UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Luis Gustavo Longen

BOA-COLOCAÇÃO E SOLUÇÕES ASSINTOTICAMENTE AUTOSSIMILARES PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM ESPAÇOS DE HERZ FRACOS

CAMPINAS
2016

Luis Gustavo Longen

BOA-COLOCAÇÃO E SOLUÇÕES ASSINTOTICAMENTE AUTOSSIMILARES PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM ESPAÇOS DE HERZ FRACOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Luis Gustavo Longen, e orientada pelo Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira.

Assinatura do Orientador

Campinas

2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 160180/2014-7

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

L857b

Longen, Luis Gustavo, 1994-
Boa-colocação e soluções assintoticamente autossimilares para as equações de Navier-Stokes em espaços de Herz fracos / Luis Gustavo Longen. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Navier-Stokes, Equações de. 2. Boa-colocação global. 3. Soluções brandas (Equações diferenciais parciais). 4. Autossimilaridade. I. Ferreira, Lucas Catão de Freitas,1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Well-posedness and asymptotically self-similar solutions for the Navier-Stokes equations in weak Herz spaces
Palavras-chave em inglês:
Navier-Stokes equations
Global well-posedness
Mild solutions (Partial differential equations)
Self-similarity
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Lucas Catão de Freitas Ferreira [Orientador]
Wanderley Nunes do Nascimento
Lidiane dos Santos Monteiro Lima
Data de defesa: 28-07-2016
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de julho de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

Prof.(a). Dr(a). WANDERLEY NUNES DO NASCIMENTO

Prof.(a). Dr(a). LIDIANE DOS SANTOS MONTEIRO LIMA

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Vanderlei e Rita, ao meu irmão, André e à minha namorada, Francielle, pelo apoio e suporte que me dão, por sempre estarem ao meu lado nos momentos bons e ruins, e pelo amor incondicional que me deram sempre e sem o qual nada disso teria sido possível. Amo vocês.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas que fizeram parte dessa jornada e me ajudaram a seguir em frente, tornando a caminhada mais agradável, através de conversas, desabafos, conselhos ou auxílios nos mais diversos aspectos. Espero corresponder às suas amizades à altura e que eu signifique para vocês tanto quanto vocês significam para mim.

Agradeço a todos os professores que tive na vida por tudo o que me ensinaram e pelo exemplo e inspiração que são para mim. Minha escolha pela carreira acadêmica se deve ao seu exemplo.

Agradeço ao meu orientador, professor Lucas C.F. Ferreira, pelo trabalho conjunto, pelas sugestões, correções e pela confiança depositada em mim.

Agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro que permitiu concluir esse trabalho, bem como o mestrado como um todo.

Resumo

Neste trabalho, estuda-se a boa-colocação local e global das equações de Navier-Stokes com dados iniciais em espaços de Herz fracos. Na abordagem, consideramos soluções do tipo brandas e usamos um argumento de ponto fixo. O resultado local é provado dependendo de uma condição de pequenez no tempo de existência T, a partir do qual pode acontecer um fenômeno de *blow-up*. Além disso, apresenta-se um critério de extensão global dessas soluções locais. Por outro lado, o resultado global é provado com uma condição de pequenez no dado inicial.

Esses resultados estendem os obtidos por Giga e Miyakawa [11] em espaços de Morrey. Além disso, prova-se a inclusão e não-inclusão de alguns espaços de Herz fracos em certos espaços de Besov $\dot{B}^{-\alpha}_{p,\infty}$ e a inclusão dos espaços de Herz fracos em BMO^{-1}, identificando a posição destes espaços em uma família de espaços onde tem-se resultados de boa-colocação global. Estuda-se ainda a estabilidade assintótica das soluções e a existência de soluções autossimilares. Como uma consequência, obtém-se uma classe de soluções assintoticamente autossimilares.

Este trabalho é baseado no artigo de Yohei Tsutsui [30] publicado na revista *Advances in Differential Equations* em 2011.

Palavras-Chave: Equações de Navier-Stokes, Boa-colocação local e global, Espaços de Herz fracos, Soluções brandas, Soluções autossimilares.

Abstract

In this work, we study local and global well-posedness for the Navier-Stokes equations with initial data in weak Herz spaces. In the approach, we consider mild solutions and use a fixed point argument. The local result is proven depending on a smallness condition for the existence time T, from which a blow-up phenomena could occur. Inspired by that, a global extension criterion for these local solutions is showed. On the other hand, the global result is proven with a smallness condition on the initial data.

This result extends the ones obtained by Giga and Miyakawa [11] in Morrey spaces. Besides that, we prove inclusion and non-inclusion of some weak Herz spaces in certain Besov spaces $\dot{B}^{-\alpha}_{p,\infty}$ and the inclusion of weak Herz spaces in BMO^{-1}, identifying the position of these spaces in a family of spaces in which global well-posedness results are known. Also, we study asymptotic stability of the solutions and existence of self-similar solutions. As a consequence, we obtain a class of asymptotically self-similar solutions.

This work is based on Yohei Tsutsui's paper [30] that was published in *Advances in Differential Equations*, 2011.

Keywords: Navier-Stokes equations, Global and local well-posedness, Weak Herz spaces, Mild solutions, Self-similar solutions.

Sumário

Introdução

As equações de Navier-Stokes descrevem o movimento de um fluido, líquido ou gás em uma certa região. Estas equações têm inúmeras aplicações na física e engenharia, e são centrais no campo de pesquisa conhecido como mecânica de fluidos.

Considere um fluido viscoso incompressível e de densidade constante, movendo-se dentro de uma região Ω de dimensão n. O movimento desse fluido com respeito a um referencial inerte dado é descrito pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{gathered} \rho\left(u_t + u \cdot \nabla u\right) = \mu \Delta u - \nabla p - \rho f \\ \nabla \cdot u = 0, \end{gathered} \tag{0.1}$$

onde t é o tempo, $x = (x_i)_{i=1}^n$ é um ponto de Ω, ρ é a densidade constante do fluido, $u = u(x,t) = (u_i(x,t))_{i=1}^n$ e $p = p(x,t)$ são o campo velocidade e a pressão (um campo escalar), ambos desconhecidos e a constante positiva μ é o coeficiente de viscosidade de cisalhamento. Finalmente, $-f = -f(x,t)$ é a força externa agindo sobre o fluido. Como será justificado no capítulo 1, podemos considerar $\rho = \mu = 1$ sem perda de generalidade.

O sistema (0.1) foi proposto pela primeira vez pelo engenheiro francês Claude Louis Marie Henri Navier em 1822. Conforme o comentário feito por Truesdell em seu livro *The Non-Linear Field Theories of Mechanics* (1953, p.455),

> "Tais modelos não eram novos, tendo ocorrido em especulações filosóficas ou qualitativas por milênios anteriormente. O grande feito de Navier foi colocar essas noções em uma forma suficientemente concreta para que pudesse derivar equações de movimento para elas."

Entretanto, apenas com os trabalhos de Poisson (1831), de Saint Venant (1843) e principalmente pelo trabalho de George Gabriel Stokes (1845), conseguiu-se uma justificativa completamente satisfatória para as equações propostas. A teoria desenvolvida por esses cientistas é hoje conhecida como mecânica dos meios contínuos. Veja [9] para mais informações sobre as considerações feitas acima.

Neste trabalho, consideraremos a situação em que a somatória das forças externas agindo sobre o fluido é nula, ou seja, $f \equiv 0$. Além disso, o domínio Ω que trabalharemos será todo o espaço $\mathbb{R}^n$. O problema que estamos interessados em solucionar é o seguinte: dado um campo velocidade inicial $u(0) = u_0$, queremos encontrar o campo velocidade $u = u(x,t)$ e a pressão $p = p(x,t)$ que satisfazem as equações (0.1).

Diversos resultados de existência já foram obtidos sobre as equações de Navier-Stokes. Dentre os trabalhos publicados sobre o assunto, destacam-se os seguintes: Entre 1933 e 1934, Leray publicou trabalhos que introduziram muitas ideias fundamentais e ferramentas ainda hoje usadas na abordagem do problema e provou a existência de uma solução fraca global para o problema de valor inicial quando $\Omega = \mathbb{R}^3$, como por exemplo [21]. Usando algumas dessas ferramentas, Hopf provou a existência de uma solução fraca global para o problema em um domínio aberto qualquer Ω, [13]. Essas soluções passaram a ser chamadas soluções de Leray-Hopf, veja [10]. Desde então, muitos matemáticos se dedicaram a estudar a unicidade e regularidade dessas soluções. Nos anos 60, resultados devidos a Lions, Ladyzhenskaya e Serrin foram mostraram que, para o caso em que a dimensão do espaço é $n = 2$, a solução fraca obtida por Leray e Hopf é única e regular (veja [9] para mais detalhes). Desta maneira, o caso $n = 2$ está resolvido. Para $n \geq 3$, entretanto, o problema ainda está em aberto e corresponde ao sexto problema do milênio proposto pelo *Clay Mathematics Institute* (veja [6]).

No estudo do problema de Cauchy para as equações de Navier-Stokes, o interesse é encontrar soluções globais que sejam contínuas no intervalo $(0, \infty)$ e tomem valores em algum espaço de Banach, cuja norma seja invariante sob a transformação $f(\cdot) \mapsto \lambda f(\lambda \cdot)$, para todo $\lambda > 0$. Tais espaços são comumente chamados de *Espaços Limites* para o estudo das equações de Navier-Stokes, veja [20]. O motivo por que esses espaços aparecem naturalmente nos estudos das equações de Navier-Stokes é simples. Se $u(x,t)$ e $p(x,t)$ resolvem (0.1), então as funções $u_\lambda = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ e $p_\lambda = \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$ também resolvem o mesmo sistema, para todo $\lambda > 0$. Em outras palavras, esses espaços têm a mesma invariância por *scaling* que as equações de Navier-Stokes, no que diz respeito à variável espacial x. Essa compatibilidade entre equações e espaços tem se mostrado frutífera em obter estimativas onde constantes não dependem do intervalo de tempo, assim gerando resultados de boa-colocação global, ainda que seja com condições de pequenez no dado inicial.

Na teoria de espaços limites, também conhecidos como críticos, Kato provou em [15] a boa-colocação local do problema para dados pequenos e a boa-colocação global para dados iniciais u_0 em $L^n(\mathbb{R}^n)$. Desde então, muitos matemáticos se dedicaram a provar o mesmo para espaços maiores e que requerem cada vez menos regularidade do dado inicial u_0. Nesse sentido, pode-se citar o espaço L^p-fraco como uma extensão natural de L^p e que contém funções homogêneas, veja [1] e [31]. Giga e Miyakawa provaram em [11] resultados de boa-colocação para espaços de Morrey, permitindo medidas como vorticidade para os dados iniciais. Ainda no *framework* de espaços de Morrey, temos os trabalhos de Kato [16] e Taylor [29]. Uma outra classe de espaços que combina Morrey e L^p-fraco foi considerada em [23] e [7]. Cannone em [3] e [4] abordou a boa-colocação global para dados iniciais pequenos em espaços de Besov, um espaço que permite dados iniciais oscilando rapidamente, e Kozono e Yamazaki em [19], consideraram (0.1) em espaços de Besov-Morrey que contêm os espaços de Besov considerados por Cannone. Um exemplo emblemático é o espaço BMO^{-1} que foi estudado por Koch e Tataru em [17]. Esse espaço é maximal no sentido que não se conhece outro onde o problema (0.1) seja bem-colocado e que contenha BMO^{-1}. Os espaços estudados em [19] também parecem ser maximais. Outro tipo de espaços são aqueles cujas normas são definidas via transformada de Fourier. Exemplos deles são os espaços de pseudo-medidas $\mathcal{PM}^a$, considerados em [4] e o de Fourier-Besov, [18] e [14]. Para um bom resumo deste campo de pesquisa, sugerimos o livro [20], onde o leitor poderá encontrar exemplos de outros espaços.

A presente dissertação de mestrado é baseada no artigo de Yohei Tsutsui [30] intitulado *The Navier-Stokes Equations and Weak Herz Spaces.* No artigo, o autor mostra existência de soluções locais no tempo quando o dado inicial u_0 está em $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$, além de existência global e unicidade quando u_0 está em $W\dot{K}^{0}_{p,\infty}$ com uma condição de pequenez. Ainda, o autor mostra estabilidade assintótica das soluções globais obtidas e as imersões em espaços de Besov $\dot{B}^{-\alpha}_{p,\infty}$, além da inclusão dos espaços de Herz fracos em BMO^{-1}. Essas imersões são úteis para localizar a posição dos espaços em uma família de espaços onde se conhece resultados de boa-colocação. Nosso objetivo é estudar os resultados obtidos em [30], abordando os cálculos em maiores detalhes e utilizando o maior espaço disponível em uma dissertação, em comparação com um artigo científico, para trazer os resultados de maneira mais clara, tornando este trabalho uma fonte bibliográfica de utilidade para futuras pesquisas neste ramo de pesquisa. Além disso, estudamos a existência de soluções autossimilares para as equações de Navier-Stokes e consideramos o fenômeno da bacia atratora autossimilar, isto é, encontramos condições para as quais as soluções encontradas se estabilizam próximas a soluções autossimilares após pequenas perturbações, conforme o tempo t se torna suficientemente grande. A técnica para a estabilidade assintótica utilizada por [30] é inspirada em alguns trabalhos prévios, tais como [4] e [5].

No que segue, damos uma descrição da organização desta dissertação. No Capítulo 1 são estudadas algumas ferramentas básicas que ajudarão na abordagem do problema. Primeiramente, utilizamos a Transformada de Fourier e o Projetor de Leray-Hopf, bem como alguns conhecimentos básicos de resolução de EDPs para transformar as equações de Navier-Stokes em equações integrais, nas quais se pode aplicar um argumento de ponto fixo (Princípio de Contração de Picard). Também, apresentamos e provamos alguns resultados sobre interpolação e espaços de Lorentz, necessários para vários argumentos utilizados no decorrer do trabalho. Finalizamos o capítulo lembrando a definição da função Beta, também utilizada em estimativas, e a decomposição de Paley-Littlewood, clássica em Análise Harmônica e necessária para a caracterização de vários espaços funcionais.

No Capítulo 2, apresentamos os espaços de Herz e de Herz fracos, trazendo suas definições, propriedades básicas e imersões envolvendo outros espaços relevantes no estudo das equações de Navier-Stokes. Provamos também estimativas para o operador convolução nesses espaços, necessárias para as demonstrações dos teoremas de boa-colocação.

No Capítulo 3, trazemos os teoremas de boa-colocação local e global. Mais precisamente, mostramos a existência local de soluções brandas quando o dado inicial está no espaço de Herz fraco, bem como um critério de extensão, que ao ser obedecido garante que a solução é global. Mostramos ainda a boa-colocação global para o espaço $W\dot{K}^{0}_{n,\infty}$, bem como a unicidade da solução com certas condições de pequenez e suavidade do semigrupo do calor $e^{t\Delta}u$.

No Capítulo 4, estudamos a estabilidade assintótica das soluções globais obtidas no Capítulo

3 e a existência de soluções autossimilares quando o dado inicial u_0 é um vetor homogêneo de grau -1. Por fim, mostramos a existência de uma bacia atratora em torno de cada solução autossimilar, obtendo uma classe de soluções assintoticamente autossimilares.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Equações Integrais e Soluções Brandas

Vamos considerar neste capítulo o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \rho\left(u_t + u\cdot\nabla u\right) &= \mu\Delta u - \nabla p \\ \nabla\cdot u &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

ou seja, o sistema de equações de Navier-Stokes com somatória de forças externas $f \equiv 0$ e com dado inicial conhecido igual a $u_0(x)$, em todo o espaço $\mathbb{R}^n$.

Nesta seção apresentaremos a formulação e o sentido de solução que usaremos para estudar o problema (1.1). A ideia é trabalhar formalmente para transformar as equações dadas em equações integrais. Em seguida, desejamos encontrar soluções para a formulação integral (o que mais adiante chamaremos de soluções brandas) e provar que esses candidatos são, de fato, soluções para o problema.

Uma simples mudança de variável nos campos $u(x,t)$ e $p(x,t)$ nos permite assumir sem perda de generalidade que $\rho = \mu = 1$. De fato, se encontrarmos um par $(\tilde{u},\tilde{p})$ que satisfaz as equações de Navier-Stokes para $\rho = \mu = 1$, então definindo u e p através das igualdades

$$\tilde{u}(x,t) = u\left(\frac{\mu x}{\rho},\frac{\mu t}{\rho}\right) \text{ e } \tilde{p}(x,t) = \frac{1}{\rho}p\left(\frac{\mu x}{\rho},\frac{\mu t}{\rho}\right)$$

temos claramente as seguintes relações:

$$\tilde{u}_t = \frac{\mu}{\rho}u_t,\ \ \tilde{u}\cdot\nabla\tilde{u} = \frac{\mu}{\rho}(u\cdot\nabla u),\ \ \Delta\tilde{u} = \frac{\mu^2}{\rho^2}\Delta u,\ \ \nabla\tilde{p} = \frac{\mu}{\rho^2}\nabla p.$$

Portanto, de $\tilde{u}_t + \tilde{u}\cdot\nabla\tilde{u} = \Delta\tilde{u} - \nabla\tilde{p}$, e das relações acima, obtemos

$$\frac{\mu}{\rho}u_t + \frac{\mu}{\rho}(u\cdot\nabla u) = \frac{\mu^2}{\rho^2}\Delta u - \frac{\mu}{\rho^2}\nabla p,$$

e multiplicando por $\dfrac{\rho}{\mu}$, chegamos em

$$u_t + u \cdot \nabla u = \frac{\mu}{\rho}\Delta u - \frac{1}{\rho}\nabla p \Rightarrow \rho(u_t + u \cdot \nabla u) = \mu \Delta u - \nabla p.$$

Como $\nabla \cdot u = \frac{\mu}{\rho}(\nabla \cdot \tilde{u}) = 0$, temos portanto um par (u, p) que satisfaz as equações para μ, ρ quaisquer. Assim, sem perda de generalidade, o problema de valor inicial para as equações de Navier-Stokes pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u - (u \cdot \nabla)u - \nabla p \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ u(x,0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

O termo $u \cdot \nabla u$ da equação (0.1) foi reescrito na equação (1.2) como $(u \cdot \nabla)u$. A diferença entre ambos é apenas de notação, visto que ambos representam o termo convectivo, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Agora, note que o termo acima ainda pode ser escrito de outra maneira, mais adequada para o que vamos utilizar adiante. Considere o tensor $u \otimes u = (u_i u_j)_{1 \leq i,j \leq n}$, e tome o seu “divergente” em cada coordenada, isto é,

$$\nabla(u \otimes u) = \left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i(u_i u_1), ..., \sum_{i=1}^{n} \partial_i(u_i u_n) \right).$$

Como, segundo (1.2), temos que $\nabla \cdot u = 0$, segue que o termo acima terá, na sua $j-$ésima coordenada,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \partial_i(u_i u_j) &= \sum_{i=1}^{n}(u_j \partial_i u_i + u_i \partial_i u_j) = u_j \sum_{i=1}^{n} \partial_i u_i + \sum_{i=1}^{n} u_i \partial_i u_j \\ &= u_j \nabla \cdot u + \sum_{i=1}^{n} u_i \partial_i u_j = \sum_{i=1}^{n} u_i \partial_i u_j, \end{aligned}$$

a qual é exatamente a $j-$ésima coordenada de $(u \cdot \nabla)u$. Logo, temos que

$$\nabla(u \otimes u) = (u \cdot \nabla)u.$$

Assim, podemos reescrever as equações como

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u - \nabla(u \otimes u) - \nabla p \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ u(x,0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Note agora que

$$\nabla \cdot u_t = \partial_t(\nabla \cdot u) = 0$$

e que

$$\nabla \cdot (\Delta u) = \Delta(\nabla \cdot u) = 0.$$

Logo, tomando o divergente na primeira equação de (1.3), obtemos

$$\Delta p = -(\nabla \otimes \nabla)(u \otimes u) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_i \partial_j (u_i u_j). \tag{1.4}$$

Vamos definir aqui o projetor $\mathbb{P}$ que será abordado de modo mais detalhado no fim desse capítulo. O projetor $\mathbb{P}$ é definido explicitamente por

$$\mathbb{P}f = f - \nabla \frac{1}{\Delta}(\nabla \cdot f)$$

e portanto temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\nabla(u \otimes u) &= \nabla(u \otimes u) - \nabla \frac{1}{\Delta}(\nabla \cdot (\nabla(u \otimes u)) = \\ &= \nabla(u \otimes u) - \nabla \frac{1}{\Delta}(\nabla \otimes \nabla)(u \otimes u)). \end{aligned}$$

Pela equação (1.4), obtemos que

$$\mathbb{P}\nabla(u \otimes u) = \nabla(u \otimes u) + \nabla \frac{1}{\Delta}\Delta p = \nabla(u \otimes u) + \nabla p.$$

Finalmente, substituindo a igualdade acima em (1.3), segue que

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u - \mathbb{P}\nabla(u \otimes u) \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ u(x,0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Vamos resolver o problema de Cauchy acima considerando $-\mathbb{P}\nabla(u \otimes u)$ como um termo forçante no lado direito de (1.5). Para resolver a equação do calor não-homogênea acima, basta encontrar uma solução para o problema linear homogêneo associado e aplicar o Princípio de Duhamel para obter a solução da equação não-homogênea. Desta forma, primeiramente resolvamos o problema linear associado, isto é, o problema de valor inicial para a equação do calor. Para tal, basta aplicar a Transformada de Fourier em ambos os lados da equação para obter

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= (\Delta u)^\wedge. \\ \hat{u}(\xi,0) &= \hat{u}_0. \end{aligned}$$

A equação diferencial vetorial acima indica que na $j-$ésima coordenada temos

$$\partial_t \hat{u}_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \partial_{(k,k)} u_j\right)^\wedge.$$

Assim, como para quaisquer multi-índice α e função f temos que $(\partial_\alpha f)^\wedge = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$, segue que

$$\partial_t \hat{u}_j = -4\pi^2 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \hat{u}_j = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}_j.$$

Desta forma, obtemos

$$\partial_t \hat{u} = -4\pi^2|\xi|^2\hat{u}.$$

Usando variáveis separáveis na EDO linear de primeira ordem acima e o fato de que $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0$ chegamos a

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0 e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

Agora, usando o fato de que, se $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$, então $\hat{f}(\xi) = a^{n/2}e^{-\pi|\xi|^2/a}$, tomando $a = \frac{1}{4\pi t}$, segue que

$$(e^{-4\pi^2|\xi|^2 t})^{\vee} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Substituindo essa identidade na anterior, obtemos

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0 \left(\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right)^{\wedge} = \left(u_0 * \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right)^{\wedge}.$$

Por fim, aplicando a transformada inversa em ambos os lados, encontramos a solução do problema linear associado,

$$u(x, t) = u_0 * \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Esta solução pode ser escrita de maneira condensada como $u = e^{t\Delta}u_0$, onde o operador $e^{t\Delta}$ é o semigrupo do calor, dado por

$$e^{t\Delta}f(x) := f * G_{\sqrt{t}}(x), \tag{1.6}$$

sendo G a Gaussiana,

$$G(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/4},$$

e $G_t(x) = t^{-n}G(\frac{x}{t})$.

Agora, via variação de parâmetros com a solução do problema homogêneo, obtemos a seguinte formulação integral para a solução de (1.2):

$$u = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(u \otimes u)(s)ds = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u \otimes u)(s)ds.$$

Note que, da bilinearidade de $u \otimes u$ e das linearidades dos operadores $e^{t\Delta}$, ∇ e da integral, segue que o segundo termo do lado direito da equação acima é bilinear. Em outras palavras, podemos definir a forma bilinear

$$B(u, v) = \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u \otimes v)(s)ds$$

e escrever

$$\begin{aligned} u &= e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u \otimes u)(s)ds \\ u &= e^{t\Delta}u_0 - B(u, u). \end{aligned} \tag{E.I.}$$

As soluções para (E.I.) serão chamadas de soluções brandas do problema (1.2). Para poder ser considerada uma solução de fato, a solução branda u deve ter alguma regularidade, para que as derivadas das equações originais façam sentido. Mais que isso, o ideal seria que a regularidade da solução fosse $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. Caso a solução encontrada não possua tal regularidade, desejamos encontrar um tempo maximal T de existência onde a solução seja suave em $(0,T)$.

As equações (E.I.) estão em maneira apropriada para nossa abordagem. Para resolvê-las, nos utilizaremos do Princípio da Contração de Picard que garante solução para equações da forma

$$e = e_0 - B(e,e),$$

contanto que tenhamos algumas condições; primeiramente, devemos provar que a forma bilinear B é limitada em algum espaço X_T relacionado ao espaço a que pertence o dado inicial u_0. Além disso, devemos provar algumas estimativas que garantirão que a iteração do operador $v \mapsto e^{t\Delta}u_0 - B(v,v)$ encontrará um ponto fixo, que será a solução branda procurada. Acreditamos que o resultado, apesar de ser clássico e poder ser encontrado facilmente em muitas bibliografias, merece demonstração por ser uma das ferramentas centrais na demonstração da existência de soluções.

Proposição 1.1.1 (Princípio da Contração de Picard)**.** *Seja E um espaço de Banach e seja B uma forma bilinear limitada de $E \times E$ em E satisfazendo*

$$||B(e,f)||_E \leq C_B||e||_E\,||f||_E.$$

Então, se $0 < \delta < \frac{1}{4C_B}$ e $e_0 \in E$ é tal que $||e_0||_E \leq \delta$, a equação $e = e_0 - B(e,e)$ tem uma solução com $||e||_E \leq 2\delta$. Essa solução é única na bola fechada $\overline{\mathcal{B}}(0,2\delta)$. Ainda, a solução depende continuamente de e_0; se $||f_0||_E \leq \delta$, $f = f_0 - B(f,f)$ e $||f||_E \leq 2\delta$, então $||e-f||_E \leq \frac{1}{1-4C_B\delta}||e_0 - f_0||_E$.

Demonstração: Vamos construir e por iteração. Começamos com e_0 e definimos indutivamente uma sequência e_n como $e_{n+1} = e_0 - B(e_n,e_n)$.

Por indução, podemos mostrar que $||e_n||_E \leq 2\delta$. De fato, já temos por hipótese que $||e_0||_E \leq \delta \leq 2\delta$, e supondo $||e_n||_E \leq 2\delta$, temos que

$$||e_{n+1}||_E \leq ||e_0||_E + C_B||e_n||_E^2 \leq \delta + 4C_B\delta^2 \leq 2\delta.$$

Ainda, temos que

$$\begin{aligned}
||e_{n+1} - e_n||_E &= ||-B(e_n,e_n) + B(e_{n-1},e_{n-1})||_E = \\
&= ||-B(e_n,e_n) + B(e_{n-1},e_n) - B(e_{n-1},e_n) + B(e_{n-1},e_{n-1})||_E = \\
&= ||B(e_n - e_{n-1},e_n) + B(e_{n-1},e_n - e_{n-1})||_E \leq \\
&\leq C_B||e_n - e_{n-1}||_E\,||e_n||_E + C_B||e_{n-1}||_E\,||e_n - e_{n-1}||_E \leq 4C_B\delta||e_n - e_{n-1}||_E;
\end{aligned}$$

Logo, $||e_{n+1} - e_n||_E \leq (4C_B)^n||e_1 - e_0||_E$. Como $4C_B < 1$, temos que (e_n) é sequência de Cauchy que converge a um limite e que é a solução procurada, já que E é um espaço de Banach. Ainda, como o espaço E é Banach, a unicidade de e em $\overline{B}(0,2\delta)$ é imediata. Falta apenas mostrar a dependência contínua de e_0. Basta escrever

$$\begin{aligned} e-f &= e_0 - f_0 - B(e,e) + B(f,f) = \\ &= e_0 - f_0 - B(e,e) + B(f,e) - B(f,e) + B(f,f) = e_0 - f_0 - B(e-f,e) - B(f,e-f), \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} ||e-f||_E &\leq ||e_0 - f_0||_E + C_B||e||_E\,||e-f||_E + C_B||f||_E\,||e-f||_E \\ &\leq ||e_0 - f_0||_E + 4C_B\delta||e-f||_E. \end{aligned}$$

■

1.1.1 A Decomposição de Weyl-Helmholtz

Na seção anterior, deduzimos as equações integrais (E.I.) que nos permitirão abordar o problema em espaços de Herz fracos, objeto de estudo deste trabalho. Para chegar a essas equações, nas seções anteriores introduzimos diretamente o operador de Leray-Hopf $\mathbb{P}$ de maneira formal. Discorreremos agora sobre esse projetor, apresentando primeiramente sua definição em L^p e depois comentando como sua definição pode ser estendida para outros espaços.

Seja D um domínio em $\mathbb{R}^n$. Para $p \geq 1$, seja $L^p(D)$ o espaço das funções em D integráveis à $p-$ésima potência. Esse espaço é Banach equipado com a norma usual

$$||u||_p = \left(\int_D |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Denotamos por $H_p^m(D)$ o espaço de Sobolev sobre D que contém as funções que estão em $L^p(D)$ juntamente com todas as suas derivadas de ordem menor ou igual a m. Para $1 < p < \infty$, sendo D um domínio limitado com bordo suave S, definimos os espaços

$$X_p = \overline{\{u \in C_c^\infty(D); \nabla \cdot u = 0\}}^{L^p(D)}$$

e

$$G_p = \{\nabla q; q \in H_p^1(D)\},$$

onde C_c^∞ denota o espaço das funções suaves com suporte compacto em D.

Temos a decomposição de Weyl-Helmholtz (veja [25])

$$L^p(D) = X_p \oplus G_p.$$

Essa decomposição, explicitamente falando, descreve qualquer função em L^p como soma direta de duas funções, a primeira sendo limite de funções suaves, de suporte compacto e com divergente nulo, e a segunda sendo o gradiente de uma função em $H_p^1(D)$.

Podemos descrever X_p explicitamente. Considere o problema de Neumann

$$\Delta q = \nabla \cdot f \text{ em } D, \frac{\partial q}{\partial v} = f \cdot v \text{ em } S,$$

onde v denota o vetor unitário interior normal a S. Dada a função f, resolve-se o problema acima para encontrar q. Então, $\mathbb{P}$ pode ser definido como

$$\mathbb{P}f = f - \nabla q.$$

Isso nos dá a caracterização explícita de X_p como

$$X_p = \{u \in L^p(D);\ \nabla \cdot u = 0 \text{ em } D,\ u \cdot v = 0 \text{ em } S\}.$$

Note que a definição acima nos diz que $f = \mathbb{P}f + \nabla q$, que condiz com a soma direta apresentada, e também condiz com a definição de $\mathbb{P}$ introduzida na dedução de (E.I.). É interessante observar que se uma função u dada tem divergente nulo, sua projeção $\mathbb{P}u$ será ela própria. Esse fato será usado diversas vezes ao longo deste trabalho. Ainda, pode-se notar que a projeção $\mathbb{P}$ do gradiente de uma função qualquer é a função nula. Desta forma, podemos aplicar o projetor $\mathbb{P}$ na equação (1.3) e obter (1.5) diretamente.

Por fim, note que ao modificar as equações de Navier-Stokes para trabalhar com (E.I.), perdemos o campo pressão p e passamos a procurar apenas o campo u. Para recuperar a pressão, basta usarmos a equação (1.4) que nos dá

$$p = (-\Delta)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_i \partial_j (u_i u_j).$$

Desta forma, podemos nos preocupar apenas em encontrar a solução branda u de (E.I.) e provar existência e regularidade de soluções, já que o campo pressão p pode ser recuperado a partir de u.

Considerando-se o caso $D = \mathbb{R}^n$ e $p = 2$, obtém-se o projetor como $\mathbb{P} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); \nabla \cdot u = 0 \text{ em } S'(\mathbb{R}^n)\}$. Além disso, pode-se expressar $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_{k,j})$ como uma matriz de operadores onde $\mathbb{P}_{k,j} = \delta_{k,j} + R_k R_j$ e $R_j = (-\Delta^{-1/2})\partial_j$ são as Transformadas de Riesz (veja [12, p.259],[16]). Desde que as transformadas de Riesz podem ser estendidas para outros espaços, segue que o mesmo pode ser feito com o projetor de Leray-Hopf (veja [20]), [16].

1.2 Interpolação e Espaços de Lorentz

Nesta seção, veremos alguns elementos da teoria de interpolação de espaços e definiremos os espaços de Lorentz que também são amplamente utilizados no estudo das equações de Navier-Stokes.

1.2.1 Interpolação de Espaços

Um funtor de interpolação F associa um par de espaços de Banach $(A_0, A_1) =: \overline{A}$ a um terceiro espaço de Banach $F(\overline{A}) \subset A_0 + A_1 =: \Sigma(\overline{A})$, definido de tal forma que, se T é um operador sublinear limitado de A_0 em B_0 e de A_1 em B_1, então T também é limitado de $F(\overline{A})$ em $F(\overline{B})$. Existem diversos métodos para se obter esse tipo de espaço. Aqui, vamos abordar apenas o $K-$método de interpolação real. O conteúdo desta seção é baseado no livro [2].

Definição 1.2.1. *Sejam A_0, A_1 espaços de Banach. Para $t > 0$, $a \in A_0 + A_1$, definimos o $K-$funcional por*

$$K(t,a) = K(t,a,\overline{A}) = \inf_{a=a_0+a_1}(||a_0||_{A_0} + t||a_1||_{A_1}).$$

Note que $K(t,\cdot,\overline{A})$ é uma norma no espaço de Banach $\sum(\overline{A})$. Além disso, para todo $a \in \Sigma(\overline{A})$ e $t > 0$ fixado, tem-se

$$K(t,a) \leq \max(1,t/s)K(s,a). \tag{1.7}$$

Definição 1.2.2 ($K-$método de Interpolação)**.** *Para $0 < \theta < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$, o espaço de interpolação $A_{\theta,q} := [A_0, A_1]_{\theta,q,K}$ é definido como*

$$A_{\theta,q} = \{a \in \Sigma(\overline{A}) : ||a||_{A_{\theta,q}} < \infty\},$$

onde

$$||a||_{A_{\theta,q}} = \begin{cases} \int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,a,\overline{A}))^q \frac{dt}{t}, & \text{se } 0 < \theta < 1, 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{-\theta}K(t,a,\overline{A}), & \text{se } 0 < \theta < 1, q = \infty. \end{cases}$$

Vamos mostrar a seguir que o espaço $A_{\theta,q}$ é de fato um espaço de interpolação. De fato, vamos mostrar que o funtor $[\cdot,\cdot]_{\theta,q,K}$ é de interpolação exato de expoente θ, isto é,

$$||T||_{A_{\theta,q}} \leq ||T||^{1-\theta}_{A_0,B_0}||T||^{\theta}_{A_1,B_1},$$

sem que se faça necessária a presença de qualquer constante.

Proposição 1.2.3. *O funtor $[\cdot,\cdot]_{\theta,q,K}$ é um funtor de interpolação exato de expoente θ. Além disso, temos que*

$$K(s,a,\overline{A}) \leq \gamma_{\theta,q}s^\theta||a||_{\theta,q,K},$$

onde $\gamma_{\theta,q}$ é uma constante que depende apenas de θ e q. Desta forma, o espaço $A_{\theta,q}$ é um espaço de interpolação exato de expoente θ.

