



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
e de Computação

Leonardo de Paula Carvalho

**Controle de Fila de Carros Usando Sistemas Sujeitos a
Saltos Markovianos**

Campinas
2016

Leonardo de Paula Carvalho

Controle de Fila de Carros Usando Sistemas Sujeitos a Saltos Markovianos

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de automação.

Orientador: Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Leonardo de Paula Carvalho, e orientado pelo Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves.

Campinas
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Elizangela Aparecida dos Santos Souza - CRB 8/8098

C253c Carvalho, Leonardo de Paula, 1986-
Controle de fila de carros usando sistemas sujeitos a saltos Markovianos /
Leonardo de Paula Carvalho. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Alim Pedro de Castro Gonçalves.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade
de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Controle robusto. 2. Veículos. 3. Teoria de controle. 4. Incertezas. I.
Gonçalves, Alim Pedro de Castro, 1977-. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Applying Markovian jump linear system solutions in the Vehicle-following problem

Palavras-chave em inglês:

Robust control
Vehicle
Control theory
Uncertainties

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Alim Pedro de Castro Gonçalves [Orientador]
Janito Vaqueiro Ferreira
Yuzo Iano

Data de defesa: 23-09-2016

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CANDIDATO: Leonardo de Paula Carvalho **RA:**149869

DATA DA DEFESA: 23 de setembro de 2016

TÍTULO DA TESE: Controle de Fila de Carros Usando Sistemas Sujeitos a Saltos Markovianos

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves (Presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira (FEM/UNICAMP)

Prof. Dr. Yuzo Iano (FEEC/UNICAMP)

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas.

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Dedico esta dissertação à minha família.

Agradecimentos

À minha mãe, Janete, ao meu irmão, João Gabriel, e ao meu Pai, Jorge, por toda ajuda e suporte.

Ao professor Alim por ter me aceito como aluno de mestrado e principalmente pela paciência, muita paciência.

Ao Jonathan por ser meu amigo mais louco e sem noção. Mas também por ser o melhor companheiro de trabalho que já tive. É o cara mais inventivo que conheço.

Ao meu amigo Matheus Souza por ter paciência para tirar as minhas duvidas nas matérias e por ser meu companheiro de treino.

Aos meus amigos André e Gabriela, o *power couple* mais *OverPowered* que conheço, pela amizade, companhia e conselhos.

Aos amigos Hildo, Lucas, Matheus A., Tiago e Guilherme, a.k.a. Oddie, pelos inúmeros momentos engraçados.

Aos membros da banca Professor Janito e Professor Yuzo por terem aceitado participar da avaliação da minha tese e pelas revisões que poliram o conteúdo dessa tese.

Por fim, gostaria de agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - por financiar minha pesquisa, culminando com este trabalho.

*"Dude, suckin' at something is the first step towards being sorta good at something."
Jake, the dog - Adventure Time*

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar soluções de controle para o problema de seguimento de veículos. Foram apresentadas três principais soluções de controle, todas utilizando teoria de controle de sistemas sujeitos a saltos markovianos. A primeira e a segunda soluções propostas utilizam controladores por realimentação de saída de ordem completa e a terceira solução é uma estrutura que utiliza filtros observadores de estado e controladores por realimentação de estado simultaneamente. A diferença entre a primeira e a segunda soluções é a maneira como o controlador lida com a ocorrência de falha de transmissão de medidas através da rede. A terceira solução foi proposta com o objetivo de adicionar robustez a incertezas paramétricas aos projetos de controle, visto que isso não pode ser realizado com os controladores por realimentação de saída utilizados na primeira e segunda soluções. Todos os projetos são obtidos por meio de desigualdades matriciais lineares e todos os controladores e filtros são da classe H_∞ . E por fim é apresentada uma análise em relação à sensibilidade ao atraso fixo. Com os resultados obtidos pela análise dos testes de comportamento da norma H_∞ e simulações Monte Carlo, podemos afirmar que para os casos de estudo os controladores projetados com teoria de controle de sistemas sujeitos a saltos markovianos são superiores ao controlador clássico H_∞ . A comparação entre a primeira e a segunda soluções mostra que, para um ruído específico, a segunda abordagem é mais confiável para o caso sem adição do atraso fixo, para o caso com atraso o inverso ocorre. A terceira abordagem apresenta resultados superiores à primeira e à segunda para o caso sem atraso, entretanto, ela é mais sensível ao atraso fixo.

Palavras-chaves: Sistemas sujeitos a saltos markovianos; Problema de seguimento de veículos; Controle robusto.

Abstract

This work has as objective to propose controller solutions for the vehicle following problem. Three distinct control solutions were introduced, all of them use the Markovian Jump Linear Systems framework. The first and the second solution are based on a dynamic output feedback controller and the third solution is composed by a filter and state feedback controller. The primary difference between the first and second solution is the controller behavior when a network failure occurs. The third solution was proposed on order to add robustness to parametric uncertainties in the control design. All the controllers were obtained through optimization programs constrained by Linear Matrix Inequalities and also all the controllers are within the H_∞ class. The sensibility of the proposed solution to the addition of fixed delay was also analysed. With the results obtained through H_∞ norm test and the Monte Carlo simulation, we can state that, for our case of study, the controllers designed using the Networked Control System always have an greater or equal performance when compared to those that do not take the transmission packet losses into consideration. The comparison between the first and the second solution has shown that the second solution is more reliable without the fixed delay. On the other hand for the case where the fixed delay is included the opposite occurs. The third solution had a better performance when compared to the other two is the case without the fixed delay, however, when the delay is added the performance is drastically affected, since the third solution has a higher sensibility to the fixed delay.

Keywords: Markovian Jump Linear System; Vehicle Following problem; Robust Control.

Conteúdo

Conteúdo	10
I Introdução	11
I.1 Apresentação da Dissertação	13
II Problema de Seguimento de Carros Na Literatura	15
II.1 Proposta apresentada no presente trabalho	16
III Marco Teórico	18
III.1 Notação	18
III.2 Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos	18
III.3 Definição de Estabilidade para Sistemas Markovianos	19
III.4 Norma H_∞ para Sistemas Markovianos	20
III.4.1 Cálculo da norma H_∞ para sistemas markovianos utilizando LMIs	20
III.5 Controlador Dinâmico de Saída Markoviano	21
III.6 Filtro Markoviano de Ordem Completa	22
III.7 Controlador Markoviano por Realimentação de Estado	24
III.8 Sistemas Politópicos	24
III.8.1 Estabilidade Robusta em Sistemas Politópicos	25
III.9 Discretização de Sistemas Politópicos	25
III.9.1 Exemplo	28
III.10 Adição de atraso fixo em sistemas discretos	29
III.10.1 Estrutura para adição de atraso ao sistema	29
III.11 Modelagem do Carro	30
III.11.1 Modelo dinâmico	30
III.11.2 Linearização do Modelo do Veículo	32
III.12 Modelagem de Rede	32
III.13 Modelagem da Falha para os Sistemas de Controle	34
III.13.1 Abordagem <i>Zero</i>	34
III.13.2 Abordagem <i>Hold</i>	35
III.14 Considerações Finais	36
IV Descrição do Problema e Soluções Propostas	37
IV.1 Descrição do Problema	37
IV.2 Soluções Propostas	38
IV.2.1 Solução utilizando o controlador dinâmico de ordem completa	39
IV.2.1.1 Para o caso <i>Zero</i>	39
IV.2.1.2 Para o caso <i>Hold</i>	40

IV.2.2	Solução utilizando a estrutura Filtro dinâmico de ordem completa / Controlador de realimentação de estado	41
IV.3	Estrutura das matrizes com a adição de atraso	44
IV.4	Considerações Finais	45
V	Caso de Estudo	46
V.1	Valores dos parâmetros do modelo	46
V.2	Entrada determinística	47
V.3	Valores das probabilidades e comportamento da Cadeia de Markov	47
V.4	Comportamento dos sinais de Ruído	48
V.5	Comportamento de parâmetro para o caso politópico	49
V.6	Obtenção do número de instantes k de atraso	50
V.7	Considerações Finais	50
VI	Resultados	51
VI.1	Resultados para o controlador dinâmico de saída de ordem completa	51
VI.1.1	Análise da Norma H_∞	52
VI.1.2	Análise de Sinais	54
VI.1.2.1	Análise de Sinais com Ruído Senoidal	54
VI.1.2.2	Análise de Sinais com Ruído Branco Gaussiano	56
VI.1.3	Análise de Sinais com 5 carros	58
VI.2	Solução Estruturada Filtro/Controlador	60
VI.2.1	Análise da Norma do Resíduo da Serie de Taylor	61
VI.2.2	Análise da Norma H_∞	61
VI.2.3	Análise do Limitante Superior	63
VI.2.4	Análise de Sinais	64
VI.3	Análise da Sensibilidade ao Atraso Fixo	65
VI.3.1	Resultados para controlador por realimentação de saída	65
VI.3.1.1	Análise da norma H_∞	65
VI.3.1.2	Análise de Sinais	66
VI.3.2	Resultados para solução estruturada	67
VI.3.2.1	Análise da norma H_∞	68
VI.3.2.2	Análise do limitante superior da norma H_∞	68
VI.3.2.3	Análise de sinais	69
VI.4	Considerações Finais	70
VII	Conclusão	72
VII.1	Trabalhos futuros	73
Bibliografia	74

Apêndices	78
APÊNDICE A Alteração da função objetivo devido à inclusão de atraso fixo .	79

CAPÍTULO I

Introdução

Desde a popularização dos automóveis movidos a combustão na década de 20,[FORD, 2007], a busca para tornar a condução desses veículos mais segura e simples sempre esteve presente para os desenvolvedores e fabricantes. No decorrer das últimas décadas, inúmeros equipamentos foram criados com o intuito de aumentar a segurança dos veículos, alguns exemplos são o sistema de freio *Anti-lock Brake System* (ABS) [BURCKHARDT; BRUGGER; FAULHABER, 1989], e o *Electronic Stability Program* (ESP)[REIF, 2014].

Mesmo que o campo de pesquisa relacionado a segurança de veículos automotivos tenha apresentando grandes avanços, o número de acidentes ainda chega a níveis inaceitáveis [ADMINISTRATION et al., 2008; ASIRT,]. Isto se deve a vários fatores como imperícia do condutor, falta de atenção, direção perigosa, entre outros. É notório que a grande maioria dos acidentes são causados pelo condutor [ADMINISTRATION et al., 2008]. Uma forma eficaz de minimizar o número de acidentes em estradas é diminuir a necessidade de interação do condutor durante o trajeto e criar uma solução automatizada para efetuar essa tarefa. Outra motivação para esse trabalho é a utilização de veículos autônomos para a execução de testes de esforço dos seus componentes. Uma solução automatizada aumentaria a eficiência dos testes, porque seria possível obter uma maior quantidade de dados em um mesmo período de tempo se comparado com testes conduzidos convencionalmente e também ocasionaria na minimização dos custos de implementação desses testes pela diminuição da mão-de-obra envolvida.

A automatização de veículos para teste pode ser caracterizada como um problema conhecido por seguimento de veículos [SEILER; SENGUPTA, 2001; CHANDLER; HERMAN; MONTROLL, 1958; GAZIS; HERMAN; POTTS, 1959]. Esse problema consiste em uma fila de veículos na qual o trajeto pode ser determinado pelo primeiro carro ou ser um trajeto predeterminado e todos os outros carros da fila são totalmente autônomos, isto é, não necessitam de interação humana para condução. Um característica desse problema é que a comunicação entre os carros que pertencem à fila é necessariamente feita por redes sem fio. É sabido que esse tipo de redes de comunicação é mais suscetível a perda de

informação [BALAKRISHNAN et al., 1997]. Essas perdas de informação ocasionais podem prejudicar o desempenho ou até mesmo inviabilizar o controle desses carros, dado que na teoria de controle clássica [GEROMEL; KOROGUI, 2011; ZHOU et al., 1996; NAIDU, 2002] a perda de informação não é levada em consideração nos projetos de controladores. Para o caso da implementação desse tipo de controle em estradas inteligentes essa perda de informação pode ocasionar acidentes caso a taxa de perda de informação seja suficientemente grande. No caso da implementação para os testes de esforço essa perda de informação pode ocasionar situações onde o teste não é feito de maneira adequada diminuindo a confiabilidade dos dados obtidos nas medições ou até mesmo inutilizando os dados.

Uma proposta para se contornar esses problemas é a utilização da teoria de controle em rede, também conhecida pelo termo em inglês *Networked Control Systems*. A teoria de controle em rede, diferentemente da teoria clássica de controle, leva em consideração as falhas inerentes a uma rede de comunicação.

A teoria de controle em rede é uma área do controle que abrange diferentes abordagens, uma dessas abordagens é a teoria de controle com saltos markovianos vista em [GEROMEL; GONÇALVES; FIORAVANTI, 2009; GONÇALVES; FIORAVANTI; GEROMEL, 2009; GONÇALVES; FIORAVANTI; GEROMEL, 2010; HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007], que traz como principal vantagem a possibilidade de projetar sistemas de controle que funcionam em sistemas que permutam entre modos de maneira aleatória. Essa característica permite que seja possível projetar controladores que levam em consideração falhas em diferentes partes de sua topologia, por exemplo, nos atuadores, nos sensores, no controlador ou até mesmo perda de pacotes durante a transmissão dos sinais.

Como já citamos, o problema de seguimento de carros, lida com uma fila de carros onde o primeiro possui uma trajetória predeterminada e os outros carros têm que executar a mesma trajetória do líder. Um dos problemas inerentes a essa situação é a utilização mandatória de redes sem fio, sendo assim necessário considerar os problemas derivados da utilização desse tipo de rede para efetuar comunicação entre componentes do sistema de controle como sensores, controladores e atuadores.

Os controladores projetados nesse trabalho são todos da classe H_∞ , esse tipo de controlador foi escolhido por sua característica de adição de robustez ao projeto, isto é, por minimizar a interferência na saída causada por entradas exógenas (ruídos). Essa característica traz um aumento de confiabilidade ao projeto, fazendo com que a norma H_∞ também seja uma boa ferramenta para medir o desempenho do sistema, [GEROMEL; KOROGUI, 2011; ZHOU et al., 1996; NAIDU, 2002].

Para explicitar a vantagem de se empregar controladores projetados utilizando a teoria de controle em rede, faremos uma comparação com técnicas que não levam em consideração a perda de informação durante o projeto dos controladores. No presente trabalho apresentamos a topologia proposta em [SEILER; SENGUPTA, 2001]. Diferentes

topologias implicam em diferentes localizações para a perda de pacote e são relevantes para o comportamento da norma H_∞ .

Outra proposta também tratada nesse trabalho é o projeto parametricamente robusto de controladores markovianos discretos. A principal motivação para a adição desse tipo de procedimento ao projeto de controle é que o processo de identificação pode ser uma tarefa complexa e dispendiosa [BAFFET; CHARARA; LECHNER, 2009],[LJUNG, 1998], [RUSSO; RUSSO; VOLPE, 2000], e algumas vezes chega a valores que não alcançam um patamar de precisão desejado. Fazendo a síntese de controladores que levam em consideração essas possíveis falhas e imprecisões no processo de identificação adicionamos um nível maior de confiabilidade ao projeto de controle.

A adição dessas incertezas paramétricas no projeto de controle pode ser uma tarefa complexa e requer a utilização de técnicas específicas. Utilizamos uma técnica de incertezas politópicas para adicionar essas incertezas. Para a utilização desses sistemas politópicos nos projetos de controle é necessário que esses politopos sejam convexos. Outra dificuldade encontrada na inclusão de incertezas é que os procedimentos de discretização normalmente utilizados não são viáveis, isso ocorre porque se discretizarmos os vértices do sistema politópico para os parâmetros a tempo contínuo não é possível afirmar nada sobre convexidade do novo sistema politópico discreto, e sem essa informação não é possível projetar esses controladores robustos. Por isso, há a necessidade de se empregar técnicas diferenciadas para executar o processo de discretização, a técnica utilizada no presente trabalho foi extraída de [BRAGA et al., 2013].

E por fim, estudamos a adição de *delay* de largura fixa nas soluções propostas. A motivação para a adição de *delay* é que os veículos da fila devem executar os movimentos comandados pelo líder na mesma posição em que este os executou. Os veículos devem executar a mesma trajetória do veículo líder e não uma sombra do movimento executado pelo líder.

I.1 Apresentação da Dissertação

A presente dissertação está dividida em sete capítulos. Este Capítulo I conceituou o leitor na área temática do trabalho. Além disso, ele introduziu os primeiros conceitos de controle através de redes e o tema principal desenvolvido no presente trabalho: o controle de fila de carros por redes de comunicação não ideais.

O Capítulo II tem como objetivo contextualizar o leitor sobre o posicionamento do tema da presente tese em estudos presentes na literatura.

O Capítulo III detalha conceitos teóricos como, Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos, Norma H_∞ para sistemas Markovianos, sínteses de controladores/filtros, sistemas politópicos e procedimentos de discretização para sistemas politópicos. Esse capítulo também apresenta o modelo para a dinâmica do veículo.

O Capítulo IV é dividido em duas seções, sendo a Seção IV.1 a descrição do problema a ser tratado na presente tese. Ela também traz a descrição da topologia do sistema, isto é, a localização das falhas na rede, a localização das unidades de controle e dos sensores. As Seção IV.2 apresenta as propostas de soluções para o problema descrito no Capítulo III, e também faz considerações sobre as vantagens e desvantagens de cada uma dessas abordagens.

O Capítulo V apresenta os parâmetros utilizados para realizar as simulações tais como parâmetros do sistema, parâmetros de rede, comportamento e parâmetros dos ruído, a definição de qual das constantes sofre variação paramétrica e também a definição da amplitude dessa variação. O comportamento da entrada determinística do carro líder também é apresentado.

O Capítulo VI apresenta os resultados obtidos com todas as abordagens e também a comparação com abordagens que não levam em consideração a falha de comunicação nem tampouco a incertezas paramétricas.

O Capítulo VII tem-se as conclusões mais importantes dos resultados obtidos no presente trabalho e perspectivas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

Problema de Seguimento de Carros Na Literatura

O problema de seguimento de carros, do termo inglês *Vehicle-following*, consiste no controle de uma fila de carros em que o primeiro é conduzido por um piloto ou segue uma trajetória predeterminada e todos os outros carros na fila devem executar o mesmo trajeto.

Esse assunto vem sendo estudado desde a década de 1950 e diferentes maneiras de interpretar o problema e modelá-lo surgiram. Em [PIPES, 1953], o problema é estudado da seguinte forma, em vez de considerar a dinâmica individual de cada carro, somente a dinâmica da fila é considerada com a proposta de uma equação dinâmica e uma lei de seguimento. Essa lei de seguimento comanda a velocidade e a aceleração de todos os carros na fila. Em [GAZIS; HERMAN; ROTHERY, 1961] é proposto o modelo não linear "*Follow-the-Leader*" e há comparação com dados reais de tráfego em autoestradas. Em [BRACKSTONE; MCDONALD, 1999] é apresentado um *survey* histórico dos trabalhos mais importantes que tratam o problema de seguimento de veículos como um modelo dinâmico do fluxo de tráfego.

Uma abordagem mais recente é a utilização de Visão Computacional para controlar os veículos e mantê-los seguindo o veículo líder. Em [DAS et al., 2002] é apresentado o controle de formação de robôs *car-like* utilizando controle híbrido. Em [KEHTARNAVAZ; GRISWOLD; LEE, 1991] utiliza-se Visão Computacional e Filtragem Recursiva para fazer o seguimento do veículo líder. Em [RAMASWAMY; BALAKRISHNAN, 2008] também é feito o controle de formação de robôs *car-like* utilizando uma lei de controle não linear derivada da análise de Lyapunov. Em [PETERSEN; RUKGAUER; SCHIEHLEN, 1996] é proposto um modelo no qual existe uma barra que mantém a distância entre os carros e o foco do controle é somente nas forças laterais presentes no veículo. Em [SEILER; SENGUPTA, 2001] é apresentada a abordagem que utiliza Controle em Rede para fazer com que o segundo veículo siga o trajeto do veículo líder, o controlador é calculado utilizando Desigualdades Matriciais Lineares traduzido do termo em inglês *Linear Matrices Inequalities* (LMI). Em [BUEHLER; IAGNEMMA; SINGH, 2009], são apresentados os precedimentos utilizados pelo time que participou do *DARPA CHALLENGE* para gerar uma solução de uma pro-

blema semelhante ao tratado nesse trabalho. Em [BUEHLER; IAGNEMMA; SINGH, 2009] procurava-se criar um veículo totalmente autônomo, para isso foram associadas diversas técnicas como Visão Computacional, Teoria de Controle e *machine learning*. Em [HASSAN; YAHYA et al., 2006], é proposta a utilização do *car-like model* e linearização de estados através de realimentação dinâmica. Esses são alguns dos exemplos de soluções existentes na literatura.

Atualmente, existem inúmeras empresas que estão desenvolvendo carros autônomos como, Google, Baidu, Mobileye, BMW, Ford e outras. Entre essas fabricantes citadas nem todas expõem os resultados preliminares obtidos até o momento em suas pesquisas. Entretanto, a empresa *Google* tem apresentado os resultados de seus experimentos feitos nas ruas das cidades *Mountain View, CA, Austin, TX, Kirkland, WA e Metro Phoenix, AZ*, [PROJECT,]. Os resultados apresentados nesses experimentos mostram que essa tecnologia é viável.

Entretanto, os níveis de automatização apresentados por todos esses projetos são distintos e por isso existe a necessidade de classificá-los. Segundo *National Highway Traffic Safety Administration* existem 4 níveis de automatização em veículos [NHTSA,]:

	Definição
Nível 0	O motorista controla o carro o tempo todo e não tem nenhum tipo de assistência.
Nível 1	O motorista possui a assistência de alguns sistemas como controle de estabilidade e frenagem assistida.
Nível 2	Além dos sistemas do nível 1, o motorista também tem acesso ao modo cruzeiro e <i>lane keeping</i> .
Nível 3	O motorista pode ceder o controle do carro em algumas situações específicas.
Nível 4	O motorista não precisa tomar nenhuma decisão, o carro fará toda viagem automaticamente.

Tabela 1 – Nível de automatização

II.1 Proposta apresentada no presente trabalho

Nesse trabalho, tratamos de um caso semelhante aos casos citados na seção anterior, a abordagem utilizada tem como fundamento a técnica apresentada em [SEILLER; SENGUPTA, 2001], [GEROMEL; GONÇALVES; FIORAVANTI, 2009] e [GONÇALVES, 2009]. A principal motivação da reutilização dessas técnicas é que a abordagem de controle apresentada nesses trabalhos considera a falha de comunicação inerente ao problema de seguimento de carros utilizando controle com saltos markovianos e LMIs. Entretanto, o modelo dinâmico do veículo utilizado em ambos os trabalhos é uma aproximação muito distante da dinâmica real de uma veiculo, o modelo utilizado nesses trabalhos era um duplo integrador, onde não eram consideradas as forças laterais. A não consideração

das forças laterais faz com que esses resultados sejam validos apenas para trajetórias retilíneas. No presente trabalho, o objetivo é estender os resultados aplicando a mesma técnicas em um modelo mais realista e também incluir outras questões como incertezas paramétricas. O procedimento apresentado em [SEILER; SENGUPTA, 2001] considera um sistema estendido com os estados de dois ou mais carros sendo que os primeiros estados representam o carro líder e os estados subsequentes representam os estados dos outros carros da fila. Esse procedimento para estender o sistema é explicado detalhadamente na Seção IV.2.1. Com as matrizes do sistema devidamente montadas, apresentamos três soluções distintas, a primeira e a segunda utilizam os controladores de ordem completa dependentes do modo, isto significa que os controladores projetados tem dois modos, um modo para quando a transmissão de informação ocorre sem problemas e outro para quando ocorre uma falha na transmissão. Para utilizar esses controladores temos que considerar que é possível detectar a ocorrência de falha na rede. A diferença entre essas duas abordagens é o comportamento do controlador quando a falha ocorre, a primeira é chamada *Zero* e nela o controlador não insere um sinal de controle quando a falha ocorre, a segunda é chamada *Hold* e nela o controlador utiliza o último sinal de controle obtido até que um novo sinal seja recebido. A terceira abordagem apresentada tem como principal motivação a inserção de incertezas paramétricas, para isso é utilizada uma solução estruturada que emprega um filtro observador de estado dependente do modo em conjunto com um controlador por realimentação de estado, essa estrutura é utilizada por motivos que serão detalhados na Seção IV.2.2. A síntese de todos esses controladores e filtros é feita com a utilização de desigualdades matriciais lineares (LMI). Fazemos a análise do comportamento da norma H_∞ em relação à variação da probabilidade de perda de pacote para todos os três casos e para o terceiro caso fazemos outras análises relevantes. Fazemos também a análise dos sinais em simulações Monte Carlo para observar o comportamento do erro quadrático médio e do desvio padrão. Comparamos os controladores citados com o controlador clássico, isto é, controlador que não considera a perda de pacote, para demonstrar a superioridade das soluções obtidas com a teoria de controle em rede. E por fim, adicionamos *delay* fixo às soluções apresentadas, a motivação para a adição de *delay* fixo é fazer com que os veículos seguidores executem as manobras no local certo, fazendo com que os seguidores mantenham a mesma trajetória do líder.

