UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Yuri Graham Vaciloto Ferreira de Lima

Métodos de L'Hôpital para resolução de equações polinomiais utilizando cônicas e aplicações

Campinas-SP

2015

Yuri Graham Vaciloto Ferreira de Lima

Métodos de L'Hôpital para resolução de equações polinomiais utilizando cônicas e aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: *Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira*

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Yuri Graham Vaciloto Ferreira de Lima e orientada pelo Prof.Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira.

Campinas-SP

2015

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

L628m Lima, Yuri Graham Vaciloto Ferreira de, 1987-
Métodos de L'Hôpital para resolução de equações polinomiais utilizando cônicas e aplicações / Yuri Graham Vaciloto Ferreira de Lima. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Eduardo Sebastiani Ferreira.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações. 2. Polinômios. 3. Seções cônicas. I. Ferreira, Eduardo Sebastiani,1938-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: L'Hôpital methods for solving polynomials equations using conics and applications
Palavras-chave em inglês:
Equations
Polinomials
Conic sections
Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada e Computacional
Banca examinadora:
Eduardo Sebastiani Ferreira [Orientador]
Otilia Terezinha Wiermann Paques
Iole de Freitas Druck
Data de defesa: 10-12-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 10 de dezembro de 2015 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). EDUARDO SEBASTIANI FERREIRA

Prof(a). Dr(a). OTILIA TEREZINHA WIERMANN PAQUES

Prof(a). Dr(a). IOLE DE FREITAS DRUCK

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

À minha amada mãe Erika Elena Vaciloto de Lima

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por tudo que tem feito em minha vida.

Agradeço à minha esposa Bruna e a toda minha família, pela paciência nos momentos mais difíceis desta jornada.

Ao Prof. Dr. Eduardo Sebastiani Ferreira, pela orientação e dedicação que foram indispensáveis para a conclusão deste trabalho.

À todos meus companheiros de trabalho, pelas palavras de incentivo.

Finalmente, à Universidade Estadual de Campinas, pela grande oportunidade.

Resumo

O livro de Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hôpital, intitulado *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problêmes tant déterminés qu'indéterminés* foi uma publicação póstuma, editada em 1707 por Jean Boudout. O livro sempre foi pouco conhecido e suas principais edições que conhecemos hoje são a de 1776, editada por Moutard, além de uma tradução para o inglês, ainda menos conhecida, de 1723 por E. Stone, intitulada *An Analytick Treatise of Conick Sections: And Their Use for Resolving of Equations in Determinate and Indeterminate Problems*. O presente trabalho analisa os métodos de L'Hôpital para resolução de equações polinomiais de primeiro, segundo, terceiro e quarto grau utilizando cônicas, descritos no nono capítulo de seu livro. A idéia principal é a decomposição das equações em outras de grau inferior e, após isso, a utilização dessas equações obtidas e as cônicas por elas representadas, fazendo as construções e suas intersecções, para determinar as raízes das equações principais. Para as igualdades de primeiro grau são utilizadas retas, para as de segundo grau, retas e circunferências e, para as de terceiro e quarto grau utilizam-se uma circunferência e uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. Os métodos mostrados trazem grandes vantagens, principalmente por tornar desnecessário que o aluno decore fórmulas enormes sem saber o seu sentido. Além disso, com o uso do software GeoGebra conseguimos uma melhor compreensão e aplicação dos resultados.

Palavras Chaves: Equações, Polinomios, Secções Cônicas

Abstract

The book of Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital, titled *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problêmes tant déterminés qu'indéterminés* was a posthumous publication edited in 1707 by Jean Boudout. The book has always been unknown and the most important editions that we know today are from 1776 edited by Moutard and a translation into English, yet least known, from 1723 by E. Stone titled *An Analytick Treatise of Conick Sections: And Their Use for Resolving of Equations in Determinate and Indeterminate Problems.* This work analyzes the methods of L'Hôpital for solving polynomials equations of first, second, third and fourth degree using conical described in the ninth chapter of his book. The main idea is the decomposition of the equations in another of lower grade. After that, we use these equations and the conics represented by them to make constructions and their intersections to determine the roots of the main equations. Lines are used for solving first-degree equations; lines and circumferences for the second-degree equations; a circle and a parabola, a ellipse or hyperbola for third and fourth degree equations. The methods bring great advantages, especially for making unnecessary for the student decorate huge formulas without knowing its meaning. Furthermore, using the software GeoGebra we got a better understanding and application of results.

Keywords: Equations, Polynomials, Conic Sections

Sumário

1 Introdução **11**

2 Introdução Histórica **12**

2.1 Egípcios e Babilônios 12

2.2 Gregos 19

2.3 Árabes 23

2.4 Século XV e XVI 26

2.5 Século XVII 28

2.6 L'Hôpital 30

3 Métodos de L'Hôpital para Equações de Primeiro Grau **32**

4 Métodos de L'Hôpital para Equações de Segundo Grau **34**

4.1 Métodos de L'Hôpital para equações do tipo $x^2 \pm ax \pm b^2 = 0$ 34

4.2 Método de L'Hôpital para Equações do tipo $x^2 \pm ax \pm bc = 0$ 37

4.3 Considerações sobre os Métodos de L'Hôpital para Equações de Segundo Grau 39

5 Métodos de L'Hôpital para Equações do Terceiro e Quarto Grau **40**

5.1 Métodos de L'Hôpital para Equações de Quarto Grau 40

5.2 Métodos de L'Hôpital para Equações do Terceiro Grau 56

5.3 Raízes e Pontos de Intersecção 60

5.4 Demais Cônicas Utilizadas na Construção de Soluções 65

5.5 Quais Cônicas Utilizar na Construção de Soluções? 69

6 Aplicações **70**

6.1 O Problema da Trisecção de um Ângulo 70

6.2 O Problema do Cone 74

7 Considerações Finais **95**

A Comportamento das equações auxiliares **101**

B Método Alternativo para Equações de Terceiro Grau **108**

C Superfícies Cônicas **113**

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho tem o objetivo de estudar os métodos para resolução de equações polinomiais de primeiro, segundo, terceiro e quarto graus por meio de cônicas, descritos por Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hôpital, em seu livro intitulado *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problêmes tant déterminés qu'indéterminés*.

Este trabalho de L'Hôpital foi uma publicação póstuma, editada em 1707 por Jean Boudout. O livro sempre foi pouco conhecido e as principais edições que conhecemos hoje são a de 1776, editada por Moutard, além uma tradução para o inglês, ainda menos conhecida, de 1723 por Edmund Stone, intitulada *An Analytick Treatise of Conick Sections: And Their Use for Resolving of Equations in Determinate and Indeterminate Problems*. Os textos, principalmente os escritos em francês, tornaram-se acessíveis ao público por volta de 2010, devido a sua reimpressão e diponibilização em várias bibliotecas digitais abertas.

A possibilidade de uma solução geométrica para uma equação algébrica não é uma ideia nova. Desde o princípio do desenvolvimento matemático existem problemas com essa abordagem. Essa ideia foi um tema perseguido por grandes matemáticos, como Descartes, os irmãos Bernoulli, La Hire, etc. Porém, atualmente, os métodos de resolução por essa via foram esquecidos, um pouco devido ao desconhecimento dos livros antigos, um pouco devido a facilidade de resolução por métodos computacionais.

Por isso, as principais ideias de meu trabalho são:

- Entender e expor os métodos de L'Hôpital para solução de equações polinomiais até o quarto grau, desenvolvidos no capítulo IX de seu livro.

- Mostrar uma abordagem mais atual dos métodos, mostrando as construções utilizadas com o uso do software livre GeoGebra.

- Mostrar algumas aplicações na resolução de problemas práticos que envolvem esses tipos de equação.

Capítulo 2

Introdução Histórica

Antes de explorar os métodos de L'Hôpital, gostaria de situar o leitor fazendo uma breve evolução histórica sobre a resolução de equações polinomiais de primeiro, segundo, terceiro e quarto graus, principalmente, mostrar alguns pontos históricos importantes para compreensão das ideias utilizadas e do que já havia sido desenvolvido até o momento da publicação do livro de L'Hôpital.

2.1 Egípcios e Babilônios

Por volta de 3000 a.C., nos vales dos rios Nilo, Tigre, Eufrates, Indo e Amarelo houve a necessidade de uma mudança profunda na sociedade, quando os povos passaram gradativamente de caçadores a agricultores. Com isso, foi crucial o desenvolvimento da escrita e da matemática, para que conseguissem manter o registro das colheitas, comércio, engenharia e agrimensura.

2.1.1 Egípcios

Os egípcios foram muito importantes para o desenvolvimento da humanidade, não somente no campo matemático mas em várias outras áreas. Não existem uma grande quantidade de registros egípcios (papirus) sobre matemática, mas com os que conhecemos, podemos extrair várias informações importantes sobre seu desenvolvimento na área.

O registro egípcio mais importante é:

- A Pedra de Roseta
  Datada de 165 a.C., a Pedra de Roseta é um fragmento de basalto onde se encontram inscrições com a mesma mensagem em hieróglifos, caracteres demolíticos egípcios e grego. Com ela foi possível decifrar a escrita egípcia antiga.Foi encontrada pelo exército de Napoleão, durante sua campanha pelo Egito em 1799 e, atualmente, se encontra no Museu Britânico.

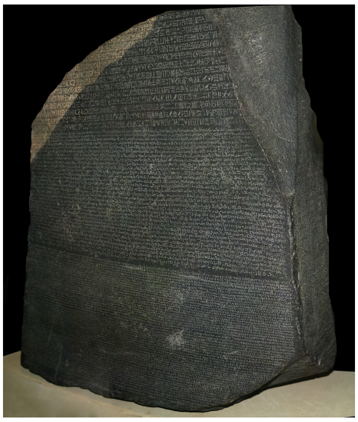


Figura 2.1: Pedra de Roseta. Fonte: https://en.wikipedia.org/?title=Rosetta_Stone

Os documentos egípcios mais relevantes para a matemática são [1]:

- O papiro de Moscou ou de Golenischev
  Comprado no Egito em 1893 por um colecionador russo, atualmente encontra-se no Museu de Belas-Artes de Moscou. É um texto matemático datado de 1850 a.C. que contém 25 problemas.

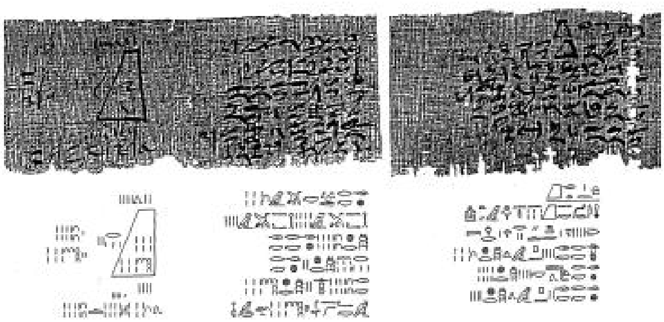


Figura 2.2: Papiro de Moscou.Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Moscow_Mathematical_Papyrus

[1] (Katz 2008, pp.2-3)

- O papiro de Rhind ou de Ahmes
  Comprado por Henry Rhind no Egito, hoje encontra-se no Museu Britânico. É um texto matemático em formato de manual, datado de 1650 a.C., que contém 85 problemas.

Figura 2.3: Papiro de Rhind. Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus

Os problemas descritos nos papiros geralmente tratavam de questões comuns, como por exemplo: armazenamento de grãos, quantidade de rações para animais, paẽs, cerveja e impostos. Os problemas envolviam progressões aritméticas e geométricas, cálculo de áreas e volumes e resolução de equações de primeiro grau que, na notação atual, seriam das formas $x + ax = b$ e $x + ax + bx = c$, com $a, b, c \in \Re$.

Outros papiros importantes são o de Kahun e o do Cairo, aproximadamente do século III a.C., os quais contém problemas envolvendo soma de quadrados e o teorema de Pitágoras.

O egípcios utilizavam um método de resolução similar ao atual método da Falsa Posição, que consiste em escolher valores para as incógnitas, substituí-los e comparar o resultado obtido com desejado.[2] Os principais problemas algébricos eram os de *Aha* e os de *Pefsu*. Os problemas de Aha consistiam em encontrar uma quantidade desconhecida, enquanto que os de Pefsu, tratavam de em encontrar uma unidade de medida de volume de uma cerveja ou pão com relação ao cereal usado em sua fabricação.

[2](Boyer 1968, pp. 9-23)

Por exemplo:

- Problema de Aha: problema 26 do papiro de Rhind
  Uma quantidade e $\frac{2}{3}$ dela são somadas. Subtraindo-se desta soma $\frac{1}{3}$ dela, restam 10. Qual é a quantidade? Em notação atual:
  $(x + \frac{2}{3}x) - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = 10$
- Problema de Pefsu: problema 15 do papiro de Moscou[3]
  Antes de enunciar o problema, vale lembrar que, nos problemas de pefsu eram utilizadas uma medida de potência ou concentração de uma cerveja ou pão, sendo que:
  $\text{pefsu} = \dfrac{\text{jarros de cerjeva ou pães}}{\textit{heqats}\text{ de grãos}}$.
  A descrição do problema 15 é assim: "Se alguém vos disser: 10 *heqat* [4] de grãos egípcios superior para ser transformado em cerveja de 2 pefsu . Oh, deixe-me saber a quantidade de cerveja?
  Sendo isso 10 vezes dois . O resultado é 20. Eis que a quantidade de cerveja é de 20 jarros."

2.1.2 Babilônios

Ao contrário dos egípcios, existem muitos registros babilônicos específicos sobre matemática: são aproximadamente 400 tábulas de argila sobre o tema. [5]
A resolução de equações lineares é um tema que aparece em alguns registros e, percebemos que os babilônios podiam resolver problemas complexos desse tipo, por exemplo o registro da tábula YBC 4652[6]:
"Eu encontrei uma pedra, mas não a pesei; depois de ter adicionado ao peso total um sétimo e, em seguida, um décimo primeiro do total, ela pesava uma mina (60 gin). Qual era o peso original da pedra ?"
Em notação atual seria a equação:
$(x + \frac{x}{7}) + \frac{1}{11}(x + \frac{x}{7}) = 60$
Contudo, não é possível afirmar qual era o método utilizado pelos babilônios para a resolução, devido ao pequeno número de registro sobre esse tema. Acredita-se que utilizavam do mesmo que os egípcios, o da Falsa Posição.

[3](Clagett 1999, pp. 221-222). Tradução livre.
[4] *heqat* é uma unidade de medida de volume equivalente a aproximadamente 4,54 litros
[5](Eves 2004, pp. 58)
[6](Neugebauer et al. 1945, pp.100-103)

Outro fato notório é que os babilônios conseguiram desenvolver um algoritmo muito eficaz para encontrar raízes quadradas. Um dos registros mais interessantes sobre o tema encontra-se na tábula YBC 7289 (figura 1.4), que contém o valor da diagonal de um quadrado e, possivelmente, um valor aproximado para $\sqrt{2}$. Problemas desse tipo sugestionam a resultados do Teorema de Pitágoras.

Figura 2.4: YBC7289. Fonte: https://www.math.ubc.ca/ cass/Euclid/ybc/ybc.html

Destacamos, também, a tábula Plimpton 322 (figura 1.5), uma das mais famosas, que contém 4 colunas de números que acreditam ser ternas pitagóricas ($x^2 + y^2 = d^2$ ou $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{d}{y}\right)^2$). Na tábula, a primeira coluna representa $\left(\frac{d}{y}\right)^2$, a segunda x, a terceira d e a quarta, a ordem númerica.

Figura 2.5: Plimpton 322. Fonte: http://images.math.cnrs.fr/Promenade-mathematique-en.html

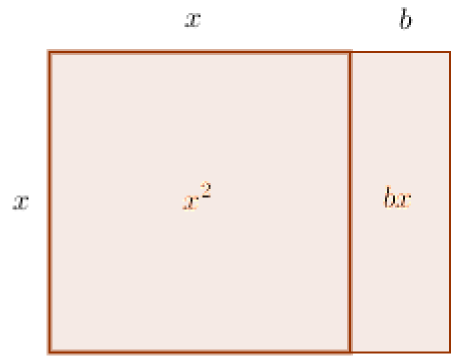
Na tabela abaixo, transcrevemos em notação decimal o que aparece na tábula completa com exceção da coluna do número y que não está na tábula :

$\left(\frac{d}{y}\right)^2$	x	d		y
1.9834028	119	169	1	120
1.9491586	3367	4825	2	3456
1.9188021	4601	6649	3	4800
1.8862479	12.709	18.541	4	13.500
1.8150077	65	97	5	72
1.7851929	319	481	6	360
1.7199837	2291	3541	7	2700
1.6845877	799	1249	8	960
1.6426694	481	769	9	600
1.5861226	4961	8161	10	6480
1.5625	45	75	11	60
1.4894168	1679	2929	12	2400
1.4500174	161	289	13	240
1.4302388	1771	3229	14	2700
1.3871605	28	53	15	45

Os babilônios também tinham grande habilidade na resolução de equações do segundo grau, nas quais, geralmente, era empregado um método baseado na construção de retângulos, suas áreas e lados.
Por exemplo: na tábula BM 13901, existe um problema que pode ser traduzido em linguagem atual como a solução da equação $x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{7}{12}$ [7]. A resolução é geométrica e apresentada da seguinte maneira:
Tomamos a metade de $\frac{2}{3}$ e fazemos um quadrado. Então tomamos o resultado $\frac{1}{9}$ e adicionamos $\frac{7}{12}$ para obter $\frac{25}{36}$. Notamos que $\frac{5}{6}$ é a raiz quadrada de $\frac{25}{36}$, então subtraímos $\frac{1}{3}$ de $\frac{5}{6}$ obtendo o resultado $\frac{1}{2}$.

[7](Katz 2008, pp.22-27). Tradução livre.

Vemos que o método é o mesmo utilizado atualmente, que pode ser resumido algebricamente como $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ ou geometricamente:



Existem também tábulas com tabelas de valores para $x^3 + x^2 = a$ e soluções para $x^3 = a$, mas não podemos dizer que eles conheciam um método para reduzir uma cúbica geral a sua forma padrão[8].

[8](Boyer 1968, pp.34-37)

2.2 Gregos

Instigados por uma sede de conhecimento, os grandes pensadores gregos começaram a questionar-se sobre diversos aspectos da vida e, como resultado, houve um grande avanço na ciência em geral. Esse avanço formou as bases do pensamento de várias áreas como a Matemática, a Física, a Filosofia e a Biologia. A partir dos conhecimentos egípcios e mesopotâmicos em Matemática, os gregos conseguiram inserir lógica ao sistema, transformando-o basicamente no que conhecemos hoje.[9]

Foram os gregos que introduziram o principal conceito matemático moderno, a demonstração matemática. Ao contrário dos egípicios e mesopotâmicos, dos quais temos muitos registros originais, o material grego que conhecemos atualmente são cópias.
Além de Pitágoras, Tales, Platão e Aristóteles, os gregos mais importantes para o presente trabalho são Euclides e Apolônio.

2.2.1 Euclides

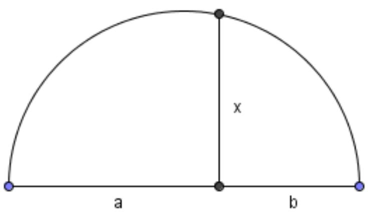
O texto matemático grego mais importante é o livro de Euclides chamado *Os Elementos*. O texto é um tratado composto de 13 capítulos/livros sobre diversos tópicos de geometria, são eles:

- Livro I - definições, axiomas e postulados principalmente sobre triângulos.
- Livro II - tranformações de áreas e álgebra, equivalência geométrica de identidades algébricas.
- Livro III - círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos.
- Livro IV - construção com régua e compasso de polígonos de 3, 4, 5, 6 e 15 lados e suas circunscrições.
- Livro V - Teoria das Proporções de Eudoxo.
- Livro VI - aplicação da Teoria das Proporções de Eudoxo à Geometria Plana.
- Livro VII, VIII e IX - Teoria dos Números.
- Livro X - Números Irracionais, segmentos incomensuráveis.
- Livro XI, XII e XIII - Geometria Sólida.

[9](Katz 2008, pp.33-36)

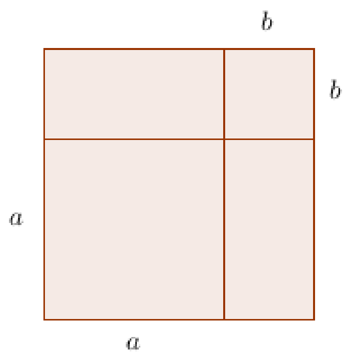
Além das bases da Geometria, os pontos mais importantes para o presente trabalho nos *Elementos*, são as identidades algébricas e as resoluções geométricas de equações quadráticas, por exemplo[10]:

- A Proposição 44 do Livro I nos permite construir um segmento de reta x por uma circunferência entre os extremos dos segmentos a e b dados. Então $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b}$.

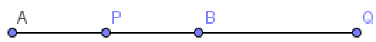


  Ou seja, o método fornece uma solução geométrica para equações do tipo $x^2 = ab$, com $a, b \in \Re$.

- Proposição 4 do livro II: " *Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido nas partes*", coloca a identidade geométrica $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$



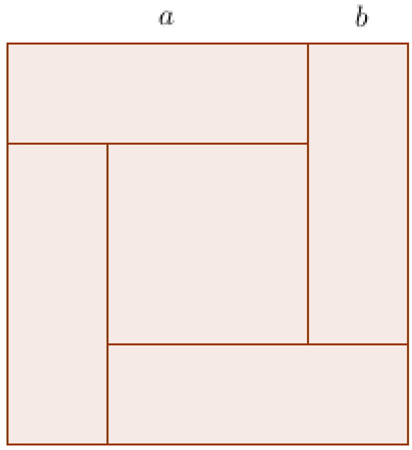
- Proposição 6 do livro II: "*Efetuando-se a bisecção de uma reta e prolongando-a até um ponto qualquer, o retângulo contido pela reta assim prolongada e a parte que lhe foi acrescida, junto com o quadrado sobre a metade da reta dada, ígual ao quadrado sobre a reta formada da metade e da parte acrescida*", sendo o segmento



[10](Eves 2004, pp.107-113)

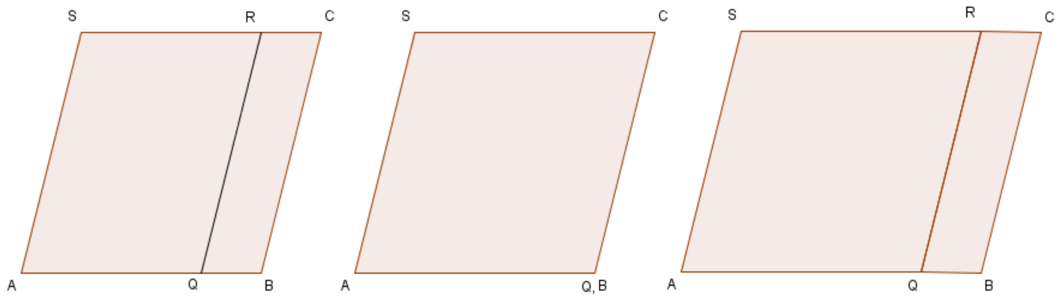
Mostramos que $(AQ)(BQ) + (PB)^2 = (PQ)^2$

Se $AQ = 2a$ e $BQ = 2b$, temos a identidade $4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$



- Proposição 28 do Livro VI: " *Aplicar a um dado segmento de reta AB um paralelogramo AQRS de área igual a uma dada figura retilínea F, e ficando aquém por um paralelogramo QBCR semelhante a um paralelogramo dado, não excedendo a área F do paralelogramo descrito sobre metade de AB e semelhante à deficiência QBCR*".
  Considerando que o paralelogramo dado é um quadrado.
  Sendo AB $= a$, a base do paralelogramo AQ $= x$ e o lado do quadrado F igual a b.
  $x(a - x) = b^2 \Rightarrow x^2 - ax + b^2 = 0$

- Proposição 29 do Livro VI: "*Aplicar a um dado segmento de reta AB a um paralelogramo AQRS de área igual a uma figura retilínea F, e excedendo por um paralelogramo QBCR semelhante a um paralelogramo dado*". Considerando que o paralelogramo dado é um quadrado.
  Sendo AB $= a$, a base do paralelogramo AQ $= x$ e o lado do quadrado F igual a b.
  $x(x - a) = b^2 \Rightarrow x^2 - ax - b^2 = 0$



2.2.2 Apolônio

As cônicas já eram conhecidas na época em que Apolônio escreveu seu livro, intitulado *As Cônicas*. No próprio *Elementos* havia descrições de cônicas, mas o livro de Apolônio substitui todos os escritos anteriores, por ser mais refinado e avançado.Portanto, qualquer trabalho que envolva cônicas deve ter como ponto inicial os escritos de Apolônio.

O texto também é um tratado com oito capítulos/livros. Os quatro livros iniciais tratam da teoria básica das cônicas, provavelmente uma ampliação do que já era conhecido. Os outros 4 livros são aprofundamentos e estudos sobre o mesmo tema, embora o último tenha se perdido com o tempo. Seus conteúdos são [11]:

- Livro I, definições das cônicas e propriedades dos diâmetros e tangentes das cônicas. Basicamente uma extensão do que foi descrito por Euclides .
- Livro II, relações entre hipérbole e suas assíntotas e como desenhar tangentes a uma cônica dada.
- Livro III, propriedades das tangentes de uma cônica.
- Livro IV, intersecções entre cônicas.
- Livro V, retas a partir de pontos do eixo de uma cônica e retas normais.
- Livro VI, igualdade e semelhança entre cônicas.
- Livro VII, diâmetros conjugados.

Outro fato importante para o presente trabalho é que Apolônio utilizou todo esse conhecimento sobre cônicas para resolução geométrica de problemas como da trisecção de um ângulo e da duplicação do cubo, problemas que trataremos mais adiante.

[11](Katz 2008, pp.112-127)

2.3 Árabes

O grande conhecimento matemático árabe evidenciou-se com o crescimento de sua cultura como centro comercial e intelectual por volta do ano 800, devido a tradução para o árabe de muitos manuscritos gregos e hindus. Além disso, também estava presente o conhecimento babilônico há muito tempo desenvolvido na região.

Muito do que sabemos hoje devemos a esses matemáticos, como por exemplo[12]:

- O sistema decimal: por volta de 773, um matemático hindu visitou a corte de al-Mansur em Bagdá, trazendo com ele uma cópia de um texto, possivelmente o *Brahmasphutasiddhanta* ou Brahmagupta, que foi traduzido para o árabe. Esse texto continha, além de estudo sobre astronomia, o sistema númerico hindu . Gradativamente, o sistema hindu começou a mesclar-se com o sistema existente e, com o aporte dos árabes, se transformou no sistema hindu-arábico que conhecemos hoje.

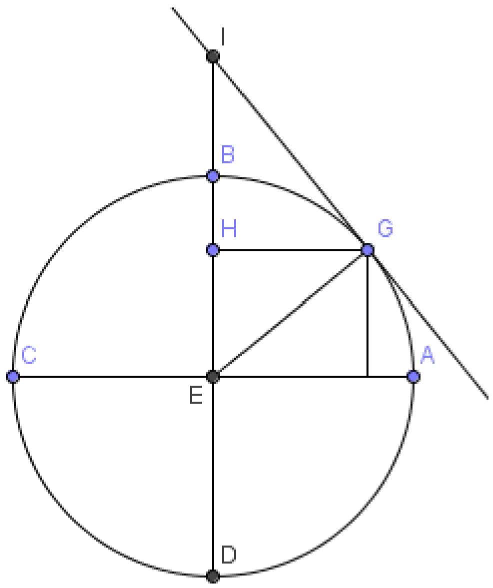
- Álgebra: a contribuição mais importante dos árabes para a matemática. Derivada dos problemas gregos e babilônicos, foi desenvolvida principalmente pela necessidade de mostrar que uma solução de um problema algébrico era válida dada que sua resolução era geométrica. Um dos textos mais importantes sobre o tema é o *Alkitab al-muhtasar fihisab al-jabr walmuqabala*, *The Condensed Book on the Calculation of al-Jabr and al-Muqabala* ou *Compêndio sobre Cálculo por Restauração e Balanceamento* de al-Khwarizmi. O livro é um manual de álgebra, no qual constam vários exemplos de resoluções númericas e geométricas, além de justificativas.

2.3.1 Omar Khayyam

Umar ibn Ibrahim al-Khayyami, ou Omar Khayyam, viveu durante os anos 1048 e 1131 e desenvolveu um método de resolução de uma equação cúbica pela intersecção de duas cônicas.

Tudo começou com o seguinte problema: Khayyam propõe dividir um quadrante de um círculo em um ponto G tal que, desenhando as perpendiculares aos diâmetros, tenhamos $AE : GH = EH : HB$ como na figura a seguir:

[12] (Katz 2008, pp.266-292)



Khayyam começou a resolução a partir da tangente GI. Após alguns cálculos, encontrou o triângulo retângulo EGI, que tem como propriedade o fato de a hipotenusa EI ser igual a soma de um de seus lados EG e a perpendicular GH. Conclui que se pudesse encontrar esse ângulo reto, conseguiria resolver o problema. Então, por álgebra, em um caso particular fez: $EH = 10$ e $GH = x$, portanto $GE^2 = x^2 + 100$, mas $GE^2 = EI.EH$ então

$$\frac{GE^2}{10} = \frac{x^2}{10} + 10 = \frac{EI.EH}{10} = EI$$

Como $EI = EG + GH$ teremos

$$\frac{x^2}{10} + 10 = EG + GH = EG + x \text{ portanto}$$

$$x^2 + 100 = EG^2 = \left(\frac{x^2}{10} + 10 - x\right)^2$$

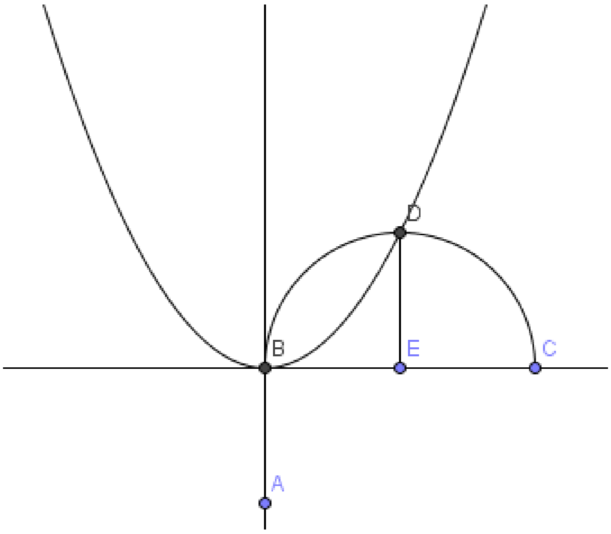
Simplificando essa equação teremos $x^3+200x = 20x^2+2000$, equação que não tinha solução até o momento. Então Khayyam resolveu o problema com a intersecção de uma hipérbole e um semicírculo com equações de notação atual $xy = \sqrt{20}$ e $x^2-30x+y^2-\sqrt{800}y+400 = 0$. Com isso, ele conseguiu construir o ângulo que possibilitou a solução do problema original.

A partir desse trabalho, Khayyam analisou todas as cúbicas possíveis tentando desenvolver um algoritmo genérico para resolução de cúbicas. Em seus manuscritos, encontramos vários métodos que utilizam todos os tipos de cônicas.

Um exemplo é o método para uma cúbica do tipo $x^3 + cx = d$, com $c, d \in \Re$ mostrado a seguir [13] [14]: Marcamos 2 pontos A e B talque $AB = \sqrt{c}$ e também o ponto C talque BC seja perpendicular a AB e $BC.AB^2 = d \Rightarrow BC = \dfrac{d}{c}$.

[13](Amir-Moez 1962)
[14](Amir-Moez 1963)

Então, traçamos a parábola com eixo em AB, vértice em B e parâmetro $AB = \sqrt{c}$, traçamos também o semicírculo entre os pontos B e C. Sendo o ponto B a origem, o



semicírculo que descrevemos tem equação $x\left(\dfrac{d}{c} - x\right) = y^2$ e a parábola $x^2 = \sqrt{c}y$. Os dois se encontram no ponto D e a solução é representada pelo segmento BE.

Figura 2.6: Pagina do manuscrito Maqalah fi al-jabra wa-al muqabalah, Fonte: http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematicaltreasuresomar-khayyamsalgebra

2.4 Século XV e XVI

Nos séculos XV e XVI, houve uma grande mudança cultural e econômica na Europa, impulsionada principalmente pelo desenvolvimento do comércio e das grandes navegações. O conhecimento científico e, especificamente o matemático, acompanhou essa transformação, sendo a Itália um dos principais centros desse período.
Como principal avanço do período, para a matemática, destacamos a resolução algébrica de uma equação cúbica geral.

2.4.1 Scipione del Ferro, Niccolà Tartaglia e Gerolamo Cardano

Por volta de 1500, Scipione del Ferro, que era professor da Universidade de Bologna, descobriu um método algébrico para resolução de uma cúbica da forma $x^3 + cx = d$, com $c, d \in \Re$, porém, não o publicou. O método foi repassado a seu sucessor na cadeira da universidade, Antonio Maria Fiore, e a um de seus alunos, os quais também não o publicaram.

Posteriormente, Niccolà Tartaglia descobriu uma forma de resolução de uma cúbica da forma $x^3 + bx^2 = d$, com $b, d \in \Re$ e foi desafiado publicamente por Fiore [15] a resolver a equação do tipo $x^3 + cx = d$, com $c, d \in \Re$. Após algum tempo, Tartaglia conseguiu resolver os problemas propostos e, como Fiore não conseguiu, Tartaglia foi declarado vencedor.