Demonstração: Podemos reescrever a desigualdade (1.7) como

$$\min(1,t/s)K(s,a) \leq K(t,a). \tag{1.8}$$

Defina a quantidade $\phi_{\theta,q}$ da seguinte forma

$$\phi_{\theta,q}(f(t)) = \begin{cases} \int_0^\infty (t^{-\theta}f(t))^q \frac{dt}{t}, & \text{se } 0 < \theta < 1, 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0}(t^{-\theta}f(t)), & \text{se } 0 \leq \theta \leq 1, q = \infty. \end{cases}$$

Observe que $\phi_{\theta,q}$ é tal que se $f(t) \leq g(t)$, então $\phi_{\theta,q}(f(t)) \leq \phi_{\theta,q}(g(t))$. Também, temos que $||a||_{A_{\theta,q}} = \phi_{\theta,q}(K(t,a,\overline{A})$.

Aplicando $\phi_{\theta,q}$ na Equação (1.8), obtemos

$$\phi_{\theta,q}(\min(1,t/s)K(s,a)) \leq \phi_{\theta,q}(K(t,a)) = ||a||_{A_{\theta,q}}. \tag{1.9}$$

Agora, se $s > 0$, para $q < \infty$, segue que

$$\begin{aligned}
\phi_{\theta,q}(f(t/s)) &= \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} f(t/s))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&= s^{-\theta}\left(\int_0^\infty ((t/s)^{-\theta} f(t/s))^q \frac{d(t/s)}{(t/s)}\right)^{1/q} \\
&= s^{-\theta}\phi_{\theta,q}(f(t)).
\end{aligned}$$

Logo, $\phi_{\theta,q}(\min(1,t/s)) = s^{-\theta}\phi_{\theta,q}(\min(1,t))$.

Podemos calcular o lado direito da equação acima explicitamente:

$$\begin{aligned}
\phi_{\theta,q}(\min(1,t))^q &= \int_0^\infty (t^{-\theta}\min(1,t))^q \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^1 t^{(1-\theta)q}\frac{dt}{t} + \int_1^\infty t^{-\theta q}\frac{dt}{t} \\
&= \left.\frac{t^{(1-\theta)q}}{(1-\theta)q}\right|_0^1 + \left.\frac{t^{-\theta q}}{-\theta q}\right|_1^\infty \\
&= \frac{1}{(1-\theta)q} + \frac{1}{\theta q} = \frac{1}{q(1-\theta)\theta}.
\end{aligned}$$

Desta forma, chegamos a

$$\phi_{\theta,q}(\min(1,t)) = \left(\frac{1}{q(1-\theta)\theta}\right)^{1/q},$$

e portanto

$$\phi_{\theta,q}(\min(1,t/s)) = s^{-\theta}\left(\frac{1}{q(1-\theta)\theta}\right)^{1/q} =: s^{-\theta}\gamma_{\theta,q}^{-1}.$$

Logo

$$K(s,a,\overline{A}) \leq \gamma_{\theta,q} s^\theta ||a||_{A_{\theta,q}}.$$

Para $q = \infty$, podemos escrever

$$\phi_{\theta,\infty}(f(t/s)) = \sup_{t>0}(t^{-\theta} f(t/s)) = s^{-\theta}\sup_{t>0}((t/s)^{-\theta} f(t/s)) = s^{-\theta}\phi_{\theta,\infty}(f(t)),$$

o que nos dá $\phi_{\theta,\infty}(\min(1,t/s)) = s^{-\theta}\phi_{\theta,\infty}(\min(1,t))$.

Observe que para $t \leq 1$, temos que $t^{-\theta}(\min(1,t)) = t^{1-\theta}$ é crescente, e para $t > 1$, $t^{-\theta}(\min(1,t)) = t^{-\theta}$ é decrescente, e portanto possui um máximo global em $t = 1$. Assim, $\phi_{\theta,\infty}(\min(1,t)) = 1$, e portanto, podemos tomar a constante $\gamma_{\theta,\infty} = 1$ e obter novamente

$$K(s,a,\overline{A}) \leq \gamma_{\theta,\infty} s^\theta ||a||_{A_{\theta,q}}.$$

Agora, suponha que $T : \overline{A} \to \overline{B}$ seja limitado nesses espaços, com $\overline{A} = (A_0, A_1)$ e $\overline{B} = (B_0, B_1)$. Sejam $M_0 = ||T||_{A_0,B_0}$ e $M_1 = ||T||_{A_1,B_1}$. Então,

$$\begin{aligned}
K(t, Ta, \overline{B}) &\leq \inf_{a=a_0+a_1} (||Ta_0||_{B_0} + t||Ta_1||_{B_1}) \\
&\leq \inf_{a=a_0+a_1} (M_0||a_0||_{A_0} + tM_1||a_1||_{A_1}) \\
&= M_0 \inf_{a=a_0+a_1} \left(||a_0||_{A_0} + t\frac{M_1}{M_0}||a_1||_{A_1} \right) \\
&= M_0 K(tM_1/M_0, a, \overline{A}).
\end{aligned}$$

Basta agora usar $\phi_{\theta,q}(\min(1, t/s)) = s^{-\theta}\phi_{\theta,q}(\min(1, t))$ com $s = \frac{M_0}{M_1}$ e obter

$$\begin{aligned}
||Ta||_{B_{\theta,q}} &= \phi_{\theta,q}(K(t, Ta, \overline{B})) \\
&\leq M_0 K(tM_1/M_0, a, \overline{A}) \\
&= M_0 \left(\frac{M_0}{M_1}\right)^{-\theta} \phi_{\theta,q}(K(t, a, \overline{A})) \\
&= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} ||a||_{A_{\theta,q}}.
\end{aligned}$$

Desta forma, provamos que o $K-$método caracteriza, de fato, um funtor de interpolação entre espaços exato de expoente θ. ■

1.2.2 Espaços de Lorentz

Os espaços de Lorentz $L^{p,q}$ foram introduzidos em 1950 por G. Lorentz em [22] e são generalizações dos espaços L^p. Os espaços de Herz fracos têm sua definição baseada em normas $L^{p,\infty}$, e além disso algumas identidades e estimativas que utilizaremos têm base na teoria dos espaços de Lorentz. Isso motiva a caracterização desses espaços e a apresentação de algumas de suas propriedades. Comecemos relembrando duas funções auxiliares que serão usadas na definição de $L^{p,q}$.

Definição 1.2.4. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mensurável. A função distribuição $d_f : [0, \infty) \to [0, \infty]$ associada a f é definida por*

$$d_f(s) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s\}|,$$

sendo $|\cdot|$ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

A função distribuição d_f nos dá informação sobre o "tamanho" de f, mas não sobre o comportamento de f propriamente dito em um ponto específico. Nesse sentido, pode-se notar pela definição que a distribuição é invariante por translações. Também da definição, pode-se ver que d_f é não-crescente.

Definição 1.2.5. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A função rearranjo $f^* : [0, \infty) \to [0, \infty]$ de f é definida como*

$$f^*(t) = \inf_{s>0}\{s > 0 : d_f(s) \leq t\}.$$

A função rearranjo de f também é não-crescente. Uma propriedade importante envolvendo f e f^* é que ambas possuem a mesma função distribuição. Desta forma, lembrando que a norma L^p de f pode ser caracterizada através da sua distribuição pela identidade

$$||f||_p^p = p\int_0^\infty s^{p-1} d_f(s)ds,$$

temos que f e f^* possuem a mesma norma L^p. Em outras palavras, se $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, então

$$||f||_p = \left(\int_0^\infty [f^*(t)]^p dt\right)^{1/p}.$$

Reescrevendo a identidade acima, podemos obter a seguinte expressão para a norma L^p de f

$$||f||_p = \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^p dt/t\right)^{1/p}.$$

Isso motiva a introdução de uma generalização para L^p, os espaços de Lorentz.

Definição 1.2.6. *O espaço de Lorentz $L^{p,q}$ é definido como o espaço de todas as funções mensuráveis $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $||f||^*_{p,q} < \infty$, onde*

$$||f||^*_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^q dt/t\right)^{1/q}, & \text{se} \quad 0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & \text{se} \quad 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}.$$

Vamos fazer algumas considerações sobre os espaços de Lorentz. Quando $p = q$, temos $L^{p,p} = L^p$, pelo que foi discutido acima. Para $q = \infty$, $L^{p,\infty}$ é chamado espaço L^p-fraco. Assim como em L^p e L^p-fraco, duas funções em $L^{p,q}$ são consideradas iguais se são iguais em quase todo ponto. No que diz respeito a relações de *scaling,* os espaços de Lorentz possuem a mesma relação que L^p, como demonstrado a seguir.

Proposição 1.2.7. *Seja $\varepsilon > 0$. Então,*

$$||f(\varepsilon\cdot)||^*_{p,q} = \varepsilon^{-n/p}||f||^*_{p,q}.$$

Demonstração: Para $\varepsilon > 0$ seja $\delta^\varepsilon(f)(x) = f(\varepsilon x)$ o operador dilatação. Temos que

$$d_{\delta^\varepsilon(f)}(s) = \varepsilon^{-n} d_f(s)$$

e que

$$(\delta^\varepsilon(f))^*(t) = f^*(\varepsilon^n t).$$

Então, para $0 < q < \infty$, segue que

$$\begin{aligned} ||\delta^\varepsilon(f)||^*_{p,q} &= \left(\int_0^\infty [t^{1/p}(\delta\varepsilon(f))^*(t)]^q dt/t\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(\varepsilon^n t)]^q dt/t\right)^{1/q} \\ &= \varepsilon^{-n/p}\left(\int_0^\infty [(\varepsilon^n t)^{1/p} f^*(\varepsilon^n t)]^q dt/t\right)^{1/q} = \varepsilon^{-n/p}||f||^*_{p,q}. \end{aligned}$$

Para $q=\infty$,

$$\begin{aligned}||\delta^\varepsilon(f)||^*_{p,\infty} &= \sup_{t>0} t^{1/p}(\delta^\varepsilon(f))^*(t) = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(\varepsilon^n t)\\ &= \varepsilon^{-n/p}\sup_{t>0}(\varepsilon^n t)^{1/p} f^*(\varepsilon^n t) = \varepsilon^{-n/p}||f||^*_{p,\infty}.\end{aligned}$$

■

Os espaços $L^{p,q}$ formam uma cadeia encaixada quando aumentamos o índice q. Este é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 1.2.8. *Sejam $0<p<\infty$ e $0<q<r\leq\infty$. Então, existe uma constante $c_{p,q,r}$, que depende apenas de p,q,r, tal que*

$$||f||^*_{p,r} \leq c_{p,q,r}||f||^*_{p,q}.$$

Em outras palavras, $L^{p,q}\subset L^{p,r}$ e essa inclusão é contínua.

Demonstração: Caso $r=\infty$. Como f^* é não-crescente, temos $f^*(t)\leq f^*(s)$ para $s\in(0,t)$, o que nos dá

$$\begin{aligned}t^{1/p}f^*(t) &= \left(\frac{q}{p}\int_0^t [s^{1/p}f^*(t)]^q\frac{ds}{s}\right)^{1/q}\\ &\leq \left(\frac{q}{p}\int_0^t [s^{1/p}f^*(s)]^q\frac{ds}{s}\right)^{1/q}\\ &\leq \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q}||f||^*_{p,q}.\end{aligned}$$

Tomando o supremo na desigualdade acima, obtemos

$$||f||^*_{p,\infty} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q}||f||^*_{p,q}. \tag{1.10}$$

Caso $r<\infty$. Temos

$$\begin{aligned}||f||^*_{p,r} &= \left(\int_0^\infty [t^{1/p}f^*(t)]^{r-q+q}\frac{dt}{t}\right)^{1/r} = \left(\int_0^\infty t^{r/p}[f^*(t)^{(r-q)/r}(f^*(t))^{q/r}]^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r}\\ &\leq ||f||^{*(r-q)/r}_{p,\infty}\left(\int_0^\infty t^{r/p}[(f^*(t))^{q/r}]^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r}\\ &= ||f||^{*(r-q)/r}_{p,\infty}\left(\int_0^\infty [t^{1/p}[(f^{q/r})^*(t)]^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r} \leq ||f||^{*(r-q)/r}_{p,\infty}||f||^{*q/r}_{p,q}.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (1.10) na desigualdade acima, obtemos

$$||f||^*_{p,r} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{(r-q)/rq}||f||^*_{p,q}.$$

■

Os funcionais $||\cdot||^*_{p,q}$ geram uma topologia natural em $L^{p,q}$, o que faz dos espaços de Lorentz espaços vetoriais topológicos. Entretanto, a desigualdade triangular não vale para esses espaços. Para eles, temos apenas a estimativa

$$||f+g||^*_{p,q} \leq 2^{1/p} \max(1, 2^{(1-q)/q})(||f||^*_{p,q} + ||g||^*_{p,q}).$$

A desigualdade triangular não é satisfeita e de fato os espaços de Lorentz são apenas quase-normados. Contudo, a topologia de $L^{p,q}$ é metrizável para $1 < p \leq \infty$. De fato, podemos definir uma norma equivalente à quase-norma de Lorentz, usando uma função auxiliar f^{**} dada por

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds, \text{ para } t > 0.$$

Defina

$$||f||_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^{**}(t)]^q dt/t\right)^{1/q}, & \text{se} \quad 0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t), & \text{se} \quad 0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}.$$

Vamos mostrar que a norma $||\cdot||_{p,q}$ e a quase-norma $||\cdot||^*_{p,q}$ são de fato equivalentes. Para isso, precisaremos da desigualdade de Hardy, um resultado clássico cuja demonstração omitiremos. Para uma demonstração, veja por exemplo [28].

Lema 1.2.9 (Desigualdade de Hardy)**.** *Sejam* $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, p' *o conjugado de* p *e* z *uma função não-negativa. Então,*

$$\left[\int_0^\infty \left[\frac{x^{1/p}}{x}\int_0^x z(t)dt\right]^q \frac{dx}{x}\right]^{1/q} \leq p' \left[\int_0^\infty \left[x^{1/p} z(x)\right]^q\right]^{1/q}.$$

Estamos em condições de provar a equivalência entre $||\cdot||^*_{p,q}$ e $||\cdot||_{p,q}$.

Lema 1.2.10. *Seja* $f \in L^{p,q}$ *com* $1 < p \leq \infty$ *e* $1 \leq q \leq \infty$*. Então*

$$||f||^*_{p,q} \leq ||f||_{p,q} \leq \frac{p}{p-1}||f||^*_{p,q}.$$

Demonstração: A primeira desigualdade segue diretamente do fato de que f^* é não crescente. De fato, temos que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \geq \frac{1}{t}\int_0^t f^*(t)ds = f^*(t),$$

o que nos dá

$$||f||^*_{p,q} = \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^q dt/t\right)^{1/q} \leq \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^{**}(t)]^q dt/t\right)^{1/q} = ||f||_{p,q}.$$

Agora vamos mostrar a segunda desigualdade. Para o caso em que $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, basta aplicar a desigualdade de Hardy com $z = f^*$ para obter

$$
\begin{aligned}
||f||_{p,q} &= \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^{**}(t)]^q dt/t\right)^{1/q}\\
&= \left(\int_0^\infty \left[\frac{t^{1/p}}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right]^q dt/t\right)^{1/q}\\
&\le p'\left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^q dt/t\right)^{1/q}\\
&= \frac{p}{p-1}||f||_{p,q}^*.
\end{aligned}
$$

Para o caso $1 < p \le \infty$ e $q = \infty$, temos

$$
\begin{aligned}
t^{1/p} f^{**}(t) &= t^{1/p-1}\int_0^t f^*(s)ds\\
&= t^{1/p-1}\int_0^t s^{-1/p} s^{1/p} f^*(s)ds\\
&\le ||f||_{p,\infty} t^{1/p-1}\int_0^t s^{-1/p} ds\\
&= \frac{p}{p-1}||f||_{p,\infty}^*.
\end{aligned}
$$

Tomando o supremo, segue o resultado. ■

Uma vantagem de usar $||\cdot||_{p,q}$ em vez de $||\cdot||_{p,q}^*$ é o fato de que a primeira quantidade é uma norma. Para verificar isso, usaremos o seguinte lema.

Lema 1.2.11. *Se E é mensurável, então*

(i) $\int_E |f|dx \le \int_0^{|E|} f^*(t)dt$;

(ii) *Se $t > 0$, então existe E_t mensurável tal que $|E_t| = t$ e*

$$\int_{E_t} |f|dx = \int_0^t f^*(s)ds.$$

Omitiremos a demonstração desse lema, por se tratar de um lema técnico, cuja demonstração se baseia em vários outros lemas que fogem do escopo deste trabalho. Para uma demonstração, veja [28].

Uma consequência do Lema 1.2.11 é a igualdade

$$\sup_{|E|\le t}\int_E |f|dx = \int_0^t f^*(s)ds.$$

Se f não é identicamente nula em quase todo ponto e $t > 0$, o lado esquerdo da equação acima é positivo. Além disso, vale a "desigualdade triangular":

$$
\begin{aligned}
(f+g)^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t (f+g)^*(s)ds\\
&= \frac{1}{t}\sup_{|E|\le t}\int_E |f+g|dx\\
&\le \frac{1}{t}\sup_{|E|\le t}\int_E |f|dx + \frac{1}{t}\sup_{|E|\le t}\int_E |g|dx\\
&= f^{**}(t) + g^{**}(t).
\end{aligned}
$$

Usando os fatos acima, temos que $||\cdot||_{p,q}$ é uma norma. Vamos utilizar ambas as quantidades, visto que cada uma tem suas vantagens. Ao passo que $||\cdot||_{p,q}$ é uma norma, temos que qualquer função f que satisfaça $||f||_{1,q} < \infty$ para $1 \leq q < \infty$, deve ser nula em quase todo ponto, como é mostrado em [28]. Logo, $||\cdot||_{1,q}$ não define uma extensão satisfatória de L^1. Para uma demonstração de que os espaços $L^{p,q}$ são Banach, veja [28].

Lema 1.2.12. *Os espaços $L^{p,q}$, com $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, equipados com a norma $||\cdot||_{p,q}$, são espaços de Banach.*

Para conveniência do leitor, relembramos também a desigualdade de Young, que será utilizada em alguns dos lemas do Capítulo 2. Para uma demonstração, ver [8].

Lema 1.2.13. *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$.*

(i) [Desigualdade de Young] *Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $f * g \in L^r$ e*

$$||f * g||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

(ii) [Desigualdade Forte de Young] *Suponha também que $p > 1, q > 1$ e $r < \infty$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q-$fraco, então $f * g \in L^r$ e*

$$||f * g||_r \leq c||f||_p ||g||_{q,\infty}.$$

(iii) *Suponha que $p = 1$ e $r = q > 1$. Se $f \in L^1$ e $g \in L^q-$fraco, então $f * g \in L^q-$fraco e*

$$||f * g||_{q,\infty} \leq c||f||_1.$$

Vamos enunciar agora um resultado clássico da teoria de interpolação em espaços de Lorentz que fornecerá uma caracterização alternativa para $L^{p,q}$. Para uma demonstração, veja [2].

Proposição 1.2.14 (Reiteração para espaços de Lorentz)**.** *Sejam $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$. Sejam $0 < p_1, p_2 \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$, com $0 < \lambda < 1$. Se $p_1 \neq p_2$, então*

$$[L^{p_1,q_1}, L^{p_2,q_2}]_{\lambda,q} = L^{p,q}.$$

A igualdade continua verdadeira no caso $p_1 = p_2 = p$, contanto que $\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{q_1} + \frac{\lambda}{q_2}$.

Uma consequência imediata da proposição anterior é a caracterização

$$L^{p,q} = \left[L^1, L^\infty\right]_{1-1/p,q} \tag{1.11}$$

, a qual é muito utilizada na literatura, sendo inclusive dada como definição para os espaços de Lorentz em algumas referências, como em [20]. Do Teorema de Reiteração acima e do que foi abordado sobre espaços de interpolação, temos que um operador sublinear T limitado em dois espaços de Lorentz será também limitado no espaço de Lorentz resultante da interpolação dos dois primeiros. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.2.15. *Seja T um operador sublinear limitado em L^{p_1,r_1} e em L^{p_2,r_2}, com $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$, $0 < \lambda < 1$. Então, para todo $1 \leq q \leq \infty$, existe B tal que*

$$||Tf||_{p,q} \leq B||f||_{p,q},$$

para toda $f \in L^{p,q}$.

1.2.3 A Função Beta

Para fazer estimativas de normas e integrais nas demonstrações dos teoremas de boa-colocação, frequentemente trataremos com a função Beta. A seguir, relembramos sua definição.

Definição 1.2.16. *Sejam $x, y > 0$. Definimos a função Beta como a integral*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Observação 1.2.17. *A função beta é finita para $x, y > 0$. De fato,*

$$\beta(x,y) = \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Observe que para $t \in [0,1/2]$ e y tal que $2^{1-y} < 1$, temos que $(1-t)^{y-1} \leq 1$. Por outro lado, se $1 < 2^{1-y}$, então $y < 1$ e portanto $(1-t)^{y-1} < 1-t \leq 1 < 2^{1-y}$. Ou seja, para $t \in [0,1/2]$ temos que $(1-t)^{y-1} \leq \max(1, 2^{1-y})$. Analogamente, para $t \in [1/2, 1]$ temos que $t^{x-1} \leq \max(1, 2^{1-x})$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &\leq \max(1,2^{1-y}) \int_0^{1/2} t^{x-1}dt + \max(1,2^{1-x}) \int_{1/2}^1 (1-t)^{y-1}dt \\ &< 2\frac{1}{x}2^{-x} + 2\frac{1}{y}2^{-y} < \infty.\end{aligned}$$

1.3 A Decomposição de Littlewood-Paley

Em Análise Harmônica a decomposição de Littlewood-Paley aparece como uma poderosa ferramenta para a obtenção de teoremas de *multipliers*. Outra aplicação da teoria de Paley-Littlewood é a definição e manuseio de vários espaços funcionais. Tal decomposição é baseada nos operadores S_j e Δ_j, definidos abaixo. De fato, estes operadores e a decomposição de Littlewood-Paley dependem de uma função base ϕ.

Definição 1.3.1. *Seja $\phi \in \mathcal{S}$ uma função real e radial, cuja transformada de Fourier seja tal que $0 \leq \hat{\phi}(\xi) \leq 1$, $\hat{\phi}(\xi) = 1$ se $|\xi| \leq 3/4$ e $\hat{\phi}(\xi) = 0$ se $|\xi| \geq 3/2$. Seja também $\psi(x) = 2^n\phi(2x) - \phi(x)$.*

Denotamos por S_j o operador $S_j f = f * \phi_{2^{-j}}$ e por Δ_j o operador $\Delta_j f = f * \psi_{2^{-j}}$, onde o índice em ϕ e ψ significa $h_k(x) = k^{-n}h(x/k)$.

Por fim, o conjunto $\{S_j, \Delta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ satisfaz

$$I = S_0 + \sum_{j\geq 0} \Delta_j,$$

e é chamado de Decomposição de Paley-Littlewood da unidade.

Com o que foi abordado nesse capítulo, temos um conjunto de ferramentas para estudar os espaços de Herz que são os espaços onde desejamos estudar as equações de Navier-Stokes.

Capítulo 2

Os Espaços de Herz e de Herz Fraco

No presente capítulo, apresentaremos os espaços que serão objeto central de estudo do trabalho. Apresentaremos também algumas de suas propriedades fundamentais e desenvolveremos algumas ferramentas necessárias para a resolução do problema central, ou seja, encontrar soluções brandas para (0.1). O conteúdo desta seção é baseado nos artigos de Tsutsui [30] e Miyachi [24].

Ao longo do trabalho, usaremos a notação $A \lesssim B$ para representar $A \leq cB$, onde c é alguma constante positiva universal. Também, $A \approx B$ significa $c_1 B \leq A \leq c_2 B$ com constantes positivas c_1 e c_2. Ao longo das demonstrações, c denotará uma constante universal, mas que pode ser diferente de uma linha para outra.

Por motivos de simplicidade, utilizaremos o seguinte conjunto de notações para as normas abaixo. Usaremos $||f||_p$ para denotar a norma de f em L^p e $||f||_{p,\infty}$ denotará a norma de f em L^p-fraco, isto é,

$$||f||_p = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

e

$$||f||_{p,\infty} = \sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x : |f(x)| > \lambda\}|^{1/p}.$$

Ainda, $||f||_{p,E}$ denotará a norma de f em $L^p(E)$, e $||f||_{p,\infty,E}$ denotará a norma de f em $L^{p,\infty}(E)$, ou mais explicitamente,

$$||f||_{p,E} = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

e

$$||f||_{p,\infty,E} = \sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}|^{1/p}.$$

2.1 Definições e Propriedades Básicas

A seguir definimos os espaços de Herz e de Herz fraco.

Definição 2.1.1 (Espaços de Herz). *Sejam $0 < p, q \leq \infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço de Herz $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ como*

$$\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : ||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} < \infty\},$$

onde

$$||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q}||f||^q_{p,A_k}\right)^{1/q},$$

no caso $q<\infty$, *e com a modificação usual para o caso* $q=\infty$, *ou seja,*

$$||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} := \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||f||_{p,A_k},$$

sendo $A_k := \{x\in\mathbb{R}^n : 2^{k-1}\leq |x| < 2^k\}$.

Definição 2.1.2 (Espaço de Herz Fraco)**.** *Sejam* $0<p,q\leq\infty$ *e* $\alpha\in\mathbb{R}$. *Definimos o espaço de Herz fraco* $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *como o espaço das funções mensuráveis tais que*

$$||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q}||f||^q_{p,\infty,A_k}\right)^{1/q} < \infty,$$

com a modificação usual no caso $q=\infty$, *ou seja,*

$$||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} := \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||f||_{p,\infty,A_k},$$

para $p<\infty$, *e com a convenção* $L^{\infty,\infty}(A_k)=L^{\infty}(A_k)$.

Exemplo 2.1.3. *Um exemplo de função que está em* $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ *é*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2^{-k\alpha}}{|x-x_k|^{n/p}}\chi_k(x),$$

onde $x_k := (\frac{3}{2}2^{k-1},0,0,...,0)\in\mathbb{R}^n$.

De fato, temos o seguinte:

Para $\lambda>0, j\in\mathbb{Z}$, *se* $x\in A_j\cap B(x_j,2^{-j\alpha p/n}\lambda^{-p/n})$, *então*

$$f(x) = \frac{2^{-j\alpha}}{|x-x_j|^{n/p}} > \lambda.$$

Logo, $A_j\cap B(x_j,2^{-j\alpha p/n}\lambda^{-p/n})\subset\{x\in A_j : |f(x)|>\lambda\}$. *Por outro lado, se* $x\in A_j$ *e* $|f(x)|>\lambda$, *então*

$$|x-x_j|^{n/p} < \frac{2^{-j\alpha}}{\lambda} \Rightarrow |x-x_p| < 2^{j\alpha p/n}\lambda^{-n/p}.$$

Logo, $\{x\in A_j : |f(x)|>\lambda\}\subset A_j\cap B(x_j,2^{-j\alpha p/n}\lambda^{-p/n})$, *e temos igualdade entre os conjuntos*

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}||f||_{p,\infty,A_k} &= \sup_{\lambda>0}\lambda|\{x\in A_k : |f(x)|>\lambda\}|^{1/p} = \sup_{\lambda>0}\lambda|A_j\cap B(x_k,2^{-k\alpha p/n}\lambda^{-p/n})|^{1/p}\\ &\leq \sup_{\lambda>0}\lambda(2^{-k\alpha p}\lambda^{-p}|B_1|)^{1/p} = \sup_{\lambda>0}2^{-k\alpha}|B_1|^{1/p} = 2^{-k\alpha}|B_1|^{1/p}.\end{aligned}$$

Logo, sendo B_1 *a bola unitária,*

$$||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||f||_{p,\infty,A_k} \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}}|B_1|^{1/p} = |B_1|^{1/p} < \infty,$$

e $f\in W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$.

Observamos aqui que os espaços definidos acima são comumente chamados de espaços de Herz homogêneos e espaços de Herz fracos homogêneos. Como utilizaremos apenas estes espaços e não abordaremos suas versões não-homogêneas, omitiremos a palavra "homogêneos" durante o trabalho.

Outro tipo de espaço que será utilizado nos teoremas é o que chamamos de espaço de Herz fraco "suave", $W\dot{\mathcal{K}}^{\alpha}_{p,q}$, que tem como característica adicional a convergência do semigrupo do calor quando t tende a zero pela direita, isto é

$$W\dot{\mathcal{K}}^{\alpha}_{p,q} = \{f \in W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}; \lim_{t\searrow 0} e^{t\Delta} f = f\}.$$

O leitor pode observar que os espaços de Lebesgue são casos particulares de espaços de Herz. Para $p < \infty$, temos que $\dot{K}^{\alpha}_{p,p} = L^p(|x|^{\alpha p}dx)$ e $||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{\infty,\infty}} \approx |||x|^{\alpha} f||_{L^{\infty}}$. Em particular, os espaços $\dot{K}^{0}_{p,p}$ são equivalentes aos espaços L^p. Ainda, como $L^{\infty,\infty} = L^{\infty}$, a norma de $W\dot{K}^{0}_{\infty,\infty}$ também é equivalente à norma L^{∞}.

Comecemos a estudar os espaços de Herz verificando como se relacionam entre si quando variamos seus índices α, p, q.

Lema 2.1.4. *Sejam* $0 < p_i, q_i, p, q \leq \infty$, $i \in \{0, 1\}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então, são válidas as seguintes relações de inclusão:*

(i) $\dot{K}^{\alpha}_{p_2,q} \subset \dot{K}^{\gamma}_{p_1,q}$, *se* $p_1 \leq p_2$ *e* $\gamma = \alpha - n(1/p_1 - 1/p_2)$;

(ii) $W\dot{K}^{\alpha}_{p_2,q} \subset W\dot{K}^{\gamma}_{p_1,q}$, *se* $p_1 \leq p_2$ *e* $\gamma = \alpha - n(1/p_1 - 1/p_2)$;

(iii) $\dot{K}^{\alpha}_{p,q_1} \subset \dot{K}^{\alpha}_{p,q_2}$, *se* $q_1 \leq q_2$;

(iv) $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q_1} \subset W\dot{K}^{\alpha}_{p,q_2}$, *se* $q_1 \leq q_2$.

Demonstração:

(i) Primeiramente, vamos mostrar que

$$||f||_{p_1,A_k} \leq 2^{kn(1/p_1-1/p_2)} ||f||_{p_2,A_k}. \tag{2.1}$$

Como $p_1 \leq p_2$, segue que $\frac{p_2}{p_1} \geq 1$, e podemos aplicar a desigualdade de Hölder. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
||f||^{p_1}_{p_1,A_k} &= \int_{A_k} |f(x)|^{p_1} dx = \int |f(x)|^{p_1} \chi_{A_k} dx \\
&= \int |f(x)|^{p_1} \chi_{A_k}^{p_1/p_2} \chi_{A_k}^{1-p_1/p_2} dx \\
&\leq \left(\int |f(x)|^{p_2} \chi_{A_k} dx \right)^{p_1/p_2} \left(\int \chi_{A_k} dx \right)^{1-p_1/p_2} \\
&= ||f||^{p_1}_{p_2,A_k} 2^{kn(1-p_1/p_2)},
\end{aligned}$$

o que nos dá (2.1). Multiplicando por $2^{k\gamma}$ em ambos os lados, obtemos

$$2^{k\gamma} ||f||_{p_1,A_k} \leq 2^{k\alpha} ||f||_{p_2,A_k},$$

e somando em k, chegamos a

$$||f||_{\dot{K}^{\gamma}_{p_1,q}} \leq ||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p_2,q}},$$

o que implica na inclusão desejada.

(ii) Procederemos de forma semelhante ao caso (i). Vejamos que

$$||f||_{p_1,\infty,A_k} \leq 2^{kn(1/p_1-1/p_2)}||f||_{p_2,\infty,A_k}.$$

De fato, novamente por Hölder,

$$\begin{aligned}
|\{x \in A_k : |f(x)| > \lambda\}| &= \int_{A_k} \chi_{\{|f|>\lambda\}} dx \\
&= \int \chi_{\{|f|>\lambda\}}\chi_{A_k} dx \\
&= \int \chi_{\{|f|>\lambda\}}\chi_{A_k}^{p_1/p_2}\chi_{A_k}^{1-p_1/p_2} dx \\
&\leq \left(\int \chi_{\{|f|>\lambda\}}^{p_2/p_1}\chi_{A_k} dx\right)^{p_1/p_2}\left(\int \chi_{A_k} dx\right)^{1-p_1/p_2} \\
&= |\{x \in A_k : |f(x)| > \lambda\}|^{p_1/p_2} 2^{kn(1-p_1/p_2)},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\lambda|\{x \in A_k : |f(x)| > \lambda\}|^{1/p_1} \leq \lambda|\{x \in A_k : |f(x)| > \lambda\}|^{1/p_2} 2^{kn(1/p_1-1/p_2)}.$$

Multiplicando ambos os lados por $2^{k\gamma}$, obtemos

$$2^{k\gamma}\lambda|\{x \in A_k : |f(x)| > \lambda\}|^{1/p_1} \leq 2^{k\alpha}\lambda|\{x \in A_k : |f(x)| > \lambda\}|^{1/p_2}.$$

Por fim, tomando o supremo em λ em ambos os lados, segue que

$$||f||_{W\dot{K}^{\gamma}_{p_1,q}} \leq ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p_2,q}}.$$

(iii) Considere a sequência $(a_k) := (2^{k\alpha}||f||_{p,A_k})_{k\in\mathbb{Z}}$. Observe que, para qualquer q, a norma de f em $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ nada mais é que a norma em l^q da sequência a_k. Assim, da inclusão $l^{q_1} \subset l^{q_2}$, segue que

$$||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q_2}} \leq ||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q_1}}.$$

(iv) Aqui, o argumento é o mesmo que no caso (iii), mas para a sequência

$$(a_k) := (2^{k\alpha}||f||_{p,\infty,A_k})_{k\in\mathbb{Z}}.$$

■

Na demonstração acima, observamos que as normas $||\cdot||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}$ e $||\cdot||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}$ são normas l^q de sequências baseadas em normas nos espaços L^p e L^p-fraco, respectivamente. Essa caracterização dos espaços de Herz nos permite abordar a interpolação desses espaços, apenas com uma modificação no Teorema de Interpolação de Marcinckiewicz. De fato, trocando-se $|f(x)|$ por $||f||_A$, onde A é um espaço quase-Banach, obtemos um resultado que generaliza a interpolação dos espaços l^p. Para enunciá-lo, vamos definir os espaços $l^{\alpha}_q(A)$.

