



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Luciano Antonio Frezzatto Santos

**Projeto de controladores e filtros robustos para
sistemas lineares discretos com enriquecimento
de dinâmica**

Campinas
2017

Luciano Antonio Frezzatto Santos

Projeto de controladores e filtros robustos para sistemas lineares discretos com enriquecimento de dinâmica

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DE DOUTORADO DEFENDIDA PELO ALUNO LUCIANO ANTONIO FREZZATTO SANTOS E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO LUIS DIAS PERES.

Campinas
2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): FAPESP, 2013/05957-1 e 2014/23074-2

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2597-3653>

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

Sa59p Santos, Luciano Antonio Frezzatto, 1986-
Projeto de controladores e filtros robustos para sistemas lineares discretos com enriquecimento de dinâmica / Luciano Antonio Frezzatto Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas lineares. 2. Teoria de controle. 3. Controle robusto. 4. Desigualdades matriciais lineares. I. Peres, Pedro Luis Dias, 1960-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Robust control and filtering design for discrete-time linear systems with dynamics enhancement

Palavras-chave em inglês:

Linear systems

Control theory

Robust control

Linear matrix inequalities

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Pedro Luis Dias Peres [Orientador]

Eugênio de Bona Castelan Neto

Fernando de Oliveira Souza

João Bosco Ribeiro do Val

Matheus Souza

Data de defesa: 31-07-2017

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA — TESE DE DOUTORADO

Candidato: Luciano Antonio Frezzatto Santos

RA: 034210

Data da Defesa: 31/07/2017

Título da Dissertação/Tese: “Projeto de controladores e filtros robustos para sistemas lineares discretos com enriquecimento de dinâmica”

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto (DAS/PPGEAS/UFSC)

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza (DELT/CPDEE/UFMG)

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Matheus Souza (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, a Deus por iluminar meus caminhos e abençoar minha vida.

Agradeço a meus pais, Eliana e Antonio, por sempre estarem comigo em todos os momentos e por me incentivarem a continuar em frente por maior que a dificuldade possa ser. Aos meus irmãos, Edu e Paulo, pelo companheirismo e convivência. Agradeço também ao Vô Natal, à Vó Zaia, à Tia Ignês, ao Vô João, ao Vô Antonio, à Vó Tereza e à Vó Rosa que sempre cuidaram de mim e meus irmãos e estiveram presentes como segundas mães e segundos pais; aonde quer que estejam, tenho muito orgulho de vocês.

Agradeço à minha namorada Carol, que partilhou comigo de boa parte dessa jornada, pelo carinho, paciência e compreensão.

Os meus mais sinceros agradecimentos ao meu orientador Prof. Dr. Pedro Peres pelos ensinamentos, pela disponibilidade e pela paciência. Devo muito da minha evolução como pesquisador à sua orientação e à sua dedicação. Agradeço ainda ao Prof. Dr. Ricardo Oliveira pelo grande auxílio prestado durante o desenvolvimento deste projeto, atuando, praticamente, como um coorientador.

Agradeço ao Prof. Maurício de Oliveira, Universidade da Califórnia, San Diego, pela acolhida em San Diego e por toda a supervisão prestada durante o um ano de estágio na UCSD. Muitos dos resultados desta tese devem-se às nossas inúmeras discussões.

Agradeço ao Prof. Reinaldo Palhares e sua família pela ajuda durante meus primeiros dias em San Diego e pelos passeios. Também agradeço à Lainy e ao Rick por me acolherem em sua casa e pela convivência durante o ano de estágio.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processos 2013/05957-1 (bolsa no país) e 2014/23074-2 (bolsa BEPE), pelo apoio financeiro para o desenvolvimento do projeto.

Por fim, agradeço aos amigos que a vida me deu Weber, Maiara e Hélio e a todos os amigos e colegas do LE-16 pelas conversas, discussões, açais, hambúrgueres, ...; em especial ao Márcio Jr. pela colaboração em meus primeiros trabalhos; ao Renato, ao Henrique, ao Márcio Braga e à Cecília pelo aprendizado, pelas prosas durante o café e pela amizade; e ao Lício, grande amigo que ganhei e que também esteve em San Diego durante meu estágio (*Vamos no Five Guys?*).

“There are many hypotheses in science that are wrong. That’s perfectly alright; it’s the aperture to finding out what’s right. Science is a self-correcting process. To be accepted, new ideas must survive the most rigorous standards of evidence and scrutiny.”
(Carl Sagan)

Resumo

Esta tese investiga os problemas de síntese de controladores robustos por realimentação estática de estados e de saída e de projeto de filtros robustos para sistemas incertos discretos lineares e invariantes no tempo por meio do enriquecimento da dinâmica do sistema. Considera-se que informações passadas estejam presentes nas leis de controle e, também, que a estrutura do filtro tenha dimensão superior à dimensão do sistema sendo filtrado. Extensões para abordar o problema de *smoothing* são igualmente propostas. O procedimento de síntese dos controladores e filtros é realizado construindo-se um sistema auxiliar aumentado, a partir do qual condições convexas para a síntese são derivadas, sendo essas descritas em termos de Desigualdades Matriciais Lineares dependentes de parâmetros. As normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são utilizadas como critérios de desempenho para as metodologias desenvolvidas. As condições propostas exploram a estrutura particular do sistema auxiliar aumentado, sendo distintas das condições clássicas da literatura para projeto de filtros robustos de ordem completa ou para o cômputo do ganho de realimentação de estado ou de saída para o sistema aumentado em função apenas do instante atual. Demonstra-se que os métodos propostos englobam outras técnicas disponíveis na literatura, não possuindo, portanto, maior grau de conservadorismo do que as abordagens existentes. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar as vantagens das condições desenvolvidas na determinação de menores limitantes para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , mostrando que o método tende a ser menos conservador conforme mais informações passadas são agregadas às leis de controle ou à medida que a ordem dos filtros aumenta. Outrossim, os exemplos numéricos evidenciam que os mesmos resultados não são obtidos pela simples aplicação de técnicas convencionais da literatura ao sistema auxiliar aumentado.

Palavras-chaves: Sistemas lineares discretos; Incertezas; Controle; Filtragem; Norma \mathcal{H}_2 ; Norma \mathcal{H}_∞ ; Desigualdades matriciais lineares.

Abstract

This thesis is concerned with the problems of robust static state and output feedback control synthesis and of robust filtering design for uncertain linear discrete time-invariant systems by means of dynamics enhancement. For that, the control laws are supposed to contain past information and the filter structure has a dimension greater than the dimension of the system being filtered. Extensions to cope with the smoothing problem are proposed as well. The procedure for the design of controllers and filters is performed by defining an auxiliary augmented system, from which convex synthesis conditions are derived, being described in terms of parameter-dependent Linear Matrix Inequalities. The \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms are used as performance criteria for the developed methodology. The proposed conditions explore the particular structure of the auxiliary augmented system, thus being distinct from classical conditions from the literature for robust full-order filtering design, or for determining the state- or the output-feedback gains for the augmented system, in terms solely of the current instant. It is shown that the proposed methods encompass other techniques available in the literature, not incurring, therefore, in a greater degree of conservatism than the existing approaches. Numerical examples illustrate the advantages of the proposed conditions in determining lower upper-bounds for the \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms, showing that the method tends to be less conservative as more past information is added to the control laws or as the order of the filters increases. Furthermore, the numerical examples evince that the same results are not attained by simply applying standard approaches from the literature to the auxiliary augmented system.

Keywords: Discrete linear systems; Uncertainties; Control; Filtering; \mathcal{H}_2 norm; \mathcal{H}_∞ norm; Linear matrix inequalities.

Lista de ilustrações

Figura 3.1 – Diagrama de valores singulares da matriz de transferência do erro de estimação (3.3) para o sistema (3.12) utilizando um filtro robusto de ordem não mínima $n_f = 4$	47
Figura 3.2 – Valores da norma \mathcal{H}_2 obtidos para o sistema (3.48) por meio de um procedimento de <i>grid</i> fino na incerteza do sistema.	50
Figura 4.1 – Diagrama de valores singulares da matriz de transferência do erro de estimação (2.5) para o sistema (4.64) utilizando filtros robustos com memória nos estados ($d = 4$).	70
Figura 5.1 – Limitantes para as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 em função do parâmetro escalar λ para o sistema do Exemplo 5.3.	83
Figura 5.2 – Limitantes para a norma \mathcal{H}_2 em função do parâmetro escalar λ para o sistema do Exemplo 5.4.	84
Figura 5.3 – Resposta temporal do sistema (5.25) utilizando um controlador robusto por realimentação de estados com memória sintetizado com $d = 4$ e $g = 1$	85
Figura 5.4 – Diagrama de valores singulares da matriz de transferência do sistema em malha fechada (5.3) para o Exemplo 5.7 utilizando um controlador robusto estático de saída com memória.	90
Figura 5.5 – Comportamento dos limitantes da norma \mathcal{H}_∞ para o sistema do Exemplo 5.8 em função do parâmetro escalar λ	91
Figura 5.6 – Resposta temporal do sistema (5.43) utilizando um controlador robusto estático de saída com memória sintetizado com $d = 5$, $g = 2$ e $\lambda = -0.5$	93
Figura 5.7 – Resposta temporal do sistema (5.44) utilizando um controlador robusto estático de saída com memória sintetizado com $d = 5$ e $g = 2$	95
Figura 5.8 – Comportamento dos limitantes da norma \mathcal{H}_2 para o sistema do Exemplo 5.10 em função do parâmetro λ	97

Lista de tabelas

Tabela 3.1 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ para o sistema (3.12) utilizando filtros robustos (3.2) sintetizados por meio do Lema 3.2 com variáveis constantes ($g = 0$) e afins ($g = 1$) no parâmetro incerto.	38
Tabela 3.2 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ para o sistema (3.12) utilizando filtros de ordem não mínima sintetizados por meio do Teorema 3.8 com variáveis polinomiais de grau $g = 1$ e matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 geradas como em (3.13) e pseudoaleatoriamente. O número de variáveis V e o número de linhas de LMIs L envolvidos no procedimento de otimização são, também, fornecidos.	45
Tabela 3.3 – Melhores limitantes para a norma \mathcal{H}_∞ obtidos pelo Teorema 3.8 e pelo método de Lee e Joo (2014) utilizando variáveis polinomiais de grau $g = 2$	46
Tabela 3.4 – Limitantes da norma \mathcal{H}_2 para o sistema (3.47) utilizando filtros de ordem não mínima sintetizados por meio do Teorema 3.9 com variáveis polinomiais de grau $g = \{1, 2\}$ e matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 geradas como em (3.13) e pseudoaleatoriamente. O número de variáveis V e o número de linhas de LMIs L envolvidos no procedimento de otimização são, também, fornecidos. Os resultados obtidos com o método de Lee e Joo (2014) são apresentados para fins de comparação.	48
Tabela 3.5 – Influência da escolha das matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 sobre os limitantes da norma \mathcal{H}_2 em função da ordem do filtro robusto sintetizado.	49
Tabela 4.1 – Limitantes obtidos para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (3.12) conectado aos filtros com memória de saída sintetizados por meio do Teorema 4.1 e, também, aos filtros obtidos a partir das condições apresentadas por Lee e Joo (2014). O número de variáveis de otimização V e de linhas de LMIs L é igualmente apresentado.	61
Tabela 4.2 – Limitantes obtidos para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (3.12) conectado aos filtros com memória de saída de ordem incompleta sintetizados por meio do Teorema 4.1. O número de variáveis de otimização V e de linhas de LMIs L é igualmente apresentado.	62
Tabela 4.3 – Limitantes obtidos para a norma \mathcal{H}_2 do sistema (3.48) conectado aos filtros com memória de saída sintetizados por meio do Teorema 4.3. . .	63

Tabela 4.4 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos para o sistema (4.64) conectado a filtros robustos com memória nos estados, sintetizados por meio do Teorema 4.8 ou pelo método de Lee e Joo (2014). O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , também é fornecido.	69
Tabela 4.5 – Limitantes obtidos para a norma \mathcal{H}_2 do sistema (3.47) conectado aos filtros robustos, próprios e estritamente próprios, com memória nos estados sintetizados por meio do Teorema 4.9.	71
Tabela 4.6 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos para os <i>smoothers</i> com atraso fixo projetados por meio do Corolário 4.14 utilizando as aproximações (4.65) e (4.67).	75
Tabela 5.1 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos para o sistema (5.24) utilizando controladores por realimentação de estados sintetizados por meio do Teorema 5.1 e pelo Teorema 10 propostos em de Oliveira <i>et al.</i> (2002) (dO-T10). O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado.	82
Tabela 5.2 – Limitantes da norma \mathcal{H}_2 obtidos para o sistema (5.24) utilizando controladores por realimentação de estados sintetizados por meio do Teorema 5.2 e pelo Teorema 9 propostos em de Oliveira <i>et al.</i> (2002) (dO-T9). O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado.	82
Tabela 5.3 – Limitantes da norma \mathcal{H}_2 obtidos para o sistema (5.25) utilizando controladores por realimentação de estados sintetizados por meio do Teorema 5.2. O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado.	84
Tabela 5.4 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos para o sistema (5.42) utilizando controladores por realimentação estática de saída sintetizados por meio do Corolário 5.5. O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado.	89
Tabela 5.5 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos para o sistema (5.43) utilizando controladores por realimentação estática de saída sintetizados por meio do Corolário 5.5. O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também fornecido.	91
Tabela 5.6 – Melhores limitantes para a norma \mathcal{H}_∞ obtidos por meio de uma busca escalar sobre o parâmetro γ nas condições do Corolário 5.5 para o sistema do Exemplo 5.8.	92
Tabela 5.7 – Limitantes da norma \mathcal{H}_2 obtidos para o sistema (5.44) utilizando controladores por realimentação estática de saída sintetizados por meio do Corolário 5.6. O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado.	94

Tabela 5.8 – Limitantes da norma \mathcal{H}_2 obtidos para o sistema (5.45) utilizando controladores por realimentação estática de saída sintetizados por meio do Corolário 5.6. O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado. 96

Notação, lista de abreviaturas e siglas

g	Grau das variáveis polinomiais homogêneas.
BRL	<i>Bounded Real Lemma</i> .
LMI	Desigualdade Matricial Linear (do inglês, <i>Linear Matrix Inequality</i>).
LPV	Linear com parâmetros variantes (do inglês, <i>Linear parameter-varying</i>).
LTI	Linear e invariante no tempo (do inglês, <i>Linear time invariant</i>).
\mathbb{N}_+	Conjunto dos números naturais positivos.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
Ξ_N	Simplex unitário de dimensão N .
$\bar{\sigma}(\cdot)$	Máximo valor singular.
$\lambda(X)$	Autovalores da matriz X .
$\text{diag}(\cdot)$	Indica uma matriz bloco diagonal.
$\text{rank}(\cdot)$	Função posto de uma matriz, isto é, o número de colunas ou linhas linearmente independentes.
$\text{Tr}(\cdot)$	Função traço de matriz.
$H(\zeta, \xi)$	Função de transferência para um sistema incerto discreto LTI.
$(\cdot)^\perp$	Indica base para o espaço nulo a direita do argumento.
$(\cdot)^T$	Denota a operação de transposição.
ℓ_2	Espaço das funções discretas de energia finita.
\otimes	Indica o produto de Kronecker.
\star	Indica um bloco simétrico da matriz.
\succ (\prec)	Utilizado para indicar que uma matriz é definida positiva (negativa).

I Matriz identidade de dimensão apropriada.

N Número de vértices de um politopo.

Sumário

Lista de ilustrações	9
Lista de tabelas	10
Notação, lista de abreviaturas e siglas	13
Sumário	15
1 Introdução	17
2 Conceitos básicos e preliminares	23
2.1 Sistemas lineares discretos	23
2.1.1 Estabilidade	24
2.1.2 Norma \mathcal{H}_2	25
2.1.3 Norma \mathcal{H}_∞	27
2.2 Lemas auxiliares	29
2.3 Relaxações LMIs	31
2.3.1 Dependência paramétrica	31
3 Filtros de ordem não mínima	34
3.1 Definição do problema	34
3.2 Síntese de filtros robustos de ordem não mínima	41
3.3 Exemplos numéricos ilustrativos	45
3.4 Conclusões	49
4 Filtros de ordem não mínima especializados	51
4.1 Filtros robustos com memória de saída	51
4.1.1 Filtros de ordem incompleta	60
4.1.2 Exemplos numéricos ilustrativos	61
4.2 Filtros robustos com memória nos estados	63
4.2.1 Exemplos numéricos ilustrativos	69
4.3 <i>Smoothers</i>	71
4.4 Conclusões	75
5 Controle robusto com memória	76
5.1 Controle robusto por realimentação de estados	76
5.1.1 Exemplos numéricos ilustrativos	81
5.2 Controle robusto por realimentação estática de saída	85
5.2.1 Exemplos numéricos ilustrativos	88
5.3 Conclusões	96
Considerações finais	98
Referências	102

Apêndices	109
APÊNDICE A Exemplos de utilização do ROLMIP	110
A.1 Análise de estabilidade	110
A.2 Condição de síntese de filtros robustos de ordem não mínima com critério \mathcal{H}_∞	112
A.3 Condição de síntese de controladores robustos por realimentação de estados com memória com critério \mathcal{H}_2	117

1 Introdução

Analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos é um tópico recorrente em teoria de controle. Para sistemas lineares e invariantes no tempo (em inglês, *Linear time invariant* — LTI) cuja dinâmica é precisamente conhecida, a estabilidade pode ser afirmada pela análise da equação diferencial ou a diferenças que rege o comportamento do sistema (CHEN, 1999). No âmbito de sistemas LTI, a estabilidade pode ser também estudada em termos da equação característica do sistema. Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de sistemas LTI é que as raízes da equação característica (autovalores da matriz dinâmica que representa o sistema) possuam parte real negativa, para sistemas contínuos, ou possuam valor absoluto menor do que um, para sistemas discretos. As soluções da equação característica podem ser obtidas ou de forma analítica ou por meio de um procedimento numérico. Entretanto, para sistemas LTI de ordem elevada, encontrar uma solução para a equação característica pode ser um procedimento dispendioso. Outrossim, não é possível comprovar a estabilidade de sistemas com parâmetros variantes no tempo (em inglês, *Linear parameter-varying* — LPV) ou sistemas não lineares analisando-se unicamente os autovalores (KHALIL, 1996). Faz-se então necessária a utilização de outras ferramentas que provejam meios para certificar a estabilidade de sistemas dinâmicos sem que haja a necessidade de se obter uma solução (analítica ou numérica) explícita para a equação diferencial ou a diferenças. A teoria de estabilidade de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992) surge, assim, como uma alternativa factível para atestar a estabilidade desses sistemas analisando-se apenas os pontos de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio é estável se qualquer solução inicializada arbitrariamente próxima deste ponto permanecer no entorno do ponto de equilíbrio. Ademais, se o ponto de equilíbrio for estável e todas as soluções inicializadas no entorno de tal ponto convergirem para o equilíbrio, então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável (KHALIL, 1996).

Ao mesmo tempo simples e poderosa, a teoria de Lyapunov tem sido largamente utilizada em controle para a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos lineares e não lineares, nos problemas de cálculo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ e na síntese de controladores e filtros para tais sistemas, com ou sem critérios de desempenho associados (BOYD *et al.*, 1994; ZHOU *et al.*, 1996; PALHARES; PERES, 2000), como abordado em maior profundidade nos parágrafos subsequentes. Parte do interesse recorrente deve-se à evolução do poder computacional disponível e, também, ao advento da programação semidefinida que permite expressar vários problemas de análise e síntese em termos de um procedimento convexo de otimização, cujas restrições são descritas, por exemplo, sob a forma de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) (BOYD *et al.*, 1994). Caso as restrições sejam necessárias e suficientes para a existência de uma solu-

ção para o problema de otimização, então assegura-se que essa solução é o ótimo global do problema. Por outro lado, se as restrições forem apenas suficientes, então a solução determinada é dita ser um ótimo local (BERTSEKAS *et al.*, 2003; BOYD; VANDENBERGHE, 2004). No que tange à formulação dos problemas em teoria de controle, as equações de Riccati na forma matricial foram muito empregadas na obtenção de controladores e filtros para diversos tipos de sistemas dinâmicos (KUČERA, 1973; ABOU-KANDIL *et al.*, 2003). Contudo, nas últimas três décadas, as LMIs têm emergido como uma das principais ferramentas para o estudo de problemas de controle devido às vantagens que possuem. Dentre as principais vantagens destacam-se a facilidade de extensão das condições para englobar incertezas no modelo do sistema, a vasta gama de pacotes computacionais disponíveis para programação, tais como LMI Control Toolbox (GAHINET *et al.*, 1995), YALMIP (LÖFBERG, 2004) e ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2012b), e a possibilidade de as LMIs serem solucionadas em tempo polinomial por resolvidores especializados, por exemplo, SeDuMi (STURM, 1999) e MOSEK (MOSEK ApS, 2016).

No que diz respeito à análise de estabilidade de sistemas dinâmicos, as primeiras condições de estabilidade robusta foram baseadas em funções de Lyapunov constantes quadráticas nos estados, isto é, uma única função de Lyapunov é utilizada para certificar a estabilidade do sistema dinâmico em todo o domínio de incertezas (BARMISH, 1985). Tal metodologia é conhecida na literatura como *estabilidade quadrática*. Apesar de ser necessária e suficiente para certificar a estabilidade de um sistema precisamente conhecido, a estabilidade quadrática mostra-se bastante conservadora para sistemas sujeitos a incertezas. Com o avanço do estado da arte, certificados de estabilidade mais acurados foram construídos utilizando uma função de Lyapunov com dependência afim no parâmetro incerto (DASGUPTA *et al.*, 1994; GAHINET *et al.*, 1996; RAMOS; PERES, 2001; RAMOS; PERES, 2002) e, também, com a introdução de variáveis de folga nas condições de estabilidade (GEROMEL *et al.*, 1998; DE OLIVEIRA *et al.*, 1999; PEAUCELLE *et al.*, 2000; DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001; LEITE; PERES, 2003). A evolução natural de tais funções afins foi totalmente caracterizada no trabalho de Oliveira e Peres (2007), no qual funções de Lyapunov polinomiais homogêneas de grau arbitrário foram introduzidas. O aumento do grau de dependência das funções de Lyapunov faz com que as condições de estabilidade tornem-se, gradativamente, menos conservadoras, culminando em melhores resultados para o problema abarcado, como notado também por Chesi *et al.* (2003) e Scherer (2005). Uma proposta interessante, denominada κ -estabilidade, para certificar a estabilidade de um sistema incerto surgiu nos trabalhos de Oliveira *et al.* (2008) e de Oliveira *et al.* (2008). Essa metodologia leva o sistema incerto a um espaço de dimensão maior no qual condições de estabilidade mais simples, na forma de LMIs, que possuem grau crescente de precisão, são utilizadas. Paralelamente à evolução da análise de estabilidade, as condições para síntese de controladores e filtros também foram aprimoradas.

O processo de filtragem consiste no ato de separar, remover ou evitar a pas-

sagem de algo por meio de um filtro. Em teoria de controle, busca-se estimar um sinal corrompido por ruído ou atenuar (remover) o efeito de um ruído externo sobre o sinal de interesse. Nesse âmbito, um dos mais renomados trabalhos na área é creditado a Kalman (1960), no qual é proposto um procedimento iterativo para, de posse das informações até um dado instante de tempo, determinar a melhor estimativa do sinal de interesse no instante de tempo subsequente. Apesar de vastamente utilizado em diversas aplicações (como navegação e controle de veículos aeroespaciais), o procedimento de atualização das estimativas pode tornar-se impraticável em alguns cenários que exijam respostas rápidas. Outrossim, o filtro de Kalman na forma padrão não é o mais adequado para tratar sistemas que possuam parâmetros incertos, pois o desempenho pode se deteriorar com as variações no parâmetro (THEODOR *et al.*, 1994; SHAKED; DE SOUZA, 1995; DE SOUZA *et al.*, 1995; XIE *et al.*, 1996). Por esses motivos, a filtragem robusta surgiu como uma alternativa para contornar tais limitações, podendo ser formulada em termos de equações de Riccati (DE SOUZA *et al.*, 1995) ou como problemas de otimização convexa descritos por LMIs (GEROMEL, 1999; GEROMEL *et al.*, 2000), e empregando as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ como critérios de desempenho. De forma similar ao problema de estabilidade, as condições para o projeto de filtros com desempenho garantido para sistemas incertos puderam usufruir dos benefícios advindos das funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e da introdução de variáveis extras no problema, levando a menores limitantes para a norma (\mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞) de pior caso do sistema composto pela planta original e o filtro projetado (DE SOUZA; TROFINO, 2000; PALHARES *et al.*, 2001; GEROMEL *et al.*, 2002; XIE *et al.*, 2004; BARBOSA *et al.*, 2005; GAO *et al.*, 2008; GAO; LI, 2014). Impondo restrições às variáveis de folga do problema, Duan *et al.* (2006) e Lacerda *et al.* (2011) introduziram escalares nas condições de projeto. Ao se realizar buscas unidimensionais, os escalares auxiliam na redução do conservadorismo das condições, que podem fornecer filtros robustos que garantem melhores limitantes como resultado.

Por outro lado, o problema de controle visa projetar controladores, por realimentação de estados ou de saída (estáticos ou dinâmicos), que estabilizem o sistema em malha fechada, que garantam o seguimento de determinada trajetória e que assegurem o atendimento de algum critério de desempenho (OGATA, 1990; FRANKLIN *et al.*, 2009). Tal-qualmente aos problemas supracitados, no âmbito de sistemas incertos, funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (GAHINET *et al.*, 1996; RAMOS; PERES, 2001; RAMOS; PERES, 2002; OLIVEIRA; PERES, 2006; OLIVEIRA *et al.*, 2007; AGULHARI *et al.*, 2010b; AGULHARI *et al.*, 2012a), variáveis de folga (DE OLIVEIRA *et al.*, 1999; ARZELIER *et al.*, 2003; MEHDI *et al.*, 2004; DE OLIVEIRA; GEROMEL, 2005; MOREIRA *et al.*, 2011) e buscas em parâmetros escalares (SHIMOMURA *et al.*, 2001; EBIHARA; HAGIWARA, 2004; MORAIS *et al.*, 2013) foram utilizados na proposição de condições baseadas em LMIs visando reduzir o conservadorismo para a síntese de controladores tanto por realimentação de estados, quanto por realimentação de saída.

Com o intuito de prover resultados menos conservadores e, conseqüentemente, melhores indicadores de desempenho, alguns trabalhos optaram por enriquecer artificialmente a dinâmica do sistema incerto, de forma análoga à κ -estabilidade, utilizando a abordagem de sistemas periódicos (BITTANTI; COLANERI, 2000; EBIHARA *et al.*, 2008; BITTANTI; COLANERI, 2009; EBIHARA *et al.*, 2009; EBIHARA *et al.*, 2011; LEE *et al.*, 2015). Outra maneira de se enriquecer a dinâmica do sistema incerto é considerar informações passadas na lei de controle ou na estrutura do filtro. Geromel e Korogui (2008) propuseram um método de filtragem com multiplicadores dinâmicos que produz filtros cuja ordem é maior (não mínima) do que a ordem do sistema sendo filtrado. Em Lee e Joo (2014), estados passados do filtro são considerados na estrutura de filtragem levando também a um filtro de maior ordem. Lee *et al.* (2014) combinaram ambas as metodologias de sistemas periódicos e de utilização de informações passadas para produzir um filtro variante no tempo de ordem não mínima. Cabe ressaltar que as estratégias de enriquecimento da dinâmica do sistema não provêm vantagens quando aplicadas a sistemas precisamente conhecidos. Todavia, como os estudos mencionados sugerem, no caso de sistemas incertos, para os quais existem apenas condições suficientes para a síntese de controladores e filtros, as condições derivadas para a estrutura aumentada (dinâmica enriquecida) podem prover resultados menos conservadores para os limitantes das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ ao preço de um aumento do custo computacional envolvido na resolução do problema de otimização.

Face ao que foi exposto, esta tese aborda o problema de síntese de controladores e filtros para sistemas incertos discretos LTI por meio do enriquecimento da dinâmica do sistema. Atualmente, os sistemas discretos possuem uma larga empregabilidade dada a grande disponibilidade e aplicabilidade de dispositivos eletrônicos no cotidiano das pessoas. No contexto de controle, a utilização de microcontroladores é bastante difundida, pois esses dispositivos podem ser reprogramados para desempenhar uma função diferente ou ajustar os valores dos controladores e filtros implementados (FRANKLIN *et al.*, 2009). O enriquecimento da dinâmica é dado pela adição de estados passados e de saídas passadas do sistema à lei de controle ou à estrutura do filtro, levando a uma lei de controle com memória ou a um filtro de ordem não mínima, isto é, com ordem maior do que a da planta. O processo de síntese dá-se pela resolução de problemas de otimização convexa com restrições na forma de LMIs, sendo as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ adotadas como índices de desempenho. Exemplos numéricos ilustrativos são apresentados ao longo do texto para salientar a eficácia dos resultados obtidos.

A estrutura da tese juntamente com a descrição resumida de cada capítulo é apresentada na sequência.

Capítulo 2

Este capítulo introduz a notação básica utilizada ao longo do texto, bem como alguns resultados e definições necessárias que servem de ponto de partida para uma melhor compreensão dos resultados apresentados nos capítulos seguintes.

Capítulo 3

Neste capítulo é apresentado um arcabouço geral para o projeto de filtros com desempenho garantido \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ cuja ordem é maior (ordem não mínima) do que a ordem do sistema sendo filtrado. O projeto dá-se pela construção de um sistema aumentado não observável auxiliar, a partir do qual o filtro não mínimo é sintetizado como um filtro de ordem completa para esse sistema auxiliar. É mostrado que tal metodologia contém resultados anteriores da literatura, não produzindo, portanto, resultados mais conservadores do que os existentes.

Capítulo 4

Especializações para o filtro de ordem não mínima introduzido no capítulo anterior são apresentadas neste capítulo. Denominados filtros com memória, estes pressupõem que haja o armazenamento de informações passadas (estados e saídas do sistema e estados do filtro) que são utilizadas para uma estimação mais precisa (em termos de algum critério de desempenho) da saída de interesse do sistema. Além disso, uma especialização para tratar o problema de *smoothing* (suavização), isto é, estimar um sinal no passado utilizando todas as medidas disponíveis até o instante atual, é formulada. Novamente, limitantes para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são utilizados para avaliar o desempenho das condições propostas frente a outras disponíveis na literatura.

Capítulo 5

Este capítulo é dedicado a tratar os problemas de controle por realimentação de estados e por realimentação estática de saída com memória para sistemas LTI discretos. A síntese dos controladores é realizada por meio de condições na forma de LMIs com escalares, obtidas a partir do Lema da Projeção e, no caso da realimentação estática de saída, assume-se que a matriz referente à saída medida seja precisamente conhecida e possua posto completo de linhas. Graças aos escalares introduzidos pelo Lema da Projeção, mostra-se por meio de exemplos numéricos que as condições propostas podem prover resultados menos conservadores realizando-se uma busca nos valores desses escalares. O

desempenho dos métodos propostos é comparado ao de outras estratégias disponíveis na literatura em termos dos limitantes para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Considerações finais

As conclusões finais desta tese, perspectivas de trabalhos futuros e os artigos relacionados produzidos e publicados são relatados neste capítulo.

2 Conceitos básicos e preliminares

Este capítulo introduz a estrutura geral dos sistemas incertos discretos LTI estudados, algumas definições básicas sobre a estabilidade de sistemas discretos e sobre as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , além do ferramental necessário para a obtenção das contribuições desta tese. Por fim, é apresentado um panorama geral sobre relaxações LMIs que são utilizadas para produzir condições na forma de LMIs programáveis para desigualdades matriciais dependentes de parâmetros com gradativa redução do grau de conservadorismo.

2.1 Sistemas lineares discretos

Os sistemas incertos discretos LTI abordados nesta tese são genericamente dados por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\xi)x(k) + B_u(\xi)u(k) + B_w(\xi)w(k) \\ y(k) &= C_y(\xi)x(k) + D_{yw}(\xi)w(k) \\ z(k) &= C_z(\xi)x(k) + D_u(\xi)u(k) + D_{zw}(\xi)w(k) \end{aligned} \quad (2.1)$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ um sinal de ruído (ou distúrbios) exógeno, $u(k) \in \mathbb{R}^r$ o sinal de controle, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ a saída medida do sistema e $z(k) \in \mathbb{R}^p$ a saída a ser controlada (no problema de controle) ou a ser estimada (no problema de filtragem). As matrizes incertas do sistema (2.1) possuem dimensões compatíveis e pertencem a um domínio politópico parametrizado em termos de um vetor de parâmetros invariantes no tempo ξ , ou seja, essas matrizes podem ser descritas pela combinação convexa dos vértices

$$\begin{bmatrix} A(\xi) & B_u(\xi) & B_w(\xi) \\ C_y(\xi) & 0 & D_{yw}(\xi) \\ C_z(\xi) & D_u(\xi) & D_{zw}(\xi) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \xi_i \begin{bmatrix} A_i & B_{u,i} & B_{w,i} \\ C_{y,i} & 0 & D_{yw,i} \\ C_{z,i} & D_{u,i} & D_{zw,i} \end{bmatrix}, \quad \xi \in \Xi_N, \quad (2.2)$$

formando um politopo convexo no espaço. Em (2.2), Ξ_N é o conjunto de N elementos conhecido como *simplex unitário*, definido por

$$\Xi_N = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (2.3)$$

Neste ponto, é interessante caracterizar a matriz de transferência para um sistema incerto discreto LTI. Para tanto, define-se o seguinte sistema auxiliar

$$\begin{aligned} s(k+1) &= \mathbb{A}(\xi)s(k) + \mathbb{B}(\xi)w(k) \\ e(k) &= \mathbb{C}(\xi)s(k) + \mathbb{D}(\xi)w(k) \end{aligned} \quad (2.4)$$

sendo $s(k)$ o vetor de estados e $e(k)$ a saída. As matrizes $\mathbb{A}(\xi)$, $\mathbb{B}(\xi)$, $\mathbb{C}(\xi)$ e $\mathbb{D}(\xi)$ correspondem a matrizes em malha fechada ou aumentadas do sistema (2.1) combinado a um

controlador ou um filtro, respectivamente. Essas matrizes são adequadamente definidas nos capítulos subsequentes para tratar os problemas de controle e filtragem abordados na tese. Assim, para um dado valor de $\xi \in \Xi_N$, a matriz de transferência da entrada $w(k)$ para a saída $e(k)$ é dada por

$$H(\zeta, \xi) = \mathbb{C}(\xi) (\zeta I - \mathbb{A}(\xi))^{-1} \mathbb{B}(\xi) + \mathbb{D}(\xi) \quad (2.5)$$

sendo ζ a variável complexa advinda da Transformada \mathcal{Z} .

A seguir é enunciada uma série de resultados, sob a forma de LMIs dependentes de parâmetros, para a análise de estabilidade e o cômputo de desempenho de sistemas incertos discretos LTI.