Após muita insistência, Tartaglia enviou sua solução a Gerolamo Cardano, que iniciou um estudo próprio para solução de uma cúbica geral. Em 1545, Cardano publicou seu trabalho com a solução de cúbicas e equações de quarto grau no livro *Ars Magna, sive de regulis algebraicis*, o que gerou revolta em Tartaglia pois aquele que era "seu"método, agora era conhecido como método de Cardano.

2.4.2 Método ou Fórmula de Cardano Tartaglia

O método ou Fórmula de Cardano Tartaglia é uma forma de resolução algébrica de uma cúbica geral. Ainda que parta de uma cúbica na forma $x^3 + cx = d$, o método resolve todas as cúbicas, uma vez que, na época, já era conhecido um método de redução de uma cúbica geral a uma da forma $x^3 + cx = d$. Para a transformação, basta tormar uma equação da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a, b, c, d \in \Re$, e fazer $x = y + m$, obtendo uma cúbica em y da forma desejada.

[15] Os desafios públicos eram a forma de professores de universidades se manterem e chegarem aos seus cargos. Cada oponente propunha problemas ao outro e quem conseguisse resolver a maior quantidade era o vencedor e ficava com a vaga.

O método de Cardano Tartaglia consiste em:
Partindo de uma cúbica da forma $x^3 + cx = d$ fazemos uma substituição $x = u - v$, então:
$x^3 = (u-v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 = u^3 - 3uv(u-v) - v^3 \Rightarrow x^3 + 3uvx = u^3 - v^3$

Comparando os coeficientes obtidos temos:
$u^3 - v^3 = d$
$3uv = c \Rightarrow uv = \dfrac{d}{3} \Rightarrow u^3v^3 = \left(\dfrac{d}{3}\right)^3$
Como temos a soma e o produto dos dois números, podemos encontrá-los como solução de uma equação do segundo grau, tomando a soma $u^3 = d + v^3$ e substituindo no produto temos $v^6 + dv^3 = \left(\dfrac{d}{3}\right)^3$. Resolvendo essa equação como uma de segundo grau, temos:
$u^3 = \sqrt{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{3}\right)^3} + \left(\dfrac{d}{2}\right)$
$u = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{3}\right)^3} + \left(\dfrac{d}{2}\right)}$

Da mesma forma para v obtemos: $v = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{3}\right)^3} - \left(\dfrac{d}{2}\right)}$

Então finalmente: $x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{3}\right)^3} + \left(\dfrac{d}{2}\right)} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{3}\right)^3} - \left(\dfrac{d}{2}\right)}$

Essa solução de Cardano e Tartaglia não resolvia apenas cúbicas, mas também os problemas com equações de quarto grau. Pois, no *Ars Magna* Cardano também publicou um processo de transformar uma quártica geral em uma cúbica. Esse processo foi descoberto por seu aluno Ludovico Ferrari e consistia em:
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com $a, b, c, d \in \Re$, substituindo $x = y - \dfrac{b}{4a}$ obtemos,
$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \Rightarrow$
$y^4 + 2py^2 + p^2 = py^2 - qy - r + p^2 \Rightarrow$
$(y^2 + p)^2 = py^2 - qy - r + p^2$, então para um z arbitrário,
$(y^2 + p + z)^2 = py^2 - qy - r + p^2 + 2z(y^2 + p) + y^2 \Rightarrow$
$(y^2 + p + z)^2 = (p + 2z)y^2 - qy + (p^2 - r + 2pz + z^2)$
Escolhendo z de forma que o segundo membro da equação anterior seja um quadrado, isto é, quando $4(p + 2z)(p^2 - r + 2pz + z^2) - q^2 = 0$, ficamos com uma equação de terceiro grau na variável z.

2.5 Século XVII

No século XVII teve início as principais ideias do Cálculo e da Geometria Analítica, além do desenvolvimento de vários temas como: Logaritmos, Geometria Pura e Probabilidades. Outro fato de destaque foi a mudança do centro intelectual da Itália para a França e Inglaterra.

Para o presente trabalho, a contribuição mais importante do período é a de René Descartes, com seu trabalho *La Géométrie*.

2.5.1 René Descartes

Descartes era francês e viveu entre os anos de 1596 e 1650. Era filósofo, físico e matemático. Seu texto matemático mais importante é *La Géométrie*, um anexo de seu livro *Discours de la méthode*. O texto foi o primeiro a juntar Álgebra e Geometria, que é conhecido hoje como Geometria Analítica. Deste texto, destacamos principalmente o livro III, o qual explicita construções para solução de equações de terceiro e quarto graus, utilizando cônicas, muito similar ao método de L'Hôpital que veremos no capítulo 5.

Descartes utiliza um método similar ao de Omar Khayyam para resolução de cúbicas a partir de uma parábola e de uma circunferência. Ao contrário de Khayyam, Descartes também considera a possibilidade de existência de raízes negativas e utiliza os conceitos de geometria analítica para demostrar suas construções.

O método consiste em [16] [17]:

No primeiro passo, parte-se da equação desejada, do terceiro ou quarto grau, na seguinte forma [18]:

$x^3 = \pm apx \pm a^2q$

$x^4 = \pm apx^2 \pm aq^2x \pm a^3r$

Com $a, p, q, r \in \Re$ e considerando $a = 1$ ficamos com:

$x^3 = \pm px \pm q$

$x^4 = \pm px^2 \pm q^2x \pm r$

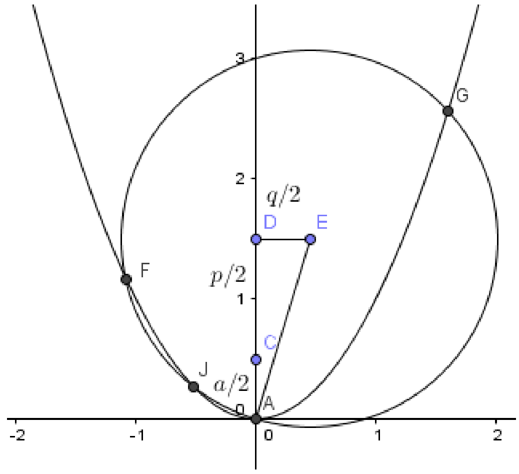
Para a construção das equações cúbicas, consideramos o ponto A na origem e o ponto C no eixo y tal que $AC = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$, ou seja, $C = \left(0, \frac{a}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Tomamos agora o ponto D também no eixo y tal que $CD = \frac{p}{2}$. Considerando a reta s que passa por C e é perpendicular ao eixo x, se $p > 0$, D esta do mesmo lado que o ponto A com relação a reta s, se $p < 0$, D esta do lado contrário.

[16](Latham e Smith 1925, pp.194-204)

[17](Rabuel 1730, pp.511 -539)

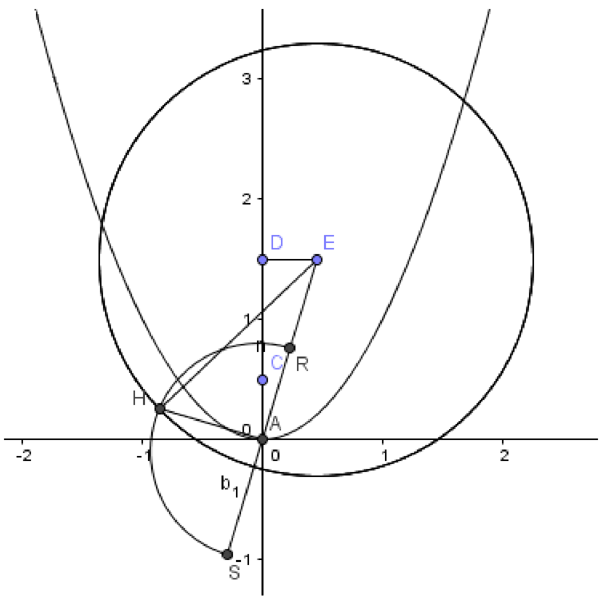
[18]No livro, Descartes desenvolveu vários métodos de transformação de equações, retirando termos e mudando o grau da equações. Alguns já eram conhecidos, como vimos anteriormente.

Marcamos também o ponto E tal que $DE = \dfrac{q}{2}$ e $\overline{DE}$ perpendicular a $\overline{AD}$.
As cônicas utilizadas por Descartes são a parábola com vértice em A e com parâmetro a e a circunferência de centro em E e raio AE. Para a equação de terceiro grau, a parábola e a circunferência, além do ponto A, se interceptam em até mais 3 pontos, F, G e J no exemplo abaixo.

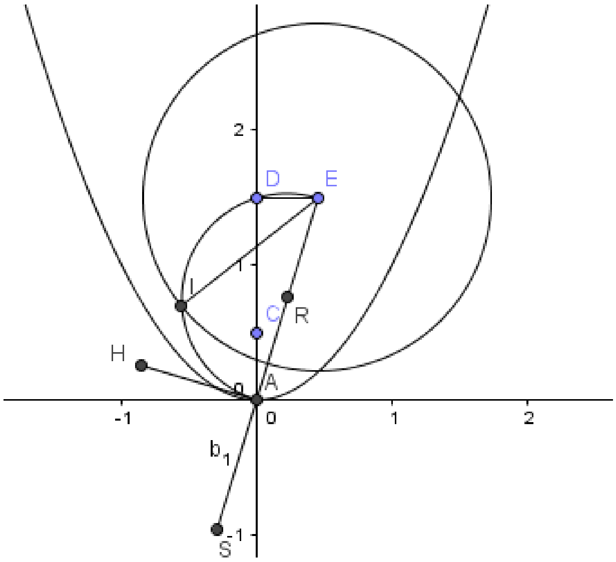


Para as equações de quarto grau, utiliza-se a mesma construção: se $r = 0$, se $r > 0$ ou $r < 0$ temos que fazer uma construção auxiliar para determinar a circunferência. Se $r > 0$, tomamos o ponto R na reta $\overleftrightarrow{AE}$ tal que $AR = r$ e também o ponto S na reta $\overleftrightarrow{AE}$, do lado oposto a R, tal que $AS = a = 1$.

Traçamos agora o semicírculo pelos pontos RS e o ponto H no semicírculo tal que $\overline{AH}$ é perpendicular a $\overline{AE}$. A nova circunferência que procuramos é a com centro em E e raio EH.



Se $r < 0$, marcamos o semicírculo pelos pontos AE e o ponto I no semicírculo, tal que $\overline{AI} = \overline{AH}$. A nova circunferência que procuramos é a com centro em E e raio EI.



Asssim como nos métodos de Omar Khayyam, as soluções das equações são dadas pelas ordenadas dos pontos de intersecção da parábola e da circunferência.

2.6 L'Hôpital

Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hôpital, nasceu em Paris, não se sabe exatamente o dia, mas no ano de 1661. Sua família era rica e de tradição militar, de modo que o próprio L'Hôpital esteve no exército por alguns anos, abandonando a carreira provavelmente por sua miopia.[19]

L'Hôpital ficou conhecido por sua amizade com alguns matemáticos, como Cristian Huygens, Leibniz e Jean Bernoulli e pelas correspondências que trocavam entre si. Mas, principalmente, ficou conhecido por seu livro sobre cálculo diferencial, o primeiro sobre o tema, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* de 1696.

Para o presente trabalho, o livro mais importante é o *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problêmes tant déterminés qu'indétermines*, que pode ser considerado uma expansão do *La Géométrie* de Descartes. O texto foi uma publicação póstuma, publicada em 1707, no que L'Hôpital descreve todas as cônicas, suas propriedades e usos para resolução de problemas.

[19] $https://fr.wikipedia.org/wiki/Guillaume_{F}ran\%C3\%A7ois_{A}ntoine,_{m}arquis_{d}e_{L}\%27H\%C3\%B4pital$

O texto é composto de dez capítulos/livros, divididos da seguinte maneira e com os seguintes conteúdos:

- Livro I - da Parábola; definições e propriedades das parábolas.
- Livro II - da Elipse; definições e propriedades das elipses.
- Livro III - da Hipérbole; definições e propriedades das hipérboles.
- Livro IV - das Três Secções Cônicas; definições e propriedades das secções cônicas.
- Livro V - da Comparação entre as Secções Cônicas e seus segmentos; comparação e propriedades das secções cônicas em relação a alguns segmentos definidos.
- Livro VI - das Secções Cônicas consideradas em sólidos; propriedades das secções em relação um cone que as contém.
- Livro VII - dos Lugares Geométricos; definições, construções e reconhecimento de cônicas a partir de seu lugar geométrico.
- Livro VIII - Proposições gerais; demonstração de propriedades de segmentos das Secções Cônicas a partir exemplos e resolução de problemas.
- Livro IX - da Construção de igualdades; construção da solução de equações polinomiais utilizando cônicas.
- Livro X - dos Problemas Determinados; resolução de problemas com a utilização de cônicas a partir dos métodos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

Os métodos que analisaremos a seguir estão descritos no livro IX - da Construção de igualdades.

Capítulo 3

Métodos de L'Hôpital para Equações de Primeiro Grau

Como vimos, surgiu com as primeiras civilizações o desenvolvimento da resolução de igualdades, tendo como principal motivo a resolução de problemas práticos da agricultura e das construções. Vimos também que os egípcios e os babilônios tinham conhecimentos que permitiam resolver equações simples, quadráticas e, no caso dos babilônios, até algumas equações de quarto grau.

Para equações de primeiro grau, o método desenvolvido por L'Hôpital é relativamente trivial e consiste em substituições consecutivas de modo a isolar a incógnita e igualá-la a uma ou várias frações, descobrindo assim seu valor. Um exemplo específico é :[1]

- Dado uma igualdade da forma $x = \dfrac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3}$, com $a, b, c \in \Re$

  se tomarmos $m = \dfrac{ab}{c}$ com $m \neq c \neq 0$, obtemos

  $x = \dfrac{cm - m^2}{c + m} = \dfrac{m(c - m)}{c + m}$

  Então, pela quarta proporcional

  $\dfrac{c + m}{c - m} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow$

  $x = n$

Vemos que ao encontrar um valor para x, encontramos a equação que representa uma reta, ou ainda, o comprimento de um segmento determinado.

[1](L'Hopital 1776, pp. 291-294)

L'Hôpital dá alguns outros exemplos que envolvem o mesmo método mas a princípio não parecem utilizar igualdades de primeiro grau. Para esses exemplos, após realizar as substituições, ele utilizou alguns conceitos já conhecidos como, por exemplo, o Teorema de Pitágoras e solucionou o problema encontrando um segmento de comprimento específico. Dois desses exemplos são:

- $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, com $a, b \in \Re$

  Podemos fazer um triângulo retângulo com catetos valendo a e b, então a hipotenusa será x.

  Caso $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, temos $x^2 = a^2 - b^2$,

  então basta tomar um triângulo retângulo com um cateto valendo b e hipotenusa a que o outro cateto terá o valor de x

- $x^2 = s^2 + 4e^2 - \dfrac{4c^2e^2}{a^2}$, com $a, c, s, e \in \Re$ e $a \neq 0$, tomando um triângulo retângulo com catetos s,$2e$ e hipotenusa m, se tomarmos também uma reta $n = \dfrac{2ce}{a}$, obtemos,

  $x^2 = m^2 - n^2$, que resolvemos como no exemplo anterior.

Assim, podemos dizer que os métodos eram muito simples e utilizavam ideias básicas para encontrar o valor da incognita. Atribuindo a ele um comprimento de um segmento determinado e, em alguns casos, a equação que representa uma reta constante.

Capítulo 4

Métodos de L'Hôpital para Equações de Segundo Grau

Como dito anteriomente, os egípcios e os babilônios desenvolveram métodos de resolução de equações de segundo grau. Posteriormente, na Grécia antiga, os pitagóricos iniciaram a ideia de resolução geométrica de equações quadráticas. A lógica era fazer construções com paralelogramos e circunferências de modo que, por suas propriedades, seus segmentos satisfizessem as equações. Vários desses métodos foram desenvolvidos por Euclides em seus *Elementos*, como já mostramos.

Para equações de segundo grau, o método desenvolvido por L'Hôpital para encontrar as raízes envolve retas e circunferências. Dividiremos a análise em 2 casos para para facilitar o nosso entendimento. No primeiro caso, tomamos uma equação do tipo $x^2 \pm ax \pm b^2 = 0$ e no segundo caso, uma do tipo $x^2 \pm ax \pm bc = 0$ [1].

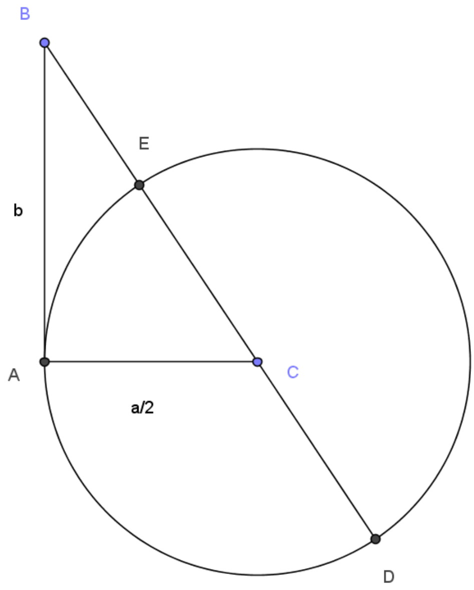
4.1 Métodos de L'Hôpital para equações do tipo $x^2 \pm ax \pm b^2 = 0$

Para equações do tipo $x^2 \pm ax \pm b^2 = 0$, com $a, b \in \Re$, o método consiste em, a partir dos coeficientes da equação dada, encontrar alguns segmentos que formam um triângulo retângulo e uma circunferência que tem como raio um desses segmentos. A partir da intersecção da circunferência e um segmento, conseguimos as raízes da equação de segundo grau. Subdividiremos a análise em dois casos: o primeiro quando $x^2 \pm ax - b^2 = 0$ e o segundo quando $x^2 \pm ax + b^2 = 0$

[1](L'Hopital 1776, pp. 295-299)

4.1.1 Equações do tipo $x^2 \pm ax - b^2 = 0$

Tomamos um triângulo retângulo ABC com catetos $AB = b$ e $CA = \dfrac{a}{2}$. Também descrevemos uma circunferência com centro em C e raio CA.
Prolongando a hipotenusa $\overline{BC}$, a circunferência intercepta o prolongamento em dois pontos D e E.

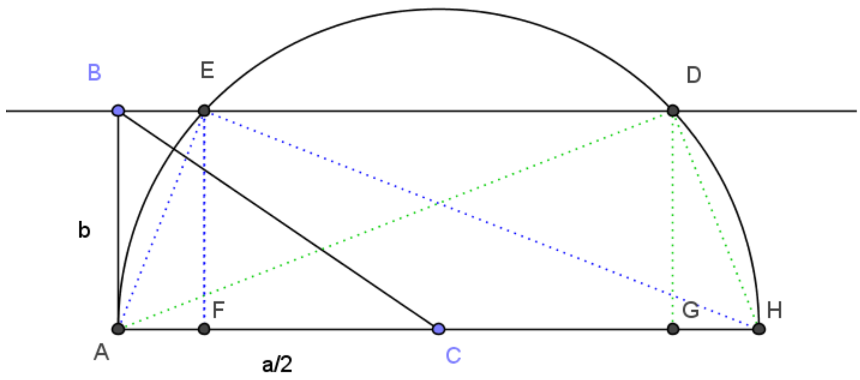


Pela propriedade da reta tangente à circunferência $AB^2 = BE \times BD$,
então se $BE = x \Rightarrow BD = x + a$,temos
$AB^2 = BE \times BD \Rightarrow b^2 = x(x + a) \Rightarrow x^2 + ax - b^2 = 0$.
Chamando $BD = y \Rightarrow BE = BD - ED = y - a$
então $AB^2 = BE \times BD \Rightarrow b^2 = y(y - a) \Rightarrow y^2 - ay - b^2 = 0$.
Se considerarmos que y é uma raiz negativa da equação temos que $y = -x$ e
$y^2 - ay - b^2 = x^2 + ax - b^2$
Da mesma forma, tomando $BD = x$ e $BE = y$ com y uma raiz negativa, teremos
$AB^2 = BE \times BD \Rightarrow b^2 = x(x - a) \Rightarrow x^2 - ax - b^2 = 0$.

Sendo assim, as medidas de $\overline{BD}$ e $\overline{BE}$ são raízes das equações do tipo $x^2 \pm ax - b^2 = 0$.

4.1.2 Equações do tipo $x^2 \pm ax + b^2 = 0$

Assim como no primeiro caso, formamos um triângulo retângulo ABC com catetos $AB = b$ e $CA = \dfrac{a}{2}$. Agora, descrevemos uma reta $\overleftrightarrow{BD}$ paralela a $\overleftrightarrow{AC}$. Seja um arco de circunferência com centro em C e raio CA que intercepta a reta $\overleftrightarrow{BD}$ em dois pontos D e E.



Sendo $BE = AF$ e $BD = AG$ temos que pela propriedade da circunferência $AF \times FH = FE^2$ e também $AG \times GH = GD^2$

Tomando primeiro $BE = AF = x$ pela primeira propriedade:

$AF \times FH = FE^2 \Rightarrow x(a - x) = b^2 \Rightarrow ax - x^2 = b^2 \Rightarrow x^2 - ax + b^2 = 0$

Da mesma forma se $BD = AG = x$ pela segunda propriedade temos:

$AG \times GH = GD^2 \Rightarrow ax - x^2 = b^2 \Rightarrow x^2 - ax + b^2 = 0$

Analogamente, tomando $BE = AF = y$ e $BD = AG = y$, com y uma raiz negativa $(y = -x)$ e fazendo os cálculos como nos exemplos acima, obtemos:

$x^2 + ax + b^2 = 0$

Sendo assim, as medidas de $\overline{BD}$ e $\overline{BE}$ são raízes das equações do tipo $x^2 \pm ax + b^2 = 0$.

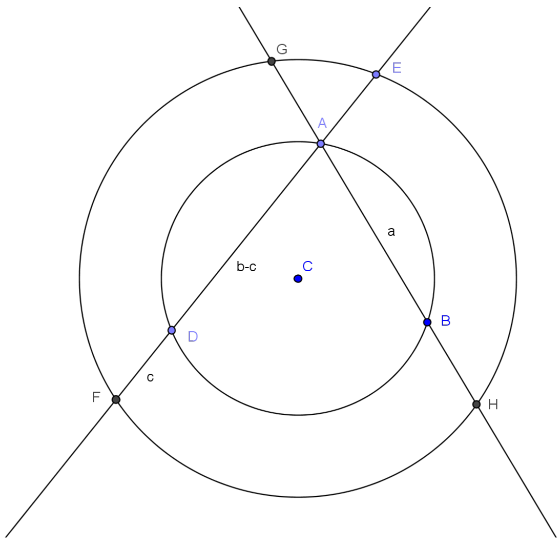
Caso a semicircunferência não intercepte reta $\overleftrightarrow{BD}$, a equação $x^2 \pm ax + b^2 = 0$ não tem raízes reais. Se a reta $\overleftrightarrow{BD}$ tangencia a semicircunferência, a equação $x^2 \pm ax + b^2 = 0$ tem uma raiz real dupla.

4.2 Método de L'Hôpital para Equações do tipo $x^2 \pm ax \pm bc = 0$

Para equações do tipo $x^2 \pm ax \pm bc = 0$, com $a, b, c \in \Re$, o método consiste em, a partir dos coeficientes da equação dada, encontrar duas circunferências e alguns segmentos determinados. A partir da intersecção da circunferência e um segmento, conseguimos as raízes da equação de segundo grau. Subdividiremos a análise em dois casos. O primeiro quando $x^2 \pm ax - bc = 0$ e o segundo quando $x^2 \pm ax + bc = 0$

4.2.1 Equações do tipo $x^2 \pm ax - bc = 0$

Supondo $b > c$, descrevemos uma circunferência qualquer de centro C e cujo diâmetro d seja tal que, $d < a$ e $d < b - c$. Seja um ponto A qualquer da circuferência, traçamos uma corda $\overline{AB}$, tal que $AB = a$, e uma corda $\overline{AD}$ com $AD = b - c$. Prolongamos $\overline{AD}$ até um ponto F tal que $DF = c$. Descrevemos agora uma circunferência de centro C e raio CF e tomamos os pontos E, F, G e H, que são as intersecções entre as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ com a circunferência de raio CF.



Seja $AG = BH = x$, temos $AH = a + x$, e pela propriedade da circunferência que passa pelos pontos $EGFH$:

$EA \times AF = GA \times AH \Rightarrow bc = x^2 + ax \Rightarrow x^2 + ax - bc = 0$

Da mesma forma se $AH = y$, $AG = BH = AH - AB = y - a$,

$EA \times AF = GA \times AH \Rightarrow bc = y^2 - ay \Rightarrow y^2 - ay - bc = 0$

Considerando y uma raiz negativa $(y = -x)$ temos,
$y^2 - ay - bc = 0 \Rightarrow x^2 + ax - bc = 0$

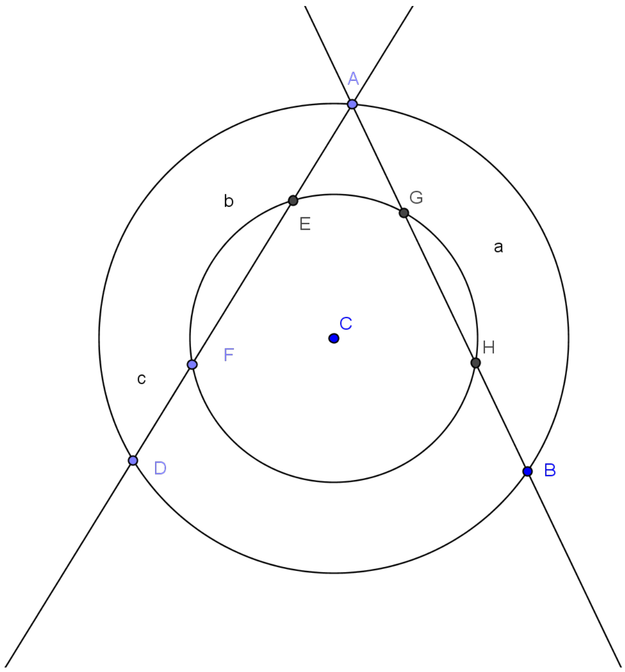
Com o mesmo raciocínio, colocando $AG = y$ com y uma raiz negativa $(y = -x)$ obtemos, $x^2 - ax - bc = 0$.

Com isso, temos que as medidas de $\overline{AG}$ e $\overline{AH}$ são raízes das equações do tipo
$x^2 \pm ax - bc = 0$.

4.2.2 Equações do tipo $x^2 \pm ax + bc = 0$

Descrevemos uma circunferência qualquer de centro C e cujo diâmetro d seja tal que, $d < a$ e $d < b+c$. Tomando um ponto A qualquer da circuferência, traçamos duas cordas $\overline{AB}$, tal que $AB = a$, e $\overline{AD}$ com $AD = b + c$. Na corda $\overline{AD}$ fixamos um ponto F talque $DF = c$.

Descrevemos agora uma circunferência de centro C e raio CF e tomamos os pontos E, F, G e H que são as intersecções entre as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ com a circunferência de raio CF.

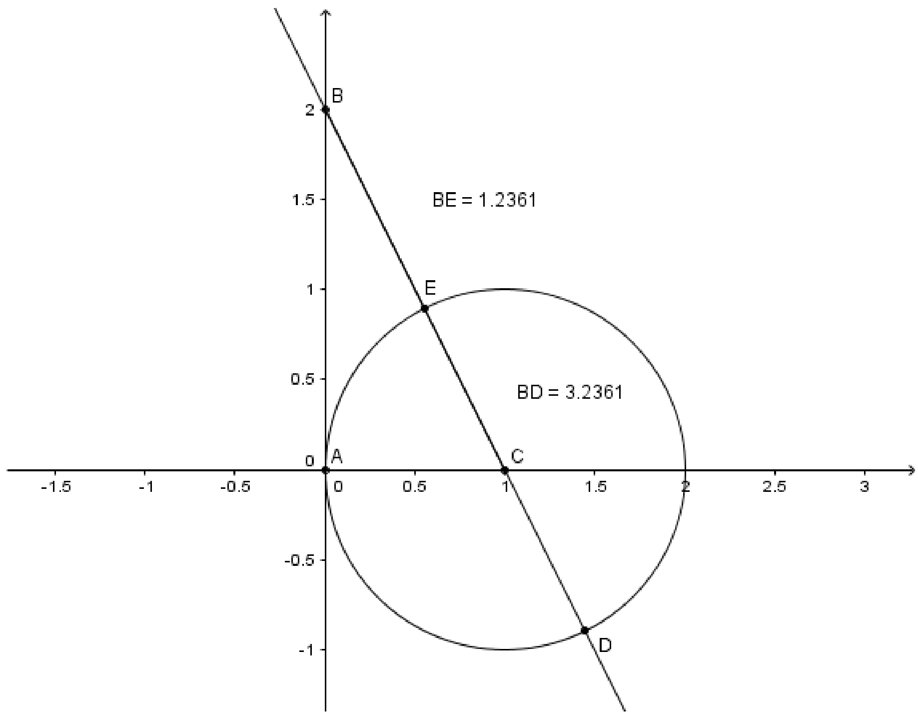


Com o mesmo raciocínio do caso anterior, vemos que as medidas de $\overline{AG}$ e $\overline{AH}$ são raízes das equações do tipo $x^2 \pm ax + bc = 0$

4.3 Considerações sobre os Métodos de L'Hôpital para Equações de Segundo Grau

Nos seus métodos, L'Hôpital não explicita nenhuma utilização do sistema de coordenadas. Porḿ podemos facilmente, tomar essa abordagem, fixando um dos pontos descritos nos métodos anteriores, por exemplo:

- Para a equação $x^2+2x-4=0$, utilizamos o método da seção 4.1.1 ($x^2 \pm ax - b^2 = 0$). Assim, temos que $a = 2$ e $b = 2$. Se fixarmos o ponto $A = (0,0)$ a construção fica da seguinte forma:
  - $AB = b$, então $B = (b, 0) = (2, 0)$.
  - $CA = \dfrac{a}{2}$, então $C = \left(0, \dfrac{a}{2}\right) = (0, 1)$.
  - Circunferência centrada em C e raio CA, ou seja, circunferência centrada em $C = (0,1)$ e raio 1, $x^2 + (y-1)^2 = 1$.
  - A reta $\overleftrightarrow{BC}$: $-2x - y + 2 = 0$, $E = (0.56, 0.89)$ e $D = (1.45, -0.89)$.
  - Então, $BE = 1.2361$ e $BD = 3.2361$



Calculando algebricamente as raízes da equação, sabemos que $x_1 = -1 + \sqrt{5} \approx 1.2361$ e $x_2 = -1 - \sqrt{5} \approx -3.2361$, que em valor absoluto são exatamente os comprimentos de $\overline{BE}$ e $\overline{BD}$ respectivamente. Mais ainda, podemos precisar as raízes, pois sabemos que o comprimento de $\overline{BD}$ é uma raiz negativa.

Capítulo 5

Métodos de L'Hôpital para Equações do Terceiro e Quarto Grau

Já vimos que os babilônios tinham uma álgebra bem desenvolvida, contando com métodos de resolução de equações quadráticas e por sua vez biquadráticas. Em seus textos encontram-se também alguns comentários sobre equações cúbicas. Algumas regras de resolução de cúbicas foram posteriormente comentadas pelos árabes.

Também vimos que foi no século XVI que aconteceu um dos fatos mais importantes para a compreensão deste tipo de problema: na Itália, alguns matemáticos desenvolveram uma resolução algébrica para uma cúbica geral. Mais ainda, desenvolveram um método de transformar uma equação de quarto grau em uma cúbica associada.

Sendo assim, não resolveram apenas os problemas das cúbicas, mas também os das equações de quarto grau, uma vez que sua resolução pode ser feita através da cúbica associada a ela. Essa descoberta foi aperfeiçoada por François Viète e depois por René Descartes, de forma que, podemos analisar as equações de terceiro e quarto grau conjuntamente pois sabemos como relacionar uma a outra.

Ainda, temos a importante contribuição de Omar Khayyam e Descartes, com seus métodos de resolução de equações utilizando cônicas. Amparado por esses conhecimentos, os métodos desenvolvidos por L'Hôpital utilizam a intersecção de duas cônicas para solucionar o problema, como veremos a seguir. [1]

5.1 Métodos de L'Hôpital para Equações de Quarto Grau

Quando escreveu seu livro L'Hôpital, certamente, conhecia os trabalhos de Omar Khayyam e de Descartes, bem como os métodos algébricos de manipulação de equações cúbicas e de quarto grau.

[1](L'Hopital 1776, pp. 299-335)

Começando pelas equações de quarto grau, L'Hôpital utilizou algumas ideias similares a de Khayyam e Descartes, partindo da intersecção de duas cônicas para obter as raízes da equação de quarto grau inicial.

5.1.1 Decomposição da Equação de Quarto Grau Inicial

Para encontrar as cônicas necessárias para a construção das raízes, L'Hôpital utiliza uma equação de quarto grau como base. A escolha dessa equação é proposital, de modo a facilitar as demonstrações feitas a seguir. Devemos ter em mente que, na época, era comum a utilização de um recurso (estilo) de demostração no qual parte-se da ideia que o problema está resolvido e, a partir disso, mostra-se, por passos lógicos, que o que foi feito é valido.
Sendo assim, o ponto inicial é uma equação de quarto grau da forma, com $a, b, c, d, f \in \Re$:

$$x^4 + 2bx^3 + acx^2 - a^2dx - a^3f = 0 \tag{5.1}$$

Tomamos agora uma equação da forma:

$$ay = x^2 + bx \tag{5.2}$$

que elevado ao quadrado é

$$\begin{aligned} x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 &= a^2y^2 \\ &ou \\ x^4 + 2bx^3 &= a^2y^2 - b^2x^2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

É interessante observar que o lado esquerdo de (5.3) é exatemanete os dois primeiros termos de (5.1). Essa é a ideia principal do método: substituir a equação (5.2) e (5.3) em (5.1) de diferentes maneiras, para descobrir quantas e quais cônicas podemos extrair dela.
Então, substituindo a equação (5.3) na equação (5.1), e dividindo por a^2, com $a \neq 0$, (caso $a = 0$ não a equação (5.3) não seria uma cônica [2]) obtemos:

$$y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{c}{a}x^2 - dx - af = 0 \tag{5.4}$$

[2]Em seu livro, L'Hôpital constroi a equação (5.3) a partir de uma incógnita y, tal que o retângulo de lados y e a tenha a mesma área do retângulo de lados x e $x + b$. Com isso a também não pode ser 0 pois, se assim fosse, não poderíamos construir o dito retângulo.

