



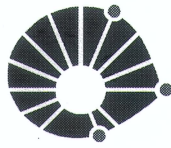
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

OTÁVIO MARÇAL LEANDRO GOMIDE

CICLOS LIMITE EM SISTEMAS DINÂMICOS SUAVES E NÃO
SUAVES

CAMPINAS
2015



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

OTÁVIO MARÇAL LEANDRO GOMIDE

CICLOS LIMITE EM SISTEMAS DINÂMICOS SUAVES E NÃO
SUAVES

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Ricardo Miranda Martins

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO OTÁVIO MARÇAL LEANDRO GOMIDE, E ORIENTADA PELO PROF. DR. RICARDO MIRANDA MARTINS.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2015

Agência de fomento: FAPESP
Nº processo: 2013/18168-5

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

G586c Gomide, Otávio Marçal Leandro, 1991-
Ciclos limite em sistemas dinâmicos suaves e não suaves / Otávio Marçal
Leandro Gomide. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Ricardo Miranda Martins.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Ciclo limite. 2. Órbitas periódicas. 3. Método averaging (Equações
diferenciais). 4. Campos vetoriais descontínuos. 5. Filippov, Sistemas de. I.
Martins, Ricardo Miranda, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Limit cycles in smooth and non-smooth dynamical systems

Palavras-chave em inglês:

Limit cycles

Periodic orbits

Averaging method (Differential equations)

Discontinuous vector fields

Filippov systems

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Ricardo Miranda Martins [Orientador]

Marco Antonio Teixeira

João Carlos da Rocha Medrado

Data de defesa: 07-08-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 07 de agosto de 2015 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS



Prof.(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof.(a). Dr(a). JOÃO CARLOS DA ROCHA MEDRADO

*À minha mãe, Osvania,
e à minha avó, Selma.*

Agradecimentos

À Deus, por estar sempre presente em todos os momentos da minha vida, também por me ajudar a alcançar meus objetivos e minhas conquistas.

À minha mãe, Osvania, e à minha avó, Selma, por todo o apoio durante minha vida, por todo amor e carinho, e pelo auxílio e compreensão nos momentos mais difíceis. Tudo o que eu obtive até hoje em minha vida têm sido graças à vocês, então deixo registrado meu singelo obrigado.

À minha família, por todo amor e carinho, em especial, aos meus tios, Miriam e Osmar, por estarem sempre presentes em todos os momentos de minha vida.

Ao meu orientador, Professor Dr. Ricardo Miranda Martins, por toda a confiança que tem demonstrado ao longo desses anos, e é claro pela paciência de me orientar. Agradeço também pela relação de amizade que foi criada ao longo deste trabalho.

Aos membros da banca, professor Dr. Marco Antonio Teixeira e professor Dr. João Carlos Medrado, pela contribuição no meu trabalho, através de sugestões pertinentes.

Aos professores Dr. Ary Chiacchio e Dra. Maria Sueli Roversi. Não posso deixar de mencionar essas duas pessoas maravilhosas que estiveram presentes desde o início da minha vida acadêmica. Além de responsáveis por toda a minha base em matemática, vocês estiveram sempre dispostos a ouvir um desabafo e dar um bom conselho. Obrigado pelo carinho.

Ao grupo de Sistemas Dinâmicos do IMECC, muito obrigado por todas as conversas científicas (ou não). Agradeço a vocês por terem compartilhado tantos momentos alegres comigo, além de colegas de trabalho, encontrei em vocês um grupo de amigos que eu quero manter para o resto da minha vida. Em especial, à Kamila, à Anna, à Thais e ao Fernando, agradeço por todo o carinho, por toda a diversão e por todos os momentos que passamos juntos, não podia ter encontrado melhores amigos nesta vida.

À Kamila e à Anna, agradeço pela companhia na 9A. O que seria de mim sem vocês me atormentando cada dia? HAHAHA. Eu esperava encontrar colegas de trabalho, mas vocês se tornaram pra mim muito mais do que amigos, criamos uma irmandade ao longo desse tempo. Muito obrigado por cada gesto de carinho, por cada post-it e por toda a torcida que vocês tem por mim.

Ao Douglas, agradeço pela contribuição científica no meu trabalho, e pela oportunidade de conviver com um matemático brilhante que, com sua humildade, está sempre pronto pra ajudar os colegas, além de proporcionar muitos momentos de alegria e diversão.

Aos meus amigos, agradeço por todo o carinho, paciência e compreensão pela ausência em alguns momentos. Em especial, à Paty, por toda a companhia no ônibus, agradeço por todas as conversas e pela amizade que eu conquistei dessa minha bixete do cursão, e à Priscilla, por todo o carinho, mesmo à distância.

À Paloma, por todo o carinho e amizade. Não tenho nem palavras pra expressar como você é importante em minha vida. Agradeço pela sua presença em cada momento de dificuldade, seu

apoio fez tudo se tornar muito mais fácil. E é claro, agradeço por toda a alegria que você me proporciona, afinal, o que seria dos meus dias sem nossos cafés? A vida não nos deu irmãos biológicos, porém ela se encarregou de me dar uma irmãzinha de coração. Muito obrigado por tudo.

À FAPESP, pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Resumo

O estudo de conjuntos minimais é um tópico de grande interesse na teoria qualitativa de sistemas dinâmicos. Nesta dissertação, investigamos a existência de ciclos limite em sistemas planares contínuos e descontínuos.

No caso de sistemas dinâmicos contínuos, apresentamos uma formalização do método do *averaging*, e utilizamos essa ferramenta para estudar o número de ciclos limite em sistemas planares autônomos. Como resultado, obtemos o número máximo de ciclos limite (detectados pelo método do *averaging* de primeira ordem) que bifurcam de certas classes de centros isócronos planares quadráticos e cúbicos, através de perturbações polinomiais de grau n (para alguns valores de n), e conjecturamos o limitante superior no caso geral.

Finalmente, introduzimos o leitor à fascinante teoria de sistemas dinâmicos descontínuos, e estudamos a existência de ciclos limite costurantes em sistemas descontínuos lineares por partes que possuem um círculo (\mathbb{S}^1) como variedade de descontinuidade. Exibimos configurações de sistemas centro-foco e centro-sela que possuem um ciclo limite costurante.

Palavras-chave: Ciclo limite, Órbitas periódicas, Método averaging (Equações diferenciais), Campos vetoriais descontínuos, Filippov, Sistemas de.

Abstract

The study of minimal sets is a very active research topic in the qualitative theory of dynamical systems. In this master thesis we investigate the existence of limit cycles in smooth and non-smooth planar systems.

In smooth dynamical systems, we present a formalization of averaging method and we use this tool to study the number of limit cycles in planar autonomous systems. As a result, we obtain a maximum number of limit cycles (detected by first order averaging) bifurcating from some classes of isochronous quadratic and cubic centers, through polynomial perturbations of degree n (for some values of n), and we conjecture the upper bound in the general case.

Finally, we introduce the fascinating world of non-smooth dynamical systems, and we study the existence of crossing limit cycles in discontinuous planar piecewise linear systems which have a circle (\mathbb{S}^1) as discontinuity manifold. We exhibit configurations of saddle-center and focus-center cases which present a crossing limit cycle.

Keywords: Limit cycles, Periodic orbits, Averaging method (Differential equations), Discontinuous vector fields, Filippov systems.

Sumário

Introdução	12
1 Preliminares	18
1.1 Ferramentas Básicas	18
1.2 Teoria do Grau de Brouwer	31
2 O Método do <i>Averaging</i>	37
2.1 Teoria do <i>Averaging</i>	37
2.2 O Método do <i>Averaging</i> Clássico	46
2.3 O Método do <i>Averaging</i> Generalizado - via Grau de Brouwer	51
3 Aplicações do Método do <i>Averaging</i>	57
3.1 Método do <i>Averaging</i> para Sistemas Planares Autônomos	57
3.2 Panorama Geral	65
3.3 Ciclos Limite Bifurcantes de Perturbações de Centros Quadráticos Isócronos Planares	65
3.4 Ciclos Limite Bifurcantes de Perturbações de Centros Cúbicos Isócronos Planares	84
4 Sistemas de Filippov	94
4.1 A convenção de Filippov	94
4.2 Órbitas Periódicas, Separatrizes e Ciclos	107
4.3 Equivalência Topológica de Sistemas de Filippov	111
4.4 O Método do <i>Averaging</i> para Sistemas Descontínuos	115
5 Ciclos Limite em Sistemas de Filippov com Descontinuidade em \mathbb{S}^1	118
5.1 Teoria Descontínua de Vogel	118
5.2 Centro - Foco	119
5.3 Centro - Sela	128
6 Perspectivas Futuras	137
6.1 Sistemas de Filippov com Descontinuidade em \mathbb{S}^1	137
6.2 Sistemas Dinâmicos Não-Suaves no Toro	138
6.3 Ciclos Limite Originados de T-Singularidades	140
Referências	143
A Expressões das funções $F_1^{[n]}(Z)$	148

B	Expressões das funções $F_2^{[n]}(Z)$	152
C	Condições Gerais sobre os Coeficientes da Perturbação para se obter o número máximo de ciclos limite no Sistema S1-δ	156
C.1	Perturbação de grau 1	156
C.2	Perturbação de grau 2	157
C.3	Perturbação de grau 3	157
C.4	Perturbação de grau 4	157
C.5	Perturbação de grau 5	158
C.6	Perturbação de grau 6	159
C.7	Perturbação de grau 7	160
D	Condições Gerais sobre os Coeficientes da Perturbação para se obter o número máximo de ciclos limite no Sistema S2-δ	163
D.1	Perturbação de grau 1	163
D.2	Perturbação de grau 2	163
D.3	Perturbação de grau 3	164
D.4	Perturbação de grau 4	164
D.5	Perturbação de grau 5	165
D.6	Perturbação de grau 6	166
E	Cálculos dos Sistemas de Chebyshev	168
E.1	$f_2^{[4]}$ possui no máximo 4 raízes em (0,1)	168
E.2	$f_2^{[5]}$ possui no máximo 5 raízes em (0,1)	169
E.3	$f_2^{[6]}$ possui no máximo 6 raízes em (0,1)	170
F	Funções da equação (3.4.12)	172
G	Expressão da função α (5.3.8)	176

Introdução

O conceito de ciclo limite foi introduzido pela primeira vez por Henri Poincaré na segunda parte do trabalho “*Sur les courbes définies par une équation différentielle*”, em 1882 (ver [67]):

“... il y a un autre genre de courbes fermées qui jouent un rôle capital dans cette théorie: ce sont les cycle limites. J’appelle ainsi les courbes fermées qui satisfont à notre équation différentielle et dont les autres courbes définies par la même équation se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre. Cette seconde notion n’est pas moins importante que la première. Supposons, en effet, que l’on ait tracé un cycle limite; il est clair que le point mobile dont nous parlions plus haut ne pourra jamais le franchir et qu’il restera toujours à l’intérieur de ce cycle, ou toujours à l’extérieur.”

Poincaré imaginava as soluções de uma equação diferencial como um ponto móvel, como por exemplo um planeta, que descreve uma trajetória no plano, e assim, segundo sua definição, um ciclo limite corresponde à uma solução do sistema que possui a forma de uma curva fechada, e além disso, em suas proximidades, todas as outras soluções aproximam-se desta. Com isso, tal ciclo originou um novo tipo de curva definida por uma equação diferencial, e forneceu um novo problema a ser estudado pela comunidade matemática.

Do ponto de vista físico, tal definição implica que, para quaisquer condições iniciais numa vizinhança de um ciclo limite, a trajetória se aproxima assintoticamente desta curva fechada sem jamais atingi-la. Embora essa explicação tenha definido o conceito de ciclo limite, seu significado em problemas reais ainda não estava claro, e somente mais tarde, Poincaré forneceu sua verdadeira interpretação.

Em 1885, o engenheiro francês Henry Léauté publicou um trabalho intitulado “*Sur les oscillations à longue période dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations*” em que o conceito de ciclo limite foi utilizado pela primeira vez, contudo ainda não se conhecia a sua correspondência com a tecnologia.

Em 1902, Poincaré tornou-se professor de eletricidade teórica na École Supérieure des Postes et Télégraphes, em Paris, e a pedido de Édouard Éstaunié, ele lecionou algumas aulas em uma conferência, cujo tema escolhido foi telegrafia sem fio. Na última aula, intitulada “*Télégraphie dirigée: oscillations entretenues*”, Poincaré forneceu uma condição necessária para o estabelecimento de um regime estável de oscilações mantidos no arco de canto (um dispositivo utilizado em telegrafia sem fio), em particular, foi demonstrada a existência de um ciclo limite estável no sistema. Assim, foi estabelecida uma interpretação do conceito de ciclo limite, que tornou-se um objeto de grande interesse dentre os matemáticos, físicos e engenheiros.

Para exemplificar o significado de um ciclo limite, utilizaremos um modelo de estudo populacional de um sistema predador-presa baseado na equação de Lotka-Volterra. Tal modelo prevê que a relação entre os predadores e suas presas é resultado de uma oscilação populacional em relação ao tempo, baseada nas densidades iniciais de predadores e de presas.

Considere que uma população de raposas e coelhos compartilham um mesmo território. Se

o número inicial de raposas é pequeno em comparação com a quantidade de coelhos, então elas terão alimento em abundância e poderão se reproduzir. Com o aumento da quantidade de predadores, a população de coelhos tende a diminuir, e com a escassez de comida, muitas raposas morrerão e assim, o sistema retorna a sua situação inicial em que havia poucos predadores e muitas presas. Tal fenômeno pode ser interpretado matematicamente como o surgimento de um ciclo limite atrator no sistema baseado na equação de Lotka-Volterra.

Com o desenvolvimento da teoria qualitativa de sistemas dinâmicos, o estudo de ciclos limite passou a desempenhar um papel muito importante, pois a dinâmica de um sistema pode ser completamente caracterizada por seus elementos críticos e posição relativa das variedades invariantes. Contudo, apesar das inúmeras ferramentas para determinar a existência e quantidade de ciclos limite, este ainda é um tópico que proporciona um grande número de problemas em aberto na Matemática, dentre os quais o mais famoso é o 16º Problema de Hilbert.

Os “*Problemas de Hilbert*” constituem um conjunto de 23 problemas propostos pelo matemático alemão David Hilbert na conferência do Congresso Internacional de Matemáticos de Paris, em 1900. O 16º Problema de Hilbert envolve diversas áreas de estudo, e têm produzido um grande número de avanços na matemática atual com a busca de sua solução.

Poincaré havia proposto o estudo de campos vetoriais polinomiais no plano em seu programa para o desenvolvimento da teoria geométrica de equações diferenciais. Com isso, Hilbert indagou quantos ciclos limite existem em um sistema polinomial planar de grau n e quais seriam as suas localizações. Apesar de ingênua, esta pergunta tem permanecido sem resposta há mais de um século, e tornou-se conhecida como a segunda parte do 16º problema de Hilbert.

Dada a dificuldade deste problema, a pergunta de Hilbert foi dividida em três questões, porém igualmente difíceis de se responder:

1. Um campo vetorial polinomial planar possui um número finito de ciclos limite?
2. O número de ciclos limite de um campo vetorial polinomial planar é limitado por uma constante dependente apenas do grau dos polinômios que constituem o sistema?
3. Qual é o limitante $H(n)$ de ciclos limite de um campo vetorial polinomial planar?

Em 1923, Dulac convenceu-se de que havia resolvido o primeiro problema em toda sua generalidade (ver [12]), e nos anos 50, Petrovskii e Landis publicaram uma solução para o terceiro problema em [64, 65]. Eles mostraram que $H(n)$ era menor ou igual que um polinômio de grau 3, e que $H(2) = 3$. Contudo, no início dos anos 60, S.P. Novikov e os próprios autores reconheceram que as afirmações eram falsas, e em [70], temos a construção de campos vetoriais quadráticos com quatro ciclos limite.

Em 1982, Ilyashenko encontrou uma falha na demonstração de Dulac para o primeiro problema (ver [31, 32]). Assim, após 80 anos na busca da resposta para o problema de Hilbert, este permanecia o mesmo desde que foi enunciado.

Finalmente, em 1990, o primeiro problema foi resolvido, independentemente, por Ilyashenko e Écalle (ver [33, 16]), porém as outras duas perguntas permanecem sem resposta até os dias atuais. Contudo, ao longo desses anos, foi produzida uma série de trabalhos direcionados à sua solução, dentre os quais, muitos são devidos à Jaume Llibre, e pode-se dizer que nunca se esteve tão próximo de se obter uma resposta para tal problema.

Objetivos

Ciclos Limite em Sistemas Dinâmicos Suaves

A primeira parte desta dissertação será direcionada para o estudo de sistemas dinâmicos suaves. Assim, apresentaremos uma interessante técnica para encontrar ciclos limite em sistemas suaves, conhecida como Método do *Averaging*¹.

De maneira geral, em sistemas dinâmicos suaves, cada órbita é homeomorfa a \mathbb{R} , a um ponto, ou a um círculo e a chamamos de órbita regular, um ponto de equilíbrio (ou ponto singular) ou uma órbita periódica, respectivamente.

Logo, para determinar o comportamento qualitativo de um sistema, temos que saber quando existem órbitas periódicas. Além disso, se uma órbita periódica é isolada (isto é, existe uma vizinhança no espaço de fase em que ela é a única órbita periódica) então ela é chamada de ciclo limite. Desta forma, os ciclos limite desempenham um papel fundamental na teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos.

Em geral, encontrar ciclos limite em um sistema é uma tarefa árdua e quase impossível em alguns casos. Contudo, veremos ao longo deste trabalho que, com o auxílio do Método do *Averaging*, este difícil problema pode ser reduzido a encontrar zeros de uma função não-linear em um espaço de dimensão finita, ou seja, agora o problema tem a mesma dificuldade do problema de encontrar os pontos singulares de um sistema diferencial.

Com isso, temos o objetivo de introduzir essa fascinante ferramenta, que é capaz de reduzir drasticamente a dificuldade de um dos maiores problemas da análise de um sistema dinâmico. Além disso, apresentaremos os resultados obtidos da aplicação deste método para identificar ciclos limite bifurcantes de centros quadráticos isócronos planares (ver próxima sessão).

Ciclos Limite em Sistemas Dinâmicos Não-Suaves

A segunda parte será dedicada à introduzir o leitor no mundo dos sistemas dinâmicos descontínuos (ou não-suaves).

Atualmente, existe uma forte tendência a se estudar sistemas descontínuos, em razão da grande variedade de fenômenos que são melhor entendidos quando modelados por sistemas descontínuos. Com isso, a teoria dos sistemas não-suaves (ou sistemas de Filippov) têm sido intensamente desenvolvida nos últimos anos, e tornou-se certamente uma fronteira comum entre a matemática, a física e a engenharia.

Apresentaremos a formalização desta teoria, feita através das convenções de Filippov, discutiremos alguns exemplos que ilustram estes novos conceitos, e além disso apresentaremos algumas generalizações de definições do caso contínuo para esta classe de sistemas.

Os sistemas lineares planares são completamente entendidos no caso suave (ver [63]) e não apresentam ciclos limite. Contudo, os sistemas dinâmicos descontínuos que são lineares por partes (PLDS) possuem uma dinâmica completamente não-trivial, e em muitos casos exibem ciclos limite, o que os torna um interessante objeto de estudo para a comunidade de Sistemas Dinâmicos.

Embora exista uma grande quantidade de trabalhos sobre a existência e número de ciclos limite em PLDS, este ainda é um problema aberto, mesmo se considerarmos a variedade de

¹Também conhecido como “Método da Média”, porém o designaremos por “Método do *Averaging*” neste trabalho.

descontinuidade como uma reta. Além disso, a maioria dos resultados obtidos são válidos apenas para sistemas com duas zonas separadas por uma reta.

Como a existência de ciclos limite em um sistema é um problema global, a variedade de descontinuidade desempenha um papel crucial para que se tenha ciclos limite costurantes em um sistema. Assim, motivados pela Teoria Descontínua de Vogel (ver [60]), finalizaremos esta dissertação com o estudo de PLDS que possuem \mathbb{S}^1 como variedade de descontinuidade. Em particular, exibiremos a existência de um ciclo limite para certas configurações de sistemas centro-foco e centro-sela.

Resultados Principais

Enunciamos a seguir os principais resultados produzidos nesta dissertação.

No contexto de sistemas dinâmicos suaves, utilizamos o método do *averaging* de primeira ordem para estudar o número de ciclos limite que bifurcam de perturbações polinomiais de centros isócronos planares quadráticos e cúbicos.

Os centros isócronos quadráticos possuem uma classificação feita por W. S. Loud, em [57], e assim, através de uma mudança linear e de um reescalonamento do tempo, eles se reduzem a quatro formas normais, e portanto os centros isócronos quadráticos podem ser divididos em quatro classes. Assim, estudamos duas dessas classes (S1 e S2), e baseados em trabalhos envolvendo perturbações polinomiais específicas dessas formas normais, obtivemos uma generalização desses resultados para uma perturbação polinomial geral.

Teorema A. Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + \delta p_i + \varepsilon P_n(x, y), \\ \dot{y} &= x + \delta q_i + \varepsilon Q_n(x, y), \end{cases}$$

onde p_i , q_i são polinômios quadráticos correspondentes a forma normal Si, para $i = 1, 2$, e P_n, Q_n são polinômios de grau n .

Então, para cada $\delta \in \mathbb{R}$, determinamos o número máximo de ciclos limite detectados pelo método do *averaging* de primeira ordem quando n varia entre 1 e 7, quando $i = 1$, e entre 1 e 6, quando $i = 2$. Além disso, mostramos que tais cotas máximas podem ser atingidas.

Baseado no Teorema A, apresentamos uma conjectura da cota máxima para n qualquer.

Similarmente ao caso quadrático, utilizamos uma classificação dos centros isócronos cúbicos, feita por Pleshkan, em [66], e dividimos tais sistemas em quatro classes. Estudamos duas dessas classes, T1 e T2, e obtivemos os seguintes resultados:

Teorema B. Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + \delta p_i + \varepsilon(a_{1,0}x + a_{0,1}y), \\ \dot{y} &= x + \delta q_i + \varepsilon(b_{1,0}x + b_{0,1}y), \end{cases}$$

onde p_i, q_i são polinômios cúbicos correspondentes a forma normal Ti, para $i = 1, 2$.

Se $i = 1$, então, para cada $\delta \in \mathbb{R}$, apresentamos evidências numéricas da existência de um conjunto Ω no espaço dos parâmetros tal que se $(a_{1,0}, a_{0,1}, b_{1,0}, b_{0,1}) \in \Omega$ então o sistema possui um ciclo limite bifurcante.

Se $i = 2$ e $\delta = 0$ então nenhum ciclo limite bifurca. Se $\delta \neq 0$, o sistema possui no máximo um ciclo limite bifurcante detectado pelo método do *averaging* de primeira ordem, e tal cota é atingida.

No contexto de sistemas dinâmicos não-suaves, estudamos sistemas lineares por partes que apresentam um círculo de descontinuidade, e obtivemos os seguintes resultados.

Teorema C. Seja $Z = (X, Y)$ um sistema de Filippov, onde X é um campo linear que apresenta um centro, e Y é um campo linear que possui um foco. Considere que a variedade de descontinuidade Σ é um círculo. Então, Apresentamos condições para que o sistema tenha um único ciclo limite costurante.

Além disso, apresentamos um exemplo proveniente desta construção que admite um único ciclo limite costurante repulsor.

Teorema D. Apresentamos uma família a um parâmetro $Z_\alpha = (X, Y_\alpha)$, onde X é um campo vetorial linear que possui um centro e Y_α é um campo linear que apresenta uma sela hiperbólica para cada $\alpha \in (0, 1)$, e a variedade de descontinuidade Σ é um círculo, de forma que existam $\alpha_0, \alpha_1 \in (0, 1)$ tais que:

1. Se $0 < \alpha < \alpha_0$, então Z_α possui uma região de escape no primeiro quadrante.
2. Se $\alpha = \alpha_0$, então Z_α possui um único ponto de tangência repulsor no primeiro quadrante, que pode ser visto com um foco repulsor.
3. Se $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$, então Z_α possui uma região de deslize e um único ciclo limite costurante repulsor, no primeiro quadrante.
4. Se $1 > \alpha \geq \alpha_1$, então Z_α possui uma região deslize no primeiro quadrante.

Neste caso, dizemos que Z_α apresenta uma bifurcação Σ -Hopf-Homoclínica.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Com o objetivo de estabelecer a teoria básica necessária para se entender a demonstração do Método do *Averaging* de primeira ordem generalizado (Teorema 2.3.1), introduzimos neste capítulo alguns resultados clássicos da teoria de equações diferenciais ordinárias, conceitos de aproximação assintótica e da Teoria da perturbação, e finalmente a Teoria do Grau de Brouwer, que é a principal ferramenta para se estender o Método do *Averaging* para campos contínuos.
- **Capítulo 2:** Apresentamos neste capítulo a teoria do *Averaging*, que permite aproximar as soluções de um sistema perturbado pelas soluções de um sistema mais simples.

Desenvolvemos o Método do *Averaging* clássico, que permite associar as soluções periódicas de um campo com os zeros de uma função definida em um espaço de dimensão finita. Contudo, esta versão só é válida para campos que sejam no mínimo diferenciáveis (dentre outras hipóteses).

Terminamos o capítulo com a extensão do Método do *Averaging* à campos contínuos, realizada por J. Llibre e A. Buica (ver [7]), e exibimos uma demonstração detalhada desta versão generalizada.

- **Capítulo 3:** Aplicamos o Método do *Averaging* para detectar qual o número máximo de ciclos limite bifurcantes de centros isócronos planares quadráticos e cúbicos quando são perturbados por polinômios gerais de grau fixado, e conjecturamos qual é o limitante superior para perturbações de grau n .
- **Capítulo 4:** Introduzimos os sistemas dinâmicos descontínuos (sistemas de Filippov) através da convenção de Filippov e exibimos alguns exemplos que ilustram os possíveis comportamentos que podem ocorrer nessa classe de sistemas, e que permitem o entendimento dos conceitos apresentados.

Além disso, estabelecemos a adaptação das definições de órbitas periódicas, separatrizes e ciclos para estes sistemas, assim como o conceito de equivalência topológica para sistemas de Filippov, que permite estender a noção de estabilidade estrutural para os campos descontínuos.

Finalmente, enunciamos o Método do *Averaging* para sistemas descontínuos.

- **Capítulo 5:** Com os conceitos apresentados no capítulo 4, estudaremos a existência de ciclos limite em sistemas dinâmicos descontínuos que são lineares por partes, e que possuem \mathbb{S}^1 como variedade de descontinuidade. Em particular, exibimos a existência de um ciclo limite para as configurações centro-foco e centro-sela.
- **Capítulo 6:** Com os resultados obtidos, apresentamos quais são as próximas direções de estudo que permitem a continuação deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, exibimos alguns conceitos básicos que serão de suma importância para o entendimento deste trabalho.

Na primeira seção, enunciamos alguns resultados clássicos da teoria de equações diferenciais ordinárias. Em seguida, introduzimos os conceitos de aproximação assintótica e de teoria da perturbação, que serão necessários para formalizar o método do *averaging*, a ser desenvolvido.

Na segunda seção, discutimos alguns tópicos da Teoria do Grau de Brouwer, que será utilizada para estender o método do *averaging* a campos contínuos.

1.1 Ferramentas Básicas

Primeiramente, estabelecemos algumas convenções de notação. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\|v\|$ a norma (da soma) de v , isto é, se $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$:

$$\|v\| = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad (1.1.1)$$

A preferência pela norma da soma é justificada pela simplicidade nos cálculos. Em todo o caso, vale lembrar que quaisquer normas em um espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes, e portanto não temos nenhuma perda de generalidade.

Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ uma matriz $n \times n$, denotaremos por $\|A\|$ a norma de A :

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \quad (1.1.2)$$

Note que $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$. Em geral, podemos utilizar quaisquer normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ que satisfaçam $\|Av\|_1 \leq \|A\|_2\|v\|_1$, como por exemplo, a norma de operador para matrizes $\|A\|_2 = \sup\{\|Av\|_1; \|v\|_1 = 1\}$ juntamente com a norma euclidiana $\|\cdot\|_1$ em \mathbb{R}^n .

Sejam D um aberto limitado de \mathbb{R}^n , $\varepsilon_0 > 0$, $f : D \times \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial e $T > 0$ uma constante real, então:

- Se $(x, t, \varepsilon) \in D \times \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, a variável x representa o espaço, a variável t representa o tempo e ε representa um parâmetro suficientemente pequeno.
- $D_x f(x, t, \varepsilon)$ é a derivada parcial de f com respeito a variável espacial x avaliada no ponto $(x, t, \varepsilon) \in D \times \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

- $\|f\|_{sup} = \sup_{x \in D, 0 \leq t \leq T, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \|f(x, t, \varepsilon)\|$ é a norma sup de f no espaço $D \times [0, T] \times (0, \varepsilon_0]$.

Sejam t_0 constante real e $D_0 = D \times [t_0, t_0 + T] \times (0, \varepsilon_0]$.

Estabelecidas as convenções acima, podemos prosseguir com as definições e os resultados:

Definição 1.1.1. Dizemos que a função f é **periódica** na variável t se existem $L > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, tais que $f(x, t_0, \varepsilon) = f(x, t_0 + L, \varepsilon)$, para todo $x \in D$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, e o **período** de f é dado por:

$$T = \inf\{L; f(x, t_0, \varepsilon) = f(x, t_0 + L, \varepsilon) \text{ para todo } x \in D, \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)\}. \quad (1.1.3)$$

Neste caso, dizemos que f é **T -periódica**.

Definição 1.1.2. A função $f : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz a **condição de Lipschitz** em x , com **constante de Lipschitz** $C_f \geq 0$ se, para cada $t \in [t_0, t_0 + T]$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ fixados, f satisfaz:

$$\|f(x, t, \varepsilon) - f(y, t, \varepsilon)\| \leq C_f \|x - y\| \quad (1.1.4)$$

para todo $x, y \in D$. Caso f seja T -periódica em t , então a condição de Lipschitz é válida em todo o domínio $D \times \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0]$.

Proposição 1.1.3. Sejam U um aberto de \mathbb{R}^n e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe \mathcal{C}^1 . Se K é um subconjunto de U tal que $\overline{K} \subset U$ é compacto, então f satisfaz a condição de Lipschitz em \overline{K} .

Demonstração. Como f é contínua e \overline{K} é compacto, temos que f é uniformemente limitada em \overline{K} , isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq M$, para todo $x, y \in \overline{K}$.

Como U é aberto, para cada $x \in \overline{K}$ existe $r_x > 0$ tal que a bola centrada em x de raio r_x relativa a norma $\|\cdot\|$, denotada por $B(x, r_x)$, esteja inteiramente contida em U . Reduzindo o raio, se necessário, podemos supor também que $\overline{B(x, r_x)} \subset U$.

Logo, temos uma cobertura aberta \mathcal{U} de \overline{K} dada por $\mathcal{U} = \{B(x, \frac{r_x}{3}); x \in \overline{K}\}$. Por compacidade, podemos considerar uma subcobertura finita para \overline{K} , digamos, $\{B'_i = B(x_i, \frac{r_i}{3}); i = 1, \dots, n\}$ onde $r_i = r_{x_i}$. Denote $B(x_i, r_i)$ por B_i .

Como cada \overline{B}_i é um conjunto compacto convexo contido em U , segue que f satisfaz a condição de Lipschitz nesse conjunto, e portanto em B_i . Seja C_f^i a constante de Lipschitz correspondente à B_i , e defina $C'_f = \max_i C_f^i$ e $\delta = \min_i \frac{r_{x_i}}{3}$.

Agora, se $x, y \in \overline{K}$ e $\|x - y\| \leq \delta$, então x e y estão numa mesma bola B_i , pois $x \in B'_i$ para algum i e portanto $y \in B_i$. Assim, $\|f(x) - f(y)\| \leq C'_f \|x - y\|$.

Defina $C_f = \max\{C'_f, \frac{M}{\delta}\}$. Mostremos que f satisfaz a condição de Lipschitz em \overline{K} com constante C_f .

Sejam $x, y \in \overline{K}$, se $\|x - y\| \leq \delta$ então o resultado está provado pelo que vimos acima pois $C'_f \leq C_f$. Assuma $\|x - y\| > \delta$, então:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq M = \frac{M\delta}{\delta} \\ &\leq C_f \delta \\ &< C_f \|x - y\|. \end{aligned}$$

Logo, a proposição está provada. □

Enunciamos agora o teorema de existência e unicidade de solução para equações diferenciais ordinárias:

Teorema 1.1.4 (Existência e Unicidade). Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, \varepsilon), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Seja $D = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < d\}$ onde $d > 0$. Com as notações discutidas acima, considere $f : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Assuma que:

1. f é contínua em D_0 .
2. f satisfaz a condição de Lipschitz na variável espacial x .

Nessas condições, o problema de valor inicial (1.1.5) possui uma única solução x , definida para $t_0 \leq t \leq t_0 + \inf\left(T, \frac{d}{M}\right)$, onde $M = \|f\|_{sup}$.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [9].

Observe que o teorema garante a existência da solução num intervalo de tempo que depende explicitamente da norma de f . Ao longo do texto, encontraremos problemas em que $f(x, t, \varepsilon) = \varepsilon g(x, t)$, e conforme o teorema acima, a solução que passa por x_0 em t_0 estará definida em $\left[t_0, t_0 + \frac{d}{M}\right]$ e neste caso:

$$M = \varepsilon \sup_{x \in D, t \in [t_0, t_0 + T]} \|g(x, t)\|.$$

Logo, o tamanho do intervalo de definição da solução é de ordem $\frac{C}{\varepsilon}$, onde C é uma constante, tal terminologia será esclarecida em breve, porém a ideia principal é que quanto maior o parâmetro ε , menor será o comprimento do intervalo de tempo em que a solução existe.

Em certas condições de regularidade de f , temos que as soluções dependem continuamente e diferenciavelmente dos parâmetros iniciais:

Teorema 1.1.5 (Dependência Contínua). Seja $g(x, t, \varepsilon)$ uma função contínua para $(x, t) \in U$ e $\varepsilon \in V$, onde U é subconjunto aberto de \mathbb{R}^{n+1} e V é uma vizinhança de ε_0 em \mathbb{R}^k . Se o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, t, \varepsilon_0), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1.6)$$

tem uma única solução contínua $x(t, t_0, x_0, \varepsilon_0)$, definida num intervalo maximal de existência I , com $t_0 \in [a, b] \subset I$, então, para todo (s, y, ε) suficientemente próximo de $(t_0, x_0, \varepsilon_0)$, o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, t, \varepsilon), \\ x(s) = y, \end{cases} \quad (1.1.7)$$

tem uma única solução $x(t, s, y, \varepsilon)$ definida em $[a, b]$ que é contínua em $(t, t_0, x_0, \varepsilon_0)$.

Teorema 1.1.6 (Dependência Diferenciável). Se $g(x, t, \varepsilon)$ tem derivadas contínuas até ordem 1 em x , para $(x, t) \in U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\varepsilon \in V \subset \mathbb{R}^k$, onde U e V são conjuntos abertos, então a solução do problema de valor inicial 1.1.7 é continuamente diferenciável com relação a $(t, t_0, x_0, \varepsilon)$ em seu domínio.

A demonstração dos Teoremas 1.1.5 e 1.1.6 podem ser encontradas em [68].

A seguir, provamos dois lemas que serão constantemente utilizados. O primeiro é um resultado conhecido da literatura de equações diferenciais, e o segundo é uma adaptação deste que facilitará a sua aplicação quando necessária:

Lema 1.1.7 (Gronwall). Sejam $\varphi, \beta: [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e assumamos que $\beta(t) > 0$ em seu domínio. Suponha que exista uma constante real α tal que para todo $t_0 \leq t \leq t_0 + T$:

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t \beta(s)\varphi(s)ds.$$

Então, para todo t neste domínio:

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(s)ds\right).$$

Demonstração. Defina:

$$\psi(t) = \alpha + \int_{t_0}^t \beta(s)\varphi(s)ds.$$

Então $\varphi(t) \leq \psi(t)$ e, pelo teorema fundamental do cálculo, $\psi'(t) = \beta(t)\varphi(t)$. Como $\beta(t) > 0$ temos que $\beta(t)\varphi(t) \leq \beta(t)\psi(t)$ e daí segue que, $\psi'(t) - \beta(t)\psi(t) \leq 0$.

Utilizando o fator integrante da equação diferencial $\psi' - \beta\psi = 0$, podemos reescrever essa desigualdade como:

$$\frac{d}{dt} \left(\psi(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s)ds} \right) \leq 0.$$

Integrando de t_0 a t , temos que:

$$\psi(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s)ds} - \psi(t_0) \leq 0.$$

Usando que $\psi(t_0) = \alpha$, temos que

$$\psi(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^t \beta(s)ds},$$

concluindo a demonstração. □

Lema 1.1.8 (Gronwall Adaptado). Sejam $\varphi: [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\delta_1 > 0$, $\delta_2 \geq 0$, $\delta_3 \geq 0$ constantes tais que, para todo t , tem-se:

$$\varphi(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \varphi(s)ds + \delta_3.$$

Então, para todo $t \in [t_0, t_0 + T]$:

$$\varphi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

Demonstração. Considere $\alpha = \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3$, $\beta(t) = \delta_1$ e $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) + \frac{\delta_2}{\delta_1}$ para todo $t \in [t_0, t_0 + T]$. Basta aplicar o lema de Gronwall para esse caso. De fato:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \varphi(s) ds + \delta_3 \\ &= \delta_3 + \int_{t_0}^t \beta(t) \left(\varphi(s) + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} - \frac{\delta_2}{\delta_1}.\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(t) &= \varphi(t) + \frac{\delta_2}{\delta_1} \\ &\leq \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 + \int_{t_0}^t \beta(t) \left(\varphi(s) + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) ds \\ &= \alpha + \int_{t_0}^t \beta(t) \tilde{\varphi}(s) ds.\end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall:

$$\tilde{\varphi}(t) \leq \alpha \exp \left(\int_{t_0}^t \beta(s) ds \right).$$

Substituindo os termos, temos que:

$$\varphi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

□

1.1.1 Teoria de Aproximação Assintótica

Introduzimos agora alguns conceitos básicos de aproximação assintótica que serão úteis para a formalização dos problemas deste trabalho.

Definição 1.1.9. Uma função $\delta : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma **função de ordem** se é contínua, positiva e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta(\varepsilon)$ existe.

Definição 1.1.10 (Símbolos de Landau). Seja $\varphi(t, \varepsilon)$ uma função que assume valores em \mathbb{R}^n definida para $\varepsilon \geq 0$ e $t \in I_\varepsilon$, onde I_ε é um intervalo real dependente de ε .

A expressão **para** $\varepsilon \downarrow 0$ significa que existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que o enunciado em questão é válido para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Definimos os símbolos de Landau $\mathcal{O}(\cdot)$ e $o(\cdot)$ como:

1. Dizemos que $\varphi(t, \varepsilon) = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ para $\varepsilon \downarrow 0$ se existem constantes $\varepsilon_0 > 0$ e $K > 0$ tais que:

$$\|\varphi(t, \varepsilon)\| \leq K|\delta(\varepsilon)|,$$

para todo $t \in I_\varepsilon$, e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

2. Dizemos que $\varphi(t, \varepsilon) = o(\delta(\varepsilon))$ para $\varepsilon \downarrow 0$ se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|\varphi(t, \varepsilon)\|}{\delta(\varepsilon)} = 0,$$

uniformemente para $t \in I_\varepsilon$. Isto é, para cada $\alpha > 0$, existe $\beta > 0$ tal que, se $t \in I_\varepsilon$ e $0 < \varepsilon < \beta$, então:

$$\frac{\|\varphi(t, \varepsilon)\|}{\delta(\varepsilon)} < \alpha.$$

3. Dizemos que $\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$ para $\varepsilon \downarrow 0$ se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = 0.$$

Em geral, consideraremos os símbolos de Landau numa vizinhança de $\varepsilon = 0$ e assim podemos omitir a expressão “para $\varepsilon \downarrow 0$ ” na maioria dos casos para facilitar a notação.

Vejamos agora um exemplo da utilização dos símbolos de Landau:

Exemplo 1.1.11. Considere $\varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon^n \cos(t/\varepsilon^n)$ com $I_\varepsilon = \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Então:

- $\varphi(t, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^m)$ se $m \leq n$. Basta tomar $K = 1$ e $\varepsilon_0 = 1$, assim, se $0 < \varepsilon < 1$:

$$\|\varphi(t, \varepsilon)\| = \|\varepsilon^n \cos(t/\varepsilon^n)\| \leq |\varepsilon^n| \leq |\varepsilon^m|.$$

- $\varphi(t, \varepsilon) = o(\varepsilon^m)$ se $m < n$, contudo, $\varphi(t, \varepsilon) \neq o(\varepsilon^m)$ se $m \geq n$, pois neste caso $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|\varphi(t, \varepsilon)\|}{\delta(\varepsilon)}$ não existe quando $m = n$ e é $+\infty$ se $m > n$.
- Se $\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon^n$ e $\delta_2(\varepsilon) = \varepsilon^m$ então $\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$ se, e só se, $m < n$.

É claro da definição que, se $\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$, então $\delta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\delta_2(\varepsilon))$, porém a recíproca nem sempre é válida, e assim vemos a necessidade de tornar a estimativa de funções de ordem mais precisa.

Definição 1.1.12. Dizemos que $\delta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}_\#(\delta_2(\varepsilon))$ para $\varepsilon \downarrow 0$ se $\delta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\delta_2(\varepsilon))$ e $\delta_1(\varepsilon) \neq o(\delta_2(\varepsilon))$ para $\varepsilon \downarrow 0$.

