



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

CLAYTON CRISTIANO DA SILVA

CATEGORIFICAÇÃO DE GRUPOS QUÂNTICOS

CAMPINAS  
2017

CLAYTON CRISTIANO DA SILVA

## CATEGORIFICAÇÃO DE GRUPOS QUÂNTICOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Adriano Adrega de Moura**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO CLAYTON CRISTIANO DA SILVA E ORIENTADA PELO PROF. DR. ADRIANO ADREGA DE MOURA.

CAMPINAS  
2017

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38c Silva, Clayton Cristiano da, 1991-  
Categorificação de grupos quânticos / Clayton Cristiano da Silva. –  
Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Adriano Adrega de Moura.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Categorificação (Matemática). 2. Grupos quânticos. 3. Lie, Álgebra de. I.  
Moura, Adriano Adrega de, 1975-. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Categorification of quantum groups

**Palavras-chave em inglês:**

Categorification (Mathematics)

Quantum groups

Lie algebras

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Mestre em Matemática

**Banca examinadora:**

Adriano Adrega de Moura [Orientador]

Matheus Batagini Brito

Plamen Emilov Kochloukov

**Data de defesa:** 31-03-2017

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 31 de março de 2017 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof.(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA**

**Prof.(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV**

**Prof.(a). Dr(a). MATHEUS BATAGINI BRITO**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

## **Agradecimentos**

Agradeço ao meu orientador, Prof. Adriano A. Moura (IMECC-Unicamp), pelos ensinamentos, pela solicitude e por sua paciência. Aos demais membros da banca, Profs. Matheus B. Brito (UFPR) e Plamen E. Kochloukov (IMECC-Unicamp), agradeço pelas críticas, sugestões e correções. Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro.

## Resumo

O termo categorificação foi introduzido a pouco mais de duas décadas nos trabalhos de Crane e Frenkel e se refere ao processo de trocar noções conjuntistas por "análogas categóricas". Conjuntos são trocados por categorias, elementos por objetos, relações entre conjuntos por morfismos, funções por funtores, relações entre funções por transformações naturais, etc.. Desde então, a busca por categorificações de várias estruturas algébricas ganhou um impulso muito forte pois o enriquecimento do contexto considerado levou a demonstrações, muitas vezes simples, de vários resultados profundos e extremamente complicados de serem demonstrados no contexto original. Neste trabalho estudaremos a categorificação definida por Lauda do grupo quântico associado a  $sl(2)$ . Esta construção foi posteriormente estendida para álgebras de Kac-Moody mais gerais em trabalhos independentes de Khovanov-Lauda e Rouquier levando ao surgimento daquelas que são hoje chamadas álgebras de KLR e ocupam um espaço de destaque na pesquisa em teoria de representações atual.

**Palavras-chave:** categorificação, grupos quânticos, álgebras de Lie.

## Abstract

The term categorification was introduced about two decades ago in the works of Crane and Frenkel to refer to a process of replacing set theoretical notions by “categorical analogues”. Sets are replaced by categories, elements by objects, relations between sets by morphisms, functions by functors, relations between functions by natural transformations, etc. The search for categorifications of various algebraic contexts has been the subject of intense investigation since then because the enriched new context usually leads to (very often simple) proofs of deep results which were too complicated to be handled in their original setting. In this dissertation we study Lauda’s categorification of the quantum group associated to  $\mathfrak{sl}(2)$ . This construction was later extended to more general Kac-Moody algebras in independent works of Khovanov-Lauda and Rouquier leading to the discovery of what is now known as KLR algebras, one of the most important algebraic structures in the present research activities in Representation Theory.

**Keywords:** categorification, quantum groups, Lie algebras.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 O grupo quântico <math>U_q(\mathfrak{sl}_2)</math></b>	<b>12</b>
1.1 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . . . . .	12
1.2 A álgebra quântica modificada $\dot{U}$ de Lusztig . . . . .	13
1.3 A forma semilinear sobre $\dot{U}$ . . . . .	24
<b>2 Anel nilHecke e polinômios de Schubert</b>	<b>27</b>
2.1 Anel nilHecke . . . . .	27
2.2 Operadores de diferenças divididas e polinômios de Schubert . . . . .	28
<b>3 Cálculo gráfico</b>	<b>38</b>
3.1 2-categorias . . . . .	38
3.2 Diagramas de cordas para 2-categorias . . . . .	42
3.3 Cálculo gráfico para biadjunções . . . . .	45
3.4 Casamento por adjunção . . . . .	48
3.5 Duais para 2-morfismos . . . . .	49
<b>4 A 2-categoria <math>\mathcal{U}</math></b>	<b>51</b>
4.1 Preliminares categóricas . . . . .	51
4.2 A 2-categoria $\mathcal{U}^*$ . . . . .	57
4.3 Relações úteis em $\mathcal{U}^*$ . . . . .	66
4.4 A 2-categoria $\mathcal{U}$ . . . . .	69
4.5 Simetrias de $\mathcal{U}$ . . . . .	72
4.6 Levantamento das relações de $E$ e $F$ . . . . .	75
<b>5 Categorificação de <math>\dot{U}</math></b>	<b>79</b>
5.1 Envelope de Karoubi . . . . .	79
5.2 A 2-categoria $\dot{\mathcal{U}}$ . . . . .	85
5.3 $\dot{\mathcal{U}}$ como uma categorificação de $\dot{U}$ . . . . .	89
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>100</b>



# Introdução

O termo “categorificação” foi introduzido por Louis Crane em [8] e a idéia se originou de seu trabalho anterior [9] em parceria com Igor Frenkel. Estes autores desconfiavam que uma categorificação do grupo quântico  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  em uma raiz da unidade poderia levar a novas teorias quânticas de campo topológicas quadridimensionais combinatoriais. Estimulado por Igor Frenkel, Aaron D. Lauda concebeu uma categorificação de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  em um parâmetro  $q$  genérico a partir de sua base canônica em [21].

Embora não exista uma definição formal, categorificação é o processo de converter noções conjuntistas por suas correspondentes análogas categóricas. Conjuntos são trocados por categorias, elementos por objetos, relações entre elementos por morfismos entre objetos, funções por funtores e relações entre funções por funtores entre categorias. Espera-se, dessa maneira, obter estruturas extras vindas do objeto categorificado que possam ser usadas para resolver problemas concernentes ao objeto original.

Um exemplo clássico e rudimentar disso é o da categorificação do semi-anel  $(\mathbb{N}, +, \times)$  dos números naturais. A categoria **FinSet**, dos conjuntos finitos e funções desempenha esse papel no sentido de que as operações de adição e multiplicação correspondem à união disjunta e ao produto cartesiano de conjuntos. As propriedades de comutatividade, associatividade, distributividade e elementos neutros valem em **FinSet** apenas a menos de isomorfismos naturais. Nesta situação, tomando as cardinalidades dos conjuntos em **FinSet**, recuperamos  $\mathbb{N}$ . Desse modo, dizemos que a cardinalidade define uma descategorificação de **FinSet** em  $\mathbb{N}$ . Poderíamos considerar também, ao invés de **FinSet**, a categoria **FinVect** $_{\mathbb{K}}$  dos espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e transformações lineares entre eles. Agora são as operações de soma direta e produto tensorial que categorificam as operações de adição e multiplicação de  $\mathbb{N}$  e a descategorificação é dada tomando-se a dimensão dos espaços vetoriais de **FinVect** $_{\mathbb{K}}$ . Isso ilustra que a categorificação de um objeto não é única e em geral depende do tipo de propriedades que se espera obter.

Neste trabalho apresentamos a categorificação de Aaron D. Lauda dada em [21] para a álgebra  $\dot{U}$ , uma versão modificada do grupo quântico  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  definida por Lusztig [23]. Basicamente, Aaron D. Lauda construiu uma 2-categoria aditiva  $\dot{\mathcal{U}}$  tal que o anel de Grothendieck cindido  $K_0(\dot{\mathcal{U}})$  é isomorfo à versão integral  ${}_{\mathcal{A}}\dot{U}$  da álgebra, de modo que  $K_0(\dot{\mathcal{U}}) \otimes_{\mathbb{Z}[q, q^{-1}]} \mathbb{Q}(q) \cong \dot{U}$ . Sendo assim, o anel de Grothendieck cindido funciona como descategorificação nesse caso e também é o padrão em categorificações por categorias aditivas. Além disso, Aaron D. Lauda também exhibe uma correspondência entre os elementos da base canônica de Lusztig para  $\dot{U}$  e os 1-morfismos indecomponíveis de  $\dot{\mathcal{U}}$ . A forma semilinear de  $\dot{U}$  é também categorificada em termos dos postos graduados dos grupos abelianos  $\dot{\mathcal{U}}^*(F, G)$  e os principais automorfismos e

antiautomorfismos de  $\dot{U}$  são categorificados por meio de 2-funtores com domínios em  $\dot{\mathcal{U}}$ . A definição desses 2-funtores é, inclusive, uma das motivações para a introdução dos 2-morfismos por meio de diagramas que simplificam os cálculos de relações nas 2-categorias consideradas. A. D. Lauda também descreve, para cada inteiro positivo  $N$ , um 2-funtor  $\Gamma_N : \dot{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbf{Flag}_N^*$  que categorifica a representação irredutível  $(N + 1)$ -dimensional de  $\dot{U}$ , mas não trataremos deste assunto nesta dissertação.

No Capítulo 1 definimos o grupo quântico  $U = U_q(\mathfrak{sl}_2)$  por meio de geradores e relações, bem como alguns de seus automorfismos. Em seguida, apresentamos a sua versão idempotente, a álgebra  $\dot{U}$  definida por Lusztig, obtida de  $U$  por meio da adjunção de uma coleção de idempotentes ortogonais indexados pelo reticulado de pesos de  $\mathfrak{sl}_2$ . As categorias de módulos para  $U$  que admitem decomposição em espaços de pesos e de módulos unitais para  $\dot{U}$  são equivalentes [25], mas é preferível se trabalhar com  $\dot{U}$  principalmente por causa de sua “base canônica de Lusztig”, cujas constantes estruturais pertencem a  $\mathbb{N}[q, q^{-1}]$ . Calculamos a seguir, o valor da forma semilinear definida por Lusztig sobre  $\dot{U}$  nos elementos da base canônica. Esses resultados são usados para mostrar que os levantamentos dos elementos dessa base pela categorificação são indecomponíveis.

Para se ter uma correspondência entre 1-morfismos indecomponíveis de  $\dot{\mathcal{U}}$  com os elementos da base canônica de Lusztig é imprescindível controlar o tamanho da coleção de seus 2-morfismos idempotentes. Isso é garantido pela nilpotência dos geradores  $u_i$  do anel nilHecke  $\mathcal{NH}_a$ . Então se impõe uma ação deste anel sobre  $\mathcal{U}^*(\mathcal{E}^a 1_n, \mathcal{E}^a 1_n)$ . No Capítulo 2 enumeramos algumas das propriedades desse anel, em particular demonstramos um isomorfismo de anéis graduados entre  $\mathcal{NH}_a$  e o anel de matrizes  $\text{Mat}((a)!_{q^2}; \Lambda_a)$ , que tem como entradas polinômios simétricos.

No Capítulo 3 damos os fundamentos do cálculo gráfico para 2-categorias. Grande parte das relações provenientes dos 2-morfismos da categoria  $\mathcal{U}^*$  decorrem de estruturas definidas aqui, tais como adjunções, casamentos por adjunções, dualidades e ciclicidades para 2-morfismos. Neste tipo de diagramas reside uma interação entre Álgebra e Topologia, muito comum em categorificações, na qual relações algébricas entre os 2-morfismos podem ser facilmente visualizadas por meio de deformações topológicas dos diagramas correspondentes, ditas isotopias.

Para categorificar  $\dot{U}$  introduz-se duas 2-categorias secundárias  $\mathcal{U}^*$  e  $\mathcal{U}$  valendo-se da linguagem de categorias enriquecidas. A 2-categoria  $\mathcal{U}^*$  é aditiva graduada com translações e é dada por 2-morfismos geradores e relações entre eles. A 2-categoria  $\mathcal{U}$  é apenas uma 2-subcategoria de  $\mathcal{U}^*$  obtida restringindo-se os grupos abelianos graduados de 2-morfismos aos de grau zero. Ela herda algumas das propriedades de  $\mathcal{U}^*$  tais como a estrutura de quase-biadjunção, uma nova gradação e uma ação do anel nilHecke. Neste Capítulo 4, as relações diagramáticas e simetrias entre os 2-morfismos de  $\mathcal{U}$  já nos permitem apresentar as categorificações dos automorfismos de  $\dot{U}$  e obter os levantamentos de suas relações definidoras.

Finalmente, no Capítulo 5 exibimos a construção da 2-categoria  $\dot{\mathcal{U}}$ , que é a genuína categorificação de  $\dot{U}$ , por meio dos envelopes de Karoubi das categorias  $\mathcal{U}(F, G)$ , de modo que obtemos um novo cenário onde todos os 2-morfismos idempotentes cindem. A seguir, usando alguns resultados obtidos por A. D. Lauda a partir da categorificação de representações de  $\dot{U}$  e do cálculo gráfico para anéis de cohomologia de variedades-bandeira iteradas, apresenta-

mos algumas versões categorificadas das relações envolvendo potências divididas concernentes à versão integral  ${}_{\mathcal{A}}\dot{U}$  de  $\dot{U}$  e obtemos o teorema principal que dá o isomorfismo entre o anel de Grothendieck cindido  $K_0(\dot{U})$  e o  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -módulo  ${}_{\mathcal{A}}\dot{U}$ . Mostra-se também que os grupos abelianos  $\mathcal{U}^*(F, G)$  categorificam a forma semilinear de  $\dot{U}$ , fornecida pelo posto graduado desses grupos.

Entre outros desenvolvimentos em categorificações de grupos quânticos, podemos citar os trabalhos de Mikhail Khovanov e Aaron D. Lauda [17, 18] que versam sobre a categorificação de  $U_q^-(\mathfrak{g})$  com  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Kac-Moody simetrizável e [19] que generaliza os resultados de [21] categorificando a versão idempotente de  $\dot{U}(\mathfrak{sl}_n)$ . Em [16] os autores estendem o cálculo gráfico definido por Aaron D. Lauda para as 2-categorias  $\mathcal{U}^*$  e  $\mathcal{U}$  para a 2-categoria  $\dot{U}$ . Em [3], usando a descategorificação traço, mostra-se que o traço de  $\mathcal{U}$  é isomorfo a  $K_0(\dot{U})$  o que é semelhante aos resultados de A.D.Lauda via anel de Grothendieck cindido. A vantagem é que o traço pode ser definido para qualquer categoria linear, não necessariamente aditiva. O tratamento dado por Aaron D. Lauda, categorificando  $\mathfrak{sl}_2$  diretamente, se aproxima do trabalho [7] de Chuang e Rouquier que estudam categorificações de representações localmente finitas de  $\mathfrak{sl}_2$ . Estes resultados foram usados pelos autores, no mesmo trabalho, para provar a conjectura de Broué, no caso do grupo simétrico  $\mathfrak{S}_n$ , sobre equivalências derivadas de categorias trianguladas relacionadas ao grupo defeito abeliano e ao grupo de Brauer.

Ademais, temos o emprego das técnicas de categorificação na busca de invariantes topológicos. Inclusive, o mais célebre exemplo do uso de tais técnicas é a chamada homologia de Khovanov, que é uma recente categorificação do polinômio de Jones (ver [14, 1]). O polinômio de Jones  $J(K)$  de um nó (ou enlaçamento)  $K$  é um polinômio de Laurent em  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  que é um invariante do nó. A versão categorificada deste invariante é uma teoria de homologia graduada introduzida por Khovanov, cuja característica de Euler graduada (que é a descategorificação para a homologia de Khovanov) concorda com o polinômio de Jones, a menos de normalização. Sabe-se que a homologia de Khovanov não é um invariante completo de nós, porém é um invariante estritamente mais forte que o polinômio de Jones, ou seja, existem nós não isomorfos que têm o mesmo polinômio de Jones, mas suas homologias de Khovanov não são isomorfas. O fato mais interessante sobre a homologia de Khovanov é que, ao contrário do polinômio de Jones, ela é um invariante funtorial (assim como o grupo fundamental é um invariante funtorial de espaços topológicos pontuados). Essa funtorialidade foi usada por Rassmussen para dar uma demonstração puramente combinatorial da conjectura de Milnor [26]. A família dos invariantes de nós conhecidos como invariantes de Reshetikhin-Turaev [27] está intimamente associada com representações de grupos quânticos. Por exemplo, o polinômio de Jones com a representação definidora de  $\mathfrak{sl}_2$ , o polinômio de Jones colorido com as outras representações de  $\mathfrak{sl}_2$ , algumas especializações do polinômio de HOMFLY-PT <sup>1</sup> com a representação definidora de  $\mathfrak{sl}_n$  e o polinômio de Kauffman com a representação definidora de  $\mathfrak{so}_n$  (ver [29]).

---

<sup>1</sup>O nome HOMFLY combina as iniciais de seus co-descobridores: Jim Hoste, Adrian Ocneanu, Kenneth Millett, Peter J. Freyd, W. B. R. Lickorish e David N. Yetter. A adição de PT reconhece o trabalho independente realizado por Józef H. Przytycki e Paweł Traczyk.

# Capítulo 1

## O grupo quântico $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

### 1.1 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

**Definição 1.1.** O grupo quântico  $U = U_q(\mathfrak{sl}_2)$  é a álgebra associativa com unidade sobre o corpo  $\mathbb{Q}(q)$  de funções racionais na variável  $q$ , gerada por  $E, F, K, K^{-1}$  e sujeita às relações:

$$\begin{aligned} KK^{-1} &= 1 = K^{-1}K, \\ KE &= q^2EK, \\ KF &= q^{-2}FK, \\ EF - FE &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

Definimos o **inteiro quântico** ou **inteiro quântico simétrico**  $[a] = [a]_q = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$ , para todo  $a \in \mathbb{Z}$ . O **fatorial quântico** é dado por  $[a]! = [a][a-1] \cdots [1]$ , para todo  $a \in \mathbb{N}^*$  e  $[0]! = 1$ , por convenção. O **coeficiente binomial quântico** é definido como:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{[a]!}{[b]![a-b]!} = \frac{[a][a-1] \cdots [a-b+1]}{[b]!},$$

para  $0 \leq b \leq a$ . Note que a última igualdade nos permite estender a definição do binomial para todo  $a \in \mathbb{Z}$ .

Existe também a noção de **inteiro quântico não-simétrico**  $(a) = (a)_q = \frac{q^a - 1}{q - 1}$ , para todo  $a \in \mathbb{Z}$ . Estes estão relacionados aos inteiros quânticos correspondentes por  $(a)_{q^2} = q^{a-1}[a]$ . As definições de fatoriais e coeficientes binomiais para inteiros quânticos não-simétricos são análogas às dadas para inteiros quânticos simétricos.

Para  $a \in \mathbb{N}$ , definimos as **potências divididas**  $E^{(a)} = \frac{E^a}{[a]!}$  e  $F^{(a)} = \frac{F^a}{[a]!}$ . Denotemos  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ . Então,  ${}_{\mathcal{A}}U$  é a  $\mathcal{A}$ -subálgebra de  $U$  gerada pelos elementos do conjunto  $\{E^{(a)}, F^{(a)} \mid a \in \mathbb{N}\}$ .

Seja  $- : \mathbb{Q}(q) \rightarrow \mathbb{Q}(q)$  a involução de  $\mathbb{Q}(q)$  que leva  $q$  em  $q^{-1}$ . Listamos a seguir alguns automorfismos e antiautomorfismos da álgebra  $U$ :

- O automorfismo  $\psi : U \rightarrow U$  dado por:  
 $\psi(E) = E, \quad \psi(F) = F, \quad \psi(K) = K^{-1}, \quad \psi(fx) = \bar{f}\psi(x)$ , para  $f \in \mathbb{Q}(q)$  e  $x \in U$ .
- O automorfismo  $\mathbb{Q}(q)$ -linear  $\omega : U \rightarrow U$ :  
 $\omega(E) = F, \quad \omega(F) = E, \quad \omega(K) = K^{-1}$ , que é seu próprio inverso.
- O antiautomorfismo  $\mathbb{Q}(q)$ -linear  $\sigma : U \rightarrow U$ :  
 $\sigma(E) = E, \quad \sigma(F) = F, \quad \sigma(K) = K^{-1}$ .
- O antiautomorfismo  $\tau : U \rightarrow U$ :  
 $\tau(E) = qFK^{-1}, \quad \tau(F) = qEK, \quad \tau(K) = K^{-1}, \quad \tau(fx) = \bar{f}\tau(x)$ , para  $f \in \mathbb{Q}(q)$  e  $x \in U$ .
- O antiautomorfismo  $\mathbb{Q}(q)$ -linear  $\rho : U \rightarrow U$ ,  
 $\rho(E) = qKF, \quad \rho(F) = qK^{-1}E, \quad \rho(K) = K$ , que é seu próprio inverso.

Note que  $\rho$  está relacionado a  $\tau$  e a  $\psi$  por:

$$\rho = \psi\tau = \tau^{-1}\psi, \quad \tau = \psi\rho. \quad (1.1.1)$$

## 1.2 A álgebra quântica modificada $\dot{U}$ de Lusztig

A álgebra quântica modificada  $\dot{U} = \dot{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  de Lusztig é a álgebra associativa sobre  $\mathbb{Q}(q)$ , gerada por  $1_m, E_m, F_m$ , para todo  $m \in \mathbb{Z}$  e sujeita às relações:

$$1_m 1_n = \delta_{m,n} 1_m, \quad (1.2.1)$$

$$E_n 1_{m-1} = \delta_{m,n} E_n = 1_{m+1} E_n, \quad (1.2.2)$$

$$F_n 1_{m+1} = \delta_{m,n} F_n = 1_{m+1} F_n, \quad (1.2.3)$$

$$E_{m-1} F_{m-1} - F_{m+1} E_{m+1} = [m] 1_m, \quad (1.2.4)$$

para quaisquer  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

A relação 1.2.1 significa que  $\{1_m | m \in \mathbb{Z}\}$  é um sistema de idempotentes ortogonais da álgebra  $\dot{U}$ .

A álgebra  $\dot{U}$  é uma versão de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  mais adequada ao estudo de representações que admitem decomposição em espaços de pesos. Ela foi introduzida por Beilinson, Lusztig e MacPherson em [2] para  $\mathfrak{sl}_n$  e depois generalizada por Lusztig [23] para uma álgebra de Kac-Moody simetrizável  $\mathfrak{g}$  arbitrária. Aqui seguimos a definição de  $\dot{U}$  por geradores e relações dada por Zhaobing Fan e Yiqiang Li em [10].

Analogamente,  ${}_{\mathcal{A}}\dot{U}$  é a  $\mathcal{A}$ -subálgebra de  $\dot{U}$  gerada por  $E_m^{(a)}, F_m^{(a)}, 1_m$ , para  $m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N}$ , onde:

$$E_m^{(a)} = \frac{1}{[a]!} E_{m+a-1} E_{m+a-3} \cdots E_{m-a+3} E_{m-a+1} = \frac{1}{[a]!} \prod_{k=1}^a E_{m+a-2k+1},$$

$$F_m^{(a)} = \frac{1}{[a]!} F_{m-a+1} F_{m-a+3} \cdots F_{m+a-3} F_{m+a-1} = \frac{1}{[a]!} \prod_{k=1}^a F_{m-a+2k-1},$$

para  $a \in \mathbb{N}^*$  e  $E_m^{(0)} = F_m^{(0)} = 1_m$ . Aqui a ordem de multiplicação no produtório concorda com a ordem dos índices.

**Proposição 1.1.** *Em  $\mathcal{A}\hat{U}$  valem as seguintes relações:*

$$E_m^{(a)} 1_{m-a} = E_m^{(a)} = 1_{m+a} E_m^{(a)}, \quad (1.2.5)$$

$$F_m^{(a)} 1_{m+a} = F_m^{(a)} = 1_{m-a} F_m^{(a)}, \quad (1.2.6)$$

$$E_{n+b}^{(a)} E_{n-a}^{(b)} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} E_n^{(a+b)}, \quad (1.2.7)$$

$$F_{n-b}^{(a)} F_{n+a}^{(b)} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} F_n^{(a+b)}, \quad (1.2.8)$$

$$E_{n+a}^{(a)} F_{n+b}^{(b)} = \sum_{j=0}^{\min(a,b)} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j}^{(a-j)}, \quad (1.2.9)$$

$$F_{n-a}^{(a)} E_{n-b}^{(b)} = \sum_{j=0}^{\min(a,b)} \begin{bmatrix} a+b-n \\ j \end{bmatrix} E_{n-2a-b+j}^{(b-j)} F_{n-a-2b+j}^{(a-j)}, \quad (1.2.10)$$

para quaisquer  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Demonstraremos as identidades (1.2.5), (1.2.7) e (1.2.9). As outras são análogas.

Se  $a = 0$ , então

$$E_m^{(a)} 1_{m-a} = E_m^{(0)} 1_m = 1_m 1_m = 1_m = E_m^{(0)} = E_m^{(a)}$$

e

$$1_{m+a} E_m^{(a)} = 1_m E_m^{(0)} = 1_m 1_m = 1_m = E_m^{(0)} = E_m^{(a)}.$$

Para  $a \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} E_m^{(a)} 1_{m-a} &= \left( \frac{1}{[a]!} E_{m+a-1} E_{m+a-3} \cdots E_{m-a+3} E_{m-a+1} \right) (1_{m-a}) \\ &= \left( \frac{1}{[a]!} E_{m+a-1} E_{m+a-3} \cdots E_{m-a+3} \right) (E_{m-a+1} 1_{m-a}) \\ &= \left( \frac{1}{[a]!} E_{m+a-1} E_{m+a-3} \cdots E_{m-a+3} \right) (E_{m-a+1}) \\ &= \frac{1}{[a]!} E_{m+a-1} E_{m+a-3} \cdots E_{m-a+3} E_{m-a+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_m^{(a)} \\
&= \frac{1}{[a]!} E_{m+a-1} E_{m+a-3} \cdots E_{m-a+3} E_{m-a+1} \\
&= \left( \frac{1}{[a]!} E_{m+a-1} \right) (E_{m+a-3} \cdots E_{m-a+3} E_{m-a+1}) \\
&= \left( \frac{1}{[a]!} 1_{m+a} E_{m+a-1} \right) (E_{m+a-3} \cdots E_{m-a+3} E_{m-a+1}) \\
&= (1_{m+a}) \left( \frac{1}{[a]!} E_{m+a-1} E_{m+a-3} \cdots E_{m-a+3} E_{m-a+1} \right) \\
&= 1_{m+a} E_m^{(a)}.
\end{aligned}$$

Se  $a = 0$ , então  $E_{n+b}^{(a)} E_{n-a}^{(b)} = E_{n+b}^{(0)} E_n^{(b)} = 1_{n+b} E_n^{(b)} = E_n^{(b)} = 1 E_n^{(b)} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} E_n^{(b)} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} E_n^{(a+b)}$ .

Se  $b = 0$ , então  $E_{n+b}^{(a)} E_{n-a}^{(b)} = E_{n+b}^{(a)} E_{n-a}^{(0)} = E_{n+b}^{(a)} 1_{n-a} = E_n^{(a)} = 1 E_n^{(a)} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} E_n^{(a)} = \begin{bmatrix} a+b \\ b \end{bmatrix} E_n^{(a+b)} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} E_n^{(a+b)}$ .

Suponhamos então que  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Temos:

$$\begin{aligned}
E_{n+b}^{(a)} E_{n-a}^{(b)} &= \left( \frac{1}{[a]!} \prod_{i=1}^a E_{n+a+b-2i+1} \right) \left( \frac{1}{[b]!} \prod_{j=1}^b E_{n-a+b-2j+1} \right) \\
&= \left( \frac{1}{[a]!} E_{n+a+b-1} E_{n+a+b-3} \cdots E_{n-a+b+1} \right) \left( \frac{1}{[b]!} E_{n-a+b-1} E_{n-a+b-3} \cdots E_{n-a-b+1} \right) \\
&= \frac{1}{[a]!} \frac{1}{[b]!} E_{n+a+b-1} E_{n+a+b-3} \cdots E_{n-a+b+1} E_{n-a+b-1} E_{n-a+b-3} \cdots E_{n-a-b+1} \\
&= \frac{1}{[a]!} \frac{1}{[b]!} \prod_{k=1}^{a+b} E_{n+a+b-2k+1} = \frac{[a+b]!}{[a]! [b]!} \frac{1}{[a+b]!} \prod_{k=1}^{a+b} E_{n+a+b-2k+1} = \begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} E_n^{(a+b)}.
\end{aligned}$$

Provemos separadamente o caso  $b = 0$ . Neste caso,  $\min(a, b) = \min(a, 0) = 0$ . Temos:

$$\begin{aligned}
E_{n+a}^{(a)} F_{n+b}^{(b)} &= E_{n+a}^{(a)} F_n^{(0)} = E_{n+a}^{(a)} 1_n = E_{n+a}^{(a)} \\
&= 1_{n+2a} E_{n+a}^{(a)} = 1 \cdot 1_{n+2a} E_{n+a}^{(a)} = \begin{bmatrix} a+b+n \\ 0 \end{bmatrix} F_{n+2a}^{(0)} E_{n+a}^{(a)} \\
&= \sum_{j=0}^0 \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j}^{(a-j)} \\
&= \sum_{j=0}^{\min(a,b)} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j}^{(a-j)}.
\end{aligned}$$

Fixaremos  $a$  e  $n$  e provaremos por indução sobre  $b \in \mathbb{N}^*$ . O caso  $b = 1$  é a base de indução.

Inicialmente, provemos separadamente o caso  $a = 0$ . Temos  $\min(a, b) = \min(0, 1) = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} E_{n+a}^{(a)} F_{n+b}^{(b)} &= E_n^{(0)} F_{n+1}^{(1)} = 1_n F_{n+1}^{(1)} = F_{n+1}^{(1)} 1_{n+2} = 1 F_{n+1}^{(1)} E_{n+2}^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} a+b+n \\ 0 \end{bmatrix} F_{n+1}^{(1)} E_{n+2}^{(0)} = \sum_{j=0}^0 \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} F_{n+1-j}^{(1-j)} E_{n+2-j}^{(-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\min(a,b)} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j}^{(a-j)}. \end{aligned}$$

Ainda com  $b = 1$  fixo, provaremos por indução sobre  $a \in \mathbb{N}^*$ . Para  $a = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} E_{n+a}^{(a)} F_{n+b}^{(b)} &= E_{n+1}^{(1)} F_{n+1}^{(1)} = E_{n+1} F_{n+1} \\ &= F_{n+3} E_{n+3} + [n+2] 1_{n+2} = F_{n+3} E_{n+3} + [n+2] 1_{n+2} 1_{n+2} \\ &= \begin{bmatrix} n+2 \\ 0 \end{bmatrix} F_{n+3}^{(1)} E_{n+3}^{(1)} + \begin{bmatrix} n+2 \\ 1 \end{bmatrix} F_{n+2}^{(0)} E_{n+2}^{(0)} \\ &= \sum_{j=0}^1 \begin{bmatrix} n+2 \\ j \end{bmatrix} F_{n+3-j}^{(1-j)} E_{n+3-j}^{(1-j)} = \sum_{j=0}^{\min(1,1)} \begin{bmatrix} n+2 \\ j \end{bmatrix} F_{n+3-j}^{(1-j)} E_{n+3-j}^{(1-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\min(a,b)} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j}^{(a-j)}. \end{aligned}$$

Agora suponhamos, por hipótese de indução, que a expressão valha para  $b = 1$  e para um certo  $a \in \mathbb{N}^*$ . Então, temos:

$$\begin{aligned} E_{n+a+1}^{(a+1)} F_{n+b}^{(b)} &= E_{n+a+1}^{(a+1)} F_{n+1}^{(1)} = \left( \frac{1}{[a+1]!} \prod_{k=1}^{a+1} E_{n+2a-2k+3} \right) F_{n+1} \\ &= \frac{1}{[a+1]} \left( \frac{1}{[a]!} E_{n+2a+1} E_{n+2a-1} \cdots E_{n+3} \right) E_{n+1} F_{n+1} \\ &= \frac{1}{[a+1]} E_{n+a+2}^{(a)} (F_{n+3} E_{n+3} + [n+2] 1_{n+2}) \\ &= \frac{1}{[a+1]} E_{n+a+2}^{(a)} F_{n+3}^{(1)} E_{n+3} + \frac{[n+2]}{[a+1]} E_{n+a+2}^{(a)} 1_{n+2} \\ &= \frac{1}{[a+1]} \left( \sum_{j=0}^{\min(a,1)} \begin{bmatrix} a+n+3 \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a-j+3}^{(1-j)} E_{n+a-j+4}^{(a-j)} \right) E_{n+3} + \frac{[n+2]}{[a+1]} E_{n+a+2}^{(a)} 1_{n+2} \\ &= \frac{1}{[a+1]} \left( \sum_{j=0}^1 \begin{bmatrix} a+n+3 \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a-j+3}^{(1-j)} E_{n+a-j+4}^{(a-j)} \right) E_{n+3} + \frac{[n+2]}{[a+1]} E_{n+a+2}^{(a)} 1_{n+2} \\ &= \frac{1}{[a+1]} \begin{bmatrix} a+n+3 \\ 0 \end{bmatrix} F_{n+2a+3}^{(1)} E_{n+a+4}^{(a)} E_{n+3} \\ &+ \frac{1}{[a+1]} \begin{bmatrix} a+n+3 \\ 1 \end{bmatrix} F_{n+2a+2}^{(0)} E_{n+a+3}^{(a-1)} E_{n+3} = \frac{[n+2]}{[a+1]} E_{n+a+2}^{(a)} 1_{n+2} \\ &+ \frac{1}{[a+1]} F_{n+2a+3}^{(1)} \left( \frac{1}{[a]!} \prod_{k=1}^a E_{n+2a-2k+5} \right) E_{n+3} \\ &+ \frac{[a+n+3]}{[a+1]} F_{n+2a+2}^{(0)} \left( \frac{1}{[a-1]!} \prod_{l=1}^{a-1} E_{n+2a-2l+3} \right) E_{n+3} + \frac{[n+2]}{[a+1]} 1_{n+2a+2} E_{n+a+2}^{(a)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= F_{n+2a+3}^{(1)} E_{n+a+3}^{(a+1)} + \frac{[a+n+3][a]}{[a+1]} F_{n+2a+2}^{(0)} E_{n+a+2}^{(a)} \\
&+ \frac{[n+2]}{[a+1]} F_{n+2a+2}^{(0)} E_{n+a+2}^{(a)} \\
&= F_{n+2a+3}^{(1)} E_{n+a+3}^{(a+1)} + \frac{[a+n+3][a] + [n+2]}{[a+1]} F_{n+2a+2}^{(0)} E_{n+a+2}^{(a)} \\
&= F_{n+2a+3}^{(1)} E_{n+a+3}^{(a+1)} + [a+n+2] F_{n+2a+2}^{(0)} E_{n+a+2}^{(a)} \\
&= 1 \cdot F_{n+2a+3}^{(1)} E_{n+a+3}^{(a+1)} + [a+n+2] F_{n+2a+2}^{(0)} E_{n+a+2}^{(a)} \\
&= \begin{bmatrix} a+n+2 \\ 0 \end{bmatrix} F_{n+2a+3}^{(1)} E_{n+a+3}^{(a+1)} + \begin{bmatrix} a+n+2 \\ 1 \end{bmatrix} F_{n+2a+2}^{(0)} E_{n+a+2}^{(a)} \\
&= \sum_{j=0}^1 \begin{bmatrix} a+n+2 \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a-j+3}^{(1-j)} E_{n+a-j+3}^{(a-j+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\min(a+1,1)} \begin{bmatrix} a+n+2 \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a-j+3}^{(1-j)} E_{n+a-j+3}^{(a-j+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\min(a+1,b)} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j+2}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j+1}^{(a-j+1)},
\end{aligned}$$

como queríamos provar. Voltemos agora à indução sobre  $b$ . Suponhamos que (1.2.9) valha para um certo  $b \in \mathbb{N}^*$ . Temos dois casos a analisar:  $a \leq b$  e  $a > b$ .