CAPÍTULO III

Marco Teórico

Neste capítulo fazemos a apresentação do ferramental teórico e dos procedimentos de modelagem necessários para compreender e implementar as soluções propostas nos capítulos subsequentes.

III.1 Notação

A notação utilizada nesse trabalho é a usual, onde as letras maiúsculas representam matrizes e as letras minúsculas representam vetores e escalares. O símbolo ($'$) representa a transposta de uma matriz ou vetor. O símbolo (\bullet) indica que o termo é induzido pela simetria de uma matriz estruturada em blocos. O conjunto de números naturais é indicado por \mathbb{N} , enquanto $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$ é um conjunto que representa os N diferentes estados de uma cadeia de Markov. Dado que N^2 é um número inteiro não-negativo e p_{ij} satisfaz $p_{i1} + \dots + p_{iN} = 1, \forall i \in \mathbb{K}$ a combinação convexa dessas matrizes com pesos p_{ij} é indicada por $X_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} X_j, \forall i \in \mathbb{K}$.

Para um sinal estocástico $\phi(k)$ definido no domínio do tempo discreto $k \in \mathbb{N}$, a norma quadrática é $\|\phi\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{\phi(k)' \phi(k)\}$. \mathcal{L}_2 indica a classe de sinais $\phi(k) \in \mathbb{R}^r, k \in \mathbb{N}$ tal que $\|\phi\|_2^2$ é finita. As letras gregas maiúsculas representam um politopo convexo, e.g. $\Gamma(\alpha) = \{A(\alpha_1), \dots, A(\alpha_n)\}$ onde $A(\alpha_i)$ é um vértice do politopo.

III.2 Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos

Um sistema linear sujeito a saltos markovianos (MJLS) pertence a uma classe de sistemas que comutam entre diferentes modos. Tais comutações ocorrem de acordo com um processo estocástico, no caso, uma cadeia de Markov [LEON-GARCIA, 2008]. Cada subsistema ou modo possui uma dinâmica própria. Uma representação de um sis-

tema linear sujeito a saltos markovianos é,

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x(k+1) &= A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) + J(\theta_k)w(k), \\ y(k) &= C_y(\theta_k)x(k) + E_y(\theta_k)w(k), \\ z(k) &= C_z(\theta_k)x(k) + D(\theta_k)u(k) + E_z(\theta_k)w(k), \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ são as entradas exógenas, i.e., perturbações aleatórias, e $u(k) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de sinais de controle. O vetor $y(k) \in \mathbb{R}^s$ contém as saídas medidas, o vetor $z(k) \in \mathbb{R}^q$ representa as saídas controladas. A variável θ_k é uma variável aleatória e assume valores no conjunto $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$, cada um desses valores representa um modo específico do sistema e a cada instante k esse modo pode ou não ser modificado. Como foi dito, essas transições ocorrem de acordo com uma cadeia de Markov com probabilidades de transição dadas por $p_{ij} = \text{Prob}(\theta_{k+1} = j | \theta_k = i)$, $p_{ij} \geq 0$ e $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 \forall i \in \mathbb{K}$. A matriz de probabilidades de transição é representada por $\mathcal{P} = [p_{ij}]$, por motivos de simplificação de notação, deste ponto em diante representamos $A(\theta_k) = A_i$ sempre que $\theta_k = i \in \mathbb{K}$. Para uma explicação mais detalhada sobre o Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos consulte [COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2006; GEROMEL; GONÇALVES; FIORAVANTI, 2009; SEILER; SENGUPTA, 2005], esses trabalhos apresentam soluções de controle que utilizam MJLS.

Com essas características é possível utilizar essa classe de sistemas para modelar o erro na transmissão de informações através de um canal de comunicação. Essa modelagem de erro pode ser feita chaveando aleatoriamente as matrizes responsáveis pela transmissão de algum dos sinais, por exemplo, se a falha estiver presente na transmissão entre o controlador e o atuador, a matriz $B(\theta_k)$ seria alterada convenientemente. A matriz que sofrerá chaveamento aleatoriamente depende da localização da falha na topologia do sistema.

III.3 Definição de Estabilidade para Sistemas Markovianos

Agora vamos definir o conceito de estabilidade e apresentar condições de testes para a classe de sistema definidos por (III.1). Isso é necessário antes de introduzir qualquer conceito referente ao projeto de controladores. Existem três definições de estabilidade para sistemas markovianos discretos: por média quadrática, estabilidade estocástica e estabilidade exponencial por média quadrática [JI, 1991; COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2006; FENG et al., 1992]. Essas definições são conhecidos como estabilidade de segundo momento [FENG et al., 1992], as três condições recebem o mesmo nome por serem equivalentes. Para a averiguação da estabilidade de segundo momento de um sistema podemos utilizar a condição em forma de desigualdade matriciais lineares descrita pelo Teorema abaixo,

Teorema III.1 *O sistema (III.1), desconsiderando entradas exógenas ($w = 0$ e $u = 0$), é estável pelo segundo momento, se e somente se, existirem matrizes P_i simétrica e definida positiva para todo $i \in \mathbb{K}$, tais que exista solução para as seguintes desigualdades,*

$$\sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} A_i' P_j A_i - P_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (\text{III.2})$$

A prova deste teorema é apresentada com detalhe em [COSTA; FRAGOSO, 1993; FENG et al., 1992]. Todas as restrições apresentadas ao longo desse trabalho são baseadas na condição (III.2).

III.4 Norma H_∞ para Sistemas Markovianos

A norma H_∞ é uma medida de desempenho importante para sistemas dinâmicos, porque reflete o seu nível de robustez, isto é, a norma H_∞ pode ser interpretada como a influência do pior ruído quadraticamente somável na energia da saída $z(k)$. Devido a esse fator, projetar sistemas de controle utilizando a norma H_∞ como critério de projeto aumenta o nível de confiabilidade porque a norma assegura um nível de desempenho para o qual o sistema de controle foi projetado mesmo que esse sistema sofra interferências de ruídos externos. A norma H_∞ é definida da seguinte forma,

$$\|\mathcal{G}\|_\infty^2 := \sup_{0 \neq w \in \mathcal{L}_2, \theta_0 \in \mathbb{K}} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}. \quad (\text{III.3})$$

Essa definição é apresentada em [SEILER; SENGUPTA, 2005]. Uma característica interessante da norma H_∞ para sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos é que a norma H_∞ clássica é um caso especial da norma H_∞ markoviana, observe que se o valor de θ_k for único, o valor da norma markoviana será o mesmo valor da norma clássica. Mais informações sobre o assunto podem ser encontradas em [GEROMEL; GONÇALVES; FIORAVANTI, 2009; GEROMEL; KOROGUI, 2011; COSTA; FRAGOSO; MARQUES, 2006].

III.4.1 Cálculo da norma H_∞ para sistemas markovianos utilizando LMIs

O cálculo da norma H_∞ definida na seção (III.3), pode ser realizado através da solução de um problema de otimização convexa na forma de desigualdades matriciais lineares.

Teorema III.2 *Dado um sistema (III.1) estável pelo segundo momento, a norma H_∞ da saída z em relação à entrada w é limitada por $\|\mathcal{G}\|_\infty^2 < \gamma$, se, e somente se, existirem*

$$P_i = P_i' > 0 \forall i \in \mathbb{K}, P_{pi} = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} P_j \mathbf{e} \gamma > 0,$$

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ P_{pi} A_i & P_{pi} J_i & P_{pi} & \bullet \\ C_{zi} & E_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{III.4})$$

forem satisfeitas para todo $i \in \mathbb{K}$ e o sistema for fracamente controlável.

A prova desse teorema pode ser encontrada em [SEILER; SENGUPTA, 2005].

III.5 Controlador Dinâmico de Saída Markoviano

Dado o sistema (III.1) é possível minimizar a norma H_∞ entre a entrada exógena w e a saída z utilizando o controlador dinâmico de saída dependente do modo descrito por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_c(k+1) &= A_c(\theta_k)x_c(k) + B_c(\theta_k)y(k) \\ u(k) &= C_c(\theta_k)x_c(k) + D_c(\theta_k)y(k) \end{cases}, \quad (\text{III.5})$$

onde $x_c(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado do controlador, $y(k) \in \mathbb{R}^s$ é o vetor das saídas medidas e $u(k) \in \mathbb{R}^q$ são os sinais de controle. O sistema em malha fechada obtido através da conexão entre o sistema (III.1) e o controlador (III.5) é o seguinte,

$$\mathcal{G}_c : \begin{cases} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{B}(\theta_k)y(k) \\ z(k) &= \tilde{C}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{D}(\theta_k)y(k) \end{cases}, \quad (\text{III.6})$$

sendo $\tilde{x}(k) = [x(k)' \ x_c(k)']'$ e as matrizes do sistema em malha fechada são,

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i D_{ci} C_{yi} & B_i C_{ci} \\ B_{ci} C_{yi} & A_{ci} \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}_i = \begin{bmatrix} J_i + B_i D_{ci} E_{yi} \\ B_{ci} E_{yi} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.7})$$

$$\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} C_{zi} + D_{zi} D_{ci} C_{yi} & D_{zi} C_{ci} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_{zi} + D_{zi} D_{ci} E_{yi} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.8})$$

O diagrama de blocos da Figura III.2 representa o esquema do Controlador Markoviano de Ordem Completa, onde o bloco Υ representa o atraso unitário em tempo discreto.

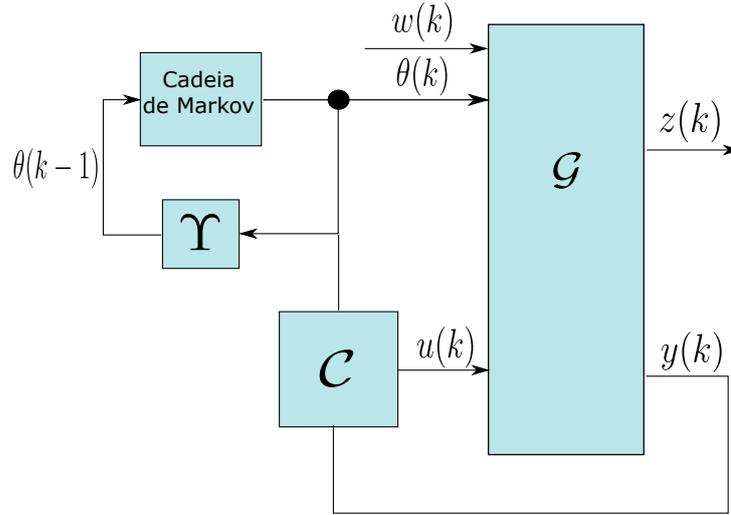


Figura III.1 – Diagrama de bloco para o controlador de ordem completa.

Uma maneira de se obter as matrizes do controlador que minimizam a norma H_∞ é descrita no teorema abaixo,

Teorema III.3 *Existe um controlador dependente do modo que satisfaça a condição $\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 < \gamma$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas $X_i, Z_i, X_{pi} = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} X_j$ e $Z_{pi} = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} Z_{ij}$, $i \in \mathbb{K}$, e matrizes M_i, L_i, F_i, K_i, H_i com dimensões compatíveis tais que,*

$$\left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} Y_i & \bullet & \bullet \\ I & X_i & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \\ \Pi_i(Z_i, X_i, M_i, F_i, K_i, L_i) \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi'_i(Z_i, X_i, M_i, F_i, K_i, L_i) \\ \begin{bmatrix} H_i + H'_i - Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ I & X_{pi} & \bullet \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \end{array} \right) > 0, \quad (III.9)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & Y_j \end{bmatrix} > 0. \quad (III.10)$$

A matriz Π_i é definida como:

$$\Pi_i(Z_i, X_i, M_i, F_i, K_i, L_i) = \begin{bmatrix} A_i Y_i + B_i L_i & A_i + B_i K_i C_{yi} & J_i + B_i K_i E_{yi} \\ M_i & X_{pi} A_i + F_i C_{yi} & X_{pi} J_i + F_i E_{yi} \\ C_{zi} Y_i + D_{zi} L_i & C_{zi} + D_{zi} K_i C_{yi} & E_{zi} + D_{zi} K_i E_{yi} \end{bmatrix} \quad (III.11)$$

A prova é apresentada em [GEROMEL; GONÇALVES; FIORAVANTI, 2009]. Se todas as condições do Teorema III.3 forem satisfeitas e uma solução factível for encontrada as matrizes do controlador (III.5) podem ser calculadas a partir de,

$$\begin{bmatrix} A_{ci} & B_{ci} \\ C_{ci} & D_{ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{pi} & X_{pi} B_i \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_i - X_{pi} A_i Y_i & F_i \\ L_i & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_i & 0 \\ C_{yi} Y_i & I \end{bmatrix}^{-1}, \quad (III.12)$$

satisfazendo (III.9) e (III.10), onde $U_{pi} = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} U_j$, com matrizes $U_i = Y_i^{-1} - X_i$ e $V_i = Y_i \forall i \in \mathbb{K}$.

III.6 Filtro Markoviano de Ordem Completa

Nesta seção faremos a apresentação do Filtro Markoviano utilizado no projeto da solução de controle robusta a variações paramétricas. A utilização desse filtro é necessária porque o controlador apresentado na equação (III.5) não permite lidar com incertezas politópicas. Isso ocorre devido a necessidade da utilização das matrizes do sistema (III.1) na construção das matrizes do controlador. É possível constatar essa característica fazendo a análise de (III.12). Considere o filtro de ordem completa dependente do modo \mathcal{F} ,

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x_f(k+1) &= A_f(\theta_k)x_f(k) + B_f(\theta_k)y(k), \quad x_f(0) = 0, \\ z_f(k) &= C_f(\theta_k)x_f(k) + D_f(\theta_k)y(k), \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

onde $x_f(k) \in \mathbb{R}^n$, $z_f(k) \in \mathbb{R}^r$, e $y(k) \in \mathbb{R}^q$, são, respectivamente, o vetor de estados do filtro, a saída estimada e a saída de medidas da planta. O erro estimado é dado por $e(k) = z(k) - z_f(k)$, e esse sistema dinâmico equivalente é dado pela combinação das equações (III.1), $u(k) \equiv 0$ e (III.13):

$$\mathcal{G}_o : \begin{cases} \hat{x}(k+1) &= \hat{A}(\theta_k)\hat{x}(k) + \hat{J}(\theta_k)y(k) \\ e(k) &= \hat{C}(\theta_k)\hat{x}(k) + \hat{E}(\theta_k)y(k) \end{cases}, \quad (\text{III.14})$$

sendo $\hat{x}(k) = [x(k)' \ x_f(k)']' \in \mathbb{R}^{2n}$ com as matrizes do sistema dadas por,

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fi}C_{yi} & A_{fi} \end{bmatrix}, \quad \hat{J}_i = \begin{bmatrix} J_i \\ B_{fi}E_{yi} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.15})$$

$$\hat{C}_i = \begin{bmatrix} C_{zi} - D_{fi}C_{yi} & C_{fi} \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_i = \begin{bmatrix} E_{zi} + D_{fi}E_{yi} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.16})$$

O diagrama de blocos da Figura III.2 representa o esquema do Filtro Markoviano de Ordem Completa.

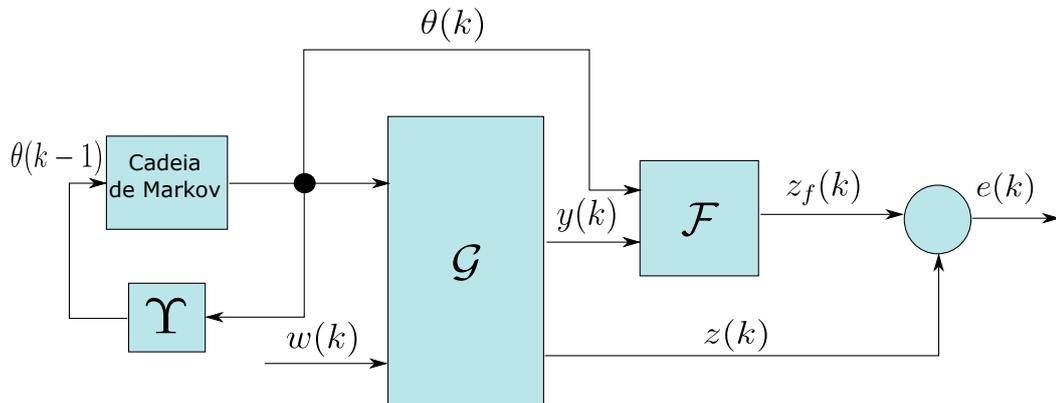


Figura III.2 – Diagrama de blocos para o Filtro de Ordem Completa.

Para projetar o filtro, devemos resolver um problema convexo com restrições em forma de LMIs. Isso é possível utilizando o teorema a seguir.

Teorema III.4 *Existe um filtro na forma da equação (III.13), tal que $\|\mathcal{G}_o\|_\infty^2 < \gamma$, se, e somente se, existirem matrizes simétricas X_i, Z_i , e matrizes H_i, M_i, L_i, F_i, K_i com dimensões compatíveis que satisfazem as LMIs:*

$$\left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \\ \Psi_i(Z_{pi}, H_i, F_i, M_i, L_i) \end{array} \quad \begin{array}{c} \Psi'_i(Z_{pi}, H_i, F_i, M_i, L_i) \\ \begin{bmatrix} Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ 0 & H_i + H'_i + Z_{pi} - X_{pi} & \bullet \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \end{array} \right] > 0 \quad (III.17)$$

onde Ψ_i é definida como:

$$\Psi_i(Z_{pi}, H_i, F_i, M_i, L_i) = \begin{bmatrix} Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi}J_i \\ H_iA_i + F_i + C_{yi} + M_i & H_iA_i + F_iC_{yi} & H_iJ_i + F_iE_{yi} \\ C_{zi} - K_iC_{yi} + L_i & C_{zi} - K_iC_{yi} & E_{zi} - K_iE_{yi} \end{bmatrix}$$

As matrizes do filtro são dadas por:

$$A_{fi} = -H_i^{-1}M_i, \quad B_{fi} = -H_i^{-1}F_i, \quad C_{fi} = -L_i, \quad D_{fi} = K_i. \quad (III.18)$$

A prova para o Teorema III.4 pode ser encontrada em [FIORAVANTI; GONÇALVES; GEROMEL, 2015].

III.7 Controlador Markoviano por Realimentação de Estado

Vamos considerar um controlador por realimentação de estados dado pela equação,

$$u(k) = K(\theta_k)x(k). \quad (III.19)$$

O sistema em malha fechada é dado por,

$$\mathcal{G}_k : \begin{cases} \hat{x}(k+1) &= (A(\theta_k) + B(\theta_k)K(\theta_k))x(k) + J(\theta_k)w(k) \\ z(k) &= (C_z(\theta_k) + D(\theta_k)K(\theta_k))x(k) + E_z(\theta_k)w(k) \end{cases}, \quad (III.20)$$

O projeto dos ganhos do controlador pode ser obtido por meio de um problema de otimização convexo cujas restrições estão na forma de LMIs, como mostra o próximo teorema.

Teorema III.5 *Existe um controlador por realimentação de estado dependente do modo na forma (III.19), tal que $\|\mathcal{G}_k\|_\infty^2 < \gamma$, se e somente se, existirem matrizes simétricas X_i e Z_{ij} e matrizes G_i , H_i e Y_i com dimensões compatíveis que satisfazem as LMIs:*

$$\begin{bmatrix} G_i + G'_i - X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma & \bullet & \bullet \\ A_i G_i + B_i Y_i & J_i & H_i + H'_i - Z_{pi} & \bullet \\ C_{zi} G_i + D_{zi} Y_i & E_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{III.21})$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & X_j \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{III.22})$$

O ganho do controlador é obtido por $K_i = Y_i G_i^{-1}$.

A prova para o Teorema III.5 pode ser encontrada em [GONCALVES; FIORAVANTI; GEROMEL, 2012].

III.8 Sistemas Politópicos

Um sistema politópico pode ser entendido como um sistema linear como o mostrado na equação (III.1), porém, alguns de seus parâmetros possuem incertezas. As incertezas podem ser representadas através de combinações convexas das matrizes do sistema com vértices conhecidos. Em posse dessas informações, é possível criar um sistemas de matrizes que pertencem a um politopo com um número finito de vértices. Cada um desses vértices representa um sistema linear com uma específica combinação dos valores extremos dos parâmetros incertos. A região convexa resultante da combinação convexa desses vértices gera uma região que representa todas as possíveis combinações de valores da matriz do sistema.

III.8.1 Estabilidade Robusta em Sistemas Politópicos

Dado o politopo Γ composto por matrizes,

$$\Gamma \triangleq \{A(\alpha) : A = \sum_{i=1}^S \alpha_i A_i; \alpha \in \Delta_S\}, \quad (\text{III.23})$$

onde S representa o número de vértices e Δ_S é o conjunto simplex, i.e.,

$$\Delta_S = \{\alpha \in \mathbb{R}^S; \sum_{i=1}^S \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0\}, \quad (\text{III.24})$$

um politopo é considerado estável no caso discreto quando todos o vértices e todas as combinações convexas entre os vértices são estáveis, isto é, todos os autovalores estão no

interior do círculo unitário. Veja [OLIVEIRA; PERES, 2005] para uma explicação completa sobre o assunto.

Uma vez tendo entendido o conceito de sistemas politópicos, precisamos explicar como aplicá-lo ao projeto dos controladores e filtros utilizados no presente trabalho. Um exemplo é o controlador (III.5), observe que as matrizes do controlador obtidas por (III.12) são dependentes das matrizes do sistema A_i, B_i, J_i . Portanto, não é possível projetar um único controlador para lidar com todas as diferentes combinações que representam as incertezas do sistema. Por outro lado, com o filtro (III.13) e com o controlador de realimentação de estado (III.19) é possível projetar as matrizes do filtro $A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}$ e o ganho K_i dado que eles dependem apenas das variáveis das LMIs. Enquanto impusermos que essas variáveis assumam valores constantes, independentemente da variação politópica, podemos obter filtros e controladores que garantem um limite superior para a norma H_∞ . É importante salientar que, com a adição dessas restrições que representam as incertezas, as LMIs do Teorema III.4 e III.5 perdem a condição necessária para a existência do filtro e controlador que limitam o valor da norma H_∞ , mas a condição de suficiência se mantém.

III.9 Discretização de Sistemas Politópicos

O processo de discretização de sistemas lineares é um procedimento correto e existem várias maneiras de fazê-lo, como por exemplo o Segurador de Ordem-Zero. Entretanto, o processo de discretização comum introduz alguns desafios para os sistemas politópicos.

Isso ocorre porque o politopo obtido discretizando todas as matrizes pertencentes ao sistema politópico contínuo é diferente do politopo obtido pela discretização dos vértices e combinação desses vértices através de somas convexas. Portanto, procedimentos normalmente utilizados como o Segurador de Ordem-Zero são inapropriados para executar essa tarefa. Isso ocorre porque a região obtida discretizando cada um dos vértices com o Segurador de Ordem-Zero é diferente da região obtida utilizando um método apropriado para a discretização de um sistema politópico. Essa diferença nas regiões obtidas significa perda de informação e, em alguns casos, o politopo contínuo é convexo e compacto, mas o sistema politópico discreto não é convexo.

