathbb{C}l_{(n+m)},\ i = 1,\cdots,2^k,\\
\text{tal que } i_{2k+1}([\varphi_{i;0}]) &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} i\text{-ésima linha,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varphi_{i;1}] &\in I_{1;1}^{(n+m)} = \mathbb{C}l_{(n+m)}\mathrm{f}_{1;0} \subset \mathbb{C}l_{(n+m)},\ i = 1,\cdots,2^k,\\
\text{tal que } i_{2k+1}([\varphi_{i;1}]) &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} i\text{-ésima linha,}
\end{aligned}$$

e defina os seguintes campos spinoriais $\varphi_{i;0} = [s,[\varphi_{i;0}]] \in \sum_{1;0}^{\mathbb{C}} \mathbb{R}^{n+m} := P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)} \times_{\rho_{1;0}^{(n+m)}} I_{1;0}^{(n+m)}$, $\varphi_{i;1} = [s,[\varphi_{i;1}]] \in \sum_{1;1}^{\mathbb{C}} \mathbb{R}^{n+m} := P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)} \times_{\rho_{1;1}^{(n+m)}} I_{1;1}^{(n+m)}$, que numa seção local adaptada se escrevem como $\varphi_{i;0} = [\tilde{s},\widetilde{[\varphi_{i;0}]}]$, $\varphi_{i;1} = [\tilde{s},\widetilde{[\varphi_{i;1}]}]$ e satisfazem

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{\Sigma_{1;0}^{ad\mathbb{C}}} \varphi_{i;0} &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X,e_j)\cdot \varphi_{i;0} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^l(X)\cdot \varphi_{i;0}, i = 1,\cdots,2^k,\\
\nabla_X^{\Sigma_{1;1}^{ad\mathbb{C}}} \varphi_{i;1} &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X,e_j)\cdot \varphi_{i;1} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^l(X)\cdot \varphi_{i;1}, i = 1,\cdots,2^k,
\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

Note que os spinores $\varphi_{i;0} = [\tilde{s},\widetilde{[\varphi_{i;0}]}] \in \sum_{1;0}^{ad\mathbb{C}} \subset \sum_{1;0}^{\mathbb{C}} \mathbb{R}^{n+m}$, $i = 1,\cdots,2^k$, também são ortonormais entre si segundo o produto $\langle\langle \cdot,\cdot \rangle\rangle$. O mesmo vale para os spinores $\varphi_{i;1} = [\tilde{s},\widetilde{[\varphi_{i;1}]}] \in \sum_{1;1}^{ad\mathbb{C}} \subset \sum_{1;1}^{\mathbb{C}} \mathbb{R}^{n+m}$, $i = 1,\cdots,2^k$. $\square$

Observação 93. *Considerando os isomorfismos canônicos (coordenada a coordenada)* $\mathbb{C}^{2^k} \simeq I_{1;0} \simeq \cdots \simeq I_{2^k;0} \simeq I_{1;1} \simeq \cdots \simeq I_{2^k;1}$, *fixado* $\tilde{s}$, *podemos supor cada* $[\varphi_{i;\lambda}] \in I_{i;\lambda}$, $\widehat{[\varphi_{i;\lambda}]} := \rho_{i;\lambda}(g \otimes 1)^{-1}[\varphi_{i;\lambda}] \in I_{i;\lambda}$, $i = 1, \cdots, 2^k; l = 0, 1$ *e formar o seguinte elemento* $\widehat{[\varphi]} = \widehat{[\varphi_{1;0}]} + \cdots + \widehat{[\varphi_{2^k;0}]} + \widehat{[\varphi_{1;1}]} + \cdots + \widehat{[\varphi_{2^k;1}]} \in Spin^{\mathbb{C}}(n+m)$.

Surge então a pergunta recíproca: dado esse conjunto de spinores ortonormais é possível construirmos uma imersão isométrica da variedade M em $\mathbb{R}^{n+m}$?