2.1.1 Estabilidade

Um sistema linear discreto LTI é dito Schur estável se, e somente se, todos os autovalores¹ do sistema forem, em módulo, menores do que um, isto é, $|\lambda_i(A)| < 1$, para $i = 1, \dots, n$. Por outro lado, no caso de sistemas incertos, a relação $|\lambda_i(A(\xi))| < 1$ deve também valer para todo $\xi \in \Xi_N$ a fim de que a matriz $A(\xi)$ seja Schur estável.

Uma outra forma de se avaliar a Schur estabilidade do sistema $x(k+1) = A(\xi)x(k)$, sem a necessidade de computar explicitamente os autovalores da matriz do sistema, é por meio da teoria de Lyapunov, como apresentado no lema a seguir.

Lema 2.1 (BOYD *et al.*, 1994). *O sistema $x(k+1) = A(\xi)x(k)$ é Schur estável se, e somente se, existir $P(\xi) = P(\xi)^T \succ 0$ tal que*

$$A(\xi)^T P(\xi) A(\xi) - P(\xi) \prec 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P(\xi) & A(\xi)^T P(\xi) \\ P(\xi) A(\xi) & P(\xi) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.6)$$

para todo $\xi \in \Xi_n$.

Caso a condição (2.6) seja factível, a matriz $A(\xi)$ é Schur estável e, por consequência, $|\lambda_i(A(\xi))| < 1$ para $i = 1, \dots, n$ e $\xi \in \Xi_N$. Note também que a condição (2.6) deve ser avaliada para toda a combinação convexa das matrizes dependentes de parâmetros envolvidas, e que *a priori* não foi estabelecida uma estrutura para a matriz de Lyapunov dependente do parâmetro incerto $P(\xi)$. O ferramental utilizado para se obter um conjunto finito de LMIs programáveis a partir de uma escolha particular para a estrutura de $P(\xi)$ é apresentado na Seção 2.3.

¹ A notação $\lambda_i(A)$ é empregada para denotar o i -ésimo autovalor da matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

2.1.2 Norma \mathcal{H}_2

A norma \mathcal{H}_2 de um sistema incerto discreto LTI pode ser computada em termos da função de transferência (2.5), para um valor fixo de ξ , pela relação

$$\|H(\zeta, \xi)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr} \left(H^*(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \right) d\omega \quad (2.7)$$

na qual $\text{Tr}(\cdot)$ corresponde ao traço do argumento (\cdot) e o símbolo $(*)$ denota o complexo conjugado de um valor ou função complexa.

Equivalentemente, a norma \mathcal{H}_2 do sistema (2.4) pode ser calculada no domínio do tempo, para um valor fixo de ξ , por

$$\|H(\zeta, \xi)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} e(k)^T e(k) \quad (2.8)$$

sempre que $w(k)$ for a função impulso (delta de Dirac) definida por

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Note que as definições acima requerem que o valor da norma seja determinado para cada valor do parâmetro $\xi \in \Xi_N$. Empregando a teoria de Lyapunov e formulando o problema em termos de LMIs dependentes de parâmetros é possível determinar um limitante superior $\mu > 0$ para o valor da norma \mathcal{H}_2 válido em todo domínio politópico Ξ_N , ou seja,

$$\exists \mu > 0 : \|H(\zeta, \xi)\|_2 \leq \mu, \quad \forall \xi \in \Xi_N. \quad (2.9)$$

A igualdade em (2.9) é assegurada sempre que o sistema for precisamente conhecido (livre de incertezas). Condições convexas baseadas em LMIs dependentes de parâmetros para o cômputo de um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 por meio dos gramianos de observabilidade e de controlabilidade são apresentadas, respectivamente, a seguir.

Lema 2.2 (BOYD *et al.*, 1994). *O sistema (2.4) é Schur estável e possui um custo garantido \mathcal{H}_2 limitado superiormente por $\mu > 0$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\xi)$ e $M(\xi)$ tais que*

$$\text{Tr}(M(\xi)) \prec \mu^2 \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} M(\xi) - D(\xi)^T D(\xi) & B(\xi)^T P(\xi) \\ P(\xi) B(\xi) & P(\xi) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} P(\xi) & A(\xi)^T P(\xi) & C(\xi)^T \\ P(\xi) A(\xi) & P(\xi) & 0 \\ C(\xi) & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.12)$$

sejam satisfeitas para todo $\xi \in \Xi_N$.

Lema 2.3 (BOYD *et al.*, 1994). *O sistema (2.4) é Schur estável e possui um custo garantido \mathcal{H}_2 limitado superiormente por $\mu > 0$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\xi)$ e $M(\xi)$ tais que*

$$\text{Tr}(M(\xi)) < \mu^2 \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} M(\xi) - D(\xi)D(\xi)^T & C(\xi)P(\xi) \\ P(\xi)C(\xi)^T & P(\xi) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} P(\xi) & A(\xi)P(\xi) & B(\xi) \\ P(\xi)A(\xi)^T & P(\xi) & 0 \\ B(\xi)^T & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.15)$$

sejam satisfeitas para todo $\xi \in \Xi_N$.

As condições apresentadas nos Lemas 2.2 e 2.3 são extensões diretas do cômputo da norma \mathcal{H}_2 por meio dos gramianos de observabilidade e de controlabilidade, respectivamente, para sistemas discretos incertos.

Para um sistema discreto LTI precisamente conhecido, a minimização do escalar μ tanto no Lema 2.2, quanto no Lema 2.3, assegura a obtenção do valor da norma \mathcal{H}_2 para o sistema. Por outro lado, caso o sistema possua incertezas, o procedimento de minimização de μ retorna apenas um limitante superior para a norma do sistema, para todo $\xi \in \Xi_N$, sendo que os valores determinados pelos Lemas 2.2 e 2.3 podem não coincidir dependendo da estrutura do problema. Desta forma, nos capítulos subsequentes restringe-se a apresentação dos resultados para o gramiano que proporcionou menores limitantes para a norma \mathcal{H}_2 dos sistemas.

Uma forma equivalente para se computar um limitante para a norma \mathcal{H}_2 é por meio da introdução de variáveis de folga às condições (por exemplo, utilizando o Lema de Finsler a ser retratado na Seção 2.2), conforme apresentado em de Oliveira *et al.* (2002). Os lemas a seguir baseados, respectivamente, nos gramianos de observabilidade e de controlabilidade expõem tal resultado, podendo ser vistos como a extensão direta das condições apresentadas em de Oliveira *et al.* (2002) para o caso em que todas as matrizes são dependentes de parâmetros.

Lema 2.4. *O sistema (2.4) é Schur estável e possui um custo garantido \mathcal{H}_2 limitado superiormente por $\mu > 0$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas*

$P(\xi)$ e $M(\xi)$, e uma matriz $G(\xi)$ tais que

$$\text{Tr}(M(\xi)) \prec \mu^2 \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} M(\xi) - D(\xi)^T D(\xi) & B(\xi)^T G(\xi) \\ G(\xi) B(\xi) & G(\xi) + G(\xi)^T - P(\xi) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} P(\xi) & A(\xi)^T G(\xi) & C(\xi)^T \\ G(\xi) A(\xi) & G(\xi) + G(\xi)^T - P(\xi) & 0 \\ C(\xi) & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.18)$$

sejam satisfeitas para todo $\xi \in \Xi_N$.

Lema 2.5. *O sistema (2.4) é Schur estável e possui um custo garantido \mathcal{H}_2 limitado superiormente por $\mu > 0$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\xi)$ e $M(\xi)$, e uma matriz $G(\xi)$ tais que*

$$\text{Tr}(M(\xi)) \prec \mu^2 \quad (2.19)$$

$$\begin{bmatrix} M(\xi) - D(\xi) D(\xi)^T & C(\xi) G(\xi) \\ G(\xi) C(\xi)^T & G(\xi) + G(\xi)^T - P(\xi) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} P(\xi) & A(\xi) G(\xi) & B(\xi) \\ G(\xi) A(\xi)^T & G(\xi) + G(\xi)^T - P(\xi) & 0 \\ B(\xi)^T & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.21)$$

sejam satisfeitas para todo $\xi \in \Xi_N$.

Apesar das condições dos Lemas 2.2 e 2.4 e dos Lemas 2.3 e 2.5 serem equivalentes, para fins de síntese de controladores e filtros com desempenho garantido \mathcal{H}_2 para sistemas discretos incertos LTI, os Lemas 2.4 e 2.5 mostram-se mais interessantes visto que a matriz de Lyapunov $P(\xi)$ encontra-se separada das matrizes do sistema o que permite que as matrizes do controlador ou do filtro possam ser recuperadas a partir de partições da variável de folga introduzida.

Vale notar que as condições apresentadas possuem dimensão infinita, ou seja, necessitam ser verificadas para todo $\xi \in \Xi_N$. Sistemáticas para a obtenção de um conjunto finito de LMIs a partir da representação robusta, por meio da imposição de estruturas às variáveis dependentes de parâmetros e relaxações, são descritas na Seção 2.3. Ademais, não há necessidade de se impor, separadamente, que a matriz $P(\xi)$ seja definida positiva, pois essa aparece como um bloco na diagonal das matrizes (2.12), (2.15), (2.18) e (2.21).

2.1.3 Norma \mathcal{H}_∞

Outra norma utilizada nesta tese é a norma \mathcal{H}_∞ para sistemas incertos discretos LTI, cuja definição no espaço frequencial, para cada valor de ξ , é dada por (FRANCIS,

1987)

$$\|H(\zeta, \xi)\|_\infty = \max_{\omega \in [-\pi, \pi]} \bar{\sigma} \left(H(e^{j\omega}) \right) \quad (2.22)$$

em que $\bar{\sigma}(\cdot)$ corresponde ao máximo valor singular de (\cdot) .

Tal qual a norma \mathcal{H}_2 , a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (2.4) pode também ser determinada no domínio do tempo, para um valor fixo de ξ , pela relação

$$\|H(\zeta, \xi)\|_\infty^2 = \sup_{\substack{w(k) \in \ell_2 \\ w(k) \neq 0}} \frac{\|e(k)\|_2^2}{\|w(k)\|_2^2} \quad (2.23)$$

na qual $w(k)$ é um ruído pertencente ao espaço ℓ_2 , isto é, o espaço das funções de energia finita.

Alternativamente, o problema de determinação de um limitante superior $\gamma > 0$ para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (2.4) pode ser reformulado em termos de LMIs dependentes de parâmetros utilizando a teoria de Lyapunov, sem que haja a necessidade de se computar o valor da norma para cada possível valor do parâmetro $\xi \in \Xi_N$. Desse modo,

$$\exists \gamma > 0 : \|H(\zeta, \xi)\|_\infty \leq \gamma, \quad \forall \xi \in \Xi_N, \quad (2.24)$$

sendo que o valor do limitante γ pode ser determinado por meio do seguinte lema, que é a extensão direta do *Bounded Real Lemma* (BRL) (BOYD *et al.*, 1994) para o caso discreto incerto.

Lema 2.6 (BOYD *et al.*, 1994). *O sistema (2.4) é Schur estável e possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ limitado superiormente por $\gamma > 0$ se, e somente se, existir uma matriz simétrica $P(\xi)$ tal que*

$$\begin{bmatrix} P(\xi) & A(\xi)^T P(\xi) & 0 & C(\xi)^T \\ P(\xi)A(\xi) & P(\xi) & P(\xi)B(\xi) & 0 \\ 0 & B(\xi)^T P(\xi) & I & D(\xi)^T \\ C(\xi) & 0 & D(\xi) & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.25)$$

seja satisfeita para todo $\xi \in \Xi_N$.

Assim como no caso da norma \mathcal{H}_2 , a minimização de γ provê o valor da norma \mathcal{H}_∞ , quando o sistema é precisamente conhecido, ou fornece um limitante superior, quando o sistema é incerto. Outrossim, é também possível introduzir variáveis de folga às condições do Lema 2.6 de forma a produzir condições equivalentes para o cômputo de um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ , como retratado no lema a seguir (uma extensão direta da caracterização estendida apresentada em de Oliveira *et al.* (2002) para o caso incerto).

Lema 2.7. *O sistema (2.4) é Schur estável e possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ limitado superiormente por $\gamma > 0$ se, e somente se, existirem uma matriz simétrica $P(\xi)$ e uma*

matriz $G(\xi)$ tais que

$$\begin{bmatrix} P(\xi) & A(\xi)^T G(\xi) & 0 & C(\xi)^T \\ G(\xi)A(\xi) & G(\xi) + G(\xi)^T - P(\xi) & G(\xi)B(\xi) & 0 \\ 0 & B(\xi)^T G(\xi) & I & D(\xi)^T \\ C(\xi) & 0 & D(\xi) & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.26)$$

seja satisfeita para todo $\xi \in \Xi_N$.

Os mesmos comentários tecidos para o caso da norma \mathcal{H}_2 são válidos para as condições de cômputo de um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ , isto é, as condições propostas encontram-se em sua forma robusta (LMIs dependentes de parâmetros, de dimensão infinita) e uma estrutura deve ser arbitrada para as variáveis dependentes do parâmetro ξ a fim de se obter um conjunto finito de LMIs programáveis. A positividade da matriz $P(\xi)$ é garantida tanto pela condição (2.25) quanto por (2.26), pois $P(\xi)$ é um bloco na diagonal principal das matrizes envolvidas nessas condições.

Observação 2.8. As condições apresentadas nos lemas precedentes são necessárias e suficientes desde que todas as variáveis envolvidas sejam dependentes do parâmetro incerto ξ . A caracterização sem variáveis de folga pode ser vista como uma extensão direta dos resultados apresentados por Boyd *et al.* (1994) para o cômputo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por meio de LMIs, impondo que todas as matrizes dependam do parâmetro incerto. Por outro lado, a caracterização com variáveis de folga é uma extensão direta dos resultados relatados por de Oliveira *et al.* (2002). Em Oliveira e Peres (2008) as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ foram completamente caracterizadas por meio de condições dependentes de parâmetros (LMIs robustas) com mais variáveis de folga, sendo resolvidas por meio de relaxações convergentes baseadas em funções polinomiais homogêneas de grau genérico e na extensão do Teorema de Pólya para matrizes polinomiais (SCHERER, 2005; OLIVEIRA; PERES, 2007).

2.2 Lemas auxiliares

Para provar os principais resultados desta tese, é feito o uso recorrente de três lemas, cujas finalidades são eliminar ou criar variáveis adicionais e separar a matriz de Lyapunov das demais matrizes do sistema. O primeiro é o *Complemento de Schur* (BOYD; VANDENBERGHE, 2004), reproduzido a seguir.

Lema 2.9 (Complemento de Schur). *Considerando que as matrizes A_{11} e A_{22} são simétricas, as condições*

$$A_{11} \succ 0, \quad (2.27)$$

$$A_{22} \succ A_{21}A_{11}^{-1}A_{21}^T \quad (2.28)$$

são equivalentes à LMI

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (2.29)$$

De forma análoga, as condições

$$A_{22} \succ 0, \quad (2.30)$$

$$A_{11} \succ A_{21}^T A_{22}^{-1} A_{21} \quad (2.31)$$

são, também, equivalentes à LMI (2.29).

No Lema 2.9, a invertibilidade das matrizes A_{11} e A_{22} é assegurada caso as condições (2.27) e (2.30), respectivamente, sejam satisfeitas.

O segundo lema, dado na sequência, é conhecido por *Lema da Projeção* (ou *Lema da Eliminação*) (GAHINET; APKARIAN, 1994; IWASAKI; SKELTON, 1994; SKELTON *et al.*, 1998) e é utilizado para separar a matriz de Lyapunov das demais matrizes do sistema introduzindo variáveis extras (de folga) ao problema.

Lema 2.10 (Lema da Projeção). *Dadas uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e duas matrizes U e V com n colunas, existe uma matriz não estruturada X que satisfaz*

$$Q + V^T X U + U^T X^T V \prec 0 \quad (2.32)$$

se, e somente se, as desigualdades de projeção em relação a X são satisfeitas

$$(U^\perp)^T Q U^\perp \prec 0 \quad (2.33)$$

$$(V^\perp)^T Q V^\perp \prec 0 \quad (2.34)$$

sendo que U^\perp e V^\perp são matrizes arbitrárias cujas colunas formam uma base para o espaço nulo de U e V , respectivamente.

Por fim é apresentado o *Lema de Finsler* (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001) que é utilizado para se obter condições para a síntese de filtros e controladores e para o cômputo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Lema 2.11 (Lema de Finsler). *Sejam $\eta \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $\text{rank}(B) < n$ e B^\perp uma base para o espaço nulo de B , isto é, $B B^\perp = 0$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

$$i) \eta^T Q \eta < 0, \forall \eta \neq 0 : B \eta = 0;$$

$$ii) (B^\perp)^T Q B^\perp \prec 0;$$

$$iii) \exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu B^T B \prec 0;$$

$$iv) \exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + X B + B^T X^T \prec 0.$$

2.3 Relaxações LMIs

Até este ponto, todas as condições apresentadas foram dadas na forma de LMIs robustas, isto é, LMIs dependentes do parâmetro incerto ξ . Entretanto, essa forma não é adequada para a programação visto que as condições devem ser verificadas para todos os valores de $\xi \in \Xi_N$, o que caracteriza um problema de dimensão infinita. Arbitrando-se estruturas particulares para as variáveis do problema, por exemplo, dependência afim no parâmetro incerto, pode-se obter um conjunto finito de LMIs que, se verificado, garante a validade da condição LMI robusta original para todo $\xi \in \Xi_N$. Note, sobretudo, que as condições obtidas por meio deste procedimento são apenas suficientes para a validade da condição original. Entretanto, condições mais e mais precisas podem ser construídas (SCHERER, 2005; OLIVEIRA; PERES, 2007) de maneira que as LMIs tornem-se assintoticamente necessárias (nos casos em que não se impõem restrições de estrutura nas variáveis de decisão), ou tornem-se menos conservadoras.

2.3.1 Dependência paramétrica

Por simplicidade de apresentação dos conceitos desta seção, apenas o problema de estabilidade de sistemas incertos discretos LTI é considerado. Tais conceitos são facilmente estendidos para tratar os problemas de cômputo de limitantes para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para esses sistemas.

Uma das formas mais imediatas de se certificar a estabilidade de um sistema incerto discreto LTI por meio da condição (2.6) é supor que a matriz de Lyapunov é constante para todo o domínio paramétrico do sistema (2.1), isto é, $P(\xi) = P$ para todo $\xi \in \Xi_N$. Assim, uma condição suficiente para a estabilidade do sistema

$$x(k+1) = A(\xi)x(k) \quad (2.35)$$

com $A(\xi)$ dado em (2.2), é dada no seguinte lema:

Lema 2.12. *Se existir uma matriz simétrica P tal que*

$$\begin{bmatrix} P & A_i^T P \\ P A_i & P \end{bmatrix} \succ 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.36)$$

então o sistema (2.35) é Schur estável para todo $\xi \in \Xi_N$.

No entanto, a escolha da matriz de Lyapunov independente do parâmetro incerto mostra-se excessivamente conservadora, pois uma mesma matriz P deve assegurar a estabilidade em todo o domínio paramétrico. Para contornar essa limitação e reduzir o conservadorismo da condição de estabilidade, supõe-se que a matriz de Lyapunov possua a mesma estrutura da matriz $A(\xi)$, isto é, seja afim no parâmetro incerto:

$$P(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i P_i, \quad \xi \in \Xi_N. \quad (2.37)$$

Dessa forma, a estabilidade do sistema (2.35) pode ser alternativamente certificada pelo lema a seguir, baseado nos resultados apresentados por Ramos e Peres (2001) (caso discreto) e por Ramos e Peres (2002) (caso contínuo).

Lema 2.13. *Se existirem matrizes simétricas P_i , $i = 1, \dots, N$, tais que*

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_i \\ P_i A_i & P_i \end{bmatrix} \succ 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.38)$$

$$\begin{bmatrix} P_i + P_j & A_i^T P_j + A_j^T P_i \\ P_j A_i + P_i A_j & P_i + P_j \end{bmatrix} \succ 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = i+1, \dots, N \quad (2.39)$$

então o sistema (2.35) é Schur estável para todo $\xi \in \Xi_N$.

Para exemplificar as condições do Lema 2.13, considere um sistema politópico com $N = 2$ vértices. Assim,

$$\begin{aligned} A(\xi) &= \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2, & P(\xi) &= \xi_1 P_1 + \xi_2 P_2, \\ \xi_1 + \xi_2 &= 1, & \xi_1 \geq 0, & \xi_2 \geq 0 \end{aligned}$$

e as condições de estabilidade são dadas por

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} P_1 & A_1^T P_1 \\ P_1 A_1 & P_1 \end{bmatrix} \succ 0, \\ &\begin{bmatrix} P_2 & A_2^T P_2 \\ P_2 A_2 & P_2 \end{bmatrix} \succ 0, \\ &\begin{bmatrix} P_1 + P_2 & A_1^T P_2 + A_2^T P_1 \\ P_2 A_1 + P_1 A_2 & P_1 + P_2 \end{bmatrix} \succ 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Caso as LMIs acima sejam verificadas, então o sistema (2.35) com $N = 2$ vértices é Schur estável para todo $\xi \in \Xi_N$.

Note que as condições do Lema 2.13 são menos conservadoras do que as condições do Lema 2.12, pois não há a imposição de uma mesma matriz de Lyapunov certificar a estabilidade do sistema para todo o domínio paramétrico. Além disso, escolhendo $P_i = P$, $i = 1, \dots, N$, nas condições do Lema 2.13 recupera-se exatamente a condição de estabilidade do Lema 2.12.

Uma outra forma de obterem-se condições LMIs menos conservadoras é supor que a função de Lyapunov possua dependência polinomial no parâmetro incerto, estendendo e generalizando o conceito de funções de Lyapunov afins. Em Oliveira e Peres (2007), a caracterização completa das condições LMIs dependentes de parâmetros por meio de variáveis de decisão e funções de Lyapunov polinomialmente dependentes de parâmetros é estabelecida e é demonstrado que as condições LMIs finitas obtidas utilizando essa classe de funções tendem à necessidade para um grau suficientemente grande de dependência no parâmetro incerto. Todavia, a descrição programável das condições torna-se

cada vez mais complexa com o aumento dos graus das variáveis de decisão. Por exemplo, supondo um sistema de $N = 2$ vértices e que o grau da matriz de Lyapunov $P(\xi)$ seja $g = 2$, isto é,

$$P(\xi) = \xi_1^2 P_{01} + \xi_1 \xi_2 P_{11} + \xi_2^2 P_{10},$$

então as condições finitas de estabilidade derivadas do Lema 2.1 são dadas por:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_{01} & A_1^T P_{01} \\ P_{01} A_1 & P_{01} \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \begin{bmatrix} P_{10} & A_2^T P_{10} \\ P_{10} A_2 & P_{10} \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \begin{bmatrix} P_{01} + P_{11} & A_1^T P_{11} + A_2^T P_{01} \\ P_{11} A_1 + P_{01} A_2 & P_{01} + P_{11} \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \begin{bmatrix} P_{10} + P_{11} & A_1^T P_{10} + A_2^T P_{11} \\ P_{10} A_1 + P_{11} A_2 & P_{10} + P_{11} \end{bmatrix} \succ 0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Para automatizar o processo de obtenção de um conjunto finito de LMIs e aliviar parte do fardo do projetista, Agulhari *et al.* (2012b) desenvolveram o pacote computacional ROLMIP (*Robust LMI Parser*) para MATLAB[®]. Este pacote, construído sobre o parser YALMIP (LÖFBERG, 2004), é baseado nos procedimentos de relaxação polinomial propostos por Oliveira e Peres (2007), sendo capaz de extrair um conjunto finito de LMIs a partir da imposição de um grau $g \geq 0$ particular às variáveis de decisão polinomialmente dependentes de parâmetros. Exemplos de programação utilizando o ROLMIP são fornecidos no Apêndice A juntamente com as condições LMIs geradas pelo pacote computacional.

3 Filtros de ordem não mínima

Este capítulo apresenta os arcabouços para a síntese de filtros robustos discretos de ordem não mínima, ou seja, filtros cuja ordem é maior do que a ordem do sistema sendo filtrado. A metodologia de projeto baseia-se em construir um sistema auxiliar aumentado, com matrizes constantes, e sintetizar um filtro de ordem completa para esse sistema. O filtro assim projetado é, então, de ordem não mínima para o sistema discreto original. O método proposto é comparado a outras técnicas da literatura por meio de experimentos numéricos ilustrativos.

3.1 Definição do problema

A estrutura do sistema discreto incerto LTI considerada no problema de filtragem é obtida de (2.1) impondo $B_u(\xi) = 0$ e $D_u(\xi) = 0$ e é dada por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\xi)x(k) + B_w(\xi)w(k) \\ y(k) &= C_y(\xi)x(k) + D_{yw}(\xi)w(k) \\ z(k) &= C_z(\xi)x(k) + D_{zw}(\xi)w(k). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ademais, supõe-se que o sistema (3.1) seja estável. Deseja-se projetar um filtro robusto discreto LTI com custo garantido para esse sistema de forma que o desempenho alcançado seja tão próximo quanto possível da norma, \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_2 , de pior caso do sistema obtido pela combinação do sistema (3.1) com o filtro, cuja realização genérica é dada por

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}y(k) \\ \hat{z}(k) &= \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}y(k) \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n+d}$, $d \geq 0$, o estado do filtro, $\hat{z}(k) \in \mathbb{R}^p$ a saída estimada e \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} são as matrizes do filtro, a serem determinadas, com dimensões compatíveis. No caso de $d = 0$, tem-se um *filtro de ordem completa* padrão e, no caso de $d > 0$, tem-se um *filtro de ordem não mínima*, ou seja, maior do que a ordem do sistema (3.1).

Considerando que o *erro de estimação* da saída $z(k)$ do sistema seja dado por

$$e(k) = z(k) - \hat{z}(k) \quad (3.3)$$

e definindo

$$s(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+d}, \quad (3.4)$$

a conexão do sistema (3.1) com o filtro (3.2) provê o seguinte sistema discreto incerto LTI

$$\begin{aligned} s(k+1) &= \mathbb{A}(\xi) s(k) + \mathbb{B}(\xi) w(k) \\ e(k) &= \mathbb{C}(\xi) s(k) + \mathbb{D}(\xi) w(k) \end{aligned} \quad (3.5)$$

com

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{A}(\xi) & \mathbb{B}(\xi) \\ \hline \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{D}(\xi) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A(\xi) & 0 & B_w(\xi) \\ \hat{B} C_y(\xi) & \hat{A} & \hat{B} D_{yw}(\xi) \\ \hline C_z(\xi) - \hat{D} C_y(\xi) & -\hat{C} & D_{zw}(\xi) - \hat{D} D_{yw}(\xi) \end{array} \right]. \quad (3.6)$$

Devido à dimensão do filtro (3.2) ser maior do que a dimensão do sistema (3.1), os métodos tradicionais de síntese de filtros que resultam em condições convexas não podem ser diretamente aplicados. Não obstante, é razoável redefinir o sistema (3.1) em termos de um sistema aumentado cuja ordem é igual a ordem do filtro, $n + d$. Portanto, estabelece-se o seguinte sistema auxiliar:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}(\xi) \tilde{x}(k) + \tilde{B}_w(\xi) w(k) \\ y(k) &= \tilde{C}_y(\xi) \tilde{x}(k) + \tilde{D}_{yw}(\xi) w(k) \\ z(k) &= \tilde{C}_z(\xi) \tilde{x}(k) + \tilde{D}_{zw}(\xi) w(k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

com $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+d}$, $d \geq 0$, e

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}(\xi) & \tilde{B}_w(\xi) \\ \hline \tilde{C}_y(\xi) & \tilde{D}_{yw}(\xi) \\ \tilde{C}_z(\xi) & \tilde{D}_{zw}(\xi) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & A(\xi) & B_w(\xi) \\ \hline 0 & C_y(\xi) & D_{yw}(\xi) \\ 0 & C_z(\xi) & D_{zw}(\xi) \end{array} \right] \quad (3.8)$$

sendo $\Phi_1 \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\Phi_2 \in \mathbb{R}^{d \times n}$ e $\Phi_3 \in \mathbb{R}^{d \times m}$ matrizes constantes arbitrárias a serem definidas. Com base no sistema auxiliar proposto (3.7) e considerando que o vetor de estados (3.4) é redefinido para

$$s(k) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(n+d)}, \quad (3.9)$$

as matrizes $\mathbb{A}(\xi)$, $\mathbb{B}(\xi)$, $\mathbb{C}(\xi)$ e $\mathbb{D}(\xi)$ do sistema (3.5) são reestruturadas como

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{A}(\xi) & \mathbb{B}(\xi) \\ \hline \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{D}(\xi) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}(\xi) & 0 & \tilde{B}_w(\xi) \\ \hat{B} \tilde{C}_y(\xi) & \hat{A} & \hat{B} \tilde{D}_{yw}(\xi) \\ \hline \tilde{C}_z(\xi) - \hat{D} \tilde{C}_y(\xi) & -\hat{C} & \tilde{D}_{zw}(\xi) - \hat{D} \tilde{D}_{yw}(\xi) \end{array} \right]. \quad (3.10)$$

Uma característica importante da realização (3.8) é que esta se encontra na forma canônica observável (KAILATH, 1980). Consequentemente, para todo $d > 0$, os pares (\tilde{A}, \tilde{C}_y) e (\tilde{A}, \tilde{C}_z) são não observáveis mesmo que (A, C_y) e (A, C_z) o sejam. Em outras palavras, a realização (3.8) é em si uma realização de ordem não mínima.

Lema 3.1. *Seja $H_{wy}(\zeta, \xi)$ a matriz de transferência da entrada $w(k)$ para a saída $y(k)$ do sistema (3.1) e seja $H_{we}(\zeta, \xi)$ a matriz de transferência da entrada $w(k)$ para o erro de estimação $e(k)$ do sistema (3.1) conectado ao filtro (3.2). Seja $\tilde{H}_{wy}(\zeta, \xi)$ a matriz de transferência da entrada $w(k)$ para a saída $y(k)$ do sistema auxiliar (3.7) e $\tilde{H}_{we}(\zeta, \xi)$ a matriz de transferência da conexão do sistema auxiliar (3.7) com o filtro não mínimo (3.2) da entrada $w(k)$ para o erro de estimação $e(k)$. Então $H_{wy}(\zeta, \xi) = \tilde{H}_{wy}(\zeta, \xi)$ e $H_{we}(\zeta, \xi) = \tilde{H}_{we}(\zeta, \xi)$.*

Demonstração. A prova é uma consequência direta do fato de a realização (3.10) estar na forma canônica observável e ser não observável. \square

Como consequência do Lema 3.1, um filtro projetado para o sistema auxiliar (3.7) apresenta o mesmo desempenho se aplicado ao sistema (3.1). Entretanto, a realização (3.10) possui uma vantagem do ponto de vista de projeto: o filtro (3.2) é de ordem completa com relação ao sistema (3.7), mas é de ordem não mínima com relação ao sistema (3.1). Devido a isso, é possível empregar técnicas para o projeto de filtros de ordem completa, por exemplo, baseadas em observadores (ANDERSON; MOORE, 1979) e filtragem robusta com LMIs (XIE *et al.*, 1991), para projetar os filtros de ordem não mínima. Todavia, ao realizar esse procedimento, é importante explorar a estrutura particular das matrizes em (3.8).

A suposição de que as matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 são constantes é um ponto crucial para a obtenção de condições na forma de LMIs dependentes de parâmetros. Note que, apesar de não afetarem diretamente a matriz de transferência $\tilde{H}_{we}(\zeta, \xi)$, essas matrizes possuem um papel importante dado que indiretamente *parametrizam* as matrizes do filtro de ordem não mínima (3.2). Essa característica é uma propriedade familiar de filtros baseados em observadores, na qual a estrutura do filtro imita a estrutura do sistema sendo filtrado. Por essa razão, algumas hipóteses adicionais devem ser feitas sobre as matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 . Posto que a filtragem robusta requer estabilidade do sistema para todo $\xi \in \Xi_N$, requer-se que a matriz Φ_1 seja Schur estável. Outrossim, é razoável assumir que o par (Φ_1, Φ_2) é controlável, pois, caso não o fosse, seria possível aplicar uma decomposição de Kalman (ZHOU *et al.*, 1996) para separar os estados do vetor (3.9) em uma parcela que não é influenciada pelos demais estados e em outra parcela que o é. Assim, a parcela não influenciada pelos estados possuiria uma dinâmica independente e poderia ser analisada separadamente do restante do sistema. A escolha da matriz Φ_3 pode ser, *a priori*, qualquer.

Um fato interessante é que, baseado em constatações empíricas, a aplicação de qualquer condição disponível na literatura para a síntese de filtros robustos para o sistema (3.7) não produz melhores resultados, em termos da norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , do que os resultados obtidos na síntese de filtros robustos para o sistema (3.1). Ilustra-se esse ponto por meio do Exemplo 3.4, no qual é empregada uma condição de projeto de filtros

robustos (que utiliza matrizes dependentes de parâmetros de maneira afim, $g = 1$) com desempenho garantido \mathcal{H}_∞ , reproduzida no lema a seguir.

Lema 3.2 (DE OLIVEIRA, 1999). *Para um dado $d \geq 0$, se existirem matrizes $E(\xi) = E(\xi)^T$, $G(\xi)$, $H(\xi) = H(\xi)^T$, Z , Y , F , L , R e Q tais que*

$$\left[\begin{array}{ccc} -E(\xi) & * & * \\ -G(\xi)^T & -H(\xi) & * \\ Z \tilde{A}(\xi) & Z \tilde{A}(\xi) & E(\xi) - Z - Z^T \\ Y \tilde{A}(\xi) + F \tilde{C}_y(\xi) + Q & Y \tilde{A}(\xi) + F \tilde{C}_y(\xi) & G(\xi)^T - Y - Z^T - S \\ 0 & 0 & \tilde{B}_w(\xi)^T Z^T \\ \tilde{C}_z(\xi) - R \tilde{C}_y(\xi) - L & \tilde{C}_z(\xi) - R \tilde{C}_y(\xi) & 0 \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ & H(\xi) - Y - Y^T & * & * \\ \tilde{B}_w(\xi)^T Y^T + \tilde{D}_{yw}(\xi)^T F^T & & -\gamma I & * \\ 0 & \tilde{D}_{zw}(\xi) - R \tilde{D}_{yw}(\xi) & -\gamma I & \end{array} \right] \prec 0, \quad (3.11)$$

então existe um filtro robusto dado em (3.2) de ordem $n_f = n + d$ tal que $\|H_{we}(\zeta, \xi)\|_\infty < \gamma$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Observação 3.3. Em de Oliveira (1999) foi proposta uma estrutura afim ($g = 1$) para as variáveis de decisão dependentes do parâmetro incerto, que resulta em um conjunto de LMIs que deve ser testado apenas nos vértices do politopo de incertezas. Além disso, escolhendo as variáveis do Lema 3.2 como $E(\xi) = G(\xi) = Z = Z^T$, $H(\xi) = Y = Y^T$ e $S = Z - Y$, recupera-se a condição de síntese de filtros robustos com uma matriz de Lyapunov constante ($g = 0$) apresentada em Geromel *et al.* (2000). Essa outra condição, baseada na estabilidade quadrática com matriz constante de Lyapunov, é também utilizada no Exemplo 3.4.