Como (5.2) pode ser escrita na forma $ay - bx = x^2$, podemos substituir o valor de x^2 em (5.4) no lugar de $\frac{b^2}{a^2}x^2$, $\frac{c}{a}x^2$ ou $\frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{c}{a}x^2$, obtendo assim 3 novas equações:

$$y^2 - \frac{b^2}{a}y + \frac{b^3x}{a^2} + \frac{c}{a}x^2 - dx - af = 0 \tag{5.5}$$

$$y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = 0 \tag{5.6}$$

$$y^2 + cy - \frac{b^2}{a}y - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3x}{a^2} - dx - af = 0 \tag{5.7}$$

Agora, subtraindo e somando a equação (5.2) da equação (5.7) obtemos mais 2 equações:

$$y^2 + cy - \frac{b^2}{a}y + ay - x^2 - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3x}{a^2} - dx - af = 0 \tag{5.8}$$

$$y^2 + cy - \frac{b^2}{a}y - ay + x^2 + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3x}{a^2} - dx - af = 0 \tag{5.9}$$

As equações (5.2), (5.5), (5.6), (5.8) e (5.9) nos auxiliarão na construção das raízes da equação proposta. Devemos ter em mente que estas equações representam:

- (5.2) - uma parábola.
- (5.5) - uma circunferência ou uma elipse.
- (5.6) - uma hipérbole ou uma hipérbole equilátera.
- (5.8) - uma hipérbole equilátera.
- (5.9) - uma circunferência.

Os leitores interessados podem ver as justificativas e relações dessas equações com a equação inicial no Apêndice A.

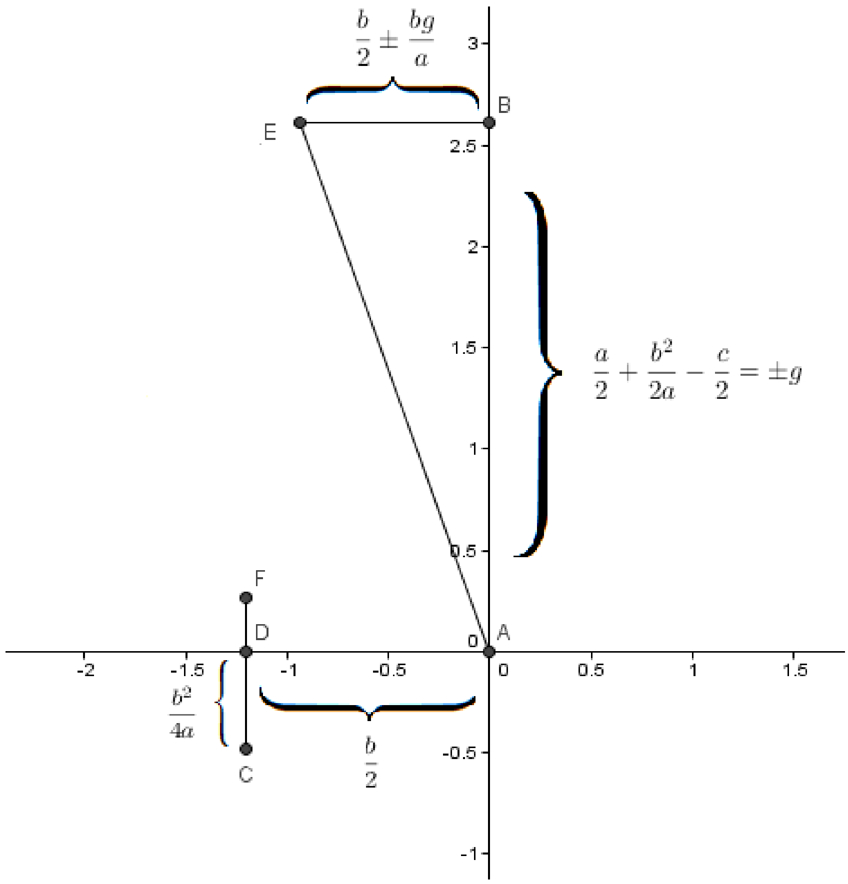
5.1.2 Solução a partir de uma circunferência e uma parábola

Sabemos que os métodos anteriores a L'Hôpital utilizavam a intersecção de duas cônicas para determinar as raízes da equação. Sendo assim, a princípio, para encontrar as raízes das equações do tipo

$$x^4 + 2bx^3 + acx^2 - a^2dx - a^3f = 0$$

utilizamos a parábola descrita na equação (5.2) e a circunferência da equação (5.9).

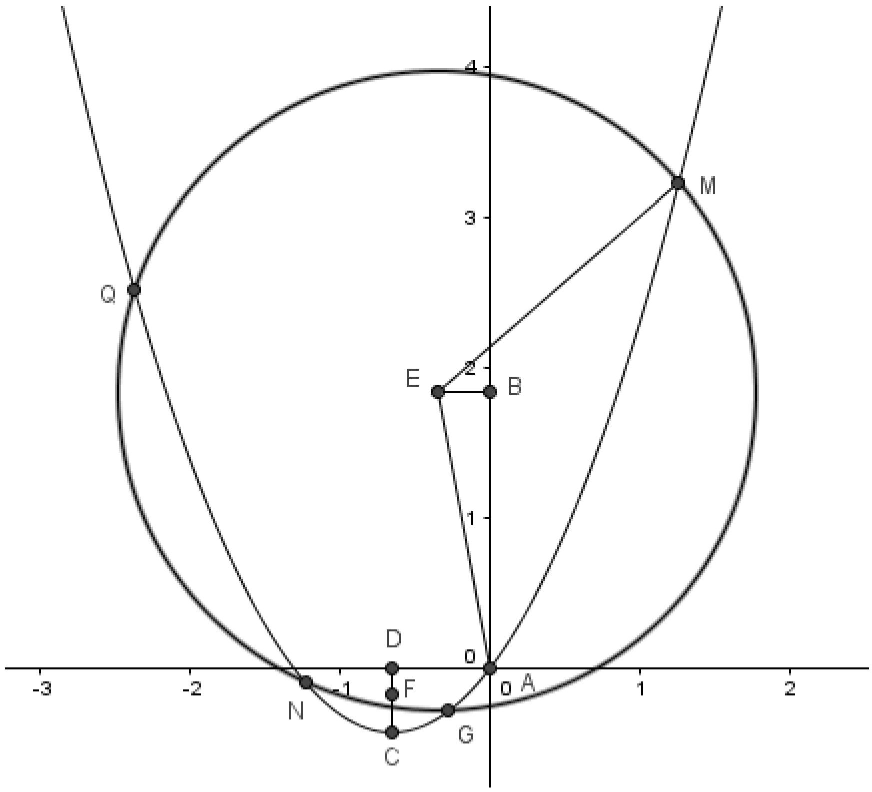
Iniciamos nossa construção tomamos o ponto A fixo na origem, após o ponto D, no eixo x, tal que $AD = \dfrac{b}{2}$. A partir de D, traçamos uma reta ortogonal ao eixo x e fixamos o ponto C tal que $DC = \dfrac{b^2}{4a}$. Marcamos o ponto B no eixo y tal que $AB = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b^2}{2a} - \dfrac{c}{2} = \pm g$, e o
ponto E de modo que $BE = \dfrac{d}{2} \pm \dfrac{bg}{a}$ e é paralela ao eixo x (quando $AB = +g, BE = \dfrac{d}{2} - \dfrac{bg}{a}$ e quando $AB = -g$, $BE = \dfrac{d}{2} + \dfrac{bg}{a}$).



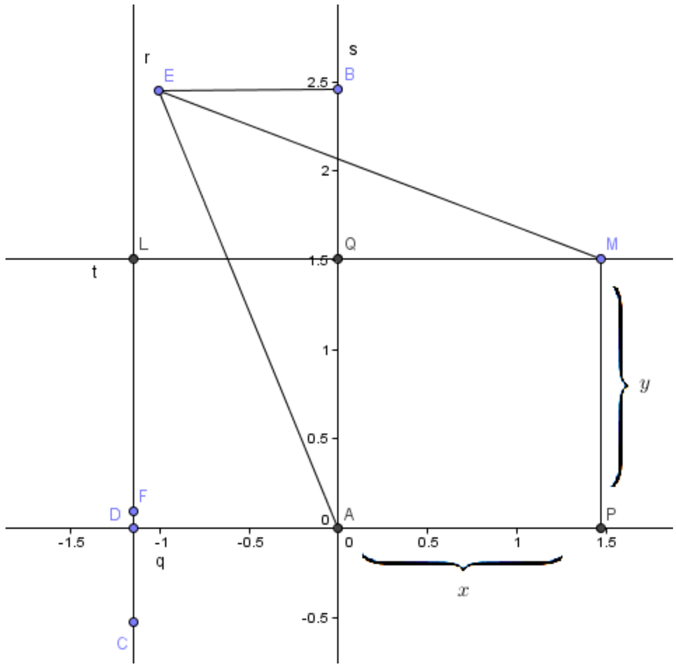
Assim, descrevemos uma parábola com eixo $\overleftrightarrow{CD}$ que passa pelos pontos A, C com vértice em C e parâmetro a (com esses dados conseguimos determinar o foco F e reta diretriz d)

Considerando $EA = m$, fixamos o ponto M tal que $EM = \sqrt{m^2 + af}$ e M pertença a parábola traçada.

Também descrevemos uma circunferência de centro E e raio EM que interceptará a parábola em até 4 pontos, M, G,N e Q.



Para provar que a construção é valida, fixamos o ponto P no eixo x tal que $\overleftrightarrow{AP}$ seja perpendicular a $\overleftrightarrow{PM}$. Marcamos as retas r e s que passam pelos ponto C,F e A,B respectivamente e também a reta t que passa por M e é paralela a $\overleftrightarrow{AP}$, na intersecção das retas r e t o ponto L e intersecção das retas s e t o ponto Q.



Temos que M é um ponto de intersecção da parábola e da circunferência, como vimos anteriormente. Por isso, o ponto P tem a mesma coordenada x que essa intersecção. Considerando assim, $AP = x$ e $PM = y$, temos:

- $ML = AP + AD = x + \dfrac{b}{2}$

- $CL = MP + DC = y + \dfrac{b^2}{4a}$

Com isso queremos mostrar que, considerando o segmento $\overline{AP}$ como tendo medida igual a x é dizer que: a partir dessa construção, a coordenada x do ponto de intersecção da parábola e da circunferência é uma raiz da equação de quarto grau inicial.

Para mostrar a validade dessa construção, utilizaremos uma das propriedades da parábola demostradas por L'Hôpital[3]. Antes, porém, devemos ter em mente as duas definições utilizadas:

[3](L'Hopital 1776, pp.4-5)

- Parábola é considerada como sendo $y^2 = px$, com p sendo o parâmetro da parábola e igual ao quádruplo da distância do vértice ao foco.

- *Ordendada ao eixo* de uma parábola: é uma reta que passa por dois pontos da parábola e é perpendicular ao seu eixo.

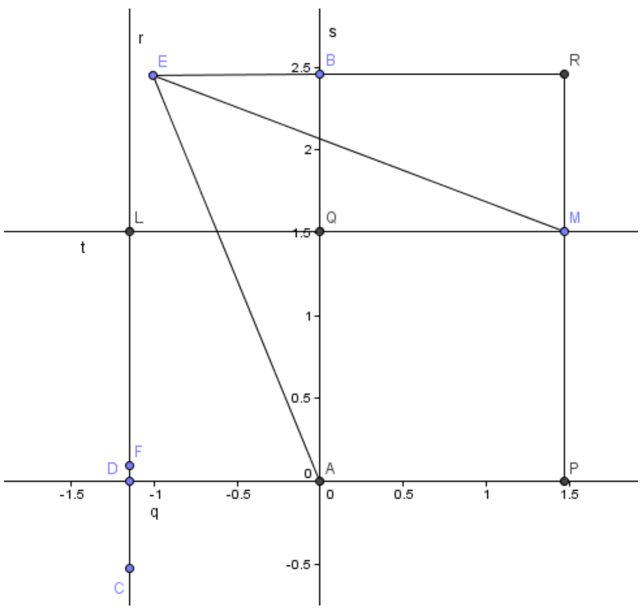
Transcrevendo a propriedade para o nosso problema, teríamos: o quadrado da *ordenada* $\overline{ML}$, é igual a área do retângulo com lados iguais ao parâmetro p da parábola e ao segmento $\overline{CL}$ onde C é o vértice da parábola e L é a intersecção do eixo com a ordenada $\overline{ML}$. Ou seja, $ML^2 = CL \times p$
Prova: Tomando o segmento $CF = m$ e como incógnitas $CL = x$ e $ML = y$, temos que: $MF = m + x$ e $LF = x - m$ ou $LF = m - x$, dependendo da posição entre o foco da parábola e o ponto P. Mas, nos dois casos, pelo triângulo retângulo MLF ficamos com:
$MF^2 = ML^2 + LF^2 \Rightarrow m^2 + 2mx + x^2 = y^2 + m^2 + 2mx + x^2 \Rightarrow$
$4mx = y^2$, como $p = 4m$ temos: $y^2 = px$.
Assim, a propriedade é válida pois, se M pertence a parábola satisfaz a equação $y^2 = px$.

Retornando a contrução, utilizando essa propriedade que acabamos de mostrar, teríamos:
$ML^2 = CL \times a$ então

$$ML^2 = CL \times a \Rightarrow x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + ay \Rightarrow x^2 + bx = ay$$

que é a equação (4.2).

Continuando, tomamos o ponto R que é a interseção da reta $\overleftrightarrow{BE}$ com a reta $\overleftrightarrow{PM}$.



Então, utilizando o triângulo retângulo ERM e o teorema de Pitágoras, temos: $EM^2 = ER^2 + RM^2 \Rightarrow EM^2 = (EB + BR)^2 + (AB - PM)^2 \Rightarrow$

$EB^2 + 2EB \times BR + BR^2 + PM^2 - 2AB \times PM + AB^2$

Mas pela construção,

$EM^2 = m^2 + af$ e $EA = m$, como $EA^2 = EB^2 + AB^2$ pelo triângulo retângulo EAB, temos $EM^2 = m^2 + af = EB^2 + AB^2 + af$, então:

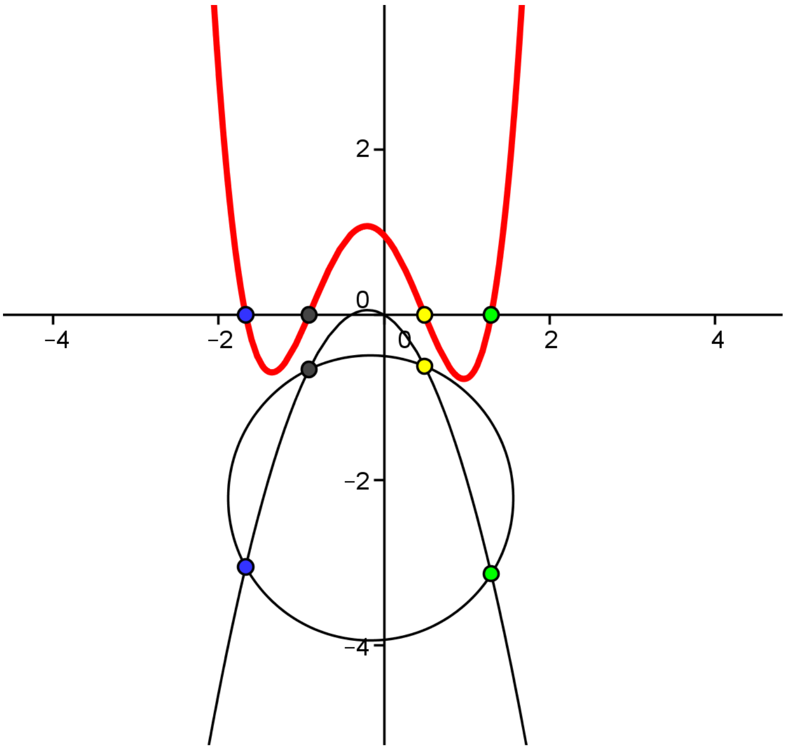
$2EB \times BR + BR^2 + PM^2 - 2AB \times PM + AB^2 = af$, que substituindo os valores de EB, AB, BR e PM chegamos a:

$y^2 + cy - \dfrac{b^2}{a}y - ay + x^2 + bx - \dfrac{bc}{a}x + \dfrac{b^3x}{a^2} - dx - af = 0$, que é a equação (5.9).

Por sua vez, substituindo nessa última os valores conhecidos da equação (5.2) encontramos a equação de quarto grau inicial.

$$x^4 + 2bx^3 + acx^2 - a^2dx - a^3f = 0$$

Finalmente, se considerarmos a construção feita, temos que a medida de $\overline{AP}$, ou simplesmente, a coordenada de x de uma das intersecções da parábola descrita por (5.2) e da circunferência descrita por (5.9), será a raiz da equação de quarto grau inicial. Podemos fazer o mesmo raciocínio para as outras intersecções e chegar a resultados similares, mostrando que elas também serão raízes da equação inicial.



Como os pontos, retas e cônicas que utilizamos dependem dos coeficientes da equação principal, alterando-se seus valores podemos obter mudanças significativas nos resultados. Considerando a equação principal

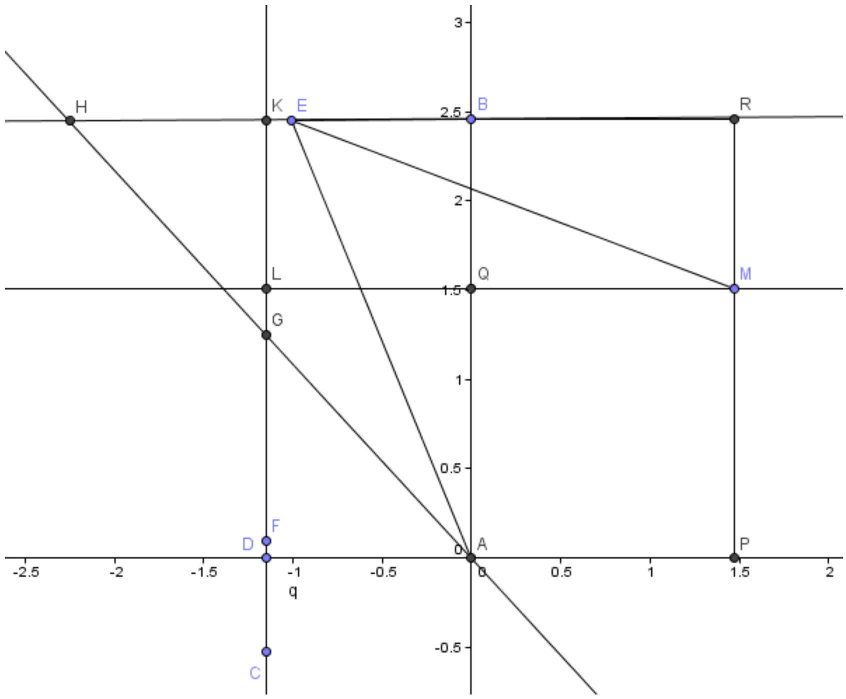
$$x^4 + 2bx^3 + acx^2 - a^2dx - a^3f = 0$$

Temos que:

- O ponto $D = \left(-\dfrac{b}{2}, 0\right)$
- O ponto $C = \left(-\dfrac{b}{2}, -\dfrac{b^2}{4a}\right)$
- O ponto F tal que, $CF = \dfrac{a}{4}$, então, $F = \left(-\dfrac{b}{2}, -\dfrac{b^2}{4a} + \dfrac{a}{4}\right)$
- O ponto B definido no eixo das ordenadas tal que $AB = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b^2}{2a} \pm \dfrac{c}{2}$, ou seja, $B = \left(0, \pm|\frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a}| \pm |\frac{c}{2}|\right) = (0, g)$.
  - Se a for positivo
    - E o coeficiente de x^2 for positivo, $B = \left(0, ||\frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a}| - |\frac{c}{2}||\right)$.
    - E o coeficiente de x^2 for negativo, $B\left(0, ||\frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a}| + |\frac{c}{2}||\right)$.
  - Se a for negativo
    - E o coeficiente de x^2 for positivo, $B = \left(0, -||\frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a}| - |\frac{c}{2}||\right)$.
    - E o coeficiente de x^2 for negativo, $B\left(0, -||\frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a}| + |\frac{c}{2}||\right)$.
- O ponto E definido na reta $\overleftrightarrow{BE}$ paralela ao eixo das abscissas tal que $BE = \pm\dfrac{bg}{a}\pm\dfrac{d}{2}$, ou seja, $E = \left(\pm||\dfrac{bg}{a}| \pm |\dfrac{d}{2}||, g\right)$.
  - Se $\dfrac{g}{a}$ e o coeficiente de x^3 tiverem o mesmo sinal
    - E o coeficiente de x for positivo, $E = (-||\frac{bg}{a}| + |\frac{d}{2}||, g)$.
    - E o coeficiente de x for negativo, $E = (-||\frac{bg}{a}| - |\frac{d}{2}||, g)$.
  - Se $\dfrac{g}{a}$ e o coeficiente de x^3 tiverem sinais opostos
    - E o coeficiente de x for positivo, $E = (||\frac{bg}{a}| + |\frac{d}{2}||, g)$.
    - E o coeficiente de x for negativo, $E = (||\frac{bg}{a}| - |\frac{d}{2}||, g)$.

- O raio da circunferência $EM = \sqrt{m^2 \pm |af|}$
  - Se o termo independente for negativo $EM = \sqrt{m^2 + |af|}$.
  - Se o termo independente for positivo $EM = \sqrt{m^2 - |af|}$.
  - Se o termo independente for nulo $EM = AE = m$

Continuando a análise, podemos marcar alguns pontos para facilitar nosso entendimento da construção. Marcamos o ponto G no eixo da parábola tal que $DG = \dfrac{a}{2}$, o ponto K na intersecção de $\overleftrightarrow{BE}$ com o eixo da parábola, e o ponto H na intersecção de $\overleftrightarrow{BE}$ com $\overleftrightarrow{AG}$.

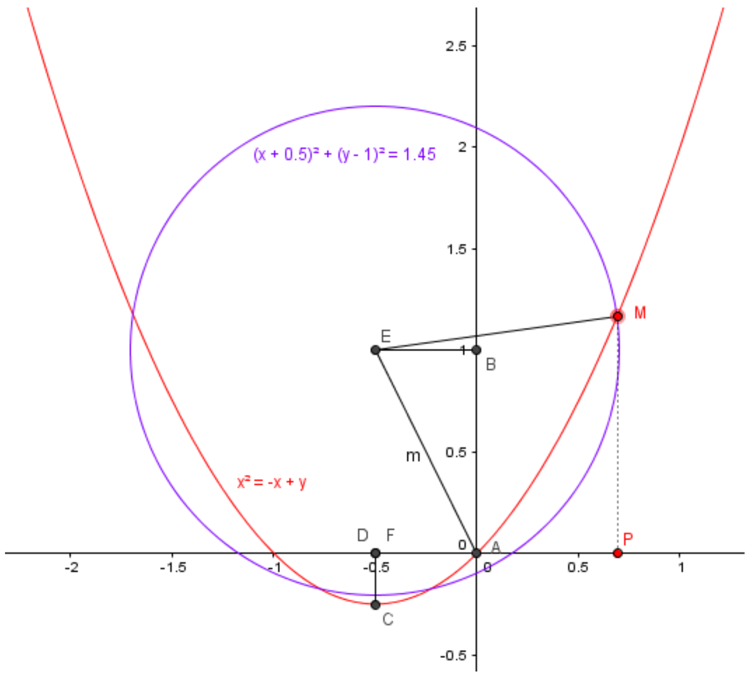


Considerando essa construção, se o coeficiente de x^3 for nulo a reta $\overleftrightarrow{AB}$ será o eixo da parábola e os pontos A,D e C serão coincidentes (na origem, e por sua vez, serão o vértice da parábola). Da mesma maneira, os pontos H, K e B são coincidentes, o que torna a construção das cônicas muito mais simples, pois devemos obter apenas 2 pontos, $H = K = B$ e E, o que já sabemos como fazer.

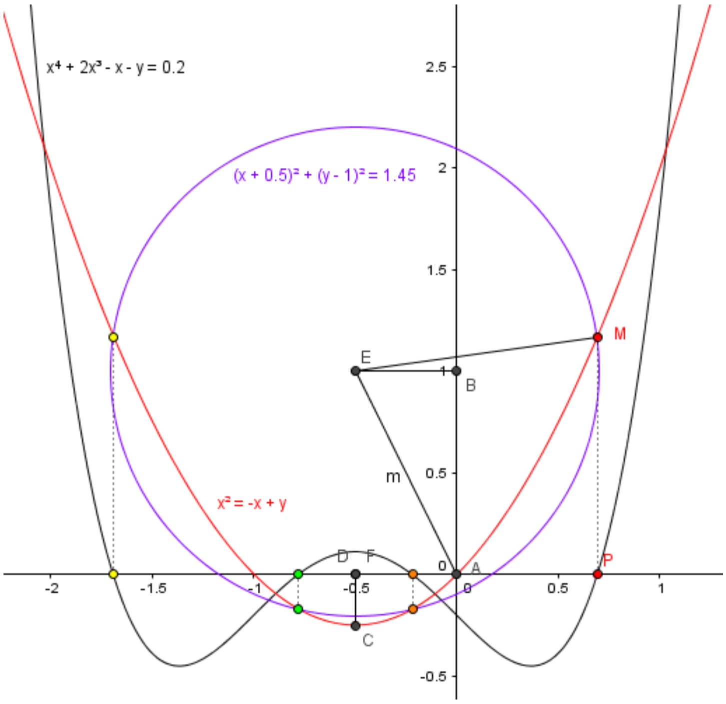
Exemplo 1:

Seja $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$ e $f = 0.2$ a equação principal seria $x^4 + 2x^3 - x - 0.2 = 0$ e fazendo a construção temos:

- $A = (0, 0)$.
- $D = (-\frac{b}{2}, 0) = (-0.5, 0)$.
- $C = (-\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4a}) = (-0.5, -0.25)$.
- $F = (-\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4a} + \frac{a}{4}) = (-0.5, 0)$.
- A parábola seria a com vértice em C, foco em F, parâmetro a e portanto diretriz $y = -0.5$, isto é, $y = x^2 + x$.
- $B = (0, ||\frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a}| - |\frac{c}{2}||) = (0, 1) = (0, g)$.
- $E = (-||\dfrac{bg}{a}| - |\dfrac{d}{2}||, g) = (-0.5, 1)$.
- $EM = \sqrt{m^2 + |af|}$, como $AE = m = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $EM = \sqrt{\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{5}} = \sqrt{1.45} \approx 1.2$.
- A circunferência seria a centrada em E com raio $EM = \sqrt{1.45}$, ou seja, $(x + 0.5)^2 + (y - 1)^2 = 1.45$.
- Como a parábola é $y = x^2 + x$, temos que $M = (0.69, 1.17)$ e $P = (0.69, 0)$.



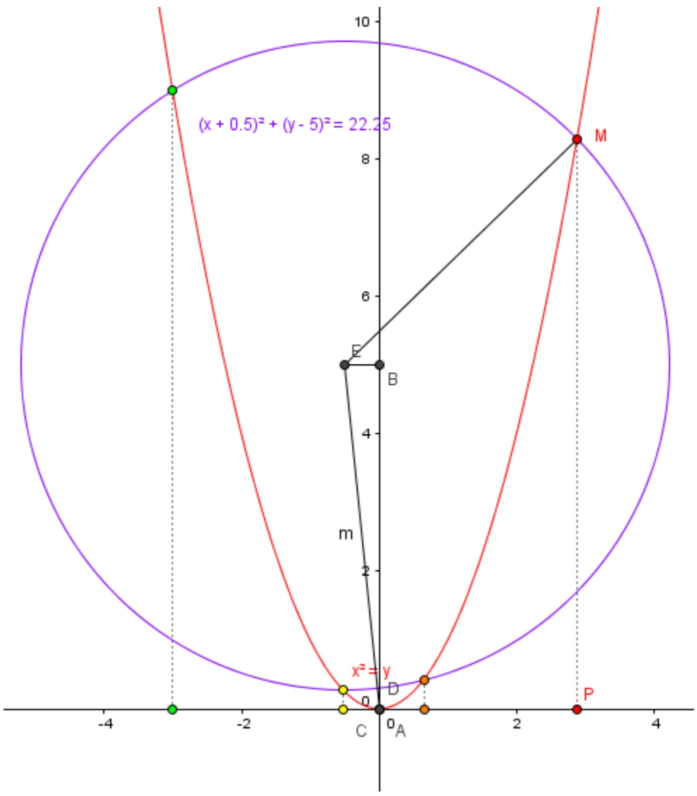
Tomando também as outras intersecções, temos que as respectivas coordenadas x desses pontos, representam as raízes da equação de quarto grau inicial, que são, $x_1 \approx 0.69$, $x_2 \approx -0.22$, $x_3 \approx -0.78$ e $x_4 \approx -1.69$ conforme a figura abaixo:



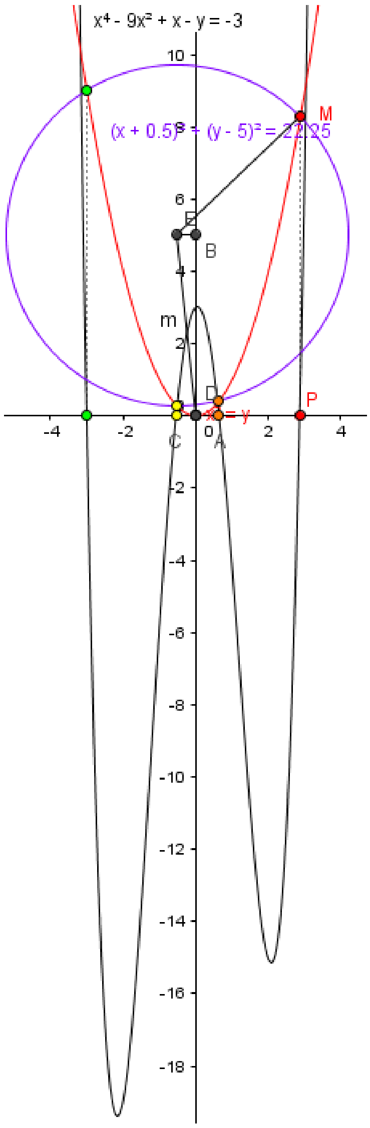
Exemplo 2:

Seja $a = 1$, $b = 0$, $c = -9$, $d = -1$ e $f = -3$ a equação principal seria $x^4 - 9x^2 + x + 3 = 0$ e fazendo a construção temos:

- Como não temos o termo cúbico, $A = D = C = (0, 0)$.
- $F = (-\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4a} + \frac{a}{4}) = (0, 0.25)$.
- A parábola seria a com vértice em C, foco em F, parâmetro a e portanto diretriz $y = -0.25$, isto é, $y = x^2$.
- $B = (0, ||\frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a}| + |\frac{c}{2}||) = (0, 5) = (0, g)$.
- $E = (-||\dfrac{bg}{a}| + |\dfrac{d}{2}||, g) = (-0.5, 5)$.
- $EM = \sqrt{m^2 - |af|}$, como $AE = m = \dfrac{\sqrt{101}}{2} = 5.02$, $EM = \sqrt{5.02^2 - 3} = \sqrt{22.25}$.
- A circunferência seria a centrada em E com raio $EM = \sqrt{22.25}$, ou seja, $(x + 0.5)^2 + (y - 5)^2 = 22.25$.
- Como a parábola é $y = x^2$, temos que $M = (2.87, 8.29)$ e $P = (2.87, 0)$.