Exemplo 1.1.13. Considere $\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon^n \cos(1/\varepsilon)$ e $\delta_2(\varepsilon) = \varepsilon^n$ então $\varepsilon^n \cos(1/\varepsilon) = \mathcal{O}_\#(\varepsilon^n)$.

De fato, $\|\varepsilon^n \cos(1/\varepsilon)\| \leq |\varepsilon^n|$, mas $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|\varepsilon^n \cos(1/\varepsilon)\|}{\varepsilon^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\cos(1/\varepsilon)|$ não existe.

Como já foi dito anteriormente, a variável t num problema de condição inicial será chamada de tempo, e no decorrer do texto utilizaremos com frequência as *variáveis tempo-escala* τ relacionadas à variável tempo t , que são definidas por $\tau = \delta(\varepsilon)t$, com δ uma função de ordem que satisfaz $\delta(\varepsilon) = \mathcal{O}(1)$.

Com as definições acima, podemos estimar a ordem de grandeza de uma função $\varphi(t, \varepsilon)$, denotada por $\varphi_\varepsilon(t)$, definida num intervalo de tempo I_ε com $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Definição 1.1.14. Suponha que $\varphi_\varepsilon : I_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, considere a métrica euclidiana $\|\cdot\|$ e defina a seguinte norma:

$$\|\varphi_\varepsilon\|_\infty = \sup\{\|\varphi_\varepsilon(t)\|; t \in I_\varepsilon\}.$$

Seja δ uma função de ordem. Então:

1. $\varphi_\varepsilon = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ em I_ε se $\|\varphi_\varepsilon\|_\infty = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ para $\varepsilon \downarrow 0$.
2. $\varphi_\varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$ em I_ε se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|\varphi_\varepsilon\|_\infty}{\delta(\varepsilon)} = 0$.
3. $\varphi_\varepsilon = \mathcal{O}_\#(\delta(\varepsilon))$ em I_ε se $\varphi_\varepsilon = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ e $\varphi_\varepsilon \neq o(\delta(\varepsilon))$.

Note que a norma $\|\cdot\|_\infty$ definida acima depende de ε , e é independente de t . Portanto as estimativas acima são uniformes, isto é, são válidas uniformemente em I_ε .

Exemplo 1.1.15. Seja $\varphi_\varepsilon(t) = \cos(t + \varepsilon^n t) - \cos(t)$ definida no intervalo $I_\varepsilon = [0, 2\pi/\varepsilon^n]$. Vamos calcular uma estimativa para o erro de aproximação da função $\cos(t)$ pela função $\cos(t + \varepsilon^n t)$ no intervalo I_ε .

Note que, quando ε tende a 0, o intervalo I_ε torna se ilimitado. Assuma $0 < \varepsilon < 1$, então:

$$\|\varphi_\varepsilon\|_\infty = \sup\{\|\cos(t + \varepsilon^n t) - \cos(t)\|; t \in I_\varepsilon\} \leq 2$$

Logo $\varphi_\varepsilon = \mathcal{O}(1)$, porém $\varphi_\varepsilon \neq o(1)$, e assim $\varphi_\varepsilon = \mathcal{O}_\#(1)$.

Caso $I_\varepsilon = [0, 2\pi]$ para todo ε , então podemos fazer uma estimativa melhor.

De fato, se ε está numa vizinhança da origem, pela fórmula de Taylor, temos:

$$\cos(t + \varepsilon^n t) = \cos(t) + g(t)\varepsilon^n + o(\varepsilon^{n+1}),$$

onde g é uma função contínua (e portanto limitada em I_ε). Assim, se $0 < \varepsilon < 1$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon\|_\infty &= \sup\{\|g(t)\varepsilon^n + o(\varepsilon^{n+1})\|; t \in [0, 2\pi]\} \\ &\leq \sup\{\|g(t)\varepsilon^n\|; t \in [0, 2\pi]\} + |o(\varepsilon^{n+1})| \\ &\leq K_1\varepsilon^n + K_2\varepsilon^{n+1} \\ &\leq K\varepsilon^n. \end{aligned}$$

Neste caso, $\varphi_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$.

Note que as Definições 1.1.10 e 1.1.14 coincidem nos dois primeiros itens. A segunda apresenta uma notação mais concisa e por isso é a mais indicada, contudo em algumas situações ela pode ser mais difícil de ser utilizada pois o supremo pode não ser calculável (veja no exemplo acima quando o intervalo é ilimitado) e assim, a primeira notação torna-se a mais apropriada.

A fim de causar o mínimo de confusão possível, utilizaremos as duas notações sem distinção, e empregaremos a mais conveniente em cada caso.

Frequentemente, estimaremos a ordem de grandeza de funções φ_ε em intervalos do tipo $I_\varepsilon = [0, L/\delta(\varepsilon)]$ onde L é uma constante positiva independente de ε , e devido a esse fato introduziremos uma nova expressão:

Definição 1.1.16. Dizemos que $\varphi_\varepsilon(t) = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ para $\varepsilon \downarrow 0$ em **tempo-escala** $\delta(\varepsilon)^{-1}$ se a estimativa é válida para $0 < \delta(\varepsilon)t < L$, onde L é uma constante independente de ε .

A mesma definição pode ser usada para o - estimativas.

Exemplo 1.1.17. Como já vimos no exemplo 1.1.15, $\cos(t + \varepsilon^n t) - \cos(t) = \mathcal{O}(1)$ para $\varepsilon \downarrow 0$ em tempo-escala $1/\varepsilon^n$.

Definição 1.1.18. Dizemos que $\psi_\varepsilon(t)$ é uma **aproximação assintótica** de $\varphi_\varepsilon(t)$ no intervalo I_ε se:

$$\varphi_\varepsilon(t) - \psi_\varepsilon(t) = o(1) \text{ para } \varepsilon \downarrow 0, \text{ uniformemente em } I_\varepsilon.$$

Em termos de tempo-escala: $\psi_\varepsilon(t)$ é uma aproximação assintótica de $\varphi_\varepsilon(t)$ em tempo-escala $\delta(\varepsilon)^{-1}$ se:

$$\varphi_\varepsilon(t) - \psi_\varepsilon(t) = o(1) \text{ para } \varepsilon \downarrow 0 \text{ em tempo-escala } \delta(\varepsilon)^{-1}.$$

Exemplo 1.1.19. Considere $\psi_\varepsilon(t) = (1 + \varepsilon^2)t$, $\varphi_\varepsilon(t) = t$ e $I_\varepsilon = [0, 1/\varepsilon]$. Mostremos que ψ_ε é uma aproximação assintótica de φ_ε para $\varepsilon \downarrow 0$ em tempo-escala $1/\varepsilon$.

De fato, para cada $t \in [0, 1/\varepsilon]$, podemos escrever $t = T/\varepsilon$ com $T \in [0, 1]$, assim

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \psi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (1 + \varepsilon^2)t - t \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon^2 T}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon T \\ &= 0, \end{aligned}$$

uniformemente em I_ε , pois $T \in [0, 1]$ (limitado), logo $\varphi_\varepsilon(t) - \psi_\varepsilon(t) = o(1)$ para $\varepsilon \downarrow 0$ em tempo-escala $1/\varepsilon$.

Com isso, terminamos de enunciar os conceitos básicos da teoria de aproximação assintótica. Com as ferramentas formais desenvolvidas até agora, estamos aptos a introduzir a teoria de perturbação.

1.1.2 Teoria da Perturbação

Estudamos aqui problemas do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, \varepsilon), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1.8)$$

onde, x , x_0 são elementos de um aberto D de \mathbb{R}^n , $t, t_0 \in [0, \infty)$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ para algum $\varepsilon_0 > 0$. Assumimos que f satisfaz todas as condições necessárias para que o teorema de existência e unicidade 1.1.4 seja válido.

Suponha que o seguinte limite exista e seja uniforme em $D \times I$, para um subintervalo $I = [t_0, A] \subset [0, \infty)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x, t, \varepsilon) = f(x, t, 0).$$

Com isso, podemos definir o **campo não-perturbado** associado ao problema (1.1.8):

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, t, 0), \\ y(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1.9)$$

A teoria de perturbação estabelece uma relação entre as soluções de (1.1.8) e (1.1.9), que é dada em termo de aproximações assintóticas.

A ideia principal deste processo é que se conhecemos as soluções do campo não-perturbado, então podemos estimar as soluções do problema inicial. Em geral, o campo não-perturbado continua sendo um campo não-autônomo e não-linear, porém a retirada do parâmetro ε pode facilitar as soluções.

Vejamos agora um exemplo da teoria de perturbação regular:

Exemplo 1.1.20. Considere o campo perturbado, $x \in [0, 1]$, $t \in [0, \infty)$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\varepsilon^2 x, \\ x_\varepsilon(0) = 1. \end{cases} \quad (1.1.10)$$

A solução deste problema é $x_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon^2 t}$.

Agora, considere o campo não-perturbado associado a este sistema:

$$\begin{cases} \dot{y} = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (1.1.11)$$

Neste caso, a solução do problema é $y(t) = 1$.

Note que $x_\varepsilon(t) - y(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ em tempo-escala 1. De fato, pela fórmula de Taylor, temos que:

$$x_\varepsilon(t) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Observamos que, em sistemas autônomos, os resultados da teoria de perturbação são válidos somente em tempo-escala 1.

Se f é uma função suave, segue do teorema de dependência contínua e diferenciável 1.1.5 que, a solução $\varphi(x, t, \varepsilon)$ de (1.1.8) tal que $\varphi(x_0, t, \varepsilon) = x_0$ é suave em todas as variáveis, e portanto pode ser aproximada pelo seu polinômio de Taylor de grau k em ε :

$$\varphi(x, t, \varepsilon) = \varphi(x, t, 0) + \frac{\partial \varphi(x, t, 0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \dots + \frac{\partial^k \varphi(x, t, 0)}{\partial \varepsilon^k} \varepsilon^k + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}),$$

uniformemente em qualquer intervalo do tipo $[0, L]$, com L uma constante real.

Por simplicidade, introduziremos a seguinte notação que será frequentemente usada:

Notação 1.1.21. Se $f(y, \varepsilon)$ é uma função real definida para y em um aberto de \mathbb{R}^n e ε num intervalo real contendo 0, então denotaremos:

$$f^k(y) = \frac{\partial^k f(y, 0)}{\partial \varepsilon^k}.$$

Além disso, denotaremos o resto da série de Taylor de f em ε de ordem k por $f^{[k+1]}(y, \varepsilon)$. Desta forma, escrevemos a k -série de Taylor de f em ε por:

$$f(y, \varepsilon) = f^0(y) + \varepsilon f^1(y) + \cdots + \varepsilon^k f^k(y) + \varepsilon^{k+1} f^{[k+1]}(y, \varepsilon).$$

Definição 1.1.22. Se $f(\varepsilon)$ é uma função real, suave, definida para ε numa vizinhança de 0, então definimos o ***k-jato*** de f como o k -polinômio de Taylor:

$$J^k f(\varepsilon) = f^0 + \varepsilon f^1 + \cdots + \varepsilon^k f^k.$$

Agora, mostraremos um dos resultados iniciais da teoria de perturbação que estabelece a relação entre as soluções dos sistemas perturbado e não-perturbado. Observamos que o resultado será estabelecido em tempo-escala 1:

Teorema 1.1.23. Considere os seguintes problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = f^0(x, t) + \delta(\varepsilon) f^{[1]}(x, t, \varepsilon), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1.12)$$

e

$$\begin{cases} \dot{y} = f^0(y, t), \\ y(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1.13)$$

onde f^0 e $f^{[1]}$ são funções contínuas e Lipschitz na variável x , $(x, t, \varepsilon) \in D_0$, e δ é uma função de ordem. Se $f^{[1]}(x, t, \varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ em tempo-escala 1 então:

$$x(t) - y(t) = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon)),$$

em tempo-escala 1.

Demonstração. Primeiramente, reescreveremos os sistemas (1.1.12) e (1.1.13) em sua forma integral:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (f^0(x(s), s) + \delta(\varepsilon) f^{[1]}(x(s), s, \varepsilon)) ds,$$

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f^0(y(s), s) ds.$$

Considere a norma de $x(t) - y(t)$, e utilizando a desigualdade da norma para integrais, temos que:

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f^0(x(s), s) - f^0(y(s), s) + \delta(\varepsilon)f^{[1]}(x(s), s, \varepsilon)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f^0(x(s), s) - f^0(y(s), s)\| ds + \delta(\varepsilon) \int_{t_0}^t \|f^{[1]}(x(s), s, \varepsilon)\| ds. \end{aligned}$$

Como $f^{[1]}(x, t, \varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ em tempo-escala 1, temos que existe uma constante M tal que $\|f^{[1]}(x, t, \varepsilon)\| \leq M$ em D_0 (reduza ε_0 se necessário, para que coincida com a constante do símbolo de Landau). Além disso, como f^0 é Lipschitz em x , temos que:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq C_{f^0} \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds + \delta(\varepsilon)M(t - t_0)$$

Agora, aplicando o Lema de Gronwall adaptado 1.1.8 com $\delta_1(\varepsilon) = C_{f^0}$, $\delta_2(\varepsilon) = M\delta(\varepsilon)$ e $\delta_3 = 0$, obtemos:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta(\varepsilon) \frac{M}{C_{f^0}} e^{C_{f^0}(t-t_0)} - \delta(\varepsilon) \frac{M}{C_{f^0}}. \quad (1.1.14)$$

Desta forma, concluímos que y é uma aproximação assintótica para x com erro $\delta(\varepsilon)$ pois, se considerarmos que t está em um intervalo $[0, L]$ para alguma constante L , então $C_{f^0}(t - t_0)$ é limitado por uma constante independente de ε . Note que a última consideração implica que a aproximação é válida em tempo-escala 1 e com isso, o teorema está provado. \square

Definição 1.1.24. Diremos que um problema de perturbação está na **forma padrão** se é do tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1.15)$$

Para aplicar o método do *averaging*, é necessário que o problema esteja na forma padrão. A seguir, mostraremos como podemos colocar um problema de perturbação em sua forma padrão.

Dado um problema de perturbação definido por uma função suave $f : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, então podemos reescrevê-lo como:

$$\begin{cases} \dot{x} = f^0(x, t) + \varepsilon f^{[1]}(x, t, \varepsilon), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1.16)$$

onde f^0 e $f^{[1]}$ seguem a notação 1.1.21.

Assim, o problema não-perturbado associado é dado por:

$$\begin{cases} \dot{z} = f^0(z, t) \\ z(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1.17)$$

Assuma que (1.1.17) possa ser resolvido de maneira explícita, e assim a solução dependerá da condição inicial x_0 , e podemos escrevê-la como $z(x_0, t)$. Assim, se $y \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$\begin{cases} z = z(y, t) \\ z(y, t_0) = y \end{cases} \quad (1.1.18)$$

Com isso, podemos considerar z como uma mudança de variável, tal método é conhecido na literatura como variação de parâmetros:

$$x = z(y, t). \quad (1.1.19)$$

Derivando (1.1.19) com relação a t , e considerando que y também depende de t , segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(y, t)}{\partial t} + D_y z(y, t) \cdot \frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} \\ &= f^0(x, t) + \varepsilon f^{[1]}(x, t, \varepsilon) \\ &= f^0(z(y, t), t) + \varepsilon f^{[1]}(z(y, t), t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Como $z(y, t)$ satisfaz (1.1.17), segue que $\frac{\partial z(y, t)}{\partial t} = f^0(z(y, t), t)$, e portanto:

$$D_y z(y, t) \cdot \frac{dy}{dt} = \varepsilon f^{[1]}(z(y, t), t, \varepsilon)$$

Assumindo que $D_y z(y, t)$ é não-singular, temos o seguinte problema de perturbação na forma padrão na variável y :

$$\dot{y} = \varepsilon \left((D_y z(y, t))^{-1} \cdot f^{[1]}(z(y, t), t, \varepsilon) \right) \quad (1.1.20)$$

Observamos que, em geral, (1.1.20) pode ser um sistema bem complicado, e pode envolver funções elípticas como no caso da equação de um pêndulo perturbado ($\ddot{\phi} + \text{sen}(\phi) = \varepsilon g(\phi, t, \varepsilon)$). Além disso, outra dificuldade nesse método é que a transformação provoca mudanças na relação de dependência do sistema com o tempo, e desta forma pode não existir uma constante de Lipschitz independente do tempo.

Contudo, mostraremos abaixo que tal método pode ser empregado com sucesso no caso das **equações quasi-lineares**.

Definição 1.1.25. Um problema de perturbação é dito **quasi-linear** se a equação (1.1.16) pode ser escrita como:

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon f^{[1]}(x, t, \varepsilon), \quad (1.1.21)$$

onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$, com entradas contínuas em t .

No caso do problema quasi-linear (1.1.21), o problema não perturbado é dado por:

$$\dot{z} = A(t)z. \quad (1.1.22)$$

Sabemos que (1.1.22) possui n soluções linearmente independentes, chamadas soluções fundamentais, e assim, podemos construir a **matriz fundamental** $\phi(t)$ associada ao sistema, cujas colunas são formadas por tais soluções. Além disso, podemos escolher ϕ de forma que $\phi(t_0) = I$.

Pelo método da variação de parâmetros descrito acima aplicado a $x = \phi(t)y$, temos que:

$$\dot{y} = \varepsilon \phi^{-1}(t) f^{[1]}(\phi(t)y, t, \varepsilon) \quad (1.1.23)$$

Observemos que caso a matriz A seja constante, então a matriz fundamental é dada pela exponencial da matriz A :

$$\phi(t) = e^{A(t-t_0)}.$$

Neste caso, a forma padrão é simplesmente:

$$\dot{y} = \varepsilon e^{-A(t-t_0)} f^{[1]}(e^{A(t-t_0)}y, t, \varepsilon). \quad (1.1.24)$$

Note que, se todos os autovalores de A são imaginários puros, então as soluções do sistema são dadas em termos de funções seno e cosseno (sem exponenciais), e portanto, o termo $e^{-A(t-t_0)}$ é limitado por uma constante independente do tempo. Logo, se $f^{[1]}$ é Lipschitz, temos um problema de perturbação em boas condições. Contudo, caso A possua um autovalor de outro tipo, podemos não ter essa situação, mesmo no caso em que $f^{[1]}$ é limitada.

Finalizamos essa sessão com um exemplo de aplicação ao estudo de oscilações não-lineares.

Exemplo 1.1.26. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon g(x, \dot{x}, t, \varepsilon), \\ x(t_0) = a_1, \dot{x}(t_0) = a_2. \end{cases} \quad (1.1.25)$$

O sistema não-perturbado, $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$, possui duas soluções independentes: $\cos(\omega(t - t_0))$ e $\sin(\omega(t - t_0))$.

Desta forma, introduzindo a variável $y = \dot{x}$, temos um sistema quasi-linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x + \varepsilon g(x, \dot{x}, t, \varepsilon). \end{cases} \quad (1.1.26)$$

E assim, obtemos a seguinte matriz fundamental (tal que $\phi(t_0) = I$):

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - t_0)) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t - t_0)) \\ -\omega \sin(\omega(t - t_0)) & \cos(\omega(t - t_0)) \end{pmatrix}. \quad (1.1.27)$$

A transformação da variação de parâmetros torna-se:

$$\begin{aligned} x &= z_1 \cos(\omega(t - t_0)) + \frac{z_2}{\omega} \sin(\omega(t - t_0)), \\ \dot{x} &= -z_1 \omega \sin(\omega(t - t_0)) + z_2 \cos(\omega(t - t_0)), \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

e neste caso, a equação (1.1.24) se torna:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{\varepsilon}{\omega} \text{sen}(\omega(t - t_0))g(\cdot, \cdot, t, \varepsilon), \\ \dot{z}_2 = \varepsilon \cos(\omega(t - t_0))g(\cdot, \cdot, t, \varepsilon), \\ z_1(t_0) = a_1, z_2(t_0) = a_2. \end{cases} \quad (1.1.29)$$

As expressões de x e \dot{x} devem ser substituídas em g no sistema (1.1.29). E assim, colocamos o problema na forma padrão.

Observação 1.1.27. Observamos que, em problemas de oscilações, as equações para a variação da amplitude r e da fase ϕ de uma solução são extremamente úteis. Assim, forneceremos as expressões da forma padrão em função de r e ϕ . Considere a mudança:

$$\begin{aligned} x &= r \text{sen}(\omega t - \phi) \\ \dot{x} &= r\omega \cos(\omega t - \phi) \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

Similarmente ao que foi desenvolvido no exemplo anterior, podemos transformar a equação perturbada (1.1.25) em:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\varepsilon}{\omega} \cos(\omega t - \phi)g(\cdot, \cdot, t, \varepsilon), \\ \dot{\phi} = \frac{\varepsilon}{r\omega} \text{sen}(\omega t - \phi)g(\cdot, \cdot, t, \varepsilon), \end{cases} \quad (1.1.31)$$

onde os valores iniciais de r e ϕ podem ser obtidos da mudança (1.1.30).

Note que, se r é pequeno, então a fórmula (1.1.31) pode apresentar grandes problemas, pois perdemos a hipótese de que a variação de ϕ seja limitada.

1.2 Teoria do Grau de Brouwer

A teoria do grau foi estabelecida por Brouwer em 1912, e utilizada implicitamente nos trabalhos de Poincaré, Bohl, dentre outros matemáticos. O conceito do grau mostrou-se uma ferramenta eficaz no estudo da existência e quantidade de soluções de equações do tipo $f(x) = y_0$ em espaços de dimensão finita.

Em particular, veremos que o método do averaging reduz o problema de encontrar ciclos limite de um sistema para o de solucionar uma equação $f_0(p) = 0$, a ser determinada. Deste modo, o grau de Brouwer torna-se um importante instrumento para se obter resultados nessa área.

De fato, a ferramenta que torna possível a extensão do teorema clássico do *averaging* é o grau topológico de Brouwer para funções contínuas. Assim, desenvolvemos nessa seção alguns tópicos sobre o grau, com o objetivo de defini-lo e apresentar algumas propriedades que serão utilizadas neste trabalho.

Primeiramente, definimos o grau de Brouwer para o caso em que a função é regular, isto é, possui um certo grau de diferenciabilidade, e em seguida mostramos como definir o grau quando a função é apenas contínua.

1.2.1 O Grau de Brouwer para Funções Regulares

Seja V um aberto limitado contido em \mathbb{R}^n , denotaremos por \bar{V} e ∂V , o fecho e fronteira de V em \mathbb{R}^n , respectivamente, e considere $C^k(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$, o espaço das funções que possuem derivadas até ordem k contínuas em \bar{V} que assumem valores em \mathbb{R}^n , .

Lembremos que, uma função f é diferenciável em um fechado \bar{V} , se existem um aberto U de \mathbb{R}^n que contém \bar{V} e uma função diferenciável F definida em U , tais que F coincide com f em \bar{V} , e neste caso, dizemos que F é uma extensão de f .

Seja $f \in C^1(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$, e defina:

$$Z = \{x \in V; J_f(x) = 0\},$$

onde $J_f(x)$ denota o determinante jacobiano de f no ponto x , e considere $b \notin f(\partial V) \cup f(Z)$.

Definição 1.2.1. Definimos o **grau de Brouwer** de f com respeito a V no ponto b , como o seguinte número inteiro:

$$d_B(f, V, b) = \sum_{\xi \in f^{-1}(\{b\})} \text{sgn}(J_f(\xi)),$$

onde sgn é a função sinal dada por:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ -1, & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Proposição 1.2.2. O grau de Brouwer $d_B(f, V, b)$ de f com respeito a V no ponto b , nas condições descritas acima, está bem definido.

Demonstração. Para verificar a boa definição do grau de Brouwer $d_B(f, V, b)$, devemos mostrar que $f^{-1}(\{b\})$ é um conjunto finito e que $J_f(\xi)$ é não nulo para todo $\xi \in f^{-1}(\{b\})$. Deste modo a soma que define o grau é finita, concluindo a verificação.

Suponha que $\xi \in f^{-1}(\{b\}) \cap Z$, então $b = f(\xi) \in f(Z)$, o que é absurdo pela hipótese de que $b \notin f(\partial V) \cup f(Z)$. Logo, temos que $J_f(\xi)$ é não nulo para todo $\xi \in f^{-1}(\{b\})$, e portanto podemos avaliar a função sinal em $J_f(\xi)$.

Mostremos que $f^{-1}(\{b\})$ é um conjunto finito.

De fato, pela continuidade de f , temos que $f^{-1}(\{b\})$ é um conjunto fechado em \bar{V} , e assim é um conjunto fechado e limitado em \mathbb{R}^n , pois $f^{-1}(\{b\}) \subset \bar{V}$, e portanto é compacto.

Seja $\xi \in f^{-1}(\{b\})$, assim $J_f(\xi) \neq 0$, e como $b \notin f(\partial V)$, temos que ξ está no interior de \bar{V} .

Pelo Teorema da Função Inversa, existe um aberto, que podemos supor da forma $U_\xi = B_{\varepsilon_\xi}(\xi) \subset \bar{V}$, com $\varepsilon_\xi > 0$, tal que $f|_{U_\xi}: U_\xi \rightarrow f(U_\xi)$ é um difeomorfismo, e $f(U_\xi)$ é um aberto que contém b .

Logo, $\{U_\xi; \xi \in f^{-1}(\{b\})\}$ é uma cobertura aberta de $f^{-1}(\{b\})$, e como este é compacto, existem ξ_1, \dots, ξ_k , tais que:

$$f^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{j=1}^k U_{\xi_j}.$$

Pela injetividade de f em U_{ξ_j} , temos que cada um destes abertos contém apenas um elemento de $f^{-1}(\{b\})$, e assim segue que $f^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ é finito. \square

Exemplo 1.2.3. Seja $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, onde $V = (-1, 1)$. Neste caso, $Z = \{0\}$, $\partial V = \{-1, 1\}$ e assim, dado $b \in (0, 1)$, temos que $b \notin f(\partial V) \cup f(Z)$, e portanto podemos calcular o grau de Brouwer de f no ponto b com respeito a V .

Note que $f^{-1}(\{b\}) = \{-\sqrt{b}, \sqrt{b}\}$, e desta forma:

$$d_B(f, V, b) = \operatorname{sgn}\left(2\left(-\sqrt{b}\right)\right) + \operatorname{sgn}\left(2\left(\sqrt{b}\right)\right) = -1 + 1 = 0.$$

Por outro lado, se considerarmos $V_1 = (0, 1)$ e $f_1 = f|_{V_1}$, teríamos que $\partial V_1 = \{0, 1\}$, $Z = \emptyset$ e assim, dado $b \in (0, 1)$, temos que $b \notin f_1(\partial V_1) \cup f_1(Z)$, e novamente, podemos calcular $d_B(f_1, V_1, b)$. Contudo, neste caso, $f_1^{-1}(\{b\}) = \{\sqrt{b}\}$ e portanto:

$$d_B(f_1, V_1, b) = \operatorname{sgn}\left(2\left(\sqrt{b}\right)\right) = 1.$$

Observe que, este exemplo mostra a dependência do grau de Brouwer com a vizinhança utilizada para o seu cálculo.

Vejamos agora uma caracterização do grau de Brouwer via integração, que nos permitirá demonstrar propriedades essenciais para os resultados deste trabalho.

Teorema 1.2.4. Sejam V um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , $f \in C^1(\overline{V}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin f(\partial V) \cup f(Z)$, e considere $f^{-1}(b) = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$. Então:

1. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, existem vizinhanças $U_i(\varepsilon)$ de ξ_i com $i \in \{1, \dots, k\}$, de modo que $f : U_i \rightarrow B_\varepsilon(b)$ seja um difeomorfismo para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.
2. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação $f_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tal que $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset B_\varepsilon(b)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1$, onde $\operatorname{supp} f_\varepsilon = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f_\varepsilon(x) \neq 0\}}$.
3. Considere $\varepsilon_0 > 0$ dado pelo item (1), então, para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$:

$$d_B(f, V, b) = \int_{\overline{V}} f_\varepsilon(f(x)) J_f(x) dx.$$

A demonstração do teorema acima será omitida por se tratar de um passo técnico para o próximo resultado, contudo, podemos encontrá-la em [1].

A seguir, vemos uma das propriedades do grau de maior importância no contexto desta dissertação. Como observado anteriormente, o grau de Brouwer é uma ferramenta topológica que está relacionada com o problema de encontrar zeros de funções em um espaço de dimensão finita, e portanto, consiste em um elemento essencial da demonstração dos Teoremas de *averaging* a serem abordados.

Teorema 1.2.5. Sejam V um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n , $f \in C^1(\overline{V}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin f(\partial V) \cup f(Z)$. Se $d_B(f, V, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in V$ tal que $f(x_0) = b$.

Demonstração. Pelo teorema 1.2.4, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, temos que:

$$d_B(f, V, b) = \sum_{\xi \in f^{-1}(\{b\})} \operatorname{sgn}(J_f(\xi)) = \int_{\overline{V}} f_\varepsilon(f(x)) J_f(x) dx.$$

Note que:

$$\int_{\bar{V}} f_\varepsilon(f(x)) J_f(x) dx = \int_{\{x \in V; |f(x) - b| < \varepsilon\}} f_\varepsilon(f(x)) J_f(x) dx.$$

Como $d_B(f, V, b) \neq 0$, temos que:

$$\int_{\{x \in V; |f(x) - b| < \varepsilon\}} f_\varepsilon(f(x)) J_f(x) dx \neq 0,$$

e assim, segue que $\{x \in V; |f(x) - b| < \varepsilon\} \neq \emptyset$.

Desta forma, existe $x_\varepsilon \in V$, tal que $|f(x_\varepsilon) - b| < \varepsilon$. Com isso, podemos construir uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em V tal que:

$$|f(x_n) - b| < \frac{\varepsilon_0}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.2.1)$$

Como \bar{V} é compacto (fechado e limitado em \mathbb{R}^n), temos que a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ possui uma subsequência convergente a um ponto de \bar{V} , e sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_n \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$, onde $x_0 \in \bar{V}$.

Pela continuidade de f , da norma e por (1.2.1), tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, concluímos que $f(x_0) = b$.

Observe que $b \notin f(\partial V)$, implica que $x_0 \in V$, o que conclui a demonstração. \square

Além do teorema acima, outra propriedade de suma importância para a demonstração do método do *averaging* em sua forma generalizada é a invariância por homotopia do grau de Brouwer.

Teorema 1.2.6 (Invariância por Homotopia de Classe C^2). Seja $H \in C^2(\bar{V} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ tal que $b \notin H(\partial V \times [0, 1])$. Então $d_B(H(\cdot, t), V, b)$ é constante com respeito a t .

A demonstração deste resultado envolve vários resultados técnicos que fogem dos nossos objetivos, portanto a deixaremos referenciada em [1].

1.2.2 O Grau de Brouwer para Funções Contínuas

Como veremos adiante, o grau de Brouwer será utilizado na versão generalizada do método do *averaging* para nos fornecer uma ferramenta topológica quando a função de estudo é apenas contínua e não necessariamente, diferenciável. Portanto, nessa sessão, mostramos como definir e citamos as propriedades fundamentais do grau de Brouwer quando a função tratada é apenas contínua.

Um dos principais resultados que possibilitam a extensão do grau de Brouwer a funções contínuas, é o Teorema de Aproximação de Weierstrass, que permite demonstrar que se V é um aberto limitado de \mathbb{R}^n , então $C^2(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$ é denso em $C(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$. Além disso, outra ferramenta de suma importância nesta tarefa é a invariância por homotopia de classe C^2 do grau de Brouwer para funções regulares (ver 1.2.6), estudada anteriormente.

Sejam V aberto limitado de \mathbb{R}^n , $f \in C(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin f(\partial V)$ e $r = d(b, f(\partial V)) = \inf\{|b - f(x)|; x \in \partial V\}$.

Note que, se $r = 0$, então existiria uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em ∂V de modo que $|b - f(x_n)| < 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como ∂V é fechado e V é limitado, segue que ∂V é compacto, e portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_n \rightarrow x_0$ para algum $x_0 \in \partial V$.

Logo, pela continuidade de f e pela propriedade da sequência tomada, temos que $f(x_0) = b$, e portanto $b \in f(\partial V)$, o que é absurdo. Logo $r > 0$.

Pela densidade de $C^2(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$ em $C(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$, existe $g \in C^2(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$ tal que:

$$\|f - g\|_\infty = \sup \{|f(x) - g(x)|; x \in \bar{V}\} < \frac{r}{2}.$$

Teorema 1.2.7. Se $U = \{g \in C^2(\bar{V}, \mathbb{R}^n); \|f - g\|_\infty < \frac{r}{2}\}$. Então:

$$d_B(g_1, V, b) = d_B(g_2, V, b), \quad \forall g_1, g_2 \in U.$$

Demonstração. Note que, pela discussão acima, temos que $U \neq \emptyset$.

Defina:

$$\begin{aligned} H : \bar{V} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\mapsto tg_1(x) + (1 - t)g_2(x). \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Como $g_1, g_2 \in C^2(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$, segue que $H \in C^2(\bar{V} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$.

Mostremos agora que $b \notin H(\partial V \times [0, 1])$.

De fato, dado $x \in \bar{V}$, para cada $t \in [0, 1]$, temos que:

$$\begin{aligned} |H(x, t) - f(x)| &= |tg_1(x) + (1 - t)g_2(x) - tf(x) - (1 - t)f(x)| \\ &= |t(g_1(x) - f(x)) + (1 - t)(g_2(x) - f(x))| \\ &\leq t|g_1(x) - f(x)| + (1 - t)|g_2(x) - f(x)| \\ &\leq t\|g_1 - f\|_\infty + (1 - t)\|g_2 - f\|_\infty \\ &< t\frac{r}{2} + (1 - t)\frac{r}{2} \\ &= \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Assim, se $b \in H(\partial V \times [0, 1])$, existiriam $x_0 \in \partial V$ e $t_0 \in [0, 1]$ tais que $H(x_0, t_0) = b$, e com isso:

$$|b - f(x_0)| = |H(x_0, t_0) - f(x_0)| < \frac{r}{2},$$

o que é um absurdo, pois $r = d(b, f(\partial V))$, e desta forma $|b - f(x_0)| \geq r$. Portanto $b \notin H(\partial V \times [0, 1])$.

Pelo Teorema 1.2.6, temos que:

$$d_B(H(\cdot, 0), V, b) = d_B(H(\cdot, 1), V, b),$$

isto é:

$$d_B(g_1, V, b) = d_B(g_2, V, b).$$

□

Com isso, podemos definir o grau de Brouwer para funções contínuas:

Definição 1.2.8. Sejam V um subconjunto aberto limitado de \mathbb{R}^n , $f \in C(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin f(\partial V)$, definimos o **grau de Brouwer** de f com respeito a V no ponto b , como:

$$d_B(f, V, b) = d_B(g, V, b), \quad \forall g \in U,$$

onde:

$$U = \left\{ g \in C^2(\bar{V}, \mathbb{R}^n); \|f - g\|_\infty < \frac{d(b, f(\partial V))}{2} \right\}.$$

No caso de funções contínuas, também temos invariância por homotopia e a propriedade de existência de solução:

Teorema 1.2.9 (Invariância Homotópica do grau). Sejam V um aberto limitado de \mathbb{R}^n , $H \in C(\bar{V} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ e $b \notin H(\partial V \times [0, 1])$, então $d_B(H(\cdot, t), V, b)$ é constante com relação a t .

Teorema 1.2.10. Sejam V um aberto limitado de \mathbb{R}^n , $f \in C(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin f(\partial V)$. Se $d_B(f, V, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in V$ tal que $f(x_0) = b$.

Teorema 1.2.11 (Propriedade de Excisão do grau). Sejam V um aberto limitado de \mathbb{R}^n , $f \in C(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$, $K \subset \bar{V}$ um conjunto compacto e $b \notin f(K) \cup f(\partial V)$. Então, $d_B(f, V, b) = d_B(f, V - K, b)$.

As demonstrações de tais fatos podem ser encontradas em [1], assim como as outras diversas propriedades do grau de Brouwer, porém, para este trabalho, é suficiente conhecer os resultados aqui enunciados.

Capítulo 2

O Método do *Averaging*

A existência de soluções periódicas de uma equação diferencial é um importante objeto de estudo para se compreender qualitativamente a dinâmica de um sistema. Deste modo, ao longo dos anos, esse tema foi vastamente estudado através de diversas técnicas, dentre elas, o método do *averaging*, que é amplamente utilizado na obtenção de resultados qualitativos.

O método do *averaging* é uma poderosa ferramenta que permite relacionar, quantitativamente, as soluções periódicas que bifurcam de um sistema perturbado com o número de zeros simples de uma função a ser determinada, em um espaço de dimensão finita, e assim, facilita a árdua tarefa de encontrar tais soluções de interesse.

Na primeira seção deste capítulo, desenvolvemos alguns resultados que serão essenciais para o entendimento deste método, e na segunda seção, enunciamos e demonstramos o resultado clássico do *averaging*, que exige que as equações a serem estudadas sejam, no mínimo, de classe C^2 .

Em 2004, Buica e Llibre (em [7]) utilizaram a teoria do Grau de Brouwer para estender o método do *averaging* clássico às equações apenas contínuas, e assim seu uso foi ampliado à uma classe muito maior de sistemas. Tal generalização é estudada em detalhes na terceira seção.

2.1 Teoria do *Averaging*

Nesta sessão, descrevemos a ideia principal da teoria do *averaging*, que é comparar as soluções de um sistema perturbado com as de outro sistema mais simples, a ser definido.

Como veremos adiante, a ideia de se aplicar o *averaging* a um sistema é muito intuitiva, e podemos encontrar nos trabalhos de Lagrange e Laplace as justificativas de tal intuitividade, assim como o uso deste processo para se estudar o problema de perturbações no sistema solar.

Nos primórdios de tal teoria, muitos físicos e astrônomos achavam os procedimentos do *averaging* tão naturais que não se importavam em justificar o processo. Contudo, mostrou-se necessária a formalização de tais métodos, e com o auxílio do rigor da teoria da aproximação, foi possível identificar as restrições deste procedimento, e assim, em torno de 1930, surgiram os primeiros enunciados rigorosos da teoria do *averaging*.

Em [69] podemos encontrar uma descrição detalhada da teoria do *averaging* e suas aplicações. De acordo com os interesses deste trabalho, discutiremos apenas o caso do *averaging* periódico de primeira ordem, porém existem outras versões deste teorema que podem ser conferidas em [69].

Utilizaremos as notações introduzidas no capítulo 1. Considere o seguinte sistema perturbado:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f^1(x, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(x, t, \varepsilon), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

onde $f^1 : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f^{[2]} : D \times \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções T -periódicas na variável t , D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e $x_0 \in D$.

A simplificação natural deste sistema pode ser feita através da eliminação do termo de ordem ε^2 e, para que o sistema se torne autônomo, calcula-se a média com respeito a t da equação. Com isso, obtemos a seguinte definição:

Definição 2.1.1. Definimos a **equação promediada** associada ao sistema 2.1.1 como:

$$\begin{cases} \dot{z} = \varepsilon \bar{f}^1(z), \\ z(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

onde a função $\bar{f}^1 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$\bar{f}^1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f^1(z, t) dt. \quad (2.1.3)$$

Neste caso, chamamos \bar{f}^1 de **função promediada** associada a 2.1.1.

Nosso principal objetivo é comparar as soluções de (2.1.1) com as soluções de (2.1.2). Em particular, provaremos que, sob certas condições a serem discutidas na sequência, as soluções dos sistemas (2.1.1) e (2.1.2) permanecem próximas (com ordem ε de proximidade) por um intervalo de tempo de ordem $\frac{1}{\varepsilon}$, ou seja, existem constantes positivas C e L tais que:

$$\|x_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)\| \leq C\varepsilon \text{ para } 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon},$$

onde $x_\varepsilon(t)$ e $z_\varepsilon(t)$ são soluções de 2.1.1 e 2.1.2, respectivamente.

Exemplo 2.1.2. Considere o sistema 2π -periódico:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon x + \varepsilon^2 \cos(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

cuja solução geral é dada por:

$$x(t) = x_0 e^{\varepsilon t} + \varepsilon^2 \text{sen}(t). \quad (2.1.5)$$

Neste caso, o sistema promediado é dado por:

$$\begin{cases} \dot{z} = \varepsilon z, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (2.1.6)$$

que possui solução geral:

$$z(t) = z_0 e^{\varepsilon t}. \quad (2.1.7)$$

Desta forma, temos que, se $x(t)$ e $z(t)$ são soluções de (2.1.4) e (2.1.6), respectivamente, tais que $x(0) = z(0) = a$, então:

$$x(t) - z(t) = \varepsilon^2 \text{sen}(t),$$

e assim, estabelecemos uma comparação entre as soluções do sistema original e do promediado. Note que, neste caso, $x(t) - z(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Com intuito de remover o ε que multiplica a função promediada em (2.1.2), introduzimos uma nova **escala de tempo**, $\tau = \varepsilon t$, e assim obtemos o **sistema guiado**:

$$\begin{cases} \frac{dw}{d\tau} = \bar{f}^1(w), \\ w(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Observação 2.1.3. Para se obter o sistema acima, basta fazer $w(\tau) = z(t) = z\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$, assim, $w(0) = z(0) = x_0$, e:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \frac{dz}{dt}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \\ &= \varepsilon \bar{f}^1\left(z\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \\ &= \varepsilon \bar{f}^1(w(\tau)). \end{aligned}$$

Conforme a Observação 2.1.3, se $w(\tau)$ é solução de (2.1.8), então a solução de (2.1.2) é dada por:

$$z_\varepsilon(t) = z(t, \varepsilon) = w(\varepsilon t),$$

logo, t aparece em $z(t, \varepsilon)$ somente na forma εt .