Exemplo 3.4. Considere o modelo discreto incerto LTI adaptado de Wang e Yang (2008):

$$A = \begin{bmatrix} -0.1996 & 0.1235 + \rho \\ -1.8704 & -0.1457 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$C_y = [0 \ 1], \quad C_z = [1 \ 1], \quad D_{yw} = 1, \quad D_{zw} = 0,$$

sendo ρ um parâmetro incerto que assume valores no intervalo $-0.45 \leq \rho \leq 0.35$.

Neste exemplo, as matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 são escolhidas como

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Para cada valor do parâmetro d considerado nas condições de projeto, as últimas d linhas das matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 são escolhidas para compor o sistema auxiliar (3.7) (as colunas são selecionadas de forma apropriada para que as matrizes do sistema (3.7) possuam dimensões compatíveis). Para ilustrar essa metodologia, na sequência são apresentados todos os conjuntos de matrizes obtidos com $d = \{1, 2, 3, 4\}$ (constituindo submatrizes de Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 em 3.13), sendo o caso $d = 5$ tal qual dado em (3.13):

$$\begin{aligned} d = 1 : & \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_3 = 0, \\ d = 2 : & \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ d = 3 : & \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ d = 4 : & \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Utilizando a condição do Lema 3.2 para a síntese de filtros robustos de ordem $n_f = n + d$, nos casos constante ($g = 0$) e afim ($g = 1$), com $d = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ obtêm-se os desempenhos garantidos \mathcal{H}_∞ reportados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ para o sistema (3.12) utilizando filtros robustos (3.2) sintetizados por meio do Lema 3.2 com variáveis constantes ($g = 0$) e afins ($g = 1$) no parâmetro incerto.

d	n_f	$g = 0$	$g = 1$
0	2	12.1239	4.0983
1	3	12.1239	4.0983
2	4	12.1238	4.0983
3	5	12.1238	4.0983
4	6	12.1238	4.0983
5	7	12.1238	4.0983

É possível observar que o aumento de dimensão do sistema (3.7) não gera benefícios em termos de reduzir os limitantes da norma \mathcal{H}_∞ para o sistema (3.12), corroborando a tese de que o simples aumento da ordem do sistema não produz menores limitantes para o norma do sistema. Na Seção 3.3 mostra-se que com a aplicação de condições de síntese adequadas, como as propostas nesta tese, é possível reduzir o conservadorismo das condições e produzir menores limitantes para os critérios de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Para realizar a síntese de filtros robustos de ordem não mínima com critérios de desempenho \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 , são utilizados, como ponto de partida, os dois lemas apresentados na sequência.

Lema 3.5. *A matriz $\mathbb{A}(\xi)$ é Schur estável e a norma \mathcal{H}_∞ da matriz de transferência (2.5) é limitada superiormente por $\gamma > 0$ se, e somente se, existirem matrizes $\mathbb{X}(\xi)$, $\mathbb{J}(\xi)$, $\mathbb{U}(\xi)$ e $\mathbb{V}(\xi)$ e uma matriz simétrica $\mathbb{P}(\xi)$ tais que¹*

$$\mathbb{P}(\xi) \succ 0 \quad (3.14)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbb{P}(\xi) + \mathbb{J}(\xi)\mathbb{A}(\xi) + \mathbb{A}(\xi)^T\mathbb{J}(\xi)^T & \star \\ \mathbb{X}(\xi)\mathbb{A}(\xi) + \mathbb{J}(\xi)^T & \mathbb{X}(\xi) + \mathbb{X}(\xi)^T - \mathbb{P}(\xi) \\ \mathbb{U}(\xi)\mathbb{A}(\xi) + \mathbb{B}(\xi)^T\mathbb{J}(\xi)^T & \mathbb{B}(\xi)^T\mathbb{X}(\xi)^T + \mathbb{U}(\xi) \\ \mathbb{V}(\xi)\mathbb{A}(\xi) + \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{V}(\xi) \end{array} \right] \succ 0 \quad (3.15)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \star & \star \\ \star & \star \\ \mathbb{U}(\xi)\mathbb{B}(\xi) + \mathbb{B}(\xi)^T\mathbb{U}(\xi)^T + I & \star \\ \mathbb{V}(\xi)\mathbb{B}(\xi) + \mathbb{D}(\xi) & \gamma^2 I \end{array} \right] \succ 0 \quad (3.15)$$

sejam verificadas para todo $\xi \in \Xi_N$.

Demonstração. A prova é uma decorrência direta da equivalência entre as condições *ii*) e *iv*) do Lema de Finsler com a seguinte escolha de matrizes:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(\xi) & \star & \star & \star \\ 0 & -\mathbb{P}(\xi) & \star & \star \\ 0 & 0 & I & \star \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = [\mathbb{A}(\xi) \quad I \quad \mathbb{B}(\xi) \quad 0], \quad \mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ \mathbb{A}(\xi) & \mathbb{B}(\xi) & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

□

¹ O símbolo \star indica um bloco simétrico da matriz.

Lema 3.6. A matriz $\mathbb{A}(\xi)$ é Schur estável e a norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência (2.5) é limitada superiormente por $\mu > 0$ se, e somente se, existirem matrizes $\mathbb{G}(\xi)$, $\mathbb{H}(\xi)$, $\mathbb{X}(\xi)$, $\mathbb{J}(\xi)$, $\mathbb{U}(\xi)$ e $\mathbb{V}(\xi)$ e matrizes simétricas $\mathbb{P}(\xi)$ e $\mathbb{M}(\xi)$ tais que

$$\text{Tr}(\mathbb{M}(\xi)) < \mu^2 \quad (3.17)$$

$$\mathbb{P}(\xi) \succ 0 \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M}(\xi) + \mathbb{H}(\xi)\mathbb{B}(\xi) + \mathbb{B}(\xi)^T\mathbb{H}(\xi)^T & \star & \star \\ \mathbb{G}(\xi)\mathbb{B}(\xi) + \mathbb{H}(\xi)^T & \mathbb{G}(\xi) + \mathbb{G}(\xi)^T - \mathbb{P}(\xi) & \star \\ \mathbb{U}(\xi)\mathbb{B}(\xi) + \mathbb{D}(\xi) & \mathbb{U}(\xi) & I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}(\xi) + \mathbb{J}(\xi)\mathbb{A}(\xi) + \mathbb{A}(\xi)^T\mathbb{J}(\xi)^T & \star & \star \\ \mathbb{X}(\xi)\mathbb{A}(\xi) + \mathbb{J}(\xi)^T & \mathbb{X}(\xi) + \mathbb{X}(\xi)^T - \mathbb{P}(\xi) & \star \\ \mathbb{V}(\xi)\mathbb{A}(\xi) + \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{V}(\xi) & I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.20)$$

sejam verificadas para todo $\xi \in \Xi_N$.

Demonstração. A prova é uma decorrência direta da equivalência entre as condições *ii*) e *iv*) do Lema de Finsler com a seguinte escolha de matrizes para a condição (3.19):

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{M}(\xi) & \star & \star \\ 0 & -\mathbb{P}(\xi) & \star \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{B}(\xi) & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_1^\perp = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ \mathbb{B}(\xi) & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

e com a escolha

$$\mathcal{Q}_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(\xi) & \star & \star \\ 0 & -\mathbb{P}(\xi) & \star \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{A}(\xi) & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_2^\perp = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ \mathbb{A}(\xi) & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

para a condição (3.20). \square

A minimização dos escalares γ e μ sujeita às restrições LMIs obtidas por meio de relaxações das condições propostas nos Lemas 3.5 e 3.6, respectivamente, produz as melhores soluções possíveis em termos dos limitantes das normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 .

Observação 3.7. Uma condição equivalente para o cômputo da norma \mathcal{H}_2 pode ser obtida por meio da forma dual do Lema 3.6, isto é, utilizando o gramiano de controlabilidade. Todavia, a forma dual não permite explorar diretamente a estrutura aumentada do sistema (3.7) (como elucidado nos resultados apresentados na seção subsequente), requerendo transformações de congruência que levem as condições a um formato adequado. Após realizar tais transformações, é necessário linearizar os produtos de variáveis que possam aparecer, ocasionando um possível aumento no conservadorismo da condição proposta. Devido a isso, são apresentadas ao longo desta tese somente condições para o cômputo da norma \mathcal{H}_2 baseadas no gramiano de observabilidade.

3.2 Síntese de filtros robustos de ordem não mínima

Para sintetizar os filtros robustos de ordem não mínima são escolhidas as seguintes partições para as variáveis auxiliares dos Lemas 3.5 e 3.6:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi) &= \left[\begin{array}{c|c} P_1(\xi) & P_2(\xi)^T \\ \hline P_2(\xi) & P_3(\xi) \end{array} \right], \quad \mathbb{X}(\xi) = \left[\begin{array}{cc|c} X_1(\xi) & X(\xi) & S \\ \hline Y_1(\xi) & Y(\xi) & S \end{array} \right], \quad \mathbb{G}(\xi) = \left[\begin{array}{cc|c} G_1(\xi) & G(\xi) & S \\ \hline Z_1(\xi) & Z(\xi) & S \end{array} \right], \\ \mathbb{J}(\xi) &= \left[\begin{array}{cc|c} J_1(\xi) & J(\xi) & 0 \\ \hline K_1(\xi) & K(\xi) & 0 \end{array} \right], \quad \mathbb{H}(\xi) = \left[\begin{array}{cc|c} H_1(\xi) & H(\xi) & 0 \end{array} \right], \quad \mathbb{U}(\xi) = \left[\begin{array}{cc|c} U_1(\xi) & U(\xi) & 0 \end{array} \right], \\ &\quad \mathbb{V}(\xi) = \left[\begin{array}{cc|c} V_1(\xi) & V(\xi) & 0 \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

O bloco S repetido nas matrizes $\mathbb{X}(\xi)$ e $\mathbb{G}(\xi)$ e os blocos de zeros nas variáveis $\mathbb{H}(\xi)$, $\mathbb{J}(\xi)$, $\mathbb{U}(\xi)$ e $\mathbb{V}(\xi)$ são responsáveis pela obtenção de condições convexas na forma de LMIs robustas para o projeto dos filtros que efetivamente tiram proveito da estrutura particular do problema. Todavia, impor que parte das variáveis independa do parâmetro incerto ξ é uma das fontes de conservadorismo presentes no método proposto.

O teorema a seguir apresenta uma contribuição para a síntese de filtros de ordem não mínima para o sistema (3.1) com critério de desempenho \mathcal{H}_∞ .

Teorema 3.8. *Sejam*

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0_{n \times d} & I \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} I & 0_{d \times n} \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(\xi) & \mathcal{B}(\xi) \\ \hline \mathcal{C}(\xi) & \mathcal{D}(\xi) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} F C_y(\xi) E_1 & Q & F D_{yw}(\xi) \\ F C_y(\xi) E_1 & Q & F D_{yw}(\xi) \\ \hline C_z(\xi) E_1 - R C_y(\xi) E_1 & -L & D_{zw}(\xi) - R D_{yw}(\xi) \end{array} \right], \quad (3.25)$$

$$\mathcal{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\xi) & \mathcal{A}(\xi)^T & 0 & \mathcal{C}(\xi)^T \\ \mathcal{A}(\xi) & \mathcal{G}(\xi) + \mathcal{G}(\xi)^T - \mathcal{P}(\xi) & \mathcal{B}(\xi) & 0 \\ 0 & \mathcal{B}(\xi)^T & I & \mathcal{D}(\xi)^T \\ \mathcal{C}(\xi) & 0 & \mathcal{D}(\xi) & \gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\mathcal{P}(\xi) = \begin{bmatrix} P_1(\xi) & P_2(\xi)^T \\ P_2(\xi) & P_3(\xi) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

$$\mathcal{X}(\xi) = \left[J(\xi)^T \quad K(\xi)^T \quad X(\xi)^T \quad Y(\xi)^T \quad U(\xi)^T \quad V(\xi)^T \right]^T, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{R}(\xi) = \left[A(\xi) E_1 \quad 0 \quad E_1 \quad 0 \quad B_w(\xi) \quad 0 \right]. \quad (3.29)$$

Para um $d \geq 0$ dado, se existirem matrizes simétricas $P_1(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times (n+d)}$ e $P_3(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times (n+d)}$, e matrizes $Q \in \mathbb{R}^{(n+d) \times (n+d)}$, $F \in \mathbb{R}^{(n+d) \times q}$, $L \in \mathbb{R}^{p \times (n+d)}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $S \in \mathbb{R}^{(n+d) \times (n+d)}$, $P_2(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times (n+d)}$, $J(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times n}$, $K(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times n}$, $X(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times n}$, $Y(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times n}$, $U(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $V(\xi) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, e um escalar $\gamma > 0$ tais que as seguintes

desigualdades

$$\mathcal{P}(\xi) \succ 0, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{N}_W^T \left(\mathcal{Q}(\xi) + \mathcal{X}(\xi)\mathcal{R}(\xi) + \mathcal{R}(\xi)^T \mathcal{X}(\xi)^T \right) \mathcal{N}_W \succ 0, \quad (3.31)$$

sejam verificadas para todo $\xi \in \Xi_N$, sendo \mathcal{N}_W uma base para o espaço nulo de

$$W = \begin{bmatrix} \varphi & 0 & E_2 & 0 & \Phi_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

dada por

$$\mathcal{N}_W = \begin{bmatrix} -I_{n+d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{n+d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_2^T \varphi & 0 & E_1^T & 0 & E_2^T \Phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{n+d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_p \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

então existe uma realização

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} S^{-1}Q & S^{-1}F \\ \hline L & R \end{array} \right] \quad (3.34)$$

para a qual a conexão do filtro robusto (3.2) com o sistema incerto (3.1) garante que $\|H_{we}(\zeta, \xi)\|_\infty < \gamma$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Demonstração. A prova é feita por meio do Lema de Finsler. Considere que (3.30) e (3.31) sejam factíveis e construa a seguinte matriz

$$\mathcal{N}(\xi) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ A(\xi)E_1 & 0 & B_w(\xi) & 0 \\ -S^{-1}FC_y(\xi)E_1 & -S^{-1}Q & -S^{-1}FD_{yw}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

A não singularidade da matriz S é garantida pela factibilidade do problema. Multiplique, então, (3.31) à direita por $\mathcal{N}(\xi)$ e à esquerda por $\mathcal{N}(\xi)^T$ e note que $E_1E_1^T = I$, $E_2E_2^T = I$ e $E_2E_1^T = 0$. Após algumas manipulações diretas chega-se a

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\xi) - \mathbb{A}(\xi)^T \mathcal{P}(\xi) \mathbb{A}(\xi) & -\mathbb{A}(\xi)^T \mathcal{P}(\xi) \mathbb{B}(\xi) & \mathbb{C}(\xi) \\ -\mathbb{B}(\xi)^T \mathcal{P}(\xi) \mathbb{A}(\xi) & I - \mathbb{B}(\xi)^T \mathcal{P}(\xi) \mathbb{B}(\xi) & \mathbb{D}(\xi)^T \\ \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{D}(\xi) & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succ 0$$

que é equivalente à condição (2.25), por meio de um complemento de Schur, após substituir as variáveis do filtro (3.34). \square

Na sequência é apresentado um teorema para a síntese de filtros não mínimos com critério de desempenho \mathcal{H}_2 .

Teorema 3.9. *Sejam E_1, E_2 e φ dados em (3.24), $\mathcal{P}(\xi)$ e $\mathcal{G}(\xi)$ dados em (3.27), $\mathcal{A}(\xi), \mathcal{B}(\xi), \mathcal{C}(\xi)$ e $\mathcal{D}(\xi)$ dados em (3.25) e*

$$\mathcal{Q}_T(\xi) = \begin{bmatrix} M(\xi) & \star & \star \\ \mathcal{B}(\xi) & \mathcal{G}(\xi) + \mathcal{G}(\xi)^T - \mathcal{P}(\xi) & \star \\ \mathcal{D}(\xi) & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{Q}_G(\xi) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\xi) & \star & \star \\ \mathcal{A}(\xi) & \mathcal{G}(\xi) + \mathcal{G}(\xi)^T - \mathcal{P}(\xi) & \star \\ \mathcal{C}(\xi) & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$\mathcal{Y}(\xi) = [H(\xi)^T \ G(\xi)^T \ Z(\xi)^T \ 0]^T, \quad (3.37)$$

$$\mathcal{X}(\xi) = [J(\xi)^T \ K(\xi)^T \ X(\xi)^T \ Y(\xi)^T \ 0]^T, \quad (3.38)$$

$$\mathcal{S}(\xi) = [B(\xi) \ E_1 \ 0 \ 0], \quad (3.39)$$

$$\mathcal{R}(\xi) = [A(\xi)E_1 \ 0 \ E_1 \ 0 \ 0]. \quad (3.40)$$

Para um $d \geq 0$ dado, se existirem matrizes simétricas $M(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $P_1(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times (n+d)}$ e $P_3(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times (n+d)}$, e matrizes $Q \in \mathbb{R}^{(n+d) \times (n+d)}$, $F \in \mathbb{R}^{(n+d) \times q}$, $L \in \mathbb{R}^{p \times (n+d)}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $S \in \mathbb{R}^{(n+d) \times (n+d)}$, $P_2(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times (n+d)}$, $H(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $G(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times n}$, $Z(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times n}$, $J(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times n}$, $K(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times n}$, $X(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times n}$ e $Y(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+d) \times n}$, e um escalar $\mu > 0$ tais que as seguintes desigualdades

$$\text{Tr}(M(\xi)) < \mu^2 \quad (3.41)$$

$$\mathcal{P}(\xi) \succ 0, \quad (3.42)$$

$$\mathcal{N}_{W_T}^T (\mathcal{Q}_T(\xi) + \mathcal{Y}(\xi)\mathcal{S}(\xi) + \mathcal{S}(\xi)^T\mathcal{Y}(\xi)^T) \mathcal{N}_{W_T} \succ 0, \quad (3.43)$$

$$\mathcal{N}_{W_G}^T (\mathcal{Q}_G(\xi) + \mathcal{X}(\xi)\mathcal{R}(\xi) + \mathcal{R}(\xi)^T\mathcal{X}(\xi)^T) \mathcal{N}_{W_G} \succ 0, \quad (3.44)$$

sejam verificadas para todo $\xi \in \Xi_N$, sendo \mathcal{N}_{W_T} e \mathcal{N}_{W_G} bases para os espaços nulos de

$$W_T = [\Phi_3 \ E_2 \ 0 \ 0], \quad W_G = [\varphi \ 0 \ E_2 \ 0 \ 0] \quad (3.45)$$

respectivamente, dadas por

$$\mathcal{N}_{W_T} = \begin{bmatrix} -I_m & 0 & 0 & 0 \\ E_2^T \Phi_3 & E_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n+d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_p \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_{W_G} = \begin{bmatrix} -I_{n+d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{n+d} & 0 & 0 & 0 \\ E_2^T \varphi & 0 & E_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{n+d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_p \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

então existe uma realização (3.34) para a qual a conexão do filtro robusto (3.2) com o sistema incerto (3.1) garante que $\|H_{we}(\zeta, \xi)\|_2 < \mu$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Demonstração. A prova é feita por meio do Lema de Finsler. Considere que as condições (3.41) a (3.44) sejam factíveis e construa as seguintes matrizes

$$\mathcal{N}_T(\xi) = \begin{bmatrix} I \\ B(\xi) \\ -S^{-1}FD_{yw}(\xi) \\ -(D_{zw}(\xi) - RD_{yw}(\xi)) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_G(\xi) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ A(\xi)E_1 & 0 \\ -S^{-1}FC_y(\xi)E_1 & -S^{-1}Q \\ -(C_z(\xi) - RC_y(\xi)E_1) & L \end{bmatrix},$$

sendo que a não singularidade da matriz S é garantida pela factibilidade do problema. Multiplique (3.43) à direita por $\mathcal{N}_T(\xi)$ e à esquerda por $\mathcal{N}_T(\xi)^T$ e multiplique (3.44) à direita por $\mathcal{N}_G(\xi)$ e à esquerda por $\mathcal{N}_G(\xi)^T$, notando que $E_1E_1^T = I$, $E_2E_2^T = I$ e $E_2E_1^T = 0$. Após algumas manipulações diretas chega-se, respectivamente, a

$$\begin{aligned} M(\xi) - \mathbb{B}(\xi)^T \mathcal{P}(\xi) \mathbb{B}(\xi) - \mathbb{D}(\xi)^T \mathbb{D}(\xi) &> 0 \\ \mathcal{P}(\xi) - \mathbb{A}(\xi)^T \mathcal{P}(\xi) \mathbb{A}(\xi) - \mathbb{C}(\xi)^T \mathbb{C}(\xi) &> 0 \end{aligned}$$

que são equivalentes às condições (2.17) e (2.18), por meio de complementos de Schur, após a substituição das variáveis do filtro (3.34). \square

Note que os blocos de variáveis extras relativos à parte constante do sistema auxiliar (3.7), isto é, $G_1(\xi)$, $H_1(\xi)$, $J_1(\xi)$, $K_1(\xi)$, $X_1(\xi)$, $Y_1(\xi)$, $U_1(\xi)$, $V_1(\xi)$ e $Z_1(\xi)$, foram eliminados dos Teoremas 3.8 e 3.9. A eliminação é feita pela projeção da condição de síntese, que envolve as matrizes do sistema (3.7), em um espaço menor contendo apenas as matrizes do sistema original (3.1). É todavia possível reconstruir esses blocos de forma adequada seguindo a metodologia apresentada por Skelton *et al.* (1998). A dependência de tais blocos no parâmetro incerto ξ é implicada pelo procedimento de reconstrução (tipicamente racional em ξ) e não há necessidade de ser especificada *a priori*. Isso ocorre em contraste às demais variáveis dependentes do parâmetro ξ , para as quais dependências explícitas particulares devem ser impostas para se obter, com alguma técnica de relaxação, um conjunto finito de LMIs.

Observação 3.10. Em todos os exemplos apresentados ao longo desta tese a complexidade de resolução das condições de síntese é avaliada em termos do número de variáveis de otimização, V , e de linhas de LMIs, L , envolvidas na determinação da solução para o problema. Há fórmulas para se estimar a complexidade computacional envolvida na obtenção de uma solução; entretanto, tais fórmulas dependem, em geral, do resolvedor utilizado, pois diferentes resolvedores podem penalizar mais ou o incremento do número de variáveis de otimização ou o incremento no número de linhas de LMIs do problema.

3.3 Exemplos numéricos ilustrativos

Nesta seção são apresentados alguns experimentos numéricos a fim de ilustrar a efetividade dos métodos propostos.

Exemplo 3.11. Considere novamente o sistema (3.12) dado no Exemplo 3.4. Neste ponto são projetados filtros robustos de ordem não mínima com custo garantido \mathcal{H}_∞ por meio do Teorema 3.8 utilizando $d = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ($n_f = n + d$). As variáveis incertas envolvidas possuem dependência polinomial de grau g no parâmetro ξ . Além disso, três conjuntos de matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 são gerados. O primeiro conjunto possui a estrutura apresentada em (3.13) e os demais dois conjuntos são gerados de forma pseudoaleatória por meio da função MATLAB[®] `rand`, um com semente 17 (denotado R17) e o outro com uma semente 89 (denotado R89). Assume-se também que Φ_1 seja triangular superior (escalonada para que possua raio espectral igual a 0.7) e Φ_2 e Φ_3 sejam retangulares com dimensões compatíveis. Os limitantes \mathcal{H}_∞ obtidos com o procedimento descrito são apresentados na Tabela 3.2, utilizando variáveis polinomiais de grau $g = 1$, sendo que V e L correspondem, respectivamente, ao número de variáveis de otimização e de linhas de LMI envolvidas na obtenção de uma solução para o problema.

Tabela 3.2 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ para o sistema (3.12) utilizando filtros de ordem não mínima sintetizados por meio do Teorema 3.8 com variáveis polinomiais de grau $g = 1$ e matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 geradas como em (3.13) e pseudoaleatoriamente. O número de variáveis V e o número de linhas de LMIs L envolvidos no procedimento de otimização são, também, fornecidos.

n_f	γ			V	L
	(3.13)	R17	R89		
2	3.7290	3.7290	3.7290	69	38
3	1.4593	3.3367	2.2334	119	51
4	1.3815	2.1364	1.8428	181	64
5	1.1987	1.4763	1.2256	255	77
6	1.1892	1.2582	1.2212	341	90
7	1.1736	1.2145	1.2151	439	103
8	1.1670	1.2059	1.1932	549	116

Note que o incremento da ordem do filtro robusto sintetizado auxilia na redução dos limitantes da norma \mathcal{H}_∞ ; entretanto o custo computacional (medido em termos de V e L) aumenta. Outro fato a ser observado é que a escolha das matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 influencia na determinação dos limitantes da norma, sendo que a escolha (3.13) proporcionou, em geral, melhores resultados. A forma como tais matrizes influenciam na determinação do custo ainda não é completamente compreendida e este tópico é sugestão para futuras pesquisas.

Continuando com o exemplo, as condições apresentadas no Teorema 3.8 são comparadas às condições propostas por Lee e Joo (2014), as quais sintetizam filtros de ordem não mínima mediante a inclusão de estados atrasados do filtro e, outrossim, utilizam variáveis polinomialmente dependentes de parâmetros. De forma similar, o método de Lee e Joo (2014) também tira proveito da estrutura aumentada do sistema (3.7) para produzir condições menos conservadoras do que as demais condições que não exploram tal estrutura. Tanto para o Teorema 3.8 quanto para o método de Lee e Joo (2014) são consideradas variáveis polinomiais de grau $g = 2$. As matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 possuem a estrutura dada em (3.13). Os resultados são apresentados na Tabela 3.3. Observe que as ordens dos filtros robustos sintetizados pelo método de Lee e Joo (2014) são múltiplos inteiros da ordem do sistema; neste caso, $n_f = 2, 4, 6, \dots$. O menor limitante obtido com ambos os métodos é $\gamma = 1.1472$; todavia, as condições de Lee e Joo (2014) necessitam de um filtro de ordem $n_f = 6$ para atingir tal limitante, ao passo que o Teorema 3.8 requer um filtro de ordem $n_f = 4$. No exemplo ilustrativo apresentado a diferença pode ser pequena, porém, para sistemas de maior ordem, essa diferença pode ser mais pronunciada.

Tabela 3.3 – Melhores limitantes para a norma \mathcal{H}_∞ obtidos pelo Teorema 3.8 e pelo método de Lee e Joo (2014) utilizando variáveis polinomiais de grau $g = 2$.

n_f	Teorema 3.8			(LEE; JOO, 2014)		
	γ	V	L	γ	V	L
2	3.2425	103	52	3.2424	104	52
3	1.1527	218	74	–		
4	1.1472	322	92	1.1902	212	80
5	1.1472	442	110	–		
6	1.1472	582	128	1.1472	368	108

Além disso, em todos os experimentos realizados, seja incrementando o grau das variáveis polinomiais, seja aumentando o valor de d , não houve melhorias nos valores dos limitantes determinados. De fato, o diagrama de valores singulares, apresentado na Figura 3.1, da matriz de transferência do sistema (3.12) conectado a um filtro robusto não mínimo de ordem $n_f = 4$ mostra que não há diferença entre o custo garantido determinado e a norma de pior caso do sistema para este exemplo.

Nos próximos dois exemplos, assume-se que os filtros robustos projetados sejam estritamente próprios, ou seja, $\hat{D} = 0$.

Exemplo 3.12. Seja o seguinte sistema discreto incerto LTI proposto em Geromel *et al.*

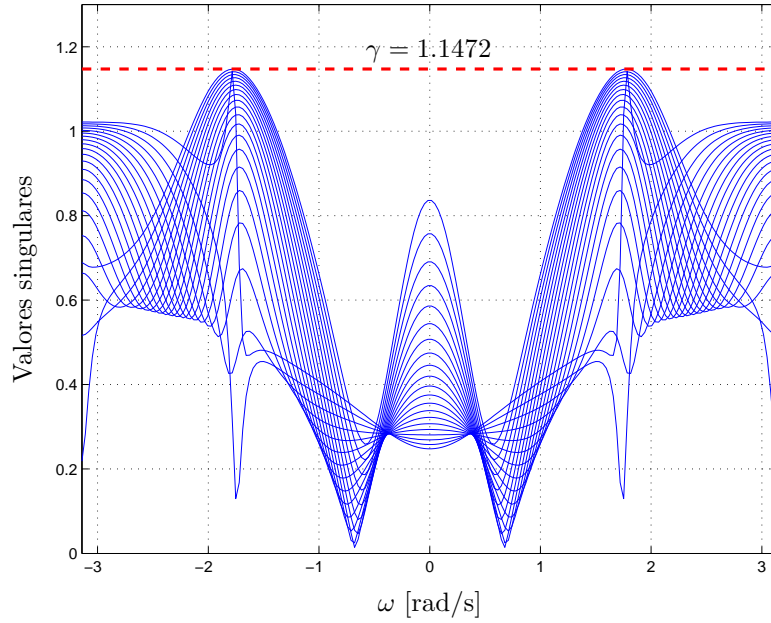


Figura 3.1 – Diagrama de valores singulares da matriz de transferência do erro de estimação (3.3) para o sistema (3.12) utilizando um filtro robusto de ordem não mínima $n_f = 4$.

(2000):

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 + 0.06\alpha \\ 0.01 + 0.05\beta & 0.9 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

$$C_y = [1 \ 0], \quad C_z = [1 \ 1], \quad D_{yw} = [0 \ 0 \ \sqrt{2}], \quad D_{zw} = [0 \ 0 \ 0],$$

sendo $|\alpha| \leq 1$ e $|\beta| \leq 1$. Uma representação politópica com 4 vértices é obtida avaliando os valores de α e β nos extremos de cada intervalo.

Considerando as matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 dadas em (3.13) e, também, geradas pseudoaleatoriamente com uma semente de 89 (como reportado no Exemplo 3.11), são aplicadas as condições do Teorema 3.9, com $d = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, para a síntese de filtros robustos não mínimos com custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema (3.47). Ademais, para fins de comparação, o método de Lee e Joo (2014) também é utilizado para sintetizar filtros robustos de ordem não mínima. Em todos os casos, as variáveis polinomiais possuem graus $g = \{1, 2\}$. Os resultados obtidos, assim como a complexidade numérica para se obter uma solução, são reportados na Tabela 3.4.

Os limitantes determinados pelo Teorema 3.9 tornam-se menos conservadores (menores) com o aumento da ordem n_f dos filtros robustos projetados e, também, com o incremento do grau das variáveis polinomiais. Assim como no Exemplo 3.11, os valores dos limitantes dependem das escolhas feitas para as matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 na fase de projeto e, aparentemente, essas matrizes devem ser escolhidas caso a caso para garantir o melhor desempenho em termos da norma do sistema. Além disso, aumentar o grau g das variáveis polinomiais implica em uma maior complexidade de projeto, ao passo que aumentar a

Tabela 3.4 – Limitantes da norma \mathcal{H}_2 para o sistema (3.47) utilizando filtros de ordem não mínima sintetizados por meio do Teorema 3.9 com variáveis polinomiais de grau $g = \{1, 2\}$ e matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 geradas como em (3.13) e pseudoaleatoriamente. O número de variáveis V e o número de linhas de LMIs L envolvidos no procedimento de otimização são, também, fornecidos. Os resultados obtidos com o método de Lee e Joo (2014) são apresentados para fins de comparação.

g	n_f	Teorema 3.9				(LEE; JOO, 2014)		
		R89	(3.13)	V	L	μ	V	L
1	2	3.4464	3.4464	145	146	3.4595	144	194
	3	3.3993	3.4460	233	184	–		
	4	3.3985	3.3587	340	222	3.3816	286	274
	5	3.3637	3.3568	468	260	–		
	6	3.3053	3.3217	616	298	3.3396	492	354
	7	3.2605	3.3217	784	336	–		
	2	2	3.3833	3.3833	343	310	3.3827	342
3		3.3831	3.3745	544	390	–		
4		3.3721	3.3103	790	470	3.3066	688	550
5		3.3274	3.3088	1080	550	–		
6		3.2937	3.2839	1414	630	3.2915	1194	710
7		3.2393	3.2818	1792	710	–		

ordem n_f do filtro sintetizado implica em uma maior complexidade de implementação; configurando, portanto, uma relação de compromisso entre simplicidade de implementação e custo computacional para a obtenção de uma solução para o problema.

Por fim, não foi observada uma melhoria tão acentuada entre os limitantes obtidos pela técnica proposta e pelo método de Lee e Joo (2014) quanto no caso \mathcal{H}_∞ , sendo os limitantes fornecidos por ambos os métodos equiparáveis.

Exemplo 3.13. Este exemplo visa analisar a influência das escolhas das matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 sobre os limitantes da norma \mathcal{H}_2 de um sistema discreto incerto LTI. O procedimento para a geração das matrizes é o mesmo descrito no Exemplo 3.11, isto é, a função MATLAB[®] `rand` com sementes 17 e 89 é utilizada para construir Φ_1 triangular superior e Φ_2 e Φ_3 retangulares. Assume-se que o raio espectral de Φ_1 seja ou 0.3 ou 0.9. Outrossim, é também considerada a estrutura particular (3.13) para tais matrizes.

O seguinte sistema, proposto em Shaked *et al.* (2001), é adotado para proceder às análises:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & -0.8187 + \delta \\ 1 & -0.9854 + 2\delta \end{bmatrix}, & B_w &= \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 C_y &= [-100 \quad 10], & C_z &= [1 \quad 0], & D_{yw} &= [0 \quad 1], & D_{zw} &= [0 \quad 0],
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

sendo $|\delta| \leq 0.08$.

Para esse sistema, um filtro robusto de ordem completa, $n_f = n$, sintetizado por meio do Teorema 3.9 com variáveis polinomiais de grau $g = 2$ fornece um custo garantido \mathcal{H}_2 de $\mu = 7.9938$. Utilizando os conjuntos de matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 gerados pseudoaleatoriamente, obtêm-se os limitantes $\mu_{17}^{0.3}$, $\mu_{17}^{0.9}$, $\mu_{89}^{0.3}$ e $\mu_{89}^{0.9}$ para a norma \mathcal{H}_2 , que são apresentados na Tabela 3.5. Os valores subscritos indicam a semente utilizada e os valores sobrescritos indicam o raio espectral da matriz Φ_1 . Ademais, os valores dos limitantes obtidos com a estrutura (3.13) são identificados na tabela por μ_c . Para os filtros robustos de diferentes ordens, os menores limitantes para a norma \mathcal{H}_2 encontram-se destacados na tabela.

Tabela 3.5 – Influência da escolha das matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 sobre os limitantes da norma \mathcal{H}_2 em função da ordem do filtro robusto sintetizado.

n_f	$\mu_{17}^{0.3}$	$\mu_{17}^{0.9}$	$\mu_{89}^{0.3}$	$\mu_{89}^{0.9}$	μ_c
3	7.9239	7.9860	7.9693	7.9909	7.9921
4	7.8451	7.9690	7.6433	7.4935	7.7102
5	7.5522	7.7322	7.6393	7.4800	7.7062
6	7.5517	7.5004	7.5097	7.4602	7.3623
7	7.3623	7.4122	7.4397	7.4577	7.3623
8	7.3623	7.3881	7.3623	7.3623	7.3623
9	7.3623	7.3667	7.3623	7.3623	7.3623

Pode ser observado que nenhuma escolha garantiu sistematicamente que o menor limitante fosse obtido para cada ordem dos filtros sintetizados. Não obstante, estruturar as matrizes como em (3.13) demonstra ser uma opção interessante, pois é uma alternativa simples e que apresenta desempenhos satisfatórios com o aumento da ordem do filtro robusto.