Definição 2.1.5. *Seja A um espaço quase-Banach. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 < q \leq \infty$, definimos por $l_q^\alpha(A)$ o espaço*

$$l_q^\alpha(A) = \left\{ (a_k)_k : a_k \in A, \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} ||a_k||_A^q \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

com a modificação usual no caso $q = \infty$, isto é,

$$l_\infty^\alpha(A) = \left\{ (a_k)_k : a_k \in A, \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha} ||a_k||_A < \infty \right\}.$$

Podemos agora enunciar o Teorema de Interpolação Generalizado de Marcinckiewicz, cuja demonstração pode ser encontrada em [12] e [27].

Proposição 2.1.6. *Seja A um espaço quase-Banach, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $0 < q_1, q_2 \leq \infty$. Então,*

$$\left[l_{q_1}^{\alpha_1}(A), l_{q_2,}^{\alpha_2}(A) \right]_{\theta,q} = l_q^\alpha(A),$$

dado que $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_1 + \theta\alpha_2$ e $0 < \theta < 1$.

Em particular, se $A = L^p$ e $a_k = f\chi_{A_k}$, temos $\dot{K}_{p,q}^\alpha$ e se $A = L^{p,\infty}$ e $a_k = f\chi_{A_k}$, temos $W\dot{K}_{p,q}^\alpha$. Desta forma, temos a seguinte caracterização da interpolação de espaços de Herz.

Corolário 2.1.7. *Sejam $0 < p, q_1, q_2 \leq \infty$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\left[\dot{K}_{p,q_1}^{\alpha_1}, \dot{K}_{p,q_2}^{\alpha_2} \right]_{\theta,q} = \dot{K}_{p,q}^\alpha,$$

e

$$\left[W\dot{K}_{p,q_1}^{\alpha_1}, W\dot{K}_{p,q_2}^{\alpha_2} \right]_{\theta,q} = W\dot{K}_{p,q}^\alpha,$$

dado que $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_1 + \theta\alpha_2$ e $0 < \theta < 1$.

A seguir, traremos as definições de alguns espaços auxiliares já conhecidos, além de enunciar e demonstrar alguns lemas que serão essenciais nas demonstrações dos principais teoremas deste trabalho.

Como já falamos no primeiro capítulo, durante o processo de encontrar espaços maiores para os quais há a boa-colocação das soluções para as equações de Navier-Stokes, alguns trabalhos consideraram o caso em que os dados iniciais estão nos espaços de Morrey. Vamos relembrar a sua definição e em seguida mostrar a inclusão contínua dos espaços de Morrey nos espaços de Herz.

Definição 2.1.8 (Espaços de Morrey)**.** *Seja $0 < q < p \leq \infty$. Definimos o espaço de Morrey $\mathcal{M}_q^p$ como o espaço das funções mensuráveis tais que*

$$||f||_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_Q |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} ||f||_{q,Q} < \infty,$$

com o supremo tomado sobre todos os cubos Q.

Lema 2.1.9. *Para $0 < q \leq p \leq \infty$, tem-se a imersão contínua*

$$\mathcal{M}_q^p \hookrightarrow \dot{K}_{q,\infty}^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})},$$

Demonstração: Pela definição, temos que

$$||f||_{\dot{K}_{q,\infty}^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kn(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}||f||_{L^q(A_k)} \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} |A_k|^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}||f||_{L^q(A_k)}.$$

Agora, sendo Q_k o cubo de lado 2^k centrado na origem, temos que $|A_k| \leq |Q_k|$ e de $q < p$ segue que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$, logo $|A_k|^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \leq |Q_k|^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$. Ainda, como $A_k \subset Q_k$, temos $||f||_{q,A_k} \leq ||f||_{q,Q_k}$. Logo,

$$||f||_{\dot{K}_{q,\infty}^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} |Q_k|^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}||f||_{q,Q_k} \leq \sup_{Q} |Q|^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}||f||_{q,Q} = ||f||_{\mathcal{M}_q^p}.$$

■

Vejamos a seguir que os espaços de Herz estão entre o espaço de Schwartz e seu dual, com inclusões contínuas. Isso nos diz que esses espaços contêm funções com um "comportamento bom", e também nos permite um ambiente geral adequado para certas propriedades, como por exemplo, a unicidade do limite no espaço das distribuições temperadas. Para conveniência do leitor, relembramos as definições de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$.

Definição 2.1.10 (Espaço de Schwartz)**.** *Definimos o espaço de Schwartz $\mathcal{S}$ como o espaço das funções rapidamente decrescentes, ou mais especificamente,*

$$\mathcal{S} := \{f \in C^\infty : ||f||_{\alpha,\beta} < \infty, \forall \alpha, \beta\},$$

onde α, β são multi-índices e

$$||f||_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha D^\beta f(x)|.$$

O espaço dual de $\mathcal{S}$, ou seja $\mathcal{S}'$, é conhecido como o espaço das distribuições temperadas.

Uma caracterização alternativa de $\mathcal{S}$ que é muito útil é a seguinte: Uma função C^∞ está em $\mathcal{S}$ se, e só se, para todo inteiro positivo N e todo multi-índice β, existe uma constante $C_{\beta,N}$ tal que

$$|\partial^\beta f(x)| \leq C_{\beta,N}(1 + |x|)^{-N}.$$

Tendo definido o espaço $\mathcal{S}$, podemos trazer o seguinte resultado de imersão sobre os espaços de Herz.

Lema 2.1.11. *Seja $1 \leq p, q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

(i) $\mathcal{S} \hookrightarrow \dot{K}_{p,q}^\alpha \hookrightarrow W\dot{K}_{p,q}^\alpha$, dado ou que $q < \infty$ e $\frac{-n}{p} < \alpha < \infty$, ou que $q = \infty$ e $\frac{-n}{p} \leq \alpha < \infty$.

(ii) $\dot{K}_{p,q}^\alpha \hookrightarrow W\dot{K}_{p,q}^\alpha \hookrightarrow \mathcal{S}'$, dado ou que $q = 1$ e $-\infty < \alpha \leq n(1 - \frac{1}{p})$, ou que $1 < q \leq \infty$ e $-\infty < \alpha < n(1 - \frac{1}{p})$.

Demonstração: Primeiramente, da inclusão contínua $L^p \hookrightarrow L^{p,\infty}$, segue que $\dot{K}^{\alpha}_{p,q} \hookrightarrow W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$.

Para (i), seja $f \in \mathcal{S}$. Então, para qualquer inteiro N positivo, existe $C_{0,N}$ tal que $|f(x)| \leq C_{0,N}(1+|x|)^{-N}$.

Comecemos com o caso $q < \infty$. Vamos decompor a norma de f em $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ da seguinte forma:

$$||f||^q_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q}||f||^q_{p,A_k} = \sum_{k<0} 2^{k\alpha q}||f||^q_{p,A_k} + \sum_{k\geq 0} 2^{k\alpha q}||f||^q_{p,A_k}.$$

Para $k < 0$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{A_k} |f(x)|^p dx &\leq \int_{A_k} \frac{C^p_{0,N}}{(1+|x|)^{Np}} dx \\ &\leq c\int_{A_k} dx = c2^{kn}.\end{aligned}$$

Assim, $2^{k\alpha q}||f||^q_{p,A_k} \leq c2^{k(\alpha+n/p)q}$, e como $-n/p < \alpha$, o expoente no lado direito da desigualdade é negativo. Assim,

$$\sum_{k<0} 2^{k\alpha q}||f||^q_{p,A_k} \leq c\sum_{k<0} 2^{k(\alpha+n/p)q} < \infty.$$

Para $k \geq 0$, vamos tomar $N = \alpha + n/p - 1$. Observe que, se $x \in A_k$, então $|x| \gtrsim 2^k$, e assim,

$$\begin{aligned}\int_{A_k} |f(x)|^p dx &\leq \int_{A_k} \frac{C^p_{0,N}}{(1+|x|)^{Np}} dx \\ &\leq c\int_{A_k} 2^{-kNp} dx = c2^{-kNp}2^{kn}.\end{aligned}$$

Logo, $||f||_{p,A_k} \leq c2^{k(n/p-N)}$, e portanto $2^{k\alpha q}||f||^q_{p,A_k} \leq c2^{k(\alpha+n/p-N)} = c2^{-1}$. Assim,

$$\sum_{k\geq 0} 2^{k\alpha q}||f||^q_{p,A_k} \leq c\sum_{k\geq 0} 2^{-1} < \infty.$$

Juntando as estimativas para $k < 0$ e $k \geq 0$, obtemos que $f \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}$.

Para o caso $q = \infty$, podemos proceder como o caso $q < \infty$, mas com o relaxamento da hipótese sobre os índices. De fato, como a norma $||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}$ é dada pelo supremo em vez de uma soma, basta que o expoente obtido na estimativa para $k < 0$ seja não-positivo. Desta forma, precisamos apenas da condição $-n/p \leq \alpha < \infty$.

(ii) Da teoria de espaços duais, dada $f \in W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$, basta mostrar que para qualquer sequência $(\phi_m)_m \subset \mathcal{S}$ tal que $|\phi_m|_{\alpha,\beta} \to 0$ quando $m \to \infty$, tem-se que $\langle f, \phi_m\rangle \to 0$ se $m \to \infty$.

Mostremos o caso $q = 1$. Primeiramente, considere o espaço Z definido pela quase-norma

$$||\cdot||_Z = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\alpha q}||\cdot||^q_{p',1,A_k}\right)^{1/q}.$$

Em vista da inclusão $L^{p',p'} \subset L^{p',1}$, segue da parte (i) que $\mathcal{S} \subset \dot{K}^{-\alpha}_{p',q} \subset Z$, dado que $-n/p' \leq -\alpha < \infty$, ou seja, que $-\infty < \alpha \leq n(1-1/p)$. Assim, podemos estimar

$$\begin{aligned}
|\langle f, \phi_m\rangle| &= \left|\int f(x)\phi_m(x)dx\right| \leq \int |f(x)\phi_m(x)|dx \\
&\leq ||f||_{p,\infty}||\phi_m||_{p',1} \\
&= 2^{k\alpha}||f||_{p,\infty}2^{-k\alpha}||\phi_m||_{p',1} \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||f||_{p,\infty,A_k}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\alpha}||\phi_m||_{p',1,A_k} \\
&= ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,1}}||\phi_m||_Z \\
&\leq ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,1}}|\phi_m|_{\alpha,\beta} \to 0, \text{ quando } m \to \infty.
\end{aligned}$$

Para o caso $q = \infty$, se $-\infty < \alpha < n(1-1/p)$, temos

$$\begin{aligned}
|\langle f, \phi_m\rangle| &= \left|\int f(x)\phi_m(x)dx\right| \leq \int |f(x)\phi_m(x)|dx \\
&\leq ||f||_{p,\infty}||\phi_m||_{p',1} \\
&= 2^{k\alpha}||f||_{p,\infty}2^{-k\alpha}||\phi_m||_{p',1} \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||f||_{p,\infty,A_k}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\alpha}||\phi_m||_{p',1,A_k} \\
&= ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}||\phi_m||_Z \\
&\leq ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}|\phi_m|_{\alpha,\beta} \to 0, \text{ quando } m \to \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos as inclusões contínuas desejadas. ■

Lema 2.1.12. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p, q \leq \infty$ e $f \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}$. Então $f \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para todo r tal que*

$$\frac{\max(\alpha, 0)}{n} + \frac{1}{q} < \frac{1}{r} < \infty.$$

Demonstração: Suponha que $||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} < \infty$. Se $r \leq q$, então

$$||f||_{r,A_k} = \left(\int_{A_k} |f|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int |f|^r\chi_{A_k}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int |f|^r\chi_{A_k}^{\frac{r}{q}}\chi_{A_k}^{1-\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Pela desigualdade de Hölder, que pode ser aplicada pois $\frac{q}{r} \geq 1$, obtemos

$$\int |f|^r\chi_{A_k}^{\frac{r}{q}}\chi_{A_k}^{1-\frac{r}{q}} \leq \left(\int\left(|f|^r\chi_{A_k}^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\chi_{A_k}\right)^{1-\frac{r}{q}} = \left(\int |f|^q\chi_{A_k}\right)^{\frac{r}{q}} c2^{kn(1-\frac{r}{q})},$$

e portanto

$$||f||_{r,A_k} \leq \left[c2^{kn(1-\frac{r}{q})}\left(\int |f|^q\chi_{A_k}\right)^{\frac{r}{q}}\right]^{\frac{1}{r}} = c2^{kn(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}||f||_{q,A_k}.$$

Agora, note que

$$\left(2^{k\alpha}||f||_{q,A_k}\right)^p \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(2^{k\alpha}||f||_{q,A_k}\right)^p = ||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

Logo,

$$||f||_{r,A_k} \leq c2^{kn(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{n})}||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

Agora, se $\frac{1}{r}-\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{n} > 0$, temos que $2^{kn(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{n})} < 2^{kn}$ para todo $k < 0$. Como $B(0;2^N) = \bigsqcup_{k=-\infty}^{N} A_k$, segue que

$$\begin{aligned}
||f||^r_{r,B(0;2^N)} = \sum_{k=-\infty}^{N} ||f||^r_{r,A_k} &= \sum_{k=-\infty}^{0} ||f||^r_{r,A_k} + \sum_{k=1}^{N} ||f||^r_{r,A_k} \\
&\leq c \sum_{k=-\infty}^{0} 2^{krn(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{n})}||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} + \sum_{k=1}^{N} ||f||_{r,A_k} \\
&\leq c \sum_{k=-\infty}^{0} 2^{krn}||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} + \sum_{k=1}^{N} ||f||_{r,A_k} \\
&\leq c||f||^r_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} + \sum_{k=1}^{N} ||f||_{r,A_k} < \infty,
\end{aligned}$$

para todo $N > 0$.

Se $N \leq 0$, a norma é menor ainda, e pelo mesmo argumento acima, limitada.

Logo, $f \in L^r_{loc}$. ∎

Vamos mostrar agora uma desigualdade que pode ser considerada uma versão da Desigualdade de Hölder para os espaços de Herz fracos, por se tratar de um lema que mostra a bicontinuidade do operador multiplicação nesses espaços. A diferença entre esse lema e as versões clássicas da desigualdade de Hölder está na dependência do índice α, que não está presente em L^p ou em $L^{p,q}$.

Lema 2.1.13 (Desigualdade de Hölder para Espaços de Herz Fracos)**.** *Sejam* $1 < p_i \leq \infty$, $0 < q_i \leq \infty$ *e* $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1,2$. *Se*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2},\ \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \text{ e } \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

então

$$||fg||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}} ||g||_{W\dot{K}^{\alpha_2}_{p_2,q_2}}.$$

Demonstração: A demonstração é direta, bastando aplicar duas vezes a desigualdade de Hölder. A primeira, para espaços de Lorentz, e a segunda para espaços l^p.

Para $q < \infty$, como $p \geq 1$, a desigualdade de Hölder para espaços de Lorentz nos dá

$$\begin{aligned}
||fg||^q_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q}||fg||^q_{p,\infty,A_k} \\
&\leq c \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q}||f||^q_{p_1,\infty,A_k}||g||^q_{p_2,\infty,A_k} \\
&\leq c \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha_1 q}||f||^q_{p_1,\infty,A_k} 2^{k\alpha_2 q}||g||^q_{p_2,\infty,A_k}.
\end{aligned}$$

Temos que $\frac{q}{q_1} + \frac{q}{q_2} = 1$. Logo, por Hölder para os espaços l^p (observe que $\frac{q_1}{q}, \frac{q_2}{q} \geq 1$), temos que

$$||fg||^q_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha_1 q_1} ||f||^{q_1}_{p_1,\infty,A_k} \right)^{q/q_1} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha_2 q_2} ||g||^{q_2}_{p_2,\infty,A_k} \right)^{q/q_2}.$$

Portanto, obtemos

$$||fg||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \leq c ||f||_{W\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}} ||g||_{W\dot{K}^{\alpha_2}_{p_2,q_2}}.$$

Para $q = \infty$,

$$\begin{aligned} ||fg||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha} ||fg||_{p,\infty,A_k} \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha} ||f||_{p_1,\infty,A_k} ||g||_{p_2,\infty,A_k} \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha_1} ||f||_{p_1,\infty,A_k} 2^{k\alpha_2} ||g||_{p_2,\infty,A_k} \\ &= \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha_1} ||f||_{p_1,\infty,A_k} \right) \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha_2} ||g||_{p_2,\infty,A_k} \right) = ||f||_{W\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,\infty}} ||g||_{W\dot{K}^{\alpha_2}_{p_2,\infty}}. \end{aligned}$$

■

Observação 2.1.14. *Um corolário imediato do lema anterior é a limitação da norma $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ para o produto tensorial. De fato, usando a norma do máximo obtemos facilmente que*

$$\begin{aligned} ||u \otimes v||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} &\leq c \max_{1 \leq i,j \leq n} ||u_i v_j||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \\ &\leq c \max_{1 \leq i,j \leq n} ||u_i||_{W\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}} \max_{1 \leq i,j \leq n} ||v_j||_{W\dot{K}^{\alpha_2}_{p_2,q_2}} \\ &\leq c ||u||_{W\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}} ||v||_{W\dot{K}^{\alpha_2}_{p_2,q_2}}. \end{aligned}$$

No capítulo anterior, falamos sobre invariância por *scaling* e a importância que têm os espaços limites no estudo das equações de Navier-Stokes. O lema a seguir mostra que os espaços $\dot{K}^{1-n/p}_{p,q}$ e $W\dot{K}^{1-n/p}_{p,q}$ são invariantes por *scaling*.

Lema 2.1.15. *Sejam $0 < p, q \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}$ e $0 < \lambda < \infty$. Então,*

$$||f(\lambda \cdot)||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \approx \lambda^{-(\alpha + \frac{n}{p})} ||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}$$

e

$$||f(\lambda \cdot)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \approx \lambda^{-(\alpha + \frac{n}{p})} ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

Demonstração: Vamos mostrar a afirmação para $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$.

Lembrando que os espaços L^p possuem a relação de *scaling*

$$||f(\lambda \cdot)||_p = \lambda^{-n/p} ||f||_p,$$

para $q < \infty$, temos que

$$\begin{aligned}||f(\lambda\cdot)||^q_{\dot{K}^\alpha_{p,q}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q}||f(\lambda\cdot)||^q_{p,A_k} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q}\lambda^{-nq/p}||f||^q_{p,\lambda A_k} \\ &= \lambda^{-nq/p}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q}||f||^q_{p,\lambda A_k}.\end{aligned}$$

Observe que acima o conjunto onde a norma L^p é tomada muda de A_k para λA_k. Note que

$$\begin{aligned}\lambda A_k &= \{x : \lambda 2^{k-1} \leq |x| < \lambda 2^k\} \\ &= \{x : 2^{\log_2\lambda+k-1} \leq |x| < 2^{\log_2\lambda+k}\} \\ &= A_{\log_2\lambda+k} := A_w,\end{aligned}$$

sendo $w = \log_2\lambda + k$. Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned}||f(\lambda\cdot)||^q_{\dot{K}^\alpha_{p,q}} &= \lambda^{-nq/p}\sum_{w\in\log_2\lambda+\mathbb{Z}} 2^{w\alpha q}\lambda^{-\alpha q}||f||^q_{p,A_w} \\ &= \lambda^{-(\alpha+n/p)q}\sum_{w\in\log_2\lambda+\mathbb{Z}} 2^{w\alpha q}||f||^q_{p,A_w} \\ &\approx \lambda^{-(\alpha+n/p)q}||f||^q_{\dot{K}^\alpha_{p,q}}.\end{aligned}$$

Assim, segue que

$$||f(\lambda\cdot)||_{\dot{K}^\alpha_{p,q}} \approx \lambda^{-(\alpha+n/p)q}||f||_{\dot{K}^\alpha_{p,q}}.$$

Para $q = \infty$, temos

$$\begin{aligned}||f(\lambda\cdot)||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||f(\lambda\cdot)||_{p,A_k} \\ &= \lambda^{-n/p}\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||f||_{p,\lambda A_k}.\end{aligned}$$

Fazendo novamente $w = \log_2\lambda + k$, obtemos

$$\begin{aligned}||f(\lambda\cdot)||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} &= \lambda^{-n/p}\sup_{w\in\log_2\lambda+\mathbb{Z}} 2^{w\alpha}\lambda^{-\alpha}||f||_{p,A_w} \\ &= \lambda^{-(\alpha+n/p)}\sup_{w\in\log_2\lambda+\mathbb{Z}} 2^{w\alpha}||f||_{p,A_w} \\ &\approx \lambda^{-(\alpha+n/p)}||f||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}}.\end{aligned}$$

Como a relação de *scaling* para os espaços L^p-fracos é a mesma que para L^p, a demonstração do resultado para $W\dot{K}^\alpha_{p,q}$ é análoga. ∎

2.2 Estimativas nos Espaços de Herz

Nos teoremas de unicidade de solução para as equações de Navier-Stokes, vamos estimar por diversas vezes a norma do semigrupo do calor $e^{\Delta t}$ em $\mathbb{R}^n$, que é caracterizado por uma convolução. Desta maneira, precisaremos de um lema que estime a norma da convolução em $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ e $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$. Para isso, vamos estimar a convolução em $L^{\sigma}(A_k)$ que está presente na definição de $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$. Comecemos com o lema auxiliar abaixo.

Lema 2.2.1. *Sejam $0 < q < p < \infty$, E um conjunto de medida finita e $f \in L^{p,\infty}$. Então,*

$$\int_E |f(x)|^q dx \leq \frac{p}{p-q}|E|^{1-q/p}||f||^q_{p,\infty}.$$

Demonstração: Primeiramente, temos que $|E \cap \{x : |f(x)| > \alpha\}| \leq \min\{|E|, \alpha^{-p}||f||^p_{p,\infty}\}$. Isso segue da monotonicidade da medida e da definição de $||\cdot||_{p,\infty}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^q dx &= \int_E \int_0^{|f(x)|} q\alpha^{q-1} d\alpha dx = q\int_0^{\infty}\int_E \alpha^{q-1}\chi_{\{|f|>\alpha\}} dx d\alpha \\ &= q\int_0^{\infty}\int \alpha^{q-1}\chi_{\{|f|>\alpha\cap E\}} dx d\alpha = q\int_0^{\infty} \alpha^{q-1}|\{|f| > \alpha\} \cap E| d\alpha.\end{aligned}$$

Seja $A = |E|^{-1/p}||f||_{p,\infty}$. Note que para $\alpha \leq A$, temos $|E| \leq \alpha^{-p}||f||_{p,\infty}$, e para $\alpha \geq A$, temos $\alpha^{-p}||f||_{p,\infty} \leq |E|$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^q dx &= q\int_0^{A} \alpha^{q-1}|\{|f| > \alpha\} \cap E| d\alpha + q\int_A^{\infty} |\alpha^{q-1}\{|f| > \alpha\} \cap E| d\alpha \\ &\leq q\int_0^{A} \alpha^{q-1}|E| d\alpha + q\int_A^{\infty} \alpha^{q-1}\alpha^{-p}||f||^p_{p,\infty} d\alpha \\ &= |E|A^q + q||f||^p_{p,\infty}\frac{A^{q-p}}{p-q} \\ &= |E|^{1-q/p}||f||^q_{p,\infty} + \frac{q}{p-q}|E|^{(q-p)/p}||f||^{p+q-p}_{p,\infty} \\ &= \frac{p}{p-q}|E|^{1-q/p}||f||^q_{p,\infty}.\end{aligned}$$

■

Podemos agora começar a estimar a convolução nos espaços de Herz. Em um primeiro momento, como comentado acima, vamos estimar a norma L^{σ} da convolução em A_k.

Lema 2.2.2. *Seja $1 < p \leq \sigma \leq \infty$, $k, j \in \mathbb{Z}$, $1 + \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ e $\phi \in L^{r,1} \cap L^{\infty}$, com $|\phi(x)| \leq C_*|x|^{-m}$ para algum $m \geq 0$ e para todo $x \neq 0$.*

(i) *No caso $p < \sigma \leq \infty$, temos que*

$$||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} \leq c||f_j||_{p,\infty} \times \begin{cases} 2^{\frac{kn}{\sigma}} 2^{jn(1-\frac{1}{p})} \min(2^{-km}, 1) =: R_1, & \text{se } j \leq k-2, \\ \min(2^{\frac{kn}{\sigma}} 2^{jn(1-\frac{1}{p})}, 1) =: R_2, & \text{se } k-1 \leq j \leq k+1, \\ 2^{\frac{kn}{\sigma}} 2^{jn(1-\frac{1}{p})} \min(2^{-jm}, 1) =: R_3, & \text{se } k+2 \leq j, \end{cases}$$

onde $f_j := f\chi_{A_j}$ e a constante c depende apenas de n, p, σ, ϕ e C_*.

(ii) *No caso $p = \sigma \leq \infty$, temos a mesma estimativa acima com $||f_j * \phi||_{\sigma,\infty,A_k}$ no lugar de $||f_j * \phi||_{\sigma,A_k}$.*

(iii) *Para $p \leq \sigma \leq \infty$, temos a mesma estimativa com $||f_j||_p$ no lugar de $||f_j||_{p,\infty}$.*

Demonstração: (i) Vamos dividir a prova em três casos.

a) Caso $j \leq k-2$: Nesse caso, para $x \in A_k$ e $y \in A_j$, tem-se $|x-y| \gtrsim 2^k$. De fato, temos que $2^{k-1} \leq |x| \leq 2^k$ e $2^{j-1} \leq |y| \leq 2^j$, donde vem

$$|x-y| \geq |x| - |y| \geq 2^{k-1} - 2^j \geq 2^{k-1} - 2^{k-2} = \frac{1}{4}2^k.$$

Assim, podemos provar que $||f_j * \phi||_{L^\sigma(A_k)} \lesssim |A_k|^{1/\sigma} \min(2^{-km}, 1)||f_j||_1$. Por um lado, temos que

$$\begin{aligned}|f_j * \phi| &= \left| \int f_j(y)\phi(x-y)dy \right| \leq \int |f_j(y)||\phi(x-y)|dy \\ &\leq \int |f_j(y)|C_*|x-y|^{-m}dy \leq C_* \int |f_j(y)|2^{-km}dy = C_* 2^{-km}||f_j||_1,\end{aligned}$$

o que nos dá

$$||f_j * \phi||_{\sigma,A_k}^\sigma = \int |f_j * \phi|^\sigma d\mu \leq C_*^\sigma 2^{-km\sigma}||f_j||_1^\sigma \int_{A_k} d\mu = C_*^\sigma 2^{-km\sigma}||f_j||_1^\sigma |A_k|,$$

e portanto

$$||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} \leq C_*|A_k|^{1/\sigma}2^{-km}||f_j||_1.$$

Por outro lado, podemos estimar

$$|f_j * \phi| \leq \int |f_j(y)||\phi(x-y)|dy \leq ||\phi||_\infty ||f_j||_1,$$

e assim

$$\begin{aligned}||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} &= \left(\int_{A_k} |f_j * \phi|^\sigma d\mu \right)^{1/\sigma} \leq ||\phi||_\infty ||f_j||_1 \left(\int_{A_k} d\mu \right)^{1/\sigma} \\ &= ||\phi||_\infty |A_k|^{1/\sigma} ||f_j||_1.\end{aligned}$$

Dessas duas estimativas acima, obtemos $||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} \lesssim |A_k|^{1/\sigma} \min(2^{-km}, 1)||f_j||_1$. Agora, como $\mathrm{supp} f_j \subset A_j$, podemos aplicar o Lema 2.2.1 para f_j e A_j, com $q = 1$ e obter

$$||f_j||_1 = \int |f_j|d\mu \leq \int_{A_j} |f_j|d\mu \leq \frac{p}{p-1}|A_j|^{1-1/p}||f_j||_{p,\infty}.$$

Então, segue que

$$\begin{aligned}||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} &\lesssim |A_k|^{1/\sigma} \min(2^{-km}, 1)||f_j||_1 \lesssim |A_k|^{1/\sigma} \min(2^{-km}, 1)|A_j|^{1-1/p}||f_j||_{p,\infty} \\ &= ||f_j||_{p,\infty} 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)} \min(2^{-km}, 1).\end{aligned}$$

b) Caso $k-1 \leq j \leq k+1$: Por um lado, procedemos como no caso anterior, obtendo

$$\begin{aligned}||f_j * \phi||_{L^\sigma(A_k)} &\leq ||\phi||_\infty |A_k|^{1/\sigma} ||f_j||_1 \leq ||\phi||_\infty |A_k|^{1/\sigma} \frac{p}{p-1} |A_j|^{1-1/p} ||f_j||_{p,\infty} \\ &\leq c 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)} ||f_j||_{p,\infty}.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos o seguinte. Para $\sigma < \infty$, a desigualdade forte de Young nos diz que

$$||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} \leq ||f_j * \phi||_\sigma \lesssim ||\phi||_r ||f_j||_{p,\infty}.$$

Agora, note que $L^r = L^{r,r}$ e para $q < p$ tem-se $L^{r,q} \subset L^{r,p}$, ou seja, $||f||_{r,p} \leq ||f||_{r,q}$. Como $r > 1$, segue que

$$||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} \leq ||f_j * \phi||_\sigma \lesssim ||\phi||_{r,1} ||f_j||_{p,\infty}.$$

Para $\sigma = \infty$, temos que $r = p'$. No caso $p = \infty$, obtemos que

$$||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} \leq ||f_j * \phi||_\infty \lesssim ||f_j||_{\infty,\infty} ||\phi||_{1,1}.$$

No caso $\sigma = \infty$ e $p < \infty$, como o operador convolução é limitado de $L^{p,q} \times L^{p',q'}$ em L^∞, para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, temos que

$$||f_j * \phi||_{\infty,A_k} ||f_j * \phi||_\infty \lesssim ||\phi||_{r,1} ||f_j||_{p,\infty}.$$

Logo, em ambos os casos, $p = \infty$ e $p < \infty$, chegamos à estimativa

$$||f_j * \phi||_{\infty,A_k} \leq c \min(2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p}, 1) ||f_j||_{p,\infty}.$$

c) Caso $k + 2 \leq j$**:** Este caso é análogo ao caso $j \leq k - 2$. Para $x \in A_k$ e $y \in A_j$, temos que $|x - y| \gtrsim 2^j$. De fato,

$$|x - y| \geq |y| - |x| \geq 2^{j-1} - 2^k \geq 2^{j-1} - 2^{j-2} = \frac{1}{4} 2^j.$$

Assim, podemos estimar

$$\begin{aligned} |f_j * \phi| &= \left| \int f_j(y) \phi(x - y) dy \right| \leq \int |f_j(y)| |\phi(x - y)| dy \\ &\leq \int |f_j(y)| C_* |x - y|^{-m} dy \leq C_* \int |f_j(y)| 2^{-km} dy = C_* 2^{-jm} ||f_j||_1, \end{aligned}$$

o que nos leva a

$$||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} \leq C_* |A_k|^{1/\sigma} 2^{-jm} ||f_j||_1.$$

A desigualdade

$$||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} \leq ||\phi||_\infty |A_k|^{1/\sigma} |A_j|^{1-1/p} ||f_j||_{L^{p,\infty}}$$

segue procedendo exatamente como no caso a). Desta forma, obtemos

$$||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} \leq c ||f_j||_{p,\infty} 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)} \min(2^{-jm}, 1).$$

(ii) Para o caso $p = \sigma$, temos que

$$||f * \phi||_{\sigma,\infty,A_k} \leq ||f * \phi||_{\sigma,\sigma,A_k} = ||f * \phi||_{\sigma,A_k}.$$

Com a desigualdade acima, podemos refazer a demonstração como para o caso (i) e obter todas as desigualdades, com exceção da desigualdade forte de Young (veja o Lema 1.2.13, pg. 27), que vale apenas para $p < \sigma$. Em vez dela, estimamos diretamente, observando que para $p = \sigma$, obtemos $r = 1$, e portanto a desigualdade de Young nos dá

$$||f * \phi||_{p,\infty,A_k} \leq ||f * \phi||_{p,\infty} \leq C||\phi||_1,$$

o que garante o resultado.

(iii) Para este item, basta observar que

$$||f_j||_{p,\infty} \leq ||f_j||_{p,p} = ||f_j||_p.$$

Logo, combinando essa desigualdade com as estimativas do caso (i), obtemos novamente todas as desigualdades para o caso em que $p < \sigma$. Para o caso $p = \sigma$, cujo único problema era não podermos usar a desigualdade forte de Young, aplicamos a desigualdade de Young simples para espaços L^p e obtemos diretamente a estimativa

$$||f_j * \phi||_{\sigma,A_k} \leq ||f_j * \phi||_\sigma \lesssim ||\phi||_r||f_j||_p.$$

Isto completa a prova do lema. ∎

Tendo provado esses lemas e fatos fundamentais sobre os espaços $\dot{K}^\alpha_{p,q}$ e $W\dot{K}^\alpha_{p,q}$, estamos quase em condições de provar os teoremas principais deste trabalho. A seguir, usaremos alguns desses lemas para chegar ao Corolário 2.2.4, que será usado diversas vezes ao longo das demonstrações dos teoremas. Ainda nesse capítulo, provaremos dois teoremas relativos à imersão dos espaços de Herz em espaços de Besov.

Proposição 2.2.3. *Sejam $1 < p \leq \sigma \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ e $m \geq 0$. Suponha que $\phi \in L^{r,1} \cap L^\infty$ com $1+1/\sigma = 1/p+1/r$, satisfaça $|\phi(x)| \leq C_*|x|^{-m}$ para todo $x \neq 0$. Então, temos as seguintes estimativas:*

(i) *No caso $p < \sigma$,*

$$||f * \phi||_{\dot{K}^\beta_{\sigma,q}} \leq c||f||_{W\dot{K}^\alpha_{p,q}};$$

(ii) *No caso $p = \sigma$,*

$$||f * \phi||_{W\dot{K}^\beta_{p,q}} \leq c||f||_{W\dot{K}^\alpha_{p,q}};$$

(iii) *Para $p \leq \sigma$,*

$$||f * \phi||_{\dot{K}^\beta_{\sigma,q}} \leq c||f||_{\dot{K}^\alpha_{p,q}},$$

dado que um dos seguintes casos valha:

(1) $0 < q \leq 1$, $-n/\sigma < \beta \leq \alpha \leq n(1-1/p)$, $n(1-1/p) - \alpha + \beta + n/\sigma \leq m$ e $\beta + n/\sigma < m$,

(2) $1 < q < \infty$, $-n/\sigma < \beta \leq \alpha < n(1-1/p)$ e $n(1-1/p) - \alpha + \beta + n/\sigma \leq m$,

(3) $q = \infty$, $-n/\sigma \leq \beta \leq \alpha < n(1-1/p)$, $n(1-1/p)-\alpha+\beta+n/\sigma \leq m$ e $n(1-1/p)-\alpha < m$.

Demonstração: Vamos provar o caso (i).