Primeiramente, para que se faça sentido estudar a proximidade das soluções de (2.1.1) e (2.1.2) no sentido mencionado, é necessário que se escolha um subconjunto aberto \tilde{D} de \mathbb{R}^n , conexo e limitado, contendo x_0 , e duas constantes $L > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$, de forma que as soluções $x(t, \varepsilon)$ e $z(t, \varepsilon)$, com $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, permaneçam em \tilde{D} para $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$.

Proposição 2.1.4. Se f^1 e $f^{[2]}$ são contínuas, então existem \tilde{D} , L e ε_0 satisfazendo as condições citadas acima.

Demonstração. Existem dois modos de provar essa proposição.

Do primeiro modo, escolha D aberto conexo limitado e $\varepsilon_0 > 0$ arbitrariamente. Como o lado direito das equações dos sistemas (2.1.1) e (2.1.2) são limitadas por uma constante multiplicada por ε , para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $x, z \in \tilde{D}$ (pois são funções contínuas em um compacto), é claro que existe L satisfazendo a condição desejada.

A segunda maneira de se encontrar esses elementos é escolher $L > 0$ arbitrariamente, e \tilde{D} e ε_0 da seguinte forma: se uma solução de (2.1.8) existe para $0 \leq \tau \leq L$, e se \tilde{D} é uma vizinhança deste segmento de solução, então existe $\varepsilon_0 > 0$ de forma que as soluções de (2.1.1) e (2.1.2) permaneçam em \tilde{D} para $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$ se $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. \square

Observação 2.1.5. Observe que tais condições discutidas acima podem ser interpretadas do seguinte modo: como $x(t, \varepsilon)$ e $z(t, \varepsilon)$ evoluem no espaço em uma taxa de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$, então elas permanecem limitadas por um tempo de ordem $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$.

Note ainda que, tal ideia é semelhante ao que acontece no teorema 1.1.23.

Lema 2.1.6. Considere D um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^n , e seja $\varphi : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função periódica em s com período T . Assuma que $\varphi(x, s)$ possua função promediada nula, seja limitada em $D \times \mathbb{R}$ e satisfaça a condição de Lipschitz na variável x em D . Suponha que $x(t, \varepsilon) \in D$ para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $0 \leq t \leq L/\varepsilon$, para alguma constante $L > 0$, e que satisfaz $\dot{x} = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Então, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que:

$$\left\| \int_0^t \varphi(x(s, \varepsilon), s) ds \right\| \leq C_1, \text{ para } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \text{ e } 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que se $x(t, \varepsilon)$ é constante, o resultado é trivial, e é válido para todo t , pois neste caso, a integral seria periódica (devido a periodicidade de φ para x fixo) e portanto, basta tomar C_1 como a sua amplitude.

Em geral, x não precisa ser constante, porém x varia de maneira lenta, pois satisfaz $\dot{x} = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Considere a divisão do intervalo $[0, t]$ em períodos $[0, T]$, $[T, 2T]$, \dots , $[(m-1)T, mT]$ e $[mT, t]$, de modo que o último desses intervalos tenha comprimento menor do que T .

Então,

$$\left\| \int_0^t \varphi(x(s, \varepsilon), s) ds \right\| \leq \sum_{j=1}^m \left\| \int_{(j-1)T}^{jT} \varphi(x(s, \varepsilon), s) ds \right\| + \left\| \int_{mT}^t \varphi(x(s, \varepsilon), s) ds \right\| \quad (2.1.9)$$

Seja C_φ a constante de Lipschitz de φ , e observe a desigualdade abaixo, que fornece uma estimativa para cada uma das integrais de (2.1.9): (Cada passo será justificado em seguida.)

$$\begin{aligned} \left\| \int_{(j-1)T}^{jT} \varphi(x(s, \varepsilon), s) ds \right\| &= \left\| \int_{(j-1)T}^{jT} [\varphi(x(s, \varepsilon), s) - \varphi(x((j-1)T, \varepsilon), s)] ds \right\| \\ &\leq C_\varphi \int_{(j-1)T}^{jT} \|x(s, \varepsilon) - x((j-1)T, \varepsilon)\| ds \\ &\leq C_\varphi \int_{(j-1)T}^{jT} C_2 \varepsilon ds \\ &\leq C_\varphi C_2 T \varepsilon. \end{aligned}$$

A primeira igualdade é válida pois $\varphi(x((j-1)T, \varepsilon), s)$ possui integral nula, já que $x((j-1)T, \varepsilon)$ é fixo e $\varphi(x, s)$ possui média nula para cada x fixado.

A segunda desigualdade, segue da hipótese de que φ satisfaz a condição de Lipschitz na variável x .

A terceira desigualdade segue da limitação $\|x(s, \varepsilon) - x((j-1)T, \varepsilon)\| \leq C_2 \varepsilon$, para alguma constante $C_2 > 0$, e esta desigualdade é justificada pela lenta movimentação de x . De fato, pelo teorema do valor médio, como D é conexo, existe $\xi \in D$, tal que:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x(s, \varepsilon) - x((j-1)T, \varepsilon)}{s - (j-1)T} \right\| &= \|\dot{x}(\xi, \varepsilon)\| \\ &\leq \tilde{C}_2 \varepsilon, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \|x(s, \varepsilon) - x((j-1)T, \varepsilon)\| &\leq \tilde{C}_2 \varepsilon (s - (j-1)T) \\ &\leq \tilde{C}_2 T \varepsilon, \end{aligned}$$

assim, basta tomar $C_2 = \tilde{C}_2 T$.

Além disso, a integral final sobre um período parcial é limitada por $\|\varphi\|_\infty T = C_3$.

Portanto,

$$\left\| \int_0^t \varphi(x(s, \varepsilon), s) ds \right\| \leq m C_\varphi C_2 T \varepsilon + C_3.$$

Por construção, $mT \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$, logo:

$$m C_\varphi C_2 T \varepsilon + C_3 \leq C_\varphi C_2 L + C_3,$$

e assim, basta tomar $C_1 = C_\varphi C_2 L + C_3$, para concluir a demonstração. □

Agora, estamos prontos para enunciar e demonstrar o resultado de interesse:

Teorema 2.1.7. Considere os sistemas (2.1.1) e (2.1.2). Suponha que f^1 satisfaz a condição de Lipschitz, $f^{[2]}$ é contínua e que ε_0 , D e L satisfazem as condições da proposição 2.1.4. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\|x(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon)\| < C\varepsilon, \text{ para } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \text{ e } 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon},$$

onde $x(t, \varepsilon)$ e $z(t, \varepsilon)$ são as soluções de (2.1.1) e (2.1.2), respectivamente.

Demonstração. Denotaremos por $E(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon)$, o erro da aproximação entre as soluções.

Note que, se w é a solução do sistema guiado (2.1.8) associado a (2.1.2), então $z(t, \varepsilon) = w(\varepsilon t)$, e portanto $E(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - w(\varepsilon t)$.

Utilizando as equações diferenciais para escrever as soluções em sua forma integral, obtemos:

$$\begin{aligned}
x(t, \varepsilon) - x_0 &= \int_0^t \frac{dx(s, \varepsilon)}{ds} ds \\
&= \int_0^t \left[\varepsilon f^1(x(s, \varepsilon), s) + \varepsilon^2 f^{[2]}(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(\varepsilon t) - x_0 &= \int_0^t \frac{dw(\varepsilon s)}{ds} ds \\
&= \int_0^t \frac{dw}{ds}(\varepsilon s) \varepsilon ds \\
&= \int_0^t \varepsilon \bar{f}^1(w(\varepsilon s)) ds.
\end{aligned}$$

E assim,

$$E(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^t \left[f^1(x(s, \varepsilon), s) + \varepsilon f^{[2]}(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon) - \bar{f}^1(w(\varepsilon s)) \right] ds. \quad (2.1.10)$$

Para simplificar a notação, omitiremos os pontos de aplicação de E , x e w . Deste modo, o integrando de E pode ser escrito como:

$$\left[f^1(x, s) - f^1(w, s) \right] + \varepsilon f^{[2]}(x, s, \varepsilon) + \left[f^1(w, s) - \bar{f}^1(w) \right],$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|E\| &= \varepsilon \left\| \int_0^t \left\{ \left[f^1(x, s) - f^1(w, s) \right] + \varepsilon f^{[2]}(x, s, \varepsilon) + \left[f^1(w, s) - \bar{f}^1(w) \right] \right\} ds \right\| \\
&\leq \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f^1(x, s) - f^1(w, s) \right] ds \right\| + \varepsilon^2 \left\| \int_0^t f^{[2]}(x, s, \varepsilon) ds \right\| + \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f^1(w, s) - \bar{f}^1(w) \right] ds \right\| \\
&\leq \varepsilon \int_0^t \left\| f^1(x, s) - f^1(w, s) \right\| ds + \varepsilon^2 \left\| \int_0^t f^{[2]}(x, s, \varepsilon) ds \right\| + \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f^1(w, s) - \bar{f}^1(w) \right] ds \right\|.
\end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Na primeira integral da desigualdade (2.1.11), utilizamos a condição de Lipschitz de f^1 para substituir o integrando por $C_{f^1} \|x - w\| = C_{f^1} E(s, \varepsilon)$.

Como $f^{[2]}$ é contínua e periódica, então ela é limitada em \bar{D} para todo tempo por uma constante $C^0 > 0$.

Note que, $f^1(w, s) - \bar{f}^1(w) = \varphi(w, s)$ tem as seguintes propriedades:

- É T -periódica em s , pois f^1 é T -periódica.
- Satisfaz a condição de Lipschitz, pois f^1 e \bar{f}^1 são de Lipschitz.
- É limitada em D , pela continuidade das funções e por D ser limitado.
- Possui média nula para cada w pois: $\frac{1}{T} \int_0^T \left[f^1(w, s) - \bar{f}^1(w) \right] ds = \bar{f}^1(w) - \bar{f}^1(w) = 0$.

Observe também que, $w(\varepsilon s)$ satisfaz $\dot{w} = \mathcal{O}(\varepsilon)$, pois: $\frac{d}{ds}w(\varepsilon s) = \varepsilon \frac{dw}{ds}(\varepsilon s) = \varepsilon \bar{f}^1(w(\varepsilon s))$. E por hipótese, $w(\varepsilon s) \in D$ para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $0 \leq t \leq L/\varepsilon$.

Então pelo Lema 2.1.6, a terceira integral é limitada por uma constante $C_1 > 0$.

Assim, obtemos:

$$\|E(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon C_{f^1} \int_0^t \|E(s, \varepsilon)\| ds + C_0 \varepsilon^2 t + C_1 \varepsilon. \quad (2.1.12)$$

Utilizando o Lema de Gronwall adaptado 1.1.8 para $\varphi(t) = \|E(t, \varepsilon)\|$, $\delta_1 = \varepsilon C_{f^1}$, $\delta_2 = C_0 \varepsilon^2$, $\delta_3 = C_1 \varepsilon$, $t_0 = 0$ e $T = L/\varepsilon$, temos que:

$$\begin{aligned} \|E(t, \varepsilon)\| &\leq \varepsilon \left(\frac{C_0}{C_{f^1}} + C_1 \right) e^{\varepsilon C_{f^1} t} - \varepsilon \frac{C_0}{C_{f^1}} \\ &\leq \varepsilon \left(\frac{C_0}{C_{f^1}} + C_1 \right) e^{C_{f^1} L} - \varepsilon \frac{C_0}{C_{f^1}} \\ &= \varepsilon \left(\frac{C_0}{C_{f^1}} (1 - e^{-C_{f^1} L}) + C_1 \right) e^{C_{f^1} L} \\ &= \varepsilon \left(C_0 L \frac{(1 - e^{-C_{f^1} L})}{C_{f^1} L} + C_1 \right) e^{C_{f^1} L} \\ &\leq \varepsilon (C_0 L + C_1) e^{C_{f^1} L}, \end{aligned}$$

para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $0 \leq t \leq L/\varepsilon$.

Observe que a última desigualdade é justificada pelo fato de que a função real $g(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$ é limitada por 1 se $x > 0$.

Tomando $C = (C_0 L + C_1) e^{C_{f^1} L}$, temos o resultado. □

Para finalizar essa sessão, mostraremos no exemplo abaixo, como a teoria do *averaging* pode ser utilizada.

Exemplo 2.1.8. Considere a *equação de Van der Pol*:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon g(x, \dot{x}), \quad (2.1.13)$$

com valores iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = y_0$, onde g é uma função suficientemente suave em $D \subset \mathbb{R}^2$.

Este é um sistema quasi-linear, que é um caso particular do Exemplo 1.1.26. Assim, utilizaremos a seguinte transformação amplitude-fase (1.1.30) para colocar o sistema em sua forma padrão:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}(t - \phi), \\ \dot{x} &= r \cos(t - \phi), \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

e conforme a Observação 1.1.27, a equação perturbada é transformada em:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos(t - \phi)g(r\text{sen}(t - \phi), r\cos(t - \phi)) \\ \frac{1}{r}\text{sen}(t - \phi)g(r\text{sen}(t - \phi), r\cos(t - \phi)) \end{pmatrix} \quad (2.1.15)$$

Note que o campo (2.1.15) é da forma $\dot{x} = \varepsilon f^1(x, t)$, onde $x = (r, \phi)$.

Observe que (2.1.15) é um campo vetorial 2π -periódico na variável t e se assumirmos que $g \in C^1(D, \mathbb{R})$, podemos aplicar Teorema 2.1.7, desde que uma vizinhança da origem seja excluída, já que as coordenadas polares utilizadas não funcionam na origem.

Como a equação original é autônoma, a equação promediada vai depender somente de r e definimos as duas componentes do campo vetorial promediado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(s - \phi)g(r\text{sen}(s - \phi), r\cos(s - \phi)) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(s)g(r\text{sen}(s), r\cos(s)) ds, \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

e

$$\bar{f}_2^1(r) = \frac{1}{r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(s)g(r\text{sen}(s), r\cos(s)) ds. \quad (2.1.17)$$

Assim, podemos obter uma aproximação assintótica através da resolução do sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{r}} \\ \dot{\bar{\phi}} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \bar{f}_1^1(\bar{r}) \\ \bar{f}_2^1(\bar{r}) \end{pmatrix},$$

com as condições iniciais adequadas.

Note que esse é o sistema (2.1.2) com $z = (\bar{r}, \bar{\phi})$, e assim reduzimos o problema inicial a um sistema autônomo de primeira ordem.

Agora, vamos particularizar este exemplo para uma famosa forma da equação de Van der Pol:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (2.1.18)$$

Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(s) (1 - r^2\text{sen}^2(s)) r \cos(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - r^2\text{sen}^2(s)) r \cos^2(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \pi \left(r - \frac{r^3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} r \left(1 - \frac{r^2}{4} \right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{f}_2^1(r) &= \frac{1}{r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(s) (1 - r^2 \text{sen}^2(s)) r \cos(s) ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, a equação promediada fica:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{r}} \\ \dot{\bar{\phi}} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \bar{r} \left(1 - \frac{\bar{r}^2}{4}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.19)$$

Note que, se o valor inicial da amplitude r_0 é 0 ou 2, então a amplitude \bar{r} é constante para todo tempo. Além disso, $r_0 = 0$ corresponde ao ponto crítico instável da equação original, enquanto $r_0 = 2$ origina uma solução periódica para o sistema promediado, para todo $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, e assim, pelo Teorema 2.1.7, temos a seguinte solução para o sistema original:

$$x(t, \varepsilon) = 2\text{sen}(t - \phi_0) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.1.20)$$

em tempo-escala $1/\varepsilon$.

Em geral, utilizando a solução do sistema promediado e o Teorema 2.1.7, temos que:

$$x(t, \varepsilon) = \frac{r_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\left(1 + \frac{1}{4}r_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)\right)^{\frac{1}{2}}} \text{sen}(t - \phi_0) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.1.21)$$

em tempo-escala $1/\varepsilon$.

Mais ainda, veremos adiante, através do método do *averaging* que a solução (2.1.20) é uma solução periódica do sistema original para ε suficientemente pequeno.

Observe que, se $0 < r_0 < 2$, então, pela expressão da equação promediada (2.1.19), temos que $\dot{\bar{r}} > 0$, i.e., $\bar{r}(t)$ é crescente. Logo, de acordo com a transformação amplitude-fase estabelecida no início, as soluções (2.1.21) que se iniciam com raio entre 0 e 2 se afastam da origem e se aproximam da solução periódica (2.1.20).

Analogamente, se $r > 2$, temos que $\dot{\bar{r}} < 0$, e portanto as soluções (2.1.21) que se iniciam com raio maior que 2 se aproximam da solução periódica (2.1.20).

Com isso, concluímos que (2.1.20) é um ciclo limite estável. Na figura abaixo, esboçamos o retrato de fase deste sistema:

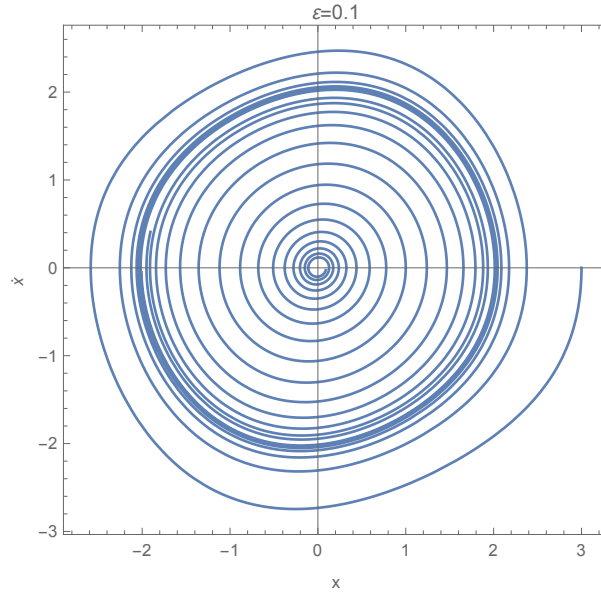


Figura 2.1: Retrato de fase da equação de Van der Pol: $\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}$, com $\varepsilon = 0.1$.

Em [69], podem ser encontrados muitas outras aplicações da teoria do *averaging*, assim como exemplos que mostram a necessidade das hipóteses e restrições que foram feitas para se provar a validade do teorema de *averaging* periódico 2.1.7, discutido nesta sessão.

2.2 O Método do *Averaging* Clássico

Dedicaremos esta sessão para apresentar um resultado clássico da teoria de sistemas dinâmicos. Trata-se do método do *averaging*, que consiste em associar, sob certas condições, soluções periódicas de um sistema perturbado com os pontos críticos de sua equação promediada.

2.2.1 Enunciado

Teorema 2.2.1 (Método do *Averaging* de primeira ordem clássico). Considere a equação

$$\dot{x} = \varepsilon f^1(x, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(x, t, \varepsilon), \quad (2.2.1)$$

com $x \in D$, um aberto de \mathbb{R}^n , $t \geq 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, para algum $\varepsilon_0 > 0$. Suponha que:

1. As funções f^1 , $f^{[2]}$, $\frac{\partial f^1}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f^1}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante M , independente de ε , em $[0, \infty] \times D$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$;
2. f^1 e $f^{[2]}$ são T -periódicas em t (T independente de ε).

Se p é um zero simples da função promediada, $\bar{f}^1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(z, s) ds$, isto é, $\bar{f}^1(p) = 0$ e $\det \left(\frac{\partial \bar{f}^1}{\partial z}(p) \right) \neq 0$, então existe uma solução T -periódica $\varphi(t, \varepsilon)$ de 2.2.1 tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(t, \varepsilon) = p$.

2.2.2 Demonstração do Teorema 2.2.1

Para provar este resultado, introduzimos uma *transformação próxima da identidade*, para isso, defina a seguinte função T -periódica:

$$u(t, y) = \int_0^t [f^1(y, s) - \bar{f}^1(y)] ds, \quad (2.2.2)$$

assim, podemos estabelecer a relação de transformação de x para z , através de:

$$x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t)). \quad (2.2.3)$$

Afirmção 1: $\|u(t, y)\| \leq 2MT$, $t \geq 0$, $y \in D$.

De fato, primeiramente assuma $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} \|u(t, y)\| &= \left\| \int_0^t [f^1(y, s) - \bar{f}^1(y)] ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|f^1(y, s) - \bar{f}^1(y)\| ds \\ &\leq \int_0^t \|f^1(y, s)\| ds + \int_0^t \|\bar{f}^1(y)\| ds \\ &\leq Mt + \frac{t}{T} \int_0^T \|f^1(y, r)\| dr \\ &\leq Mt + Mt \\ &\leq 2MT. \end{aligned}$$

Agora, se $t > T$, temos que, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $0 < t - mT \leq T$:

$$u(t, y) = \int_0^{mT} [f^1(y, s) - \bar{f}^1(y)] ds + \int_{mT}^t [f^1(y, s) - \bar{f}^1(y)] ds,$$

e como f^1 é T -periódica, temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{mT} [f^1(y, s) - \bar{f}^1(y)] ds &= m \int_0^T [f^1(y, s) - \bar{f}^1(y)] ds \\ &= m \left(\int_0^T f^1(y, s) ds - T \frac{1}{T} \int_0^T f^1(y, s) ds \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
u(t, y) &= \int_{mT}^t [f^1(y, s) - \bar{f}^1(y)] ds \\
&= \int_0^{t-mT} [f^1(y, s - mT) - \bar{f}^1(y)] ds \\
&= \int_0^{t-mT} [f^1(y, s) - \bar{f}^1(y)] ds,
\end{aligned}$$

o que se reduz ao caso anterior, e prova a afirmação.

Observamos que o nome “próximo da identidade” é utilizado pois as variáveis x e z satisfazem $x(t) - z(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Agora, vamos escrever a equação diferencial para z . Para isso, diferencie a relação (2.2.3) com respeito ao tempo e utilize a equação em x para obter a equação:

$$\dot{z} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, z) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \dot{z} = \dot{x} = \varepsilon f^1(x, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(x, t, \varepsilon), \quad (2.2.4)$$

que pode ser reescrita como:

$$\left[I_n + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right] \dot{z} = \varepsilon f^1(t, x) + \varepsilon^2 f^{[2]}(t, x, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, z), \quad (2.2.5)$$

onde, pelo teorema fundamental do cálculo:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, z) = f^1(z, t) - \bar{f}^1(z).$$

Defina agora:

$$R = \varepsilon f^1(z + \varepsilon u(t, z), t) - \varepsilon f^1(z, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(z + \varepsilon u(t, z), t, \varepsilon), \quad (2.2.6)$$

e observe que R é T -periódica em t pois u , f^1 e $f^{[2]}$ o são. Assim, podemos reescrever 2.2.5 como:

$$\left[I_n + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right] \dot{z} = \varepsilon \bar{f}^1(z) + R. \quad (2.2.7)$$

Agora, como $\frac{\partial u}{\partial z}$ é uniformemente limitada, assim como u , podemos inverter a matriz do lado direito de (2.2.7) e obter a seguinte expressão:

$$\left[I_n + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right]^{-1} = I_n - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.2.8)$$

pra $t \geq 0$, $z \in D$.

Observe que $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ é uma função T -periódica, já que é obtido através de derivadas de u que são T -periódicas.

Afirmação 2: $R = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

De fato, como f^1 satisfaz a condição de Lipschitz, temos que:

$$\begin{aligned}
\|R\| &= \left\| \varepsilon f^1(z + \varepsilon u(t, z), t) - \varepsilon f^1(z, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(z + \varepsilon u(t, z), t, \varepsilon) \right\| \\
&\leq \varepsilon C_{f^1} \|z + \varepsilon u(t, z) - z\| + \varepsilon^2 \left\| f^{[2]}(z + \varepsilon u(t, z), t, \varepsilon) \right\| \\
&\leq \varepsilon^2 C_{f^1} \|u(t, z)\| + \varepsilon^2 \left\| f^{[2]}(z + \varepsilon u(t, z), t, \varepsilon) \right\| \\
&\leq \varepsilon^2 C_{f^1} L + \varepsilon^2 M \\
&= \varepsilon^2 K,
\end{aligned}$$

onde L é uma constante que limita u , e $K = C_{f^1} L + M$.

Com isso, temos a seguinte expressão para \dot{z} :

$$\dot{z} = \varepsilon \bar{f}^1(z) + R - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \bar{f}^1(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (2.2.9)$$

Na equação acima, o erro $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ também é T -periódico pois foi obtido de multiplicação de funções T -periódicas com $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, que é T -periódica.

Observe que, utilizando aproximação de Taylor, temos que:

$$\begin{aligned}
f^1(z + \varepsilon u(t, z), t) - f^1(z, t) &= \varepsilon \frac{\partial f^1}{\partial \varepsilon}(z, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \varepsilon \frac{\partial f^1}{\partial z}(z, t) u(t, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \quad (2.2.10)$$

para ε pequeno, porém basta diminuir ε_0 se necessário, para obter a validade da aproximação acima, em nosso problema. Novamente, o símbolo $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ em (2.2.10) é T -periódico pois é o resto de Lagrange de uma função T -periódica.

Além disso, utilizando expansão de Taylor de primeira ordem, temos que:

$$f^{[2]}(z + \varepsilon u(t, z), t, \varepsilon) = f^{[2]}(z, t, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.2.11)$$

onde $\mathcal{O}(\varepsilon)$ é T -periódico pois $f^{[2]}$ é T -periódica.

Agora, defina $\tilde{R}(z, t, \varepsilon)$ por:

$$\tilde{R}(z, t, \varepsilon) = \frac{\partial f^1}{\partial z}(z, t) u(t, z) - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \bar{f}^1(z) + f^{[2]}(z, t, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.2.12)$$

onde $\mathcal{O}(\varepsilon)$ é T -periódico pois é oriundo de funções periódicas.

Combinando (2.2.10), (2.2.11) e (2.2.6), podemos reescrever (2.2.9) como:

$$\dot{z} = \varepsilon \bar{f}^1(z) + \varepsilon^2 \tilde{R}(z, t, \varepsilon). \quad (2.2.13)$$

Observe que $\mathcal{O}(\varepsilon^3) = \varepsilon^2 \mathcal{O}(\varepsilon)$, e portanto, tal símbolo está incorporado no termo $\varepsilon^2 \tilde{R}(z, t, \varepsilon)$.

Como u , f^1 e f^2 e o erro $\mathcal{O}(\varepsilon)$ são T -periódicas, assim como suas derivadas, temos que \tilde{R} é T -periódica na variável t , e além disso, é de classe \mathcal{C}^1 com respeito a z , devido as condições de regularidade exigidas no enunciado.

De acordo com a escolha de u , temos que uma solução T -periódica $z(t)$ de 2.2.13 corresponde a uma solução T -periódica $x(t)$ de (2.2.1). De fato, suponha que $z(t_0) = z(t_0 + T)$, então $x(t_0) - \varepsilon u(t_0, z(t_0)) = x(t_0 + T) - \varepsilon u(t_0 + T, z(t_0 + T))$, mas:

$$\begin{aligned}
u(t_0 + T, z(t_0 + T)) &= \int_0^{t_0+T} [f^1(z(t_0 + T), s) - \bar{f}^1(z(t_0 + T))] ds \\
&= \int_0^{t_0} [f^1(z(t_0), s) - \bar{f}^1(z(t_0))] ds + \int_{t_0}^{t_0+T} [f^1(z(t_0), s) - \bar{f}^1(z(t_0))] ds \\
&= \int_0^{t_0} [f^1(z(t_0), s) - \bar{f}^1(z(t_0))] ds + \int_0^T [f^1(z(t_0), s) - \bar{f}^1(z(t_0))] ds \\
&= \int_0^{t_0} [f^1(z(t_0), s) - \bar{f}^1(z(t_0))] ds \\
&= u(t_0, z(t_0)),
\end{aligned}$$

logo, $x(t_0) = x(t_0 + T)$, e portanto $x(t)$ é T -periódica.

Reescreva agora a equação (2.2.13) na sua forma integral:

$$z(t) = z(0) + \varepsilon \int_0^t \bar{f}^1(z(s)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t \tilde{R}(z(s), s, \varepsilon) ds. \quad (2.2.14)$$

Desta forma, a solução $z(t)$ é T -periódica se, e só se, $z(t + T) = z(t)$ para cada $t \geq 0$, o que equivale a $z(0) = z(T)$. Assim, podemos associar tal solução a seguinte equação:

$$h(z(0), \varepsilon) = \int_0^T \bar{f}^1(z(s)) ds + \varepsilon \int_0^T \tilde{R}(z(s), s, \varepsilon) ds = 0. \quad (2.2.15)$$

Observe que a equação acima não depende explicitamente de $z(0)$, porém como \bar{f}^1 e \tilde{R} são de classe \mathcal{C}^1 , as soluções da equação diferencial (2.2.13) dependem continuamente das suas condições iniciais, e portanto a dependência em $z(0)$ é implícita, podendo ser identificada através da relação que leva $z(0)$ a um ponto $z(t_0)$ da curva.

Como $\bar{f}^1(p) = 0$, temos que $h(p, 0) = 0$.

Afirmção 3: Numa vizinhança de $\varepsilon = 0$, a equação (2.2.15) possui uma única solução $z(0)$, e se $\varepsilon \rightarrow 0$, então $z(0) \rightarrow p$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial z}(p, 0) &= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^T \bar{f}^1(z(s, z)) ds \Big|_{z(0)=p} \\
&= \int_0^T \frac{\partial \bar{f}^1}{\partial z}(z(s, z)) \Big|_{z(0)=p} ds \\
&= \int_0^T \frac{\partial \bar{f}^1}{\partial z}(p) ds \\
&= T \frac{\partial \bar{f}^1}{\partial z}(p),
\end{aligned}$$

então, pelas hipóteses do teorema, temos que $\det \left(\frac{\partial h}{\partial z}(p, 0) \right) \neq 0$, $h(p, 0) = 0$ e h é de classe \mathcal{C}^1 .

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe um aberto $V \subset D$, de forma que $V \times [0, \varepsilon_0)$ (diminua ε_0 se necessário) contenha o ponto $(p, 0)$, e que para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, existe um único $z(\varepsilon) \in V$ tal que:

$$h(z(\varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

Ainda pelo Teorema da Função Implícita, temos que $z(\varepsilon)$ é função diferenciável com relação ao parâmetro ε , e em particular, da sua continuidade, podemos inferir que $z(\varepsilon) \rightarrow p$ se $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pelo que vimos, cada solução $z(t, \varepsilon)$ de (2.2.13) que passa por $z(\varepsilon)$ é periódica e corresponde a uma solução periódica $x(t, \varepsilon)$ da equação original (2.2.1), concluindo a demonstração.

2.3 O Método do *Averaging* Generalizado - via Grau de Brouwer

Como vimos na sessão anterior, o método do *averaging* de primeira ordem pode ser aplicado somente à classe de equações diferenciais que satisfazem certas condições de regularidade. Em 2004, Adriana Buică e Jaume Llibre estabeleceram em [7] um modo de generalizar este método para a classe de sistemas que são apenas contínuos.

No resultado clássico, usamos explicitamente que a função promediada é diferenciável, o que possibilitou a aplicação do Teorema da Função Implícita. Para buscar a generalização de tal resultado, foi necessário encontrar uma ferramenta topológica que substituísse, em certo modo, os resultados obtidos com tais condições de regularidade. Assim, fez-se o uso da teoria do grau de Brouwer (introduzida em 1.2), que mostrou-se bastante eficaz para o alcance do objetivo estabelecido.

2.3.1 Enunciado

Enunciamos agora a generalização do método do *averaging* de primeira ordem provida em [7]:

Teorema 2.3.1 (Método do *Averaging* de primeira ordem generalizado). Considere o seguinte sistema:

$$\dot{x} = \varepsilon f^1(x, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(x, t, \varepsilon), \quad (2.3.1)$$

onde $f^1 : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f^{[2]} : D \times \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas, T -periódicas em t e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Defina

$$F^1(z) = \int_0^T f^1(z, s) ds. \quad (2.3.2)$$

Assuma que:

1. f^1 e $f^{[2]}$ são localmente Lipschitz com respeito a x .
2. Para cada $a \in D$ com $F^1(a) = 0$, existe uma vizinhança limitada V de a tal que $F^1(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{V} - \{a\}$ e $d_B(F^1, V, 0) \neq 0$.

Então, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ de (2.3.1), tal que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Primeiramente, observe que a condição 1 do Teorema 2.2.1 é substituída apenas pela condição de que f^1 e $f^{[2]}$ sejam localmente Lipschitz com respeito a x .

Além disso, a condição 2 de 2.3.1 substitui a hipótese de que a (ou p no enunciado do método clássico) seja um zero simples da função promediada.

Suponha agora que F^1 seja diferenciável, e além disso, $F^1(a) = 0$ e $\det\left(\frac{\partial F^1}{\partial z}(a)\right) \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança V de a tal que $F^1(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V} - \{a\}$ e ainda mais,

$$d_B(F^1, V, 0) = \operatorname{sgn}\left(\det\left(\frac{\partial F^1}{\partial z}(a)\right)\right) \neq 0.$$

Portanto, se um sistema satisfaz as hipóteses de 2.2.1 então ele satisfaz automaticamente as hipóteses de 2.3.1, comprovando que este teorema é de fato uma generalização para o método clássico.

Teorema 2.3.2. A conclusão do Teorema 2.3.1 ainda é válida se não assumirmos a condição 1.

A demonstração do teorema 2.3.2 acima pode ser encontrada em [7], e é feita via teoria de grau coincidência, porém ela será omitida por fugir aos escopos deste trabalho.

2.3.2 Resultados Auxiliares

Estabelecemos aqui alguns resultados que auxiliarão na demonstração do Teorema 2.3.1.

Lema 2.3.3. Considere o sistema diferencial:

$$\dot{x} = F(x, t, \varepsilon), \tag{2.3.3}$$

onde $F : D \times \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, T -periódica em t e localmente Lipschitz com respeito a x e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Para cada $z \in D$, denote por $x(\cdot, z, \varepsilon)$ a solução de (2.3.3) tal que $x(0, z, \varepsilon) = z$.

Assuma que $x(\cdot, z, \varepsilon)$ esteja definida em $[0, T]$, para cada $z \in D$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

Defina $f : D \times \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ como:

$$f(z, \varepsilon) = \int_0^T F(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds. \tag{2.3.4}$$

Então, $x(t, z_\varepsilon, \varepsilon)$ é solução T -periódica de (2.3.3) se, e somente se, $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que:

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= \int_0^T F(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds \\ &= \int_0^T \frac{dx}{ds}(s, z, \varepsilon) ds \\ &= x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon). \end{aligned}$$

Assim, se $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ para algum $z_\varepsilon \in D$, então $x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) = x(0, z_\varepsilon, \varepsilon)$.

Portanto, podemos estender, por periodicidade, a solução $x(t, z_\varepsilon, \varepsilon)$ à \mathbb{R} , e assim concluímos que $x(t, z_\varepsilon, \varepsilon)$ é uma solução T -periódica de (2.3.3).

Por outro lado, suponha que $x(t, z_\varepsilon, \varepsilon)$ é uma solução T -periódica de (2.3.3), logo $x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) = x(0, z_\varepsilon, \varepsilon)$, e assim $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$. \square

Lema 2.3.4. Suponha que V é um aberto limitado contido em D . Então, existe ε_0 tal que, para todo $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, para todo $z \in \bar{V}$, a solução $x(\cdot, z, \varepsilon)$ de (2.3.1) está definida em $[0, T]$.

Demonstração. De fato, seja $z \in \bar{V}$, pelo Teorema de Existência e Unicidade 1.1.4, a solução $x(\cdot, z, \varepsilon)$ está definida para $0 \leq t \leq h_z$, onde:

- $h_z = \inf \left(T, \frac{d}{M(\varepsilon)} \right)$.
- $d > 0$ é uma constante tal que a bola centrada em z de raio d , $B_d(z)$, esteja contida em D .
- $M(\varepsilon) = \sup \left\{ \left\| \varepsilon f^1(x, t) + \varepsilon^2 f^{[2]}(x, t, \varepsilon) \right\|; t \in [0, T], x \in B_d(z) \right\}$

Assim, quando $|\varepsilon| > 0$ é suficientemente pequeno, digamos $\varepsilon_0^z > 0$, podemos tomar $\frac{d}{M(\varepsilon)}$ arbitrariamente grande, de forma que a solução esteja definida para $0 \leq t \leq T$, para todo $\varepsilon \in [-\varepsilon_0^z, \varepsilon_0^z]$.

Desta forma, por continuidade, podemos encontrar uma vizinhança de z , U_z , tal que $x(\cdot, u, \varepsilon)$ esteja definida em $[0, T]$ para todo $u \in U_z$, para todo $\varepsilon \in [-\varepsilon_0^z, \varepsilon_0^z]$.

Como \bar{V} é compacto, podemos encontrar ε_0 de forma que $x(\cdot, z, \varepsilon)$ esteja definida em $[0, T]$ para todo $z \in \bar{V}$, para todo $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, provando o resultado. \square

Lema 2.3.5. Seja V um aberto limitado de \mathbb{R}^n , e considere as funções contínuas $f_i : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, k$, e $f, g, r : \bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, dadas por:

$$g(\cdot, \varepsilon) = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i f_i(\cdot), \quad (2.3.5)$$

e

$$f(\cdot, \varepsilon) = g(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} r(\cdot, \varepsilon). \quad (2.3.6)$$

Assuma que $g(z, \varepsilon) \neq 0$ para todo $z \in \partial V$ e $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] - \{0\}$.

Então, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, o grau de Brouwer $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0)$ está bem definido e além disso:

$$d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0) = d_B(g(\cdot, \varepsilon), V, 0).$$

Demonstração. Para demonstrar este lema, utilizaremos o Teorema de Invariância do Grau de Brouwer por Homotopia 1.2.9.

Para cada $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] - \{0\}$, considere a seguinte homotopia contínua:

$$G_t(\cdot, \varepsilon) = g(\cdot, \varepsilon) + t(f(\cdot, \varepsilon) - g(\cdot, \varepsilon)),$$

definida para $0 \leq t \leq 1$.

Provemos que, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, $0 \notin G_t(\partial V, \varepsilon)$ para $0 < t \leq 1$.

Suponha, por absurdo, que existam $t_0 \in (0, 1]$ e $x_0 \in \partial V$ tais que $G_{t_0}(x_0, \varepsilon) = 0$. A continuidade de r , garante que existe $M > 0$ tal que $|r(z, \varepsilon)| \leq M$ para todo $z \in \bar{V}$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Agora, note que $g(x_0, \varepsilon) = -t_0\varepsilon^{k+1}r(x_0, \varepsilon)$ pois:

$$\begin{aligned} 0 &= G_{t_0}(x_0, \varepsilon) \\ &= g(x_0, \varepsilon) + t_0(f(x_0, \varepsilon) - g(x_0, \varepsilon)) \\ &= g(x_0, \varepsilon) + t_0(g(x_0, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1}r(x_0, \varepsilon) - g(x_0, \varepsilon)) \\ &= g(x_0, \varepsilon) + t_0\varepsilon^{k+1}r(x_0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$|g(x_0, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{k+1}. \quad (2.3.7)$$

Contudo, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, temos que :

$$|g(x_0, \varepsilon)| = |f_0(x_0) + \varepsilon f_1(x_0) + \cdots + \varepsilon^k f_k(x_0)| \neq 0,$$

pois assumimos que $g(z, \varepsilon) \neq 0$ para todo $z \in \partial V$ e $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] - \{0\}$.

Deste modo, temos que:

$$\frac{|g(x_0, \varepsilon)|}{\varepsilon^{k+1}} \rightarrow +\infty \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

O que é absurdo pelo desigualdade (2.3.7).

Logo, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, $0 \notin G_t(\partial V, \varepsilon)$ para $0 < t \leq 1$, e portanto $d_B(G_t(\cdot, \varepsilon), V, 0)$ está bem definido para todo $0 \leq t \leq 1$, e pelo Teorema de Invariância Homotópica 1.2.9, concluímos que:

$$\begin{aligned} d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0) &= d_B(G_1(\cdot, \varepsilon), V, 0) \\ &= d_B(G_0(\cdot, \varepsilon), V, 0) \\ &= d_B(g(\cdot, \varepsilon), V, 0). \end{aligned}$$

□

Corolário 2.3.6. Suponha que as hipóteses do Lema 2.3.5 são satisfeitas para $k = 0$ e que, além disso, para $a \in D$ com $f_0(a) = 0$, exista uma vizinhança V de a tal que $f_0(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V} - \{a\}$ e que $d_B(f_0, V, 0) \neq 0$.

Então, existe pelo menos um ramo de zeros de f que bifurcam de a .

Demonstração. Observe que, como $f_0(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V} - \{a\}$, segue da Propriedade de Excisão do Grau de Brouwer 1.2.11 que:

$$d_B(f_0, V - \{a\}, 0) = d_B(f_0, V, 0).$$

A partir disso, deduzimos que $d_B(f_0, V_\mu, 0) \neq 0$ para toda vizinhança $V_\mu \subset V$ de a . Escolha V_μ de forma que $V_\mu \rightarrow \{a\}$, quando $\mu \rightarrow 0$.

Assim, pelo Lema 2.3.5, para ε suficientemente pequeno, temos que:

$$d_B(f(\cdot, \varepsilon), V_\mu, 0) = d_B(f_0, V_\mu, 0) \neq 0.$$

Logo, utilizando o Teorema 1.2.10, temos que $f(\cdot, \varepsilon)$ possui pelo menos um zero $a_\varepsilon \in V_\mu$, o qual podemos escolher de forma que $a_\varepsilon \rightarrow a$, pela escolha de V_μ feita acima.

Deste modo, temos a existência de um ramo de zeros a_ε de f que bifurcam de a .