Para  $a \leq b$  temos  $\min(a, b) = \min(a, b+1) = a$  e então:

$$\begin{aligned}
E_{n+a}^{(a)} F_{n+b+1}^{(b+1)} &= E_{n+a}^{(a)} \left( \frac{1}{[b+1]!} F_{n+1} \cdots F_{n+2b+1} \right) \\
&= E_{n+a}^{(a)} \frac{1}{[b+1]} \left( \frac{1}{[b]!} F_{n+1} \cdots F_{n+2b-1} \right) F_{n+2b+1} \\
&= \frac{1}{[b+1]} E_{n+a}^{(a)} F_{n+b}^{(b)} F_{n+2b+1}^{(1)} \\
&= \frac{1}{[b+1]} \left( \sum_{j=0}^{\min(a,b)} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j}^{(a-j)} \right) F_{n+2b+1}^{(1)} \\
&= \frac{1}{[b+1]} \sum_{j=0}^a \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j}^{(a-j)} F_{n+2b+1}^{(1)}
\end{aligned}$$

Usaremos a base de indução para calcular  $E_{n+a+2b-j}^{(a-j)} F_{n+2b+1}^{(1)}$ . Temos:

$$E_{n+a+2b-j}^{(a-j)} F_{n+2b+1}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\min(a-j,1)} \begin{bmatrix} a+2b+n-j+1 \\ k \end{bmatrix} F_{n+2a+2b-2j-k+1}^{(1-k)} E_{n+a+2b-j-k+2}^{(a-j-k)}. \quad (1.2.11)$$

Note que  $0 \leq j \leq a$ . Logo,

$$\min(a-j, 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = a \\ 1 & \text{se } 0 \leq j < a \end{cases}$$

Se  $j = a$ , ficamos com:

$$E_{n+a+2b-j}^{(a-j)} F_{n+2b+1}^{(1)} = E_{n+2b}^{(0)} F_{n+2b+1}^{(1)} = 1_{n+2b} F_{n+2b+1}^{(1)} = F_{n+2b+1}^{(1)} 1_{n+2b+2} = F_{n+2b+1}^{(1)} E_{n+2b+2}^{(0)}.$$

Agora, se  $0 \leq j < a$ :

$$\begin{aligned} E_{n+a+2b-j}^{(a-j)} F_{n+2b+1}^{(1)} &= \sum_{k=0}^{\min(a-j,1)} \begin{bmatrix} a+2b+n-j+1 \\ k \end{bmatrix} F_{n+2a+2b-2j-k+1}^{(1-k)} E_{n+a+2b-j-k+2}^{(a-j-k)} \\ &= \sum_{k=0}^1 \begin{bmatrix} a+2b+n-j+1 \\ k \end{bmatrix} F_{n+2a+2b-2j-k+1}^{(1-k)} E_{n+a+2b-j-k+2}^{(a-j-k)} \\ &= F_{n+2a+2b-2j+1}^{(1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} + [a+2b+n-j+1] F_{n+2a+2b-2j}^{(0)} E_{n+a+2b-j+1}^{(a-j-1)} \\ &= F_{n+2a+2b-2j+1}^{(1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} + [a+2b+n-j+1] 1_{n+2a+2b-2j} E_{n+a+2b-j+1}^{(a-j-1)} \\ &= F_{n+2a+2b-2j+1}^{(1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} + [a+2b+n-j+1] E_{n+a+2b-j+1}^{(a-j-1)}. \end{aligned}$$

Desse modo:

$$\begin{aligned} E_{n+a}^{(a)} F_{n+b+1}^{(b+1)} &= \begin{bmatrix} a+b+n \\ a \end{bmatrix} \frac{F_{n+a+b}^{(b-a)} F_{n+2b+1}^{(1)} E_{n+2b+2}^{(0)}}{[b+1]} \\ &+ \sum_{j=0}^{a-1} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} F_{n+2a+2b-2j+1}^{(1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b+1]} \\ &+ \sum_{j=0}^{a-1} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{[a+2b+n-j+1] F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j+1}^{(a-j-1)}}{[b+1]} \\ &= \begin{bmatrix} a+b+n \\ a \end{bmatrix} \frac{F_{n+2a+1} \cdots F_{n+2b-1} F_{n+2b+1} E_{n+2b+2}^{(0)}}{[b-a]! [b+1]} \\ &+ \sum_{j=0}^{a-1} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{F_{n+2a+1} \cdots F_{n+2a+2b-2j+1} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b-j]! [b+1]} \\ &+ \sum_{j=0}^{a-1} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{[a+2b+n-j+1] F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j+1}^{(a-j-1)}}{[b+1]} \\ &= \begin{bmatrix} a+b+n \\ a \end{bmatrix} \frac{[b-a+1] F_{n+a+b+1}^{(b-a+1)} E_{n+2b+2}^{(0)}}{[b+1]} \\ &+ \sum_{j=0}^{a-1} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{[b-j+1] F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b+1]} \\ &+ \sum_{j=0}^{a-1} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{[n+a+2b-j+1] F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j+1}^{(a-j-1)}}{[b+1]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a+b+n \\ a \end{bmatrix} \frac{[b-a+1]F_{n+a+b+1}^{(b-a+1)}E_{n+2b+2}^{(0)}}{[b+1]} + F_{n+2a+b+1}^{(b+1)}E_{n+a+2b+2}^{(a)} \\
&+ \sum_{j=1}^{a-1} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{[b-j+1]F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)}E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b+1]} \\
&+ \sum_{j=0}^{a-2} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{[n+a+2b-j+1]F_{n+2a+b-j}^{(b-j)}E_{n+a+2b-j+1}^{(a-j-1)}}{[b+1]} \\
&+ \begin{bmatrix} a+b+n \\ a-1 \end{bmatrix} \frac{[n+2b+2]F_{n+a+b+1}^{(b-a+1)}E_{2b+n+2}^{(0)}}{[b+1]} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} a+b+n \\ a \end{bmatrix} [b-a+1] + \begin{bmatrix} a+b+n \\ a-1 \end{bmatrix} [2b+n+2]}{[b+1]} F_{n+a+b+1}^{(b-a+1)}E_{n+2b+2}^{(0)} \\
&+ F_{n+2a+b+1}^{(b+1)}E_{n+a+2b+2}^{(a)} + \sum_{j=1}^{a-1} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{[b-j+1]F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)}E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b+1]} \\
&+ \sum_{j=1}^{a-1} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j-1 \end{bmatrix} \frac{[n+a+2b-j+2]F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)}E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b+1]} \\
&= F_{n+2a+b+1}^{(b+1)}E_{n+a+2b+2}^{(a)} + \sum_{j=1}^a \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{[b-j+1]}{[b+1]} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)}E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} \\
&+ \sum_{j=1}^a \begin{bmatrix} a+b+n \\ j-1 \end{bmatrix} \frac{[n+a+2b-j+2]}{[b+1]} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)}E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} \\
&= F_{n+2a+b+1}^{(b+1)}E_{n+a+2b+2}^{(a)} + \sum_{j=1}^a \begin{bmatrix} a+b+n+1 \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)}E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} \\
&= \sum_{j=0}^a \begin{bmatrix} a+b+n+1 \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)}E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} \\
&= \sum_{j=0}^{\min(a,b+1)} \begin{bmatrix} a+b+n+1 \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)}E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}.
\end{aligned}$$

Agora, suponhamos que  $a > b$ . Neste caso, temos  $\min(a, b) = b$  e  $\min(a, b+1) = b+1$ .

$$\begin{aligned}
E_{n+a}^{(a)}F_{n+b+1}^{(b+1)} &= E_{n+a}^{(a)} \left( \frac{1}{[b+1]!} F_{n+1} \cdots F_{n+2b+1} \right) \\
&= E_{n+a}^{(a)} \frac{1}{[b+1]} \left( \frac{1}{[b]!} F_{n+1} \cdots F_{n+2b-1} \right) F_{n+2b+1} \\
&= \frac{1}{[b+1]} E_{n+a}^{(a)} F_{n+b}^{(b)} F_{n+2b+1}^{(1)} \\
&= \frac{1}{[b+1]} \left( \sum_{j=0}^{\min(a,b)} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j}^{(a-j)} \right) F_{n+2b+1}^{(1)} \\
&= \frac{1}{[b+1]} \sum_{j=0}^b \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} E_{n+a+2b-j}^{(a-j)} F_{n+2b+1}^{(1)}. \tag{1.2.12}
\end{aligned}$$

Agora,  $0 \leq j \leq b < a$  e então  $a - j \geq 1$ . Logo,  $\min(a - j, 1) = 1$ . Desse modo, a expressão (1.2.11) se escreve como:

$$\begin{aligned} E_{n+a+2b-j}^{(a-j)} F_{n+2b+1}^{(1)} &= \sum_{k=0}^1 \left[ \begin{matrix} a+2b+n-j+1 \\ k \end{matrix} \right] F_{n+2a+2b-2j-k+1}^{(1-k)} E_{n+a+2b-j-k+2}^{(a-j-k)} \\ &= F_{n+2a+2b-2j+1}^{(1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} + [n+a+2b-j+1] F_{n+2a+2b-2j}^{(0)} E_{n+a+2b-j+1}^{(a-j-1)}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Daí, substituindo (1.2.13) em (1.2.12):

$$\begin{aligned} E_{n+a}^{(a)} F_{n+b+1}^{(b+1)} &= \sum_{j=0}^b \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ j \end{matrix} \right] \frac{F_{n+2a+b-j}^{(b-j)} F_{n+2a+2b-2j+1}^{(1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b+1]} \\ &+ \sum_{i=0}^b \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ i \end{matrix} \right] \frac{[n+a+2b-i+1] F_{n+2a+b-i}^{(b-i)} F_{n+2a+2b-2i}^{(0)} E_{n+a+2b-i+1}^{(a-i-1)}}{[b+1]} \\ &= \sum_{j=0}^b \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ j \end{matrix} \right] \frac{F_{n+2a+1} \cdots F_{n+2a+2b-2j+1} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b-j]! [b+1]} \\ &+ \sum_{i=0}^b \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ i \end{matrix} \right] \frac{[n+a+2b-i+1] F_{n+2a+b-i}^{(b-i)} E_{n+a+2b-i+1}^{(a-i-1)}}{[b+1]} \\ &= \sum_{j=0}^b \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ j \end{matrix} \right] \frac{[b-j+1]! F_{n+2a+1} \cdots F_{n+2a+2b-2j+1} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b-j]! [b-j+1]! [b+1]} \\ &+ \sum_{i=0}^b \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ i \end{matrix} \right] \frac{[n+a+2b-i+1] F_{n+2a+b-i}^{(b-i)} E_{n+a+2b-i+1}^{(a-i-1)}}{[b+1]} \\ &= \sum_{j=0}^b \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ j \end{matrix} \right] \frac{[b-j+1] F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b+1]} \\ &+ \sum_{i=0}^b \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ i \end{matrix} \right] \frac{[n+a+2b-i+1] F_{n+2a+b-i}^{(b-i)} E_{n+a+2b-i+1}^{(a-i-1)}}{[b+1]} \\ &= F_{n+2a+b+1}^{(b+1)} E_{n+a+2b+2}^{(a)} \\ &+ \sum_{j=1}^b \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ j \end{matrix} \right] \frac{[b-j+1] F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b+1]} \\ &+ \sum_{i=0}^{b-1} \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ i \end{matrix} \right] \frac{[n+a+2b-i+1] F_{n+2a+b-i}^{(b-i)} E_{n+a+2b-i+1}^{(a-i-1)}}{[b+1]} \\ &+ \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ b \end{matrix} \right] \frac{[n+a+b+1] F_{n+2a}^{(0)} E_{n+a+b+1}^{(a-b-1)}}{[b+1]} \\ &= F_{n+2a+b+1}^{(b+1)} E_{n+a+2b+2}^{(a)} \\ &+ \sum_{j=1}^b \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ j \end{matrix} \right] \frac{[b-j+1] F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}}{[b+1]} \\ &+ \sum_{i=1}^b \left[ \begin{matrix} a+b+n \\ i-1 \end{matrix} \right] \frac{[n+a+2b-i+2] F_{n+2a+b-i+1}^{(b-i+1)} E_{n+a+2b-i+2}^{(a-i)}}{[b+1]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} a+b+n \\ b \end{bmatrix} \frac{[n+a+b+1]F_{n+2a}^{(0)}E_{n+a+b+1}^{(a-b-1)}}{[b+1]} \\
& = F_{n+2a+b+1}^{(b+1)}E_{n+a+2b+2}^{(a)} \\
& + \sum_{j=1}^b \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{[b-j+1]}{[b+1]} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} \\
& + \sum_{j=1}^b \begin{bmatrix} a+b+n \\ j-1 \end{bmatrix} \frac{[n+a+2b-j+2]}{[b+1]} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} \\
& + \begin{bmatrix} a+b+n \\ b \end{bmatrix} \frac{[n+a+b+1]F_{n+2a}^{(0)}E_{n+a+b+1}^{(a-b-1)}}{[b+1]} \\
& = F_{n+2a+b+1}^{(b+1)}E_{n+a+2b+2}^{(a)} \\
& + \sum_{j=1}^{b+1} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j \end{bmatrix} \frac{[b-j+1]}{[b+1]} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} \\
& + \sum_{j=1}^{b+1} \begin{bmatrix} a+b+n \\ j-1 \end{bmatrix} \frac{[n+a+2b-j+2]}{[b+1]} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} \\
& = F_{n+2a+b+1}^{(b+1)}E_{n+a+2b+2}^{(a)} \\
& + \sum_{j=1}^{b+1} \begin{bmatrix} a+b+n+1 \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} \\
& = \sum_{j=0}^{b+1} \begin{bmatrix} a+b+n+1 \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)} \\
& = \sum_{j=1}^{\min(a,b+1)} \begin{bmatrix} a+b+n+1 \\ j \end{bmatrix} F_{n+2a+b-j+1}^{(b-j+1)} E_{n+a+2b-j+2}^{(a-j)}.
\end{aligned}$$

□

Sejam  $1_m \dot{U} 1_n = \{1_m x 1_n | x \in \dot{U}\}$  e  $1_{m\mathcal{A}} \dot{U} 1_n = \{1_m x 1_n | x \in \mathcal{A}\dot{U}\}$ , para quaisquer  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Note que cada um dos  $1_m \dot{U} 1_n$  é uma subálgebra de  $\dot{U}$  e cada  $1_{m\mathcal{A}} \dot{U} 1_n$  é uma subálgebra de  $\mathcal{A}\dot{U}$ . Além disso, se  $m \neq n$  o produto de quaisquer dois elementos da subálgebra  $1_m \dot{U} 1_n$  (resp.  $1_{m\mathcal{A}} \dot{U} 1_n$ ) é zero.

**Proposição 1.2.** *Temos as seguintes decomposições em somas diretas de subálgebras:*

$$\dot{U} = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} 1_m \dot{U} 1_n \quad \mathcal{A}\dot{U} = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} 1_{m\mathcal{A}} \dot{U} 1_n.$$

*Demonstração.* Afirmamos que

$$x = \sum_{k \in A} 1_k x = \sum_{\ell \in B} x 1_\ell, \quad (1.2.14)$$

para todo  $x \in \dot{U}$ , onde  $A = \{k \in \mathbb{Z}; 1_k x \neq 0\}$ ,  $B = \{\ell \in \mathbb{Z}; x 1_\ell \neq 0\}$  são subconjuntos finitos de índices. Obviamente, no caso  $x = 0$  temos  $A = B = \emptyset$ . Quando  $x$  é um dos geradores de  $\dot{U}$ , essas somas são justamente as relações (1.2.1)-(1.2.3) de  $\dot{U}$ .

Agora suponhamos que  $x, y \in \dot{U}$  sejam tais que  $x = \sum_{k \in A_1} 1_k x = \sum_{\ell \in B_1} x 1_\ell$  e  $y = \sum_{k \in A_2} 1_k y = \sum_{\ell \in B_2} y 1_\ell$ , onde  $A_i, B_j \subset \mathbb{Z}$  são conjuntos finitos definidos da mesma maneira que  $A, B$  em (1.2.14), para  $i = 1, 2$ . Daí, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A_1 \cup A_2} 1_k(x + y) &= \sum_{k \in A_1 \cup A_2} (1_k x + 1_k y) = \left( \sum_{k \in A_1} 1_k x \right) + \left( \sum_{k \in A_2} 1_k y \right) \\ &= x + y = \left( \sum_{\ell \in B_1} x 1_\ell \right) + \left( \sum_{\ell \in B_2} y 1_\ell \right) \\ &= \sum_{\ell \in B_1 \cup B_2} (x 1_\ell + y 1_\ell) = \sum_{\ell \in B_1 \cup B_2} (x + y) 1_\ell. \end{aligned}$$

$$\sum_{k \in A_1} 1_k(xy) = \left( \sum_{k \in A_1} 1_k x \right) y = xy = x \left( \sum_{\ell \in B_2} y 1_\ell \right) = \sum_{\ell \in B_2} (xy) 1_\ell.$$

De (1.2.14), podemos concluir que

$$x = \sum_{k \in A} 1_k x = \sum_{k \in A} \left( 1_k \left( \sum_{\ell \in B} x 1_\ell \right) \right) = \sum_{k \in A} \sum_{\ell \in B} 1_k x 1_\ell = \sum_{k, \ell \in A \cap B} 1_k x 1_\ell,$$

para todo  $x \in \dot{U}$ . Logo, segue que  $\dot{U}$  é soma das subálgebras  $1_m \dot{U} 1_n$ , para todos  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Para ver que essa soma é direta, suponhamos que  $\sum_{m, n \in C} 1_m x_{m, n} 1_n = 0$ , onde  $C \subset \mathbb{Z}$  é algum conjunto finito de índices. Multipliquemos essa igualdade à esquerda por  $1_k$  e à direita por  $1_l$ , para quaisquer  $k, l \in C$ . Daí segue que  $1_k x_{k, l} 1_l = 0$ , para quaisquer  $k, l \in C$ . Portanto, temos  $\dot{U} = \bigoplus_{m, n \in \mathbb{Z}} 1_m \dot{U} 1_n$ .

O procedimento é análogo para se demonstrar a decomposição de  ${}_{\mathcal{A}}\dot{U}$  em soma direta de subálgebras. □

A álgebra  $\dot{U}$  não possui unidade. De fato, se algum  $x \in \dot{U} = \bigoplus_{m, n \in \mathbb{Z}} 1_m \dot{U} 1_n$  fosse unidade, então poderíamos escrevê-lo como  $x = \sum_{m, n \in A} 1_m x_{m, n} 1_n$ , onde  $A \subset \mathbb{Z}$  é um conjunto finito. Agora escolhendo um índice  $k \in \mathbb{Z} \setminus A$ , teríamos:  $1_k x = 1_k \sum_{m, n \in A} 1_m x_{m, n} 1_n = \sum_{m, n \in A} 1_k 1_m x_{m, n} 1_n = 0$ , pois  $k \neq m$ , para todo  $m \in C$ . Isso contradiz o fato de  $x$  ser unidade.

**Definição 1.2.** *Uma categoria  $\mathcal{A}$  é pré-aditiva se, para quaisquer objetos  $A, B$  de  $\mathcal{A}$ , a classe de morfismos  $\mathcal{A}(A, B)$  é um grupo abeliano, cuja operação é denotada por  $+$ . Além disso, a composição de morfismos em  $\mathcal{A}$  é distributiva em relação a essa operação, ou seja, para quaisquer morfismos  $f, f' : A \rightarrow B$  e  $g, g' : B \rightarrow C$ , temos:*

- $(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$ ,
- $g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$ .

Álgebras com sistemas de idempotentes possuem uma interpretação natural como categorias pré-aditivas. Por exemplo,  $\dot{U}$  é uma categoria onde  $\text{Ob}(\dot{U}) = \mathbb{Z}$  e  $\text{Hom}(m, n) = 1_m \dot{U} 1_n$ , para quaisquer  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Os idempotentes  $1_m$  são os morfismos identidade desta categoria e a composição de morfismos é dada pela multiplicação de  $\dot{U}$ . Uma interpretação análoga também vale para  ${}_{\mathcal{A}}\dot{U}$ .

A base canônica de Lusztig  $\dot{\mathbb{B}}$  de  $\dot{U}$  consiste dos elementos:

- i)  $E_{-n+a}^{(a)} F_{-n+b}^{(b)} \in 1_{-n+2a} \dot{U} 1_{-n+2b}$ , para  $a, b, n \in \mathbb{N}, n \geq a + b$ ,
- ii)  $F_{n-b}^{(b)} E_{n-a}^{(a)} \in 1_{n-2b} \dot{U} 1_{n-2a}$ , para  $a, b, n \in \mathbb{N}, n \geq a + b$ .

Note que nesta base, (apenas) para  $n = a + b$ , temos a igualdade entre os elementos  $E_{-n+a}^{(a)} F_{-n+b}^{(b)} = E_{-b}^{(a)} F_{-a}^{(b)}$  e  $F_{n-b}^{(b)} E_{n-a}^{(a)} = F_a^{(b)} E_b^{(a)}$ .

A importância desta base é que as constantes de estrutura com respeito a ela estão em  $\mathbb{N}[q, q^{-1}]$ . Podemos reescrever a base canônica de Lusztig da seguinte forma:

- i)  $E_{n+a-2b}^{(a)} F_{n-b}^{(b)} \in 1_{n+2a-2b} \dot{U} 1_{n-2b}$ , para  $a, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n \leq b - a$ ,
- ii)  $F_{n+2a-b}^{(b)} E_{n+a}^{(a)} \in 1_{n+2a-2b} \dot{U} 1_{n-2a}$ , para  $a, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n \geq b - a$ .

Denote por  ${}_{m}\dot{\mathbb{B}}_n$  o conjunto dos elementos de  $\dot{\mathbb{B}}$  que pertencem a  $1_m \dot{U} 1_n$ . Então temos  $\dot{\mathbb{B}} = \bigcup_{m, n \in \mathbb{Z}} {}_{m}\dot{\mathbb{B}}_n$ .

Podemos definir as aplicações  $\psi, \omega, \sigma, \tau$  e  $\rho$  para a forma idempotente de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  onde:

- $\psi(1_n) = 1_n, \psi(E_n) = E_n$  e  $\psi(F_n) = F_n$ ;
- $\omega(1_n) = 1_{-n}, \omega(E_n) = F_{-n}$  e  $\omega(F_n) = E_{-n}$ ;
- $\sigma(1_n) = 1_{-n}, \sigma(E_n) = E_{-n}$  e  $\sigma(F_n) = F_{-n}$ ;
- $\tau(1_n) = 1_n, \tau(E_n) = q^{-n} F_n$  e  $\tau(F_n) = q^n E_n$ ;
- $\rho(1_n) = 1_n, \rho(E_n) = q^n F_n$  e  $\rho(F_n) = q^{-n} E_n$ .

Restringindo à  $\mathcal{A}$ -subálgebra  ${}_{\mathcal{A}}\dot{U}$ , temos:

- $\psi(q^s E_{m-a}^{(a)} F_{n-b}^{(b)}) = q^{-s} E_{m-a}^{(a)} F_{n-b}^{(b)}$  e  $\psi(q^s F_{m+b}^{(b)} E_{n+a}^{(a)}) = q^{-s} F_{m+b}^{(b)} E_{n+a}^{(a)}$ ;
- $\omega(q^s E_{m-a}^{(a)} F_{n-b}^{(b)}) = q^s F_{-m+a}^{(a)} E_{-n+b}^{(b)}$  e  $\omega(q^s F_{m+b}^{(b)} E_{n+a}^{(a)}) = q^s E_{-m-b}^{(b)} F_{-n-a}^{(a)}$ ;
- $\sigma(q^s E_{m-a}^{(a)} F_{n-b}^{(b)}) = q^s F_{-n+b}^{(b)} E_{-m+a}^{(a)}$  e  $\sigma(q^s F_{m+b}^{(b)} E_{n+a}^{(a)}) = q^s E_{-n-a}^{(a)} F_{-m-b}^{(b)}$ ;
- $\tau(q^s E_{m-a}^{(a)} F_{n-b}^{(b)}) = q^{-s+a(-m+a)+b(n-b)} E_{n-b}^{(b)} F_{m-a}^{(a)}$  e  
 $\tau(q^s F_{m+b}^{(b)} E_{n+a}^{(a)}) = q^{-s+a(-m+a)+b(n-b)} F_{n+a}^{(a)} E_{m+b}^{(b)}$ ;
- $\rho(q^s E_{m-a}^{(a)} F_{n-b}^{(b)}) = q^{s-a(-m+a)-b(n-b)} E_{n-b}^{(b)} F_{m-a}^{(a)}$  e  
 $\rho(q^s F_{m+b}^{(b)} E_{n+a}^{(a)}) = q^{s-a(-m+a)-b(n-b)} F_{n+a}^{(a)} E_{m+b}^{(b)}$ .

Note que  $\psi$  fixa todos os elementos da base canônica de Lusztig.

### 1.3 A forma semilinear sobre $\dot{U}$

**Proposição 1.3.** [Lusztig [23] 26.1.1] Existe uma aplicação  $(,): \dot{U} \times \dot{U} \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $(,)$  é bilinear, ou seja,  $(fx, y) = f(x, y)$ ,  $(x, fy) = f(x, y)$ , para  $f \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  e  $x, y \in \dot{U}$ ,
2.  $(1_n x 1_m, 1_{n'} y 1_{m'}) = 0$ , para quaisquer  $x, y \in \dot{U}$  a menos que  $n = n'$  e  $m = m'$ ,
3.  $(ux, y) = (x, \rho(u)y)$ , para  $u \in \mathbf{U}$  e  $x, y \in \dot{U}$ ,
4.  $\langle E_{n+a}^{(a)}, E_{n+a}^{(a)} \rangle = \langle F_{n-a}^{(a)}, F_{n-a}^{(a)} \rangle = \prod_{s=1}^a \frac{1}{(1-q^{-2s})}$  (ver [23], Lema 1.4.4),
5.  $(x, y) = (y, x)$ , para quaisquer  $x, y \in \dot{U}$ .

**Definição 1.3.** Defina uma forma semilinear  $\langle , \rangle: \dot{U} \times \dot{U} \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  por

$$\langle x, y \rangle := \overline{(x, \psi(y))}, \text{ para quaisquer } x, y \in \dot{U}.$$

Segue da Proposição 1.3 que esta forma semilinear satisfaz as seguintes propriedades:

**Proposição 1.4.** A aplicação  $\langle , \rangle: \dot{U} \times \dot{U} \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  satisfaz:

1.  $\langle , \rangle$  é semilinear, ou seja,  $\langle fx, y \rangle = \bar{f} \langle x, y \rangle$ ,  $\langle x, fy \rangle = f \langle x, y \rangle$ , para  $f \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  e  $x, y \in \dot{U}$ ,
2.  $\langle 1_n x 1_m, 1_{n'} y 1_{m'} \rangle = 0$ , para quaisquer  $x, y \in \dot{U}$  a menos que  $n = n'$  e  $m = m'$ ,
3. propriedade adjunta:  $\langle ux, y \rangle = \langle x, \tau(u)y \rangle$ , para  $u \in \mathbf{U}$  e  $x, y \in \dot{U}$ ,
4. propriedade Grassmanniana:  $\langle E_{n+a}^{(a)}, E_{n+a}^{(a)} \rangle = \langle F_{n-a}^{(a)}, F_{n-a}^{(a)} \rangle = \prod_{j=1}^a \frac{1}{(1-q^{2j})}$ ,
5.  $\langle x, y \rangle = \langle \psi(y), \psi(x) \rangle$ , para quaisquer  $x, y \in \dot{U}$ .

*Demonstração.* Provaremos a propriedade adjunta. As outras seguem diretamente. De (1.1.1), temos:

$$\langle ux, y \rangle := \overline{(ux, \psi(y))} = \overline{(x, \rho(u)\psi(y))} = \overline{(x, \psi(\tau(u))\psi(y))} = \overline{(x, \psi(\tau(u)y))} =: \langle x, \tau(u)y \rangle.$$

□

A partir de agora usaremos a notação  $g(a) := \prod_{j=1}^a \frac{1}{(1-q^{2j})}$  e então

$$\langle E_{n+a}^{(a)}, E_{n+a}^{(a)} \rangle = \langle F_{n-a}^{(a)}, F_{n-a}^{(a)} 1_{n-a} \rangle = g(a).$$

A forma semilinear se restringe a aplicações:

$$(\cdot): {}_{\mathcal{A}}\dot{U} \times {}_{\mathcal{A}}\dot{U} \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}], \quad \langle , \rangle: {}_{\mathcal{A}}\dot{U} \times {}_{\mathcal{A}}\dot{U} \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}].$$



**Proposição 1.5.** *Temos as relações:*

$$\begin{aligned}\langle \omega(x), \omega(y) \rangle &= \langle x, y \rangle, \\ \langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle &= \langle x, y \rangle,\end{aligned}$$

para quaisquer  $x, y \in \dot{U}$  e  ${}_{\mathcal{A}}\dot{U}$ .

*Demonstração.* Ver as Proposições 26.1.4 e 26.1.6 de [23].  $\square$

Considere os seguintes subconjuntos de  $\dot{\mathbb{B}}$ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbb{B}}^+ &= \{E_{n+a-2b}^{(a)}F_{n-b}^{(b)} \mid a, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n \leq b - a\}, \\ \dot{\mathbb{B}}^- &= \{F_{n+2c-d}^{(d)}E_{n+c}^{(c)} \mid c, d \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n \geq d - c\}.\end{aligned}$$

Note que  $\dot{\mathbb{B}}^+ \cap \dot{\mathbb{B}}^-$  consiste dos elementos tais que  $n = b - a = d - c$ .

**Lema 1.1.** *Para  $m, n \in \mathbb{Z}$  fixos,  ${}_{m}\dot{\mathbb{B}}_n \subset \dot{\mathbb{B}}^+$  ou  ${}_{m}\dot{\mathbb{B}}_n \subset \dot{\mathbb{B}}^-$ . Isso significa que  ${}_{m}\dot{\mathbb{B}}_n$  só contém elementos do mesmo tipo, o primeiro tipo sendo  $E_{m-a}^{(a)}F_{n-b}^{(b)}$  e o segundo tipo sendo  $F_{m+d}^{(d)}E_{n+c}^{(c)}$ , exceto quando  $n = b - a = d - c$ .*

*Demonstração.* Se  $E_{m-a}^{(a)}F_{n-b}^{(b)} \in {}_{m}\dot{\mathbb{B}}_n$  e  $F_{m+d}^{(d)}E_{n+c}^{(c)} \in {}_{m}\dot{\mathbb{B}}_n$ , então  $m = n + 2(a - b) = n + 2(c - d)$ , ou seja,  $b - a = d - c$ . Segue que  $n \leq b - a = d - c \leq n$  então  $n = b - a = d - c$ .  $\square$

Este Lema implica que para determinarmos a forma semilinear em todos os elementos de  $\dot{\mathbb{B}}$ , basta calculá-la apenas nos pares de elementos do mesmo tipo, ou seja,

$$\begin{aligned}\langle E_{n+a-2b}^{(a)}F_{n-b}^{(b)}, E_{n+c-2d}^{(c)}F_{n-d}^{(d)} \rangle, & \quad \text{onde } a - b = c - d \text{ e } n \leq b - a, \\ \langle F_{n+2a-b}^{(b)}E_{n+a}^{(a)}, F_{n+2c-d}^{(d)}E_{n+c}^{(c)} \rangle, & \quad \text{onde } a - b = c - d \text{ e } n \geq b - a,\end{aligned}$$

já que quando  $n = b - a$  os elementos da base  $E_{n+a-2b}^{(a)}F_{n-b}^{(b)}$  e  $F_{n+2a-b}^{(b)}E_{n+a}^{(a)}$  coincidem. É o que faremos na Proposição a seguir:

**Proposição 1.6.** *O valor da forma semilinear  $\langle x, y \rangle$ , onde  $x, y \in \dot{\mathbb{B}}$  é dado pelas seguintes fórmulas:*

$$\begin{aligned}\langle E_{n+a-2b}^{(a)}F_{n-b}^{(b)}, E_{n+c-2d}^{(c)}F_{n-d}^{(d)} \rangle &= \sum_{j=0}^{\min(a,c)} \begin{bmatrix} b+d-n \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b+c-j \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+d-j \\ d \end{bmatrix} q^{(a+c-j)(b+d-j-n)} g(b+c-j), \\ \langle F_{n+2a-b}^{(b)}E_{n+a}^{(a)}, F_{n+2c-d}^{(d)}E_{n+c}^{(c)} \rangle &= \sum_{j=0}^{\min(b,d)} \begin{bmatrix} a+c+n \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+d-j \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b+c-j \\ c \end{bmatrix} q^{(b+d-j)(a+c-j+n)} g(a+d-j),\end{aligned}$$

para  $a - b = c - d$ .

*Demonstração.* Usando as propriedades da Proposição 1.4, as relações de  $\dot{U}$  e o fato de que  $a - b = c - d$ , temos

$$\begin{aligned}
& \langle E_{n+a-2b}^{(a)} F_{n-b}^{(b)}, E_{n+c-2d}^{(c)} F_{n-d}^{(d)} \rangle = \langle F_{n-b}^{(b)}, \tau(E_{a+2b+n}^{(a)}) E_{c+2d+n}^{(c)} F_{n-d}^{(d)} \rangle \\
& = q^{-a(n+2(c-d)+a)} \langle F_{n-b}^{(b)}, F_{a-2c-2d+n}^{(a)} E_{c+2d+n}^{(c)} F_{n-d}^{(d)} \rangle \\
& = q^{-a(n+2(c-d)+a)} \sum_{j=0}^{\min(a,c)} \begin{bmatrix} a-c-(n-2d) \\ j \end{bmatrix} \langle F_{n-b}^{(b)}, E_{-c+j-2b+n}^{(c-j)} F_{-a+j+2d-n}^{(a-j)} F_{n-d}^{(d)} \rangle \\
& = q^{a(2b-a-n)} \sum_{j=0}^{\min(a,c)} \begin{bmatrix} b+d-n \\ j \end{bmatrix} \langle \tau^{-1}(E_{c-2b+j+n}^{(c-j)}) F_{n-b}^{(b)}, F_{-a-2d+j+n}^{(a-j)} F_{n-d}^{(d)} \rangle \\
& = q^{(a+c-j)(b+d-j-n)} \sum_{j=0}^{\min(a,c)} \begin{bmatrix} b+d-n \\ j \end{bmatrix} \langle F_{-c-2b+j+n}^{(c-j)} F_{n-b}^{(b)}, F_{-a-2d+j+n}^{(a-j)} F_{n-d}^{(d)} \rangle
\end{aligned}$$

e usando (1.2.7) e (1.2.8) segue o resultado. O cálculo da outra relação é análogo.  $\square$

As seguintes fórmulas para a forma semilinear são mais convenientes para o uso:

**Proposição 1.7.** *Para todos os valores de  $n \in \mathbb{Z}$  e  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ , temos:*

$$\begin{aligned}
\langle E_{n+a-2b}^{(a)} F_{n-b}^{(b)}, E_{n+c-2d}^{(c)} F_{n-d}^{(d)} \rangle & = \sum_{j=\max(0,a-c)}^{\min(a,b)} q^{2j^2+(a-d+n)(a-c-2j)} g(a-j)g(b-j)g(j)g(c-a+j), \\
\langle F_{n+2a-b}^{(b)} E_{n+a}^{(a)}, F_{n+2c-d}^{(d)} E_{n+c}^{(c)} \rangle & = \sum_{j=\max(0,a-c)}^{\min(a,b)} q^{2j^2+(b-c-n)(b-d-2j)} g(a-j)g(b-j)g(j)g(c-a+j).
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Ver a Seção 10 de [21].  $\square$

## Capítulo 2

# Anel nilHecke e polinômios de Schubert

### 2.1 Anel nilHecke

Para cada  $a \in \mathbb{N}$ , definimos o **anel nilHecke**  $\mathcal{NH}_a$  como o anel com unidade gerado por  $u_i$ , para  $1 \leq i < a$  e  $\chi_j$ , para  $1 \leq j \leq a$ . Tais geradores satisfazem as relações:

$$u_i^2 = 0 \quad (1 \leq i < a), \quad (2.1.1)$$

$$u_i u_j = u_j u_i \quad \text{se } |i - j| > 1, \quad (2.1.2)$$

$$u_i u_{i+1} u_i = u_{i+1} u_i u_{i+1} \quad (1 \leq i < a - 1), \quad (2.1.3)$$

$$\chi_i \chi_j = \chi_j \chi_i \quad (1 \leq i, j \leq a), \quad (2.1.4)$$

$$u_i \chi_j = \chi_j u_i \quad \text{se } |i - j| > 1, \quad (2.1.5)$$

$$u_i \chi_i = 1 + \chi_{i+1} u_i \quad (1 \leq i < a), \quad (2.1.6)$$

$$\chi_i u_i = 1 + u_i \chi_{i+1} \quad (1 \leq i < a). \quad (2.1.7)$$

O **anel nilCoxeter**  $\mathcal{NC}_a$  é o subanel com unidade de  $\mathcal{NH}_a$  gerado por  $u_i$  para  $1 \leq i < a$ .

No grupo simétrico  $S_a$ , denotemos por  $s_i$  a transposição elementar que permuta os índices  $i$  e  $i + 1$ . Para uma permutação  $w \in S_a$ , uma expressão  $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$  de comprimento minimal é dita uma **expressão reduzida** para  $w$  e  $m$  é o **comprimento**  $\ell(w)$  de  $w$ . Denotamos por  $w_0$  o (único) elemento em  $S_a$  de comprimento maximal  $\ell(w_0) = \frac{a(a-1)}{2}$ . Mais precisamente,  $w_0 = s_1(s_2 s_1)(s_3 s_2 s_1) \cdots (s_{a-1} s_{a-2} \cdots s_2 s_1)$  e é o elemento que leva o índice  $i$  em  $a - i + 1$ , para todo  $1 \leq i \leq a$ .

Dada uma permutação  $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$  de  $S_a$ , definimos o elemento  $u_w \in \mathcal{NC}_a$  por  $u_w = u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_m}$ . Aqui é importante escolher uma expressão reduzida para  $w$  porque o elemento em  $\mathcal{NC}_a$  poderia ser zero por causa de (2.1.1). Além disso, segue das relações (2.1.2) e (2.1.3) que  $u_w$  não depende da expressão reduzida escolhida (ver a Seção 3.2 de [28]).