Seja então M uma variedade Riemanniana n-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial sobre $\mathbb{R}$ de posto m, assuma que TM e E são orientados e $Spin^{\mathbb{C}}$. Denote novamente por P_{SO_n} o fibrado dos frames de TM e por P_{SO_m} o fibrado dos frames de E. Também as respectivas estruturas $Spin^{\mathbb{C}}$ são representadas como

$$\begin{aligned} \Lambda^{1\mathbb{C}} &: P_{Spin^{\mathbb{C}}_{(n)}} \to P_{SO(n)} \times P^1_{S^1}, \\ \Lambda^{2\mathbb{C}} &: P_{Spin^{\mathbb{C}}_{(m)}} \to P_{SO(m)} \times P^2_{S^1}. \end{aligned}$$

Defina aqui, assim como na seção 5.3, o fibrado S^1-principal P_{S^1} como o fibrado cujas funções de transição são definidas como o produto das funções de transição de $P^1_{S^1}$ e $P^2_{S^1}$. Não é difícil vermos assim que existe um morfismo canônico entre fibrados: $\Phi : P^1_{S^1} \times_M P^2_{S^1} \to P_{S^1}$ com $\Phi(p^1 \cdot s^1, p^2 \cdot s^2) = \Phi(p^1, p^2)s^1 s^2$, $p_1 \in P^1_{S^1}$, $p_2 \in P^2_{S^1}$, $s_1, s_2 \in S^1$.

Aqui $\mathbf{i}A^1 : TP^1_{S^1} \to \mathbf{i}\mathbb{R}$, $\mathbf{i}A^2 : TP^2_{S^1} \to \mathbf{i}\mathbb{R}$ são conexões arbitrárias em $P^1_{S^1}$ e $P^2_{S^1}$. Fixe as seguintes seções locais $s = (e_1, \cdots, e_n) : U \to P_{SO_n}$, $l_1 : U \to P^1_{S^1}$, $l_2 : U \to P^2_{S^1}$, $l = \Phi(l_1, l_2) : U \to P_{S^1}$. Agora $\mathbf{i}A : TP_{S^1} \to \mathbf{i}\mathbb{R}$ é a conexão definida por $\mathbf{i}A(d\Phi(l_1, l_2)) = \mathbf{i}A_1(dl_1) + \mathbf{i}A_2(dl_2)$.

Aqui fixaremos os seguintes fibrados de spinores complexos adaptados

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_i^{ad\mathbb{C}} &:= \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_M P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right) \times_{\rho_i^{n+m}} I_i^{n+m}, \text{ se } m+n = 2k \text{ é par} \\ i &= 1, \cdots, 2^k. \\ \textstyle\sum_{i;\lambda}^{ad\mathbb{C}} &:= \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_M P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right) \times_{\rho_{i;\lambda}^{n+m}} I_{i,\lambda}^{n+m}, \text{ se } m+n = 2k+1 \text{ é ímpar} \\ i &= 1, \cdots, 2^k; \lambda = 0, 1. \end{aligned}$$

Para o **caso** $m + n = 2k$ **par**: suponha agora que existam 2^k spinores ortonormais $\varphi_i \in \Gamma\left(\Sigma_1^{ad\mathbb{C}}\right)$ que satisfaçam a seguinte equação

$$\nabla_X^{\Sigma_1^{ad\mathbb{C}}} \varphi_i = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi_i + \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^l(X) \cdot \varphi_i, i = 1, \cdots, 2^k, \tag{6.3.10}$$

onde $B : TM \times TM \to E$ é uma aplicação simétrica e bilinear.

Observação 94. *Dados os isomorfismos naturais* $\Sigma_1^{ad\mathbb{C}} \simeq \cdots \simeq \Sigma_{2^k}^{ad\mathbb{C}}$ *(coordenada a coordenada em* I_i^{n+m}*), podemos considerar cada* $\varphi_i = [p, [\varphi_i]] \in \Gamma\left(\Sigma_i^{ad\mathbb{C}}\right)$. *Que serão soluções de*

$$\nabla_X^{\Sigma_i^{ad\mathbb{C}}} \varphi_i = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\ A^l(X) \cdot \varphi_i, i = 1, \cdots, 2^k. \tag{6.3.11}$$

Sem perda de generalidade, pois podemos fazer uma combinação linear adequada das soluções da Eq.(6.3.10), fixado $p \in \Gamma\left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_M P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right)$ *teremos*

$$[\varphi_1] + \cdots + [\varphi_{2^k}] \in Spin^{\mathbb{C}}_{n+m} \subset I_1^{n+m} \oplus \cdots \oplus I_{2^k}^{n+m} = \mathbb{C}l_{n+m}. \tag{6.3.12}$$

Perceba que isso não depende da escolha de referencial p, pois estamos trabalhando com fibrados $Spin^{\mathbb{C}}$*-principais. Assim em outro referencial spinorial a Eq.(6.3.12) continua válida.*