Se além disso, a hipótese de que $\det(Df_0(a)) \neq 0$ é válida, podemos concluir pelo Teorema da Função Inversa que tal ramo é único, já que neste caso, existiria um único a_ε em V_μ satisfazendo as propriedades acima. \square

2.3.3 Demonstração do Teorema 2.3.1

Primeiramente, note que o sistema (2.3.1) satisfaz as hipóteses do Lema 2.3.4, e portanto, podemos assumir que as soluções $x(\cdot, z, \varepsilon)$, com $z \in \bar{V}$ e $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, estão definidas em $[0, T]$.

Deste modo, as hipóteses do Lema 2.3.3 também são satisfeitas, e neste caso, a função f definida em (2.3.4) é dada por:

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^T f^1(x(s, z, \varepsilon), s) ds + \varepsilon^2 \int_0^T f^{[2]}(x(s, z, \varepsilon), s, \varepsilon) ds \quad (2.3.8)$$

Além disso, utilizando a forma integral da equação diferencial (2.3.1), podemos escrever a seguinte relação:

$$x(t, z, \varepsilon) = z + \varepsilon \int_0^t f^1(x(s, z, \varepsilon), s) ds + \varepsilon^2 \int_0^t f^{[2]}(x(s, z, \varepsilon), s, \varepsilon) ds, \quad (2.3.9)$$

para todo $t \in [0, T]$, $z \in \bar{V}$ e $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Afirmção: Se $z \in \bar{V}$ e $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então:

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon F^1(z) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1), \quad (2.3.10)$$

onde F^1 é a função promediada definida em (2.3.2)

De fato, como $\bar{V} \times [0, T] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ é um conjunto compacto e, pelo Teorema de Dependência Contínua, temos que a solução $x(\cdot, z, \varepsilon)$ é contínua em todas as variáveis, então a imagem $x(\bar{V} \times [0, T] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]) = K$ é um compacto contido em D .

Logo $K \subset D$ é um compacto tal que $x(t, z, \varepsilon) \in K$ para todo $t \in [0, T]$, $z \in \bar{V}$ e $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Assim, pela continuidade de $f^{[2]}$ no conjunto compacto $K \times [0, T] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, temos que existe uma constante $M > 0$ tal que:

$$f^{[2]}(x(s, z, \varepsilon), t, \varepsilon) \leq M,$$

para todo $s \in [0, T]$, $z \in \bar{V}$ e $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Assim, temos que:

$$\int_0^T f^{[2]}(x(s, z, \varepsilon), s, \varepsilon) ds \leq \int_0^T M ds = TM,$$

logo,

$$\int_0^T f^{[2]}(x(s, z, \varepsilon), s, \varepsilon) ds = \mathcal{O}(1). \quad (2.3.11)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^T f^1(x(s, z, \varepsilon), s) ds &= \int_0^T [f^1(x(s, z, \varepsilon), s) - f^1(z, s)] ds + \int_0^T f^1(z, s) ds \\ &= \int_0^T [f^1(x(s, z, \varepsilon), s) - f^1(z, s)] ds + F^1(z). \end{aligned}$$

Agora, observe que f^1 é de Lipschitz, e portanto:

$$\|f^1(x(s, z, \varepsilon), s) - f^1(z, s)\| \leq C_{f^1} \|x(s, z, \varepsilon) - z\| = \varepsilon \mathcal{O}(1),$$

assim:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T [f^1(x(s, z, \varepsilon), s) - f^1(z, s)] ds \right\| &\leq \int_0^T \|f^1(x(s, z, \varepsilon), s) - f^1(z, s)\| ds \\ &\leq \int_0^T \varepsilon \mathcal{O}(1) ds \\ &\leq \varepsilon T \mathcal{O}(1) = \varepsilon \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\int_0^T f^1(x(s, z, \varepsilon), s) ds = \varepsilon \mathcal{O}(1) + F^1(z). \quad (2.3.12)$$

Substituindo (2.3.11) e (2.3.12) em (2.3.8), obtemos que:

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon F^1(z) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1).$$

Observe agora que, se $\varepsilon \neq 0$, $f(z, \varepsilon) = 0$ se, e somente se, $\tilde{f}(z, \varepsilon) = F^1(z) + \varepsilon \mathcal{O}(1) = 0$.

Agora, com a hipótese 2 do teorema, podemos aplicar o Corolário 2.3.6 para \tilde{f} , e assim garantir a existência de um ramo de soluções z_ε da equação $\tilde{f}(z, \varepsilon) = 0$, e portanto da equação $f(z, \varepsilon) = 0$, de forma que $z_\varepsilon \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Assim, pelo Lema 2.3.3, podemos concluir que $\varphi(\cdot, \varepsilon) = x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$ é uma solução T -periódica de (2.3.1), tal que $\varphi(0, \varepsilon) = z_\varepsilon \rightarrow a$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Capítulo 3

Aplicações do Método do *Averaging*

O objetivo deste capítulo é apresentar como o método do *averaging* pode ser aplicado para identificar ciclos limite de maneira prática.

Na primeira sessão, exibimos como utilizar essa ferramenta para identificar ciclos limite bifurcantes de um anel de órbitas periódicas de um sistema planar autônomo, e nas sessões seguintes, aplicamos tais resultados para estudar o número máximo de ciclos limite bifurcantes de perturbações polinomiais de centros isócronos quadráticos e cúbicos.

3.1 Método do *Averaging* para Sistemas Planares Autônomos

Nesta seção, apresentamos uma maneira de aplicar o método do *averaging* a sistemas planares autônomos, sob certas hipóteses. Considere o seguinte sistema planar autônomo:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (3.1.1)$$

onde $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Denotaremos o campo (3.1.1) por $X = (P, Q)$.

Nosso principal objetivo é utilizar o método do *averaging* para encontrar ciclos limite que bifurcam do sistema (3.1.1) quando perturbado por um parâmetro ε da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) + \varepsilon p(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (3.1.2)$$

onde $p, q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Em geral, para aplicar o método do *averaging*, a equação diferencial tem que estar em sua forma padrão, isto é, ser do tipo:

$$\dot{z} = \varepsilon f(z, t) + \varepsilon^2 g(z, t, \varepsilon), \quad (3.1.3)$$

onde $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : D \times \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções T -periódicas na variável t e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Portanto, o primeiro passo deste processo é colocar o sistema (3.1.2) em sua forma padrão. Para isso, precisamos dos seguintes conceitos:

Definição 3.1.1. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto, uma função analítica $\mu : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ não constante é um **fator de integração** para o sistema (3.1.1) se satisfaz umas das seguintes condições equivalentes:

1. $\text{div}(\mu P, \mu Q) = 0$.
2. $\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Q)}{\partial y} = 0$.
3. $\langle X, \text{grad}(\mu) \rangle + \mu \text{div}(P, Q) = 0$.

Utilizando o terceiro item da definição acima, observamos que se $\mu : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é um fator integrante de (3.1.1) então μ deve satisfazer:

$$P \frac{\partial \mu}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial y} = - \left(\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Q)}{\partial y} \right),$$

e assim, podemos utilizá-la para encontrar os candidatos a fator integrante de uma maneira mais prática.

Definição 3.1.2. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto, dizemos que uma função contínua $H : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **integral primeira** em U de um sistema planar X se:

1. H não é constante em nenhum subconjunto aberto de D .
2. Se γ é uma solução de X contida em D , então H é constante sobre γ .

Observe que se H é uma integral primeira de um campo X , então a curva de nível $H = k$ (onde k é uma constante) é união de órbitas de X . Além disso, se H é diferenciável em D , então, pela regra da cadeia, a definição de integral primeira é equivalente a satisfazer a seguinte equação em D :

$$\langle \text{grad}(H), X \rangle = 0,$$

que nos fornece uma prática ferramenta para encontrar integrais primeiras, quando estas existem.

No próximo resultado, discutiremos como os conceitos de integral primeira e de fator de integração se relacionam:

Proposição 3.1.3. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto e $X = (X_1, X_2)$ um campo vetorial planar, então:

1. Se $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}$ é um fator de integração para o campo X , e $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como:

$$H(x, y) = - \int \mu(x, y) X_1(x, y) dy + h(x), \quad (3.1.4)$$

onde h é escolhida de forma que $\frac{\partial H}{\partial x} = \mu X_2$.

Então H é uma integral primeira diferenciável em D para o campo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu X_1 & = - \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = \mu X_2 & = \frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

2. Se $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma integral primeira para X em D , então podemos encontrar um fator de integração $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}$, de forma que (3.1.5) seja satisfeito.

Demonstração. Provemos o item 1. Primeiramente, observe que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(- \int \mu(x, y) X_1(x, y) dy + h(x) \right) \\ &= -\mu X_1.\end{aligned}$$

Agora, mostremos como escolher h de forma que $\frac{\partial H}{\partial x} = \mu X_2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(- \int \mu(x, y) X_1(x, y) dy + h(x) \right) \\ &= - \int \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, y) X_1(x, y)) dy + h'(x) \\ &= - \int \frac{\partial \mu}{\partial x} X_1 + \mu \frac{\partial X_1}{\partial x} dy + h'(x) \\ &= \int \frac{\partial \mu}{\partial y} X_2 + \mu \frac{\partial X_2}{\partial y} dy + h'(x) \\ &= \int \frac{\partial}{\partial y} (\mu(x, y) X_2(x, y)) dy + h'(x) \\ &= \mu X_2 + f_{X_2}(x) + h'(x).\end{aligned}$$

Desta forma, basta escolher $h(x) = - \int f_{X_2}(x) dx$. Com isso, temos satisfeitas as equações de (3.1.5) e H é uma integral primeira para este campo em D , pois H é diferenciável em D e, pelo Teorema de Schwarz, satisfaz:

$$\frac{\partial H}{\partial x} \mu X_1 + \frac{\partial H}{\partial y} \mu X_2 = 0.$$

Mostremos agora o item 2. Seja $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma integral primeira diferenciável para o campo X , então temos que, em D :

$$\frac{\partial H}{\partial x} X_1 + \frac{\partial H}{\partial y} X_2 = 0.$$

Logo, os vetores $X(x, y)$ e $\text{grad}(H)(x, y)$ são ortogonais, para todo $(x, y) \in D$. Assim, como o vetor $\left(-\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x}\right)$ é perpendicular a $\text{grad}(H)$, e a dimensão do subespaço ortogonal a $\text{grad}(H)$ é 1, segue que existe uma função $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} \mu X_1 = -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \mu X_2 = \frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

e das relações acima, temos que μ é diferenciável em D .

Novamente, pelo Teorema de Schwarz, concluímos que:

$$\frac{\partial(\mu X_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu X_2)}{\partial y} = 0,$$

e portanto, μ é um fator de integração para o campo X . □

Retornando ao nosso problema, para encontrar a forma padrão de (3.1.1), é necessário impor a seguinte hipótese sob o sistema :

Hipótese do anel periódico: Suponha que a origem $(0, 0)$ é um ponto crítico para o sistema (3.1.1) circundado por um **anel de órbitas periódicas** Γ , isto é:

1. Existe uma integral primeira H diferenciável de (3.1.1) ao redor da origem.
2. Se h_c é o nível crítico de H associado ao centro $(0, 0)$, então existe $h_s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que:

$$\Gamma_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; H(x, y) = h\},$$

é uma órbita periódica de (3.1.1) para todo $h_c < h < h_s$. Além disso h_s é o maior valor com esta propriedade, ou seja, $h_s = \infty$ ou Γ_{h_s} não é periódica.

Se $h_s < \infty$, então Γ_{h_s} corresponde a uma separatriz policíclica, e é onde o anel periódico termina.

3. $\Gamma = \bigcup_{h_c < h < h_s} \Gamma_h$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \leq h_c < h_s$. Denote por $\mu = \mu(x, y)$ o fator de integração de (3.1.1) correspondente a integral primeira H (Proposição 3.1.3).

O teorema a seguir exibe a forma padrão de (3.1.2), que descreve a dependência entre a raiz quadrada da energia do sistema, $R = \sqrt{h}$, e o ângulo φ das coordenadas polares. Além disso, o campo vetorial obtido será 2π -periódico, e suas soluções 2π -periódicas corresponderão às órbitas periódicas do sistema (3.1.2).

Teorema 3.1.4. Assuma que o sistema (3.1.1) satisfaz a hipótese do anel periódico, e que $xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$ para todo (x, y) pertencente ao anel de órbitas periódicas Γ . Seja $\rho : (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua tal que:

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2, \quad (3.1.6)$$

para todo $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$ e para todo $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Então, a equação diferencial que descreve a dependência entre a raiz quadrada da energia, $R = \sqrt{h}$, e o ângulo φ para o sistema (3.1.2) é dada por:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py)}, \quad (3.1.7)$$

onde $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ e $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$.

Considere $\varepsilon_f > 0$ suficientemente pequeno e $D = \bigcup_{h_c^* < h < h_s^*} \Gamma_h$, onde $h_c < h_c^* < h_s^* < h_s$ são fixos (porém podem ser arbitrariamente próximos de h_c e h_s , respectivamente). Assim, o campo vetorial (3.1.7) está bem definido e é contínuo em $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$, e além disso é 2π -periódico com respeito a φ .

Demonstração. Suponha que H é integral primeira diferenciável. Como μ é um fator de integração de (3.1.1) correspondente à H , temos satisfeitas as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y} = -\mu P, \\ \frac{\partial H}{\partial x} = \mu Q, \end{cases} \quad (3.1.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}P + \frac{\partial H}{\partial y}Q = 0, \quad (3.1.9)$$

que são válidas no anel periódico Γ .

Defina agora:

$$G(r, R, \varphi) = H(r \cos \varphi, r \operatorname{sen} \varphi) - R^2, \quad (3.1.10)$$

onde $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$, e $(r, \varphi) \in V = f^{-1}(\Gamma)$, com $f : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ dada por $f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \operatorname{sen} \phi)$.

Observe que f é contínua e bijetiva, e Γ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2 - 0$, logo V é um conjunto aberto de $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$.

Agora, observe que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial r}(r, R, \varphi) &= \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \cos \varphi + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \operatorname{sen} \varphi \\ &= \mu(x, y)(Q(x, y) \cos \varphi - P(x, y) \operatorname{sen} \varphi), \end{aligned}$$

onde $x = r \cos \varphi$ e $y = r \operatorname{sen} \varphi$.

Para cada $(r_0, \varphi_0) \in V$, existe um R_0 , de modo que:

$$G(r_0, R_0, \varphi_0) = 0,$$

além disso, temos que $xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \Gamma$, logo:

$$\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, R_0, \varphi_0) = \frac{\mu(x_0, y_0)}{r_0}(Q(x_0, y_0)x_0 - P(x_0, y_0)y_0) \neq 0, \quad (3.1.11)$$

onde $x_0 = r_0 \cos \varphi_0$ e $y_0 = r_0 \operatorname{sen} \varphi_0$.

Note que, a expressão (3.1.11) é garantida pelo fato de que o fator integrante não se anula em Γ , pois se isso ocorresse, teríamos um ponto crítico de H em Γ , o que não é possível.

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, em torno de qualquer ponto (R_0, φ_0) , existe uma única função diferenciável $\rho = \rho(R, \varphi)$ tal que $G(\rho(R, \varphi), R, \varphi) = 0$, ou equivalentemente:

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \operatorname{sen} \varphi) = R^2. \quad (3.1.12)$$

Dessa forma, ρ está bem definida em $(\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi)$, e além disso é diferenciável. Com isso, mostramos a existência da função ρ das hipóteses do teorema no caso em que H é diferenciável.

Da equação (3.1.6), temos que a dependência entre a raiz quadrada da energia e o tempo é dada através da relação:

$$R(t) = \sqrt{H(x(t), y(t))}, \quad (3.1.13)$$

onde $(x(t), y(t)) \in \Gamma$ e $t \in \mathbb{R}$, enquanto, as relações $x = \rho \cos \varphi$ e $y = \rho \sin \varphi$, nos fornecem a dependência entre o ângulo φ e o tempo:

$$\varphi(t) = \arctan \left(\frac{x(t)}{y(t)} \right). \quad (3.1.14)$$

Logo, considerando a mudança:

$$\begin{cases} x(R, \varphi) = \rho(R, \varphi) \cos \varphi, \\ y(R, \varphi) = \rho(R, \varphi) \sin \varphi, \end{cases} \quad (3.1.15)$$

podemos escrever o sistema (3.1.2) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{(H(x, y))^{-\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{d}{dt} H(x, y) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{H}} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} \right) \\ &= \frac{\mu Q(P + \varepsilon p) - \mu P(Q + \varepsilon q)}{2R} \\ &= \varepsilon \frac{\mu(Qp - Pq)}{2R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} \\ &= \frac{(Q + \varepsilon q)x - (P + \varepsilon p)y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(Qx - yP) + \varepsilon(qx - py)}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

eliminando o tempo das equações acima, obtemos a equação (3.1.7):

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py)},$$

onde $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ e $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$.

Observe que, como $xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \Gamma$, temos que o campo vetorial acima está bem definido em $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$, para ε_f suficientemente pequeno. Como as coordenadas x e y são periódicas em φ (pela definição de Γ e por satisfazerem (3.1.6)), é fácil ver que o campo (3.1.7) é 2π -periódico em φ , e além disso, é contínuo pois é quociente de funções contínuas. \square

Observação 3.1.5. Note que a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x(R, \varphi) = \rho(R, \varphi) \cos \varphi, \\ y(R, \varphi) = \rho(R, \varphi) \operatorname{sen} \varphi, \end{cases}$$

introduzidas no Teorema 3.1.4, pode ser vista como uma mudança de coordenadas polares em que o raio varia de acordo com a distância R e o ângulo φ .

Mais ainda, se R é fixo, então tais coordenadas parametrizam a órbita fechada $H = R^2$ do sistema (3.1.1).

Com isso, obtemos como corolário deste resultado o seguinte teorema:

Teorema 3.1.6. Na notação do teorema 3.1.4, a função promediada F^1 do método do *averaging* (veja (2.3.2)) para a equação diferencial (3.1.7) é dada por:

$$F^1(R) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} d\varphi, \quad (3.1.16)$$

onde $\mu = \mu(x, y)$ é o fator integrante do sistema (3.1.1) correspondente à integral primeira H , $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ e $y = \rho(R, \varphi) \operatorname{sen} \varphi$.

Demonstração. Para obter o resultado, basta desenvolver a série de Taylor na origem em ε de ordem 1 para a expressão de (3.1.7), e obter que:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

□

Observação 3.1.7. A função F^1 do teorema acima corresponde a **Função de Melnikov de primeira ordem** do sistema (3.1.2), cuja definição pode ser conferida em [3], porém o seu estudo foge dos objetivos deste trabalho. Contudo, utilizaremos tal nomenclatura para nos referirmos à função promediada.

Observe que, como órbitas periódicas são invariantes por mudanças de coordenadas, temos que os resultados obtidos para o sistema (3.1.7) podem ser transladados para o sistema (3.1.2).

Assim, encontramos uma função F^1 , dependente apenas de informações que podem ser obtidas de (3.1.2), que identifica quais órbitas periódicas bifurcam do sistema (3.1.1) a partir de determinada perturbação de primeira ordem.

Observação 3.1.8. Note que construímos a função promediada dentro de um anel periódico, e através das hipóteses sobre o seu domínio, excluimos qualquer possibilidade de que uma raiz da função promediada corresponda a uma singularidade do sistema.

Concluimos essa sessão com um exemplo desta aplicação para um caso particular do oscilador de Van der Pol, discutido no Exemplo 2.1.8.

Exemplo 3.1.9. Considere a seguinte forma da equação de Van der Pol:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (3.1.17)$$

Fazendo $y = \dot{x}$, podemos transformar (3.1.17) no seguinte sistema planar:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - x^2)y \end{pmatrix}, \quad (3.1.18)$$

Neste caso, temos que $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = -x$, $p(x, y) = 0$ e $q(x, y) = (1 - x^2)y$. Além disso $H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ é uma integral primeira para o sistema não perturbado, e o fator integrante associado à H é $\mu(x, y) = -1$.

Observe que para este sistema $h_c = 0$, $h_s = \infty$ e $\Gamma = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Logo temos todas as hipóteses do Teorema 3.1.4 satisfeitas, e resta apenas encontrar a função $\rho(R, \varphi)$, de forma que:

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2,$$

equivalentemente,

$$\frac{\rho(R, \varphi)^2}{2} = R^2,$$

e portanto, basta tomar $\rho(R, \varphi) = \sqrt{2}R$.

Com isso, temos todos os elementos para escrever a função de Melnikov de primeira ordem para (3.1.17):

$$\begin{aligned} F^1(R) &= \int_0^{2\pi} \frac{8R^6 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 4R^4 \sin^2 \varphi}{4R^3} d\varphi \\ &= 2R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - R \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= 2R^3 \frac{\pi}{4} - R\pi \\ &= \frac{\pi}{2} R(R^2 - 2). \end{aligned}$$

Como $R \in (0, \infty)$, temos que o único zero de interesse da função acima é $R_0 = \sqrt{2}$. Observe agora que R_0 é um zero simples de F^1 pois:

$$\frac{dF^1}{dR}(R_0) = \frac{3\pi R_0^2}{2} - \pi = 2\pi \neq 0.$$

Assim, pelo método do *averaging* de primeira ordem, temos que a solução periódica correspondente ao nível de energia $R_0 = \sqrt{2}$, quando $\varepsilon = 0$, bifurca em um ciclo limite de (3.1.18) para $\varepsilon \neq 0$.

Observe que o nível R_0 corresponde a solução $z(t) = 2\sin(t - \phi_0)$ do sistema não perturbado, quando utilizadas as coordenadas amplitude-fase. Deste modo, provamos a afirmação feita no Exemplo 2.1.8, onde foi dito que a solução $x(t) = 2\sin(t - \phi_0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ é periódica.

3.2 Panorama Geral

Atualmente, o número de ciclos limite em sistemas que são perturbações de um centro linear não-degenerado têm sido um assunto frequentemente discutido em diversos trabalhos (como pode ser visto em [7, 43, 57], e o método do *averaging* tem se mostrado como uma das principais técnicas para atacar esse tipo de problema.

A existência de ciclos limite em perturbações de centros não-lineares é um tópico de pesquisa de grande interesse, e as principais ferramentas utilizadas são as integrais Abelianas [15], as funções de Melnikov [26] e o método do *averaging* [69].

Em [7], foi demonstrado que, se considerarmos o caso particular em que $\delta = 1$ em (3.3.1), uma perturbação quadrática, e determinados p, q , então no máximo 2 ciclos limite bifurcam deste centro, e o mesmo resultado foi provado em [8]. Este exemplo nos serviu de motivação para a generalização deste caso a ser apresentada nesta dissertação. Em [25, 39], os autores realizaram uma abordagem numérica (computacional) para este problema, utilizando perturbações limitadas a um determinado grau.

Além disso, o interesse em contar o número de ciclos limite de um sistema é originado do **16º Problema de Hilbert** [34].

Em geral, trabalhar com perturbações arbitrárias de centros não-lineares é uma tarefa muito complicada, e assim é comum a obtenção de resultados para casos particulares. Em [39], os autores consideram perturbações específicas até determinado grau, e em [59], os autores consideram uma família específica de perturbações polinomiais sem restrições no grau. Em [36], Llibre e Giné estudaram o número de ciclos limite em sistemas cúbicos em uma forma particular.

A obtenção de resultados, através do método do *averaging*, só pode ser realizada se as expressões do sistema diferencial são conhecidas, e deste modo, consideraremos p, q específicos para este trabalho. Contudo, ao longo do capítulo, enunciaremos um resultado de classificação de centros isócronos quadráticos e cúbicos, devido à Loud [57] e à Pleshkan [66], que justifica as escolhas a serem feitas.

3.3 Ciclos Limite Bifurcantes de Perturbações de Centros Quadráticos Isócronos Planares

Nesta sessão, estudamos a seguinte família a 2-parâmetros de equações diferenciais polinomiais:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + \delta p(x, y) + \varepsilon P_n(x, y), \\ \dot{y} &= x + \delta q(x, y) + \varepsilon Q_n(x, y), \end{cases} \quad (3.3.1)$$

onde p e q são polinômios homogêneos quadráticos, P_n, Q_n são polinômios de grau n , o parâmetro $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, e $\delta \in \mathbb{R}$. Além disso, vamos supor que a origem é um centro isócrono, isto é, existe um anel de órbitas periódicas que parte da origem em que todas as órbitas periódicas possuem o mesmo período.

Nosso principal objetivo é estudar o número de ciclos limite que bifurcam dos centros, linear e não-linear, de (3.3.1), através de perturbações polinomiais.

3.3.1 Classificação dos Centros Quadráticos Isócronos Planares

Apresentaremos a seguir o teorema que classifica os centros isócronos quadráticos planares, e algumas informações sobre os sistemas gerados por tal classificação, que nos serão de grande utilidade para o desenvolvimento dos próximos resultados.

Nosso objetivo central é mostrar como podemos aplicar o método do *averaging* de primeira ordem para obter ciclos limite bifurcantes de um sistema. Assim, não exibiremos a demonstração de tal classificação neste trabalho, já que esta nos servirá apenas como uma justificativa da importância dos sistemas a serem estudados.

Teorema 3.3.1 (Classificação de Centros Isócronos Quadráticos). Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2, \\ \dot{y} = x + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

onde os coeficientes $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = 0, 1, 2$.

Então, a origem do sistema (3.3.2) é um centro isócrono se, e só se, o sistema (3.3.2) pode ser escrito como um dos sistemas abaixo, através de uma mudança de coordenadas linear e de um reescalonamento do tempo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 - y^2, \\ \dot{y} = x(1 + 2y), \end{cases} \quad (S1) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -y - \frac{4}{3}x^2, \\ \dot{y} = x\left(1 - \frac{16}{3}y\right), \end{cases} \quad (S3)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2, \\ \dot{y} = x(1 + y), \end{cases} \quad (S2) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -y + \frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3}y^2, \\ \dot{y} = x\left(1 + \frac{8}{3}y\right). \end{cases} \quad (S4)$$

A demonstração do resultado acima foi feita por W. S. Loud, em 1964, e pode ser encontrada em [10] e [57].

Listaremos abaixo, algumas propriedades dos sistemas (S1)-(S4):

- **Sistema** (S1): O sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 - y^2, \\ \dot{y} = x(1 + 2y), \end{cases}$$

em coordenadas polares, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{r} = r^2 \cos(\theta), \\ \dot{\theta} = 1 + r \sin(\theta). \end{cases}$$

Uma integral primeira para este sistema é:

$$H_1(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + 2y}, \quad (3.3.3)$$

e seu fator de integração correspondente é dado por:

$$\mu_1(x, y) = \frac{2}{(1 + 2y)^2}. \quad (3.3.4)$$

A primeira afirmação pode ser facilmente verificada utilizando a mudança de coordenadas $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$.

Para verificar que H_1 é integral primeira de (S1), basta observar que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial x} \cdot (-y + x^2 - y^2) + \frac{\partial H_1}{\partial y} \cdot x(1 + 2y) &= \frac{-2xy + 2x^3 - 2xy^2}{1 + 2y} + \frac{2xy + 2xy^2 - 2x^3}{(1 + 2y)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial y}(x, y) &= -\frac{2(x^2 - y^2 - y)}{(1 + 2y)^2} = -\mu_1(x, y) \cdot (-y + x^2 - y^2), \\ \frac{\partial H_1}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x}{1 + 2y} = \mu_1(x, y) \cdot x(1 + 2y). \end{aligned}$$

Logo, μ_1 é fator integrante correspondente à H_1 .

- **Sistema** (S2): O sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2, \\ \dot{y} = x(1 + y), \end{cases}$$

em coordenadas polares, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{r} = r^2 \cos(\theta), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Uma integral primeira para este sistema é:

$$H_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + y)^2}, \quad (3.3.5)$$

e seu fator de integração correspondente é dado por:

$$\mu_2(x, y) = \frac{2}{(1+y)^3}. \quad (3.3.6)$$

Novamente, para verificar que H é integral primeira de (S2), note que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial x} \cdot (-y + x^2) + \frac{\partial H_2}{\partial y} \cdot x(1+y) &= \frac{-2xy + 2x^3}{(1+y)^2} - \frac{2x^3 - 2xy}{(1+y)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial y}(x, y) &= -\frac{2(x^2 - y)}{(1+y)^3} = -\mu_2(x, y) \cdot (-y + x^2), \\ \frac{\partial H_2}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x}{(1+y)^2} = \mu_2(x, y) \cdot x(1+y). \end{aligned}$$

Logo, μ_2 é fator de integração correspondente à H_2 .

- **Sistema** (S3): O sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \frac{4}{3}x^2, \\ \dot{y} = x(1 - \frac{16}{3}y), \end{cases}$$

em coordenadas polares, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{r} = r^2 \left(\cos(3\theta) - \frac{7}{3} \cos(\theta) \right), \\ \dot{\theta} = 1 + r \left(-\text{sen}(3\theta) - \text{sen}(\theta) \right). \end{cases}$$

Uma integral primeira para este sistema é:

$$H_3(x, y) = \frac{9(x^2 + y^2) - 24x^2y + 16x^4}{-3 + 16y}, \quad (3.3.7)$$

e seu fator de integração correspondente é dado por:

$$\mu_3(x, y) = -\frac{6(32x^2 - 24y + 9)}{(-3 + 16y)^2}. \quad (3.3.8)$$

A verificação destas afirmações é feita do mesma forma que nos casos anteriores.

- **Sistema** (S4): O sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \frac{16}{3}x^2 - \frac{4}{3}y^2, \\ \dot{y} = x\left(1 + \frac{8}{3}y\right), \end{cases}$$

em coordenadas polares, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{r} = r^2 \left(\cos(3\theta) + \frac{13}{3} \cos(\theta) \right), \\ \dot{\theta} = 1 + r \left(-\text{sen}(3\theta) + \frac{1}{3} \text{sen}(\theta) \right). \end{cases}$$

Uma integral primeira para este sistema é:

$$H_4(x, y) = \frac{9(x^2 + y^2) + 24y^3 + 16y^4}{(3 + 8y)^4}, \quad (3.3.9)$$

e seu fator de integração correspondente é dado por:

$$\mu_4(x, y) = \frac{54}{(3 + 8y)^5}. \quad (3.3.10)$$

A verificação destas afirmações é feita do mesma forma que nos casos anteriores.

Observação 3.3.2. Neste trabalho, consideraremos perturbações dos sistemas (S1) e (S2), das seguintes formas, com $\delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta(x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x(1 + 2\delta y). \end{cases} \quad (\text{S1-}\delta) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x^2, \\ \dot{y} = x(1 + \delta y). \end{cases} \quad (\text{S2-}\delta)$$

Observe que, quando $\delta = 1$, (S1- δ) e (S2- δ) são os sistemas (S1) e (S2), respectivamente.

Os sistemas (S1- δ) e (S2- δ) também são integráveis para $\delta \in \mathbb{R}$. Neste caso, H_δ^1 e H_δ^2 , dadas por:

$$H_\delta^1(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + 2\delta y}, \quad (3.3.11)$$

$$H_\delta^2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + \delta y)^2}, \quad (3.3.12)$$

são integrais primeiras de (S1- δ) e (S2- δ), e seus fatores de integração correspondentes são dados por:

$$\mu_\delta^1(x, y) = \frac{2}{(1 + 2\delta y)^2}, \quad (3.3.13)$$

$$\mu_\delta^2(x, y) = \frac{2}{(1 + \delta y)^3}, \quad (3.3.14)$$

respectivamente.

A verificação de tais fatos é feita do mesmo modo que nos casos (S1) e (S2). Além disso, (S1- δ) e (S2- δ) também são centros isócronos para $\delta \in \mathbb{R}$.

De fato, na demonstração dos resultados da sessão 3.3.2 calcularemos parametrizações para as órbitas destes centros e elas são da forma (considerando R fixado e φ variando entre 0 e 2π):

$$\begin{aligned} x &= \rho(R, \varphi, \delta) \cos(\varphi), \\ y &= \rho(R, \varphi, \delta) \text{sen}(\varphi), \end{aligned}$$

onde $\rho(R, \varphi, \delta)$ é uma função dada em termos de $\text{sen}(\varphi)$ e $\cos(\varphi)$, e portanto são 2π -periódicas.

O resultado a ser apresentado na próxima sessão é sobre o número de ciclos limite que bifurcam dos centros isócronos (S1- δ) e (S2- δ), quando perturbados por polinômios de grau fixado n .

Como ciclos limite são invariantes por mudança de coordenadas e reescalonamento do tempo, utilizando os resultados apresentados acima, podemos inferir o número de ciclos que bifurcam de duas classes (representadas por (S1) e (S2)) de centros isócronos quadráticos, e assim está justificada a escolha das famílias (S1- δ) e (S2- δ).

Infelizmente, os sistemas (S3) e (S4) possuem integrais primeiras bem mais complicadas do que as de (S1) e (S2). Assim, os cálculos que serão feitos a seguir não podem ser reproduzidos para estes sistemas, o que inviabiliza a aplicação deste método para esses casos, e por este motivo foram escolhidas as classes representadas por (S1) e (S2).

Observe ainda que, como a mudança de coordenadas é linear, podemos levar uma perturbação polinomial de primeira ordem de um centro quadrático isócrono em uma das formas normais perturbadas por polinômios de mesmo grau (apesar de apresentarem outros coeficientes). E assim, podemos inferir informações do caso geral através do estudo das formas normais.

3.3.2 Resultado Principal

Enunciamos a seguir o resultado que obtivemos com o estudo desses sistemas:

Teorema 3.3.3. São válidas as seguintes afirmações:

1. Considere a seguinte perturbação polinomial de grau n do sistema (S1- δ):

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta(x^2 - y^2) + \varepsilon P_n(x, y), \\ \dot{y} = x(1 + 2\delta y) + \varepsilon Q_n(x, y), \end{cases} \quad (\text{S1p})$$

onde $\delta \neq 0$, $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno e P_n, Q_n são polinômios de grau n .

Então, o número máximo de ciclos limite que bifurcam do sistema não linear (S1p) é dado pela Tabela 3.1, além disso tal cota superior é atingida.

2. Considere a seguinte perturbação polinomial de grau n do sistema (S2- δ):

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x^2 + \varepsilon P_n(x, y), \\ \dot{y} = x(1 + \delta y) + \varepsilon Q_n(x, y), \end{cases} \quad (\text{S2p})$$

onde $\delta \neq 0$, $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno e P_n, Q_n são polinômios de grau n .

Então, o número máximo de ciclos limite que bifurcam do sistema não linear (S2p) é dado pela Tabela 3.2, além disso tal cota superior é atingida.

3. Considere a seguinte perturbação polinomial de grau n do centro linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_n(x, y), \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q_n(x, y), \end{cases} \quad (3.3.15)$$

onde $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno e P_n, Q_n são polinômios de grau n .

Então, o número máximo de ciclos limite que bifurcam do centro linear é $\frac{n-1}{2}$ se n é ímpar e $\frac{n-2}{2}$ se n é par.

<i>Grau de Perturbação</i>	<i>Número Máximo de Ciclos Limite Bifurcantes</i>
1	1
2	1
3	1
4	2
5	3
6	4
7	5

Tabela 3.1: Número máximo de ciclos limite bifurcantes de perturbações polinomiais de grau fixado do sistema (S1p).

<i>Grau de Perturbação</i>	<i>Número Máximo de Ciclos Limite Bifurcantes</i>
1	0
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

Tabela 3.2: Número máximo de ciclos limite bifurcantes de perturbações polinomiais de grau fixado do sistema (S2p).

Fundamentados pelos dados das Tabelas 3.1 e 3.2, apresentamos as seguintes conjecturas:

Conjectura 3.3.4. Considere o sistema (S1p) com $\delta \neq 0$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e P_n, Q_n polinômios de grau n . Então o número máximo de ciclos limite que bifurcam do centro não-linear (S1p) é $n - 2$, se $n \geq 3$.

Conjectura 3.3.5. Considere o sistema (S2p) com $\delta \neq 0$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e P_n, Q_n polinômios de grau n . Então o número máximo de ciclos limite que bifurcam do centro não-linear (S2p) é n , se $n \geq 2$.

Observamos que o caso 3 do teorema 3.3.3 ($\delta = 0$) é discutido em [41], assim como em suas referências, e o caso $\delta = 1$ com P_n, Q_n polinômios quadráticos foi estudado em [45].

Observação 3.3.6. Observamos que o número máximo de ciclos limite bifurcantes presente nos teoremas acima corresponde ao número máximo de ciclos limite que são detectados pelo método do *averaging* de primeira ordem. Assim, o número máximo de ciclos limite bifurcantes dos centros isócronos discutidos pode ser maior.

O método do *averaging* de primeira ordem detecta apenas os ciclos limite que são denominados *ciclos limite de média amplitude*, e correspondem aos ciclos que não estão infinitesimalmente próximos do ponto singular e que também não são ciclos no infinito. Por este motivo, a cota acima não engloba todos os ciclos do sistema.

Além disso, se aplicarmos o método do *averaging* de ordem superior, podemos ter um número maior de ciclos, pois neste caso, a função promediada pode apresentar um número maior de zeros, devido ao maior grau de precisão.

Contudo, os sistemas tratados nesta dissertação apresentam um alto grau de complexidade em sua natureza, e com isso, torna-se muito difícil inferir informações através de uma ordem superior de *averaging* e por este motivo nos limitamos a estudar os ciclos provenientes do *averaging* de primeira ordem.

Resumimos os resultados descritos no Teorema acima na seguinte Tabela:

<i>Grau de Perturbação</i>	<i>Cota Superior (S1p)</i>	<i>Cota Superior (S2p)</i>
1	1	0
2	1	2
3	1	3
4	2	4
5	3	5
6	4	6
7	5	—

Tabela 3.3: Número máximo de ciclos limite bifurcantes de perturbações polinomiais de grau fixado dos sistemas (S1p) e (S2p).

3.3.3 Demonstração do Teorema 3.3.3

Considere as seguintes famílias a 2-parâmetros:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta(x^2 - y^2) + \varepsilon P_n(x, y), \\ \dot{y} = x(1 + 2\delta y) + \varepsilon Q_n(x, y), \end{cases} \quad (\text{S1p})$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x^2 + \varepsilon P_n(x, y), \\ \dot{y} = x(1 + \delta y) + \varepsilon Q_n(x, y), \end{cases} \quad (\text{S2p})$$

onde P_n, Q_n são polinômios de grau n , $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno e $\delta \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema 3.1.6, para estudar o número de ciclos limite dos sistemas considerados, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, basta estudar os zeros isolados da seguinte função de Melnikov de primeira ordem:

$$F(R) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} d\varphi, \quad (3.3.16)$$

onde $\mu = \mu(x, y)$ é o fator integrante correspondente à integral primeira H do sistema em questão, $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ e $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$, e $\rho(R, \varphi)$ é uma função contínua que satisfaz a equação $H(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = R^2$.

Dividiremos a prova nos seguintes casos:

Centro Linear ($\delta = 0$)

Neste caso, considere $\delta = 0$, $P_n(x, y) = \sum_{i+j=1}^n a_{i,j}x^i y^j$, $Q_n(x, y) = \sum_{i+j=1}^n b_{i,j}x^i y^j$ e observe que:

- $H(x, y) = x^2 + y^2$ é uma integral primeira para o sistema, em que $h_c = 0$ e $h_s = \infty$.
- $x^2 + y^2 \neq 0$ no anel de períodos Γ .
- Neste caso, a função ρ do Teorema 3.1.4 é dada por $\rho(R, \varphi) = R$.
- O fator de integração correspondente à integral primeira H é dado por $\mu(x, y) = 2$.

Logo, estamos nas hipóteses do Teorema 3.1.4, e podemos utilizar o Teorema 3.1.6 para calcular a função de Melnikov de primeira ordem do sistema, com $x = R \cos(\varphi)$, $y = R \sin(\varphi)$, $P = -y$, $Q = x$:

$$\begin{aligned}
 F^{[n]}(R) &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(QP_n - PQ_n)}{2R(Qx - Py)} d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{2R^2(R \cos(\varphi)P_n + R \sin(\varphi)Q_n)}{2R^3} d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\cos(\varphi) P_n(x, y) + Q_n(x, y) \sin(\varphi) \right] d\varphi \quad (3.3.17) \\
 &= \sum_{k=1}^n R^k \sum_{i+j=k} a_{i,j} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\varphi) \sin^j(\varphi) d\varphi \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n R^k \sum_{i+j=k} b_{i,j} \int_0^{2\pi} \cos^i(\varphi) \sin^{j+1}(\varphi) d\varphi.
 \end{aligned}$$

Note que, se k é par entre 0 e n , então as integrais na expressão $F^{[n]}(R)$ correspondentes a este k são nulas.

De fato, se $i + j = k$ e k é par, então, i e j são ambos pares ou ímpares. Logo $i + 1$ e j não podem ser pares ou ímpares simultaneamente, e neste caso, podemos fazer a mudança de coordenada $\tau = \sin(\varphi)$, se $i + 1$ é ímpar, ou $\tau = \cos(\varphi)$, se $i + 1$ é par, e concluir que:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\varphi) \sin^j(\varphi) d\varphi = 0.$$

Similarmente, concluimos que, se $i + j = k$ e k é par, então:

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\varphi) \sin^{j+1}(\varphi) d\varphi = 0.$$

Portanto, $F^{[n]}(R)$ é um polinômio ímpar, com grau n , se n é ímpar, e grau $n - 1$ quando n é par.

Em particular, podemos escrever $F^{[n]}(R)$ como:

- $F^{[n]}(R) = R(\alpha_0 + \alpha_2 R^2 + \dots + \alpha_{n-1} R^{n-1})$ se n é ímpar.