Tomando também as outras intersecções, temos que as respectivas coordenadas x desses pontos, representam as raízes da equação de quarto grau inicial, que são, $x_1 \approx 2.87$, $x_2 \approx 0.65$, $x_3 \approx -0.53$ e $x_4 = -3$, conforme a figura abaixo:



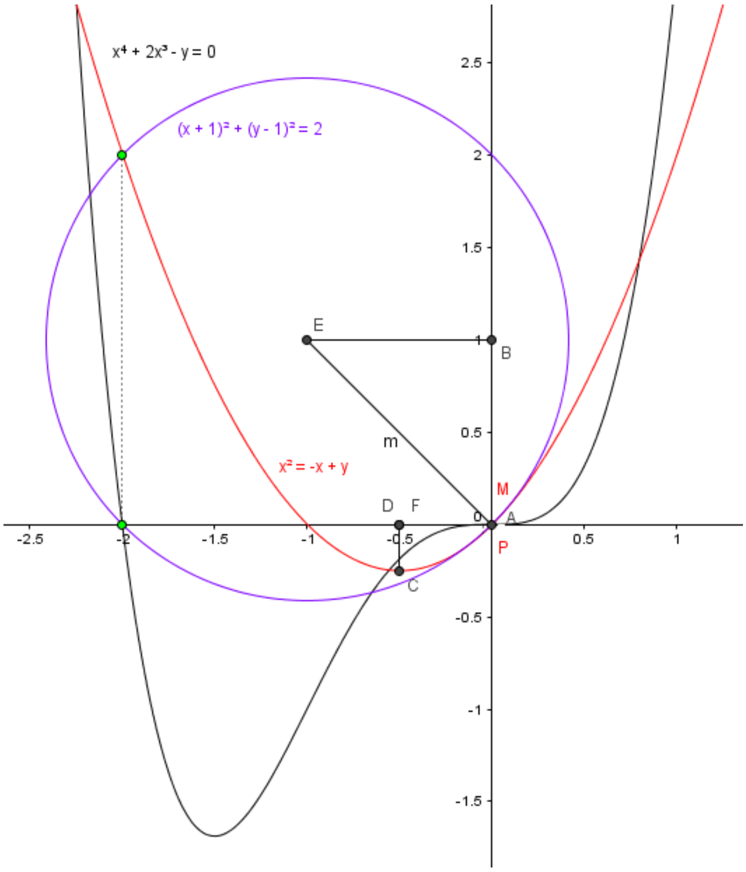
5.1.3 Considerações sobre o método para equações do quarto grau

Não só nos exemplos anteriores, mas também nos demais, devemos levar em conta os erros computacionais e de aproximação ao fazer os cálculos dessas raízes. Por exemplo, para 14 dígitos significativos, na equação $x^4 + 2x^3 - x - 0.2 = 0$ teríamos as raízes, $x_1 \approx 0.69198170843764$, $x_2 \approx -0.21861128887238$, $x_3 \approx -0.78138871112761$ e $x_4 \approx -1.6919817084376 49$. Mas isso não vem ao caso pois a idéia principal é mostrar a validade da construção, isto é, tomando convenientemente os coeficientes da equação principal, podemos encontrar raízes exatas, por exemplo:

Seja $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$ e $f = 0$ a equação principal seria $x^4 + 2x^3 = 0$ e fazendo a construção temos:

- $A = (0, 0)$.
- $D = (-\frac{b}{2}, 0) = (-0.5, 0)$.
- $C = (-\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4a}) = (-0.5, -0.25)$.
- Como $CF = \frac{a}{4}$, $F = (-\frac{b}{2}, -\frac{b^2}{4a} + \frac{a}{4}) = (-0.5, 0)$.
- A parábola seria a com vértice em C, foco em F, parâmetro a e portanto diretriz $y = -0.5$, isto é, $y = x^2 + x$.
- $B = (0, ||\frac{a}{2} + \frac{b^2}{2a}| - |\frac{c}{2}||) = (0, 1) = (0, g)$.
- $E = (-||\frac{bg}{a}| - |\frac{d}{2}||, g) = (-1, 1)$.
- $EM = AE$, como $AE = m = \sqrt{2}$, $EM = \sqrt{2}$.
- A circunferência seria a centrada em E com raio $EM = \sqrt{2}$, ou seja, $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$.
- Como a parábola é $y = x^2 + x$, temos que $M = P = (0, 0)$.

Nesse caso específico, resovendo algebricamente, temos que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e $x_4 = -2$, assim como as coordenadas x dos pontos de intersecção das cônicas na construção abaixo:



É importante lembrar também que a construção a partir dos pontos é uma opção viável, uma vez que pode ser feita manualmente com régua e compasso. Em algumas atividades, caso tenhamos um recurso computacional, também podemos determinar as raízes apenas plotando os gráficos e observando as intersecções das cônicas representadas pelas equações (5.2) e (5.9).

5.2 Métodos de L'Hôpital para Equações do Terceiro Grau

Para equações de terceiro grau, L'Hôpital descreve um método similar ao de resolução de uma equação do quarto grau. Para facilitar os cálculos, ele utliza um método contrário ao que foi descoberto por Cardano. Partindo de uma equação cúbica e chegando a uma equação de quarto grau, sem o termo cúbico. A partir dessa equação, poderíamos chegar a uma equação de quarto grau com todos os termos mas, com o vimos, é mais fácil fazer a construção partindo de uma equação de quarto grau sem o termo cúbico.

5.2.1 Solução a partir de uma circunferência e uma parábola

Tomando uma equação de terceiro grau da forma, com $a', b', p, q \in \Re$:

$$x^3 - b'x^2 + a'px + a'^2q = 0 \tag{5.10}$$

Basta multiplicá-la por $x + b'$ ou $x - b'$, quando o sinal do segundo termo da equação for negativo ou positivo respectivamente, obtendo assim uma equação do quarto grau da forma:

$$x^4 + (a'p - b'^2)x^2 + a'(a'q + b'p)x + a'^2b'q = 0 \tag{5.11}$$

Nesses casos, sabemos determinar os pontos A, D e C, pois teremos $A = D = C = (0, 0)$. Também sabemos que $H = B = K$ e conhecemos as fórmulas para determinar os pontos B e E. O que devemos fazer em seguida é analisar a equação obtida (5.11) e compará-la com a principal (5.1), obtendo:

$2b = 0,\qquad ac = a'p - b'^2,\qquad -a^2d = a'(a'q + b'p),\qquad -a^3f = a'^2b'q$

fazendo $a = a'$, temos que:

$b = 0,\qquad c = p - \dfrac{b'^2}{a'},\qquad d = -q - \dfrac{b'p}{a'},\qquad -af = b'q$

O que nos permite determinar os pontos B, E e M como sendo:

- $AB = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b^2}{2a} \pm \dfrac{c}{2} = \dfrac{a}{2} \pm \dfrac{c}{2} = \dfrac{a'}{2} \pm \dfrac{b'^2}{2a'} \pm \dfrac{p}{2} = g'$
- $BE = \pm\dfrac{bg}{a} \pm \dfrac{d}{2} = \pm\dfrac{d}{2} = \pm\dfrac{q}{2} \pm \dfrac{b'p}{2a'}$
- $EM = \sqrt{m^2 \pm b'q}$

Com esses pontos, podemos construir a parábola, a circunferência e suas intersecções e, portanto, as raízes da equação de terceiro grau.

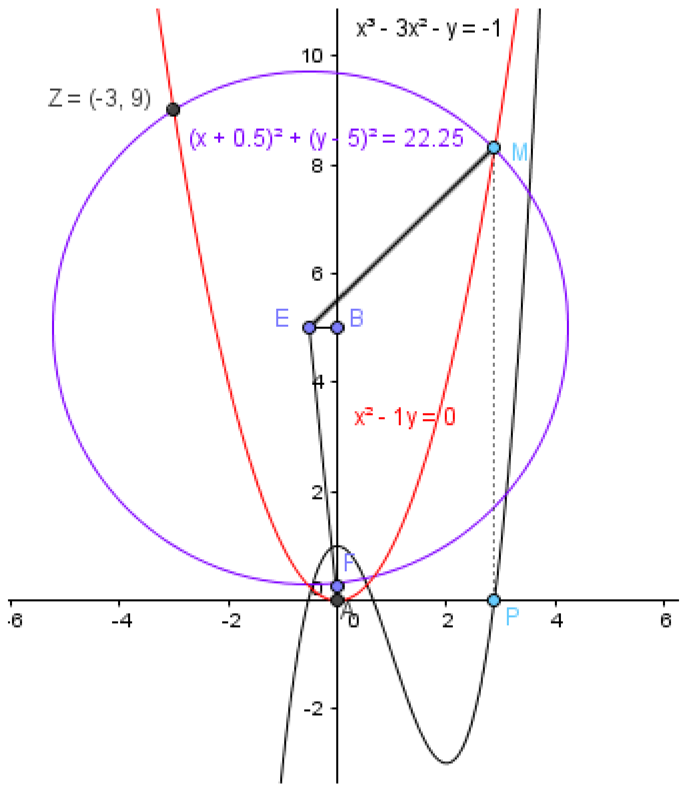
Para esse tipo de equação, L'Hôpital faz uma construção levemente diferente, mas que, essencialmente, leva aos mesmos pontos da cosntrução feita para as equações de terceiro grau. Farei a seguir uma versão que utiliza a construção do quarto grau com algumas modificações, os leitores interessados podem ver a construção fiel no Apêndice B.

- Os pontos $A = D = C = (0, 0)$
- O ponto F tal que, $CF = \frac{a'}{4}$, então, $F = \left(0, -\frac{b^2}{4a'} + \frac{a'}{4}\right)$
- O ponto B definido no eixo das ordenadas tal que $AB = \frac{a'}{2} \pm \frac{b'^2}{2a'} \pm \frac{p}{2} = g$, ou seja,

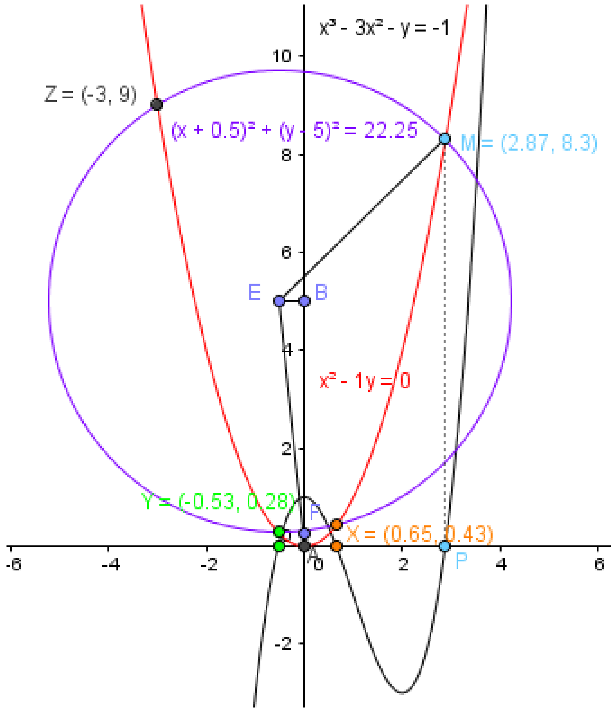
  $B = (0, \pm||\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'}| \pm |\frac{p}{2}||) = (0, g')$.
  - Se a for positivo
    * Se o coeficiente de x for positivo $B = (0, +||\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'}| - |\frac{p}{2}||)$.
    * Se o coeficiente de x for negativo $B = (0, +||\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'}| + |\frac{p}{2}||)$.
  - Se a for negativo
    * Se o coeficiente de x for positivo $B = (0, -||\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'}| - |\frac{p}{2}||)$.
    * Se o coeficiente de x for negativo $B = (0, -||\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'}| + |\frac{p}{2}||)$.
- O ponto E definido na reta $\overleftrightarrow{BE}$ paralela ao eixo das abscissas tal que $BE = \pm\frac{q}{2}\pm\frac{b'p}{2a'}$, ou seja, $E = (\pm|\frac{q}{2}| \pm |\frac{b'p}{2a'}|, g')$.
  - Se o coeficiente de x^2 for positivo
    * E termo independente for positivo $E = (||\frac{b'p}{2a'}| + |\frac{q}{2}||, g')$.
    * E termo independente for negativo $E = (||\frac{b'p}{2a'}| - |\frac{q}{2}||, g')$.
  - Se o coeficiente de x^2 for negativo
    * Se o termo independente for positivo $E = (-||\frac{b'p}{2a'}| + |\frac{q}{2}||, g')$.
    * Se o termo independente for negativo $E = (-||\frac{b'p}{2a'}| - |\frac{q}{2}||, g')$.
  - Se o coeficiente de $x^2 = 0$, $E = (-\frac{q}{2}, g')$.
- O raio da circunferência $EM = \sqrt{m^2 - b'q}$

Por exemplo:
Tomando $a' = 1$, $b' = 3$, $p = 0$ e $q = 1$ a equação de terceiro seria $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ e fazendo a construção temos:

- $A = D = C = (0, 0)$.
- $B = (0, ||\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'}| - |\frac{p}{2}||) = (0, 5) = (0, g')$.
- Como $CF = \frac{a}{4}$, $F = (0, \frac{a}{4}) = (0, 0.25)$.
- A parábola seria a com vértice em C, foco em F, parâmetro a e portanto diretriz $y = -0.25$, isto é, $y = x^2$.
- $E = (-||\frac{b'p}{2a'}| + |\frac{q}{2}||, g') = (-0.5, 5)$.
- $EM = \sqrt{m^2 - b'q}$, como $AE = m = \sqrt{101/4}$, $EM = \sqrt{m^2 - b'q} = 4.72$.
- A circunferência seria a centrada em E com raio $EM = 4.72$, ou seja, $(x + 0.5)^2 + (y - 5)^2 = 22.25$.
- Como a parábola é $y = x^2$, temos que $M = (2.87, 8.3)$ e $P = (2.87, 0)$.



Feito isso, devemos descartar a intersecção que tenha como coordenada de x o mesmo valor, em valor absoluto, que b'. No nosso exemplo, seria o ponto $Z = (-3, 9)$. Os outros pontos, assim como no caso das equações do quarto grau, são raízes da nossa equação proposta. De fato, resolvendo algebricamente as raízes da equação são $x_1 \approx 0.65$, $x_2 \approx 2.87$ e $x_3 \approx -0.53$ que são as coordenadas de x dos pontos X, Y e M que são os pontos de intersecção entre a parábola e a circunferência.



5.2.2 Considerações sobre o método para equações do terceiro grau

Assim como as equações de quarto grau, também podemos determinar as raízes apenas plotando os gráficos e observando as intersecções das cônicas representadas pelas equações (5.2) e (5.9). Lembrando que, para as equações de terceiro grau antes de plotar os gráficos, devemos utilizar a relação entre os coeficientes que encontramos na página 52.

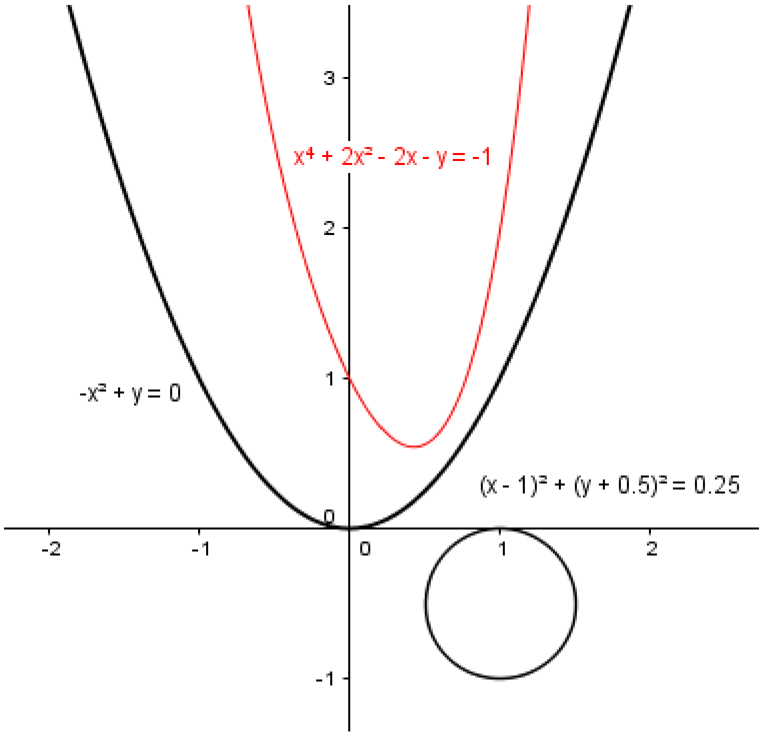
Outra opção é a de apenas utilizar o primeiro passo feito na construção, chegando a uma equação do quarto grau e resolvendo como na seção anterior. Nesse caso, como multiplicamos a equação cúbica por $x \pm b'$ sabemos que uma das raízes é $x = \pm b'$, as outra raízes encontradas serão as raízes da equação cúbica.

Tomando o mesmo exemplo anterior: $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$, então basta multiplicá-la por $x+3$ obtendo, $x^4 - 9x^2 + x + 3$ que tem raízes $x_1 = -3$, $x_2 = -0.53$, $x_3 = 0.65$ e $x_4 = 2.87$ como no exemplo 2 da secção 5.1. Como multiplicamos por $x + 3$, sabemos que podemos descartar a raiz $x_1 = -3$, ficando com $x_2 = -0.53$, $x_3 = 0.65$ e $x_4 = 2.87$, que são as mesmas encontradas utilizando o método do terceiro grau.

5.3 Raízes e Pontos de Intersecção

Os pontos de intersecção entre a parábola e a circunferência têm relação direta com a quantidade e o tipo de raízes da equação proposta, uma vez que cada intersecção representa uma raíz. Então, considerando as possibilidades e determinando as raízes apenas plotando os gráficos e observando as intersecções das cônicas representadas pelas equações (5.2) e (5.9), temos:

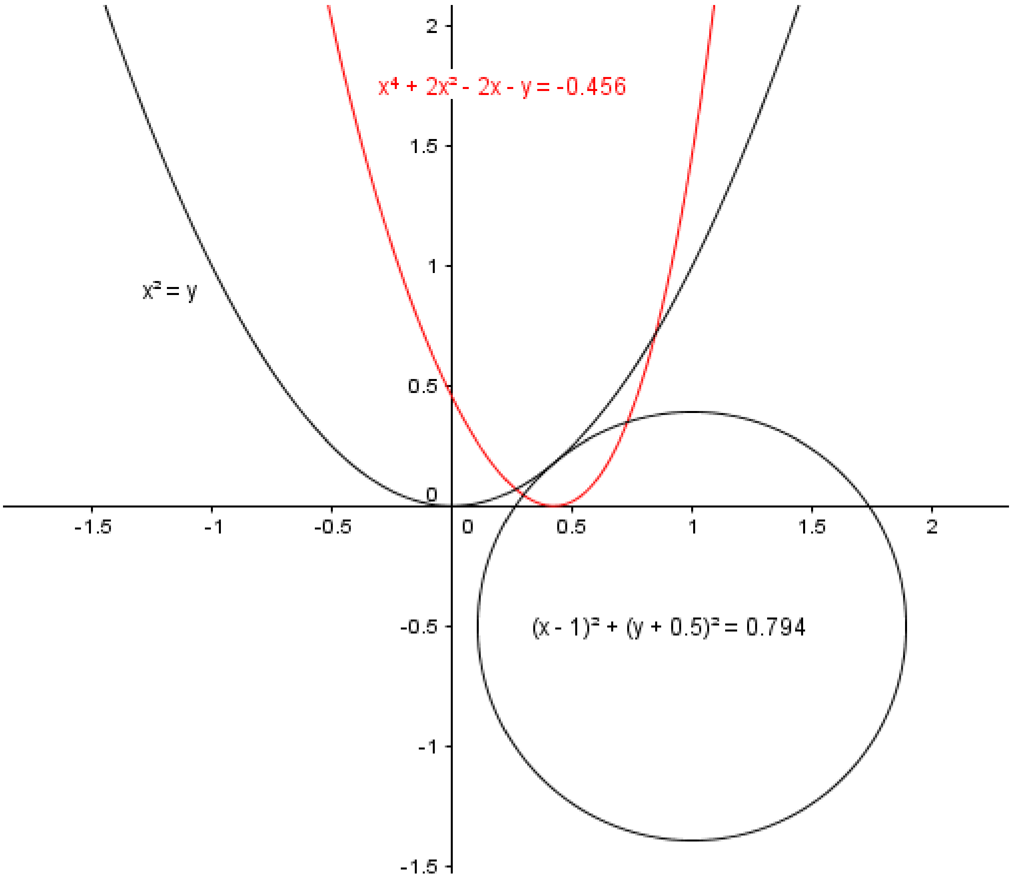
1. Se a circunferência não intercepta a parábola em nenhum ponto temos que todas as raízes da equação são imaginárias, 3 ou 4, dependendo de seu grau.
Para $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 2$ e $f = -1$ a equação principal seria $x^4+2x^2-2x+1 = 0$, a parábola $y = x^2$ e a circunferência $(x-1)^2+(y+0.5)^2 = 0.25$. Pela construção, temos que não há pontos de intersecção entre a parábola e a circunferência, conforme a figura abaixo:



Considerando a equação principal, sabemos que suas raízes são $x_1 \approx 0.48 + 0.42i$, $x_2 \approx 0.48 - 0.42i$, $x_3 \approx -0.48 + 1.51i$ e $x_4 =\approx -0.48 - 1.51i$, ou seja, todas imaginárias, coincidindo com as coordenadas x dos pontos de intersecção entre as cônicas.

2. Se a parábola tangencia a circunferência em um ponto, temos que a equação tem uma raiz real dupla.

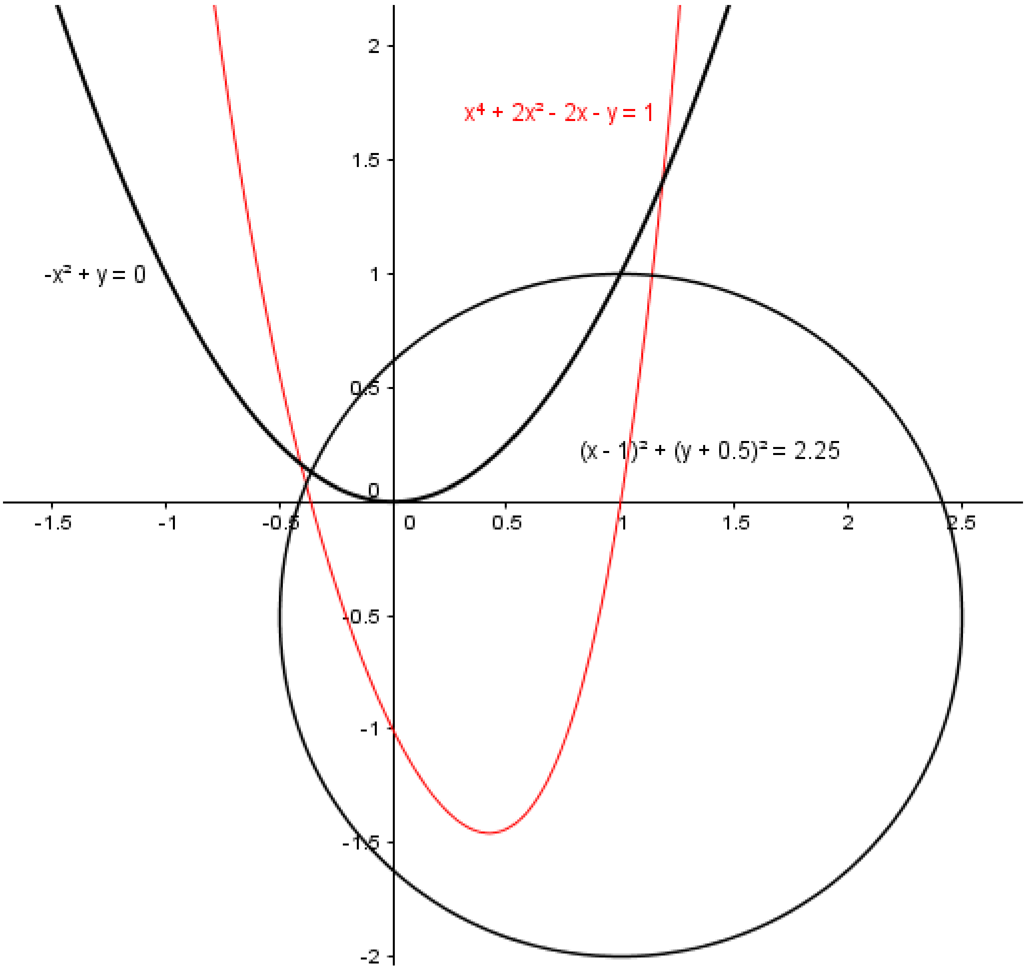
Para $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 2$ e $f = -0.4561$ a equação principal seria $x^4 + 2x^2 - 2x + 0.4561 = 0$, a parábola $y = x^2$ e a circunferência $(x-1)^2 + (y+0.5)^2 = 0.7939$. Pela construção, temos que há um ponto de tangência entre a parábola e a circunferência, conforme a figura abaixo:



Considerando a equação principal, sabemos que suas raízes são $x_1 = x_2 \approx 0.42$, $x_3 \approx -0.42 + 1.53i$ e $x_4 =\approx -0.42 - 1.53i$, ou seja, uma raiz real dupla e duas imaginárias, coincidindo com as coordenadas x do ponto de tangência entre as cônicas.

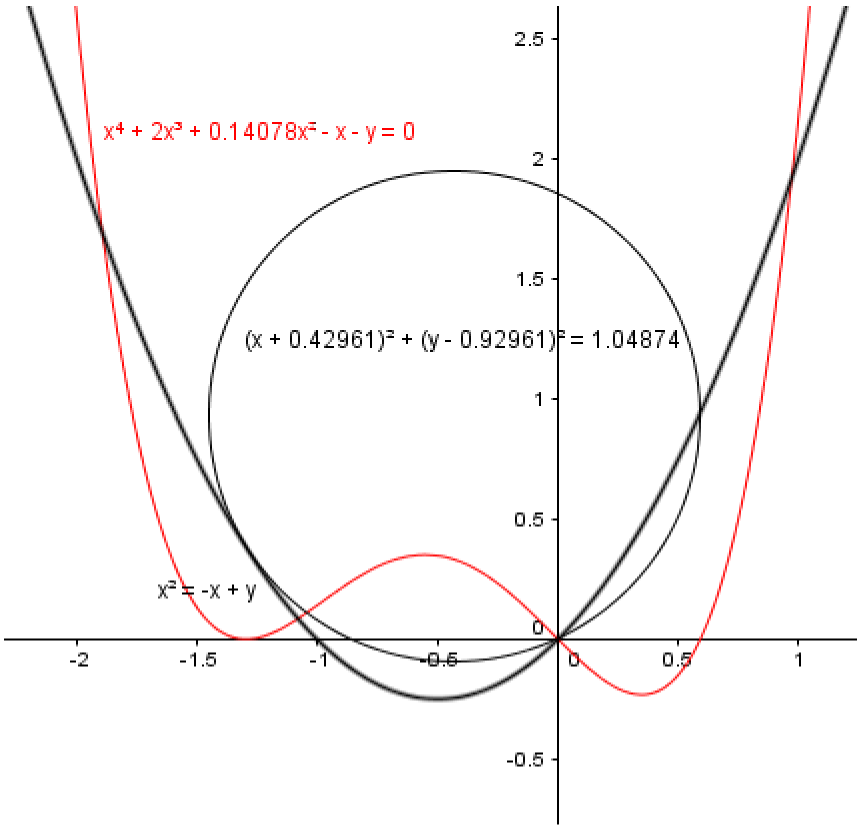
3. Se a parábola intercepta a circunferência em dois pontos, temos que a equação tem duas raízes reais distintas.

Para $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 2$ e $f = 1$ a equação principal seria $x^4+2x^2-2x-1 = 0$, a parábola $y = x^2$ e a circunferência $(x - 1)^2 + (y + 0.5)^2 = 2.25$. Pela construção, temos dois pontos de intersecção entre a parábola e a circunferência, conforme a figura abaixo:



Considerando a equação principal, sabemos que suas raízes são $x_1 = 1$, $x_2 \approx -0.36$, $x_3 \approx -0.32 + 1.63i$ e $x_4 =\approx -0.32 - 1.63i$, ou seja, duas raízes reais distintas e duas imaginárias, coincidindo com as coordenadas x dos pontos de intersecção entre as cônicas.

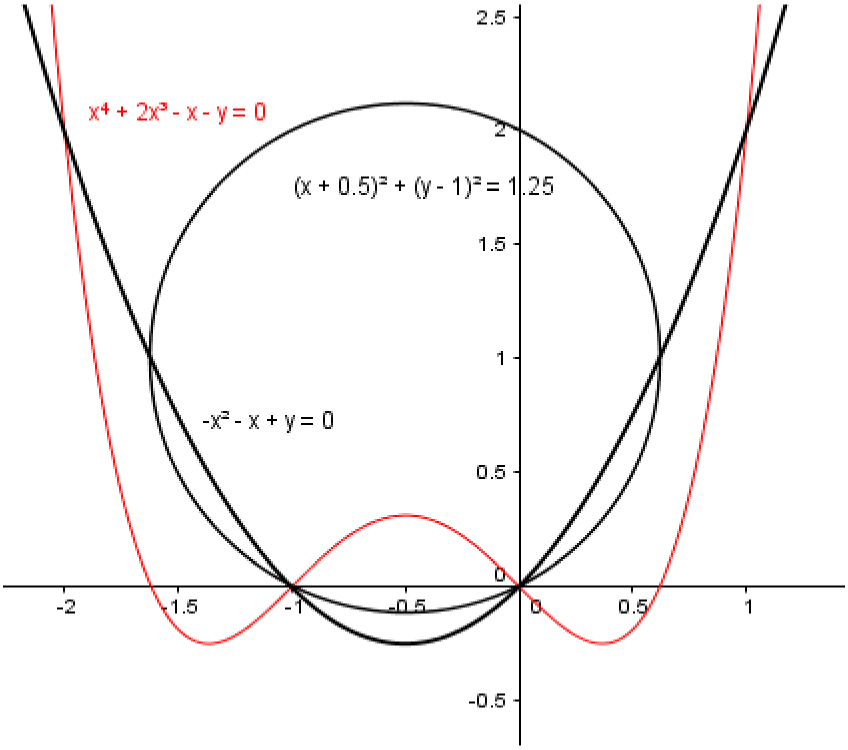
4. Se a parábola tangencia a circunferência em um ponto e a intercepta em outros dois, temos que a equação tem três raízes reais distintas, sendo uma delas dupla.
Para $a = 1$, $b = 1$, $c = 0.14078$, $d = 1$ e $f = 0$ a equação principal seria $x^4 + 2x^3 + 0.14078x^2 - x = 0$, a parábola $y = x^2 - x$ e a circunferência $(x + 0.42961)^2 + (y - 0.92961)^2 = 1.04874$. Pela construção, temos 2 pontos de intersecção e um ponto de tangência entre a parábola e a circunferência, conforme a figura abaixo:



Considerando a equação principal, sabemos que suas raízes são $x_1 = 0$, $x_2 \approx 0.594$, $x_3 = x_4 \approx -1.296$, ou seja, duas raízes reais distintas e uma dupla, coincidindo com as coordenadas x dos pontos de intersecção e de tangência entre as cônicas.

5. Se a parábola intercepta a circunferência em quatro pontos, temos que a equação tem quatro raízes reais distintas.

Para $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$ e $f = 0$ a equação principal seria $x^4 + 2x^3 - x = 0$, a parábola $y = x^2 - x$ e a circunferência $(x - 0.5)^2 + (y - 1)^2 = 1.25$. Pela construção, temos 4 pontos de intersecção entre a parábola e a circunferência, conforme a figura abaixo:



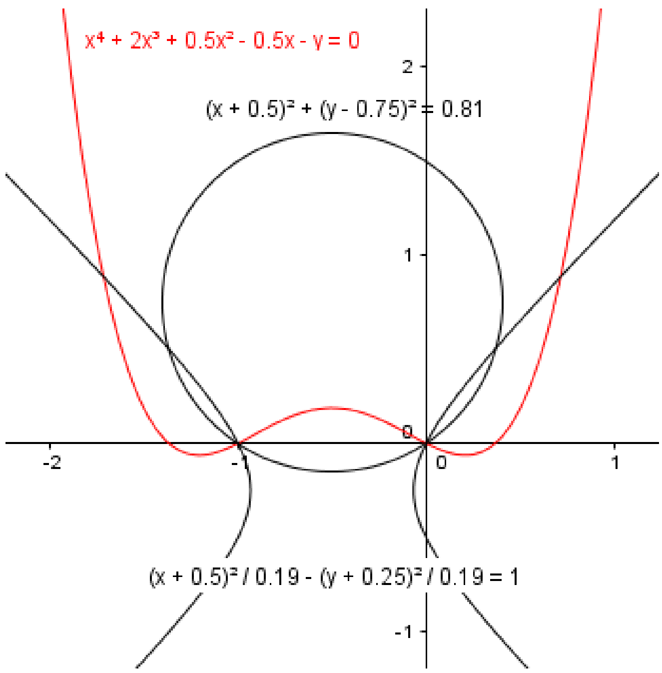
Considerando a equação principal, sabemos que suas raízes são $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 \approx 0.62$ e $x_4 \approx -1.62$, ou seja, quatro raízes reais distintas, coincidindo com as coordenadas x dos pontos de intersecção entre as cônicas.

5.4 Demais Cônicas Utilizadas na Construção de Soluções

A escolha da construção com a circunferência e a parábola deve-se a sua facilidade, pois depende apenas de um parâmetro, o valor de a. Em seu livro, L'Hôpital também desenvolveu outras possibilidades de construção, nas quais utiliza outras cônicas no lugar da parábola. Esses métodos são um pouco mais complexos, pois dependem de mais de um parâmetro, mas também são adequados dependendo da forma da equação inicial proposta.