Podemos assim definir as seguintes 1-formas $\mathbb{C}$-valoradas:

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &: TM \to \mathrm{f}_i \mathbb{C}l_{(n+m)} \mathrm{f}_j \simeq \mathbb{C} \\ \xi_{ij}(X) &= \langle\langle X \cdot \varphi_i, \varphi_j \rangle\rangle, i, j = 1, \cdots, 2^k. \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

Agora, como estamos supondo que os spinores φ_i são tais que as equações 6.3.10 e 6.3.12 são válidas, segue imediatamente que a seguinte 1-forma $\mathbb{C}l_{(n+m)}$-valorada

$$\begin{aligned} \xi(X) &= \sum_{i,j}^{2^k} \xi_{ij}(X), \\ \xi(X) &\in \bigoplus_{i,j}^{2^k} \mathrm{f}_i \mathbb{C}l_{(n+m)} \mathrm{f}_j = \mathbb{C}l_{(n+m)}. \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

é tal que o seguinte lema é válido

Lema 95. *Suponha que cada* $\varphi_i \in \Gamma\left(\Sigma_1^{ad\mathbb{C}}\right) \simeq \Gamma\left(\Sigma_i^{ad\mathbb{C}}\right)$ *satisfaz a Eq.(6.3.10) e também que a Eq.(6.3.12) é válida, então* ξ *defina pela Eq.(6.3.14) é tal que*

1. ξ *é uma 1-forma* $\mathbb{R}^{n+m}$*-valorada*
2. ξ *é uma 1-forma fechada,* $d\xi = 0$.

Demonstração. A demonstração é exatamente a mesma do lema 80. Pois o fato da Eq.(6.3.12) ser válida implica que a forma é $\mathbb{R}^{n+m}$-valorada e para mostrarmos que ξ é fechada utilizamos que cada φ_i satisfaz a Eq.(6.3.10). □

Para o caso $m + n = 2k + 1$ **ímpar**: suponha agora que existam 2^{k+1} spinores $\varphi_{i;0} \in \Gamma\left(\Sigma_{1;0}^{ad\mathbb{C}}\right)$, $\varphi_{i;1} \in \Gamma\left(\Sigma_{1;1}^{ad\mathbb{C}}\right)$ que satisfaçam as seguintes equações

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\Sigma_{1;0}^{ad\mathbb{C}}} \varphi_{i;0} &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi_{i;0} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^l(X) \cdot \varphi_{i;0}, i = 1, \cdots, 2^k, \\ \nabla_X^{\Sigma_{1;1}^{ad\mathbb{C}}} \varphi_{i;1} &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi_{i;1} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\ A^l(X) \cdot \varphi_{i;1}, i = 1, \cdots, 2^k, \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

onde $B : TM \times TM \to E$ é uma aplicação simétrica e bilinear.

Observação 96. *Fixado* $p \in \Gamma\left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_M P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right)$*, considerando os isomorfismos canônicos (coordenada a coordenada)* $\mathbb{C}^{2^k} \simeq I_{1;0} \simeq \cdots \simeq I_{2^k;0} \simeq I_{1;1} \simeq \cdots \simeq I_{2^k;1}$*, podemos considerar cada* $\varphi_{i;\lambda} = [p, [\varphi_{i;\lambda}]] \in \Gamma\left(\Sigma_{i;\lambda}^{ad\mathbb{C}}\right)$*. Que serão soluções de*

$$\nabla_X^{\Sigma_{i;\lambda}^{ad\mathbb{C}}} \varphi_{i;\lambda} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi_{i;\lambda} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\ A^l(X) \cdot \varphi_{i;\lambda}, i = 1, \cdots, 2^k, \lambda = 0, 1. \tag{6.3.16}$$

Sem perda de generalidade, pois podemos fazer uma combinação linear adequada das soluções da Eq.(6.3.15), fixado $p \in \Gamma\left(P_{Spin^{\mathbb{C}}(n)} \times_M P_{Spin^{\mathbb{C}}(m)}\right)$ *teremos*

$$[\varphi_{1;0}] + \cdots + [\varphi_{2^k;0}] + [\varphi_{1;1}] + \cdots + [\varphi_{2^k;1}] \in Spin^{\mathbb{C}}_{n+m} \subset I_1^{n+m} \oplus \cdots \oplus I_{2^k}^{n+m} = \mathbb{C}l_{n+m}. \quad (6.3.17)$$