Caso (1): Pelo Lema 2.2.2, podemos fazer a seguinte decomposição:

$$
\begin{aligned}
||f*\phi||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}||f*\phi||^q_{\sigma,A_k}\right)^{1/q} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}||\sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j*\phi||^q_{\sigma,A_k}\right)^{1/q}\\
&\leq c\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}\left(\sum_{j\leq k-2}||f_j||_{p,\infty}R_1\right)^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}\left(\sum_{j=k-1}^{j=k+1}||f_j||_{p,\infty}R_2\right)^q\right)^{1/q}\right.\\
&\quad\left. + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}\left(\sum_{j\geq k+2}||f_j||_{p,\infty}R_3\right)^q\right)^{1/q}\right]\\
&\leq c\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}\left(\sum_{j\leq k-2}||f||_{p,\infty,A_j}R_1\right)^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}\left(\sum_{j=k-1}^{j=k+1}||f||_{p,\infty,A_j}R_2\right)^q\right)^{1/q}\right.\\
&\quad\left. + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}\left(\sum_{j\geq k+2}||f||_{p,\infty,A_j}R_3\right)^q\right)^{1/q}\right] := c[\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}].
\end{aligned}
$$

Primeiramente, vamos estimar o termo II. Temos que

$$
\mathrm{II} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}\left(\sum_{j=k-1}^{j=k+1}||f||_{p,\infty,A_j}R_2\right)^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}\sum_{j=k-1}^{j=k+1}||f||^q_{p,\infty,A_j}R_2^q\right)^{1/q}.
$$

Agora, note que para cada $k\in\mathbb{Z}$, a soma acima possui três termos com $||f||_{p,\infty,A_k}$. O primeiro, respectivo ao terceiro termo da soma para $k-1$; O segundo, respectivo ao segundo termo da soma para k; e o terceiro respectivo ao primeiro termo da soma para $k+1$. Para esclarecer, explicitaremos a parte da soma acima para $j=k-1$, $j=k$ e $j=k+1$:

$$
\begin{aligned}
&\ldots + 2^{(k-1)\beta q}||f||_{p,\infty,A_{k-2}}R_2^q + 2^{(k-1)\beta q}||f||_{p,\infty,A_{k-1}}R_2^q + \underline{2^{(k-1)\beta q}||f||_{p,\infty,A_k}R_2^q}\\
&+ 2^{k\beta q}||f||_{p,\infty,A_{k-1}}R_2^q + \underline{2^{k\beta q}||f||_{p,\infty,A_k}R_2^q} + 2^{k\beta q}||f||_{p,\infty,A_{k+1}}R_2^q\\
&+ \underline{2^{(k+1)\beta q}||f||_{p,\infty,A_k}R_2^q} + 2^{(k+1)\beta q}||f||_{p,\infty,A_{k+1}}R_2^q + 2^{(k+1)\beta q}||f||_{p,\infty,A_{k+2}}R_2^q + \ldots
\end{aligned}
$$

Os termos R_2 acima dependem de j, logo são diferentes, mas diferem apenas por constantes. Agrupando portanto esses termos com mesmas normas, podemos reescrever a soma acima como

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{-1}+1+2)2^{k\beta q}||f||^q_{p,\infty,A_k}C\min(2^{kn(1-1/p)q+knq/\sigma},1)\right)^{1/q}\\
&\leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}||f||^q_{p,\infty,A_k}\min(2^{kn(1-1/p)q+knq/\sigma},1)\right)^{1/q}\\
&= c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}||f||^q_{p,\infty,A_k}\min(2^{kq(n(1-1/p)+\beta+n/\sigma)},2^{k\beta q})\right)^{1/q}\\
&= c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q}||f||^q_{p,\infty,A_k}\min(2^{kq(n(1-1/p)-\alpha+\beta+n/\sigma)},2^{k(\beta-\alpha)q})\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Agora, como $-n/\sigma < \beta$ e $\alpha \leq n(1-1/p)$, temos que $0 < n(1-1/p)-\alpha+\beta+n/\sigma \leq m$. Também temos que $\beta \leq \alpha$, logo $\beta-\alpha \leq 0$, e assim os termos dentro do mínimo estão controlados quando k tende a $+\infty$ e quando tende a $-\infty$. Desta forma, obtemos

$$\mathrm{II} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} ||f||^q_{p,\infty,A_k} \right)^{1/q} = c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

Para estimar I, fazemos a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q} \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} ||f||_{p,\infty,A_j} R_1 \right)^q \right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{2} 2^{k\beta q} \sum_{j=-\infty}^{k-2} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_1^q \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=3}^{\infty} 2^{k\beta q} \sum_{j=-\infty}^{0} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_1^q \right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\sum_{k=3}^{\infty} 2^{k\beta q} \sum_{j=1}^{k-2} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_1^q \right)^{1/q} := (*) + (**) + (***).
\end{aligned}$$

Para o primeiro termo, como $R_1 \leq 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)}$,

$$\begin{aligned}
(*) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{2} 2^{k\beta q} \sum_{j=-\infty}^{k-2} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_1^q \right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{2} 2^{k\beta q} \sum_{j=-\infty}^{0} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_1^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{j=-\infty}^{0} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_1^q \sum_{k=-\infty}^{2} 2^{k\beta q} \right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{0} ||f||^q_{p,\infty,A_j} 2^{jn(1-1/p)q} \sum_{k=-\infty}^{2} 2^{k(\beta+n/\sigma)q} \right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j\alpha q} ||f||^q_{p,\infty,A_j} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q} \sum_{k=-\infty}^{2} 2^{k(\beta+n/\sigma)q} \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Como $-n/\sigma < \beta$, temos que $k(\beta + n/\sigma) < 0$ na soma em k acima, e esta é, portanto, finita. Assim,

$$(*) \leq c \left(\sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j\alpha q} ||f||^q_{p,\infty,A_j} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q} \right)^{1/q}.$$

Agora, como $\alpha \leq n(1-1/p)$, temos $j((1-1/p)q-\alpha) \geq 0$ na soma acima, e portanto,

$$(*) \leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

Para o segundo termo, como $R_1 \leq 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)} 2^{-km}$, podemos estimar

$$\begin{aligned}
(**) &= \left(\sum_{k=3}^{\infty} 2^{k\beta q} \sum_{j=-\infty}^{0} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_1^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=3}^{\infty} 2^{k\beta q} 2^{k(n/\sigma-m)q} \sum_{j=-\infty}^{0} ||f||^q_{p,\infty,A_j} 2^{jn(1-1/p)q} \right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_{k=3}^{\infty} 2^{k(\beta+n/\sigma-m)q} \sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j\alpha q} ||f||^q_{p,\infty,A_j} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q} \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Desde que $\alpha \leq n(1-1/p)$, segue que $j(n(1-1/p)-\alpha)q \geq 0$ na soma em j acima, e portanto,

$$(**) \leq \left(\sum_{k=3}^{\infty} 2^{k(\beta+n/\sigma-m)q} \sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j\alpha q} ||f||_{p,\infty,A_j}^q \right)^{1/q}.$$

Ainda, como $\beta + n/\sigma < m$, temos $k(\beta + n/\sigma - m)q < 0$ na soma em k acima, e portanto,

$$(**) \leq c \left(\sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j\alpha q} ||f||_{p,\infty,A_j}^q \right)^{1/q} \leq c||f||_{W\dot{K}_{p,q}^{\alpha}}.$$

Para o terceiro termo, podemos reescrever a soma da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(***) &= \left(\sum_{k=3}^{\infty} 2^{k\beta q} \sum_{j=1}^{k-2} ||f||_{p,\infty,A_j}^q R_1^q \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} ||f||_{p,\infty,A_j}^q R_1^q \sum_{k=j+2}^{\infty} 2^{k\beta q} \right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Assim, como $R_1 \leq 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)} 2^{-km}$, podemos estimar

$$\begin{aligned}(***) &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} ||f||_{p,\infty,A_j}^q 2^{jn(1-1/p)q} \sum_{k=j+2}^{\infty} 2^{k(\beta+n/\sigma-m)q} \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha q} ||f||_{p,\infty,A_j}^q 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q} \sum_{k=j+2}^{\infty} 2^{k(\beta+n/\sigma-m)q} \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha q} ||f||_{p,\infty,A_j}^q 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q} 2^{j(\beta+n/\sigma-m)q} \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k(\beta+n/\sigma-m)q} \right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Observando que $\beta + n/\sigma < m$, a soma em k acima converge. Ainda, como $n(1-1/p) - \alpha + \beta + n/\sigma \leq m$, segue que $\beta + n/\sigma - m \leq \alpha - n(1-1/p)$, e portanto,

$$\begin{aligned}(***) &\leq c \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha q} ||f||_{p,\infty,A_j}^q 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q} 2^{j(\alpha-n(1-1/p))q} \right)^{1/q} \\ &= c \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha q} ||f||_{p,\infty,A_j}^q \right)^{1/q} \leq c||f||_{W\dot{K}_{p,q}^{\alpha}}.\end{aligned}$$

Juntando as três estimativas acima, obtemos

$$\mathrm{I} \leq c||f||_{W\dot{K}_{p,q}^{\alpha}}.$$

Para estimar III, decompomos:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta q}\left(\sum_{j=k+2}^{\infty} ||f||_{p,\infty,A_j} R_3\right)^q\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{k\beta q} \sum_{j=k+2}^{0} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_3^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{k\beta q} \sum_{j=1}^{\infty} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_3^q\right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\sum_{k=-1}^{\infty} 2^{k\beta q} \sum_{j=k+2}^{\infty} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_3^q\right)^{1/q} := (*) + (**) + (***).
\end{aligned}
$$

Para o primeiro termo,

$$
\begin{aligned}
(*) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{k\beta q} \sum_{j=k+2}^{0} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_3^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{k\beta q} \sum_{j=-\infty}^{0} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_3^q\right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{j=-\infty}^{0} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_3^q \sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{k\beta q}\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Usando que $R_3 \leq 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)}$, chegamos na estimativa

$$
\begin{aligned}
(*) &\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{0} ||f||^q_{p,\infty,A_j} 2^{jn(1-1/p)q} \sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{k(\beta+n/\sigma)q}\right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j\alpha q}||f||^q_{p,\infty,A_j} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q} \sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{k(\beta+n/\sigma)q}\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Como $-n/\sigma < \beta$, temos que $k(\beta+n/\sigma)q < 0$ na soma em k acima, e essa soma converge. Logo,

$$
(*) \leq c\left(\sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j\alpha q}||f||^q_{p,\infty,A_j} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q}\right)^{1/q}.
$$

Agora, desde que $\alpha \leq n(1-1/p)$, temos que $j(n(1-1/p)-\alpha)q < 0$ na soma acima, e portanto,

$$
(*) \leq c\left(\sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j\alpha q}||f||^q_{p,\infty,A_j}\right)^{1/q} \leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.
$$

Para o segundo termo, como $R_3 \leq 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)}$, podemos estimar

$$
\begin{aligned}
(**) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{k\beta q} \sum_{j=1}^{\infty} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_3^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} ||f||^q_{p,\infty,A_j} R_3^q \sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{k\beta q}\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} ||f||^q_{p,\infty,A_j} 2^{jn(1-1/p)q} \sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{k(\beta+n/\sigma)q}\right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha q}||f||^q_{p,\infty,A_j} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q} \sum_{k=-\infty}^{-2} 2^{k(\beta+n/\sigma)q}\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Como $-n/\sigma < \beta$, temos $k(\beta + n/\sigma)q$ negativo na soma em k acima, e a soma converge. Além disso, como $\alpha \leq n(1-1/p)$, o termo $j(n(1-1/p)-\alpha)q$ também é negativo na soma em j. Assim, obtemos

$$(**) \leq c\left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha q}||f||_{p,\infty,A_j}^q\right)^{1/q} \leq c||f||_{W\dot{K}_{p,q}^{\alpha}}.$$

Para o terceiro termo, de $R_3 \leq 2^{kn/\sigma}2^{jn(1-1/p)}2^{-jm}$, vem

$$\begin{aligned}(***) &= \left(\sum_{k=-1}^{\infty} 2^{k\beta q}\sum_{j=k+2}^{\infty}||f||_{p,\infty,A_j}^q R_3^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=-1}^{\infty} 2^{k(\beta+n/\sigma)q}\sum_{j=k+2}^{\infty}||f||_{p,\infty,A_j}^q 2^{j(n(1-1/p)-m)q}\right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{k=-1}^{\infty} 2^{k(\beta+n/\sigma)q}\sum_{j=k+2}^{\infty}2^{j\alpha q}||f||_{p,\infty,A_j}^q 2^{j(n(1-1/p)-\alpha-m)q}\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Como $j > k$ na soma em j acima, temos que $2^{-jm} \leq 2^{-km}$. Assim,

$$(***) \leq \left(\sum_{k=-1}^{\infty} 2^{k(\beta+n/\sigma-m)q}\sum_{j=k+2}^{\infty}2^{j\alpha q}||f||_{p,\infty,A_j}^q 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q}\right)^{1/q}.$$

Agora, note que podemos reescrever a soma do lado direito da inequação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}(***) &\leq \left(\sum_{k=-1}^{\infty} 2^{k(\beta+n/\sigma-m)q}\sum_{j=k+2}^{\infty}2^{j\alpha q}||f||_{p,\infty,A_j}^q 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q}\right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha q}||f||_{p,\infty,A_j}^q 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)q}\sum_{k=j-2}^{\infty}2^{k(\beta+n/\sigma-m)q}\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos o seguinte:

$$(***) \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha q}||f||_{p,\infty,A_j}^q 2^{j(n(1-1/p)-\alpha+\beta+n/\sigma-m)q}\sum_{k=-2}^{\infty}2^{k(\beta+n/\sigma-m)q}\right)^{1/q}.$$

Como $\beta+n/\sigma-m < 0$, a soma em k acima converge. Ainda, como $n(1-1/p)-\alpha+\beta+n/\sigma \leq m$, temos que

$$(***) \leq c\left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha q}||f||_{p,\infty,A_j}^q\right)^{1/q} \leq c||f||_{W\dot{K}_{p,q}^{\alpha}}.$$

Juntando as três estimativas acima, obtemos

$$\mathrm{III} \leq c||f||_{W\dot{K}_{p,q}^{\alpha}}.$$

Por fim, juntando as estimativas de I, II e III, temos que

$$||f * \phi||_{\dot{K}_{\sigma,q}^{\beta}} \leq c(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}) \leq c||f||_{W\dot{K}_{p,q}^{\alpha}},$$

e concluímos o caso (1).

Caso (3): Para esse caso, usaremos uma decomposição semelhante à do caso (1):

$$\begin{aligned}||f*\phi||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,\infty}} \leq c &\left[\sup_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j}R_1 + \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=k-1}^{k+1} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j}R_2\right.\\ &\left. + \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j}R_3\right]\\ &:= c[\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}].\end{aligned}$$

Vamos começar estimando II:

$$\mathrm{II} = \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=k-1}^{k+1} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j}R_2 = \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta}\sum_{j=k-1}^{k+1}||f||_{p,\infty,A_j}\min(2^{kn/\sigma}2^{jn(1-1/p)},1).$$

Da mesma forma que fizemos ao estimar II no caso (1), podemos agrupar os três termos que carregam consigo a norma $||f||_{p,\infty,A_k}$, para cada $k\in\mathbb{Z}$. Assim, vamos obter

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &\leq c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j}\min(2^{kn/\sigma}2^{jn(1-1/p)},1)\\ &= c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||f||_{p,\infty,A_j}\min(2^{k(n/\sigma+\beta-\alpha+n(1-1/p))},2^{k(\beta-\alpha)}).\end{aligned}$$

Das hipóteses $n(1-1/p)>\alpha$ e $\beta\geq -n/\sigma$, vem $n(1-1/p)-\alpha+\beta+n/\sigma\geq 0$. Ainda, como $\beta-\alpha\leq 0$, temos que $2^{n(1-1/p)-\alpha+\beta+n/\sigma}\leq 1$ para $k\leq 0$ e $2^{k(\beta-\alpha)}\leq 1$ para $k\geq 0$, e assim,

$$\mathrm{II}\leq c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||f||_{p,\infty,A_j} = c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

Para estimar I, decompomos novamente

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j}R_1\\ &= \sup_{k\leq 2}\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j}R_1 + \sup_{k\geq 3}\sum_{j=-\infty}^{0} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j}R_1 + \sup_{k\geq 3}\sum_{j=1}^{k-2} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j}R_1\\ &:= (*)+(**)+(***).\end{aligned}$$

Para o primeiro termo, como $R_1\leq 2^{kn/\sigma}2^{jn(1-1/p)}$,

$$\begin{aligned}(*) &= \sup_{k\leq 2}\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j}R_1 \leq \sup_{k\leq 2}\sum_{j=-\infty}^{0} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j}2^{kn/\sigma}2^{jn(1-1/p)}\\ &= \sup_{k\leq 2} 2^{k(\beta+n/\sigma)}\sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j\alpha}||f||_{p,\infty,A_j}2^{j(n(1-1/p)-\alpha)} \leq ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}\sup_{k\leq 2} 2^{k(\beta+n/\sigma)}\sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)}.\end{aligned}$$

Como $\alpha<n(1-1/p)$, temos $j(n(1-1/p)-\alpha)$ negativo na soma acima, que portanto converge. Ainda, como $\beta\geq -n/\sigma$, temos o supremo em k limitado por cima:

$$(*)\leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}\sup_{k\leq 2} 2^{k(\beta+n/\sigma)}\leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

Para o segundo termo, como $R_1 \leq 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)} 2^{-km}$,

$$
\begin{aligned}
(**) &= \sup_{k \geq 3} \sum_{j=-\infty}^{0} 2^{k\beta} ||f||_{p,\infty,A_j} R_1 \\
&\leq \sup_{k \geq 3} 2^{k\beta} \sum_{j=-\infty}^{0} ||f||_{p,\infty,A_j} 2^{k(n/\sigma - m)} 2^{jn(1-1/p)} \\
&= \sup_{k \geq 3} 2^{k(\beta + n/\sigma - m)} \sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j\alpha} ||f||_{p,\infty,A_j} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)} \\
&\leq ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \sup_{k \geq 3} 2^{k(\beta + n/\sigma - m)} \sum_{j=-\infty}^{0} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Como $n(1-1/p) - \alpha > 0$, temos $j(n(1-1/p)-\alpha)$ negativo na soma em j acima, e esta converge. Ainda, como $n(1-1/p) - \alpha + \beta + n/\sigma \leq m$, obtemos $\beta + n/\sigma - m < 0$, logo o supremo em k é limitado. Obtemos assim a estimativa

$$
(**) \leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.
$$

Para o terceiro termo, como $R_1 \leq 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)} 2^{-km}$,

$$
\begin{aligned}
(***) &= \sup_{k \geq 3} \sum_{j=1}^{k-2} 2^{k\beta} ||f||_{p,\infty,A_j} R_1 \\
&\leq \sup_{k \geq 3} \sum_{j=1}^{k-2} 2^{k\beta} ||f||_{p,\infty,A_j} 2^{k(n/\sigma - m)} 2^{jn(1-1/p)} \\
&= \sup_{k \geq 3} 2^{k(\beta + n/\sigma - m)} \sum_{j=1}^{k-2} 2^{j\alpha} ||f||_{p,\infty,A_j} 2^{jn(1-1/p-\alpha)} \\
&\leq ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \sup_{k \geq 3} 2^{k(\beta + n/\sigma - m)} \sum_{j=1}^{k-2} 2^{jn(1-1/p-\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Para a série geométrica em j acima, temos que

$$
\sum_{j=1}^{k-2} 2^{jn(1-1/p-\alpha)} = \frac{2^{(k-1)(n(1-1/p)-\alpha)} - 2^{n(1-1/p)-\alpha}}{2^{n(1-1/p)-\alpha} - 1} \leq c 2^{k(n(1-1/p)-\alpha)}.
$$

Assim, podemos estimar o terceiro termo:

$$
\begin{aligned}
(***) &\leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \sup_{k \geq 3} 2^{k(\beta + n/\sigma - m)} 2^{k(n(1-1/p)-\alpha)} \\
&= c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \sup_{k \geq 3} 2^{k(n(1-1/p)-\alpha+\beta+n/\sigma-m)} \\
&\leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.
\end{aligned}
$$

Das três estimativas acima, obtemos

$$
\mathrm{I} \leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.
$$

Para estimar III, fazemos a decomposição

$$\begin{aligned}
\mathrm{III} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j} R_3 \\
&= \sup_{k\le -2} \sum_{j=k+2}^{0} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j} R_3 + \sup_{k\le -2} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j} R_3 \\
&\quad + \sup_{k\ge -1} \sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j} R_3 \\
&:= (*) + (**) + (***).
\end{aligned}$$

Para o primeiro termo, como $R_3 \le 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)}$,

$$\begin{aligned}
(*) &= \sup_{k\le -2} \sum_{j=k+2}^{0} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j} R_3 \\
&\le \sup_{k\le -2} 2^{k(\beta+n/\sigma)} \sum_{j=k+2}^{0} 2^{j\alpha}||f||_{p,\infty,A_j} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)} \\
&\le ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \sup_{k\le -2} 2^{k(\beta+n/\sigma)} \sum_{j=k+2}^{0} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Como $n(1-1/p) > \alpha$, temos $j(n(1-1/p)-\alpha)$ negativo na soma em j acima, e esta converge. Ainda, de $\beta + n/\sigma > 0$, o supremo em k acima é limitado, o que nos dá

$$(*) \le c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

Para o segundo termo, como $R_3 \le 2^{kn/\sigma} 2^{jn(1-1/p)} 2^{-jm}$,

$$\begin{aligned}
(**) &= \sup_{k\le -2} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j} R_3 \\
&\le \sup_{k\le -2} 2^{k(\beta+n/\sigma)} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j\alpha}||f||_{p,\infty,A_j} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha-m)}. \\
&\le ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \sup_{k\le -2} 2^{k(\beta+n/\sigma)} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha-m)}
\end{aligned}$$

Da hipótese $n(1-1/p) - \alpha < m$, a soma em j acima converge. Também, de $\beta + n/\sigma > 0$ e $k \le -2$, o supremo em k é limitado. Desta forma, obtemos

$$(**) \le c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

Para o terceiro termo, como $R_3 \leq 2^{kn/\sigma}2^{jn(1-1/p)}2^{-jm}$,

$$\begin{aligned}
(***) &= \sup_{k\geq -1} \sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{k\beta}||f||_{p,\infty,A_j} R_3 \\
&\leq \sup_{k\geq -1} 2^{k(\beta+n/\sigma)} \sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{j\alpha}||f||_{p,\infty,A_j} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha-m)} \\
&\leq ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \sup_{k\geq -1} 2^{k(\beta+n/\sigma)} \sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{j(n(1-1/p)-\alpha-m)} \\
&= ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \sup_{k\geq -1} \sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{k(\beta+n/\sigma)}2^{j(n(1-1/p)-\alpha-m)}.
\end{aligned}$$

Como $\beta + n/\sigma > 0$ e $k < j$, temos $2^{k(\beta+n/\sigma)} \leq 2^{j(\beta+n/\sigma)}$, e portanto,

$$(***) \leq ||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \sup_{k\geq -1} \sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{j((n(1-1/p)-\alpha+\beta+n/\sigma-m)}.$$

Como $n(1-1/p) - \alpha + \beta + n/\sigma < m$, a soma em j acima converge, e portanto,

$$(***) \leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

As três estimativas acima nos dão

$$\mathrm{III} \leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

Juntando as estimativas de I,II e III, temos

$$||f * \phi||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,\infty}} \leq c(\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}) \leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}},$$

e concluímos o caso (3).

Caso (2): Como já temos os resultados para $q = 1$ e $q = \infty$, usamos o Corolário 2.1.7 e os casos (1) e (3) para obter

$$\begin{aligned}
||f * \phi||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} &= ||f * \phi||_{\left[\dot{K}^{\beta}_{\sigma,1},\dot{K}^{\beta}_{\sigma,\infty}\right]_{1-1/q,q}} \\
&\leq c||f * \phi||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,1}} ||f * \phi||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,\infty}} \\
&\leq c||f||_{W\dot{K}^{\beta}_{\sigma,1}} ||f||_{W\dot{K}^{\beta}_{\sigma,\infty}} \\
&\leq c||f||_{W\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}},
\end{aligned}$$

o que nos dá o resultado.

(ii) O caso (ii) é análogo ao caso (i), usando o caso (ii) do Lema 2.2.2 em vez do caso (i) do mesmo Lema para decompor $||f * \phi||_{W\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}}$ em vez de $||f * \phi||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}}$.

(iii) Também é análogo ao caso (i), usando o caso (iii) do Lema 2.2.2 em vez do caso (i) do mesmo Lema.

∎

Agora, usando a Proposição 2.2.3, podemos controlar o comportamento do semigrupo do calor $e^{t\Delta}$ e de $e^{t\Delta}\mathbb{P}$, bem como de $\nabla e^{t\Delta}$ e $\nabla e^{t\Delta}\mathbb{P}$. Essas estimativas serão essenciais para provar os teoremas centrais deste trabalho, e esse corolário será utilizado diversas vezes em futuras demonstrações.

Corolário 2.2.4. *Sejam* $1 < p \leq \sigma \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $-n/\sigma \leq \beta \leq \alpha \leq n(1-1/p)$ *e* $j \in \{0,1\}$.
[I] *Se os expoentes satisfazem as primeiras duas condições de (1),(2) ou (3) na Proposição 2.2.3, as seguintes desigualdades valem:*

(i) *No caso* $p < \sigma$,

$$||\nabla^j e^{t\Delta} f||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} \leq ct^{-j/2-(\alpha-\beta+n(1/p-1/\sigma))/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

(ii) *No caso* $p = \sigma$,

$$||\nabla^j e^{t\Delta} f||_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \leq ct^{-j/2-(\alpha-\beta)/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

(iii) *No caso* $p < \sigma$,

$$||\nabla^j e^{t\Delta}\mathbb{P} f||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} \leq ct^{-j/2-(\alpha-\beta+n(1/p-1/\sigma))/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

(iv) *No caso* $p = \sigma$, *se* $j = 1$ *ou* $\beta < \alpha$,

$$||\nabla^j e^{t\Delta}\mathbb{P} f||_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \leq ct^{-j/2-(\alpha-\beta)/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

[II] *Se* $1 < p < \infty$ *e* $-n/p < \alpha < n(1-1/p)$, *então*

$$||e^{t\Delta}\mathbb{P} f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

Demonstração:

[I] (i): No que diz respeito aos índices, as primeiras duas condições de cada caso ((1),(2),(3)) juntamente com $p < \sigma$, garantem as seguintes, tomando-se $m = n$.

Temos pelo que foi abordado na dedução de (E.I), mais precisamente na definição feita na página 16, a seguinte identidade equivalente para o semigrupo do calor: $e^{t\Delta}f = (f_{1/\sqrt{t}} * G)_{\sqrt{t}}$. Como G decresce mais rápido que o inverso de qualquer polinômio, podemos aplicar a Proposição 2.2.3 com $\phi = G$, juntamente com o Lema 2.1.15 para obter as estimativas a seguir.

Para $j = 0$,

$$\begin{aligned}
||e^{t\Delta} f||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} &= ||(f_{1/\sqrt{t}} * G)_{\sqrt{t}}||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} \\
&= \left|\left|t^{-n/2}\left(t^{n/2} f(\cdot\sqrt{t}) * G\right)\left(\cdot/\sqrt{t}\right)\right|\right|_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} \\
&\leq ct^{(\beta+n/\sigma)/2}\left|\left|f(\cdot\sqrt{t}) * G\right|\right|_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} \\
&\leq ct^{(\beta+n/\sigma)/2}||f(\cdot\sqrt{t})||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \\
&\leq ct^{-(\alpha-\beta+n(1/p-1/\sigma))/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.
\end{aligned}$$

Para $j=1$, usamos ainda a regra da cadeia e a identidade $\nabla G = \frac{1}{2}G$:

$$\begin{aligned}
||\nabla e^{t\Delta} f||_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} &= \left|\left|\nabla \left(f(\cdot\sqrt{t}) * G\right)\left(\cdot/\sqrt{t}\right)\right|\right|_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} \\
&= t^{-1/2}\left|\left|\left(\nabla(f(\cdot\sqrt{t}) * G)\right)\left(\cdot/\sqrt{t}\right)\right|\right|_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} \\
&\leq ct^{-1/2+(\beta+n/\sigma)/2}\left|\left|\nabla(f(\cdot\sqrt{t}) * G)\right|\right|_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} \\
&= ct^{-1/2+(\beta+n/\sigma)/2}\left|\left|f(\cdot\sqrt{t}) * \nabla G\right|\right|_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} \\
&= ct^{-1/2+(\beta+n/\sigma)/2}\left|\left|f(\cdot\sqrt{t}) * G\right|\right|_{\dot{K}^{\beta}_{\sigma,q}} \\
&\leq ct^{-1/2+(\beta+n/\sigma)/2}||f(\cdot\sqrt{t})||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \\
&\leq ct^{-1/2-(\alpha-\beta+n(1/p-1/\sigma))/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.
\end{aligned}$$

[I] (ii): Para o caso $p=\sigma$, procedemos da mesma maneira que no caso anterior, mas usando dessa vez o caso (ii) da Proposição 2.2.3. No que diz respeito aos índices, podemos tomar $m=n+1$ para forçar as desigualdades estritas.

Para $j=0$,

$$\begin{aligned}
||e^{t\Delta} f||_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} &= \left|\left|\left(f(\cdot\sqrt{t}) * G\right)\left(\cdot/\sqrt{t}\right)\right|\right|_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \\
&\leq ct^{(\beta+n/\sigma)/2}\left|\left|f(\cdot\sqrt{t}) * G\right|\right|_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \\
&\leq ct^{(\beta+n/\sigma)/2}||f(\cdot\sqrt{t})||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \\
&\leq ct^{-(\alpha-\beta+n(1/p-1/\sigma))/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.
\end{aligned}$$

Para $j=1$,

$$\begin{aligned}
||\nabla e^{t\Delta} f||_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} &= \left|\left|\nabla \left(f(\cdot\sqrt{t}) * G\right)\left(\cdot/\sqrt{t}\right)\right|\right|_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \\
&= t^{-1/2}\left|\left|\left(\nabla(f(\cdot\sqrt{t}) * G)\right)\left(\cdot/\sqrt{t}\right)\right|\right|_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \\
&\leq ct^{-1/2+(\beta+n/\sigma)/2}\left|\left|\nabla(f(\cdot\sqrt{t}) * G)\right|\right|_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \\
&= ct^{-1/2+(\beta+n/\sigma)/2}\left|\left|f(\cdot\sqrt{t}) * \nabla G\right|\right|_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \\
&= ct^{-1/2+(\beta+n/\sigma)/2}\left|\left|f(\cdot\sqrt{t}) * G\right|\right|_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \\
&\leq ct^{-1/2+(\beta+n/\sigma)/2}||f(\cdot\sqrt{t})||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \\
&\leq ct^{-1/2-(\alpha-\beta+n(1/p-1/\sigma))/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.
\end{aligned}$$

[I](iii) Para este caso e o seguinte, usaremos a identidade $e^{t\Delta}\mathbb{P}f = f * \mathbb{K}_{\sqrt{t}}$, que exprime o semigrupo da projeção de Leray-Hopf como uma convolução com o núcleo de Oseen $\mathbb{K}_{\sqrt{t}}$, sendo

$\mathbb{K}$ uma função suave que satisfaz

$$|\nabla^j \mathbb{K}(x)| \leq c(1+|x|)^{-(n+j)}.$$

Para uma demonstração dessa identidade, veja [20]. Novamente, sobre os índices, assim como foi falado no item (i), podemos tomar $m = n$, e as duas primeiras desigualdades dos casos (1),(2) e (3) garantem as restantes. Assim, podemos de fato aplicar a Proposição 2.2.3. Reescrevemos a identidade da convolução como $e^{t\Delta}\mathbb{P}f = f * \mathbb{K}_{\sqrt{t}} = (f_{1/\sqrt{t}} * \mathbb{K})_{\sqrt{t}}$. Os cálculos se tornam exatamente os mesmos que os do caso (i), apenas trocando G por $\mathbb{K}$, e obtemos

$$||\nabla^j e^{t\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \leq ct^{-j/2-(\alpha-\beta+n(1/p-1/\sigma))/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

[I](iv) Para o caso $j = 1$, vamos usar novamente o núcleo de Oseen, tomando $m = n + 1$. Desta forma, os cálculos se tornam exatamente os mesmos do caso (ii), trocando G por $\mathbb{K}$, e portanto obtemos

$$||\nabla e^{t\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \leq ct^{-1/2-(\alpha-\beta)/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

Vamos considerar agora o caso $\beta < \alpha$. Este será dividido novamente, em mais três casos.

- Caso $p < \infty$ e $-n/p < \beta$: Neste caso vamos usar a Proposição 2.2.5, que será provada após o presente corolário, na página 56. Temos que o operador projeção $\mathbb{P}$ satisfaz as condições da Proposição 2.2.5 para $r = p$, ou seja, $\mathbb{P}$ é limitada em $W\dot{K}^{\beta}_{p,q}$. Logo, temos que

  $$||e^{t\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \leq c||e^{t\Delta}f||_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}}.$$

  Usando agora o caso (ii), segue que

  $$||e^{t\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{\beta}_{p,q}} \leq ct^{-(\alpha-\beta)/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.$$

- Caso $p < \infty$ e $-n/p = \beta$: Sejam $\varepsilon, \theta > 0$ tais que $-n/p+\varepsilon < n(1-1/p)$ e $-n/p+\varepsilon+\theta = \alpha$. Observe que o operador $e^{\frac{t}{2}\Delta}$ é uma convolução com $G_{\sqrt{t/2}}$, uma função que também está em $\mathcal{S}$. Dessa maneira, os casos anteriores valem para $e^{\frac{t}{2}\Delta}$ da mesma forma que valem para $e^{t\Delta}$. Temos, portanto, aplicando o caso (ii) para $e^{\frac{t}{2}\Delta}$,

  $$\begin{aligned} ||e^{t\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{-n/p}_{p,q}} &= ||e^{\frac{t}{2}\Delta}e^{\frac{t}{2}\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{-n/p}_{p,q}} \\ &\leq ct^{-\varepsilon/2}||e^{\frac{t}{2}\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{-n/p+\varepsilon}_{p,q}}. \end{aligned}$$

  Agora, como $p < \infty$ e $-n/p < -n/p + \varepsilon$, estamos novamente no mesmo caso que o anterior, onde $\mathbb{P}$ é limitada em $W\dot{K}^{\beta}_{p,q}$. Assim,

  $$\begin{aligned} ||e^{t\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{-n/p}_{p,q}} &\leq ct^{-(\varepsilon+\theta)/2}||f||_{W\dot{K}^{-n/p+\varepsilon+\theta}_{p,q}} \\ &= ct^{-(\alpha-\beta)/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}. \end{aligned}$$

- Caso $p = \infty$: Tome $r \in (1, \infty)$ tal que $-n/r < \beta < n(1 - 1/r)$. Aplicando o caso (i) para $e^{\frac{t}{2}\Delta}$, temos que
$$||e^{t\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{\beta}_{\infty,q}} \leq ct^{-n/2r}||e^{\frac{t}{2}\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{\beta}_{r,q}}.$$
Como $r < \infty$ e $-n/r < \beta$, mais uma vez pela Proposição 2.2.5 temos que $\mathbb{P}$ é limitada em $W\dot{K}^{\beta}_{r,q}$. Assim,
$$||e^{t\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{\beta}_{\infty,q}} \leq ct^{-n/2r}||e^{\frac{t}{2}\Delta}f||_{W\dot{K}^{\beta}_{r,q}}.$$
Pelo Lema 2.1.4, temos que $W\dot{K}^{\beta+n/r}_{\infty,q} \subset W\dot{K}^{\beta}_{r,q}$ Logo,
$$||e^{t\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{\beta}_{\infty,q}} \leq ct^{-n/2r}||e^{\frac{t}{2}\Delta}f||_{W\dot{K}^{\beta+n/r}_{\infty,q}}.$$
Por fim, aplicando o caso (ii) novamente, obtemos o resultado
$$||e^{t\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{\beta}_{\infty,q}} \leq ct^{-(\alpha-\beta)/2}||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{\infty,q}}.$$

[II] Como $1 < p < \infty$ e $-n/p < \alpha < n(1 - 1/p)$, temos que $\mathbb{P}$ é limitada em $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$, e estimamos diretamente, usando (ii):
$$\begin{aligned}||e^{t\Delta}\mathbb{P}f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} &\leq c||e^{t\Delta}f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}\\ &\leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.\end{aligned}$$

■

A próxima proposição nos garante a limitação de diversos operadores nos espaços de Herz fracos, como por exemplo o operador maximal de Hardy-Littlewood, o operador de Calderon-Zygmund e operadores integrais fracionais.