Na Figura 3.2 são apresentados os valores da norma \mathcal{H}_2 do sistema (3.48) obtidos por meio de um procedimento de *grid* fino sobre o valor do parâmetro incerto δ do sistema utilizando um filtro robusto de ordem $n_f = 6$ sintetizado com matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 constantes dadas em (3.13). Por meio deste procedimento, o valor da norma \mathcal{H}_2 de pior caso para o sistema incerto aumentado considerado foi 7.3623, o qual corresponde ao limitante obtido para o filtro sintetizado, representado na figura pela linha vermelha tracejada.

3.4 Conclusões

Neste capítulo foi introduzida uma metodologia de projeto para a síntese de filtros de ordem não mínima para sistemas discretos incertos LTI. A metodologia consiste

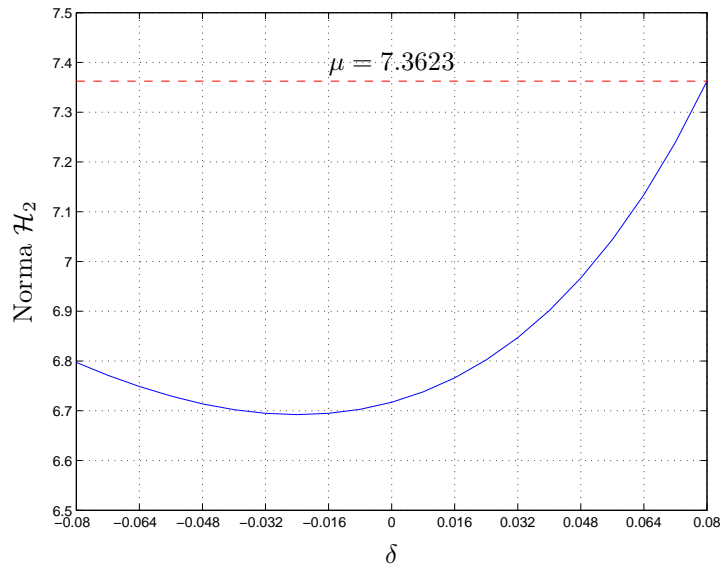


Figura 3.2 – Valores da norma \mathcal{H}_2 obtidos para o sistema (3.48) por meio de um procedimento de *grid* fino na incerteza do sistema.

em construir um sistema auxiliar aumentado não observável com matrizes constantes, escolhidas pelo projetista, e projetar um filtro de ordem completa para esse novo sistema. As condições de síntese são descritas em termos de LMIs robustas, posteriormente programadas em termos de relaxações LMIs, com matrizes de Lyapunov e variáveis de folga polinomialmente dependentes de parâmetros de modo a reduzir o conservadorismo e produzir menores limitantes para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . A simples aplicação de condições da literatura para projetar um filtro de ordem completa para o sistema auxiliar aumentado não é capaz de prover melhorias, em termos de menores limitantes, com o aumento da ordem do filtro, o que só é possível com as condições obtidas com a estratégia de projeção proposta neste trabalho, por explorar a estrutura particular do problema. Exemplos numéricos são fornecidos para demonstrar as vantagens do método proposto quando comparado a outras técnicas de filtragem com ordem não mínima.

4 Filtros de ordem não mínima especializados

O Capítulo 3 discorreu sobre procedimentos de síntese para filtros robustos de ordem não mínima para sistemas discretos incertos LTI com custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Como visto, uma estrutura particular e de simples escolha para as matrizes constantes utilizadas para aumentar a ordem do sistema em estudo foi capaz de, graças às condições de síntese desenvolvidas que exploram a ordem não mínima do filtro, produzir bons resultados em termos da redução dos limitantes para os custos garantidos. Inspirando-se na potencialidade dessa estrutura, este capítulo aborda especializações para os filtros de ordem não mínima propostos, nomeadamente, filtros com memória e *smoothers*.

4.1 Filtros robustos com memória de saída

Um filtro robusto discreto LTI pode ser descrito pela seguinte realização no espaço de estados

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= \hat{A}\hat{x}(k) + \sum_{\ell=0}^{d-1} \hat{B}_\ell y(k-\ell) \\ \hat{z}(k) &= \hat{C}\hat{x}(k) + \sum_{\ell=0}^{d-1} \hat{D}_\ell y(k-\ell)\end{aligned}\tag{4.1}$$

na qual $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^{\hat{n}}$, $\hat{z}(k) \in \mathbb{R}^p$, e $d \geq 1$ corresponde ao número de saídas passadas empregadas na estrutura do filtro; com $d = 1$ tem-se um filtro robusto padrão e, com $d > 1$, tem-se um filtro com memória. Note que o filtro (4.1) possui uma representação no espaço de estados aumentado dada por

$$\begin{aligned}x_f(k+1) &= A_f x_f(k) + B_f y(k) \\ z_f(k) &= C_f x_f(k) + D_f y(k)\end{aligned}\tag{4.2}$$

sendo

$$x_f(k) = \left[y(k-d+1)^T \quad \cdots \quad y(k-1)^T \quad \hat{x}(k) \right]^T\tag{4.3}$$

e

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & I & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & I & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & I \\ \hline \hat{B}_{d-1} & \hat{B}_{d-2} & \cdots & \hat{B}_1 & \hat{A} & \hat{B}_0 \\ \hline \hat{D}_{d-1} & \hat{D}_{d-2} & \cdots & \hat{D}_1 & \hat{C} & \hat{D}_0 \end{array} \right]\tag{4.4}$$

o que revela que a ordem do filtro a ser projetado é, na verdade, $n_f = \hat{n} + (d-1)q$. Ademais, a realização (4.2) reflete o fato de o filtro requerer somente a entrada $y(k)$ a

cada instante, sendo as entradas passadas armazenadas internamente. O vetor de estados $\tilde{x}(k)$ do sistema (3.7) é escolhido como

$$\tilde{x}(k) = \left[y(k-d+1)^T \ \cdots \ y(k-1)^T \ x(k)^T \right]^T \in \mathbb{R}^{n+(d-1)q}, \quad (4.5)$$

sendo $x(k)$ o vetor de estados do sistema (3.1), e as matrizes aumentadas, dadas em (3.8), são redefinidas para

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}(\xi) & \tilde{B}_w(\xi) \\ \tilde{C}_y(\xi) & \tilde{D}_{yw}(\xi) \\ \tilde{C}_z(\xi) & \tilde{D}_{zw}(\xi) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & \check{A}(\xi) & \check{B}_w(\xi) \\ 0 & \check{C}_y(\xi) & \check{D}_{yw}(\xi) \\ 0 & \check{C}_z(\xi) & \check{D}_{zw}(\xi) \end{array} \right] \quad (4.6)$$

com

$$\begin{aligned} \check{A}(\xi) &= \begin{bmatrix} 0 & C_y(\xi) \\ 0 & A(\xi) \end{bmatrix}, & \check{B}_w(\xi) &= \begin{bmatrix} D_{yw}(\xi) \\ B_w(\xi) \end{bmatrix}, \\ \check{C}_y(\xi) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C_y(\xi) \end{bmatrix}, & \check{D}_{yw}(\xi) &= \begin{bmatrix} 0 \\ D_{yw}(\xi) \end{bmatrix}, \\ \check{C}_z(\xi) &= \begin{bmatrix} 0 & C_z(\xi) \end{bmatrix}, & \check{D}_{zw}(\xi) &= D_{zw}(\xi), \end{aligned} \quad (4.7)$$

e $\Phi_3 = 0$,

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(d-2)q \times (d-2)q}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(d-2)q \times (n+q)}. \quad (4.8)$$

Devido à característica aumentada das matrizes em (4.7), a definição das matrizes do sistema (3.5) é um pouco diferente da apresentada em (3.10), sendo dada por

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{A}(\xi) & \mathbb{B}(\xi) \\ \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{D}(\xi) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \Phi_1 & \Phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \check{A}(\xi) & 0 & \check{B}_w(\xi) \\ \Gamma_2 & \Gamma_1 \check{C}_y(\xi) & \hat{A} & \Gamma_1 \check{D}_{yw}(\xi) \\ \hline -\Theta_2 & \tilde{C}_z(\xi) - \Theta_1 \check{C}_y(\xi) & -\hat{C} & \tilde{D}_{zw}(\xi) - \Theta_1 \check{D}_{yw}(\xi) \end{array} \right] \quad (4.9)$$

com

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= [\hat{B}_1 \ \hat{B}_0], & \Gamma_2 &= [\hat{B}_{d-1} \ \cdots \ \hat{B}_2], \\ \Theta_1 &= [\hat{D}_1 \ \hat{D}_0], & \Theta_2 &= [\hat{D}_{d-1} \ \cdots \ \hat{D}_2]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A dimensão \hat{n} do filtro é escolhida igual a $n+q$, que corresponde à dimensão da matriz $\check{A}(\xi)$ dada em (4.7). Assim, a realização (4.2) do filtro com memória de saída possui ordem $n_f = n + dq$, $d \geq 1$. Entretanto, impondo adequadamente uma estrutura para as variáveis do filtro, é possível sintetizar um filtro robusto de ordem completa, $n_f = n$, a partir das condições apresentadas nos teoremas subsequentes.

Teorema 4.1. Para um $d \geq 1$ dado, se existirem matrizes $P_2(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (d-2)q}$, $P_3(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (d-2)q}$, $P_5(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$, $J(\xi) \in \mathbb{R}^{(d-2)q \times (n+q)}$, $K(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$, $X(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$, $Y(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$, $U(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$, $V(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times (n+q)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$, $Q \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$, $F_1 \in \mathbb{R}^{(n+q) \times 2q}$, $F_2 \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (d-2)q}$, $L \in \mathbb{R}^{p \times (n+q)}$, $R_1 \in \mathbb{R}^{p \times 2q}$, $R_2 \in \mathbb{R}^{p \times (d-2)q}$, matrizes simétricas $P_1(\xi) \in \mathbb{R}^{(d-2)q \times (d-2)q}$, $P_4(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$ e $P_6(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$ e um escalar $\gamma > 0$ satisfazendo as desigualdades

$$\mathcal{P}(\xi) \succ 0, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{Q}(\xi) + \mathcal{X}(\xi)\mathcal{R}(\xi) + \mathcal{R}(\xi)^T\mathcal{X}(\xi)^T \prec 0, \quad (4.12)$$

para todo $\xi \in \Xi_N$, com

$$\mathcal{P}(\xi) = \begin{bmatrix} P_1(\xi) & P_2(\xi)^T & P_3(\xi)^T \\ P_2(\xi) & P_4(\xi) & P_5(\xi)^T \\ P_3(\xi) & P_5(\xi) & P_6(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\mathcal{R}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \check{A}(\xi) & 0 & -I & 0 & \check{B}_w(\xi) & 0 \\ F_2 & F_1\check{C}_y(\xi) & Q & 0 & -S & F_1\check{D}_{yw}(\xi) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{X}(\xi) = \begin{bmatrix} J(\xi)^T & K(\xi)^T & X(\xi)^T & Y(\xi)^T & U(\xi)^T & V(\xi)^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & I & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.15)$$

$$\mathcal{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} \Phi_1^T P_1(\xi) \Phi_1 - P_1(\xi) & * & * & * \\ \Phi_2^T P_1(\xi) \Phi_1 - P_2(\xi) & \Phi_2^T P_1(\xi) \Phi_2 - P_4(\xi) & * & * \\ -P_3(\xi) & -P_5(\xi) & -P_6(\xi) & * \\ P_2(\xi) \Phi_1 & P_2(\xi) \Phi_2 & 0 & P_4(\xi) \\ P_3(\xi) \Phi_1 & P_3(\xi) \Phi_2 & 0 & P_5(\xi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_2 & \check{C}_z(\xi) - R_1\check{C}_y(\xi) & -L & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ P_6(\xi) & * & * & * \\ 0 & -I_m & * & * \\ 0 & \check{D}_{zw}(\xi) - R_1\check{D}_{yw}(\xi) & -\gamma^2 I_p & * \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

então existe uma realização

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \hat{A} & \hat{B}_{d-1} & \cdots & \hat{B}_0 \\ \hline \hat{C} & \hat{D}_{d-1} & \cdots & \hat{D}_0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} S^{-1}Q & S^{-1}F \\ \hline L & R \end{array} \right], \quad (4.17)$$

$$F = [F_2 \quad F_1], \quad R = [R_2 \quad R_1]$$

para a qual a conexão do filtro robusto (4.1), de dimensão $n_f = n + dq$, com o sistema incerto (3.1) assegura $\|H_{we}(\zeta, \xi)\|_\infty < \gamma$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Demonstração. Assuma que (4.11) e (4.12) são factíveis. Notando que o bloco (5, 5) da condição (4.12) corresponde a $S + S^T \succ P_6(\xi)$ e que $P_6(\xi) \succ 0$ devido à condição (4.11), conclui-se que S é não singular. Utilizando o Lema de Finsler e definindo a matriz

$$\mathcal{N}(\xi) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \check{A}(\xi) & 0 & \check{B}_w(\xi) & 0 \\ S^{-1}F_2 & S^{-1}F_1\check{C}_y(\xi) & S^{-1}Q & S^{-1}F_1\check{D}_{yw}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

que forma uma base para o espaço nulo de $\mathcal{R}(\xi)$, multiplique (4.12) à direita por $\mathcal{N}(\xi)$ e à esquerda por $\mathcal{N}(\xi)^T$ para obter

$$\begin{aligned} 0 &\succ \mathcal{N}(\xi)^T \left(\mathcal{Q}(\xi) + \mathcal{X}(\xi)\mathcal{R}(\xi) + \mathcal{R}(\xi)^T\mathcal{X}(\xi)^T \right) \mathcal{N}(\xi) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{A}(\xi)^T \mathcal{P}(\xi) \mathbb{A}(\xi) - \mathcal{P}(\xi) & \star & \star \\ \mathbb{B}(\xi)^T \mathcal{P}(\xi) \mathbb{A}(\xi) & \mathbb{B}(\xi)^T \mathcal{P}(\xi) \mathbb{B}(\xi) - I & \star \\ \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{D}(\xi) & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

sendo $\mathbb{A}(\xi)$, $\mathbb{B}(\xi)$, $\mathbb{C}(\xi)$ e $\mathbb{D}(\xi)$ como dadas em (4.9) após a substituição das variáveis do filtro (4.17). Além disso, o lado direito da desigualdade (4.18) é equivalente à condição (2.25) por meio de um complemento de Schur. \square

Uma implicação direta da estruturação do problema é que o Teorema 4.1 produz um filtro robusto de ordem $n_f = n + q$ para $d = 1$, ou seja, a ordem do filtro é maior do que a ordem do sistema mesmo no caso de apenas a saída corrente ser considerada no processo de síntese. Sem embargo, escolhendo uma estrutura particular para as variáveis de síntese, é possível obter um filtro robusto de ordem completa $n_f = n$ como delineado no lema a seguir.

Lema 4.2. *Um filtro de ordem completa $n_f = n$ com custo garantido \mathcal{H}_∞ pode ser sintetizado a partir das condições do Teorema 4.1, com $d = 1$, se existir um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e matrizes*

$$P_4(\xi) = \begin{bmatrix} \varepsilon I_q & 0 \\ 0 & \tilde{P}_4(\xi) \end{bmatrix}, \quad P_5(\xi) = \begin{bmatrix} \varepsilon I_q & 0 \\ 0 & \tilde{P}_5(\xi) \end{bmatrix}, \quad P_6(\xi) = \begin{bmatrix} 2\varepsilon I_q & 0 \\ 0 & \tilde{P}_6(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$$S = \begin{bmatrix} 2\varepsilon I_q & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0_q & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0_q & 0 \\ 0 & \tilde{F}_1 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$L = [0 \quad \tilde{L}], \quad R_1 = [0 \quad \tilde{R}_1], \quad (4.21)$$

$$Y(\xi) = \begin{bmatrix} \varepsilon I_q & 0 \\ 0 & \tilde{Y}(\xi) \end{bmatrix}, \quad U(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{U} \end{bmatrix}, \quad K(\xi) = 0_{n+q}, \quad (4.22)$$

$$X(\xi) = 0_{n+q}, \quad V(\xi) = 0_{m \times (n+q)} \quad (4.23)$$

tais que as condições (4.11) e (4.12) sejam verificadas para todo $\xi \in \Xi_N$.

Demonstração. Imponha as estruturas (4.19)–(4.22) às correspondentes matrizes do Teorema 4.1 e note que as demais matrizes $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$, $P_3(\xi)$, $J(\xi)$, Φ_1 , Φ_2 , F_2 e R_2 não estão presentes para $d = 1$. Assim, obtém-se a condição

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon I & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -\tilde{P}_4(\xi) & \star & \star & \star & \star \\ -\varepsilon I & 0 & -2\varepsilon I & \star & \star & \star \\ 0 & -\tilde{P}_5(\xi) & 0 & -\tilde{P}_6(\xi) & \star & \star \\ 0 & \varepsilon C_y(\xi) & 0 & 0 & -\varepsilon I & \star \\ 0 & \tilde{Y}(\xi) A(\xi) + \tilde{F}_1 C_y(\xi) & 0 & \tilde{Q} & 0 & \tilde{P}_4(\xi) - \tilde{Y}(\xi) - \tilde{Y}(\xi)^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & \tilde{U}(\xi) A(\xi) + \tilde{F}_1 C_y(\xi) & 0 & \tilde{Q} & 0 & \tilde{P}_5(\xi) - \tilde{U}(\xi) - \tilde{S}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon D_{yw}(\xi)^T & B_w(\xi)^T \tilde{Y}(\xi)^T + D_{yw}(\xi)^T \tilde{F}_1^T \\ 0 & C_z(\xi) + \tilde{R}_1 C_y(\xi) & 0 & -\tilde{L} & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ -2\varepsilon & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \tilde{P}_6(\xi) - \tilde{S} - \tilde{S}^T & \star & \star & \star & \star \\ 0 & B_w(\xi)^T \tilde{U}(\xi)^T + D_{yw}(\xi)^T \tilde{F}_1^T & -I & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & D_{zw}(\xi) + \tilde{R}_1 D_{yw}(\xi) & -\gamma^2 I & \star \end{bmatrix} \prec 0.$$

Permutando linhas e colunas, tem-se

gualdades

$$\text{Tr}(M(\xi)) \prec \mu^2, \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} M(\xi) & \star & \star \\ \mathcal{C}(\xi)^T & \mathcal{P}(\xi) & \star \\ \mathcal{D}(\xi)^T & 0 & I_m \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{Q}(\xi) + \mathcal{X}(\xi)\mathcal{R}(\xi) + \mathcal{R}(\xi)^T\mathcal{X}(\xi)^T \succ 0 \quad (4.26)$$

para todo $\xi \in \Xi_N$, com $\mathcal{P}(\xi)$ como em (4.13) e

$$\mathcal{C}(\xi) = [-R_2 \quad \check{C}_z(\xi) - R_1\check{C}_y(\xi) \quad -L], \quad (4.27)$$

$$\mathcal{D}(\xi) = \check{D}_{zw}(\xi) - R_1\check{D}_{yw}(\xi), \quad (4.28)$$

$$\mathcal{X}(\xi) = \begin{bmatrix} J(\xi)^T & K(\xi)^T & X(\xi)^T & Y(\xi)^T & U(\xi)^T & V(\xi)^T \\ 0 & 0 & 0 & I & I & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{R}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \check{A}(\xi) & 0 & I & 0 & \check{B}(\xi) \\ F_2 & F_1\check{C}_y(\xi) & Q & 0 & S & F_1\check{D}_{yw}(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$\mathcal{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} P_1(\xi) - \Phi_2^T P_1(\xi)\Phi_2 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ P_2(\xi) - \Phi_1^T P_1(\xi)\Phi_2 & P_4(\xi) - \Phi_1^T P_1(\xi)\Phi_1 & \star & \star & \star & \star & \star \\ P_3(\xi) & P_5(\xi) & P_6(\xi) & \star & \star & \star & \star \\ P_2(\xi)\Phi_2 & P_2(\xi)\Phi_1 & 0 & -P_4(\xi) & \star & \star & \star \\ P_3(\xi)\Phi_2 & P_3(\xi)\Phi_1 & 0 & -P_5(\xi) & -P_6(\xi) & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

então existe uma realização dada em (4.17) para a qual a conexão do filtro robusto (4.1), de dimensão $n_f = n + dq$, com o sistema incerto (3.1) assegura $\|H_{we}(\zeta, \xi)\|_2 < \mu$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Demonstração. Suponha que (4.24)–(4.26) são factíveis. Multiplicando a condição (4.25) à direita e à esquerda por $\mathcal{T} = \text{diag}(I_p, \mathcal{P}(\xi)^{-1}, I_m)$ e substituindo as variáveis do filtro dadas em (4.17), obtém-se

$$\begin{bmatrix} M(\xi) & \star & \star \\ \mathcal{W}(\xi)\mathcal{C}(\xi)^T & \mathcal{W}(\xi) & \star \\ \mathbb{D}(\xi)^T & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0$$

que é equivalente à condição (2.20) por meio de um complemento de Schur e com $\mathcal{W}(\xi) = \mathcal{P}(\xi)^{-1}$. As matrizes $\mathcal{C}(\xi)$ e $\mathbb{D}(\xi)$ são dadas em (4.9).

Para provar a condição (4.26), constata-se primeiramente que S é não singular devido ao bloco (5, 5) dessa condição corresponder a $S + S^T \succ P_6(\xi)$ e que $P_6(\xi) \succ 0$ pela condição (4.25). Utilizando o Lema de Finsler e definindo, então, a seguinte base para o

espaço nulo de $\mathcal{R}(\xi)$

$$\mathcal{N}(\xi) = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & \check{A}(\xi) & 0 & \check{B}(\xi) \\ S^{-1}F_2 & S^{-1}F_1\check{C}_y(\xi) & S^{-1}Q & S^{-1}F_1\check{D}_{yw}(\xi) \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix},$$

multiplica-se (4.26) à direita por $\mathcal{N}(\xi)$ e à esquerda por $\mathcal{N}(\xi)^T$ resultando, assim, em

$$\begin{aligned} 0 &< \mathcal{N}(\xi)^T(\mathcal{Q}(\xi) + \mathcal{X}(\xi)\mathcal{R}(\xi) + \mathcal{R}(\xi)^T\mathcal{X}(\xi)^T)\mathcal{N}(\xi) \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\xi) - \mathbb{A}(\xi)^T\mathcal{P}(\xi)\mathbb{A}(\xi) & -\mathbb{A}(\xi)^T\mathcal{P}(\xi)\mathbb{B}(\xi) \\ -\mathbb{B}(\xi)^T\mathcal{P}(\xi)\mathbb{A}(\xi) & I - \mathbb{B}(\xi)^T\mathcal{P}(\xi)\mathbb{B}(\xi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando um complemento de Schur ao lado direito da desigualdade acima produz

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\xi) & \mathcal{P}(\xi)\mathbb{A}(\xi) & \mathcal{P}(\xi)\mathbb{B}(\xi) \\ \star & \mathcal{P}(\xi) & 0 \\ \star & \star & I \end{bmatrix} \succ 0,$$

e multiplicando à direita e à esquerda por $\mathcal{T} = \text{diag}(\mathcal{P}(\xi)^{-1}, \mathcal{P}(\xi)^{-1}, I_m)$ tem-se exatamente a condição (2.15), com $\mathcal{W}(\xi) = \mathcal{P}(\xi)^{-1}$. Além disso, as matrizes $\mathbb{A}(\xi)$ e $\mathbb{B}(\xi)$ são como em (4.9) após substituir as variáveis do filtro (4.17). \square

As mesmas considerações tecidas acerca da norma \mathcal{H}_∞ são extensíveis para o caso da norma \mathcal{H}_2 , quer dizer, é possível sintetizar um filtro robusto de ordem completa escolhendo a estrutura das variáveis do problema como proposto no Lema 4.2 e, ademais, é garantido que um limitante para a norma \mathcal{H}_2 determinado para um filtro robusto de ordem $n_f = n + q$ não é mais conservador do que um limitante computado para um filtro robusto de ordem completa.

Observação 4.4. Como relatado no trabalho de Kalman (1960), para um sistema precisamente conhecido, toda a informação necessária para a obtenção de um filtro ótimo para o sistema está disponível na saída atual do sistema. De fato, é verificado numericamente que aplicando as condições do Teorema 4.1 ou do Teorema 4.3 a um sistema precisamente conhecido, resulta em matrizes \hat{B}_ℓ e \hat{D}_ℓ , $\ell = 1, \dots, d - 1$, com valores muito próximos de zero, ou seja, a dinâmica extra introduzida por meio das saídas passadas utilizadas na estrutura do filtro é desprezada pelo procedimento de síntese, sendo unicamente relevante a medida da saída corrente do sistema.

Um fato interessante a respeito da estrutura de síntese proposta para os filtros com memória de saída, e que pode ser considerado uma generalização do procedimento descrito no Lema 4.2, é que zerando adequadamente algumas matrizes do filtro robusto

a ser sintetizado para um dado $d \geq 1$, obtém-se um filtro robusto de ordem inferior a $n_f = n + dq$. Esses filtros são denominados nesta tese por *filtros de ordem incompleta* e são retratados com maiores detalhes na próxima subsecção.

4.1.1 Filtros de ordem incompleta

Os filtros robustos sintetizados por meio dos Teoremas 4.1 e 4.3 são de ordem $n_f = n + dq$, $d \geq 1$. Contudo, considerando a estrutura particular da realização do filtro (4.4), é possível impor restrições sobre as matrizes de projeto S , Q , F_1 , F_2 , L , R_1 , R_2 de forma a produzir filtros cuja ordem seja $n_f = n + (d - t)q$, $0 \leq t \leq d$. O procedimento para redução da ordem dos filtros é realizado de maneira sistemática, zerando, primeiramente, as matrizes referentes às entradas mais antigas ($y(k-d+1)$, $y(k-d+2)$, \dots).

De fato, a partir da realização (4.4) para $t \leq d - 1$, é suficiente impor que

$$\hat{B}_\ell = 0, \quad \hat{D}_\ell = 0, \quad \ell = d - t, \dots, d - 1, \quad 1 \leq t \leq d - 1. \quad (4.32)$$

Em termos de variáveis de projeto e considerando a realização (4.17), as restrições (4.32) equivalem aos seguintes casos:

- Para $t \leq d - 2$, deve-se fixar

$$F_{2,\ell} = 0, \quad R_{2,\ell} = 0, \quad \ell = d - t, \dots, d - 1 \quad (4.33)$$

sendo

$$F_2 = \begin{bmatrix} F_{2,d-1} & \cdots & F_{2,2} \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} R_{2,d-1} & \cdots & R_{2,2} \end{bmatrix}$$

correspondente aos blocos das matrizes F_2 e R_2 .

- Para $t = d - 1$, além das restrições (4.33) também é necessário impor

$$F_{1,1} = 0, \quad R_{1,1} = 0 \quad (4.34)$$

com

$$F_1 = \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{1,0} \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,0} \end{bmatrix}.$$

Outrossim, o caso $t = d$, que corresponde a um filtro de ordem completa, pode ser igualmente tratado impondo as restrições (4.33) e (4.34) e, também,

$$S_{2,1} = Q_{2,1} = 0, \quad L_{1,1} = 0, \quad (4.35)$$

correspondendo, respectivamente, aos blocos das variáveis matriciais

$$S = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} \end{bmatrix}.$$

As restrições (4.33)–(4.35) produzem filtros de menor ordem pelo fato da realização (4.4) estar na forma canônica observável de Kalman (KAILATH, 1980). Note que para um certo d , o menor limitante sempre é obtido com $t = 0$ e com a ordem do filtro $n_f = n + dq$. O aspecto mais intrigante das restrições apresentadas é que, com escolhas convenientes de d e t , pode-se construir filtros de uma certa ordem n_f que produzam limitantes menores do que o filtro robusto de ordem n_f obtido com $t = 0$. A principal razão para esse fato advém das matrizes $P_1(\xi)$ a $P_6(\xi)$, $J(\xi)$, $K(\xi)$, $X(\xi)$, $Y(\xi)$, $U(\xi)$ e $V(\xi)$ estarem presentes nas condições em sua forma irrestrita e auxiliarem na determinação de limitantes superiores mais justos para ambas as normas.

4.1.2 Exemplos numéricos ilustrativos

Os exemplos numéricos apresentados na sequência ilustram as benesses dos métodos propostos nessa seção para o provimento de filtros robustos com custo garantido \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_2 .

Exemplo 4.5. Considere novamente o modelo do sistema incerto discreto LTI dado em (3.12). O método proposto no Teorema 4.1 é aplicado ao sistema para sintetizar filtros robustos de ordem $n_f = n + dq$, $d = \{1, 2, 3, 4\}$, sendo $g = \{1, 2\}$ os graus das variáveis polinomiais envolvidas. Os resultados obtidos, bem como o número de variáveis de otimização V e de linhas de LMIs L , são indicados na Tabela 4.1. Para efeitos de comparação, o método de Lee e Joo (2014), apresentado no Exemplo 3.11, é também reportado na tabela.

Tabela 4.1 – Limitantes obtidos para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (3.12) conectado aos filtros com memória de saída sintetizados por meio do Teorema 4.1 e, também, aos filtros obtidos a partir das condições apresentadas por Lee e Joo (2014). O número de variáveis de otimização V e de linhas de LMIs L é igualmente apresentado.

n_f	d	Teorema 4.1						(LEE; JOO, 2014)					
		$g = 1$	V	L	$g = 2$	V	L	$g = 1$	V	L	$g = 2$	V	L
2	1	3.3167	137	54	3.2427	197	74	3.7231	74	38	3.2424	104	52
4	2	1.5284	149	54	1.1528	209	74	1.4330	148	58	1.1902	212	80
5	3	1.3714	173	59	1.1472	243	81	–	–	–	–	–	–
6	4	1.3594	199	64	1.1472	280	88	1.1884	254	78	1.1472	368	108

Pode-se observar que os limitantes para a norma \mathcal{H}_∞ determinados tendem a ser menores conforme a ordem do filtro sintetizado aumenta. Além disso, para a estrutura proposta para o filtro robusto, os limitantes obtidos com $g = 1$ ficaram aquém dos correspondentes limitantes determinados pelo método de Lee e Joo (2014), indicando que, neste

caso, a condição proposta tende a ser mais conservadora. Note que o número de variáveis de otimização envolvidas na determinação do custo garantido por meio do Teorema 4.1 é, em geral, menor do que em Lee e Joo (2014).

Para ilustrar o procedimento de síntese de filtros de ordem incompleta, considere filtros robustos com memória de ordem $n_f = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ com $d = \{1, 2, 3, 4\}$ e escolha $t \leq d$ tal que $n_f = n + (d - t)q$. Os resultados apresentados na Tabela 4.1 são, assim, completados como reportado na Tabela 4.2. As linhas em destaque na tabela correspondem aos filtros robustos obtidos sem a imposição de estrutura às variáveis, ou seja, $n_f = n + dq$ (exceto pela primeira linha da tabela, na qual foi necessário impor uma estrutura às variáveis envolvidas na recuperação das matrizes do filtro para que um filtro robusto de ordem completa pudesse ser obtido das condições propostas).

Tabela 4.2 – Limitantes obtidos para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema (3.12) conectado aos filtros com memória de saída de ordem incompleta sintetizados por meio do Teorema 4.1. O número de variáveis de otimização V e de linhas de LMIs L é igualmente apresentado.

n_f	d	t	$g = 1$			$g = 2$		
			γ	V	L	γ	V	L
2	1	1	3.3167	137	54	3.2427	197	74
3	1	0	1.5284	139	54	1.1527	199	74
3	2	1	1.5284	145	54	1.1527	205	74
3	3	2	1.3851	165	59	1.1527	235	81
3	4	3	1.3848	187	64	1.1527	268	88
4	2	0	1.5284	149	54	1.1527	209	74
4	3	1	1.3851	169	59	1.1527	239	81
4	4	2	1.3848	191	64	1.1527	272	88
5	3	0	1.3714	173	59	1.1468	243	81
5	4	1	1.3644	195	64	1.1468	276	88
6	4	0	1.3594	199	64	1.1468	280	88

Como foi mencionado, de fato o procedimento de sintetizar filtros de ordem incompleta pode fazer com que menores limitantes sejam determinados para o sistema (3.5) sem que haja mudança na ordem da realização (4.4). Esse fato corrobora a observação anterior de que a presença de variáveis extras contribui para a determinação de limitantes menores para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema.

Exemplo 4.6. Neste exemplo, filtros robustos próprios ($\hat{D}_\ell \neq 0$, $\ell = 0, \dots, d - 1$) com desempenho garantido \mathcal{H}_2 são projetados para o sistema discreto incerto LTI descrito em (3.48). Da mesma forma, a metodologia de síntese de filtros de ordem incompleta

é também analisada. Para tanto, considere as condições de projeto enunciadas no Teorema 4.3 e assuma que as variáveis dependentes de parâmetros sejam de grau $g = \{1, 2\}$. Um filtro robusto de ordem completa, $n_f = n$, projetado para esse sistema provê os limitantes $\mu = 0.5992$ ($g = 1$) e $\mu = 0.5840$ ($g = 2$). Os limitantes encontrados para a norma \mathcal{H}_2 do sistema, utilizando filtros robustos de várias ordens $n_f > n$, são apresentados na Tabela 4.3, na qual as linhas em destaque correspondem aos filtros projetados sem imposição de estrutura às variáveis.

Tabela 4.3 – Limitantes obtidos para a norma \mathcal{H}_2 do sistema (3.48) conectado aos filtros com memória de saída sintetizados por meio do Teorema 4.3.

n_f	d	t	$g = 1$	$g = 2$
3	1	0	0.5998	0.5637
3	2	1	0.5993	0.5573
3	3	2	0.5917	0.5557
3	4	3	0.5886	0.5546
3	5	4	0.5783	0.5517
4	2	0	0.5988	0.5588
4	3	1	0.5965	0.5585
4	4	2	0.5863	0.5581
4	5	3	0.5807	0.5546
5	3	0	0.5622	0.4885
5	4	1	0.5536	0.4853
5	5	2	0.5430	0.4827
6	4	0	0.5325	0.4771
6	5	1	0.5277	0.4752
7	5	0	0.5254	0.4749

A partir dos resultados apresentados, observa-se que as condições de projeto tornam-se menos conservadoras conforme a ordem n_f do filtro aumenta, como evidenciado pelos limitantes da norma \mathcal{H}_2 determinados nas linhas em destaque. Ademais, assumindo que a ordem do filtro é constante, o incremento de d proporciona também melhorias, mais sutis todavia, sobre os limitantes da norma, devido à presença das saídas no passado no sistema aumentado (3.5) e às correspondentes variáveis de folga extras nas condições de síntese do Teorema 4.3.