Existem soluções propostas pela literatura para levar em conta o processo de discretização de um sistema politópico, como [SHIEH; WANG; CHEN, 1998; HETEL; DA-FOUZ; LUNG, 2007; KOTHARE; BALAKRISHNAN; MORARI, 1996; WADA; SAITO; SAEKI, 2004]. Esses procedimentos são soluções numéricas ou desenvolvimento de séries de Taylor das matrizes exponenciais relacionadas ao processo de discretização, com a característica de possuir um número fixo de termos da série. A solução utilizada nesse trabalho é apresentada em [BRAGA et al., 2013] e também se baseia em desenvolvimento de série de Taylor, com variados números de termos na série, representado por l . Essa funci-

onalidade é essencial para o desempenho do controlador, dado que para alguns sistemas é necessário que o número de termos da série de Taylor seja suficientemente elevado para alcançar o nível de precisão desejado. Considerando o sistema politópico no tempo contínuo,

$$\dot{x}(t) = A_{cont}(\alpha)x(t) + B_{cont}(\alpha)u(t), \quad (III.25)$$

o sistema politópico discreto equivalente é,

$$x(k+1) = A_{disc}(\alpha)x(k) + B_{disc}(\alpha)u(k), \quad (III.26)$$

onde é possível escrever as matrizes discretas da seguinte forma,

$$A_{disc}(\alpha) = A_l(\alpha) + \Delta A_l(\alpha), \quad (III.27)$$

$$B_{disc}(\alpha) = B_l(\alpha) + \Delta B_l(\alpha), \quad (III.28)$$

onde $A_l(\alpha)$, $B_l(\alpha)$ são dadas pelo desenvolvimento em série de Taylor e $\Delta A_l(\alpha)$, $\Delta B_l(\alpha)$ são o resíduo da série. As matrizes $A_l(\alpha)$, $B_l(\alpha)$, $\Delta A_l(\alpha)$ e $\Delta B_l(\alpha)$ podem ser calculadas da seguinte forma,

$$A_l(\alpha) = \sum_{j=0}^l \frac{A_{cont}(\alpha)^j}{j!} T^j, \quad (III.29)$$

$$B_l(\alpha) = \sum_{j=1}^l \frac{A_{cont}(\alpha)^{j-1}}{j!} T^j B_{cont}(\alpha), \quad (III.30)$$

$$\Delta A_l(\alpha) = e^{A_{cont}(\alpha)T} - A_l(\alpha), \quad (III.31)$$

$$\Delta B_l(\alpha) = \left(\int_0^T e^{A_{cont}(\alpha)s} ds \right) B_{cont}(\alpha) - B_l(\alpha), \quad (III.32)$$

onde $l \in \mathbb{N}$ é o número de termos do desenvolvimento em série de Taylor e $T > 0$ é o período de amostragem. Após o desenvolvimento em série de Taylor o polinômio que representa o politópo discreto deve ser homogeneizada. Essa homogeneização de polinômio é feita em relação a variável α , pois todos os termos do polinômio $A_l(\alpha)$ devem ter o mesmo grau. Rearranjando o polinômio $A_l(\alpha)$ para que só exista um único índice para cada combinação de α , esses índices são os vértices do politopo discreto, para mais detalhes veja [BRAGA et al., 2013].

O resíduo é uma medida importante no presente processo, porque é ligado à garantia do desempenho do controlador. Para garantir o desempenho, precisamos limitar a norma do sistema. Para isso utilizamos o Teorema do Pequeno Ganho. Na Figura III.3, \mathcal{G} é o nosso sistema, \mathcal{F} é o filtro, \mathcal{K} é controlador de controlador de realimentação de estados.

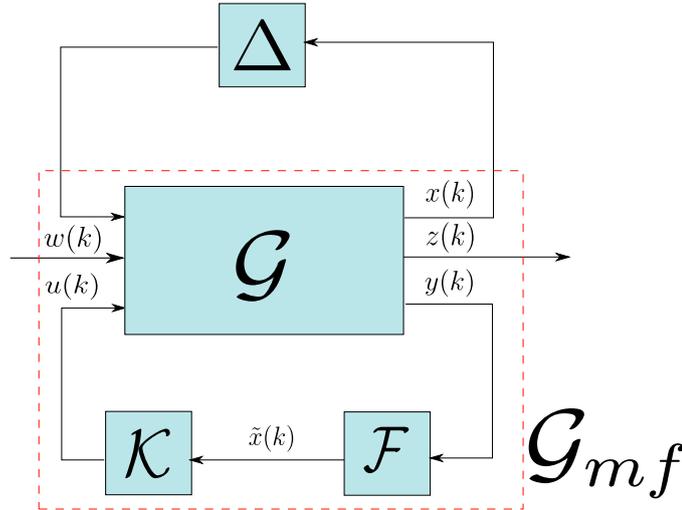


Figura III.3 – Diagrama de bloco para o Teorema do Pequeno Ganho.

Teorema III.6 *Suponhamos que $\psi > 0$. O sistema interligado mostrado na Figura III.3 é internamente estável para qualquer Δ com*

- $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\psi$ *se e somente se* $\|\mathcal{G}_{mf}\|_\infty < \psi$
- $\|\Delta\|_\infty < 1/\psi$ *se e somente se* $\|\mathcal{G}_{mf}\|_\infty \leq \psi$

A prova pode ser vista em [ZHOU et al., 1996; GEROMEL; KOROGUI, 2011]. O teorema pode também ser entendido como,

$$\|\mathcal{G}_{mf}\|_\infty \|\Delta\|_\infty < 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (\text{III.33})$$

É importante lembrar que o valor do resíduo diminui à medida que o número de termos do desenvolvimento em série de Taylor aumenta, então caso um valor pequeno de l seja utilizado, a condição (III.33) talvez não seja satisfeita. Esse é o motivo de utilizarmos esse procedimento, encontrar um valor apropriado de l para assegurar que a condição (III.33) é satisfeita.

III.9.1 Exemplo

Para ilustrar a necessidade da utilização dessa estratégia apresentaremos um caso onde a diferença entre discretizar os vértices do politopo utilizando procedimentos comuns como o Segurador de Ordem-Zero e a discretização utilizando expansão em série de Taylor é visível.

Vamos considerar um sistema politópico contínuo com três vértices, e então plotamos os autovalores de todas as combinações dos vértices dois a dois, e um número de combinações de matrizes internas dos politopos. Os vértices do sistema contínuo são,

$$A_{cont}(1) = \begin{bmatrix} -16.1405 & -12.6164 \\ 1.8619 & -17.3879 \end{bmatrix}, \quad (III.34)$$

$$A_{cont}(2) = \begin{bmatrix} -18.1865 & -15.0000 \\ 0.0000 & -19.5920 \end{bmatrix}, \quad (III.35)$$

$$A_{cont}(3) = \begin{bmatrix} -21.8238 & -19.2375 \\ 3.3634 & -23.5104 \end{bmatrix}. \quad (III.36)$$

As Fig. III.4a,III.4b, são respectivamente a nuvem politópica para o sistema discreto obtido com Segurador de Ordem-Zero, e o segundo para a abordagem que utiliza desenvolvimento em série de Taylor para somente dois termos, isto é, $l = 2$.

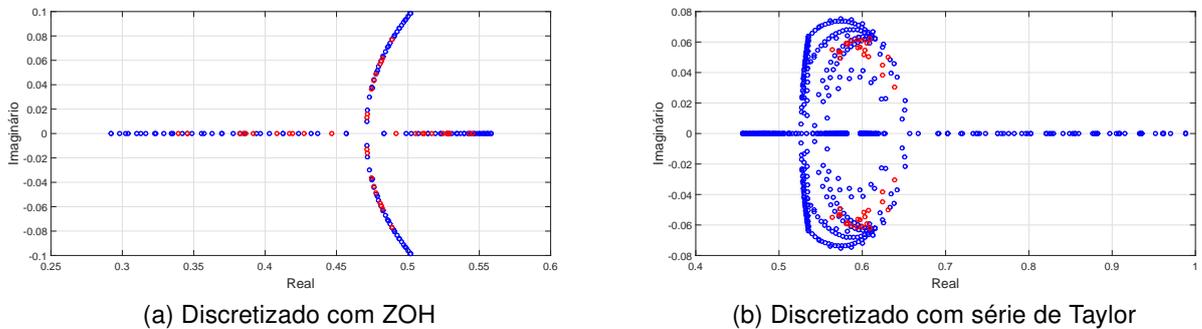
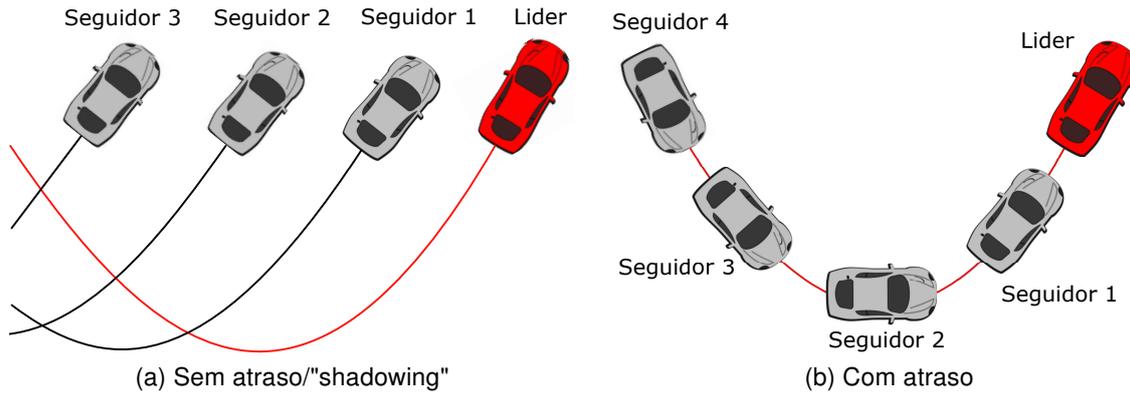


Figura III.4 – Comparação dos métodos de discretização.

Observe que o segundo gráfico tem uma maior quantidade de informação que é perdida se assumirmos que somente a discretização dos vértices usando o Segurador de Ordem-Zero e a recombinação deles é suficiente para obter a discretização do conjunto original. Outra informação que podemos extrair desses gráficos é que existe a possibilidade de que o politopo discreto possa ser instável, isto é, possuir autovalores fora do círculo unitário, essa característica pode não ser observada na discretização com Segurador de Ordem-Zero.

III.10 Adição de atraso fixo em sistemas discretos

Nessa seção faremos uma explicação do procedimento para a adição de atraso fixo em sistemas discretos e possíveis efeitos causados no desempenho do sistema. A justificativa para a inserção de atraso fixo é garantir que os seguidores sigam a trajetória traçada pelo líder. Nas Fig. III.10 são apresentadas duas situações, onde a Fig. III.5a é o caso onde não temos a adição de atraso e a Fig. III.5b é o caso com a adição de atraso.



III.10.1 Estrutura para adição de atraso ao sistema

Considere o sistema linear discreto (III.1). Para considerarmos o atraso, os estados medidos do sistema devem ser aumentados para que as saídas de instantes anteriores também façam parte do vetor de estados no instante presente [FRIDMAN, 2014], da seguinte forma,

$$x_{aug}(k) = [x(k)' \ y(k-1)' \ y(k-2)' \ \dots \ y(k-h)']'. \quad (III.37)$$

Com esta extensão do vetor de estados, conseqüentemente, temos novas matrizes do sistema dadas por,

$$x_{aug}(k+1) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_y & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} x_{aug}(k) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} J \\ E_y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} w(k). \quad (III.38)$$

A análise de desempenho e estabilidade desses sistemas aumentados podem ser vistos em maior profundidade em [FRIDMAN, 2014].

III.11 Modelagem do Carro

Esta seção contém a descrição do modelo dinâmico bicicleta e sua linearização. Esse modelo é uma aproximação amplamente utilizada na literatura em *motion planning*, *path tracking* ou simplesmente para a análise do comportamento de um veículo.

III.11.1 Modelo dinâmico

A dinâmica de um veículo é muito complexa e para obter um modelo que atenda a um critério de precisão elevado seria necessário criar um modelo não-linear e de difícil

tratamento numérico. O modelo de bicicleta é amplamente utilizado na literatura, [SNIDER, 2009; BEDOYA; FERREIRA; NETO, ; GARCIA; FERREIRA; NETO, 2014; BUEHLER; IAG-NEMMA; SINGH, 2009; AVAK, 2004], por apresentar uma relação "complexidade x precisão" razoável. Esse modelo tem como foco a análise da dinâmica das forças laterais que atuam no veículo durante seu movimento. Esse modelo permite criar controladores lineares que apresentam resultados satisfatórios, apesar de algumas suposições e simplificações embutidas no modelo. O diagrama de forças é apresentado na Figura III.5,

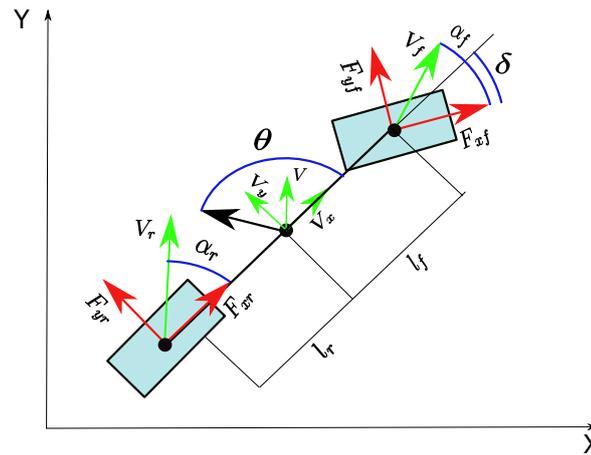


Figura III.5 – Modelo de Bicicleta.

A Tabela 2 mostra a descrição das constantes e variáveis que estão presentes no diagrama de forças da Fig. III.5,

Símbolo	Definição
J_v	momento de inércia do carro
l_f	distância entre o centro gravitacional e o eixo dianteiro
l_r	distância entre o centro gravitacional e o eixo traseiro
c_f	parâmetro de rigidez em curvas para as rodas dianteiras
c_r	parâmetro de rigidez em curvas para as rodas traseira
m	massa do carro
v_x	velocidade no eixo x
v_y	velocidade no eixo y
δ	ângulo de esterçamento das rodas dianteiras
r	representação da velocidade angular em torno do eixo de guinada
L	distância entre os eixos

Tabela 2 – Definição para os parâmetros da Figura III.5.

As forças laterais do diagrama III.5 podem ser escritas da seguinte forma,

$$F_{yf} \cos(\delta) - F_{xf} \sin(\delta) + F_{yr} = m(\dot{v}_y + v_x r). \quad (\text{III.39})$$

Considerando que há somente movimentos no plano, que o centro de gravidade está posicionado ao longo da linha central do veículo, a inércia no eixo de guinada (*yaw*) e

balanceando a equação temos

$$l_f(F_{yf} \cos(\delta)) - l_r(F_{yr} - F_{xf} \sin(\delta)) = J_v \dot{r}, \quad (\text{III.40})$$

sendo r o coeficiente angular no eixo de guinada (*yaw*). Os ângulos de deslizamento dos pneus podem ser escritos como,

$$\alpha_f = \tan^{-1} \left(\frac{v_y - l_f r}{v_x} \right) - \delta, \quad (\text{III.41})$$

$$\alpha_r = \tan^{-1} \left(\frac{v_y - l_r r}{v_x} \right). \quad (\text{III.42})$$

Agora, descrevendo as forças geradas pelas rodas como linearmente proporcionais ao ângulo de deslizamento, as forças laterais são dadas por

$$F_{yf} = c_f \alpha_f, \quad (\text{III.43})$$

$$F_{yr} = c_r \alpha_r. \quad (\text{III.44})$$

Se assumirmos que a variação da velocidade no eixo x é nula, isto é, $\ddot{x} = 0$, é possível dizer que,

$$F_{xf} = 0. \quad (\text{III.45})$$

Com isso, podemos substituir as equações (III.41) e (III.43) em (III.39), e isolando em \dot{v}_y e \dot{r} , obtemos as equações dinâmicas abaixo,

$$\dot{v}_y = \frac{-c_f \left[\tan^{-1} \left(\frac{v_y + l_f r}{v_x} \right) - \delta \right] \cos(\delta) - c_r \tan^{-1} \frac{v_y + l_r r}{v_x}}{m} - v_x r, \quad (\text{III.46})$$

$$\dot{r} = \frac{-l_f c_f \left[\tan^{-1} \left(\frac{v_y + l_f r}{v_x} \right) - \delta \right] \cos(\delta) - l_r c_r \tan^{-1} \frac{v_y + l_r r}{v_x}}{J_v}. \quad (\text{III.47})$$

III.11.2 Linearização do Modelo do Veículo

Para projetarmos sistemas de controle, um caminho usual é o de representar o sistema não-linear pelo sistema linearizado em torno de um ponto de equilíbrio. Observando as equações (III.46) e (III.47) é possível constatar que os elementos não lineares são as funções senos, cossenos e arcos-tangentes, então se considerarmos que a variação dos termos $((v_y + l_f r)/v_x)$ e δ é pequena podemos reescrevê-las da seguinte forma,

$$\dot{v}_y = \frac{-(c_f + cr)}{m v_x} v_y + \left[\frac{(l_r c_r - l_f c_f)}{m v_x} - v_x \right] r + \frac{c_f}{m} \delta, \quad (\text{III.48})$$

$$\dot{r} = \frac{l_r c_r - l_f c_f}{J_v v_x} v_y + \frac{-(l_f^2 c_f + l_r^2 c_r)}{J_v v_x} r + \frac{l_f c_f}{m} \delta. \quad (\text{III.49})$$

Colocando na forma de matrizes temos,

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(c_r+c_f)}{mv_x} & \frac{(c_r+c_f)}{mv_x} - v_x \\ \frac{(l_r c_r - l_f c_f)}{J_v v_x} & -\frac{l_r^2 c_r + l_f^2 c_f}{J_v v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_f}{m} \\ \frac{l_f c_f}{m} \end{bmatrix} \delta, \quad (\text{III.50})$$

com esse modelo podemos aplicar as técnicas de controle que foram apresentadas neste capítulo.

III.12 Modelagem de Rede

Como explicado na Seção III.2, podemos modelar a perda de informação inerente à rede utilizando sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos. A ocorrência de falhas na rede é modelada como uma cadeia de Markov. Existem vários modelos de cadeia de Markov que podem ser utilizados para modelar falhas em redes. Em [MARCONDES, 2005] é feita a comparação do comportamento de várias cadeias de Markov com o comportamento de redes reais. Uma característica importante das falhas em redes é a ocorrência de falhas em rajada. A falha em rajada pode ser entendida da seguinte maneira, quando uma rede transita do modo de transmissão de sucesso para o modo de falha, a chance de que uma nova falha ocorra nos próximos instantes k é alta. Um modelo de cadeia de Markov que tem um comportamento semelhante a esse é o modelo Gilbert, [GILBERT, 1960]. Um esquema exemplificando o modelo é mostrado na Figura III.6.

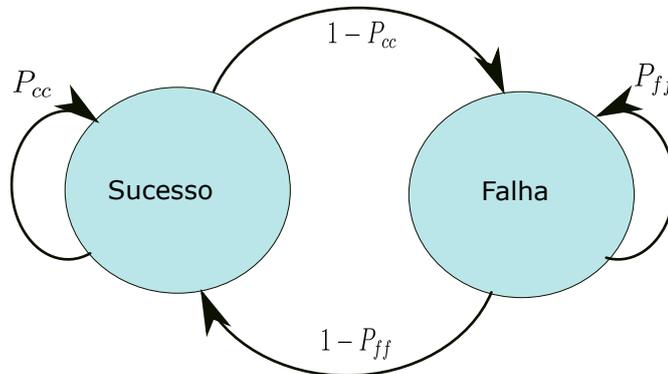


Figura III.6 – Modelo Gilbert.

Na Figura III.6, P_{cc} é a probabilidade, dado que a cadeia esteja no estado de sucesso, de que ela se mantenha no estado de sucesso, e seu complemento, $1 - P_{cc}$, é a probabilidade da transição ocorrer. P_{ff} é a probabilidade de que, dado que a cadeia esteja no estado de falha, ela se mantenha nesse estado, e seu complemento, $1 - P_{ff}$, é a probabilidade da transição ocorrer. A matriz de probabilidade de transição é,

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_{cc} & 1 - P_{cc} \\ 1 - P_{ff} & P_{ff} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.51})$$

Um exemplo de comportamento da rede é mostrado na Fig. III.7

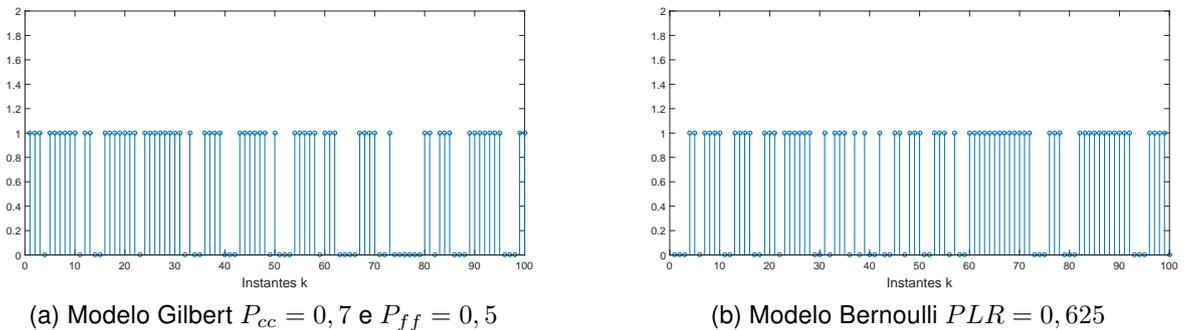


Figura III.7 – Comparação dos modelos, a falha é representada por 0.

Na Fig.III.7 em ambos os gráficos a ocorrência de falha é representada pelo valor 0. Ambos os gráficos foram obtidos para a mesma taxa de perda de pacote. O modelo Gilbert é representado pelo gráfico III.7a e o gráfico III.7b representa o comportamento para o modelo Bernoulli. O modelo Bernoulli tem como principal característica que a determinação do próximo estado da cadeia não depende o estado corrente, isto é, as linhas da sua matriz de probabilidade de transição são idênticas. Essa característica do modelo Bernoulli faz com que ele não contemple a falha em rajada. Observe na Figura III.7a que os instantes onde as falhas ocorrem estão mais agrupados, esse fenômeno é chamado de falha em rajada.

Para o nosso caso, a cadeia de Markov é homogênea no tempo, isto significa que a matriz \mathcal{P} não varia. Os valores de probabilidade da matriz \mathcal{P} no estado estacionário podem ser interpretados como o taxa de perda de pacote (PLR) da rede. Para obter esses valores de probabilidade basta calcular \mathcal{P}^n para valores de n suficientemente grandes, com isso as linhas da matriz de transição de probabilidade serão idênticas, os valores dessa linha representam as probabilidades estacionárias da cadeia em cada um dos modos. Outro fato importante é que, para um mesmo valor de PLR, podemos ter várias combinações de valores de P_{cc} e P_{ff} do modelo Gilbert, ocasionando em diferentes resultados no cálculo da norma H_∞ . Para uma completa descrição sobre cadeia de Markov e seus diferentes modelos consulte [LEON-GARCIA, 2008].

III.13 Modelagem da Falha para os Sistemas de Controle

Os sistemas de controle convencionais tem como premissa que os sinais envolvidos são transmitidos por redes ideais. Como mostramos na Seção III.2, é possível criar sistemas de controle que contemplam a falha na rede.

Existem duas abordagens que podemos utilizar para determinar como deve ser a entrada de controle na ocorrência de falha, a primeira abordagem é chamada de *Zero* e

a segunda tem o nome de *Hold*, essa nomenclatura foi introduzida em [SCHENATO, 2009].