- $F^{[n]}(R) = R(\alpha_0 + \alpha_2 R^2 + \dots + \alpha_{n-1} R^{n-2})$ se n é par.

Como $h_c = 0$ e $h_s = \infty$, para aplicar o método do *averaging*, estamos interessados nos zeros simples de $F^{[n]}$ que estão no intervalo $(0, \infty)$ (que é onde a equação diferencial em R está definida).

Assim, o número de soluções positivas de $F^{[n]}(R) = 0$ é no máximo $\frac{n-1}{2}$, se n é par, e $\frac{n-2}{2}$ quando n é ímpar. Além disso, quando existem, todas as soluções são simples, pois são raízes de polinômios.

Portanto, pelo método do *averaging*, esse é o número máximo de ciclos limite que bifurcam do centro linear considerado, quando perturbado por polinômios P_n, Q_n de grau n . Assim, concluímos a prova do primeiro item do Teorema 3.3.3.

Centro Quadrático S1- δ ($\delta \neq 0$)

Agora vamos considerar o sistema (S1p) com $\delta \neq 0$, $P_n(x, y) = \sum_{i+j=1}^n a_{i,j} x^i y^j$ e $Q_n(x, y) = \sum_{i+j=1}^n b_{i,j} x^i y^j$. Observe que, se $\varepsilon = 0$, então o sistema é integrável para todo $\delta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- $H_\delta^1(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + 2\delta y}$ é uma integral primeira para o sistema em questão, em que $h_c = 0$ e identificaremos $h_s > 0$ nos próximos itens.
- A fim de aplicar o teorema 3.1.4, temos que encontrar ρ de forma que:

$$H(\rho(R, \varphi) \cos(\varphi), \rho(R, \varphi) \cos(\varphi)) = R^2.$$

Resolvendo esta equação, obtemos que:

$$\rho(R, \varphi) = \delta R \sin(\varphi) + R \sqrt{(\delta R)^2 (1 - \cos^2(\varphi)) + 1}.$$

Observe que, para a função acima estar bem definida, temos que ter $(\delta R)^2 \leq 1$, caso contrário, a expressão dentro da raiz quadrada assumiria valores negativos quando $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Desta forma, obtemos que o domínio de R é $(-1/|\delta|, 1/|\delta|)$, e portanto, obtemos que $h_s = 1/\delta^2$, já que todas as órbitas são periódicas de acordo com a parametrização encontrada para as curvas de nível nessa região (já que ρ é φ -periódica).

Além disso, como $h_c = 0$, segue que o domínio de R neste caso é $(0, 1/|\delta|)$.

- O fator de integração correspondente à integral primeira H_δ^1 é dado por $\mu_\delta^1(x, y) = \frac{2}{(1 + 2\delta y)^2}$.
- Note que neste caso, não necessitamos mostrar explicitamente que $xQ - yP \neq 0$ em Γ , já que tal hipótese é utilizada para garantir a existência de ρ que já foi encontrada, e a boa definição da função de Melnikov, porém mostraremos adiante, através dos cálculos, que tal função é bem definida.

Com as informações acima, podemos calcular a função de Melnikov $F^{[n]}(R)$ do sistema, através do Teorema 3.1.6, contudo, não foi possível computar tal função, sem especificar o grau de perturbação, e assim, particularizamos o grau dos polinômios P_n, Q_n para n entre 1 e 7.

Como observado acima, o anel de períodos ocorre quando $R \in \left(0, \frac{1}{|\delta|}\right)$, então vamos procurar os zeros da função de Melnikov neste domínio.

Para simplificar as expressões encontradas, introduzimos uma nova variável Z , dada por:

$$R = \frac{\sqrt{1 - Z^2}}{\delta}.$$

Observe que $R \in \left(0, \frac{1}{\delta}\right)$ é um zero da função de Melnikov em R se, e somente se, $Z \in (0, 1)$ é um zero da função de Melnikov em Z .

Considere n entre 1 e 7, com a ajuda do software de manipulação algébrica Maple, podemos obter expressões para as funções de Melnikov $F_1^{[n]}$ na variável Z , para $n = 1, \dots, 7$, que podem ser conferidas no Apêndice A.

Observamos que, as funções $F_1^{[n]}$ estão na forma $F_1^{[n]}(Z) = \rho_1^n(Z)f_1^{[n]}(Z)$, onde ρ_1^n é uma função de classe C^∞ que não se anula em $(0, 1)$ e $f_1^{[n]}(Z)$ é um polinômio em Z para $1 \leq n \leq 7$, formado apenas por potências pares de Z . Os graus de $f_1^{[n]}(Z)$ podem ser conferidos na seguinte tabela:

<i>Valor de n</i>	<i>Grau de $f_1^{[n]}$</i>
1	2
2	2
3	2
4	4
5	6
6	8
7	10

Tabela 3.4: Grau da parte polinomial da função de Melnikov $F_1^{[n]}(Z)$ de acordo com o valor de n .

Ressaltamos que $f_1^{[n]}(Z)$ são funções pares, e portanto, o número de raízes positivas de $f_1^{[n]}(Z)$ é no máximo metade de seu grau.

Para concluir a demonstração, apresentaremos um exemplo para cada grau estudado que mostra que o número máximo de ciclos limite pode ser atingido.

Considere:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta(x^2 - y^2) + \varepsilon P_n(x, y), \\ \dot{y} = x(1 + 2\delta y) + \varepsilon Q_n(x, y), \end{cases} \quad (3.3.18)$$

onde P_n, Q_n , $n = 1, \dots, 7$, são os seguintes polinômios:

- **Grau 1:**

$$P_1(x, y) = -\frac{2\delta^2 + 3}{2\delta^2}x,$$

$$Q_1(x, y) = y.$$

Neste caso:

$$f_1^{[1]}(Z) = 2Z^2 - \frac{1}{2},$$

possui apenas um zero em $(0, 1)$, logo, apenas um ciclo limite bifurca do centro.

- **Grau 2:**

$$P_2(x, y) = x,$$

$$Q_2(x, y) = x^2 + \left(\frac{4}{3}\delta^3 - 1\right)y^2.$$

Então:

$$f_1^{[2]}(Z) = \delta^3 \left(-\frac{4}{3}Z^2 + \frac{1}{3} \right),$$

possui apenas um zero em $(0, 1)$, e assim, apenas um ciclo limite bifurca do centro.

- **Grau 3:**

$$P_3(x, y) = x + x^3 + \left(-\frac{16}{3}\delta^4 - 6 \right)xy^2,$$

$$Q_3(x, y) = y^3.$$

Assim:

$$f_1^{[3]}(Z) = \delta^4 \left(-\frac{16}{3}Z^2 + \frac{4}{3} \right),$$

possui apenas um zero em $(0, 1)$, e novamente, apenas um ciclo limite bifurca do centro.

- **Grau 4:**

$$P_4(x, y) = x + \left(-\frac{59}{3}\delta^4 - 8\delta^2 \right)xy^2 + \left(-\frac{128}{9}\delta^7 - \frac{32}{3}\delta^5 - \frac{4}{3} \left(-\frac{59}{3}\delta^4 - 8\delta^2 \right) \right)xy^3,$$

$$Q_4(x, y) = x^4 + y^4 + y.$$

Com isso:

$$f_1^{[4]}(Z) = \delta^7 \left(12Z^4 - \frac{13}{3}Z^2 + \frac{1}{3} \right),$$

possui dois zeros em $(0, 1)$, e portanto, dois ciclos limite bifurcam do sistema.

- **Grau 5:**

$$P_5(x, y) = x^5 - \frac{2880\delta^2 + 7420}{576\delta}xy^3 + \frac{705}{64\delta^6}xy^2 - \frac{25}{32\delta^{10}}x,$$

$$Q_5(x, y) = y^5.$$

Assim:

$$f_1^{[5]}(Z) = 20Z^6 - \frac{305}{36}Z^4 + \frac{145}{144}Z^2 - \frac{5}{144},$$

possui dois zeros em $(0, 1)$, e neste caso, dois ciclos limite bifurcam do sistema.

- **Grau 6:**

$$\begin{aligned} P_6(x, y) &= xy^5 - \frac{108000\delta^2 + 456085}{18000\delta^3}xy^4 \\ &- \frac{1}{640000\delta^6} \left(-\frac{82271000}{3} - \frac{160}{9}\delta^2(108000\delta^2 + 456085) \right)xy^3 \\ &- \frac{26285}{1024\delta^9}xy^2 + \frac{735}{512\delta^{13}}x, \end{aligned}$$

$$Q_6(x, y) = y^6.$$

Com essa perturbação, temos que:

$$f_1^{[6]}(Z) = 35Z^8 - \frac{9583}{720}Z^6 + \frac{637}{480}Z^4 - \frac{63}{1280}Z^2 + \frac{7}{11520},$$

possui quatro zeros em $(0, 1)$, e portanto temos quatro ciclos limite bifurcantes do centro não-linear.

- **Grau 7:**

$$\begin{aligned} P_7(x, y) &= x^7 - \frac{504000\delta^2 + 1817872}{50400\delta^3}xy^5 \\ &- \frac{1}{69120\delta^6} \left(-\frac{471140992}{75} - \frac{48}{35}\delta^2(504000\delta^2 + 1817872) + 241920\delta^4 \right)xy^4 \\ &- \frac{1}{238878720\delta^9} \left(-\frac{60921116928}{25} - \frac{864}{5}\delta^2 \left(-\frac{471140992}{75} \right. \right. \\ &\left. \left. + (504000\delta^2 + 1817872)\delta^2 + 241920\delta^4 \right) \right)xy^3 - \frac{1645}{36\delta^{12}}xy^2 + \frac{49}{24\delta^{16}}x, \end{aligned}$$

$$Q_7(x, y) = y^7.$$

Neste caso:

$$f_1^{[7]}(Z) = 224Z^{10} - \frac{24766}{225}Z^8 + \frac{7273}{405}Z^6 - \frac{6797}{5400}Z^4 + \frac{7}{180}Z^2 - \frac{7}{16200},$$

possui cinco zeros em $(0, 1)$, e com isso temos cinco ciclos limite bifurcantes do sistema.

No apêndice C, descrevemos as expressões gerais dos coeficientes da perturbação P_n, Q_n ($1 \leq n \leq 7$) que devem ser considerados para se gerar as expressões de $f_1^{[n]}$ apresentadas acima, e assim obter o número máximo de ciclos limite bifurcantes. Além disso, apresentamos detalhes de como foram produzidos tais exemplos.

Para concluir esse caso da demonstração, exibimos na tabela abaixo as relações entre o grau da perturbação, o grau da parte polinomial da função de Melnikov $F_1^{[n]}(Z)$ e o número máximo de ciclos limite bifurcantes:

<i>Valor de n</i>	<i>Grau de $f_1^{[n]}$</i>	<i>Número Máximo de Ciclos Limite Bifurcantes</i>
1	2	1
2	2	1
3	2	1
4	4	2
5	6	3
6	8	4
7	10	5

Tabela 3.5: Grau da perturbação de (S1p), grau da parte polinomial de $F_1^{[n]}(Z)$ de acordo com o valor de n e respectivo número máximo de ciclos limite bifurcantes.

Centro Quadrático S2- δ ($\delta \neq 0$)

Finalmente, considere o sistema (S2p) com $\delta \neq 0$, $P_n(x, y) = \sum_{i+j=1}^n a_{i,j}x^i y^j$ e $Q_n(x, y) = \sum_{i+j=1}^n b_{i,j}x^i y^j$. Como no caso anterior, se $\varepsilon = 0$ então o sistema é integrável para todo $\delta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- $H_\delta^2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + \delta y)^2}$ é uma integral primeira para o sistema a ser analisado, em que $h_c = 0$ e, como feito anteriormente, identificaremos $h_s > 0$ nos próximos itens.
- Com o intuito de aplicar o Teorema 3.1.4, devemos encontrar ρ de forma que:

$$H(\rho(R, \varphi) \cos(\varphi), \rho(R, \varphi) \cos(\varphi)) = R^2.$$

Resolvendo esta equação, obtemos o seguinte resultado:

$$\rho(R, \varphi) = \frac{R}{1 - \delta R \operatorname{sen}(\varphi)}.$$

Observe que, para a função acima estar bem definida, temos que ter $|\delta R| \neq 1$, caso contrário, o denominador se anularia quando $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Como 0 deve estar na fronteira do intervalo de definição de R , temos que o domínio de R é $(-1/|\delta|, 1/|\delta|)$. Portanto, $h_s = 1/\delta^2$, pois todas as órbitas são periódicas, de acordo com a parametrização encontrada para as curvas de nível nessa região (já que ρ é φ -periódica).

Além disso, como $h_c = 0$, segue que o domínio de R neste caso é $(0, 1/|\delta|)$.

- O fator de integração correspondente à integral primeira H_δ^2 é dado por $\mu_\delta^2(x, y) = \frac{2}{(1 + \delta y)^3}$.
- Pelas mesmas razões do caso anterior, não necessitamos mostrar explicitamente que $xQ - yP \neq 0$ em Γ .

Com as informações acima, podemos calcular a função de Melnikov $F^{[n]}(R)$ do sistema, através do Teorema 3.1.6:

$$\begin{aligned} F_2^{[n]}(R) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i+j=k} \int_0^{2\pi} \left[a_{i,j} \frac{R^k \cos^{i+1}(\psi) \operatorname{sen}^j(\psi)}{(1 - \delta R \operatorname{sen}(\psi))^k} + b_{i,j} \frac{R^k \cos^i(\psi) \operatorname{sen}^{j+1}(\psi)}{(1 - \delta R \operatorname{sen}(\psi))^k} \right. \\ &\quad - a_{i,j} \delta \frac{R^{k+1} \cos^{i+1}(\psi) \operatorname{sen}^{j+1}(\psi)}{(1 - \delta R \operatorname{sen}(\psi))^k} - 2b_{i,j} \delta \frac{R^{k+1} \cos^i(\psi) \operatorname{sen}^j(\psi)}{(1 - \delta R \operatorname{sen}(\psi))^k} \\ &\quad \left. + b_{i,j} \delta \frac{R^{k+1} \cos^{i+2}(\psi) \operatorname{sen}^j(\psi)}{(1 - \delta R \operatorname{sen}(\psi))^k} + b_{i,j} \delta^2 \frac{R^{k+2} \cos^i(\psi) \operatorname{sen}^{j+1}(\psi)}{(1 - \delta R \operatorname{sen}(\psi))^k} \right] d\psi. \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Novamente, não foi possível computar tal função sem especificar o grau de perturbação, e assim, particularizamos o grau dos polinômios P_n, Q_n para n entre 1 e 6.

Como anteriormente, o anel de períodos ocorre quando $R \in (0, \frac{1}{|\delta|})$, então vamos procurar os zeros da função de Melnikov neste domínio.

Utilizando a mesma mudança de variável mencionada no caso anterior, consideramos n entre 1 e 6, e através do software Maple, obtivemos expressões para as funções de Melnikov $F_2^{[n]}$ na variável Z , para $n = 1, \dots, 6$, que podem ser conferidas no Apêndice B.

Novamente, as funções $F_2^{[n]}$ estão na forma $F_2^{[n]}(Z) = \rho_2^n(Z) f_2^{[n]}(Z)$, onde ρ_2^k é uma função de classe C^∞ que não se anula em $(0, 1)$ e $f_2^{[n]}(Z)$ é um polinômio em Z para $1 \leq n \leq 6$. Os graus de $f_2^{[n]}(Z)$ podem ser conferidos na seguinte tabela:

<i>Valor de n</i>	<i>Grau de $f_2^{[n]}$</i>
1	1
2	2
3	3
4	5
5	7
6	9

Tabela 3.6: Grau da parte polinomial da função de Melnikov $F_2^{[n]}(Z)$ de acordo com o valor de n .

Provaremos agora que os números máximos de zeros em $(0, 1)$ das partes polinomiais de $F_2^{[4]}$, $F_2^{[5]}$ e $F_2^{[6]}$, podem ser estimados de uma maneira mais eficaz do que a estimativa dada pelo grau dos polinômios. Para isso, utilizaremos o seguinte resultado.

Dizemos que um conjunto de funções reais $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ definidos em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ é um **sistema estendido completo de Chebyshev** (sistema ECT) em I se, para cada $k = 0, 1, \dots, n$, qualquer combinação linear não trivial $a_0 f_0(Z) + a_1 f_1(Z) + \dots + a_k f_k(Z)$ possui no máximo k zeros isolados em I , contados com suas multiplicidades.

O teorema abaixo nos fornece uma caracterização para os sistemas ECT:

Teorema 3.3.7. Sejam f_0, f_1, \dots, f_n funções reais analíticas definidas em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Então, $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ é um sistema ECT em I se, e somente se, para cada $k = 0, 1, \dots, n$, e para todo $Z \in I$, o Wronskiano (de ordem k):

$$W(f_0, f_1, \dots, f_k)(Z) = \begin{vmatrix} f_0(Z) & f_1(Z) & \cdots & f_k(Z) \\ f_0'(Z) & f_1'(Z) & \cdots & f_k'(Z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(k)}(Z) & f_1^{(k)}(Z) & \cdots & f_k^{(k)}(Z) \end{vmatrix}$$

é não nulo.

O teorema acima, assim como a teoria sobre sistemas de Chebyshev, podem ser encontrados em [37].

Retornando ao nosso caso, dados a_0, a_1, \dots, a_6 números reais, podemos encontrar parâmetros de forma que:

$$f_2^{[4]} = a_0(Z + 1) + a_1 Z^2 + a_2 Z^3 + a_3 Z^4 + a_4 Z^5$$

$$f_2^{[5]} = a_0(Z+1) + a_1(Z^3 + Z^2) + a_2Z^4 + a_3Z^5 + a_4Z^6 + a_5Z^7$$

$$f_2^{[6]} = a_0(Z+1) + a_1(Z^3 + Z^2) + a_2(Z^5 + Z^4) + a_3Z^6 + a_4Z^7 + a_5Z^8 + a_6Z^9$$

Com o cálculo dos Wronskianos de qualquer ordem dos sistemas $\{Z+1, Z^2, Z^3, Z^4, Z^5\}$, $\{Z+1, Z^3+Z^2, Z^4, Z^5, Z^6, Z^7\}$ e $\{Z+1, Z^3+Z^2, Z^5+Z^4, Z^6, Z^7, Z^8, Z^9\}$, temos que eles são não nulos em $(0, 1)$. Portanto, pelo Teorema 3.3.7, eles são sistemas ECT em $(0, 1)$.

Segue que $f_2^{[4]}$, $f_2^{[5]}$ e $f_2^{[6]}$ possuem, no máximo, 4, 5 e 6 raízes em $(0, 1)$, respectivamente.

No apêndice *E*, apresentamos os cálculos que nos permitem garantir as afirmações acima.

Novamente, para concluir a demonstração, apresentaremos um exemplo para cada grau estudado que mostra que o número máximo de ciclos limite pode ser atingido neste caso.

Considere a seguinte família de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x^2 + \varepsilon P_n(x, y), \\ \dot{y} = x(1 + \delta y) + \varepsilon Q_n(x, y), \end{cases} \quad (3.3.20)$$

onde P_n, Q_n , $n = 1, \dots, 7$, são os seguintes polinômios:

- **Grau 1:** O polinômio $f_2^{[1]}(Z)$ não possui nenhuma raiz em $(0, 1)$ para qualquer tipo de perturbação, e assim, o sistema não possui nenhum ciclo limite bifurcante.

- **Grau 2:**

$$P_2(x, y) = x + 3\delta xy,$$

$$Q_2(x, y) = 3\delta x^2.$$

Então:

$$f_2^{[2]}(Z) = \delta(6Z^2 - 5Z + 1),$$

possui dois zeros em $(0, 1)$, e assim, dois ciclos limite bifurcam do centro.

- **Grau 3:**

$$P_3(x, y) = x - \frac{5\delta^2}{6}x^3 - \frac{\delta^2}{6}xy^2,$$

$$Q_3(x, y) = -4\delta^2x^2y.$$

Assim:

$$f_2^{[3]}(Z) = \delta^2\left(8Z^3 - \frac{26}{3}Z^2 + 3Z - \frac{1}{3}\right),$$

possui três zeros em $(0, 1)$, e portanto, três ciclos limite bifurcam do centro não-linear.

- **Grau 4:**

$$P_4(x, y) = x + x^3y - \frac{169\delta^2}{24}xy^2 + \left(\frac{\delta^3}{192} - 1\right)xy^3,$$

$$Q_4(x, y) = y^4 + \left(-\frac{857\delta^3}{64} + 9\right)x^2y^2 + \left(-\frac{1157\delta^3}{96} + 6\right)x^4.$$

Com isso:

$$f_2^{[4]}(Z) = \delta^3 \left(\frac{75}{8} Z^5 - \frac{365}{32} Z^4 + \frac{911}{192} Z^3 - \frac{139}{192} Z^2 + \frac{1}{192} Z + \frac{1}{192} \right),$$

possui quatro zeros em $(0, 1)$, e portanto, temos quatro ciclos limite bifurcantes do sistema.

• **Grau 5:**

$$P_5(x, y) = x - \frac{5899\delta^2}{810} xy^2 + \left(-\frac{\delta^4}{9720} - 2 \right) xy^4 + \left(-\frac{121\delta^4}{9720} - 3 \right) x^3 y^2,$$

$$Q_5(x, y) = y^5 + \frac{24899\delta^4}{2025} x^2 y^3 + \frac{70798\delta^4}{6075} x^4 y.$$

Assim:

$$f_2^{[5]}(Z) = \delta^4 \left(\frac{280}{27} Z^7 - \frac{364}{27} Z^6 + \frac{14999}{2430} Z^5 - \frac{2641}{2430} Z^4 + \frac{25}{1944} Z^3 + \frac{25}{1944} Z^2 - \frac{1}{9720} Z - \frac{1}{9720} \right),$$

possui cinco zeros em $(0, 1)$, e neste caso, cinco ciclos limite bifurcam do sistema.

• **Grau 6:**

$$P_6(x, y) = x + x^3 y^3 - \frac{59087\delta^2}{7930} xy^2 + \frac{1770229\delta^4}{71370} xy^4 + \frac{\delta^5}{713700} xy^5,$$

$$Q_6(x, y) = \left(-\frac{1160819\delta^5}{11700} - 3 \right) x^2 y^4 + \left(-\frac{17707253\delta^5}{59475} - 12 \right) x^4 y^2 + \left(-\frac{97580638\delta^5}{535275} - 8 \right) x^6.$$

Com essa perturbação, temos que:

$$f_2^{[6]}(Z) = \delta^5 \left(\frac{35280}{793} Z^9 - \frac{47880}{793} Z^8 + \frac{116329}{3965} Z^7 - \frac{22271}{3965} Z^6 + \frac{12079}{142740} (Z^5 + Z^4) \right. \\ \left. - \frac{41}{35685} (Z^3 + Z^2) - \frac{1}{142740} (Z - 1) \right),$$

possui seis zeros em $(0, 1)$, e portanto temos seis ciclos limite bifurcantes do centro não-linear.

No apêndice D, descrevemos as expressões gerais dos coeficientes da perturbação P_n, Q_n ($1 \leq n \leq 6$) que devem ser considerados para se gerar as expressões de $f_2^{[n]}$ apresentadas acima, e assim obter o número máximo de ciclos limite bifurcantes. Além disso, apresentamos detalhes de como foram produzidos tais exemplos.

Para concluir esse caso da demonstração, exibimos na tabela abaixo as relações entre o grau da perturbação, o grau da parte polinomial da função de Melnikov $F_2^{[n]}(Z)$ e o número máximo de ciclos limite bifurcantes:

<i>Valor de n</i>	<i>Grau de $f_1^{[n]}$</i>	<i>Número Máximo de Ciclos Limite Bifurcantes</i>
1	1	0
2	2	2
3	3	3
4	5	4
5	7	5
6	9	6

Tabela 3.7: Grau da perturbação de (S2p), grau da parte polinomial de $F_2^{[n]}(Z)$ de acordo com o valor de n e respectivo número máximo de ciclos limite bifurcantes.

Com isso, finalizamos a demonstração do Teorema 3.3.3.

3.4 Ciclos Limite Bifurcantes de Perturbações de Centros Cúbicos Isócronos Planares

O objetivo desta sessão é estudar a família a 2-parâmetros de equações diferenciais polinomiais:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta p(x, y) + \varepsilon P_n(x, y), \\ \dot{y} = x + \delta q(x, y) + \varepsilon Q_n(x, y), \end{cases} \quad (3.4.1)$$

onde p e q são polinômios homogêneos cúbicos, P_n , Q_n são polinômios de grau n , o parâmetro $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, e $\delta \in \mathbb{R}$. Além disso, vamos supor que a origem também é um centro isócrono neste caso.

Estudamos o número de ciclos limite que bifurcam dos centros não-lineares ($\delta \neq 0$) de (3.4.1), através de perturbações polinomiais. Contudo, diferentemente do caso anterior, precisaremos utilizar alguns argumentos numéricos para garantir os resultados a serem apresentados.

3.4.1 Classificação dos Centros Cúbicos Isócronos Planares

Como no caso anterior, enunciamos agora o teorema que classifica os centros isócronos cúbicos planares, e algumas informações sobre os sistemas gerados por tal classificação.

Teorema 3.4.1 (Classificação de Centros Isócronos Cúbicos). Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3, \\ \dot{y} = x + b_{3,0}x^3 + b_{2,1}x^2y + b_{1,2}xy^2 + b_{0,3}y^3, \end{cases} \quad (3.4.2)$$

onde os coeficientes $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = 0, 1, 2, 3$.

Então, a origem do sistema (3.4.2) é um centro isócrono se, e só se, o sistema (3.4.2) pode ser escrito como um dos sistemas abaixo, através de uma mudança de coordenadas linear e de um reescalamento do tempo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 - 3xy^2, \\ \dot{y} = x + 3x^2y - y^3. \end{cases} \quad (\text{T1}) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -y + 3x^2y, \\ \dot{y} = x - 2x^3 + 9xy^2. \end{cases} \quad (\text{T3})$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 - xy^2, \\ \dot{y} = x + x^2y - y^3. \end{cases} \quad (\text{T2}) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -y - 3x^2y, \\ \dot{y} = x + 2x^3 - 9xy^2. \end{cases} \quad (\text{T4})$$

A demonstração do resultado acima foi feita por Pleshkan, em 1969, e pode ser encontrada em [66].

Listaremos abaixo algumas propriedades dos sistemas (T1)-(T4):

- **Sistema** (T1):

O sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 - 3xy^2, \\ \dot{y} = x + 3x^2y - y^3, \end{cases}$$

em coordenadas polares, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3 \cos(2\theta), \\ \dot{\theta} = 1 + r^2 \sin(2\theta). \end{cases}$$

Uma integral primeira para este sistema é:

$$H(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{1 + 4xy}, \quad (3.4.3)$$

e um fator de integração correspondente é dado por:

$$\mu(x, y) = \frac{4(x^2 + y^2)}{(4xy + 1)^2}. \quad (3.4.4)$$

- **Sistema** (T2):

O sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x^3 - xy^2, \\ \dot{y} &= x + x^2y - y^3, \end{cases}$$

em coordenadas polares, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{r} &= r^3 \cos(2\theta), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases}$$

Uma integral primeira para este sistema é:

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + 2xy}, \quad (3.4.5)$$

e um fator de integração correspondente é dado por:

$$\mu(x, y) = \frac{2}{(1 + 2xy)^2}. \quad (3.4.6)$$

- **Sistema** (T3):

O sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + 3x^2y, \\ \dot{y} &= x - 2x^3 + 9xy^2, \end{cases}$$

em coordenadas polares, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{r} &= r^3(-4\text{sen}(4\theta) + \frac{5}{2}\text{sen}(2\theta)), \\ \dot{\theta} &= 1 - r^2(\cos(4\theta) + \cos(2\theta)). \end{cases}$$

Uma integral primeira para este sistema é:

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 4x^4 + 4x^6}{(-1 + 3x^2)^3}, \quad (3.4.7)$$

e um fator de integração correspondente é dado por:

$$\mu(x, y) = -\frac{2}{(1 - 3x^2)^4}. \quad (3.4.8)$$

• **Sistema** (T4):

O sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - 3x^2y, \\ \dot{y} = x + 2x^3 - 9xy^2, \end{cases}$$

em coordenadas polares, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3(\sin(4\theta) - \frac{5}{2}\sin(2\theta)), \\ \dot{\theta} = 1 + r^2(\cos(4\theta) + \cos(2\theta)). \end{cases}$$

Uma integral primeira para este sistema é:

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 4x^4 + 4x^6}{(1 + 3x^2)^3}, \quad (3.4.9)$$

e um fator de integração correspondente é dado por:

$$\mu(x, y) = \frac{2}{(1 + 3x^2)^4}. \quad (3.4.10)$$

3.4.2 Resultado Principal

Novamente, utilizamos o método do *averaging* para relacionar a existência de ciclos limite com os zeros simples de uma função. Contudo, nesse caso, a função possui integrais elípticas em sua expressão, e portanto não é possível solucionar a equação $f(x) = 0$ de forma analítica, e assim, utilizamos alguns procedimentos numéricos.

Como o caso cúbico apresenta expressões mais complexas, consideramos apenas perturbações lineares. Similarmente ao caso quadrático, como a mudança de coordenadas é linear, podemos inferir informações em centros isócronos cúbicos através de perturbações das formas normais apresentadas nessa sessão.

Teorema 3.4.2. Considere o seguinte sistema planar polinomial a 2-parâmetros:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x^3 - 3\delta xy^2 + \varepsilon(a_{1,0}x + a_{0,1}y), \\ \dot{y} = x + 3\delta x^2y - \delta y^3 + \varepsilon(b_{1,0}x + b_{0,1}y), \end{cases} \quad (T1p)$$

isto é, uma perturbação linear do sistema (T1). Se $\delta = 0$, então nenhum ciclo limite bifurca do sistema. Se $\delta \neq 0$, apresentamos evidências numéricas da existência de um conjunto $\Omega \subset [0, 1]^4$ no espaço 4-dimensional dos parâmetros $a_{1,0}, a_{0,1}, b_{1,0}, b_{0,1}$, tal que o sistema (T1p) possui um ciclo limite se os parâmetros estão em Ω .

Observação 3.4.3. Como o resultado acima é numérico, o conjunto Ω é discreto. Assim, conjecturamos que:

1. É possível que Ω seja um conjunto convexo.
2. A recíproca do resultado também é válida, i.e., o sistema (T1p) possui um ciclo limite somente quando os seus parâmetros estão em Ω .

Contudo, nosso método não é capaz de garantir essas duas afirmações.

Teorema 3.4.4. Considere o sistema polinomial planar a 2-parâmetros:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + \delta x^3 - \delta xy^2 + \varepsilon(a_{1,0}x + a_{0,1}y), \\ \dot{y} &= x + \delta x^2y - \delta y^3 + \varepsilon(b_{1,0}x + b_{0,1}y), \end{cases} \quad (\text{T2p})$$

isto é, uma perturbação linear de (T2). Se $\delta = 0$, então não existem ciclos limite bifurcantes. Se $\delta \neq 0$ existe no máximo um ciclo limite bifurcante do sistema, que se reduz à origem quando $\delta \rightarrow 0^\pm$.

Observação 3.4.5. Analogamente ao caso quadrático, o número máximo mencionado corresponde ao número máximo de ciclos limite detectados pelo método do *averaging* de primeira ordem.

3.4.3 Demonstração dos Teoremas 3.4.2 e 3.4.4

Provaremos primeiramente o Teorema 3.4.4. Considere o sistema (T2p),

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + \delta x^3 - \delta xy^2 + \varepsilon(a_{1,0}x + a_{0,1}y), \\ \dot{y} &= x + \delta x^2y - \delta y^3 + \varepsilon(b_{1,0}x + b_{0,1}y). \end{cases} \quad (\text{T2p})$$

Para estudar o número de ciclos limite bifurcantes deste sistema, para $\varepsilon > 0$ pequeno e $\delta \neq 0$, utilizaremos o Teorema 3.1.4, e assim devemos construir a função F^1 do Teorema 3.1.6 e determinar seus zeros simples.

Neste caso, utilizando as informações dadas na sessão anterior, a função F^1 é dada por:

$$\begin{aligned} F_\delta(R) &= \int_0^{2\pi} \left(-Rb_{0,1} (\cos(\psi))^2 + R (\cos(\psi))^2 a_{1,0} - (\cos(\psi))^2 R^3 \delta b_{1,0} \right. \\ &+ (\cos(\psi))^2 R^3 \delta a_{0,1} - \cos(\psi) \sin(\psi) R^3 \delta a_{1,0} + R \cos(\psi) \sin(\psi) a_{0,1} \\ &\left. - \cos(\psi) \sin(\psi) b_{0,1} \delta R^3 + R \cos(\psi) \sin(\psi) b_{1,0} - R^3 \delta a_{0,1} + R b_{0,1} \right) d\psi \\ &= R\pi (-\delta R^2 b_{1,0} + b_{0,1} + a_{1,0} - R^2 \delta a_{0,1}). \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Caso $\delta > 0$, observe que $F_\delta(R) = 0$ possui uma única solução positiva (e simples) se, e só se, $a_{0,1} + b_{1,0} \neq 0$, e neste caso, a solução é dada por:

$$R_\delta = \left| \frac{\sqrt{\delta (b_{1,0} + a_{0,1}) (b_{0,1} + a_{1,0})}}{\delta (b_{1,0} + a_{0,1})} \right|.$$

Então, temos no máximo um ciclo limite bifurcante, o que prova o Teorema 3.4.4. Além disso, obtemos o seguinte corolário desta demonstração:

Corolário 3.4.6. Um sistema diferencial da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x^3 - \delta xy^2 + \varepsilon(a_{1,0}x + a_{0,1}y), \\ \dot{y} = x + \delta x^2y - \delta y^3 + \varepsilon(b_{1,0}x + b_{0,1}y), \end{cases}$$

com $\varepsilon > 0$ pequeno, $\delta > 0$ e $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$ possui um ciclo limite se, e só se, $a_{0,1} + b_{1,0} \neq 0$.

Provemos agora o Teorema 3.4.2. Considere agora o sistema (T1p)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x^3 - 3\delta xy^2 + \varepsilon(a_{1,0}x + a_{0,1}y), \\ \dot{y} = x + 3\delta x^2y - \delta y^3 + \varepsilon(b_{1,0}x + b_{0,1}y). \end{cases} \quad (\text{T1p})$$

Novamente, construiremos a função F^1 do Teorema 3.1.6 para este caso e determinaremos seus zeros simples. Para o sistema (T1p), a função F^1 é dada por:

$$F_\delta(R) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{D(R, \psi)} \left(a_{1,0}A_{1,0}(R, \psi) + a_{0,1}A_{0,1}(R, \psi) + b_{1,0}B_{1,0}(R, \psi) + b_{0,1}B_{0,1}(R, \psi) \right) d\psi, \quad (3.4.12)$$

onde as expressões $D(R, \psi)$, $A_{i,j}(R, \psi)$, $B_{i,j}(R, \psi)$ são dadas no apêndice F.

Esta integral pode ser reescrita com integrais elípticas de primeira e segunda espécie:

$$F_\delta(R) = a_{1,0}\overline{A_{1,0}}(R) + a_{0,1}\overline{A_{0,1}}(R) + b_{1,0}\overline{B_{1,0}}(R) + b_{0,1}\overline{B_{0,1}}(R), \quad (3.4.13)$$

com:

$$\overline{A_{1,0}}(R) = 2\delta^2 R^3 \pi + 2R\pi,$$

$$\overline{B_{0,1}}(R) = 2\delta^2 R^3 \pi + 2R\pi,$$

$$\begin{aligned} \overline{A_{0,1}}(R) = & \frac{1}{\sqrt{\delta^2 R^2 + 1}} \left(8\delta R^2 \text{EllipticF}(z, k) - 16\delta^3 R^4 \text{EllipticE}(z, k) \right. \\ & + 8 \text{EllipticF}(z, k) \delta^{-1} + 4\delta R^2 \text{EllipticK}(k) \\ & - 24\delta R^2 \text{EllipticE}(z, k) - 8\delta^3 R^4 \text{EllipticE}(k) \\ & - 4 \text{EllipticE}(k) \delta^{-1} - 12\delta R^2 \text{EllipticE}(k) \\ & \left. - 8 \text{EllipticE}(z, k) \delta^{-1} + 4 \text{EllipticK}(k) \delta^{-1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{B_{1,0}}(R) &= \frac{1}{\sqrt{\delta^2 R^2 + 1}} \left(8 \delta R^2 \text{EllipticF}(z, k) - 16 \delta^3 R^4 \text{EllipticE}(z, k) \right. \\
&+ 8 \text{EllipticF}(z, k) \delta^{-1} + 4 \delta R^2 \text{EllipticK}(k) \\
&- 24 \delta R^2 \text{EllipticE}(z, k) - 8 \delta^3 R^4 \text{EllipticE}(k) \\
&- 4 \text{EllipticE}(k) \delta^{-1} - 12 \delta R^2 \text{EllipticE}(k) \\
&\left. - 8 \text{EllipticE}(z, k) \delta^{-1} + 4 \text{EllipticK}(k) \delta^{-1}, \right)
\end{aligned}$$

onde $\text{EllipticF}(z, k)$, $\text{EllipticK}(k)$ são as integrais elípticas incompleta e completa de primeira espécie, respectivamente, e $\text{EllipticE}(z, k)$ é a integral elíptica (completa e incompleta) de segunda espécie, que são dadas por:

$$\begin{aligned}
\text{EllipticF}(z, k) &= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} dt, \\
\text{EllipticK}(k) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} dt, \\
\text{EllipticE}(z, k) &= \int_0^z \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt,
\end{aligned}$$

com

$$(z, k) = \left(\frac{\sqrt{\delta^2 R^2 + 1}}{\delta R}, \frac{\delta R}{\sqrt{\delta^2 R^2 + 1}} \right).$$

Um estudo mais detalhado dessas funções pode ser encontrado em [76, 72].

Não é possível se obter os zeros reais $F_\delta(R)$ através de métodos algébricos ou analíticos, devido a existência de integrais elípticas. Assim, para alcançar nossos objetivos, desenvolveremos a seguir um método numérico que nos permitirá realizar essa tarefa e finalizar a demonstração do Teorema 3.4.2.

Procedimento Numérico

Considere a seguinte partição

$$\mathcal{P} = \{t_0 = 1 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1\}$$

, do intervalo $I = [0, 1]$, e então a utilize para induzir uma malha de pontos no cubo 4-dimensional $I^4 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Seja $\mathcal{M} \subset I^4$ o subconjunto dos vértices da malha. Para cada $m = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathcal{M}$ construímos uma função $F_\delta^m(R)$ que consiste na função $F_\delta(R)$ dada em (3.4.13) com $a_{1,0} = m_1$, $a_{0,1} = m_2$, $b_{1,0} = m_3$ e $b_{0,1} = m_4$, e então, tentaremos encontrar uma solução numérica da equação $F_\delta^m(R) = 0$. Se tal solução existir, diremos que o vértice m é um **vértice admissível**.

Denotaremos o subconjunto dos vértices admissíveis por $\Omega \subset \mathcal{M}$. Assim, se $m \in \Omega$ então a equação $F_\delta^m(R) = 0$ possui uma solução positiva, e portanto existe um ciclo limite para o sistema (T1p), com os parâmetros $(a_{1,0}, a_{0,1}, b_{1,0}, b_{0,1}) = m$.

Observe que, em todos os outros casos considerados até aqui (cúbico e quadrático), as condições que definem os subconjuntos do espaço de parâmetros em que existem ciclos limite no sistema, são abertas. Assim, é natural que se tenha o mesmo comportamento para o caso em que estamos tratando. Logo, consideramos que existe um conjunto $\tilde{\Omega} \supseteq \Omega$ aberto, que seja representado pela envoltória convexa de Ω , tal que, para cada $\tilde{m} \in \tilde{\Omega}$, o sistema (T1p) com os parâmetros $(a_{1,0}, a_{0,1}, b_{1,0}, b_{0,1}) = \tilde{m}$ possui um ciclo limite.

Aplicamos a estratégia numérica acima para $n = 10$. Neste caso, \mathcal{M} possui $11^4 = 14.641$ pontos. Através do software Maple, podemos determinar numericamente se $F_\delta^m(R)$ possui uma solução positiva para cada $m \in \mathcal{M}$, e encontramos que Ω é formado por 8.960 vértices admissíveis.

Com o auxílio do software Octave, calculamos a envoltória convexa \mathcal{H} de Ω e obtivemos as equações de 21 hiperplanos que delimitam Ω . Considere $\Omega \subset [0, 1]^4 = \{(x, y, z, w); 0 \leq x, y, z, w \leq 1\}$ e $\delta = 1$ (o resultado é o mesmo para cada $\delta \in (0, 1]$):

$$\begin{aligned}
-1.35447x - 1.35447w &= -0.13545, \\
-1.31837x + 0.32959z - 1.31837w &= 0.06592, \\
-1.47998x + 0.21143y + 0.21143z - 1.47998w &= -0.02114, \\
1.51613x - 2.27419y - 1.51613z + 1.51613w &= 0.30323, \\
1.51613x - 1.51613y - 2.27419z + 1.51613w &= 0.30323, \\
1.66667x - 1.66667y - 1.66667z + 1.66667w &= 0.66667, \\
1.90027x - 2.21698y - 2.53369z + 1.90027w &= 0.12668, \\
1.95021x - 2.60028y - 2.60028z + 1.95021w &= -0.06501, \\
2.05960x - 2.67748y - 2.57450z + 2.05960w &= 0, \\
2.05960x - 2.57450y - 2.67748z + 2.05960w &= 0, \\
2.06321x - 2.65270y - 2.65270z + 2.12216w &= 0, \\
2.10934x - 2.68462y - 2.68462z + 2.10934w &= -0.01918, \\
2.12216x - 2.65270y - 2.65270z + 2.06321w &= 0,
\end{aligned}$$

com os hiperplanos delimitantes de $[0, 1]^4$: $w = 0$, $w = 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.