4.2 Filtros robustos com memória nos estados

Uma outra formulação para a estrutura de filtros robustos com memória é considerar que os estados do filtro são armazenados internamente, em vez das saídas do

sistema como discutido na Seção 4.1. Assim, a realização no espaço de estados do filtro é dada por

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= \sum_{\ell=0}^{d-1} \hat{A}_\ell \hat{x}(k-\ell) + \hat{B} y(k) \\ \hat{z}(k) &= \sum_{\ell=0}^{d-1} \hat{C}_\ell \hat{x}(k-\ell) + \hat{D} y(k)\end{aligned}\quad (4.36)$$

com $\hat{x}(k-\ell) \in \mathbb{R}^n$, $\ell = 0, \dots, d-1$, e, utilizando procedimentos similares aos descritos na Seção 4.1, condições de síntese para filtros robustos com memória nos estados são obtidas. Vale salientar que os métodos para síntese de filtros robustos com a estrutura (4.36) correspondem, exatamente, à metodologia proposta em Lee e Joo (2014).

Dando um passo adiante na formulação da estrutura dos filtros robustos, assume-se que o filtro a ser projetado armazene tanto os estados internos quanto as saídas medidas do sistema, isto é, o filtro robusto possui a seguinte realização

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= \sum_{\ell=0}^{d-1} \left(\hat{A}_\ell \hat{x}(k-\ell) + \hat{B}_\ell y(k-\ell) \right) \\ \hat{z}(k) &= \sum_{\ell=0}^{d-1} \left(\hat{C}_\ell \hat{x}(k-\ell) + \hat{D}_\ell y(k-\ell) \right)\end{aligned}\quad (4.37)$$

a qual pode ser descrita no espaço de estados aumentado segundo (4.2) com

$$x_f(k) = \left[y(k-d)^T \quad \hat{x}(k-d+1) \quad \dots \quad y(k-2)^T \quad \hat{x}(k-1) \quad y(k-1)^T \quad \hat{x}(k) \right]^T \quad (4.38)$$

e

$$\left[\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & I_q & & & & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & I_n & & & \\ & & & & \ddots & 0 & I_q & & \\ & & & & & 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & & & & & & 0 & 0 & I_q \\ 0 & \hat{A}_{d-1} & \hat{B}_{d-1} & \dots & \hat{B}_2 & \hat{A}_1 & \hat{B}_1 & \hat{A}_0 & \hat{B}_0 \\ \hline 0 & \hat{C}_{d-1} & \hat{D}_{d-1} & \dots & \hat{D}_2 & \hat{C}_1 & \hat{D}_1 & \hat{C}_0 & \hat{D}_0 \end{array} \right], \quad (4.39)$$

mostrando que a ordem do filtro a ser projetado é $n_f = dn + (d-1)q$. Fica evidente que para $d = 1$ o filtro robusto obtido é, de fato, um filtro robusto de ordem completa, $n_f = n$. A formulação subsequente é válida para todo $d > 1$.

Devido aos estados passados do filtro precisarem ser considerados na construção do sistema (3.5), uma reformulação da estrutura desse sistema se faz necessária. Para que o sistema aumentado (3.5) seja construído de forma sistemática, opta-se, neste ponto, por descrever as saídas medidas $y(k-\ell)$, $\ell = 0, \dots, d-1$, em termos de suas componentes, ou seja,

$$y(k-\ell) = C_y(\xi)x(k-\ell) + D_{yw}(\xi)w(k-\ell). \quad (4.40)$$

Assim, o vetor de estados do sistema (3.5) é precisado como

$$s(k) = \begin{bmatrix} w(k-d)^T & x(k-d+1)^T & \hat{x}(k-d+1)^T & \cdots \\ w(k-2)^T & x(k-1)^T & \hat{x}(k-1)^T & w(k-1)^T & x(k)^T & \hat{x}(k)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(2n+m)d},$$

culminando nas seguintes estruturas para as matrizes desse sistema

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{A}(\xi) & \mathbb{B}(\xi) \\ \hline \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{D}(\xi) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & \tilde{A}(\xi) & \tilde{B}_w(\xi) \\ \check{\Gamma}(\xi) & \Gamma_0(\xi) & \hat{B}_0 D_{yw}(\xi) \\ \hline \check{\Theta}(\xi) & \Theta_0(\xi) & D_{zw}(\xi) - \hat{D}_0 D_{yw}(\xi) \end{array} \right] \quad (4.41)$$

com

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0_{(d-2)(2n+m) \times (2n+m)} & I_{(d-2)(2n+m)} \\ 0_{(2n+m) \times (2n+m)} & 0_{(2n+m) \times (d-2)(2n+m)} \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0_{(d-2)(2n+m) \times (2n+m)} \\ I_{(2n+m)} \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

$$\Phi_3 = 0_{(d-1)(2n+m)}, \quad (4.43)$$

$$\tilde{A}(\xi) = \begin{bmatrix} 0_m & 0 & 0 \\ 0 & A(\xi) & 0_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_w(\xi) = \begin{bmatrix} I_m \\ B_w(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\check{\Gamma}(\xi) = [\Gamma_{d-1}(\xi) \quad \cdots \quad \Gamma_2(\xi) \quad \Gamma_1(\xi)], \quad (4.45)$$

$$\check{\Theta}(\xi) = [\Theta_{d-1}(\xi) \quad \cdots \quad \Theta_2(\xi) \quad \Theta_1(\xi)], \quad (4.46)$$

sendo as matrizes $\Gamma_\ell(\xi)$ e $\Theta_\ell(\xi)$ como segue:

- se $\ell = 0$

$$\Gamma_0 = [\hat{B}_1 D_{yw}(\xi) \quad \hat{B}_0 C_y(\xi) \quad \hat{A}_0], \quad \Theta_0 = [-\hat{D}_1 D_{yw}(\xi) \quad C_z(\xi) - \hat{D}_0 C_y(\xi) \quad -\hat{C}_0],$$

- se $\ell = 1, \dots, d-1$

$$\Gamma_\ell = [\hat{B}_{\ell+1} D_{yw}(\xi) \quad \hat{B}_\ell C_y(\xi) \quad \hat{A}_\ell], \quad \Theta_\ell = [-\hat{D}_{\ell+1} D_{yw}(\xi) \quad -\hat{D}_\ell C_y(\xi) \quad -\hat{C}_\ell],$$

Por consistência de representação, assume-se que as matrizes \hat{B}_d e \hat{D}_d sejam nulas com dimensões apropriadas.

Os dois teoremas apresentados na sequência delineiam os métodos utilizados para a síntese de filtros robustos com memória nos estados assegurando custos garantidos \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 , respectivamente.

Observação 4.7. A descrição das saídas atrasadas em termos de estados e entradas, dada em (4.40), é feita com o intuito de prover uma formulação alternativa para a síntese de filtros robustos com memória. De forma similar, o sistema (4.41) poderia ser obtido em termos de $y(k-\ell)$, $\ell = 0, \dots, d-1$, adaptando a representação apresentada na Seção 4.1. Não obstante, a realização do filtro robusto com memória nos estados é feita, ainda, em termos de (4.39).

Teorema 4.8. Para um $d \geq 1$ dado, se existirem matrizes $J(\xi) \in \mathbb{R}^{(d-1)(2n+m) \times (n+m)}$, $K(\xi) \in \mathbb{R}^{(2n+m) \times (n+m)}$, $X(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$, $Y(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$, $U(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_\ell \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_\ell \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $L_\ell \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $R_\ell \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $\ell = 0, \dots, d-1$, uma matriz simétrica $P(\xi) \in \mathbb{R}^{d(2n+m) \times d(2n+m)}$ e um escalar $\gamma > 0$ satisfazendo as desigualdades

$$P(\xi) \succ 0, \quad (4.47)$$

$$\mathcal{N}^T \mathcal{Q}(\xi) \mathcal{N} + \mathcal{X}(\xi) \mathcal{R}(\xi) + \mathcal{R}(\xi)^T \mathcal{X}(\xi)^T \prec 0, \quad (4.48)$$

para todo $\xi \in \Xi_N$, sendo

$$\mathcal{R}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}(\xi) & -I_{n+m} & 0 & \tilde{B}_w(\xi) & 0 \\ \check{Q}(\xi) & \tilde{Q}_0(\xi) & 0 & -S & F_0 D_{yw}(\xi) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

$$\mathcal{X}(\xi) = \begin{bmatrix} J(\xi)^T & K(\xi)^T & X(\xi)^T & Y(\xi)^T & U(\xi)^T & 0 \\ 0 & 0 & [0_{n \times m} \ I_n]^T & I_n & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.50)$$

$$\mathcal{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} -P(\xi) & \star & \star & \star \\ 0 & P(\xi) & \star & \star \\ 0 & 0 & -I_m & \star \\ \mathcal{C}(\xi) & 0 & \mathcal{D}(\xi) & -\gamma^2 I_p \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} I_{(d-1)(2n+m)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{(2n+m)} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_{(2n+m)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

com

$$\mathcal{C}(\xi) = [\check{L}(\xi) \ \tilde{L}_0(\xi)], \quad \mathcal{D}(\xi) = D_{zw}(\xi) - R_0 D_{yw}(\xi), \quad (4.53)$$

$$\check{Q}(\xi) = [\tilde{Q}_{d-1}(\xi) \ \cdots \ \tilde{Q}_2(\xi) \ \tilde{Q}_1(\xi)], \quad \check{L}(\xi) = [\tilde{L}_{d-1}(\xi) \ \cdots \ \tilde{L}_1(\xi) \ \tilde{L}_0(\xi)],$$

$$\tilde{Q}_\ell(\xi) = [F_{\ell+1} D_{yw}(\xi) \ F_\ell C_y(\xi) \ Q_\ell], \quad \ell = 0, \dots, d-1, \quad (4.54)$$

$$\tilde{L}_0(\xi) = [-R_{\ell+1} D_{yw}(\xi) \ C_z(\xi) - R_\ell C_y(\xi) \ -L_\ell],$$

$$\tilde{L}_\ell(\xi) = [-R_{\ell+1} D_{yw}(\xi) \ -R_\ell C_y(\xi) \ -L_\ell], \quad \ell = 1, \dots, d-1,$$

então existe uma realização

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\ell & \hat{B}_\ell \\ \hline \hat{C}_\ell & \hat{D}_\ell \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} S^{-1} Q_\ell & S^{-1} F_\ell \\ \hline L_\ell & R_\ell \end{array} \right], \quad \ell = 0, \dots, d-1, \quad (4.55)$$

para a qual a conexão do filtro robusto (4.37), de dimensão $n_f = dn + (d-1)q$, com o sistema incerto (3.1) assegura $\|H_{we}(\zeta, \xi)\|_\infty < \gamma$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Demonstração. A prova é feita por meio do Lema de Finsler. Suponha que (4.47) e (4.48) sejam factíveis, garantindo que a matriz S é não singular. Defina, então, uma base para o espaço nulo de $\mathcal{R}(\xi)$ como

$$\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(\xi) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}(\xi) & \tilde{B}(\xi) & 0 \\ S^{-1}\check{Q}(\xi) & S^{-1}Q_0(\xi) & S^{-1}F_0D_{yw}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

e multiplique (4.48) à direita por $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(\xi)$ e à esquerda por $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(\xi)^T$, obtendo, dessa forma,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}(\xi)^T P(\xi) \mathbb{A}(\xi) - P(\xi) & \star & \star \\ \mathbb{B}(\xi)^T P(\xi) \mathbb{A}(\xi) & \mathbb{B}(\xi)^T P(\xi) \mathbb{B}(\xi) - I & \star \\ \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{D}(\xi) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.56)$$

sendo $\mathbb{A}(\xi)$, $\mathbb{B}(\xi)$, $\mathbb{C}(\xi)$ e $\mathbb{D}(\xi)$ como dadas em (4.41) após a substituição das variáveis do filtro (4.55). Ademais, a condição (4.56) é equivalente à condição (2.25) por meio de um complemento de Schur. \square

Teorema 4.9. *Para um $d \geq 1$ dado, se existirem matrizes $J(\xi) \in \mathbb{R}^{(d-1)(2n+m) \times (n+m)}$, $K(\xi) \in \mathbb{R}^{(2n+m) \times (n+m)}$, $X(\xi) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$, $Y(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$, $U(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_\ell \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_\ell \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $L_\ell \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $R_\ell \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $\ell = 0, \dots, d-1$, matrizes simétricas $P(\xi) \in \mathbb{R}^{d(2n+m) \times d(2n+m)}$ e $M(\xi) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e um escalar $\mu > 0$ satisfazendo as desigualdades*

$$\text{Tr}(M(\xi)) \prec \mu^2, \quad (4.57)$$

$$\begin{bmatrix} M(\xi) & \star & \star \\ \mathcal{C}(\xi)^T & P(\xi) & \star \\ \mathcal{D}(\xi)^T & 0 & I_m \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.58)$$

$$\mathcal{N}^T \mathcal{Q}(\xi) \mathcal{N} + \mathcal{X}(\xi) \mathcal{R}(\xi) + \mathcal{R}(\xi)^T \mathcal{X}(\xi)^T \prec 0, \quad (4.59)$$

para todo $\xi \in \Xi_N$, com $\mathcal{C}(\xi)$ e $\mathcal{D}(\xi)$ definidos em (4.53) e

$$\mathcal{R}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}(\xi) & -I_{n+m} & 0 & \tilde{B}_w(\xi) \\ \check{Q}(\xi) & \tilde{Q}_0(\xi) & 0 & -S & F_0 D_{yw}(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

$$\mathcal{X}(\xi) = \begin{bmatrix} J(\xi)^T & K(\xi)^T & X(\xi)^T & Y(\xi)^T & U(\xi)^T \\ 0 & 0 & [0_{n \times m} \ I_n]^T & I_n & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.61)$$

$$\mathcal{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} -P(\xi) & \star & \star \\ 0 & P(\xi) & \star \\ 0 & 0 & -I_m \end{bmatrix}, \quad (4.62)$$

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} I_{(d-1)(2n+m)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{(2n+m)} & 0 & 0 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 \\ 0 & 0 & I_{(2n+m)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

sendo $\check{Q}(\xi)$, $\check{L}(\xi)$, \check{Q}_0 e \check{L}_0 dados em (4.54), então existe uma realização (4.55) para a qual a conexão do filtro robusto (4.37), de dimensão $n_f = dn + (d-1)q$, com o sistema incerto (3.1) assegura $\|H_{we}(\zeta, \xi)\|_2 < \mu$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Demonstração. Multiplique a condição (4.58) à direita e à esquerda por $\mathcal{T} = \text{diag}(I_p, P(\xi)^{-1}, I_m)$ e substitua as variáveis do filtro dadas em (4.55), obtendo

$$\begin{bmatrix} M(\xi) & \star & \star \\ W(\xi)\mathbb{C}(\xi)^T & W(\xi) & \star \\ \mathbb{D}(\xi)^T & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0$$

que é equivalente à condição (2.20) por meio de um complemento de Schur e com $W(\xi) = P(\xi)^{-1}$. As matrizes $\mathbb{C}(\xi)$ e $\mathbb{D}(\xi)$ são dadas em (4.41).

Notando que a factibilidade do problema garante que a matriz S é não singular e utilizando o Lema de Finsler, escolha a seguinte base para o espaço nulo de $\mathcal{R}(\xi)$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(\xi) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & \check{A}(\xi) & \check{B}(\xi) \\ S^{-1}\check{Q}(\xi) & S^{-1}\check{Q}_0(\xi) & S^{-1}F_0D_{yw}(\xi) \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

e multiplique (4.59) à direita por $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(\xi)$ e à esquerda por $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}(\xi)^T$, resultando em

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}(\xi)^T P(\xi) \mathbb{A}(\xi) - P(\xi) & \mathbb{A}(\xi)^T P(\xi) \mathbb{B}(\xi) \\ \mathbb{B}(\xi)^T P(\xi) \mathbb{A}(\xi) & \mathbb{B}(\xi)^T P(\xi) \mathbb{B}(\xi) - I \end{bmatrix} \prec 0.$$

Um complemento de Schur aplicado à última desigualdade produz

$$\begin{bmatrix} -P(\xi) & P(\xi)\mathbb{A}(\xi) & P(\xi)\mathbb{B}(\xi) \\ \star & -P(\xi) & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} \prec 0,$$

que multiplicada à direita e à esquerda por $\mathcal{T} = \text{diag}(P(\xi)^{-1}, P(\xi)^{-1}, I_m)$ provê exatamente a condição (2.15), com $W(\xi) = P(\xi)^{-1}$. Além disso, as matrizes $\mathbb{A}(\xi)$ e $\mathbb{B}(\xi)$ são como em (4.41) após substituir as variáveis do filtro (4.55). \square

4.2.1 Exemplos numéricos ilustrativos

Exemplo 4.10. Para exemplificar a aplicabilidade das condições de síntese para um filtro robusto com memória nos estados, considere o seguinte sistema incerto discreto LTI retirado de Duan *et al.* (2006)

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1 + \delta \end{bmatrix}, & B_w &= \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_y &= [-100 \quad 10], & C_z &= [1 \quad 0], & D_{yw} &= [0 \quad 1], & D_{zw} &= [0 \quad 0] \end{aligned} \quad (4.64)$$

com $|\delta| \leq 0.45$. Uma representação politópica com dois vértices desse sistema é facilmente obtida, considerando os valores extremos de δ .

A aplicação das condições de síntese propostas no Teorema 4.8 com variáveis polinomiais de graus $g = \{1, 2\}$ produz os limitantes para a norma \mathcal{H}_∞ relatados na Tabela 4.4, na qual o número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , também é apresentado. A ordem dos filtros sintetizados por esse método é $n_f = (n + q)d$, $d = \{1, 2, 3, 4\}$. Os resultados atingidos mostram que há uma redução nos limitantes da norma \mathcal{H}_∞ conforme a ordem do filtro projetado aumenta, isto é, conforme mais saídas são armazenadas internamente pelo filtro. Todavia, há um crescimento considerável do número de variáveis escalares envolvidas na determinação dos filtros robustos.

Tabela 4.4 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos para o sistema (4.64) conectado a filtros robustos com memória nos estados, sintetizados por meio do Teorema 4.8 ou pelo método de Lee e Joo (2014). O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , também é fornecido.

g	d	(LEE; JOO, 2014)			Teorema 4.8		
		γ	V	L	γ	V	L
1	1	1.8199	78	41	1.8199	73	41
	2	1.6288	152	61	1.5847	338	87
	3	1.6206	258	81	1.5652	581	117
	4	1.6058	396	101	1.5424	896	147
2	1	1.8162	110	56	1.8199	103	56
	2	1.6237	218	84	1.5765	496	120
	3	1.6147	374	112	1.5618	856	162
	4	1.5902	578	140	1.5219	1324	204

Neste exemplo também é analisado o método de síntese de filtros robustos com memória proposto por Lee e Joo (2014), cujos filtros são de ordem $n_f = dn$. Comparando os limitantes determinados pelo Teorema 4.8 com os limitantes obtidos pelo método de Lee e Joo (2014), os quais são igualmente reportados na Tabela 4.4, observa-se que o método proposto proporciona resultados menos conservadores ao preço de uma maior

complexidade numérica (medida em termos de V e L). Não obstante, confrontando os resultados que proporcionam limitantes similares para a norma \mathcal{H}_∞ em ambos os métodos, por exemplo, $g = 1$ e $d = 4$ para o método de Lee e Joo (2014) ($\gamma = 1.6058$) e $g = 1$ e $d = 2$ para o Teorema 4.8 ($\gamma = 1.5847$), constata-se que a complexidade numérica envolvida é similar, porém o filtro robusto sintetizado pelo método proposto nesta tese é de menor ordem, $n_f = 6$, do que o filtro robusto projetado pelo método de Lee e Joo (2014), $n_f = 8$.

Os diagramas de valores singulares são plotados para os filtros robustos com memória sintetizados com $g = 1$ e $d = 4$ e $g = 2$ e $d = 4$, sendo apresentados, respectivamente, nas Figuras 5.7a e 5.7b, bem como os respectivos limitantes previamente obtidos. Para o caso de $g = 1$, o valor da norma \mathcal{H}_∞ de pior caso obtido pelo diagrama de valores singulares é 1.5405, enquanto que, para $g = 2$, esse valor é 1.5210; mostrando a boa acurácia dos limitantes computados pelo método proposto para cada cenário.

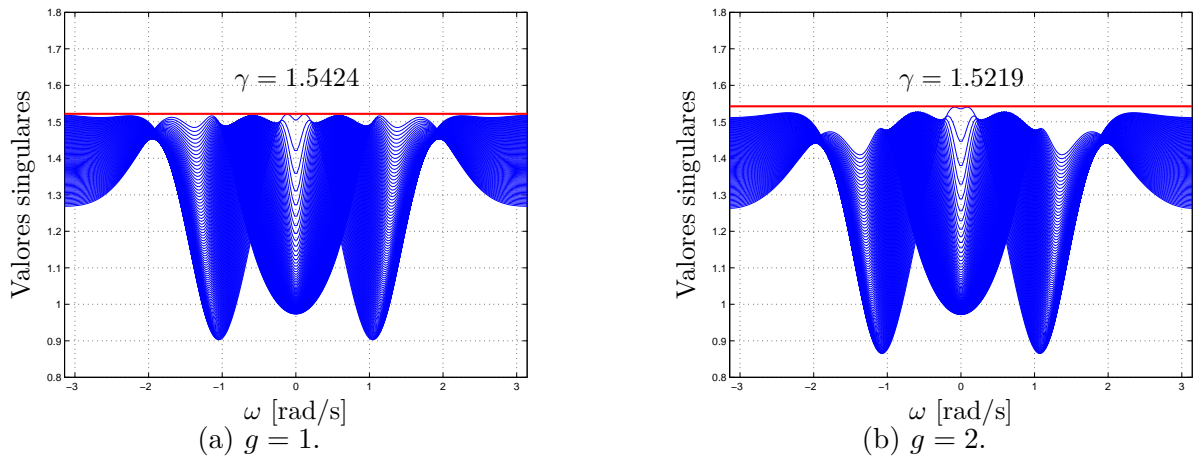


Figura 4.1 – Diagrama de valores singulares da matriz de transferência do erro de estimação (2.5) para o sistema (4.64) utilizando filtros robustos com memória nos estados ($d = 4$).

Exemplo 4.11. Este exemplo visa analisar o desempenho dos filtros robustos com memória nos estados com custo garantido \mathcal{H}_2 . Para esse fim, considere o sistema incerto discreto LTI dado em (3.47). Filtros robustos próprios ($\hat{D}_\ell \neq 0$, $\ell = 0, \dots, d - 1$) e estritamente próprios ($\hat{D}_\ell = 0$, $\ell = 0, \dots, d - 1$) de ordens $n_f = (n + q)d$, $d = \{1, 2, 3, 4\}$, são sintetizados para o sistema de interesse por meio das condições do Teorema 4.9 com variáveis polinomiais de graus $g = \{1, 2\}$ e os resultados são apresentados na Tabela 4.5, bem como o número de variáveis escalares, V , e linhas de LMIs, L , envolvido em cada caso. Outrossim, os resultados atingidos pelo método proposto por Lee e Joo (2014) para a síntese de filtros robustos estritamente próprios são, também, mostrados na tabela.

Assim como no caso \mathcal{H}_∞ , o incremento na ordem do filtro robusto propiciou a redução do conservadorismo das condições levando à determinação de menores limitantes

Tabela 4.5 – Limitantes obtidos para a norma \mathcal{H}_2 do sistema (3.47) conectado aos filtros robustos, próprios e estritamente próprios, com memória nos estados sintetizados por meio do Teorema 4.9.

g	d	Próprio			Estritamente próprio			(LEE; JOO, 2014)		
		μ	V	L	μ	V	L	μ	V	L
	1	2.9619	145	146	3.4604	144	146	3.4594	144	194
	2	2.9176	926	316	3.3713	924	316	3.3816	286	274
1	3	2.9010	1579	414	3.3307	1576	414	3.3397	492	354
	4	2.8913	2428	512	3.3053	2424	512	3.3129	762	434
	1	2.9091	343	310	3.3934	342	310	3.3829	342	390
	2	2.8774	2282	670	3.3338	2280	670	3.3066	688	550
2	3	2.8620	3901	880	3.3028	3898	880	3.2915	1194	710
	4	2.8552	6010	1090	3.2783	6006	1090	3.2751	1860	870

para a norma \mathcal{H}_2 do sistema conectado a um filtro robusto com memória. Sem embargo, prover tal redução incorre em um aumento significativo da complexidade computacional envolvida em achar uma solução para o problema (medida em termos de V e L).

Por fim, vale notar que o método de Lee e Joo (2014), utilizando filtros robustos estritamente próprios, tende a ser um pouco mais conservador do que o método proposto para o caso $g = 1$. Por outro lado, para $g = 2$, o método de Lee e Joo (2014) proporciona melhores resultados para o sistema analisado.

4.3 Smoothers

No contexto de filtragem de sistemas, o problema de *smoothing* corresponde a projetar um filtro que proveja estimativas para um sinal em um instante de tempo passado, utilizando, para isso, todas as medidas disponíveis até o tempo presente (ANDERSON; MOORE, 1979). Os *smoothers* são usualmente classificados em três tipos, dependendo do tipo de suavização desejada:

- *Smoother de intervalo fixo*: corresponde ao problema de projeto de um *smoother* que suavize um conjunto de dados limitado;
- *Smoother de ponto fixo*: corresponde ao problema de estimar um sinal em um ponto específico fixo no passado, utilizando todas as medidas disponíveis até o instante atual;
- *Smoother de atraso fixo*: corresponde ao problema de estimar um sinal em um instante $\ell \in \mathbb{N}_+$ anterior ao instante atual.

O problema de *smoothing* pode ser reformulado em termos de um problema de filtragem por meio da definição apropriada de um sistema aumentado (ANDERSON; MOORE, 1979). Devido a essa característica, nesta tese, o problema de *smoothing* robusto com atraso fixo é abordado, utilizando a formulação de filtros de ordem não mínima apresentada no Capítulo 3. Note que os demais problemas de *smoothing* poderiam ser abordados de maneira similar com a estratégia proposta. Duas formulações distintas para abordar o problema de *smoothing* com atraso fixo são possíveis.

A primeira, derivada do trabalho de Bolzern *et al.* (2004), baseia-se na definição do vetor de estados como

$$\tilde{x}(k) = [z(k-\ell)^T \ \cdots \ z(k-1)^T \ x(k)^T]^T \in \mathbb{R}^{n+\ell p}, \quad \ell \geq 1. \quad (4.65)$$

Assumindo que as matrizes correspondentes à saída estimada $z(k)$, C_z e D_{zw} , são livres de incertezas, as matrizes constantes do sistema (3.7) são definidas na forma

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_p & \cdots & 0 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & 0 & I_p \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C_z \end{bmatrix}, \quad \Phi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ D_{zw} \end{bmatrix},$$

e as matrizes de saída são redefinidas para

$$\check{C}_z(\xi) = [I \ 0 \ \cdots \ 0], \quad \check{D}_{zw}(\xi) = 0. \quad (4.66)$$

Observação 4.12. Caso as matrizes correspondentes à saída estimada, $C_z(\xi)$ e $D_{zw}(\xi)$, sejam incertas, o problema de *smoothing* robusto com a estrutura (4.65) pode ser redefinido segundo a metodologia apresentada na Seção 4.1 para filtros com memória de saída.

A segunda abordagem, similar à formulação dada em Anderson e Moore (1979), assume que o vetor de estados aumentado contenha os estados passados do sistema, ou seja,

$$\tilde{x}(k) = [x(k-\ell)^T \ \cdots \ x(k-1)^T \ x(k)^T]^T \in \mathbb{R}^{(\ell+1)n}, \quad \ell \geq 1. \quad (4.67)$$

Assim, as matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 são dadas por

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_n & \cdots & 0 \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & 0 & I_n \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix}, \quad \Phi_3 = 0 \quad (4.68)$$

e as matrizes de saída são redefinidas para

$$\check{C}_z(\xi) = [C_z(\xi) \ 0 \ \cdots \ 0], \quad \check{D}_{zw}(\xi) = D_{zw}(\xi). \quad (4.69)$$

A síntese de *smoothers* robustos com custo garantido \mathcal{H}_∞ é realizada por meio de uma adaptação do Teorema 3.8 enunciada no corolário a seguir, no qual as variáveis de otimização possuem dimensões compatíveis para tratar cada estrutura de *smoother*.

Observação 4.13. Como mencionado anteriormente, as formulações apresentadas são extensíveis para tratar os problemas de *smoothing* de ponto fixo e de *smoothing* com intervalo fixo. No primeiro caso, suponha que se queira estimar o valor do sinal $z(k)$ em um dado instante \bar{d} , para tanto requer-se que a dimensão do vetor (4.65) ou do vetor (4.67) seja incrementada de p ou n , respectivamente, para cada medida adicional $y(k)$ utilizada na determinação do sinal $z(\bar{d})$. Por sua vez, o problema de *smoothing* com intervalo fixo pode ser remodelado como um problema de *smoothing* com atraso fixo seguindo as ideias propostas por Anderson e Moore (1979) e, portanto, a formulação exposta é imediatamente aplicável.

Corolário 4.14. *Sejam*

$$E_1 = [0 \ 0 \ I], \quad E_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi = [\Phi_1 \ \Phi_2], \quad (4.70)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(\xi) & \mathcal{B}(\xi) \\ \hline \mathcal{C}(\xi) & \mathcal{D}(\xi) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} F C_y(\xi) E_1 & Q & F D_{yw}(\xi) & \\ F C_y(\xi) E_1 & Q & F D_{yw}(\xi) & \\ \hline \check{C}_z(\xi) - R C_y(\xi) E_1 & -L & \check{D}_{zw}(\xi) - R D_{yw}(\xi) & \end{array} \right], \quad (4.71)$$

$$\mathcal{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\xi) & \mathcal{A}(\xi)^T & 0 & \mathcal{C}(\xi)^T \\ \mathcal{A}(\xi) & \mathcal{G}(\xi) + \mathcal{G}(\xi)^T - \mathcal{P}(\xi) & \mathcal{B}(\xi) & 0 \\ 0 & \mathcal{B}(\xi)^T & I & \mathcal{D}(\xi)^T \\ \mathcal{C}(\xi) & 0 & \mathcal{D}(\xi) & \gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (4.72)$$

$$\mathcal{P}(\xi) = \begin{bmatrix} P_1(\xi) & P_2(\xi)^T \\ P_2(\xi) & P_3(\xi) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

$$\mathcal{X}(\xi) = [J(\xi)^T \ K(\xi)^T \ X(\xi)^T \ Y(\xi)^T \ U(\xi)^T \ V(\xi)^T]^T, \quad (4.74)$$

$$\mathcal{R}(\xi) = [A(\xi)E_1 \ 0 \ E_1 \ 0 \ B_w(\xi) \ 0], \quad (4.75)$$

com $\check{C}_z(\xi)$ e $\check{D}_{zw}(\xi)$ dados ou em (4.66) ou em (4.69). Para um $\ell \geq 1$ dado, se existirem matrizes simétricas $P_1(\xi)$ e $P_3(\xi)$, e matrizes Q , F , L , R , S , $P_2(\xi)$, $J(\xi)$, $K(\xi)$, $X(\xi)$, $Y(\xi)$, $U(\xi)$ e $V(\xi)$, e um escalar $\gamma > 0$ tais que as seguintes desigualdades

$$\mathcal{P}(\xi) \succ 0, \quad (4.76)$$

$$\mathcal{N}_W^T (\mathcal{Q}(\xi) + \mathcal{X}(\xi)\mathcal{R}(\xi) + \mathcal{R}(\xi)^T \mathcal{X}(\xi)^T) \mathcal{N}_W \succ 0, \quad (4.77)$$

sejam verificadas para todo $\xi \in \Xi_N$, sendo \mathcal{N}_W uma base para o espaço nulo de

$$W = \begin{bmatrix} \varphi & 0 & E_2 & 0 & \Phi_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

dada por

$$\mathcal{N}_W = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_2^T \varphi & 0 & E_1^T & 0 & E_2^T \Phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (4.79)$$

então existe uma realização

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} S^{-1}Q & S^{-1}F \\ \hline L & R \end{array} \right] \quad (4.80)$$

para a qual a conexão do smoother robusto (3.2) com o sistema incerto (3.1) assegura $\|H_{we}(\zeta, \xi)\|_\infty < \gamma$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Vale ressaltar que o *smoother* robusto projetado pelo Corolário 4.14 é de ordem completa. Aumentando-se ainda mais as dimensões das matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 com um subsistema não observável, é possível sintetizar *smoothers* robustos de ordem não mínima.

Observação 4.15. Embora não tradicional, o problema de *smoothing* poderia levar em conta limitantes da norma \mathcal{H}_2 , ao invés da norma \mathcal{H}_∞ , sendo tratado de maneira similar à proposta.

Exemplo 4.16. Para exemplificar a metodologia de síntese de *smoothers* robustos com custo garantido \mathcal{H}_∞ , considere o sistema discreto (3.12), no qual as matrizes C_z e D_{zw} são constantes.

As condições do Corolário 4.14 com variáveis afins ($g = 1$) são empregadas para o projeto de *smoothers* para o sistema (3.12), utilizando ambas as escolhas (4.65) e (4.67) e variando o atraso $\ell = \{1, 2, 3, 4\}$ do *smoother*. Além disso, para cada valor do atraso ℓ , *smoothers* de ordem não mínima são projetados por meio da estrutura com memória nos estados retratada na Seção 4.2. A ordem dos *smoothers* projetados segundo (4.65) é $n_s = n + \ell p + d$, ao passo que, o projeto de acordo com (4.67) produz *smoothers* com ordem $n_s = (\ell + 1)n + d$, sendo $d \geq 0$ o incremento na ordem advindo da estrutura não mínima. A Tabela 4.6 apresenta os limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos em função da ordem do *smoother* sintetizado. A primeira entrada de cada coluna corresponde ao desempenho de um *smoother* de ordem completa. Como era esperado, os limitantes da norma \mathcal{H}_∞ decrescem com o aumento do atraso ℓ (pois há mais medidas disponíveis para estimar a saída do sistema) e também com o aumento da ordem n_s do *smoother* (devido à estrutura

não mínima). Note que os espaços em branco da Tabela 4.6 indicam que não foi possível sintetizar um *smoother* de ordem n_s para a estrutura com memória adotada, (4.65) ou (4.67).

Tabela 4.6 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos para os *smoothers* com atraso fixo projetados por meio do Corolário 4.14 utilizando as aproximações (4.65) e (4.67).

n_s	$\ell = 1$		$\ell = 2$		$\ell = 3$		$\ell = 4$	
	(4.65)	(4.67)	(4.65)	(4.67)	(4.65)	(4.67)	(4.65)	(4.67)
3	1.3361							
4	1.3361	1.3298	1.1754					
5	1.3298	1.3298	1.1754		1.1638			
6	1.1828	1.3298	1.1716	1.1576	1.1638		1.1497	
7	1.1828	1.1828	1.1716	1.1576	1.1582		1.1497	
8	1.1594	1.1594	1.1628	1.1576	1.1582	1.1481	1.1471	
9	1.1533	1.1594	1.1628	1.1576	1.1582	1.1481	1.1471	
10	1.1533	1.1594	1.1511	1.1576	1.1510	1.1481	1.1471	1.1471

4.4 Conclusões

Neste capítulo foram apresentadas especializações para os filtros robustos de ordem não mínima introduzidos no Capítulo 3. Essas especializações advêm de uma escolha particular das matrizes constantes do sistema, Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 , proporcionando uma estrutura para o filtro projetado que armazena internamente ou saídas do sistema ou estados do sistema e do filtro, produzindo filtros com memória. Além disso, uma extensão para o problema de projeto de *smoothers* com atraso fixo foi estabelecida, na qual o uso de memória possibilitou igualmente melhorias nos limitantes obtidos. Vale a pena mencionar que as condições propostas nesta tese foram capazes de se aproveitar da estrutura dos filtros para proporcionar resultados menos conservadores quando comparados aos obtidos com métodos de filtragem tradicionais e mesmo abordagens que exploram de maneira distinta uma estrutura aumentada com estados atrasados.