O anel nilHecke  $\mathcal{NH}_a$  admite uma gradação onde  $\deg u_i = -2$ , para  $1 \leq i < a$  e  $\deg \chi_j = 2$ , para  $1 \leq j \leq a$ . O anel nilCoxeter  $\mathcal{NC}_a$  herda a gradação de  $\mathcal{NH}_a$ . O conjunto  $\{u_w\}_{w \in S_a}$  é uma base de  $\mathcal{NC}_a$  como grupo abeliano livre e então o posto graduado de  $\mathcal{NC}_a$  é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}_q \mathcal{N}\mathcal{C}_a &= (1 + q^{-2})(1 + q^{-2} + q^{-4}) \cdots (1 + q^{-2} + \cdots + q^{-2(a-1)}) \\
&= \prod_{s=1}^a \frac{1 - q^{-2s}}{1 - q^{-2}} = \prod_{s=1}^a q^{1-s} [s] = q^{\frac{-a(a-1)}{2}} [a]!.
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

O anel polinomial  $\mathbb{Z}[\chi_1, \dots, \chi_a]$  é também um subanel de  $\mathcal{N}\mathcal{H}_a$ . Como grupo abeliano graduado,  $\mathcal{N}\mathcal{H}_a \cong \mathcal{N}\mathcal{C}_a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\chi_1, \dots, \chi_a]$ . Então, usando (2.1.8), temos:

$$\mathrm{rk}_q \mathcal{N}\mathcal{H}_a = \mathrm{rk}_q \mathcal{N}\mathcal{C}_a \cdot \mathrm{rk}_q \mathbb{Z}[\chi_1, \dots, \chi_a] = \left( q^{\frac{-a(a-1)}{2}} [a]! \right) \left( \frac{1}{1 - q^2} \right)^a. \tag{2.1.9}$$

Uma base para  $\mathcal{N}\mathcal{H}_a$  é dada pelo conjunto:

$$\{f(\chi)u_w | w \in S_a \text{ e } f(\chi) \text{ é um monômio mônico de } \mathbb{Z}[\chi_1, \dots, \chi_a]\}.$$

## 2.2 Operadores de diferenças divididas e polinômios de Schubert

Denote por  $\mathcal{P}_a$  o anel polinomial graduado  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_a]$  com  $\deg x_i = 2$ . Definimos os operadores de diferenças divididas por:

$$\begin{aligned}
\partial_i : \mathcal{P}_a &\rightarrow \mathcal{P}_a \\
f &\mapsto \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}},
\end{aligned}$$

para  $1 \leq i < a$ , onde  $s_i(f)$  denota o polinômio obtido de  $f$  pela permutação das variáveis  $x_i$  e  $x_{i+1}$ . Note que  $\partial_i$  está bem-definido, pois  $x_i - x_{i+1}$  sempre divide  $f - s_i(f)$ . Para ver isto, considere o monômio mônico  $p = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_a^{m_a}$  de  $\mathcal{P}_a$ . Suponhamos que  $\min(m_i, m_{i+1}) = m_i$ . Então

$$\begin{aligned}
p - s_i(p) &= x_1^{m_1} \cdots x_i^{m_i} x_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots x_a^{m_a} - x_1^{m_1} \cdots x_{i+1}^{m_i} x_i^{m_{i+1}} \cdots x_a^{m_a} \\
&= x_i^{m_i} x_{i+1}^{m_i} (x_1^{m_1} \cdots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_{i+1}^{m_{i+1}-m_i} x_{i+2}^{m_{i+2}} \cdots x_a^{m_a} - x_1^{m_1} \cdots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_{i+1}-m_i} x_{i+2}^{m_{i+2}} \cdots x_a^{m_a}) \\
&= x_i^{m_i} x_{i+1}^{m_i} (x_{i+1}^{m_{i+1}-m_i} - x_i^{m_{i+1}-m_i}) (x_1^{m_1} \cdots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_{i+2}^{m_{i+2}} \cdots x_a^{m_a}).
\end{aligned}$$

Se  $\min(m_i, m_{i+1}) = m_{i+1}$ , uma identidade análoga vale. Como  $x_i - x_{i+1}$  divide  $x_{i+1}^{m_{i+1}-m_i} - x_i^{m_{i+1}-m_i}$ , segue que  $x_i - x_{i+1}$  divide  $p - s_i(p)$ , para qualquer monômio mônico  $p$  de  $\mathcal{P}_a$ . Cada polinômio  $f$  em  $\mathcal{P}_a$  é uma combinação  $\mathbb{Z}$ -linear de monômios mônicos  $f = r_1 f_1 + r_2 f_2 \cdots + r_n f_n$ , de modo que  $f - s_i(f) = r_1 (f_1 - s_i(f_1)) + \cdots + r_n (f_n - s_i(f_n))$  e como  $x_i - x_{i+1}$  divide cada uma das parcelas  $f_k - s_i(f_k)$ ,  $x_i - x_{i+1}$  divide  $f - s_i(f)$ .

Definimos também as funções:

$$\begin{aligned}
T_i : \mathcal{P}_a &\rightarrow \mathcal{P}_a \\
f &\mapsto x_i f,
\end{aligned}$$

para  $1 \leq i \leq a$ .

**Lema 2.1.** Se  $f, g \in \mathcal{P}_a$ , o operador de diferenças divididas  $\partial_i$  ( $1 \leq i < a$ ) satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \partial_i(f + g) = \partial_i(f) + \partial_i(g);$$

$$(ii) \quad \partial_i(fg) = \partial_i(f)g + s_i(f)\partial_i(g).$$

*Demonstração.* De fato, temos:

(i)

$$\begin{aligned} \partial_i(f + g) &= \frac{(f + g) - s_i(f + g)}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f + g - s_i(f) - s_i(g)}{x_i - x_{i+1}} \\ &= \frac{f - s_i(f) + g - s_i(g)}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} + \frac{g - s_i(g)}{x_i - x_{i+1}} \\ &= \partial_i(f) + \partial_i(g). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \partial_i(fg) &= \frac{fg - s_i(fg)}{x_i - x_{i+1}} = \frac{fg - s_i(f)g + s_i(f)g - s_i(f)s_i(g)}{x_i - x_{i+1}} \\ &= \frac{fg - s_i(f)g}{x_i - x_{i+1}} + \frac{s_i(f)g - s_i(f)s_i(g)}{x_i - x_{i+1}} \\ &= \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}}g + s_i(f)\frac{g - s_i(g)}{x_i - x_{i+1}} = \partial_i(f)g + s_i(f)\partial_i(g). \end{aligned}$$

□

Pelo item (i) do Lema 2.1, os operadores de diferenças divididas  $\partial_i$  são endomorfismos do grupo abeliano  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_a]$ . Isso também vale, obviamente, para as funções  $T_j$ . Note que o núcleo e a imagem de  $\partial_i$  consistem de polinômios que são simétricos em  $x_i$  e  $x_{i+1}$ .

**Proposição 2.1.** A coleção dos operadores de diferenças divididas  $\partial_i$  e das funções  $T_j$  definem uma representação do anel nilHecke  $\mathcal{NH}_a$  no anel de endomorfismos do grupo abeliano  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_a]$ , onde  $u_i \mapsto \partial_i$  e  $\chi_j \mapsto T_j$ .

*Demonstração.* Precisamos mostrar que  $\partial_i$  e  $T_j$  satisfazem as relações (2.1.1)-(2.1.7). A relação (2.1.4) segue imediatamente da comutatividade do anel  $\mathcal{P}_a$ . As relações (2.1.1) para  $1 \leq i < a$  e (2.1.2) para  $|i - j| > 1$  ficam:

$$\begin{aligned} \partial_i^2(f) &= \partial_i \left( \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \right) = \frac{\left( \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \right) - \left( \frac{s_i(f) - f}{x_{i+1} - x_i} \right)}{x_i - x_{i+1}} \\ &= \frac{\left( \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \right) + \left( \frac{s_i(f) - f}{x_i - x_{i+1}} \right)}{x_i - x_{i+1}} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_i(\partial_j(f)) &= \partial_i \left( \frac{f - s_j(f)}{x_j - x_{j+1}} \right) = \frac{\left( \frac{f - s_j(f)}{x_j - x_{j+1}} \right) - \left( \frac{s_i(f) - s_i(s_j(f))}{x_j - x_{j+1}} \right)}{x_i - x_{i+1}} \\
&= \frac{\frac{f - s_j(f)}{x_i - x_{i+1}} - \frac{s_i(f) - s_i(s_j(f))}{x_i - x_{i+1}}}{x_j - x_{j+1}} = \frac{\frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} - \frac{s_j(f) - s_j(s_i(f))}{x_i - x_{i+1}}}{x_j - x_{j+1}} \\
&= \partial_j \left( \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \right) = \partial_j(\partial_i(f)).
\end{aligned}$$

As relações (2.1.5) para  $|i - j| > 1$  e (2.1.6)-(2.1.7) para  $1 \leq i < a$  ficam:

$$\begin{aligned}
\partial_i(T_j(f)) &= \partial_i(x_j f) = \frac{x_j f - s_i(x_j f)}{x_i - x_{i+1}} = \frac{x_j f - x_j s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \\
&= x_j \left( \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \right) = T_j(\partial_i(f)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\partial_i T_i - T_{i+1} \partial_i)(f) &= \partial_i(T_i(f)) - T_{i+1}(\partial_i(f)) = \partial_i(x_i f) - T_{i+1} \left( \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \right) \\
&= \frac{x_i f - s_i(x_i f)}{x_i - x_{i+1}} - x_{i+1} \left( \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \right) \\
&= \frac{x_i f - x_{i+1} s_i(f) - x_{i+1} f + x_{i+1} s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \\
&= \frac{(x_i - x_{i+1})f}{x_i - x_{i+1}} = f.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(T_i \partial_i - \partial_i T_{i+1})(f) &= T_i(\partial_i(f)) - \partial_i(T_{i+1}(f)) = T_i \left( \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \right) - \partial_i(x_{i+1} f) \\
&= x_i \left( \frac{f - s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \right) - \frac{x_{i+1} f - s_i(x_{i+1} f)}{x_i - x_{i+1}} \\
&= \frac{x_i f - x_i s_i(f) - x_{i+1} f + x_i s_i(f)}{x_i - x_{i+1}} \\
&= \frac{(x_i - x_{i+1})f}{x_i - x_{i+1}} = f.
\end{aligned}$$

Resta provarmos (2.1.3). Observe que pelo item (i) do Lema 2.1, basta considerarmos apenas os monômios mônicos de  $\mathcal{P}_a$ . Seja  $f \in \mathcal{P}_a$  um monômio mônico. Faremos uma demonstração por indução sobre o grau  $\deg f$ .

Se  $\deg f = 0$ , então  $f = 1$ . Logo, temos:

$$\begin{aligned}
\partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(f))) &= \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(1))) = \partial_i(\partial_{i+1}(0)) = \partial_i(0) = 0 \\
&= \partial_{i+1}(0) = \partial_{i+1}(\partial_i(0)) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(1))) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(f))).
\end{aligned}$$

Se  $\deg f = 2$ , então  $f = x_j$ , para algum  $1 \leq j \leq a$ . Note que:

$$\partial_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i, \\ -1, & \text{se } j = i + 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos os casos  $j = i$ ,  $j = i + 1$ ,  $j = i + 2$  ou  $j \neq i, i + 1, i + 2$ , que analisamos separadamente a seguir:

$$\begin{aligned} \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_j))) &= \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_i))) = \partial_i(\partial_{i+1}(1)) = \partial_i(0) = 0 \\ &= \partial_{i+1}(0) = \partial_{i+1}(\partial_i(0)) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_i))) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_j))). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_j))) &= \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_{i+1}))) = \partial_i(\partial_{i+1}(-1)) = \partial_i(0) = 0 \\ &= \partial_{i+1}(0) = \partial_{i+1}(\partial_i(1)) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_{i+1}))) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_j))). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_j))) &= \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_{i+2}))) = \partial_i(\partial_{i+1}(0)) = \partial_i(0) = 0 \\ &= \partial_{i+1}(0) = \partial_{i+1}(\partial_i(-1)) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_{i+2}))) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_j))). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_j))) &= \partial_i(\partial_{i+1}(0)) = \partial_i(0) = 0 \\ &= \partial_{i+1}(0) = \partial_{i+1}(\partial_i(0)) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_j))). \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que  $\deg f = 2n + 2$ , onde  $n$  é um inteiro positivo. Além disso, suponhamos por hipótese de indução, que (2.1.3) valha para todos os monômios mônicos de grau  $2n$ . Escrevendo  $f = x_j g$ , temos  $\deg g = 2n$ . Vamos aplicar o item (ii) do Lema 2.1 a esse produto e usar a hipótese de indução em  $g$  nos casos  $j = i$ ,  $j = i + 1$ ,  $j = i + 2$  e  $j \neq i, i + 1, i + 2$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(f))) &= \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_j g))) = \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_i g))) = \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_i)g + s_i(x_i)\partial_i(g))) \\ &= \partial_i(\partial_{i+1}(g + x_{i+1}\partial_i(g))) = \partial_i(\partial_{i+1}(g) + \partial_{i+1}(x_{i+1}\partial_i(g))) \\ &= \partial_i(\partial_{i+1}(g) + \partial_{i+1}(x_{i+1})\partial_i(g) + s_{i+1}(x_{i+1})\partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\ &= \partial_i(\partial_{i+1}(g) + \partial_i(g) + x_{i+2}\partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\ &= \partial_i(\partial_{i+1}(g) + \partial_i(\partial_i(g)) + \partial_i(x_{i+2}\partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\ &= \partial_i(\partial_{i+1}(g) + \partial_i(x_{i+2})\partial_{i+1}(\partial_i(g)) + s_i(x_{i+2})\partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(g)))) \\ &= \partial_i(\partial_{i+1}(g) + x_{i+2}\partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(g)))) \\ &= \partial_i(\partial_{i+1}(g) + x_{i+2}\partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(g)))) \\ &= \partial_{i+1}(x_{i+1})\partial_i(\partial_{i+1}(g)) + s_{i+1}(x_{i+1})\partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\ &= \partial_{i+1}(\partial_{i+1}(g) + \partial_{i+1}(x_{i+1}\partial_i(\partial_{i+1}(g)))) \\ &= \partial_{i+1}(\partial_{i+1}(g) + x_{i+1}\partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\ &= \partial_{i+1}(\partial_i(x_i)\partial_{i+1}(g) + s_i(x_i)\partial_i(\partial_{i+1}(g))) = \partial_{i+1}(\partial_i(x_i\partial_{i+1}(g))) \\ &= \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_i)g + s_{i+1}(x_i)\partial_{i+1}(g))) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_i g))) \\ &= \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_j g))) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(f))). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(f))) &= \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_j g))) = \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_{i+1} g))) \\
&= \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_{i+1})g + s_i(x_{i+1})\partial_i(g))) \\
&= \partial_i(\partial_{i+1}(-g + x_i \partial_i(g))) = \partial_i(\partial_{i+1}(-g) + \partial_{i+1}(x_i \partial_i(g))) \\
&= \partial_i(-\partial_{i+1}(g) + \partial_{i+1}(x_i) \partial_i(g) + s_{i+1}(x_i) \partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\
&= \partial_i(-\partial_{i+1}(g) + x_i \partial_{i+1}(\partial_i(g))) = \partial_i(-\partial_{i+1}(g)) + \partial_i(x_i \partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\
&= -\partial_i(\partial_{i+1}(g)) + \partial_i(x_i) \partial_{i+1}(\partial_i(g)) + s_i(x_i) \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\
&= -\partial_i(\partial_{i+1}(g)) + \partial_{i+1}(\partial_i(g)) + x_{i+1} \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(g)) - \partial_i(\partial_{i+1}(g)) + x_{i+1} \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(g)) + \partial_{i+1}(x_{i+2}) \partial_i(\partial_{i+1}(g)) + s_{i+1}(x_{i+2}) \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(g)) + \partial_{i+1}(x_{i+2}) \partial_i(\partial_{i+1}(g)) = \partial_{i+1}(\partial_i(g) + x_{i+2} \partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(g) + \partial_i(x_{i+2}) \partial_{i+1}(g) + s_i(x_{i+2}) \partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(g) + \partial_i(x_{i+2} \partial_{i+1}(g))) = \partial_{i+1}(\partial_i(g + x_{i+2} \partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_{i+1})g + s_{i+1}(x_{i+1}) \partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_{i+1} g))) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_j g))) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(f))).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(f))) &= \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_j g))) = \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_{i+2} g))) \\
&= \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_{i+2})g + s_i(x_{i+2})\partial_i(g))) \\
&= \partial_i(\partial_{i+1}(x_{i+2} \partial_i(g))) = \partial_i(\partial_{i+1}(x_{i+2}) \partial_i(g) + s_{i+1}(x_{i+2}) \partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\
&= \partial_i(-\partial_i(g) + x_{i+1} \partial_{i+1}(\partial_i(g))) = \partial_i(-\partial_i(g)) + \partial_i(x_{i+1} \partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\
&= -\partial_i(\partial_i(g)) + \partial_i(x_{i+1}) \partial_{i+1}(\partial_i(g)) + s_i(x_{i+1}) \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\
&= -\partial_{i+1}(\partial_i(g)) + x_i \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\
&= -\partial_{i+1}(\partial_i(g)) + x_i \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\
&= -\partial_{i+1}(\partial_i(g)) - \partial_{i+1}(\partial_{i+1}(g)) + \partial_{i+1}(x_i) \partial_i(\partial_{i+1}(g)) \\
&+ s_{i+1}(x_i) \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(-\partial_i(g)) + \partial_{i+1}(-\partial_{i+1}(g)) + \partial_{i+1}(x_i \partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(-\partial_i(g) - \partial_{i+1}(g) + x_i \partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(-\partial_i(g) + \partial_i(x_{i+1}) \partial_{i+1}(g) + s_i(x_{i+1}) \partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(-g) + \partial_i(x_{i+1} \partial_{i+1}(g))) = \partial_{i+1}(\partial_i(-g + x_{i+1} \partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_{i+2})g + s_{i+1}(x_{i+2}) \partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_{i+2} g))) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_j g))) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(f))).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(f))) &= \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_j g))) = \partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(x_j)g + s_i(x_j)\partial_i(g))) \\
&= \partial_i(\partial_{i+1}(x_j \partial_i(g))) \\
&= \partial_i(\partial_{i+1}(x_j) \partial_i(g) + s_{i+1}(x_j) \partial_{i+1}(\partial_i(g))) = \partial_i(x_j \partial_{i+1}(\partial_i(g)))
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \partial_i(x_j)\partial_{i+1}(\partial_i(g)) + s_i(x_j)\partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(g))) \\
&= x_j\partial_i(\partial_{i+1}(\partial_i(g))) = x_j\partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(x_j)\partial_i(\partial_{i+1}(g)) + s_{i+1}(x_j)\partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(x_j\partial_i(\partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(x_j)\partial_{i+1}(g) + s_i(x_j)\partial_i(\partial_{i+1}(g))) = \partial_{i+1}(\partial_i(x_j\partial_{i+1}(g))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_j)g + s_{i+1}(x_j)\partial_{i+1}(g))) = \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(x_jg))) \\
&= \partial_{i+1}(\partial_i(\partial_{i+1}(f))).
\end{aligned}$$

□

Denotemos a ação de  $u_w$  em  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_a]$  por  $\partial_w$ . Segue imediatamente de (2.1.1)-(2.1.3) que

$$\partial_u\partial_v = \begin{cases} \partial_{uv}, & \text{se } \ell(uv) = \ell(u) + \ell(v), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para  $w \in S_a$ , definimos os **polinômios de Schubert** como

$$\mathfrak{S}_w = \partial_{w^{-1}w_0}(x^\delta),$$

onde  $w_0$  é a permutação de comprimento máximo e

$$x^\delta = \begin{cases} x_1^{a-1}x_2^{a-2}\cdots x_{a-1}, & \text{se } a > 1, \\ 1, & \text{se } a = 1. \end{cases}$$

Note que  $\mathfrak{S}_1 = 1$  e  $\mathfrak{S}_{w_0} = x^\delta$ .

O polinômio de Schubert  $\mathfrak{S}_w(x)$  é um polinômio homogêneo de grau  $2\ell(w)$  em  $\mathcal{P}_a$ . O grupo abeliano graduado gerado por  $\{\mathfrak{S}_w | w \in S_a\}$  possui posto graduado:

$$(1 + q^2)(1 + q^2 + q^4)\cdots(1 + q^2 + \cdots + q^{2(a-1)}) = \prod_{s=1}^a \frac{1 - q^{2s}}{1 - q^2} = q^{\frac{a(a-1)}{2}} [a]! = (a)!_{q^2}. \quad (2.2.1)$$

A ação dos operadores de diferenças divididas sobre os polinômios de Schubert é dada por:

$$\partial_u\mathfrak{S}_w = \begin{cases} \mathfrak{S}_{wu^{-1}}, & \text{se } \ell(wu^{-1}) = \ell(w) - \ell(u), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Em particular,  $\partial_w\mathfrak{S}_w = \mathfrak{S}_{ww^{-1}} = \mathfrak{S}_1 = 1$ .

Denotemos por  $\Lambda_a$  o espaço dos polinômios simétricos nas variáveis  $x_1, \dots, x_a$ .  $\Lambda_a$  admite a gradação dada por  $\deg(x_i) = 2$  e seu posto graduado é:

$$\text{rk}_q \Lambda_a = \frac{1}{(1 - q^2)(1 - q^4)\cdots(1 - q^{2a-2})} = \frac{1}{(a)!_{q^2}} \frac{1}{(1 - q^2)^a}.$$

**Proposição 2.2** ([24], Proposições 2.5.3 e 2.5.5). *O subgrupo  $\mathcal{H}_a$  de  $\mathcal{P}_a$  gerado pelos monômios  $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_a^{\alpha_a}$ , com  $\alpha_i \leq a - i$  para todo  $1 \leq i \leq a$ , tem posto  $a!$ . Os conjunto dos polinômios de Schubert  $\{\mathfrak{S}_w | w \in S_a\}$  é uma base integral de  $\mathcal{H}_a$ . A multiplicação em  $\mathcal{P}_a$  induz um isomorfismo canônico de  $\Lambda_a$ -módulos graduados entre  $\mathcal{P}_a$  e o produto tensorial  $\mathcal{H}_a \otimes \Lambda_a$ .*

A Proposição 2.2 e (2.2.1) implicam que a base dos polinômios de Schubert expressa  $\mathcal{P}_a$  como um  $\Lambda_a$ -módulo livre de posto graduado  $(a)!_{q^2}$ . Nessa base todo endomorfismo do grupo abeliano  $\mathcal{P}_a$  pode ser expressado por uma matriz de ordem  $a!$  cujos coeficientes estão em  $\Lambda_a$ . O anel de tais matrizes herda uma gradação natural da base de polinômios de Schubert. Logo,  $\text{Hom}_{\Lambda_a}(\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_a)$  é isomorfo como anel graduado ao anel matricial  $\text{Mat}((a)!_{q^2}; \Lambda_a)$ . Em particular,  $\text{rk}_q \text{Mat}((a)!_{q^2}; \Lambda_a) = (a)!_{q^2} (a)!_{q^{-2}} \text{rk}_q \Lambda_a$ . Além disso, temos um homomorfismo

$$\varphi : \mathcal{NH}_a \rightarrow \text{Mat}((a)!_{q^2}; \Lambda_a)$$

dado pela ação de  $\mathcal{NH}_a$  em  $\mathcal{P}_a \cong \bigoplus_{(a)!_{q^2}} \Lambda_a$  definida anteriormente. Por meio da Proposição 2.1, identificamos  $u_i$  com  $\partial_i$  e  $\chi_j$  com  $T_j$ .

**Exemplo 2.1.** Para  $a = 1$ , temos  $\mathcal{NC}_a \cong \mathbb{Z}$  e  $\mathcal{NH}_a = \mathbb{Z}[\chi_1]$ . Temos  $S_1 = \{w_0 = (1)\}$  e  $x^\delta = 1$ . O único polinômio de Schubert é  $\mathfrak{S}_{(1)} = 1$ . O espaço de polinômios simétricos é  $\Lambda_1 = \mathcal{P}_1$ . Além disso,  $\mathcal{H}_1$  tem como base integral  $\{x_1^0 = 1 = \mathfrak{S}_{(1)}\}$  e então  $\mathcal{H}_1 = \mathbb{Z}$ . O endomorfismo  $\chi_1$  na base  $\{1\}$  de  $\mathcal{H}_1$  é dado pela matriz:

$$\chi_1 \mapsto \begin{matrix} & 1 \\ \chi_1 & \mapsto 1 \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix}. \end{matrix}$$

**Exemplo 2.2.** Para  $a = 2$ , temos  $S_a = S_2 = \{(1), w_0 = s_1\}$  e  $x^\delta = x_1^{2-1} = x_1$ . Os polinômios de Schubert são  $\mathfrak{S}_{(1)} = 1$  e  $\mathfrak{S}_{w_0} = x^\delta = x_1$ . O subgrupo  $\mathcal{H}_2$  é gerado por  $\{x_1^1 x_2^0 = x_1 = \mathfrak{S}_{w_0}, x_1^0 x_2^0 = 1 = \mathfrak{S}_{(1)}\}$ . Nesta base, as matrizes dos endomorfismos de  $\mathcal{P}_2$  correspondentes a  $u_1, \chi_1$  e  $\chi_2$  são dadas por:

$$\begin{aligned} u_1 &\mapsto \begin{matrix} & 1 & x_1 \\ & 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix}; \end{matrix} \\ \chi_1 &\mapsto \begin{matrix} & 1 & x_1 \\ & 1 \begin{bmatrix} 0 & -x_1 x_2 \\ x_1 & x_1 + x_2 \end{bmatrix}; \end{matrix} \\ \chi_2 &\mapsto \begin{matrix} & 1 & x_1 \\ & 1 \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & x_1 x_2 \\ x_1 & -1 \end{bmatrix}. \end{matrix} \end{aligned}$$

**Exemplo 2.3.** Para  $a = 3$ , temos  $S_a = S_3 = \{(1), s_1, s_2, s_1 s_2, s_2 s_1, w_0 = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2\}$  e  $x^\delta = x_1^2 x_2^1 = x_1^2 x_2$ . Os polinômios de Schubert são:

- $\mathfrak{S}_{(1)} = 1;$
- $\mathfrak{S}_{s_1} = \partial_{s_1^{-1} w_0}(x_1^2 x_2) = \partial_{s_2 s_1}(x_1^2 x_2) = \partial_2 \partial_1(x_1^2 x_2) = \partial_2(x_1 x_2) = x_1;$
- $\mathfrak{S}_{s_2} = \partial_{s_2^{-1} w_0}(x_1^2 x_2) = \partial_{s_1 s_2}(x_1^2 x_2) = \partial_1 \partial_2(x_1^2 x_2) = \partial_1(x_1^2) = x_1 + x_2;$
- $\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = \partial_{s_1^{-1} s_1^{-1} w_0}(x_1^2 x_2) = \partial_{s_1}(x_1^2 x_2) = \partial_1(x_1^2 x_2) = x_1 x_2;$
- $\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = \partial_{s_1^{-1} s_2^{-1} w_0}(x_1^2 x_2) = \partial_{s_2}(x_1^2 x_2) = \partial_2(x_1^2 x_2) = x_1^2 e$

- $\mathfrak{S}_{w_0} = x^\delta = x_1^2 x_2$ .

Neste caso, o subgrupo  $\mathcal{H}_3$  é gerado por

$$\{x_1^2 x_2 = \mathfrak{S}_{w_0}, x_1^2 = \mathfrak{S}_{s_2 s_1}, x_1 x_2 = \mathfrak{S}_{s_1 s_2}, x_1 = \mathfrak{S}_{s_1}, x_2 = \mathfrak{S}_{s_1 s_2} - \mathfrak{S}_{s_1}, 1 = \mathfrak{S}_{(1)}\}.$$

As matrizes dos endomorfismos de  $\mathcal{P}_3$  correspondentes a  $u_1, u_2, \chi_1, \chi_2$  e  $\chi_3$  na base dos polinômios de Schubert são:

$$u_1 \mapsto \begin{matrix} & & 1 & x_1 & x_1 + x_2 & x_1 x_2 & x_1^2 & x_1^2 x_2 \\ & 1 & & & & & & \\ & x_1 & & & & & & \\ & x_1 + x_2 & & & & & & \\ & x_1 x_2 & & & & & & \\ & x_1^2 & & & & & & \\ & x_1^2 x_2 & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$u_2 \mapsto \begin{matrix} & & 1 & x_1 & x_1 + x_2 & x_1 x_2 & x_1^2 & x_1^2 x_2 \\ & 1 & & & & & & \\ & x_1 & & & & & & \\ & x_1 + x_2 & & & & & & \\ & x_1 x_2 & & & & & & \\ & x_1^2 & & & & & & \\ & x_1^2 x_2 & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\chi_1 \mapsto \begin{matrix} & & 1 & x_1 & x_1 + x_2 & x_1 x_2 & x_1^2 & x_1^2 x_2 \\ & 1 & & & & & & \\ & x_1 & & & & & & \\ & x_1 + x_2 & & & & & & \\ & x_1 x_2 & & & & & & \\ & x_1^2 & & & & & & \\ & x_1^2 x_2 & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 x_2 x_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 & -x_1 x_2 x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 x_2 x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix};$$

$$\chi_2 \mapsto \begin{matrix} & & 1 & x_1 & x_1 + x_2 & x_1 x_2 & x_1^2 & x_1^2 x_2 \\ & 1 & & & & & & \\ & x_1 & & & & & & \\ & x_1 + x_2 & & & & & & \\ & x_1 x_2 & & & & & & \\ & x_1^2 & & & & & & \\ & x_1^2 x_2 & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 & -x_1 x_2 x_3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 & 0 & 0 & -x_1 x_2 x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 & 0 & x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\chi_3 \mapsto \begin{matrix} & & 1 & x_1 & x_1 + x_2 & x_1x_2 & x_1^2 & x_1^2x_2 \\ & 1 & x_1 + x_2 + x_3 & 0 & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & x_1x_2x_3 & -x_1x_2x_3 & 0 \\ x_1 & & 0 & x_1 + x_2 + x_3 & 0 & 0 & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & x_1x_2x_3 \\ x_1 + x_2 & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1x_2 & & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2x_2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix}.$$

**Proposição 2.3.** *O homomorfismo  $\varphi : \mathcal{NH}_a \rightarrow \text{Mat}((a)!_{q^2}; \Lambda_a)$  dado pela ação de  $\mathcal{NH}_a$  em  $\mathcal{P}_a \cong \bigoplus_{(a)!_{q^2}} \Lambda_a$  é um isomorfismo de anéis graduados.*

*Demonstração.* Ordenemos a base de polinômios de Schubert  $\{\mathfrak{S}_w | w \in S_a\}$  por comprimento. Para ver que  $\varphi$  é injetivo, suponhamos que para alguma coleção de  $f_w(\chi) \in \mathbb{Z}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_a]$  tenhamos

$$\varphi \left( \sum_{w \in S_a} f_w(\chi) u_w \right) = \sum_{w \in S_a} f_w(x) \partial_w = 0,$$

onde  $f_w(x) \in \mathcal{P}_a$ . Desse modo, para todos os polinômios  $p \in \mathcal{P}_a$  temos:

$$\sum_{w \in S_a} f_w \partial_w(p) = 0.$$

Escolhendo  $v_0 \in S_a$  de comprimento minimal na soma anterior, temos para  $p = \mathfrak{S}_{v_0}$ :

$$\sum_{w \in S_a} f_w \partial_w(\mathfrak{S}_{v_0}) = 0. \quad (2.2.3)$$

Por (2.2.2),

$$\partial_w \mathfrak{S}_{v_0} = \begin{cases} \mathfrak{S}_{v_0 w^{-1}}, & \text{se } \ell(v_0 w^{-1}) = \ell(v_0) - \ell(w), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Desse modo, apenas as permutações  $w \in S_a$  tais que  $\ell(w) = \ell(v_0)$  contribuem para a soma (2.2.3). Logo,  $\ell(v_0 w^{-1}) = \ell(v_0) - \ell(w) = 0$ . Como a única permutação de comprimento zero é a identidade, segue que  $v_0 = w$  e então  $f_{v_0} = 0$  (ver o Teorema 8.3 de [21]). Aplicando este argumento indutivamente, podemos concluir que  $f_w = 0$  para todo  $w \in S_a$  e então  $\varphi$  é injetivo.

Para provarmos que  $\varphi$  é sobrejetivo, basta mostrarmos que as matrizes elementares  $E_{i,j}$  com um 1 na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna e zeros em todas as outras entradas, pertencem a imagem de  $\varphi$ . Se  $\mathfrak{S}_v$  é o  $i$ -ésimo elemento da base, então as matrizes elementares  $E_{i,a!}$  são dadas por

$$\mathfrak{S}_v \partial_{w_0} \mapsto \begin{matrix} & & \mathfrak{S}_1 & & & & \mathfrak{S}_{w_0} \\ & \mathfrak{S}_1 & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \mathfrak{S}_v & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 0 \\ \mathfrak{S}_{w_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} & , \end{matrix}$$

já que

$$\partial_{w_0} \mathfrak{S}_u = \begin{cases} 1, & \text{se } u = w_0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Analogamente, se  $w \in S_a$  é tal que  $\ell(w) = \ell(w_0) - 1$ , então  $w = s_i w_0$ , para alguma transposição simples  $s_i \in S_a$  e

$$\partial_w \mathfrak{S}_u = \begin{cases} \mathfrak{S}_{s_i}, & \text{se } u = w_0 \\ 1, & \text{se } u = w \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo,

$$\mathfrak{S}_v \partial_w \mapsto \begin{array}{c} \mathfrak{S}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{S}_v \\ \vdots \\ \mathfrak{S}_{s_i} \\ \vdots \\ \mathfrak{S}_{w_0} \end{array} \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_1 & & & \mathfrak{S}_w & \mathfrak{S}_{w_0} \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e  $\mathfrak{S}_v(\partial_w - \mathfrak{S}_{s_i} \partial_{w_0})$  é o elemento de  $\mathcal{NH}_a$  que é levado na matriz elementar com uma única entrada não-nula na linha correspondente a  $v$  e na coluna correspondente a  $w$ . Aplicando esse processo indutivamente obtemos que todas as matrizes elementares estão na imagem de  $\varphi$ . Portanto,  $\varphi$  é um isomorfismo.  $\square$

# Capítulo 3

## Cálculo gráfico

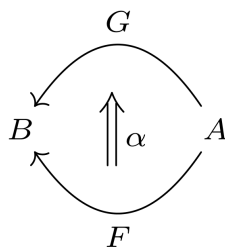
Na teoria de 2-categorias é comum o uso de diagramas de cordas para se representar transformações naturais entre funtores ou, mais geralmente, 2-morfismos em uma 2-categoria  $\mathcal{K}$ . Ele é particularmente útil quando se está trabalhando com adjunções e/ou mônadas. Veja, por exemplo, [13].

### 3.1 2-categorias

Definiremos 2-categorias a seguir, de uma forma simplificada, seguindo [20].

**Definição 3.1.** *Uma 2-categoria (estrita)  $\mathcal{K}$  consiste de:*

- Uma classe de **objetos**  $\text{Ob}(\mathcal{K})$ .
- Para cada par de objetos  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{K})$  uma categoria  $\mathcal{K}(A, B)$ . Os objetos  $F : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{K}(A, B)$  são chamados **1-morfismos** de  $\mathcal{K}$  com domínio  $A$  e contradomínio  $B$ . Um morfismo  $\alpha : F \Rightarrow G$



da categoria  $\mathcal{K}(A, B)$  é chamado um **2-morfismo** de  $\mathcal{K}$ .

Aqui também denotaremos, para qualquer categoria  $\mathcal{A}$  arbitrária, sua classe de objetos por  $\text{Ob}(\mathcal{A})$ . A classe de todos os morfismos de  $\mathcal{A}$  será denotada por  $\text{Mor}(\mathcal{A})$ . Para quaisquer  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , denotamos a classe de morfismos de  $\mathcal{A}$  com domínio  $A$  e contradomínio  $B$  por  $\mathcal{A}(A, B)$ .

- Uma lei de **composição** para 1-morfismos

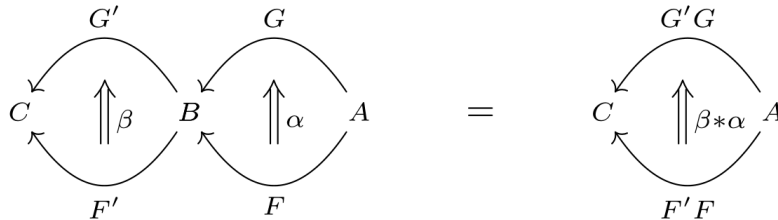
$$C \xleftarrow{G} B \xleftarrow{F} A = C \xleftarrow{GF} A$$

que é associativa, ou seja, dada uma tripla de 1-morfismos componíveis

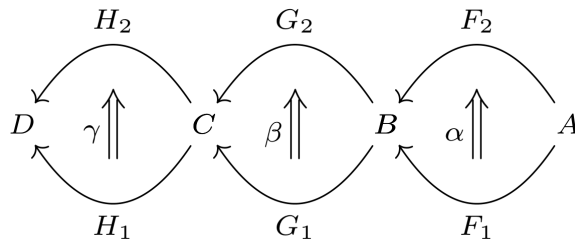
$$D \xleftarrow{H} C \xleftarrow{G} B \xleftarrow{F} A$$

temos  $(HG)F = H(GF)$ .