Observamos que $\Omega = [0, 1]^4 \cap \mathcal{H}$.

A seguinte Figura 3.1 ilustra projeções da envoltória convexa \mathcal{H} com os pontos de Ω que estão dentro desta.

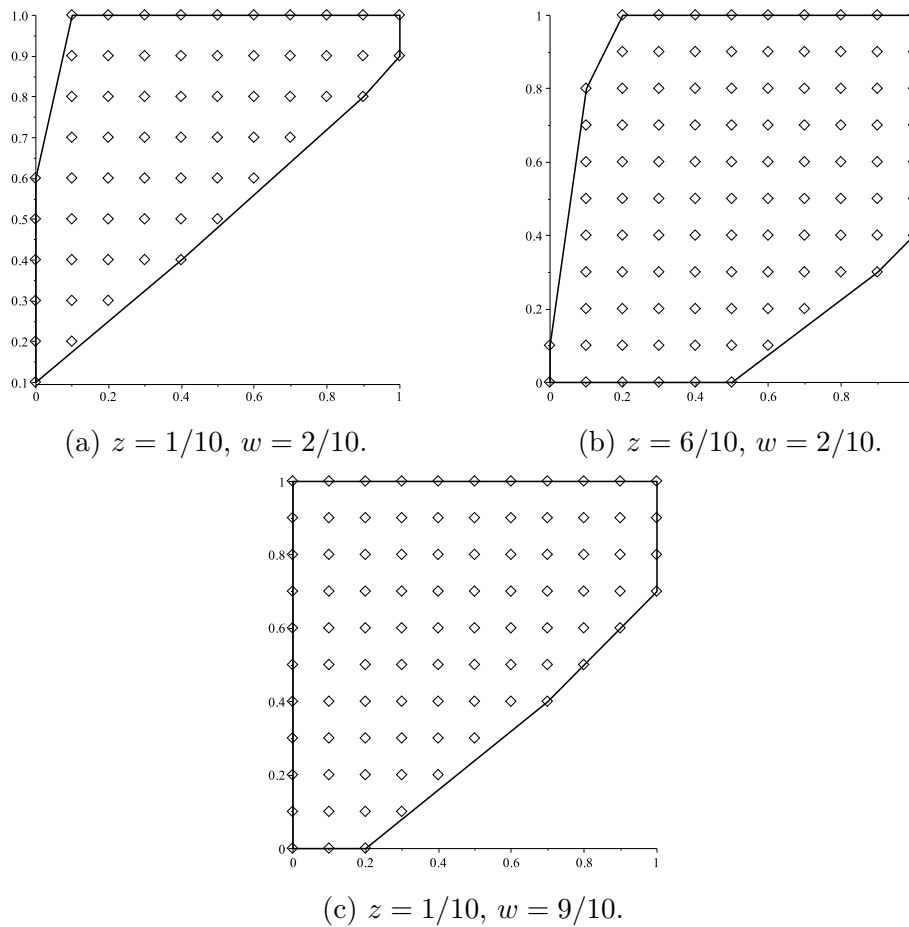


Figura 3.1: Projeções de Ω e $\partial\mathcal{H}$ no plano xy para diferentes valores de z, w .

Assim, terminamos a demonstração do Teorema 3.4.2. Resumimos os resultados obtidos no seguinte corolário:

Corolário 3.4.7. Um sistema diferencial da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x^3 - 3\delta xy^2 + \varepsilon(a_{1,0}x + a_{0,1}y), \\ \dot{y} = x + 3\delta x^2y - \delta y^3 + \varepsilon(b_{1,0}x + b_{0,1}y), \end{cases}$$

com $\varepsilon > 0$ pequeno, $\delta \in (0, 1]$ e $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$ possui um ciclo limite se $(a_{1,0}, a_{0,1}, b_{1,0}, b_{0,1}) \in \Omega$, onde Ω é construído através do procedimento numérico discutido acima.

Com o método numérico desenvolvido acima, e baseado nos resultados numéricos encontrados, apresentamos a seguinte conjectura:

Conjectura 3.4.8. Um sistema diferencial da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x^3 - 3\delta xy^2 + \varepsilon(a_{1,0}x + a_{0,1}y), \\ \dot{y} = x + 3\delta x^2y - \delta y^3 + \varepsilon(b_{1,0}x + b_{0,1}y), \end{cases}$$

com $\varepsilon > 0$ pequeno, $\delta \in (0, 1]$ e $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$ possui um ciclo limite se, e só se, $(a_{1,0}, a_{0,1}, b_{1,0}, b_{0,1}) \in \tilde{\Omega}$, onde $\tilde{\Omega} \subset [0, 1]^4$ é um conjunto convexo que pode ser aproximado pela envoltória convexa de Ω , para uma malha suficientemente grande.

Capítulo 4

Sistemas de Filippov

A teoria de sistemas dinâmicos é amplamente utilizada para se entender o comportamento de diversos problemas que cercam o mundo.

Atualmente, a abordagem qualitativa dos sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais suaves (em seus argumentos) encontra-se bem desenvolvida e tem-se mostrado extremamente eficaz no entendimento de fenômenos físicos como fluxos de fluidos, deformação elástica, ótica não-linear e em sistemas biológicos.

Contudo, a natureza possui uma vasta quantidade de fenômenos que não podem ser modelados por funções suaves, e com isso a teoria desenvolvida não pode ser utilizada no contexto de tais problemas.

Deste modo, surgiu a motivação para o estudo dos sistemas dinâmicos descontínuos (ou sistemas de Filippov), que trata de problemas descritos por funções suaves por partes, ou seja, de problemas que apresentam perda instantânea de suavidade com a ocorrência de determinado evento, como por exemplo, o acionamento de uma chave num circuito elétrico.

Tais sistemas possuem uma dinâmica fascinante e aplicações práticas relevantes, além de uma rica estrutura matemática associada, o que os torna um interessante objeto de estudo que se encontra na fronteira entre a matemática, a física e a engenharia.

Descrevemos agora a formalização dos conceitos desta teoria, assim como alguns exemplos que fornecem um melhor entendimento destes sistemas.

4.1 A convenção de Filippov

Sejam X e Y campos de vetores definidos em um subconjunto aberto e conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ e, sem perda de generalidade, assumamos que $\vec{0} \in U$. Considere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de uma função de classe \mathcal{C}^k (i.e., $f \in C^k(U, \mathbb{R})$) com $k > 1$, que possui 0 como valor regular, então $\Sigma = f^{-1}(0)$ é uma subvariedade de codimensão 1 em U que divide o aberto U em dois conjuntos abertos:

$$\Sigma^+ = \{x \in U; f(x) > 0\} \quad \text{e} \quad \Sigma^- = \{x \in U; f(x) < 0\}.$$

Um **sistema de Filippov** é um campo vetorial suave por partes definido da seguinte forma:

$$Z(x) = \begin{cases} X(x), & x \in \Sigma^+, \\ Y(x), & x \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

que será denotado por $Z = (X, Y)_f$, a fim de identificar as componentes do campo. Além disso, assumiremos que X e Y são campos de classe \mathcal{C}^k em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente, onde $\overline{\Sigma^\pm}$ denota o fecho de Σ^\pm em U .

Denotamos por \mathcal{Z}^k o espaço dos campos vetoriais deste tipo, o qual também pode ser referido como $\mathcal{Z}^k = \mathcal{X}^k \times \mathcal{Y}^k$, onde, por abuso de notação, \mathcal{X}^k é o espaço dos campos vetoriais de classe \mathcal{C}^k definidos em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$. A topologia considerada em \mathcal{Z}^k é a topologia produto \mathcal{C}^k .

Para estabelecer a dinâmica dada por um campo vetorial de Filippov $Z = (X, Y)_f$ em U , é necessário que se defina a trajetória local por um ponto $p \in U$, ou seja, devemos definir o fluxo $\varphi_z(t, p)$ de (4.1.1).

Se $p \in \Sigma^\pm$, então a trajetória local por p é dada pelos campos X e Y da maneira usual. Porém, se $p \in \Sigma$, devemos ser mais cuidadosos para definir sua trajetória.

Primeiramente, dividiremos a subvariedade de descontinuidade Σ no fecho de três regiões disjuntas, dependendo da direção em que os campos vetoriais apontam:

- **Região de Costura:** $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$,
- **Região de Deslize:** $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0, Yf(p) > 0\}$,
- **Região de Escape:** $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0, Yf(p) < 0\}$,

onde $Xf(p) = X(p) \cdot \text{grad}(f)(p)$ é a **derivada de Lie** de f com respeito ao campo X em p . Estas três regiões são abertos da topologia induzida em Σ e podem ter mais que uma componente conexa.

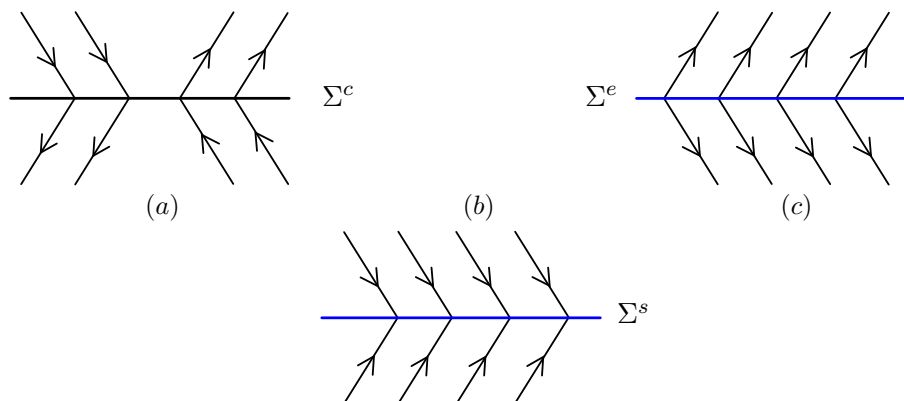


Figura 4.1: Exemplos de (a) região de costura, (b) região de deslize, (c) região de escape.

Observe que, as regiões acima excluem os **pontos de tangência**, isto é, os pontos $p \in \Sigma$ tais que $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$. Estes pontos estão nas fronteiras das regiões Σ^c , Σ^s , Σ^e , que serão denotadas por $\partial\Sigma^c$, $\partial\Sigma^s$ e $\partial\Sigma^e$, respectivamente.

Note que, se $X(p) = 0$, então $Xf(p) = 0$, logo os pontos críticos de X em Σ também estão incluídos nos pontos de tangência, por outro lado, se $X(p) \neq 0$ e $Xf(p) = 0$, então a trajetória de X que passa por p é de fato tangente à Σ .

Assumiremos que os pontos de tangência são isolados. Em geral, em casos degenerados (de codimensão infinita), ou em dimensões ≥ 3 , podem existir um contínuo de pontos de tangência, e assim a definição de trajetória a ser descrita não pode ser aplicada a esses sistemas. Contudo,

neste trabalho, estudaremos campos de Filippov planares, cujas singularidades são de fato isoladas.

Se $p \in \Sigma^c$, então os campos vetoriais X e Y apontam ambos para Σ^+ ou Σ^- , simultaneamente, e portanto basta conectar as trajetórias de X e Y que passam por p .

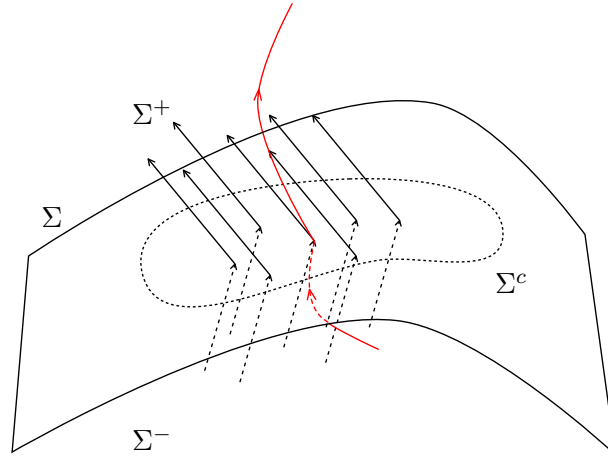


Figura 4.2: Solução passando por um ponto em Σ^c .

Considere agora que $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, então os campos apontam para direções contrárias, não sendo possível concatenar as trajetórias. Assim, para definir a órbita local por esses pontos, utilizamos a convenção de Filippov [18]. Defina o **campo vetorial deslizante** por:

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)} \left(Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p) \right) \quad (4.1.2)$$

Note que o campo Z^s é a combinação linear convexa de X e de Y , e é tangente à subvariedade de descontinuidade Σ , além disso suas trajetórias estão contidas em Σ^s ou Σ^e . Neste caso, a trajetória por p é dada pela trajetória de (4.1.2).

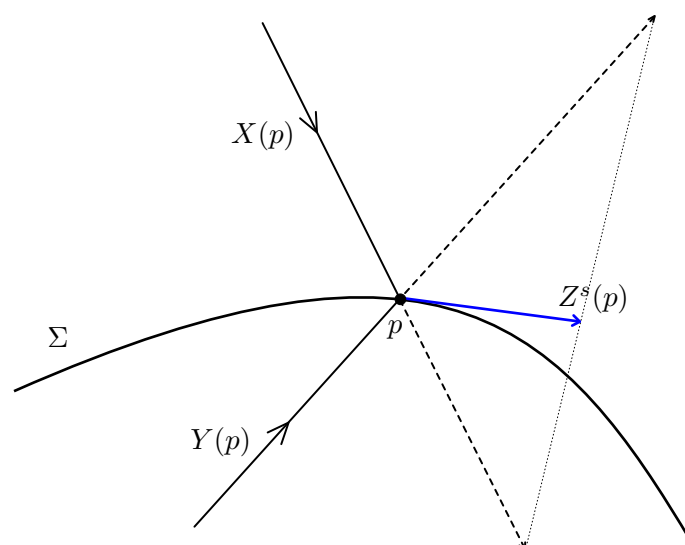


Figura 4.3: Campo Deslizante Z^s .

Com a discussão acima, podemos definir rigorosamente o fluxo de $Z = (X, Y)_f$:

Observação 4.1.1. Relembre que o fluxo $\varphi_X(t, p)$ de um campo vetorial suave autônomo X satisfaz:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_X(t, p) = X(\varphi_X(t, p)), \\ \varphi_X(0, p) = p, \end{cases}$$

e está definido para $t \in I \subset \mathbb{R}$, onde $I = I(p, X)$ é um intervalo dependente do ponto p e do campo X . Por simplicidade, deixaremos implícita tal dependência do intervalo, e como estamos lidando com campos vetoriais autônomos, podemos escolher a origem no tempo $t = 0$.

Definição 4.1.2. A trajetória local (ou solução orbital) de um campo vetorial de Filippov (4.1.1) por um ponto p é definida da seguinte forma:

1. Para $p \in \Sigma^+$ e $p \in \Sigma^-$, tais que $X(p) \neq 0$ e $Y(p) \neq 0$, respectivamente, a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ e $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$, respectivamente, para $t \in I \subset \mathbb{R}$.
2. Para $p \in \Sigma^c$, temos dois casos:

(a) Se $Xf(p), Yf(p) > 0$ e tomando a origem do tempo em p , definimos a trajetória por:

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_X(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$$

(b) Se $Xf(p), Yf(p) < 0$ e tomando a origem do tempo em p , definimos a trajetória por:

$$\varphi_Z(t, p) = \begin{cases} \varphi_Y(t, p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \varphi_X(t, p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$$

3. Para $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) \neq 0$, definimos $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p)$ para $t \in I$, onde Z^s é o campo vetorial deslizante dado por (4.1.2).
4. Para $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tal que as definições de trajetórias para pontos em Σ em ambos os lados de p podem ser estendidas para p e coincidem, a trajetória por p é esta trajetória estendida. Neste caso, dizemos que p é um **ponto de tangência regular**.
5. Para os pontos p que não se enquadram nos itens acima, definimos $\varphi_Z(t, p) = p, \forall t \in \mathbb{R}$. Este é o caso dos pontos críticos de X e Y em Σ^\pm , e dos pontos críticos do campo deslizante Z^s em $\Sigma^s \cup \Sigma^e$. Também estão incluídos os pontos de tangência em Σ que não são regulares, chamados **pontos de tangência singulares**.

Definição 4.1.3. A **órbita local** de um ponto $p \in U$, é o conjunto $\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p); t \in I\}$.

Como estamos lidando com campos autônomos, utilizaremos as expressões trajetória e órbita indistintamente, quando não houver perigo de confusão.

Observação 4.1.4. Note que, seguindo a convenção de Filippov, duas das principais propriedades dos sistemas dinâmicos clássicos (suaves) são preservadas: cada ponto pertence a uma única órbita e o espaço de fase é decomposto como a união disjunta de todas as órbitas.

Definição 4.1.5. As *singularidades* do sistema de Filippov (4.1.1) são:

1. $p \in \Sigma^\pm$ tal que p é um equilíbrio de X ou de Y , isto é, $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$, respectivamente.
2. $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que p é um *pseudo-equilíbrio*, isto é, $Z^s(p) = 0$.
3. $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$, isto é, os pontos de tangência de Z ($Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$).

Qualquer outro ponto é chamado de *ponto regular*.

Observe que em sistemas dinâmicos suaves, as singularidades correspondem a pontos críticos de um campo vetorial, e conseqüentemente, a trajetória que passa por qualquer singularidade é somente o próprio ponto. Contudo, conforme a definição de fluxo acima, em sistemas de Filippov, existem singularidades (tangências regulares) cuja órbita $\gamma(p) \neq \{p\}$. Por este motivo, torna-se necessário classificar as singularidades como:

1. *Singularidades Distinguidas*: pontos p tais que $\gamma(p) = \{p\}$. Tais pontos desempenham o mesmo papel dos pontos críticos nos sistemas dinâmicos suaves.
2. *Singularidades Não Distinguidas*: pontos $p \in \Sigma$ que são pontos de tangência regulares, e assim, mesmo não sendo pontos regulares, possuem órbita local homeomorfa a \mathbb{R} .

Definição 4.1.6. Uma *singularidade distinguida* é um ponto p tal que $\gamma(p) = \{p\}$. Elas podem ser classificadas em:

1. $p \in \Sigma^\pm$ tal que p é um equilíbrio de X ou de Y , isto é, $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$, respectivamente.
2. $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que p é um *pseudo-equilíbrio*, isto é, $Z^s(p) = 0$.
3. $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tal que p é um ponto de tangência singular.

As componentes X e Y de um campo vetorial de Filippov $Z = (X, Y)_f$ são definidas em vizinhanças abertas de $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente. Então, como campos suaves, X e Y podem possuir pontos críticos que não estão em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente. Assim, vamos nos referir a esses pontos como *pontos críticos não admissíveis*, enquanto os pontos que são realmente críticos do sistema de Filippov Z serão referidos como, *pontos críticos admissíveis*.

Analogamente, objetos invariantes (órbitas periódicas, variedades estáveis/instáveis) dos campos X e Y que não pertencem a $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente, também serão chamados de não admissíveis.

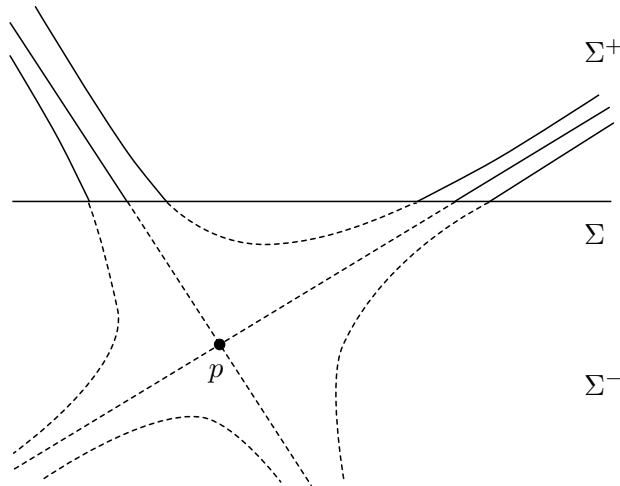


Figura 4.4: Exemplo de ponto crítico não admissível ($X(p) = 0$ e $p \in \Sigma^-$).

Mesmo sendo escolhida a definição de órbita que nos garante unicidade, um ponto $p \in \Sigma$ pode pertencer ao fecho de muitas outras órbitas. Considerando tal fato, adotaremos a seguinte definição:

Definição 4.1.7. Dada uma trajetória $\varphi_Z(t, p) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ e um ponto $p \in \Sigma$, dizemos que p é um **ponto de partida** de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $t_0 < 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \varphi_Z(t, q) = p$ e que é um **ponto de chegada** de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $t_0 > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \varphi_Z(t, q) = p$

Note que, de acordo com a definição de fluxo, se $p \in \Sigma^c$, então p é um ponto de partida de $\varphi_Z(t, q)$ para qualquer ponto q pertencente à órbita $\gamma^+(p) = \{\varphi_Z(t, p); t \in I \cap [0, \infty)\}$, e é um ponto de chegada de $\varphi_Z(t, q)$ para qualquer ponto q pertencente à órbita $\gamma^-(p) = \{\varphi_Z(t, p); t \in I \cap (-\infty, 0]\}$. Assim, a órbita por $p \in \Sigma^c$ é a união do ponto com suas órbitas de partida e de chegada.

Exibimos agora alguns exemplos de sistemas de Filippov planares que ilustram as definições e as escolhas feitas nesta sessão. Considere $U = \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y$.

Exemplo 4.1.8 (Ponto de tangência regular). Sejam $p = (0, 0)$, $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ e:

$$Z_1(x, y) = \begin{cases} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Desta forma:

$$X_1 f(x, 0) = (1, x^2) \cdot (0, 1) = x^2,$$

$$\begin{aligned} X_1^2 f(x, 0) &= X_1(X_1 f) = (1, x^2) \cdot (2x, 0) = 2x, \\ X_1^3 f(x, 0) &= X_1(X_1^2 f) = (1, x^2) \cdot (2, 0) = 2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$Y_1 f(x, 0) = (1, 1) \cdot (0, 1) = 1.$$

Com isso, temos que: $X_1 f(x, 0) \cdot Y_1 f(x, 0) = 0$, se e somente se, $x = 0$. Logo, o único ponto de tangência de Z_1 é $p = (0, 0)$. Ainda, $X_1 f(x, 0) \cdot Y_1 f(x, 0) > 0$ se $x \neq 0$, e assim, $\Sigma - \{p\} = \Sigma^c$, e $p \in \partial\Sigma^c$.

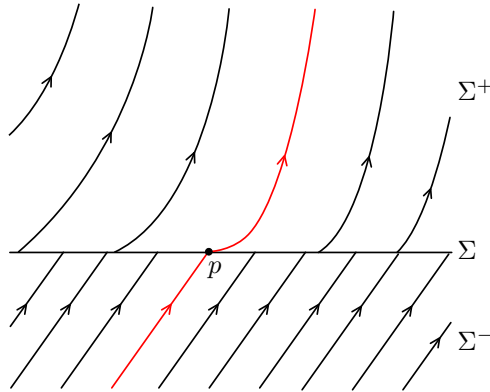


Figura 4.5: Retrato de fase do campo Z_1 .

Dizemos que um campo vetorial suave X tem um **ponto de cúspide** com Σ em $p \in \Sigma$, se $Xf(p) = X^2 f(p) = 0$ e $X^3 f(p) \neq 0$. Logo, neste caso, p é uma cúspide de X_1 .

Note que, existe uma única maneira de estender a solução pelo ponto p , e segundo a definição de fluxo, temos que a órbita pelo ponto p é união das suas órbitas de partida e de chegada, como ocorre com os pontos de Σ^c .

Exemplo 4.1.9 (Ponto de tangência regular). Sejam $p = (0, 0)$, $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ e:

$$Z_2(x, y) = \begin{cases} X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7x \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} X_2 f(x, 0) &= (1, 2x) \cdot (0, 1) = 2x, \\ X_2^2 f(x, 0) &= (1, 2x) \cdot (2, 0) = 2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$Y_2 f(x, 0) = (2, 7x) \cdot (0, 1) = 7x,$$

$$Y_2^2 f(x, 0) = (2, 7x) \cdot (7, 0) = 14.$$

Com isso, temos que: $X_2 f(x, 0) \cdot Y_2 f(x, 0) = 0$, se e somente se, $x = 0$. Logo, o único ponto de tangência de Z_2 é $p = (0, 0)$. Ainda, $X_2 f(x, 0) \cdot Y_2 f(x, 0) = 14x^2 > 0$ se $x \neq 0$, e assim, $\Sigma - \{p\} = \Sigma^c$, e $p \in \partial\Sigma^c$.

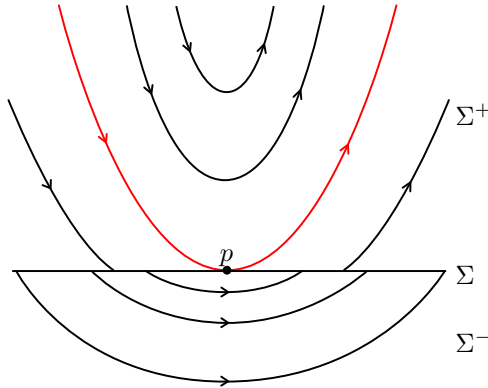


Figura 4.6: Retrato de fase do campo Z_2 .

Dizemos que um campo vetorial suave X tem um **ponto de dobra** com Σ em $p \in \Sigma$, se $Xf(p) = 0$ e $X^2 f(p) \neq 0$. Neste caso, p é uma dobra de X_2 e de Y_2 .

Assim, segundo a definição de fluxo, a trajetória por p é $\varphi_{Z_2}(t, p) = \varphi_{X_2}(t, p)$.

Exemplo 4.1.10 (Ponto de tangência regular). Sejam $p = (0, 0)$, $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ e:

$$Z_3(x, y) = \begin{cases} X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -x^2 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} X_3 f(x, 0) &= (1, -x^2) \cdot (0, 1) = -x^2, \\ X_3^2 f(x, 0) &= (1, -x^2) \cdot (-2x, 0) = -2x, \\ X_3^3 f(x, 0) &= (1, -x^2) \cdot (-2, 0) = -2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$Y_3 f(x, 0) = (1, 1) \cdot (0, 1) = 1.$$

Com isso, temos que: $X_3 f(x, 0) \cdot Y_3 f(x, 0) = 0$, se e somente se, $x = 0$. Logo, o único ponto de tangência de Z_3 é $p = (0, 0)$, e é um ponto cúspide de X_3 com Σ . Porém, se $x \neq 0$, temos $X_3 f(x, 0) < 0$ e $Y_3 f(x, 0) > 0$, e assim, $\Sigma - \{p\} = \Sigma^s$, e $p \in \partial\Sigma^s$.

Assim, se $x \neq 0$, o campo deslizando em Σ^s é dado por:

$$\begin{aligned} Z_3^s(x, 0) &= \frac{1}{1+x^2} (1 \cdot (1, -x^2) + x^2 \cdot (1, 1)) \\ &= (1, 0). \end{aligned}$$

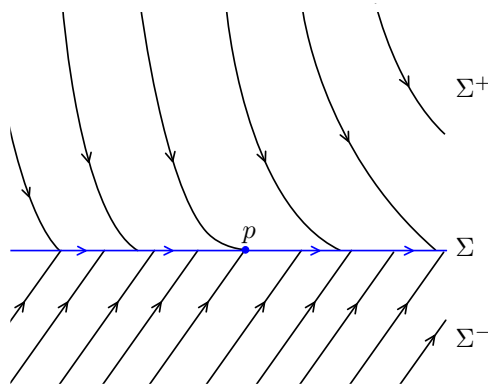


Figura 4.7: Retrato de fase do campo Z_3 .

Neste caso, podemos estender a trajetória do campo deslizando para p , e assim $\varphi_{Z_3}(t, p) = (t, 0)$.

Exemplo 4.1.11 (Ponto de tangência regular). Sejam $p = (0, 0)$, $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ e:

$$Z_4(x, y) = \begin{cases} X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -7x \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} X_4 f(x, 0) &= (1, 2x) \cdot (0, 1) = 2x, \\ X_4^2 f(x, 0) &= (1, 2x) \cdot (2, 0) = 2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} Y_4 f(x, 0) &= (-2, -7x) \cdot (0, 1) = -7x, \\ Y_4^2 f(x, 0) &= (-2, -7x) \cdot (-7, 0) = 14. \end{aligned}$$

Com isso, temos que: $X_4 f(x, 0) \cdot Y_4 f(x, 0) = 0$, se e somente se, $x = 0$. Logo, o único ponto de tangência de Z_2 é $p = (0, 0)$, e é um ponto de dobra para X_4 e Y_4 .

Observe que, se $x > 0$, então $X_4 f(x, 0) > 0$ e $Y_4 f(x, 0) < 0$, enquanto, se $x < 0$, temos que $X_4 f(x, 0) < 0$ e $Y_4 f(x, 0) > 0$. Logo, $\Sigma^e = \{(x, 0); x > 0\}$, $\Sigma^s = \{(x, 0); x < 0\}$ e $p \in \partial\Sigma^e \cup \partial\Sigma^s$

Neste caso, segundo a definição de fluxo, a trajetória por p é $\varphi_{Z_2}(t, p) = \varphi_{X_2}(t, p)$.

O campo deslizante é dado por:

$$\begin{aligned} Z_4^s(x, 0) &= \frac{1}{-7x-2x} (-7x \cdot (1, 2x) - 2x \cdot (-2, -7x)) \\ &= \left(\frac{x}{3x}, 0 \right). \end{aligned}$$

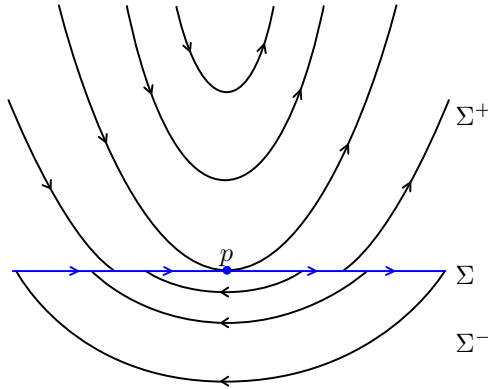


Figura 4.8: Retrato de fase do campo Z_4 .

Assim, em ambos os lados de p a órbita é dada pelo campo deslizante $Z_4^s(x, 0)$, que pode ser estendido a p através da definição $Z_4^s(0, 0) = \frac{1}{3}$, logo, temos que $\varphi_{Z_4}(t, p) = \left(\frac{t}{3}, 0 \right)$.

Os exemplos acima, ilustram o fato de que, mesmo sendo considerados pontos singulares, os pontos de tangência regulares podem ser interpretados como pontos regulares em Σ .

A seguir, veremos alguns exemplos de tangências que são singularidades distinguidas. Tais pontos, em sistemas de Filippov planares, podem ser classificados em três grupos.

O primeiro grupo é formado pelos pontos de tangência singulares em $\partial\Sigma^c$ que não são pontos de partida ou chegada de nenhuma outra trajetória, de modo que as órbitas em torno de tal ponto comportam-se como um foco clássico. Tal grupo é ilustrado através do seguinte modelo:

Exemplo 4.1.12 (Ponto de tangência singular - Grupo 1). Sejam $p = (0, 0)$, $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ e:

$$Z_5(x, y) = \begin{cases} X_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -x + x^2 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (4.1.7)$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} X_5 f(x, 0) &= (1, -2x) \cdot (0, 1) = -2x, \\ X_5^2 f(x, 0) &= (1, -2x) \cdot (-2, 0) = -2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} Y_5 f(x, 0) &= (-1, -x + x^2) \cdot (0, 1) = -x + x^2, \\ Y_5^2 f(x, 0) &= (-1, -x + x^2) \cdot (-1 + 2x, 0) = 1 - 2x. \end{aligned}$$

Assim p é um ponto de dobra para X_5 e Y_5 . Se $x \in (0, 1)$, então $X_5 f(x, 0) < 0$ e $Y_5 f(x, 0) < 0$, enquanto, $X_5 f(x, 0) > 0$ e $Y_5 f(x, 0) > 0$, se $x \in (-1, 0)$. Deste modo, ao redor de p temos uma região de costura.

As trajetórias de Z_5 espiralam ao redor de p , como ocorre em um foco em sistemas dinâmicos suaves.

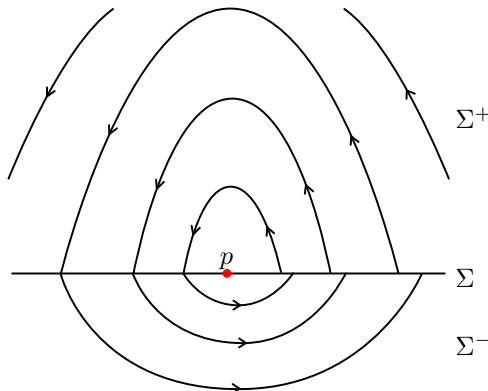


Figura 4.9: Retrato de fase do campo Z_5 .

O segundo grupo é formado por pontos de tangência singulares que pertencem a $\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^s$ ou $\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^e$, e é representado pelo modelo:

Exemplo 4.1.13 (Ponto de tangência singular - Grupo 2). Sejam $p = (0, 0)$, $\Sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ e:

$$Z_6^\pm(x, y) = \begin{cases} X_6^\pm = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (4.1.8)$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} X_6^\pm f(x, 0) &= (\pm 1, x) \cdot (0, 1) = x, \\ (X_6^\pm)^2 f(x, 0) &= (\pm 1, x) \cdot (1, 0) = \pm 1. \end{aligned}$$

Além disso,

$$Y_6 f(x, 0) = (0, 1) \cdot (0, 1) = 1.$$

Assim p é um ponto de dobra para X_6^\pm . Se $x > 0$, então $X_6^\pm f(x, 0) > 0$ e $Y_6 f(x, 0) > 0$, e se $x < 0$, $X_6^\pm f(x, 0) < 0$ e $Y_6 f(x, 0) > 0$, logo, $\Sigma^c = \{(x, 0); x > 0\}$, $\Sigma^s = \{(x, 0); x < 0\}$ e $p \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^c$.

Se $x < 0$, o campo deslizando é dado por:

$$\begin{aligned} (Z_6^\pm)^s(x, 0) &= \frac{1}{1-x} (1 \cdot (\pm 1, x) - x \cdot (0, 1)) \\ &= \left(\pm \frac{1}{1-x}, 0 \right). \end{aligned}$$

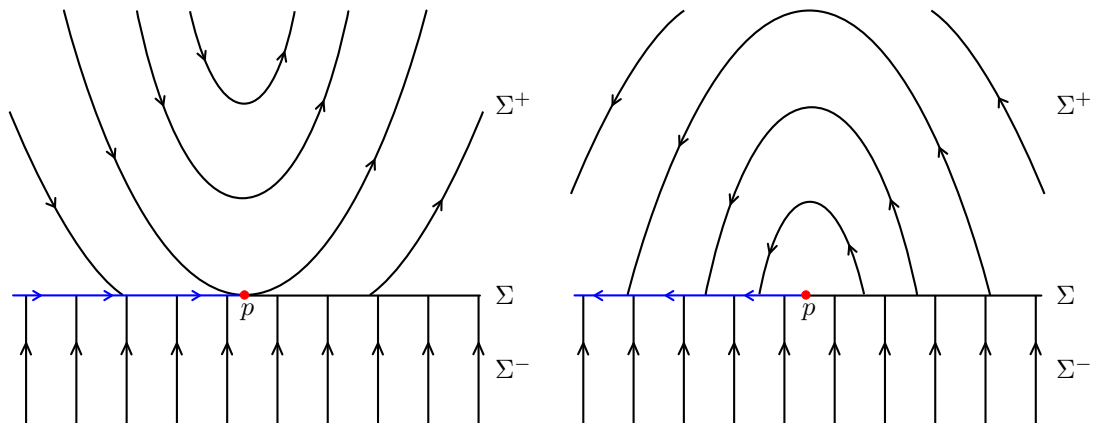


Figura 4.10: Retratos de fase dos campos Z_6^+ e Z_6^- , respectivamente.

Com isso, para os pontos de Σ que estão à esquerda de p , a órbita é dada pelo campo deslizando Z^s , enquanto, para os pontos que estão à direita de p , a trajetória é dada pelas órbitas de partida e de chegada do ponto, que são as trajetórias de X_6^\pm e de Y_6 , já que tal ponto está em Σ^c . Portanto, a definição de órbita de ambos os lados de p não coincidem, e assim p é um ponto de tangência singular para Z_6^+ e Z_6^- .

Observe que, invertendo a orientação de Y_6 , recaímos no caso em que $p \in \partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^e$.

Finalmente, o terceiro grupo é formado por pontos em $\partial\Sigma^c$ que são pontos de partida e de chegada de duas trajetórias diferentes de X e Y .

Como trajetórias diferentes de X e de Y partem (ou chegam) neste ponto, não temos unicidade de soluções, daí a única escolha a ser feita, de modo a preservar unicidade, é considerar o próprio ponto como sua órbita. Observamos tal comportamento no seguinte modelo:

Exemplo 4.1.14 (Ponto de tangência singular - Grupo 3). Sejam $p = (0, 0)$, $\Sigma = \{(x, 0) \in$

$\mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}$ e:

$$Z_7(x, y) = \begin{cases} X_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad (4.1.9)$$

Desta forma:

$$X_7 f(x, 0) = (1, x) \cdot (0, 1) = x,$$

$$X_7^2 f(x, 0) = (1, x) \cdot (1, 0) = 1.$$

Além disso,

$$Y_7 f(x, 0) = (-1, x) \cdot (0, 1) = x,$$

$$Y_7^2 f(x, 0) = (-1, x) \cdot (1, 0) = -1.$$

Assim p é um ponto de dobra para X_7 e Y_7 . Se $x \neq 0$, temos que $X_7 f(x, 0) \cdot Y_7 f(x, 0) = x^2 > 0$, logo $\Sigma^c = \Sigma - \{p\}$ e $p \in \partial\Sigma^c$.

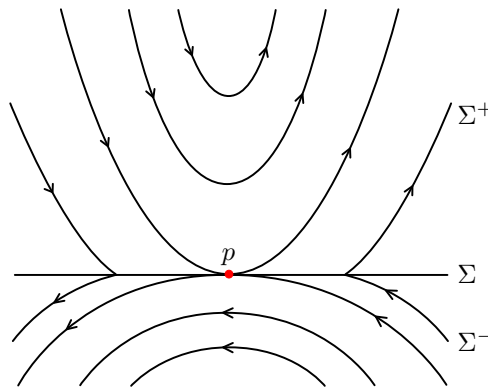


Figura 4.11: Retrato de fase do campo Z_7 .

Neste caso, temos duas órbitas (de X_7 e de Y_7) que chegam em p , e outras duas órbitas (de X_7 e de Y_7) que partem de p , conforme pode ser visto em seu retrato de fase.

Definimos até agora, a trajetória local e a órbita local por um ponto, com isso, podemos estabelecer a definição de órbita maximal. Dependendo do ponto, a órbita maximal pode ser uma órbita regular, uma órbita deslizante ou uma singularidade distinguida.

Definição 4.1.15. Uma *órbita regular maximal* de Z é uma curva suave por partes γ tal que:

1. $\gamma \cap \Sigma^+$ e $\gamma \cap \Sigma^-$ é uma união de órbitas dos campos vetoriais suaves X e Y , respectivamente.

2. A intersecção $\gamma \cap \Sigma$ é formada apenas por pontos de costura e pontos de tangência regulares em $\partial\Sigma^c$.
3. γ é maximal com respeito a essas condições.

Note que uma órbita regular nunca atinge Σ^s ou Σ^e .

Definição 4.1.16. Uma *órbita deslizante maximal* (ou órbita singular) de Z é uma curva suave $\gamma \subset \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^e}$ que é uma órbita maximal do campo vetorial suave Z^s .

4.2 Órbitas Periódicas, Separatrizes e Ciclos

Com as noções de solução estabelecidas anteriormente, generalizamos agora os conceitos de separatrizes e órbitas periódicas para os sistemas de Filippov.

Devido a complexidade da dinâmica dos sistemas de Filippov em dimensão alta, definimos o conceito de separatrizes apenas para o caso planar, o que será suficiente para o entendimento deste trabalho.

Definição 4.2.1. Seja $p \in U$ um ponto de sela de X em $\overline{\Sigma^+}$ ou de Y em $\overline{\Sigma^-}$, ou uma singularidade distinguida em Σ . Assim, temos dois casos de *separatrizes instáveis*:

1. Se p é um ponto de sela para X em $\overline{\Sigma^+}$, então a separatriz instável de p é a variedade (topológica) invariante instável, denotada por $W^u(p)$, dada pela órbita regular:

$$W^u(p) = \left\{ q \in U; \varphi_Z(t, q) \text{ está definido para } t \in (-\infty, 0) \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_Z(t, q) = p \right\}.$$

Analogamente, se p é um ponto de sela para Y em $\overline{\Sigma^-}$, podemos definir $W^u(p)$.

2. Se p é uma singularidade distinguida, então a separatriz instável de p é uma órbita regular que possui p como ponto de partida. Tal separatriz será denotada por $W_{\pm}^u(p)$, onde o subscrito \pm denota a região Σ^{\pm} para a qual a separatriz parte de p .

Analogamente, definimos as *separatrizes estáveis* $W^s(p)$ e $W_{\pm}^s(p)$.