Proposição 2.2.5. *Sejam* $1 < p < n/\gamma$, $0 < q \leq \infty$, $0 \leq \gamma < n$ *e* $-n/p + \gamma < \alpha < n(1 - 1/p)$. *Seja* r *dado por* $1/p - 1/r = \gamma/n$, *e* T_γ *um operador limitado de* $L^{p,\infty}$ *em* $L^{r,\infty}$, *com* $||T_\gamma||_{L^{p,\infty}\to L^{r,\infty}} \leq C_1$, *satisfazendo*
$$|T_\gamma(f)(x)| \leq C_2 \int \frac{|f(x)|}{|x-y|^{n-\gamma}}dy,$$
para $f \in L^1_{loc}$ *com* $x \notin \operatorname{supp} f$. *Então,* T_γ *é um operador limitado de* $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ *em* $W\dot{K}^{\alpha}_{r,q}$, *com* $||T_\gamma|| \leq c(C_1 + C_2)$.

Demonstração: Vamos provar apenas o caso $q = \infty$. Queremos mostrar que
$$||T_\gamma(f)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \leq c(C_1 + C_2)||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

Fazemos a decomposição

$$
\begin{aligned}
||T_\gamma(f)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{r,\infty}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||T_\gamma(f)||_{r,\infty,A_k} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \sup_{\lambda>0} \lambda|\{x\in A_k : |T_\gamma(f)(x)|>\lambda\}|^{1/r} \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \sup_{\lambda>0} \lambda \left| \left\{ x\in A_k : \Big|\sum_{j\in\mathbb{Z}} T_\gamma(f\chi_j)(x)\Big| > \lambda \right\} \right|^{1/r} \\
&\le \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \sup_{\lambda>0} \lambda \left| \left\{ x\in A_k : \sum_{j=-\infty}^{k-2} \Big|T_\gamma(|f\chi_j|)(x)\Big| > \lambda \right\} \right|^{1/r} \\
&\quad + \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \sup_{\lambda>0} \lambda \left| \left\{ x\in A_k : \sum_{j=k-1}^{k+1} \Big|T_\gamma(|f\chi_j|)(x)\Big| > \lambda \right\} \right|^{1/r} \\
&\quad + \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \sup_{\lambda>0} \lambda \left| \left\{ x\in A_k : \sum_{j=k+2}^{\infty} \Big|T_\gamma(|f\chi_j|)(x)\Big| > \lambda \right\} \right|^{1/r} \\
&=: \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.
\end{aligned}
$$

Para estimar II, usaremos o seguinte: Durante a demonstração do caso (1) da Proposição 2.2.3, abrimos a soma das normas e observamos que para cada $k\in\mathbb{Z}$, havia três termos com a norma de f em A_k. Para II, acontece o mesmo, e podemos agrupar esses termos. Desta forma, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \sup_{\lambda>0} \lambda \left| \left\{ x\in A_k : \sum_{j=k-1}^{k+1} \Big|T_\gamma(|f\chi_j|)(x)\Big| > \lambda \right\} \right|^{1/r} \\
&\le \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \sum_{j=k-1}^{k+1} \sup_{\lambda>0} \lambda \left| \left\{ x\in A_k : \Big|T_\gamma(|f\chi_j|)(x)\Big| > \lambda \right\} \right|^{1/r} \\
&\le c \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||T_\gamma(f)||_{r,\infty,A_k} \le cC_1 \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha}||f||_{p,\infty,A_k} = cC_1||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.
\end{aligned}
$$

Vamos estimar I. Seja $x\in A_k$. Como já comentamos na demonstração do Lema 2.2.2, se $y\in A_j$, temos $|x-y|\gtrsim 2^k$. Desta forma,

$$
\begin{aligned}
T_\gamma(|f\chi_j|)(x) &\le C_2 \int \frac{|f\chi_j(x)|}{|x-y|^{n-\gamma}} dy \\
&= C_2 \int_{A_j} \frac{|f(x)|}{|x-y|^{n-\gamma}} dy \\
&\le cC_2 2^{-k(n-\gamma)} \int_{A_j} |f(x)| dy = cC_2 2^{-k(n+\gamma)}||f||_{1,A_j}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{k-2} T_\gamma(|f\chi_j|)(x) &\le cC_2 2^{-k(n+\gamma)} \sum_{j=-\infty}^{k-2} ||f||_{1,A_j} \\
&\le cC_2 2^{-k(n+\gamma)} \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{jn(1-1/p)}||f||_{p,\infty,A_j} =: A.
\end{aligned}
$$

A desigualdade acima nos diz que, se $\lambda > A$, então $\lambda > \sum_{j\leq k-2} T_\gamma(f\chi_{A_j})(x)$, e o conjunto $\{x \in A_k : \sum_{j\leq k-2} T_\gamma(f_j)(x) > \lambda\}$ possui medida nula. Desta forma, a norma $p-$fraca de $T_\gamma(f\chi_{A_j})$ pode ser tomada com o supremo em $\lambda \leq A$. Ainda, o conjunto $\{x \in A_k : \sum_{j\leq k-2} T_\gamma(f_j)(x) > \lambda\}$ está contido em A_k, e pela monotonicidade da medida, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \sup_{0<\lambda\leq A} \lambda \left| \left\{ x \in A_k : \sum_{j=-\infty}^{k-2} \left| T_\gamma(|f\chi_j|)(x) \right| > \lambda \right\} \right|^{1/r} \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha} A|A_k| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha} cC_2 2^{-k(n-\gamma)} 2^{kn/r} \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{jn(1-1/p)} ||f||_{p,\infty,A_j}. \end{aligned}$$

Como $n/r + \gamma = n/p$ e $j < k$, temos $2^{-k(n-\gamma-n/r)} 2^{k\alpha} \leq 2^{-kn(1-1/p)} 2^{j\alpha}$, e assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &\leq cC_2 \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-kn(1-1/p)} \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{jn(1-1/p)} 2^{j\alpha} ||f||_{p,\infty,A_j} \\ &\leq cC_2 ||f||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-kn(1-1/p)} \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{jn(1-1/p)} \\ &= cC_2 ||f||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{(j-k)n(1-1/p)} \leq cC_2 ||f||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}}. \end{aligned}$$

Analogamente a I, podemos estimar III e obter

$$\mathrm{III} \leq cC_2 ||f||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}}.$$

Portanto, juntando as três estimativas, obtemos

$$||T_\gamma(f)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \leq c(C_1 + C_2) ||f||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}}.$$

■

Por fim, temos uma proposição que será usada nos Teoremas 3.4.1 e 4.1.1. Ao concluí-la, teremos todas as estimativas necessárias para provar os teoremas centrais deste trabalho. Antes, precisaremos de um lema que garante a inclusão contínua da interpolação de espaços de Herz fracos quando variamos o parâmetro p.

Lema 2.2.6. *Sejam $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ e seja p tal que $2/p = 1/p_1 + 1/p_2$. Então,*

$$\left[W\dot{K}^\alpha_{p_1,\infty}, W\dot{K}^\alpha_{p_2,\infty} \right]_{1/2,\infty} \hookrightarrow W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}.$$

Demonstração: Primeiramente, observe que

$$L^{p,\infty} = \left[L^1, L^\infty \right]_{1-1/p,\infty} = \left[L^{p_1,\infty}, L^{p_2,\infty} \right]_{1/2,\infty}.$$

De fato, da caracterizaçao (1.11) para espaçoes de Lorentz, temos que $L^{p_1,\infty} = [L^1, L^\infty]_{1-1/p_1,\infty}$ e $L^{p_2,\infty} = [L^1, L^\infty]_{1-1/p_2,\infty}$, e a relação entre p, p_1, p_2 nos dá

$$1 - \frac{1}{p} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p_2}\right),$$

e aplicando o Teorema 1.2.14 de Reiteração para interpolação de espaços, obtemos a igualdade desejada.

Para verificar a inclusão contínua que desejamos, é suficiente mostrar que

$$||g\chi_k||_{p,\infty} \leq c2^{-k\alpha}||g||_{\left[W\dot{K}^{\alpha}_{p_1,\infty},W\dot{K}^{\alpha}_{p_2,\infty}\right]_{1/2,\infty}}.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $2^{k\alpha}$ e tomando o supremo, o resultado segue. Vamos, portanto, estimar $||g\chi_k||_{p,\infty}$.

$$\begin{aligned}||g\chi_k||_{p,\infty} &\approx ||g\chi_k||_{[L^{p_1,\infty},L^{p_2,\infty}]_{1/2,\infty}}\\ &= \sup_{\lambda>0}\lambda^{-1/2}\inf_{g\chi_k=g_1+g_2}\left(||g_1||_{p_1,\infty}+\lambda||g_2||_{p_2,\infty}\right).\end{aligned}$$

Observe que, se restringirmos a decomposição $g\chi_k = g_1 + g_2$ apenas a funções que se anulam fora de A_k, o conjunto de tais funções diminui e portanto, o seu ínfimo aumenta. Ainda, esse segundo conjunto é a restrição a A_k de funções que decompõem g, ou seja,

$$\begin{aligned}||g\chi_k||_{p,\infty} &\leq \sup_{\lambda>0}\lambda^{-1/2}\inf_{\substack{g\chi_k=g_1+g_2\\ g_1=g_2=0 \text{ em } A_k^c}}\left(||g_1||_{p_1,\infty}+\lambda||g_2||_{p_2,\infty}\right)\\ &= \sup_{\lambda>0}\lambda^{-1/2}\inf_{g=g_1+g_2}\left(||g_1||_{p_1,\infty}+\lambda||g_2||_{p_2,\infty}\right)\\ &\leq 2^{-k\alpha}\sup_{\lambda>0}\lambda^{-1/2}\inf_{g=g_1+g_2}\left(||g_1||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p_1,\infty}}+\lambda||g_2||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p_2,\infty}}\right)\\ &= 2^{-k\alpha}||g||_{\left[W\dot{K}^{\alpha}_{p_1,\infty},W\dot{K}^{\alpha}_{p_2,\infty}\right]_{1/2,\infty}}.\end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. ■

Proposição 2.2.7. *Sejam $n \geq 2$, $1 < p < n$, $1 \leq q \leq \infty$ e $1 - n/p < \alpha < n(1 - 1/p)$. Para $\beta > 0$ satisfazendo*

$$0 < \beta < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}(1/p - 1/n), \frac{1}{2}(1 - 1/p + 1/n), \frac{1}{2}(\alpha - (1 - n/p))\right),$$

suponha que

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{2\beta}{n}, \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} - \frac{2\beta}{n} \text{ e } \frac{1}{p} - \frac{1}{r} = \frac{1}{n}.$$

Então, para todo par $j, k \in \{1, ..., n\}$,

$$\left|\left|\int_0^\infty (-\Delta)^{1/2}e^{t\Delta}\mathbb{P}_{j,k}f(t)dt\right|\right|_{\left[W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,q},W\dot{K}^{\alpha}_{r_2,q}\right]_{1/2,\infty}} \leq c||f||_{L^\infty(0,\infty;W\dot{K}^{\alpha}_{p,q})}.$$

Em particular, no caso $q = \infty$, temos

$$\left|\left|\int_0^\infty (-\Delta)^{1/2}e^{t\Delta}\mathbb{P}_{j,k}f(t)dt\right|\right|_{W\dot{K}^{\alpha}_{r,\infty}} \leq c||f||_{L^\infty(0,\infty;W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty})}.$$

Demonstração: Seja $A>0$. Fazemos a decomposição

$$\begin{aligned}
F &:= \int_0^\infty (-\Delta)^{1/2} e^{t\Delta}\mathbb{P}_{j,k} f(t)dt \\
&= \int_0^A (-\Delta)^{1/2} e^{t\Delta}\mathbb{P}_{j,k} f(t)dt + \int_A^\infty (-\Delta)^{1/2} e^{t\Delta}\mathbb{P}_{j,k} f(t)dt \\
&= \int_0^A (-\Delta)^{1-\beta} e^{t\Delta}\mathbb{P}_{j,k}(-\Delta)^{-(1/2-\beta)} f(t)dt + \int_0^A (-\Delta)^{1+\beta} e^{t\Delta}\mathbb{P}_{j,k}(-\Delta)^{-(1/2+\beta)} f(t)dt \\
&=: G_A + H_A.
\end{aligned}$$

Vamos estimar G_A. Para isso, vamos usar a Proposição 2.2.5 com $\gamma = 1-2\beta$. Observe que todas as hipóteses com respeito aos índices são satisfeitas. Primeiramente, temos

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r_1} = \frac{1-2\beta}{n}.$$

Como $\beta>0$ e $p<n$, obtemos $1-2\beta<1<n/p$. De $\beta<1/2$, vem $0\le 1-2\beta<1<n$. Por fim, a condição $1-n/p<\alpha$ nos dá $-n/p+(1-2\beta)<\alpha-2\beta<\alpha$. Portanto, podemos aplicar a Proposição 2.2.5 a qualquer operador que satisfaça as condições de limitação. Observe que

$$\begin{aligned}
||G_A||_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,q}} &\le \int_0^A \left|\left|(-\Delta)^{1-\beta} e^{t\Delta}\mathbb{P}_{j,k} I_{1-2\beta} f(t)\right|\right|_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,q}} dt \\
&\le c\int_0^A t^{\beta-1}\left|\left|e^{\frac{t}{2}\Delta}\mathbb{P}_{j,k} I_{1-2\beta} f(t)\right|\right|_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,q}} dt,
\end{aligned}$$

onde $I_{2s}=(-\Delta)^{-s}$ é o operador Integral Fracional. Pelo Corolário 2.2.4,[II], o semigrupo do calor aplicado na projeção de Leray-Hopf é um operador limitado em $W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,q}$. Logo,

$$||G_A||_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,q}} \le c\int_0^A t^{\beta-1}||I_{1-2\beta} f(t)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,q}} dt.$$

Agora, como o operador I_s satisfaz as condições de limitação da Proposição 2.2.5, podemos aplicá-la e obter

$$||G_A||_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,q}} \le c\int_0^A t^{\beta-1}||f(t)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} dt \le cA^\beta ||f||_{L^\infty(0,\infty;W\dot{K}^{\alpha}_{p,q})}.$$

Para estimar H_A, vamos aplicar a Proposição 2.2.5 novamente, com $\gamma = 1+2\beta$. As hipóteses referentes aos índices são todas satisfeitas. De fato,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r_2} = \frac{1+2\beta}{n}.$$

De $\beta < \frac{n}{2}(1/p-1/n)$, vem $p<\frac{n}{1+2\beta}$. Como $0<\beta<1/2$ e $n\ge 3$, temos $0\le 1+2\beta<2<n$. Por fim, a condição $\beta<\frac{1}{2}(\alpha-(1-n/p))$ garante que $-n/p+1+2\beta<\alpha$. Assim, procedemos da mesma maneira que fizemos com H_A e obtemos

$$\begin{aligned}
||H_A||_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_2,q}} &\leq \int_0^A \left|\left|(-\Delta)^{1+\beta} e^{t\Delta}\mathbb{P}_{j,k} I_{1+2\beta} f(t)\right|\right|_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_2,q}} dt \\
&\leq c\int_0^A t^{-\beta-1}\left|\left|e^{\frac{t}{2}\Delta}\mathbb{P}_{j,k} I_{1+2\beta} f(t)\right|\right|_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_2,q}} dt \\
&\leq c\int_0^A t^{-\beta-1}||I_{1+2\beta} f(t)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_2,q}} dt \\
&\leq c\int_0^A t^{-\beta-1}||f(t)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} dt \leq cA^{-\beta}||f||_{L^\infty(0,\infty;W\dot{K}^{\alpha}_{p,q})}.
\end{aligned}$$

Com essas duas estimativas, tomando $A = t^{1/2\beta}$, e denotando $\overline{WK} := \left[W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,q}, W\dot{K}^{\alpha}_{r_2,q}\right]_{1/2,\infty}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\left|\int_0^\infty (-\Delta)^{1/2} e^{t\Delta}\mathbb{P}_{j,k} f(t)dt\right|\right|_{\overline{WK}} &= \sup_{t>0} t^{-1/2} K(t, F; W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,q}, W\dot{K}^{\alpha}_{r_2,q}) \\
&\leq \sup_{t>0} t^{-1/2}\left(||G_{t^{1/2\beta}}||_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,q}} + t||H_{t^{1/2\beta}}||_{W\dot{K}^{\alpha}_{r_2,q}}\right) \\
&\leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}.
\end{aligned}$$

Para o caso particular $q = \infty$, basta combinar o resultado com o Lema anterior, que nos dá a inclusão contínua

$$\left[W\dot{K}^{\alpha}_{r_1,\infty}, W\dot{K}^{\alpha}_{r_2,\infty}\right]_{1/2,\infty} \hookrightarrow W\dot{K}^{\alpha}_{r,\infty},$$

e assim obtemos o resultado. ■

2.3 Imersões de Espaços de Herz em Espaços de Besov

Até o momento alguns dos trabalhos mais importantes conseguiram boa-colocação em alguns espaços de Besov, [3] e no espaço BMO^{-1}, [17]. Vamos mostrar nessa seção que os espaços de Herz fracos estão imersos em espaços de Besov em diversos casos quando $\alpha > 0$. Antes, vamos apresentar a definição dos espaços de Besov, que é baseada na decomposição de Littlewood-Paley apresentada na página 28.

Definição 2.3.1. *Sejam* $1 \leq q \leq \infty$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Uma distribuição temperada* $v \in \mathcal{S}'$ *pertence ao espaço de Besov* $\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}$ *se, e só se, a norma* $||v||_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}}$ *é finita, onde*

$$||v||_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}} := \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||\Delta_j v||_q.$$

Para o caso particular $\alpha > 0$, a norma no espaço de Besov é equivalente a outras três (veja [3]). De fato, temos , para $\alpha > 0$,

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||\Delta_j v||_q \approx \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\alpha}||S_j v||_q \approx \sup_{t\geq 0} t^{\alpha/2}||e^{t\Delta}v||_q \approx \sup_{t\geq 0}||e^{t\Delta}v||_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}}.$$

Desta forma, podemos utilizar qualquer uma das normas acima para os espaços de Besov, quando $\alpha > 0$.

Para conveniência do leitor, relembramos também as definições dos espaços de funções de oscilação média limitada, ou *Bounded Mean Oscilation*, BMO, bem como suas variações.

Definição 2.3.2. *Dizemos que a distribuição temperada f está em BMO se a quantidade*

$$||f||_{BMO} := \sup_{Q} \left(\fint_Q \int_0^{l(Q)^2} |\nabla e^{t\Delta} f|^2 dt dx \right)^{1/2}$$

é finita, onde o supremo é tomado sobre todos os cubos Q, a integral $\fint_Q$ denota a integral média, ou seja, $\fint_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q$, e $l(Q)$ representa o comprimento do lado do cubo Q.

Observação 2.3.3. *A expressão acima não define uma norma, já que resulta em zero quando aplicada a constantes.*

Definição 2.3.4. *Dizemos que a distribuição temperada f está em BMO^{-1} se a norma*

$$||f||_{BMO^{-1}} := \sup_{Q} \left(\fint_Q \int_0^{l(Q)^2} |e^{t\Delta} f|^2 dt dx \right)^{1/2}$$

é finita.

É claro que o divergente de um campo vetorial com componentes em BMO está em BMO^{-1}. A recíproca também é verdadeira, isto é, uma distribuição temperada u está em BMO^{-1} se, e somente se, existem $f_i \in BMO$ tais que $u = \sum_i \partial_i f_i$. Para uma demonstração desse fato, veja [17]. Por fim, para demonstrarmos a inclusão $W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty} \hookrightarrow BMO^{-1}$, utilizaremos o subespaço de BMO^{-1} que consiste em tomar o supremo apenas sobre os cubos de medida menor ou igual a 1.

Definição 2.3.5. *Dizemos que a distribuição temperada f está em bmo^{-1} se a norma*

$$||f||_{bmo^{-1}} := \sup_{|Q| \leq 1} \left(\fint_Q \int_0^{l(Q)^2} |e^{t\Delta} f|^2 dt dx \right)^{1/2}$$

é finita.

Teorema 2.3.6. *São válidas as seguintes inclusões:*

(I) *Caso $\sigma < \infty$:*

(i) *Se $1 < p < \sigma < \infty$ e $0 < \alpha < n(1 - 1/p)$, temos*

$$W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty} \hookrightarrow \dot{B}^{-(\alpha + n(1/p - 1/\sigma))}_{\sigma,\infty}.$$

(ii) *Se $1 < p < \infty$ e $0 < \alpha < n(1 - 1/p)$, temos*

$$\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty} \hookrightarrow \dot{B}^{-\alpha}_{p,\infty}.$$

(iii) *Se* $1 < p < \sigma < \infty$, *temos*

$$W\dot{K}^{0}_{p,\sigma} \hookrightarrow \dot{B}^{-n(1/p-1/\sigma)}_{p,\infty}.$$

(II) *Caso* $\sigma = \infty$.

(iv) *Se* $1 < p < \infty$ *e* $0 < \alpha < n(1-1/p)$, *temos*

$$W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty} \hookrightarrow \dot{B}^{-(\alpha+n/p)}_{\infty,\infty}.$$

(v) *Se* $0 < \alpha < n$, *temos*

$$\dot{K}^{\alpha}_{\infty,\infty} \hookrightarrow \dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}.$$

(vi) *Temos que*

$$L^1 = \dot{K}^{0}_{1,1} \hookrightarrow \dot{B}^{-n}_{\infty,\infty}.$$

(III)

(vii) *Se* $n < p < \sigma < \infty$ *e* $0 < \alpha < 1 - n/p$, *temos*

$$W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty} \hookrightarrow bmo^{-1}.$$

Demonstração: Na demonstração, usaremos a seguinte caracterização da norma dos espaços de Besov:

$$||f||_{\dot{B}^{-\alpha}_{p,\infty}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\alpha}||S_k f||_p,$$

a qual é equivalente à definição padrão quando $\alpha > 0$. Lembramos que o operador S_k da decomposição de Paley-Littlewood é uma convolução com a função $\phi_{2^{-k}}$, onde $\phi \in \mathcal{S}$, que pode ser reescrita da mesma forma que já fizemos para o semigrupo do calor como $S_k f = (f_{2^k} * \phi)_{2^{-k}}$.

(i) Nesse caso, temos que $-n/\sigma < 0 < \alpha < n(1-1/p)$, e estamos nas condições da Proposição 2.2.3. Primeiramente, temos que

$$\begin{aligned}
||f||_{\dot{B}^{-(\alpha+n(1/p-1/\sigma))}_{\sigma,\infty}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1/\sigma))}||(f_{2^k} * \phi)_{2^{-k}}||_\sigma \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1/\sigma))}||2^{kn}(f_{2^k} * \phi)(2^k\cdot)||_\sigma \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1-1/\sigma))}||(f_{2^k} * \phi)(2^k\cdot)||_{\dot{K}^{0}_{\sigma,\sigma}}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.15, obtemos

$$||f||_{\dot{B}^{-(\alpha+n(1/p-1/\sigma))}_{\sigma,\infty}} \leq c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1))}||f_{2^k} * \phi||_{\dot{K}^{0}_{\sigma,\sigma}}.$$

Aplicando a Proposição 2.2.3, segue que

$$\begin{aligned}
||f||_{\dot{B}^{-(\alpha+n(1/p-1/\sigma))}_{\sigma,\infty}} &\leq c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1))}||f_{2^k}||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \\
&= c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1))}||f_{2^k}||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \\
&= c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p))}||f(2^{-k}\cdot)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}
\end{aligned}$$

Por fim, aplicamos o Lema 2.1.15 novamente, para obter

$$||f||_{\dot{B}^{-(\alpha+n(1/p-1/\sigma))}_{\sigma,\infty}} \leq c||f||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

(ii) Este caso é semelhante ao caso (i). Porém, como $p = \sigma$, só temos a Proposição 2.2.3 válida para o espaço de Herz, em vez do espaço de Herz fraco. Assim, temos, pelo Lema 2.1.15,

$$\begin{aligned}
||f||_{\dot{B}^{-\alpha}_{p,\infty}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\alpha}||(f_{2^k} * \phi)_{2^{-k}}||_p \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha-n)}||(f_{2^k} * \phi)(2^k\cdot)||_{\dot{K}^0_{p,p}} \\
&\leq c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1))}||(f_{2^k} * \phi)||_{\dot{K}^0_{p,p}}.
\end{aligned}$$

Temos nesse caso que $-n/p < 0 < \alpha < n(1-1/p)$. Logo, estamos novamente nas condições da Proposição 2.2.3 (iii). Aplicando a Proposição e em seguida o Lema 2.1.15 mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned}
||f||_{\dot{B}^{-\alpha}_{p,\infty}} &\leq c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1))}||f_{2^k}||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \\
&= c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p))}||f(2^{-k}\cdot)||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \\
&\leq c||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.
\end{aligned}$$

(iii) Procedemos da mesma maneira. Aplicando o Lema 2.1.15,

$$\begin{aligned}
||f||_{\dot{B}^{-n(1/p-1/\sigma)}_{\sigma,\infty}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-kn(1/p-1/\sigma)}||(f_{2^k} * \phi)_{2^{-k}}||_\sigma \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-kn(1/p-1/\sigma)}||2^{kn}(f_{2^k} * \phi)(2^k\cdot)||_\sigma \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-kn(1/p-1-1/\sigma)}||(f_{2^k} * \phi)(2^k\cdot)||_{\dot{K}^0_{\sigma,\sigma}} \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-kn(1/p-1)}||f_{2^k} * \phi||_{\dot{K}^0_{\sigma,\sigma}}.
\end{aligned}$$

Aqui, como $-n/\sigma < 0 < n(1-1/p)$, podemos usar a Proposição 2.2.3 para obter

$$\begin{aligned}
||f||_{\dot{B}^{-n(1/p-1/\sigma)}_{\sigma,\infty}} &\leq c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-kn(1/p-1))}||f_{2^k}||_{W\dot{K}^0_{p,\sigma}} \\
&= c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-kn(1/p-1))}||f_{2^k}||_{W\dot{K}^0_{p,\sigma}} \\
&= c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-kn/p}||f(2^{-k}\cdot)||_{W\dot{K}^0_{p,\sigma}}.
\end{aligned}$$

Por fim, aplicando novamente o Lema 2.1.15,

$$||f||_{\dot{B}^{-n(1/p-1/\sigma)}_{\sigma,\infty}} \leq ||f||_{W\dot{K}^0_{p,\sigma}}.$$

(II) Caso $\sigma = \infty$. Para o caso $\sigma = \infty$, vamos proceder da mesma forma que nos casos anteriores, aplicando primeiramente o Lema 2.1.15, depois a Proposição 2.2.3 e por fim o Lema 2.1.15 novamente.

(iv) Temos que, observando que $\dot{K}^0_{p,p} = L^p \subset L^\infty = \dot{K}^0_{\infty,\infty}$,

$$\begin{aligned}
||f||_{\dot{B}^{-(\alpha+n/p)}_{\infty,\infty}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n/p)}||(f_{2^k} * \phi)_{2^{-k}}||_\infty \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n/p)}||2^{kn}(f_{2^k} * \phi)(2^k\cdot)||_\infty \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1))}||(f_{2^k} * \phi)(2^k\cdot)||_{\dot{K}^0_{\infty,\infty}} \\
&\leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1))}||f_{2^k} * \phi||_{\dot{K}^0_{\infty,\infty}} \\
&\leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1))}||f_{2^k} * \phi||_{\dot{K}^0_{p,p}}.
\end{aligned}$$

Como nesse caso temos $0 \leq \alpha < n(1-1/p)$, podemos aplicar a Proposição 2.2.3 e obter

$$\begin{aligned}
||f||_{\dot{B}^{-(\alpha+n/p)}_{\infty,\infty}} &\leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n(1/p-1))}||f_{2^k}||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \\
&= c \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha+n/p)}||f(2^{-k}\cdot)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \\
&\leq ||f||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}}.
\end{aligned}$$

(v) Temos que

$$\begin{aligned}
||f||_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\alpha}||(f_{2^k} * \phi)_{2^{-k}}||_\infty \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k(\alpha-n)}||(f_{2^k} * \phi)(2^k\cdot)||_{\dot{K}^0_{\infty,\infty}} \\
&\leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kn}||f_{2^k} * \phi||_{\dot{K}^0_{\infty,\infty}}.
\end{aligned}$$

Como $0 \leq \alpha < n$, podemos aplicar a Proposição 2.2.3,(iii) e o Lema 2.1.15 para obter

$$\begin{aligned}
||f||_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}} &\leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{kn}||f_{2^k}||_{\dot{K}^\alpha_{\infty,\infty}} \\
&\leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}} ||f(2^{-k}\cdot)||_{\dot{K}^\alpha_{\infty,\infty}} \\
&\leq c||f||_{\dot{K}^\alpha_{\infty,\infty}}.
\end{aligned}$$

(vi) Temos que, observando que $\dot{K}^0_{1,1} = L^1 \subset L^\infty = \dot{K}^0_{\infty,\infty}$,

$$\begin{aligned}
||f||_{\dot{B}^{-n}_{\infty,\infty}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-kn}||(f_{2^k} * \phi)_{2^{-k}}||_\infty \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}} |(f_{2^k} * \phi)(2^{-k}\cdot)||_{\dot{K}^0_{\infty,\infty}} \\
&\leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}} |(f_{2^k} * \phi)||_{\dot{K}^0_{\infty,\infty}} \\
&\leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}} |(f_{2^k} * \phi)||_{\dot{K}^0_{1,1}}.
\end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 2.2.3 e o Lema 2.1.15, obtemos

$$\begin{aligned} ||f||_{\dot{B}^{-n}_{\infty,\infty}} &\leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}} |f_{2^k}||_{\dot{K}^0_{1,1}} \\ &= c \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-kn}||f(2^{-k}\cdot)||_{\dot{K}^0_{1,1}} \\ &\leq c||f||_{\dot{K}^0_{1,1}}. \end{aligned}$$

(III) Observe que, dentro da integral, o supremo pode ser substituído pelo supremo essencial, já que ambos diferem entre si apenas em um conjunto de medida nula.

As restrições impostas sobre os índices nos colocam dentro do caso (iv). Desta forma, a definição de bmo^{-1} nos dá

$$\begin{aligned} ||f||_{bmo^{-1}} &= \sup_{|Q|\leq 1} \left(⨍_Q \int_0^{l(Q)^2} |e^{t\Delta}f|^2 dtdx \right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{|Q|\leq 1} \left(\int_Q \int_0^{l(Q)^2} |e^{t\Delta}f|^2 dtdx \right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{|Q|\leq 1} \left(\int_Q \int_0^{l(Q)^2} ||e^{t\Delta}f||_\infty^2 dtdx \right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{|Q|\leq 1} \left(\int_Q \int_0^{l(Q)^2} ||e^{t\Delta}f||_\infty^2 dtdx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Agora, observe que, usando a terceira caracterização da norma de Besov e aplicando o caso (iv), obtemos

$$\begin{aligned} ||e^{t\Delta}f||_\infty^2 &= t^{-(\alpha+n/p)} \left(t^{(\alpha+n/p)/2}||e^{t\Delta}f||_\infty \right)^2 \\ &\leq t^{-(\alpha+n/p)} \left(\sup_{t\geq 0} t^{(\alpha+n/p)/2}||e^{t\Delta}f||_\infty \right)^2 \\ &= t^{-(\alpha+n/p)}||f||^2_{\dot{B}^{-(\alpha+n/p)}_{\infty,\infty}} \\ &\leq ct^{-(\alpha+n/p)}||f||^2_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}}. \end{aligned}$$

Substituindo na integral acima, temos que

$$\begin{aligned} ||f||_{bmo^{-1}} &\leq c \sup_{|Q|\leq 1} \left(\int_Q \int_0^{l(Q)^2} t^{-(\alpha+n/p)}||f||^2_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} dtdx \right)^{1/2} \\ &\leq c||f||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \sup_{|Q|\leq 1} \left(\int_0^{l(Q)^2} t^{-(\alpha+n/p)} \int_Q dxdt \right)^{1/2} \\ &\leq c||f||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \sup_{|Q|\leq 1} \left(\int_0^{l(Q)^2} t^{-(\alpha+n/p)} dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $\alpha < 1 - n/p$, a integral acima converge e tem valor finito. Logo,

$$||f||_{bmo^{-1}} \leq c||f||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}},$$

e portanto, obtemos o resultado desejado. ■

Nos casos (i) e (iv) do Teorema acima, que tratam da imersão de $W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$, as condições $\alpha > 0$ no primeiro e $\alpha \geq 0$ no segundo são necessárias e suficientes. De fato, o Teorema a seguir mostra que, se $\alpha \leq 0$, em (i) ou $\alpha < 0$ em (iv), as imersões não valem.

Teorema 2.3.7. (i) Caso $\sigma < \infty$: *Para* $1 < p < \sigma < \infty$ *e* $-n(1/p - 1/\sigma) < \alpha \leq 0$, *tem-se*

$$W\dot{K}^{\alpha}_{p,q} \not\hookrightarrow \dot{B}^{-(\alpha+n(1/p-1/\sigma))}_{\sigma,\infty}.$$

(ii) Caso $\sigma = \infty$: *Para* $1 < p < \infty$ *e* $-n/p < \alpha < 0$, *tem-se*

$$W\dot{K}^{\alpha}_{p,q} \not\hookrightarrow \dot{B}^{-(\alpha+n/p)}_{\infty,\infty}.$$

Demonstração: (i) Seja

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2^{-k\alpha}}{|x - x_k|^{n/p}} \chi_k(x),$$

onde $x_k := (\frac{3}{2}2^{k-1}, 0, ..., 0)$.

No Exemplo 2.1.3, mostramos que $f \in W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$.

Vamos mostrar agora que $f \notin \dot{B}^{-(\alpha+n(1/p-1/\sigma))}_{\sigma,\infty}$, e disso seguirá o resultado.