- Uma **composição horizontal**  $*$  para 2-morfismos

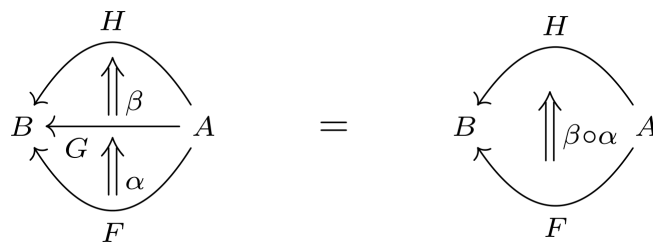


que também é associativa, ou seja, para  $\alpha, \beta, \gamma$  como abaixo

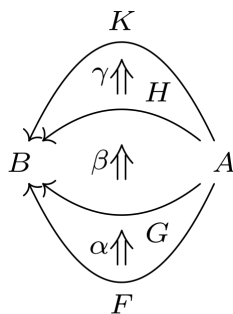


temos  $(\gamma * \beta) * \alpha = \gamma * (\beta * \alpha)$ .

- A lei de composição da categoria  $\mathcal{K}(A, B)$  é chamada **composição vertical** em  $\mathcal{K}$  e é denotada por  $\circ$ :



Essa composição também é associativa. Para uma tripla componível de 2-morfismos de  $\mathcal{K}(A, B)$ :



temos  $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$ .

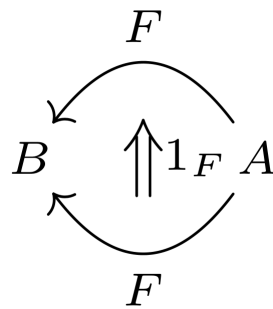
Na prática, omitiremos os símbolos  $*$  e  $\circ$  nas composições de 2-morfismos, sempre que não houver risco de confusão.

Assim como categorias possuem morfismos identidade, 2-categorias possuem **1-morfismos identidade** e **2-morfismos identidade** para as composições:

- Para cada objeto  $A$  existe um 1-morfismo  $1_A : A \rightarrow A$  tal que

$$B \xleftarrow{F} A \xleftarrow{1_A} A = B \xleftarrow{F} A = B \xleftarrow{1_B} B \xleftarrow{F} A$$

- Para cada 1-morfismo  $F : A \rightarrow B$ , existe um 2-morfismo  $1_F : F \Rightarrow F$



tal que

$$\begin{array}{c} G \\ \curvearrowleft \\ B \xleftarrow{G} A \\ \curvearrowright \\ F \end{array} \begin{array}{c} \uparrow 1_G \\ \uparrow G \\ \uparrow \alpha \end{array} = \begin{array}{c} G \\ \curvearrowleft \\ B \xleftarrow{\alpha} A \\ \curvearrowright \\ F \end{array} = \begin{array}{c} G \\ \curvearrowleft \\ B \xleftarrow{1_F} A \\ \curvearrowright \\ F \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \alpha \\ \uparrow F \end{array}$$

e

$$\begin{array}{c} 1_B \\ \curvearrowleft \\ B \xleftarrow{1_B} B \\ \curvearrowright \\ 1_B \end{array} \begin{array}{c} G \\ \curvearrowleft \\ B \xleftarrow{\alpha} A \\ \curvearrowright \\ F \end{array} = \begin{array}{c} G \\ \curvearrowleft \\ B \xleftarrow{\alpha} A \\ \curvearrowright \\ F \end{array} = \begin{array}{c} G \\ \curvearrowleft \\ B \xleftarrow{\alpha} A \\ \curvearrowright \\ F \end{array} \begin{array}{c} 1_A \\ \curvearrowleft \\ A \xleftarrow{1_A} A \\ \curvearrowright \\ 1_A \end{array}$$

Os 2-morfismos identidade devem ser compatíveis com a composição horizontal da seguinte maneira



Finalmente, as composições vertical e horizontal de 2-morfismos em  $\mathcal{K}$  obedecem à **lei do intercâmbio**

ou seja,  $(\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha) = (\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha)$ .

Note que as duas últimas relações significam que, para quaisquer  $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ , temos um **funtor composição** dado por:

$$\begin{aligned} c_{ABC} : \mathcal{K}(A, B) \times \mathcal{K}(B, C) &\rightarrow \mathcal{K}(A, C) \\ (F, G) &\mapsto GF \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \beta * \alpha \end{aligned}$$

Muitos exemplos de “2-categorias” não são estritas, o que significa que os axiomas de composição de 1-morfismos e 1-morfismos identidade valem apenas a menos de isomorfismo. Tais “2-categorias” são chamadas **2-categorias fracas** ou **bicategorias**. Não definiremos formalmente 2-categorias fracas aqui (ver [5]). Existe um teorema de coerência estabelecendo que toda 2-categoria fraca é equivalente (em um certo sentido) a uma 2-categoria estrita (ver [11]).

**Exemplos 3.1.** (1) **Cat** é uma 2-categoria onde os objetos são categorias pequenas, 1-morfismos são funtores e 2-morfismos são transformações naturais de funtores.

(2) Toda categoria  $\mathcal{A}$  pode ser vista como uma 2-categoria se definirmos  $\mathcal{A}(A, B)(F, G) = \emptyset$ , se  $F \neq G$  e  $\mathcal{A}(A, B)(F, F) = \{1_F\}$ , para quaisquer  $F, G \in \mathcal{A}(A, B)$ . Isso é o mesmo que dizer que  $\mathcal{A}(A, B)$  é uma **categoria discreta**, para quaisquer  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ .

(3) Um exemplo de 2-categoria fraca é **Bim**, cujos objetos são anéis. Um 1-morfismo entre anéis  $R$  e  $S$  é um  $(S, R)$ -bimódulo  ${}_S M_R$ . A composição de 1-morfismos é dada pelo produto tensorial de bimódulos:

$$T \xleftarrow{{}_T N_S} S \xleftarrow{{}_S M_R} R = T \xleftarrow{{}_T N_S \otimes_S {}_S M_R} R$$

Note que **Bim** não é uma 2-categoria estrita, pois o produto tensorial é associativo somente a menos de isomorfismo. Um 2-morfismo em **Bim** é um homomorfismo de bimódulos. A composição vertical é a composição de homomorfismos de bimódulos e a composição horizontal é o produto tensorial de homomorfismos de bimódulos.

**Definição 3.2.** Dadas duas 2-categorias  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , um **2-functor (estrito)**  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  consiste de:

- Uma função  $F : \text{Ob}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{B})$ ;
- Para cada par de objetos  $A, A' \in \mathcal{A}$ , um funtor  $F_{A,A'} : \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A'))$  tal que:

$$F_{A,A''}(gf) = F_{A',A''}(g)F_{A,A'}(f), \text{ onde } f \in \text{Ob}(\mathcal{A}(A, A')), g \in \text{Ob}(\mathcal{A}(A', A''));$$

$$F_{AA}(1_A) = 1_{F(A)}, \text{ para todo } A \in \text{Ob}(\mathcal{A});$$

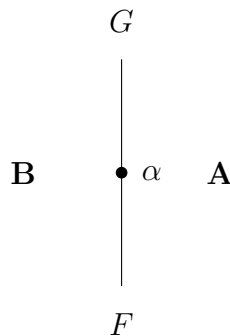
$$F_{A,A''}(\beta * \alpha) = F_{A',A''}(\beta) * F_{A,A'}(\alpha), \text{ onde } \alpha \in \text{Mor}(\mathcal{A}(A, A')), \beta \in \text{Mor}(\mathcal{A}(A', A''));$$

$$F_{AA}(1_{1_A}) = 1_{1_{F(A)}}, \text{ para todo } A \in \text{Ob}(\mathcal{A}).$$

Observe em particular que um 2-functor define um funtor ordinário entre as categorias subjacentes (obtidas “esquecendo-se” os 2-morfismos) às 2-categorias  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ .

## 3.2 Diagramas de cordas para 2-categorias

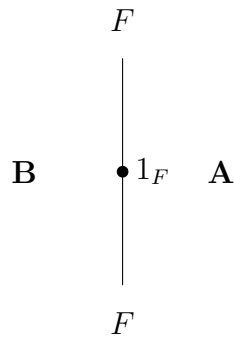
Os diagramas de cordas a seguir são usados para representar 2-morfismos em uma 2-categoria  $\mathcal{K}$ . Um 2-morfismo  $\alpha : F \Rightarrow G$  entre 1-morfismos  $F, G : A \rightarrow B$  é representado pelo diagrama:



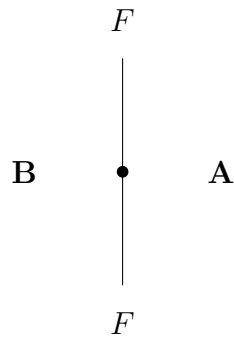
que é lido sempre de baixo para cima e da direita para a esquerda.

Desse modo, regiões do plano representam objetos da 2-categoria  $\mathcal{K}$  enquanto linhas representam 1-morfismos e pontos sobre elas representam 2-morfismos.

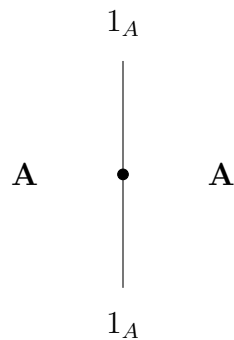
O 2-morfismo identidade



é representado simplesmente por

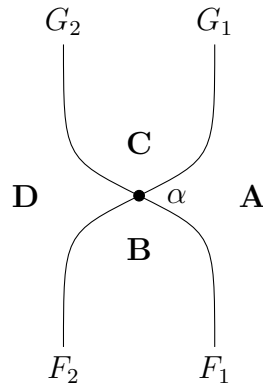


Em particular, o 2-morfismo identidade de um 1-morfismo identidade  $1_A : A \rightarrow A$  é dado por

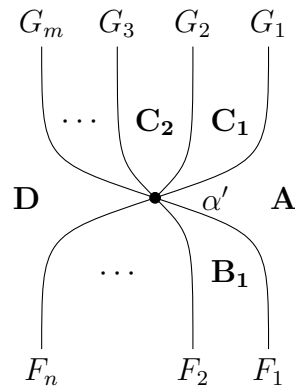


mas também podemos representá-lo pela região indexada por  $A$  com a linha omitida.

Dados 1-morfismos  $F_1 : A \rightarrow B, F_2 : B \rightarrow D, G_1 : A \rightarrow C$  e  $G_2 : C \rightarrow D$ , um 2-morfismo  $\alpha : F_2 \circ F_1 \Rightarrow G_2 \circ G_1$  pode ser representado como

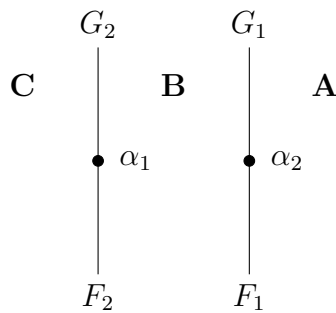


e entre composições mais gerais como

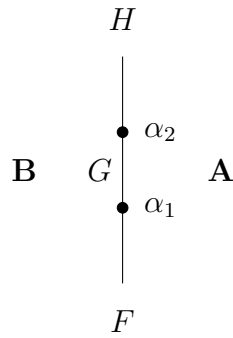


onde as composições  $F_n \cdots F_2 F_1$  e  $G_m \cdots G_2 G_1$  são 1-morfismos de  $A$  a  $D$ .

A composição horizontal de 2-morfismos é descrita representando os diagramas correspondentes lado a lado:



Finalmente, a composição vertical de 2-morfismos  $\alpha_1 : F \Rightarrow G$  e  $\alpha_2 : G \Rightarrow H$  é representada posicionando o diagrama do segundo 2-morfismo acima do diagrama do primeiro:



### 3.3 Cálculo gráfico para biadjunções

**Definição 3.3.** Uma adjunção  $\widehat{F} \dashv F$  numa 2-categoria  $\mathcal{K}$  consiste de um par de 1-morfismos  $F : A \rightarrow B$  e  $\widehat{F} : B \rightarrow A$  e um par de 2-morfismos  $\eta : 1_B \Rightarrow F\widehat{F}$  e  $\varepsilon : \widehat{F}F \Rightarrow 1_A$ , chamados a **unidade** e a **counidade** da adjunção, respectivamente, tais que:

$$(1_F * \varepsilon) \circ (\eta * 1_F) = 1_F, \quad (3.3.1)$$

$$(\varepsilon * 1_{\widehat{F}}) \circ (1_{\widehat{F}} * \eta) = 1_{\widehat{F}}. \quad (3.3.2)$$

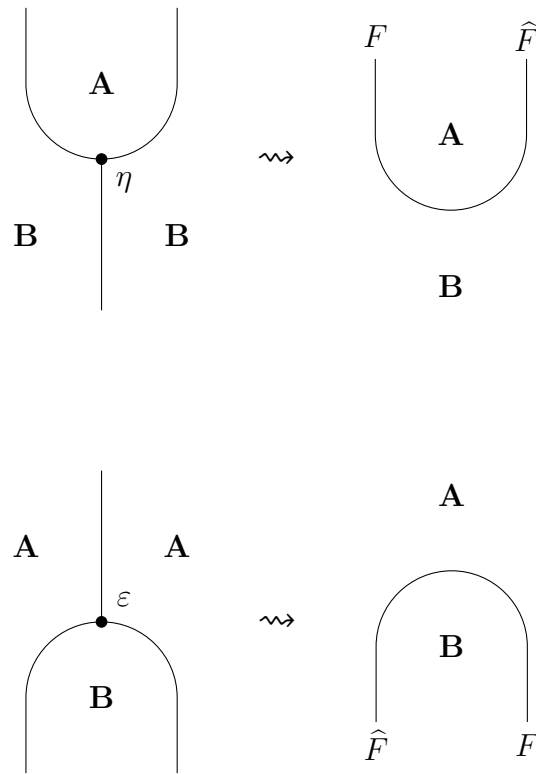
Neste caso, dizemos que  $\widehat{F}$  é **adjunto à esquerda** de  $F$  e que  $F$  é **adjunto à direita** de  $\widehat{F}$ , representando abreviadamente os dados dessa adjunção por  $\eta, \varepsilon, \widehat{F} \dashv F : A \rightarrow B$ .

Diagramaticamente, as equações (3.3.1) e (3.3.2) são dadas por:

$$(3.3.3)$$

$$(3.3.4)$$

Quando o 1-morfismo  $F : A \rightarrow B$  está equipado com um adjunto à esquerda  $\widehat{F} : B \rightarrow A$ , a unidade  $\eta : 1_B \Rightarrow F\widehat{F}$  e a counidade  $\varepsilon : \widehat{F}F \Rightarrow 1_A$  escolhidas para esta adjunção são representadas como:



omitindo o vértice indexado pelos 2-morfismos unidade e counidade e as linhas correspondentes aos 1-morfismos identidade. Desse modo, os diagramas de cordas correspondentes aos axiomas de adjunção ((3.3.3) e (3.3.4)) são simplificados como segue:

$$\begin{array}{c} F \\ | \\ \text{B} \end{array} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{U-shaped line} \\ \text{B} \end{array} \begin{array}{c} F \\ | \\ \text{A} \end{array} = \begin{array}{c} F \\ | \\ \text{B} \\ | \\ \text{A} \\ | \\ F \end{array} \quad (3.3.5)$$

$$\begin{array}{c} \widehat{F} \\ | \\ \text{A} \\ | \\ \text{B} \\ | \\ \widehat{F} \end{array} = \begin{array}{c} \widehat{F} \\ | \\ \text{A} \\ | \\ \text{B} \\ | \\ \widehat{F} \end{array} \quad (3.3.6)$$

Chamamos tais igualdades de **identidades zig-zag**.

**Proposição 3.1.** *Se  $\eta, \varepsilon : F \dashv U : A \rightarrow B$  e  $\bar{\eta}, \bar{\varepsilon} : \bar{F} \dashv \bar{U} : B \rightarrow C$  são adjunções na 2-categoria  $\mathcal{K}$ , então  $F\bar{F} \dashv \bar{U}U$  com unidade e counidade dadas pelas composições:*

$$\begin{aligned}
 \tilde{\eta} &:= \left( 1_C \xrightarrow{\eta} \bar{U}\bar{F} \xrightarrow{1_{\bar{U}}\eta 1_{\bar{F}}} \bar{U}U F \bar{F} \right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \bar{U} \quad U \quad F \quad \bar{F} \\ \text{A} \\ \text{B} \quad \text{C} \end{array} \\
 \tilde{\varepsilon} &:= \left( F\bar{F}\bar{U}U \xrightarrow{1_F \bar{\varepsilon} 1_U} \bar{F}\bar{U} \xrightarrow{\varepsilon} 1_A \right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{B} \quad \text{A} \\ \text{C} \\ F \quad \bar{F} \quad \bar{U} \quad U \end{array}
 \end{aligned}$$

*Demonstração.* Segue diretamente se usarmos os diagramas de cordas para verificar as identidades zig-zag.  $\square$

Se o 1-morfismo  $F$  é adjunto à esquerda e à direita ao 1-morfismo  $\widehat{F}$ , dizemos que  $F$  é **biadjunto** a  $\widehat{F}$  e escrevemos  $\widehat{F} \dashv F \dashv \widehat{F}$ . Os 2-morfismos

$$\eta : 1_B \Rightarrow F\widehat{F}, \quad \varepsilon : \widehat{F}F \Rightarrow 1_A, \quad \widehat{\varepsilon} : 1_A \Rightarrow \widehat{F}F, \quad \widehat{\eta} : F\widehat{F} \Rightarrow 1_B$$

dessa biadjunção são descritos da seguinte maneira:

$$\eta \rightsquigarrow \begin{array}{c} F \quad \widehat{F} \\ \text{A} \\ \text{B} \end{array} \quad \varepsilon \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \widehat{F} \quad F \end{array} \quad \widehat{\varepsilon} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \widehat{F} \quad F \\ \text{B} \\ \text{A} \end{array} \quad \widehat{\eta} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{B} \\ \text{A} \\ F \quad \widehat{F} \end{array}$$

Neste caso, além das identidades (3.3.5) e (3.3.6), teremos também:

### 3.4 Casamento por adjunção

**Definição 3.4.** Dadas adjunções  $\eta, \varepsilon : F \dashv U : A \rightarrow B$  e  $\bar{\eta}, \bar{\varepsilon} : \bar{F} \dashv \bar{U} : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$  na 2-categoria  $\mathcal{K}$ , se  $a : A \rightarrow \bar{A}$  e  $b : B \rightarrow \bar{B}$  são 1-morfismos, então existe uma bijeção  $M$  entre 2-morfismos  $\xi \in \mathcal{K}(bU, \bar{U}a)$  e 2-morfismos  $\zeta \in \mathcal{K}(\bar{F}b, aF)$ , onde  $\zeta$  é dado em termos de  $\xi$  pela composição

$$M : \mathcal{K}(bU, \bar{U}a) \rightarrow \mathcal{K}(\bar{F}b, aF)$$

$$\xi \mapsto \left( \bar{F}b \xrightarrow{1_{\bar{F}}1_b\eta} \bar{F}bUF \xrightarrow{1_{\bar{F}}\xi 1_F} \bar{F}\bar{U}aF \xrightarrow{\bar{\varepsilon}1_a 1_F} aF \right) = \zeta$$

e  $\xi$  é dado em termos de  $\zeta$  pela composição

$$M^{-1} : \mathcal{K}(\bar{F}b, aF) \rightarrow \mathcal{K}(bU, \bar{U}a)$$

$$\zeta \mapsto \left( bU \xrightarrow{\bar{\eta}1_b 1_U} \bar{U}\bar{F}bU \xrightarrow{1_{\bar{U}}\zeta 1_U} \bar{U}aFU \xrightarrow{1_{\bar{U}}1_a\varepsilon} \bar{U}a \right) = \xi.$$

Neste caso, dizemos que  $\xi$  e  $\zeta$  são **casados por adjunção**.

Esta bijeção fica mais clara quando expressa diagramaticamente:



$$M : \mathcal{K}(bU, \bar{U}a) \rightarrow \mathcal{K}(\bar{F}b, aF)$$

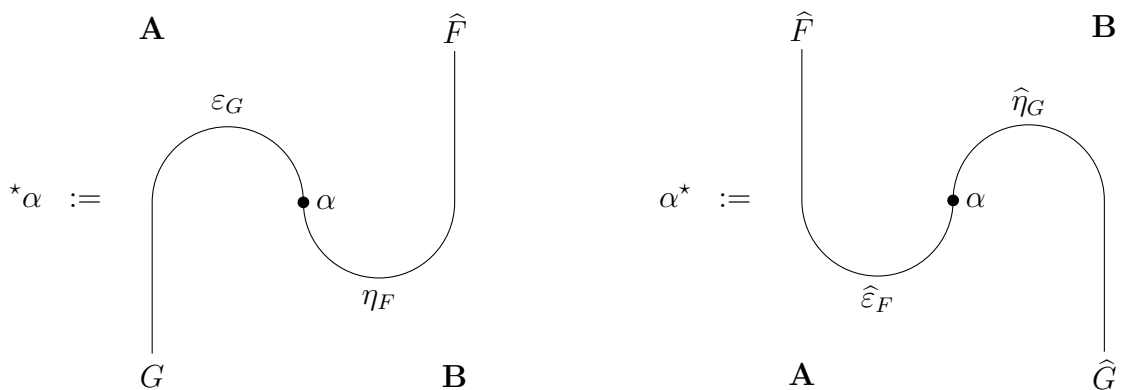
(3.4.1)

$$M^{-1} : \mathcal{K}(\bar{F}b, aF) \rightarrow \mathcal{K}(bU, \bar{U}a)$$

(3.4.2)

### 3.5 Duais para 2-morfismos

Dado um par de 1-morfismos  $F, G : A \rightarrow B$  com biadjunções fixadas  $(\hat{F}, \eta_F, \hat{\eta}_F, \varepsilon_F, \hat{\varepsilon}_F)$  e  $(\hat{G}, \eta_G, \hat{\eta}_G, \varepsilon_G, \hat{\varepsilon}_G)$ , então qualquer 2-morfismo  $\alpha : F \Rightarrow G$  possui dois duais  ${}^*\alpha, \alpha^* : \hat{G} \Rightarrow \hat{F}$ , um definido usando a adjunção à esquerda e o outro usando a adjunção à direita. Diagramaticamente estes dois duais são dados por:



Chamamos  $\alpha^*$  o dual à direita de  $\alpha$  porque ele é obtido de  $\alpha$  usando as adjunções à direita de  $F$  e  $G$ . Analogamente,  ${}^*\alpha$  é chamado o dual à esquerda de  $\alpha$  porque ele é obtido de  $\alpha$  usando as adjunções à esquerda de  $F$  e  $G$ .

**Definição 3.5.** Sendo  $\alpha : F \Rightarrow G$  um 2-morfismo e  $(F, \widehat{F}, \eta_F, \widehat{\eta}_F, \varepsilon_F, \widehat{\varepsilon}_F)$ ,  $(G, \widehat{G}, \eta_G, \widehat{\eta}_G, \varepsilon_G, \widehat{\varepsilon}_G)$  duas biadjunções, defina

$$\begin{aligned}\alpha^* &:= (\widehat{F} * \widehat{\eta}_G) \circ (\widehat{\varepsilon}_F * \widehat{G}), \\ {}^*\alpha &:= (\varepsilon_G * \widehat{F}) \circ (\widehat{G} * \eta_F).\end{aligned}$$

O 2-morfismo  $\alpha$  é chamado um 2-morfismo **cíclico** se a equação  ${}^*\alpha = \alpha^*$  é satisfeita ou uma das seguintes versões equivalentes:  ${}^{**}\alpha = \alpha$  e  $\alpha^{**} = \alpha$ .

As composições vertical e horizontal de 2-morfismos cíclicos são também 2-morfismos cíclicos. Além disso, se  $\alpha : F \Rightarrow G$  e  $F$  e  $G$  tem biadjunções escolhidas, então sempre temos as seguintes igualdades:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} F \quad \widehat{G} \\ \bullet \alpha \\ \eta_G \\ \mathbf{B} \end{array} & = & \begin{array}{c} F \quad \widehat{G} \\ \eta_F \\ \bullet {}^*\alpha \\ \mathbf{B} \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \widehat{G} \quad F \\ \bullet \alpha \\ \widehat{\varepsilon}_G \\ \mathbf{A} \end{array} & = & \begin{array}{c} \widehat{G} \quad F \\ \widehat{\eta}_F \\ \bullet {}^*\alpha \\ \mathbf{A} \end{array} \end{array}$$

assim como as versões “viradas para baixo” dos diagramas acima. Os diagramas

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \alpha \bullet \\ \mathbf{B} \end{array} & = & \begin{array}{c} \bullet {}^*\alpha \\ \mathbf{B} \end{array} & = & \begin{array}{c} {}^*({}^*\alpha) \bullet \\ \mathbf{B} \end{array} \end{array}$$

sempre representam os mesmos 2-morfismos e então quando  $\alpha$  é um 2-morfismo cíclico não há necessidade de indexar, já que  ${}^*({}^*\alpha) = \alpha$ .

# Capítulo 4

## A 2-categoria $\mathcal{U}$

Neste capítulo apresentaremos as 2-categorias auxiliares  $\mathcal{U}^*$  e  $\mathcal{U}$ . Tais 2-categorias foram definidas por Aaron Lauda em [21] e constituem etapas intermediárias na categorificação de  $\dot{U}$ .

### 4.1 Preliminares categóricas

Categorias monoidais generalizam o conceito familiar de produto tensorial de módulos sobre um anel comutativo. Estruturas monoidais em categorias lineares são categorificações de álgebras associativas. A propriedade de associatividade da álgebra corresponde ao isomorfismo natural de associatividade da respectiva categoria monoidal.

**Definição 4.1.** *Uma categoria monoidal  $(\mathcal{V}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \varrho)$  consiste de*

- *Uma categoria  $\mathcal{V}$ .*
- *Um funtor  $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  chamado **produto tensorial** ou **produto monoidal** - denotamos por  $A \otimes B$  (resp.  $f \otimes g$ ) a imagem do objeto  $(A, B)$  (resp. morfismo  $(f, g)$ ) sob  $\otimes$ .*
- *Um objeto distinguido  $e \in \text{Ob}(\mathcal{V})$  chamado **unidade**.*
- *Para cada tripla  $A, B, C$  de objetos de  $\mathcal{V}$ , um isomorfismo **associatividade***

$$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C),$$

*que é natural em  $A, B, C$ .*

- *Para todo  $A \in \text{Ob}(\mathcal{V})$ , um isomorfismo **unidade à esquerda**  $\lambda_A : e \otimes A \rightarrow A$ , que é natural em  $A$ .*
- *Para todo  $A \in \text{Ob}(\mathcal{V})$ , um isomorfismo **unidade à direita**  $\varrho_A : A \otimes e \rightarrow A$ , que é natural em  $A$ .*

*Estes isomorfismos naturais também devem satisfazer o **axioma do pentágono** e o **axioma do triângulo**:*

(a) Para quaisquer objetos  $A, B, C, D$ , o seguinte pentágono comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \\
 \alpha_{A,B,C \otimes D} \swarrow & & \searrow \alpha_{A \otimes B,C,D} \\
 A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
 \uparrow 1_A \otimes \alpha_{B,C,D} & & \downarrow \alpha_{A,B,C \otimes 1_D} \\
 A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \xleftarrow{\alpha_{A,B \otimes C,D}} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D
 \end{array}$$

(b) Para quaisquer objetos  $A, B$ , o seguinte triângulo comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes (e \otimes B) & \xleftarrow{\alpha_{A,e,B}} & (A \otimes e) \otimes B \\
 \searrow 1_A \otimes \lambda_B & & \swarrow \varrho_A \otimes 1_B \\
 & A \otimes B &
 \end{array}$$

**Exemplos 4.2.** Temos, por exemplo, as seguintes categorias monoidais:

- (1) **Set**, a categoria dos conjuntos com o produto Cartesiano como produto tensorial e um conjunto unitário servindo como unidade.
- (2) **Cat**, a categoria de todas as categorias pequenas com o produto categórico usual e uma categoria com um objeto e um morfismo-identidade como unidade.
- (3) **Mod<sub>R</sub>**, a categoria dos módulos sobre um anel comutativo  $R$  com o produto tensorial  $\otimes_R$  usual e o próprio anel  $R$  como unidade. Em particular, temos:
  - **Ab**, a categoria dos grupos abelianos.
  - **Vect<sub>K</sub>**, a categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ .
- (4) **GrAb**, a categoria dos grupos abelianos graduados com o produto tensorial graduado.

Uma categoria enriquecida formaliza a idéia de uma categoria onde as classes de morfismos entre cada par de objetos possuem estruturas adicionais como um espaço vetorial de morfismos ou um espaço topológico de morfismos. Usaremos a linguagem de categorias enriquecidas para definir a maioria das propriedades requeridas para uma categorificação de  $\dot{U}$ .

**Definição 4.3.** Seja  $(\mathcal{V}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \varrho)$  uma categoria monoidal. Uma categoria  $\mathcal{A}$  enriquecida sobre  $\mathcal{V}$  ou  $\mathcal{V}$ -categoria  $\mathcal{A}$ , consiste de:

- Uma classe  $\text{Ob}(\mathcal{A})$  de objetos de  $\mathcal{A}$ .
- Para cada par de objetos  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , um objeto  $\mathcal{A}(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{V})$ .
- Para cada tripla de objetos  $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , um morfismo **composição** em  $\mathcal{V}$ ,  $c_{ABC} : \mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, C) \rightarrow \mathcal{A}(A, C)$ .
- Para cada objeto  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  um morfismo **unidade** em  $\mathcal{V}$ ,  $u_A : e \rightarrow \mathcal{A}(A, A)$ .

Esses morfismos devem satisfazer a comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}(A, B) \otimes (\mathcal{A}(B, C) \otimes \mathcal{A}(C, D)) & \xleftarrow{\alpha} & (\mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, C)) \otimes \mathcal{A}(C, D) \\
 \downarrow 1 \otimes c_{BCD} & & \downarrow c_{ABC} \otimes 1 \\
 \mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, D) & & \mathcal{A}(A, C) \otimes \mathcal{A}(C, D) \\
 \searrow c_{ABD} & & \swarrow c_{ACD} \\
 & \mathcal{A}(A, D) & 
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{A}(A, B) & & \\
 & \xrightarrow{c_{ABB}} & & \xleftarrow{c_{AAB}} & \\
 \mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, B) & & \mathcal{A}(A, B) & & \mathcal{A}(A, A) \otimes \mathcal{A}(A, B) \\
 \uparrow 1 \otimes u_B & \nearrow \varrho & & \nwarrow \lambda & \uparrow u_A \otimes 1 \\
 \mathcal{A}(A, B) \otimes e & & & & e \otimes \mathcal{A}(A, B)
 \end{array}$$

**Definição 4.4.** Seja  $(\mathcal{V}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \varrho)$  uma categoria monoidal. Dadas  $\mathcal{V}$ -categorias  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , um  $\mathcal{V}$ -funtor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  consiste de:

- Uma função  $F : \text{Ob}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{B})$ .
- Para cada par de objetos  $A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , um morfismo em  $\mathcal{V}$

$$F_{AA'} : \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A'))$$

de modo que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(A,A') \otimes \mathcal{A}(A',A'') & \xrightarrow{c_{AA'A''}} & \mathcal{A}(A,A'') \\
\downarrow F_{AA'} \otimes F_{A'A''} & & \downarrow F_{AA''} \\
\mathcal{B}(F(A),F(A')) \otimes \mathcal{B}(F(A'),F(A'')) & \xrightarrow{c_{F(A)F(A')F(A'')}} & \mathcal{B}(F(A),F(A''))
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
e & \xrightarrow{u_A} & \mathcal{A}(A,A) \\
& \searrow u_{F(A)} & \downarrow F_{AA} \\
& & \mathcal{B}(F(A),F(A))
\end{array}$$

- Exemplos 4.5.** (1) Uma categoria enriquecida sobre a categoria **Set** com o produto Cartesiano como produto tensorial é uma **categoria localmente pequena**, ou seja, uma categoria onde os morfismos entre cada par de objetos formam um conjunto ao invés de uma classe própria.
- (2) Uma categoria enriquecida sobre a categoria **Cat** com o produto categórico é justamente uma 2-categoria estrita e um **Cat**-funtor é um 2-funtor estrito. Neste caso os 2-morfismos entre morfismos  $A \rightarrow B$  e a composição vertical em  $C(A, B)$  correspondem aos objetos e a composição desta categoria.
- (3) Uma categoria enriquecida sobre **Ab**, a categoria dos grupos abelianos com o produto tensorial usual, é uma categoria pré-aditiva. Se  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  são categorias pré-aditivas, um **Ab**-funtor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  é um funtor tal que as funções  $f : \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A'))$  são homomorfismos de grupos abelianos, para quaisquer  $A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ .
- (4) Uma categoria enriquecida sobre a categoria **Vect $_{\mathbb{K}}$** , dos espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  com o produto tensorial usual, é uma **categoria  $\mathbb{K}$ -linear**. Neste caso, o conjunto de morfismos entre cada par de objetos é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e a composição de morfismos é bilinear. Um **Vect $_{\mathbb{K}}$** -funtor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  é um funtor tal que, para quaisquer objetos  $A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , as funções  $f : \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A'))$  são transformações lineares.
- (5) Uma **categoria pré-aditiva graduada**  $\mathcal{A}$  é uma categoria enriquecida na categoria monoidal **GrAb** de grupos abelianos graduados com a estrutura monoidal dada pelo produto tensorial graduado. Isso significa que para quaisquer dois objetos  $A, B \in \mathcal{A}$ , o conjunto  $\mathcal{A}(A, B)$  de morfismos de  $A$  para  $B$  é um grupo abeliano graduado

$$\mathcal{A}(A, B) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_s(A, B),$$

onde  $\mathcal{A}_s(A, B)$  é o subgrupo abeliano das componentes homogêneas de grau  $s$ . Além disso, devemos ter

$$\mathcal{A}_s(A, B) \otimes \mathcal{A}_{s'}(B, C) \subset \mathcal{A}_{s+s'}(A, C).$$

Um **GrAb**-funtor  $F$  é um **Ab**-funtor tal que

$$F(\mathcal{A}_s(A, B)) \subset \mathcal{A}_s(F(A), F(B)).$$

**Definição 4.6.** Uma categoria aditiva  $\mathcal{A}$  é uma categoria pré-aditiva tal que:

- (1)  $\mathcal{A}$  possui um **objeto-zero**  $0$ , ou seja, para qualquer objeto  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , existe um único morfismo  $0 \rightarrow A$  e um único morfismo  $A \rightarrow 0$ . Para cada par de objetos  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , o morfismo  $0_{A,B} : A \rightarrow 0 \rightarrow B$  é dito o **morfismo-zero** desse par.
- (2)  $\mathcal{A}$  possui **biprodutos**, ou seja, para quaisquer objetos  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , existe um objeto  $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  junto com morfismos:

- **projeções**  $p_k : A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \rightarrow A_k$  e
- **inclusões**  $i_k : A_k \rightarrow A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$ ,

satisfazendo:

- $p_k \circ i_k = 1_{A_k}$  e
- $p_l \circ i_k = 0_{A_k, A_l}$ , para  $k \neq l$ ,

tais que:

- $(A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$  é um **produto** para os  $A_k$ ;
- $(A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n, i_1, i_2, \dots, i_n)$  é um **coproduto** para os  $A_k$ ;

Um biproduto vazio é isomorfo ao objeto-zero.

O biproduto em categorias aditivas é uma generalização das somas diretas finitas de módulos. Para as definições de produtos e coprodutos, bem como outros fatos gerais sobre categorias aditivas, ver [22].

Se  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  são categorias aditivas, um **funtor aditivo**  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  é um **Ab**-funtor entre as categorias pré-aditivas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ . De fato, a estrutura de **Ab**-funtor é necessária e suficiente para que os biprodutos sejam preservados, ou seja, que  $F(A_1 \oplus \dots \oplus A_n) \cong F(A_1) \oplus \dots \oplus F(A_n)$  (ver a Proposição 1.3.4 de [6]). Denotamos por **AddCat** a categoria cujos objetos são categorias aditivas pequenas e cujos morfismos são funtores aditivos entre elas.

Analogamente, uma **categoria aditiva graduada** é uma categoria pré-aditiva graduada com objeto-zero e biprodutos finitos. Neste caso, contudo, as projeções e inclusões devem ser homogêneas. Isso significa que, para cada  $1 \leq k \leq n$ , existem  $s, s' \in \mathbb{Z}$  tais que  $p_k \in \mathcal{A}_s(A_1 \oplus \dots \oplus A_n, A_k)$  e  $i_k \in \mathcal{A}_{s'}(A_k, A_1 \oplus \dots \oplus A_n)$ . Mais que isso, da relação  $p_k \circ i_k = 1_{A_k}$ , segue que  $s' = -s$ . Um **funtor aditivo graduado** é o mesmo que um **GrAb**-funtor. Denotamos por **GrAddCat** a categoria cujos objetos são categorias aditivas graduadas pequenas e cujos morfismos são funtores aditivos graduados entre elas.