A abordagem *Zero* consiste em atribuir um valor nulo à entrada de controle sempre que uma falha na transmissão é detectada. A abordagem *Hold* é um pouco diferente: em vez de atribuir valores nulos ao vetor de entradas de controle, a entrada de controle da última transmissão bem sucedida será repetida até que uma nova transmissão bem sucedida seja recebida. Em [FIORAVANTI; GONÇALVES; GEROMEL, 2011], é provado que ambas abordagens tem desempenho igual para a norma H_2 e para a norma H_∞ para o problema de filtragem. Para o problema do controle por realimentação de estado utilizando o regulador linear quadrático (LQR), [SCHENATO, 2009] apresenta uma comparação de ambas abordagens em um exemplo escalar. O resultados obtidos se mostraram inconclusivos para a pergunta de qual das duas abordagens possui melhor desempenho. Dependendo da probabilidade de perda de pacote e do custo atribuído pela critério de otimização para as saídas a serem controladas, uma ou outra abordagem podem apresentar desempenho superior.

III.13.1 Abordagem *Zero*

Considere a Eq. (III.1), e especificamente, o sinal da saída medida $y(k)$. A matriz que pondera os estados é C_{yi} e a influência das perturbações nas saídas medidas é dada por E_{yi} . No esquema da abordagem *Zero*, essas matrizes são escritas da seguinte forma,

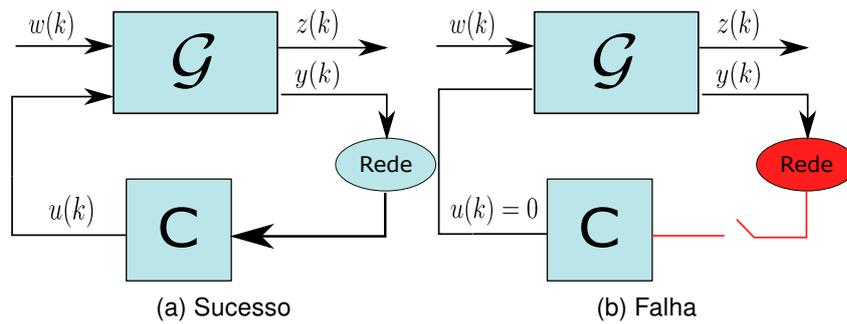
$$C_{yi} = \Delta_i C_y, E_{yi} = \Delta_i E_y, \quad (III.52)$$

onde $i = 2^q$, isso ocorre caso cada um dos sinais é transmitido independentemente, e essa quantidade de modos representa todos as possíveis combinações de falha e sucesso dos canais de transmissão. As matrizes C_y e E_y são as matrizes para a planta determinística e $\Delta_i \in \mathbb{R}^{q \times q}$ é a matriz que modela a ocorrência de falhas na transmissão das medidas segundo a seguinte estrutura,

$$\Delta_i = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_q), \quad (III.53)$$

onde $\delta_j \in \{0, 1\}$ é a falha de transmissão no j -ésimo canal de transmissão sempre que $\delta_j = 0$ e $\delta_j = 1$ para o caso contrário.

A Fig.III.13.1 temos a representação da abordagem *Zero* para o modo de transmissão normal Fig. III.8a e para o modo onde a falha ocorre Fig. III.8b.



III.13.2 Abordagem *Hold*

Por outro lado, a abordagem *Hold* pode ser implementada a partir de um *buffer*, que retém a informação da última transmissão bem sucedida e a utiliza até que um novo sinal seja recebido. A abordagem *Hold* é mais complicada, pois é necessário considerar um vetor de estados aumentado $[x(k)' \ y(k-1)']'$ e a realização em espaço de estado resultante é dada por,

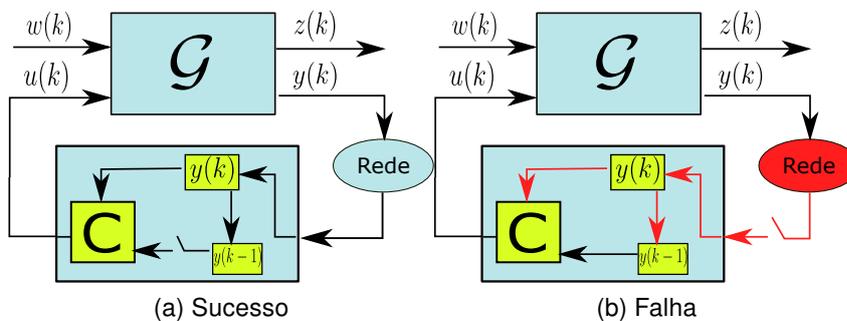
$$A_i = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \Delta_i C_y & I - \Delta_i \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, J_i = \begin{bmatrix} J \\ \Delta_i E_y \end{bmatrix}, \tag{III.54}$$

$$C_{zi} = \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix}, D_{zi} = D_z, E_{zi} = E_z, \tag{III.55}$$

$$C_{yi} = \begin{bmatrix} \Delta_i C_y & I - \Delta_i \end{bmatrix}, E_{yi} = \Delta_i E_y. \tag{III.56}$$

Da mesma forma como na abordagem *Zero*, na abordagem *Hold* $i = 2^q$, as considerações feitas em relação a quantidade de modos do caso *Zero* são as mesmas para o caso *Hold*.

A Fig.III.13.2 temos a representação da abordagem *Hold* para o modo de transmissão normal Fig. III.8a e para o modo onde a falha ocorre Fig. III.8b.



III.14 Considerações Finais

Esse capítulo teve como objetivo a apresentação do ferramental teórico necessário para a implementação das propostas que serão apresentadas nos próximos capítulos. Foram apresentados a classe de sistemas dinâmicos que iremos utilizar na Seção III.2, a norma utilizada para a medida de desempenho em Seção III.4, os controladores na Seção III.5 e III.7 e o filtro na Seção III.6 que serão projetados, apresentamos o conceito de sistemas politópicos na Seção III.8, o procedimento de discretização para sistemas politópicos na Seção III.9, a síntese do modelo dinâmico do veículo que iremos utilizar Seção III.11, o modelo de falhas na transmissão pela rede na Seção III.12 e por fim as abordagens do tratamento da falha para os controladores na Seção III.13.

CAPÍTULO IV

Descrição do Problema e Soluções Propostas

Este capítulo tem como objetivo apresentar o problema a ser estudado e a estrutura das soluções propostas. Este capítulo é dividido em duas seções, sendo a primeira a descrição do problema que é tratado no presente trabalho e a segunda seção é a apresentação das soluções propostas para o problema.

IV.1 Descrição do Problema

Considere uma fila de carros seguindo um carro líder, o caminho que o primeiro carro percorre é determinístico e todos os demais carros não possuem piloto. Todos os carros mantêm uma velocidade constante no eixo x . O carro líder é controlado por um motorista ou possui um trajeto predeterminado e os outros carros são autônomos. Os carros se comunicam em cadeia, isto é, o primeiro carro se comunica com o segundo e o segundo com o terceiro e assim sucessivamente. Todos os carros têm acesso a seus próprios estados e recebem os sinais referentes aos estados do carro a frente via rede de comunicação sem fio. Uma representação gráfica do problema é mostrada na Figura IV.1.

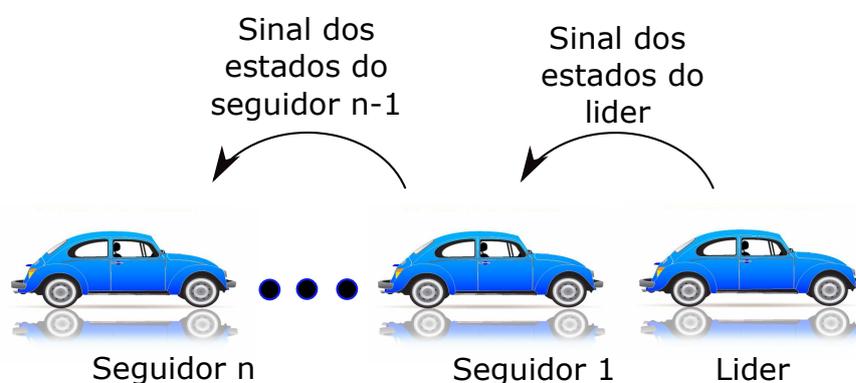


Figura IV.1 – Esquema do comboio de carros.

Na Figura IV.1 somente os seguidores possuem unidades controladoras, todos os carros possuem sensores para medir suas velocidade, acelerações e ângulo de es-

terçamento das rodas dianteiras. Todos os seguidores devem fazer exatamente a mesma trajetória traçada pelo líder. Para mostrar de maneira mais clara a topologia do problema e o local onde o sistema é mais suscetível a perda de pacote observe o diagrama de bloco da Fig. IV.2,

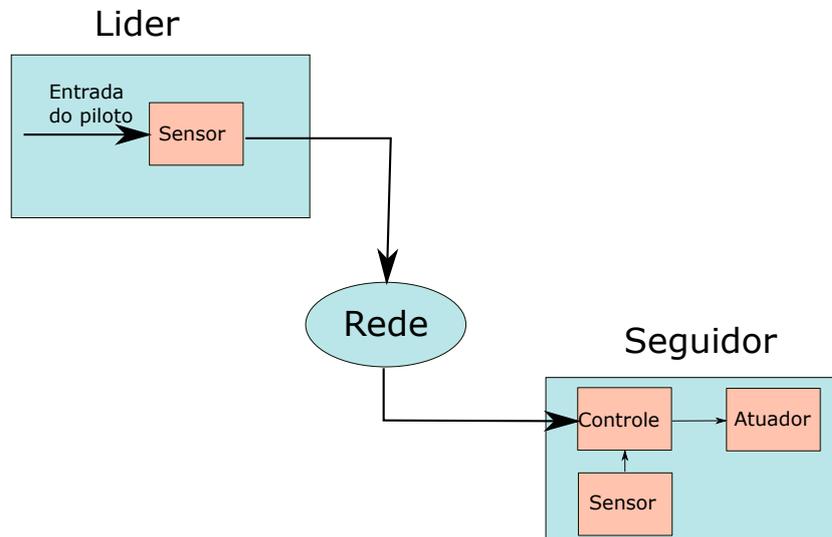


Figura IV.2 – Topologia em diagrama de blocos.

É possível constatar pela Figura IV.2 que o primeiro carro não possui unidade controladora e uma rede *wireless* é responsável pela transmissão dos sinais obtidos pelos sensores no primeiro carro para o controlador no segundo carro, essa transmissão é sujeita a perda de pacote. Entretanto, a comunicação entre controlador e atuadores não sofre perda de pacote porque a transmissão dos sinais é feita por redes cabeadas e os elementos estão muito próximos um do outro, sendo assim consideramos que essa rede é sujeita somente a ruídos. As observações feitas para a transmissão do sinal de controle também se aplicam a comunicação dos sensores que estão dentro de um carro e seu respectivo controlador, isto é, não existem perda de pacote essa rede é sujeita somente a ruídos.

Outra condição importante desse problema é que, para que o trajeto do primeiro carro seja copiado pelos demais seguidores, os atuadores não podem atuar imediatamente após a recepção do sinal. É necessário adicionar atraso fixo para que a execução da manobra seja feita no instante adequado para seguir o trajeto.

IV.2 Soluções Propostas

Nessa seção apresentaremos as possíveis soluções que desenvolvemos para o problema proposto na seção anterior.

IV.2.1 Solução utilizando o controlador dinâmico de ordem completa

Nessa proposta utilizamos o controlador apresentado na equação (III.5), o arranjo proposto abaixo foi extraído de [SEILER; SENGUPTA, 2005], e consiste na utilização de um sistema aumentado com os n carros presentes na fila, e minimização da diferença entre os estados do carro líder e seus seguidores.

É importante lembrar que para o caso dos controladores de ordem completa existem duas abordagens possíveis para o tratamento da falha, essas abordagens alteram a estrutura do sistema e de suas matrizes, nas Subseções IV.2.1.1 e IV.2.1.2 apresentaremos o procedimento específico para ambas.

Mas antes de apresentarmos as particularidades das soluções, fazemos a introdução de uma característica comum à ambas soluções. Daqui pra frente, consideramos o problema mais simples de um líder e um seguidor por simplicidade. O vetor de estados é dado por $x(k) = [v_{y1}(k) \ r_1(k) \ v_{y2}(k) \ r_2(k)]'$, que inclui as variáveis de estados dos dois carros de acordo com o modelo dinâmico detalhado na Seção III.11. O vetor de entradas exógenas é composto por $w(k) = [\delta_1(k) \ d_2(k) \ \eta_1(k)' \ \eta_2(k)']'$, onde $\delta_1(k)$ é a entrada do ângulo de esterçamento das rodas dianteiras do veículo líder, $d_2(k)$ é uma perturbação que afeta o ângulo de esterçamento dos seguidores, $\eta_1(k) \in \mathbb{R}^2$ contém as medidas de ruído do líder e $\eta_2(k) \in \mathbb{R}^2$ são as medidas de ruído do seguidor. O sinal de controle é somente aplicado no seguidor e é dado por $u_2(k) = \delta_2(k)$.

IV.2.1.1 Para o caso Zero

A abordagem *Zero*, como já explicamos no Seção III.13.1, é tal que quando uma falha de comunicação ocorre, o sinal de controle aplicado é nulo. Mas para o nosso caso, a perda no sinal $y(k)$ é parcial, isto é, o vetor de medidas não é inteiramente nulo, mas apenas a parte correspondente ao estado do veículo líder. As equações a seguir mostram a estrutura das matrizes para dois carros por uma questão de simplicidade. O modelo de estado para a dinâmica dos dois carros é dado por,

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_d \end{bmatrix} u_2(k) + \begin{bmatrix} B_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_d B_d & 0 & 0 \end{bmatrix} w(k), \quad (\text{IV.1})$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_u \end{bmatrix} u_2(k). \quad (\text{IV.2})$$

Nas equações (IV.1)–(IV.2), A_d e B_d são as matrizes discretas das equações (III.50) do modelo do carro linearizado apresentado na Seção III.11, esse processo de discretização foi realizado utilizando um segurador de ordem-zero. O parâmetro e_d representa um fator de escala da influência da perturbação no atuador. A constante e_u em (IV.2) indica como o

esforço de controle. Observe que, para essa abordagem, as equações IV.1 e (IV.2) não tem diferenciação entre os modos, portanto, não comutam. Entretanto, a equação dos sinais medidos $y(k)$ possui comutação. A matriz Δ_i para o caso com dois carros é dada por,

$$\Delta_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, & \text{se } i = 1 \text{ Sucesso,} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, & \text{se } i = 2 \text{ Falha.} \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Com isso equação para as medidas $y(k)$ com seus respectivos modos é dada por,

$$y(k) = \begin{cases} \Delta_1 x(k) + \Delta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_n I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_n I \end{bmatrix} w(k), & \text{sucesso,} \\ \Delta_2 x(k) + \Delta_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_n I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_n I \end{bmatrix} w(k), & \text{falha.} \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

É possível observar que, para a equação (IV.4), existem dois casos que são dependentes da ocorrência de falha no recebimento desses sinais de medida. O parâmetro e_n representa um fator de escala da influência de ruídos na medida.

IV.2.1.2 Para o caso *Hold*

Para o caso *Hold*, além da necessidade de estender o sistema com relação o número de carros, também temos que estendê-lo, como foi explicado no Seção III.13.2. Novamente, as equações a seguir mostram um exemplo para dois carros por questões de simplicidade. O vetor de entrada exógenas é o mesmo da abordagem *Zero*. O vetor de estados é dado por $x(k) = [v_{y1}(k) \ r_1(k) \ v_{y2}(k) \ r_2(k) \ y(k-1)]'$, que inclui as variáveis de estados dos dois carros de acordo a III.11 e os sinais medidos no instante imediatamente

anterior. O valor da matriz Δ_i é o mesmo do que apresentado para a abordagem *Zero* mostrado na Equação IV.4. O sistema estendido é dado por,

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix} & 0 \\ \Delta_i C_y & I - \Delta_i \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_d \\ 0 \end{bmatrix} u_2(k) + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_d B_d & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_n I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_n I \end{bmatrix} \end{bmatrix} w(k), \quad (IV.5)$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_n \end{bmatrix} u_2(k), \quad (IV.6)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \Delta_i & I - \Delta_i \end{bmatrix} x(k) + \Delta_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_n I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_n I \end{bmatrix} w(k). \quad (IV.7)$$

É possível observar que, diferente da abordagem *Zero* onde a comutação ocorria somente na equação referente às medidas $y(k)$, as comutações ocorrem tanto na equação de estados (IV.5) quanto na equação de medidas (IV.7), mostrando o quanto a abordagem *Hold* é mais complexa.

A descrição dos parâmetros presentes nas equações (IV.5)–(IV.6) e (IV.7) é a mesma descrição para o caso *Zero*.

IV.2.2 Solução utilizando a estrutura Filtro dinâmico de ordem completa / Controlador de realimentação de estado

A solução apresentada nesta subseção consiste em uma estrutura Filtro / controlador por realimentação de estado. Essa estrutura foi concebida com o intuito de se adicionar maior robustez ao projeto de controle, sabendo-se que o processo de identificação de parâmetros para o tipo de planta tratada no presente trabalho é um processo complexo [RUSSO; RUSSO; VOLPE, 2000; LJUNG, 1998]. Essa estrutura é utilizada porque, como explicado na Seção III.8, a estrutura do controlador de ordem completa não permite a síntese de controladores robustos a incertezas descritas como sistemas politópicos. A Figura IV.3 é uma representação da estrutura filtro/controlador por realimentação de estado.

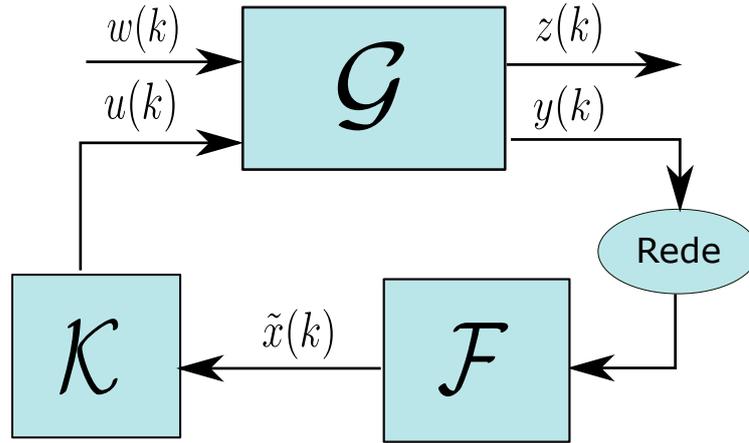


Figura IV.3 – Topologia em diagrama de blocos para a abordagem Filtro/controlador por realimentação de estado.

Da mesma maneira que na Seção IV.2.1, utilizamos a técnica de modelagem de fila de carros proposta em [SEILER; SENGUPTA, 2005], que consiste na extensão do vetor de estados com os estados de todos os carros que compõem a fila, e tem como objetivo minimizar a diferença entre os estados de cada carro. As equações a seguir apresentam a estrutura das matrizes para somente dois carros, um líder e um seguidor. As matrizes utilizadas no projeto do Filtro são,

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_{dl} & 0 \\ 0 & A_{dl} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} B_{di} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_d B_{di} & 0 & 0 \end{bmatrix} w(k), \quad (\text{IV.8})$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k), \quad (\text{IV.9})$$

$$y(k) = \begin{cases} \Delta_1 x(k) + \Delta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_n I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_n I \end{bmatrix} w(k), & \text{se } \theta(k) = \text{sucesso}, \\ \Delta_2 x(k) + \Delta_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_n I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_n I \end{bmatrix} w(k), & \text{se } \theta(k) = \text{falha}. \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

Diferente das outras abordagens, na equação (IV.8), A_{dl} e B_{dl} fazem parte do conjunto de matrizes do sistema politópico contínuo convexo criado a partir da variação

paramétrica das grandezas presentes nas equações do modelo do carro linearizado apresentado em III.11. Com a obtenção dos vértices do politopo contínuo o próximo passo é obter o sistema politópico discreto, esse novo sistema politópico discreto é obtido realizando o procedimento de discretização descrito na Seção III.9. Os parâmetros e_d e e_n representam um fator de escala da influência do distúrbio do atuador e do ruído de medida, respectivamente. É possível observar na equação (IV.10) que existem dois casos que são dependentes da ocorrência de falhas no recebimento desses sinais de medida. É importante salientar que a matriz (IV.9) é uma matriz identidade, isso foi determinado desta maneira por que o filtro em questão é um filtro observador de estados e sua saída é uma estimativa \tilde{x} dos estados da planta. Outra importante observação é que não existe a necessidade de se testar a diferença entre as abordagens *Zero* e *Hold* por que para o caso de filtragem essas abordagens apresentam desempenhos iguais, e por motivos de simplicidade utilizamos a abordagem *Zero* por ser mais simples de se implementar, [FIORAVANTI; GONÇALVES; GEROMEL, 2011].

Como mostrado na Fig.IV.3, o sinal dos estados estimados obtidos pelo filtro serão a entrada do controlador por realimentação de estado, apresentado na Seção III.7. As matrizes utilizadas no projeto do controlador de realimentação de estado são,

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_{dl} & 0 \\ 0 & A_{dl} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{dl} \end{bmatrix} u_2(k) + \begin{bmatrix} B_{dl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_d B_{dl} & 0 & 0 \end{bmatrix} w(k), \quad (IV.11)$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_d \end{bmatrix} u_2(k) \quad (IV.12)$$

Da mesma maneira que o filtro, na equação (IV.8), A_{dl} e B_{dl} fazem parte do conjunto de matrizes do politopo convexo criado a partir da variação paramétrica das grandezas presentes nas equações do modelo do carro linearizado apresentado na Seção III.11. O procedimento de linearização do politopo foi executado segundo o procedimento descrito na Seção III.9. Os parâmetros e_d e e_n representam um fator de escala da influência da perturbação do atuador e do ruído da medida, respectivamente. Observe que, para essa abordagem, o controlador por realimentação é o responsável pela minimização da diferença dos estados, isso pode ser visto na estrutura da equação (IV.12).

Esse tipo de solução estruturada tem duas características que devem ser citadas. A primeira é que a adição de incertezas politópicas no filtro e no controlador de realimentação de estados ocasiona a perda de otimalidade dessas soluções, tornando-as soluções subótimas. A segunda é que, por ser uma solução estruturada e que pertence à classe H_∞ , o teorema de separação [COSTA; TUESTA, 2003], não é válido e por isso essa estrutura também fornece uma solução subótima. As matrizes do sistema em malha fechada são dadas por,

$$\tilde{A}_{eqi} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i D_{fi} C_{yi} & B_i K_i C_{fi} \\ B_{fi} C_{yi} & A_{fi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}_{eqi} = \begin{bmatrix} J_i + B_i D_{fi} E_{yi} \\ B_{fi} E_{yi} \end{bmatrix}, \quad (IV.13)$$

$$\tilde{C}_{eqi} = \begin{bmatrix} C_{zi} + D_{zi} K_i D_{fi} C_{yi} & D_{zi} K_i C_{fi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_{eqi} = \begin{bmatrix} E_{zi} + D_{zi} K_i D_{fi} E_{yi} \end{bmatrix}. \quad (IV.14)$$

IV.3 Estrutura das matrizes com a adiç3o de atraso

Como explicamos na Seç3o III.10, um sistema com atraso pode ser descrito como um sistema aumentado, segundo (III.37). Para o nosso caso, no qual o modelo dinâmico já é um sistema estendido, a tarefa de estender essa matriz é mais complexa. A adiç3o de atraso é necessária para fazer com que o carro seguidor execute a mesma trajet3ria do carro líder e não repita as manobras do líder instantaneamente, executando um movimento de *sombra*.