Perceba que isso não dependa da escolha de referencial p, pois estamos trabalhando com fibrados $Spin^{\mathbb{C}}$*-principais. Assim em outro referencial spinorial a Eq.(6.3.17) continua válida.*

Podemos assim definir as seguintes 1-formas $\mathbb{C}$-valoradas:

$$\begin{aligned} \xi_{ij;\lambda} &: TM \to \mathrm{f}_{i;\lambda}\mathbb{C}l_{(n+m)}\mathrm{f}_{j;\lambda} \simeq \mathbb{C} \\ \xi_{ij;\lambda}(X) &= \langle\langle X \cdot \varphi_{i;\lambda}, \varphi_{j;\lambda}\rangle\rangle, i,j = 1, \cdots, 2^k, \lambda = 0,1. \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

Agora, como estamos supondo que os spinores $\varphi_{i;\lambda}$ são tais que as equações 6.3.15 e 6.3.17 são válidas, segue imediatamente que a seguinte 1-forma $\mathbb{C}l_{(n+m)}$-valorada, que também denotaremos por ξ assim como no caso $n+m$ par,

$$\begin{aligned} \xi(X) &= \sum_{\lambda=0}^{1}\sum_{i,j}^{2^k} \xi_{ij;\lambda}(X) \\ \xi(X) &\in \bigoplus_{\lambda=0}^{1}\bigoplus_{i,j}^{2^k} \mathrm{f}_{i;\lambda}\mathbb{C}l_{(n+m)}\mathrm{f}_{j;\lambda}\mathbb{C}l_{(n+m)} \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

é tal que o seguinte lema é válido

Lema 97. *Suponha que cada* $\varphi_i \in \Gamma\left(\Sigma_i^{ad\mathbb{C}}\right)$ *satisfaz as Eqs.(6.3.15) e também que a Eq.(6.3.17) é válida, então* ξ *defina pela Eq.(6.3.19) é tal que*

1. ξ *é uma* 1*-forma* $\mathbb{R}^{n+m}$*-valorada*
2. ξ *é uma* 1*-forma fechada,* $d\xi = 0$.

Demonstração. A demonstração é exatamente a mesma do lema 80. Pois o fato da Eq.(6.3.17) ser válida implica que a forma é $\mathbb{R}^{n+m}$-valorada e para mostrarmos que ξ é fechada utilizamos que cada $\varphi_{i;\lambda}$ satisfaz a Eq.(6.3.15). □

Assim, independentemente da paridade de $n+m$, se admitirmos que a variedade M é simplesmente conexa, pelo lema de Poincaré segue existe uma função

$$F : M \to \mathbb{R}^{n+m},$$

tal que $dF = \xi$. Além disso também é válido o seguinte lema

Lema 98. *Com as considerações acima os seguintes itens são válidos*

1. *A aplicação* $F : M \to \mathbb{R}^{n+m}$ *é uma isometria.*

2. A aplicação

$$\begin{array}{rcl}\Phi_E & : & E \to M \times \mathbb{R}^{n+m} \\ X & \in & E_m \mapsto (F(m), \xi(X))\end{array}$$

é uma isometria entre E e o fibrado normal de $F(M)$ em $\mathbb{R}^{(n+m)}$, presevando conexão e segunda forma fundamental.

Demonstração. Utilizando-se os lemas 95 e 97 a demonstração é exatamente a mesma do lema 81. □

Estabelecido isso, teremos o seguinte:

Teorema 99. *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional, $E \to M$ um fibrado vetorial real de posto m, assuma que TM e E são orientados e $Spin^{\mathbb{C}}$. Suponha que $B : TM \times TM \to E$ é uma aplicação bilinear e simétrica . Assim as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. ***Para o caso** $n+m=2k$ **par:***
   Existem 2^k spinores $\varphi_i \in \Gamma\left(\Sigma_1^{ad\mathbb{C}}\right) \simeq \Gamma\left(\Sigma_i^{ad\mathbb{C}}\right)$ que satisfazem as equações

$$\nabla_X^{\Sigma_1^{ad\mathbb{C}}} \varphi_i = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\, A^l(X) \cdot \varphi_i, i = 1, \cdots, 2^k. \tag{6.3.20}$$