5 Controle robusto com memória

Este capítulo versa sobre o projeto de controladores robustos por realimentação estática de estados ou de saída com memória. A lei de controle é composta pelos estados ou pelas saídas medidas do sistema no instante corrente e em instantes anteriores, constituindo a memória do controlador. Condições de síntese que provejam custos garantidos \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 para os controladores com memória são propostas e, por meio de exemplos numéricos, mostra-se que tais condições produzem menores limitantes para os custos garantidos quando comparadas a outras condições que não utilizam a disponibilidade de informações passadas para determinar a lei de controle.

5.1 Controle robusto por realimentação de estados

Seja o sistema incerto discreto LTI dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\xi)x(k) + B_u(\xi)u(k) + B_w(\xi)w(k) \\ z(k) &= C_z(\xi)x(k) + D_u(\xi)u(k) + D_{zw}(\xi)w(k), \end{aligned} \quad (5.1)$$

o qual é obtido de (2.1) impondo $C_y(\xi) = 0$ e $D_{yw}(\xi) = 0$. Para esse sistema, almeja-se determinar uma lei de controle robusta por realimentação de estados, que estabilize assintoticamente o sistema (5.1) e que minimize um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada, sob a forma

$$u(k) = \sum_{\ell=0}^{d-1} K_\ell x(k-\ell) \quad (5.2)$$

sendo $K_\ell \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $\ell = 0, \dots, d-1$, os ganhos de realimentação de estados a serem computados e $d \in \mathbb{N}_+$ dado. Note que d corresponde à quantidade de estados em diferentes instantes de tempo presentes na lei de controle (5.2) e que o caso $d = 1$ corresponde a uma lei de controle por realimentação de estados robusta padrão, ou seja, $u(k) = K_0 x(k)$ (OGATA, 1990).

Substituindo (5.2) em (5.1), obtém-se o seguinte sistema em malha fechada:

$$\begin{aligned} s(k+1) &= \mathbb{A}(\xi)s(k) + \mathbb{B}(\xi)w(k) \\ z(k) &= \mathbb{C}(\xi)s(k) + \mathbb{D}(\xi)w(k) \end{aligned} \quad (5.3)$$

com

$$s(k) = \begin{bmatrix} x(k-d+1)^T & x(k-d+2)^T & \cdots & x(k-1)^T & x(k)^T \end{bmatrix}^T \quad (5.4)$$

e

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{A}(\xi) & \mathbb{B}(\xi) \\ \hline \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{D}(\xi) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ B_u(\xi)\mathcal{K} & A(\xi) + B_u(\xi)K_0 & B_w(\xi) \\ \hline D_u(\xi)\mathcal{K} & C_z(\xi) + D_u(\xi)K_0 & D_{zw}(\xi) \end{array} \right] \quad (5.5)$$

sendo

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_{(d-2)n} \\ 0_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}, \quad \Phi_3 = 0_{(d-1)n}, \quad (5.6)$$

$$\mathcal{K} = [K_{d-1} \ \cdots \ K_2 \ K_1]. \quad (5.7)$$

Note que os estados passados introduzidos no sistema em malha fechada (5.3) pela lei de controle (5.2) proporcionam um aumento da dinâmica do sistema, produzindo um sistema equivalente de dimensões maiores com uma determinada estrutura. Essa estrutura particular deve ser apropriadamente tratada para que resultados menos conservadores em termos do cômputo de um ganho robusto associado à determinação dos limitantes para as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 sejam obtidos. Além disso, assim como ocorre no problema de filtragem abordado nos capítulos precedentes, a aplicação direta de qualquer condição da literatura ao sistema (5.3) para síntese de controladores robustos, não é capaz de prover resultados menos conservadores para os limitantes das normas, pois a estrutura particular do sistema em malha fechada é desconsiderada.

A seguir são apresentados os dois teoremas responsáveis por prover condições para a síntese de controladores robustos por realimentação de estados com memória com custo garantido \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 , respectivamente.

Teorema 5.1. *Sejam*

$$\mathcal{P}(\xi) = \begin{bmatrix} P_1(\xi) & P_2(\xi)^T \\ P_2(\xi) & P_3(\xi) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z} = [Z_{d-1} \ \cdots \ Z_2 \ Z_1]. \quad (5.8)$$

Para $d \geq 1$ e $\lambda \in (-1, 1)$ dados, se existirem matrizes simétricas $P_1(\xi) \in \mathbb{R}^{(d-1)n \times (d-1)n}$ e $P_3(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $P_2(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times (d-1)n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_\ell \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $\ell = 0, \dots, d-1$, e um escalar $\gamma > 0$ tais que

$$\mathcal{P}(\xi) \succ 0 \quad (5.9)$$

$$\mathcal{N}^T \mathcal{Q}(\xi) \mathcal{N} + \mathcal{X}(\xi) + \mathcal{X}(\xi)^T \prec 0 \quad (5.10)$$

sejam satisfeitas para todo $\xi \in \Xi_N$, sendo

$$\mathcal{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} -P_1(\xi) & -P_2(\xi)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -P_2(\xi) & -P_3(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1(\xi) & P_2(\xi)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2(\xi) & P_3(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I_m \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} I_{(d-1)n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & 0 & 0 & \Phi_3 \\ 0 & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{X}(\xi) = \begin{bmatrix} 0_{(d-1)n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda B_u(\xi)\mathcal{Z} & \lambda(A(\xi)G + B_u(\xi)Z_0) & -\lambda G & 0 & \lambda B_w(\xi) \\ B_u(\xi)\mathcal{Z} & (A(\xi)G + B_u(\xi)Z_0) & -G & 0 & B_w(\xi) \\ D_u(\xi)\mathcal{Z} & (C_z(\xi)G + D_u(\xi)Z_0) & 0 & -I & D_{zw}(\xi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_m \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

então a lei de controle robusta por realimentação de estados com memória (5.2) estabiliza assintoticamente o sistema (5.1) com matrizes de ganho de realimentação dadas por $K_\ell = Z_\ell G^{-1}$, $\ell = 0, \dots, d-1$, e assegura $\|H_{wz}(\zeta, \xi)\|_\infty < \gamma$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Demonstração. A prova é feita por meio do Lema da Projeção. Considere que (5.9) e (5.10) sejam factíveis. Assim, a não singularidade da matriz G é garantida. Defina, então, a seguinte base¹ para o espaço nulo à direita de $\mathcal{X}(\xi)$:

$$\mathcal{Y}(\xi) = \begin{bmatrix} I_{d-1} \otimes G^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & G^{-1} & 0 \\ G^{-1}B_u(\xi)\mathcal{K} & G^{-1}(A(\xi) + B_u(\xi)K_0) & G^{-1}B_w(\xi) \\ D_u(\xi)\mathcal{K} & C_z(\xi) + D_u(\xi)K_0 & D_{zw}(\xi) \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix},$$

multiplique (5.10) à direita por $\mathcal{Y}(\xi)$ e à esquerda por $\mathcal{Y}(\xi)^T$ e note que

$$\begin{aligned} \Phi_1(I_{d-1} \otimes G^{-1}) &= (I_{d-1} \otimes G^{-1})\Phi_1 \\ \Phi_2 G^{-1} &= (I_{d-1} \otimes G^{-1})\Phi_2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Depois de algumas manipulações algébricas obtém-se a condição

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}(\xi)^T \mathcal{W}(\xi) \mathbb{A}(\xi) - \mathcal{W}(\xi) + \mathbb{C}(\xi)^T \mathbb{C}(\xi) & * \\ \mathbb{B}(\xi)^T \mathcal{W}(\xi) \mathbb{A}(\xi) + \mathbb{D}(\xi)^T \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{B}(\xi)^T \mathcal{W}(\xi) \mathbb{B}(\xi) + \mathbb{D}(\xi)^T \mathbb{D}(\xi) - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0,$$

com $\mathcal{W}(\xi) = (I_d \otimes G^{-1})^T \mathcal{P}(\xi) (I_d \otimes G^{-1})$, que, por meio de um complemento de Schur, corresponde exatamente à condição (2.25) para o sistema em malha fechada (5.3), após impor $K_\ell = Z_\ell G^{-1}$.

¹ O símbolo \otimes refere-se ao produto de Kronecker (HORN; JOHNSON, 1991).

Além disso, definindo a matriz

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} I_{d-1} \otimes G^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & G^{-1} & 0 \\ 0 & -\lambda G^{-1} & 0 \\ 0 & 0_{p \times n} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$$

e multiplicando (5.10) à direita por \mathcal{V} e à esquerda por \mathcal{V}^T chega-se a

$$\begin{bmatrix} \Lambda^T \mathcal{W}(\xi) \Lambda - \mathcal{W}(\xi) & \star \\ 0 & -\gamma^2 I_m \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5.15)$$

com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & \lambda I_n \end{bmatrix}.$$

A condição (5.15) é verificada para todo $\xi \in \Xi_N$ se, e somente se, Λ possuir autovalores que em módulo sejam menores do que 1. Os autovalores de Λ são 0 e $-\lambda$, o que implica que $|\lambda| < 1$ para que a condição seja válida e, portanto, $\lambda \in (-1, 1)$. \square

Teorema 5.2. *Sejam $\mathcal{P}(\xi)$ e \mathcal{Z} como em (5.8). Para $d \geq 1$ e $\lambda \in (-1, 1)$ dados, se existirem matrizes simétricas $P_1(\xi) \in \mathbb{R}^{(d-1)n \times (d-1)n}$, $P_3(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, matrizes $P_2(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times (d-1)n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z_\ell \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $\ell = 0, \dots, d-1$, e um escalar $\mu > 0$ tais que*

$$\text{Tr}(M(\xi)) < \mu^2 \quad (5.16)$$

$$\mathcal{P}(\xi) \succ 0 \quad (5.17)$$

$$\begin{bmatrix} M(\xi) & \star & \star \\ B_w(\xi) & G + G^T - P_3(\xi) & \star \\ D_{zw}(\xi) & 0 & I_m \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.18)$$

$$\mathcal{N}^T \mathcal{Q}(\xi) \mathcal{N} + \mathcal{X}(\xi) + \mathcal{X}(\xi)^T \prec 0 \quad (5.19)$$

sejam satisfeitas para todo $\xi \in \Xi_N$, sendo

$$\mathcal{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} -P_1(\xi) & -P_2(\xi)^T & 0 & 0 & 0 \\ -P_2(\xi) & -P_3(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1(\xi) & P_2(\xi)^T & 0 \\ 0 & 0 & P_2(\xi) & P_3(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{bmatrix} I_{(d-1)n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

$$\mathcal{X}(\xi) = \begin{bmatrix} 0_{(d-1)n} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda B_u(\xi) \mathcal{Z} & \lambda (A(\xi)G + B_u(\xi)Z_0) & -\lambda G & 0 \\ B_u(\xi) \mathcal{Z} & (A(\xi)G + B_u(\xi)Z_0) & -G & 0 \\ D_u(\xi) \mathcal{Z} & (C_z(\xi)G + D_u(\xi)Z_0) & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

então a lei de controle robusta por realimentação de estados com memória (5.2) estabiliza assintoticamente o sistema (5.1) com matrizes de ganho de realimentação dadas por $K_\ell = Z_\ell G^{-1}$, $\ell = 0, \dots, d-1$, e assegura $\|H_{wz}(\zeta, \xi)\|_2 < \mu$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Demonstração. A prova é feita por meio do Lema da Projeção. Considere que (5.16)–(5.19) sejam factíveis. Assim, (5.17) garante que $P_3(\xi)$ é não singular e, por (5.18), $G + G^T \succ P_3(\xi) \succ 0$, implicando que G é também não singular. Utilizando a equivalência (DE OLIVEIRA *et al.*, 1999):

$$(G - P_3(\xi))P_3(\xi)^{-1}(G - P_3(\xi))^T \succ 0 \Leftrightarrow GP_3(\xi)^{-1}G^T \succ G + G^T - P_3(\xi),$$

a partir de (5.18) tem-se

$$\begin{bmatrix} M(\xi) & \star & \star \\ B_w(\xi) & GP_3(\xi)^{-1}G^T & \star \\ D_{zw}(\xi) & 0 & I_m \end{bmatrix} \succ 0$$

que, por complemento de Schur, produz

$$M(\xi) - B_w(\xi)^T G^{-T} P_3(\xi) G^{-1} B_w(\xi) - D_{zw}(\xi)^T D_{zw}(\xi) \succ 0. \quad (5.22)$$

Assumindo que $\Phi_3 = 0$ e $\mathcal{W}(\xi) = (I_d \otimes G^{-1})^T \mathcal{P}(\xi) (I_d \otimes G^{-1})$, sem perda de generalidade, a condição (5.22) pode ser reescrita sob a forma

$$M(\xi) - \mathbb{B}(\xi)^T \mathcal{W}(\xi) \mathbb{B}(\xi) - \mathbb{D}(\xi)^T \mathbb{D}(\xi) \succ 0$$

a qual é equivalente à condição (2.11), por meio de um complemento de Schur, para o sistema em malha fechada (5.3).

Defina a seguinte base para o espaço nulo à direita de $\mathcal{X}(\xi)$:

$$\mathcal{Y}(\xi) = \begin{bmatrix} I_{d-1} \otimes G^{-1} & 0 \\ 0 & G^{-1} \\ G^{-1} B_u(\xi) \mathcal{K} & G^{-1} (A(\xi) + B_u(\xi) K_0) \\ D_u(\xi) \mathcal{K} & C_z(\xi) + D_u(\xi) K_0 \end{bmatrix}$$

e multiplique (5.19) à direita por $\mathcal{Y}(\xi)$ e à esquerda por $\mathcal{Y}(\xi)^T$. Fazendo uso das relações dadas em (5.14) e realizando algumas manipulações algébricas, chega-se em

$$\mathbb{A}(\xi)^T \mathcal{W}(\xi) \mathbb{A}(\xi) - \mathcal{W}(\xi) + \mathbb{C}(\xi)^T \mathbb{C}(\xi) \prec 0,$$

que é equivalente à condição (2.12), por meio de um complemento de Schur, para o sistema em malha fechada (5.3), após impor $K_\ell = Z_\ell G^{-1}$.

Outrossim, após definir a matriz

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} I_{d-1} \otimes G^{-1} & 0 \\ 0 & G^{-1} \\ 0 & -\lambda G^{-1} \\ 0 & 0_{p \times n} \end{bmatrix},$$

multiplique (5.19) à direita por \mathcal{V} e à esquerda por \mathcal{V}^T obtendo a condição

$$\Lambda^T \mathcal{W}(\xi) \Lambda - \mathcal{W}(\xi) \prec 0, \quad (5.23)$$

a qual corresponde exatamente ao bloco (1, 1) da matriz (5.15) e, portanto, é satisfeita para todo $\lambda \in (-1, 1)$. \square

A inclusão do escalar λ nas condições de síntese apresentadas nos Teoremas 5.1 e 5.2 é realizada por meio do Lema da Projeção, incorporando um grau extra de liberdade às condições. Dessa forma, um procedimento de busca linear no parâmetro λ é empregado nos exemplos numéricos da próxima seção, permitindo reduzir o conservadorismo das condições propostas.

5.1.1 Exemplos numéricos ilustrativos

Exemplo 5.3. Este exemplo investiga a aplicação das condições propostas nos Teoremas 5.1 e 5.2 em um sistema incerto discreto LTI com 3 vértices gerado aleatoriamente (exceto pelas matrizes $B_u(\xi)$ e $D_{zw}(\xi)$) dado por

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.2829 & -3.9791 & -5.9465 \\ 2.4651 & -13.3982 & -21.1194 \\ -2.6132 & 13.9907 & 21.2676 \end{bmatrix}, & B_{w,1} &= \begin{bmatrix} 0.7642 & 1.2443 \\ 1.3813 & -0.5401 \\ -0.2925 & -0.1916 \end{bmatrix}, & B_{u,1} &= \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -0.5926 & -0.7407 & 0.4444 \\ -0.0504 & -3.5347 & -6.2428 \\ -2.0207 & 14.7314 & 21.2676 \end{bmatrix}, & B_{w,2} &= \begin{bmatrix} 0.4311 & -0.6130 \\ -0.2667 & -0.7482 \\ -1.2876 & -0.1398 \end{bmatrix}, & B_{u,2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -5.5227 & 27.0926 & 42.8314 \\ -0.6903 & 3.3866 & 5.3539 \\ 4.1420 & -20.3195 & -32.1236 \end{bmatrix}, & B_{w,3} &= \begin{bmatrix} -0.6357 & -0.4208 \\ -0.7994 & -2.1215 \\ 1.0266 & -0.5155 \end{bmatrix}, & B_{u,3} &= \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, \\ C_{z,1} &= \begin{bmatrix} 0.9538 & -0.7202 & 0.4500 \\ 0.4131 & -0.5627 & 0.0509 \end{bmatrix}, & D_{u,1} &= \begin{bmatrix} 0.3518 \\ -0.7155 \end{bmatrix}, \\ C_{z,2} &= \begin{bmatrix} 1.2854 & 2.3655 & -0.4907 \\ 0.8971 & 1.1284 & -1.4100 \end{bmatrix}, & D_{u,2} &= \begin{bmatrix} -0.8085 \\ -1.4329 \end{bmatrix}, \\ C_{z,3} &= \begin{bmatrix} -0.5614 & -0.8834 & 0.8715 \\ 0.6481 & -1.7931 & -0.6151 \end{bmatrix}, & D_{u,3} &= \begin{bmatrix} 0.1522 \\ -1.5683 \end{bmatrix}, \\ D_{zw,i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & & & & i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Primeiramente, a influência da variação do número de estados atrasados d na lei de controle é avaliada e os resultados da aplicação dos Teoremas 5.1 e 5.2 com $\lambda = 0$ e $g = 1$ são apresentados, respectivamente, nas Tabelas 5.1 e 5.2. Para fins de comparação, as condições de síntese dos Teoremas 9 (dO-T9), caso \mathcal{H}_2 , e 10 (dO-T10),

caso \mathcal{H}_∞ , propostos em de Oliveira *et al.* (2002) são aplicadas diretamente ao sistema aumentado (5.3) para cada valor de d e os limitantes obtidos são, também, reportados nas correspondentes tabelas. A complexidade numérica para a determinação dos limitantes é mensurada em termos do número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , igualmente apresentadas nas tabelas.

Tabela 5.1 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos para o sistema (5.24) utilizando controladores por realimentação de estados sintetizados por meio do Teorema 5.1 e pelo Teorema 10 propostos em de Oliveira *et al.* (2002) (dO-T10). O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado.

d	Teorema 5.1			dO-T10		
	γ	V	L	γ	V	L
1	66.7489	30	39	66.7489	31	30
2	66.0454	78	57	66.7489	106	48
3	66.0454	153	75	66.7489	226	66
4	66.0454	255	93	66.7489	391	84

Tabela 5.2 – Limitantes da norma \mathcal{H}_2 obtidos para o sistema (5.24) utilizando controladores por realimentação de estados sintetizados por meio do Teorema 5.2 e pelo Teorema 9 propostos em de Oliveira *et al.* (2002) (dO-T9). O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado.

d	Teorema 5.2			dO-T9		
	μ	V	L	μ	V	L
1	29.6935	39	57	32.2554	34	40
2	25.0625	87	75	32.2554	109	67
3	24.7736	162	93	32.2554	229	94
4	24.7447	264	111	32.2554	394	121

A partir dos resultados obtidos pela aplicação dos Teoremas 5.1 e 5.2, nota-se que o aumento de d proporciona melhores limitantes para as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 do sistema aumentado (5.3), respectivamente. Entretanto, essa melhoria é acompanhada de um aumento no número de variáveis e de linhas de LMIs envolvidas na determinação de uma solução. Constata-se também que aplicar as condições de síntese propostas em de Oliveira *et al.* (2002) diretamente sobre o sistema aumentado (5.3) não provê melhorias sobre os limitantes computados para $d = 1$ (controle robusto por realimentação de estados padrão). Além disso, a variação do grau das variáveis polinomiais para $g > 1$ não foi capaz de produzir limitantes menos conservadores para as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 do sistema (5.24).

A influência da variação do parâmetro λ é analisada realizando uma busca escalar no intervalo $[-0.9, 0.9]$ (utilizando 37 valores igualmente espaçados), sendo o re-

sultado apresentado na Figura 5.1. A busca no parâmetro λ não proporciona melhores limitantes para a norma \mathcal{H}_∞ , porém uma pequena melhora foi possível para a norma \mathcal{H}_2 atingindo o limitante de $\mu = 24.5234$ para $\lambda = 0.1$, como destacado na figura.

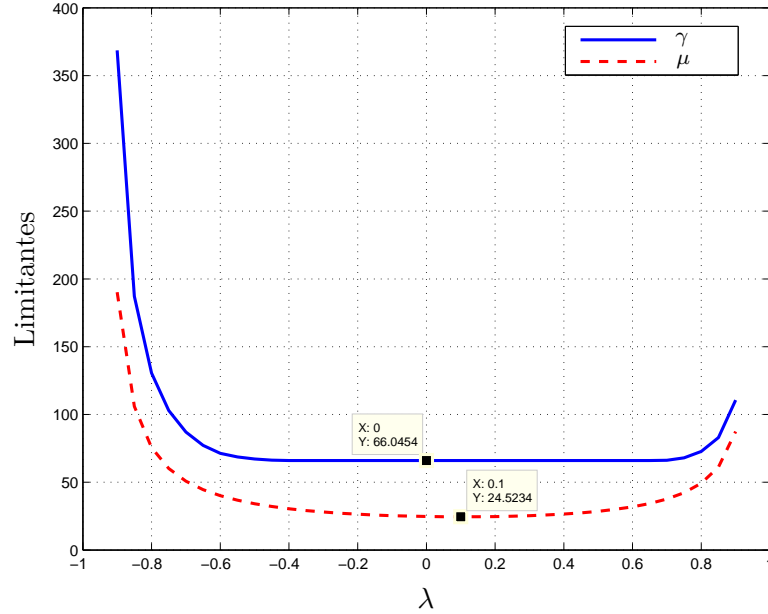


Figura 5.1 – Limitantes para as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 em função do parâmetro escalar λ para o sistema do Exemplo 5.3.

Exemplo 5.4. Considere o sistema incerto discreto LTI dado em Ebihara *et al.* (2008)

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 0.5 \\ -0.6 & 0.1 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & -0.4 \\ 0.9 & 0.5 & 0.2 \\ -0.2 & -0.3 & -0.8 \end{bmatrix}, \\
 B_{w,i} &= [-0.4 \quad -0.2 \quad 0.6]^T, & B_{u,i} &= [0.2 \quad 0.5 \quad 0.2]^T, \\
 C_{z,i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & D_{zw,i} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & D_{u,i} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

A Tabela 5.3 apresenta os resultados da aplicação do Teorema 5.2, com $g = 1$, $\xi = 0$ e $d = \{1, 2, 3, 4\}$, para a síntese de controladores robustos por realimentação de estados com memória para o sistema (5.25). Na tabela, L indica o número de linhas de LMIs e V o número de variáveis envolvidas no processo de otimização, que fornecem uma ideia da complexidade numérica dos problemas envolvidos.

Da mesma forma como no Exemplo 5.3, o aumento de d proporciona menores limitantes para a norma \mathcal{H}_2 do sistema, incorrendo, todavia, em uma maior complexidade numérica. Por outro lado, o aumento do grau g das variáveis polinomiais não produz melhores resultados do que os obtidos com $g = 1$. Dessa maneira, ilustra-se que, para

Tabela 5.3 – Limitantes da norma \mathcal{H}_2 obtidos para o sistema (5.25) utilizando controladores por realimentação de estados sintetizados por meio do Teorema 5.2. O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado.

d	μ	V	L
1	4.8989	26	40
2	3.7332	59	52
3	3.7069	110	64
4	3.7023	179	76

determinados sistemas, mesmo sem aumentar o grau das variáveis polinomiais, a simples inclusão de mais informações (estados atrasados neste caso) à lei de controle é capaz de produzir resultados menos conservadores e, por consequência, menores limitantes para os critérios de desempenho.

Considerando o caso $d = 4$, foi realizada uma busca linear no parâmetro $\lambda \in [-0.9, 0.9]$, utilizando 37 valores igualmente espaçados, e o resultado obtido é apresentado graficamente na Figura 5.2. Para $\lambda = -0.05$ atingiu-se menor valor de $\mu = 3.6981$ para o limitante da norma \mathcal{H}_2 , o qual representa uma pequena melhoria frente ao limitante $\mu = 3.7023$ determinado para $\lambda = 0$.

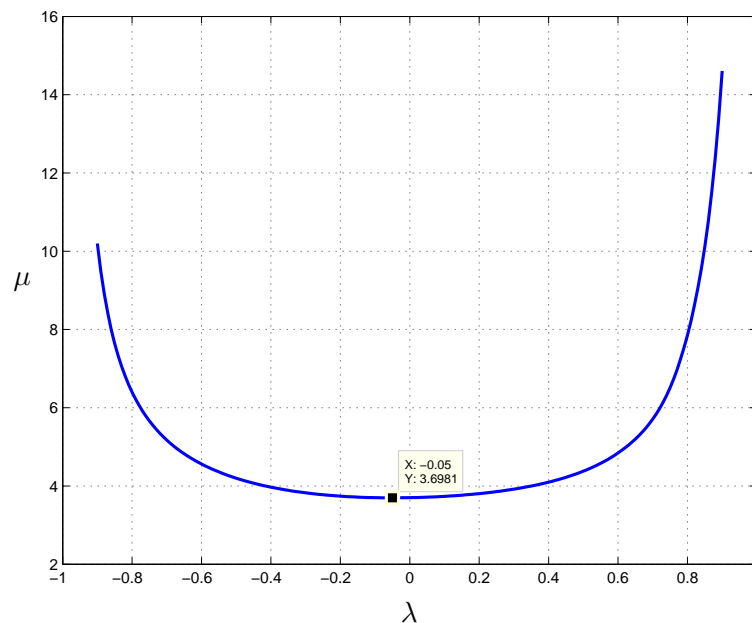


Figura 5.2 – Limitantes para a norma \mathcal{H}_2 em função do parâmetro escalar λ para o sistema do Exemplo 5.4.

Utilizando o controlador robusto por realimentação de estados com memória sintetizado para o caso $g = 1$ e $d = 4$ apresentado na Tabela 5.3, realiza-se uma busca exaustiva no parâmetro incerto ξ , de forma a determinar o valor da norma \mathcal{H}_2 de pior

caso para o sistema em malha fechada (5.3). Tal procedimento provê o custo $\|H(\zeta, \xi)\|_2 = 3.6555$ para a norma de pior caso, o qual é inferior ao limitante $\mu = 3.7023$ computado por meio do Teorema 5.2. Para a escolha do parâmetro ξ que produziu a norma de pior caso, realiza-se uma simulação temporal, apresentada na Figura 5.3, assumindo que um impulso unitário é aplicado à entrada do sistema ($w(k) = \delta(k)$) e as amplitudes do sinal de controle $u(k)$ e das saídas controladas $z(k)$ são avaliadas. Apesar de estados passados do sistema estarem presentes na lei de controle, o sinal de controle gerado pelo controlador não apresenta amplitudes elevadas e estabiliza o sistema considerado em, aproximadamente, 60 instantes de tempo, comprovando o bom desempenho da metodologia proposta.

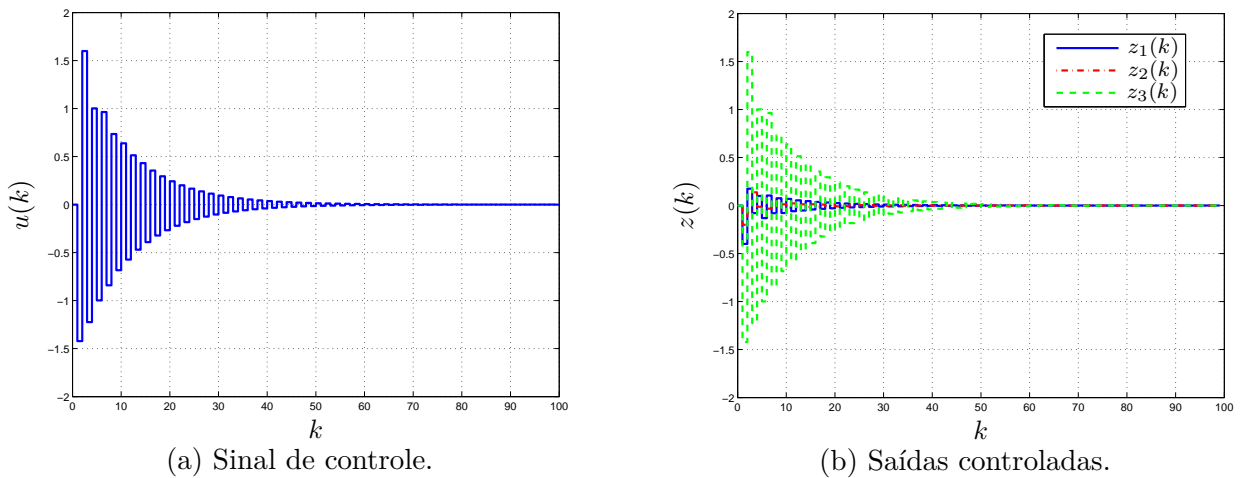


Figura 5.3 – Resposta temporal do sistema (5.25) utilizando um controlador robusto por realimentação de estados com memória sintetizado com $d = 4$ e $g = 1$.

5.2 Controle robusto por realimentação estática de saída

O controlador robusto por realimentação estática de saída consiste de um dispositivo que mensura uma ou mais saídas do sistema analisado e utiliza essas medidas para compor a lei de controle. Usualmente, esse tipo de controlador é mais utilizado do que o controlador por realimentação de estados, visto que nem sempre é possível ter acesso a todos os estados de um sistema.

Para o projeto de controladores robustos por realimentação estática de saída com memória, considere, primeiramente, o seguinte sistema incerto discreto LTI

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= A(\xi)x(k) + B_u(\xi)u(k) + B_w(\xi)w(k) \\
 y(k) &= C_y x(k) \\
 z(k) &= C_z(\xi)x(k) + D_u(\xi)u(k) + D_{zw}(\xi)w(k),
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

o qual pode ser obtido de (2.1) impondo $D_{yw}(\xi) = 0$. No sistema apresentado, assume-se que a matriz de saída C_y seja livre de incertezas para que uma lei de controle robusta

possa ser projetada. A lei de formação do sinal de controle é descrita por

$$u(k) = \sum_{\ell=0}^{d-1} L_{\ell} y(k - \ell) \quad (5.27)$$

sendo $L_{\ell} \in \mathbb{R}^{r \times q}$, $\ell = 0, \dots, d - 1$, os ganhos de realimentação de saída a serem determinados e $d \in \mathbb{N}_+$ dado. O parâmetro d , neste caso, corresponde ao número de saídas medidas que formam a lei de controle (5.27). Do mesmo modo que no caso do controlador por realimentação de estados, a escolha $d = 1$ corresponde a projetar uma lei de controle por realimentação estática de saída robusta padrão, ou seja, $u(k) = L_0 y(k)$.

O sistema em malha fechada obtido da substituição da lei de controle (5.27) no sistema (5.26) possui a mesma estrutura do sistema aumentado (5.3), sendo que as matrizes de tal sistema são dadas por

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{A}(\xi) & \mathbb{B}(\xi) \\ \hline \mathbb{C}(\xi) & \mathbb{D}(\xi) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ B_u(\xi)\mathcal{L}(I_d \otimes C_y) & A(\xi) + B_u(\xi)L_0C_y & B_w(\xi) \\ \hline D_u(\xi)\mathcal{L}(I_d \otimes C_y) & C_z(\xi) + D_u(\xi)L_0C_y & D_{zw}(\xi) \end{array} \right] \quad (5.28)$$

com matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 como em (5.6) e

$$\mathcal{L} = [L_{d-1} \ \cdots \ L_2 \ L_1]. \quad (5.29)$$

Uma outra suposição necessária para o projeto de controladores por realimentação estática de saída é que a matriz de saída esteja na forma $C_y = [I \ 0]$. Nos casos em que essa suposição não seja atendida, é possível determinar uma matriz invertível T que satisfaça

$$C_y T = [I \ 0], \quad (5.30)$$

dado que C_y possua posto completo de linhas. Esse procedimento pode ser compreendido como uma transformação de similaridade sobre o sistema incerto (5.26) (GEROMEL *et al.*, 1996). Dessa forma, as matrizes L_{ℓ} , $\ell = 0, \dots, d - 1$, são redefinidas para $\mathbb{L}_{\ell} = [L_{\ell} \ 0]$, incorporando tal característica. Conseqüentemente, \mathcal{L} é, da mesma maneira, redefinida para $\mathcal{L} = [\mathbb{L}_{d-1} \ \cdots \ \mathbb{L}_2 \ \mathbb{L}_1]$. Ademais, atente para o fato de que a escolha da matriz T não é única. Uma escolha particular é dada por

$$T = \left[C_y^T (C_y C_y^T)^{-1} \ C_y^{\perp} \right], \quad (5.31)$$

sendo C_y^{\perp} uma base para o espaço nulo da matriz C_y .

Note que a estrutura do sistema (5.3) é a mesma tanto para as matrizes em malha fechadas dadas em (5.5) quanto em (5.28). De fato, designando $K_{\ell} = L_{\ell} C_y$, $\ell = 0, \dots, d - 1$, em (5.5) obtém-se precisamente (5.28). Devido a essa correlação, as condições de síntese dos Teoremas 5.1 e 5.2 podem ser estendidas para tratar o problema

de realimentação estática de saída. Para tanto, fazem-se as seguintes escolhas (DONG; YANG, 2008)

$$G = \mathcal{F}(\xi) = \begin{bmatrix} F & 0 \\ X(\xi) & Y(\xi) \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

$$\mathcal{Z} = [\mathbb{Z}_{d-1} \ \cdots \ \mathbb{Z}_2 \ \mathbb{Z}_1], \quad \mathbb{Z}_\ell = [Z_\ell \ 0], \quad (5.33)$$

culminando nos dois corolários apresentados na sequência para a síntese de controladores robustos por realimentação estática de saída com memória com desempenho garantido \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 , respectivamente.