Mesmo sem saber o método de construção ponto a ponto, podemos usar as equações para descobrir os pontos de intersecção, uma vez que as construções servem para demonstrar que as intersecções das cônicas são raízes da equação proposta, como vimos na seção 5.1. Sendo assim, podemos utilizar as seguintes cônicas[4]:

1. Circunferência da equação (5.9) e a hipérbole equilátera da equação (5.8).
Para os coeficientes $a = 1$, $b = 1$, $c = 0.5$, $d = 0.5$ e $f = 0$ temos a equação principal $x^4 + 2x^3 + 0.5x^2 - 0.5x = 0$, a circunferência $(x + 0.5)^2 + (y - 0.75)^2 = 0.81$ e a hipérbole $\dfrac{(x + 0.5)^2}{0.19} - \dfrac{(y - 1)^2}{0.19} = 1$.
Pela construção, temos 4 pontos de intersecção entre a parábola e a hipérbole, conforme a figura abaixo:



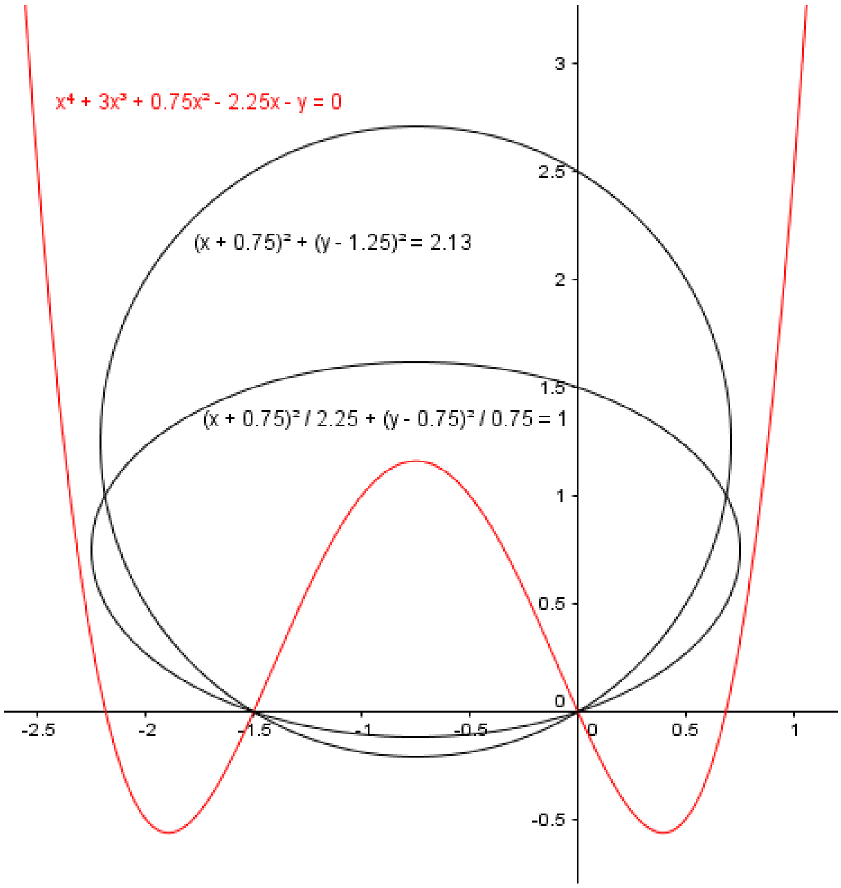
Considerando a equação principal, sabemos que suas raízes são $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 \approx 0.36$ e $x_4 \approx -1.36$, ou seja, quatro raízes reais distintas, coincidindo com as coordenadas x dos pontos de intersecção entre as cônicas.

[4](L'Hopital 1776, pp.311-326)

2. Circunferência da equação (5.9) com a elipse da equação (5.5).

Para os coeficientes $a = 1.5$, $b = 1.5$, $c = 0.5$, $d = 1$ e $f = 0$ temos a equação principal $x^4+3x^3+0.75x^2-2.25x = 0$, a circunferência $(x+0.75)^2+(y-1.25)^2 = 2.13$ e a elipse $\dfrac{(x+0.75)^2}{2.25} + \dfrac{(y-0.75)^2}{0.75} = 1$.

Pela construção, temos 4 pontos de intersecção entre a parábola e a elipse, conforme a figura abaixo:

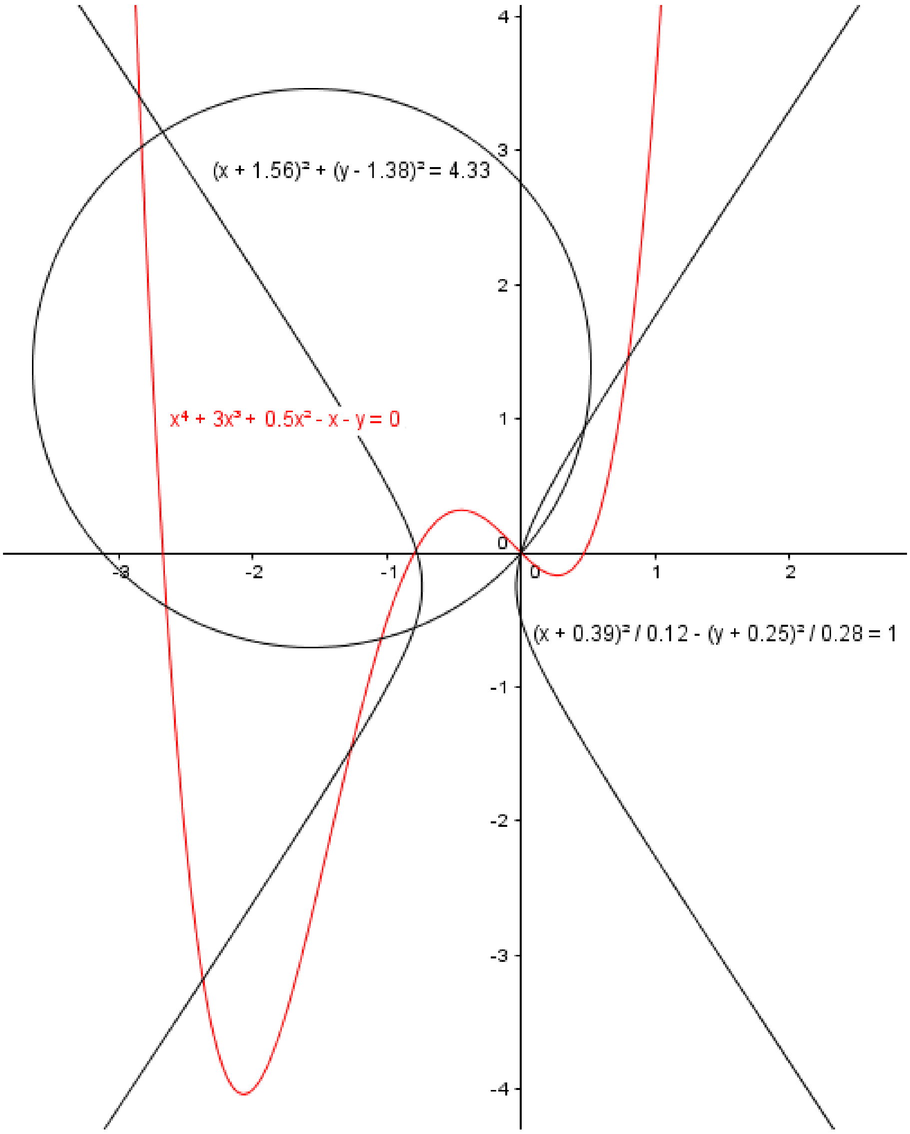


Considerando a equação principal, sabemos que suas raízes são $x_1 = 0$, $x_2 = -1.5$, $x_3 \approx 0.69$ e $x_4 \approx -2.19$, ou seja, quatro raízes reais distintas, coincidindo com as coordenadas x dos pontos de intersecção entre as cônicas.

3. Circunferência da equação (5.9) com a hipérbole da equação (5.6).

Para os coeficientes $a = 1$, $b = 1.5$, $c = 0.5$,$d = 1$ e $f = 0$ temos a equação principal $x^4 + 3x^3 + 0.5x^2 - x = 0$, a circunferência $(x + 1.56)^2 + (y - 1.39)^2 = 4.33$ e a hipérbole $\dfrac{(x + 0.39)^2}{0.12} - \dfrac{(y + 0.25)^2}{0.28} = 1$.

Pela construção, temos 4 pontos de intersecção entre a parábola e a hipérbole, conforme a figura abaixo:



Considerando a equação principal, sabemos que suas raízes são $x_1 = 0$, $x_2 \approx 0.5$, $x_3 \approx -0.8$ e $x_4 \approx -2.67$, ou seja, quatro raízes reais distintas, coincidindo com as coordenadas x dos pontos de intersecção entre as cônicas.

Para demonstrar a validade das construções acima, L'Hôpital utiliza um método similar ao do primeiro caso, mas usando com base uma equação de quarto grau da forma, com $a, b, c, d \in \Re$:

$$x'^4 + abx'^2 - a^2cx' + a^3d = 0 \tag{5.12}$$

Ele faz substituições sucessivas, para saber quantas e quais cônicas podemos extrair da equação acima, assim como no primeiro caso, mas utilizando desta vez:

$$x = \frac{fx'}{a} \tag{5.13}$$
$$x^2 = fy \tag{5.14}$$

Desta forma, ele chega a equação de uma hipérbole equilátera, uma elipse, uma hipérbole e uma circunferência. A partir dessas equações obtidas, utiliza as intersecções da circunferência com as demais cônicas, em uma construção similar ao primeiro caso, para demosatrar que elas são raízes da equação $x'^4 + abx'^2 - a^2cx + a^3d = 0$.

Observemos que a equação (5.12) é diferente da equação (5.1) utilizada no primeiro caso. Mas, assim como antes, esta escolha deve-se apenas a facilidade de demonstrar as construções das raízes, umas vez que facilmente podemos utilizar uma tranformação simples, como a feita por Cardano, que modifica uma em outra. Ou seja, podemos utilizar qualquer uma das cônicas anteriores, pois as intersecções serão raízes da equação de terceiro e quarto grau.

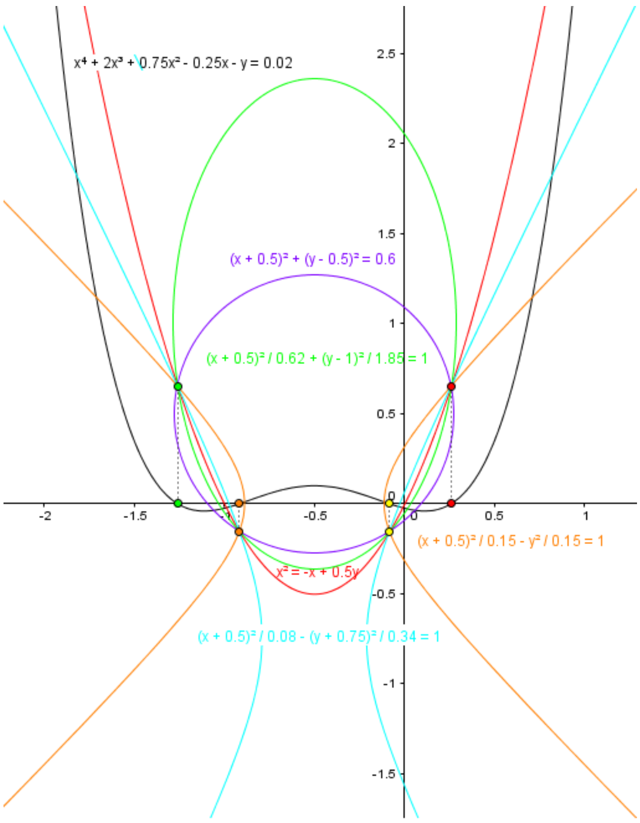
5.5 Quais Cônicas Utilizar na Construção de Soluções?

Como vimos, para solucionar uma equação de terceiro ou quarto grau, podemos utilizar uma circunferência e uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. A escolha de qualquer uma dessas cônicas independe da equação uitlizada, ou seja, podemos utilizar qualquer uma das cônicas que o resultado será o mesmo. Geralmente, a escolha se dá por uma questão de estilo ou facilidade para descrever a cônica, dado o problema específico.

Por exemplo:

Para os coeficientes $a = 0.5$, $b = 1$, $c = 1.5$,$d = 1$ e $f = 0.2$, temos a equação principal (5.1 em preto) $x^4 + 2x^3 + 0.75x^2 - 0.25x - 0.02 = 0$, a circunferência (5.9 em roxo) $(x+0.5)^2 + (y-0.5)^2 = 0.6$, a parábola (5.2 em vermelho) $\frac{y}{2} = x^2 + x$, a elipse (5.5 em verde) $\frac{(x+0.5)^2}{0.62} + \frac{(y-1)^2}{1.85} = 1$, a hipérbole (5.6 em azul) $\frac{(x+0.5)^2}{0.08} - \frac{(y+0.75)^2}{0.34} = 1$ e a hiperbole (5.8 em laranja) $\frac{(x+0.5)^2}{0.15} - \frac{y^2}{0.15} = 1$.

Conforme o gráfico da cônicas, temos, os mesmos, 4 pontos de intersecção entre a circunferência e as demais cônicas, conforme a figura abaixo:



Considerando a equação principal, sabemos que suas raízes são $x_1 \approx 0.25$, $x_2 \approx -0.07$, $x_3 \approx -0.93$ e $x_4 \approx -1.25$, ou seja, quatro raízes reais distintas coincidindo com as coordenadas x dos pontos de intersecção entre as cônicas.

Capítulo 6

Aplicações

A princípio, podemos utilizar os métodos de L'Hôpital para resolver qualquer equação de primeiro, segundo, terceiro e quarto graus. Não que sejam menos importantes, mas como existem vastos estudos sobre equações de primeiro e segundo grau, trabalharemos com exemplos que envolvem equações de terceiro grau.

Muitos problemas clássicos antigos não tinham solução, pois envolviam equações de ordem superior a dois. Apesar de existirem alguns métodos de resolução de cúbicas, o método definitivo para resolução desse tipo de equação, surgiu apenas com Cardano, por volta de 1500.

A seguir, daremos exemplos de dois problemas práticos bem conhecidos. A partir do desenvolvimento desses problemas, chegamos a equações cúbicas, nas quais podemos aplicar os métodos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

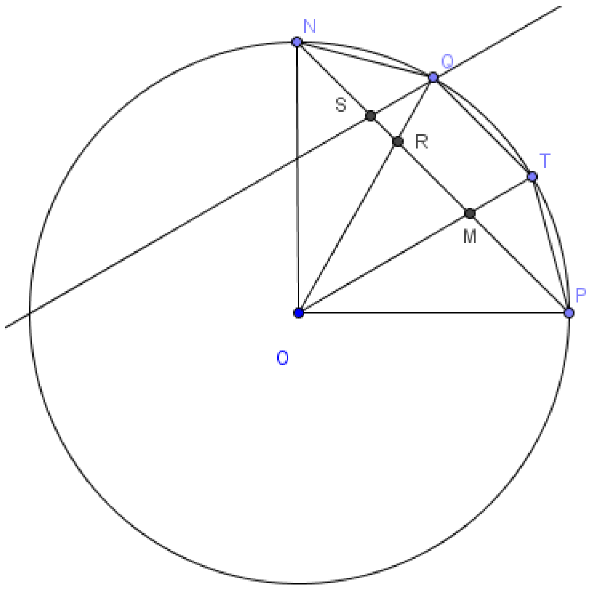
6.1 O Problema da Trisecção de um Ângulo

O problema da trisecção de um ângulo, junto com o problema da duplicação do cubo e da quadratura do círculo, compoẽm os três problemas clássicos gregos antigos. A trisecção se resume a dividir um ângulo dado em três partes iguais, usando apenas régua e compasso.

Ao longo do tempo, houve várias tentativas de resolução do problema através de Nêusis, que é basicamente a inserção de um segmento de um tamanho predefinido entre duas curvas. Outras maneiras foram propostas, a partir de cônicas e curvas transcendentes, como a quadratiz de Hípias, a espiral de Arquimedes, a conchóide de Nicomedes, etc.

Podemos entender melhor o problema da seguinte maneira [1]:

- Considerando o ângulo NOP que devemos trisectar, traçamos uma circunferência de centro em O e raio unitário e marcamos os pontos N e P na circunferência.
- Marcamos os pontos Q e T no arco $\widehat{NP}$ e suas respectivas cordas ($\overline{NQ}$, $\overline{QT}$, $\overline{TP}$) e supomos que $\angle$ NOQ = $\angle$ QOT = $\angle$ TOP.
- Traçamos a corda $\overline{NP}$ e os pontos R e M em suas intersecções, com os raios OQ e OT, respectivamente.
- Traçamos também uma reta paralela ao raio OT, passando pelo ponto Q e marcamos o ponto S, que é a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OT}$ com a corda $\overline{NP}$.



Pela construção, temos:

- $\angle$ NOQ = $\angle$ QOT = $\angle$ TOP = α .
- $\angle$ SQR = $\angle$ QOT, pois são ângulos alternos internos entre duas retas paralelas.
- Como $\angle$ QOP = 2α temos que $\angle$ QNP = α = $\angle$ NOQ, pela propriedade dos ângulos em uma circunferência.

Com isso, podemos mostrar que $\triangle$NOQ $\approx$ $\triangle$QNR $\approx$ $\triangle$QSR.

[1](Latham e Smith 1925, pp.206-219)

De fato:

- $\angle$NOQ = $\angle$QNR = $\angle$QSR.
- Como $\angle$NQO = $\angle$NQR então $\triangle$NOQ $\approx$ $\triangle$QNR pois possuem dois ângulos em comum. Mais ainda, como $\triangle$NOQ é isósceles temos $\angle$QNO = $\angle$NQO então $\angle$NQR = $\angle$QRN. O que nos leva a concluir que $\triangle$QNR $\approx$ $\triangle$QSR e também que
  $\dfrac{NO}{NQ} = \dfrac{NQ}{QR} = \dfrac{QR}{SR}$
  Sendo $NO = 1$ e $NQ = x$, pela relação acima, temos que $QR = x^2$ e, consequentemente, $SR = x^3$

Consideremos agora a corda $\overline{NP}$. Podemos dividí-la da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
NP &= NR + RM + MP \Rightarrow \\
NP &= 2NR + RM \Rightarrow \\
NP &= 2NQ + MS - RS \Rightarrow \\
NP &= 2NQ + QT - RS \Rightarrow \\
NP &= 3NQ - RS
\end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados e sendo $NP = z$, temos que a equação da trisecção fica sendo:

$$z = 3x - x^3 \Rightarrow x^3 - 3x + z = 0 \tag{6.1}$$

A partir da análise das raízes dessa equação, podemos determinar se um ângulo pode ser trisectado utilizando régua e compasso, uma vez que os segmentos x e z podem ser expressos em função do ângulo por funções trigonométricas.

Aplicando o método de L'Hôpital, devemos comparar a equação (6.1) e a equação (5.10):

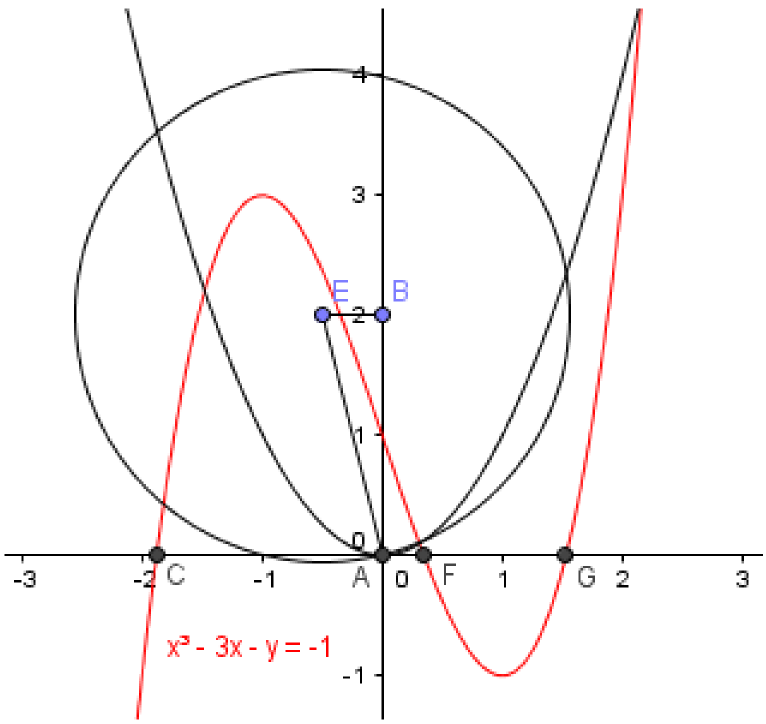
$$\begin{aligned}
x^3 - 3x + z = 0 \\
x^3 - b'x^2 + a'px + a'^2q = 0
\end{aligned}$$

Temos, $a' = 1$, $b' = 0$, $p = -3$ e $q = z$. Com isso, podemos encontrar os pontos B, E e M e, consequentemente, a parábola e a circunferência, conforme mostramos anteriormente na seção 5.2.

Sendo assim,

- $A = D = C = (0,0)$
- $B = \left(0, ||\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'}| + |\frac{p}{2}||\right) = \left(0, ||\frac{1}{2} + 0| + |\frac{-3}{2}||\right) = (0,2)$
- $E = \left(-\frac{q}{2}, g\right) = \left(-\frac{z}{2}, 2\right)$
- $\overline{EM} = \sqrt{m^2 - b'q} = \sqrt{m^2 - 0} = m = \overline{EA}$

Assim podemos descrever a parábola e a circunferência. Para $z = 1$, temos A=(0,0), B=(0,2) e E=(-0.5,2):



As raízes da equação são dadas pelos comprimentos dos segmentos $\overline{AF}$, $\overline{AG}$ e $\overline{AC}$. Para saber se a solução será um ângulo construtível, devemos analisar a equação (6.1). Uma condição necessária e suficiente para que as três raízes de uma equação de terceiro grau de coeficientes racionais sejam construtíveis é que uma delas seja racional. Por outro lado, se um número racional $\frac{m}{n}$, com m e n primos entre si, é raiz de uma equação de terceiro grau, então m divide o termo independente e n divide o coeficiente de x^3. [2] [3]

Dessa forma, para que o ângulo seja construtível com régua e compasso, devemos ter que m divide z e n divide 1, ou seja, $mv = z$ com $v \in Z$ e $n = \pm 1$.

[2](Garbi 1997, pp.179)
[3] (Courant 2000, pp.163)

6.2 O Problema do Cone

O problema do cone pode ser descrito como: dado uma secção cônica e um ponto S, fora do plano dessa, devemos encontrar uma circunferência, que é a 'base' de um cone que tem o ponto S como vértice e a cônica como uma secção.

Esse era um problema muito conhecido na época em que viveu L'Hôpital. Inclusive, existe uma solução para o problema em uma carta de Descartes no livro *Lettres de M Descartes*, na carta $LXXXIII$ do terceiro tomo. A carta, datada de 18 de dezembro de 1648, tem destinatário desconhecido, mas contém algumas anotações de Fermat e a resolução do problema por Descartes. O próprio L'Hôpital cita essa solução em seu livro mas, diz que é mais complicada além de não abranger todos os casos possíveis.

Podemos traduzir esse problema como sendo o inverso do que usualmente encontramos nos livros, nos quais geralmente o problema é: dado um cone, encontre uma secção cônica. Já o nosso problema é o inverso, ou seja, temos uma cônica e queremos encontrar um cone que a contém. A princípio, o problema parece simples, mas não é.
Antes de iniciar a resolução, devemos ter em mente que, para L'Hôpital, uma superfície conica é infinita e definida a partir de uma circunferência *'base'*, um ponto que é o vértice do cone e a rotação de uma reta que passa pelo vértice e um ponto da *'base'*. Por sua vez, o cone é um sólido composto pela 'base' e pela porção da superfície cônica entre a 'base' e o vértice.

Sendo assim, para facilitar o nosso entendimento, dividiremos o problema em dois casos: se a secção cônica for uma parábola e se a secção cônica for uma elipse ou uma hipérbole.

6.2.1 Se a cônica for uma parábola

Assim como nas demonstrações anteriores partimos da suposição que o problema esta resolvido e depois mostramos que a construção é válida. No nosso problema, para o caso da cônica ser uma parábola, devemos encontrar um ponto A sobre a parábola, que tenha alguma características.

Antes de mostrar a construção do ponto A, devemos ver algumas definições utilizadas por L'Hôpital:

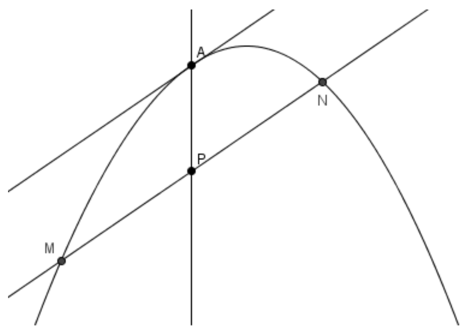
- *Diâmetro de uma parábola*: é uma reta que passa por um ponto da parábola e é paralela a seu eixo.

- *Ordenada a um diâmetro*: é uma reta por um ponto de um diâmetro e é paralela a reta tangente a parábola no ponto de intersecção da parábola e do diâmetro.

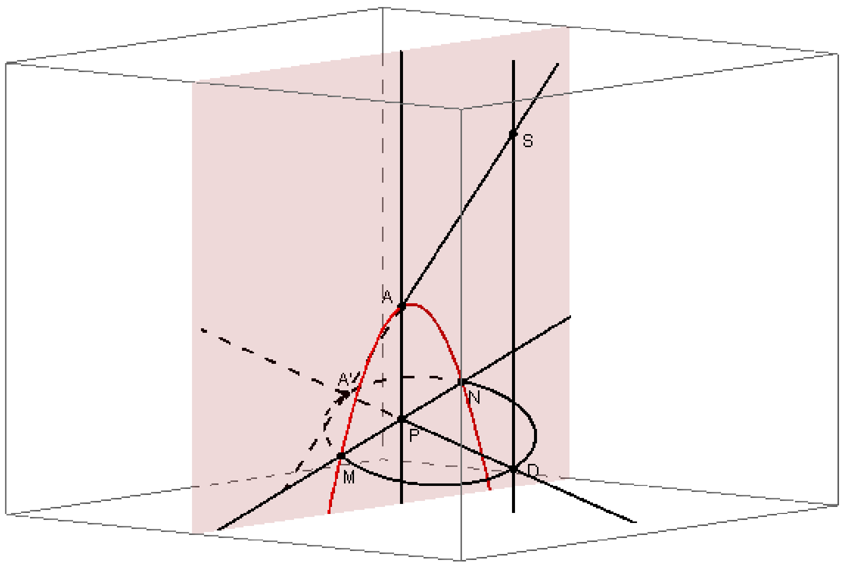
Para resolver o problema, devemos construir um ponto A, na parábola, tal que:

- Traçamos o *diâmetro* por A e fixamos um ponto P, qualquer, nesse *diâmetro*;
- Uma reta $\overleftrightarrow{AS}$ e uma reta r que passa por S e é paralela ao *diâmetro* $\overleftrightarrow{AP}$;
- A partir de P, *ordenada a* $\overleftrightarrow{AP}$ que intercepta a parábola nos pontos P e M;
- Uma reta $\overleftrightarrow{A'D}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{PM}$ onde os pontos A' e D são as intersecções das retas $\overleftrightarrow{AS}$ e $\overleftrightarrow{A'D}$, e a reta r e $\overleftrightarrow{A'D}$, respectivamente.
- No plano $A'PM$ decrevemos uma circunferência passando pelos pontos A', M eD pois como o $\angle A'PM$ é reto, temos que $PM^2 = A'P \times PD$, propriedade fundamental de uma circunferência.

No plano da parábola teríamos a seguinte construção:



No espaço:



Então, considerando essa construção, conseguimos encontrar uma circunferência que é uma *base* para nosso cone. Tratando o problema genericamente, vamos tomar alguns elementos que nos ajudarão na resolução do problema. São eles:

- A reta s, partindo de S e perpendicular ao plano da parábola e também o ponto F que é de intersecção da reta s com o plano da parábola;

- Uma reta h no plano da parábola e perpendicular a seu eixo, e o ponto H como intersecção dessa reta h com o *diâmetro* $\overleftrightarrow{AP}$;

- O ponto B, vértice da parábola; O ponto G como intersecção do eixo da parábola e a reta h;

- Uma reta f', paralela ao eixo passando por F;

- Passando por A descrevemos uma ordenada que intersecepta o eixo no ponto K e a reta f' no ponto E.

- Uma reta q, no plano da parábola e perpendicular a tangente que passa por A que intercepta o eixo no ponto T e a reta que passa por f' no ponto Q.

- Uma reta o, paralela a $\overleftrightarrow{A'D}$, passando pelo ponto A, que intercepta a reta r no ponto O; e uma reta o', perpendicular ao plano da parábola que passa pelos pontos Q e O.

No Plano da parábola e no espaço, teríamos a seguinte construção:

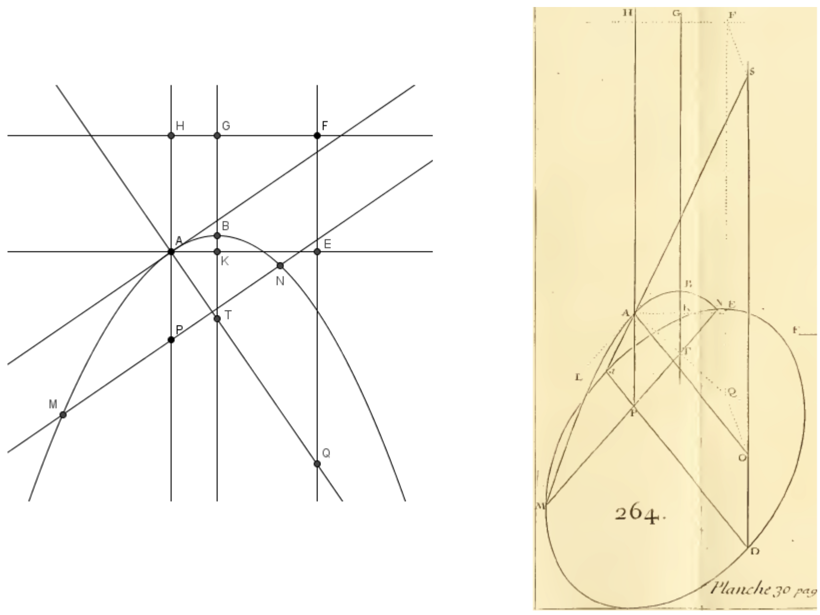


Figura 6.1: A figura da direita foi retirada do livro de L'Hôpital, observamos a notação do ponto A' que para L'Hôpital é a

Considerando $SF = QO = a$, $FG = KE = b$, $GB = c$,o parâmetro p da parábola e as incógnitas $BK = x$ e $KA = GH = y$, com $a, b, c, p \in \Re$, e sendo o triângulo AKT semelhante ao triângulo AEQ temos:

$$\frac{AK}{KT} = \frac{AE}{EQ} \Rightarrow$$
$$\frac{y}{\frac{p}{2}} = \frac{b+y}{EQ} \Rightarrow EQ = \frac{bp}{2y} + \frac{p}{2}$$

Sendo os triângulos AEQ e AQO retângulos temos:

$$AO^2 = AQ^2 + QO^2$$
e
$$AQ^2 = AE^2 + EQ^2$$

Então:

$$AO^2 = AE^2 + EQ^2 + QO^2 = \frac{b^2p^2}{4y^2} + \frac{bp^2}{2y} + \frac{p^2}{4} + b^2 + 2by + y^2 + a^2 \tag{6.2}$$

Temos também que:

$$SO = FQ = GB + BK + EQ = c + x + \frac{bp}{2y} + \frac{p}{4} = c + \frac{y^2}{p} + \frac{bp}{2y} + \frac{p}{2} \tag{6.3}$$

Antes de continuar, vamos mostrar uma outra definição que nos ajudará na resolução do problema, o *parâmetro de um diâmetro.*

- Já traduzindo para nosso problema, o *Parâmetro de um diâmetro* é: considerando um diâmetro $\overleftrightarrow{AP}$, o parâmetro do diâmetro q, é a terceira proporcional entre $BK = BK'$ e AK', sendo que o ponto K' é a intersecção do eixo da parábola com a reta tangente a parábola que passa que ponto A.
  Isto é: $\dfrac{BK}{AK'} = \dfrac{AK'}{q} \Rightarrow AK'^2 = BK \times q \Rightarrow AK'^2 = xq$

Sendo assim, considerando o triângulo retângulo AKK' temos:
$AK'^2 = KK'^2 + AK'^2 \Rightarrow xq = 4x^2 + px \Rightarrow q = 4x + p$

Agora, podemos utilizar a propriedade da parábola que mostramos na seção 5.1, isto é, $PM^2 = AP \times q$, mas pela construção do problema $PM^2 = A'P \times PD$, o que nos dá $AP \times q = A'P \times PD$. Considerando que $AO = PD$ e que a reta o é paralela a $A'D$ podemos substituir a última equação por:

$$AO^2 = SO \times q \tag{6.4}$$

Finalmente, substituindo em (6.4) os valores encontrados em (6.2), (6.3) e q, obtemos a equação:

$$x^3 + \left(c + \frac{p}{2}\right) x^2 + \left(cp - a^2 - b^2 + \frac{p^2}{4}\right) \frac{x}{4} - \frac{b^2 p}{16} = 0 \tag{6.5}$$

Essa equação de terceiro grau podemos resolver pelo método visto no capítulo anterior, obtendo o valor de $BK = x$ e, portanto, a localização do ponto A com o qual solucionamos o problema, conforme a construção. Isto é, obtendo o valor de $BK = x$ encontramos um ponto A na parábola tal que pela construção anterior conseguimos encontrar uma circunferência que será a *base* do nosso cone.

Em realidade, a construção auxiliar nos permite demonstrar a validade da equação (6.5), mas para efetivamente calcular a posição do ponto A, precisamos da primeira construção e dos parâmetros a,b,c e p, que são valores conhecidos e relativamentre fáceis de serem encontrados desde a proposição inicial. A partir do ponto A, a construção da circunferência é garantida e basta seguir os passos para conseguir encontrá-la.