   Para o caso** $n+m=2k$ **ímpar:
   Existem 2^{k+1} spinores $\varphi_{i;0} \in \Gamma\left(\Sigma_{1;0}^{ad\mathbb{C}}\right)$, $\varphi_{i;1} \in \Gamma\left(\Sigma_{1;1}^{ad\mathbb{C}}\right)$ que satisfazem as equações

$$\nabla_X^{\Sigma_{1;\lambda}^{ad\mathbb{C}}} \varphi_{i;\lambda} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi_{i;\lambda} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}\, A^l(X) \cdot \varphi_{i;\lambda}, i = 1, \cdots, 2^k, \lambda = 0, 1. \tag{6.3.21}$$

2. *Existe uma imersão isométrica $F : M \to \mathbb{R}^{(n+m)}$ com fibrado normal E e segunda forma fundamental B.*

Além disso, $dF = \xi$ onde ξ é uma 1-forma $\mathbb{R}^{(n+m)}$-valorada definida por
Para o caso** $n+m=2k$ **par:

$$\xi(X) = \sum_{i,j}^{2^k} \xi_{ij}(X), \tag{6.3.22}$$

$$\xi_{ij}(X) = \langle\langle X \cdot \varphi_i, \varphi_j \rangle\rangle, i, j = 1, \cdots, 2^k, \quad \forall X \in TM. \tag{6.3.23}$$

Para o caso** $n+m=2k$ **ímpar:

$$\xi(X) = \sum_{\lambda=0}^{1}\sum_{i,j}^{2^k} \xi_{ij;\lambda}(X) \tag{6.3.24}$$

$$\xi_{ij;\lambda}(X) = \langle\langle X \cdot \varphi_{i;\lambda}, \varphi_{j;\lambda} \rangle\rangle, i, j = 1, \cdots, 2^k, \lambda = 0, 1, \quad \forall X \in TM. \tag{6.3.25}$$

Demonstração. A demosntração segue dos lemas 90, 92, 95, 97, 98 de maneira análoga ao teorema 79. □

Referências Bibliográficas

[1] Artin, E., *Geometric algebra.(Interscience tracts in pure and applied mathematics*, **3** Interscience Publisher, New York 1958.

[2] Bar, C., Extrinsic Bounds for Eigenvalues of the Dirac Operator, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **16 16** 573-596 (1998).

[3] Baum, H., Grunevald, R., *Twistors and Killing Spinors on Riemannian Manifold*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig 1991.

[4] Bayard, P., Lawn, M. A., Roth, J., Spinorial representation of surfaces into 4-dimensional space forms, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **44** 433-453 (2013).

[5] Bayard, P., On the spinorial representation of spacelike surfaces into 4-dimensional Minkowski space, *Journal of Geometry and Physics*, Volume 74, December 2013, Pages 289-313

[6] Bayard, P., M. A. Lawn, J. Roth, Spinorial Representation of Submanifolds in Riemannian Space Froms, to appear Pacific Journal of Mathematics. [arXiv:1505.02935v4 [math-ph]] 2016.

[7] Bayard, P., Jimenez, B., Roth, J., Spinorial Representation of submanifolds in metric Lie groups *Journal of Geometry and Physics* **114**, 348-374 (2017).

[8] Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).

[9] Figueiredo, V. L. X., Estrutura Spinorial em Variedades Lorentzianas ,*Tese Doutorado Matemática Aplicada Unicamp*, (1987).

[10] Friedrich, T., On the Spinor Representation of Surfaces in Euclidean 3-space, *Jour. of Geom. and Phys.* **28**, 143-157 (1998).

[11] Friedrich, T., *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2000).

[12] Griffiths, P. A. and Harris, J. *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, (2001).

[13] Kobayashi, S., *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Publishers and. Princeton University Press. (1987).

[14] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of differential geometry*, **Vol.1,2**, Wiley, New York (1969).

[15] Lang, S., *Algebra*, Springer, New York (2005).

[16] Lawn, M. A., Immersions of Lorentzian surfaces in $\mathbb{R}^{2,1}$, *Jour. of Geom. and Phys* **58** 683–700 (2008).

[17] Lawn, M. A., Roth, J., Isometric immersions of Hypersurfaces into 4-dimensional manifolds via spinors, *Diff. Geom. Appl.* **28 2** 205-219 (2010).

[18] Lawn, M. A., Roth, J., Spinorial Characterizations of Surfaces into 3-dimensional Pseudo-Riemannian Space Forms, *Math. Phys. Anal. Geom.* **14** 185-195 (2011).