Corolário 5.5. *Sejam $\mathcal{P}(\xi)$ como em (5.8) e \mathcal{Z} como em (5.33). Para $d \geq 1$ e $\lambda \in (-1, 1)$ dados, se existirem matrizes simétricas $P_1(\xi) \in \mathbb{R}^{(d-1)n \times (d-1)n}$ e $P_3(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $P_2(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times (d-1)n}$, $F \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $X(\xi) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times q}$, $Y(\xi) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$, $Z_\ell \in \mathbb{R}^{r \times q}$, $\ell = 0, \dots, d-1$, e um escalar $\gamma > 0$ tais que*

$$\mathcal{P}(\xi) \succ 0 \quad (5.34)$$

$$\mathcal{N}^T \mathcal{Q}(\xi) \mathcal{N} + \mathcal{X}(\xi) + \mathcal{X}(\xi)^T \prec 0 \quad (5.35)$$

sejam satisfeitas para todo $\xi \in \Xi_N$, sendo $\mathcal{Q}(\xi)$ e \mathcal{N} dadas em (5.11) e (5.12), respectivamente, e

$$\mathcal{X}(\xi) = \begin{bmatrix} 0_{(d-1)n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda B_u(\xi) \mathcal{Z} & \lambda (A(\xi) \mathcal{F}(\xi) + B_u(\xi) \mathbb{Z}_0) & -\lambda \mathcal{F}(\xi) & 0 & \lambda B_w(\xi) \\ B_u(\xi) \mathcal{Z} & (A(\xi) \mathcal{F}(\xi) + B_u(\xi) \mathbb{Z}_0) & -\mathcal{F}(\xi) & 0 & B_w(\xi) \\ D_u(\xi) \mathcal{Z} & (C_z(\xi) \mathcal{F}(\xi) + D_u(\xi) \mathbb{Z}_0) & 0 & -I & D_{zw}(\xi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_m \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

então a lei de controle robusta por realimentação estática de saída com memória (5.27) estabiliza assintoticamente o sistema (5.1) com matrizes de ganho de realimentação dadas por $L_\ell = Z_\ell F^{-1}$, $\ell = 0, \dots, d-1$, e assegura $\|H_{wz}(\zeta, \xi)\|_\infty < \gamma$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Corolário 5.6. *Sejam $\mathcal{P}(\xi)$ como em (5.8) e \mathcal{Z} como em (5.33). Para $d \geq 1$ e $\lambda \in (-1, 1)$ dados, se existirem matrizes simétricas $P_1(\xi) \in \mathbb{R}^{(d-1)n \times (d-1)n}$, $P_3(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, matrizes $P_2(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times (d-1)n}$, $F \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $X(\xi) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times q}$, $Y(\xi) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$, $Z_\ell \in \mathbb{R}^{r \times q}$, $\ell = 0, \dots, d-1$, e um escalar $\mu > 0$ tais que*

$$\text{Tr}(M(\xi)) < \mu^2 \quad (5.37)$$

$$\mathcal{P}(\xi) \succ 0 \quad (5.38)$$

$$\begin{bmatrix} M(\xi) & \star & \star \\ B_w(\xi) & \mathcal{F}(\xi) + \mathcal{F}(\xi)^T - P_3(\xi) & \star \\ D_{zw}(\xi) & 0 & I_m \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.39)$$

$$\mathcal{N}^T \mathcal{Q}(\xi) \mathcal{N} + \mathcal{X}(\xi) + \mathcal{X}(\xi)^T \prec 0 \quad (5.40)$$

sejam satisfeitas para todo $\xi \in \Xi_N$, sendo $\mathcal{Q}(\xi)$ e \mathcal{N} dados em (5.20) e

$$\mathcal{X}(\xi) = \begin{bmatrix} 0_{(d-1)n} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda B_u(\xi)\mathcal{Z} & \lambda(A(\xi)\mathcal{F}(\xi) + B_u(\xi)\mathbb{Z}_0) & -\lambda\mathcal{F}(\xi) & 0 \\ B_u(\xi)\mathcal{Z} & (A(\xi)\mathcal{F}(\xi) + B_u(\xi)\mathbb{Z}_0) & -\mathcal{F}(\xi) & 0 \\ D_u(\xi)\mathcal{Z} & (C_z(\xi)\mathcal{F}(\xi) + D_u(\xi)\mathbb{Z}_0) & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

então a lei de controle robusta por realimentação estática de saída com memória (5.27) estabiliza assintoticamente o sistema (5.1) com matrizes de ganho de realimentação dadas por $L_\ell = Z_\ell F^{-1}$, $\ell = 0, \dots, d-1$, e assegura $\|H_{wz}(\zeta, \xi)\|_2 < \mu$ para todo $\xi \in \Xi_N$.

Observe que nos Corolários 5.5 e 5.6 as matrizes $X(\xi)$ e $Y(\xi)$ não estão envolvidas na recuperação dos ganhos robustos L_ℓ , $\ell = 0, \dots, d-1$, do controlador; assim, pode-se impor que essas matrizes dependam do parâmetro incerto ξ , o que auxilia na redução do conservadorismo das condições e, conseqüentemente, na determinação de menores limitantes para as normas do sistema (5.3).

5.2.1 Exemplos numéricos ilustrativos

Exemplo 5.7. Este exemplo adaptado de Dong e Yang (2008) considera o sistema (5.26) descrito pelas seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.6 & 0 \\ 1.0 & 0.7 \end{bmatrix}, & B_{w,1} &= \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}, & B_{u,1} &= \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1.1 & -0.3 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, & B_{w,2} &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix}, & B_{u,2} &= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \\ C_{z,1} &= \begin{bmatrix} 1.0 & 0.3 \end{bmatrix}, & D_{zw,1} &= 0.5, & D_{u,1} &= 1.0, \\ C_{z,2} &= \begin{bmatrix} 1.2 & 0.5 \end{bmatrix}, & D_{zw,2} &= 0.6, & D_{u,2} &= 0.9, \\ C_y &= \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

O objetivo é determinar uma lei de controle robusta por realimentação estática de saída com memória que estabilize o sistema incerto (5.42) em malha fechada e que assegure um limitante γ para a norma \mathcal{H}_∞ . Como a matriz correspondente à saída medida, C_y , não está na forma $[I \ 0]$, a transformação (5.31) é aplicada ao sistema (5.42) fornecendo um sistema similar, no qual a matriz de saída encontra-se na forma desejada. Os resultados da aplicação das condições de síntese do Corolário 5.5 ao sistema transformado, bem como a complexidade numérica mensurada em termos do número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , são apresentados na Tabela 5.4. As variáveis polinomiais possuem grau $g = \{0, 1\}$ e o número de saídas passadas consideradas na lei de controle é $d = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Como pode ser visto, as condições de síntese propostas produzem controladores por realimentação estática de saída com memória cujo desempenho, em termos da

Tabela 5.4 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos para o sistema (5.42) utilizando controladores por realimentação estática de saída sintetizados por meio do Corolário 5.5. O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado.

d	$g = 0$			$g = 1$		
	γ	V	L	γ	V	L
1	1.1066	7	14	1.0373	12	22
2	1.0911	15	20	0.8960	27	32
3	1.0873	27	26	0.8714	50	42
4	1.0862	43	32	0.8645	81	52
5	1.0859	63	38	0.8644	120	62

norma \mathcal{H}_∞ , melhora conforme mais saídas são consideradas na lei de controle. O incremento no grau das variáveis polinomiais também auxilia na redução do conservadorismo e proporciona menores limitantes para a norma. Contudo, note que após determinado valor de d , os benefícios de se incrementar a memória na lei de controle são mitigados. Adicionalmente, para o sistema estudado, não há benefícios (redução dos limitantes) em escolher $g > 1$ para o grau das variáveis polinomiais.

O método proposto é comparado ao método de duas fases de Agulhari *et al.* (2010a), que requer que um controlador robusto por realimentação de estados seja determinado na primeira fase para que se possa sintetizar um controlador robusto por realimentação estática de saída na segunda, e é comparado, também, à técnica de Chang *et al.* (2015). Para o método de Agulhari *et al.* (2010a), o menor limitante determinado para a norma \mathcal{H}_∞ foi $\gamma = 1.0164$ por meio dos Teoremas 2 e 3 (fases 1 e 2, respectivamente) com variáveis polinomiais de grau $g = 1$. O número de variáveis escalares, V , e linhas de LMIs, L , para cada fase são 18 e 18 e 19 e 28, respectivamente. Por sua vez, a técnica de Chang *et al.* (2015) provê um limitante para norma \mathcal{H}_∞ de $\gamma = 1.0305$ com $\beta = \rho = 0$ e $V = 16$ e $L = 25$.

Escolhendo o controlador sintetizado com $g = 1$ e $d = 5$, o desempenho \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada (5.3) é calculado por meio de uma busca exaustiva no parâmetro incerto ξ e pelo cômputo de $\|H(\zeta, \xi)\|_\infty$ para cada valor do parâmetro. A norma \mathcal{H}_∞ de pior caso obtida por meio desse procedimento é $\|H(\zeta, \xi)\|_\infty = 0.8603$, a qual é menor (e muito próxima) ao limitante superior determinado $\gamma = 0.8644$. A Figura 5.4 ilustra o resultado obtido.

Exemplo 5.8. Este exemplo ilustra a influência do parâmetro λ na redução do conservadorismo das condições do Corolário 5.5. Desse modo, considere o seguinte sistema

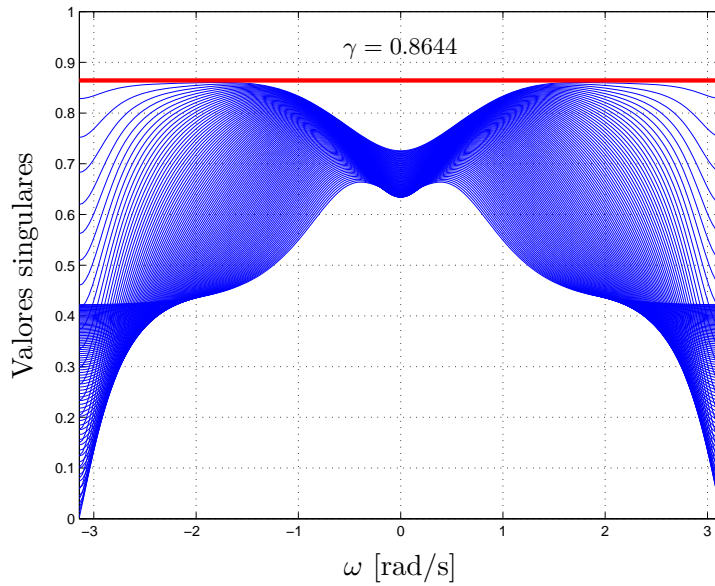


Figura 5.4 – Diagrama de valores singulares da matriz de transferência do sistema em malha fechada (5.3) para o Exemplo 5.7 utilizando um controlador robusto estático de saída com memória.

adaptado de Sadabadi e Karimi (2013):

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r_1 \\ 1 & 0 & -r_2 \\ 0 & 1 & -r_3 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} r_4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\
 C_z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad D_u = 0, \quad D_{zw} = 0.1, \\
 C_y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

com $r_1 = -0.1$, $r_2 = 0.5$, $r_3 = -1.2$ e $r_4 = 0.2$, sendo que todos os parâmetros apresentam incertezas de $\pm 20\%$ sobre o valor nominal. Uma representação politópica com 16 vértices é obtida avaliando os parâmetros nos correspondentes valores máximos e mínimos de cada faixa de incertezas.

Primeiramente, os Teoremas 1 e 3 de Agulhari *et al.* (2010a) e o Teorema 4 de Chang *et al.* (2015) (com $\beta = 1.875$, $\rho = 0.2$) são aplicados ao sistema (5.43), produzindo os limitantes para a norma \mathcal{H}_∞ de $\gamma = 0.3012$ e de $\gamma = 0.2999$, respectivamente. Então, por meio do Corolário 5.5, controladores robustos por realimentação estática de saída são sintetizados com $d = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e os resultados obtidos são apresentados na Tabela 5.5. Particularmente, não há melhorias sobre os limitantes para a norma \mathcal{H}_∞ quando variáveis polinomiais de grau $g > 1$ são utilizados, assim, apenas o caso para $g = 1$ é reportado.

Note que, neste caso, o método proposto com $\lambda = 0$ não fornece limitantes para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema tão baixos quanto os limitantes obtidos pelo método de Agulhari

Tabela 5.5 – Limitantes da norma \mathcal{H}_∞ obtidos para o sistema (5.43) utilizando controladores por realimentação estática de saída sintetizados por meio do Corolário 5.5. O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também fornecido.

d	γ	V	L
1	<i>Infactível</i>	—	—
2	<i>Infactível</i>	—	—
3	0.4728	820	2048
4	0.4570	1349	2504
5	0.4239	2022	2960

et al. (2010a) ou de Chang *et al.* (2015). Além disso, um controlador robusto por realimentação estática de saída padrão ($d = 1$) e um controlador com memória que utiliza apenas uma saída anterior ($d = 2$) não puderam ser determinados por meio do Corolário 5.5. Almejando reduzir o conservadorismo das condições propostas e prover melhores limitantes para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada (5.3), uma busca escalar sobre o parâmetro λ utilizando 19 valores igualmente espaçados no intervalo $[-0.9, 0.9]$ é realizada, considerando que o grau das variáveis polinomiais é $g = 1$. O resultado desse procedimento é ilustrado na Figura 5.5, sendo que os casos $d = 1$, $d = 2$ e $d = 5$ são representados pela linha azul ponto-tracejada, pela linha vermelha tracejada e pela linha preta contínua, respectivamente. Nenhuma solução factível foi encontrada para valores de $\lambda > -0.1$, nos primeiros dois casos, e para $\lambda > 0.1$, no último caso.

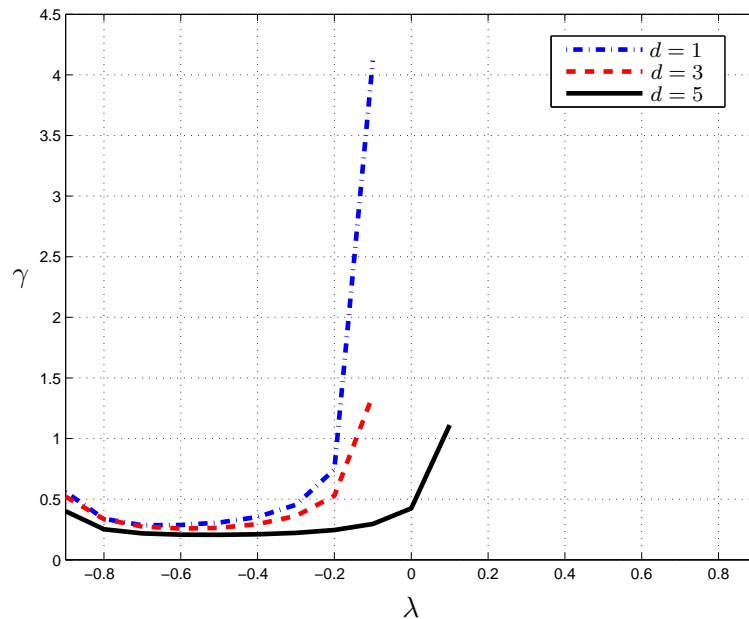


Figura 5.5 – Comportamento dos limitantes da norma \mathcal{H}_∞ para o sistema do Exemplo 5.8 em função do parâmetro escalar λ .

Pode-se notar que, apesar de que nenhuma solução factível foi encontrada para $\lambda = 0$ nos casos $d = 1$ e $d = 2$, a realização de uma busca escalar sobre o parâmetro possibilitou determinar soluções factíveis no intervalo $[-0.9, -0.1]$. Outrossim, como reportado na Tabela 5.6, os melhores (menores) limitantes obtidos para a norma \mathcal{H}_∞ são $\gamma = 0.2848$ e $\gamma = 0.2569$ para $d = 1$ e $d = 2$, respectivamente, os quais são menores do que os limitantes obtidos pelos métodos de (AGULHARI *et al.*, 2010a) e de (CHANG *et al.*, 2015). Adicionalmente, o limitante obtido para $d = 5$ ($\gamma = 0.2057$) é, aproximadamente, 51.4% menor do que o limitante apresentado na Tabela 5.5 ($\lambda = 0$) e, além disso, esse limitante é praticamente 31.4% menor do que o limitante determinado pelo método de Chang *et al.* (2015).

Tabela 5.6 – Melhores limitantes para a norma \mathcal{H}_∞ obtidos por meio de uma busca escalar sobre o parâmetro γ nas condições do Corolário 5.5 para o sistema do Exemplo 5.8.

d	λ	γ
1	-0.7	0.2848
2	-0.6	0.2569
5	-0.5	0.2057

Considerando o controlador robusto por realimentação estática de saída sintetizado por meio do Corolário 5.5 com $d = 5$, $g = 2$ e $\lambda = -0.5$, foi realizada uma simulação temporal do sistema em malha fechada (5.3) (com $r_1 = -0.12$, $r_2 = 0.4$, $r_3 = -1.44$ e $r_4 = 0.16$) utilizando o seguinte sinal de ruído de entrada:

$$w(k) = 5 e^{-0.025k} \cos(0.1421k).$$

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 5.6. Nota-se que o controlador com memória projetado apresenta um bom desempenho, mantendo o sinal de controle dentro de níveis aceitáveis e assegurando a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Além disso, o valor da norma \mathcal{H}_∞ de pior caso computado por meio de (2.23) é $\|H(\zeta, \xi)\|_\infty = 0.1973$, o qual é menor do que o limitante obtido anteriormente de $\gamma = 0.2057$, corroborando a validade dos resultados obtidos pela metodologia proposta.

Exemplo 5.9. Considere o sistema incerto discreto LTI apresentado em Chang *et al.*

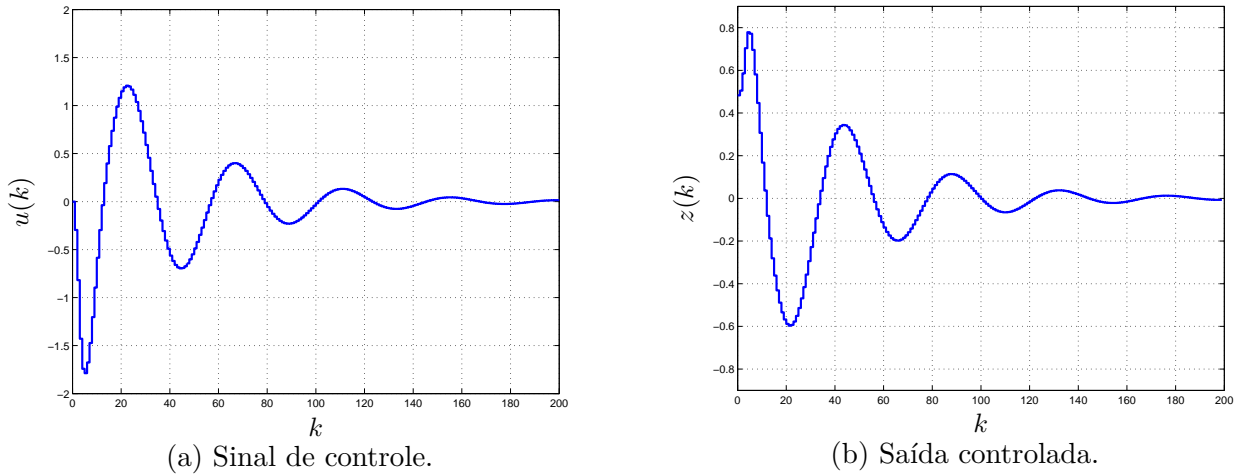


Figura 5.6 – Resposta temporal do sistema (5.43) utilizando um controlador robusto estático de saída com memória sintetizado com $d = 5$, $g = 2$ e $\lambda = -0.5$.

(2015), descrito pelas matrizes:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -0.2228 & 1.2665 & 0.0210 & -0.1407 & -0.1431 \\ -0.3077 & 0.4837 & -0.1988 & 0.8809 & -0.6714 \\ -0.5078 & 0.0185 & -0.5140 & -0.3025 & 0.0583 \\ -0.2847 & 0.3645 & 0.0138 & 0.3732 & 0.1503 \\ 0.3795 & 0.8853 & 0.3176 & 1.300 & -0.6100 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} -0.0463 & 1.0000 & 0.4761 & 0.0006 & -0.1967 \\ 0.1390 & 0.2433 & 0.5270 & -0.2392 & -0.4557 \\ 0.2463 & 1.0720 & -0.3483 & 0.0574 & 0.2562 \\ 0.4315 & 0.0915 & -0.1487 & -0.0171 & -0.3573 \\ 0.2005 & -0.2659 & -1.4680 & 0.5854 & 1.0000 \end{bmatrix}, \\
 B_{w,1} &= \begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.85 \\ -0.82 \\ -0.0623 \\ 1.12 \end{bmatrix}, \quad B_{w,2} = \begin{bmatrix} -0.26 \\ 0.688 \\ -1.1511 \\ -1.04 \\ -0.14 \end{bmatrix}, \quad B_{u,1} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ -0.46 \\ -0.1 \\ 0.23 \\ -0.6543 \end{bmatrix}, \quad B_{u,2} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ -1.06 \\ -0.59 \\ 0.0852 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \\
 C_{z,1} &= [-0.088 \quad -0.312 \quad 0.1733 \quad 1.167 \quad 0.55], \quad D_{zw,1} = 0.84, \quad D_{u,1} = 0.6, \\
 C_{z,2} &= [-0.89 \quad -0.0812 \quad 0.73 \quad -0.43 \quad -0.473], \quad D_{zw,2} = 0.239, \quad D_{u,2} = -1.14, \\
 C_y &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2].
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

O objetivo é estabilizar o sistema incerto (5.44) por meio de uma lei de controle robusta por realimentação estática de saída que utilize memória. Note que, assim como no Exemplo 5.7, a matriz de saída C_y não está na forma $[I \ 0]$. Portanto, aplicando-se a transformação (5.31) ao sistema, obtém-se um sistema similar no qual a matriz de saída

encontra-se na forma de interesse. Os resultados obtidos pela aplicação do Corolário 5.6 ao sistema transformado são apresentados na Tabela 5.7 bem como as complexidades numéricas associadas, que são mensuradas em termos do número de variáveis de decisão, V , e do número de linhas de LMIs, L . Os graus adotados para as variáveis de decisão são $g = \{1, 2\}$ e o número de saídas passadas considerado é $d = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Tabela 5.7 – Limitantes da norma \mathcal{H}_2 obtidos para o sistema (5.44) utilizando controladores por realimentação estática de saída sintetizados por meio do Corolário 5.6. O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado.

d	$g = 1$			$g = 2$		
	μ	V	L	μ	V	L
1	3.3030	74	59	1.8970	110	83
2	2.4350	155	84	1.8554	231	118
3	2.3705	286	109	1.8372	427	153
4	2.3420	467	134	1.8337	698	188
5	2.3232	698	159	1.8294	1044	223

O mesmo comportamento observado no caso da norma \mathcal{H}_∞ ocorre neste exemplo, ou seja, o incremento do número de saídas passadas na lei de controle contribui para a redução dos limitantes da norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada, porém, após um determinado valor de d , os benefícios de se incrementar a memória na lei de controle são atenuados. De maneira similar, o incremento no grau de dependência das variáveis polinomiais também auxilia na obtenção de limitantes menos conservadores para a norma do sistema. Compare tais resultados com os limitantes obtidos pelo método de Moreira *et al.* (2011), que utiliza um procedimento de duas fases, e pelo método de de Oliveira *et al.* (2002), que utiliza uma lei de controle sem memória. Para o primeiro método, o menor limitante computado foi $\mu = 6.2389$, ao passo que o segundo método proveu um limitante $\mu = 4.1759$. Da comparação, pode-se dizer que o método proposto neste artigo é menos conservador e, também, mais simples, pois não requer uma segunda fase (isto é, um novo conjunto de LMIs para ser testado) como em Moreira *et al.* (2011).

Uma busca exaustiva no parâmetro incerto ξ é realizada para se determinar o valor da norma \mathcal{H}_2 de pior caso para o sistema em malha fechada (5.3), utilizando o controlador projetado com $g = 2$ e $d = 5$. Para cada valor do parâmetro ξ o custo $\|H(\zeta, \xi)\|_2$ é calculado e, por meio desse procedimento, a norma de pior caso obtida é $\|H(\zeta, \xi)\|_2 = 1.4384$, a qual se encontra abaixo do limitante previamente determinado $\mu = 1.8294$. Para o sistema obtido com o valor do parâmetro ξ de pior caso, é realizada uma simulação temporal para verificar o sinal de controle $u(k)$ aplicado sobre o sistema, bem como a saída de interesse $z(k)$ utilizando como entrada um impulso unitário ($w(k) = \delta(k)$),

sendo os resultados apresentados na Figura 5.7. O comportamento dos sinais apresentados indica que a estratégia com memória produz sinais bem comportados, isto é, sem grandes valores de amplitude, possibilitando, assim, a implementação em dispositivos de lógica reprogramável.

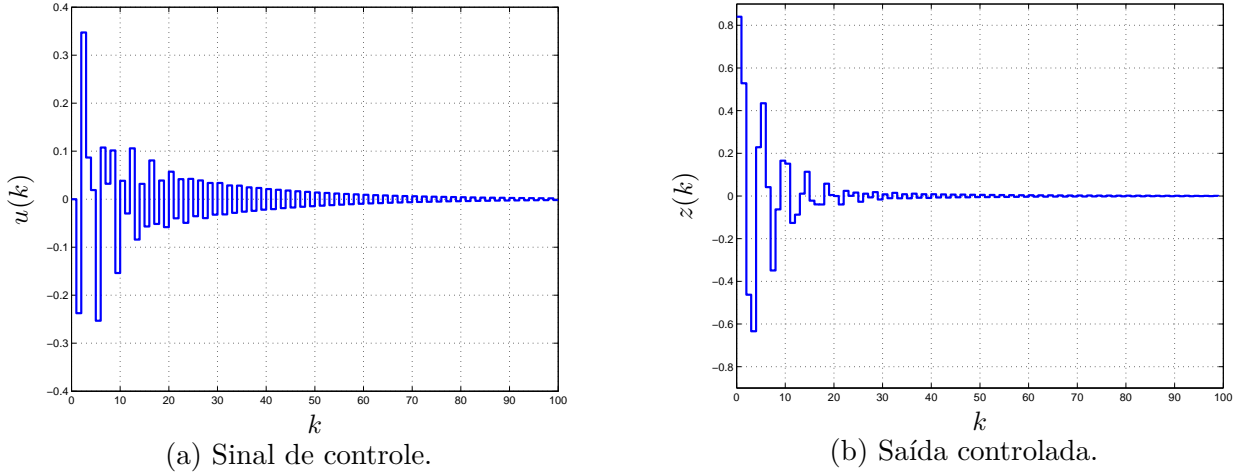


Figura 5.7 – Resposta temporal do sistema (5.44) utilizando um controlador robusto estático de saída com memória sintetizado com $d = 5$ e $g = 2$.

Exemplo 5.10. O intuito deste exemplo é ilustrar a influência do parâmetro λ na redução do conservadorismo das condições do Corolário 5.6. Considere para tanto o seguinte sistema adaptado de Lee *et al.* (2015):

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.8189 & 0.0863 & 0.0900 & 2.0813 \\ 0.2524 & 0.0033 & 0.0313 & 0.2004 \\ -0.0545 & 0.0102 & 0.7901 & -0.2580 \\ -0.1918 & -0.1034 & 0.1602 & 0.8604 \end{bmatrix}, & B_{w,i} &= \begin{bmatrix} 0.0953 & 0.9394 \\ 0.0145 & 0 \\ 0.0862 & 0.9193 \\ -0.0011 & 0.9812 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0.1189 & 0.0863 & 0.0900 & 0.0813 \\ 0.2524 & 0.0033 & 0.0313 & -0.2004 \\ -0.0500 & 0.0102 & -0.7901 & -0.2580 \\ -0.1918 & -0.1034 & -0.1602 & 0.8604 \end{bmatrix}, & B_{u,i} &= \begin{bmatrix} 0.0045 & 1.0044 \\ 0.1001 & 0.0100 \\ 0.0003 & -0.0136 \\ -0.0051 & 0.0936 \end{bmatrix}, & (5.45) \\
 D_{zw,i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, & D_{u,i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \\
 C_y &= [0 \ 1 \ 0 \ 1], & C_{z,i} &= I, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Aplicando os métodos de Moreira *et al.* (2011) e de de Oliveira *et al.* (2002) ao sistema (5.45) obtêm-se os limitantes $\mu = 5.2543$ e $\mu = 8.1968$, respectivamente, para a norma \mathcal{H}_2 . Em seguida, Corolário 5.6 é aplicado ao sistema para sintetizar controladores robustos por realimentação estática de saída com memória, assumindo $g = \{1, 2\}$ e $d = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ nas condições do corolários, e os resultados são apresentados na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 – Limitantes da norma \mathcal{H}_2 obtidos para o sistema (5.45) utilizando controladores por realimentação estática de saída sintetizados por meio do Corolário 5.6. O número de variáveis escalares, V , e de linhas de LMIs, L , é também apresentado.

d	$g = 1$			$g = 2$		
	μ	V	L	μ	V	L
1	9.2721	53	66	9.2586	78	93
2	7.8132	107	86	7.8120	158	121
3	6.3410	193	106	6.3356	286	149
4	5.8406	311	126	5.7856	462	177
5	5.6609	461	146	5.5472	686	205

Como observado no exemplo anterior, os limitantes da norma \mathcal{H}_2 são reduzidos conforme mais medições são consideradas na lei de controle. Além disso, o aumento do grau g das variáveis polinomiais produziu uma sutil melhoria sobre os limitantes computados, com reduções mais pronunciadas para maiores valores de d . Note também que, utilizando apenas uma memória na lei de controle ($d = 2$), o limitante da norma é melhor do que o obtido pelo método de de Oliveira *et al.* (2002). Contudo, não foi possível obter valores menores do que o limitante determinado pelo método de duas fases de Moreira *et al.* (2011). Dessa maneira, com o intuito de reduzir o conservadorismo das condições do Corolário 5.6 e determinar melhores limitantes para a norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada (5.3), uma busca escalar no parâmetro λ é realizada utilizando 19 valores igualmente espaçados no intervalo $[-0.9, 0.9]$ e considerando que as variáveis polinomiais possuem grau $g = 2$. Os resultados para os casos $d = 1$, $d = 3$ e $d = 5$ são apresentados na Figura 5.8, sendo representados, respectivamente, pelas linhas azul ponto-tracejada, vermelha tracejada e preta contínua.

A Figura 5.8 indica que os menores valores para os limitantes da norma \mathcal{H}_2 , em cada caso, são obtidos para o valor $\lambda = -0.2$. De fato, o menor valor obtido para o limitante da norma foi $\mu = 5.4152$ com $d = 5$. Apesar de tal limitante não ser melhor do que o limitante determinado pelo método de Moreira *et al.* (2011), a busca escalar mostra que, para um valor apropriado de λ , é possível obter limitantes menos conservadores com o mesmo grau de complexidade da condição sem o parâmetro λ .

5.3 Conclusões

Uma metodologia para o projeto de controladores robustos por realimentação de estados ou realimentação estática de saída com memória foi alvo de investigação neste capítulo. As leis de controle propostas utilizam estados ou saídas passadas do sistema

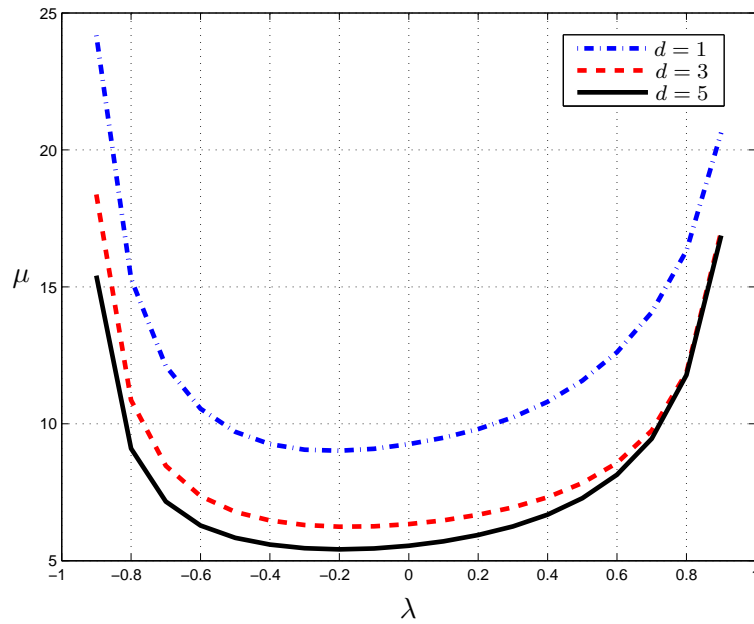


Figura 5.8 – Comportamento dos limitantes da norma \mathcal{H}_2 para o sistema do Exemplo 5.10 em função do parâmetro λ .

para compor o sinal de realimentação, agregando dinâmica extra ao sistema obtido em malha fechada. As condições de síntese são dadas sob a forma de LMIs robustas, das quais deriva-se um conjunto finito de LMIs após a imposição de estrutura às matrizes de Lyapunov e às variáveis de folga polinomialmente dependentes de parâmetros (tarefa realizada com a ajuda do pacote computacional ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2012b) nesta tese). Além disso, um parâmetro escalar é incorporado às condições propostas com o intuito de prover um grau de liberdade extra para as condições e, possivelmente, reduzir o conservadorismo para uma escolha apropriada. Exemplos numéricos ilustrativos revelam que menores limitantes para as normas \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 são obtidos com o aumento do número de informações passadas utilizadas na lei de controle e, em menor grau, realizando buscas escalares sobre o parâmetro incorporado às condições. Finalmente, mostrou-se que a aplicação de condições da literatura para a síntese de controladores robustos com memória que não exploram adequadamente a estrutura do sistema aumentado não proporcionam melhores resultados frente aos obtidos para uma lei de controle sem memória.

Considerações finais

Esta tese abordou os problemas de projeto de filtros e controladores robustos com desempenho garantido \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos incertos LTI por meio do enriquecimento da dinâmica do sistema. As condições de síntese utilizam-se de um sistema auxiliar aumentado e são formuladas como LMIs dependentes de parâmetros. As principais contribuições deste trabalho são enunciadas a seguir.

Como primeira contribuição, para o problema de filtragem robusta, foi proposto um filtro cuja ordem é maior do que a ordem do sistema sendo filtrado, denominado filtro de ordem não mínima. Em linhas gerais, a metodologia para a síntese desse tipo de filtros consiste em construir, a partir do sistema original, um sistema auxiliar aumentado, não observável, com matrizes constantes escolhidas pelo projetista, e sintetizar um filtro de ordem completa para esse novo sistema. As condições de síntese com custo garantido \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são obtidas a partir do Lema de Finsler, o qual introduz variáveis de folga adicionais às condições de projeto, manipuladas por uma estratégia de projeção que permite aproveitar a estrutura particular do sistema aumentado, e são apresentadas sob a forma de LMIs robustas. Vale ressaltar que sem esse mecanismo de projeção, a simples aplicação de condições de síntese de filtros robustos existentes na literatura no sistema auxiliar aumentado não consegue melhores resultados do que os obtidos com filtros de ordem completa. Matrizes de Lyapunov e variáveis de folga polinomialmente dependentes de parâmetros foram adotadas para se obter, por meio de relaxações LMIs, um conjunto finito de LMIs programável (tarefa realizada com o auxílio do pacote computacional ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2012b)). Experimentos numéricos demonstraram que o aumento da ordem do sistema auxiliar e, conseqüentemente, do filtro robusto sintetizado proporciona reduções sobre os limitantes das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , sendo, além disso, possível uma maior redução com o aumento do grau das variáveis polinomialmente dependentes de parâmetros. Outrossim, observou-se que a aplicação de condições da literatura para a síntese de filtros robustos de ordem completa para o sistema auxiliar aumentado não proporciona limitantes menos conservadores do que os obtidos para o sistema original.