Antes de explicarmos o procedimento de extens3o das matrizes temos que fazer algumas consideraç3es, a primeira sendo que os sinais adquiridos pelos sensores no primeiro carro não são enviados de imediato ao segundo carro e a segunda consideraç3o é que a minimizaç3o ocorrerá entre os estados do instante atrasado no primeiro carro e os estados do segundo carro. Por motivos de simplicidade apresentaremos um exemplo para $h = 1$ para a abordagem Zero, lembrando o que foi apresentado na Seç3o III.10, esse parâmetro h representa o número de instantes em atraso. As matrizes são apresentadas a seguir,

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_d \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_d \end{bmatrix} u_2(k) + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} B_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_n I & 0 \\ 0 & e_d B_d & 0 & 0 \end{bmatrix} w(k) \quad (IV.15)$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_d \end{bmatrix} w(k) \quad (IV.16)$$

$$y(k) = \begin{cases} \Delta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} x(k) + \Delta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_n I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_n I \end{bmatrix} w(k), \text{ se } \theta(k) = \text{sucesso}, \\ \Delta_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} x(k) + \Delta_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_n I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_n I \end{bmatrix} w(k), \text{ se } \theta(k) = \text{falha}. \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

Dentre todas as modificações apresentadas nessa nova estrutura, a principal modificação é a que a matriz C_z sofre, porque essa modificação influencia nos resultados obtidos resolvendo as LMIs apresentadas no Capítulo III. Isso ocorre porque para calcular a norma segundo a equação (III.3) utilizamos $\|z\|_2^2$, como o $z(k)$ não mais minimiza a diferença entre os estados do primeiro e do segundo carro, mas a diferença entre os estados atrasados do primeiro carro e os estados do segundo.

IV.4 Considerações Finais

Este capítulo teve dois objetivos, o primeiro sendo a apresentação de forma mais completa e detalhada do problema tratado no presente trabalho e em segundo a apresentação de todas as abordagens propostas no trabalho, salientando as vantagens e desvantagens de cada uma delas.

CAPÍTULO V

Caso de Estudo

Neste capítulo apresentamos os parâmetros utilizados para se executar as simulações apresentadas no Capítulo VI. Esse capítulo apresenta, além dos valores numéricos utilizados para cada parâmetro, o comportamento das variáveis paramétricas, dos ruídos e das perturbações, além das cadeias de Markov que representam a ocorrência de falhas de transmissão.

V.1 Valores dos parâmetros do modelo

Os valores para a simulação normalmente são obtidos efetuando o processo de identificação do sistema, entretanto, para o nosso caso não foi possível fazer esses experimentos. Para contornar esse problema utilizamos os valores obtidos da referência [AVAK, 2004]. Os valores são expostos na tabela abaixo,

Simbolo	Valores	Unidades
J_v	1436,24	kgm ²
l_f	1,165	–
l_r	1,165	–
c_f	155494,663	N/rad
c_r	155494,663	N/rad
m	1140	kg
v_x	15	m/s

Tabela 3 – Valor das constantes.

Em [AVAK, 2004], os valores são obtidos a partir da identificação do sistema, esses valores correspondem a um pequena caminhonete com sua carga máxima. Os valores dos parâmetros de rigidez foram obtidos, segundo [AVAK, 2004], na *Technical University of Dresden*. O pneu foi analisado no teste de bancada com velocidade de 11,1 m/s, a pressão interna do pneu é de 2,9 bar.

V.2 Entrada determinística

A entrada determinística é simplesmente o comando da direção que o motorista insere no carro líder. Para as simulações temporais utilizamos um sinal que se assemelha ao movimento feito pra se trocar de faixa no trânsito, esse tipo de manobra é utilizado em vários trabalhos, por exemplo em [CHUNG; YI, 2006] e [AVAK, 2004].

A Figura V.1 apresenta o sinal utilizado nas simulações temporais,

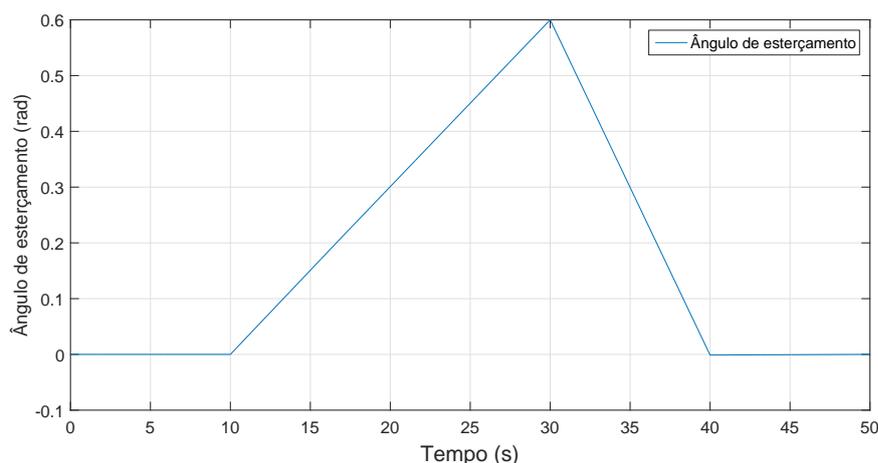


Figura V.1 – Entrada no primeiro carro.

Observe que o valor máximo é 0,61 rad que é o equivalente a 35° . Esse valor é considerado o máximo valor de esterçamento das rodas dianteiras do veículo. Esse comportamento foi escolhido por se assemelhar à manobra de troca de faixa.

V.3 Valores das probabilidades e comportamento da Cadeia de Markov de Markov

Como já mostramos na Seção III.12, utilizaremos o modelo Gilbert para modelar a rede. Os valores de P_{cc} e P_{ff} utilizados são, $P_{cc} = 0,8$ e $P_{ff} = 0,3$, essas probabilidades geram um taxa de perda de pacote (PLR) de 25%. O valor de P_{cc} significa que o pacote tem 80% de chance de ser transmitido corretamente após uma transmissão bem sucedida, o valor de P_{ff} significa que após uma transmissão defeituosa a chance de uma outra falha ocorrer é de 30%. O valor de PLR indica que um quarto dos pacotes transmitidos, em média, não chegarão ao destino.

O gráfico da Figura V.2 é um exemplo do comportamento da rede para esses valores de probabilidade.

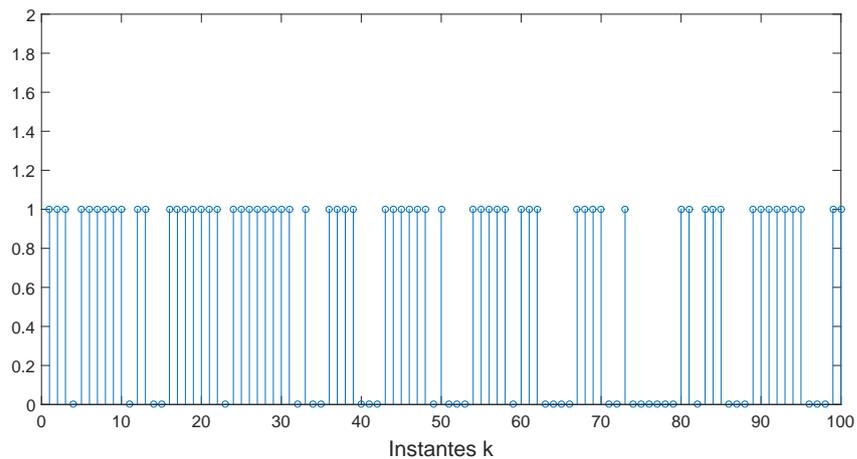


Figura V.2 – Comportamento para $P_{cc} = 0,8$ e $P_{ff} = 0,3$. Zero representa a falha.

V.4 Comportamento dos sinais de Ruído

Os ruídos utilizados nos testes são de dois tipos, sendo o primeiro um ruído senoidal com frequência igual à frequência de ressonância do sistema dinâmico do modelo do carro e o segundo o ruído é o ruído branco gaussiano, do termo em inglês *white Gaussian noise*.

O primeiro ruído é uma senoide com amplitude de 0,3 e uma frequência de 0,6 rad/s. A Fig. V.3 abaixo é uma representação dessa curva.

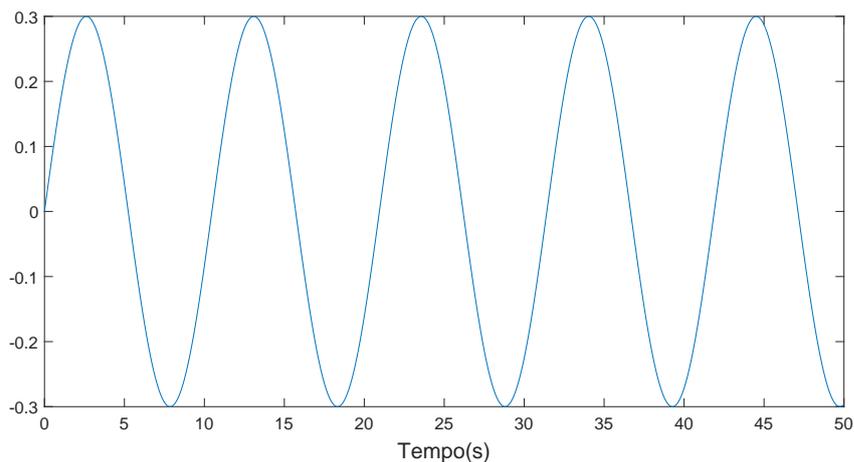


Figura V.3 – Comportamento do ruído senoidal.

A escolha de ruídos senoidais vem do fato de que estes são os ruídos de pior caso para a norma H_∞ em um sistema determinístico. O segundo é um ruído branco gaussiano com variância igual $\sigma = 0,3$ e média igual $\mu = 0$, esse valores foram escolhidos para a curva ter o mesmo valor de pico da senoide.

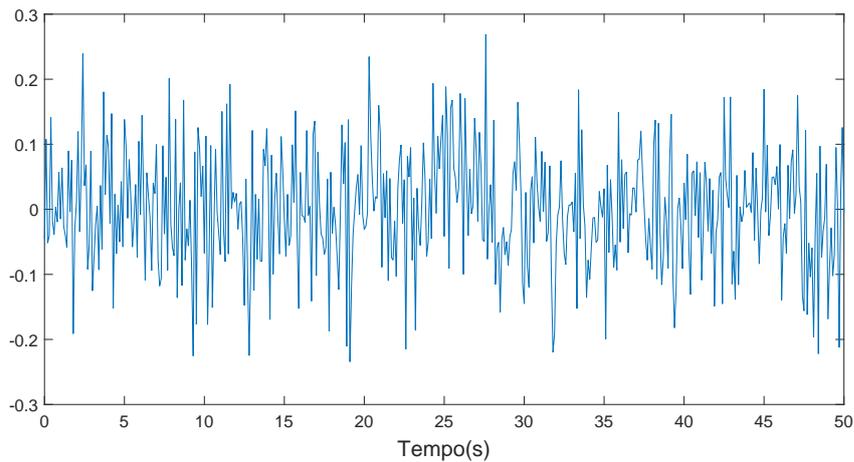


Figura V.4 – Comportamento ruído gaussiano branco.

Esse ruído apresentado na Figura V.4 é normalmente utilizado para descrever o comportamento do ruído aditivo na transmissão de informações por redes.

V.5 Comportamento de parâmetro para o caso politópico

Para o caso politópico vamos considerar que o parâmetro c_f sofrerá variação instantânea de seus valores de acordo com uma senoide. Esse comportamento senoidal tem por objetivo simular a variação sofrida por esse parâmetro durante o trajeto. A amplitude de variação do parâmetro será de 40% de seu valor nominal, sendo esses valores [93296, 7978 217692, 5282] e a frequência será de 0,5 rad/s. O comportamento dessa curva é mostrado na imagem da Figura V.5,

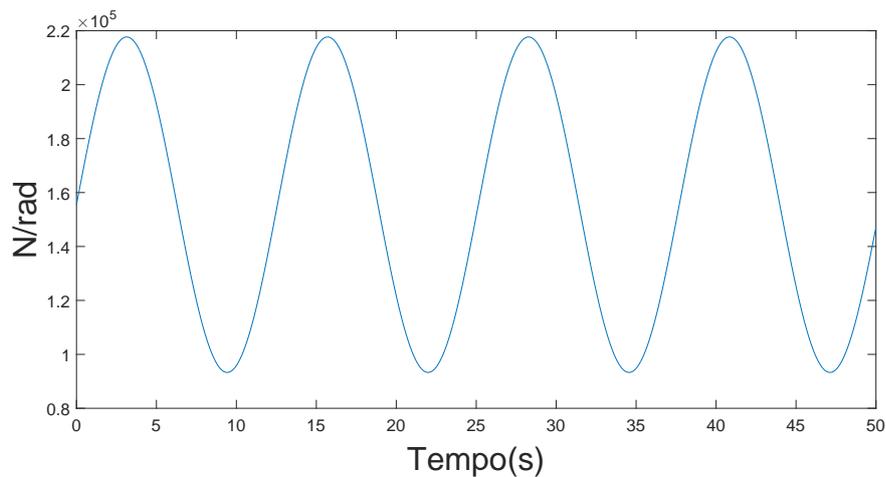


Figura V.5 – Comportamento da variação do parâmetro c_f .

V.6 Obtenção do número de instantes k de atraso

Para que a trajetória dos veículos seguidores não sejam somente um *sobre-amento* dos movimentos do carro líder e sim executem o mesmo trajeto que o líder é necessária a adição de atraso nas ações dos carros seguidores de acordo com o que foi exposto na Seção III.10.

Consideramos que cada carro tem um comprimento de 4 m e desejamos que a separação entre os carros seja de 2 m, portanto a distância entre os centros de massa dos carros é igual a 6 m. A Figura V.6 mostra o esquema deste raciocínio.

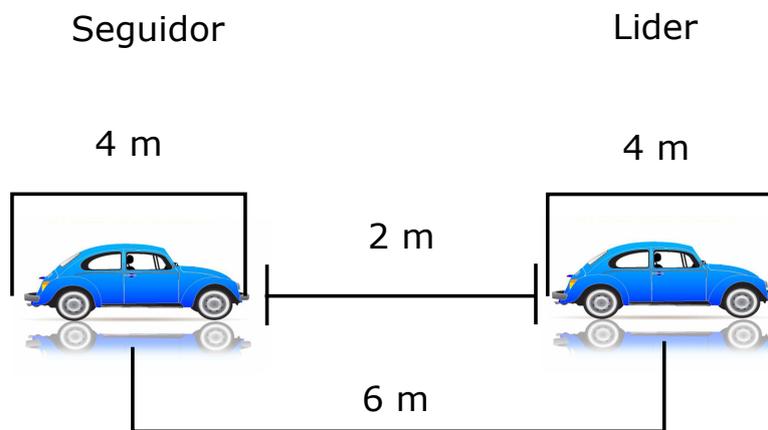


Figura V.6 – Esquema do comboio de carros

Dado que a velocidade $v_x = 15\text{m/s}$ é constante, e o tempo de amostragem é $T = 0,04\text{s}$, podemos calcular que o número de constantes de tempo necessários para o atuador ser acionado no tempo correto a fim de manter o mesmo trajeto traçado pelo líder é igual a 10 períodos de amostragem.

Com o número de instantes de amostragem necessários, podemos estender o sistema, segundo o procedimento mostrado na Seção III.10. Um exemplo do sistema estendido para o caso da abordagem utilizando o controlador de ordem completa para o caso *Zero* é apresentado na Seção IV.3.

V.7 Considerações Finais

Esse capítulo tem como principal objetivo apresentar os parâmetros e as configurações e as devidas considerações feitas durante a implementação das simulações de todas as abordagens propostas. Todas essas considerações são importantes porque com essas considerações obtivemos os resultados apresentados no Capítulo VI.

CAPÍTULO VI

Resultados

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos com todas as abordagens apresentadas no Capítulo IV de acordo com as considerações feitas no Capítulo V. Este capítulo é dividido em 3 seções sendo a primeira a apresentação dos resultados obtidos com o controlador por realimentação de saída de ordem completa. Essa solução apresenta uma solução ótima para o controle H_∞ sem levar em consideração incertezas paramétricas. Na segunda seção são apresentados os resultados obtidos com a abordagem estruturada filtro/controlador de realimentação de estado, essa solução introduz uma estrutura que faz com que o resultado perca a otimalidade, entretanto, permite tratar o problema de robustez a incertezas paramétricas e por fim os resultados obtidos para as abordagens com adição de atraso fixo, o papel da adição de atraso é transformar as soluções obtidas de uma situação em *sombra* para o seguimento de trajetória mais preciso.

VI.1 Resultados para o controlador dinâmico de saída de ordem completa

Nesta seção, apresentaremos os resultados obtidos para as abordagens com o controlador por realimentação de saída de ordem completa com a abordagem *Zero* e abordagem *Hold*, ambas apresentadas na Seção III.13. Esta seção pode ser dividida em duas partes sendo a primeira a análise do comportamento da norma H_∞ em relação à variação das probabilidades de sucesso e falha de transmissão na rede P_{cc} e P_{ff} , a segunda parte é a análise em simulações temporais para uma situação específica apresentados na Seção V.2 e com adição de ruídos específicos apresentada na Seção V.4 tanto para o problema com um único carro seguidor quanto para quatro carros seguidores.

VI.1.1 Análise da Norma H_∞

A análise do comportamento da norma é importante para observar o quanto a perda de pacote é relevante para os níveis de robustez do sistema com solução proposta implementada. Os gráficos abaixo apresentam o valor da norma H_∞ para as variações de P_{cc} e P_{ff} entre $[0, 1, 0, 9]$. Esse teste foi feito para três velocidades v_x distintas $v_x = 5$ m/s, $v_x = 15$ m/s e $v_x = 25$ m/s. Para todos os três gráficos apresentados nessa seção a superfície em vermelho representa o resultado para a abordagem *Zero* e a superfície em azul representa o resultado para a abordagem *Hold*. A Fig. VI.1 apresenta o resultado obtido para esse teste com a velocidade no eixo longitudinal $v_x = 5$ m/s,

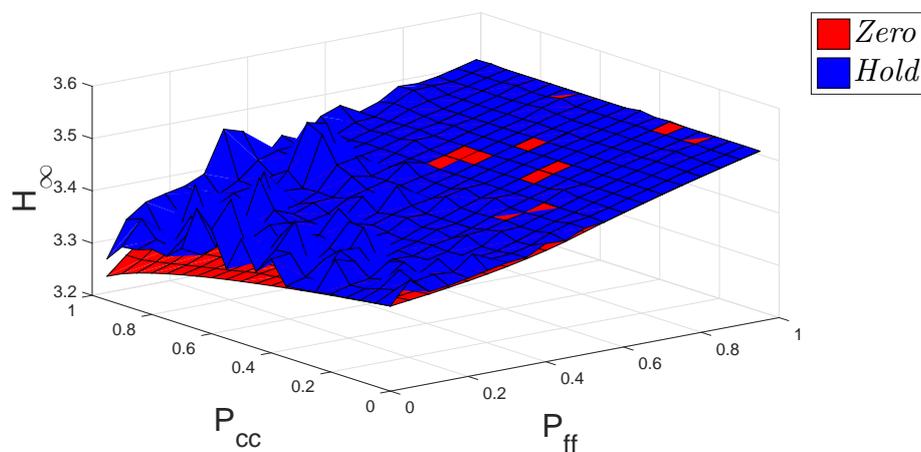


Figura VI.1 – Norma H_∞ em relação P_{cc} e P_{ff} com $v_x = 5$ m/s.

Olhando atentamente para a escala do gráfico VI.1 podemos constatar que a variação dos valores da norma está no intervalo de $[3, 25, 3, 55]$. Podemos considerar que não existe uma variação real para esse caso, esse resultado é esperado porque o sistema para essa velocidade tem uma dinâmica lenta e por isso a perda de pacote tem pouca influência na variação da norma H_∞ . Outro ponto interessante é que não existe diferença entre a abordagem *Zero* e *Hold*, a diferença apresentada no gráfico é devida à imprecisão numérica do solver.

O gráfico da Figura VI.2 mostra os resultados obtidos para o mesmo teste, agora com velocidade longitudinal $v_x = 15$ m/s.

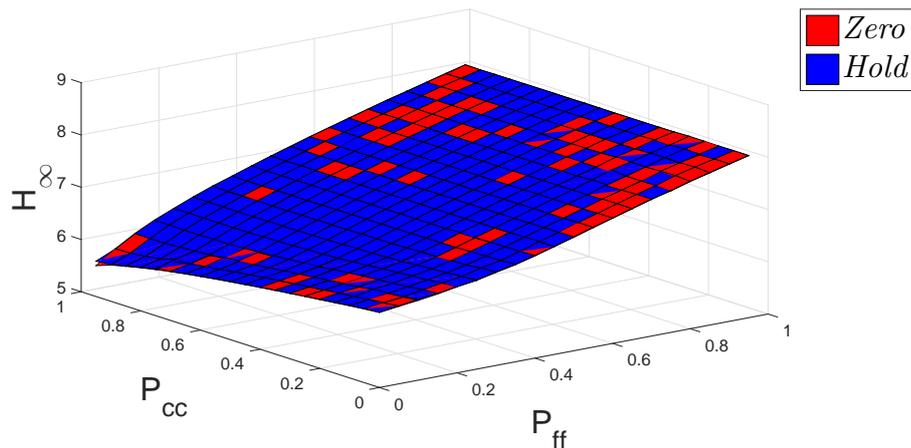


Figura VI.2 – Norma H_{∞} em relação P_{cc} e P_{ff} com $v_x = 15$ m/s.

Fazendo a mesma observação feita no primeiro gráfico para a Fig.VI.2, podemos notar que a faixa de variação para esse caso é maior $[5, 5 \ 8, 5]$, isso ocorre por que a dinâmica do sistema é mais rápida se comparada com a dinâmica do primeiro caso. Outra análise é que, diferentemente do primeiro gráfico, no gráfico apresentado na FiguraVI.2 a superfície é homogênea, isso ocorre por que a variação apresentada em VI.1 é pequena e a imprecisão numérica do solver é mais evidente do que para o gráfico apresentado em VI.2. Novamente, os valores e comportamento dos gráficos para a abordagem *Zero* e *Hold* são praticamente iguais, a pequena discrepância apresentada é causada por imprecisão numérica do *solver*.

E para finalizar essa etapa de análise da norma H_{∞} , apresentamos o gráfico do mesmo teste para a velocidade no eixo longitudinal $v_x = 25$ m/s na Figura VI.3, com o intuito de demonstrar a relevância da perda de pacote para velocidades mais altas.

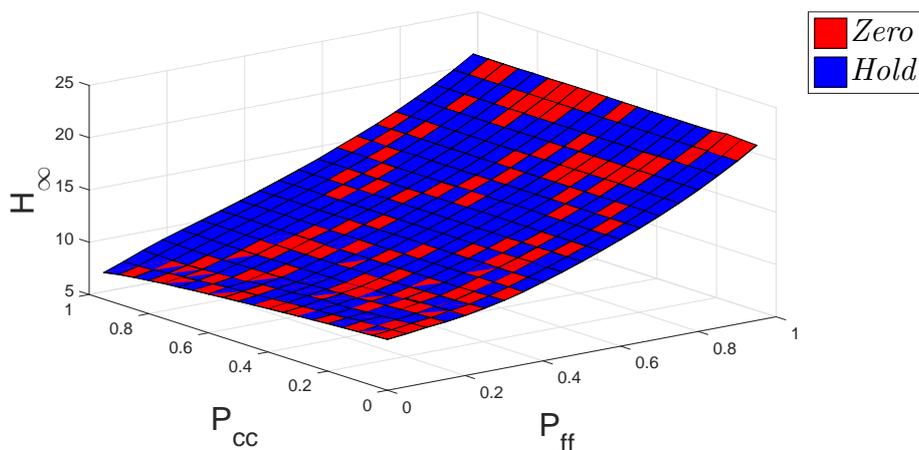


Figura VI.3 – Norma H_{∞} em relação P_{cc} e P_{ff} com $v_x = 25$ m/s.

As considerações feitas para o gráfico da Fig. VI.3 são as mesmas do que para o VI.2, a única diferença é a faixa de variação da norma, que agora tem a faixa de $[5, 5 \ 22]$.

Esse resultado prova que a relevância da perda de pacote é maior com o aumento da velocidade longitudinal como explicamos na Seção III.4. Ele também indica a necessidade de se considerar a perda de pacote para o caso que está sendo estudado no presente trabalho.