[19] Lawson, H. B. Jr. and Michelson, M-L., *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[20] Lawson, H. B., The Global Behaviour of Minimal Surfaces in S^n, *Ann. Math.* **92 (2)**, 224-237 (1970).

[21] Leão, R. F., Auto-valores do operador de Dirac e do laplaciano de Dobeault ,*Tese Doutorado Matemática Unicamp*, (2007).

[22] Lounesto, P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[23] Mendes, D., Álgebras de Clifford e a Fibração de Hopf ,*Dissertação Mestrado Matemática Unicamp*, (2012).

[24] Morel, B., Surfaces in S^3 and H^3 via spinors, *Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble)*, **23** 131-144 (2004-2005).

[25] Morgan, J. W., *The Seiberg-Witten Equations And Applications To The Topology Of Smooth Four-Manifolds*, Princeton University Press, 1995.

[26] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, CRC Press, 2003.

[27] Nicolaescu, L. I., *Notes on Seiberg-Witten Theory*, American Mathematical Society, Princeton, 2000.

[28] Rodrigues, W. A..Jr., Capelas de Oliveira, E., *The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations. A Clifford Bundle Approach (second revised and enlarged edition)*, Springer, Heidelberg, 2016.

[29] Prasolov, V. V., *Elements of Combinatorial and Differential Topology*, American Mathematical Society, 2004.

[30] Taimanov, I. A., Surfaces of Revolution in terms of Solitons, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **15 (4)**, 19-435 (1997).

[31] Taimanov, I. A., Modified Novikov-Veselov Equation and Differential Geometry of Surfaces, *Transl. Amer. Math. Soc,* **179 (2)**, 133-151 (1997).

[32] Taimanov, I. A., The Weierstrass representation of Closed Surfaces in $\mathbb{R}^3$, *Funct. Anal. Appl.* **32**, 49-62 (1998).

[33] Tenenblat, K., On the Isometric Immersions of Riemannian Manifolds ,*Boletim da Soc. Bras. de Mat.* **2**, 23-36 (1971).

[34] Warner, F. W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer Science and Business Media, 2013.

[35] Vaz, J. Jr., Rocha, R. Jr., *Álgebra de Clifford e Espinores*, Livraria da Física, São Paulo, 2012.

Apêndice A

Spinores de Ideais de uma variedade Imersa

Seja Q uma variedade riemanniana $(n+m)$-dimensional $Spin^{\mathbb{C}}$ e $M \hookrightarrow Q$ uma variedade imersa n-dimensional $Spin^{\mathbb{C}}$. Dê à M a métrica induzida de Q. Mantenha, nesta seção, as mesmas notações da seção 5.1.2.

Consideremos aqui as representações regulares à esquerda irredutíveis nos ideais minimais de $\mathbb{C}l_{(n+m)}$, conforme notação estabelecida na Seção (1.5)

$$\begin{aligned} \rho_i^n \quad &: \quad \mathbb{C}l_{2k} \to End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}l_{2k}\mathrm{e}_i) = End_{\mathbb{C}}(I_i^{(2k)}), i = 1, \cdots, 2^k, \\ a \quad &\mapsto \quad \rho_i^n(a) : \beta\mathrm{e}_i \mapsto a\beta\mathrm{e}_i, \quad \text{para o caso } n = 2k \text{ par.} \\ \rho_{i;l}^n \quad &: \quad \mathbb{C}l_{2k+1} \to End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}l_{(2k+1)}\mathrm{e}_{i;l}) = End_{\mathbb{C}}(I_{i;l}^{(2k+1)}), i = 1, \cdots, 2^k, l = 0, 1, \\ a \quad &\mapsto \quad \rho_{i;l}^n(a) : \beta\mathrm{e}_{i;l} \mapsto a\beta\mathrm{e}_{i;l}, \quad \text{para o caso } n = 2k+1 \text{ ímpar.} \end{aligned} \tag{A.0.1}$$

Suas restrições ao grupo $Spin^{\mathbb{C}}_{(n+m)}$ também serão denotadas por ρ_i ou $\rho_{i;l}$. Lembre-se que as representações $\rho_1 \simeq \cdots \simeq \rho_{2^k}$ são equivalentes, assim como $\rho_{1;l} \simeq \cdots \simeq \rho_{2^k;l}$, $l = 0, 1$ também são equivalentes.