A segunda contribuição dá-se por meio da particularização da estrutura do filtro de ordem não mínima proposta. Introduziram-se, então, os filtros com memória que utilizam ou saídas passadas do sistema, ou estados passados do filtro ou ambos em sua estrutura, e também os *smoothers* com atraso fixo. Especializações do sistema auxiliar aumentado foram apresentadas e as condições de síntese foram adaptadas para englobar as especificidades de cada caso.

Por fim, a terceira contribuição se deu no âmbito de projeto de controladores robustos com desempenho garantido \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ que utilizam memória para formar a lei

de controle. Nesse sentido, foram propostas leis de controle por realimentação estática de estados e de saída que utilizam, respectivamente, estados ou saídas anteriores do sistema. A partir da definição de um sistema auxiliar aumentado, condições de síntese com custo garantido \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ foram propostas, sob a forma de LMIs robustas acrescidas de um parâmetro escalar, baseadas no Lema da Projeção. Assim como no caso do filtro, as condições propostas aproveitam-se da estrutura particular do sistema auxiliar aumentado para produzir melhores resultados do que os obtidos com realimentações que se utilizam apenas do estado ou da saída no instante atual. De forma similar ao problema de filtragem, adotaram-se matrizes de Lyapunov e variáveis de folga polinomialmente dependentes de parâmetros para derivação de um conjunto finito programável de LMIs por meio do *parser* ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2012b). Além disso, o parâmetro escalar adicionado às condições propostas introduziu um grau extra de liberdade que pode ser explorado para diminuição do conservadorismo das condições. Os experimentos numéricos realizados indicam que a utilização de instantes passados nas leis de controle por realimentação estática de estados e de saída produzem limitantes gradativamente mais precisos para as normas do sistema em malha fechada. Os experimentos também revelaram que a simples aplicação das abordagens presentes na literatura no sistema auxiliar aumentado não produz melhores limitantes para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ frente aos obtidos por uma lei de controle que utiliza somente o instante atual. Ademais, buscas lineares sobre o parâmetro escalar introduzido às condições proporcionaram sutis reduções dos limitantes previamente calculados, ao preço de um aumento da complexidade computacional associado ao procedimento.

Em todos os casos, as condições de síntese propostas englobam outras disponíveis na literatura; assim, o valor dos limitantes para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ determinados pelos métodos apresentados nesta tese não são mais conservadores do que os limitantes computados por outros métodos contidos nos propostos.

Perspectivas futuras

Como possíveis tópicos para pesquisas futuras sugerem-se:

1. Desenvolver um procedimento para a escolha das matrizes Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 que minimizem os custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ no problema de filtragem com filtros robustos de ordem não mínima apresentado no Capítulo 3.
2. Estender as metodologias propostas para a síntese de filtros de ordem não mínima e com memória, dos Capítulos 3 e 4, para tratar o problema de estimação de parâmetros.
3. Estender as condições de síntese de controladores apresentadas no Capítulo 5 para tratar sistemas discretos com parâmetros variantes no tempo.

4. Um problema interessante e desafiador é estender a metodologia de síntese de filtros não mínimos para o caso de controladores dinâmicos de saída. O principal obstáculo advém do processo de linearização das variáveis para descrição do problema em uma forma convexa.
5. Os métodos desenvolvidos nesta tese podem ser estendidos para abordar outras classes de sistemas, como sistemas híbridos e sistemas controlados por rede.
6. A última sugestão para projetos futuros é, na verdade, tentar responder a seguinte questão: é possível estender a metodologia proposta para tratar sistemas contínuos? No âmbito de sistemas discretos, estados ou saídas passadas foram utilizados para compor o vetor de estados do sistema auxiliar aumentado. A correspondência direta, no caso de sistemas contínuos, seria armazenar a derivada dos estados ou saídas; todavia, a influência de perturbações externas é amplificada conforme a ordem da derivada aumenta, chegando a um ponto no qual a informação poderia (ou deveria) ser descartada por ser excessivamente ruidosa.

Trabalhos produzidos como resultados desta tese

Capítulo 3

- FREZZATTO, L.; DE OLIVEIRA, M. C.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust non-minimal order filter and smoother design for discrete-time uncertain systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, March 2017, pp. 661–678.

Capítulo 4

- FREZZATTO, L.; LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_∞ memory filters for uncertain discrete-time linear systems. In *Proceedings of the 2015 American Control Conference*, July 1–3, Chicago, IL, USA, pp. 4004–4009, 2015.
- FREZZATTO, L.; LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ memory filter design for linear uncertain discrete-time delay systems. *Signal Processing*, vol. 117, December 2015, pp. 322–332.
- FREZZATTO, L.; DE OLIVEIRA, M. C.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_∞ Filtering with Auxiliary Past Output Measurements. In *Proceedings of the 2016 American Control Conference*, July 6–8, Boston, MA, USA, pp. 1900–1905, 2016.

- FREZZATTO, L.; DE OLIVEIRA, M. C.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_∞ filter design with past output measurements for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, vol. 71, September 2016, pp. 151–158.
- FREZZATTO, L.; DE OLIVEIRA, M. C.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_2 Filtering for Discrete-time Uncertain Systems with Auxiliary Past Output Measurements. In *Proceedings of the 2016 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design (CACSD)*, September 19–22, Buenos Aires, Argentina, pp. 1048–1053, 2016.

Capítulo 5

- FREZZATTO, L.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Realimentação de Estados Robusta \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com Memória para Sistemas Discretos Politópicos, Em *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2014*, 20–24 Setembro, Belo Horizonte, MG, Brasil, pp. 1104–1111, 2014.
- FREZZATTO, L.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Projeto de controladores \mathcal{H}_2 por realimentação estática de saída com memória para sistemas incertos discretos lineares e invariantes no tempo. In *Anais do XIII Congresso Brasileiro de Automação Inteligente*, 1–4 Outubro, Porto Alegre, RS, Brasil, 2017.

Trabalhos produzidos em temas correlatos

- FREZZATTO, L.; LACERDA, M. J.; PERES, P. L. D., OLIVEIRA, R. C. L. F. Filtros nebulosos \mathcal{H}_∞ multi-polinomiais com memória para sistemas nebulosos de Takagi–Sugeno discretos no tempo, Em *Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2016*, 3–7 Outubro, Vitória, ES, Brasil, pp. 1002–1007, 2016.
- FREZZATTO, L.; DE OLIVEIRA, M. C.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Gain-scheduled \mathcal{H}_2 non-minimal order filtering design for linear parameter-varying discrete-time systems. In *Proceedings of the 20th IFAC World Congress*, pp. 11889–11894, July 9–14, Toulouse, France, 2017.
- ROMÃO, L. B. R. R.; FREZZATTO, L.; DE OLIVEIRA, M. C.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Non-minimal order low-frequency \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain discrete-time systems. In *Proceedings of the 20th IFAC World Congress*, pp. 6661–6666, July 9–14, Toulouse, France, 2017.
- FREZZATTO, L.; LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ fuzzy filters with memory for Takagi–Sugeno discrete-time systems. *Fuzzy Sets and Systems*. Submitted.

Referências

- ABOU-KANDIL, H.; FREILING, G.; IONESCU, V.; JANK, G. *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*. 1st. ed. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag, 2003.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_∞ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. In: *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. Baltimore, MD, USA: [s.n.], 2010. p. 4677–4682.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Static output feedback control of polytopic systems using polynomial Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*. Atlanta, GA, USA: [s.n.], 2010. p. 6894–6901.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. LMI relaxations for reduced-order robust \mathcal{H}_∞ control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 6, p. 1532–1537, June 2012.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil: [s.n.], 2012. p. 2298–2305.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. *Optimal Filtering*. Englewood, NJ: Prentice-Hall, 1979.
- ARZELIER, D.; PEAUCELLE, D.; SALHI, S. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: Improving the guaranteed performance bound. In: *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2003)*. Milan, Italy: [s.n.], 2003. p. 425–430.
- BARBOSA, K. A.; DE SOUZA, C. E.; TROFINO, A. Robust \mathcal{H}_2 filtering for uncertain linear systems: LMI based methods with parametric Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, v. 54, n. 3, p. 251–262, March 2005.
- BARMISH, B. R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 46, n. 4, p. 399–408, August 1985.
- BERTSEKAS, D. P.; NEDIČ, A.; OZDAGLAR, A. E. *Convex Analysis and Optimization*. Belmont, MA, USA: Athena Scientific, 2003.
- BITTANTI, S.; COLANERI, P. Invariant representations of discrete-time periodic systems. *Automatica*, v. 36, n. 12, p. 1777–1793, December 2000.
- BITTANTI, S.; COLANERI, P. *Periodic Systems - Filtering and Control*. 1st. ed. London, UK: Springer-Verlag, 2009. (Communications and Control Engineering).
- BOLZERN, P.; COLANERI, P.; DE NICOLAO, G. On discrete-time \mathcal{H}_∞ fixed-lag smoothing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 52, n. 1, p. 132–141, January 2004.

- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- CHANG, X.-H.; PARK, J. H.; ZHOU, J. Robust static output feedback \mathcal{H}_∞ control design for linear systems with polytopic uncertainties. *Systems & Control Letters*, v. 85, p. 23–32, August 2015.
- CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. 3rd. ed. New York, NY, USA: Oxford University Press, 1999.
- CHESI, G.; GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. Homogeneous Lyapunov functions for systems with structured uncertainties. *Automatica*, v. 39, n. 6, p. 1027–1035, June 2003.
- DASGUPTA, S.; CHOCKALINGAM, G.; ANDERSON, B. D. O.; FU, M. Lyapunov functions for uncertain systems with applications to the stability of time varying systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications*, v. 41, n. 2, p. 93–106, February 1994.
- DE OLIVEIRA, M. C. *Controle de Sistemas Lineares baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*. Tese (PhD Thesis) — University of Campinas, Campinas, SP, Brazil, May 1999.
- DE OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, v. 37, n. 4, p. 261–265, July 1999.
- DE OLIVEIRA, M. C.; GEROMEL, J. C. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering design subject to implementation uncertainty. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 44, n. 2, p. 515–530, 2005.
- DE OLIVEIRA, M. C.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. An LMI optimization approach to multiobjective controller design for discrete-time systems. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Phoenix, AZ, USA: [s.n.], 1999. v. 4, p. 3611–3616.
- DE OLIVEIRA, M. C.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Extended \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, v. 75, n. 9, p. 666–679, June 2002.
- DE OLIVEIRA, M. C.; GEROMEL, J. C.; HSU, L. LMI characterization of structural and robust stability: The discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 296, n. 1–3, p. 27–38, June 1999.
- DE OLIVEIRA, M. C.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_∞ performance using lifted polynomial parameter-dependent Lyapunov functions. *International Journal of Control*, v. 81, n. 7, p. 1089–1101, July 2008.
- DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Reza Moheimani, S. O. (Ed.). *Perspectives in Robust Control*. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Science, v. 268). p. 241–257.

- DE SOUZA, C. E.; SHAKED, U.; FU, M. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 43, n. 3, p. 709–719, 1995.
- DE SOUZA, C. E.; TROFINO, A. A linear matrix inequality approach to the design of robust \mathcal{H}_2 filters. In: EL GHAOUI, L.; NICULESCU, S. I. (Ed.). *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Philadelphia, PA: SIAM, 2000, (Advances in Design and Control). p. 175–185.
- DONG, J.; YANG, G.-H. Robust static output feedback control for linear discrete-time systems with time-varying uncertainties. *Systems & Control Letters*, v. 57, n. 2, p. 123–131, February 2008.
- DUAN, Z. S.; ZHANG, J. X.; ZHANG, C. S.; MOSCA, E. Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, v. 42, n. 11, p. 1919–1926, November 2006.
- EBIHARA, Y.; HAGIWARA, T. New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis. *Automatica*, v. 40, n. 11, p. 2003–2009, November 2004.
- EBIHARA, Y.; KUBOYAMA, Y.; HAGIWARA, T.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. Further results on periodically time-varying memory state-feedback controller synthesis for discrete-time linear systems. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control — 28th Chinese Control Conference*. Shanghai, P. R. China: [s.n.], 2009. p. 702–707.
- EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. Periodically time-varying dynamical controller synthesis for polytopic-type uncertain discrete-time linear systems. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico: [s.n.], 2008. p. 5438–5443.
- EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. Periodically time-varying memory state-feedback controller synthesis for discrete-time linear systems. *Automatica*, v. 47, p. 14–25, January 2011.
- FRANCIS, B. A. *A Course in \mathcal{H}_∞ Control Theory*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1987. (Lectures Notes in Control and Information Sciences, v. 88).
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback control of dynamic systems*. 6th. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2009.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 4, n. 4, p. 421–448, July-August 1994.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P.; CHILALI, M. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 3, p. 436–442, March 1996.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI Control Toolbox User's Guide*. Natick, MA: The Math Works, 1995.

- GAO, H.; LI, X. *Robust Filtering for Uncertain Systems: A Parameter-Dependent Approach*. 1st. ed. Heidelberg, Germany: Springer International Publishing, 2014. (Communications and Control Engineering).
- GAO, H.; MENG, X.; CHEN, T. A new design of robust H_2 filters for uncertain systems. *Systems & Control Letters*, v. 57, n. 7, p. 585–593, July 2008.
- GEROMEL, J. C. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, n. 1, p. 168–175, January 1999.
- GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J.; GARCIA, G.; DE OLIVEIRA, M. C. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for discrete-time linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 38, n. 5, p. 1353–1368, May 2000.
- GEROMEL, J. C.; DE OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 41, n. 3, p. 700–711, 2002.
- GEROMEL, J. C.; DE OLIVEIRA, M. C.; HSU, L. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 285, n. 1–3, p. 69–80, December 1998.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. \mathcal{H}_2 robust filter design with performance certificate via convex programming. *Automatica*, v. 44, n. 4, p. 937–948, April 2008.
- GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D.; SOUZA, S. R. Convex analysis of output feedback control problems: Robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 7, p. 997–1003, July 1996.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge, MA, USA: Cambridge University Press, 1991.
- IWASAKI, T.; SKELTON, R. E. All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state-space formulas. *Automatica*, v. 30, n. 8, p. 1307–1317, August 1994.
- KAILATH, T. *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1980.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control — Transactions of ASME*, v. 82, p. 35–45, 1960.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Second. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
- KUČERA, V. A review of the matrix Riccati equation. *Kybernetika*, v. 9, n. 1, p. 42–61, 1973.
- LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices. *Signal Processing*, v. 91, n. 5, p. 1115–1122, May 2011.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H. Extended robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for discrete time-invariant linear systems with polytopic uncertainty. *Circuits Systems and Signal Processing*, v. 33, n. 2, p. 393–419, February 2014.

- LEE, D. H.; JOO, Y. H.; KIM, S. K. FIR-type robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control of discrete linear time-invariant polytopic systems via memory state-feedback control laws. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, v. 13, n. 5, p. 1047–1056, October 2015.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H.; TAK, M. H. Periodically time-varying \mathcal{H}_∞ memory filter design for discrete-time LTI systems with polytopic uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 59, n. 5, p. 1380–1385, May 2014.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H.; TAK, M. H. Periodically time-varying memory static output feedback control design for discrete-time LTI systems. *Automatica*, v. 52, p. 47–54, February 2015.
- LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 48, n. 3, p. 500–504, March 2003.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289.
- LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992.
- MEHDI, D.; BOUKAS, E. K.; BACHELIER, O. Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, v. 21, n. 1, p. 1–13, March 2004.
- MORAIS, C. F.; BRAGA, M. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust state feedback control for discrete-time linear systems via LMIs with a scalar parameter. In: *Proceedings of the 2013 American Control Conference*. Washington, DC, USA: [s.n.], 2013. p. 3876–3881.
- MOREIRA, H. R.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_2 static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems. *Optimal Control Applications and Methods*, v. 32, n. 1, p. 1–13, January/February 2011.
- MOSEK ApS. *The MOSEK optimization software*. [S.l.], 2016. <<http://www.mosek.com>>.
- OGATA, K. *Modern Control Engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1990.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; DE OLIVEIRA, M. C.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability analysis of time-varying systems in polytopic domains. In: *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. New York, NY, USA: [s.n.], 2007. p. 6079–6084.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; DE OLIVEIRA, M. C.; PERES, P. L. D. Convergent LMI relaxations for robust analysis of uncertain linear systems using lifted polynomial parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, v. 57, n. 8, p. 680–689, August 2008.

- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, v. 55, n. 1, p. 52–61, January 2006.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, July 2007.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. A convex optimization procedure to compute \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms for uncertain linear systems in polytopic domains. *Optimal Control Applications and Methods*, v. 29, n. 4, p. 295–312, July/August 2008.
- PALHARES, R. M.; DE SOUZA, C. E.; PERES, P. L. D. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 49, n. 8, p. 1096–1703, August 2001.
- PALHARES, R. M.; PERES, P. L. D. Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance — an LMI approach. *Automatica*, v. 36, n. 6, p. 851–858, June 2000.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D.; BACHELIER, O.; BERNUSSOU, J. A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, v. 40, n. 1, p. 21–30, May 2000.
- RAMOS, D. C. W.; PERES, P. L. D. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, v. 43, n. 5, p. 371–378, August 2001.
- RAMOS, D. C. W.; PERES, P. L. D. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 4, p. 675–678, April 2002.
- SADABADI, M. S.; KARIMI, A. An LMI formulation of fixed-order \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 controller design for discrete-time systems with polytopic uncertainty. In: *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 2453–2458.
- SCHERER, C. W. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 27, n. 2, p. 365–395, June 2005.
- SHAKED, U.; DE SOUZA, C. E. Robust minimum variance filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 43, n. 11, p. 2474–2483, November 1995.
- SHAKED, U.; XIE, L.; SOH, Y. C. New approaches to robust minimum variance filter design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 49, n. 11, p. 2620–2629, November 2001.
- SHIMOMURA, T.; TAKAHASHI, M.; FUJII, T. Extended-space control design with parameter-dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, FL, USA: [s.n.], 2001. p. 2157–2162.
- SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, K. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Bristol, PA: Taylor & Francis, 1998.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1999. <<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>>.

THEODOR, Y.; SHAKED, U.; DE SOUZA, C. E. A game theory approach to robust discrete-time \mathcal{H}_∞ estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 42, n. 6, p. 1486–1495, 1994.

WANG, H.; YANG, G. H. A finite frequency approach to filter design for uncertain discrete-time systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 22, n. 6, p. 533–550, August 2008.

XIE, L.; DE SOUZA, C. E.; FU, M. \mathcal{H}_∞ estimation for discrete-time linear uncertain systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 1, n. 2, p. 111–123, April/June 1991.

XIE, L.; DE SOUZA, C. E.; WANG, Y. Robust filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems: an \mathcal{H}_∞ approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 6, n. 4, p. 297–312, 1996.

XIE, L.; LU, L.; ZHANG, D.; ZHANG, H. Improved robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, v. 40, n. 5, p. 873–880, May 2004.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1996.

Apêndices

APÊNDICE A – Exemplos de utilização do ROLMIP

A.1 Análise de estabilidade

O código a seguir corresponde à condição de estabilidade apresentada no Lema 2.1.

```
function output = stab_d(A,g)
% function stab_d(A,g)
%
% Determina a estabilidade da matriz 'A' utilizando uma função de
% Lyapunov polinomial de grau 'g'.
%
% captura o numero de vertices do sistema e sua ordem
vertices = size(A,2);
order = size(A{1},1);

% tempo gasto com a montagem das LMIs
output.cpusec_m = clock;

pA = rolmipvar(A,'A',vertices,1);

P = rolmipvar(order,order,'P','symmetric',vertices,g);

TT = [P, pA'*P;
      P*pA, P];

% Cria as LMIs para verificar a estabilidade do sistema
LMIs = TT > 0;

% tempo total gasto com a montagem das LMIs
output.cpusec_m = etime(clock,output.cpusec_m);
```

```

sol = optimize(LMIs, [], sdpsettings('verbose', 0, 'solver', 'mosek'));
% tempo de resolucao do problema
output.cpusec = sol.solvertime;
% informacoes do solver quanto a resolucao do problema
output.info = sol.info;
% residuo das LMIs
output.res = min(checkset(LMIs));

% recupera as variaveis de interesse
output.P = value(P);

% se o residuo de otimizacao for maior do que zero, o problema
% e' factivel
output.feas = 0;
if output.res > 0
    output.feas = 1;
end

end

```

Internamente, o pacote ROLMIP gera um conjunto de LMIs finito baseando-se nos graus das variáveis declaradas e utilizando relaxações polinomiais. Desta forma, supondo que a matriz de Lyapunov seja de grau $g = 0$ e o sistema tenha dois vértices, as LMIs geradas pelo ROLMIP são:

$$\begin{bmatrix} P_1 & A_1^T P_1 \\ P_1 A_1 & P_1 \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & A_2^T P_1 \\ P_1 A_2 & P_1 \end{bmatrix} \succ 0$$

que são equivalentes as condições reportadas em (2.36). Por sua vez, um grau $g = 1$ para a matriz de Lyapunov gera as LMIs:

$$\begin{bmatrix} P_1 & A_1^T P_1 \\ P_1 A_1 & P_1 \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} P_1 + P_2 & A_1^T P_2 + A_2^T P_1 \\ P_1 A_2 + P_2 A_1 & P_1 + P_2 \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & A_2^T P_2 \\ P_2 A_2 & P_2 \end{bmatrix} \succ 0$$

que correspondem exatamente a (2.40).

A.2 Condição de síntese de filtros robustos de ordem não mínima com critério \mathcal{H}_∞

O programa apresentado a seguir implementa as condições de síntese de filtros robustos de ordem não mínima apresentadas no Teorema 3.8.

```
function output = filter_nonminimal_hinf(A,B,Cz,Cy,Dz,Dy,Phi1,...
    Phi2,Phi3,varargin)

% valores-padroao de algumas variaveis
degP = 0;
degF = 0;
hinf = 0;
r = 0;
tolerance = 1e-6;

% parametros opcionais passados
if nargin > 9
    options=struct(varargin{:});
    if isfield(options,'degP')
        degP = options.degP;
    end
    if isfield(options,'degF')
        degF = options.degF;
    end
    if isfield(options,'deg')
        degP = options.deg;
        degF = options.deg;
    end
    if isfield(options,'r')
        r = options.r;
    end
    if isfield(options,'hinf')
        hinf = options.hinf;
    end
    if isfield(options,'tol')
        tolerance = options.tol;
    end
end
end
```



```

% captura o numero de vertices e a ordem das matrizes do sistema
vertices = size(A,2);
order = size(A{1},1);
inputs = size(B{1},2);
out_est = size(Cz{1},1);
out_meas = size(Cy{1},1);

% variavel para computar o tempo gasto com a montagem das LMIs
output.cpusec_m = clock;

% caso seja passado um valor de norma, estamos preocupados com
% a factibilidade do problema para o valor de norma fornecido.
% Caso contrario, deseja-se minimizar um limitante para a norma
% Hoo do sistema
if hinf == 0
    mu = sdpvar(1);
    obj = mu;
else
    mu = hinf*hinf;
    obj = [];
end

% ordem do filtro a ser sintetizado
nf = order + r;

% definicao das matrizes constantes do problema
Phi = [Phi1 Phi2];
E1 = [zeros(order,r) eye(order)];
E2 = [eye(r) zeros(r,order)];

if r == 0
    Ncal = eye(4*order + inputs + out_est);
else
    Ncal = [-eye(nf) zeros(nf) zeros(nf,order) zeros(nf) ...
            zeros(nf,inputs) zeros(nf,out_est);
           zeros(nf) -eye(nf) zeros(nf,order) zeros(nf) ...
           zeros(nf,inputs) zeros(nf,out_est);
           E2'*Phi zeros(nf) E1' zeros(nf) E2'*Phi3 zeros(nf,out_est)];

```

```

        zeros(nf) zeros(nf) zeros(nf,order) -eye(nf) ...
            zeros(nf,inputs) zeros(nf,out_est);
        zeros(inputs,nf) zeros(inputs,nf) zeros(inputs,order) ...
            zeros(inputs,nf) -eye(inputs) zeros(inputs,out_est);
        zeros(out_est,nf) zeros(out_est,nf) zeros(out_est,order) ...
            zeros(out_est,nf) zeros(out_est,inputs) -eye(out_est)];
end

% cria as variaveis de folga do problema
X = rolmipvar(nf,order,'X','full',vertices,degF);
Y = rolmipvar(nf,order,'Y','full',vertices,degF);
J = rolmipvar(nf,order,'J','full',vertices,degF);
K = rolmipvar(nf,order,'K','full',vertices,degF);
U = rolmipvar(inputs,order,'U','full',vertices,degF);
V = rolmipvar(out_est,order,'V','full',vertices,degF);

% definicao das variaveis envolvidas na recuperacao das
% matrizes do filtro de ordem nao minima
S = rolmipvar(nf,nf,'S','full',vertices,0);
Q = rolmipvar(nf,nf,'Q','full',vertices,0);
F = rolmipvar(nf,out_meas,'F','full',vertices,0);
L = rolmipvar(out_est,nf,'L','full',vertices,0);
R = rolmipvar(out_est,out_meas,'R','full',vertices,0);

% Matriz de Lyapunov
P1 = rolmipvar(nf,nf,'P1','symmetric',vertices,degP);
P2 = rolmipvar(nf,nf,'P2','full',vertices,degP);
P3 = rolmipvar(nf,nf,'P3','symmetric',vertices,degP);

pA = rolmipvar(A,'A',vertices,1);
pB = rolmipvar(B,'B',vertices,1);
pCy = rolmipvar(Cy,'Cy',vertices,1);
pCz = rolmipvar(Cz,'Cz',vertices,1);
pDy = rolmipvar(Dy,'Dy',vertices,1);
pDz = rolmipvar(Dz,'Dz',vertices,1);

% Define as matrizes aumentadas do teorema
Pcal = [P1 P2';
        P2 P3];

```

```

Gcal = [zeros(nf) S;
        zeros(nf) S];

Acal = [F*pCy*E1 Q;
        F*pCy*E1 Q];

Bcal = [F*pDy;
        F*pDy];

Ccal = [pCz*E1-R*pCy*E1, -L];

Dcal = pDz*-R*pDy;

% Cria as matrizes referentes as desigualdades de sintese
Qcal = [Pcal, Acal', zeros(2*nf,inputs), Ccal';
        Acal, Gcal+Gcal'-Pcal, Bcal, zeros(2*nf,out_est);
        zeros(inputs,2*nf), Bcal', eye(inputs), Dcal';
        Ccal, zeros(out_est,2*nf), Dcal, mu*eye(out_est)];

Xcal = [J; K; X; Y; U; V];

Rcal = [pA*E1 zeros(order,nf) E1 zeros(order,nf) pB ...
        zeros(order,out_est)];

% Cria as LMIs a serem resolvidas
LMIs = Pcal > 0;
LMIs = [LMIs, Ncal' * (Qcal + Xcal*Rcal + Rcal'*Xcal') * Ncal > 0];

% computa o tempo gasto para montagem das LMIs
output.cpusec_m = etime(clock,output.cpusec_m);

% captura o numero de variaveis e de linhas de LMIs envolvidas
% no problema
[output.rows, output.vars] = get_lmi_dimensions(LMIs);

sol = optimize(LMIs,obj,sdpsettings('verbose',0,'solver','mosek'));
% tempo gasto para resolucao do problema
output.cpusec = sol.solvertime;

```

```
% informacoes pertinentes do solver
output.info = sol.info;
% residuo de otimizacao
output.res = min(checkset(LMIs));

% devolve as variaveis de interesse para o usuario
output.hinf = sqrt(value(mu));

output.P = [double(P1) double(P2)';double(P2) double(P3)];

output.S = double(S);
output.Q = double(Q);
output.F = double(F);
output.Af = double(S)\double(Q);
output.Bf = double(S)\double(F);
output.Cf = double(L);
output.Df = double(R);

output.feas = 0;

% se o residuo de otimizacao for maior do que uma margem de
% tolerancia, o problema e' factivel
if output.res > -tolerance
    output.feas = 1; %factive1
end
end

function [L, V] = get_lmi_dimensions(LMIs)
% function get_lmi_dimensions(LMIs)
%
% Return the number L of lines and V of variables.
%

% determine the number of LMI rows
L = 0;
for i=1:size(LMIs,1)
    L = L + size(LMIs{i},1);
end
% determine the number of scalar variables
```

```
V = size(getvariables(LMIs),2);
end
```

A.3 Condição de síntese de controladores robustos por realimentação de estados com memória com critério \mathcal{H}_2

O programa apresentado a seguir implementa as condições de síntese de controladores robustos por realimentação de estados com memória apresentadas no Teorema 5.2.

```
function output = h2_sfb_memory(A,Bu,Bw,Cz,Du,Dw,varargin)

% valores-padroao de algumas variaveis
deg = 1;
d = 0;
h2 = 0;
tolerance = 1e-6;
xi = 0;

% parametros opcionais passados
if nargin > 6
    options=struct(varargin{:});
    if isfield(options,'deg')
        deg = options.deg;
    end
    if isfield(options,'d')
        d = options.d;
    end
    if isfield(options,'h2')
        h2 = options.h2;
    end
    if isfield(options,'tol')
        tolerance = options.tol;
    end
    if isfield(options,'xi')
        xi = options.xi;
    end
end

% captura o numero de vertices e a ordem das matrizes do sistema
```

```

vertices = size(A,2);
order = size(A{1},1);
inputs = size(Bw{1},2);
ctrl = size(Bu{1},2);
out_ctrl = size(Cz{1},1);

% variavel para computar o tempo gasto com a montagem das LMIs
output.cpusec_m = clock;

% caso seja passado um valor de norma, estamos preocupados com
% a factibilidade do problema para o valor de norma fornecido.
% Caso contrario, deseja-se minimizar um limitante para a norma
% H2 do sistema
if h2 == 0
    mu = sdpvar(1);
    obj = mu;
else
    mu = h2*h2;
    obj = [];
    tolerance = 0;
end

% definicao das matrizes constantes do problema
if d > 1
    Phi2 = [zeros((d-2)*order,order);eye(order)];

    Phi1 = [zeros((d-2)*order,order) eye((d-2)*order);
            zeros(order) zeros(order,(d-2)*order)];

    Nu = [eye((d-1)*order) zeros((d-1)*order,order) ...
          zeros((d-1)*order,order) zeros((d-1)*order,out_ctrl);
          zeros(order,(d-1)*order) eye(order) zeros(order) ...
          zeros(order,out_ctrl);
          Phi1 Phi2 zeros((d-1)*order,order) zeros((d-1)*order,out_ctrl);
          zeros(order,(d-1)*order) zeros(order) eye(order) ...
          zeros(order,out_ctrl);
          zeros(out_ctrl,(d-1)*order) zeros(out_ctrl,order) ...
          zeros(out_ctrl,order) eye(out_ctrl)];
else

```

```

    Nu = eye(2*order + out_ctrl);
end

pA = rolmipvar(A,'A',vertices,1);
pBw = rolmipvar(Bw,'Bw',vertices,1);
pBu = rolmipvar(Bu,'Bu',vertices,1);
pCz = rolmipvar(Cz,'Cz',vertices,1);
pDw = rolmipvar(Dw,'Dw',vertices,1);
pDu = rolmipvar(Du,'Du',vertices,1);

% Matriz de Lyapunov
P1 = rolmipvar((d-1)*order,(d-1)*order,'P1','symmetric',vertices,deg);
P2 = rolmipvar(order,(d-1)*order,'P2','full',vertices,deg);
P3 = rolmipvar(order,order,'P3','symmetric',vertices,deg);

% cria as variaveis de otimizacao do problema
M = rolmipvar(inputs,inputs,'M','symmetric',vertices,deg);
G = rolmipvar(order,order,'G','full',vertices,0);

for k = 1:d
    Z{k} = rolmipvar(ctrl,order,strcat('Z',int2str(k)),'full',...
        vertices,0);
end

% Define as matrizes aumentadas do teorema
AbarG = pA*G + pBu*Z{1};
CbarG = pCz*G + pDu*Z{1};
Bbar = pBw;
Dbar = pDw;
Zbar = zeros(ctrl,-1);
for k = 2:d
    Zbar = [Z{k} Zbar];
end

% Cria as LMIs a serem resolvidas
LMIs = rolmipvar(mu,'mu') - trace(M) > 0;

PP = [P1 P2';P2 P3];

```

```

LMIs = [LMIs, PP > 0];

% Condicao do traco
T11 = M;
T21 = Bbar;
T22 = G + G' - P3;
T31 = Dbar;
T32 = zeros(out_ctrl,order);
T33 = eye(out_ctrl);

TT = [T11  T21'  T31';
      T21  T22  T32';
      T31  T32  T33];

LMIs = [LMIs, TT > 0];

% Condicao do gramiano
QQ = [-PP zeros(d*order) zeros(d*order,out_ctrl);
      zeros(d*order) PP zeros(d*order,out_ctrl);
      zeros(out_ctrl,d*order) zeros(out_ctrl,d*order) eye(out_ctrl)];

XB = [zeros((d-1)*order) zeros((d-1)*order,order) ...
      zeros((d-1)*order,order) zeros((d-1)*order,out_ctrl);
      xi*pBu*Zbar xi*AbarG -xi*G zeros(order,out_ctrl);
      pBu*Zbar AbarG -G zeros(order,out_ctrl);
      pDu*Zbar CbarG zeros(out_ctrl,order) -eye(out_ctrl)];

LMIs = [LMIs, Nu'*QQ*Nu + XB + XB' < 0];

% computa o tempo gasto para montagem das LMIs
output.cpusec_m = etime(clock,output.cpusec_m);

% captura o numero de variaveis e de linhas de LMIs envolvidas
% no problema
[output.rows, output.vars] = get_lmi_dimensions(LMIs);

sol = optimize(LMIs,obj,sdpsettings('verbose',0,'solver','mosek'));
% tempo gasto para resolucao do problema
output.cpusec = sol.solvertime;

```



```
% informacoes pertinentes do solver
output.info = sol.info;
% residuo de otimizacao
output.res = min(checkset(LMIs));

% devolve as variaveis de interesse para o usuario
output.h2 = sqrt(value(mu));
output.h2sq = value(mu);

output.M = value(M);
output.P = value(PP);
output.G = value(G);
for k = 1:d
    output.Z{k} = value(Z{k});
    output.K{k} = output.Z{k}/value(G);
end

% se o residuo de otimizacao for maior do que uma margem de
% tolerancia, o problema e' factivel
output.feas = 0;
if output.res > -tolerance
    output.feas = 1;
end
end

function [L, V] = get_lmi_dimensions(LMIs)
% function get_lmi_dimensions(LMIs)
%
% Return the number L of lines and V of variables.
%

% determine the number of LMI rows
L = 0;
for i=1:size(LMIs,1)
    L = L + size(LMIs{i},1);
end
% determine the number of scalar variables
V = size(getvariables(LMIs),2);
end
```