Temos que

$$\begin{aligned} ||f||_{\dot{B}^{-(\alpha+n(1/p-1/\sigma))}_{\sigma,\infty}} &\approx \sup_{t>0} t^{(\alpha+n(1/p-1/\sigma))/2} ||e^{t\Delta}f||_{\sigma} \geq ||e^{\Delta}f||_{\sigma} \\ &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} ||e^{\Delta}f||^{\sigma}_{\sigma,A_k}\right)^{1/\sigma}. \end{aligned}$$

A norma $||e^{\Delta}f||_{\sigma,A_k}$ é limitada por baixo por $2^{-k\alpha}$, se k for grande o suficiente para que $2^{k-1} > 3$. De fato,

$$\begin{aligned} ||e^{\Delta}f||_{\sigma,A_k} &= \left(\int_{A_k} |e^{\Delta}f|^{\sigma}dx\right)^{1/\sigma} = \left(\int_{A_k}\left(\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4}}dy\right)^{\sigma}dx\right)^{1/\sigma} \\ &\geq \left(\int_{A_k}\left(\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\int_{A_k} f(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4}}dy\right)^{\sigma}dx\right)^{1/\sigma}. \end{aligned}$$

Se $2^{k-1} > 3$, temos $B(x_k, 1) \subset A_k$ e $(B(x_k, 3)\backslash B(x_k, 2)) \subset A_k$. Logo,

$$||e^{\Delta}f||^{\sigma}_{\sigma,A_k} \geq \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\left(\int_{B(x_k,1)}\left(\int_{2\leq|y-x_k|\leq 3} \frac{2^{-k\alpha}}{|y-x_k|^{n/p}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4}}dy\right)^{\sigma}dx\right)^{1/\sigma}.$$

Se $x \in B(x_k, 1)$, $2 \leq |y - x_k| \leq 3$, então $|y - x_k|^{-n/p} \geq 3^{-n/p}$ e $|x - y| \leq |y - x_k| + |x - x_k| \leq 4$. Assim,

$$\begin{aligned} ||e^{\Delta}f||^{\sigma}_{\sigma,A_k} &\geq \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\left(\int_{B(x_k,1)}\left(\int_{2\leq|y-x_k|\leq 3} \frac{2^{-k\alpha}}{3^{n/p}}e^{-4}dy\right)^{\sigma}dx\right)^{1/\sigma} \\ &= \frac{2^{-k\alpha}e^{-4}}{(4\pi)^{n/2}3^{n/p}}\left(\int_{B(x_k,1)}\left(\int_{2\leq|y-x_k|\leq 3} dy\right)^{\sigma}dx\right)^{1/\sigma} = c2^{-k\alpha}. \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos

$$||f||_{\dot{B}^{-(\alpha+n(1/p-1/\sigma))}_{\sigma,\infty}} \geq c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\alpha\sigma}\right)^{1/\sigma} = \infty,$$

e portanto, $f \notin \dot{B}^{-(\alpha+n(1/p-1/\sigma))}_{\sigma,\infty}$.

(ii) Para a mesma f definida em (i), vejamos que $f \notin \dot{B}^{-(\alpha+n/p)}_{\infty,\infty}$. Temos que

$$||f||_{\dot{B}^{-(\alpha+n/p)}_{\infty,\infty}} \approx \sup_{t>0} t^{(\alpha+n/p)/2}||e^{t\Delta}f||_\infty \geq ||e^{\Delta}f||_\infty \geq \sup_{k\in\mathbb{Z}} ||e^{\Delta}f||_{\infty,B(x_k,1)}.$$

A última desigualdade segue tomando-se o supremo em k na inequação $||e^{\Delta}f||_{\infty,B(x_k,1)} \leq ||e^{\Delta}f||_\infty$, que é claramente verdadeira já que $B(x_k,1) \subset \mathbb{R}^n$. Para k suficientemente grande, temos $B(x_k,1) \subset A_k$, e portanto,

$$\begin{aligned}
||e^{\Delta}f||_{\infty,B(x_k,1)} &= \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\text{ess}\sup_{x\in B(x_k,1)}\int_{R_n}\frac{2^{-k\alpha}}{|y-x_k|^{n/p}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4}}dy \\
&\geq \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\text{ess}\sup_{x\in B(x_k,1)}\int_{2\leq|y-x_k|\leq 3}\frac{2^{-k\alpha}}{|y-x_k|^{n/p}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4}}dy.
\end{aligned}$$

Temos aqui que $|y-x_k|^{-n/p} \geq 3^{-n/p}$ e $|x-y| \leq 4$. Logo,

$$||e^{\Delta}f||_{\infty,B(x_k,1)} \geq \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\frac{2^{-k\alpha}e^{-4}}{3^{n/p}}\text{ess}\sup_{x\in B(x_k,1)}\int_{2\leq|y-x_k|\leq 3} dy = c2^{-k\alpha}.$$

Assim, obtemos

$$||f||_{\dot{B}^{-(\alpha+n/p)}_{\infty,\infty}} \geq c\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\alpha} = \infty,$$

o que nos dá o resultado. ∎

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Soluções para as Equações de Navier-Stokes

3.1 Existência Local

No capítulo a seguir, traremos os principais teoremas relativos à existência e unicidade de soluções brandas das equações de Navier-Stokes, além de critérios para extensão das soluções no tempo, quando o dado inicial u_0 está em $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$.

Os teoremas de boa colocação que apresentaremos e demonstraremos a seguir usam as estimativas para o semigrupo do calor em espaços de Herz obtidas no Corolário 2.2.4 para usar o Princípio da Contração de Picard, apresentado na página 17, para obter uma solução para as equações (E.I):

$$\begin{aligned} u &= e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\otimes u)(s)ds \\ u &= e^{t\Delta}u_0 - B(u,u), \end{aligned} \tag{E.I.}$$

que como mostramos no Capítulo 1, são equivalentes às equações de Navier-Stokes que queremos solucionar,

$$\begin{aligned} \rho\left(u_t + u\cdot\nabla u\right) &= \mu\Delta u - \nabla p \\ \nabla\cdot u &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

a menos de unicidade global e regularidade da solução. Essa técnica de argumento de ponto fixo foi introduzida por Kato em [15] e consiste em, a partir de um espaço dado a que pertence o dado inicial, chamado *espaço de valor adaptado,* definir um espaço auxiliar, chamado *espaço de caminho admissível,* que desempenhará o papel do espaço de Banach E no Princípio da Contração de Picard.

O primeiro teorema que mostraremos para a boa colocação é o de existência local para dados iniciais quaisquer. Nele, mostramos que exite solução branda local para as equações de Navier-Stokes para qualquer u_0 em $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$, independentemente de sua norma.

Usando o espaço $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ como espaço de caminho admissível vamos definir, para algum $T > 0$, o espaço de valor adaptado X_T :

Definição 3.1.1. *Seja $T > 0$. Definimos o espaço X_T como $X_T := \{u \in L^{\infty}(0,T; W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}) : ||u||_{X_T} < \infty, \nabla \cdot u = 0\}$, onde*

$$||u||_{X_T} = \sup_{0<t\leq T} ||u(t)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} + \sup_{0<t\leq T} t^{\frac{1}{2}} ||\nabla u(t)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} := ||u||_{X_{T,1}} + ||u||_{X_{T,2}}.$$

Dado um espaço de valor adaptado, é importante ressaltar que pode-se definir mais de um espaço de caminho admissível associado a ele. A razão de definirmos X_T como fizemos acima é a de que queremos controlar certos aspectos de u. A primeira norma, X_{T_1} é a norma natural do espaço e controla o tamanho de u em $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$. Já a norma X_{T_2} controla a variação de u, prevenindo o surgimento de comportamentos oscilatórios. O fator $t^{1/2}$ aparece na norma $X_{T,2}$ porque, como pode ser observado no Corolário 2.2.4, ao limitar a função $\nabla e^{t\Delta} f$, o fator $t^{-1/2}$ aparece naturalmente na estimativa devido ao operador ∇. Desta forma, acrescentamos o termo $t^{1/2}$ à definição de $X_{T,2}$ para compensar. Essa compensação se mostra frutífera para efeitos de cálculo das estimativas da forma bilinear B.

Teorema 3.1.2 (Existência Local)**.** *Seja $n \geq 2, n < p < \infty$ e $0 \leq \alpha < 1 - \dfrac{n}{p}$. Então, para todo $u_0 \in W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$ com* div $u_0 = 0$, *existem $T > 0$ e uma solução $u \in X_T \cap C((0,T); W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty})$ de (E.I.) tal que*

(i) $\sup t^{(\alpha + \frac{n}{p})/2} ||u(t)||_{\infty} < \infty$;

(ii) $u(t) \in W\dot{\mathcal{K}}^{\alpha}_{p,\infty}$, *para $t > 0$;*

(iii) $u(t) \to u_0$ *na topologia fraca $*$ quando $t \searrow 0$;*

(iv) $u(t) - e^{t\Delta}u_0 \in L^{\infty}(0,T; \dot{K}^{\alpha}_{p,\infty})$;

(v) $u(t) - e^{t\Delta}u_0$ *é contínua à direita em $\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$, em $(0,T)$.*

Além disso, se $u_0 \in W\dot{\mathcal{K}}^{\alpha}_{p,\infty}$, então $u(t) \to u_0$ em $W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$ quando $t \searrow 0$. Quanto à unicidade, u é a única solução de (E.I.) na classe $L^{\infty}(0,T; W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty})$.

Demonstração: Vamos escolher a constante $T > 0$ no decorrer da demonstração. Dividiremos a demonstração em 4 passos. Nosso objetivo é mostrar que estamos dentro das condições do Princípio da Contração de Picard, que garantirá a existência da solução. Na aplicação que faremos do Princípio da Contração de Picard, a equação que buscamos solução é (E.I.), ou seja,

$$u = e^{t\Delta}u_0 - B(u,u).$$

Assim, fica claro que o papel de e_0 será desempenhado por $e^{t\Delta}u_0$. O leitor pode notar também que o espaço de Banach a ser usado na aplicação de Picard será X_T. No decorrer da demonstração, vamos escolher $\delta = C_0||u_0||_{X_T}$, para alguma constante C_0 que encontraremos. Por fim, em vez de C_B, a constante que limitará a norma de B será o valor (ainda a ser determinado, mas fixo) $C_B T^{\frac{1-n/p-\alpha}{2}}$.

Desta forma, comparando o que temos com as hipóteses do Princípio da Contração de Picard (veja o Lema 1.1.1 na pg. 17), devemos mostrar as três seguintes estimativas:

- $||B(u,v)||_{X_T} \leq C_B T^{(1-n/p-\alpha)/2} ||u||_{X_T} ||v||_{X_T}$;
- $0 < C_0 ||u_0||_{X_T} < (4 C_B T^{(1-n/p-\alpha)/2})^{-1}$;
- $||e^{t\Delta} u_0||_{X_T} \leq C_0 ||u_0||_{X_T}$.

Passo 1: A forma bilinear B é um mapa de $X_T \times X_T$ em X_T e tem a estimativa

$$||B(u,v)||_{X_T} \leq C_B T^{\frac{1-n/p-\alpha}{2}} ||u||_{X_T} \, ||v||_{X_T}.$$

De fato, temos que

$$||B(u,v)||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} = \left|\left| \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \otimes v)(s) ds \right|\right|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \leq \int_0^t \left|\left| \nabla e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \otimes v)(s) \right|\right|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} ds.$$

Como $1 - \frac{n}{p} - \alpha > 0$, segue que $2\alpha < n\left(1 - \frac{n}{p}\right)$ e tomando $q = \infty$, estamos nas condições do Corolário 2.2.4, caso [I], item (iii). Logo, obtemos

$$||B(u,v)||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \leq c \int_0^t (t-s)^{\frac{-(1+n/p+\alpha)}{2}} ||u \otimes v(s)||_{W\dot{K}^{2\alpha}_{\frac{p}{2},\infty}} ds.$$

Pelo Lema 2.1.13, temos então que

$$||B(u,v)||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \leq c \int_0^t (t-s)^{\frac{-(1+n/p+\alpha)}{2}} ||u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} ||v(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} ds.$$

Assim, para $0 < t \leq T$,

$$\begin{aligned} ||B(u,v)||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} &\leq c ||u||_{X_{T,1}} \, ||v||_{X_{T,1}} \int_0^t (t-s)^{\frac{-(1+n/p+\alpha)}{2}} ds \\ &= c ||u||_{X_{T,1}} \, ||v||_{X_{T,1}} \int_0^t s^{\frac{-(1+n/p+\alpha)}{2}} ds \\ &= c ||u||_{X_{T,1}} \, ||v||_{X_{T,1}} t^{\frac{1-n/p-\alpha}{2}} \\ &\leq \frac{C_B}{2} T^{\frac{1-n/p-\alpha}{2}} ||u||_{X_T} \, ||v||_{X_T}, \end{aligned}$$

e como $\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty} \hookrightarrow W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$, segue que

$$||B(u,v)||_{X_{T,1}} \leq \frac{C_B}{2} T^{\frac{1-n/p-\alpha}{2}} ||u||_{X_T} \, ||v||_{X_T}.$$

Similarmente, ainda temos que

$$\begin{aligned} ||\nabla B(u,v)(t)||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} &\leq \int_0^t ||\nabla e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla) v(s)||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} ds \\ &\leq c \int_0^t (t-s)^{\frac{-(1+n/p+\alpha)}{2}} ||(u \cdot \nabla) v(s)||_{W\dot{K}^{2\alpha}_{\frac{p}{2},\infty}} ds \\ &\leq c \int_0^t (t-s)^{\frac{-(1+n/p+\alpha)}{2}} ||u||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} ||\nabla v||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} ds. \end{aligned}$$

Assim, para $0 < t \le T$, obtemos

$$\begin{aligned}
||\nabla B(u,v)(t)||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} &\le c\int_0^t (t-s)^{-\frac{(1+n/p+\alpha)}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ||u||_{X_{T,1}}\,||v||_{X_{T,2}} ds \\
&\le c||u||_{X_T}\,||v||_{X_T}\int_0^t (t-s)^{-\frac{(1+n/p+\alpha)}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds \\
&\le \frac{C_B}{2} t^{\frac{-(n/p+\alpha)}{2}} ||u||_{X_T}\,||v||_{X_T}.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $t^{1/2}$ e tomando o supremo em ambos os lados, chegamos em

$$||B(u,v)(t)||_{X_{T,2}} \le \frac{C_B}{2} T^{\frac{1-(n/p+\alpha)}{2}} ||u||_{X_T}\,||v||_{X_T}.$$

Assim, dessas duas estimativas acima, obtemos a estimativa desejada.

Passo 2: Verificamos que

$$||e^{t\Delta}u_0||_{X_T} \le C_0||u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

Por hipótese, como $\nabla \cdot u_0 = 0$, temos que a projeção de Weyl-Helmholtz de u_0 é a própria função. Logo, aplicando o Corolário 2.2.4, caso [II], obtemos

$$||e^{t\Delta}u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \le \frac{C_0}{2}||u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

Ainda, pelo Corolário 2.2.4, caso [I], item (iv), temos que

$$||\nabla e^{t\Delta}u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \le \frac{C_0}{2} t^{-\frac{1}{2}}||u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

Portanto, dessas duas estimativas acima, obtemos a estimativa desejada.

Agora, defina T como

$$T = \left(\frac{1}{8C_BC_0||u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}}\right)^{\frac{2}{1-\frac{n}{p}-\alpha}} := \frac{C^*}{||u_0||^{\frac{2}{1-n/p-\alpha}}_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}}.$$

Note que T satisfaz

$$C_0||u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} < \left(4C_BT^{\frac{1-n/p-\alpha}{2}}\right)^{-1}.$$

Tomando $\delta = C_0||u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}$, o Princípio da Contração de Picard garante a existência de uma solução $u \in X_T$ para (E.I.) que depende continuamente do dado inicial u_0. Note que a constante C^* definida acima depende apenas de n, p e α. Logo, obtemos a condição (i) do teorema. De fato,

$$||e^{t\Delta}u_0||_{\infty} = ||e^{t\Delta}u_0||_{\dot{K}^{0}_{\infty,\infty}} \le ct^{\frac{-(\alpha+n/p)}{2}}||u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}},$$

que nos dá uma estimativa para a norma L^{∞} de $e^{t\Delta}u_0$. Para a forma bilinear $B(u,u)(t)$, temos

$$\begin{aligned}
||B(u,u)(t)||_{\infty} &\le c\int_0^t (t-s)^{-(\alpha+n/p)}||u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \cdot ||\nabla u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} ds \le \\
&\le c||u||_{X_{T,1}} \cdot ||u||_{X_{T,2}}\int_0^t (t-s)^{-(\alpha+n/p)} s^{-\frac{1}{2}} ds \le \\
&\le ct^{\frac{1}{2}-(\alpha+n/p)}||u||^2_{X_T}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$t^{\frac{(\alpha+n/p)}{2}}||B(u,u)(t)||_\infty \leq ct^{\frac{1-(\alpha+n/p)}{2}}||u||_{X_T}^2,$$

e assim temos que

$$\sup_{0<t\leq T} t^{\frac{(\alpha+n/p)}{2}}||B(u,u)(t)||_\infty \leq cT^{\frac{1-(\alpha+n/p)}{2}}||u||_{X_T}^2 < \infty.$$

Portanto, dessas duas estimativas, como $u \in W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}$, concluímos que

$$\sup_{0<t\leq T} t^{\frac{(\alpha+n/p)}{2}}||u(t)||_\infty \leq \sup_{0<t\leq T} t^{\frac{(\alpha+n/p)}{2}}||e^{t\Delta}u_0||_\infty + \sup_{0<t\leq T} t^{\frac{(\alpha+n/p)}{2}}||B(u,u)(t)||_\infty < \infty.$$

Passo 3: Verificamos as propriedades (ii), (iii), (iv) e (v).

Vamos mostrar a continuidade de u em $W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}$. Para isso, vamos mostrar separadamente as continuidades de $e^{t\Delta}u_0$ e de $B(u,u)(t)$.

Para $e^{t\Delta}u_0$, como $e^{(t\pm\tau)\Delta}u_0 - e^{t\Delta}u_0 = u_0 * (G_{\sqrt{t\pm\tau}} - G_{\sqrt{t}})$, pela Proposição 2.2.5 temos que

$$||e^{(t\pm\tau)\Delta}u_0 - e^{t\Delta}u_0||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \leq ||G_{\sqrt{t\pm\tau}} - G_{\sqrt{t}}||_{\mathcal{S}}||u_0||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}},$$

com $||\cdot||_{\mathcal{S}}$ denotando alguma seminorma de $\mathcal{S}$. Assim, $e^{t\Delta}u_0 \in C((0,\infty); W\dot{K}^\alpha_{p,\infty})$.

Vamos mostrar agora a continuidade à direita de B em $\dot{K}^\alpha_{p,\infty}$ para $t \in (0,T)$. Primeiramente, escreva

$$\begin{aligned} B(u,u)(t+\tau) - B(u,u)(t) &= \int_0^t e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s) - e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)ds \\ &\quad + \int_t^{t+\tau} e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)ds =: \mathrm{I}_+ + \mathrm{II}_+. \end{aligned}$$

Quando $0 < t \leq T$, para $\tau > 0$, aplicando o Corolário 2.2.4,[I](iii) e em seguida o Lema 2.1.13, obtemos

$$\begin{aligned} ||e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} &\leq c(t+\tau-s)^{-n/2p}||(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p/2,\infty}} \\ &\leq c(t+\tau-s)^{-n/2p}||u(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}}||\nabla u(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \\ &\leq c(t+\tau-s)^{-n/2p}s^{-1/2}||u||_{X_{T,1}}||u||_{X_{T,2}}. \end{aligned}$$

A função $x \mapsto x^{-n/2p}$ é decrescente em $(0,\infty)$, logo de $\tau > 0$ temos $(t+\tau-s)^{-n/2p} \leq (t-s)^{-n/2p}$, e

$$||e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \leq c(t-s)^{-n/2p}s^{-1/2}||u||_{X_{T,1}}||u||_{X_{T,2}}.$$

Afirmamos que a função do lado direito da desigualdade acima está em $L^1(0,t)$. De fato, fazendo a mudança de variável $z = s/t$, temos

$$\int_0^t c(t-s)^{-n/2p}s^{-1/2}||u||_{X_{T,1}}||u||_{X_{T,2}}ds = c||u||_{X_{T,1}}||u||_{X_{T,2}}t^{1/2-n/2p}\int_0^1 (1-z)^{-n/2p}z^{-1/2}dz,$$

que é uma função beta com expoentes $1-n/2p$ e $1/2$. De $n<p$, temos que ambos os expoentes são positivos, e portanto a função beta está bem definida e tem valor finito, o que prova a afirmação. Desta forma, o Teorema da Convergência Dominada garante que

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\searrow 0}||\mathrm{I}_+||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} &\leq \lim_{\tau\searrow 0}\int_0^t \left|\left|e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)-e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)\right|\right|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} ds\\ &= \int_0^t \lim_{\tau\searrow 0}\left|\left|e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)-e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)\right|\right|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} ds = 0.\end{aligned}$$

Para a segunda integral temos, aplicando o Corolário 2.2.4 [I](iii) e em seguida o Lema 2.1.13,

$$\begin{aligned}||\mathrm{II}_+||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} &\leq \int_t^{t+\tau}\left|\left|e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)\right|\right|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} ds\\ &\leq c\int_t^{t+\tau}(t+\tau-s)^{-n/2p}\left|\left|(u\cdot\nabla)u(s)\right|\right|_{W\dot{K}^{\alpha}_{p/2,\infty}} ds\\ &\leq c\int_t^{t+\tau}(t+\tau-s)^{-n/2p}||u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}||\nabla u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}ds\\ &\leq c||u||_{X_{T,1}}||u||_{X_{T,2}}\int_t^{t+\tau}(t+\tau-s)^{-n/2p}s^{-1/2}ds.\end{aligned}$$

Como $t>0$, a integral acima converge, e tende a zero quando $\tau\searrow 0$. Logo,

$$\lim_{\tau\searrow 0}||\mathrm{II}_+||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}=0.$$

Assim, provamos que $u(t)-e^{t\Delta}u_0=B(u,u)(t)$ é contínua a direita em $\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$, em $(0,T)$, ou seja, (v).

De $\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}\hookrightarrow W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$, segue que B é contínua à direita em $W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$. Vamos mostrar a continuidade à esquerda de B em $W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$. Para isso, escreva, para $t>0$ e $\tau>0$,

$$\begin{aligned}B(u,u)(t-\tau)-B(u,u)(t) &= \int_0^{t-\tau} e^{(t-\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)-e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)ds\\ &\quad+\int_{t-\tau}^{t} e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)ds =: \mathrm{I}_-+\mathrm{II}_-.\end{aligned}$$

Para cada $s\in(0,t)$, se tomarmos τ suficientemente pequeno, temos que

$$(t-\tau-s)^{-n/2p}\leq k(t-s)^{-n/2p},$$

onde $k>1$ é alguma constante fixada. De fato, basta tomar $\tau\leq(1-k^{-2p/n})(t-s)$ para obter

$$\left(\frac{t-\tau-s}{t-s}\right)^{-n/2p}=\left(1-\frac{\tau}{t-s}\right)^{-n/2p}\leq k,$$

que implica na desigualdade desejada. Com ela, podemos estimar

$$||e^{(t-\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}=||\nabla e^{(t-\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\otimes u)(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.$$

Aplicando o Corolário 2.2.4,[I](iii) na igualdade acima e em seguida o Lema 2.1.13,

$$\begin{aligned}
||e^{(t-\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} &= ||\nabla e^{(t-\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\otimes u)(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \\
&\leq c(t-\tau-s)^{-1/2-n/2p}||(u\otimes u)(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p/2,\infty}} \\
&\leq c(t-s)^{-1/2-n/2p}||(u\otimes u)(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p/2,\infty}} \\
&\leq c(t-s)^{-1/2-n/2p}||u(s)||^2_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \\
&\leq c(t-s)^{-1/2-n/2p}||u||^2_{X_{T,1}}.
\end{aligned}$$

Afirmamos que função obtida na última desigualdade está em $L^1(0,t-\tau)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_0^{t-\tau} c(t-s)^{-1/2-n/2p}||u||^2_{X_{T,1}}ds &= c||u||^2_{X_{T,1}}\int_0^{t-\tau}(t-s)^{-1/2-n/2p}ds \\
&= \frac{c||u||^2_{X_{T,1}}}{1/2-n/2p}s^{1/2-n/2p}\Big|_0^{t-\tau}.
\end{aligned}$$

De $n<p$, temos $1/2-n/2p>0$, e a integral acima converge, o que prova a afirmação. Portanto, o Teorema da Convergência Dominada garante que

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\searrow 0}||\mathrm{I}_-||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} &\leq \lim_{\tau\searrow 0}\int_0^{t-\tau}||e^{(t-\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)-e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}ds \\
&= \int_0^{t-\tau}\lim_{\tau\searrow 0}||e^{(t-\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)-e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}ds=0.
\end{aligned}$$

Para a segunda integral, temos a seguinte estimativa; Aplicando o Corolário 2.2.4,[I](iii), e em seguida o Lema 2.1.13,

$$\begin{aligned}
||\mathrm{II}_-||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} &\leq \int_{t-\tau}^{t}||e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}ds \\
&\leq c\int_{t-\tau}^{t}(t-s)^{-n/2p}||(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p/2,\infty}}ds \\
&\leq c\int_{t-\tau}^{t}(t-s)^{-n/2p}||u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}||\nabla u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}ds \\
&\leq c||u||_{X_{T,1}}||u||_{X_{T,2}}\int_{t-\tau}^{t}(t-s)^{-n/2p}s^{-1/2}ds.
\end{aligned}$$

Para τ suficientemente pequeno, temos $t-\tau>0$, e a integral acima converge e tende a zero quando $\tau\searrow 0$. Assim,

$$\lim_{\tau\searrow 0}||\mathrm{II}_-||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}=0.$$

Desta forma $u(t)=e^{t\Delta}u_0-B(u,u)(t)$ é contínua em $W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$, e portanto $e^{t\Delta}u\to u$ quando $t\searrow 0$, ou seja, $u\in W\dot{\mathcal{K}}^{\alpha}_{p,\infty}$ para $t>0$, e provamos (ii).

Falta apenas mostrar (iii), que é a convergência na topologia fraca-$*$. Pelo Teorema 1.2 de [26], que dá a densidade de C_0^∞, basta mostrarmos que

$$\lim_{t\searrow 0}\left|\left\langle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)ds,\phi\right\rangle\right|=0,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty$.

Sendo $f(x,t) := \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u \otimes u)(s)ds$, queremos calcular o limite $\lim_{t \searrow 0} |\langle \nabla f, \phi \rangle|$.

Temos que

$$|\langle \nabla f, \phi\rangle| = \left| \int \nabla f(x,t)\phi(x)dx \right| = \left| \lim_{N\to\infty} \int_{B(0,N)} \nabla f(x,t)\phi(x)dx \right|.$$

Integrando por partes, sendo $\overrightarrow{n}_{B(0,N)}$ o vetor normal externo à bola $B(0,N)$, obtemos

$$|\langle \nabla f, \phi\rangle| = \left| \lim_{N\to\infty} f(x,t)\phi(x) \cdot \overrightarrow{n}_{B(0,N)} - \int f(x,t)\nabla\phi(x)dx \right|.$$

Como $\phi \in C_0^\infty$, o primeiro termo do lado direito da equação acima se torna nulo quando N cresce suficientemente. Assim,

$$\begin{aligned}
|\langle \nabla f, \phi\rangle| &= \left| \int f(x,t)\nabla\phi(x)dx \right| \leq \int |f(x,t)\nabla\phi(x)|dx \\
&= \int \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\nabla\phi\chi_{A_k} \right| dx \\
&\leq \int |\sup_{k\in\mathbb{Z}} f\chi_{A_k}| \left|\left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \nabla\phi \right|\right|_{r',1,A_k} dx.
\end{aligned}$$

Seja $r > n/2$. Pela desigualdade de Hölder, lembrando que o dual do espaço de Lorentz $L^{r,\infty}$ é o espaço $L^{r',1}$, obtemos

$$\begin{aligned}
|\langle \nabla f, \phi\rangle| &\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} ||f||_{r,\infty,A_k} \sum_{k\in\mathbb{Z}} ||\nabla\phi||_{r',1,A_k} \\
&= ||\nabla\phi||_Z \left|\left| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\otimes u)(s)ds \right|\right|_{W\dot{K}^0_{r,\infty}} \\
&\leq ||\nabla\phi||_Z \int_0^t ||e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\otimes u)(s)||_{W\dot{K}^0_{r,\infty}} ds,
\end{aligned}$$

onde Z é o espaço com a norma

$$|| \cdot ||_Z := \sum_{k\in\mathbb{Z}} || \cdot ||_{r',1,A_k}.$$

Agora, pelo Corolário 2.2.4,[I](iii), como $r > n/2$, temos

$$\begin{aligned}
|\langle \nabla f, \phi\rangle| &\leq c||\nabla\phi||_Z \int_0^t (t-s)^{-1+n/2r} ||u\otimes u(s)||_{W\dot{K}^0_{\frac{n}{2},\infty}} ds \\
&\leq c||\nabla\phi||_Z \int_0^t (t-s)^{-1+n/2r} ||u(s)||^2_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} ds \\
&\leq c||\nabla\phi||_Z ||u||^2_{X_{T,1}} \int_0^t (t-s)^{-1+n/2r} ds \\
&\leq c||\nabla\phi||_Z ||u||^2_{X_T} t^{n/2r} \to 0, \text{ quando } t \searrow 0.
\end{aligned}$$

Desta forma, temos que $u(\cdot) \to u_0$ na topologia fraca-$*$ quando $t \searrow 0$, ou seja, (iii).

Passo 4: Mostramos a unicidade de u como solução de (E.I.) na classe $L^\infty(0,T;W\dot{K}^\alpha_{p,\infty})$.

Seja v outra solução de (E.I.) com dado inicial u_0 na classe $L^\infty(0,T;W\dot{K}^\alpha_{p,\infty})$.

Defina

$$\begin{aligned} w = u - v = e^{t\Delta}u_0 - B(u,u) - e^{t\Delta}u_0 + B(v,v) &= -B(u,u) + B(v,v) \\ &= -B(u,u) + B(u,v) - B(u,v) + B(v,v) \\ &= -B(u,u-v) - B(u-v,v) = -B(u,w) - B(w,v) \\ &= -\int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta} \left(\mathbb{P}(u\otimes w)(s) + \mathbb{P}(w\otimes v)(s)\right) ds. \end{aligned}$$

Agora, note que a condição $-\frac{n}{p} \leq 0 \leq \alpha < 1 - \frac{n}{p}$ nos garante que

$$2\alpha < 2 - \frac{2n}{p} < n - \frac{2n}{p} = n\left(1 - \frac{n}{p/2}\right).$$

Ainda, tomando $q = \infty$, temos as duas primeiras condições do item (3) da Proposição 2.2.3 satisfeitas, e assim podemos aplicar o Corolário 2.2.4, caso [I], item (iii), que nos dá, para $0 < t \leq T_0 < T$,

$$\begin{aligned} ||w(t)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} &= \left|\left| \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta} \left(\mathbb{P}(u\otimes w)(s) + \mathbb{P}(w\otimes v)(s)\right) ds \right|\right|_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \\ &\leq c\int_0^t (t-s)^{\frac{-(1+\frac{n}{p}+\alpha)}{2}} \left|\left| u\otimes w(s) + w\otimes v(s)\right|\right|_{W\dot{K}^{2\alpha}_{\frac{p}{2},\infty}} ds \\ &\leq c\int_0^t (t-s)^{\frac{-(1+\frac{n}{p}+\alpha)}{2}} ||w(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \left(||u(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} + ||v(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}}\right) ds \\ &\leq c\left(\sup_{0<s\leq T_0} ||u(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} + \sup_{0<s\leq T_0} ||v(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}}\right) \\ &\quad \cdot \sup_{0<s\leq T_0} ||w(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \int_0^t s^{\frac{-(1+\frac{n}{p}+\alpha)}{2}} ds \\ &\leq c\left(\sup_{0<s\leq T_0} ||u(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} + \sup_{0<s\leq T_0} ||v(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}}\right) \\ &\quad \cdot \sup_{0<s\leq T_0} ||w(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} T_0^{\frac{1-\frac{n}{p}-\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Agora, basta tomar T_0 de modo que

$$c\left(\sup_{0<s\leq T_0} ||u(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} + \sup_{0<s\leq T_0} ||v(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}}\right) T_0^{\frac{1-\frac{n}{p}-\alpha}{2}} \leq \frac{1}{2}.$$

Desta forma, obtemos, em $(0,T_0]$:

$$||w(t)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \leq \frac{1}{2} \sup_{0<s\leq T_0} ||w(s)||_{W\dot{K}^\alpha_{p,\infty}},$$

o que implica em

$$\sup_{0<s\leq T_0} ||w(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \leq \frac{1}{2} \sup_{0<s\leq T_0} ||w(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}},$$

e portanto, $w \equiv 0$ em $(0, T_0]$, e $u \equiv v$ em $(0, T_0]$.

Basta mostrar agora que $w \equiv 0$ em $[T_0, T)$. Para isso, é suficiente mostrar que existe $\kappa > 0$ tal que, se $w(t) \equiv 0$ em $(0, T_0]$, então $w(t) \equiv 0$ em $(0, T_0 + \kappa)$.

Como $u(T_0) = v(T_0)$, temos que, para $T_0 \leq t < T$,

$$w(t) = -\int_{T_0}^{t} \nabla e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(w \otimes u + v \otimes w)(s)ds.$$

Logo, do mesmo modo que calculamos acima, para $T_0 < t < T$,

$$\begin{aligned}
||w(t)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} &\leq C\int_{T_0}^{t}(t-s)^{\frac{-(1+\frac{n}{p}+\alpha)}{2}}||w(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}\left(||u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} + ||v(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}\right)ds \\
&\leq C\sup_{T_0\leq s<T}||w(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}\left(\sup_{T_0\leq s<T}||u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} + \sup_{T_0\leq s<T}||v(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}\right) \\
&\quad \cdot (t-T_0)^{\frac{1-\frac{n}{p}-\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

Agora, se tomarmos $\kappa > 0$ tal que

$$\kappa^{\frac{1-\frac{n}{p}-\alpha}{2}} = \frac{1}{2C\left(\sup_{T_0<s<T}||u(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} + \sup_{T_0<s<T}||v(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}\right)},$$

temos que

$$\sup_{T_0<s<t} ||w(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \leq \frac{1}{2} \sup_{T_0<s<t} ||w(s)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}},$$

para todo $T_0 \leq t < T_0 + \kappa$.

Logo, $w(t) \equiv 0$ em $[T_0, T_0+\kappa)$, e temos portanto a unicidade de u na classe $L^{\infty}(0, T; W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty})$.

Passo 5: Por fim, consideramos o caso $u_0 \in W\dot{\mathcal{K}}^{\alpha}_{p,\infty}$.