Dadas essas representações irredutíveis, definimos os seguintes fibrados de spinores complexos:

Caso n e m pares

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_i^{\mathbb{C}} M \quad &: \quad = P_{Spin^{\mathbb{C}}n} \times_{\rho_i^n} I_i^n, \ \textstyle\sum_j^{\mathbb{C}} N := P_{Spin^{\mathbb{C}}m} \times_{\rho_j^m} I_i^m, \\ \textstyle\sum_q^{\mathbb{C}} Q \quad &: \quad = P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)} \times_{\rho_q^{(n+m)}} I_q^{(n+m)}, \ \textstyle\sum_q^{\mathbb{C}} Q\Big|_M := P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho_q^{(n+m)}} I_q^{(n+m)}, \\ i \quad &= \quad 1, \cdots, 2^{\frac{n}{2}}; j = 1, \cdots, 2^{\frac{m}{2}}; q = 1, \cdots, 2^{\frac{n+m}{2}}; \end{aligned} \tag{A.0.2}$$

Caso n par, m ímpar

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_i^{\mathbb{C}} M \quad &: \quad = P_{Spin^{\mathbb{C}}n} \times_{\rho_i^n} I_i^n, \ \textstyle\sum_{j;l}^{\mathbb{C}} N := P_{Spin^{\mathbb{C}}m} \times_{\rho_{j;l}^m} I_{j;l}^m, \\ \textstyle\sum_{q;l}^{\mathbb{C}} Q \quad &: \quad = P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)} \times_{\rho_{q;l}^{(n+m)}} I_{q,l}^{(n+m)}, \ \textstyle\sum_{q;l}^{\mathbb{C}} Q\Big|_M := P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho_{q;l}^{(n+m)}} I_{q,l}^{(n+m)}, \\ i \quad &= \quad 1, \cdots, 2^{\frac{n}{2}}; j = 1, \cdots, 2^{\frac{m-1}{2}}; q = 1, \cdots, 2^{\frac{n+m-1}{2}}; l = 0, 1. \end{aligned} \tag{A.0.3}$$

Caso n ímpar, m par

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{i;l}^{\mathbb{C}} M \quad &: \quad = P_{Spin^{\mathbb{C}}n} \times_{\rho_{i;l}^n} I_{i;l}^n,\ \sum\nolimits_{j}^{\mathbb{C}} N := P_{Spin^{\mathbb{C}}m} \times_{\rho_j^m} I_j^m, \\
\sum\nolimits_{q;l}^{\mathbb{C}} Q \quad &: \quad = P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)} \times_{\rho_{q;l}^{(n+m)}} I_{q,l}^{(n+m)},\ \sum\nolimits_{q;l}^{\mathbb{C}} Q\Big|_M := P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho_{q;l}^{(n+m)}} I_{q,l}^{(n+m)}, \\
i \quad &= \quad 1, \cdots, 2^{\frac{n-1}{2}}; j = 1, \cdots, 2^{\frac{m}{2}}; q = 1, \cdots, 2^{\frac{n+m-1}{2}}; l = 0, 1. \qquad \text{(A.0.4)}
\end{aligned}$$

Caso n e m ímpares

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{i;l}^{\mathbb{C}} M \quad &: \quad = P_{Spin^{\mathbb{C}}n} \times_{\rho_i^n} I_{i;l}^n,\ \sum\nolimits_{j;l'}^{\mathbb{C}} N := P_{Spin^{\mathbb{C}}m} \times_{\rho_{j;l'}^m} I_{j;l'}^m, \\
\sum\nolimits_{q}^{\mathbb{C}} Q \quad &: \quad = P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)} \times_{\rho_q^{(n+m)}} I_q^{(n+m)},\ \sum\nolimits_{q}^{\mathbb{C}} Q\Big|_M := P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho_q^{(n+m)}} I_q^{(n+m)}, \\
i \quad &= \quad 1, \cdots, 2^{\frac{n-1}{2}}; j = 1, \cdots, 2^{\frac{m-1}{2}}; q = 1, \cdots, 2^{\frac{n+m}{2}}; l, l' = 0, 1. \qquad \text{(A.0.5)}
\end{aligned}$$

Utilizando as equações (1.6.1, 1.6.4, 1.6.5, 1.6.7) apresentadas na Seção (1.6) e o fato de que as funções de transição de $P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M$ são o produto das funções de transição de $P_{Spin^{\mathbb{C}}n}$ e de $P_{Spin^{\mathbb{C}}m}$, não é difícil obtermos:

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{i;j}^{ad\mathbb{C}} \quad &: \quad = \sum\nolimits_{i}^{\mathbb{C}} M \otimes \sum\nolimits_{j}^{\mathbb{C}} N = \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}n} \times_{\rho_i^n} I_i^n\right) \otimes \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}m} \times_{\rho_j^m} I_j^m\right) \\
&\simeq \quad P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho} \left(I_i^n \otimes I_j^m\right) \\
&\simeq \quad P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho_q^{(n+m)}} I_q^{(n+m)} =: \sum\nolimits_{q}^{\mathbb{C}} Q\Big|_M \qquad \text{(A.0.6)}
\end{aligned}$$

$\forall i = 1, \cdots, 2^{\frac{n}{2}}; j = 1, \cdots, 2^{\frac{m}{2}}; q = 1, \cdots, 2^{\frac{n+m}{2}}$; se m e n são ambos pares,

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{i;j,l}^{ad\mathbb{C}} \quad &: \quad = \sum\nolimits_{i}^{\mathbb{C}} M \otimes \sum\nolimits_{j;l}^{\mathbb{C}} N = \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}n} \times_{\rho_i^n} I_i^n\right) \otimes \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}m} \times_{\rho_{j;l}^m} I_{j;l}^m\right) \\
&\simeq \quad P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho_l} \left(I_i^n \otimes I_{j;l}^m\right) \\
&\simeq \quad P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho_{q;l}} I_{q;l}^{(n+m)} =: \sum\nolimits_{q;l}^{\mathbb{C}} Q\Big|_M \qquad \text{(A.0.7)}
\end{aligned}$$

$\forall i = 1, \cdots, 2^{\frac{n}{2}}; j = 1, \cdots, 2^{\frac{m-1}{2}}; q = 1, \cdots, 2^{\frac{n+m-1}{2}}; l = 0, 1$; se m é par e n é ímpar,

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{i,l;j}^{ad\mathbb{C}} \quad &: \quad = \sum\nolimits_{i;l}^{\mathbb{C}} M \otimes \sum\nolimits_{j}^{\mathbb{C}} N = \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}n} \times_{\rho_{i;l}^n} I_{i;l}^n\right) \otimes \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}m} \times_{\rho_j^m} I_j^m\right) \\
&\simeq \quad P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho_l} \left(I_{i;l}^n \otimes I_j^m\right) \\
&\simeq \quad P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho_{q;l}} I_{q;l}^{(n+m)} =: \sum\nolimits_{q;l}^{\mathbb{C}} Q\Big|_M \qquad \text{(A.0.8)}
\end{aligned}$$

$\forall i = 1, \cdots, 2^{\frac{n-1}{2}}; j = 1, \cdots, 2^{\frac{m}{2}}; q = 1, \cdots, 2^{\frac{n+m-1}{2}}; l = 0, 1$; se m é ímpar e n é par,

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{i,j}^{ad\mathbb{C}} \quad &: \quad = \left(\sum\nolimits_{i;0}^{\mathbb{C}} M \otimes \sum\nolimits_{j;0}^{\mathbb{C}} N\right) \oplus \left(\sum\nolimits_{i;0}^{\mathbb{C}} M \otimes \sum\nolimits_{j;1}^{\mathbb{C}} N\right) \\
&= \quad \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}n} \times_{\rho_{i;0}^n} I_{i;0}^n\right) \otimes \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}m} \times_{\rho_{j;0}^m} I_{j;0}^m\right) \oplus \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}n} \times_{\rho_{i;0}^n} I_{i;0}^n\right) \otimes \left(P_{Spin^{\mathbb{C}}m} \times_{\rho_{j;1}^m} I_{j;1}^m\right) \\
&\simeq \quad P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{\rho} \left(I_{i;0}^n \otimes I_{j;0}^m\right) \oplus \left(I_{i;0}^n \otimes I_{j;1}^m\right) \\
&\simeq \quad P_{Spin^{\mathbb{C}}(n+m)}\Big|_M \times_{q} I_q^{(n+m)} =: \sum\nolimits_{q}^{\mathbb{C}} Q\Big|_M \qquad \text{(A.0.9)}
\end{aligned}$$

$\forall i = 1, \cdots, 2^{\frac{n-1}{2}}; j = 1, \cdots, 2^{\frac{m-1}{2}}; q = 1, \cdots, 2^{\frac{n+m}{2}}$; se m e n são ambos ímpares.