VI.1.2 Análise de Sinais

A análise feita nesse seção é em relação ao controlador por realimentação de saída de ordem completa em um teste para a situação específica conforme detalhado na Seção V.2 para ruídos apresentados na Seção V.4. Foram feitas simulações temporais para $v_x = 5$ m/s e $v_x = 15$ m/s. Por se tratar de uma simulação temporal com elementos estocásticos, para termos resultados conclusivos fizemos simulações de Monte Carlo com 25,000 realizações para obtenção dos gráficos. Para todos os gráficos apresentados nesta subseção, as curvas em azul representam os resultados para a abordagem *Hold*, as curvas em vermelho representam os resultados para a abordagem *Zero* e as curvas em ciano representam o controlador por realimentação de saída H_∞ clássico, esse controlador foi adicionado para efeitos de comparação com abordagens convencionais que não consideram a perda de pacote.

VI.1.2.1 Análise de Sinais com Ruído Senoidal

Os gráficos a seguir representam os resultados desses testes com para $v_x = 5$ m/s com o ruído senoidal da Figura V.3.

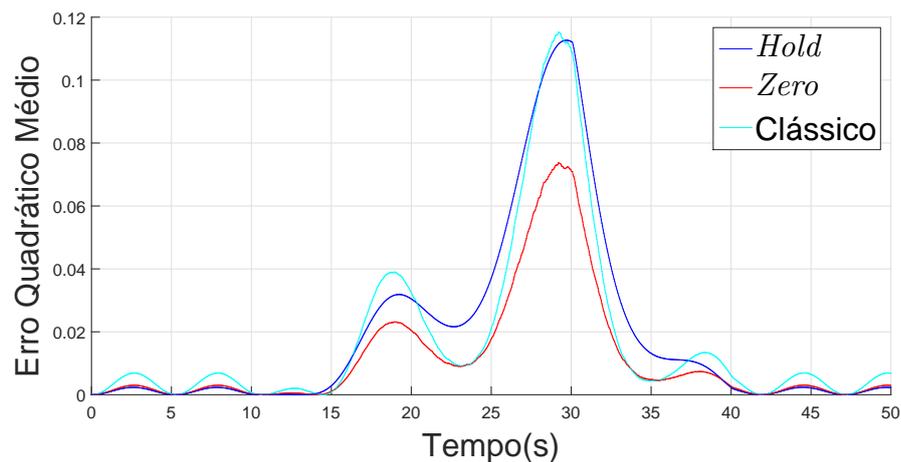
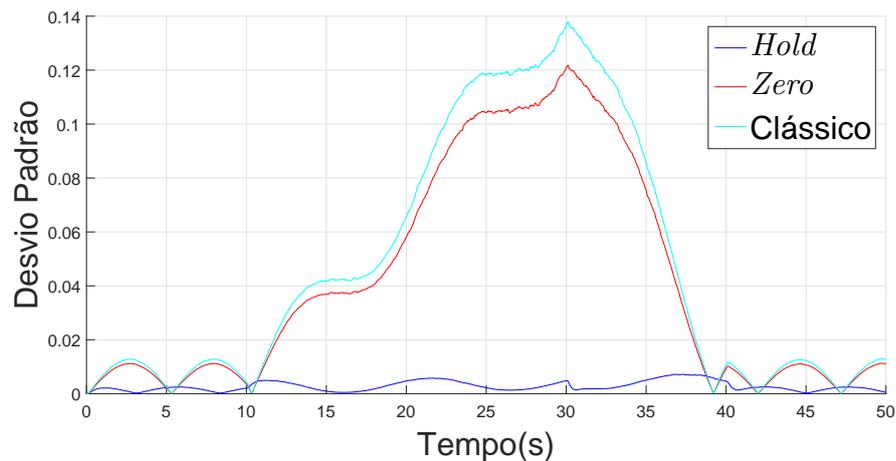


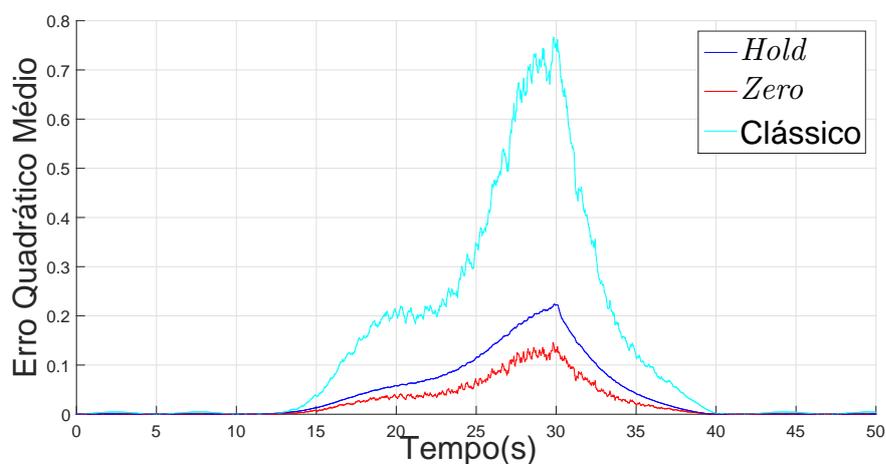
Figura VI.4 – Erro Quadrático Médio para v_y

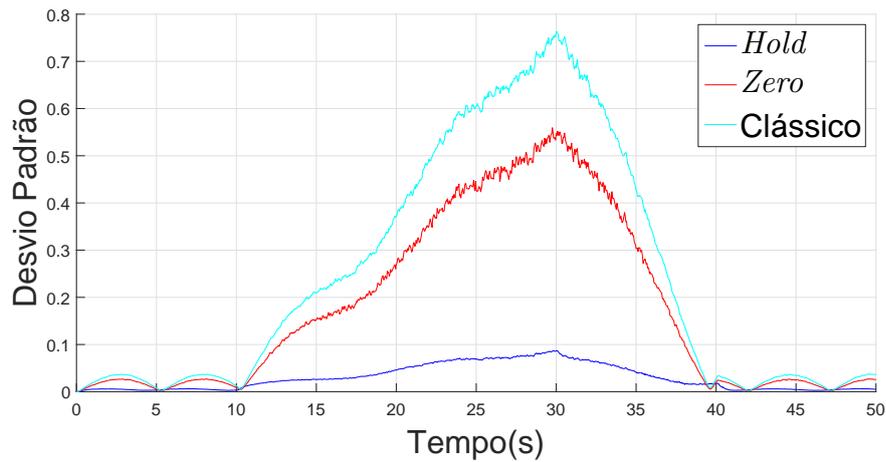
Figura VI.5 – Desvio Padrão para v_y

É possível observar que para a $v_x = 5$ m/s a discrepância entre as abordagens no gráfico VI.4 não é grande, mas a abordagem *Zero* tem desempenho superior visto que tem valores menores durante toda a simulação, e a abordagem *Hold* tem um desempenho muito parecido com a abordagem Clássica.

Por outro lado, a diferença do desvio padrão é bem marcada e mostra que o controlador por realimentação de saída de ordem completa markoviano que utiliza a abordagem *Hold* apresenta um desempenho superior às outras duas abordagens. Com esse resultado podemos dizer que a abordagem *Hold* é mais confiável que as outras pois após 25,000 realizações o desvio padrão dos resultados é menor quando comparado com as outras duas abordagens.

Os gráfico abaixo traz resultados semelhantes somente modificando o valor da velocidade longitudinal, utilizando $v_x = 15$ m/s.

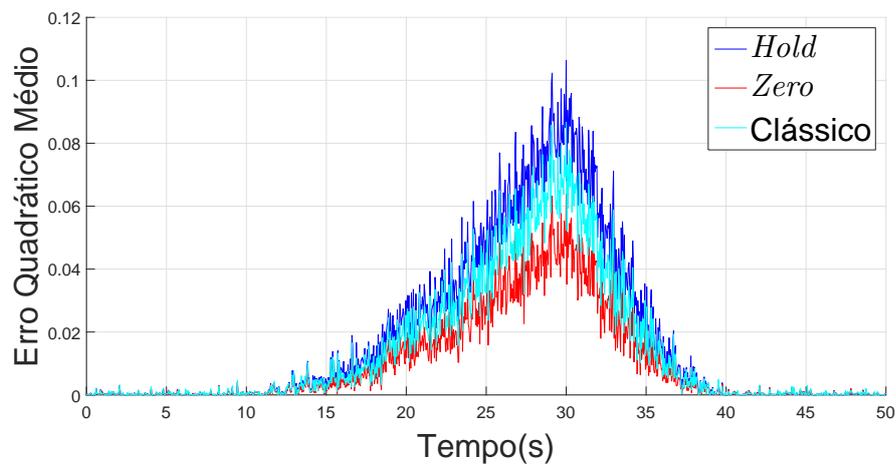
Figura VI.6 – Erro Quadrático Médio para v_y

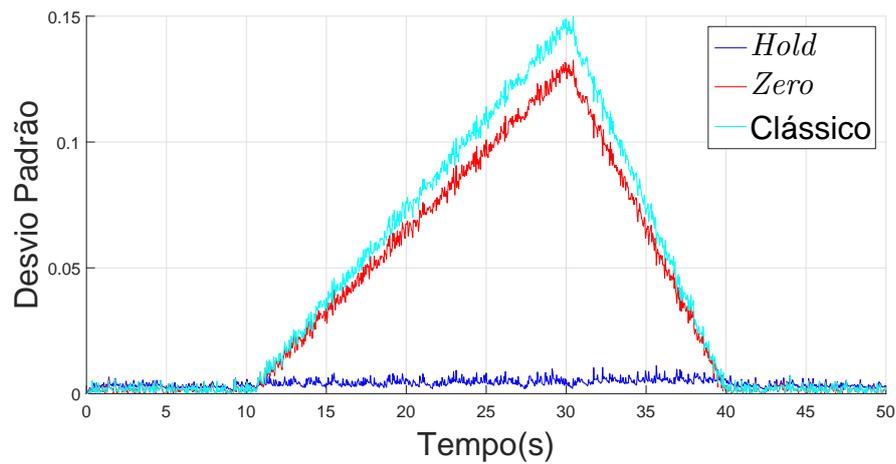
Figura VI.7 – Desvio Padrão para v_y

Com o aumento da velocidade fica claro que os controladores markovianos são superiores ao controlador clássico, para os gráficos com $v_x = 5$ m/s os valores de Erro Quadrático Médio praticamente não possuíam distinção, mas para valor de 15 m/s já é possível observar a diferença na Figura VI.7. Observando os gráficos de desvio padrão podemos observar que os valores de todas as abordagens aumentaram, mas a abordagem *Hold* possui uma menor sensibilidade ao aumento do valor de v_x .

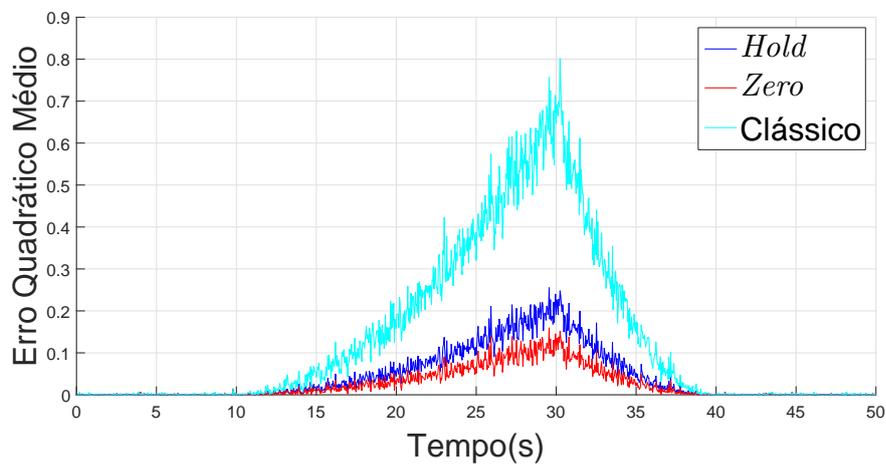
VI.1.2.2 Análise de Sinais com Ruído Branco Gaussiano

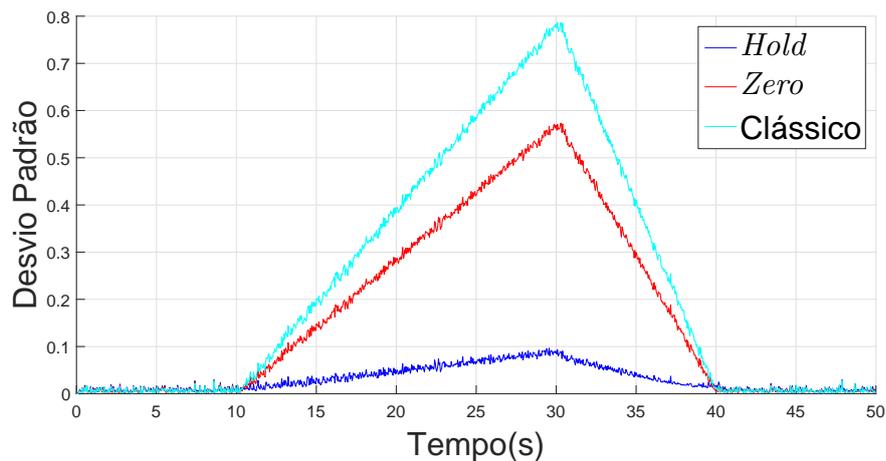
Agora mostramos os resultados obtidos alterando o tipo de ruído aplicado para um ruído branco gaussiano. O esquema de cores se mantém. O gráfico abaixo representa os resultados obtidos para a velocidade no longitudinal $v_x = 5$ m/s.

Figura VI.8 – Erro Quadrático Médio para v_y

Figura VI.9 – Desvio Padrão para v_y

Os resultados apresentados nas Figuras VI.8 e VI.9 tem um comportamento semelhante os apresentado para o ruído senoidal, sendo a curva que representa a abordagem *Zero* obtendo resultados ligeiramente superiores no critério de média quadrática e a abordagem *Hold* mostrando resultados superiores no critério de desvio padrão. Os resultados tem valores ligeiramente menores, isso ocorre por que esse tipo de ruído exerce menor influência na dinâmica do sistema se comparado com o ruído senoidal. Mostrando os gráficos para a velocidade $v_x = 15$ m/s.

Figura VI.10 – Erro Quadrático Médio para v_y

Figura VI.11 – Desvio Padrão para v_y

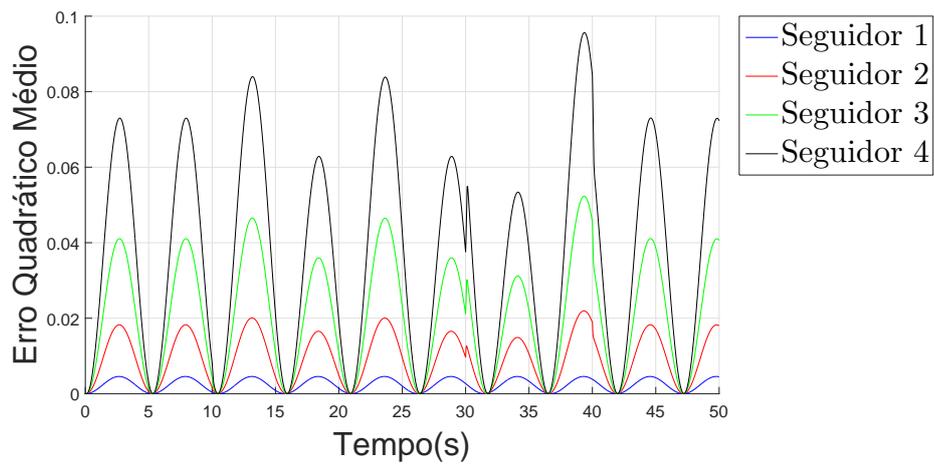
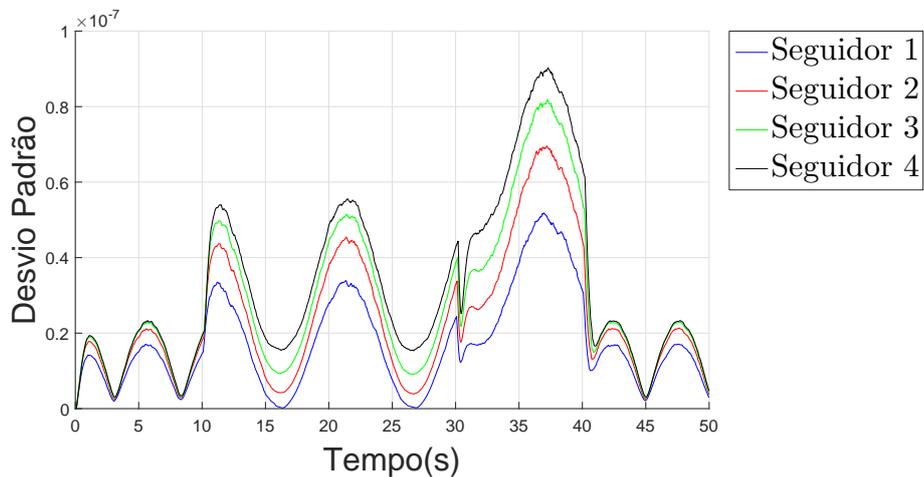
Novamente, os gráficos VI.10 e VI.11 possuem o mesmo comportamento do caso com o ruído senoidal, a única diferença é que os valores são menores.

Esses testes com o ruído branco senoidal mostram que para esses ruídos específicos, a abordagem *Hold* é mais confiável pois possui um valor de desvio padrão consideravelmente menor se comparada com as outras duas abordagens, mesmo tendo valores de Erro Quadrático Médio iguais ao clássico quando a velocidade no eixo longitudinal é baixa.

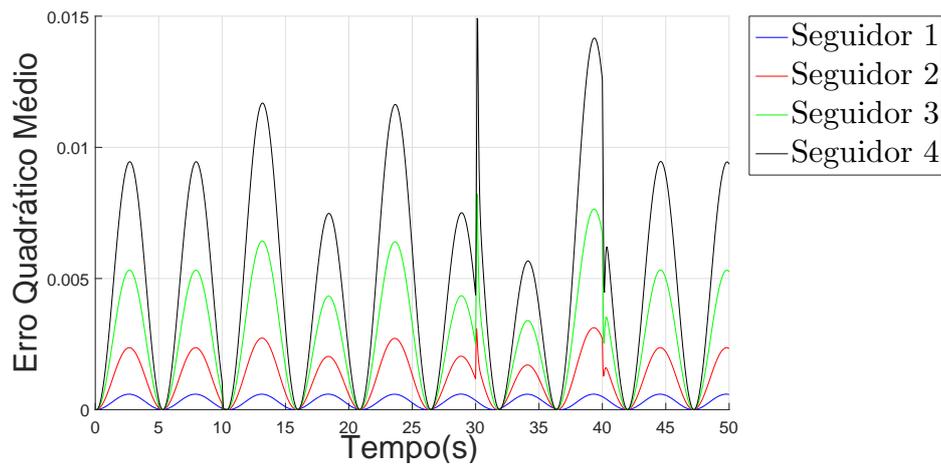
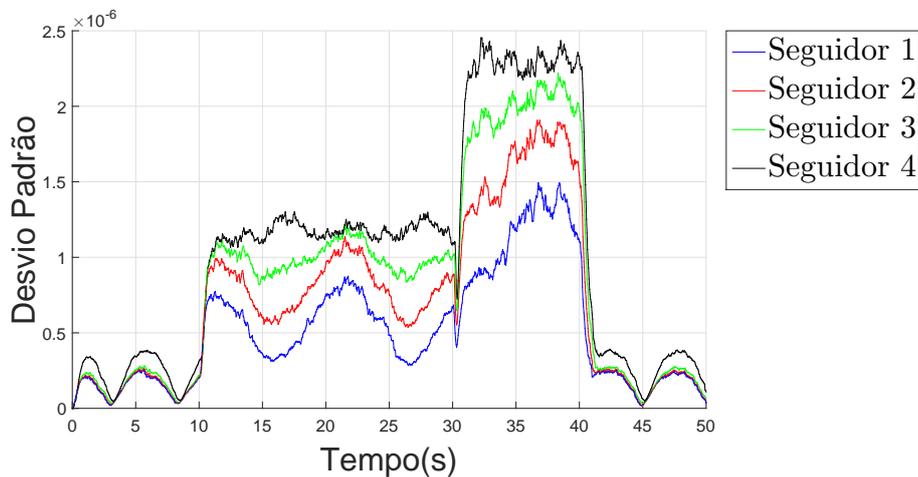
VI.1.3 Análise de Sinais com 5 carros

Como o controlador por realimentação de saída de ordem completa com a abordagem *Hold* mostrou desempenho superior no critério de desvio padrão e desempenho igual ou superior no critério de Erro Quadrático Médio, utilizaremos somente ele para os testes com um número maior de carros. Nesse teste utilizaremos 5 carros sendo o primeiro deles o veículo líder e os outros seguidores.

Os testes executados são os mesmos testes feitos para o caso com um único carro, a seguir mostraremos os gráficos de Erro Quadrático Médio em relação ao primeiro, ou erro quadrático médio acumulado, e erro quadrático médio em relação ao carro da frente, respectivamente. Para os valores de $v_x = 5$ m/s.

Figura VI.12 – Erro Quadrático médio para v_y Figura VI.13 – Desvio Padrão para v_y

Como dissemos anteriormente, o gráfico da Fig.VI.12 representa o erro quadrático médio acumulado em relação ao carro líder, é possível ver que a cada carro o valor vai aumentando, mas é importante observar a escala do gráfico na casa de 0.1 m/s. Outra informação importante é que a cada carro o desvio padrão, apresentado na Fig. VI.13, também aumenta, mas novamente é importante observar a escala do gráfico na casa de 10^{-7} m/s, portanto podemos considerar esse aumento praticamente inexistente. Mostramos agora os resultados obtidos para $v_x = 15$ m/s.

Figura VI.14 – Erro Quadrático médio para v_y Figura VI.15 – Desvio Padrão para v_y

As duas principais considerações a serem feitas após a observação desses gráficos é que o controlador markoviano utilizando a abordagem *Hold* é pouco sensível a variação em v_x mesmo com muito carros, a outra consideração é que o erro quadrático médio acumulado cresce a medida que a informação é passada para carros mais distantes na fila. Mas o mais importante é que o erro quadrático médio em relação ao carro que está à sua frente se mantêm constante, o que era esperado.

VI.2 Solução Estruturada Filtro/Controlador

Nessa seção apresentamos os resultados referentes a abordagem que utiliza a estrutura filtro/controlador por realimentação de estados. Essa seção é dividida em quatro subseções, a primeira apresenta a análise do valor da norma do resíduo da série de Taylor. A segunda é a análise da norma H_∞ comparando a solução nominal, solução do controlador por realimentação de saída de ordem completa apresentada na Seção IV.2.1, e a

solução estruturada que considera incerteza paramétrica, solução apresentada em IV.2.2. A terceira seção apresenta a análise do limitante superior da norma comparando a solução com o controlador por realimentação de saída de ordem completa e a solução estruturada filtro/controlador por realimentação de estado. A quarta seção apresenta os resultados da análise de sinais com os parâmetros expostos em V.

VI.2.1 Análise da Norma do Resíduo da Serie de Taylor

Como explicado na Seção III.8.1, a análise de norma do resíduo é de suma importância pelo fato de determinar se o número de termos na série de Taylor foi suficiente para reduzir a norma do resíduo e assim garantir a estabilidade do sistema, dado que a norma do resíduo limita o valor da norma do sistema equivalente (IV.13) segundo o Teorema do Pequeno Ganho III.6. Os valores do resíduo foram obtidos segundo os parâmetros do polítopo exposto em V.5. No gráfico da Fig. VI.16 é apresentada a variação do valor da norma é relacionada com a quantidade de termos na séries de Taylor l .