Uma categoria aditiva graduada é dita **admitir translação** se para todo objeto  $A$  e para todo inteiro  $m$  existem um objeto  $A\{m\}$  e uma **translação**  $A \rightarrow A\{m\}$ , que é um isomorfismo de grau  $m$ . Dada uma categoria aditiva  $\mathcal{A}$ , sempre podemos definir uma categoria  $\mathcal{A}'$  equivalente a  $\mathcal{A}$  e que admite translação. De fato, defina  $A\{m\} \in \text{Ob}(\mathcal{A}')$ , para cada  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  e para cada  $m \in \mathbb{Z}$ . A seguir, defina  $\mathcal{A}'_s(A\{m\}, B\{n\}) = \mathcal{A}_{s+m-n}(A, B)$ . Desse modo,  $\mathcal{A}'$  torna-se uma categoria aditiva graduada. Para ver que  $\mathcal{A}'$  admite translação, sejam  $A\{m\} \in \text{Ob}(\mathcal{A}')$  e  $s \in \mathbb{Z}$ . Então, como  $1_A : A \rightarrow A$  é um isomorfismo de grau 0, sua cópia em  $\mathcal{A}'_s(A\{m\}, A\{m+s\})$  também é um isomorfismo. Agora, seja  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  tal que  $F(A) = A\{0\}$  e  $F(f) = f$ , para quaisquer  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ ,  $f \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ . Note que  $F$  define um funtor aditivo graduado. Além disso,  $F$  é completo e fiel, pois

$$\begin{aligned} F_{AB} : \quad \mathcal{A}(A, B) &\rightarrow \mathcal{A}'(A\{0\}, B\{0\}) \\ f : A \rightarrow B &\mapsto F(f) : A\{0\} \rightarrow B\{0\} = f : A \rightarrow B \end{aligned}$$

é bijetiva. Finalmente,  $F$  também é essencialmente sobrejetivo pois cada  $A\{m\} \in \text{Ob}(\mathcal{A}')$  é isomorfo a  $A\{0\} = F(A)$ . Logo, concluímos que as categorias  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$  são equivalentes. Um funtor aditivo graduado  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  entre categorias aditivas com translação sempre preserva translações, ou seja,  $F(A\{m\}) \cong F(A)\{m\}$ . De fato, temos um isomorfismo  $A\{m\} \rightarrow A$  de grau  $-m$ . Daí, a imagem por  $F$  desse isomorfismo,  $F(A\{m\}) \rightarrow F(A)$  é também um isomorfismo de grau  $-m$ . Compondo com o isomorfismo  $F(A) \rightarrow F(A)\{m\}$  de grau  $m$ , obtemos um isomorfismo de grau 0 entre  $F(A\{m\})$  e  $F(A)\{m\}$ . Denotamos por **GAT** a categoria das categorias aditivas graduadas com translação, junto com funtores aditivos graduados.

A categoria **AddCat** possui uma estrutura monoidal, isto é, temos um tensor:

$$\begin{aligned} \otimes : \quad \mathbf{AddCat} \times \mathbf{AddCat} &\rightarrow \mathbf{AddCat} \\ (\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\mapsto \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  é a categoria tal que

$$\text{Ob}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \text{Ob}(\mathcal{A}) \times \text{Ob}(\mathcal{B})$$

e

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}((A, B), (A', B')) = \mathcal{A}(A, A') \otimes \mathcal{B}(B, B')$$

(produto tensorial usual de grupos abelianos), para quaisquer  $A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ ,  $B, B' \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ . É possível verificar que  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  é uma categoria aditiva. Aqui o objeto unidade  $e$  é uma categoria  $\mathcal{I}$  com um único objeto  $\{*\}$  e tal que  $\mathcal{I}(*, *) = \mathbb{Z}$ . De maneira análoga, também podemos definir estruturas monoidais nas categorias **GrAddCat** e **GAT**. Essa construção aqui esboçada é estabelecida detalhadamente em [12] no contexto mais geral de categorias enriquecidas sobre uma **categoria monoidal simétrica**.

**Definição 4.7.** • *Uma 2-categoria aditiva é uma 2-categoria enriquecida na categoria monoidal **AddCat** de categorias aditivas.*

- *Uma 2-categoria aditiva graduada é uma 2-categoria enriquecida na categoria monoidal **GrAddCat** de categorias aditivas graduadas.*



- Uma 2-categoria aditiva graduada é dita **admitir translação** se ela é uma categoria enriquecida sobre a categoria monoidal **GAT** de categorias aditivas graduadas que admitem translação.

Desse modo, uma 2-categoria aditiva graduada que admite translação é uma 2-categoria estrita  $\mathcal{A}$  tal que as categorias  $\mathcal{A}(A, B)$  entre quaisquer dois objetos  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , são categorias aditivas graduadas que admitem translação.

Se  $F, G : A \rightarrow B$  são 1-morfismos de  $\mathcal{A}$ , então o grupo abeliano graduado  $\mathcal{A}(A, B)(F, G)$  é escrito como  $\mathcal{A}(F, G)$  e é zero se  $F$  e  $G$  possuem domínios ou contradomínios distintos. A decomposição em componentes homogêneas é expressa como

$$\mathcal{A}(F, G) := \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_s(F, G),$$

onde  $\mathcal{A}_s(F, G)$  é a componente dos elementos homogêneos de grau  $s$ . A composição e as identidades seguem do enriquecimento sobre **GAT** e são dadas por funtores aditivos graduados:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, C) &\rightarrow \mathcal{A}(A, C) & e &\rightarrow \mathcal{A}(A, A) \\ \mathcal{A}_s(F, G) \otimes \mathcal{A}_{s'}(G, H) &\mapsto \mathcal{A}_{s+s'}(F, H) & 1_e &\mapsto \mathcal{A}_0(F, F) \end{aligned}$$

de modo que as identidades são sempre de grau zero.

## 4.2 A 2-categoria $\mathcal{U}^*$

Definiremos a seguir, por meio de geradores e relações, uma 2-categoria  $\mathcal{U}^*$ , que é aditiva graduada e admite translação.

### Geradores de $\mathcal{U}^*$

A 2-categoria  $\mathcal{U}^*$  possui um objeto  $n$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Os 1-morfismos de  $\mathcal{U}^*$  são biprodutos formais finitos de composições finitas associativas dos morfismos:

$$\begin{aligned} 1_n &: n &\rightarrow n, \\ \mathcal{E}_n &: n-1 &\rightarrow n+1, \\ \mathcal{F}_n &: n+1 &\rightarrow n-1, \end{aligned}$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , juntamente com suas translações  $\{s\}$ , para cada  $s \in \mathbb{Z}$ . Os morfismos  $1_n$  são os 1-morfismos identidade, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

Algumas vezes, denotaremos os morfismos  $\mathcal{E}_n$  e  $\mathcal{F}_n$  simplesmente por  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$ , respectivamente. Também estenderemos essas simplificações às composições escrevendo, por exemplo,  $\mathcal{E}_n \mathcal{F}_n$  como  $\mathcal{E}\mathcal{F}$  e  $\mathcal{E}_{n+2} \mathcal{E}_n$  como  $\mathcal{E}^2$ . Em outras vezes, exibiremos os morfismos identidade no início e/ou no fim de uma composição para deixar claro quem são o domínio e o contradomínio da mesma, por exemplo,  $\mathcal{E}_n \mathcal{F}_n = \mathcal{E}\mathcal{F} = 1_{n+1} \mathcal{E}\mathcal{F} 1_{n+1} = 1_{n+1} \mathcal{E}\mathcal{F} = \mathcal{E}\mathcal{F} 1_{n+1}$ .

Dados  $m, n \in \mathcal{U}^*$ , a categoria aditiva graduada  $\mathcal{U}^*(n, m)$  consiste de

- objetos de  $\mathcal{U}^*(n, m)$ : biprodutos formais de composições do tipo

$$1_m \mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \mathcal{E}^{\alpha_2} \dots \mathcal{F}^{\beta_{k-1}} \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_k} 1_n \{s\},$$

onde  $m = n + 2(\sum \alpha_i - \sum \beta_j)$ , e  $s \in \mathbb{Z}$ . Na linguagem de diagramas de cordas, os 1-morfismos  $\mathcal{E}_n$  e  $\mathcal{F}_n$  são dados por

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ & \uparrow & \\ n+1 & & n-1 \\ & \downarrow & \\ & \mathcal{E} & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ & \downarrow & \\ n-1 & & n+1 \\ & \uparrow & \\ & \mathcal{F} & \end{array}$$

Podemos omitir  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  convencionando que  $\mathcal{E}$  é descrito por uma seta apontando para cima e  $\mathcal{F}$  por uma seta apontando para baixo, como a seguir:

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ n+1 & & n-1 \\ & \downarrow & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} & \downarrow & \\ n-1 & & n+1 \\ & \uparrow & \end{array}$$

- morfismos de  $\mathcal{U}^*(n, m)$ : para 1-morfismos  $F, G \in \mathcal{U}^*$ ,  $\mathcal{U}^*(F, G)$  é o grupo abeliano graduado cujos elementos são combinações  $\mathbb{Z}$ -lineares de 2-morfismos dados por composições finitas associativas (verticais e horizontais) de
  - 2-morfismos identidade de grau zero  $1_F$ , para cada 1-morfismo  $F$  de  $\mathcal{U}^*$ ;
  - para cada 1-morfismo  $F$ , um isomorfismo translação  $F \cong F\{s\}$  dado por 2-morfismos  $F \Rightarrow F\{s\}$  e  $F\{s\} \Rightarrow F$  de graus  $s$  e  $-s$ , respectivamente. Eles são representados pelo 2-morfismo identidade com uma translação no domínio ou contradomínio. Por exemplo, o isomorfismo  $\mathcal{E}_n \cong \mathcal{E}_n\{s\}$  é dado por

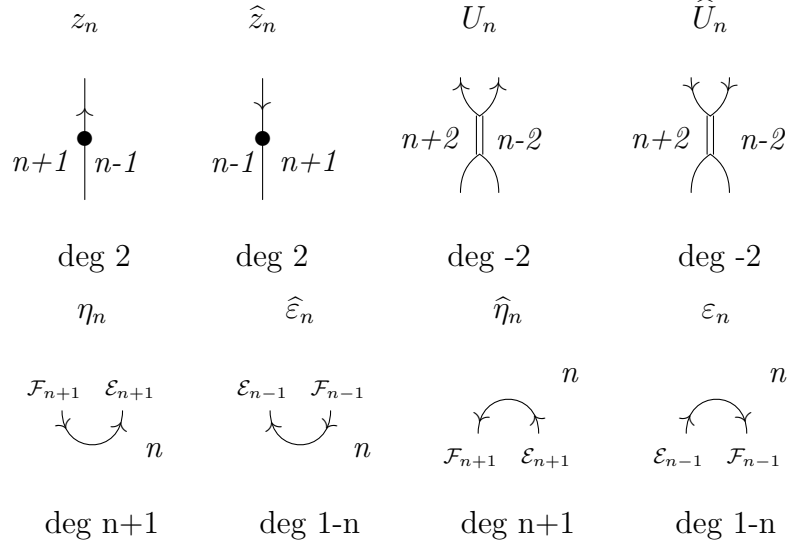
$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E}\{s\} & \\ & \uparrow & \\ n+1 & & n-1 \\ & \downarrow & \\ & \mathcal{E} & \\ \text{deg } s & & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ & \downarrow & \\ n+1 & & n-1 \\ & \uparrow & \\ & \mathcal{E}\{s\} & \\ \text{deg } -s & & \end{array}$$

- para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , os 2-morfismos

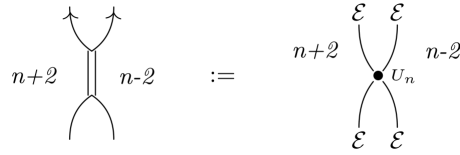
$$\begin{aligned} z_n & : \mathcal{E}_n \Rightarrow \mathcal{E}_n, \\ \hat{z}_n & : \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{F}_n, \\ \eta_n & : 1_n \Rightarrow \mathcal{F}_{n+1} \mathcal{E}_{n+1}, \\ \hat{\eta}_n & : 1_n \Rightarrow \mathcal{E}_{n-1} \mathcal{F}_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_n &: \mathcal{E}_{n+1}\mathcal{E}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{E}_{n+1}\mathcal{E}_{n-1}, \\
 \widehat{U}_n &: \mathcal{F}_{n-1}\mathcal{F}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{F}_{n-1}\mathcal{F}_{n+1}, \\
 \widehat{\eta}_n &: \mathcal{F}_{n+1}\mathcal{E}_{n+1} \Rightarrow 1_n, \\
 \varepsilon_n &: \mathcal{E}_{n-1}\mathcal{F}_{n-1} \Rightarrow 1_n,
 \end{aligned}$$

dados diagramaticamente na figura a seguir, juntamente com seus respectivos graus:



Aqui, estamos usando a seguinte convenção para diagramas:

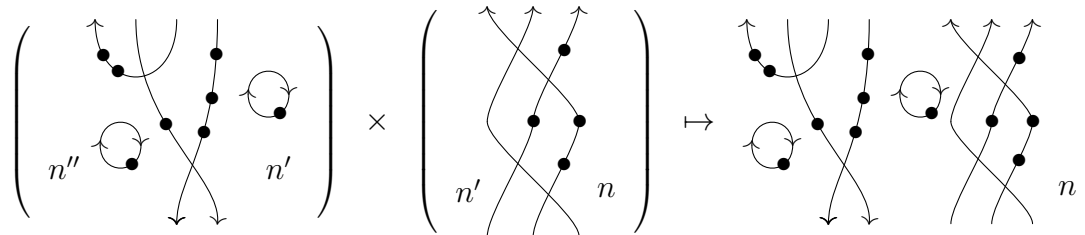


O diagrama análogo também vale para  $\widehat{U}_n$ .

- o funtor (aditivo graduado) composição  $\mathcal{U}^*(n, n') \times \mathcal{U}^*(n', n'') \rightarrow \mathcal{U}^*(n, n'')$  é dado nos 1-morfismos de  $\mathcal{U}^*$  por

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \dots \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_k} 1_{n'} \{s'\} \times \mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \dots \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_k} 1_n \{s\} \\
 &\mapsto \mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \dots \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_k} \mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \dots \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_k} 1_n \{s + s'\}
 \end{aligned}$$

onde  $n' = n + 2(\sum \alpha_i - \sum \beta_i)$  e nos 2-morfismos de  $\mathcal{U}^*$  por justaposição de diagramas, como no exemplo abaixo,



sujeito às relações dadas a seguir.

Escrevemos  $\mathcal{U}^*(F, G) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_s^*(F, G)$ , onde  $\mathcal{U}_s^*(F, G)$  denota a componente homogênea de grau  $s$ .

## As relações em $\mathcal{U}^*$

Denotaremos as composições verticais iteradas de  $z_n$  e  $\hat{z}_n$  por

$$\begin{array}{ccc} & \bullet m & \\ & | & \\ n+1 & \uparrow & n-1 \\ & | & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \bullet m & \\ & | & \\ n-1 & \downarrow & n+1 \\ & | & \end{array}$$

onde a letra  $m$  indica o número de fatores da composição. As relações impostas sobre os 2-morfismos da 2-categoria  $\mathcal{U}^*$  são dadas abaixo em termos dos conceitos de adjunções e duais.

## Biadjunções

Temos morfismos biadjuntos  $\mathcal{E}_n \dashv \mathcal{F}_n \dashv \mathcal{E}_n$  com unidades e counidades dados pelos pares  $(\eta_{n-1}, \varepsilon_{n+1})$  e  $(\hat{\varepsilon}_{n+1}, \hat{\eta}_{n-1})$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Isso equivale a impor as seguintes igualdades:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} n+1 \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ n-1 \end{array} = \begin{array}{c} n+1 \\ | \\ n-1 \end{array} & \begin{array}{c} n+1 \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ n-1 \end{array} = \begin{array}{c} n-1 \\ | \\ n+1 \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} n-1 \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ n+1 \end{array} = \begin{array}{c} n-1 \\ | \\ n+1 \end{array} & \begin{array}{c} n-1 \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ n+1 \end{array} = \begin{array}{c} n+1 \\ | \\ n-1 \end{array} \end{array}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Todos os morfismos de  $\mathcal{U}^*$  são somas formais de composições e translações dos morfismos  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$ . Por 3.1, as composições de morfismos biadjuntos são também morfismos biadjuntos. Se  $\hat{F} \dashv F : A \rightarrow B$  em  $\mathcal{U}^*$  com unidade  $\varepsilon$  e counidade  $\eta$ , então  $\hat{F}\{r\} \dashv F\{s\}$ , para quaisquer  $r, s \in \mathbb{Z}$ , com unidade  $\zeta = \varepsilon \circ (\hat{T}_r^{-1} * T_s^{-1})$  e counidade  $\vartheta = (T_s * \hat{T}_r) \circ \eta$ , onde  $T_s : F \rightarrow F\{s\}$  e  $\hat{T}_r : \hat{F} \rightarrow \hat{F}\{r\}$  são translações. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} (1_{F\{s\}} * \zeta) \circ (\vartheta * 1_{F\{s\}}) &= (1_{F\{s\}} * (\varepsilon \circ (\hat{T}_r^{-1} * T_s^{-1}))) \circ (((T_s * \hat{T}_r) \circ \eta) * 1_{F\{s\}}) \\ &= ((T_s \circ T_s^{-1}) * (\varepsilon \circ (\hat{T}_r^{-1} * T_s^{-1}))) \circ (((T_s * \hat{T}_r) \circ \eta) * (T_s \circ T_s^{-1})) \\ &= ((T_s * \varepsilon) \circ (T_s^{-1} * (\hat{T}_r^{-1} * T_s^{-1}))) \circ (((T_s * \hat{T}_r) * T_s) \circ (\eta * T_s^{-1})) \\ &= (T_s * \varepsilon) \circ (T_s^{-1} * \hat{T}_r^{-1} * T_s^{-1}) \circ (T_s * \hat{T}_r * T_s) \circ (\eta * T_s^{-1}) \\ &= (T_s * \varepsilon) \circ ((T_s^{-1} \circ T_s) * (\hat{T}_r^{-1} \circ \hat{T}_r) * (T_s^{-1} \circ T_s)) \circ (\eta * T_s^{-1}) \\ &= (T_s * \varepsilon) \circ (1_F * 1_{\hat{F}} * 1_F) \circ (\eta * T_s^{-1}) \\ &= (T_s * \varepsilon) \circ ((1_F \circ 1_F) * (1_{\hat{F}} \circ 1_{\hat{F}}) * (1_F \circ 1_F)) \circ (\eta * T_s^{-1}) \\ &= (T_s * \varepsilon) \circ ((1_F * 1_{\hat{F}} * 1_F) \circ (1_F * 1_{\hat{F}} * 1_F)) \circ (\eta * T_s^{-1}) \\ &= ((T_s * \varepsilon) \circ ((1_F * 1_{\hat{F}} * 1_F))) \circ ((1_F * 1_{\hat{F}} * 1_F) \circ (\eta * T_s^{-1})) \\ &= ((T_s \circ 1_F) * (\varepsilon \circ (1_{\hat{F}} * 1_F))) \circ (((1_F * 1_{\hat{F}}) \circ \eta) * (1_F \circ T_s^{-1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (T_s * \varepsilon) \circ (\eta * T_s^{-1}) \\
&= ((T_s \circ 1_F) * (1_{1_A} \circ \varepsilon)) \circ ((\eta \circ 1_{1_B}) * (1_F \circ T_s^{-1})) \\
&= ((T_s * 1_{1_A}) \circ (1_F * \varepsilon)) \circ ((\eta * 1_F) \circ (1_{1_B} * T_s^{-1})) \\
&= T_s \circ ((1_F * \varepsilon) \circ (\eta * 1_F)) \circ T_s^{-1} \\
&= T_s \circ 1_F \circ T_s^{-1} \\
&= 1_{F\{s\}}
\end{aligned}$$

e, por um cálculo análogo,  $(\zeta * 1_{\widehat{F}\{r\}}) \circ (1_{\widehat{F}\{r\}} * \vartheta) = 1_{\widehat{F}\{r\}}$ .

Se  $\eta, \varepsilon, \widehat{F} \dashv F : A \rightarrow B$  e  $\eta', \varepsilon', \widehat{F}' \dashv F' : A \rightarrow B$  são adjunções em  $\mathcal{U}^*$ , então  $\widehat{F} \oplus \widehat{F}'$  é adjunto à esquerda a  $F \oplus F'$  com unidade  $\varepsilon \oplus \varepsilon'$  e counidade  $\eta \oplus \eta'$ . Temos:

$$\begin{aligned}
((1_{F \oplus F'}) * (\varepsilon \oplus \varepsilon')) \circ ((\eta \oplus \eta') * (1_{F \oplus F'})) &\stackrel{(1)}{=} ((1_F \oplus 1_{F'}) * (\varepsilon \oplus \varepsilon')) \circ ((\eta \oplus \eta') * (1_F \oplus 1_{F'})) \\
&\stackrel{(2)}{=} ((1_F * \varepsilon) \oplus (1_{F'} * \varepsilon')) \circ ((\eta * 1_F) \oplus (\eta' * 1_{F'})) \\
&\stackrel{(3)}{=} ((1_F * \varepsilon) \circ (\eta * 1_F)) \oplus ((1_{F'} * \varepsilon') \circ (\eta' * 1_{F'})) \\
&\stackrel{(4)}{=} 1_F \oplus 1_{F'} \\
&\stackrel{(5)}{=} 1_{F \oplus F'}
\end{aligned}$$

Aqui as igualdades (1), (3) e (5) seguem da functorialidade do biproduto em categorias aditivas, a igualdade (2) segue da functorialidade da composição horizontal e (4) das adjunções dadas. De maneira análoga é possível obter a outra identidade zig-zag.

Segue da discussão acima que todo morfismo em  $\mathcal{U}^*$  possui um biadjunto. O biadjunto do 1-morfismo  $1_m \mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \dots \mathcal{E}^{\alpha_m} \mathcal{F}^{\beta_m} 1_n \{s\}$  é dado por  $1_n \mathcal{E}^{\beta_m} \mathcal{F}^{\alpha_m} \dots \mathcal{E}^{\beta_1} \mathcal{F}^{\alpha_1} 1_m \{-s\}$ .

### Dualidade para $z_n$ e $\widehat{z}_n$

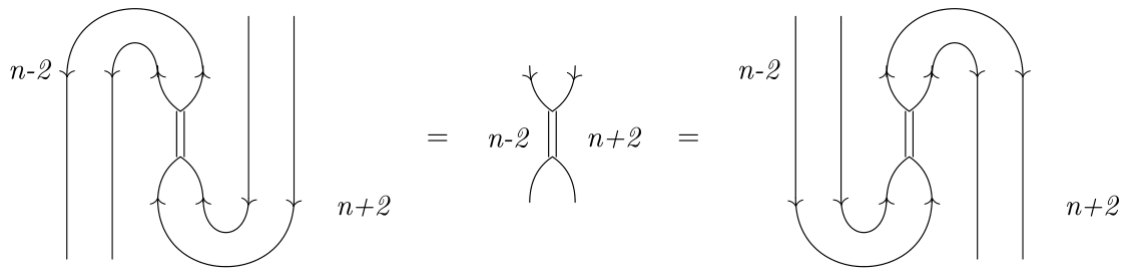
Os dois duais  ${}^*z_n$  e  $z_n^*$  do 2-morfismo  $z_n$  sob a estrutura de biadjunção em  $\mathcal{U}^*$  são iguais, para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Mais precisamente, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , valem as seguintes igualdades:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{---} \end{array} & \\
n-1 & & n+1
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{---} \end{array} \\
n-1
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} & \\
n-1 & & n+1
\end{array}
\end{array}$$

Aplicando a estrutura de biadjunção ao 1-morfismo  $\widehat{z}_n$ , obtemos as mesmas igualdades com a orientação invertida. Logo,  $\widehat{z}_n$  é o dual à esquerda e à direita de  $z_n$  (e vice-versa).

### Dualidade para $U_n$ e $\widehat{U}_n$

Os dois duais  ${}^*U_n$  e  $U_n^*$  para o 2-morfismo  $U_n$  sob a estrutura de biadjunção são iguais. Mais precisamente, as igualdades



valem para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Aplicando a estrutura de biadjunção ao 1-morfismo  $\widehat{U}_n$  obtemos as mesmas equações com orientações opostas. Segue que o 2-morfismo  $\widehat{U}_n$  é dual (à esquerda e à direita) ao 2-morfismo  $U_n$ .

Os três axiomas anteriores implicam que todos os morfismos de  $\mathcal{U}^*$  são 2-morfismos cíclicos com respeito à estrutura de biadjunção que cada 1-morfismo herda das definições anteriores.

### Grau positivo de bolhas fechadas

Pelos axiomas de dualidade para os 2-morfismos  $z_n$  e  $\widehat{z}_n$ , valem as seguintes igualdades entre 2-morfismos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \circ (1_{\mathcal{E}_{n-1}} * \widehat{z}_{n-1}^m) \circ \widehat{\varepsilon}_n &= \varepsilon_n \circ (z_{n-1}^m * 1_{\mathcal{F}_{n-1}}) \circ \widehat{\varepsilon}_n, \\ \widehat{\eta}_n \circ (1_{\mathcal{F}_{n+1}} * z_{n+1}^m) \circ \eta_n &= \widehat{\eta}_n \circ (\widehat{z}_{n+1}^m * 1_{\mathcal{E}_{n+1}}) \circ \eta_n, \end{aligned}$$

para quaisquer  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Os diagramas correspondentes a tais 2-morfismos são conhecidos como **bolhas** ou **bolhas fechadas**. Seus graus são dados abaixo e seguem dos graus definidos anteriormente para os 2-morfismos  $z_n$ ,  $\widehat{z}_n$ ,  $\eta_n$ ,  $\varepsilon_n$ ,  $\widehat{\eta}_n$  e  $\widehat{\varepsilon}_n$ :

$$\deg \left( \begin{array}{c} n \\ \circlearrowleft \\ m \end{array} \right) = 2(m - n + 1) \quad \deg \left( \begin{array}{c} n \\ \circlearrowright \\ m \end{array} \right) = 2(m + n + 1). \quad (4.2.1)$$

Em  $\mathcal{U}^*$  impõe-se a condição de que todas as bolhas de graus negativos sejam nulas, ou seja,

$$\begin{array}{c} n \\ \circlearrowleft \\ m \end{array} = 0 \quad \text{se } m < n - 1, \quad (4.2.2)$$

$$\begin{array}{c} n \\ \circlearrowright \\ m \end{array} = 0 \quad \text{se } m < -n - 1, \quad (4.2.3)$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}_+$  e  $n \in \mathbb{Z}$ .

É um fato não-óbvio (ver [21] Prop. 8.2) que a condição anterior assegura que qualquer diagrama fechado de grau negativo seja zero.

Além disso, impõe-se que as bolhas fechadas de grau zero sejam as identidades (ver [16]):

$$\begin{array}{c} \text{bolha com } n-1 \text{ pontos} \\ n-1 \end{array} = \begin{array}{c} \text{bolha com } -n-1 \text{ pontos} \\ -n-1 \end{array} = 1_{1_n}.$$

### Ação do anel nilHecke

As seguintes igualdades

$$\begin{array}{c} \text{bolha com } n \text{ pontos} \\ n \end{array} = 0 \quad (4.2.4)$$

$$\begin{array}{c} \text{dois fios} \\ n \end{array} = \begin{array}{c} \text{bolha com } n \text{ pontos} \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \text{bolha com } n \text{ pontos} \\ n \end{array} = \begin{array}{c} \text{bolha com } n \text{ pontos} \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \text{bolha com } n \text{ pontos} \\ n \end{array} \quad (4.2.5)$$

$$\begin{array}{c} \text{dois fios com bolhas} \\ n \end{array} = \begin{array}{c} \text{dois fios com bolhas} \\ n \end{array} \quad (4.2.6)$$

valem para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Segue desses axiomas que a álgebra nilHecke  $\mathcal{NH}_a$  age sobre o grupo abeliano graduado  $\mathcal{U}^*(\mathcal{E}^a 1_n, \mathcal{E}^a 1_n)$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , com  $\chi_i \mapsto z_{n+2i-1}$  e  $u_j \mapsto U_{n+2j}$ , para  $1 \leq i \leq a$  e  $1 \leq j < a$ .

A relação (4.2.4) corresponde à relação nilCoxeter (2.1.1). A relação (4.2.5) corresponde às relações (2.1.6) e (2.1.7). A relação (4.2.6) corresponde a (2.1.3). As relações de comutação (2.1.2), (2.1.4) e (2.1.5) da álgebra nilHecke são satisfeitas trivialmente.

Usando a dualidade introduzida para os 1-morfismos de  $\mathcal{U}^*$ , obtemos também uma ação da álgebra oposta  $\mathcal{NH}_a^{\text{op}}$  sobre  $\mathcal{U}^*(\mathcal{F}^a 1_n, \mathcal{F}^a 1_n)$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , com  $\chi_i \mapsto \hat{z}_{n-2i+1}$  e  $u_j \mapsto \hat{U}_{n-2j}$ . Nos referimos aos 2-morfismos  $U_j$  e  $\hat{U}_j$  em  $\mathcal{U}^*$  como **geradores nilCoxeter**.

Os próximos dois axiomas são requeridos para que os 1-morfismos  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  satisfaçam a relação entre  $E$  e  $F$  em  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Estes axiomas são definidos recursivamente para cada  $n$ . Inicialmente

introduzimos os símbolos formais:

$$\begin{array}{cc}
 n \geq 0 & n \leq 0 \\
 \begin{array}{c} \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ -n-1+j \end{array} & \begin{array}{c} \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ n-1+\ell \end{array} \\
 0 \leq j \leq n & 0 \leq \ell \leq -n
 \end{array}$$

que, a princípio, não fazem sentido pois o inteiro que está indexando o vértice de cada bolha é um número negativo. No primeiro caso,  $-n-1+j < 0$  e no segundo caso  $n-1+\ell < 0$ , já que  $0 \leq j \leq n$  e  $0 \leq \ell \leq -n$ . Isso corresponderia a compor verticalmente os 2-morfismos  $\hat{z}_m$  ou  $z_m$  um número negativo de vezes com eles mesmos, o que é impossível. Por isso, chamamos tais símbolos de **bolhas falsas**. A vantagem de usar bolhas falsas é que elas podem ser usadas para escrever equações que transitam perfeitamente dos casos onde  $0 \leq j \leq n$  e  $0 \leq \ell \leq -n$  aos casos onde  $j > n$  e  $\ell > -n$ , onde as bolhas são bem-definidas.

Cada uma das bolhas falsas, se tomadas literalmente, tem graus positivos

$$\deg \left( \begin{array}{c} n \geq 0 \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ -n-1+j \end{array} \right) = 2j \qquad \deg \left( \begin{array}{c} n \leq 0 \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ n-1+\ell \end{array} \right) = 2\ell$$

de modo que essa convenção não contradiz o axioma de positividade dos graus das bolhas em  $\mathcal{U}^*$ . Contudo, a positividade dos graus dessas bolhas com índices negativos nos permite defini-las como somas de diagramas bem-definidos de graus positivos (bolhas orientadas de maneira oposta com vértices de índices não-negativos). Os símbolos são definidos pela seguinte condição para  $j = \ell = 0$

$$\begin{array}{c} n \geq 0 \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ -n-1 \end{array} := 1_{1_n} \qquad \begin{array}{c} n \leq 0 \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ n-1 \end{array} := 1_{1_n}$$

e para  $1 \leq j \leq n$  recursivamente por

$$\begin{array}{c} n \geq 0 \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ -n-1+j \end{array} := - \sum_{\ell=1}^j \begin{array}{c} n \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ n-1+\ell \end{array} \begin{array}{c} n \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ -n-1+j-\ell \end{array} \qquad (4.2.7) \\
 \begin{array}{c} n \leq 0 \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ n-1+j \end{array} := - \sum_{\ell=0}^{j-1} \begin{array}{c} n \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ n-1+\ell \end{array} \begin{array}{c} n \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ -n-1+j-\ell \end{array} .
 \end{array}$$

Por exemplo, suponha que  $n \leq 0$ . Temos

$$\begin{array}{c} n \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ -n-1+1 \end{array} := - \begin{array}{c} n \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ n-1+1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} n \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ -n-1+2 \end{array} := - \begin{array}{c} n \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ n-1+2 \end{array} + \begin{array}{c} n \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ n-1+1 \end{array} \begin{array}{c} n \\ \textcircled{\curvearrowright} \\ \bullet \\ n-1+1 \end{array}$$

e assim sucessivamente. Note que em nenhum dos diagramas do lado direito aparecem vértices com índices negativos. Todos eles são somas de composições de 2-morfismos geradores de  $\mathcal{U}^*$ .



## Redução a bolhas

As igualdades

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} = - \sum_{\ell=0}^{-n} \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \quad (4.2.8)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} = \sum_{j=0}^n \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} \quad (4.2.9)$$

valem para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Todas essas somas são tomadas nulas caso a variação dos índices seja decrescente. Isso significa que na primeira equação acima, quando  $-n < 0$  o termo do lado direito é zero. Na segunda equação, quando  $n < 0$  o lado direito também é nulo. Quando essas equações são não-nulas fazemos uso da convenção para bolhas falsas.

## Decomposição da identidade

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$  valem as relações:

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \end{array} = - \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \end{array} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\ell} \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \end{array} \quad (4.2.10)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 8} \end{array} = - \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \end{array} + \sum_{\ell=0}^{-n-1} \sum_{j=0}^{\ell} \begin{array}{c} \text{Diagram 10} \end{array} \quad (4.2.11)$$

Além disso, como todas as somas são tomadas com variação crescente dos índices, quando  $n < 1$  o segundo termo à direita da primeira equação acima se anula. O mesmo acontece para  $n > -1$  com o segundo termo à direita na segunda equação acima. Quando tais termos são não-nulos, as bolhas que aparecem neles são bolhas falsas.

Os axiomas de redução a bolhas e de decomposição da identidade implicam que qualquer diagrama fechado pode ser reduzido a uma soma de diagramas contendo bolhas de mesma orientação (ver a Prop. 8.2 de [21]).

### 4.3 Relações úteis em $\mathcal{U}^*$

Nesta seção apresentaremos algumas relações adicionais que decorrem das relações impostas sobre os 2-morfismos de  $\mathcal{U}^*$ .

**Proposição 4.1** (Fórmula de indução).

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} = \sum_{j=0}^{m-1} \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} \quad (4.3.1)$$

*Demonstração.* Esta relação segue de (4.2.5) por indução sobre  $m \geq 1$ . O caso  $m = 1$  é justamente a relação (4.2.5). Suponhamos então que as igualdades valham para um certo  $m \geq 1$ . Para  $m + 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} &= \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ n \end{array} + \sum_{j=0}^{m-1} \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ n \end{array} + \sum_{j=0}^{m-1} \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ n \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} \\ &\stackrel{(**)}{=} \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ n \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} \end{aligned}$$

Em (\*) usamos a hipótese de indução e em (\*\*) usamos uma composição vertical adequada em (4.2.5) por  $1_{\mathcal{E}_{n+3}} * z_{n+1}^m$ .

A demonstração de que

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} = \sum_{j=0}^{m-1} \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array}$$

é análoga ao que fizemos acima. □

**Proposição 4.2** (Consequências das relações nilHecke).

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} + \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ \downarrow \\ n \end{array}$$

*Demonstração.* A primeira igualdade segue imediatamente de (4.2.5). A segunda igualdade também segue de (4.2.5). Basta compor verticalmente com  $1_{\mathcal{E}_{n+3}} * z_{n+1}$  como mostramos abaixo:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \text{diagram 2} \\ n \end{array} = \begin{array}{c} \text{diagram 3} \\ n \end{array} = \begin{array}{c} \text{diagram 4} \\ n \end{array} = \begin{array}{c} \text{diagram 5} \\ n \end{array} - \begin{array}{c} \text{diagram 6} \\ n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{diagram 7} \\ n \end{array} = \begin{array}{c} \text{diagram 8} \\ n \end{array}
 \end{array}$$

□

**Proposição 4.3** (Mais reduções à bolhas). *As igualdades*

$$\begin{array}{c} \text{diagram} \\ n \\ m \end{array} = - \sum_{\ell=0}^{m-n} \begin{array}{c} \bullet \\ m-n-\ell \\ \text{diagram} \\ n \\ n-1+\ell \end{array} \quad (4.3.2)$$

$$\begin{array}{c} \text{diagram} \\ n \\ m \end{array} = \sum_{j=0}^{m+n} \begin{array}{c} \text{diagram} \\ n \\ -n-1+j \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ m+n-j \end{array} \quad (4.3.3)$$

valem para quaisquer  $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$ .

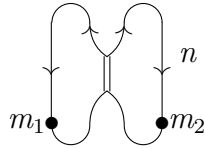
Observe que todas as somas aqui são crescentes ou nulas. Isso significa que em (4.3.2) quando  $m - n < 0$  a soma do lado direito é zero. Em (4.3.3) quando  $m + n < 0$  o lado direito também é zero. Dependendo do valor de  $n$  essas equações fazem uso das convenções de bolhas falsas.