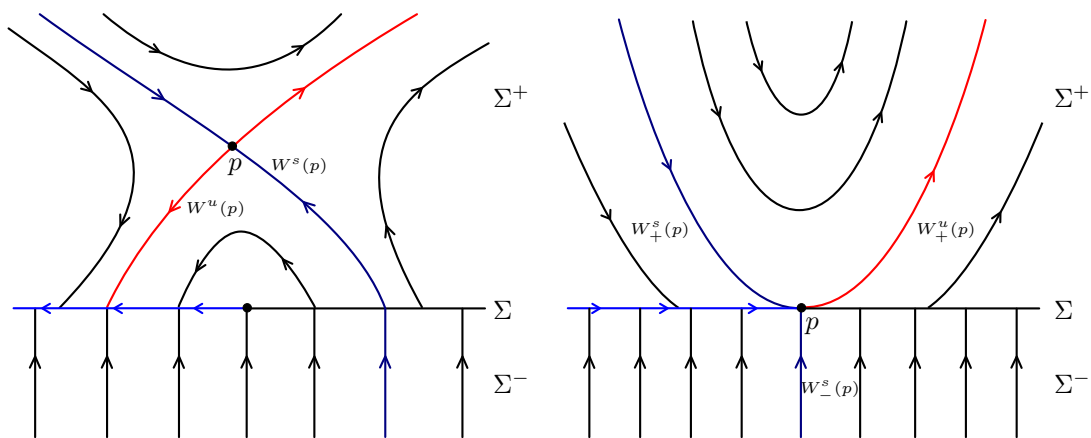


Figura 4.12: Exemplos de separatrizes estáveis e instáveis de uma sela regular (à esquerda) e de uma singularidade distinguida (à direita).

Observamos que, no primeiro caso da definição acima, a trajetória que está sobre a separtriz atinge p somente em tempo infinito, como acontece nos sistemas suaves. Contudo, no segundo caso, tal trajetória pode alcançar a singularidade p em tempo finito.

Definição 4.2.2. Se uma separtriz é estável e instável, simultaneamente, dizemos que ela é uma *conexão de separtrizes*.

Definição 4.2.3. Se p é um ponto de sela de X em $\overline{\Sigma^+}$ ou de Y em $\overline{\Sigma^-}$, dizemos que $\Gamma(p)$ é um *laço homoclínico de costura* se é uma conexão de separtrizes, tal que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi_Z(t, q) = p$ para cada $q \in \Gamma(p)$, e além disso, $\emptyset \neq \Gamma(p) \cap \Sigma \subset \overline{\Sigma^c}$.

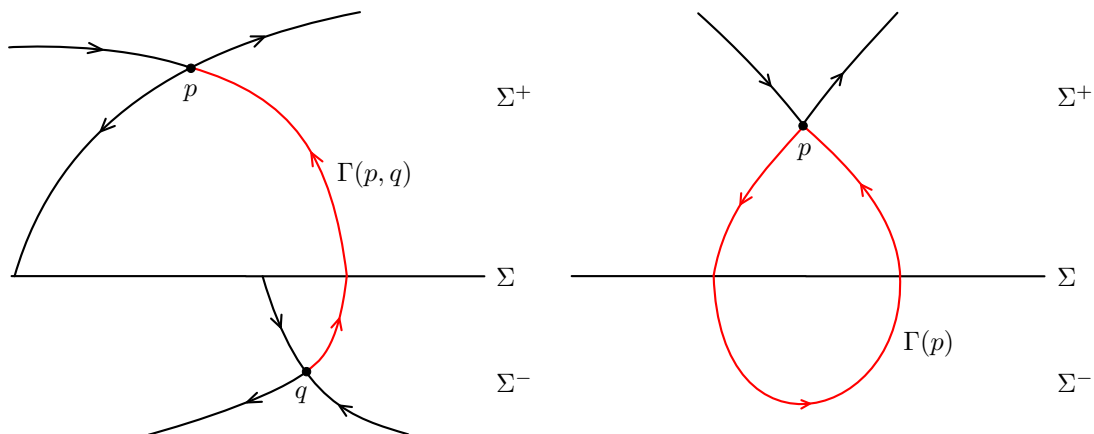


Figura 4.13: Exemplos de uma conexão de separtrizes $\Gamma(p, q)$ entre duas selas regulares p e q (à esquerda), e de um laço homoclínico de costura $\Gamma(p)$ (à direita).

No caso descontínuo, além das órbitas periódicas clássicas dos sistemas X e Y que estão contidas em Σ^+ e Σ^- , respectivamente, existem outras órbitas que intersectam a região de descontinuidade que apresentam comportamentos semelhante ao das órbitas periódicas. Deste modo, temos a motivação para as seguintes definições:

Definição 4.2.4. Uma *órbita periódica regular* é uma órbita regular $\gamma = \{\varphi_Z(t, p); t \in \mathbb{R}\}$ que pertence a $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ e satisfaz $\varphi_Z(t + T, p) = \varphi_Z(t, p)$, para algum $T > 0$. Neste caso, T é chamado de *período* de γ , quando é minimal com respeito a essa propriedade.

Definição 4.2.5. Dizemos que γ é uma *órbita periódica de costura* se é uma órbita periódica regular e $\emptyset \neq \gamma \cap \Sigma \subset \overline{\Sigma^c}$. Caso $\gamma \subset \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, dizemos que γ é uma *órbita periódica padrão*.

Definição 4.2.6. Dizemos que γ é um *ciclo limite* se é uma órbita periódica regular e existe uma vizinhança V de γ tal que $\gamma(q)$ não é uma órbita periódica regular, para todo $q \in V$, onde $\gamma(q)$ é a órbita que passa por q . Em outras palavras, γ é uma órbita periódica regular isolada.

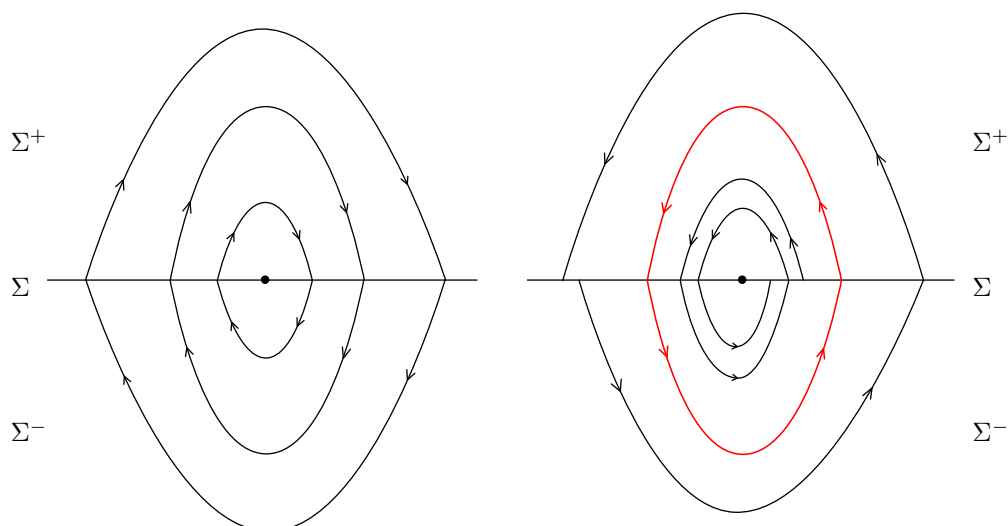


Figura 4.14: Exemplos de um centro de órbitas periódicas regulares, e de um ciclo limite do tipo costura.

Definição 4.2.7. Uma *órbita periódica deslizante* é uma órbita periódica de Z^s .

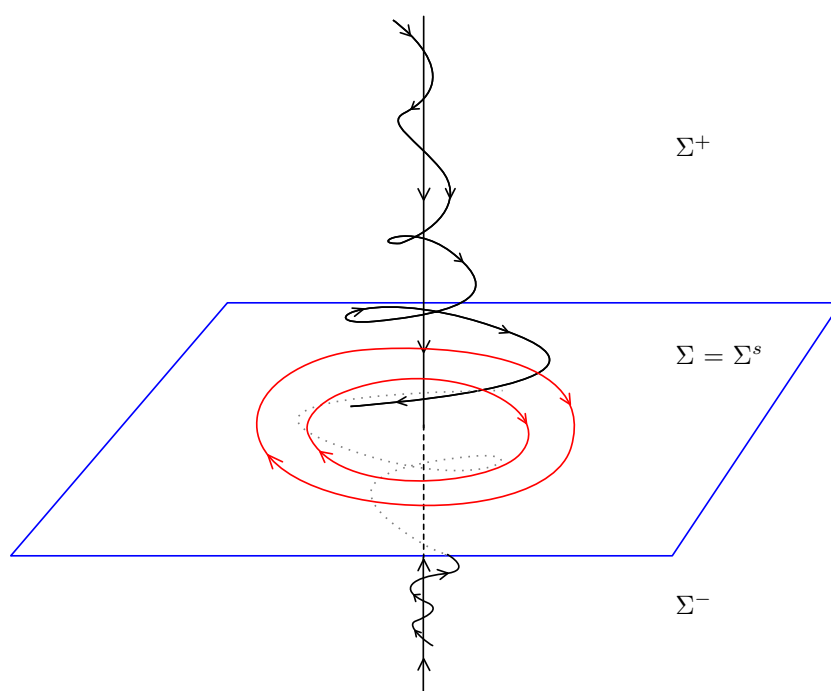


Figura 4.15: Exemplo de órbitas periódicas deslizantes.

Note que as órbitas periódicas deslizantes estão contidas em $\Sigma^s \cup \Sigma^e$, e no caso de sistemas de Filippov planares, tal órbita aparece quando Σ é homeomorfo a um círculo e $\Sigma = \Sigma^s$ ou $\Sigma = \Sigma^e$, como pode ser visto na figura abaixo.

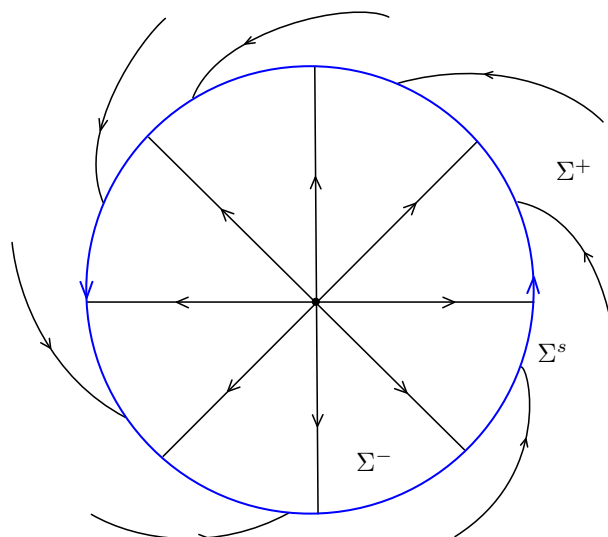


Figura 4.16: Exemplo de sistema com variedade de descontinuidade $\Sigma = \Sigma^s$ homeomorfa a \mathbb{S}^1 .

Das definições de trajetórias maximais, é claro que não podem existir órbitas periódicas composta por movimentos regulares e deslizantes, isto é, formadas por pontos de $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ e por pontos de $\Sigma^s \cup \Sigma^e$, simultaneamente, pois uma única órbita não pode intersectar ambos os conjuntos.

Com isso, para lidar com movimentos periódicos que envolvem ao mesmo tempo movimentos deslizantes e regulares, é necessário estabelecer uma nova definição:

Definição 4.2.8. Um *ciclo periódico* é o fecho de um conjunto finito de pedaços de órbitas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tais que γ_{2k} é um pedaço de órbita deslizante e γ_{2k+1} é uma órbita regular maximal e os pontos de partida e de chegada de γ_{2k+1} pertencem a $\overline{\gamma_{2k}}$ e $\overline{\gamma_{2k+2}}$, respectivamente.

Definimos o *período do ciclo* como a soma dos tempos gastos em cada pedaço de órbita γ_i , $i = 1, \dots, n$.

Além das órbitas periódicas e ciclos, existe outro objeto geométrico importante quando se estuda equivalências topológicas e bifurcações em sistemas de Filippov.

Definição 4.2.9. Definimos um *pseudociclo* como o fecho de um conjunto de órbitas regulares $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tais que as extremidades, isto é, pontos de chegada e de partida, de qualquer γ_i coincide com uma extremidade de γ_{i-1} e outra de γ_{i+1} (e também entre γ_1 e γ_n) formando uma curva homeomorfa a $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de modo que, em algum ponto, dois pontos de chegada ou partida coincidem.

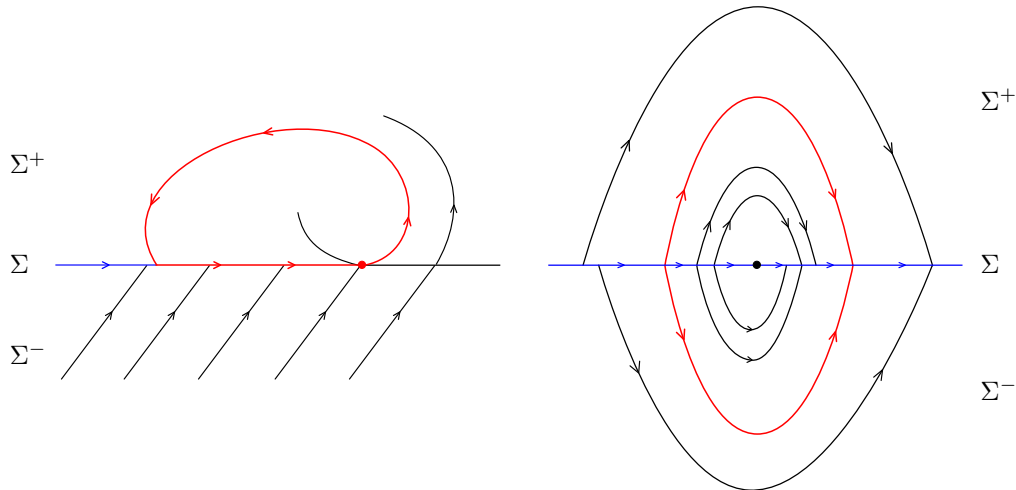


Figura 4.17: Exemplos de um ciclo (à esquerda) e de um pseudociclo (à direita).

Na próxima subseção definimos equivalências topológicas e Σ -equivalências, e mostramos que os objetos definidos acima são preservados por ambas as equivalências.

4.3 Equivalência Topológica de Sistemas de Filippov

Apresentamos agora duas noções de equivalência topológicas para sistemas de Filippov planares. Para isso, considere dois campos vetoriais de Filippov Z e \tilde{Z} definidos em conjuntos abertos U e \tilde{U} de \mathbb{R}^2 , com curvas de descontinuidade Σ e $\tilde{\Sigma}$, respectivamente.

Primeiramente, estabeleceremos o conceito de Σ -equivalência, que é usualmente considerado na literatura dos campos de Filippov:

Definição 4.3.1. Dois sistemas de Filippov Z e \tilde{Z} definidos em abertos U e \tilde{U} , com curvas de descontinuidade $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$, respectivamente, são **Σ -equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação, e leva Σ em $\tilde{\Sigma}$ e órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} .

Note que, qualquer Σ -equivalência leva órbitas regulares em órbitas regulares e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Mais ainda, como ela manda pontos de chegada e de partida em pontos de chegada e de partida, respectivamente, temos que $\overline{\Sigma^c}$, $\overline{\Sigma^s}$ e $\overline{\Sigma^e}$ são preservadas, e portanto leva órbitas deslizantes em órbitas deslizantes, e preserva separatrizes, conexões de separatrizes, órbitas periódicas, ciclos e pseudociclos.

A definição de Σ -equivalência é natural pois, em algumas aplicações, é importante que a variedade de descontinuidade seja preservada. Contudo, do ponto de vista abstrato, não é necessário que a região $\overline{\Sigma^c}$ seja preservada para que Z e \tilde{Z} tenham comportamento qualitativo similar topologicamente. De fato, do ponto de vista topológico, o comportamento do fluxo em um ponto da região de costura e em um ponto regular em $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ é o mesmo. Deste modo, mostrou-se necessário considerar o conceito clássico de equivalência topológica para sistemas de Filippov.

Definição 4.3.2. Dois sistemas de Filippov Z e \tilde{Z} definidos em abertos U e \tilde{U} , com curvas de descontinuidade $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$, respectivamente, são **topologicamente equivalentes** se

existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação, e leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} .

Das definições acima, é claro que se dois sistemas de Filippov são Σ -equivalentes, então eles são topologicamente equivalentes, porém a recíproca não é verdadeira. Analogamente às Σ -equivalências, as equivalências topológicas preservam $\overline{\Sigma^s}$ e $\overline{\Sigma^e}$. Conseqüentemente, também preservam $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ e assim, levam órbitas regulares em órbitas regulares, órbitas deslizantes em órbitas deslizantes e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Além disso, elas também preservam separatrizes, conexões de separatrizes, órbitas periódicas, ciclos e pseudociclos.

Observação 4.3.3. Relembremos a noção de C^r -conjugação para campos vetoriais suaves.

Dados dois campos vetoriais suaves X e \tilde{X} em \mathbb{R}^n com seus respectivos fluxos, $\varphi_X(t, x)$ e $\varphi_{\tilde{X}}(t, x)$, então eles são C^r -conjugados se existe um homeomorfismo $h \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, tal que $h(\varphi_X(t, x)) = \varphi_{\tilde{X}}(t, h(x))$, e neste caso, derivando essa expressão em $t = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} h(\varphi_X(t, x)) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \varphi_{\tilde{X}}(t, h(x)) \right|_{t=0} \\ Dh(\varphi_X(t, x)) \left. \frac{d}{dt} \varphi_X(t, x) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \varphi_{\tilde{X}}(t, h(x)) \right|_{t=0} \\ Dh(x)X(x) &= \tilde{X}(h(x)) \end{aligned}$$

Desta forma, dado $y \in \mathbb{R}^n$, temos que $\tilde{X}(y) = Dh(h^{-1}(y))X(h^{-1}(y))$, e portanto $h_*X = \tilde{X}$, onde $h_*X(p) = Dh(h^{-1}(p))X(h^{-1}(p))$. Assim, concluímos que h é apenas uma mudança de coordenadas.

Não utilizaremos uma versão análoga deste resultado para campos descontínuos, porém usaremos conjugações aplicadas às componentes suaves X e Y do sistema de Filippov $Z = (X, Y)_f$.

Proposição 4.3.4. Considere um difeomorfismo qualquer $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que conjuga, por um lado, X em $\Sigma^+ \subset U$ e \tilde{X} em $\tilde{\Sigma}^+ \subset \tilde{U}$, e por outro lado, Y em $\Sigma^- \subset U$ e \tilde{Y} em $\tilde{\Sigma}^- \subset \tilde{U}$. Então, h conjuga os campos deslizantes Z^s e \tilde{Z}^s , e portanto h nos dá uma equivalência topológica entre $Z = (X, Y)_f$ e $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})_{\tilde{f}}$.

Demonstração. Como h é um difeomorfismo, pela Observação 4.3.3, temos que $h_*X = \tilde{X}$ e $h_*Y = \tilde{Y}$.

Supondo que $\Sigma = \{p \in U; f(p) = 0\}$, temos que $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{p} \in \tilde{U}; \tilde{f}(\tilde{p}) = 0\}$, onde $\tilde{f} = f \circ h^{-1}$.

Lembremos que, se $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida num aberto V de \mathbb{R}^n , então $h_*g = g \circ h^{-1}$.

Mostremos agora que: $h_*(Xf)(\tilde{p}) = h_*Xh_*f(\tilde{p}) = \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})$.

Primeiramente, note que h_*X é um campo em $\overline{\tilde{\Sigma}^+} \subset \tilde{U}$ e que h_*f é uma função real definida em \tilde{U} , logo, o cálculo da derivada de Lie h_*Xh_*f faz sentido.

Para efeitos de cálculo, convencionaremos que o gradiente de uma função g , denotado por ∇g , é dado por um vetor coluna, assim como o valor do campo X em um ponto p . Utilizaremos a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para o produto interno usual de \mathbb{R}^n .

Deste modo:

$$\begin{aligned}
h_*(Xf)(\tilde{p}) &= Xf(h^{-1}(\tilde{p})) \\
&= \langle X(h^{-1}(\tilde{p})), \nabla f(h^{-1}(p)) \rangle \\
&= \langle I_n \cdot X(h^{-1}(\tilde{p})), \nabla f(h^{-1}(p)) \rangle \\
&= \langle (Dh^{-1}(\tilde{p}) \cdot Dh(h^{-1}(\tilde{p}))) \cdot X(h^{-1}(\tilde{p})), \nabla f(h^{-1}(p)) \rangle \\
&= \langle Dh^{-1}(\tilde{p}) \cdot (Dh(h^{-1}(\tilde{p})) \cdot X(h^{-1}(\tilde{p}))), \nabla f(h^{-1}(p)) \rangle \\
&= \langle Dh^{-1}(\tilde{p}) \cdot h_*X(\tilde{p}), \nabla f(h^{-1}(p)) \rangle \\
&= \langle h_*X(\tilde{p}), (Dh^{-1}(\tilde{p}))^{tr} \cdot \nabla f(h^{-1}(p)) \rangle \\
&= \left\langle h_*X(\tilde{p}), \left((\nabla f(h^{-1}(p)))^{tr} \cdot Dh^{-1}(\tilde{p}) \right)^{tr} \right\rangle \\
&= \left\langle h_*X(\tilde{p}), (D(f \circ h^{-1}))(\tilde{p})^{tr} \right\rangle \\
&= \langle h_*X(\tilde{p}), \nabla(f \circ h^{-1})(\tilde{p}) \rangle \\
&= \langle h_*X(\tilde{p}), \nabla(h_*f)(\tilde{p}) \rangle \\
&= h_*Xh_*f(\tilde{p}) \\
&= \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p}).
\end{aligned}$$

Analogamente, $h_*(Yf)(\tilde{p}) = \tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p})$.

Com isso, podemos mostrar que h conjuga os campos deslizantes Z^s e \tilde{Z}^s , ou equivalentemente:

$$(h_*Z^s)(\tilde{p}) = Dh(h^{-1}(\tilde{p}))Z^s(h^{-1}(\tilde{p})) = \tilde{Z}^s(\tilde{p}).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(h_*Z^s)(\tilde{p}) &= Dh(h^{-1}(\tilde{p}))Z^s(h^{-1}(\tilde{p})) \\
&= Dh(h^{-1}(\tilde{p})) \left(\frac{1}{Yf(h^{-1}(\tilde{p})) - Xf(h^{-1}(\tilde{p}))} \left(Yf(h^{-1}(\tilde{p}))X(h^{-1}(\tilde{p})) - Xf(h^{-1}(\tilde{p}))Y(h^{-1}(\tilde{p})) \right) \right) \\
&= Dh(h^{-1}(\tilde{p})) \left(\frac{1}{h_*(Yf)(\tilde{p}) - h_*(Xf)(\tilde{p})} \left(h_*(Yf)(\tilde{p})X(h^{-1}(\tilde{p})) - h_*(Xf)(\tilde{p})Y(h^{-1}(\tilde{p})) \right) \right) \\
&= Dh(h^{-1}(\tilde{p})) \left(\frac{1}{\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})} \left(\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p})X(h^{-1}(\tilde{p})) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})Y(h^{-1}(\tilde{p})) \right) \right) \\
&= \frac{1}{\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})} \left(\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p})Dh(h^{-1}(\tilde{p}))X(h^{-1}(\tilde{p})) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})Dh(h^{-1}(\tilde{p}))Y(h^{-1}(\tilde{p})) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})} \left(\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p})h_*X(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})h_*Y(\tilde{p}) \right) \\
&= \frac{1}{\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})} \left(\tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p})\tilde{X}(\tilde{p}) - \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p})\tilde{Y}(\tilde{p}) \right) \\
&= \tilde{Z}^s(\tilde{p}).
\end{aligned}$$

Portanto, h conjuga os campos deslizantes, e assim, manda órbitas em órbitas, caracterizando uma equivalência topológica entre os sistemas de Filippov Z e \tilde{Z} . \square

Observação 4.3.5. Observe que, todas as equivalências topológicas construídas de acordo com a proposição acima preservam Σ , e portanto são também Σ -equivalências. Logo, para construir equivalências topológicas que não preservam Σ , é necessário que se utilize outras técnicas.

Observação 4.3.6. Note que, se retirarmos a hipótese de diferenciabilidade da Proposição 4.3.4, isto é, se considerarmos que h é apenas um homeomorfismo, então o resultado não é verdadeiro.

De fato, considere os campos definidos em $U = \tilde{U} = \mathbb{R}^2$:

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad \text{e} \quad Z(x, y) = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{se } y > 0, \\ Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } y < 0. \end{cases}.$$

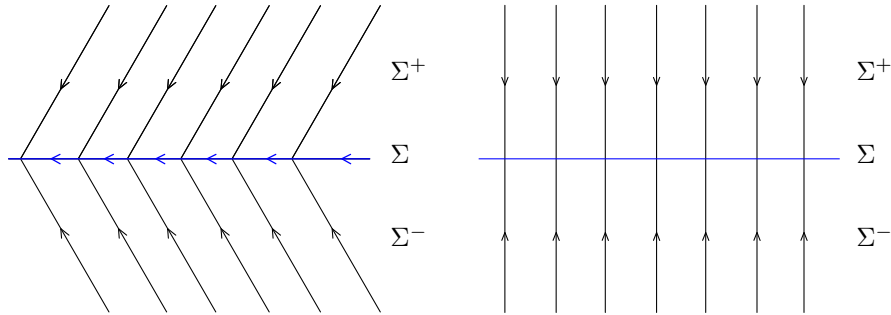


Figura 4.18: Retratos de fase dos campos Z e \tilde{Z} .

Neste caso, $\Sigma = \Sigma^s = \tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^s$ e seja h o homeomorfismo dado por:

$$h(x, y) = \begin{cases} (x - y, y) & y > 0, \\ (x, y) & y = 0, \\ (x + y, y) & y < 0. \end{cases}$$

Note que, h é \mathcal{C}^0 , mas não é \mathcal{C}^1 , conjuga \tilde{X} com X para $y > 0$ e \tilde{Y} com Y para $y < 0$, porém não é uma equivalência topológica entre Z e \tilde{Z} , pois os campos deslizantes são dados por $Z^s(x, 0) = (-1, 0)$ e $\tilde{Z}^s(x, 0) = (0, 0)$, e portanto não podem ser topologicamente equivalentes.

Observação 4.3.7. Ressaltamos, ainda, que devido as várias noções de equivalência para sistemas de Filippov, utiliza-se a mais adequada de acordo com os objetivos de cada estudo (órbitas periódicas, singularidades, órbitas deslizantes e etc.).

Em [21], os autores buscam encontrar uma forma canônica para se estudar sistemas planares descontínuos lineares por partes, cuja descontinuidade é dada por uma reta. Para isso, eles utilizam uma troca de variáveis no sistema que consiste de um homeomorfismo definido em todo o plano.

Tal equivalência topológica preserva a região de costura, e portanto órbitas periódicas costurantes são levadas, através desse homeomorfismo, em órbitas periódicas costurantes. Logo, tais formas canônicas são ferramentas práticas para se estudar ciclos limite costurantes neste contexto.

Conforme observado aqui, como a equivalência não é um difeomorfismo, não temos conjugação entre os campos deslizantes. Contudo, este é um fato irrelevante quando não estamos interessados na dinâmica das órbitas deslizantes.

4.4 O Método do *Averaging* para Sistemas Descontínuos

Com o enfraquecimento das hipóteses do método do *averaging* para sistemas contínuos, e com o atual interesse nos sistemas de Filippov, é natural questionar-se se o método do *averaging* pode ser estendido para sistemas descontínuos.

Recentemente, Llibre, Novaes e Teixeira responderam a essa pergunta, e desenvolveram uma adaptação do método do *averaging* para sistemas descontínuos, que se baseia na Teoria do Grau de Brouwer e na regularização de um sistema de Filippov.

Nessa sessão, temos por objetivo introduzir as principais ideias necessárias para tal generalização e enunciar os resultados obtidos.

4.4.1 A Regularização de Teixeira-Sotomayor

A principal ideia do processo de regularização é aproximar um sistema descontínuo $Z(t, x)$ por uma família a um parâmetro de campos vetoriais contínuos $Z_\delta(t, x)$ de forma que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} Z_\delta(t, x) = Z(t, x).$$

Seja D um aberto de \mathbb{R}^n . Denotamos os pontos de $\mathbb{R} \times D$ por (t, x) , e vamos nos referir à variável t como o tempo. Seja $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 que possui 0 como valor regular, e denote $\Sigma = f^{-1}(0)$.

Sejam $X, Y : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dois campos vetoriais contínuos e assumamos que X, Y e f são T -periódicos na variável t .

Considere o sistema de Filippov:

$$\dot{x} = Z(t, x) = \begin{cases} X(t, x) & \text{se } f(t, x) > 0, \\ Y(t, x) & \text{se } f(t, x) < 0, \end{cases} \quad (4.4.1)$$

e denote $Z = (X, Y)$.

Com a ajuda da função sinal sgn definida em $\mathbb{R} - \{0\}$:

$$sgn(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 0, \\ -1 & \text{se } y < 0, \end{cases} \quad (4.4.2)$$

podemos reescrever (4.4.1) da seguinte forma:

$$\dot{x} = Z(t, x) = F_1(t, x) + sgn(f(t, x))F_2(t, x), \quad (4.4.3)$$

onde:

$$F_1(t, x) = \frac{X(t, x) + Y(t, x)}{2} \text{ e } F_2(t, x) = \frac{X(t, x) - Y(t, x)}{2}.$$

Definição 4.4.1. Uma função contínua $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma **função de transição** se $\phi(u) = -1$ para todo $u \leq -1$, $\phi(u) = 1$ para todo $u \geq 1$ e $\phi'(u) > 0$ para $u \in (-1, 1)$.

Definição 4.4.2. Dada uma função de transição $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a ϕ -**regularização** de $Z = (X, Y)$ é a família a um parâmetro de funções contínuas Z_δ , com $\delta \in (0, 1]$, dada por:

$$Z_\delta(t, x) = \frac{X(t, x) + Y(t, x)}{2} + \phi_\delta(f(t, x)) \frac{X(t, x) - Y(t, x)}{2}, \quad (4.4.4)$$

onde:

$$\phi_\delta(u) = \phi\left(\frac{u}{\delta}\right).$$

Note que um sistema de Filippov admite uma regularização natural em que a função de transição é definida da seguinte forma:

$$\phi(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \geq 1, \\ u & \text{se } -1 < u < 1, \\ -1 & \text{se } u \leq -1. \end{cases} \quad (4.4.5)$$

e é imediato que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_\delta(u) = sgn(u)$.

Em [71], Sotomayor e Teixeira, mostraram que o processo de regularização introduzido acima, aplicado a sistemas descontínuos em \mathbb{R}^2 que possuem uma reta de descontinuidade, fornece a mesma extensão das órbitas através da reta de descontinuidade que a estabelecida pela convenção de Filippov. Em [74], Teixeira generalizou o processo de regularização para campos vetoriais descontínuos definidos em um espaço de dimensão finita.

4.4.2 Teorema Principal

Com a notação introduzida acima, enunciamos abaixo a generalização do método do averaging para sistemas descontínuos:

Teorema 4.4.3 (Método do Averaging para Sistemas Descontínuos). Considere o seguinte sistema descontínuo:

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (4.4.6)$$

com

$$\begin{aligned} F(t, x) &= F_1(t, x) + \operatorname{sgn}(f(t, x))F_2(t, x), \\ R(t, x, \varepsilon) &= R_1(t, x, \varepsilon) + \operatorname{sgn}(f(t, x))R_2(t, x, \varepsilon), \end{aligned}$$

onde $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R_1, R_2 : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e T -periódicas na variável t e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Suponha que f seja de classe C^1 e que possui 0 como valor regular.

Defina a **função promediada**:

$$F_0(x) = \int_0^T F(t, x) dt. \quad (4.4.7)$$

Suponha que as seguintes condições são válidas:

1. F_1, F_2, R_1, R_2 e f são localmente Lipschitz com respeito à variável x .
2. Existe um conjunto aberto e limitado $C \subset D$ tal que, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, cada órbita que inicia em C atinge a região de descontinuidade somente em regiões de costura.
3. Para cada $a \in C$ com $F_0(a) = 0$, existe uma vizinhança $U \subset C$ de a tal que $F_0(z) \neq 0$ para cada $z \in \bar{U} - \{a\}$ e $d_B(F_0, U, a) \neq 0$.

Então, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $x(t, \varepsilon)$ de (4.4.6) tal que $x(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Não demonstraremos o teorema acima neste trabalho, porém a ideia principal de sua prova é estudar o sistema regularizado:

$$\dot{x} = \varepsilon F_\delta(t, x) + \varepsilon^2 R_\delta(t, x, \varepsilon), \quad (4.4.8)$$

onde:

$$\begin{aligned} F_\delta(t, x) &= F_1(t, x) + \phi_\delta(f(t, x))F_2(t, x), \\ R(t, x, \varepsilon) &= R_1(t, x, \varepsilon) + \phi_\delta(f(t, x))R_2(t, x, \varepsilon), \end{aligned}$$

em que ϕ é a função contínua definida em (4.4.5). Para esse sistema contínuo, podemos definir a equação promediada:

$$F_0^\delta(x) = \int_0^T F_\delta(t, x) dt.$$

Com as hipóteses do Teorema 4.4.3 e alguns resultados técnicos, pode-se mostrar que as hipóteses do método do averaging para sistemas contínuos são satisfeitas para esse sistema, e portanto existe uma solução periódica $x_\delta(t, \varepsilon)$ para ε suficientemente pequeno, de forma que $x_\delta(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para cada $\delta \in (0, 1]$.

Com isso, através do estudo das aplicações de Poincaré do sistema (4.4.6) e de (4.4.8), pode-se mostrar que as soluções periódicas da regularização estendem-se a soluções periódicas do sistema descontínuo.

Para uma demonstração detalhada deste resultado, citamos o artigo [51], e além disso, referenciamos na bibliografia diversos trabalhos que exibem aplicações deste método, como por exemplo [44, 45, 46].

Capítulo 5

Ciclos Limite em Sistemas de Filippov com Descontinuidade em \mathbb{S}^1

Atualmente, existe uma grande quantidade de trabalhos sobre sistemas planares descontínuos que são lineares por partes [4, 17, 19, 21, 29], entretanto a maioria dos autores consideraram uma reta como variedade de descontinuidade do sistema.

Para o estudo local de um sistema planar, como por exemplo o comportamento ao redor de uma singularidade, é suficiente estudar sistemas de Filippov que possuem uma reta de descontinuidade, pois toda superfície de descontinuidade regular é localmente uma reta. Porém, para o estudo de comportamentos globais, como a existência e localização de ciclos limite, a variedade de descontinuidade desempenha um papel fundamental para a obtenção de resultados, e assim não se pode ter conclusões gerais a partir do estudo destes sistemas.

Com essa motivação, aliado à pouca quantidade de trabalhos envolvendo outros tipos de descontinuidades além da reta, estudaremos a existência de ciclos limite em sistemas de Filippov que possuem um círculo como variedade de descontinuidade, que representa a mais simples das variedades fechadas 1-dimensionais, e com isso podemos aplicar os conceitos apresentados no capítulo anterior.

Primeiramente, introduziremos a ideia central da Teoria Descontínua de Vogel, que nos motivou a escolher um círculo como variedade de descontinuidade. Na segunda sessão, mostraremos como construir um ciclo limite costurante na configuração centro-foco, e analisaremos a dinâmica do sistema construído. Na terceira sessão, estudamos a existência de um ciclo limite costurante que bifurca do encontro de duas tangências do tipo dobra (dobra-dobra) na configuração centro-sela.

5.1 Teoria Descontínua de Vogel

Considere duas famílias de trajetórias, S e R , geradas por sistemas dinâmicos autônomos definidos no plano, e seja T uma curva delimitante, isto é, uma curva fechada sem auto-intersecção definida no plano.

A dinâmica estudada na Teoria Descontínua de Vogel é descrita a seguir. Seja p um ponto no interior da região delimitada por T , então existe uma curva γ pertencente a família R que passa por p . Considere o ponto $q \in T$ que é atingido pela curva γ , e assumamos que agora o movimento é controlado pela família S , assim, existe uma curva ψ pertencente a S que passa por q . Se a curva ψ não volta a intersectar T , então a trajetória por p termina em q , caso

contrário, o movimento volta a ser controlado pela família R e o processo é iterado novamente.

Em resumo, o comportamento do sistema é governado por R ou S , à medida em que a trajetória atinge a curva delimitante T . Esquemáticamente, temos a seguinte situação:

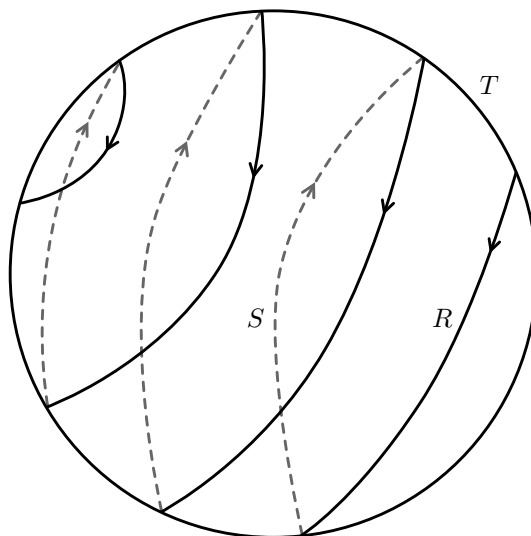


Figura 5.1: Exemplo de uma trajetória nos sistemas de Vogel.

Similarmente aos sistemas de Filippov, temos que estudar sistematicamente como definir as trajetórias, considerando as tangências das famílias R e S com a curva T , assim como as regiões em que as trajetórias apontam pra direções contrárias. Podemos encontrar a descrição destes formalismos em [60].

Este tipo de dinâmica pode ser utilizada para estudar sistemas mecânicos em que um choque ocorre quando a curva T é atingida, assim como o movimento de uma massa que se move em uma superfície formada por dois níveis separados por um penhasco. Outro exemplo de aplicação aparece no estudo dos osciladores dentes de serra, em que um condensador é carregado até que a tensão em seus terminais seja suficiente para produzir uma descarga. Uma interpretação física mais detalhada, assim como outros exemplos de aplicação, podem ser encontrados em [60] e em suas referências.

Em todos os exemplos citados anteriormente, a curva T onde ocorre a troca das leis que governam a dinâmica é uma curva homeomorfa a um círculo. Além disso, os sistemas de Filippov planares são utilizados para modelar exatamente os problemas que envolvem leis diferentes que são trocadas à medida que a trajetória atinja uma determinada curva. Assim, é natural estender os conceitos presentes na Teoria Descontínua de Vogel para a sistemática dos sistemas de Filippov.

Com o intuito de explorar a riqueza desta teoria no contexto dos sistemas não-suaves definidos no capítulo anterior, estudaremos a seguir sistemas de Filippov que são lineares por partes e possuem um círculo como variedade de descontinuidade.

5.2 Centro - Foco

Construiremos nessa sessão um sistema de Filippov com curva de descontinuidade sendo \mathbb{S}^1 , composto por um foco linear no interior da região delimitada por \mathbb{S}^1 e por um centro linear na

região externa, de modo que se tenha a existência de um único ciclo limite. Além disso faremos um esboço do seu retrato de fase.

Devido a dificuldade de manipular algebricamente as soluções de um foco linear, utilizaremos a seguinte estratégia para fazer tal construção:

- Considere um pedaço de trajetória Γ de um foco linear Y .
- A partir dos pontos finais do segmento Γ , construa, se possível, um círculo C que passa por tais pontos e de forma que Γ esteja inteiramente contida na região delimitada por C .
- Construa uma circunferência C' que passa pelos pontos finais do segmento Γ e que não coincida com C .
- Encontre um centro linear X de modo que C' seja invariante pelo seu fluxo.
- Verifique que o campo $Z=(X,Y)$ com variedade de descontinuidade C possui um ciclo limite.

Veremos, ao longo do trabalho, que podemos obter uma família a 2-parâmetros que exhibe o mesmo tipo de ciclo.

5.2.1 Construção da Variedade de Descontinuidade Σ

Considere o campo vetorial Y dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Note que o campo linear Y possui uma singularidade do tipo foco na origem, e que a expressão de seu fluxo é dada por:

$$\varphi_Y(t, x, y) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t)x - e^t \text{sen}(t)y \\ e^t \text{sen}(t)x + e^t \cos(t)y \end{pmatrix}. \quad (5.2.2)$$

Considere a trajetória que passa por $(1, 0)$, ou seja, $\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \text{sen}(t))$. Esta trajetória intersecta o eixo horizontal do plano cartesiano quando $t = 0$ e $t = \pi$, e assim consideraremos o pedaço de trajetória $\Gamma = \{\gamma(t); 0 \leq t \leq \pi\}$ para a construção do círculo C .

Observe que escolhemos Γ desta forma para que tenhamos expressões mais simples no decorrer deste estudo, porém é possível que se escolha outro pedaço de trajetória neste passo da construção.

Com isso, temos dois pontos $p_1 = (1, 0)$ e $p_2 = (-e^\pi, 0)$, e precisamos encontrar um círculo C que passa por eles, e que contenha todos os pontos $\gamma(t)$ com $0 < t < \pi$ em seu interior.