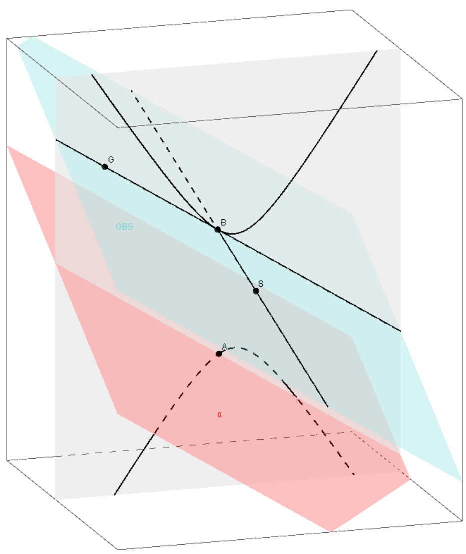
6.2.2 Se a cônica for uma Elipse ou uma Hipérbole

Para os casos em que a cônica é uma hipérbole, L'Hôpital descreve um método de forma similar ao anterior, nas páginas 409 a 413 de seu livro, também chegando a uma equação de terceiro grau, que soluciona o problema ao encontrar um ponto em uma hipérbole, a partir do qual traçando o diâmetro, podemos encontrar a circunferência base do cone. A equação encontrada é :

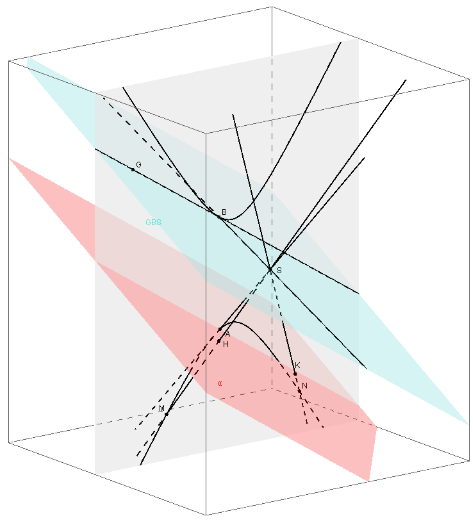
$$x^3 - \left(d + \frac{dr^2}{m^2} + \frac{db^2}{m^2}\right)x^2 + \left(\frac{d^2r^2}{m^2} + \frac{n^2d^4}{m^4}\right)x - \frac{c^2d^5}{m^4} = 0 \tag{6.6}$$

Onde $a, b, c, d, f \in \Re$ e os valores a, b e c são os mesmos utilizados no caso da parábola, ou seja, a distância do vértice do cone ao plano da hipérbole, a distância 'lateral' do vértice do cone ao eixo da hipérbole e a distancia 'horizontal' do vértice do cone ao vértice da hipérbole; os valores de d e f são os dois parâmetros que definem a hipérbole; e m, n e r são dados por: $m^2 = d^2 + f^2$, $n^2 = b^2 + c^2$ e $r^2 = a^2 + d^2 + c^2$. Ele também cita que no caso da cônica ser um elipse, o problema se resolveria de forma análoga, sendo a equação resultante alterada apenas em alguns sinais. No entanto, não fiz as demonstrações pois acredito que o mais interessante é que podemos reduzir o caso da cônica ser uma hipérbole ou uma elipse ao caso da parábola. Para isso, em uma hipérbole qualquer:

- Tomamos um ponto B, qualquer na hipérbole e sua reta tangente, t;
- Na reta t um ponto G, qualquer;
- A partir do ponto B a reta $\overleftrightarrow{BS}$, o plano GBS e um plano, α, paralelo a ele passando por um ponto A no braço oposto da hipérbole com relação ao ponto B.



Tomamos agora, mais 2 pontos, M e N, quaisquer da hipérbole no mesmo braço que o ponto A; as respectivas retas entre eles e o ponto S; e também os pontos, H e K de intersecção entre essas retas e o plano α.



Dessa forma, teremos 3 pontos no plano α e, como podemos definir uma parábola a partir de quaisquer 3 pontos não colineares, reduzimos o problema ao caso precedente. Podemos provar que tomando a cônica pelos 3 pontos no plano α, conforme a construção anterior, essa cônica será uma parábola.
Para isso, usaremos a definição 10 do capitulo VI do livro de L'Hôpital, que diz que:

- Dada uma secção cônica. Seja a reta r, *diretriz do cone*, que é a reta formada pelo plano paralelo ao da secção cônica que passa pelo vértice do cone e pelo plano que contém a circunferência *base* do cone. Se a reta r for tangente a circunferência *base* do cone, a secção cônica é uma parábola; se a reta r interceptar a circunferência *base* do cone em 2 pontos, a secção cônica é uma hipérbole; se a reta r não intercepta a circunferência *base* do cone, a secção cônica é uma elipse.

Essa definição é muito similar a usada hoje em geometria analítica:

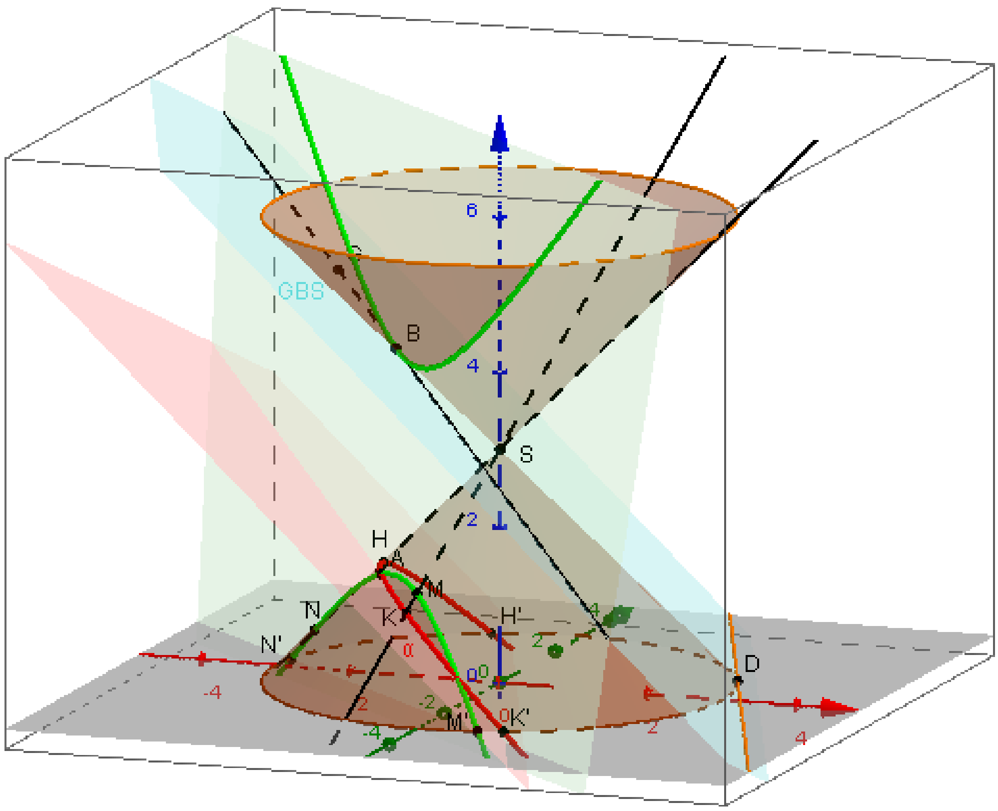
- Consideremos um cone circular reto e um plano que intercepta apenas uma das folhas do cone. Se o plano é paralelo a uma só geratriz do cone a curva obtida é a parábola.

- Consideremos um cone circular reto e um plano que intercepta apenas uma das folhas do cone. Se esse plano não passa pelo vértice e não é paralelo a nenhuma geratriz do cone, a curva obtida é a elipse.

- Consideremos um cone circular reto e um plano que intercepta as duas folhas do cone. A curva obtida neste caso é uma hipérbole.

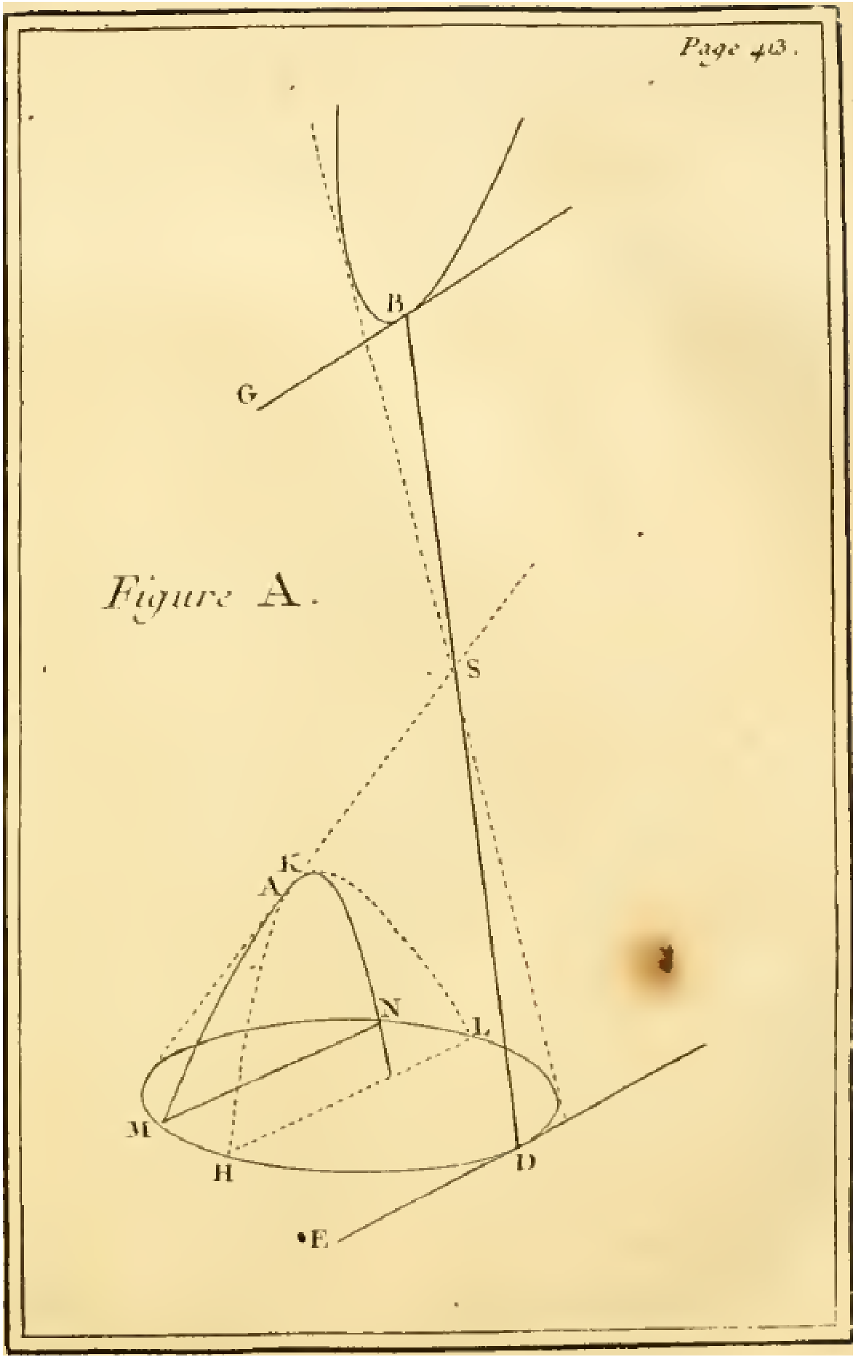
Voltando então a nosso problema, basta mostrar que o plano GBS tangencia a circunferência *base* do cone. Considerando :

- Um plano β, perpendicular ao plano da hipérbole e os pontos M' e N' como intersecção desse plano com a hipérbole;
- O ponto D, que é a intersecção do plano β com a reta $\overleftrightarrow{SB}$;
- A circunferência que passa por $DM'N'$ e os pontos H' e K', como a intersecção entre essa circunferência e o plano α.



Vemos que o plano GBS tangencia a circunferência $DM'N'H'K'$ no ponto D, então a cônica definida por AHK será uma parábola.

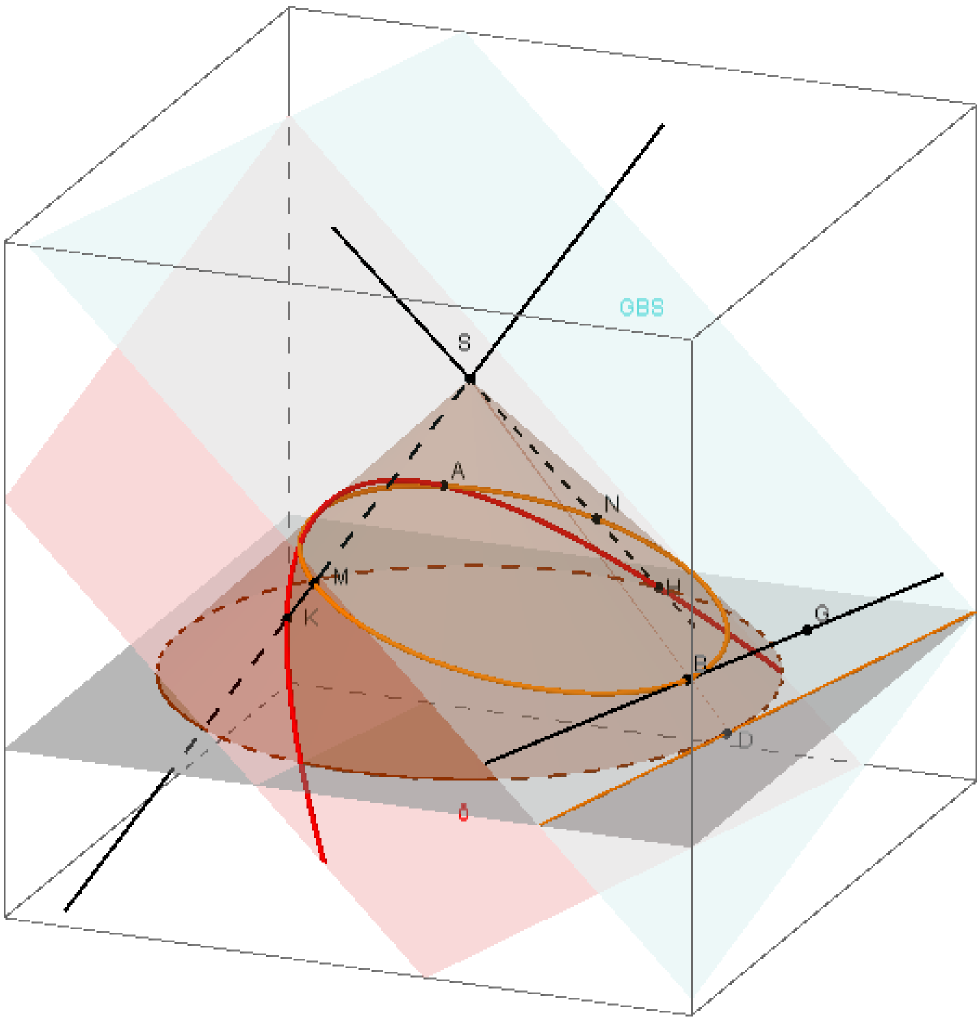
Somente para ilustração, sem considerar as notações, segue abaixo a imagem da página 463 do livro (L'Hopital 1776), na qual a hipérbole esta representada com os pontos A, M, N e B e a parábola pelos pontos H, K e L.



L'Hôpital não cita que se a cônica for uma elipse podemos reduzir ao caso da parábola, mas podemos facilmente fazer um raciocínio análogo ao caso da hipérbole e mostrar que isto também vale. De fato, sendo um elipse qualquer, basta:

- Tomar 2 pontos, A e B, quaisquer na elipse;
- A reta s, tangente a elipse que passa por B;
- Um ponto G qualquer na reta s e o plano GBS;
- Um plano δ passando por A e paralelo ao plano GBS;

Tomamos agora mais 2 pontos, M e N, quaisquer da elipse; as respectivas retas entre eles e o ponto S; e também os pontos, H e K de intersecção entre essas retas e o plano δ.

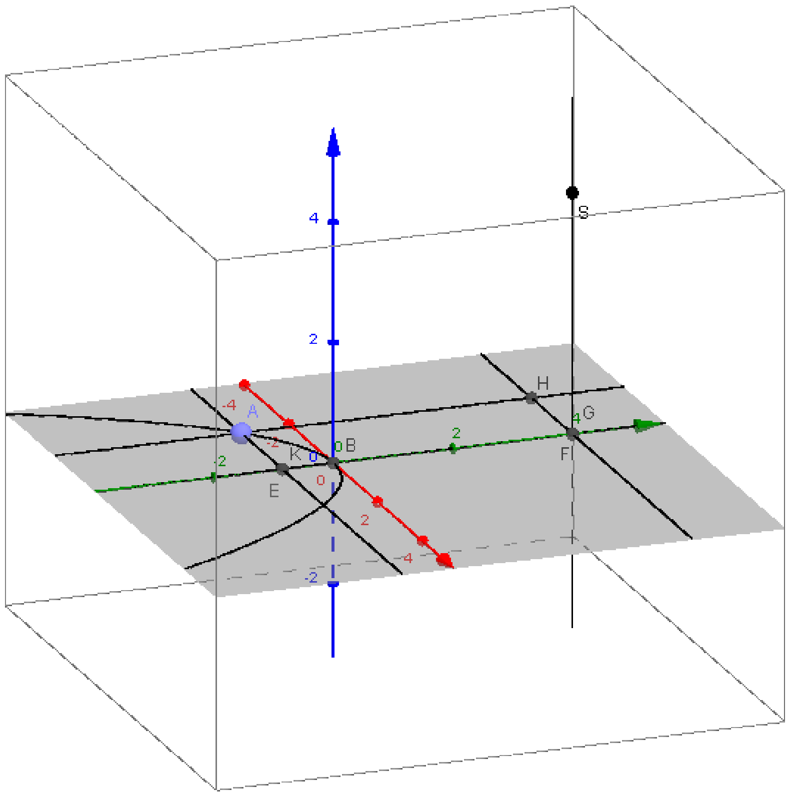


Dessa forma, teremos 3 pontos no plano δ e podemos definir uma parábola por eles. Então, da mesma forma que o caso anterior, vemos que o plano GBS tangencia a circunferência *base* do cone, no ponto D, sendo a cônica definida por AHK será uma parábola.

6.2.3 Exemplos

Exemplo 1

Tomando a parábola $y = \dfrac{-x^2}{4}$ e o ponto $S = (0, 4, 4)$ temos que:



- $SF = QO = a = 4$
- $FG = KE = b = 0$
- $GB = c = 4$
- $p = 4$, lembramos que para L'Hôpital, a parábola é representada por $y^2 = px$ sendo o parâmetro p o quádruplo da distância do vértice ao foco.

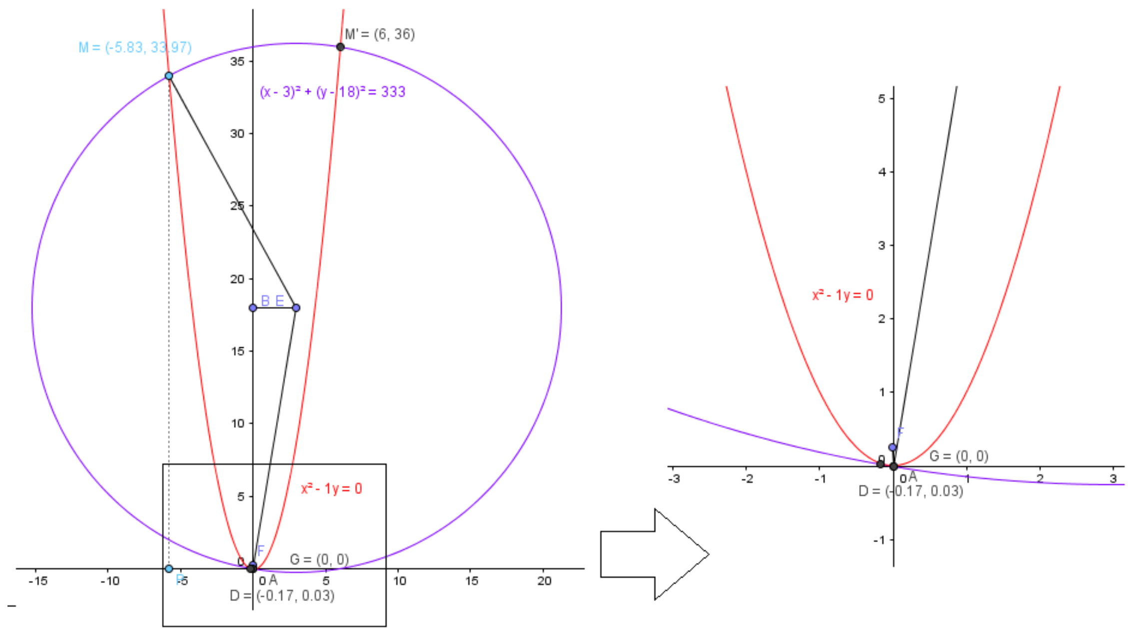
Então, a equação (6.2) ficaria:

$$x^3 + \left(4 + \frac{4}{2}\right)x^2 + \left(\frac{4.4}{4} - \frac{4^2}{4} - \frac{0^2}{4} + \frac{4^2}{16}\right)x - \frac{0^2 4}{16} = 0 \Rightarrow$$

$$x^3 + 6x^2 + x = 0$$

Utilizando o método da seção (5.2) na equação $x^3 + 6x^2 + x = 0$, temos que $q = 0$, $a' = 1$, $p = 1$ e $b = -6$, então:

- $A = D = C = (0, 0)$.
- $B = (0, ||\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'}| - |\frac{p}{2}||) = (0, 18) = (0, g')$.
- Como $CF = \frac{a}{4}$, $F = (0, \frac{a}{4}) = (0, 0.25)$.
- A parábola seria a com vértice em C, foco em F, parâmetro a e portanto diretriz $y = -0.25$, isto é, $y = x^2$.
- $E = (||\frac{b'p}{2a'}| + |\frac{q}{2}||, g') = (3, 18)$.
- $EM = \sqrt{m^2 - b'q}$, como $AE = m = \sqrt{333}$, $EM = \sqrt{m^2 - b'q} = \sqrt{333}$.
- A circunferência seria a centrada em E com raio $EM = 19.24$, ou seja, $(x - 3)^2 + (y - 18)^2 = 333$.

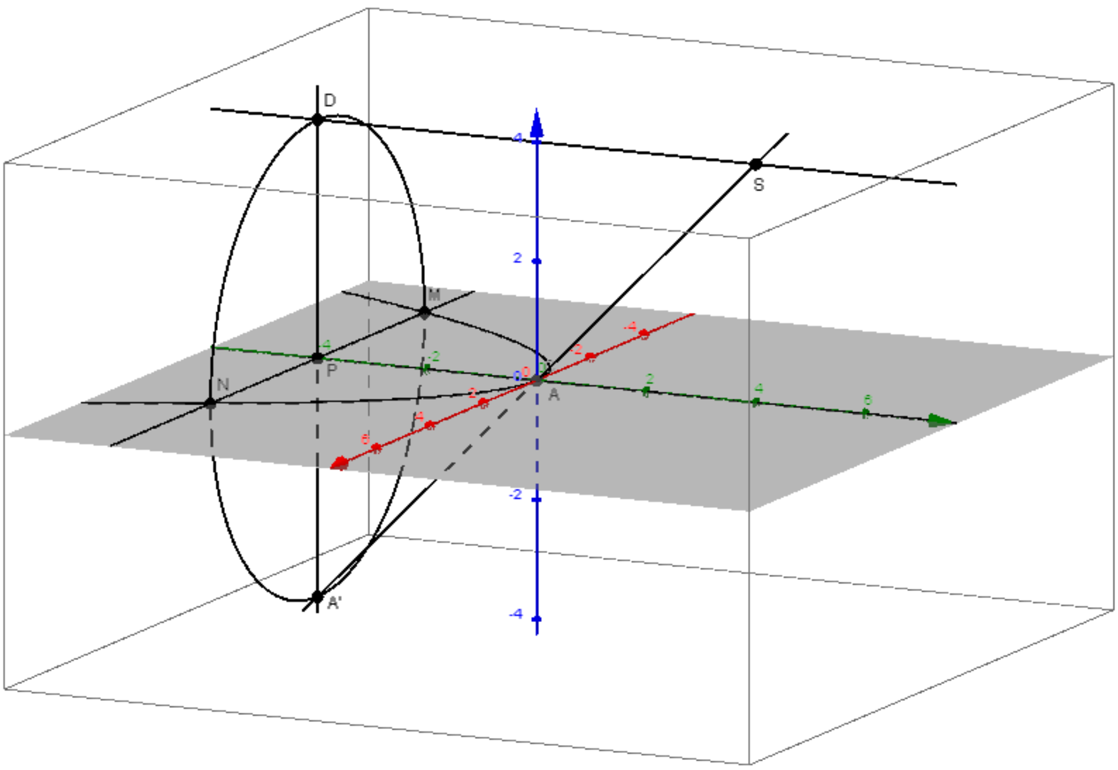


Descartando o ponto de intersecção $M' = (6, 36)$ por ter a coordenada x igual a b', ficamos com as raízes $x_1 = 0$, $x_2 = -0.17$ e $x_3 = -5.83$

Como não podemos ter um comprimento negativo, a única raiz que nos serve é $x_1 = 0$. Então, temos que o ponto $A = (0,0,0)$ pois $BK = 0$. Portanto, fazendo a construção, vemos que a reta $\overleftrightarrow{SA} : X(t) = (0,4,4) + t(0,-4,-4), (t \in \Re)$; o diâmetro $\overleftrightarrow{AP} : Y(t) = (0,0,0)+t(0,-4,0), (t \in \Re)$; e a reta $\overleftrightarrow{SD} : Z(t) = (0,4,4)+t(0,1,0), (t \in \Re)$.

Escolhemos por conveniência o ponto $P = (0,-4,0)$, pois P pode ser qualquer no diâmetro $\overleftrightarrow{AP}$. Sendo assim, os pontos $A' = (0,-4,-4)$ e $D = (0,-4,4)$; a reta $\overleftrightarrow{A'D} : W(t) = (0,-4,0) + t(0,0,4), (t \in \Re)$; a ordenada $\overleftrightarrow{PM} : y = -4$, e portanto, os pontos $M = (-4,-4,0)$ e $N = (4,-4,0)$.

Como a reta $\overleftrightarrow{A'D}$ é diâmetro da circunferência que será a base do cone que procuramos, basta encontrar o seu ponto médio para desconbrir seu centro e raio que, em nosso caso é o ponto P. Dessa maneira, uma circunferência que é uma *base* para nosso cone é a centrada em P, com raio 4 e no plano $y = -4$, ou seja, $C(t) = (0,-4,0) + (4cos(t), 0, 4sen(t))$ $(t \in [0, 2\pi])$.



Para L'Hôpital, bastava encontrar a circunferência *base* do cone mas, atualmente, podemos até encontrar a equação do cone por geometria analítica [4]. Os leitores interessados pode ver o método genérico no Apêndice C.

Considerando que a parábola é a curva diretriz e o vértice é o ponto S, temos que :

- $S = (0, 4, 4) = (a, b, c)$
- $C = \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4} \\ z = 0 \end{cases}$

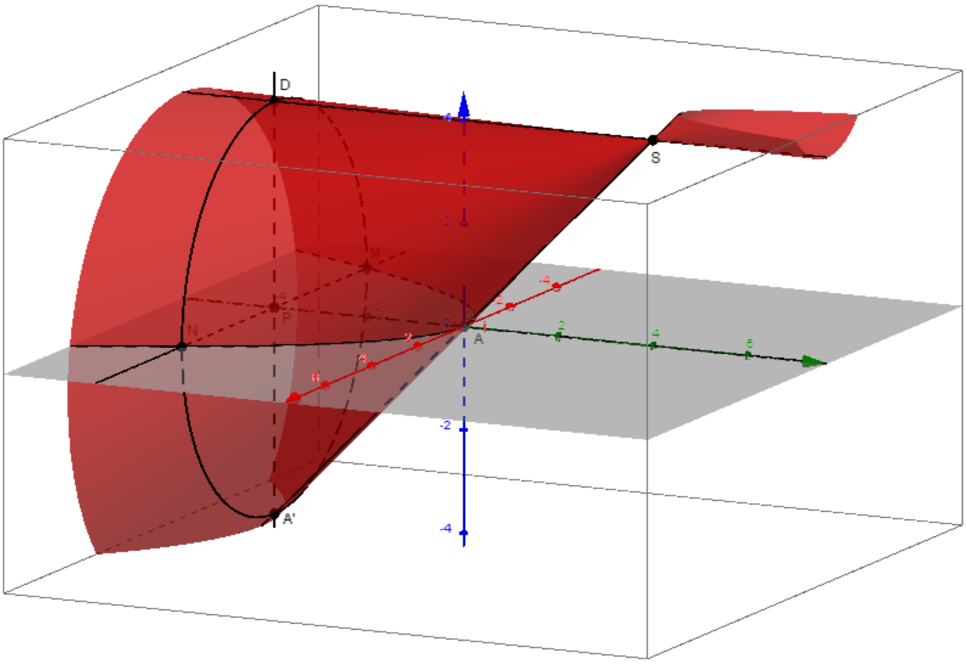
Para um ponto $P = (X, Y, Z) \in S$ e $Q = (x, y, z) \in C$ com $\lambda \in \Re$, como $Q = V + \lambda\overrightarrow{VP}$ temos:

$$Q = \begin{cases} x = a + \lambda(X - a) \\ y = b + \lambda(Y - b) \\ z = c + \lambda(Z - c) \end{cases} \Rightarrow \qquad Q = \begin{cases} x = \lambda X \\ y = 4 + \lambda(Y - 4) \\ z = 4 + \lambda(Z - 4) \end{cases}$$

Então,

$$C = \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad C = \begin{cases} 4 + \lambda(Y - 4) = -\dfrac{\lambda X^2}{4} & (1^a) \\ 4 + \lambda(Z - 4) = 0 & (2^a) \end{cases}$$

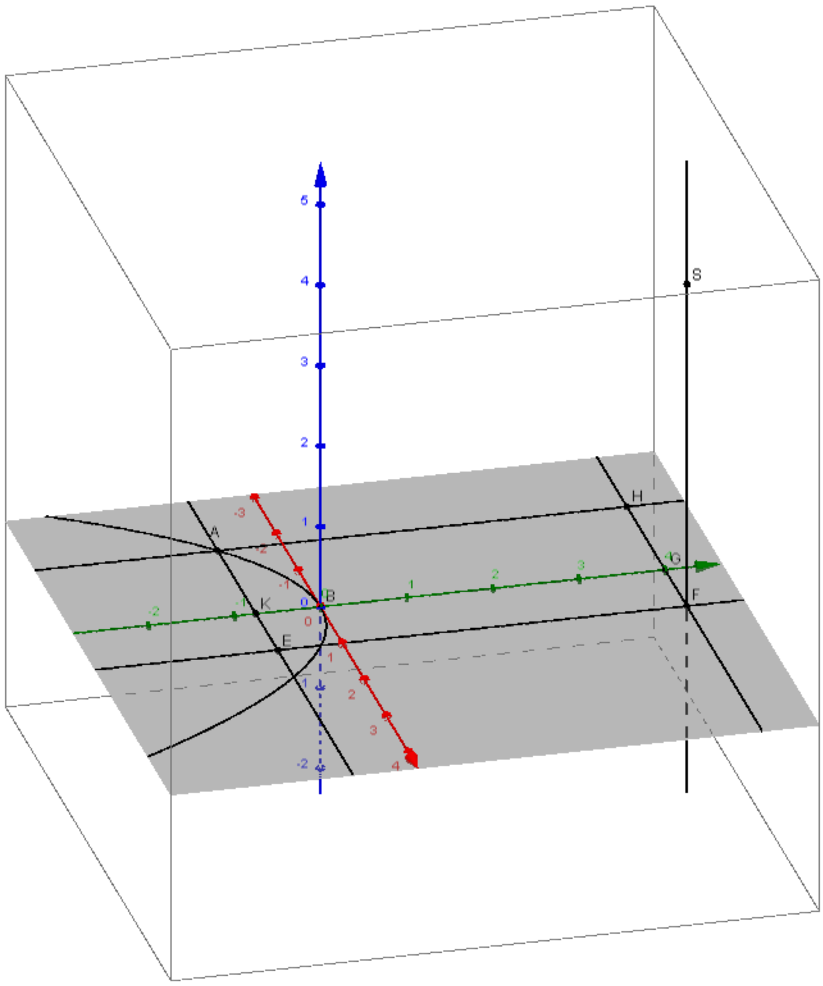
Pela segunda equação $\lambda = -\dfrac{4}{Z - 4}$, que, substituindo na primeira equação, nos dá a equação do cone $X^2 + Z^2 - 4Z + 4Y - YZ = 0$



[4](Boulos e Camargo 1987, pp.319-320)

Exemplo 2

Tomando a parábola $y = \dfrac{-x^2}{4}$ e o ponto $S = (1, 4, 4)$ temos que:



- $SF = QO = a = 4$
- $FG = KE = b = 1$
- $GB = c = 4$
- $p = 4$

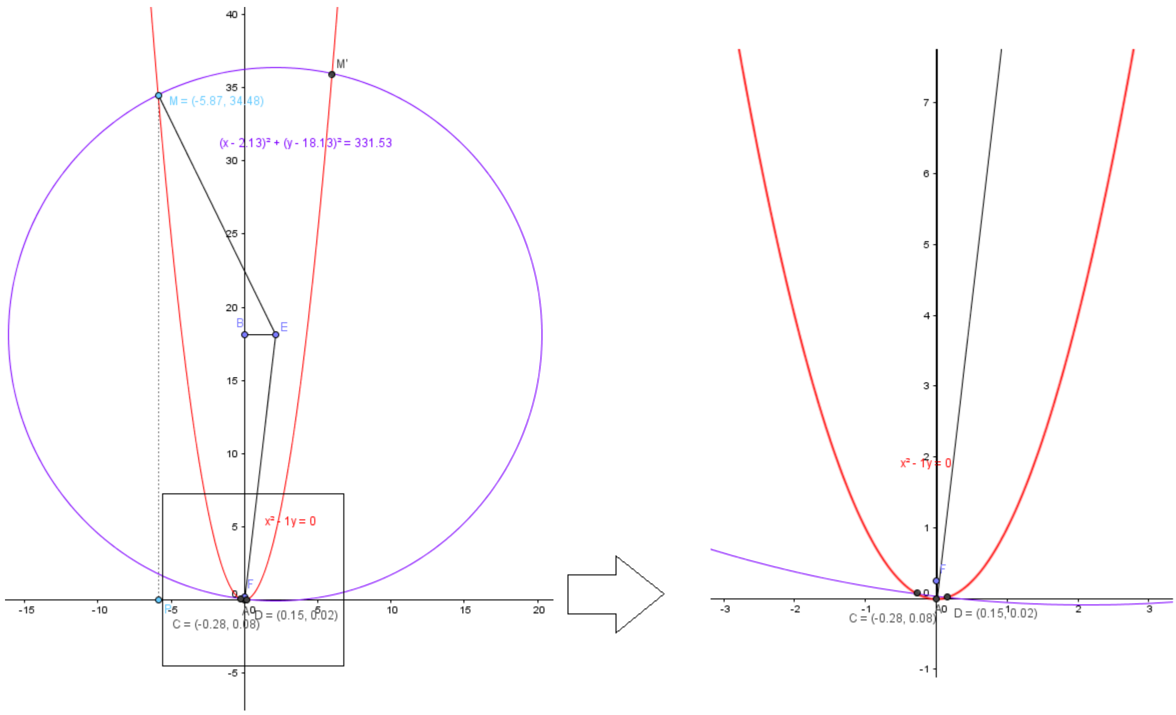
e a equação (5.2) ficaria:

$$x^3 + \left(4 + \frac{4}{2}\right)x^2 + \left(\frac{4.4}{4} - \frac{4^2}{4} - \frac{1^2}{4} + \frac{4^2}{16}\right)x - \frac{1^2 4}{16} = 0 \Rightarrow$$

$$x^3 + 6x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Utilizando o método da seção (5.2) na equação $x^3 + 6x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{4} = 0$, temos que $q = -\frac{1}{4}$, $a' = 1$, $p = \frac{3}{4}$ e $b = -6$, então:

- $A = D = C = (0, 0)$.
- $B = (0, ||\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'}| - |\frac{p}{2}||) = (0, 18.125) = (0, g')$.
- Como $CF = \frac{a}{4}$, $F = (0, \frac{a}{4}) = (0, 0.25)$.
- A parábola seria a com vértice em C, foco em F, parâmetro a e portanto diretriz $y = -0.25$, isto é, $y = x^2$.
- $E = (||\frac{b'p}{2a'}| - |\frac{q}{2}||, g') = (2.125, 18.125)$.
- $EM = \sqrt{m^2 - b'q}$, como $AE = m = \sqrt{18.25}$, $EM = \sqrt{m^2 - b'q} = \sqrt{331.56}$.
- A circunferência seria a centrada em E com raio $EM = 19.24$, ou seja, $(x - 2.125)^2 + (y - 18.125)^2 = 331.56$.