*Demonstração.* No caso da primeira igualdade, temos:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \text{diagram} \\ n \\ m \end{array} \stackrel{(1)}{=} \begin{array}{c} \text{diagram} \\ n \\ m \end{array} \\
 \stackrel{(2)}{=} \begin{array}{c} \text{diagram} \\ n \\ m \end{array} - \sum_{j=0}^{m-1} \begin{array}{c} \bullet \\ m-j-1 \\ \text{diagram} \\ n \\ j \end{array} \\
 \stackrel{(3)}{=} - \sum_{k=0}^{-n} \begin{array}{c} \bullet \\ m-n-k \\ \text{diagram} \\ n \\ n-1+k \end{array} - \sum_{j=0}^{m-1} \begin{array}{c} \bullet \\ m-j-1 \\ \text{diagram} \\ n \\ j \end{array} \\
 \stackrel{(4)}{=} - \sum_{k=0}^{-n} \begin{array}{c} \bullet \\ m-n-k \\ \text{diagram} \\ n \\ n-1+k \end{array} - \sum_{j=-n+1}^{m-n} \begin{array}{c} \bullet \\ m-n-j \\ \text{diagram} \\ n \\ n-1+j \end{array} \\
 \stackrel{(5)}{=} - \sum_{\ell=0}^{m-n} \begin{array}{c} \bullet \\ m-n-\ell \\ \text{diagram} \\ n \\ n-1+\ell \end{array}
 \end{array}$$



Escolha  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  de modo que  $m_1 + m_2 + 1 > n$ . Considere o seguinte diagrama:



Usando (4.3.2), temos

$$\begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m_1 \bullet \quad m_2 \bullet \end{array} = - \sum_{k=0}^{m_2-n} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ n-1+k \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m_1+m_2-n-k \end{array} \quad (4.3.5)$$

e usando (4.3.3), temos

$$\begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m_1 \bullet \quad m_2 \bullet \end{array} = \sum_{j=0}^{m_1+n} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m_1+m_2+n-j \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ -n-1+j \end{array} \quad (4.3.6)$$

Comparando (4.3.5) e (4.3.6), temos:

$$\sum_{j=0}^{m_1+n} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m_1+m_2+n-j \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ -n-1+j \end{array} + \sum_{k=0}^{m_2-n} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ n-1+k \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m_1+m_2-n-k \end{array} = 0. \quad (4.3.7)$$

Agora, fazendo a mudança de variáveis  $j \mapsto m_1 + m_2 - k + 1$  na primeira parcela de (4.3.7), ficamos com

$$\sum_{k=m_2-n+1}^{m_1+m_2+1} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ n-1+k \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m_1+m_2-n-k \end{array} + \sum_{k=0}^{m_2-n} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ n-1+k \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m_1+m_2-n-k \end{array} = 0.$$

Portanto, temos

$$\sum_{k=0}^{m_1+m_2+1} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ n-1+k \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ m_1+m_2-n-k \end{array} = 0,$$

que é a relação do enunciado, para  $d = m_1 + m_2 + 1 > n$ .

□

## 4.4 A 2-categoria $\mathcal{U}$

A 2-categoria  $\mathcal{U}$  é a sub-2-categoria de  $\mathcal{U}^*$  com os mesmos objetos e 1-morfismos de  $\mathcal{U}^*$ , mas os 2-morfismos de  $\mathcal{U}$  são apenas os 2-morfismos de  $\mathcal{U}^*$  que possuem grau zero, ou seja,

$$\mathcal{U}(F, G) = (\mathcal{U}^*)_0(F, G).$$

Note que a 2-categoria  $\mathcal{U}$  não é enriquecida sobre a categoria das categorias aditivas graduadas pequenas, já que os conjuntos  $\mathcal{U}(F, G)$  são apenas grupos abelianos e não grupos abelianos graduados. No entanto, a 2-categoria  $\mathcal{U}$  é enriquecida sobre a categoria das categorias aditivas pequenas. As translações  $F \rightarrow F\{m\}$  de grau  $m$  não são 2-morfismos de  $\mathcal{U}$  (exceto se  $m = 0$ ), então em geral o 1-morfismo  $F$  não é isomorfo a  $F\{m\}$  em  $\mathcal{U}$ , já que este isomorfismo não é de grau zero.

O cálculo diagramático definido para  $\mathcal{U}^*$  se estende naturalmente a  $\mathcal{U}$ . Neste caso, todo diagrama é interpretado como um diagrama de grau zero transladando o domínio ou o contradomínio por um inteiro apropriado.

Por exemplo, a igualdade de 2-morfismos de graus  $-6$  em (4.2.6) representa qualquer uma das seguintes igualdades de grau zero

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{E} \quad \mathcal{E} \quad \mathcal{E} \quad \mathbf{1}_n\{s+6\} \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \mathcal{E} \quad \mathcal{E} \quad \mathcal{E} \quad \mathbf{1}_n\{s\}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \mathcal{E} \quad \mathcal{E} \quad \mathcal{E} \quad \mathbf{1}_n\{s+6\} \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \mathcal{E} \quad \mathcal{E} \quad \mathcal{E} \quad \mathbf{1}_n\{s\}
 \end{array}$$

para  $s \in \mathbb{Z}$ .

A 2-categoria  $\mathcal{U}$  herda de  $\mathcal{U}^*$  as seguintes estruturas:

## Quase-biadjunção

Os 1-morfismos  $\mathcal{E}_n$  já não têm mais um adjunto  $\mathcal{F}_n$  simultaneamente à esquerda e à direita em  $\mathcal{U}$ , já que as unidades e counidades que realizam as biadjunções em  $\mathcal{U}^*$  não têm grau zero. No entanto, se transladarmos  $\mathcal{F}_n$  por  $\{-n\}$ , podemos obter novas unidades e counidades para a adjunção  $\mathcal{E}_n \dashv \mathcal{F}_n\{-n\}$  que são aplicações de grau zero. Como vimos, sendo  $\mathcal{E}_n \dashv \mathcal{F}_n$  com unidade  $\varepsilon_{n+1}$  e counidade  $\eta_{n-1}$ , então  $\mathcal{E}_n \dashv \mathcal{F}_n\{-n\}$  com unidade  $\varepsilon_{n+1} \circ (1_{\mathcal{E}_n} * T_{-n}^{-1})$  e counidade  $(T_{-n} * 1_{\mathcal{E}_n})\eta_{n-1}$ , onde  $T : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n\{-n\}$  é o isomorfismo translação. Note que as novas unidades e counidades têm grau zero.

Mais geralmente, como  $\mathcal{E}1_n\{s\} \dashv \mathcal{F}1_{n+2}\{-s\}$  em  $\mathcal{U}^*$ , temos  $\mathcal{E}1_n\{s\} \dashv \mathcal{F}1_{n+2}\{-n-1-s\}$  em  $\mathcal{U}$ , já que as unidades e counidades têm graus:

$$\begin{aligned}
 \deg \left( \begin{array}{c} \mathcal{F} \quad \mathcal{E}\{s-n-1-s\} \\ \downarrow \quad \uparrow \\ n \end{array} \right) &= (1+n) + (-n-1) = 0 \\
 \deg \left( \begin{array}{c} n+2 \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \mathcal{E} \quad \mathcal{F}\{-n-1-s+s\} \end{array} \right) &= (1-(n+2)) - (-n-1) = 0
 \end{aligned}$$

e ainda satisfazem as identidades zig-zag. Analogamente,  $\mathcal{E}_n\{s\}$  tem um adjunto à esquerda  $\mathcal{F}_n\{n-s\}$  em  $\mathcal{U}$ . Podemos checar que com essas translações as unidades e counidades da adjunção  $\mathcal{F}_n\{n-s\} \dashv \mathcal{E}_n\{s\}$  tornam-se aplicações de grau zero e são compatíveis com as identidades zig-zag. Note que o adjunto à esquerda  $\mathcal{F}_n\{n-s\}$  e o adjunto à direita  $\mathcal{F}_n\{-n-s\}$  de  $\mathcal{E}_n\{s\}$  diferem somente por uma translação. Nós chamamos morfismos com essa propriedade de **quase-biadjuntos**.

Então é claro que  $\mathcal{E}_n\{s\}$  e  $\mathcal{F}_n\{s\}$  são quase-biadjuntos em  $\mathcal{U}$ , para quaisquer  $s, n \in \mathbb{Z}$  com

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n\{n-s\} &\dashv \mathcal{E}_n\{s\} \dashv \mathcal{F}_n\{-n-s\}, \\ \mathcal{E}_n\{-n-s\} &\dashv \mathcal{F}_n\{s\} \dashv \mathcal{E}_n\{n-s\}. \end{aligned}$$

Todo morfismo em  $\mathcal{U}$  é dado por somas de composições de  $\mathcal{E}_n\{s\}$  e  $\mathcal{F}_n\{s\}$  junto com identidades. Compondo adjunções como em 3.1, os adjuntos das compostas podem ser calculados. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{n+2}\mathcal{E}^\alpha\mathbf{1}_n\{s\} &\dashv \mathbf{1}_n\mathcal{F}^\alpha\mathbf{1}_{n+2}\{-\alpha(n+\alpha)-s\}, \\ \mathbf{1}_{n-2}\mathcal{F}^\beta\mathbf{1}_n\{s\} &\dashv \mathbf{1}_n\mathcal{E}^\beta\mathbf{1}_{n-2}\{\beta(n-\beta)-s\} \end{aligned}$$

e daí segue que

$$\mathbf{1}_m\mathcal{E}^\alpha\mathcal{F}^\beta\mathbf{1}_n\{s\} \dashv \mathbf{1}_n\mathcal{E}^\beta\mathcal{F}^\alpha\mathbf{1}_m\{-(\alpha-\beta)(\alpha-\beta+n)-s\}.$$

Portanto, o adjunto à direita de um 1-morfismo genérico é dado por

$$\mathbf{1}_m\mathcal{E}^{\alpha_1}\mathcal{F}^{\beta_1}\dots\mathcal{E}^{\alpha_k}\mathcal{F}^{\beta_k}\mathbf{1}_n\{s\} \dashv \mathbf{1}_n\mathcal{E}^{\beta_k}\mathcal{F}^{\alpha_k}\dots\mathcal{E}^{\beta_1}\mathcal{F}^{\alpha_1}\mathbf{1}_m\{-\prod_{i=1}^k(\alpha_i-\beta_i)(\alpha_i-\beta_i+n)+2\prod_{i<j}^k(\alpha_i-\beta_i)(\alpha_j-\beta_j)-s\} \quad (4.4.1)$$

e o adjunto à esquerda é

$$\mathbf{1}_n\mathcal{E}^{\beta_k}\mathcal{F}^{\alpha_k}\dots\mathcal{E}^{\beta_1}\mathcal{F}^{\alpha_1}\mathbf{1}_m\{\prod_{i=1}^k(\alpha_i-\beta_i)(\alpha_i-\beta_i+n)-2\prod_{i<j}^k(\alpha_i-\beta_i)(\alpha_j-\beta_j)-s\} \dashv \mathbf{1}_m\mathcal{E}^{\alpha_1}\mathcal{F}^{\beta_1}\dots\mathcal{E}^{\alpha_k}\mathcal{F}^{\beta_k}\mathbf{1}_n\{s\}. \quad (4.4.2)$$

Desse modo, é claro que todos os 1-morfismos de  $\mathcal{U}$  tem quase-biadjuntos.

## Positividade das bolhas

Pelas igualdades 4.2.1, segue que, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , só pode existir uma única bolha em  $\mathcal{U}$  (a de grau zero) que é igual a  $\mathbf{1}_{1_n}$ .

## Pareamento

Considere, para quaisquer 1-morfismos  $F, G$  de  $\mathcal{U}$ , o grupo abeliano  $\bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}(F\{s\}, G)$  que admite uma gradação natural dada por  $(\bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}(F\{s\}, G))_s = \mathcal{U}(F\{s\}, G)$ . Temos um isomorfismo de grupos abelianos graduados dado por:

$$\pi : \mathcal{U}^*(F, G) \rightarrow \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}(F\{s\}, G)$$

$$\alpha = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \alpha_\ell \mapsto \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \alpha_\ell \circ T_\ell^{-1},$$

onde  $\deg(\alpha_\ell) = \ell$ , as somas consideradas são quase-nulas e  $T_\ell : F \rightarrow F\{\ell\}$  é a translação de grau  $\ell$ .

Como  $\deg(\alpha_m) \circ T_m^{-1} = m - m = 0$  e  $\alpha_m \circ T_m^{-1} : F\{m\} \rightarrow G$ , para qualquer  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\pi$  está bem-definido e preserva graus. Além disso,

$$\begin{aligned} \pi \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \right) &= \pi \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha_n + \beta_n) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((\alpha_n + \beta_n) \circ T_n^{-1}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha_n \circ T_n^{-1} + \beta_n \circ T_n^{-1}) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \circ T_j^{-1} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \circ T_k^{-1} \\ &= \pi \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \right) + \pi \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \right). \end{aligned}$$

Logo,  $\pi$  é um homomorfismo de grupos abelianos graduados.

Se  $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \alpha_\ell \circ T_\ell^{-1} = 0$ , então  $\alpha_\ell \circ T_\ell^{-1} = 0$ , para todo  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Desse modo, segue que  $\alpha_\ell = \alpha_\ell \circ T_\ell^{-1} \circ T_\ell = 0 \circ T_\ell = 0$ , para todo  $\ell \in \mathbb{Z}$  e então  $\alpha = 0$ . Assim,  $\text{Ker}(\pi) = 0$ . Para ver que  $\pi$  é sobrejetor, seja  $\beta = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \beta_r \in \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}(F\{s\}, G)$ , onde  $\deg(\beta_r) = r$ , para todo  $r \in \mathbb{Z}$ . Então  $\beta_r = \beta_r \circ (T_r \circ T_r^{-1}) = (\beta_r \circ T_r) \circ T_r^{-1}$ , onde  $\beta_r \circ T_r : F \Rightarrow G$ , para todo  $r \in \mathbb{Z}$ . Como cada  $\beta_r$  é um 2-morfismo em  $\mathcal{U}$ , temos  $\deg(\beta_r) = 0$  em  $\mathcal{U}^*$  e então  $\deg \beta_r \circ T_r = r$ . Logo,  $\beta = \pi(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \beta_\ell \circ T_\ell)$ . Portanto,  $\pi$  é um isomorfismo.

## Ação da álgebra nilHecke

A álgebra nilHecke  $\mathcal{NH}_a$  age em  $\bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}(\mathcal{E}^a 1_n \{s\}, \mathcal{E}^a 1_n)$  e  $\bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}(\mathcal{F}^a 1_n \{s\}, \mathcal{F}^a 1_n)$ . Com efeito, tínhamos uma ação da álgebra nilHecke em  $\mathcal{U}^*(\mathcal{E}^a 1_n, \mathcal{E}^a 1_n)$ . Este, pelo que vimos acima, é isomorfo a  $\bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}(\mathcal{E}^a 1_n \{s\}, \mathcal{E}^a 1_n)$ .

## 4.5 Simetrias de $\mathcal{U}$

Denotemos por  $\mathcal{U}^{\text{op}}$  a 2-categoria com os mesmos objetos de  $\mathcal{U}$ , mas com as direções dos 1-morfismos invertidas. As direções dos 2-morfismos permanecem inalteradas. A 2-categoria  $\mathcal{U}^{\text{co}}$  tem os mesmos objetos e 1-morfismos de  $\mathcal{U}$ , mas as direções dos 2-morfismos são invertidas. Isso significa que  $\mathcal{U}^{\text{co}}(F, G) = \mathcal{U}(G, F)$ , para 1-morfismos  $F$  e  $G$ . Finalmente,  $\mathcal{U}^{\text{coop}}$  é a 2-categoria com os mesmos objetos que  $\mathcal{U}$  e com as direções dos 1-morfismos e 2-morfismos invertidas.

Através de simetrias das relações diagramáticas impostas em  $\mathcal{U}$ , é possível definir 2-funtores sobre cada uma das versões de  $\mathcal{U}$  definidas acima. Posteriormente, veremos que esses 2-funtores são levantamentos dos  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -(anti) automorfismos (anti)-lineares da álgebra  $\dot{U}$ . As simetrias são as seguintes:



## 2-functor $\tilde{\omega}$

Considere a operação do cálculo diagramático dada nos geradores nilCoxeter por  $U_n \mapsto -U_n$ , que inverte a orientação do diagrama e leva  $n \mapsto -n$ :

Essa transformação preserva o grau do diagrama e então, por extensão a somas de diagramas obtemos um 2-functor  $\tilde{\omega} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{U} \\ n &\mapsto -n \\ 1_m \mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \mathcal{E}^{\alpha_2} \dots \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_k} 1_n \{s\} &\mapsto 1_{-m} \mathcal{F}^{\alpha_1} \mathcal{E}^{\beta_1} \mathcal{F}^{\alpha_2} \dots \mathcal{F}^{\alpha_k} \mathcal{E}^{\beta_k} 1_{-n} \{s\} \end{aligned}$$

e sobre um 2-morfismo  $\alpha$  dado por uma soma formal de diagramas,  $\tilde{\omega}(\alpha)$  é a soma dos diagramas obtidos de  $\alpha$  pela imagem da transformação em cada parcela de  $\alpha$ . É fácil ver que todas as composições são preservadas e que as relações impostas em  $\mathcal{U}$  são invariantes sob essa transformação. Desse modo,  $\tilde{\omega}$  é um 2-functor estrito. Além disso, ele é um isomorfismo, já que é uma involução.

## 2-functor $\tilde{\sigma}$

A operação que redefine os geradores nilCoxeter  $U_n \mapsto -U_n$ , reflete um diagrama ao longo do eixo  $y$  e leva  $n \mapsto -n$  deixa invariantes as relações sobre os 2-morfismos de  $\mathcal{U}$ . Note que esta operação

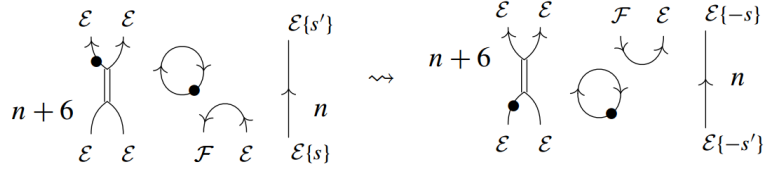
é contravariante para a composição de 1-morfismos, mas é covariante para a composição de 2-morfismos. Além disso, ela preserva o grau de um dado diagrama. Portanto, essa simetria nos dá um 2-isomorfismo

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{U}^{\text{op}} \\ n &\mapsto -n \\ 1_m \mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \mathcal{E}^{\alpha_2} \dots \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_k} 1_n \{s\} &\mapsto 1_{-n} \mathcal{F}^{\beta_k} \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_{k-1}} \dots \mathcal{F}^{\beta_1} \mathcal{E}^{\alpha_1} 1_{-m} \{s\} \end{aligned}$$

e sobre os 2-morfismos  $\tilde{\sigma}$  leva somas formais de diagramas na soma formal dos diagramas obtidos por aplicar a transformação a cada parcela. Como as relações sobre  $\mathcal{U}$  são simétricas sob essa transformação, segue que  $\tilde{\sigma}$  é um 2-functor.

## 2-functor $\tilde{\psi}$

Neste caso, a simetria considerada modifica as translações nos domínios e contradomínios:



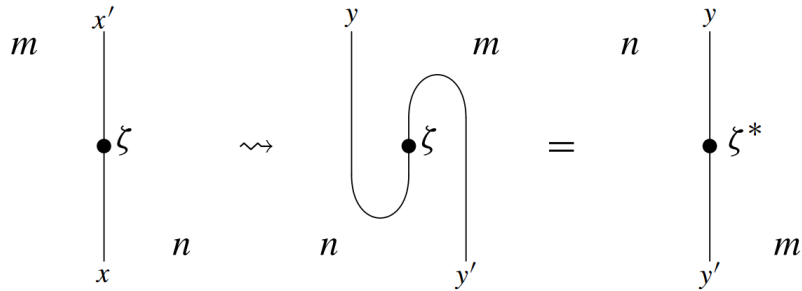
A translação de graus no lado direito é necessária para que essa transformação preserve o grau do 2-morfismo correspondente a um dado diagrama. Essa transformação é covariante com relação a composição de 1-morfismos e contravariante com relação a composição de 2-morfismos. Logo, estendendo essa transformação a somas de diagramas temos um 2-isomorfismo dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{U}^{\text{co}} \\ n &\mapsto n \\ \mathbf{1}_m \mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \mathcal{E}^{\alpha_2} \dots \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_k} \mathbf{1}_n \{s\} &\mapsto \mathbf{1}_m \mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \mathcal{E}^{\alpha_2} \dots \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_k} \mathbf{1}_n \{-s\} \end{aligned}$$

e sobre os 2-morfismos reflete os diagramas representando parcelas de uma soma ao longo do eixo  $x$ , invertendo sua orientação. As relações de  $\mathcal{U}$  têm essa simetria e então  $\tilde{\psi}$  é um 2-functor. Além disso,  $\tilde{\psi}$  possui um inverso dado pela aplicação que reflete com relação ao eixo  $x$  e inverte a orientação em  $\mathcal{U}^{\text{co}}$ .

## 2-functor $\tilde{\tau}$

Esta transformação faz uso da estrutura de biadjunção de  $\mathcal{U}$  e do casamento por adjunção. Para cada  $\mathbf{1}_m x \mathbf{1}_n \in \mathcal{U}$  denote seu adjunto à direita por  $\mathbf{1}_n y \mathbf{1}_m$ . A simetria de rotação por  $180^\circ$  é dada pelo 2-functor que leva um 1-morfismo  $\mathbf{1}_m x \mathbf{1}_n$  em seu adjunto à esquerda  $\mathbf{1}_n y \mathbf{1}_m$  e cada 2-morfismo  $\zeta : \mathbf{1}_m x \mathbf{1}_n \Rightarrow \mathbf{1}_m x' \mathbf{1}_n$  em seu correspondente sob as adjunções  $\mathbf{1}_m x \mathbf{1}_n \dashv \mathbf{1}_n y \mathbf{1}_m$  e  $\mathbf{1}_m x' \mathbf{1}_n \dashv \mathbf{1}_n y' \mathbf{1}_m$ . Desse modo,  $\zeta$  é levado em seu dual  $\zeta^*$ :



Esta transformação é contravariante com respeito a composição de 1-morfismos e 2-morfismos. Desse modo, temos um 2-functor

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{U}^{\text{coop}} \\ n &\mapsto n \\ \mathbf{1}_m \mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \mathcal{E}^{\alpha_2} \dots \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_k} \mathbf{1}_n \{s\} &\mapsto \text{o adjunto à direita em (4.4.1)} \\ \zeta &\mapsto \zeta^* \end{aligned}$$

onde os translados nos graus do adjunto à direita (4.4.1) implicam que  $\tilde{\tau}$  preserva graus. Por inspeção das relações para  $\mathcal{U}^*$  vemos que elas são invariantes sob esta transformação e então  $\tilde{\tau}$  realmente é um 2-functor.

Para definir um inverso para  $\tau$  tomemos os adjuntos à esquerda, como segue:

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}^{-1} : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{U}^{\text{coop}} \\ n &\mapsto n \\ 1_m \mathcal{E}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\beta_1} \mathcal{E}^{\alpha_2} \dots \mathcal{E}^{\alpha_k} \mathcal{F}^{\beta_k} 1_n \{s\} &\mapsto \text{o adjunto à esquerda em (4.4.2)} \\ \zeta &\mapsto {}^* \zeta.\end{aligned}$$

**Lema 4.8.** *Temos isomorfismos entre os grupos abelianos graduados*

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^*(fx, y) &\rightarrow \mathcal{U}^*(x, \tilde{\tau}(f)y), \\ \mathcal{U}^*(x, gy) &\rightarrow \mathcal{U}^*(\tilde{\tau}^{-1}(g)x, y),\end{aligned}$$

para quaisquer 1-morfismos  $f, g, x, y \in \mathcal{U}$ .

*Demonstração.* O isomorfismo  $\mathcal{U}^*(fx, y) \rightarrow \mathcal{U}^*(x, \tilde{\tau}(f)y)$  é apenas o isomorfismo  $M^{-1}$  definido em (3.4.2) que toma os companheiros sob as adjunções à direita. Em particular, considere  $F \dashv U := 1 \dashv 1, F' \dashv U' := f \dashv \tilde{\tau}(f), b = x$ , e  $a = y$  na Definição 3.4. Então

$$M^{-1} : \mathcal{U}^*(fx, y) \rightarrow \mathcal{U}^*(x, \tilde{\tau}(f)y)$$

fornece uma bijeção que se estende a um homomorfismo, já que  $M^{-1}$  respeita composições de 2-morfismos. Analogamente, o isomorfismo  $\mathcal{U}^*(x, gy) \rightarrow \mathcal{U}^*(\tilde{\tau}^{-1}(g)x, y)$  é a aplicação  $M$  de (3.4.1) com  $F \dashv U := 1 \dashv 1, F' \dashv U' := \tilde{\tau}^{-1}(g) \dashv g, a := y$ , e  $b := x$ .  $\square$

## 4.6 Levantamento das relações de $E$ e $F$

Mostraremos que os 1-morfismos  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  levantam a relação (1.2.4) de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Para todo 1-morfismo  $x$  em  $\mathcal{U}$  e todo inteiro  $a$ , denotaremos por  $\oplus_{[a]}x$  a soma direta de 1-morfismos:

$$\oplus_{[a]}x := x\{a-1\} \oplus x\{a-3\} \oplus \dots \oplus x\{1-a\}.$$

**Teorema 4.9.** *Temos as seguintes decomposições de 1-morfismos:*

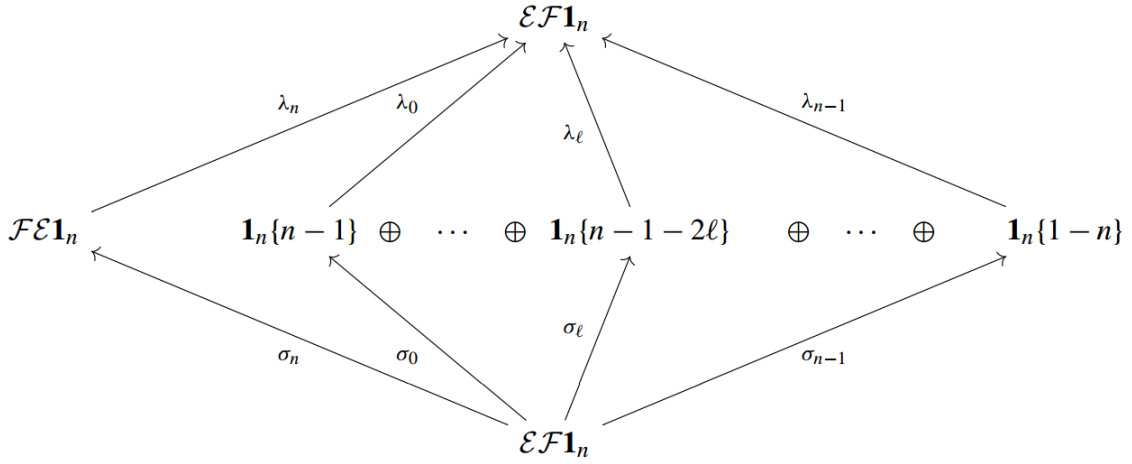
$$\begin{aligned}\mathcal{E}\mathcal{F}1_n &\cong \mathcal{F}\mathcal{E}1_n \oplus_{[n]} 1_n, & \text{para } n \geq 0, \\ \mathcal{F}\mathcal{E}1_n &\cong \mathcal{E}\mathcal{F}1_n \oplus_{[-n]} 1_n, & \text{para } n \leq 0.\end{aligned}$$

*Demonstração.* Considere, para cada  $n \geq 0$ , a coleção de 2-morfismos  $\sigma_j, \lambda_k, 0 \leq j, k \leq n$ , definidos diagramaticamente abaixo:

$$\begin{aligned}\sigma_n &:= \text{diagrama de 2-morfismo com duas linhas horizontais e duas linhas verticais, com um sinal negativo} \\ \sigma_s &:= \sum_{j=0}^s \text{diagrama de 2-morfismo com um círculo superior e um círculo inferior, com pontos e setas} \\ \lambda_n &:= \text{diagrama de 2-morfismo com duas linhas horizontais e duas linhas verticais} \\ \lambda_s &:= \text{diagrama de 2-morfismo com um círculo superior e um círculo inferior, com pontos e setas}\end{aligned}$$

para  $0 \leq s \leq n-1$ ,  
para  $0 \leq s \leq n-1$ .

A decomposição  $\mathcal{EF}1_n \cong \mathcal{F}1_n \oplus_{[n]} 1_n$  para  $n \geq 0$  é esquematizada na ilustração a seguir:



Note que, considerando as devidas translações em  $1_n$ , todas as aplicações anteriores são de grau zero. Para  $0 \leq s \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} \deg(T_{n-1-2s} \circ \sigma_s) &= (n-1-2s) + 2((-n-1+j) + (n)+1) + ((1-n) + 2(s-j)) \\ &= n-1-2s-2n-2+2j+2n+2+1-n+2s-2j=0, \\ \deg(T_{n-1-2s}^{-1} \circ \lambda_s) &= -(n-1-2s) + (1-n) + 2(n-1-s) \\ &= -n+1+2s+1-n+2n-2-2s=0, \end{aligned}$$

onde  $T$  denota translação.

Afirmamos que as aplicações  $e_s := \lambda_s \sigma_s$  para  $0 \leq s \leq n$  formam uma coleção de idempotentes ortogonais que decompõe a identidade  $1_{\mathcal{EF}1_n}$ .

Para  $0 \leq s \leq n-1$  a composição  $\sigma_s \lambda_s$  é

$$\sum_{j=0}^{\ell} \begin{array}{c} \text{bolha superior} \\ \text{bolha inferior} \end{array} = \begin{array}{c} \text{bolha superior} \\ \text{bolha inferior} \end{array} = 1_{1_n}.$$

A primeira igualdade segue porque a bolha inferior tem grau negativo quando  $j > 0$ . Portanto, pelos axiomas (4.2.2) e (4.2.3) de positividade dos graus das bolhas todas as parcelas da soma se anulam, exceto quando  $j = 0$ . A segunda igualdade segue porque a bolha superior é igual a  $1_{1_n}$  (pela convenção de bolhas falsas) e a bolha inferior também é igual a  $1_{1_n}$  (pois seu grau é zero).

Usando que  $n \geq 0$ , segue de (4.2.11) que  $\sigma_n \lambda_n = 1_{\mathcal{EF}1_n}$ , já que para  $n > -1$  a segunda parcela do segundo membro de (4.2.11) se anula.

Logo, para todo  $0 \leq s \leq n$ , temos  $(\lambda_s \sigma_s)^2 = \lambda_s(\sigma_s \lambda_s) \sigma_s = \lambda_s \circ 1_{\mathcal{F}\mathcal{E}1_n} \circ \sigma_s = \lambda_s \sigma_s$ , ou seja, todos os 2-morfismos  $\lambda_s \sigma_s$  são idempotentes.

Para mostrar que esses idempotentes são ortogonais, considere a composição  $\sigma_s \lambda_{s'}$ , onde  $0 \leq s' < s \leq n - 1$ :

$$\sum_{j=0}^s \begin{array}{c} \text{bolha} \\ -n-1+j \\ \text{bolha} \\ n-1-s'+s-j \end{array} = \sum_{j=0}^{(s-s')} \begin{array}{c} \text{bolha} \\ n-1-j+(s-s') \\ \text{bolha} \\ -n-1+j \end{array} = 0.$$

A primeira igualdade segue do fato de que bolhas orientadas no sentido horário tem graus negativos para todo  $j > s - s'$  e então esses termos são nulos. A segunda igualdade segue de (4.3.4). Para  $0 \leq s < s' \leq n - 1$  a composição é

$$\sum_{j=0}^s \begin{array}{c} \text{bolha} \\ -n-1+j \\ \text{bolha} \\ n-1-s'+s-j \end{array} = 0,$$

que segue porque  $s - s' < 0$ , por hipótese e, assim, a bolha orientada no sentido horário tem grau negativo para todo  $j$  e desse modo é igual a zero.

De 4.3 segue que para  $j \leq n - 1$  a composição  $\sigma_j \lambda_n$

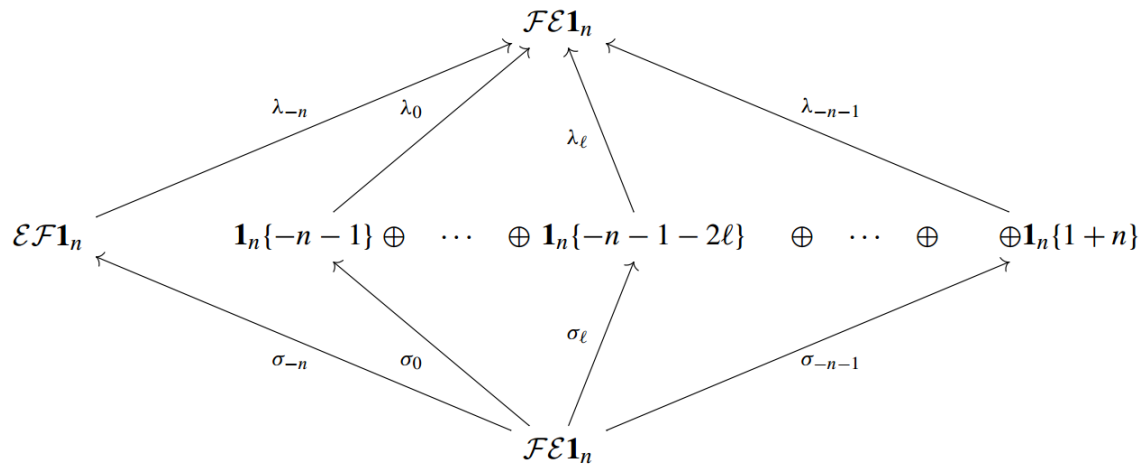
$$\sum_{0 \leq \ell \leq n-1} \sum_{j=0}^{\ell} \begin{array}{c} \text{bolha} \\ -n-1+j \\ \text{bolha} \\ \ell-j \end{array} = 0$$

porque o grau total da componente inferior é negativo sempre que  $\ell - j < n$ , ou  $0 \leq \ell \leq n - 1$ , ou ainda,  $j \leq \ell$ . Portanto, os idempotentes são ortogonais. Resta mostrarmos que

$$\sum_{s=0}^n \lambda_s \sigma_s = 1_{\mathcal{E}\mathcal{F}1_n},$$

mas isso é justamente o axioma (4.2.10) de decomposição da identidade.

Analogamente, a decomposição  $\mathcal{F}\mathcal{E}1_n \cong \mathcal{E}\mathcal{F}1_n \oplus_{[-n]} 1_n$  para  $n \leq 0$  é dada pelo sistema de aplicações



onde

$$\sigma_{-n} := \text{diagram of a crossing with a minus sign} \quad \sigma_s := \sum_{j=0}^s \text{diagram of a crossing with a loop} \quad \text{para } 0 \leq s \leq -n-1,$$

$$\lambda_{-n} := \text{diagram of a crossing} \quad \lambda_s := \text{diagram of a crossing with a loop} \quad \text{para } 0 \leq s \leq -n-1.$$

Então basta considerarmos a coleção de aplicações  $\bar{e}_s = \lambda_s \sigma_s$  para  $0 \leq s \leq -n$  e mostrarmos que ela forma uma coleção de idempotentes ortogonais que decompõe a identidade  $1_{\mathcal{FE}1_n}$ . Isso é análogo ao que fizemos para os idempotentes  $e_s$ .  $\square$

# Capítulo 5

## Categorificação de $\dot{U}$

### 5.1 Envelope de Karoubi

Um **idempotente**  $e : A \rightarrow A$  em uma categoria  $\mathcal{C}$  é um morfismo tal que  $e^2 = e$ . Dizemos que o idempotente **cinde** se existem um objeto  $A'$  e morfismos

$$A \xrightarrow{g} A' \xrightarrow{h} A$$

tais que  $e = hg$  e  $gh = 1_{A'}$ .

O **envelope de Karoubi**  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  (também chamado **completamento idempotente** ou **completamento de Cauchy**) da categoria  $\mathcal{C}$  é uma categoria cujos objetos são pares  $(A, e)$ , onde  $e : A \rightarrow A$  é um morfismo idempotente de  $\mathcal{C}$  e cujos morfismos são triplas da forma

$$(e, f, e') : (A, e) \rightarrow (A', e'),$$

onde  $f : A \rightarrow A'$  é um morfismo de  $\mathcal{C}$  tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & A \\ f \downarrow & \searrow f & \downarrow f \\ A' & \xrightarrow{e'} & A' \end{array}$$

comuta.

A composição de morfismos  $(e, f, e') : (A, e) \rightarrow (A', e')$  e  $(e', g, e'') : (A', e') \rightarrow (A'', e'')$  de  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  é dada pelo morfismo

$$(e', g, e'') \circ (e, f, e') = (e, g \circ f, e'') : (A, e) \rightarrow (A'', e'').$$

De fato, como  $(e, f, e')$  e  $(e', g, e'')$  são morfismos de  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ , temos as igualdades:

$$f = fe = e'f \tag{5.1.1}$$

$$g = ge' = e''g \tag{5.1.2}$$

Daí, usando (5.1.1) e (5.1.2), segue que

$$\begin{cases} gf = ge'fe = gfee = gfe \\ gf = e''ge'f = e''e''gf = e''gf, \end{cases}$$

ou seja,  $(e, g \circ f, e'')$  está bem definido como um morfismo de  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ . A associatividade da composição em  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  segue diretamente da associatividade da composição em  $\mathcal{C}$ . Para cada objeto  $(A, e)$  de  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ , o morfismo identidade correspondente é  $1_{(A,e)} = (e, e, e)$ .

É possível definir um funtor pleno e fiel  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Kar}(\mathcal{C})$  da seguinte maneira: se  $A$  é um objeto de  $\mathcal{C}$ , então  $F(A) = (A, 1_A)$  e se  $f : A \rightarrow A'$  é um morfismo de  $\mathcal{C}$ , então  $F(f) = (1_A, f, 1_{A'})$ .

Em  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  todos os idempotentes cindem. De fato, se  $(e, h, e) : (A, e) \rightarrow (A, e)$  é um idempotente de  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ , então  $h : A \rightarrow A$  é um idempotente de  $\mathcal{C}$  tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & A \\ \downarrow h & \searrow h & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{e} & A \end{array}$$

comuta. Desse modo, podemos formar os morfismos

$$(A, e) \xrightarrow{(e,h,h)} (A, h)$$

e

$$(A, h) \xrightarrow{(h,h,e)} (A, e)$$

que satisfazem:

$$\begin{aligned} (h, h, e) \circ (e, h, h) &= (e, h, e) \\ (e, h, h) \circ (h, h, e) &= (h, h, h) = 1_{(A,h)}. \end{aligned}$$

Portanto,  $(e, h, e)$  cinde.

O funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Kar}(\mathcal{C})$  é universal com respeito a propriedade de idempotentes cindirem. Mais especificamente, se  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é qualquer funtor onde todos os idempotentes de  $\mathcal{D}$  cindem, então  $G$  se estende unicamente (a menos de isomorfismo) a um funtor  $\tilde{G} : \text{Kar}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ . Além disso, para qualquer outro funtor  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e uma transformação natural  $\alpha : G \Rightarrow H$ ,  $\alpha$  se estende unicamente a uma transformação natural  $\tilde{\alpha} : \tilde{G} \Rightarrow \tilde{H}$ . Para a demonstração desses resultados, veja a Proposição 6.5.9 de [5].

**Proposição 5.1.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria aditiva. Então  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  também é uma categoria aditiva.*

*Demonstração.* De fato, sejam  $A, B, C$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Considere  $F : A \rightarrow A$ ,  $G : B \rightarrow B$  e  $H : C \rightarrow C$  morfismos idempotentes de  $\mathcal{C}$  e  $R, S : A \rightarrow B$ ,  $T, U : B \rightarrow C$  morfismos tais que

$$(F, R, G) : (A, F) \rightarrow (B, G),$$

$$(F, S, G) : (A, F) \rightarrow (B, G),$$

$$(G, T, H) : (B, G) \rightarrow (C, H)$$



e

$$(G, U, H) : (B, G) \rightarrow (C, H)$$

sejam morfismos em  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ , ou seja, de modo que tenhamos a comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{F} & A \\
 R \downarrow & \searrow R & \downarrow R \\
 B & \xrightarrow{G} & B
 \end{array} & & \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{F} & A \\
 S \downarrow & \searrow S & \downarrow S \\
 B & \xrightarrow{G} & B
 \end{array} \\
 & & (5.1.3)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{G} & B \\
 T \downarrow & \searrow T & \downarrow T \\
 C & \xrightarrow{H} & C
 \end{array} & & \begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{G} & B \\
 U \downarrow & \searrow U & \downarrow U \\
 C & \xrightarrow{H} & C
 \end{array} \\
 & & (5.1.4)
 \end{array}$$

Então  $\mathcal{C}((A, F), (B, G))$  é um grupo abeliano em  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  com adição induzida da adição de  $\mathcal{C}(A, B)$  da seguinte maneira:

$$(F, R, G) + (F, S, G) = (F, R + S, G).$$

Segue da comutatividade em (5.1.3) e da distributividade da composição em relação à soma de morfismos na categoria aditiva  $\mathcal{C}$  que  $(F, R + S, G)$  é um morfismo bem-definido em  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
 G \circ (R + S) &= G \circ R + G \circ S = R + S \\
 (R + S) \circ F &= R \circ F + S \circ F = R + F.
 \end{aligned}$$

A composição em  $\text{Kar}(\mathcal{U})$  também é distributiva com respeito à soma de morfismos em  $\text{Kar}(\mathcal{U})$ , já que tal composição é induzida da composição em  $\mathcal{U}$ :

$$\begin{aligned}
 (G, T, H) \circ ((F, R, G) + (F, S, G)) &= (G, T, H) \circ (F, R + S, G) \\
 &= (F, T \circ (R + S), H) \\
 &= (F, T \circ R + T \circ S, H) \\
 &= (F, T \circ R, H) + (F, T \circ S, H) \\
 &= (G, T, H) \circ (F, R, G) + (G, T, H) \circ (F, S, G)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ((G, T, H) + (G, U, H)) \circ (F, R, G) &= (G, T + U, H) \circ (F, R, G) \\
 &= (F, (T + U) \circ R, H) \\
 &= (F, T \circ R + U \circ R, H) \\
 &= (F, T \circ R, H) + (F, U \circ R, H) \\
 &= (G, T, H) \circ (F, R, G) + (G, U, H) \circ (F, R, G).
 \end{aligned}$$

Se  $0$  é um objeto-zero de  $\mathcal{C}$  e, além disso,  $V : A \rightarrow 0$  e  $W : 0 \rightarrow A$  são os únicos morfismos com domínio  $A$  e contradomínio  $0$  e domínio  $0$  e contradomínio  $A$ , respectivamente, então  $(0, 1_0)$  é um objeto-zero de  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ . De fato, se  $F : A \rightarrow A$  é um idempotente, os morfismos  $(F, V, 1_0) : (A, F) \rightarrow (0, 1_0)$  e  $(1_0, W, F) : (0, 1_0) \rightarrow (A, F)$  são, obviamente, os únicos morfismos em  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  com tais domínios e contradomínios.

Se  $(A \oplus B, i_A, i_B, p_A, p_B)$  é um biproduto em  $\mathcal{C}$ , então  $(A \oplus B, F \oplus G)$  é um biproduto em  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ , onde  $F \oplus G : A \oplus B \rightarrow A \oplus B$  é o biproduto usual dos morfismos  $F : A \rightarrow A$  e  $G : B \rightarrow B$ , que neste caso é dado por:  $F \oplus G = i_A \circ F \circ p_A + i_B \circ G \circ p_B$ . Note que  $(A \oplus B, F \oplus G)$  é um morfismo bem-definido em  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ , já que  $F \oplus G$  é idempotente em  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned}
(F \oplus G)^2 &= (i_A \circ F \circ p_A + i_B \circ G \circ p_B) \circ (i_A \circ F \circ p_A + i_B \circ G \circ p_B) \\
&= i_A \circ F \circ p_A \circ i_A \circ F \circ p_A + i_A \circ F \circ p_A \circ i_B \circ G \circ p_B \\
&\quad + i_B \circ G \circ p_B \circ i_A \circ F \circ p_A + i_B \circ G \circ p_B \circ i_B \circ G \circ p_B \\
&= i_A \circ F \circ 1_A \circ F \circ p_A + i_A \circ F \circ 0_{B,A} \circ G \circ p_B \\
&\quad + i_B \circ G \circ 0_{A,B} \circ F \circ p_A + i_B \circ G \circ 1_B \circ G \circ p_B \\
&= i_A \circ F \circ p_A + i_B \circ G \circ p_B \\
&= F \oplus G.
\end{aligned}$$

No caso de  $(A \oplus B, F \oplus G)$ , as projeções são dadas por

$$\begin{aligned}
(F \oplus G, F \circ p_A, F) &: (A \oplus B, F \oplus B) \rightarrow (A, F), \\
(F \oplus G, G \circ p_B, G) &: (A \oplus B, F \oplus B) \rightarrow (B, G)
\end{aligned}$$

e as inclusões são

$$\begin{aligned}
(F, i_A \circ F, F \oplus G) &: (A, F) \rightarrow (A \oplus B, F \oplus B), \\
(G, i_B \circ G, F \oplus G) &: (B, G) \rightarrow (A \oplus B, F \oplus B).
\end{aligned}$$

A comutatividade dos diagramas

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
A \oplus B & \xrightarrow{F \oplus B} & A \oplus B \\
\downarrow F \circ p_A & \searrow F \circ p_A & \downarrow F \circ p_A \\
A & \xrightarrow{F} & A
\end{array} & & \begin{array}{ccc}
A \oplus B & \xrightarrow{F \oplus B} & A \\
\downarrow G \circ p_B & \searrow G \circ p_B & \downarrow G \circ p_B \\
B & \xrightarrow{G} & B
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{F} & A \\
\downarrow i_A \circ F & \searrow i_A \circ F & \downarrow i_A \circ F \\
A \oplus B & \xrightarrow{F \oplus G} & A \oplus B
\end{array} & & \begin{array}{ccc}
B & \xrightarrow{G} & B \\
\downarrow i_B \circ G & \searrow i_B \circ G & \downarrow i_B \circ G \\
A \oplus B & \xrightarrow{F \oplus G} & A \oplus B
\end{array}
\end{array}$$

segue da definição de  $F \oplus G$  e do fato de  $F, G$  serem idempotentes em  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned}
(F \circ p_A) \circ (F \oplus G) &= (F \circ p_A) \circ (i_A \circ F \circ p_A + i_B \circ G \circ p_B) \\
&= F \circ p_A \circ i_A \circ F \circ p_A + F \circ p_A \circ i_B \circ G \circ p_B \\
&= F \circ 1_A \circ F \circ p_A + F \circ 0_{B,A} \circ G \circ p_B \\
&= F \circ p_A
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(F \oplus G) \circ (i_A \circ F) &= (i_A \circ F \circ p_A + i_B \circ G \circ p_B) \circ (i_A \circ F) \\
&= i_A \circ F \circ p_A \circ i_A \circ F + i_B \circ G \circ p_B \circ i_A \circ F \\
&= i_A \circ F \circ 1_A \circ F + i_B \circ G \circ 0_{A,B} \circ F \\
&= i_A \circ F
\end{aligned}$$

O mesmo cálculo mostra que  $(G \circ p_B) \circ (F \oplus G) = G \circ p_B$  e  $(F \oplus G) \circ (i_B \circ G) = i_B \circ G$ . Logo, essas projeções e inclusões estão bem-definidas em  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ .

Segue das identidades a seguir que  $(A \oplus B, F \oplus G) \cong (A, F) \oplus (B, G)$ :

$$\begin{aligned}
(F \oplus G, F \circ p_A, F) \circ (F, i_A \circ F, F \oplus G) &= (F, F \circ p_A \circ i_A \circ F, F) \\
&= (F, F \circ 1_A \circ F, F) \\
&= (F, F, F) \\
&= 1_{(A,F)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(F \oplus G, F \circ p_A, F) \circ (G, i_B \circ G, F \oplus G) &= (G, F \circ p_A \circ i_B \circ G, F) \\
&= (G, F \circ 0_{B,A} \circ G, F) \\
&= (G, 0_{B,A}, F) \\
&= (G, 0_{0,B} \circ 0_{A,0}, F) \\
&= (1_0, 0_{0,B}, G) \circ (F, 0_{A,0}, 1_0) \\
&= 0_{(A,F),(B,G)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&(F, i_A \circ F, F \oplus G) \circ (F \oplus G, F \circ p_A, F) + (G, i_B \circ G, F \oplus G) \circ (F \oplus G, G \circ p_B, G) \\
&= (F \oplus G, i_A \circ F \circ F \circ p_A, F \oplus G) + (F \oplus G, i_B \circ G \circ G \circ p_B, F \oplus G) \\
&= (F \oplus G, i_A \circ F \circ p_A, F \oplus G) + (F \oplus G, i_B \circ G \circ p_B, F \oplus G) \\
&= (F \oplus G, i_A \circ F \circ p_A + i_B \circ G \circ p_B, F \oplus G) \\
&= (F \oplus G, F \oplus G, F \oplus G) \\
&= 1_{(A \oplus B, F \oplus G)},
\end{aligned}$$

além de

$$(F \oplus G, G \circ p_B, G) \circ (G, i_B \circ G, F \oplus G) = 1_{(B,G)}$$

e

$$(F \oplus G, G \circ p_B, G) \circ (F, i_A \circ F, F \oplus G) = 0_{(B,G),(A,F)},$$

cujas demonstrações são idênticas às duas primeiras. Portanto,  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  é uma categoria aditiva.  $\square$

**Proposição 5.2.** *Se  $\mathcal{C}$  é uma categoria  $\mathbb{K}$ -linear, então  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  é também uma categoria  $\mathbb{K}$ -linear.*

*Demonstração.* Com efeito, se  $A, B$  são objetos de  $\mathcal{C}$ ,  $F : A \rightarrow A, G : B \rightarrow B$  são idempotentes em  $\mathcal{C}$  e  $H : A \rightarrow B$  é tal que  $(F, H, G) : (A, F) \rightarrow (B, G)$  é um morfismo de  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ , então temos a comutatividade do diagrama a seguir

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{F} & A \\
 H \downarrow & \searrow H & \downarrow R \\
 B & \xrightarrow{G} & B
 \end{array} \tag{5.1.5}$$

Estabelecendo, para qualquer  $\lambda \in \mathbb{K}$ , que  $\lambda(F, H, G) = (F, \lambda H, G)$ , segue da comutatividade de (5.1.5) que:

$$(\lambda H) \circ F = \lambda(H \circ F) = \lambda H,$$

$$G \circ (\lambda H) = \lambda(G \circ H) = \lambda H$$

e, portanto,  $\lambda(F, H, G)$  está bem-definido.

Para  $\mu \in \mathbb{K}, K : A \rightarrow B$ , as equações abaixo verificam que  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial:

$$\begin{aligned}
 \lambda((F, H, G) + (F, K, G)) &= \lambda(F, H + K, G) \\
 &= (F, \lambda(H + K), G) \\
 &= (F, \lambda H + \lambda K, G) \\
 &= (F, \lambda H, G) + (F, \lambda K, G) \\
 &= \lambda(F, H, G) + \lambda(F, K, G)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu)(F, H, G) &= (F, (\lambda + \mu)H, G) \\
 &= (F, \lambda H + \mu H, G) \\
 &= (F, \lambda H, G) + (F, \mu H, G) \\
 &= \lambda(F, H, G) + \mu(F, H, G)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda\mu)(F, H, G) &= (F, (\lambda\mu)H, G) \\
 &= (F, \lambda(\mu H), G) \\
 &= \lambda(F, \mu H, G) \\
 &= \lambda(\mu(F, H, G))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1(F, H, G) &= (F, 1H, G) \\
 &= (F, H, G)
 \end{aligned}$$

Finalmente, se  $(C, E)$  é um objeto de  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  e  $(G, L, E) : (B, G) \rightarrow (C, E)$  é um morfismo em  $\text{Kar}(\mathcal{C})$ , o axioma de homogeneidade da composição em  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  é satisfeito como segue:

$$\begin{aligned} (G, L, E) \circ (\lambda(F, H, G)) &= (G, L, E) \circ (F, \lambda H, G) \\ &= (F, L \circ (\lambda H), E) \\ &= (F, \lambda(L \circ H), E) \\ &= \lambda(F, L \circ H, E). \end{aligned}$$

Portanto,  $\text{Kar}(\mathcal{C})$  é  $\mathbb{K}$ -linear. □

## 5.2 A 2-categoria $\dot{\mathcal{U}}$

Se  $\mathcal{K}$  é uma 2-categoria qualquer, definimos a 2-categoria  $\dot{\mathcal{K}}$  como segue:  $\text{Ob}(\dot{\mathcal{K}}) = \text{Ob}(\mathcal{K})$  e, para quaisquer objetos  $A, B$  de  $\text{Ob}(\dot{\mathcal{K}})$ , temos  $\text{Ob}(\dot{\mathcal{K}})(A, B) = \text{Kar}(\mathcal{K}(A, B))$ .

Sejam  $A, B, C, D$  objetos de  $\mathcal{K}$ ,

$$\begin{aligned} F_1 &: A \rightarrow B \\ F_2 &: A \rightarrow B \\ F_3 &: A \rightarrow B \\ G_1 &: B \rightarrow C \\ G_2 &: B \rightarrow C \\ G_3 &: B \rightarrow C \end{aligned}$$

1-morfismos de  $\mathcal{K}$  e

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: F_1 \Rightarrow F_1 \\ \alpha_2 &: F_2 \Rightarrow F_2 \\ \alpha_3 &: F_3 \Rightarrow F_3 \\ \alpha_{12} &: F_1 \Rightarrow F_2 \\ \alpha_{23} &: F_2 \Rightarrow F_3 \\ \beta_1 &: G_1 \Rightarrow G_1 \\ \beta_2 &: G_2 \Rightarrow G_2 \\ \beta_3 &: G_3 \Rightarrow G_3 \\ \beta_{12} &: G_1 \Rightarrow G_2 \\ \beta_{23} &: G_2 \Rightarrow G_3 \end{aligned}$$

2-morfismos de  $\mathcal{K}$ .

Contanto que os 2-morfismos envolvidos sejam idempotentes,  $(F, \alpha_1), (F, \alpha_2), (F, \alpha_3), (F, \alpha_{12})$  e  $(F, \alpha_{23})$  são 1-morfismos de  $\text{Ob}(\dot{\mathcal{K}})(A, B)$  e, além disso,  $(G, \beta_1), (G, \beta_2), (G, \beta_3), (G, \beta_{12})$  e  $(G, \beta_{23})$  são 1-morfismos de  $\text{Ob}(\dot{\mathcal{K}})(B, C)$ . Tendo isso em vista, a composição de 1-morfismos é dada por:

$$(G_1, \beta_1)(F_1, \alpha_1) = (G_1 F_1, \beta_1 * \alpha_1),$$

que é, obviamente, associativa, por conta das associatividades das composições de 1-morfismos e das composições horizontais de 2-morfismos em  $\mathcal{K}$ . Além disso,  $(G_1 F_1, \beta_1 * \alpha_1)$  é um 1-morfismo bem-definido em  $\text{Ob}(\dot{\mathcal{K}})(A, C)$ , já que, pela lei do intercâmbio,

$$(\beta_1 * \alpha_1)^2 = (\beta_1 * \alpha_1) \circ (\beta_1 * \alpha_1) = (\beta_1 \circ \beta_1) * (\alpha_1 \circ \alpha_1) = \beta_1^2 * \alpha_1^2 = \beta_1 * \alpha_1.$$

As triplas  $(\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2)$ ,  $(\alpha_2, \alpha_{23}, \alpha_3)$  e  $(\beta_1, \beta_{12}, \beta_2)$ ,  $(\beta_2, \beta_{23}, \beta_3)$  são 2-morfismos de  $\dot{\mathcal{K}}$ , desde que valham as relações:

$$\alpha_{12} \circ \alpha_1 = \alpha_{12} = \alpha_2 \circ \alpha_{12},$$

$$\alpha_{23} \circ \alpha_2 = \alpha_{23} = \alpha_3 \circ \alpha_{23}$$

e

$$\beta_{12} \circ \beta_1 = \beta_{12} = \beta_2 \circ \beta_{12},$$

$$\beta_{23} \circ \beta_2 = \beta_{23} = \beta_3 \circ \beta_{23}.$$

Neste caso, a composição vertical de 2-morfismos em  $\dot{\mathcal{K}}$  é dada por:

$$(\alpha_2, \alpha_{23}, \alpha_3) \circ (\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_{23} \circ \alpha_{12}, \alpha_3),$$

que é a composição da categoria  $\text{Kar}(\mathcal{K}(A, B))$  e, portanto, está bem-definida e é associativa.

A composição horizontal de 2-morfismos em  $\dot{\mathcal{K}}$  é dada por:

$$(\beta_1, \beta_{12}, \beta_2) * (\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2) = (\beta_1 * \alpha_1, \beta_{12} * \alpha_{12}, \beta_2 * \alpha_2),$$

que é associativa pela associatividade da composição horizontal de 2-morfismos em  $\mathcal{K}$ . Além disso,

$$(\beta_{12} * \alpha_{12}) \circ (\beta_1 * \alpha_1) = (\beta_{12} \circ \beta_1) * (\alpha_{12} \circ \alpha_1) = (\beta_{12} * \alpha_{12})$$

e

$$(\beta_2 * \alpha_2) \circ (\beta_{12} * \alpha_{12}) = (\beta_2 \circ \beta_{12}) * (\alpha_2 \circ \alpha_{12}) = (\beta_{12} * \alpha_{12}).$$

Desse modo, a composição horizontal está bem-definida.

Quanto às identidades temos, para cada objeto  $A$  de  $\dot{\mathcal{K}}$ , o 1-morfismo-identidade  $(1_A, 1_{1_A})$ , onde  $1_A$  é o 1-morfismo-identidade de  $\mathcal{K}$ , de modo que:

$$(F_1, \alpha_1)(1_A, 1_{1_A}) = (F_1 1_A, \alpha_1 * 1_{1_A}) = (F_1, \alpha_1) = (1_B F_1, 1_{1_B} * \alpha_1) = (1_B, 1_{1_B})(F_1, \alpha_1).$$

A identidade para a composição vertical é do tipo  $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) : (F_1, \alpha_1) \Rightarrow (F_1, \alpha_1)$ , que é justamente a identidade da categoria  $\text{Kar}(\mathcal{K}(A, B))$ . A identidade para composição horizontal é  $(1_{1_A}, 1_{1_A}, 1_{1_A})$  e então

$$\begin{aligned} (1_{1_B}, 1_{1_B}, 1_{1_B}) * (\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2) &= (1_{1_B} * \alpha_1, 1_{1_B} * \alpha_{12}, 1_{1_B} * \alpha_2) \\ &= (\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2) \\ &= (\alpha_1 * 1_{1_A}, \alpha_{12} * 1_{1_A}, \alpha_2 * 1_{1_A}) \\ &= (\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2) * (1_{1_A}, 1_{1_A}, 1_{1_A}). \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
 1_{(G_1, \beta_1)} * 1_{(F_1, \alpha_1)} &= (\beta_1, \beta_1, \beta_1) * (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) \\
 &= (\beta_1 * \alpha_1, \beta_1 * \alpha_1, \beta_1 * \alpha_1) \\
 &= 1_{(G_1, \beta_1)(F_1, \alpha_1)}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, vale a lei do intercâmbio em  $\text{Kar}(\mathcal{K})$ :

$$\begin{aligned}
 &((\beta_2, \beta_{23}, \beta_3) \circ (\beta_1, \beta_{12}, \beta_2)) * ((\alpha_2, \alpha_{23}, \alpha_3) \circ (\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2)) \\
 &= (\beta_1, \beta_{23} \circ \beta_{12}, \beta_3) * (\alpha_1, \alpha_{23} \circ \alpha_{12}, \alpha_3) \\
 &= (\beta_1 * \alpha_1, (\beta_{23} \circ \beta_{12}) * (\alpha_{23} \circ \alpha_{12}), \beta_3 * \alpha_3) \\
 &= (\beta_1 * \alpha_1, (\beta_{23} * \alpha_{23}) * (\beta_{12} * \alpha_{12}), \beta_3 * \alpha_3) \\
 &= (\beta_1, \beta_{23} * \alpha_{23}, \beta_3) * (\alpha_1, \beta_{12} * \alpha_{12}, \alpha_3) \\
 &= (\beta_2 * \alpha_2, \beta_{23} * \alpha_{23}, \beta_3 * \alpha_3) \circ (\beta_1 * \alpha_1, \beta_{12} * \alpha_{12}, \beta_2 * \alpha_2) \\
 &= ((\beta_2, \beta_{23}, \beta_3) * (\alpha_2, \alpha_{23}, \alpha_3)) \circ ((\beta_1, \beta_{12}, \beta_2) * (\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2)).
 \end{aligned}$$

Portanto, segue que  $\dot{\mathcal{K}}$  está bem-definido como 2-categoria.

Se  $\mathcal{F} : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$  é um 2-functor, então ele se estende a um 2-functor  $\dot{\mathcal{F}} : \dot{\mathcal{K}}_1 \rightarrow \dot{\mathcal{K}}_2$ . De fato, defina  $\dot{\mathcal{F}}(A) = \mathcal{F}(A)$ , para qualquer objeto  $A$  de  $\dot{\mathcal{K}}_1$  (que é também objeto de  $\mathcal{K}_1$ ). Além disso, defina

$$\dot{\mathcal{F}}_{AB}(F_1, \alpha_1) = (\mathcal{F}_{AB}(F_1), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_1))$$

e

$$\dot{\mathcal{F}}_{AB}(\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2) = (\mathcal{F}_{AB}(\alpha_1), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_{12}), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_2)).$$

Como

$$\mathcal{F}_{AB}^2(\alpha_1) = \mathcal{F}_{AB}(\alpha_1) \circ \mathcal{F}_{AB}(\alpha_1) = \mathcal{F}_{AB}(\alpha_1 \circ \alpha_1) = \mathcal{F}_{AB}(\alpha_1)$$

e

$$\mathcal{F}_{AB}(\alpha_{12}) \circ \mathcal{F}_{AB}(\alpha_1) = \mathcal{F}_{AB}(\alpha_{12} \circ \alpha_1) = \mathcal{F}_{AB}(\alpha_{12}) = \mathcal{F}_{AB}(\alpha_2 \circ \alpha_{12}) = \mathcal{F}_{AB}(\alpha_2) \circ \mathcal{F}_{AB}(\alpha_{12}),$$

estas definições estão bem postas.

Agora, vamos checar que  $\dot{\mathcal{F}}$  é um 2-functor:

$$\begin{aligned}
 &\dot{\mathcal{F}}_{AB}((\alpha_2, \alpha_{23}, \alpha_3) \circ (\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2)) \\
 &= \dot{\mathcal{F}}_{AB}(\alpha_1, \alpha_{23} \circ \alpha_{12}, \alpha_3) \\
 &= (\mathcal{F}_{AB}(\alpha_1), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_{23} \circ \alpha_{12}), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_3)) \\
 &= (\mathcal{F}_{AB}(\alpha_1), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_{23}) \circ \mathcal{F}_{AB}(\alpha_{12}), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_3)) \\
 &= (\mathcal{F}_{AB}(\alpha_2), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_{23}), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_3)) \circ (\mathcal{F}_{AB}(\alpha_1), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_{12}), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_2)) \\
 &= \dot{\mathcal{F}}_{AB}((\alpha_2, \alpha_{23}, \alpha_3)) \circ \dot{\mathcal{F}}_{AB}((\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{F}}_{AB}(1_{(F_1, \alpha_1)}) &= \dot{\mathcal{F}}_{AB}(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) \\
&= (\mathcal{F}_{AB}(\alpha_1), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_1), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_1)) \\
&= 1_{(\mathcal{F}_{AB}(F_1), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_1))} \\
&= 1_{\dot{\mathcal{F}}_{AB}(F_1, \alpha_1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{F}}_{AC}((G_1, \beta_1)(F_1, \alpha_1)) &= \dot{\mathcal{F}}_{AC}((G_1 F_1, \beta_1 * \alpha_1)) \\
&= (\mathcal{F}_{AC}(G_1 F_1), \mathcal{F}_{AC}(\beta_1 * \alpha_1)) \\
&= (\mathcal{F}_{AC}(G_1), \mathcal{F}_{AC}(\beta_1))(\mathcal{F}_{AC}(F_1), \mathcal{F}_{AC}(\alpha_1)) \\
&= \dot{\mathcal{F}}_{AC}(G_1, \beta_1) \dot{\mathcal{F}}_{AC}(F_1, \alpha_1),
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathcal{F}}_{AA}(1_A, 1_{1_A}) = (\mathcal{F}_{AA}(1_A), \mathcal{F}_{AA}(1_{1_A})) = (1_{\mathcal{F}(A)}, 1_{1_{\mathcal{F}(A)}}) = 1_{\dot{\mathcal{F}}(A)},$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathcal{F}}_{AC}((\beta_1, \beta_{12}, \beta_2) * (\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2)) \\
&= \dot{\mathcal{F}}_{AC}(\beta_1 * \alpha_1, \beta_{12} * \alpha_{12}, \beta_2 * \alpha_2) \\
&= (\mathcal{F}_{AC}(\beta_1 * \alpha_1), \mathcal{F}_{AC}(\beta_{12} * \alpha_{12}), \mathcal{F}_{AC}(\beta_2 * \alpha_2)) \\
&= (\mathcal{F}_{BC}(\beta_1) * \mathcal{F}_{AB}(\alpha_1), \mathcal{F}_{BC}(\beta_{12}) * \mathcal{F}_{AB}(\alpha_{12}), \mathcal{F}_{BC}(\beta_2) * \mathcal{F}_{AB}(\alpha_2)) \\
&= (\mathcal{F}_{BC}(\beta_1), \mathcal{F}_{BC}(\beta_{12}), \mathcal{F}_{BC}(\beta_2)) * (\mathcal{F}_{AB}(\alpha_1), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_{12}), \mathcal{F}_{AB}(\alpha_2)) \\
&= \dot{\mathcal{F}}_{BC}(\beta_1, \beta_{12}, \beta_2) * \dot{\mathcal{F}}_{AB}(\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{F}}_{AA}((1_{1_A}, 1_{1_A}, 1_{1_A})) &= (\mathcal{F}_{AA}(1_{1_A}), \mathcal{F}_{AA}(1_{1_A}), \mathcal{F}_{AA}(1_{1_A})) \\
&= (1_{1_{\mathcal{F}(A)}}, 1_{1_{\mathcal{F}(A)}}, 1_{1_{\mathcal{F}(A)}}) \\
&= (1_{1_{\dot{\mathcal{F}}(A)}}, 1_{1_{\dot{\mathcal{F}}(A)}}, 1_{1_{\dot{\mathcal{F}}(A)}}) \\
&= 1_{1_{\dot{\mathcal{F}}(A)}}.
\end{aligned}$$

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo. Consideraremos a partir de agora, ao invés de combinações  $\mathbb{Z}$ -lineares de 2-morfismos nas 2-categorias  $\mathcal{U}^*$  e  $\mathcal{U}$ , combinações  $\mathbb{K}$ -lineares nas mesmas categorias. Isso significa que, para 1-morfismos  $F, G$ , temos

$$\mathcal{U}^*(F, G) := \mathcal{U}^*(F, G) \otimes \mathbb{K}, \quad \mathcal{U}(F, G) := \mathcal{U}(F, G) \otimes \mathbb{K},$$

utilizando, por abuso, a mesma notação para as 2-categorias sobre  $\mathbb{Z}$ . Desse modo,  $\mathcal{U}^*$  torna-se uma 2-categoria aditiva graduada  $\mathbb{K}$ -linear e  $\mathcal{U}$  torna-se uma 2-categoria aditiva  $\mathbb{K}$ -linear. Em particular,  $\mathcal{U}^*(F, G)$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial graduado e  $\mathcal{U}(F, G)$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.

Pelo que vimos acima, é possível definir uma 2-categoria  $\dot{\mathcal{U}}$  tal que

$$\dot{\mathcal{U}}(F, G) := \text{Kar}(\mathcal{U}(F, G) \otimes \mathbb{K}),$$



para quaisquer 1-morfismos  $F, G$  de  $\mathcal{U}$ . Como  $\mathcal{U}$  é aditiva e  $\mathbb{K}$ -linear, concluímos que  $\dot{\mathcal{U}}$  é uma 2-categoria aditiva e  $\mathbb{K}$ -linear. Combinando os funtores plenos e fiéis  $\mathcal{U}(m, n) \rightarrow \dot{\mathcal{U}}(m, n)$ , temos um 2-functor  $\mathcal{U} \rightarrow \dot{\mathcal{U}}$  que é universal com relação a cisão de idempotentes nas categorias  $\dot{\mathcal{U}}(m, n)$ . O funtor-composição  $\dot{\mathcal{U}}(m, n) \times \dot{\mathcal{U}}(n, p) \rightarrow \dot{\mathcal{U}}(m, p)$  é induzido pela propriedade universal do envelope de Karoubi do funtor-composição para  $\mathcal{U}$ .

A estrutura de pareamento que associa a cada par de 1-morfismos  $F, G : m \rightarrow n$  de  $\mathcal{U}$  um grupo abeliano graduado através da inclusão  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^*$  permanece em  $\dot{\mathcal{U}}$ . Para cada par de 1-morfismos  $F, G : m \rightarrow n$  de  $\dot{\mathcal{U}}$ , existe um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial graduado dado por

$$\dot{\mathcal{U}}^*(F, G) := \sum_{s \in \mathbb{Z}} \dot{\mathcal{U}}(F\{s\}, G).$$

Veremos adiante na Proposição 5.11 que o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial graduado  $\dot{\mathcal{U}}^*(F, G)$  é um módulo graduado livre sobre os anéis graduados  $\dot{\mathcal{U}}^*(1_m, 1_m)$  e  $\dot{\mathcal{U}}^*(1_n, 1_n)$ . O posto graduado do  $\dot{\mathcal{U}}^*(1_n, 1_n)$ -módulo  $\dot{\mathcal{U}}^*(F, G)$  é definido como

$$\text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(F, G) := \sum_{s \in \mathbb{Z}} q^s \text{rk} \dot{\mathcal{U}}(F\{s\}, G) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} q^{-r} \text{rk} \dot{\mathcal{U}}(F, G\{r\}),$$

onde  $\text{rk} \dot{\mathcal{U}}(F\{s\}, G)$  é o posto do  $\dot{\mathcal{U}}^*(1_n, 1_n)$ -módulo  $\text{rk} \dot{\mathcal{U}}(F\{s\}, G)$ . Esta definição é consistente porque as aplicações de grau zero  $F \rightarrow G\{s\}$  estão em correspondência biunívoca com as aplicações de grau zero  $F\{-s\} \rightarrow G$ .

A Proposição a seguir apresenta as categorificações dos automorfismos e antiautomorfismos de  $\dot{\mathcal{U}}$ . Ela é um caso particular na discussão que fizemos acima sobre extensão de 2-funtores  $\mathcal{F} : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$  para  $\tilde{\mathcal{F}} : \dot{\mathcal{K}}_1 \rightarrow \dot{\mathcal{K}}_2$ .

**Proposição 5.3.** *Os 2-funtores*

$$\tilde{\omega} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}, \quad \tilde{\sigma} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^{\text{op}}, \quad \tilde{\psi} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^{\text{co}}, \quad \tilde{\tau} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^{\text{coop}}, \quad \tilde{\tau}^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^{\text{coop}}$$

se estendem a 2-funtores

$$\tilde{\omega} : \dot{\mathcal{U}} \rightarrow \dot{\mathcal{U}}, \quad \tilde{\sigma} : \dot{\mathcal{U}} \rightarrow \dot{\mathcal{U}}^{\text{op}}, \quad \tilde{\psi} : \dot{\mathcal{U}} \rightarrow \dot{\mathcal{U}}^{\text{co}}, \quad \tilde{\tau} : \dot{\mathcal{U}} \rightarrow \dot{\mathcal{U}}^{\text{coop}}, \quad \tilde{\tau}^{-1} : \dot{\mathcal{U}} \rightarrow \dot{\mathcal{U}}^{\text{coop}}.$$

### 5.3 $\dot{\mathcal{U}}$ como uma categorificação de $\dot{\mathcal{U}}$

Enunciaremos abaixo alguns resultados importantes para os desenvolvimentos desta seção. Suas demonstrações requerem o estudo das categorificações das representações irredutíveis de  $\dot{\mathcal{U}}$  (ver [21]).

**Proposição 5.4.**

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} n \\ \curvearrowright \\ -n-1+j \end{array} \mapsto v_{j,n}, \quad \text{para } n \geq 0 \\ \begin{array}{c} n \\ \curvearrowleft \\ n-1+j \end{array} \mapsto v_{j,n}, \quad \text{para } n \leq 0 \end{array}$$



e a estendemos também para fatoriais quânticos  $[a]!$  como a seguir:

$$\bigoplus_{[a]!} x = (x) \bigoplus^{[a]!} := \bigoplus_{j=0}^a (x\{a-1-2j\}) \binom{a}{j},$$

onde  $\binom{a}{j}$  é o coeficiente binomial usual, servindo para denotar a multiplicidade do 1-morfismo  $x\{a-1-2j\}$  na soma direta. Mais geralmente, usamos  $F^{\oplus f}$ , para um polinômio de Laurent  $f = \sum f_a q^a \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ , para denotar a soma direta sobre  $a \in \mathbb{Z}$  de  $f_a$  cópias de  $F\{a\}$ .

Seja  $e_{w_0}$  o idempotente de  $\mathcal{U}(\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a \mathbf{1}_n)$  que corresponde a imagem de  $x^\delta \partial_{w_0} \in \mathcal{NH}_a$  sob o isomorfismo do Teorema 5.1. Tal elemento é idempotente pois  $x^\delta \partial_{w_0} x^\delta \partial_{w_0} = x^\delta \mathfrak{S}_1 \partial_{w_0} = x^\delta \partial_{w_0}$ . Denotaremos por  $e'_{w_0}$  a imagem deste elemento em  $\mathcal{U}^*(\mathcal{F}^a \mathbf{1}_n, \mathcal{F}^a \mathbf{1}_n)$  sob o isomorfismo do Teorema 5.2.

**Definição 5.3.** *As categorificações das potências divididas são os 2-morfismos de  $\dot{\mathcal{U}}$  dados abaixo:*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(a)} \mathbf{1}_n &:= (\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n, e_{w_0}) \left\{ \frac{a(1-a)}{2} \right\}, \\ \mathcal{F}^{(a)} \mathbf{1}_n &:= (\mathcal{F}^a \mathbf{1}_n, e'_{w_0}) \left\{ \frac{a(1-a)}{2} \right\}, \end{aligned}$$

para  $n \in \mathbb{Z}$  e  $e_{w_0}, e'_{w_0}$  os idempotentes definidos acima.

Na base dada pelos polinômios de Schubert (ver Seção 2.2), a álgebra polinomial  $\mathcal{P}_a$  é um módulo graduado livre sobre o anel dos polinômios simétricos  $\Lambda_a$ :

$$\mathcal{P}_a \cong \bigoplus_{(a)_q^2} \Lambda_a.$$

Como  $\partial_{w_0} \mathfrak{S}_w = \delta_{w, w_0}$ , a ação do idempotente  $e_{w_0}$  sobre  $\mathcal{P}_a$  admite uma projeção sobre um  $\Lambda_a$  unidimensional (logo, indecomponível). Portanto,  $e_{w_0}$  é um idempotente primitivo (ou minimal).