Como a forma bilinear $B(u,u)(t)$ é contínua à direita em $\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$, e consequentemente em $W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$, segue diretamente que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\searrow 0}||u(t)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} &= \lim_{t\searrow 0}||e^{t\Delta}u_0 - B(u,u)(t)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \\
&\leq \lim_{t\searrow 0}||e^{t\Delta}u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} + \lim_{t\searrow 0}||B(u,u)(t)||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} \\
&= \lim_{t\searrow 0}||e^{t\Delta}u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}} = ||u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}}.
\end{aligned}$$

E portanto, $u(t) \to u_0$ em $W\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}$ quando $t \searrow 0$. ■

No Teorema acima, a solução está em $\bigcap_{0<T_1<T_2<T} L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (T_1, T_2))$. Logo, está em $L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0,T))$. Pela Proposição 15.1 de [20], obtém-se a suavidade $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0,T))$. No caso $u_0 \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}$, pode-se provar o Teorema anterior da mesma maneira, com $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ em vez de $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$. Basta substituir as estimativas obtidas para $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ pelas mesmas estimativas para $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$, usando o caso (iii) da Proposição 2.2.3.

3.2 Princípio de Continuação para Soluções Brandas Locais

No Teorema da seção anterior, mostramos a existência de solução branda para um T caracterizado pela norma de u_0, mais precisamente,

$$T = \frac{C}{||u_0||_{W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}^{2/(1-n/p-\alpha)}}.$$

Porém, nada nos diz que tal T é o maior valor para o qual podemos encontrar uma solução u. Tendo encontrado esse $T > 0$ tal que existe uma solução branda para as equações de Navier-Stokes homogêneas, é portanto natural se perguntar se existe um $\tilde{T}$ maximal para o qual essas soluções existem e se tal $\tilde{T}$ é finito.

Se tal $\tilde{T}$ for finito, significa que a partir de $t = \tilde{T}$ a solução "explode". Caso contrário, temos uma solução global para as equações de Navier-Stokes.

No caso particular em que $u_0 \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}$, pode-se provar o Teorema 3.1.2 com $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ em vez de $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}$. O resultado não será enunciado de fato por ser mais fraco que o obtido e, como já comentado, ter a demonstração análoga ao teorema apresentado. Entretanto, o caso particular de solução para dados iniciais no espaço de Herz tem a característica interessante de poder ser estendido globalmente caso satisfaça uma condição adicional. De fato, o próximo teorema nos dá um critério para a extensão em t da solução branda encontrada no teorema anterior. Para apresentá-lo, precisamos introduzir um outro espaço, $\dot{K}^{0}_{BMO,\infty}$:

Definição 3.2.1. *Definimos o espaço $\dot{K}^{0}_{BMO,\infty}$ como o espaço das funções localmente integráveis f em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tais que*

$$||f||_{\dot{K}^{0}_{BMO,\infty}} := \sup_{k\in\mathbb{Z}} ||f||_{BMO(Q_k^*)} < \infty,$$

onde

$$||f||_{BMO(Q_k^*)} = \sup_{Q\subset Q_k^*} \inf_{c\in\mathbb{C}} \fint_{Q} |f - c|dy,$$

e $Q_k^* := Q_{k-1} \cup Q_k \cup Q_{k+1}$, $Q_k = (-2^k, 2^k)^n \backslash (-2^{k-1}, 2^{k-1})^n$.

Ainda para a demonstração do segundo teorema, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.2.2. *Sejam $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-n/p < \alpha < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Então, existe uma constante c tal que, para toda $f \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ com $\nabla^m f \in \dot{K}^{0}_{BMO,\infty}$ e $g \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ com $\nabla^m g \in \dot{K}^{0}_{BMO,\infty}$,*

$$||f\nabla^m g||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \leq c\left(||f||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}||\nabla^m g||_{\dot{K}^{0}_{BMO,\infty}} + ||\nabla^m f||_{\dot{K}^{0}_{BMO,\infty}}||g||_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}\right).$$

Podemos agora apresentar o segundo teorema:

Teorema 3.2.3 (Princípio de Continuação para soluções brandas locais.)**.** *Sejam $n \geq 2$, $n < p < \infty, 0 \leq \alpha < 1 - n/p$ e $0 < T^* < \infty$. Sejam $u_0 \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}$ com $\nabla \cdot u_0 = 0$ e u uma solução de $(E.I.)$ na classe $L^{\infty}(0, T; \dot{K}^{\alpha}_{p,q})$ para todo $T \in (0, T^*)$. Suponha que u satisfaz*

$$\int_0^{T^*} ||\nabla u(t)||_{\dot{K}^{0}_{BMO,\infty}} dt < \infty;$$

então existe $\tilde{T} > T^*$ *tal que* u *pode ser estendida a uma solução de* $(E.I.)$ *na classe* $L^\infty(0,\tilde{T};\dot{K}^\alpha_{p,q})$.

Demonstração: Suponha que a solução u não possa ser estendida além de T^*. Afirmamos que, nesse caso,

$$\limsup_{t\nearrow T^*} ||u(t)||_{\dot{K}_{p,\infty}} = \infty. \tag{3.2}$$

De fato, se o limite superior acima fosse finito, teríamos $||u(t)||_{\dot{K}_{p,\infty}} \leq C_0$, para alguma constante C_0 e para todo $t < T^*$. Pelo Teorema 3.1.2 de existência local, podemos encontrar uma solução a partir de qualquer tempo inicial t_1, com dado inicial $u(t_1)$. Essa solução será regular e bem-definida para todo $t \in [t_1, t_1 + T_0(C_0)]$, com T_0 dependendo apenas de C_0 e dos índices n, p e α, mas sem dependência de t_1. Desta forma, tomando $t_1 > T^* - T_0$, temos u bem-definida e regular até um tempo maior que T^*, o que contradiz nossa suposição.

Portanto, (3.2) deve ser verdadeira se não pudermos estender u além de T^*.

Por outro lado, aplicando o Lema 3.2.2 para $f = u$ e $g = u$, com $m = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}||u(t)||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} &\leq c||u_0||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} + c\int_0^t ||(u\cdot\nabla)u(s)||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} ds \leq \\ &\leq c||u_0||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} + c\int_0^t ||u(s)||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} ||\nabla u(s)||_{\dot{K}^0_{BMO,\infty}} ds.\end{aligned}$$

Como $||u_0||_{\dot{K}^\alpha_{p,q}}$ é não decrescente em t, pela desigualdade de Grönwall, segue que

$$||u(t)||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \leq c||u_0||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} \exp\left(c\int_0^{T^*} ||\nabla u(s)||_{\dot{K}^0_{BMO,\infty}} ds\right) < \infty.$$

Tomando o supremo, obtemos que

$$\sup_{0\leq t<T^*} ||u(t)||_{\dot{K}^\alpha_{p,\infty}} < \infty,$$

o que contradiz (3.2). Logo, existe $\tilde{T} > T^*$ tal que u pode ser estendida em $L^\infty(0,\tilde{T};\dot{K}^\alpha_{p,q})$.

■

3.3 Existência Global para Dados Pequenos

No que diz respeito a soluções globais, já temos a invariância por *scaling* dos espaços $\dot{K}^{1-n/p}_{p,q}$ e $W\dot{K}^{1-n/p}_{p,q}$, que faz com que a existência de soluções globais seja esperada. De fato, tendo uma solução local em um espaço invariante por scaling, pode-se reescalá-la com um fator $\lambda > 1$ qualquer e obter uma solução até um T tão grande quanto se queira. Ainda sobre a boa-colocação global, temos o Teorema 3.2.3, que garante extensão global para a solução local encontrada no Teorema 3.1.2, no caso particular em que $u_0 \in \dot{K}^\alpha_{p,q}$.

Nesse sentido, como mostramos no Lema 2.1.4 as inclusões dos espaços de Herz quando diminuímos o índice p e quando aumentamos o índice q, temos que o maior espaço de Herz adequado para investigarmos é $W\dot{K}^{\alpha}_{n,\infty}$, já que precisamos que o índice p seja maior que a dimensão, n. Ainda, como desejamos obter soluções globais nos espaços de Herz, é necessário que este tenha a mesma invariância por *scaling* que as equações de Navier-Stokes, isto é, com $\alpha = 1 - n/n = 0$. Desta forma, o maior espaço apropriado para investigarmos a existência de solução global é o espaço $W\dot{K}^{0}_{n,\infty}$.

Tendo definido qual será o espaço de valor adaptado que usaremos para o teorema de Existência Global, $W\dot{K}^{0}_{n,\infty}$, vamos definir o espaço de caminho admissível associado, X:

Definição 3.3.1. *Definimos o espaço de valor adaptado X como*
$X = \{u \in L^{\infty}(0,\infty; W\dot{K}^{0}_{n,\infty}) : ||u||_X < \infty, \nabla \cdot u = 0\}$, *sendo*

$$\begin{aligned} ||u||_X &= \sup_{t>0} ||u(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + \sup_{t>0} t^{(1-n/p)/2}||u(t)||_{\dot{K}^0_{p,\infty}} + \sup_{t>0} t^{1/2}||u(t)||_{\infty} + \sup_{t>0} t^{1/2}||\nabla u(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\ &=: ||u||_{X_1} + ||u||_{X_2} + ||u||_{X_3} + ||u||_{X_4}. \end{aligned}$$

Observe que nas normas que definem a norma de X, novamente usamos potências de t que compensam as potências que aparecem naturalmente nas estimativas do semigrupo do calor.

Teorema 3.3.2 (Existência Global para dados pequenos)**.** *Sejam $n \geq 2$ e $n < p < \infty$. Então, existe $\delta > 0$ tal que, para toda $u_0 \in W\dot{K}^0_{n,\infty}$ com $||u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq \delta$ e $\nabla \cdot u_0 = 0$, existe uma solução $u \in X \cap C((0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty})$ de (E.I.) tal que*

(i) $u(t) \in W\dot{\mathcal{K}}^0_{n,\infty}$, *para* $t > 0$;

(ii) $u(t) \to u_0$, *na topologia fraca* $*$ *quando* $t \searrow 0$;

(iii) $u(t) - e^{t\Delta}u_0 \in L^{\infty}(0,\infty; \dot{K}^0_{n,\infty})$;

(iv) $u(t) - e^{t\Delta}u_0$ *é contínua à direita em* $\dot{K}^0_{n,\infty}$, *para* $t \in (0,\infty)$.

Ainda, se $u_0 \in W\dot{\mathcal{K}}^0_{n,\infty}$, pode-se provar que $u(t) \to u_0$ em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ quando $t \searrow 0$ e que

$$\lim_{t\searrow 0} t^{(1-n/p)/2}||u(t)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} = \lim_{t\searrow 0} t^{1/2}||u(t)||_{\infty} = 0.$$

Demonstração: Assim como no Teorema 3.1.2, vamos dividir a demonstração em quatro passos, começando com uma estimativa para a forma bilinear B. Novamente, desejamos usar o Princípio da Contração de Picard.

Passo 1: A forma bilinear B é um mapa de $X \times X$ em X e tem a estimativa

$$||B(u,v)||_X \leq C_B ||u||_X ||v||_X.$$

De fato, seja $1/\sigma = 1/n + 1/p$. Vamos limitar as 4 normas que definem a norma de B em X.

Pelo Corolário 2.2.4, [I](iii), notando que $n(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{n})/2 = \frac{n}{2p}$,

$$\begin{aligned} ||B(u,v)(t)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} &\leq \int_0^t ||e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)v(s)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} ds \\ &\leq c\int_0^t (t-s)^{-n/2p}||(u\cdot\nabla)v(s)||_{W\dot{K}^0_{\sigma,\infty}} ds. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.13, usando novamente que $1/\sigma = 1/n + 1/p$, obtemos

$$\begin{aligned}||B(u,v)(t)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} &\le c\int_0^t (t-s)^{-n/2p}||u(s)||_{W\dot{K}^0_{p,\infty}}||\nabla v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}ds\\ &= c\int_0^t (t-s)^{-n/2p}s^{-1+n/2p}\left(s^{(1-n/p)/2}||u(s)||_{W\dot{K}^0_{p,\infty}}\right)\left(s^{1/2}||\nabla v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right)ds.\end{aligned}$$

Tomando os supremos em s nos termos entre parênteses, temos

$$||B(u,v)(t)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} \le c||u||_{X_2}||v||_{X_4}\int_0^t (t-s)^{-n/2p}s^{-1+n/2p}ds.$$

Fazendo a mudança de variável $z = s/t$ na integral acima, obtemos uma função beta:

$$||B(u,v)(t)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} \le c||u||_{X_2}||v||_{X_4}\int_0^1 (1-z)^{-n/2p}z^{-1+n/2p}dz.$$

Para relembrar a definição da função beta, veja a página 28. Como $n < p$, segue que $n/2p < n/p < 1$, e portanto $1 - n/2p > 0$. Da positividade de n e p, segue também que $n/2p > 0$. Assim, a função beta acima está bem definida e tem um valor finito. Logo,

$$\begin{aligned}||B(u,v)(t)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} &\le c||u||_{X_2}||v||_{X_4}\int_0^1 (1-z)^{-n/2p}z^{-1+n/2p}dz\\ &\le \frac{C_B}{4}||u||_X||v||_X.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Logo, tomando o supremo em t em ambos os lados e lembrando que $\dot{K}^0_{n,\infty} \hookrightarrow W\dot{K}^0_{n,\infty}$ temos a primeira estimativa,

$$||B(u,v)||_{X_1} \le \frac{C_B}{4}||u||_X||v||_X.$$

O leitor deve observar aqui que, como $\text{esssup} f \le \sup f$, a estimativa acima também nos diz que $||B(u,u)||_{L^\infty(0,\infty;\dot{K}^0_{n,\infty})} < \infty$, portanto $B(u,u) \in L^\infty(0,\infty;\dot{K}^0_{n,\infty})$, e temos provada a propriedade (iii) assim que provarmos a existência da solução.

Para a norma X_2, aplicamos o Corolário 2.2.4 [I](iii) e em seguida o Lema 2.1.13 para obter

$$\begin{aligned}||B(u,v)(t)||_{\dot{K}^0_{p,\infty}} &\le \int_0^t ||\nabla e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\otimes v)(s)||_{\dot{K}^0_{p,\infty}}ds\\ &\le c\int_0^t (t-s)^{-1/2-n(2/p-1/p)/2}||u\otimes v(s)||_{W\dot{K}^0_{p/2,\infty}}\\ &\le c\int_0^t (t-s)^{-1/2-n/2p}s^{-1+n/p}\left(s^{(1-n/p)/2}||u||_{W\dot{K}^0_{p,\infty}}\right)\left(s^{(1-n/p)/2}||v||_{W\dot{K}^0_{p,\infty}}\right)ds.\end{aligned}$$

Tomando o supremo em s nos termos entre parênteses, temos

$$||B(u,v)(t)||_{\dot{K}^0_{p,\infty}} \le c||u||_{X_2}||v||_{X_2}\int_0^t (t-s)^{-1/2-n/2p}s^{-1+n/p}ds.$$

Novamente fazendo a mudança de variável $z = s/t$, temos uma função beta, com os expoentes $1/2 - n/2p$ e n/p, cuja positividade segue de $0 < n < p$. Assim,

$$\begin{aligned}||B(u,v)(t)||_{\dot{K}^0_{p,\infty}} &\le c||u||_X||v||_X\int_0^t (t-s)^{-1/2-n/2p}s^{-1+n/p}ds\\ &= c||u||_X||v||_X\int_0^1 t^{-1/2+n/2p}(1-z)^{-1/2-n/2p}z^{-1+n/p}dz\\ &\le \frac{C_B}{4}t^{-(1-n/p)/2}||u||_X||v||_X.\end{aligned}$$

Logo, tomando o supremo em t em ambos os lados, obtemos a segunda estimativa,

$$||B(u,v)||_{X_2} \leq \frac{C_B}{4}||u||_X||v||_X.$$

Para estimar a norma X_3 de B, basta lembrar que $\dot{K}^0_{\infty,\infty} = L^\infty$. Com isso, usamos o Corolário 2.2.4 [I](iii), o Lema 2.1.13 e tomamos o supremo em s dentro da integral novamente:

$$\begin{aligned}
||B(u,v)(t)||_\infty &\leq \int_0^t ||e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)v(s)||_{L^\infty} ds \\
&\leq c\int_0^t (t-s)^{-n/2\sigma}||(u\cdot\nabla)v(s)||_{W\dot{K}^0_{\sigma,\infty}} ds \\
&\leq c\int_0^t (t-s)^{-n/2\sigma}||u(s)||_{W\dot{K}^0_{p,\infty}}||\nabla v(s)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} ds \\
&\leq c||u||_{X_2}||v||_{X_4}\int_0^t (t-s)^{-n/2\sigma}s^{-1+n/2p} ds.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $z = s/t$, e notando que $1/\sigma = 1/n + 1/p$ implica em $-n/2\sigma + n/2p = -1/2$, obtemos

$$||B(u,v)(t)||_\infty \leq c||u||_{X_2}||v||_{X_4}t^{-1/2}\int_0^1 (1-z)^{-n/2\sigma}z^{-1+n/2p} dz.$$

Agora, como $n < p$, temos que $\frac{1}{p} < \frac{1}{n}$, e assim, $\frac{1}{\sigma} < \frac{2}{n}$. Logo, $\frac{n}{2\sigma} < 1$, e daí $1 - \frac{n}{2\sigma} > 0$. Portanto, os expoentes da função beta acima são positivos e novamente a função beta está bem definida e tem um valor finito. Assim,

$$||B(u,v)(t)||_\infty \leq \frac{C_B}{4}t^{-1/2}||u||_X||v||_X.$$

Mais uma vez, tomando o supremo em t em ambos os lados, obtemos a terceira estimativa,

$$||B(u,v)||_{X_3} \leq \frac{C_B}{4}||u||_X||v||_X.$$

Finalmente, para a norma X_4 de B, usamos o Corolário 2.2.4[I](iii), o Lema 2.1.13 e tomamos o supremo em s dentro da integral para obter

$$\begin{aligned}
||\nabla B(u,v)(t)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} &\leq \int_0^t ||\nabla e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)v(s)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} ds \\
&\leq c\int_0^t (t-s)^{-1/2-n(1/\sigma-1/n)/2}||(u\cdot\nabla)v(s)||_{W\dot{K}^0_{\sigma,\infty}} ds \\
&\leq c\int_0^t (t-s)^{-(1+n/p)/2}||u(s)||_{W\dot{K}^0_{p,\infty}}||v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} ds \\
&\leq c||u||_{X_2}||v||_{X_4}\int_0^t (t-s)^{-(1+n/p)/2}s^{-1+n/2p} ds.
\end{aligned}$$

Como $0 < n < p$, segue que $1/2 - n/2p > 0$, e portanto a função beta obtida na mudança de variáveis $z = s/t$ está bem definida e tem valor finito. Logo,

$$\begin{aligned}
||\nabla B(u,v)(t)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} &\leq c||u||_X||v||_X t^{-1/2}\int_0^1 (1-z)^{-(1+n/p)/2}z^{-1+n/2p} dz \\
&\leq \frac{C_B}{4}t^{-1/2}||u||_X||v||_X.
\end{aligned}$$

Por fim, tomando o supremo em t em ambos os lados, obtemos a última estimativa,

$$||B(u,v)||_{X_4} \leq \frac{C_B}{4}||u||_X||v||_X.$$

Somando as 4 estimativas obtidas, temos o resultado desejado.

Passo 2: Verificamos que

$$||e^{t\Delta}u_0||_X \leq C_0||u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.$$

Basta aplicar o Corolário 2.2.4 4 vezes para obter as 4 estimativas das normas que definem a norma X :
Pelo Corolário 2.2.4[I](ii),

$$||e^{t\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq \frac{C_0}{4}||u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.$$

Pelo Corolário 2.2.4[I](iii),

$$||e^{t\Delta}u_0||_{\dot{K}^0_{p,\infty}} \leq \frac{C_0}{4}t^{-(1-n/p)/2}||u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.$$

Pelo Corolário 2.2.4[I](iii) novamente, lembrando que $\dot{K}^0_{\infty,\infty} = L^\infty$, vem

$$||e^{t\Delta}u_0||_\infty \leq \frac{C_0}{4}t^{-1/2}||u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.$$

Por fim, pelo Corolário 2.2.4[I](iv),

$$||\nabla e^{t\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq \frac{C_0}{4}t^{-1/2}||u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.$$

Juntando as quatro estimativas acima, obtemos o resultado desejado. Agora, tome

$$\delta = \frac{1}{8C_BC_0}.$$

Temos que, se $||u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq \delta$, então $||e^{t\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq \frac{1}{8C_B}$, e como $0 < \frac{1}{8C_B} < \frac{1}{4C_B}$, o Princípio da Contração de Picard garante a existência de uma solução $u \in X$ de (E.I.) que depende continuamente de u_0. Ainda, como as estimativas encontradas nos passos 1 e 2 não dependem de t, mas valem para todo $t > 0$, a solução encontrada é, de fato, global.

Passo 3: Vamos mostrar a continuidade de u em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$.

Para mostrar a continuidade de u com relação a t em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$, mostraremos separadamente as continuidades de $e^{t\Delta}u_0$ e $B(u,u)(t)$.

Para $e^{t\Delta}u_0$, como $e^{(t\pm\tau)\Delta}u_0 - e^{t\Delta}u_0 = u_0 * (G_{\sqrt{t\pm\tau}} - G_{\sqrt{t}})$, pela Proposição 2.2.5, temos

$$||e^{(t\pm\tau)\Delta}u_0 - e^{t\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq c|G_{\sqrt{t\pm\tau}} - G_{\sqrt{t}}|_{\mathcal{S}}||u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}},$$

com $|\cdot|_{\mathcal{S}}$ denotando uma seminorma de $\mathcal{S}$. Assim, temos que $e^{t\Delta}u_0 \in C((0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty})$.

Vamos mostrar agora a continuidade à direita de B em $\dot{K}^0_{n,\infty}$, para $t \in (0,\infty)$. Para isso, escrevemos

$$\begin{aligned} B(u,u)(t+\tau) - B(u,u)(t) &= \int_0^t \left(e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s) - e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)\right) ds \\ &+ \int_t^{t+\tau} e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)ds =: \mathrm{I}_+ + \mathrm{II}_+. \end{aligned}$$

Como, para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, temos, usando o Corolário 2.2.4 [I](iii) e o Lema 2.1.13:

$$\begin{aligned} \left|\left| e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)\right|\right|_{\dot{K}^0_{n,\infty}} &\leq c(t+\tau-s)^{-n/2p}||(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^0_{\sigma,\infty}} \\ &\leq c(t+\tau-s)^{-n/2p}||u(s)||_{W\dot{K}^0_{p,\infty}}||\nabla u||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\ &\leq c(t+\tau-s)^{-n/2p}s^{-1+n/2p}||u||_{X_2}||u||_{X_4} \\ &\leq c(t-s)^{-n/2p}s^{-1+n/2p}||u||_{X_2}||u||_{X_4} \in L^1(0,t). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{t\searrow 0}||\mathrm{I}_+||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} &\leq \lim_{t\searrow 0}\int_0^t ||e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s) - e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} ds \\ &= \int_0^t \lim_{t\searrow 0}||e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s) - e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} ds = 0. \end{aligned}$$

Para o segundo termo, usando novamente o Corolário 2.2.4[I](iii) e o Lema 2.1.13, obtemos

$$\begin{aligned} ||\mathrm{II}_+||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} &\leq \int_t^{t+\tau} ||e^{(t+\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} ds \\ &\leq c\int_t^{t+\tau}(t+\tau-s)^{-n/2p}||(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^0_{\sigma,\infty}} \\ &\leq c\int_t^{t+\tau}(t+\tau-s)^{-n/2p}||u(s)||_{W\dot{K}^0_{p,\infty}}||\nabla u(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\ &\leq c||u||_{X_2}||u||_{X_4}\int_t^{t+\tau}(t+\tau-s)^{-n/2p}s^{-1+n/2p}. \end{aligned}$$

Como $t > 0$, a integral da direita converge e tende a zero quando $\tau \searrow 0$. Logo,

$$\lim_{\tau\searrow 0}||\mathrm{II}_+||_{\dot{K}^0_{n,\infty}} = 0.$$

Logo, $u(t) - e^{t\Delta}u_0 = B(u,u)(t)$ é contínua à direita em $\dot{K}^0_{n,\infty}$, e a propriedade (iv) está provada.

Da imersão $\dot{K}^0_{n,\infty} \hookrightarrow W\dot{K}^0_{n,\infty}$, temos que B é contínua à direita em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$. Vamos mostrar sua continuidade à esquerda nesse espaço.

Para isso, escreva, para $t > 0$ e $\tau > 0$,

$$\begin{aligned} B(u,u)(t-\tau) - B(u,u)(t) &= \int_0^{t-\tau} e^{(t-\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s) - e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)ds \\ &+ \int_{t-\tau}^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)ds =: \mathrm{I}_- + \mathrm{II}_-. \end{aligned}$$

Como temos que, pelo Corolário 2.2.4 [I](iv) e pelo Lema 2.1.13,

$$\begin{aligned}
||e^{(t-\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &= ||\nabla e^{(t-\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\otimes u)(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\\
&\leq c(t-\tau-s)^{-1/2}||u\otimes u(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\\
&\leq c(t-\tau-s)^{-1/2}||u||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}||u||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}}\\
&= c(t-\tau-s)^{-1/2}s^{-1/2}\left(||u||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right)\left(s^{1/2}||u||_{L^\infty}\right)\\
&\leq c(t-\tau-s)^{-1/2}s^{-1/2}||u||_{X_1}||u||_{X_3}\\
&\leq c(t-\tau-s)^{-1/2}s^{-1/2}||u||_X^2\in L^1(0,t),
\end{aligned}$$

segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{\tau\searrow 0}||\mathrm{I}_-||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = \int_0^{t-\tau}\lim_{\tau\searrow 0}\left|\left|e^{(t-\tau-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)-e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)\right|\right|ds=0.$$

Ainda, como $n\geq 2$, temos $n(1-1/n)>0$ e portanto, pelo Corolário 2.2.4[II], obtemos

$$\begin{aligned}
||\mathrm{II}_-||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &\leq \int_{t-\tau}^t ||e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}ds\\
&\leq c\int_{t-\tau}^t ||(u\cdot\nabla)u(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}ds\\
&\leq c\int_{t-\tau}^t ||u||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}}||\nabla u||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}ds\\
&\leq c||u||_{X_3}||u||_{X_4}\int_{t-\tau}^t s^{-1}ds.
\end{aligned}$$

Como para τ suficientemente pequeno temos $t-\tau>0$, a integral acima converge e tende a zero quando $\tau\searrow 0$. Segue que

$$\lim_{\tau\searrow 0}||\mathrm{II}_-||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}=0.$$

Desta forma, $u=e^{t\Delta}u_0-B(u,u)$ é contínua em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$, e da continuidade do operador $e^{t\Delta}$, segue que $e^{t\Delta}u\to u$ quando $t\searrow 0$. Logo, $u\in W\dot{\mathcal{K}}^0_{n,\infty}$ para $t>0$, e provamos a propriedade (i).

Para a propriedade (ii), procedemos da mesma forma que no Teorema 3.1.2. Basta mostrarmos que

$$\lim_{t\searrow 0}\left|\left\langle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(s)ds,\phi\right\rangle\right|=0,$$

para toda $\phi\in C_0^\infty$.

Seja $f(x,t):=\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\otimes u)(s)ds$. Queremos calcular o limite $\lim_{t\searrow 0}|\langle\nabla f,\phi\rangle|$. Procedendo da mesma forma que no Teorema 3.1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
|\langle\nabla f,\phi\rangle| &\leq c||\nabla\phi||_Z\int_0^t(t-s)^{-1+n/2r}||u(s)||^2_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}ds\\
&\leq c||\nabla\phi||_Z||u||^2_{X_1}\int_0^t(t-s)^{-1+n/2r}ds\\
&\leq c||\nabla\phi||_Z||u||^2_X t^{n/2r}\to 0,\ \text{quando } t\searrow 0.
\end{aligned}$$

Passo 4: Por fim, consideramos o caso $u_0 \in W\dot{\mathcal{K}}^0_{n,\infty}$.

Como a forma bilinear $B(u,u)(t)$ é contínua à direita em $\dot{K}^0_{n,\infty}$, e consequentemente em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$, segue diretamente que

$$\begin{aligned}\lim_{t\searrow 0}||u(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &= \lim_{t\searrow 0}||e^{t\Delta}u_0 - B(u,u)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\\ &\leq \lim_{t\searrow 0}||e^{t\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + \lim_{t\searrow 0}||B(u,u)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\\ &= \lim_{t\searrow 0}||e^{t\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = ||u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.\end{aligned}$$

E portanto, $u(t) \to u_0$ em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ quando $t \searrow 0$.

■

3.4 Unicidade da Solução Global

Teorema 3.4.1 (Unicidade da Solução Global)**.** *Seja $n \geq 3$. Seja $u_0 \in W\dot{\mathcal{K}}^0_{n,\infty}$, com $\nabla \cdot u = 0$. Se u e v são soluções brandas de (E.I.) com divergente nulo, dado inicial u_0 e estão na classe $C([0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty})$, satisfazendo $u(t), v(t) \to u_0$ em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ quando $t \searrow 0$, então $u = v$ em $[0,\infty)$.*

Demonstração: A demonstração consiste em usar a Proposição 2.2.7 para estimar a norma em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ da forma bilinear B e com isso controlar a diferença entre u e v.

Seja $w(t) = u(t) - v(t)$. Então, $w \in L^\infty(0,T; W\dot{K}^0_{n,\infty})$ e

$$\begin{aligned}w(t) &= -B(u,u)(t) + B(v,v)(t) = B(u,v)(t) - B(u,u)(t) + B(v,v)(t) - B(u,v)(t)\\ &= B(u, v-u)(t) + B(v-u, v)(t) = B(-u, w)(t) + B(w, -v)(t)\\ &= B(e^{\cdot\Delta}u_0 - u, w)(t) + B(w, e^{\cdot\Delta}u_0 - v)(t) - B(e^{\cdot\Delta}u_0, w)(t) - B(w, e^{\cdot\Delta}u_0)(t).\end{aligned}$$

Note que

$$B(u,v)(t) = \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(u\otimes v)(s)ds = \int_0^\infty \nabla e^{s\Delta}\mathbb{P}(u\otimes v)\chi_{(0,t)}(t-s)ds.$$

Vamos aplicar a Proposição 2.2.7 com $\beta = 1/4$, $r_1 = 2n/3$ e $r_2 = 2n$ (ou seja, nesse caso, $p = n/2$ e $r = n$). Temos

$$\begin{aligned}||B(e^{\cdot\Delta}u_0 - u, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &= \left|\left|\int_0^\infty \nabla e^{s\Delta}\mathbb{P}((e^{\cdot\Delta}u_0 - u)\otimes w)\chi_{(0,t)}(t-s)ds\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\\ &= \left|\left|\int_0^\infty \nabla(-\Delta)^{-1/2}(-\Delta)^{1/2}e^{s\Delta}\mathbb{P}((e^{\cdot\Delta}u_0 - u)\otimes w)\chi_{(0,t)}(t-s)ds\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.\end{aligned}$$

Pela continuidade do operador $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$, obtemos

$$||B(e^{\cdot\Delta}u_0 - u, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq \left|\left|\int_0^\infty (-\Delta)^{1/2}e^{s\Delta}\mathbb{P}((e^{\cdot\Delta}u_0 - u)\otimes w)\chi_{(0,t)}(t-s)ds\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.$$

Como $r_1 < n < r_2$, temos a inclusão $(W\dot{K}^0_{r_1,\infty}, W\dot{K}^0_{r_2,\infty})_{1/2,\infty} \hookrightarrow W\dot{K}^0_{n,\infty}$, e dela

$$\begin{aligned} &||B(e^{\cdot\Delta}u_0 - u, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\ &\qquad \leq \left|\left| \int_0^\infty (-\Delta)^{1/2} e^{s\Delta}\mathbb{P}((e^{\cdot\Delta}u_0 - u) \otimes w)\chi_{(0,t)}(t-s)ds \right|\right|_{(W\dot{K}^0_{2n/3,\infty}, W\dot{K}^0_{2n,\infty})_{1/2,\infty}}. \end{aligned}$$

Agora, pela Proposição 2.2.7, obtemos

$$\begin{aligned} ||B(e^{\cdot\Delta}u_0 - u, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &\leq c\left|\left|((e^{\cdot\Delta}u_0 - u) \otimes w)\chi_{(0,t)}(t - \cdot)\right|\right|_{L^\infty(0,\infty;W\dot{K}^0_{n/2,\infty})} \\ &\leq c\left|\left|(e^{\cdot\Delta}u_0 - u) \otimes w\right|\right|_{L^\infty(0,t;W\dot{K}^0_{n/2,\infty})} \\ &\leq c \sup_{0\leq s\leq t}\left|\left|((e^{\cdot\Delta}u_0 - u) \otimes w)(s)\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n/2,\infty}} \\ &\leq c\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|\left|(e^{\cdot\Delta}u_0 - u)(s)\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right)\left(\sup_{0\leq s\leq t}||w(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right), \end{aligned}$$

e temos portanto

$$||B(e^{\cdot\Delta}u_0 - u, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq c\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|\left|(e^{\cdot\Delta}u_0 - u)(s)\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right)\left(\sup_{0\leq s\leq t}||w(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right). \tag{3.4}$$

Analogamente, temos a estimativa

$$||B(e^{\cdot\Delta}u_0 - v, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq c\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|\left|(e^{\cdot\Delta}u_0 - v)(s)\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right)\left(\sup_{0\leq s\leq t}||w(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right).$$

Agora, u e v estão em $C([0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty})$. Além disso, $u_0 \in W\dot{\mathcal{K}}^0_{n,\infty}$, logo $u, v, e^{t\Delta}u_0 \to u_0$ em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ quando $t \searrow 0$. Assim,

$$\lim_{t\searrow 0}\sup_{0\leq s\leq t}\left|\left|(e^{\cdot\Delta}u_0 - u)(s)\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\searrow 0}\sup_{0\leq s\leq t}\left|\left|(e^{\cdot\Delta}u_0 - v)(s)\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = 0. \tag{3.5}$$

Por outro lado, podemos estimar a forma bilinear $B(e^{\cdot\Delta}u_0, w)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} ||B(e^{\cdot\Delta}u_0, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &= \left|\left|\int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(e^{s\Delta}u_0 \otimes w)(s)ds\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\ &\leq \int_0^t ||\nabla e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(e^{s\Delta}u_0 \otimes w)(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}ds. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 2.2.4[I](ii),

$$\begin{aligned} ||B(e^{\cdot\Delta}u_0, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &\leq c\int_0^t (t-s)^{-1/2}||(e^{s\Delta}u_0 \otimes w)(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}ds \\ &\leq c\sup_{0<s\leq t} s^{1/2}||(e^{s\Delta}u_0 \otimes w)(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\int_0^t (t-s)^{-1/2}s^{-1/2}ds \\ &= c\sup_{0<s\leq t} s^{1/2}||(e^{s\Delta}u_0 \otimes w)(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}, \end{aligned}$$

já que a integral acima é uma função beta com ambos expoentes iguais a $\frac{1}{2}$. Agora, pelo Lema 2.1.13,

$$||B(e^{\cdot\Delta}u_0, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq c\left(\sup_{0<s\leq t} s^{1/2}||e^{s\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}}\right)\left(\sup_{0<s\leq t}||w(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right).$$

Como $B(u,v) = B(v,u)$, a mesma estimativa vale para $B(w, e^{\cdot\Delta}u_0)(t)$. Afirmamos que

$$\sup_{0<s\leq t} s^{1/2}||e^{s\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}} \to 0 \quad \text{quando } t \searrow 0. \tag{3.6}$$

Para mostrar a afirmação, tome $\tau > 0$ pequeno, de forma que $||u_0 - \tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}$ seja pequeno o suficiente, sendo $\tilde{u}_0 = e^{\tau\Delta}u_0$. A existência de tal τ vem de $u_0 \in W\dot{\mathcal{K}}^0_{n,\infty}$.