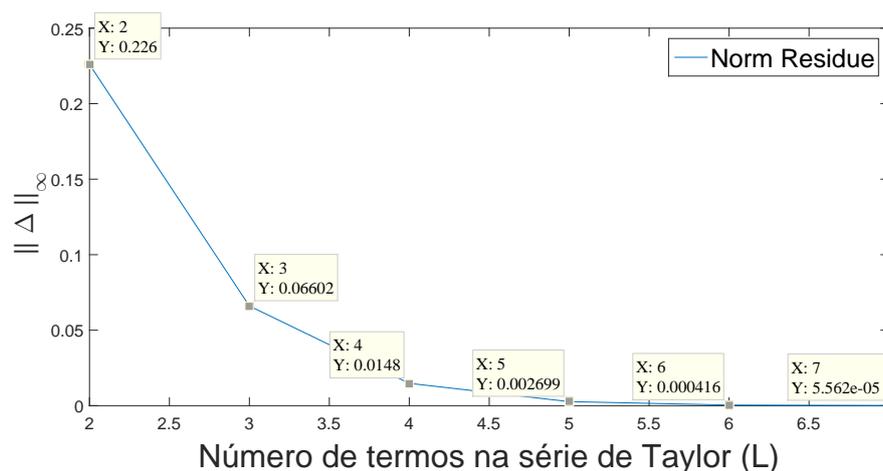


Figura VI.16 – Comportamento da norma H_∞ do resíduo da Série de Taylor.

É possível observar que o valor da norma converge rapidamente para valores próximos de zero, isso significa que o para $l = 7$ a norma do sistema equivalente (IV.13) é limitada ao valor de $1,7979 \times 10^4$.

VI.2.2 Análise da Norma H_∞

Nessa subseção exibimos a comparação do comportamento da norma H_∞ da solução estruturada filtro/controlador da Seção IV.2.2 com o controlador por realimentação de saída de ordem completa apresentado na Seção III.5 para a variação dos valores de probabilidade da matriz de transição P_{cc} e P_{ff} .

Nesse gráfico a norma é calculada utilizando o sistema nominal apresentado na Seção III.2, portanto o gráfico do controlador por realimentação de saída de ordem

completa é o mesmo da Fig. VI.2. Os gráficos que representam a abordagem estruturada são o cálculo da norma do sistema equivalente com o sistema nominal da planta, mais filtro e controlador de realimentação de estado.

O objetivo desse gráfico é observar decréscimo de desempenho, isto é, o aumento da norma, quando utilizamos a solução estruturada. Outro objetivo é observar os efeitos da utilização de diferentes valores de l .

A superfície em vermelho representa o controlador por realimentação de saída de ordem completa, a superfície em azul é a solução estruturada filtro/controlador usando $l = 2$ no processo de discretização, a superfície em verde é a solução estruturada filtro/controlador usando $l = 3$ no processo de discretização, a superfície em ciano é a solução estruturada filtro/controlador usando $l = 4$ e a superfície em amarelo é a solução estruturada filtro controlador usando $l = 7$ no processo de discretização. O gráfico da Fig. VI.17 é exposto a seguir,

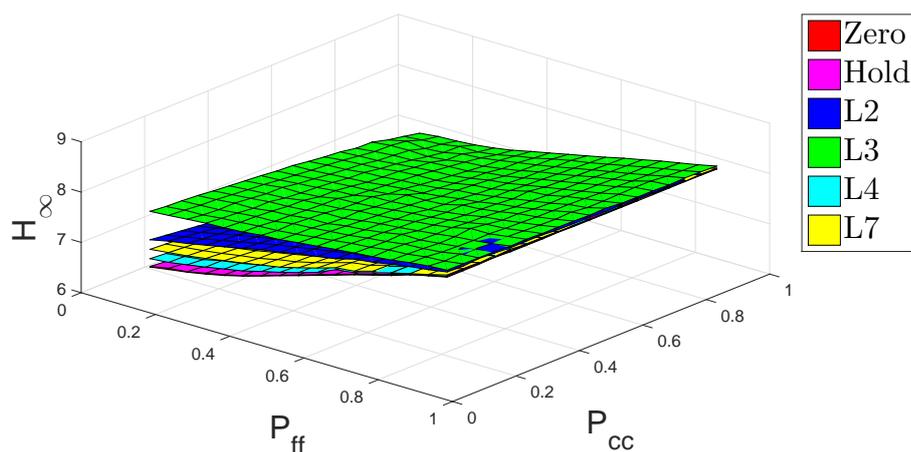


Figura VI.17 – Comportamento da norma H_{∞} .

A primeira informação que pode ser extraída desse gráfico é que para situações onde não existe variação paramétrica o controlador por realimentação de saída de ordem completa tem desempenho superior, o que é o resultado esperado, porque o controlador de ordem completa é uma solução otimizada para esse sistema específico, já a solução estruturada filtro/controlador é uma solução mais adequada para o sistema com incertezas paramétricas, fazendo dela uma solução sub-ótima para o sistema nominal. Outra informação que podemos extrair desse gráfico é que a variação de l não é sempre inversamente proporcional ao valor da norma, observe que para $l = 4$ a norma é ligeiramente menor que a norma para $l = 7$. Isso não significa que o sistema equivalente que possui menor norma é aquela que o representa com maior fidelidade o sistema nominal.

VI.2.3 Análise do Limitante Superior

Nessa subseção, apresentamos os resultados da comparação do limitante superior da norma H_∞ para o controlador por realimentação de saída de ordem completa e a abordagem estruturada filtro e controlador com parâmetro de discretização politópica $l = 7$.

O limitante superior é calculado da seguinte maneira, ao invés de utilizarmos o sistema nominal da planta para o cálculo da norma H_∞ , utilizamos o sistema politópico para o cálculo da função objetivo do programa de otimização. O resultado não é a norma e sim um limitante superior, que é um valor acima do valor real da norma. Com a análise desse gráfico observamos se existe ganho de desempenho para situações onde o sistema possui incerteza paramétrica.

Uma característica dessa solução que deve ser salientada é que, caso exista a necessidade de se utilizar uma Série de Taylor com muitos termos, temos a criação de muitos vértices quando essa Série de Taylor é homogenizada. Esse grande número de vértices pode causar o aumento do limitante superior ou até mesmo tornar o problema convexo infactível.

A superfície ciano representa o limitante superior da solução estruturada filtro/controlador e a superfície verde representa o controlador por realimentação de saída de ordem completa. O gráfico da análise do limitante superior é mostrado na figura Fig. VI.18.

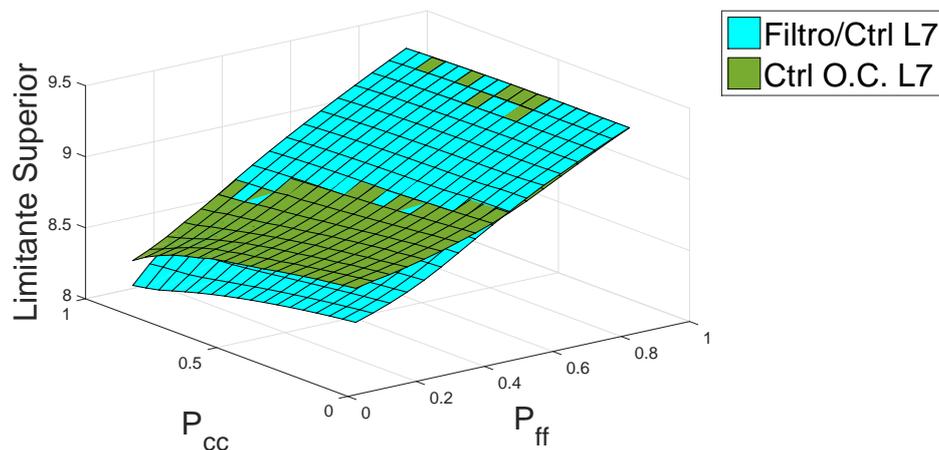


Figura VI.18 – Comportamento do limitante superior.

Observando o gráfico da Fig. VI.18 é possível verificar que existem soluções para todas as combinações P_{cc} e P_{ff} . A informação mais importante é que para valores de $P_{ff} < 0,3$ a solução estruturada tem desempenho superior, e para $P_{ff} > 0,3$ os valores são bem próximos. A região onde a solução estruturada apresenta desempenho superior, os valores de *packet loss rate* estão entre aproximadamente $0\% < PLR < 25\%$, esses valores de PLR são os valores mais próximos de valores encontrados em redes reais.

VI.2.4 Análise de Sinais

Da mesma maneira que fizemos para a primeira abordagem, para finalizar as análises faremos a análise temporal para condições específicas apresentadas no Capítulo V, nesses gráficos faremos a comparação entre o controlador por realimentação de saída de ordem completa e a solução estruturada. O primeiro gráfico apresentado na Fig. VI.19 representa o erro quadrático médio e o gráfico da Fig. VI.20 representa o desvio padrão. Ambos os gráficos foram obtidos por simulações Monte Carlo com 25,000 realizações.

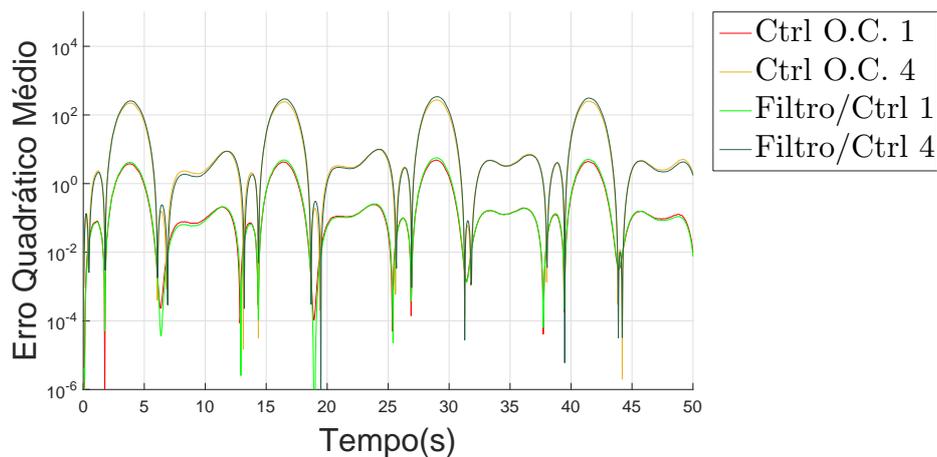


Figura VI.19 – Erro Quadrático médio de v_y .

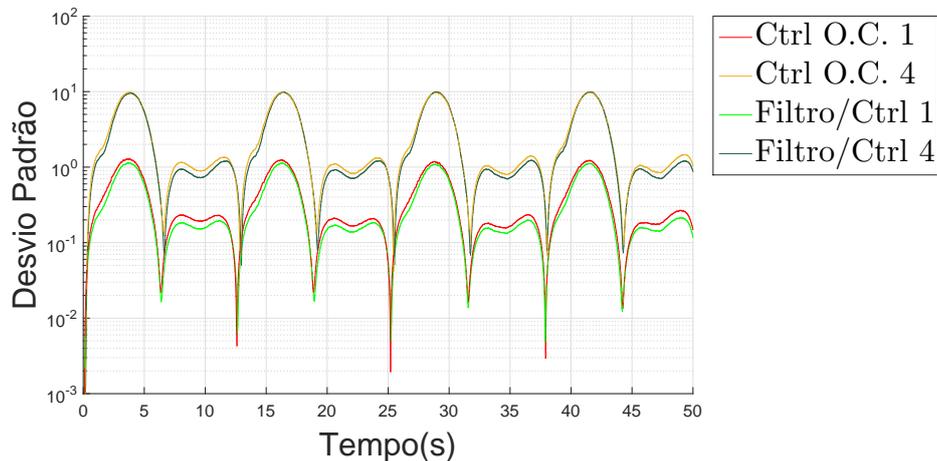


Figura VI.20 – Desvio padrão v_y .

Em ambos os gráficos Fig.VI.19 e Fig.VI.20, as curvas em tons de verde representam a solução estruturada e as curvas em tons de vermelho representam o controlador por realimentação de saída de ordem completa. É importante notar que em ambos os gráficos o eixo y está na escala logarítmica.

No gráfico da Fig. VI.19 que representa o erro quadrático médio, o valor é praticamente o mesmo para ambas abordagens, em alguns momentos a solução estruturada

tendo melhor desempenho e em outros momentos o controlador por realimentação de saída de ordem completa. Mas em nenhuma ocasião essa diferença entre as curvas passa de 0.25.

No gráfico da Fig. VI.20 que representa o desvio padrão, para esse gráfico a solução estruturada tem melhor desempenho, isso é esperado porque ele é projetado para ser uma solução otimizada para o sistema politópico, já o controlador por realimentação de saída de ordem completa é uma solução otimizada para um sistema específico. O desvio padrão é um critério importante como foi explicado na Seção III.3. Quanto menor é o valor do desvio padrão maior é confiabilidade da solução apresentada.

Agora analisamos os dois gráficos em relação aos valores apresentados para o erro quadrático médio acumulado e desvio padrão para o quarto carro na fila. Como na primeira solução, o erro quadrático médio aumenta a medida que o carro se distancia do líder o erro quadrático médio acumulado também aumenta, o aumento também existe nas curvas de desvio padrão, mas são bem menores.

Podemos constatar que a solução estruturada também produz solução robusta factível para o problema de seguimento de carros, sendo uma solução que soluciona o problema da falha da rede, e possíveis incertezas no processo de estimação, linearização e observação de estados são resolvidos usando representações politópicas associadas a teoria de controle em redes.

VI.3 Análise da Sensibilidade ao Atraso Fixo

Nesta seção mostraremos os resultados obtidos quando aplicamos atraso fixo nas soluções apresentadas anteriormente. Essa seção é dividida em duas subseções sendo a primeira a apresentação dos resultados obtidos adicionando atraso as soluções que utilizam o controlador por realimentação de saída de ordem completa. A segunda subseção apresenta os resultados obtidos para a solução estruturada filtro e controlador por realimentação de estados.

VI.3.1 Resultados para controlador por realimentação de saída

Nessa subseção são apresentados os resultados da adição de atraso na solução do controlador por realimentação de saída de ordem completa. O procedimento de adição de atraso em um sistema dinâmico é explicado na Seção III.10. O número de instantes de atraso h foi obtido segundo explicado na Seção V.6.

VI.3.1.1 Análise da norma H_∞

O primeiro gráfico mostra o comportamento da norma H_∞ para ambas abordagens de modelagem de falha, *Zero* e *Hold*, quando variamos os valores das probabilidade

$P_{cc} \in [0, 20, 9]$ e $P_{ff} \in [0, 20, 5]$.

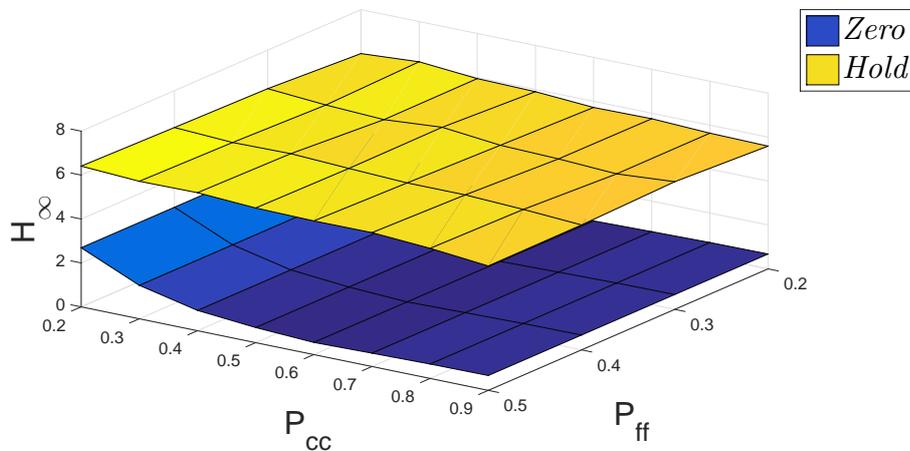


Figura VI.21 – Comportamento da norma H_∞ para o caso com atraso.

Observando os valores obtidos, a primeira informação é de que os valores são menores para ambas as abordagens se comparados com os valores obtidos para o caso sem a adição de atraso, isso ocorre porque o problema de otimização é modificado quando alteramos a estrutura da matriz C_z , mesmo a extensão não alterando o valor dos autovalores, esse fenômeno é explicado com maiores detalhes no Anexo A. Para o caso com adição de atraso, a abordagem *Zero* tem valores de norma muito menores que a abordagem *Hold* esse fenômeno também é explicado pela alteração da estrutura da matriz de saída C_z .

Para o caso com a adição de atraso a abordagem *Zero* tem valores inferiores aos da abordagem *Hold*. Esse resultado também é efeito das modificações feitas na estrutura da matriz C_z que por consequência alterou a função objetivo do processo de otimização convexa das LMIs.

VI.3.1.2 Análise de Sinais

Como fizemos nas outras seções apresentaremos os resultados para simulação temporal de Monte Carlo com 25,000 realizações. O sinal determinístico utilizado aqui é diferente, agora uma senoide, o tempo da simulação também é outro agora sendo 2,5s, entretanto o ruído se mantém. Essas alterações foram feitas para tornar mais evidente os efeitos da aplicação do atraso dado que $h = 10$ em tempo equivale a 0,4s. O gráfico da Fig. VI.22 representa a comparação entre sinal de referência do carro líder na curva em preto que é a média do erro quadrático para o controlador por realimentação de saída de ordem completa usando a abordagem *Zero* é a curva cheia em vermelho e o desvio padrão da mesma abordagem são as curvas vermelhas tracejadas. O gráfico da Fig. VI.23 segue a mesma organização do primeiro, a única diferença é que os gráficos agora em azul representam a abordagem *Hold*. Essa modificação também tem o intuito de mostrar

o comportamento de maneira mais clara, dado que se o erro quadrático médio fosse mostrado da mesma maneira feita nas seções anteriores desse capítulo não apresentaria os resultados de forma justa.

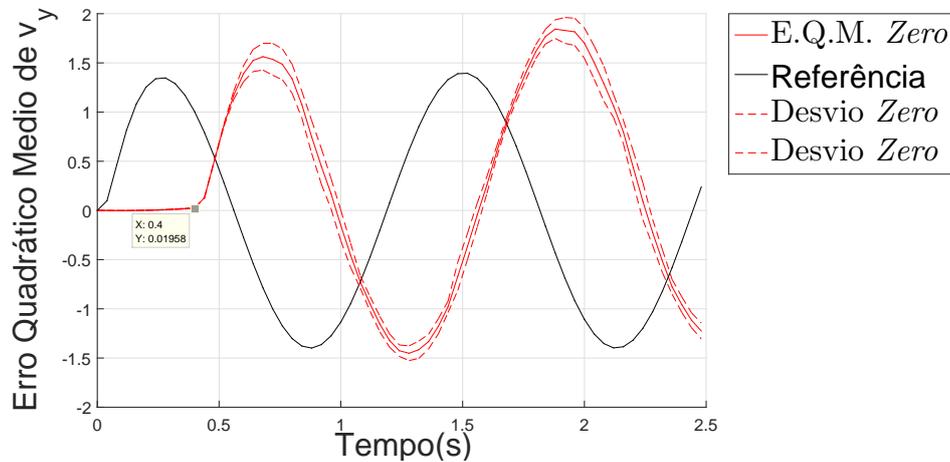


Figura VI.22 – Erro Quadrático Médio e Desvio v_y para abordagem *Zero*.

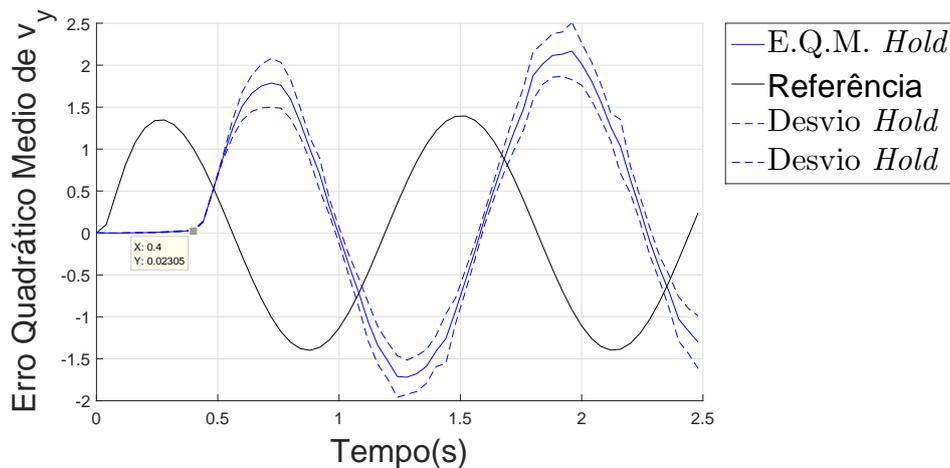


Figura VI.23 – Erro Quadrático Médio e Desvio v_y para abordagem *Hold*.

Observe os valores apontados pelos *datatips*, os picos da referência e o da abordagem *Zero* estão distanciados exatamente por 0,4s, outra situação importante que durante os primeiros 0,4 segundos a curva referente abordagem *Zero* não se altera. Isso significa que o segundo carro só inicia a esterçar no ponto onde o primeiro carro iniciou a esterçar. Então podemos dizer que a solução agora faz o mesmo trajeto que o primeiro carro.

VI.3.2 Resultados para solução estruturada

Nesta subseção mostramos os resultados obtidos para a adição de atraso para a solução estruturada filtro observador de estados e controlador por realimentação de es-

tado. Todos os procedimentos adotados na última seção também foram adotados nessa seção, exceto a quantidade de instantes h , esse parâmetro foi modificado pois o valor de $h = 10$ causa infactibilidade na solução estruturada. Mas apresentaremos os resultados obtidos para $h = 5$ para demonstrar que é possível implementar atraso fixo, mas levando em consideração que a extensão de matrizes para a implementação de atraso aumenta drasticamente a dificuldade de se encontrar soluções factíveis.

VI.3.2.1 Análise da norma H_∞

O gráfico da Fig. VI.24 apresenta o comportamento da norma H_∞ para a variação dos parâmetros de probabilidade de transição P_{cc} e P_{ff} , o processo de discretização foi feito com o número de termos da serie de Taylor $l = 7$. Esse resultado é apresentado logo abaixo.

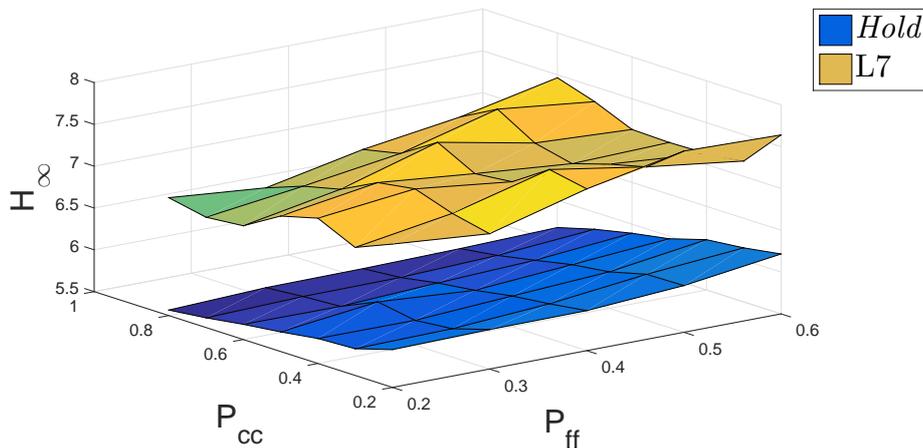


Figura VI.24 – Comportamento da norma H_∞ para o caso com delay.

Como já era esperado, os resultados obtidos com a adição de atraso para esse teste foram semelhantes aos obtidos para o caso sem adição de atraso, isso ocorre porque o controlador por realimentação de saída de ordem completa continua sendo a solução ótima para a situação nominal da planta.

VI.3.2.2 Análise do limitante superior da norma H_∞

O gráfico da Fig. VI.25 apresenta o comportamento do limitante superior da norma H_∞ para a variação dos parâmetros de probabilidade de transição P_{cc} e P_{ff} , o processo de discretização foi feito com o número de termos da serie de Taylor $l = 7$. Esse resultado é apresentado logo abaixo.