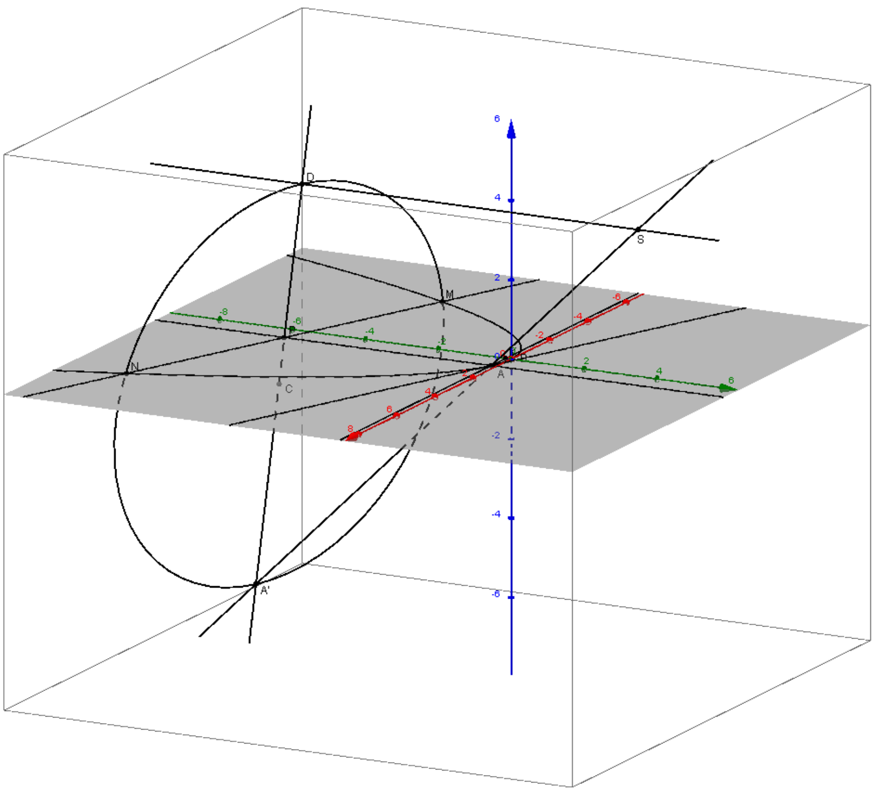
Descartando o ponto de intersecção $M' = (6, 36)$, por ter a coordenada x igual a b', ficamos com as raízes $x_1 = 0.15$, $x_2 = -0.29$ e $x_3 = -5.87$

Como não podemos ter um comprimento negativo, a única raiz que nos serve é $x_1 = 0.15$. Então, temos que $BK = 0.15$ e $K = (0, -0.15, 0)$, consequentemente $A = (0.77, -0.15, 0)$. Portanto, fazendo a construção, vemos que a reta $\overleftrightarrow{SA} : X(t) = (1, 4, 4) + t(-0.23, -4.15, -4), (t \in \Re)$, o diâmetro $\overleftrightarrow{AP} : Y(t) = (0.77, -0.15, 0) + t(0, 1, 0), (t \in \Re)$ e a reta $\overleftrightarrow{SD} : Z(t) = (1, 4, 4) + t(0, 1, 0), (t \in \Re)$.

Escolhemos o ponto por conveniência o ponto $P = (0.77, -5.83, 0)$, pois P pode ser qualquer no diâmetro $\overleftrightarrow{AP}$. Sendo assim, os pontos $A' = (0.39, -6.8, -6.41)$ e $D = (1, -5.22, 4)$; a reta $\overleftrightarrow{A'D} : W(t) = (0.77, -5.83, 0) + t(0.23, 0.61, 4), (t \in \Re)$; a ordenada $\overleftrightarrow{PM} : Y(t) = (-4, -4, 0) + t(4.77, -1.83, 0), (t \in \Re)$, e portanto, os pontos $M = (-4, -4, 0)$ e $N = (5.53, -7.65, 0)$.

Como a reta $\overleftrightarrow{A'D}$ é diâmetro da circunferência que será a *base* do cone que procuramos, basta encontrar o seu ponto médio para descobrir seu centro e raio, então temos que o centro é $C = (0.7, -6.01, -1, 21)$ e o raio é 5.28. Dessa maneira, uma circunferência que é uma base para nosso cone é a centrada em C com raio 5.28 e no plano $-7.32x - 19.06y + 3.32z = 105.44$, ou seja,

$$C = \begin{cases} (x - 0.7)^2 + (z + 1.21)^2 = 5.28^2 \\ -7.32x - 19.06y + 3.32z = 105.44 \end{cases}$$



Como no exemplo anterior, considerando que a parábola é a curva diretriz e o vértice é o ponto S:

- $S = (1, 4, 4) = (a, b, c)$
- $C = \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4} \\ z = 0 \end{cases}$

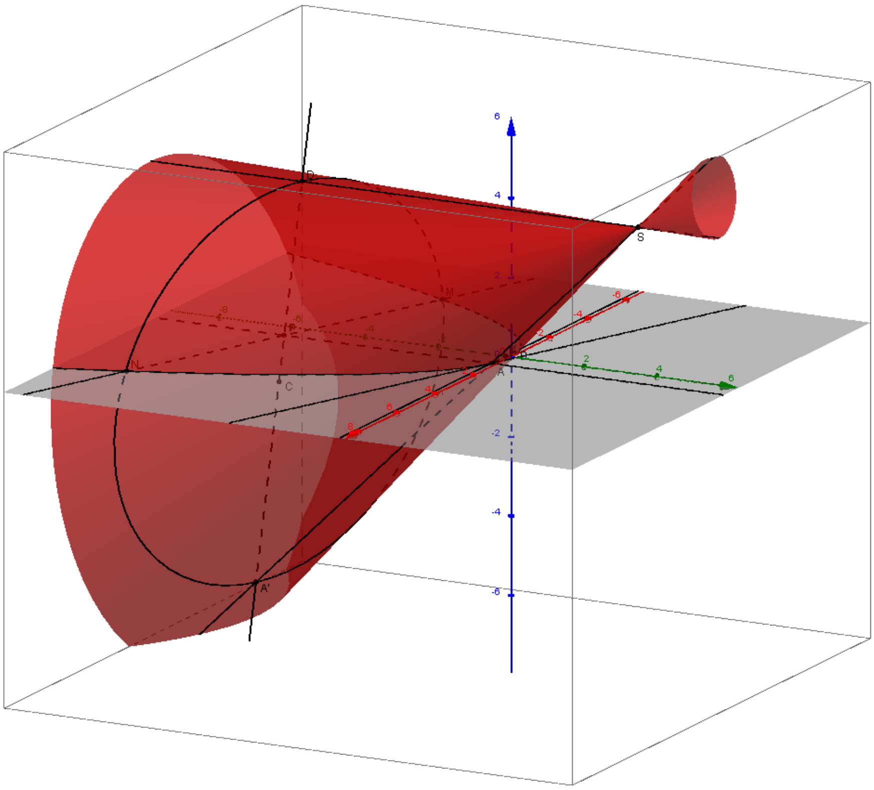
Para um ponto $P = (X, Y, Z) \in S$ e $Q = (x, y, z) \in C$ com $\lambda \in \Re$, como $Q = V + \lambda\overrightarrow{VP}$ temos:

$$Q = \begin{cases} x = a + \lambda(X - a) \\ y = b + \lambda(Y - b) \\ z = c + \lambda(Z - c) \end{cases} \Rightarrow \qquad Q = \begin{cases} x = 1 + \lambda(X - 1) \\ y = 4 + \lambda(Y - 4) \\ z = 4 + \lambda(Z - 4) \end{cases}$$

Então,

$$C = \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad C = \begin{cases} 4 + \lambda(Y - 4) = -\dfrac{(1 + \lambda(X - 1)^2}{4} & (1^a) \\ 4 + \lambda(Z - 4) = 0 & (2^a) \end{cases}$$

Pela segunda equação $\lambda = -\dfrac{4}{Z - 4}$, que, substituindo na primeira equação, nos dá a equação do cone $16X^2 + 17Z^2 - 64Z - 8XZ - 16YZ + 64Y = 0$

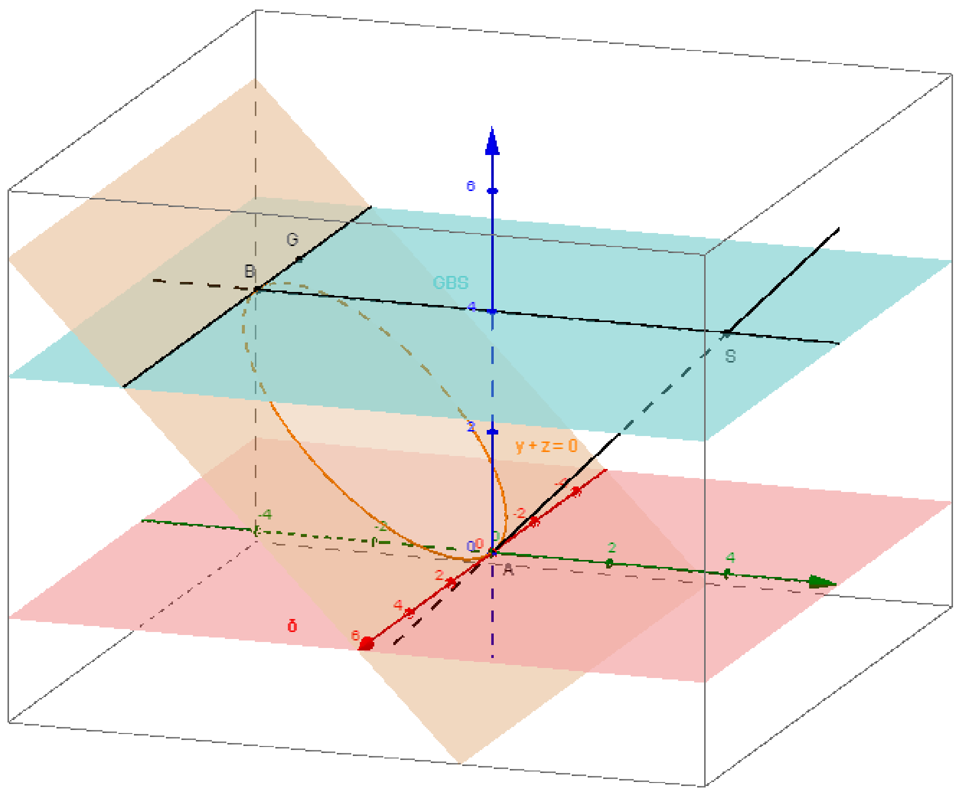


Exemplo 3

Tomando a elipse $C = \begin{cases} x^2 + 2z^2 - 8z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e o ponto $S = (0, 4, 4)$.

Primeiro devemos encontrar uma parábola correspondente a elipse dada. Para isso, devemos tomar:

- A e B, quaisquer na elipse, então escolhemos $A = (0, 0, 0)$ e $B(0, -4, 4)$;
- A reta s, tangente a elipse que passa por B, $s : (0, -4, 4) + t(2.83, 0, 0), (t \in \Re)$;
- Um ponto G qualquer na reta s, então escolhemos $G = (-2, -4, 4)$ e o plano $GBS : z = 4$;
- Um plano δ passando por A e paralelo ao plano GBS, então, $\delta : z = 0$;

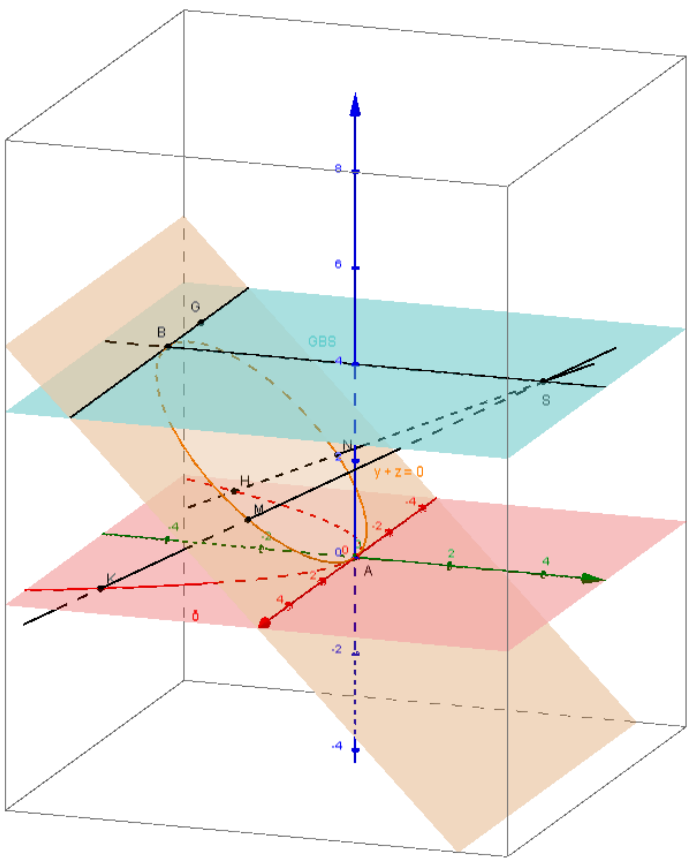


Tomamos agora, os pontos $M, N \in C$, sendo $M = (2.67, -1.33, 1.33)$ e $N - 2.67, -1.33, 1.33)$; as respectivas retas, m e n, entre eles e o ponto S, $m : (0, 4, 4) + t(2.67, -5.83, -2.67), (t \in \Re)$, e $n : (0, 4, 4) + t(-2.67, -5.83, -2.67), (t \in \Re)$. Então, os pontos de intersecção entre α e as retas m e n são os pontos $K = (4, -4, 0)$ e $H = (-4, -4, 0)$.

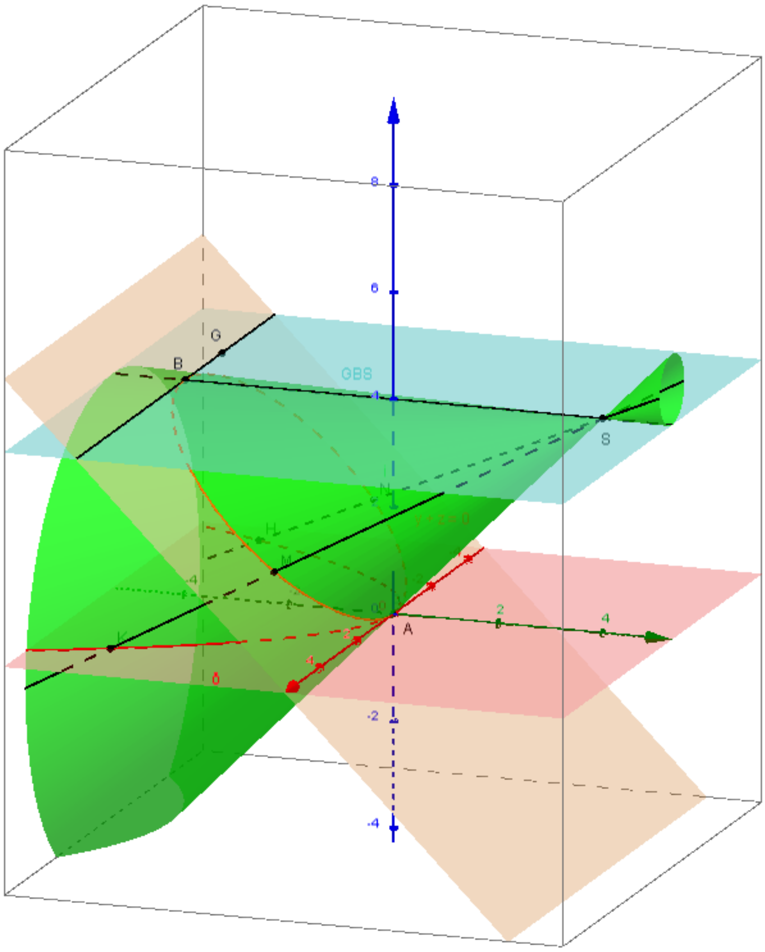
Dessa forma, nossa parábola, C', será a que passa pelos pontos A, K e H. Como uma parábola é definida por $y = ax^2 + bx + c$, considerando $A = (x_1, y_1, z_1), K = (x_2, y_2, z_2)$ e $H = (x_3, y_3, z_3)$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0) = a(0)^2 + b(0) + c \\ -4 = a(4)^2 + b(4) + c \\ -4 = a(-4)^2 + b(-4) + c \end{cases}$$

Considerando as devidas aproximações, $a = -\dfrac{1}{4}$ e $b = c = 0$, então nossa parábola $C' = \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4} \\ z = 0 \end{cases}$, o que reduz nosso problema ao Exemplo 1.



Podemos ver na figura abaixo a elipse, a parábola correspondente e o cone $x^2 + z^2 - 4z + 4y - yz = 0$, conforme encontrado no Exemplo 1.



Capítulo 7

Considerações Finais

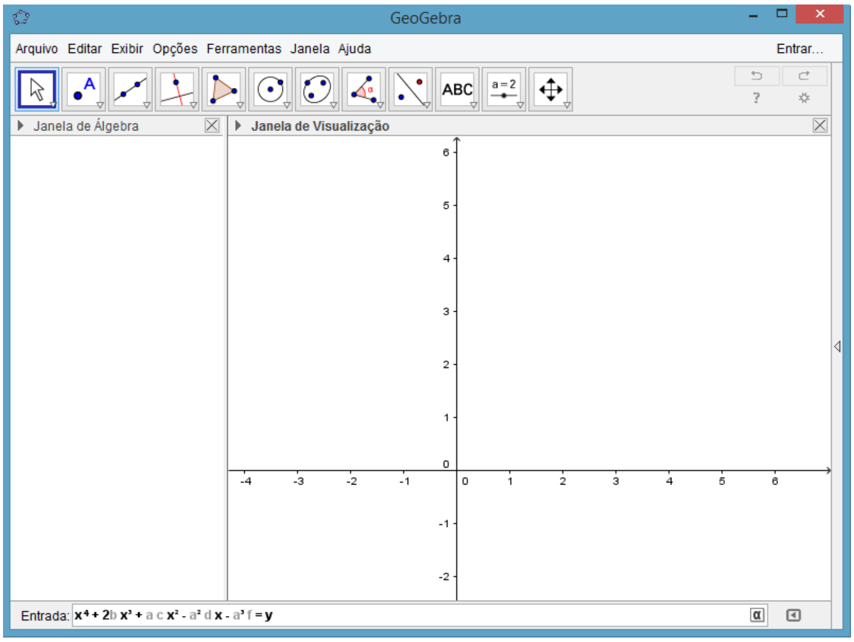
Temos a frente um enorme trabalho: como utilizar estes métodos no ensino? Como expandir as ideias contidas neles? Acredito que os métodos mostrados nesta dissertação trazem grandes vantangens, principalmente por tornar desnecessário que o aluno decore fórmulas enormes sem saber o seu sentido, como é o caso da formula de Cardano. Compreendo que as fórmulas geradas pelos métodos de L'Hôpital são um pouco complexas, mas o raciocínio para obtê-las é muito simples, assim como sua aplicação.

Para equação de segundo grau, podemos ter uma aplicação direta dos métodos logo no final do ensino fundamental e no ensino médio. Por envolverem conceitos mais simples próprios a essa etapa, podemos desenvolver atividades complementares aos métodos usuais de ensino, de modo a enriquecer as aulas. Devido a sua fácil aplicação, podemos fazer as construções manualmente ou, se disponível, com a utilização do software GeoGebra.

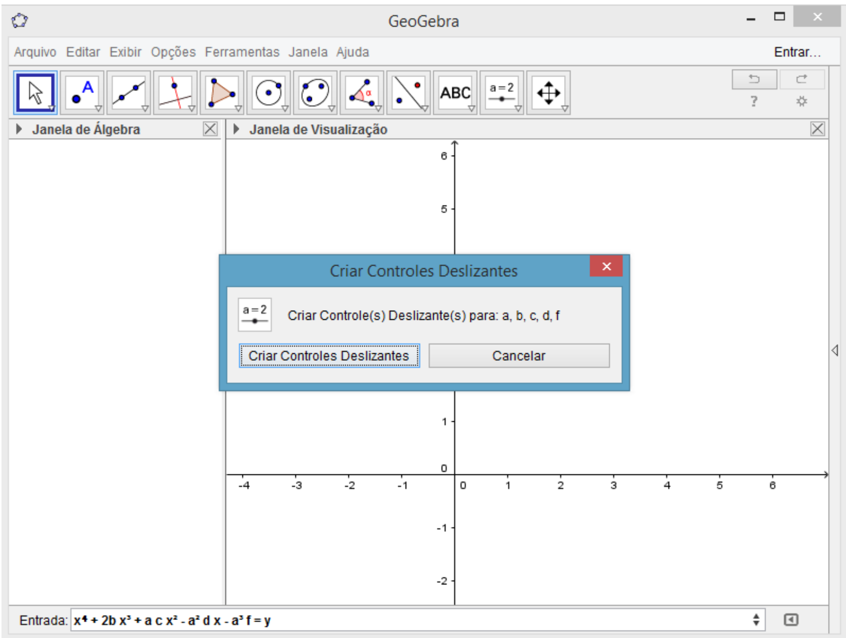
Para as equações de terceiro e quarto grau, podemos ter uma aplicação dos métodos de L'Hôpital no final do ensino ensino médio, uma vez que envolvem conceitos um pouco mais complexos. Na maioria dos casos, as equações de grau superiores a dois são tratadas de modo superficial no ensino médio, apresentando apenas os resultados e fórmulas finais. Até mesmo no ensino superior, as equações cúbicas e de quarto grau são um pouco negligenciadas. Por esse motivo, a aplicação dos métodos fica restrita a uma disciplina de Tópicos de Matemática, de História ou como atividades complementares em disciplinas de Cálculo.

Como disse anteriormente, temos um grande trabalho pela frente. Apresentei, acima, apenas alguma ideias iniciais de aplicações dos métodos de L'Hôpital mas, o que posso afirmar é que em todos os casos, o uso do software GeoGebra colabora bastante para a compreensão e aplicação dos resultados. A partir do software, podemos fazer as construções passo a passo, entendendo detalhadamente o processo utilizado.Existe também, a possíbilidade de criarmos 'controles deslizantes', ou seja, podemos criar um controle que comanda a variação de cada um dos parâmetros das equações, o que nos dá uma visão muito clara de como cada um dos fatores interfere nas equações.

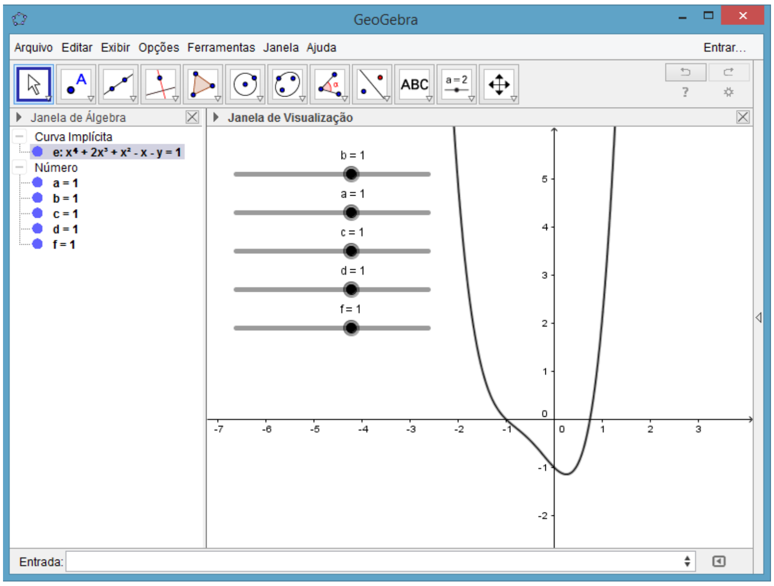
Por exemplo: Na barra de entrada do programa podemos inserir a equação $x^4 + 2bx^3 + acx^2 - a^2dx - a^3f = y$ conforme a figura abaixo:



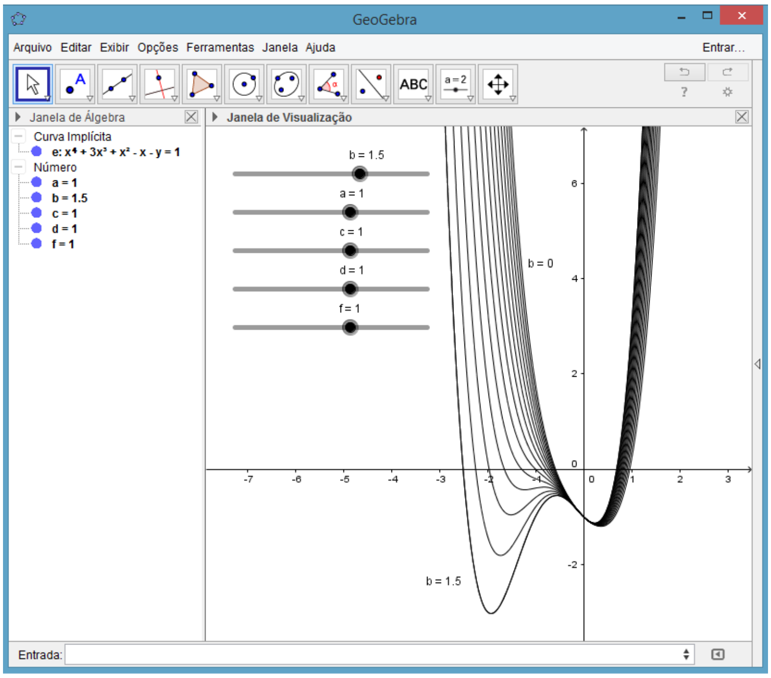
Observe que os coeficeintes a, b, c, d, f estão de uma cor diferente do demais, quando clicamos 'Enter', aparece a seguinte mensagem:



Quando clicamos em 'Criar Controles Deslizantes', são criados os controles para cada um dos parâmetros da equação e é plotado o gráfico de $x^4+2bx^3+acx^2-a^2dx-a^3f=y$.



Para cada um dos parámetros, podemos escolher seu valor máximo, mínimo e o incremento. Como cada controle desliza em sua barra, mesmo que a variação é discreta, para valores de incremento pequenos podemos ter uma ideia de como a equação varia no contínuo com a mudança de cada valor. Por exemplo, mudando o valor de $b \in [0, 1.5]$ com incremento de 0.1. Para ter uma ideia do movimento, habilitamos a 'função rastro' na curva, que nos mostra na mesma imagem o gráfico para cada um dos os valores de b:



Além do que já foi citado, podemos destacar também outras muitas vantagens do uso do software Geogebra, como por exemplo: a criação de gráficos em três dimensões; rotação e opções de visualização de gráficos; mudança de variáveis; opção do tipo de equações de curvas (paramétricas, polares, etc); protocolos de construção; definição automática de pontos de intersecção; e etc. Diante de toda essa facilidade disponibilizada pelo software, podemos observar o quanto era árduo o trabalho dos matemáticos antigos, os quais, desenvolveram e demonstraram métodos e teorias que até hoje nos desafiam, sem o auxílio da tecnologia.

Referências Bibliográficas

AMIR-MOEZ, A. R. Khayyam's solution of cubic equations. *Mathematics Magazine*, v. 35, n. 5, p. 269–271, 1962.

AMIR-MOEZ, A. R. A Paper of Omar Khayyám. *Scripta Mathematica*, v. 28, p. 323–337, 1963.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial.* [S.l.]: Makron Books, 1987.

BOYER, C. *A history of mathematics.* [S.l.]: Wiley, New York - London - Sidney., 1968.

CLAGETT, M. *Ancient Egyptian Science: Ancient Egyptian mathematics. Ancient Egyptian Mathematics (Memoirs of the American Philosophical Society).* [S.l.]: Wiley, New York - London - Sidney., 1999. v. 3.

COURANT, R. R. H. *O que é matemática.* [S.l.]: Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

EVES, H. *Introdução à história da matemática.* [S.l.]: Campinas. Tradução de Hygino Rodrigues, 2004.

GARBI, G. *O Romance das Equações Algébricas.* [S.l.]: São Paulo - Makon Books, 1997.

KATZ, V. *A history of mathematics.* [S.l.]: Pearson, Boston - San Francisco - New York., 2008.

LATHAM, M.; SMITH, D. *The Geometry of René Descartes.* [S.l.]: The Open Court Publishing Company - Chicago - London, 1925.

L'HOPITAL, M. d. *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problêmes tant déterminés qu'indétermines.* [S.l.]: Moutard - Paris, 1776.

NEUGEBAUER, O.; SACHS, A.; GOETZE, A. *Mathematical cuneiform texts.* New Haven, Conn., Pub. jointly by the American Oriental society and the American schools of Oriental research, 1945. Disponível em: ⟨http://hdl.handle.net/2027/mdp.39015026160013⟩.

RABUEL, C. *Commentaires sur la gómetrie de M. Descartes.* [S.l.]: Marcellin Duplain - Lyon, 1730.

GEOGEBRA: Dynamic Mathematics and Science for Learning and Teaching. As figuras e ilustrações deste trabalho foram feitos utilizando o software livre disponível em: http://www.geogebra.org/cms . Acesso em 05 de novembro de 2015.