**Proposição 5.5.** *Temos as seguintes decomposições de 1-morfismos*

$$\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n \cong \bigoplus_{[a]!} \mathcal{E}^{(a)} \mathbf{1}_n \tag{5.3.1}$$

$$\mathcal{F}^a \mathbf{1}_n \cong \bigoplus_{[a]!} \mathcal{F}^{(a)} \mathbf{1}_n \tag{5.3.2}$$

em  $\dot{\mathcal{U}}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e para todo  $a \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* O grupo abeliano graduado  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a \mathbf{1}_n) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} \dot{\mathcal{U}}(\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n \{s\}, \mathcal{E}^a \mathbf{1}_n)$  consiste de todos os 2-morfismos  $\alpha$  de  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a \mathbf{1}_n)$  para os quais vale a comutatividade do diagrama 5.1, ou seja:

$$\alpha \circ 1_{\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n} = \alpha = 1_{\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n} \circ \alpha,$$

que corresponde justamente ao grupo abeliano graduado  $\mathcal{U}^*(\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a \mathbf{1}_n)$ :

$$\dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a \mathbf{1}_n) = \mathcal{U}^*(\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a \mathbf{1}_n) \cong \mathcal{NH}_a \otimes \mathbb{Z}[v_1, v_2, \dots] \cong \text{Mat}\left(\binom{a!}{q^2}; \Lambda_a\right) \otimes \mathbb{Z}[v_1, v_2, \dots]$$

onde o último isomorfismo é dado pela Proposição 2.3.

Em  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a \mathbf{1}_n)$  cada um dos idempotentes homogêneos é da forma  $e \otimes 1$ , para algum  $e \in \text{Mat}\left(\binom{a!}{q^2}; \Lambda_a\right)$ . A álgebra de matrizes  $\text{Mat}\left(\binom{a!}{q^2}; \Lambda_a\right)$  tem  $a!$  idempotentes primitivos que são os dados pelas matrizes diagonais elementares. O idempotente primitivo  $e_{w_0} \in \text{Hom}_{\Lambda_a}(\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_a) \cong \text{Mat}\left(\binom{a!}{q^2}; \Lambda_a\right)$  se projeta sobre um vetor-coluna que corresponde ao elemento  $\mathfrak{S}_{w_0}$  de  $\mathcal{P}_a$ , que tem o maior grau na base dada pelos polinômios de Schubert ordenada por comprimento. Logo,  $e_{w_0} \cong E_{a!, a!}$  na base de  $\text{Mat}\left(\binom{a!}{q^2}; \Lambda_a\right)$ .

Portanto,

$$\text{Im } E_{a!, a!} \cong \text{Im } e_{w_0} := (\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n, e_{w_0}) = \mathcal{E}^{(a)} \mathbf{1}_n \left\{ \frac{a(a-1)}{2} \right\} \in \dot{\mathcal{U}}.$$

As imagens de todos os outros idempotentes  $E_{j,j}$  são isomorfas, a menos de uma translação, à imagem do idempotente  $E_{a!, a!}$  e então

$$\mathcal{E}^a \mathbf{1}_n \cong \bigoplus_{j=0}^{a!} \text{Im } E_{j,j} \cong \bigoplus_{\binom{a!}{q-2}} \text{Im } E_{a!, a!} = \bigoplus_{\binom{a!}{q-2}} \text{Im } \mathcal{E}^{(a)} \mathbf{1}_n \left\{ \frac{a(a-1)}{2} \right\}$$

em  $\dot{\mathcal{U}}$ . Como  $q^{a(a-1)/2} \binom{a!}{q-2} = [a]!$ , obtemos (5.3.1). A demonstração para (5.3.2) é análoga.  $\square$

**Proposição 5.6.** *Temos as seguintes decomposições para 1-morfismos*

$$\mathcal{E}^{(a)} \mathcal{E}^{(b)} \mathbf{1}_n \cong \bigoplus_{\begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}} (\mathcal{E}^{(a+b)} \mathbf{1}_n) \tag{5.3.3}$$

$$\mathcal{F}^{(a)} \mathcal{F}^{(b)} \mathbf{1}_n \cong \bigoplus_{\begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix}} (\mathcal{F}^{(a+b)} \mathbf{1}_n) \tag{5.3.4}$$

em  $\dot{\mathcal{U}}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e para quaisquer  $a, b \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema de Krull-Schmidt, o 1-morfismo  $\mathcal{E}^{(a+b)} \mathbf{1}_n$  de  $\dot{\mathcal{U}}$  tem uma única decomposição em indecomponíveis. Considerando a igualdade  $\mathcal{E}^a \mathcal{E}^b \mathbf{1}_n = \mathcal{E}^{a+b} \mathbf{1}_n$  e usando o isomorfismo (5.3.1), temos:

$$\left( \bigoplus_{[a!]} \mathcal{E}^a \mathbf{1}_n \right) \left( \bigoplus_{[b!]} \mathcal{E}^b \mathbf{1}_n \right) \cong \left( \bigoplus_{[a+b!]} \mathcal{E}^{a+b} \mathbf{1}_n \right)$$

e daí segue (5.3.3). Analogamente, usando (5.3.2) obtemos (5.3.4).  $\square$

**Proposição 5.7.** *Temos as decomposições de 1-morfismos*

$$\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}\mathbf{1}_n \cong \bigoplus_{j=0}^{\min(a,b)} \left( (\mathcal{E}^{(a-j)}\mathcal{F}^{(b-j)}\mathbf{1}_n) \oplus \begin{bmatrix} b-a-n \\ j \end{bmatrix} \right), \quad \text{se } n < -2a+2,$$

$$\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}\mathbf{1}_n \cong \bigoplus_{j=0}^{\min(a,b)} \left( (\mathcal{F}^{(b-j)}\mathcal{E}^{(a-j)}\mathbf{1}_n) \oplus \begin{bmatrix} a-b+n \\ j \end{bmatrix} \right), \quad \text{se } n > 2b-2,$$

em  $\dot{\mathcal{U}}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e para quaisquer  $a, b \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Do Teorema 4.9, tínhamos as relações

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\mathcal{F}\mathbf{1}_n &\cong \mathcal{F}\mathcal{E}\mathbf{1}_n \oplus_{[n]} \mathbf{1}_n, & \text{para } n \geq 0, \\ \mathcal{F}\mathcal{E}\mathbf{1}_n &\cong \mathcal{E}\mathcal{F}\mathbf{1}_n \oplus_{[-n]} \mathbf{1}_n, & \text{para } n \leq 0. \end{aligned}$$

O resultado segue aplicando-se as fórmulas acima a  $\mathcal{F}^b\mathcal{E}^a\mathbf{1}_n$  e a  $\mathcal{E}^a\mathcal{F}^b\mathbf{1}_n$  e usando a unicidade de decomposição.  $\square$

**Lema 5.4.** *Os  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais graduados  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a\mathbf{1}_n)$  e  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{F}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{F}^a\mathbf{1}_n)$  são  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n)$ -módulos livres cujos postos graduados são dados por*

$$\text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a\mathbf{1}_n) = \text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{F}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{F}^a\mathbf{1}_n) = g(a),$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 5.5, temos  $\mathcal{E}^a\mathbf{1}_n = \bigoplus_{[a]!} \mathcal{E}^{(a)}\mathbf{1}_n$ . Logo,

$$\dot{\mathcal{U}}(\mathcal{E}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a\mathbf{1}_n) = \dot{\mathcal{U}}(\bigoplus_{[a]!} \mathcal{E}^{(a)}\mathbf{1}_n, \bigoplus_{[a]!} \mathcal{E}^{(a)}\mathbf{1}_n)$$

e então

$$\text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a\mathbf{1}_n) = [a]! [a]! \text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^{(a)}\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^{(a)}\mathbf{1}_n).$$

Temos os isomorfismos

$$\mathcal{U}^*(\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n) \cong \mathbb{Z}[v_{1,n}, v_{2,n}, \dots]$$

(pela Proposição 5.4) e

$$\mathcal{U}^*(\mathcal{E}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a\mathbf{1}_n) \cong \mathcal{N}\mathcal{H}_a \otimes \mathbb{Z}[v_{1,n}, v_{2,n}, \dots]$$

(pelo Teorema 5.1). Como  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a\mathbf{1}_n) = \mathcal{U}^*(\mathcal{E}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a\mathbf{1}_n)$  e  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n) = \mathcal{U}^*(\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n)$ , segue que  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a\mathbf{1}_n)$  é um  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n)$ -módulo graduado cujo posto graduado  $\text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^a\mathbf{1}_n)$  coincide com o posto graduado do anel nilHecke  $\mathcal{N}\mathcal{H}_a$  que, por (2.1.9), é  $(q^{-a(a-1)/2}[a]!) \left(\frac{1}{1-q^2}\right)^a$ .

Portanto, segue dessa discussão que

$$\text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^{(a)}\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^{(a)}\mathbf{1}_n) = \frac{(q^{-a(a-1)/2}[a]!)}{[a]! [a]!} \left(\frac{1}{1-q^2}\right)^a = \prod_{\ell=1}^a \frac{1}{1-q^{2\ell}} = g(a).$$

O posto graduado do  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n)$ -módulo livre  $\dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{F}^a\mathbf{1}_n, \mathcal{F}^a\mathbf{1}_n)$  pode ser calculado da mesma maneira.  $\square$

**Proposição 5.8.** *Os  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais graduados*

$$\dot{U}^*(\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^{(c)}\mathcal{F}^{(d)}\mathbf{1}_n), \quad \text{para } n \leq b - a = d - c,$$

e

$$\dot{U}^*(\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}\mathbf{1}_n, \mathcal{F}^{(d)}\mathcal{E}^{(c)}\mathbf{1}_n), \quad \text{para } n \geq b - a = d - c,$$

são  $\dot{U}^*(\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n)$ -módulos livres cujos postos graduados são dados por:

$$\begin{aligned} \text{rk}_q \dot{U}^*(\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^{(c)}\mathcal{F}^{(d)}\mathbf{1}_n) &= \langle E^{(a)}F^{(b)}\mathbf{1}_n, E^{(c)}F^{(d)}\mathbf{1}_n \rangle, \\ \text{rk}_q \dot{U}^*(\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}\mathbf{1}_n, \mathcal{F}^{(d)}\mathcal{E}^{(c)}\mathbf{1}_n) &= \langle F^{(b)}E^{(a)}\mathbf{1}_n, F^{(d)}E^{(c)}\mathbf{1}_n \rangle, \end{aligned}$$

onde  $\langle, \rangle$  é a forma semilinear definida na Seção 1.3.

*Demonstração.* Esta prova é análoga a da Proposição 1.6 fazendo as trocas:  $\langle, \rangle \mapsto \dot{U}^*(,)$ ,  $E \mapsto \mathcal{E}$ ,  $F \mapsto \mathcal{F}$ ,  $\tau \mapsto \dot{\tau}$ . Temos:

$$\begin{aligned} &\dot{U}^*(\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^{(c)}\mathcal{F}^{(d)}\mathbf{1}_n) \\ &= \dot{U}^*(\mathcal{F}^{(b)}\mathbf{1}_n, \dot{\tau}(\mathcal{E}^{(a)})\mathcal{E}^{(c)}\mathcal{F}^{(d)}\mathbf{1}_n) \\ &= \dot{U}^*(\mathcal{F}^{(b)}\mathbf{1}_n, \mathcal{F}^{(a)}\mathcal{E}^{(c)}\mathcal{F}^{(d)}\mathbf{1}_n\{-a(n+2(c-d)+a)\}) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{\min(a,c)} \left( \dot{U}^*(\mathcal{F}^{(b)}\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^{(c-j)}\mathcal{F}^{(a-j)}\mathcal{F}^{(d)}\mathbf{1}_n\{-a(n+2(c-d)+a)\}) \oplus \begin{bmatrix} a-c-(n-2d) \\ j \end{bmatrix} \right) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{\min(a,c)} \left( \dot{U}^*(\dot{\tau}^{-1}(\mathcal{E}^{(c-j)})\mathcal{F}^{(b)}\mathbf{1}_n, \mathcal{F}^{(a-j)}\mathcal{F}^{(d)}\mathbf{1}_n\{a(2b-a-n)\}) \oplus \begin{bmatrix} b+d-n \\ j \end{bmatrix} \right) \\ &= \bigoplus_{j=0}^{\min(a,c)} \left( \dot{U}^*(\mathcal{F}^{(c-j)}\mathcal{F}^{(b)}\mathbf{1}_n, \mathcal{F}^{(a-j)}\mathcal{F}^{(d)}\mathbf{1}_n\{(a+c-j)(b+d-j-n)\}) \oplus \begin{bmatrix} b+d-n \\ j \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

onde  $\dot{\tau}^{-1}(\mathcal{E}^{(c-j)}\mathbf{1}_{n-2d+2(a-j)}) = \mathcal{F}^{(c-j)}\mathbf{1}_{n-2b}\{(c-j)(c-j-(n-2d+2(a-j)))\}$ . Na terceira igualdade usamos a hipótese de  $n \leq b - a = d - c$  que implica em  $2d + a - c \leq d - c \leq n$  e então  $n - 2d \leq a - c$ .

Por (5.3.4) podemos combinar as categorificações das potências divididas no resultado acima e então obtemos  $\dot{U}^*(\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^{(c)}\mathcal{F}^{(d)}\mathbf{1}_n)$  escrito como uma soma direta de translações de grupos abelianos da forma  $\mathcal{U}^*(\mathcal{F}^{(p)}\mathbf{1}_n, \mathcal{F}^{(p)}\mathbf{1}_n)$ . Pelo Lema 5.4 grupos abelianos graduados deste tipo são  $\mathcal{U}^*(\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n)$ -módulos livres. Desse modo, segue que  $\dot{U}^*(\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}\mathbf{1}_n, \mathcal{E}^{(c)}\mathcal{F}^{(d)}\mathbf{1}_n)$  é também um  $\mathcal{U}^*(\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n)$ -módulo livre. Usando que  $\text{rk}_q \mathcal{U}^*(\mathcal{F}^{(p)}\mathbf{1}_n, \mathcal{F}^{(p)}\mathbf{1}_n) = g(p)$  segue o resultado.  $\square$

A Proposição a seguir mostra que os levantamentos dos elementos da base canônica de Lusztig são indecomponíveis.

**Proposição 5.9.** *Os 1-morfismos dos tipos:*

- $\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n\{s\}$ , para  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $n, s \in \mathbb{Z}$ ,  $n \leq b - a$ ;
- $\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_n\{s\}$ , para  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $n, s \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq b - a$ ;

são indecomponíveis. Além disso, esses indecomponíveis são não-isomorfos, exceto quando  $n = b - a$ . Neste caso,  $\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_{b-a}\{s\} \cong \mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_{b-a}\{s\}$ .

*Demonstração.* Para ver que  $\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n\{s\}$  e  $\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_n\{s\}$  são indecomponíveis, basta mostrarmos que seus anéis de endomorfismos não possuem idempotentes não triviais. Isto ocorre quando

$$\begin{aligned} \text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n\{s\}, \mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n\{s\}) &\in 1 + q\mathbb{N}[q] \\ \text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_n\{s\}, \mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_n\{s\}) &\in 1 + q\mathbb{N}[q]. \end{aligned}$$

Pela Proposição 5.8, estes postos graduados são dados pela forma semilinear da Seção 1.3. Não consideraremos as transições porque elas não influenciam no cálculo do postos graduados.

Usando a versão da forma semilinear em termos de  $g$  dada pela Proposição 1.7, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n, \mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n) &= \sum_{j=0}^{\min(a,b)} q^{2j(b-a+j-n)} g(a-j)g(b-j)g(j)g(j) \\ \text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_n, \mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_n) &= \sum_{j=0}^{\min(a,b)} q^{2j(a-b+j+n)} q^{2j(b-a+j-n)} g(a-j)g(b-j)g(j)g(j). \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Todos os elementos  $g(s)$  pertencem a  $1 + q\mathbb{N}[q]$ . Logo, a indecomponibilidade depende da potência de  $q$  em (5.3.5). O 1-morfismos  $\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n$  são indecomponíveis quando  $2j(b-a+j-n) \geq 0$ , para todo  $0 \leq j \leq \min(a, b)$ , ou seja, quando  $j = 0$  ou  $n \leq b - a + j \leq b - a$ . Assim, devemos ter  $j = n + a - b \leq 0$  e então  $j = 0$ . A prova de que  $\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}$  é indecomponível para  $n \geq b - a$  é análoga.

Suponhamos que  $\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n$  e  $\mathcal{E}^{(a+\delta)}\mathcal{F}^{(b+\delta)}1_n$  sejam ambos indecomponíveis para  $n \leq b - a$ . Vamos mostrar que eles não são isomorfos calculando o posto graduado dado pela Proposição 1.7:

$$\begin{aligned} &\text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n, \mathcal{E}^{(a+\delta)}\mathcal{F}^{(b+\delta)}1_n) \\ &= \text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(\mathcal{E}^{(a+\delta)}\mathcal{F}^{(b+\delta)}1_n, \mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n) \\ &= \sum_{j=\max(0, -\delta)}^{\min(a,b)} q^{2j(j+b-a-n)+\delta^2+\delta(b-a-n+2j)} g(a-j)g(b-j)g(\delta+j)g(j). \end{aligned}$$

Quando  $b - a - n \geq 0$  e  $j \geq 0$  o expoente de  $q$  é maior que zero, já que

$$2j(j + b - a - n) + \delta^2 + \delta(b - a - n + 2j) > 0$$

vale para  $\delta > 0$ . Para  $\delta < 0$ , temos  $\delta^2 > \delta(b - a - n)$ , que também é verdadeira. Desse modo, o posto graduado considerado é positivo e então  $\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n$  e  $\mathcal{E}^{(a+\delta)}\mathcal{F}^{(b+\delta)}1_n$  não são isomorfos.

A demonstração para  $\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_n$  e  $\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_n$  é análoga.

Pelo Lema 1.3, não existem aplicações entre  $\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n$  e  $\mathcal{F}^{(d)}\mathcal{E}^{(c)}1_n$  quando ambos são indecomponíveis. Logo, só falta mostrarmos o isomorfismo entre  $\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_{b-a}\{s\}$  e  $\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_{b-a}\{s\}$ , para  $n = b - a$ . Ele será dado no Corolário 5.5.  $\square$

**Proposição 5.10.** (i) *Todo 1-morfismo  $F$  de  $\dot{\mathcal{U}}(n, m)$  se decompõe em uma soma direta de 1-morfismos indecomponíveis da forma*

$$\begin{aligned} 1_m\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n\{s\}, & \quad \text{para } a, b \in \mathbb{N}, n, s \in \mathbb{Z}, n \leq b - a, \\ 1_m\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_n\{s\}, & \quad \text{para } a, b \in \mathbb{N}, n, s \in \mathbb{Z}, n \geq b - a, \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

onde  $m = n - 2(b - a)$ .

(ii) *A decomposição de  $F \in \dot{\mathcal{U}}(n, m)$  é essencialmente única, ou seja, os indecomponíveis e suas multiplicidades são únicos a menos de reordenação dos fatores.*

(iii) *Os morfismos em (5.3.6) são os únicos indecomponíveis em  $\dot{\mathcal{U}}$ , a menos de isomorfismo.*

*Demonstração.* Desde que provemos o item (i), os itens (ii) e (iii) seguirão diretamente do Teorema de Krull-Schmidt (ver o Capítulo I de [4]).

Para provar (i) basta mostrar que cada elemento  $F = 1_m\mathcal{E}^{\alpha_1}\mathcal{F}^{\beta_1}\mathcal{E}^{\alpha_2}\dots\mathcal{F}^{\beta_{k-1}}\mathcal{E}^{\alpha_k}\mathcal{F}^{\beta_k}1_n\{s\}$  de  $\mathcal{U}$  se decompõe como soma de elementos de (5.3.6). Provaremos isso por indução sobre  $\sum_i(\alpha_i + \beta_i)$ , que é o total de  $\mathcal{E}$ 's e  $\mathcal{F}$ 's que aparecem em  $F$ . Para  $\sum_i(\alpha_i + \beta_i) \leq 1$ , o resultado segue da Proposição 5.5. Suponhamos então que exista uma tal decomposição para 1-morfismos sempre que  $\sum_i(\alpha_i + \beta_i) \leq \gamma$ .

Se  $m = \sum_i(\beta_i - \alpha_i) \leq n$ , podemos usar o Teorema 4.9 para mover todos os  $\mathcal{F}$ 's de  $F$  para a esquerda. Então ficamos com:

$$1_m\mathcal{E}^{\alpha_1}\mathcal{F}^{\beta_1}\dots\mathcal{E}^{\alpha_k}\mathcal{F}^{\beta_k}1_n\{s\} \oplus (F') \cong 1_m\mathcal{F}^{\sum_i\beta_i}\mathcal{E}^{\sum_i\alpha_i}1_n\{s\} \oplus (F''), \quad (5.3.7)$$

onde  $F'$  e  $F''$  são termos tais que  $\sum_i(\alpha_i - \beta_i) \leq \gamma$ . Por hipótese de indução,  $F'$  e  $F''$  se decompõem como soma direta de elementos de (5.3.6). Pela Proposição 5.5, o 1-morfismo  $1_m\mathcal{F}^{\sum_i\beta_i}\mathcal{E}^{\sum_i\alpha_i}1_n\{s\}$  se decompõe em uma soma direta:

$$1_m\mathcal{F}^{\sum_i\beta_i}\mathcal{E}^{\sum_i\alpha_i}1_n\{s\} = \bigoplus_{[\sum_i\alpha_i]![\sum_i\beta_i]!} 1_m\mathcal{F}^{(\sum_i\beta_i)}\mathcal{E}^{(\sum_i\alpha_i)}1_n\{s\}.$$

Como  $\sum_i(\beta_i - \alpha_i) \leq n$ , segue da Proposição 5.9 que esta é uma soma direta de indecomponíveis. Daí, segue de (5.3.7) que a soma direta de  $F$  com uma soma direta de indecomponíveis é isomorfo a uma outra soma direta de indecomponíveis. Logo, pelo Teorema de Krull-Schmidt,  $F$  também é isomorfo a uma soma direta de indecomponíveis.

No caso em que  $m = \sum_i(\beta_i - \alpha_i) \geq n$ , basta movermos todos os  $\mathcal{F}$ 's do 1-morfismo  $F$  para a direita e usar um argumento semelhante para decompor  $F$  em uma soma direta de indecomponíveis usando a Proposição 5.5.  $\square$

**Corolário 5.5.** *Os 1-morfismos  $\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_{b-a}\{s\}$  e  $\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_{b-a}\{s\}$  são isomorfos em  $\dot{\mathcal{U}}$ .*



*Demonstração.* Segue da Proposição 5.10 que qualquer elemento

$$1_{a-b}\mathcal{E}^{\alpha_1}\mathcal{F}^{\beta_1}\mathcal{E}^{\alpha_2}\dots\mathcal{F}^{\beta_{k-1}}\mathcal{E}^{\alpha_k}\mathcal{F}^{\beta_k}1_{b-a}\{s\}$$

com  $\sum \alpha_i = a$  e  $\sum \beta_i = b$  se decompõe em duas maneiras possíveis

$$1_{a-b}\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_{b-a}\{s\} \oplus 1_{a-b}F1_{b-a} \quad \text{e} \quad 1_{a-b}\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_{b-a}\{s\} \oplus 1_{a-b}F'1_{b-a}$$

onde  $1_{a-b}F1_{b-a}$  e  $1_{a-b}F'1_{b-a}$  são somas diretas dos 1-morfismos indecomponíveis dados em (5.3.6). Pelo Teorema de Krull-Schmidt essas duas decomposições são isomorfas. Pela Proposição 5.3.6 nenhum dos elementos de (5.3.6) são isomorfos, exceto pela possibilidade de isomorfismo entre  $\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_{b-a}\{s\}$  e  $\mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_{b-a}\{s\}$ . Logo, para que as duas decomposições sejam isomorfas, este deve ser justamente o caso, ou seja,  $\mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_{b-a}\{s\} \cong \mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_{b-a}\{s\}$ .  $\square$

**Corolário 5.6.** *Existe uma correspondência bijetiva entre a base canônica de Lusztig  $\dot{\mathbb{B}}$  e a escolha de classes de isomorfismo representativas dos 1-morfismos indecomponíveis de  $\dot{\mathcal{U}}$  sem translações dada por*

$$\begin{aligned} E^{(a)}F^{(b)}1_n &\mapsto \mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_n, & \text{para } a, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n < b - a, \\ F^{(b)}E^{(a)}1_n1_m &\mapsto \mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_n, & \text{para } a, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n > b - a, \\ E^{(a)}F^{(b)}1_{b-a} = F^{(b)}E^{(a)}1_{b-a} &\mapsto \mathcal{E}^{(a)}\mathcal{F}^{(b)}1_{b-a} \cong \mathcal{F}^{(b)}\mathcal{E}^{(a)}1_{b-a}. \end{aligned}$$

A escolha de morfismos na imagem desta bijeção é denotada por  $\dot{\mathcal{B}}$ . Além disso,  ${}_m\dot{\mathcal{B}}_n \subset \dot{\mathcal{B}}$  denota os 1-morfismos representativos com domínio  $n$  e contradomínio  $m$ .

*Demonstração.* É imediata da Proposição 5.10 e do Corolário 5.5 anteriores.  $\square$

O Corolário 5.6 acima significa que os 1-morfismos em  $\dot{\mathcal{B}}$  definem uma categorificação da base canônica de Lusztig  $\dot{\mathbb{B}}$ .

Para cada par de objetos  $n, m$  de  $\dot{\mathcal{U}}$ , a categoria  $\dot{\mathcal{U}}(n, m) := {}_m\dot{\mathcal{U}}_n$  é aditiva. O grupo de Grothendieck  $K_0({}_m\dot{\mathcal{U}}_n)$  desta categoria aditiva é o  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -módulo gerado pelas classes de isomorfismos  $[F]$ , para cada  $F \in {}_m\dot{\mathcal{U}}_n$ , módulo as relações:

$$\begin{aligned} [F] &= [F_1] + [F_2], \text{ se } F = F_1 \oplus F_2; \\ [F\{s\}] &= q^s[F]. \end{aligned}$$

Pela Proposição 5.10, todos os objetos das categorias  ${}_m\dot{\mathcal{U}}_n$  se decompõem de maneira única como soma direta de indecomponíveis, ou seja, as categorias aditivas  ${}_m\dot{\mathcal{U}}_n$  satisfazem a propriedade de Krull-Schmidt. Logo,  $K_0({}_m\dot{\mathcal{U}}_n)$  é gerado como  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -módulo pelas classes de isomorfismo dos indecomponíveis  $B : n \rightarrow m$ , onde  $B \in {}_m\dot{\mathcal{B}}_n$ .

Defina o anel de Grothendieck  $K_0(\dot{\mathcal{U}})$  da 2-categoria  $\dot{\mathcal{U}}$  como sendo a soma direta

$$K_0(\dot{\mathcal{U}}) := \bigoplus_{n, m} K_0({}_m\dot{\mathcal{U}}_n)$$

cuja multiplicação é induzida pela composição, ou seja,

$$[F] = [F_1][F_2] \quad \text{se } F = F_1F_2.$$

Temos o seguinte Teorema de categorificação de  $\dot{\mathcal{U}}$ :

**Teorema 5.7.** *O anel de Grothendieck cindido  $K_0(\dot{\mathcal{U}})$  é isomorfo como um  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -módulo a  ${}_{\mathcal{A}}\dot{\mathcal{U}}$ . A multiplicação por  $q$  corresponde a translação  $\{1\}$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 5.10, o anel de Grothendieck de  $\dot{\mathcal{U}}$  é livremente gerado como  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -módulo pelas classes de isomorfismo de indecomponíveis sem translações, que correspondem aos elementos da base canônica de Lusztig (Corolário 5.6). Como a estrutura multiplicativa do anel de Grothendieck cindido  $K_0(\dot{\mathcal{U}})$  é determinada pela composição em  $\dot{\mathcal{U}}$ , cujas relações levantam as relações da álgebra  $\dot{U}$ , segue que  $K_0(\dot{\mathcal{U}}) \otimes_{\mathbb{Z}[q, q^{-1}]} \mathbb{Q}(q) \cong \dot{U}$ . Como  $K_0(\dot{\mathcal{U}})$  é um  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -módulo livre, o resultado segue.  $\square$

**Teorema 5.8.** *Os 2-funtores*

$$\tilde{\omega}: \dot{\mathcal{U}} \rightarrow \dot{\mathcal{U}}, \quad \tilde{\sigma}: \dot{\mathcal{U}} \rightarrow \dot{\mathcal{U}}^{\text{op}}, \quad \tilde{\psi}: \dot{\mathcal{U}} \rightarrow \dot{\mathcal{U}}^{\text{co}}, \quad \tilde{\tau}: \dot{\mathcal{U}} \rightarrow \dot{\mathcal{U}}^{\text{coop}}, \quad \tilde{\tau}^{-1}: \dot{\mathcal{U}} \rightarrow \dot{\mathcal{U}}^{\text{coop}}$$

são levantamentos a  $\dot{\mathcal{U}}$  das correspondentes aplicações  $\omega, \sigma, \psi, \tau$  sobre a álgebra  $\dot{\mathbf{U}}$  definidas em 1.2.

*Demonstração.* Basta comparar as definições dos 2-funtores na Seção 4.6 com a das aplicações correspondentes em 1.2 usando o fato de que  $[1_m \mathcal{E}^{(a)} \mathcal{F}^{(b)} 1_n \{s\}] = q^s 1_m E^{(a)} F^{(b)} 1_n$  e  $[1_m \mathcal{F}^{(b)} \mathcal{E}^{(a)} 1_n \{s\}] = q^s 1_m F^{(b)} E^{(a)} 1_n$ .  $\square$

**Proposição 5.11.** *O grupo abeliano graduado  $\dot{\mathcal{U}}^*(F, G)$  é um  $\mathbb{Z}[v_1, v_2, \dots]$ -módulo livre graduado.*

*Demonstração.* Os 1-morfismos  $F$  e  $G$  se decompõem em somas de indecomponíveis  $B\{s\}$  para  $B \in \dot{\mathcal{B}}$  e algum  $s \in \mathbb{Z}$ . Logo, qualquer 2-morfismo  $\alpha: F \Rightarrow G$  se decompõe em uma soma de 2-morfismos entre as translações dos elementos em  $B \in \dot{\mathcal{B}}$ . Como  $\dot{\mathcal{U}}^*(B, B')$ , para  $B, B' \in \dot{\mathcal{B}}$  são  $\mathbb{Z}[v_1, v_2, \dots]$ -módulos livres graduados, segue que  $\dot{\mathcal{U}}^*(F, G)$  é também um  $\mathbb{Z}[v_1, v_2, \dots]$ -módulo livre graduado.  $\square$

**Teorema 5.9.** *O grupo abeliano graduado  $\dot{\mathcal{U}}^*(F, G)$  categorifica a forma semilinear  $\langle, \rangle$  da Proposição 1.4 no sentido de que  $\text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}(F, G) = \langle [F], [G] \rangle$ .*

*Demonstração.* Mostraremos que o posto graduado  $\text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}(\cdot, \cdot)$  satisfaz as propriedades definidoras da forma semilinear, dadas na Proposição 1.4. Como  $\text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(F\{s\}, G) = q^{-s} \text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(F, G)$  e  $\text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(F, G\{s'\}) = q^{s'} \text{rk}_q \dot{\mathcal{U}}^*(F, G)$ , a gradação induz a semilinearidade sobre os anéis de Grothendieck. A propriedade (ii) segue da definição de composição vertical em  $\dot{\mathcal{U}}$ , já que um dado par de morfismos é componível se, e somente se, seus domínios e contradomínios são compatíveis. A propriedade adjunta segue do Lema 4.8 e a propriedade Grassmanniana segue do Lema 5.4. Finalmente, a propriedade (v) de 1.4 segue do isomorfismo

$$\dot{\mathcal{U}}(F\{s\}, G\{s'\}) \cong \dot{\mathcal{U}}(G\{-s'\}, F\{-s\})$$

induzido pelo 2-funtor invertível  $\tilde{\psi}$ .  $\square$

Os 2-funtores  $\tilde{\omega}$  e  $\tilde{\sigma}$  são isomorfismos sobre  $\dot{\mathcal{U}}$ . Então eles induzem isomorfismos entre os grupos abelianos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}}(\tilde{\omega}(F), \tilde{\omega}(G)) &= \dot{\mathcal{U}}(F, G) \\ \dot{\mathcal{U}}(\tilde{\sigma}(F), \tilde{\sigma}(G)) &= \dot{\mathcal{U}}(F, G) \end{aligned}$$

para quaisquer 1-morfismos  $F, G \in \dot{\mathcal{U}}$ . Tomando os postos graduados obtemos

$$\begin{aligned}\langle \omega([F]), \omega([G]) \rangle &= \langle [F], [G] \rangle \\ \langle \sigma([F]), \sigma([G]) \rangle &= \langle [F], [G] \rangle\end{aligned}$$

para quaisquer  $[F], [G] \in \dot{\mathcal{U}}$ . Desse modo, obtemos também categorificações para as propriedades adicionais da forma semilinear dadas na Proposição 1.5.

# Referências Bibliográficas

- [1] D. BAR-NATAN, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, Algebraic and Geometric Topology, vol. 2, (2002) 337-370. ISSN 1472-2747.
- [2] A. A. BEĬLINSON, G. LUSZTIG e R. MACPHERSON, *A geometric setting for the quantum deformation of  $GL_n$* , Duke Mathematical Journal, **61**, No. 2 (1990) 655-677.
- [3] A. BELIAKOVA, K. HABIRO, A. D. LAUDA e M. ŽIVKOVIĆ, *Trace decategorification of categorified quantum  $\mathfrak{sl}_2$* , Mathematische Annalen, **367**(1), 397-440 (2017).
- [4] D. J. BENSON, *Representations and cohomology I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, volume 30 de Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, Segunda edição, 1998. ISBN 0 521 63653 1.
- [5] F. BORCEUX, *Handbook of categorical algebra. 1 - Basic category theory*, volume 50 de Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. ISBN 0 521 44178 1.
- [6] F. BORCEUX, *Handbook of categorical algebra. 2 - Categories and structures*, volume 51 de Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. ISBN 0 521 44179 X.
- [7] J. CHUANG e R. ROUQUIER, *Derived equivalences for symmetric groups and  $sl_2$  categorification*, Ann. of Math. **167** (2008) 245-298.
- [8] L. CRANE, *Clock and category: is quantum gravity algebraic?*, J. Math. Phys. **36** (1994), No. 11, 6180-6193.
- [9] L. CRANE e I. FRENKEL, *Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases*. Topology and physics. J. Math. Phys. **35** (1994), No. 10, 5136-5154.
- [10] Z. FAN e Y. LI, *An identification of Lusztig's modified forms of quantum algebras and their analogues*. <https://arxiv.org/pdf/1312.0838v1.pdf>
- [11] R. GORDON, A. G. POWER e R. STREET, *Coherence for tricategories*, volume 117 de Memoirs of the American Mathematical Society, AMS, Providence, No. 558 (1995). ISBN 0 8218 0344 1.

- [12] G. M. KELLY, *Basic concepts of enriched category theory*, volume 64 de London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. ISBN 0 521 28702 2.
- [13] G. M. KELLY e R. STREET, *Review of the elements of 2-categories*, Category Seminar (Proc. Sem., Sydney, 1972/1973), Springer, Berlin, 1974, pp. 75-103. Lecture Notes in Mathematics, vol. 420.
- [14] M. KHOVANOV, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Mathematical Journal, vol. 101, No. 3, 2000, 359-426.
- [15] H. KRAUSE, *Krull-Schmidt categories and projective covers*.  
<https://arxiv.org/abs/1410.2822>
- [16] M. KHOVANOV, A. D. LAUDA, M. MACKAAY e M. STOŠIĆ, *Extended graphical calculus for categorified quantum  $sl(2)$* , Memoirs of the American Mathematical Society, 2012, vol. 219, No. 1029. ISBN: 978-0-8218-8977-0.
- [17] M. KHOVANOV e A. D. LAUDA, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I*, Representation Theory **13**, (2009) 309-347.
- [18] M. KHOVANOV e A. D. LAUDA, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II*, Transactions of the American Mathematical Society **363**, (2011) 2685-2700.
- [19] M. KHOVANOV e A. D. LAUDA, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups III*, Quantum Topology, Vol 1, Issue 1, 2010, 1-92.
- [20] A. D. LAUDA, *An introduction to diagrammatic algebra and categorified quantum  $\mathfrak{sl}_2$* , Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica (New Series), **7**, No. 2 (2012) 165-270.
- [21] A. D. LAUDA, *A categorification of quantum  $sl(2)$* , Advances in Mathematics, No. 252 (2010) 3327-3424.
- [22] W. LU e A. K. MCBRIDE, *Algebraic structures on Grothendieck groups*.  
<http://alistairsavage.ca/pubs/Lu-McBride-Alg-Str-on-Groth-Grps.pdf>
- [23] G. LUSZTIG, *Introduction to quantum groups*, volume 110 de Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993. ISBN 0 8176 3712 5.
- [24] L. MANIVEL, *Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci*, volume 6 de SMF/AMS Texts and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR 1852463.
- [25] K. MCGERTHY, *Generalized  $q$ -Schur algebras and quantum Frobenius*.  
<https://arxiv.org/abs/math/0511697>
- [26] J. RASSMUSSEN, *Khovanov homology and the slice genus*, Invent. Math., 182(2):419-447,2010.
- [27] N. RESHETIKHIN e V. TURAEV, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys., 127(1), (1990) 1-26.

- [28] A. SAVAGE, *Introduction to categorification*.  
<https://arxiv.org/abs/math/1401.6037>
- [29] B. WEBSTER, *An introduction to categorifying quantum knot invariants*, *Geometry and Topology Monographs*, 18 (2012), 253-289.