Pelo Corolário 2.2.4 [I](ii),

$$||e^{s\Delta}\tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}} \leq cs^{\frac{-n}{2(n+1)}}||\tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{n+1,\infty}},$$

logo,

$$s^{1/2}||e^{s\Delta}\tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}} \leq cs^{1/2(n+1)}||\tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{n+1,\infty}}.$$

Lembramos que o operador $e^{t\Delta}$ é uma convolução com $G_{\sqrt{t}}$, e que a convolução é distributiva. Logo, temos

$$\begin{aligned}
s^{1/2}||e^{s\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}} &= s^{1/2}||e^{s\Delta}\tilde{u}_0 + e^{s\Delta}(u_0 - \tilde{u}_0)||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}} \\
&\leq s^{1/2}||e^{s\Delta}\tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}} + s^{1/2}||e^{s\Delta}(u_0 - \tilde{u}_0)||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}} \\
&\leq cs^{1/2(n+1)}||\tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{n+1,\infty}} + s^{1/2}||e^{s\Delta}(u_0 - \tilde{u}_0)||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Corolário 2.2.4 [I](i) no segundo termo do lado direito da inequação acima,

$$\begin{aligned}
s^{1/2}||e^{s\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}} &\leq c\left(s^{1/2(n+1)}||\tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{n+1,\infty}} + ||u_0 - \tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right) \\
&< c\left(s^{1/2}||\tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{n+1,\infty}} + ||u_0 - \tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right).
\end{aligned}$$

Pela escolha adequada de τ, obtemos

$$s^{1/2}||e^{s\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}} \leq c\left(s^{1/2}||\tilde{u}_0||_{W\dot{K}^0_{n+1,\infty}}\right).$$

Tomando o supremo em $0 < s \leq t$ e fazendo $t \searrow 0$, obtemos o resultado.

Agora, juntando as estimativas que fizemos para a forma bilinear B, temos

$$\begin{aligned}
||w(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &\leq ||B(e^{t\Delta}u_0 - u, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + ||B(e^{t\Delta}u_0 - v, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\
&\quad + ||B(e^{t\Delta}u_0, w)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + ||B(w, e^{t\Delta}u_0)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\
&\leq c\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|\left|(e^{t\Delta}u_0 - u)(s)\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + \sup_{0\leq s\leq t}\left|\left|(e^{t\Delta}u_0 - v)(s)\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right. \\
&\quad \left. + \sup_{0<s\leq t} s^{1/2}||e^{s\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}}\right)\left(\sup_{0<s\leq t}||w(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right).
\end{aligned}$$

Tomando o supremo em $0 < s \leq t$, obtemos

$$\sup_{0<s\leq t} ||w(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq c\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|\left|(e^{t\Delta}u_0 - u)(s)\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + \sup_{0\leq s\leq t}\left|\left|(e^{t\Delta}u_0 - v)(s)\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \right.$$
$$\left. + \sup_{0<s\leq t} s^{1/2}||e^{s\Delta}u_0||_{W\dot{K}^0_{\infty,\infty}}\right)\left(\sup_{0<s\leq t}||w(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right).$$

Pelas limites calculados em 3.5 e 3.6, existe $T_0 > 0$ tal que

$$\sup_{0<s\leq t}||w(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq \frac{1}{2}\sup_{0<s\leq t}||w(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.$$

Logo, $\sup_{0<s\leq t}||w(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = 0$, o que implica em $w = 0$ em $[0, T_0]$, ou seja, $u = v$ em $[0, T_0]$.

Agora, defina

$$T^* := \sup_{0<t\leq T}\{t; u = v \text{ em } [0,t]\}.$$

Se $T^* = \infty$, a prova está completa. Suponha $T^* < \infty$. Pela continuidade de u e v, temos $u = v$ em $[0, T^*]$.

Sejam $\tilde{u}(x,t) := u(x, T^*+t)$ e $\tilde{v}(x,t) := v(x, T^*+t)$. Temos que $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ são soluções brandas de Navier-Stokes na classe $C([0, T-T^*]; W\dot{K}^0_{n,\infty})$, com dados iniciais $\tilde{u}_0 = u(\cdot, T^*)$ e $\tilde{v}_0 = v(\cdot, T^*)$, ambos em $W\dot{\mathcal{K}}^0_{n,\infty}$.

Desta forma, definindo $\tilde{w} = \tilde{u} - \tilde{v}$, podemos repetir a demonstração desde o início para $\tilde{w}$, e encontrar um $\tau > 0$ tal que $\tilde{u} = \tilde{v}$ em $[0, \tau]$, ou seja, $u = v$ em $[T^*, T^* + \tau]$.

Assim, temos que $u = v$ em $[0, T^* + \tau]$ com $\tau > 0$, o que contradiz a maximalidade de T^*.

■

Capítulo 4

Estabilidade Assintótica e Soluções Autossimilares

4.1 Estabilidade Assintótica de Soluções Globais

Na demonstração do último teorema da seção anterior, a estimativa que fizemos para $B(e^{t\Delta}u_0 - u, w)(t)$, mais precisamente para obter a desigualdade (3.4), pode ser refeita para u e v quaisquer em $L^\infty((0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty})$, o que nos dá a estimativa

$$||B(u,v)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq c \left(\sup_{0<s\leq t} ||u(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \right) \left(\sup_{0<s\leq t} ||v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \right).$$

Mais que isso, a constante c acima pode ser melhor controlada. Observe que na demonstração do Teorema 3.3.2, na estimativa (3.3), veja pg. 82, obtivemos uma desigualdade que nos dá

$$||B(u,v)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq \frac{C_B}{4} ||u||_X ||v||_X.$$

Agora, como a norma em X é maior que $||u||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}$ para $t > 0$, podemos tomar o supremo em t para obter

$$\sup_{t>0} ||B(u,v)(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq \frac{C_B}{4} \left(\sup_{t>0} ||u(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \right) \left(\sup_{t>0} ||v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \right).$$

Ou seja, a forma bilinear B é um operador limitado de $\tilde{\mathcal{E}} \times \tilde{\mathcal{E}}$ em $\tilde{\mathcal{E}}$, sendo

$$\tilde{\mathcal{E}} = \left\{ f \in L^\infty((0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty}) : \sup_{t>0} ||f(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} < \infty \right\}. \tag{4.1}$$

O supremo em (4.1) é no sentido essencial, que coincide com o sentido clássico, no caso de funções contínuas. As estimativas obtidas até aqui para B, em particular a limitação obtida acima, nos permitem provar um resultado de estabilidade assintótica de soluções. A estabilidade de uma solução é claramente uma propriedade importante para as equações de Navier-Stokes, visto que em situações práticas, pode haver imprecisão na coleta de dados iniciais. Desta forma, precisamos garantir que essas pequenas perturbações não vão gerar erros significativos na solução, à medida que o tempo evolui.

Nessa direção, o próximo teorema dá condições nos dados iniciais para que as soluções obtidas para as equações de Navier-Stokes se aproximem assintoticamente em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$, conforme $t \nearrow \infty$. A demonstração a seguir é baseada em um resultado de Cannone e Karch [5], que prova estabilidade assintótica quando o dado inicial está em L^3-fraco.

Teorema 4.1.1 (Estabilidade Assintótica das Soluções Globais para Dados Pequenos)**.** *Sejam $n \geq 3$ e $u_0, v_0 \in W\dot{K}^0_{n,\infty}$. Existe $\delta > 0$ tal que, se $||u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}, ||v_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} < \delta$ e*

$$\lim_{t \nearrow \infty} ||e^{t\Delta}(u_0 - v_0)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = 0,$$

então para as soluções u, v construídas no Teorema 3.3.2 com dados iniciais u_0, v_0, respectivamente, temos

$$\lim_{t \nearrow \infty} ||u(t) - v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = 0.$$

Demonstração: Lembre-se que pela construção feita no Teorema 3.3.2, as soluções u, v estão em $\overline{\mathcal{B}}(0, 2\delta)$, ou seja,

$$\sup_{t \geq 0} ||u(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq 2\delta < \frac{1}{2C_B} \quad \text{e} \quad \sup_{t \geq 0} ||v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq 2\delta < \frac{1}{2C_B}. \tag{4.2}$$

Seja $g(t) = ||e^{t\Delta}(u_0 - v_0)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}$. Temos que

$$\begin{aligned} ||u(t) - v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &\leq \Bigg\| e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(u \otimes u)(s)ds \\ &\qquad - e^{t\Delta}v_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(v \otimes v)(s)ds \Bigg\|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\ &\leq ||e^{t\Delta}(u_0 - v_0)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla[(u \otimes u) - (v \otimes v)](s)ds \right\|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\ &= g(t) + \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla[(u - v) \otimes u + v \otimes (u - v)](s)ds \right\|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\ &\leq g(t) + \left\| \int_0^{t\varepsilon} e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla[(u - v) \otimes u + v \otimes (u - v)](s)ds \right\|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\ &\quad + \left\| \int_{t\varepsilon}^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla[(u - v) \otimes u + v \otimes (u - v)](s)ds \right\|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\ &:= g(t) + \mathrm{I} + \mathrm{II}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

para algum $\varepsilon > 0$, que será escolhido mais adiante.

Vamos estimar I. Temos que, usando o Corolário 2.2.4 [I](iii) e em seguida o Lema 2.1.13,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\leq \int_0^{t\varepsilon} \left\|e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla[(u-v)\otimes u + v\otimes(u-v)](s)\right\|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} ds \\
&\leq c\int_0^{t\varepsilon}(t-s)^{-1}\left\|(u-v)\otimes u(s) + v\otimes(u-v)(s)\right\|_{W\dot{K}^0_{n/2,\infty}} ds \\
&\leq c\int_0^{t\varepsilon}(t-s)^{-1}||(u-v)(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}||u(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} ds \\
&\qquad + c\int_0^{t\varepsilon}(t-s)^{-1}||(u-v)(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}||v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} ds.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo em s nas normas de u e de v, podemos tirá-los da integral, obtendo assim

$$\mathrm{I} \leq c\left(\sup_{s>0}||u(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + \sup_{s>0}||v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right)\int_0^{t\varepsilon}(t-s)^{-1}||(u-v)(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} ds.$$

Pela nossa estimativa inicial, (4.2), temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\leq 4\delta c\int_0^{t\varepsilon}(t-s)^{-1}||(u-v)(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} ds \\
&\leq 4\delta c\int_0^{\varepsilon}(1-z)^{-1}||u(tz)-v(tz)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} dz.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Note que no último passo fizemos a mudança de variáveis $z = s/t$.

Agora, para estimar II, vamos utilizar a bicontinuidade de $B(u,v)$ que foi comentada no início dessa seção. Para isso, observe que

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &\leq \left\|\int_{t\varepsilon}^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(u-v)\otimes u(s)ds\right\|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + \left\|\int_{t\varepsilon}^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla v\otimes(u-v)(s)ds\right\|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\
&= \left\|B\left((u-v)\chi_{[t\varepsilon,t]}, u\chi_{[t\varepsilon,t]}\right)\right\|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + \left\|B\left(v\chi_{[t\varepsilon,t]}, (u-v)\chi_{[t\varepsilon,t]}\right)\right\|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.
\end{aligned}$$

Portanto, da bicontinuidade de B, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &\leq \frac{C_B}{4}\left(\sup_{t\varepsilon\leq s\leq t}||u(s)-v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right)\left(\sup_{t\varepsilon\leq s\leq t}||u(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right) \\
&\qquad + \frac{C_B}{4}\left(\sup_{t\varepsilon\leq s\leq t}||v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right)\left(\sup_{t\varepsilon\leq s\leq t}||u(s)-v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right) \\
&= \frac{C_B}{4}\left(\sup_{t\varepsilon\leq s\leq t}||u(s)-v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right)\left(\sup_{t\varepsilon\leq s\leq t}||u(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + \sup_{t\varepsilon\leq s\leq t}||v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right).
\end{aligned}$$

Usando novamente (4.2), podemos estimar

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &\leq 4\delta\frac{C_B}{4}\left(\sup_{t\varepsilon\leq s\leq t}||u(s)-v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}\right) \\
&= \delta C_B\sup_{t\varepsilon\leq s\leq t}||u(s)-v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Agora, juntando as estimativas (4.4) e (4.5) à desigualdade (4.3), chegamos a

$$\begin{aligned} ||u(t)-v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq g(t) &+ 4\delta c \int_0^{\varepsilon} (1-z)^{-1} ||u(tz)-v(tz)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} dz \\ &+ \delta C_B \sup_{t\varepsilon \leq s \leq t} ||u(s)-v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

para todo $t > 0$.

Agora, defina

$$A = \limsup_{t\to\infty} ||u(t)-v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = \lim_{k\to\infty} \sup_{t\geq k} ||u(t)-v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.$$

Temos que $A \geq 0$ e, como pela construção do Teorema 3.3.2 temos ambas u e v na classe $L^{\infty}((0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty})$, segue que A é finito. Vamos mostrar que $A = 0$.

Primeiramente, observe que

$$\sup_{t\geq k} \int_0^{\varepsilon} (1-z)^{-1} ||u(tz)-v(tz)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} dz \leq \int_0^{\varepsilon} (1-z)^{-1} \sup_{t\geq k} ||u(tz)-v(tz)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} dz.$$

Como a quantidade $||u(tz)-v(tz)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}$ é finita, pode ser limitada por uma constante C e portanto a integral da direita é limitada pela integral de $C(1-z)^{-1} \in L^1(0,\varepsilon)$. Desta forma, ao fazer $k \to \infty$ na desigualdade acima, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada na integral da direita e obter

$$\limsup_{t\to\infty} \int_0^{\varepsilon} (1-z)^{-1} ||u(tz)-v(tz)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} dz \leq A \int_0^{\varepsilon} (1-z)^{-1} dz = A \log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right). \tag{4.7}$$

Além disso, temos que

$$\sup_{t\geq k} \sup_{t\varepsilon\leq s\leq t} ||u(s)-v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq \sup_{k\varepsilon\leq s<\infty} ||u(s)-v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}},$$

pelo simples fato de que $[t\varepsilon, t] \subset [k\varepsilon, \infty)$ quando $k \leq t$. Fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$\limsup_{t\to\infty} \left(\sup_{t\varepsilon\leq s\leq t} ||u(s)-v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \right) \leq A. \tag{4.8}$$

Agora, tomando o $\limsup_{t\to\infty}$ em (4.6) e usando a hipótese $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ juntamente com as estimativas (4.7) e (4.8), obtemos

$$A \leq A \left(4\delta c \log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) + \delta C_B \right). \tag{4.9}$$

Observe que $\delta C_B < \dfrac{1}{4}$ (veja o Princípio da Contração de Picard, pg. 17). Logo, podemos tomar ε suficientemente pequeno e obter

$$4\delta c \log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) + \delta C_B < 1.$$

Isso nos garante que $A = 0$. De fato, suponha que $A > 0$. Então, a desigualdade (4.9) nos diz que

$$4\delta c \log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) + \delta C_B \geq 1,$$

o que é um absurdo. Desta forma, temos que $A = 0$, e portanto o limite existe e é igual ao lim sup, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} ||u(t) - v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = 0.$$

■

Além disso, a recíproca é verdadeira, isto é, se as soluções se aproximam assintoticamente, então o semigrupo do calor da diferença entre os dados iniciais tende a zero conforme t aumenta. É o que diz o próximo corolário.

Corolário 4.1.2. *Sejam $n \geq 3$ e u, v soluções de (E.I.) dadas pelo Teorema 3.3.2 e associadas aos dados iniciais u_0, v_0, respectivamente. Suponha que*

$$\lim_{t\nearrow\infty} ||u(t) - v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = 0.$$

Então,

$$\lim_{t\nearrow\infty} ||e^{t\Delta}(u_0 - v_0)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = 0.$$

Demonstração: Escreva $u - v$ usando as expressões de u e v como soluções de (E.I):

$$u(t) - v(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\nabla\mathbb{P}(u\otimes u)(s)ds - e^{t\Delta}v_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\nabla\mathbb{P}(v\otimes v)(s)ds.$$

Isso nos dá

$$e^{t\Delta}(u_0 - v_0) = u(t) - v(t) + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\nabla\mathbb{P}[(u\otimes u) - (v\otimes v)](s)ds.$$

Tomando a norma $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ em ambos os lados, temos uma relação semelhante à desigualdade (4.3); mais precisamente,

$$||e^{t\Delta}(u_0 - v_0)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq ||u(t) - v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} + \left|\left|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\nabla\mathbb{P}[(u\otimes u) - (v\otimes v)](s)ds\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.$$

Podemos então estimar a integral do lado direito como fizemos no teorema anterior, ou seja, usando (4.4) e (4.5), obtendo assim

$$\begin{aligned} ||e^{t\Delta}(u_0 - v_0)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq ||u(t) - v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &+ 4\delta c \int_0^\varepsilon (1-z)^{-1}||u(tz) - v(tz)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} dz \\ &+ \delta C_B \sup_{t\varepsilon\leq s\leq t} ||u(s) - v(s)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}. \end{aligned}$$

Na desigualdade acima, fazendo $t \nearrow \infty$, temos que o primeiro termo do lado direito vai a zero por hipótese, enquanto os outros dois tendem a zero pelos mesmos motivos como no teorema anterior, lembrando que aqui já temos que $A = \limsup_{t\to\infty} ||u(t) - v(t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = 0$, por hipótese. ■

4.2 Soluções Autossimilares

Como já apontado, uma propriedade notável das equações de Navier-Stokes é a sua invariância por *scaling*. Para $\lambda > 0$, considere o *scaling*

$$u \to u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), \tag{4.10}$$

e

$$p \to p_\lambda(x,t) = \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t).$$

Temos que se o par (u, p) é solução para as equações de Navier-Stokes, então o mesmo vale para o par (u_λ, p_λ), para todo $\lambda > 0$.

Uma questão interessante surge naturalmente: existem soluções $u(x,t)$ para as equações de Navier-Stokes que satisfazem a invariância por *scaling*

$$u(x,t) = u_\lambda(x,t),$$

para todo $\lambda > 0$?

Quando existem, essas soluções são chamadas soluções autossimilares do tipo *forward* para as equações de Navier-Stokes.

Vamos estudar um pouco do comportamento de tais soluções. Suponha que $u(x,t)$ seja uma solução autossimilar das equações de Navier-Stokes. Então, temos que a função $u(x,0)$ é homogênea de grau -1 e possui divergente nulo. Desta forma, já sabemos que uma condição necessária para que a solução obtida seja autossimilar é que o dado inicial u_0 seja um vetor homogêneo de grau -1.

Queremos saber se a recíproca é verdadeira, isto é, se dado um vetor u_0 homogêneo de grau -1, com divergente nulo, as equações de Navier-Stokes admitem uma solução autossimilar.

O problema proposto acima não é, em um âmbito geral, nem um pouco simples. Foi proposto pela primeira vez por Leray em sua tese de doutorado, na qual ele estava interessado em procurar soluções da forma

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \tag{4.11}$$

Uma das motivações de Leray em considerar soluções na forma (4.11) foi o estudo do fenômeno de *blow-up* para soluções com energia finita. De fato, a existência de soluções autossimilares em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$ possibilitaria a existência de uma solução com singularidade a partir de um dado inicial suave.

Substituindo-se a expressão (4.11) nas equações de Navier-Stokes, obtém-se equações elípticas que se mostram de resolução difícil. Nossa abordagem deste problema é inspirada no método usado por Giga e Miyakawa [11]. Em nosso contexto, ele consistirá em usar os espaços de Herz e o resultado de existência de soluções para obter soluções autossimilares.

Primeiramente, vamos mostrar que o espaço $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ é adequado para o estudo de soluções autossimilares, pois contém funções homogêneas de grau -1. Para uma primeira abordagem, deixemos a condição de divergente nulo de lado e analisemos o comportamento da função homogênea de grau -1, $f(x) = |x|^{-1}$. Mais especificamente, vejamos que $|x|^{-1} \in W\dot{K}^0_{n,\infty}$.

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{1}{|x|}\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\lambda>0} \lambda|\{x \in A_k : |x|^{-1} > \lambda\}|^{1/n} \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\lambda>0} \lambda \left(\int_{A_k} \chi_{\{|x|^{-1}>\lambda\}} dx\right)^{1/n} \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{\lambda>0} \left(\int_{A_k} \lambda^n \chi_{\{|x|^{-1}>\lambda\}} dx\right)^{1/n}.
\end{aligned}$$

Agora, observe que, se $x \in A_k$, então $|x| \geq 2^{k-1}$, e portanto $|x|^{-1} \leq 2^{1-k}$. Logo, se $x \in A_k$ e $|x|^{-1} > \lambda$, segue que $\lambda^n < 2^{n(1-k)}$, e portanto,

$$\int_{A_k} \lambda^n \chi_{\{|x|^{-1}>\lambda\}} dx \leq 2^{n(1-k)} \int_{A_k} dx = 2^n.$$

Desta forma, obtemos

$$\left|\left|\frac{1}{|x|}\right|\right|_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \leq 2 < \infty,$$

e portanto, $|x|^{-1} \in W\dot{K}^0_{n,\infty}$. Para o caso vetorial, considere

$$u_0 = \frac{1}{|x|^2}(x_2, -x_1, 0, 0, ..., 0).$$

Este vetor possui divergente nulo e norma em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ limitada pela norma de $|x|^{-1}$, que é finita pelo que mostramos acima. Desta forma, pode-se ver que o espaço $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ contém vetores homogêneos de grau -1 e com divergente nulo. Observe que dizemos que um vetor está em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ se cada coordenada está neste espaço.

Outro motivo que nos leva a usar o espaço $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ para tratar de soluções autossimilares é que o espaço $L^\infty((0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty})$ é invariante pelo *scaling* (4.10).

Por fim, temos o Teorema 3.3.2 que nos garante a existência de solução para as equações de Navier-Stokes quando o dado inicial está em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$, e esta solução pode ser obtida como limite de uma sequência iterativa. Com isso, podemos obter o seguinte resultado sobre soluções autossimilares.

Teorema 4.2.1. *Sejam $n \geq 3, n < p < \infty$. Então, existe $\delta > 0$ tal que, se $u_0 \in W\dot{K}^0_{n,\infty}$ com $||u_0||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} < \delta$, $\nabla \cdot u_0 = 0$ e $u_0(x) = \lambda u_0(\lambda x)$, para todo $\lambda > 0$, então existe uma solução branda global $u \in X \cap C((0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty})$ para (E.I.), sendo X como definido no Teorema 3.3.2, que pode ser escrita na forma*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

com $U \in W\dot{K}^0_{n,\infty}$ um campo com divergente nulo.

Demonstração: Primeiramente, observe que a função u escrita como no enunciado é autossimilar. De fato,

$$u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 t}} U\left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\lambda^2 t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = u(x,t).$$

Pelo Teorema 3.3.2, existe uma solução $u(x,t)$ para (E.I.) na classe $X \cap C((0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty})$. Da invariância por *scaling* das equações de Navier-Stokes, temos que $u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ também é solução de (E.I.), para todo $\lambda > 0$. Ainda, para cada $\lambda > 0$, a função u_λ está na mesma classe que u. De fato, o Lema 2.1.15 nos dá as estimativas

- $||u_\lambda||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = ||\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = \lambda ||u(\lambda x, \lambda^2 t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \lesssim ||u(x, \lambda^2 t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}$;
- $||u_\lambda||_{\dot{K}^0_{p,\infty}} = ||\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)||_{\dot{K}^0_{p,\infty}} = \lambda ||u(\lambda x, \lambda^2 t)||_{\dot{K}^0_{p,\infty}} \lesssim \lambda^{1-n/p} ||u(x, \lambda^2 t)||_{\dot{K}^0_{p,\infty}}$;
- $||u_\lambda||_\infty = ||\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)||_\infty = \lambda ||u(\lambda x, \lambda^2 t)||_\infty \lesssim \lambda ||u(x, \lambda^2 t)||_\infty$;
- $$\begin{aligned}||\nabla(u_\lambda)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} &= ||\nabla(\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t))||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = \lambda^2 ||\nabla u(\lambda x, \lambda^2 t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} \\ &\lesssim \lambda ||\nabla u(x, \lambda^2 t)||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}}.\end{aligned}$$

Multiplicando pelas potências adequadas de t e tomando o supremo em $t > 0$, obtemos

$$||u_\lambda||_{X_1} \lesssim ||u||_{X_1}, ||u_\lambda||_{X_2} \lesssim \lambda^{1-n/p} ||u||_{X_2}, ||u_\lambda||_{X_3} \lesssim \lambda ||u||_{X_3}, ||u_\lambda||_{X_4} \lesssim \lambda ||u||_{X_4}. \tag{4.12}$$

Logo, $u_\lambda \in X$, para todo $\lambda > 0$. Da continuidade de u em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$, segue que $u_\lambda \in C((0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty})$, para todo $\lambda > 0$.

Relembre que na construção iterativa do Princípio da Contração de Picard, pg. 17, definimos a seguinte sequência recursiva (adaptando, claro, para a equação (E.I.)):

$$u_{k+1} = e^{t\Delta} u_0 - B(u_k, u_k).$$

Seja $(u_k)_\lambda(x,t) = \lambda u_k(\lambda x, \lambda^2 t)$ o reescalonamento de cada u_k. Observe que, para cada k, temos que

$$(u_{k+1})_\lambda = e^{t\Delta}(u_0)_\lambda - B\left((u_k)_\lambda, (u_k)_\lambda\right),$$

e como $u_1 = e^{t\Delta} u_0$ é invariante por *scaling*, isto é, $u_1 = (u_1)_\lambda$, indutivamente obtemos que $(u_k)_\lambda = u_k$, para todo k.

Por outro lado, temos que

$$||u_k - u||_X \to 0, \tag{4.13}$$

quando $k \to \infty$, devido ao argumento de ponto fixo. Além disso,

$$\begin{aligned} ||(u_k)_\lambda - u_\lambda||_X &= ||\lambda u_k(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)||_X \\ &= ||(u_k - u)_\lambda||_X \\ &\lesssim ||u_k - u||_X \to 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

quando $k \to \infty$. A última desigualdade em (4.14) segue de (4.12), relembrando que $||\cdot||_X = ||\cdot||_{X_1} + ||\cdot||_{X_2} + ||\cdot||_{X_3} + ||\cdot||_{X_4}$.

Usando (4.13) e (4.14) e a unicidade do limite em X, obtemos que $u = u_\lambda$, e assim u é solução autossimilar de (E.I.), e pelo Teorema 3.3.2, está na classe $X \cap C((0,\infty); W\dot{K}^0_{n,\infty})$.

Quanto à representação da solução em função do campo U, observe que a autossimilaridade de u nos dá

$$u(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t),$$

para todo $\lambda > 0$. Em particular, para $\lambda = t^{-1/2}$, temos que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Logo, definindo $U(x) = u(x,1)$, obtemos a representação

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

■

Por fim, combinando os resultados obtidos nos Teoremas 4.1.1 e 4.2.1, obtemos o seguinte corolário que mostra a existência de uma bacia atratora autossimilar.

Corolário 4.2.2 (Bacia Atratora Autossimilar). *Sejam $n \geq 3$ e $u_0 \in W\dot{K}^0_{n,\infty}$ homogênea de grau -1. Então, as soluções obtidas para perturbações $\phi \in \mathcal{S}$ suficientemente pequenas de u_0 se aproximam assintoticamente da solução autossimilar u com dado inicial u_0.*

Demonstração: Basta usar o Teorema 4.2.1 para obter a solução autossimilar u, notar que como $\phi \in \mathcal{S}$, temos que

$$\lim_{t \nearrow \infty} ||e^{t\Delta}\phi||_{W\dot{K}^0_{n,\infty}} = 0,$$

e em seguida tomar $v_0 = u_0 + \phi$ no Teorema 4.1.1. ■

Observação 4.2.3. *O corolário acima mostra que a solução autossimilar u obtida a partir de um dado inicial u_0 homogêneo de grau -1 funciona como uma espécie de atrator, isto é, as soluções obtidas através de uma perturbação pequena de u_0 (no sentido de $W\dot{K}^0_{n,\infty}$) convergem para a solução autossimilar u, conforme t se torna suficientemente grande. Em outras palavras, obtemos uma classe de soluções assintoticamente autossimilares.*

Considerações Finais (Conclusão)

A partir do que foi feito nesse trabalho, podemos fazer algumas considerações para pesquisas futuras relacionadas às equações e espaços estudados.

- Esse trabalho permite, tanto ao leitor quanto ao próprio autor, entrar em contato com ferramentas de análise harmônica para estudar equações diferenciais parciais não-lineares, como as equações de Navier-Stokes. Essas, por sua vez, correspondem a um modelo de grande importância em mecânica dos fluidos.

- O problema abordado, com $n \geq 3$, densidade ρ e constante de cisalhamento μ constantes, fluido incompressível ($\nabla \cdot u = 0$), força externa nula ($f \equiv 0$) e com domínio sendo todo o espaço $\mathbb{R}^n$, está no formato descrito na formulação de um dos problemas do milênio, *Millennium Prize Problems,* propostos pelo Clay Mathematics Institute (veja [6]). Isso mostra a relevância do problema abordado aqui.

- Ressaltamos que os resultados de imersão estudados nesse trabalho mostram que os espaços de Herz fracos se localizam conforme a seguinte cadeia.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{S} \arrow[r, hook] & L^p \arrow[r, hook] & L^{p,\infty} \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \dot{B}^{-1+n/p}_{p,\infty} \arrow[r, hook] & BMO^{-1} \arrow[r, hook] & \mathcal{S}' \\
& & & W\dot{K}^0_{n,\infty} \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

- Como mostra o diagrama acima, o espaço de Herz fraco $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ está contido em BMO^{-1}, e portanto o dado inicial u_0 foi tratado previamente no trabalho de Koch e Tataru, [17]. Entretanto, para a unicidade, Koch e Tataru usaram a condição

$$\sup_{0<t\leq T} t^{1/2}||u(t)||_\infty < \infty,$$

  que não é utilizada nesse trabalho para a unicidade da solução local. Além disso, os resultados em [30] contêm outras propriedades qualitativas em $W\dot{K}^0_{n,\infty}$ que fazem parte da noção de boa-colocação considerada.

- A análise feita nessa dissertação, o estudo das ferramentas de análise harmônica, bem como a manipulação de espaços limites (ou críticos) compõem um *know-how* que pode ser usado em outros modelos e pode servir como base para novas pesquisas sobre as equações de Navier-Stokes.

Referências Bibliográficas

[1] O. A. Barraza. Self-similar solutions in weak Lp-spaces of the Navier–Stokes equations. *Revista Matematica Iberoamericana*, 12:411–439, 1996.

[2] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation Spaces: An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1976.

[3] M. Cannone. A Generalization of a Theorem by Kato on Navier-Stokes Equations. *Revista Matemática Iberoamericana*, 13:515–541, 1997.

[4] M. Cannone and G. Karch. Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system? *Journal of Differential Equations*, 274:197–247, 2004.

[5] M. Cannone and G. Karch. About the Regularized Navier-Stokes Equations. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 7:1–28, 2005.

[6] Clay Mathematics Institute. http://www.claymath.org/millennium-problems, 2016.

[7] L. C. F. Ferreira. On a bilinear estimate in weak-Morrey spaces and uniqueness for Navier-Stokes equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 105:228–247, 2016.

[8] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, 1999.

[9] G. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*. Springer Science & Business Media, 2011.

[10] Y. Giga. Weak and Strong Solutions of the Navier-Stokes Initial Value Problem. *Research Institute for Mathematical Science*, 19:887–910, 1983.

[11] Y. Giga and T. Miyakawa. Navier-Stokes flow in R3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces. *Communications in Partial Differential Equations*, 14:577–618, 1989.

[12] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Springer Science & Business Media, 2008.

[13] E. Hopf. Über die Anfangwertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. *Mathematische Nachrichten*, 4:213–231, 1950.

[14] T. Iwabuchi and R. Takada. Global well-posedness and ill-posedness for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force in function spaces of Besov type. *Journal of Functional Annalysis*, 267:1321–1337, 2014.

[15] T. Kato. Strong Lp-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions. *Mathematische Zeitschrift*, 187:471–480, 1984.

[16] T. Kato. Strong solutions of the Navier-Stokes equation in Morrey spaces. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 22:127–155, 1992.

[17] H. Koch and D. Tataru. Well-Posedness for the Navier-Stokes Equations. *Advances in Mathematics*, 157:22–35, 2001.

[18] P. Konieczny and T. Yoneda. On dispersive effect of the Coriolis force for the stationary Navier-Stokes equations. *Journal of Differential Equations*, 250:3859–3873, 2011.

[19] H. Kozono and M. Yamazaki. Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equations with distributions in new function spaces as initial data. *Communications in Partial Differential Equations*, 19:959–1014, 1994.

[20] P. G. Lemarié-Rieusset. *Recent Developments on the Navier-Stokes Problem*. Chapman & Hall/CRC, 2002.

[21] J. Leray. Sur le Mouvement D'un Liquide Visqueux Emplissant L'Espace. *Acta Mathematica Sinica*, 63:193–248, 1934.

[22] G. Lorentz. Some New Function Spaces. *Annals of Mathematics*, 51:37–55, 1950.

[23] C.-X. Miao and B.-q. Yuan. Weak Morrey spaces and strong solutions to the Navier–Stokes equations. *Science in China*, 50:1401–1417, 2007.

[24] A. Miyachi. Remarks on Herz-Type Hardy Spaces. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 17:339–360, 2001.

[25] D. A. Murray. *An Elementary Course in the Integral Calculus*. American Book Company, 2015.

[26] E. Nakai, N. Tomita, and K. Yabuta. Density of the Set of All Infinitely Differentiable Functions with Compact Support in Weighted Sobolev Spaces. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, 10:39–45, 2004.

[27] J. Peetre. *New Thoughts on Besov Spaces*. Duke University, Mathematics Department, 1976.

[28] E. M. Stein and G. L. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971.

[29] M. E. Taylor. Analysis on Morrey spaces and applications to Navier–Stokes and other evolution equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 17:1407–1456, 1992.

[30] Y. Tsutsui. The Navier-Stokes Equations and Weak Herz Spaces. *Advances in Differential Equations*, 16(11-12):1049–1085, 2011.

[31] M. Yamazaki. The Navier–Stokes equations in the weak-L^n space with time-dependent external force. *Mathematische Annalen*, 317:635–675, 2000.