Apêndice A

Comportamento das equações auxiliares

A partir das substituições feitas na equação quarto grau inicial (5.1),

$$x^4 + 2bx^3 + acx^2 - a^2dx - a^3f = 0$$

utilizando as equações (5.2)

$$ay = x^2 + bx$$

que elevado ao quadrado é a equação (5.3)

$$x^4 + 2bx^3 = a^2y^2 - b^2x^2$$

obtemos 6 novas equações sendo que 4 delas são importantes para as construções das raízes da equação inicial. Para as construções utilizamos, além da equação (5.2), as equações (5.5), (5.6), (5.8) e (5.9).

$$y^2 - \frac{b^2}{a}y + \frac{b^3x}{a^2} + \frac{c}{a}x^2 - dx - af = 0$$
$$y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = 0$$
$$y^2 + cy - \frac{b^2}{a}y + ay - x^2 - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3x}{a^2} - dx - af = 0$$

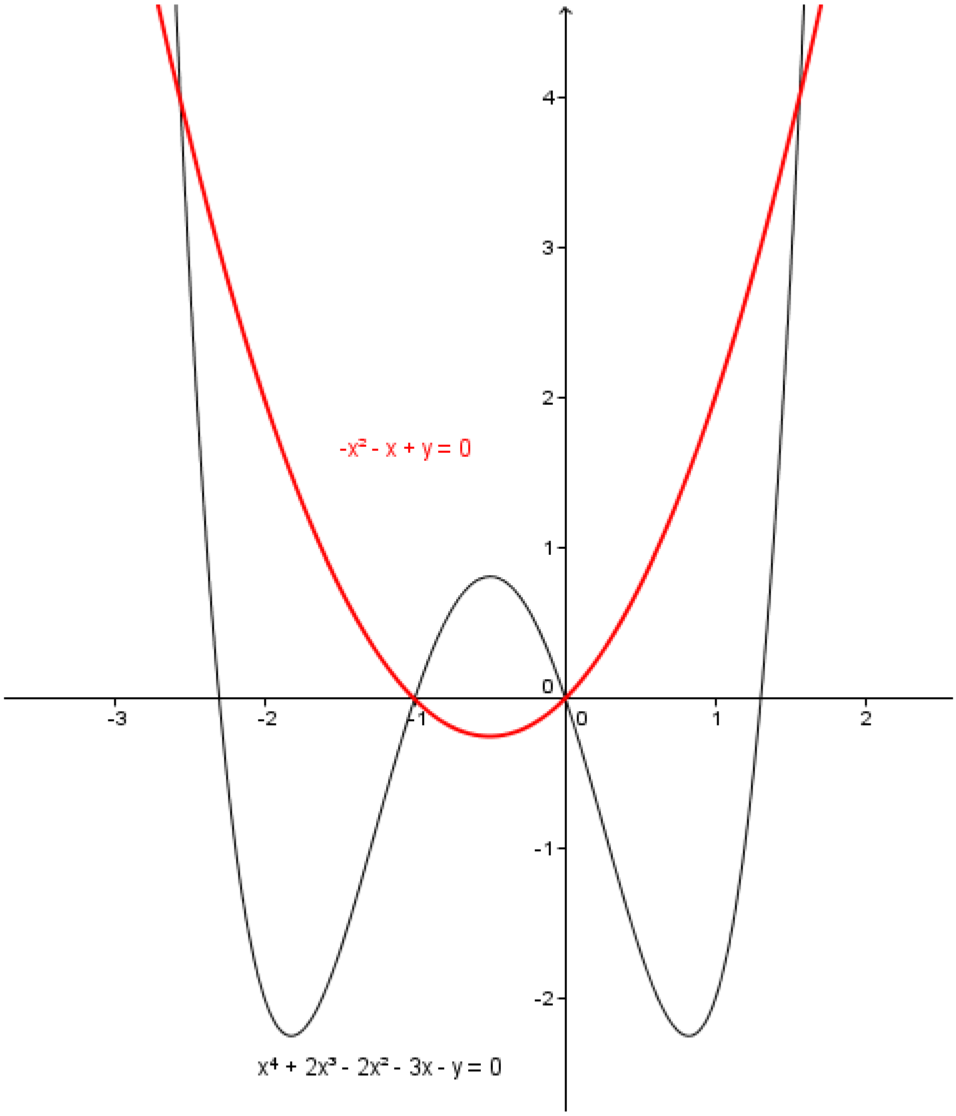
$$y^2 + cy - \frac{b^2}{a}y - ay + x^2 + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3x}{a^2} - dx - af = 0$$

Cada uma delas representa uma ou mais cônicas, dependendo da relação entre seus coeficientes. A seguir faremos essa análise.

1. A equação (5.2) representa uma parábola.

De fato: $ay = x^2 + bx \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{bx}{a}$

Para $a = 1, b = 1, c = -2, d = 3, f = 0$ temos:



2. A equação (5.5) representa uma elipse ou uma circunferência.

- Se $c = a$

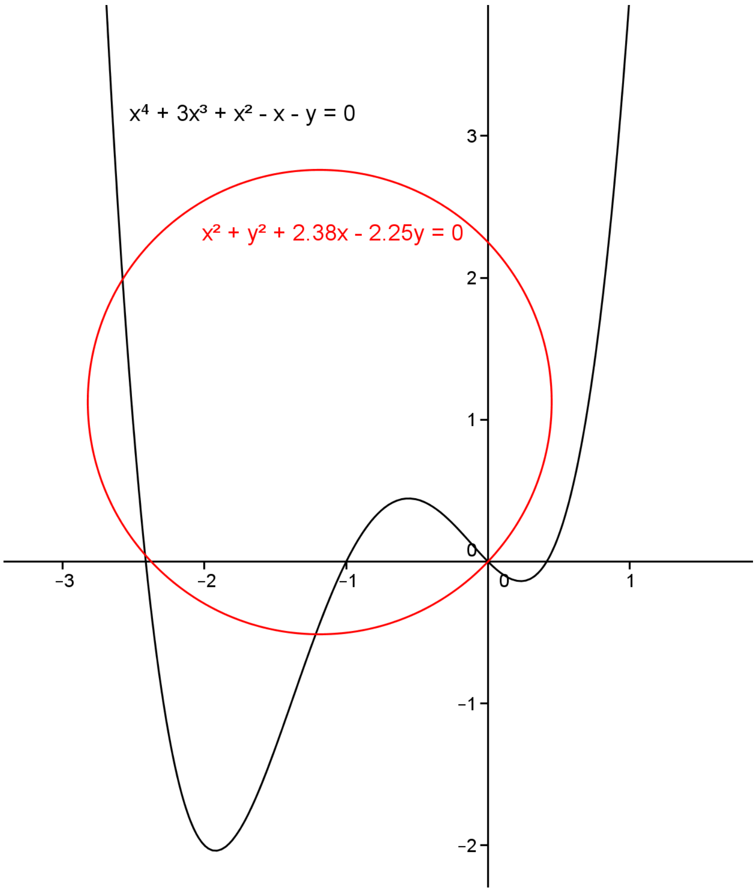
$$\begin{aligned} y^2 - \frac{b^2}{a}y + \frac{b^3x}{a^2} + \frac{c}{a}x^2 - dx - af = 0 \Rightarrow \\ y^2 - \frac{b^2}{a}y + x^2 + \frac{b^3x}{a^2} - dx - af = 0 \end{aligned}$$

Nesse caso, podemos completar qudrados para y e x e depois, fazendo uma mudança de variável, obtemos uma equação do tipo:

$$\begin{aligned} (y - s)^2 + (x + t)^2 = k \Rightarrow \\ \frac{y'^2}{k'^2} + \frac{x'^2}{k'^2} = 1 \end{aligned}$$

Que é uma circunferência.

Para $a = 1, b = 1.5, c = 1, d = 1, f = 0$ temos:

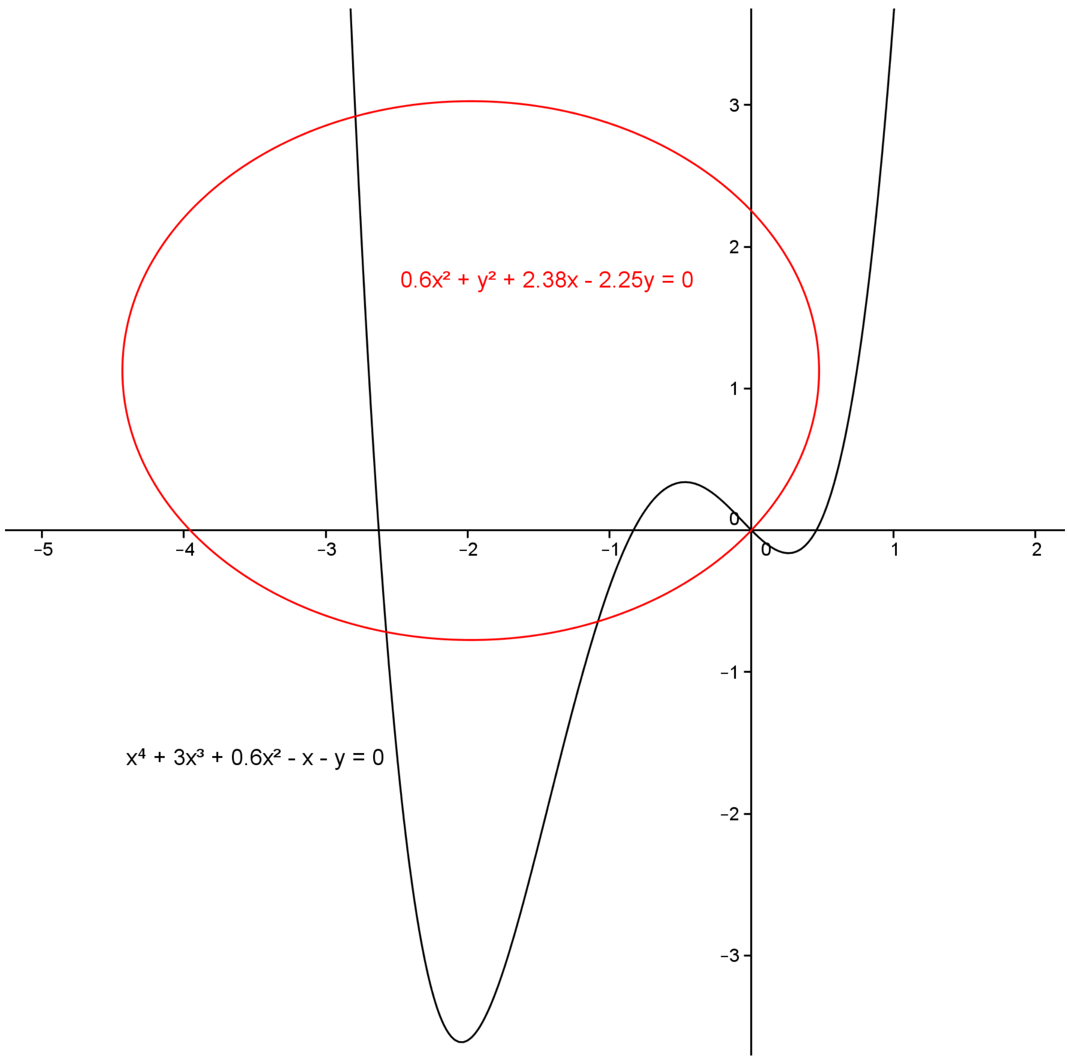


- Se $c \neq a$, não conseguimos eliminar o termo $\frac{c}{a}$ de x^2, então, quando completamos quadrados e fazemos uma mudança de variáveis, obtemos uma equação do tipo:

$$(y-s)^2 + \frac{(x+t)^2}{u} = k \Rightarrow$$
$$\frac{y'^2}{k'^2} + \frac{x'^2}{k''^2} = 1$$

Que é uma elipse.

Para $a = 1, b = 1.5, c = 0.6, d = 1, f = 0$ temos:



3. A equação (5.6) representa uma hipérbole, equilátera quando $b = a$.

Pela equação (5.6), temos:

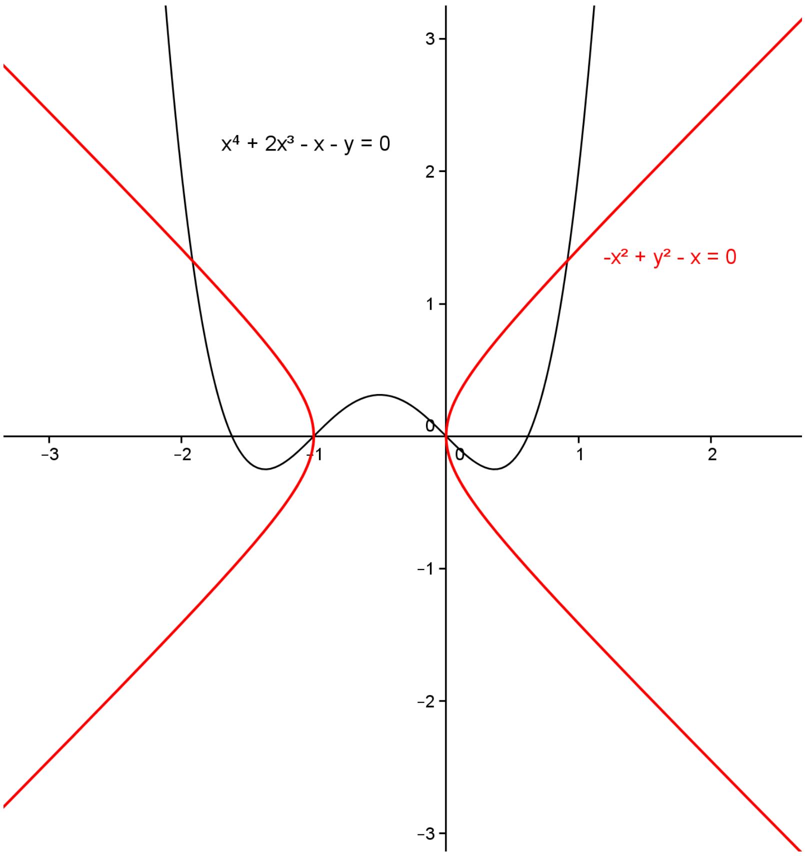
$$y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = 0 \Rightarrow$$
$$y^2 + cy - \frac{b^2}{a^2}x^2 - x(\frac{bc}{a} + d) - af = 0$$

Completando quadrados e fazendo algumas mudanças de variáveis, temos:

$$\frac{(y + \frac{c}{2})^2}{s} - \frac{(\frac{b}{a}x + u)^2}{s} = 1$$

Que é uma hipérbole, caso $b = a$, uma hipérbole equilátera.

Para $a = 1, b = 1, c = 0, d = 1, f = 0$ temos:



4. A equação (5.8) representa uma hipérbole equilátera.

Da equação (5.8) temos:

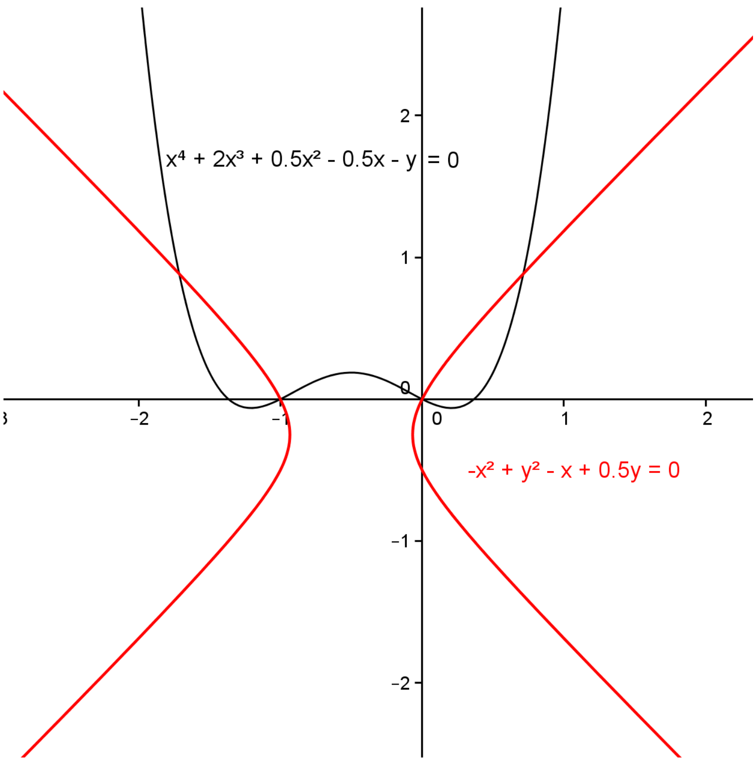
$$\begin{aligned}y^2 + cy - \frac{b^2}{a}y + ay - x^2 - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3x}{a^2} - dx - af = 0 \Rightarrow \\ y^2 + y(c - \frac{b^2}{a} + a) - x^2 + x(-b - \frac{bc}{a} + \frac{b^3}{a^2} - d) - af = 0\end{aligned}$$

Completando quadrados temos:

$$\begin{aligned}(y+s)^2 - (x-t)^2 = k \Rightarrow \\ \frac{(y+s)^2}{k} - \frac{(x-t)^2}{k} = 1\end{aligned}$$

Que é uma hipérbole equilátera.

Para $a = 1, b = 1, c = 0.5, d = 0.5, f = 0$ temos:



5. A equação (5.9) representa uma circunferência.

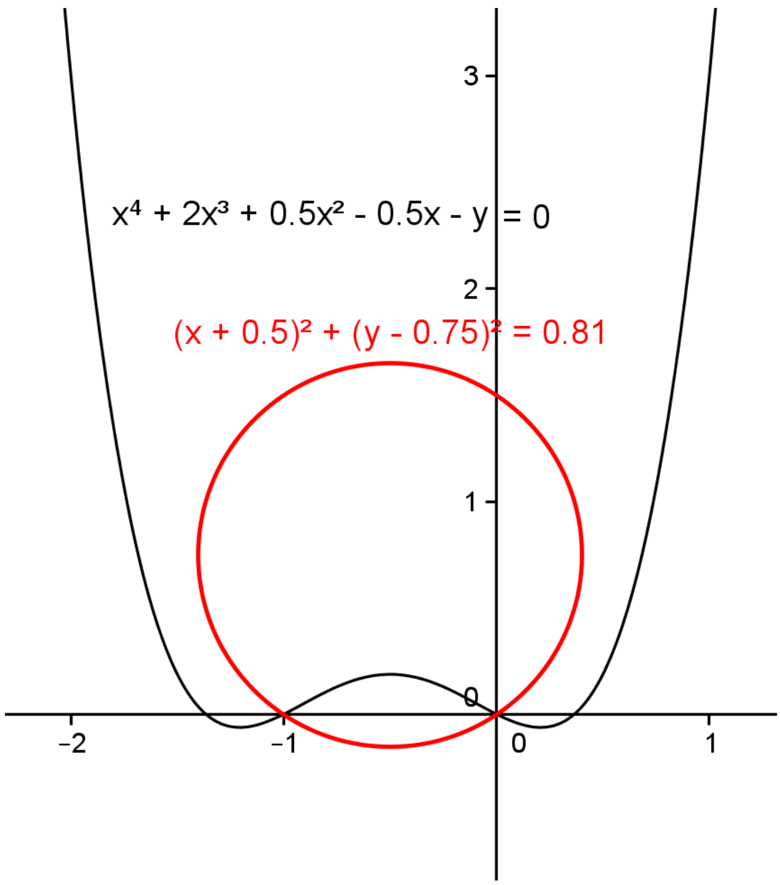
$$y^2 + cy - \frac{b^2}{a}y - ay + x^2 + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3x}{a^2} - dx - af = 0 \Rightarrow$$
$$y^2 + y(c - \frac{b^2}{a} - a) + x^2 + x(b - \frac{bc}{a} + \frac{b^3}{a^2} - d) - af = 0$$

Completando quadrados temos:

$$(y + s)^2 + (x + t)^2 = k$$

Que é uma circunferência.

Para $a = 1, b = 1, c = 0.5, d = 0.5, f = 0$ temos:



Apêndice B

Método Alternativo para Equações de Terceiro Grau

Vimos que, para equações de terceiro grau, L'Hôpital desenvolve um método, tal que, tomando uma equação da forma:

$$x^3 - b'x^2 + a'px + a'^2q = 0$$

Basta multiplicá-la por $x + b'$ ou $x - b'$, quando o sinal do segundo termo da equação for negativo ou positivo respectivamente, obtendo assim uma equação do quarto grau da forma:

$$x^4 + (a'p - b'^2)x^2 + a'(a'q + b'p)x + a'^2b'q = 0$$

Comparando essa última com a equação (5.1), obtemos algumas relações, o que nos permite determinar os pontos B, E e M como sendo:

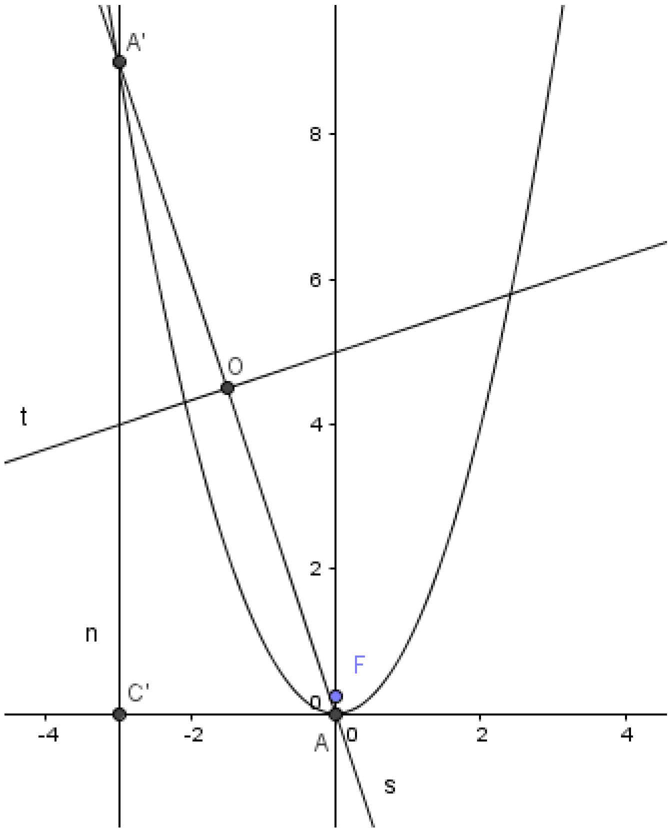
- O ponto $B = (0, \pm||\frac{a'}{2} + \frac{b'^2}{2a'}| \pm |\frac{p}{2}||) = (0, g)$.
- O ponto $E = (\pm||\frac{b'p}{2a'}| \pm |\frac{q}{2}||, g)$.
- O raio da circunferência $EM = \sqrt{m^2 - b'q}$

Para esse tipo de equação, L'Hôpital faz uma construção levemente diferente, mas que essencialmente leva aos mesmos pontos da construção feita para as equações de terceiro grau. Analisaremos o método a seguir:

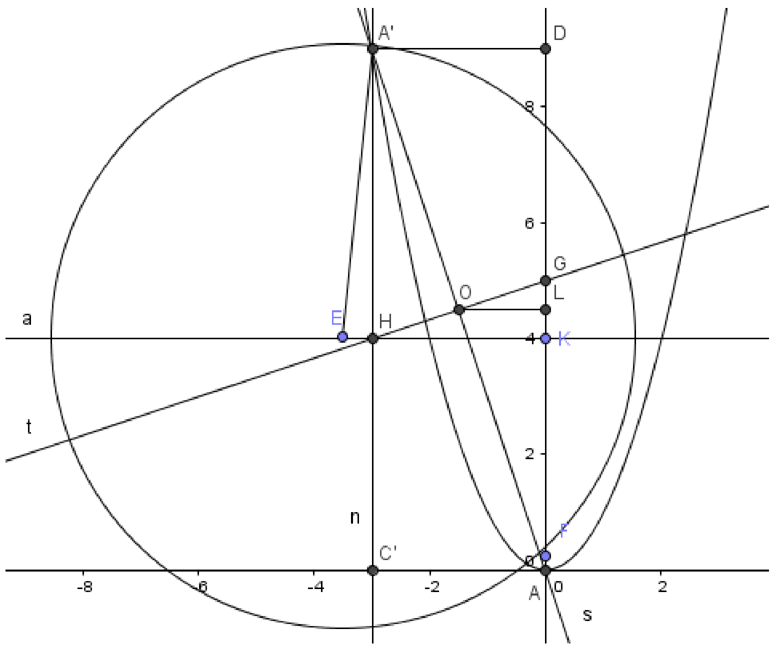
Sabemos que:

- Os pontos $A = D = C = (0,0)$
- $F = \frac{a'}{4}$, então $F = (0, \frac{a'}{4})$
- Assim a parábola tem vertice em C, foco em F e diretriz em $y = -\frac{a'}{4}$

Tomamos um ponto C' tal que $AC' = b'$; uma reta n, que passa por C' e é paralela ao eixo da parábola; o ponto A' que é a intersecção da reta n e a parábola; a reta AA' e seu ponto médio, O; e a reta t que passa por O e é perpendicular a reta n.



Agora, marcamos o ponto G que é a intersecção da reta t com o eixo da parábola; e um ponto K, no eixo da parábola tal que $GK = \frac{p}{2}$; uma reta a que passa por K e é paralela ao eixo da parábola; o ponto H que é a intersecção da reta a e t; o ponto E na reta a tal que $HE = \frac{q}{2}$; os pontos D' e L como as projeções de A' e O no eixo y respectivamente,. Finalmente, tomamos a circunferência centrada em E e com raio EA', que interseptará a parábola em até 3 pontos, além do ponto A'. Assim como nos outros casos, as coordenadas de x dos pontos de intersecção da parábola e da circunferência serão raízes da equação de terceiro grau.



De fato, pela construção $AC' = b'$ e $AD' = \frac{b^2}{a'}$, como O é ponto médio de AA', os triângulos $AA'D'$ e AOL são semelhantes e $OL = \frac{b}{2}$ e $AL = \frac{b^2}{2a'}$. Da mesma forma, são semelhantes os triângulos AOL e OLG então:

$$\frac{CL}{LO} = \frac{LO}{LG} \Rightarrow \frac{\frac{b^2}{2a'}}{\frac{b}{2}} = \frac{\frac{b}{2}}{LG} \Rightarrow LG = \frac{a'}{2}$$

Então $AK = AL + LG = \frac{a'}{2} + \frac{b^2}{2a'} - \frac{p}{2}$.

De maneira similar, utilizando os triângulos semelhantes GLO e GHK, chegamos a $KH = \frac{b'p}{2a'}$ e portanto $KE = KH + HE = \frac{q}{2} + \frac{b'p}{2a'}$.Se considerarmos uma reta m, paralela ao eixo da parábola e o ponto B como a intersecção da reta m e da reta $\overleftrightarrow{A'D'}$, pela semelhançọs triângulos $A'EB$ e AEK conseguimos provar que o raio da circunferência deve ser $EA' = EM = \sqrt{m^2 - b'q}$.

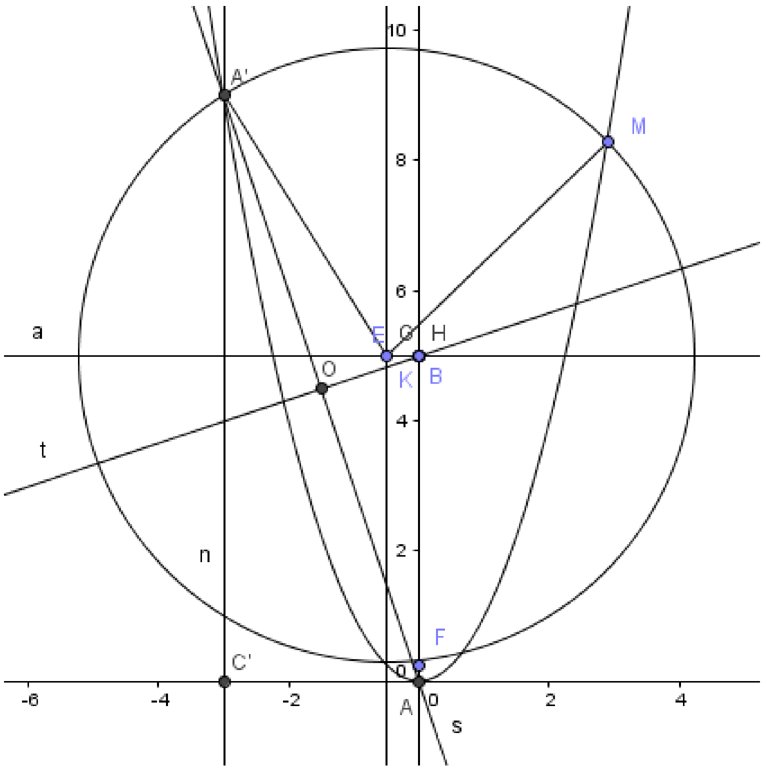
Analisando a construção, podemos dizer que:

- Os pontos $A = D = C = (0, 0)$
- $F = \frac{a'}{4}$, então $F = (0, \frac{a'}{4})$
- Assim, a parábola tem vértice em C, foco em F e diretriz em $y = -\frac{a'}{4}$
- $AC' = b'$, então $C' = (0, -b')$
- $GK = \frac{p}{2}$, pela construção $G = (0, \pm|\frac{a'}{2} + \frac{b^2}{2a'}|)$, se a' é positivo $G = (0, |\frac{a'}{2} + \frac{b^2}{2a'}|)$ e se a' for negativo $G = (0, -|\frac{a'}{2} + \frac{b^2}{2a'}|)$, então $K = (0, \pm||\frac{a'}{2} + \frac{b^2}{2a'}| \pm |\frac{p}{2}||) = (0, g')$
  - Se o coeficiente de x é positivo $K = (0, \pm||\frac{a'}{2} + \frac{b^2}{2a'}| - |\frac{p}{2}||)$
  - Se o coeficiente de x é negativo $K = (0, \pm||\frac{a'}{2} + \frac{b^2}{2a'}| + |\frac{p}{2}||)$
- $HE = \frac{q}{2}$, pela construção $H = (|\frac{b'p}{2a'}|, g')$, então $E = (|\frac{b'p}{2a'}| \pm |\frac{q}{2}|, g')$
  - Se o termo independente é positivo $E = (|\frac{b'p}{2a'}| - |\frac{q}{2}|, g')$.
  - Se o termo independente é negativo $E = (|\frac{b'p}{2a'}| + |\frac{q}{2}|, g')$.

Utilizando o mesmo exemplo que na seção 5.2, temos que para $a' = 1$, $b' = 3$, $p = 0$ e $q = 1$ a equação de terceiro seria $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ e, fazendo a construção como da forma fiel:

- Os pontos A, D, C, F e a parábola seriam os mesmos que o anterior.
- $C' = (0, -b') = (0, -3)$
- $G = (0, |\frac{a'}{2} + \frac{b^2}{2a'}) = (0, 5)$
- $K = (0, ||\frac{a'}{2} + \frac{b^2}{2a'}| - |\frac{p}{2}||) = (0, 5) = (0, g')$
- $H = (|\frac{b'p}{2a'}|, g') = (0, 5)$
- $E = (|\frac{b'p}{2a'}| - |\frac{q}{2}|, g') = (-0.5, 5)$
- $EA' = 4.72$, então, a circunferência seria a centrada em E com raio $EA' = 4.72$, ou seja, $(x + 0.5)^2 + (y - 5)^2 = 22.25$.

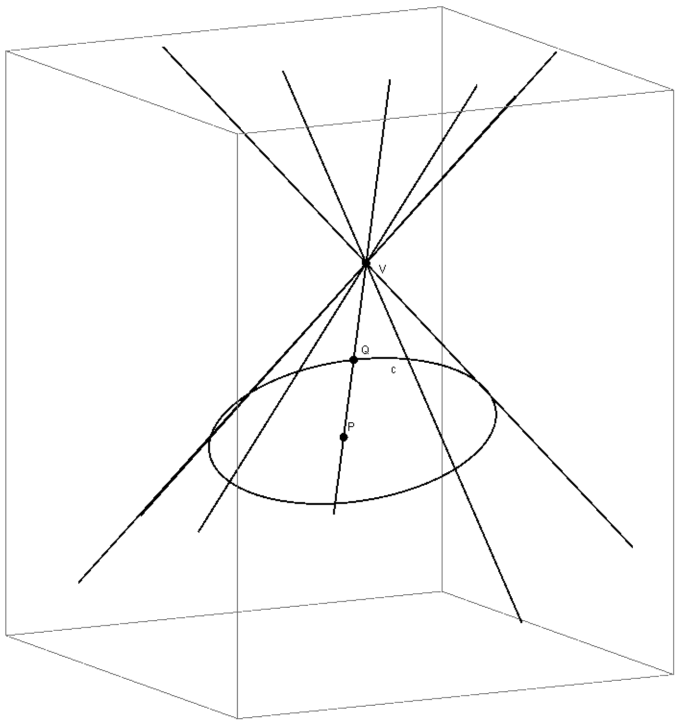
Portanto, podemos perceber que a parábola e a circunferência são as mesmas nos dois casos.



Apêndice C

Superfícies Cônicas

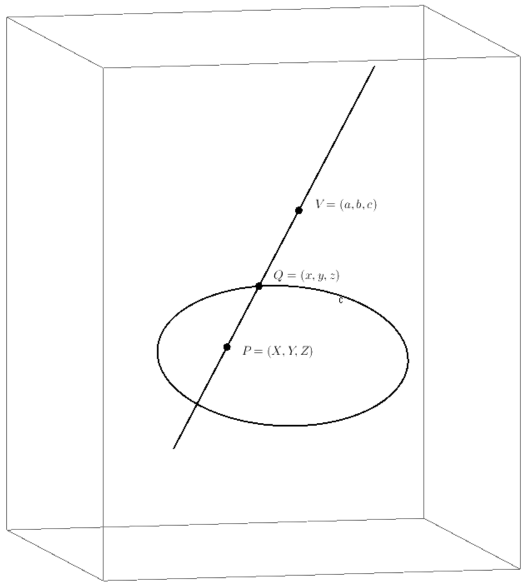
Uma superfície Cônica é um subconjunto S de E^3 se existir uma curva C e um ponto $V \notin C$ tais que S é a reunião das retas VQ, onde Q percorre C.
A curva C se chama diretriz de S, V o vértice de S e cada reta VQ uma geratriz de S.



Sejam C e V dados por:

$$C = \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$V = (a,b,c)$$



Observado a figura acima, vemos que um ponto $P = (X,Y,Z)$ está em S se e somente se, existe $Q = (x,y,z) \in C$ e $\lambda \in \Re$ tais que:

$\overrightarrow{VQ} = \lambda\overrightarrow{VP}$, ou seja,

$Q = V + \lambda\overrightarrow{VP}$, de onde resulta

$$Q = \begin{cases} x = a + \lambda(X - a) \\ y = b + \lambda(Y - b) \\ z = c + \lambda(Z - c) \end{cases}$$

Temos que, $Q \in C$ se e somente se x, y,e z estão na curva, então

$$C = \begin{cases} f(a + \lambda(X - a), b + \lambda(Y - b), c + \lambda(Z - c)) = 0 \\ g(a + \lambda(X - a), b + \lambda(Y - b), c + \lambda(Z - c)) = 0 \end{cases}$$

Se pudermos eliminar λ, obteremos uma relação entre X,Y,Z: $F(X,Y,Z) = 0$.
Se essa relação for equivalente a equação anterior de C, ela define S como superfície, e sua equação será $F(X,Y,Z) = 0$.