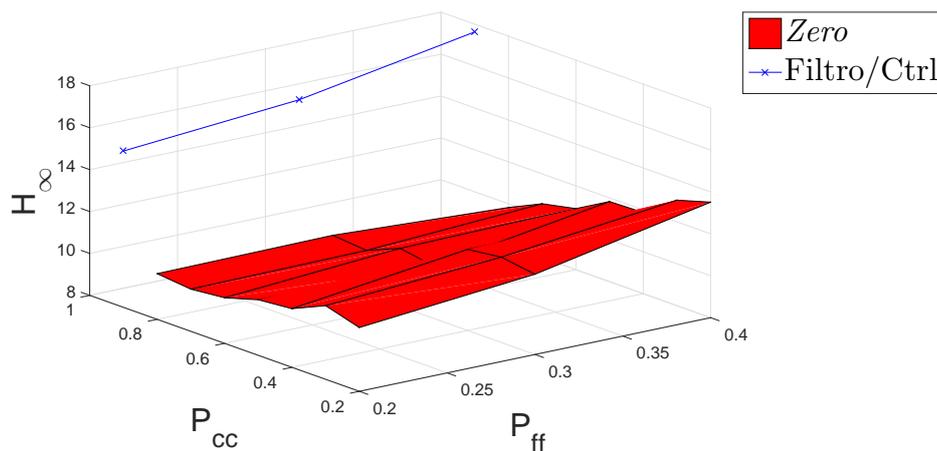


Figura VI.25 – Comportamento do limitante superior da norma H_{∞} para o caso com atraso.

O resultados expostos no gráfico da Fig. VI.25 tem a superfície em vermelho referente ao teste do limitante superior da norma para o controlador por realimentação de saída de ordem completa e uma curva em azul que representam as únicas combinações P_{cc} e P_{ff} factíveis para a solução. Não foi possível obter a superfície, somente uma curva, para solução estruturada, isso ocorreu por que o aumento da dimensão das matrizes associada a adição de restrição dos politopos restringem demasiadamente a função objetivo, tornando a busca por soluções factíveis complexa. Todas as simulações no presente trabalho utilizaram as mesmas opções de precisão, talvez seria possível obter resultados se essas opções forem alteradas, mas isso seria uma comparação injusta.

A interpretação física é que independente dos valores de probabilidade de transição P_{cc} e P_{ff} , o controlador por realimentação de saída de ordem completa será superior, essa afirmação será confirmada no próximo teste. Lembrando que para o caso sem atraso existia uma região na qual a solução estruturada apresentava performance superior, e a simulação feita com as probabilidade P_{cc} e P_{ff} a solução estruturada apresentava melhor desempenho.

VI.3.2.3 Análise de sinais

Da mesma maneira que fizemos para os testes apresentados na Seção VI.3.1.2, a única diferença é o número de instantes de *delay* $h = 5$. O gráfico VI.26 apresenta o resultados das simulações temporais Monte Carlo com 25,000 realizações. A curva preta no gráfico é a referência. A curva em verde é a média do sinal do seguidor para solução estruturada e a curva tracejada verde é o desvio padrão do sinal do seguidor para solução estruturada. A curva em vermelho é a média do sinal do seguidor para solução com controlador por realimentação de saída de ordem completa e a curva tracejada vermelho é o desvio padrão do sinal do seguidor para solução com controlador por realimentação de saída de ordem completa, esse gráfico é mostrado abaixo.

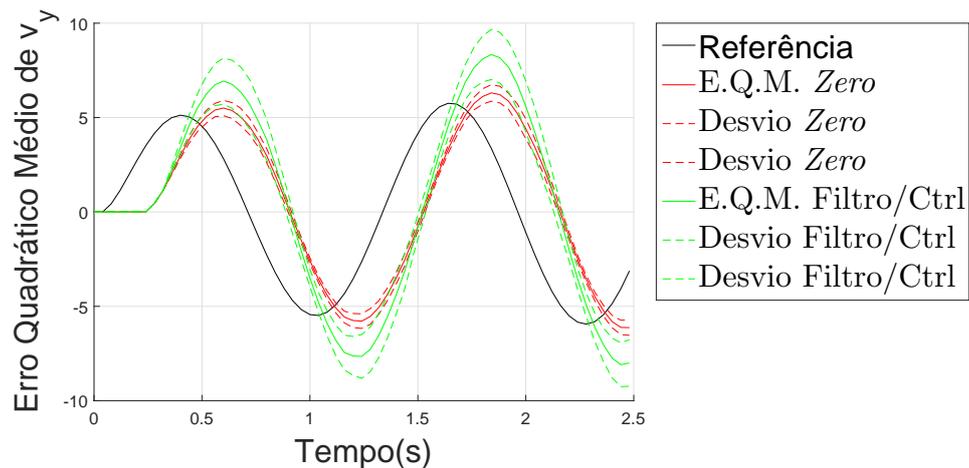


Figura VI.26 – Média e Desvio v_y para abordagem Estruturada.

Analisando as curvas é possível notar que a curva em vermelho, abordagem com o controlador por realimentação de saída, tem comportamento mais próximo da referência e o valor do desvio padrão é inferior ao da curva verde, solução estruturada. Como explicamos na subseção VI.3.2.2 esse resultado era o esperado, porque no teste do limitante superior não foi possível encontrar uma solução factível, isso significa que a solução do controlador por realimentação de saída é superior a solução estruturada nesse caso.

VI.4 Considerações Finais

O objetivo desse capítulo era apresentar e comparar os resultados obtidos para todas as soluções propostas no capítulo IV segundo os parâmetros apresentados em V.

Na Seção VI.1.1 mostramos os resultados obtidos para as soluções propostas na Seção IV.2.1, foram comparados o comportamento da norma de ambas abordagens e não foram encontradas diferenças de desempenho nesse teste. O segundo teste feito foi a simulação no tempo estocásticas para ruídos particulares, apresentados na Seção V.4, e nesse teste o resultado apontou que em relação ao erro quadrático médio a abordagem Zero apresenta pequena vantagem, entretanto para os valores de desvio padrão a abordagem Hold obteve valores notoriamente menores. E no final dessa seção foram apresentados os resultados para a abordagem Hold com 4 carros seguindo um líder, foi constatado que para o nosso experimento o erro quadrático médio acumulado máximo é de 0,015 m/s e o desvio padrão máximo é de $2,5 \times 10^{-6}$ m/s, ambos valores pequenos em relação aos valores de velocidade utilizados, esse é um importante resultado porque esses parâmetros podem ser utilizados para limitar a quantidade máxima de carros na fila.

Na seção VI.2 apresentamos os resultados obtidos para a solução proposta na Seção IV.2.2, com os valores do parâmetro de rigidez em curvas para as rodas dianteiras variando de acordo com a Seção V.5. O primeiro resultado é o comportamento da norma

H_∞ em relação a variação dos valores de probabilidade de sucesso P_{cc} e probabilidade de falha P_{ff} entre primeira solução com a abordagem *Zero* e *Hold* e solução estruturada filtro/controlador para os respectivos valores de $l = 2, 3, 4, 7$. Os resultados mostram que para nosso experimento a primeira solução apresenta valores menores de norma H_∞ . Esse resultado era esperado porque a primeira solução entrega controladores ótimos para um ponto de operação específico. Já a segunda solução perde a condição de otimalidade com a adição de incerteza paramétricas. O segundo resultado é o teste do limitante superior, nesse teste representa o comportamento do limitante superior da norma H_∞ para todos os pontos que pertencem ao sistema politópico, essa comparação entre a primeira solução e a solução estruturada foi observado que para valores de probabilidade de falha menores que $P_{ff} < 0,3$ e para todos os valores de probabilidade de sucesso P_{cc} a solução estruturada obteve melhores resultados, para os demais valores de probabilidade as abordagens mostram praticamente os mesmos valores de limitante superior. E para finalizar a análise da solução estruturada foi feito o teste de simulação temporal para ruídos específicos apresentados na Seção V.4. Comparando os resultados é possível observar que no erro quadrático médio em parte do tempo de simulação a solução estruturada tem melhor desempenho e para o desvio padrão a solução estruturada tem melhor desempenho praticamente durante todo tempo de simulação. Isso ocorre porque a primeira solução é ótima para um ponto específico de operação, mas a solução estruturada é a melhor solução que satisfaz todo o conjunto de pontos de operação.

Na Seção VI.3, foram apresentados os resultados para a adição de atraso fixo, nas duas soluções oferecidas, para a primeira solução o comportamento da norma variando os valores de probabilidade. Os teste foram feitos para as abordagens *Zero* e *Hold* e foi observado que diferentemente do resultado sem adição de atraso as normas das abordagens foram diferentes, isso ocorre porque a função objetivo foi alterada e por isso as abordagens não são mais equivalentes. Fazendo a análise temporal, é possível notar que a abordagem *Zero* tem menor valores de desvio padrão e os valores de pico são bem próximos aos valores de pico da referencia, já a abordagem *Hold* apresenta pior desempenho em ambos os quesitos se comparado com a abordagem *Zero*.

CAPÍTULO VII

Conclusão

No presente trabalho propomos soluções para o problema de seguimento de veículos, sendo esse um problema extensivamente estudado na literatura. Todas as soluções propostas consideram um aspecto importante inerente ao problema de seguimento de veículos: a perda de informação transportada por redes sem fio.

Os primeiros resultados apresentados no Capítulo VI, são a aplicação do controlador de saída de ordem completa, além dela também foram experimentadas duas abordagens de modelagem de falha: a abordagem *Zero* e a abordagem *Hold*, visto que para o caso de controladores não existe resultado fechado para a comparação entre as duas. Além disso, nesse primeiro resultado mostramos a comparação com controlador clássico que não considera a perda de informação e confirmamos o que já era esperado, o desempenho dos controladores projetados com a teoria de controle em rede é superior.

O segundo resultado é o projeto de controladores parametricamente robustos. O processo de adição de incerteza paramétrica nos projetos de controle discretizado é uma tarefa complexa e requer a utilização de diferentes técnicas de discretização. A escolha da técnica e de seus parâmetros é algo que exerce grande influência no desempenho final do controlador obtido. Essa técnica e seus parâmetros são explicados e estudados no presente trabalho. Os resultados obtidos mostram que para situações onde existe variação nos parâmetros essa solução tem melhor desempenho e robustez.

O terceiro resultado obtido é a adição de atraso fixo nas soluções apresentadas no presente trabalho. Essa adição teve como finalidade tornar as soluções mais próximas da realidade dos testes de esforço, porque esses testes são feitos em trajetos predeterminados. Os resultados obtidos mostraram que as soluções com adição de atraso são mais robustas, isso se verifica pela diminuição do valor da norma de todas as abordagens. Esse fenômeno ocorreu porque a estrutura das matrizes de saída foram alteradas, alterando também o problema de otimização. A única desvantagem é o aumento do custo computacional ocasionado pelo aumento das dimensões das matrizes. É importante lembrar que caso os testes sejam realizados em uma área ampla e sem limitações de trajetória não existe a necessidade da adição de atraso, visto que os veículos seguidores farão os mes-

mos movimentos do carro líder instantaneamente.

Com todos os resultados obtidos podemos concluir que a utilização de teoria de controle em rede gera soluções para o problema de seguimento de carro é plausível.

VII.1 Trabalhos futuros

No presente trabalho propomos soluções de controle para o problema de seguimento de carros. Essas soluções foram projetadas e simuladas no ambiente Matlab e Simulink. Esse ambiente é amplamente utilizado no mundo acadêmico, entretanto para cogitarmos a implementação dessas soluções seria necessária a confecção de simulações mais próximas de ambientes reais, como por exemplo o ambiente de simulação GAZEBO associado ao *Robot Operational System* (ROS). Após essa etapa de simulações mais precisas seguiria a implementação real dos controladores.

Bibliografia

ADMINISTRATION, N. H. T. S. et al. National motor vehicle crash causation survey: Report to congress. *National Highway Traffic Safety Administration Technical Report DOT HS*, v. 811, p. 059, 2008.

ASIRT, A. f. S. I. R. T. *Global Road Crash Statistics*. <<http://asirt.org/initiatives/informing-road-users/road-safety-facts/road-crash-statistics>>, note = Accessed: 16-September-2015.

AVAK, B. *Modeling and control of a superimposed steering system*. Tese (Doutorado) — Citeseer, 2004.

BAFFET, G.; CHARARA, A.; LECHNER, D. Estimation of vehicle sideslip, tire force and wheel cornering stiffness. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 17, n. 11, p. 1255–1264, 2009.

BALAKRISHNAN, H. et al. A comparison of mechanisms for improving tcp performance over wireless links. *Networking, IEEE/ACM Transactions on*, IEEE, v. 5, n. 6, p. 756–769, 1997.

BEDOYA, O. G.; FERREIRA, J. V.; NETO, A. de M. Dynamic model of a commercial vehicle for steering control and state estimation.

BRACKSTONE, M.; MCDONALD, M. Car-following: a historical review. *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour*, Elsevier, v. 2, n. 4, p. 181–196, 1999.

BRAGA, M. F. et al. A new procedure for discretization and state feedback control of uncertain linear systems. p. 6397–6402, 2013.

BUEHLER, M.; IAGNEMMA, K.; SINGH, S. *The DARPA urban challenge: autonomous vehicles in city traffic*: springer, 2009. v. 56.

BURCKHARDT, M.; BRUGGER, F.; FAULHABER, A. *Anti-lock brake system*: Google Patents, 1989. US Patent 4,861,118.

CHANDLER, R. E.; HERMAN, R.; MONTROLL, E. W. Traffic dynamics: studies in car following. *Operations research*, Informs, v. 6, n. 2, p. 165–184, 1958.

CHUNG, T.; YI, K. Design and evaluation of side slip angle-based vehicle stability control scheme on a virtual test track. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 14, n. 2, p. 224–234, 2006.

COSTA, O. L.; FRAGOSO, M. D. Stability results for discrete-time linear systems with markovian jumping parameters. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 179, n. 1, p. 154–178, 1993.

- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, M. D.; MARQUES, R. P. *Discrete-time Markov jump linear systems*: Springer Science & Business Media, 2006.
- COSTA, O. L. V.; TUESTA, E. F. Finite horizon quadratic optimal control and a separation principle for markovian jump linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 48, n. 10, p. 1836–1842, 2003.
- DAS, A. K. et al. A vision-based formation control framework. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 18, n. 5, p. 813–825, 2002.
- FENG, X. et al. Stochastic stability properties of jump linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 37, n. 1, p. 38–53, 1992.
- FIORAVANTI, A.; GONÇALVES, A.; GEROMEL, J. Optimal and mode-independent filters for generalised bernoulli jump systems. *International Journal of Systems Science, Taylor & Francis*, v. 46, n. 3, p. 405–417, 2015.
- FIORAVANTI, A. R.; GONÇALVES, A. P.; GEROMEL, J. C. Filter inputs with markovian lossy links: Zero or hold? p. 656–661, 2011.
- FORD, H. *My life and work*: Cosimo, Inc., 2007.
- FRIDMAN, E. *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*: Springer, 2014.
- GARCIA, O.; FERREIRA, J.; NETO, A. M. Design and simulation for path tracking control of a commercial vehicle using mpc. p. 61–66, 2014.
- GAZIS, D. C.; HERMAN, R.; POTTS, R. B. Car-following theory of steady-state traffic flow. *Operations research, INFORMS*, v. 7, n. 4, p. 499–505, 1959.
- GAZIS, D. C.; HERMAN, R.; ROTHERY, R. W. Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow. *Operations research, INFORMS*, v. 9, n. 4, p. 545–567, 1961.
- GEROMEL, J. C.; GONÇALVES, A. P.; FIORAVANTI, A. R. Dynamic output feedback control of discrete-time markov jump linear systems through linear matrix inequalities. *SIAM Journal on Control and Optimization, SIAM*, v. 48, n. 2, p. 573–593, 2009.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. *Controle linear de sistemas dinâmicos*. Editora Blucher, São Paulo, SP, 2011.
- GILBERT, E. N. Capacity of a burst-noise channel. *Bell system technical journal, Wiley Online Library*, v. 39, n. 5, p. 1253–1265, 1960.
- GONÇALVES, A. P.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C. Filtering of discrete-time markov jump linear systems through linear matrix inequalities. *Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE*, v. 54, n. 6, p. 1347–1351, 2009.
- GONÇALVES, A. P.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C. Markov jump linear systems and filtering through network transmitted measurements. *Signal Processing, Elsevier*, v. 90, n. 10, p. 2842–2850, 2010.
- GONCALVES, A. P.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C. Hoo robust and networked control of discrete-time mjls through lmis. *Journal of the Franklin Institute, Elsevier*, v. 349, n. 6, p. 2171–2181, 2012.

- GONÇALVES, A. P. d. C. *Controle dinâmico de saída para sistemas discretos com saltos markovianos*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2009.
- HASSAN, G. M.; YAHYA, K. M. et al. Leader-follower approach using full-state linearization via dynamic feedback. p. 297–305, 2006.
- HESPANHA, J. P.; NAGHSHTABRIZI, P.; XU, Y. A survey of recent results in networked control systems. *PROCEEDINGS-IEEE*, IEEE INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS, v. 95, n. 1, p. 138, 2007.
- HETEL, L.; DAAFOUZ, J.; LUNG, C. Lmi control design for a class of exponential uncertain systems with application to network controlled switched systems. p. 1401–1406, 2007.
- JI, Y. Stability and control of discrete-time jump linear systems. *Control-Theory and Advanced Technology*, v. 7, n. 2, p. 247–270, 1991.
- KEHTARNAVAZ, N.; GRISWOLD, N. C.; LEE, J. S. Visual control of an autonomous vehicle (bart)-the vehicle-following problem. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 40, n. 3, p. 654–662, 1991.
- KOTHARE, M. V.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, Elsevier, v. 32, n. 10, p. 1361–1379, 1996.
- LEON-GARCIA, A. *Probability, statistics, and random processes for electrical engineering*: Pearson/Prentice Hall, 2008.
- LJUNG, L. *System identification*: Springer, 1998.
- MARCONDES, G. *Modelos discretos para análise de ocorrências de erros em redes sem fio*. Tese (Doutorado) — M. Sc. Thesis, Inatel, Brazil, 2005 (in portuguese), 2005.
- NAIDU, D. S. *Optimal control systems*: CRC press, 2002.
- NHTSA, N. H. T. S. A. *Department of Transportation Releases Policy on Automated Vehicle Development*. <<http://www.nhtsa.gov/About+NHTSA/Press+Releases/U.S.+Department+of+Transportation+Releases+Policy+on+Automated+Vehicle+Development>>, note = Accessed: 10-April-2016.
- OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent lyapunov functions: Asymptotically exact lmi conditions. *Linear algebra and its applications*, Elsevier, v. 405, p. 209–228, 2005.
- PETERSEN, U.; RUKGAUER, A.; SCHIEHLEN, W. Lateral control of a convoy vehicle system. *Vehicle System Dynamics*, Taylor & Francis, v. 25, n. S1, p. 519–532, 1996.
- PIPES, L. A. An operational analysis of traffic dynamics. *Journal of applied physics*, AIP Publishing, v. 24, n. 3, p. 274–281, 1953.
- PROJECT, G. S. C. *SelfDriving Car Project website*. <<https://www.google.com/selfdrivingcar/>>, note = Accessed: 10-April-2016.

RAMASWAMY, S.; BALAKRISHNAN, S. Formation control of car-like mobile robots: A Lyapunov function based approach. p. 657–662, 2008.

REIF, K. Electronic stability program. Springer, p. 194–201, 2014.

RUSSO, M.; RUSSO, R.; VOLPE, A. Car parameters identification by handling manoeuvres. *Vehicle System Dynamics*, Taylor & Francis, v. 34, n. 6, p. 423–436, 2000.

SCHENATO, L. To zero or to hold control inputs with lossy links? *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 54, n. 5, p. 1093–1099, 2009.

SEILER, P.; SENGUPTA, R. Analysis of communication losses in vehicle control problems. v. 2, p. 1491–1496, 2001.

SEILER, P.; SENGUPTA, R. An H_∞ approach to networked control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 50, n. 3, p. 356–364, 2005.

SHIEH, L. S.; WANG, W.; CHEN, G. Discretization of cascaded continuous-time controllers and uncertain systems. *Circuits, Systems and Signal Processing*, Springer, v. 17, n. 5, p. 591–611, 1998.

SNIDER, J. M. Automatic steering methods for autonomous automobile path tracking. *Robotics Institute, Pittsburgh, PA, Tech. Rep. CMU-RITR-09-08*, 2009.

WADA, N.; SAITO, K.; SAEKI, M. Model predictive control for linear parameter varying systems using parameter dependent Lyapunov function. v. 3, p. iii–133, 2004.

ZHOU, K. et al. *Robust and optimal control*: Prentice hall New Jersey, 1996. v. 40.

Apêndices

APÊNDICE A

Alteração da função objetivo devido à inclusão de atraso fixo

Neste apêndice explicamos a causa da variação dos valores da norma H_∞ quando adicionamos atraso fixo, essa explicação é necessária porque, normalmente, quando utilizamos a técnica de extensão de estados a dinâmica do sistema não se altera, isto é, os autovalores da matriz A não são alterados. Para fazer explicarmos esse fenômeno utilizaremos o seguinte sistema,

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x}(k) &= Ax(k) + Bw(k), \\ z(k) &= Cx(k) + Dw(k), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ são os estados da planta, $w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é a entrada exógena e $z \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

A norma H_∞ pode ser calculada segundo os critérios apresentados na Seção III.4, mas para simplificarmos a explicação utilizaremos a forma que utiliza a função transferência,

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |H(j\omega)| \quad (\text{A.2})$$

onde $H(j\omega)$ é a função transferência e $\omega \in \mathbb{R}$ é a frequência. Lembrando que um sistema na forma A.1 pode ser transformado para forma de função transferência da seguinte maneira

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (\text{A.3})$$

Agora, utilizaremos os estados aumentados desta forma $[x(k)' \ x(k-1)']'$, o sistema aumentado é dado por,

$$A_{aug} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{aug} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{aug} = D \quad (\text{A.4})$$

Agora, para a matriz C utilizaremos duas maneiras de estendê-las,

$$C_{aug1} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{aug2} = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Então, fazendo a transformação para C_{aug1} temos,

$$H_{aug1}(s) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} sI & 0 \\ 0 & sI \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + D_{aug} \quad (\text{A.6})$$

$$H_{aug1}(s) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} sI - A & 0 \\ -I & sI \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + D_{aug} \quad (\text{A.7})$$

$$H_{aug1}(s) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} & (sI - A)^{-1}s^{-1}I \\ 0 & s^{-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + D_{aug} \quad (\text{A.8})$$

$$H_{aug1}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D_{aug} \quad (\text{A.9})$$

Fica claro que mesmo estendendo o vetor de estados a função transferência não se altera, portanto, a sua norma H_∞ também não se altera. Para o segunda matriz C_{aug2} ,

$$H_{aug2}(s) = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} sI & 0 \\ 0 & sI \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + D_{aug} \quad (\text{A.10})$$

$$H_{aug2}(s) = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} sI - A & 0 \\ -I & sI \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + D_{aug} \quad (\text{A.11})$$

$$H_{aug2}(s) = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1} & (sI - A)^{-1}s^{-1}I \\ 0 & s^{-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + D_{aug} \quad (\text{A.12})$$

$$H_{aug2}(s) = D_{aug} \quad (\text{A.13})$$

Para ambos os casos a extensão da matriz A não altera a dinâmica da planta, entretanto, para o segundo caso a função transferência é alterada e como consequência a norma é alterada.

Tendo esse resultado em mente podemos relaciona-lo com o que ocorreu com resultados obtidos para a adição de atraso fixo, normalmente quando adicionamos atraso fixo a um sistema a matriz C_z é estendida da mesma maneira que C_{aug1} mostrado no exemplo, mas para o nosso caso onde é necessário fazer a diferença entre os estados dos veículo líder e o seguidor a matriz C_z tem que ser modificada como a matriz C_{aug2} no exemplo. Por que é necessário fazer a diferença do estado atrasado em $h = 10$ do veiculo líder com os estados atuais do seguidor.