Para isso, encontraremos um ponto que será um candidato a ser o centro do círculo C . Considere o ponto médio do segmento de reta determinado por p_1 e p_2 , que é dado por $p_m = \left(\frac{1-e^\pi}{2}, 0\right)$, e utilizando o Teorema de Pitágoras, podemos encontrar o ponto $c(r) = \left(\frac{1-e^\pi}{2}, c_2(r)\right)$,

de modo que $d(c(r), p_1) = d(c(r), p_2) = r$, onde d denota a distância entre dois pontos. A expressão de $c_2(r)$ é dada por:

$$c_2(r) = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1 + e^\pi}{2}\right)^2}, \quad (5.2.3)$$

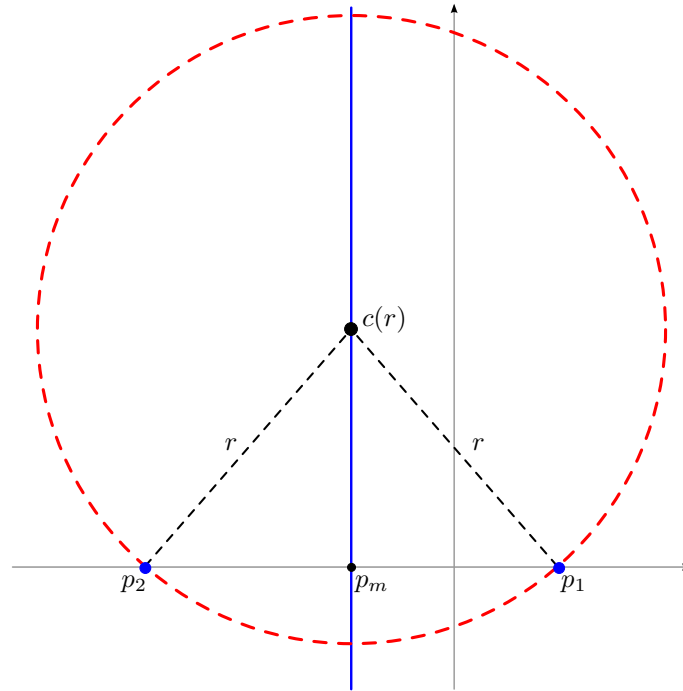


Figura 5.2: Construção do círculo C .

Note que, p_1 e p_2 são simétricos com respeito a reta vertical $x = p_m$ e além disso são pontos do círculo C_r com centro em $c(r)$ e raio r . Observe que a função c_2 está definida para $r > \frac{1}{2}\sqrt{(e^\pi)^2 + 2e^\pi + 1}$, e para simplificar consideraremos $r \geq 13$.

Com isso, definimos uma família de círculos C_r que passam pelos pontos p_1 e p_2 e que possuem raio r . O próximo passo é garantir que Γ esteja inteiramente contida na região delimitada por C_r .

Para isso, considere a seguinte função:

$$D(t, r) = \sqrt{\left(e^t \cos(t) - \frac{1 - e^\pi}{2}\right)^2 + (e^t \sin(t) - c_2(r))^2}, \quad (5.2.4)$$

definida para $0 \leq t \leq \pi$ e $r > 13$. Observe que D é uma função contínua que mede a distância entre o ponto $\gamma(t)$ e o centro c_r do círculo C_r .

Queremos encontrar r de modo que $D(t, r) \leq r$ para cada $0 \leq t \leq \pi$. É claro que se encontrarmos um r_0 que satisfaz a condição exigida, então esta será válida para todo $r \geq r_0$ (pois a região interior do círculo aumenta com o crescimento do raio).

Lema 5.2.1. Se $r \geq 20$, então $D(t, r) \leq r$ para todo $t \in [0, \pi]$.

Demonstração. Pelas observações anteriores, basta demonstrar que esta condição é válida para $r = 20$. Considere $g(t) = D(t, 20) - 20$, definida para $t \in [0, \pi]$. Mostraremos que g assume apenas valores negativos em seu domínio.

De fato, calculando a derivada de g , obtemos que:

$$g'(t) = \frac{e^t \left(\left(e^t \cos(t) - \frac{1-e^\pi}{2} \right) (\cos(t) - \sin(t)) + \left(e^t \sin(t) - \sqrt{400 - \left(\frac{1+e^\pi}{2} \right)^2} \right) (\sin(t) + \cos(t)) \right)}{\sqrt{\left(e^t \cos(t) - \frac{1-e^\pi}{2} \right)^2 + \left(e^t \sin(t) - \sqrt{400 - \left(\frac{1+e^\pi}{2} \right)^2} \right)^2}}. \quad (5.2.5)$$

Além disso, g' possui apenas um zero em $(0, \pi)$, que será denotado por t_0 , e assume valores negativos em $(0, t_0)$ e positivos em (t_0, π) .

Deste modo, vemos que a função g é decrescente em $0 < t < t_0$ e crescente em $t_0 < t < \pi$, além disso, sabemos que t_0 é um ponto de mínimo local de g situado entre $3\pi/4$ e $7\pi/8$.

Observe que:

- $g(0) = g(\pi) = 0$;
- $g(3\pi/4) = -10.77764058\dots$;
- $g(7\pi/8) = -9.47968555\dots$;

Com isso, podemos concluir que $g(t) \leq 0$ para todo $0 \leq t \leq \pi$, como queríamos. \square

Assim, construímos o círculo C procurado no início, que será a variedade de descontinuidade Σ do sistema Z a ser determinado, ou seja, $\Sigma = f^{-1}(0)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x, y) = \left(x - \frac{1 - e^\pi}{2} \right)^2 + \left(y - \sqrt{r^2 - \left(\frac{1 + e^\pi}{2} \right)^2} \right)^2 - r^2. \quad (5.2.6)$$

5.2.2 Determinação do Campo Z

Observe que para determinar o sistema de Filippov Z , resta apenas definirmos o centro linear em Σ^+ , pois já temos a região de descontinuidade Σ e o foco linear Y definido em Σ^- .

O objetivo dessa construção é ter um ciclo limite para o campo Z , e queremos que Γ seja parte deste ciclo limite. Assim, para evitar mais cálculos, podemos considerar C' como o círculo que tem centro em $c'_r = \left(\frac{1-e^\pi}{2}, -c_2(\tilde{r}) \right)$ e raio \tilde{r} , com $\tilde{r} \geq 13$, pelos mesmos argumentos apresentados anteriormente. Considere o seguinte centro linear X :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + c_2(\tilde{r}) = -y - \sqrt{\tilde{r}^2 - \left(\frac{1+e^\pi}{2} \right)^2}, \\ \dot{y} = x - \frac{1-e^\pi}{2}. \end{cases} \quad (5.2.7)$$

É claro que o retrato de fase de X é composto por círculos concêntricos em torno de c'_r , e portanto C' é invariante pelo fluxo de X . Desta forma, a órbita que tem raio \tilde{r} liga-se aos pontos finais de Γ em Σ , o que origina uma órbita periódica $L_{\tilde{r}}$ para o campo Z .

Afirmamos que $L_{\tilde{r}}$ é um ciclo limite. De fato, observe que os pontos em que uma órbita do centro linear X intersecta Σ são simétricos com relação à reta $x = \frac{1-e^\pi}{2}$, porém a única órbita do foco linear Y que intersecta Σ simetricamente (em relação à reta $x = \frac{1-e^\pi}{2}$) é a órbita que contém Γ , desta forma temos que $L_{\tilde{r}}$ é um ciclo limite (que intersecta apenas Σ^c).

Note que, pelos mesmos argumentos, $L_{\tilde{r}}$ é o único ciclo limite de $Z = (X, Y)$.

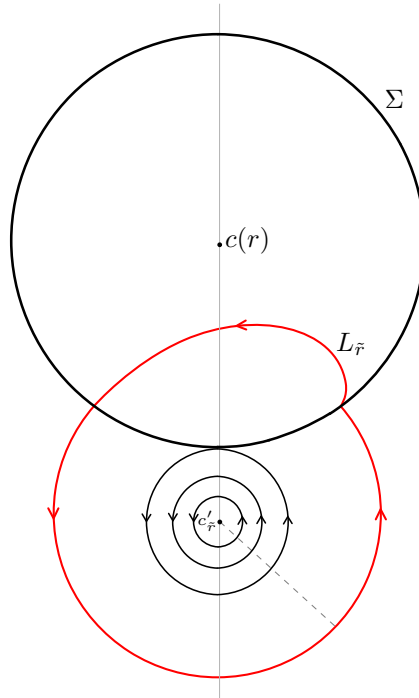


Figura 5.3: Ciclo limite $L_{\tilde{r}}$.

Mais ainda, encontramos uma família a 2-parâmetros de sistemas de Filippov que possuem um único ciclo limite. De fato, para realizar a construção acima, foi utilizado apenas que $r \geq 20$ e $\tilde{r} \geq 13$. Resumimos os resultados obtidos até aqui na seguinte proposição.

Proposição 5.2.2. Considere a família a 2-parâmetros de sistemas de Filippov $Z_{\alpha,\beta} = (X_\beta, Y)$, onde $\alpha \geq 20$, $\beta \geq 13$, $\Sigma_\alpha = f_\alpha^{-1}(0)$ e:

$$X_\beta(x, y) = \begin{pmatrix} -y - \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{1+e^\pi}{2}\right)^2} \\ x - \frac{1-e^\pi}{2} \end{pmatrix}, \quad Y(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \end{pmatrix},$$

$$f_\alpha(x, y) = \left(x - \frac{1-e^\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{1+e^\pi}{2}\right)^2}\right)^2 - \alpha^2.$$

Então $Z_{\alpha,\beta}$ possui um único ciclo limite que intersecta Σ^c (costurante), para todo $\alpha \geq 20$, $\beta \geq 13$.

5.2.3 Esboço do Retrato de Fase do Sistema $Z_{20,15}$

Infelizmente, devido a dificuldade de encontrar intersecções com o círculo, não é possível calcular os pontos de tangência do campo $Z_{\alpha,\beta}$ sem fixar os parâmetros, o que inviabiliza a análise da família $Z_{\alpha,\beta}$ de maneira geral. Por esses motivos, faremos uma análise detalhada de $Z_{20,15}$.

Primeiramente, determinamos as derivadas de Lie do sistema:

$$\begin{aligned} Xf(x, y) = & (2x - 1 + e^\pi) \left(-y - \sqrt{225 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^\pi\right)^2} \right) \\ & + \left(2y - 2\sqrt{400 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^\pi\right)^2} \right) \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^\pi \right), \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

$$Yf(x, y) = (2x - 1 + e^\pi)(x - y) + \left(2y - 2\sqrt{400 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^\pi\right)^2} \right) (x + y). \quad (5.2.9)$$

Utilizando o software de manipulação algébrica Maple, podemos computar os pontos de Σ nos quais uma das derivadas de Lie acima se anula, e assim, encontramos os seguintes pontos de tangência para $Z_{20,15}$:

1. $X_1 = (x, \varphi_1(x))$ e $X_2 = (x, \varphi_2(x))$ para Xf ;
2. $Y_1 = (y_1, \varphi_1(y_1))$ e $Y_2 = (y_2, \varphi_2(y_2))$ para Yf .

Onde:

$$\varphi_1(x) = \sqrt{400 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^\pi\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{-(e^\pi)^2 - 4e^\pi x - 4x^2 + 2e^\pi + 4x + 1599},$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{400 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^\pi\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{-(e^\pi)^2 - 4e^\pi x - 4x^2 + 2e^\pi + 4x + 1599},$$

$$x = 1/2 - 1/2 e^\pi,$$

$$y_1 = -\frac{1}{2} \frac{(e^\pi)^2 + 400\alpha - 201e^\pi - 20\sqrt{2\alpha(e^\pi)^2 - 402e^\pi\alpha + 2(e^\pi)^2 + 400\alpha - 1200e^\pi + 160000 + 200}}{e^\pi - 400},$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} \frac{(e^\pi)^2 + 400\alpha - 201e^\pi + 20\sqrt{2\alpha(e^\pi)^2 - 402e^\pi\alpha + 2(e^\pi)^2 + 400\alpha - 1200e^\pi + 160000 + 200}}{e^\pi - 400},$$

$$\alpha = \sqrt{400 - (1/2 + 1/2 e^\pi)^2}.$$

Numericamente, temos que:

- $X_1 = (-11.0703\dots, 35.9469\dots)$ e $X_2 = (-11.0703\dots, -4.0530\dots)$;

- $Y_1 = (5.7015\dots, 26.8421\dots)$ e $Y_2 = (0.8340\dots, -0.1242\dots)$.

Através da análise dos sinais de Xf e Yf , obtemos as seguintes regiões na variedade de descontinuidade Σ_{20} :

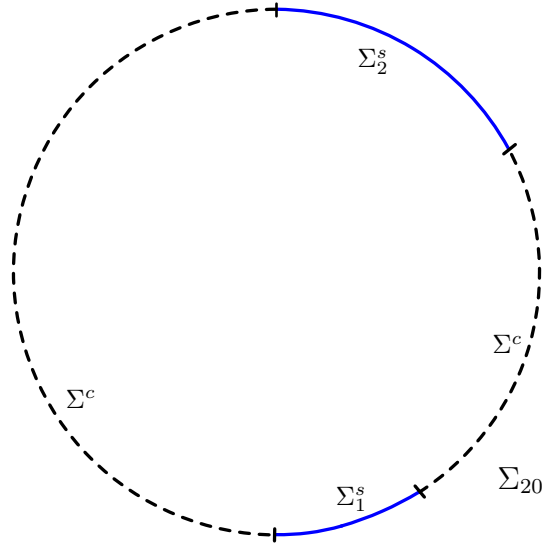


Figura 5.4: Regiões de Σ_{20} .

Assim, podemos calcular o campo deslizante $Z^s = (Z_1^s, Z_2^s)$ em $\Sigma^s = \Sigma_1^s \cup \Sigma_2^s$, através de (4.1.2), porém omitiremos as expressões de Z_1^s e Z_2^s aqui.

Lema 5.2.3. O campo deslizante Z^s é regular em Σ_2^s , e aponta para a esquerda.

Demonstração. De fato, utilizando a carta local $\psi_1 : (-12, 6) \rightarrow \Sigma$ dada por:

$$\psi_1(x) = \left(x, \sqrt{400 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^\pi\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{-(e^\pi)^2 - 4e^\pi x - 4x^2 + 2e^\pi + 4x + 1599} \right), \quad (5.2.10)$$

podemos verificar que, a primeira coordenada do campo deslizante $Z_1^s(\psi_1(x))$ não se anula em nenhum ponto de $Im(\psi)$. Como $\Sigma_2^s \subset Im(\psi)$, concluímos que o campo deslizante Z^s é regular em Σ_2^s , e calculando seu valor em um ponto qualquer, concluímos que Z^s aponta para a esquerda. □

Lema 5.2.4. O campo deslizante Z^s possui um pseudo-equilíbrio hiperbólico repulsor Σ_1^s .

Demonstração. Considere a carta local $\psi_2 : (-12, 1) \rightarrow \Sigma$, dada por:

$$\psi_2(x) = \left(x, \sqrt{400 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^\pi\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{-(e^\pi)^2 - 4e^\pi x - 4x^2 + 2e^\pi + 4x + 1599} \right). \quad (5.2.11)$$

Observamos que $\psi_2((-1, 1)) \subset \Sigma_1^s \subset Im(\psi_2)$, assim, através desta carta, vamos reduzir o problema de analisar a dinâmica do campo Z^s para a análise de um campo definido em um aberto de \mathbb{R} conjugado a Z^s .

Para isso, basta observar que ψ_2 é um difeomorfismo sobre sua imagem, e portanto podemos utilizá-lo para realizar uma mudança de coordenadas no sistema. Assim, o sistema é conjugado a:

$$Z(x) = (D\psi_2^{-1})(\psi_2(x)) \cdot Z^s(\psi_2(x)).$$

Contudo, observe que $\psi_2^{-1}(x, y) = x$, para cada $(x, y) \in \Sigma_1^s$. Logo:

$$Z(x) = Z_1^s(\psi_2(x)).$$

Assim, podemos calcular algebricamente que existe um ponto de equilíbrio $x_0 \in (-1, 1)$ para o campo Z , que pode ser aproximado numericamente por $x_0 \approx -0.1169665851$.

Além disso, temos que $Z'(x_0) \approx 0.9821007723$, o que nos permite concluir que x_0 é um ponto de equilíbrio hiperbólico repulsor.

Com isso, concluímos que o campo Z possui uma singularidade $p_0 = (x_0, \psi_2(x_0)) \in \Sigma_1^s$.

Portanto Z^s possui um único pseudo-equilíbrio repulsor $p_0 = (x_0, \psi_2(x_0))$ em Σ_1^s . □

Com o cálculo explícito de algumas trajetórias do campo, através do software Maple, esboçamos o retrato de fase do campo $Z_{20,15}$:

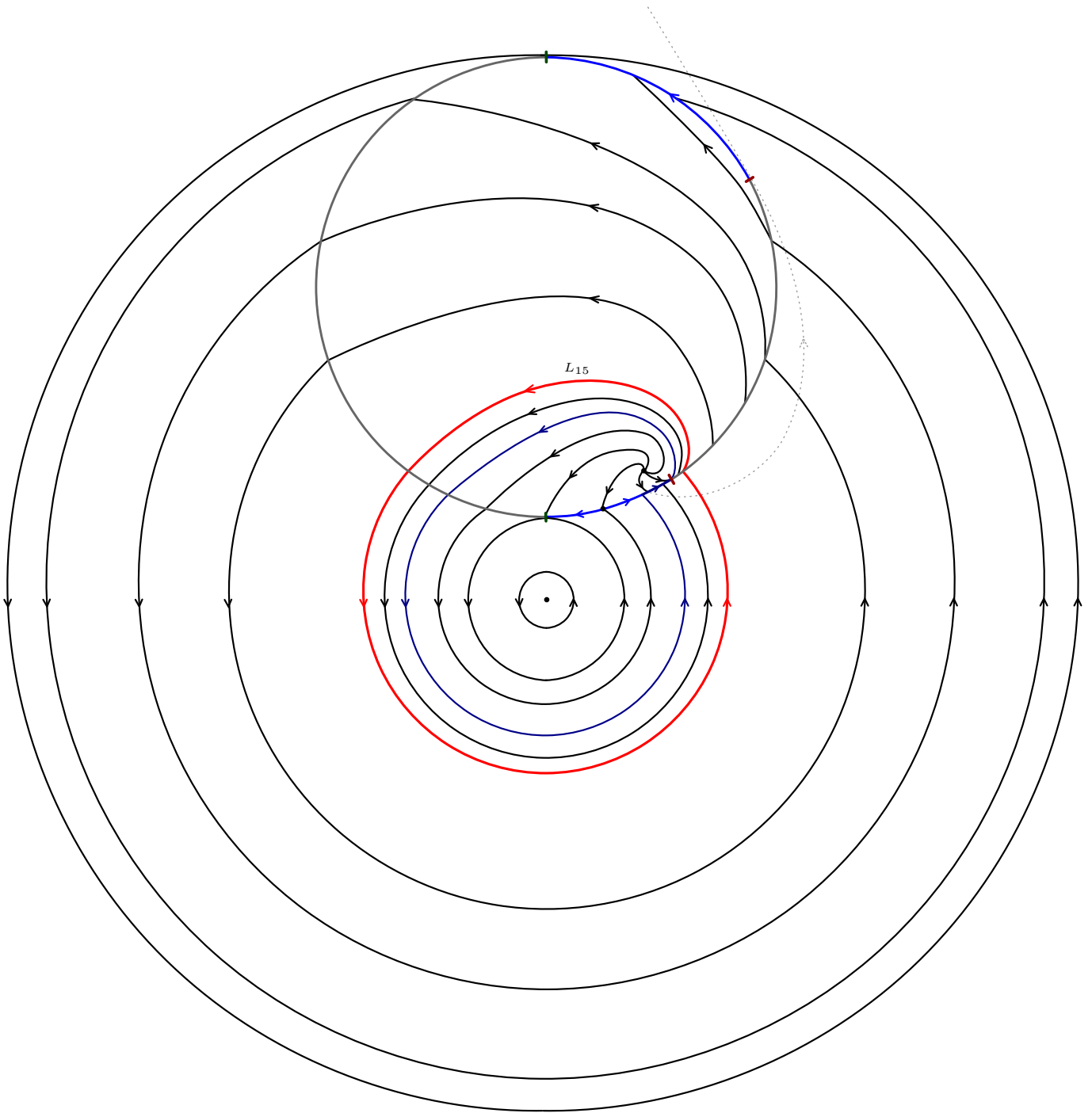


Figura 5.5: Retrato de fase do sistema $Z_{20,15}$.

Concluimos o estudo dessa família observando que o único ciclo limite costurante de $Z_{20,15}$ é repulsor, e além disso, temos a existência de um ciclo deslizante para o sistema.

5.3 Centro - Sela

Nesta sessão, apresentaremos uma família a 1-parâmetro de sistemas de Filippov que possui um ciclo limite bifurcante. Considere o campo descontínuo:

$$Z_\alpha = \begin{cases} X(x, y), & (x, y) \in \Sigma^+, \\ Y_\alpha(x, y), & (x, y) \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (5.3.1)$$

onde:

$$X(x, y) = \begin{pmatrix} -y + 3 \\ x - 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda x + \alpha y \\ -\lambda y \end{pmatrix},$$

$\lambda > 0$ é um número real fixado, e $\Sigma = f^{-1}(0)$ com $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 - 5$.

Assim, X é um centro linear com singularidade em $(3, 2)$ e Y_α é uma sela linear com singularidade na origem.

Observe que o parâmetro α é responsável por um movimento de rotação da variedade estável de Y_α , enquanto a variedade instável permanece imóvel no eixo horizontal do plano cartesiano.

De fato, se A_α é a matriz que define a sela linear Y_α , então calculando os autovalores e autovetores de A_α , obtemos que:

- $v_1 = (1, 0)$ é autovetor de A_α associado ao autovalor $\lambda_1 = \lambda$.
- $v_2 = \left(-\frac{\alpha}{2\lambda}, 1\right)$ é autovetor de A_α associado ao autovalor $\lambda_2 = -\lambda$.

Desta forma, a variedade estável de Y_α é dada por:

$$W_\alpha^s = \left\{ \left(-\frac{\alpha}{2\lambda}y, y \right); x \in \mathbb{R} \right\}, \quad (5.3.2)$$

e sua variedade instável é dada por:

$$W_\alpha^u = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}. \quad (5.3.3)$$

Assim, as variedades invariantes da sela Y_α dividem o plano em quatro quadrantes, estamos interessados no comportamento que ocorre no interior do primeiro quadrante desta sela, e veremos o surgimento de um ciclo limite costurante nesta região.

Note que W_α^u intersecta a variedade de descontinuidade Σ em $(2, 0)$ e a órbita do centro X que passa por esse ponto atinge Σ em $(-1, 3)$.

Como nosso objetivo é o estudo de ciclos limite costurantes no primeiro quadrante, é suficiente analisar os pontos da região de descontinuidade que estão no semicírculo $S \subset \Sigma$ que inicia em $(-1, 3)$ e termina no ponto de tangência do centro T_X^1 , pois fora dessa região não é possível a ocorrência de ciclos limite, conforme pode ser visto na figura abaixo:

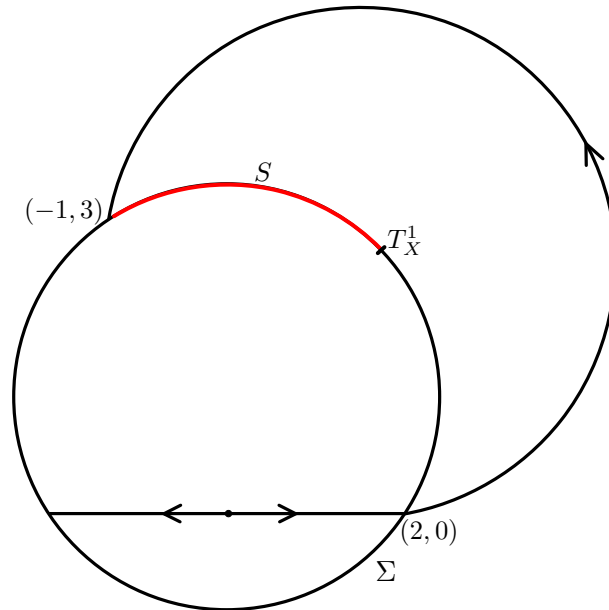


Figura 5.6: Região de Σ a ser analisada.

Calculando as derivadas de X e Y_α , obtemos:

$$Xf(x, y) = 4x - 4y + 4,$$

$$Y_\alpha f(x, y) = 2\alpha xy + 2\lambda x^2 - 2\lambda y^2 + 2\lambda y.$$

Da primeira derivada de Lie, vemos que o centro linear X possui dois pontos de tangência com Σ , que são dados por:

- $T_X^1 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$;
- $T_X^2 = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

Ao longo da análise, utilizaremos a seguinte carta local de Σ para parametrizar a região S :

$$\begin{aligned} \psi : \left(-1, \frac{\sqrt{10}}{2}\right) &\longrightarrow S \\ x &\longrightarrow 1 + \sqrt{5 - x^2}. \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

5.3.1 Identificação de Ciclos Limite Costurantes de Z_α

Dado um ponto $p_x = (x, \psi(x))$ em S , queremos saber se a trajetória de Z_α que passa por p_x é periódica, e para isso temos que encontrar primeiramente o ponto em que a trajetória de X que passa por p_x atinge novamente a variedade de descontinuidade Σ .

Observe que o fluxo de X é dado por:

$$\Phi_X(t, x_0, y_0) = \begin{pmatrix} (3 - y_0)\text{sen}(t) + (x_0 - 2)\cos(t) + 2 \\ (x_0 - 2)\text{sen}(t) - (3 - y_0)\cos(t) + 3 \end{pmatrix}. \quad (5.3.5)$$

Podemos encontrar facilmente um tempo $T(x) \neq 0$, tal que $P_x = \Phi_X(T(x), x, \psi(x)) \in \Sigma$ para todo $-1 < x < \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Assim, temos dois pontos em Σ , p_x e P_x , que estão conectados por uma trajetória de X na região exterior de Σ . Então, a órbita de Z_α que passa por p_x é fechada se, e somente se, a trajetória da sela Y_α que passa por p_x atinge Σ em P_x .

Para simplificar os cálculos, considere a reta horizontal $y = \pi_2(P_x)$, onde π_2 é a projeção canônica na segunda coordenada.

O fluxo de Y_α é dado por:

$$\Phi_{Y_\alpha}(t, x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda}y_0\alpha e^{-\lambda t} + \frac{1}{2\lambda}(\alpha y_0 + 2x_0\lambda)e^{\lambda t} \\ y_0e^{-\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (5.3.6)$$

Note que a segunda coordenada do fluxo de Y_α é muito mais simples do que a primeira coordenada, o que justifica a escolha da reta horizontal acima.

Agora, encontramos o tempo $T_0(x)$ tal que $\pi_2(\Phi_{Y_\alpha}(T_0(x), p_x)) = \pi_2(P_x)$, que é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} 2\lambda T_0(x) &= \ln(t_0(x)) + 2\ln(8x^2\sqrt{5-x^2} - 13x\sqrt{5-x^2} - 5x^2 - 7\sqrt{5-x^2} - 13x + 45) \\ &+ \ln\left((64x^5 - 336x^4 + 208\sqrt{-x^2+5} + 96x^3 + 24t_0(x)x^2 - 754\sqrt{-x^2+5}x^2 \right. \\ &+ 1160x^2 - 39t_0(x)x + 156\sqrt{x^2-5}x + 39\sqrt{-x^2+5}t_0(x) + 205x - 60t_0(x) \\ &\left. + 1040\sqrt{-x^2+5} - 2490)^{-2}\right), \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

onde:

$$t_0(x) = 64x^4 - 208x^3 + 208\sqrt{-x^2+5}x^2 - 320x^2 - 338\sqrt{-x^2+5}x + 520x - 520\sqrt{-x^2+5} + 1245.$$

Com isso, podemos encontrar o ponto $(\pi_1(\Phi_{Y_\alpha}(T_0(x), p_x)), \pi_2(P_x))$ que está na reta horizontal considerada anteriormente (π_1 é a projeção canônica na primeira coordenada).

Assim, demonstramos o seguinte lema:

Lema 5.3.1. A órbita de Z_α que passa por p_x é periódica se, e somente se,

$$\pi_1(\Phi_{Y_\alpha}(T_0(x), p_x)) = \pi_1(P_x).$$

Observe que a equação $\pi_1(\Phi_{Y_\alpha}(T_0(x), p_x) = \pi_1(P_x)$ depende implicitamente de α . Além disso, quando substituimos $t = T_0(x)$ na primeira coordenada de $\Phi_{Y_\alpha}(t, p_x)$ a dependência de T_0 com λ desaparece na exponencial, e portanto a equação anterior depende linearmente de α e de λ .

Resolvendo essa equação, obtemos que:

$$\alpha(x) = \lambda \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (5.3.8)$$

onde P e Q são funções diferenciáveis e Q não se anula em $-1 < x < \frac{\sqrt{10}}{2}$. A expressão de α pode ser conferida no apêndice G.

Podemos verificar ainda que α é uma função decrescente em seu domínio, e portanto injetiva, assim, encontramos um único α para cada $x \in \left(-1, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$. Portanto, para esses valores do parâmetro α , temos uma única órbita periódica no primeiro quadrante, e portanto, um único ciclo limite costurante.

Calculando os limites de $\alpha(x)$, obtemos um intervalo no espaço dos parâmetros em que o sistema possui um único ciclo limite costurante:

$$\alpha_0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{10}}{2}} \alpha(x) = \frac{\sqrt{10} - 2}{3} \lambda \quad \text{e} \quad \alpha_1 = \lim_{x \rightarrow -1} \alpha(x) = \frac{2}{3} \lambda.$$

Assim, provamos que:

Lema 5.3.2. O sistema Z_α possui um único ciclo limite costurante no primeiro quadrante se, e só se, $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$.

Além disso, podemos verificar no gráfico abaixo onde o ciclo limite costurante se encontra de acordo com o valor de α (consideramos $\lambda = 1$, porém nos outros casos é similar, já que α é uma homotetia dessa aplicação para λ qualquer):

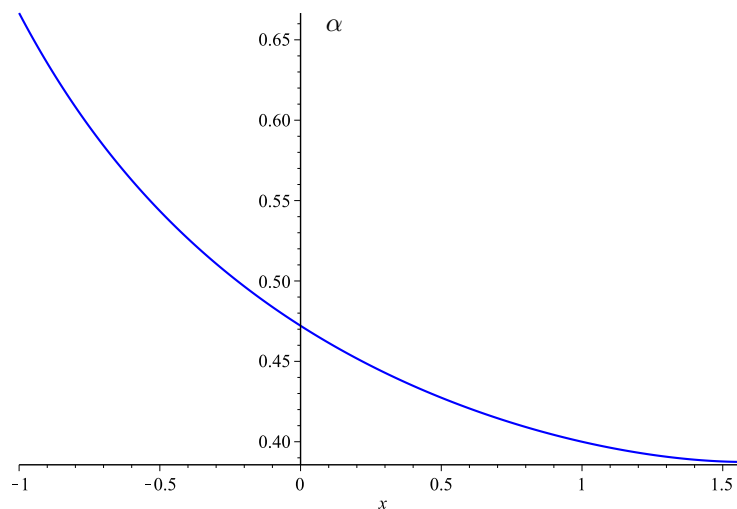


Figura 5.7: Parâmetros que exibem a ocorrência de um ciclo limite costurante que passa por p_x .

5.3.2 Análise da Estabilidade do Ciclo Limite Costurante

Já encontramos a condição de existência de ciclo limite costurante em Z_α , e sabemos que ele é único, quando existe. Nosso próximo objetivo é analisar a estabilidade deste ciclo limite costurante. Para isso, considere a seguinte aplicação de Poincaré:

$$P : \left(-1, \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, \alpha) \longrightarrow \pi_1(P_x) - \pi_1(\Phi_{Y_\alpha}(T_0(x), p_x))$$

Para cada α fixado, temos a seguinte situação:

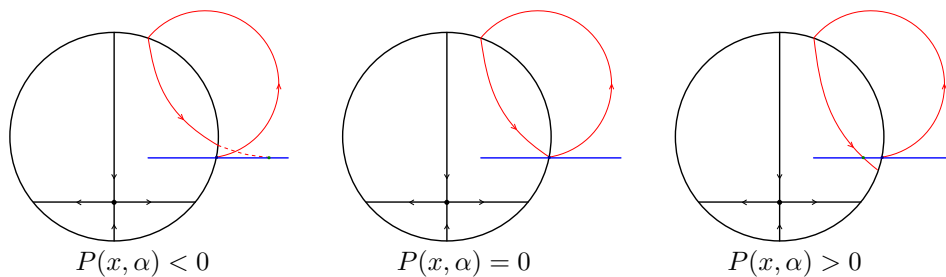


Figura 5.8: Análise da aplicação de Poincaré $P(\cdot, \alpha)$.

Proposição 5.3.3. $P(x, \beta) = 0$ se, e somente se, $\beta \in (\alpha_0, \alpha_1)$ e $\beta = \alpha(x)$.

Demonstração. $P(x, \beta) = 0$ se, e somente se, a órbita Z_β que passa por p_x é periódica. E pelo que vimos até agora, isso ocorre se, e somente se, $\beta \in (\alpha_0, \alpha_1)$ e $\beta = \alpha(x)$. \square

Assim, podemos ver que se fixarmos α , então $P(\cdot, \alpha) = P^\alpha$ possui um único zero quando $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ e não possui zeros, caso contrário.

Através do cálculo de alguns valores de P e com a discussão acima, podemos inferir o seguinte comportamento para a aplicação P^α :

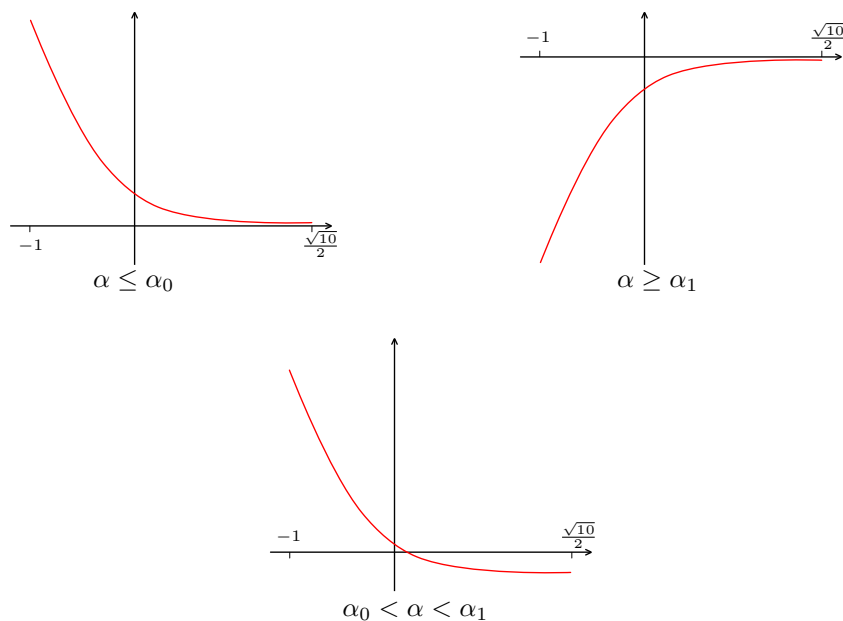


Figura 5.9: Análise da aplicação P^α .

Com isso, demonstramos que:

Proposição 5.3.4. Considere o sistema Z_α , então:

1. Se $\alpha \leq \alpha_0$, então Σ possui uma região repulsora no primeiro quadrante.
2. Se $\alpha_0 \leq \alpha < \alpha_1$, então Z_α possui um único ciclo limite costurante repulsor no primeiro quadrante.
3. Se $\alpha \geq \alpha_1$, então Σ possui uma região atratora no primeiro quadrante.

5.3.3 Diagrama de Bifurcação de Z_α

O primeiro passo para descrever o diagrama de bifurcação do ciclo limite costurante de Z_α no primeiro quadrante é encontrar as regiões de descontinuidade de Σ no primeiro quadrante.

Anteriormente, calculamos os pontos de tangência do centro X com Σ e obtivemos o ponto T_X^1 no primeiro quadrante. O próximo passo é encontrar os pontos de tangência da sela Y_α .

É claro que a sela Y_α possui quatro pontos de tangência com Σ e apenas um está no primeiro quadrante.

Além disso, o parâmetro α é responsável por uma rotação da variedade estável da sela (rotação no sentido anti-horário conforme α aumenta). Deste modo, utilizando a dependência contínua das soluções com respeito aos parâmetros, podemos concluir que o ponto de tangência de Y_α movimenta-se em Σ do mesmo modo, i.e., ele é apenas rotacionado em Σ .

Com a discussão acima, para conhecer as regiões de descontinuidade de Σ no primeiro quadrante, basta analisar alguns casos.

Denote o ponto de tangência da sela Y_α no primeiro quadrante por S_Y . Assim, baseado em cálculos numéricos, temos que:

1. Se $\alpha < \alpha_0$, então S_Y está à direita de T_X^1 em Σ .
2. Se $\alpha = \alpha_0$, então $S_Y = T_X^1$.
3. Se $\alpha > \alpha_0$, então S_Y está à esquerda de T_X^1 em Σ .

Assim, podemos fazer um esboço das regiões de descontinuidades em Σ :

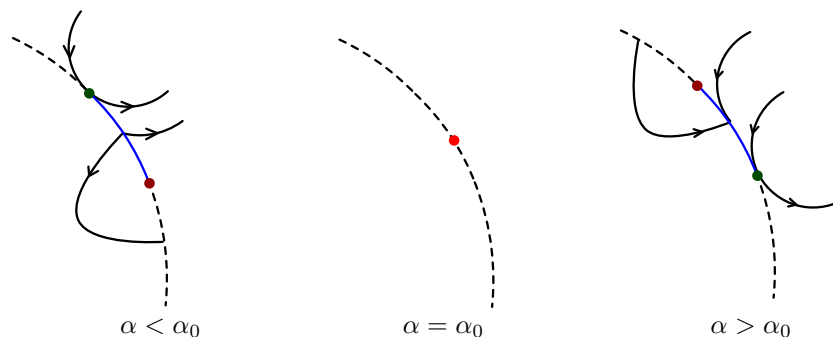


Figura 5.10: Regiões de Descontinuidade em Σ no primeiro quadrante.

Com isso, podemos resumir os resultados obtidos até aqui na seguinte proposição:

Proposição 5.3.5. Considere a família a 1-parâmetro de sistemas de Filippov Z_α (5.3.1), $\alpha_0 = \frac{\sqrt{10}-2}{3}\lambda$ e $\alpha_1 = \frac{2}{3}\lambda$. Então:

1. Se $\alpha < \alpha_0$, então Z_α possui uma região de escape no primeiro quadrante.
2. Se $\alpha = \alpha_0$, então Z_α possui um único ponto de tangência repulsor no primeiro quadrante, que pode ser visto com um foco repulsor.
3. Se $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$, então Z_α possui uma região de deslize e um único ciclo limite costurante repulsor, no primeiro quadrante.
4. Se $\alpha \geq \alpha_1$, então Z_α possui uma região deslize no primeiro quadrante.

Estudaremos agora o que ocorre com as variedades invariantes W^s e W^u , conforme variamos o parâmetro α .

Como observado anteriormente, sabemos que a variedade instável $W^u \cap \{x > 0\}$ intersecta Σ em $(2, 0)$ (região de costura), e através do fluxo de X , volta a atingir a variedade de descontinuidade em $(-1, 3)$, e esta órbita é invariante com respeito ao parâmetro α .

Resolvendo a equação $f\left(-\frac{\alpha}{2\lambda}y, y\right) = 0$, obtemos os pontos nos quais a variedade estável W^s intersecta Σ :

$$y = \frac{4(\lambda + \sqrt{\alpha^2 + 5\lambda^2})\lambda}{\alpha^2 + 4\lambda^2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{4(\lambda - \sqrt{\alpha^2 + 5\lambda^2})\lambda}{\alpha^2 + 4\lambda^2}.$$

Note que, a primeira solução é sempre positiva e portanto corresponde ao ponto $I_s(\alpha)$ em que $W^s \cap \{y > 0\}$ intersecta Σ . Assim, $I_s(\alpha)$ é dado por:

$$I_s(\alpha) = \left(\frac{-2\alpha\sqrt{2\lambda\sqrt{\alpha^2 + 5\lambda^2} + \alpha^2 + 6\lambda^2}}{\alpha^2 + 4\lambda^2}, \frac{4(\lambda + \sqrt{\alpha^2 + 5\lambda^2})\lambda}{\alpha^2 + 4\lambda^2} \right)$$

Considere a seguinte aplicação ζ que mede a diferença entre as primeiras coordenadas dos pontos onde as variedades invariantes atingem Σ :

$$\begin{aligned} \zeta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longrightarrow \frac{-2\alpha\sqrt{2\lambda\sqrt{\alpha^2 + 5\lambda^2} + \alpha^2 + 6\lambda^2}}{\alpha^2 + 4\lambda^2} - (-1) \end{aligned}$$

Observamos que, a dinâmica de nosso interesse (bifurcação do ciclo limite costurante), ocorre quando $\alpha \in (0, \lambda)$, assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que α esteja nesse intervalo.

A aplicação ζ possui as seguintes propriedades:

1. Se $\alpha^* = \frac{2}{3}\lambda$, então $\zeta(\alpha^*) = 0$, e este zero corresponde a uma órbita homoclínica costurante em Z_{α^*} .
2. Se $\alpha < \alpha^*$, então $\zeta(\alpha) > 0$.
3. Se $\alpha > \alpha^*$, então $\zeta(\alpha) < 0$.

Com isso, deduzimos o seguinte comportamento para as variedades invariantes de Z_α no primeiro quadrante:

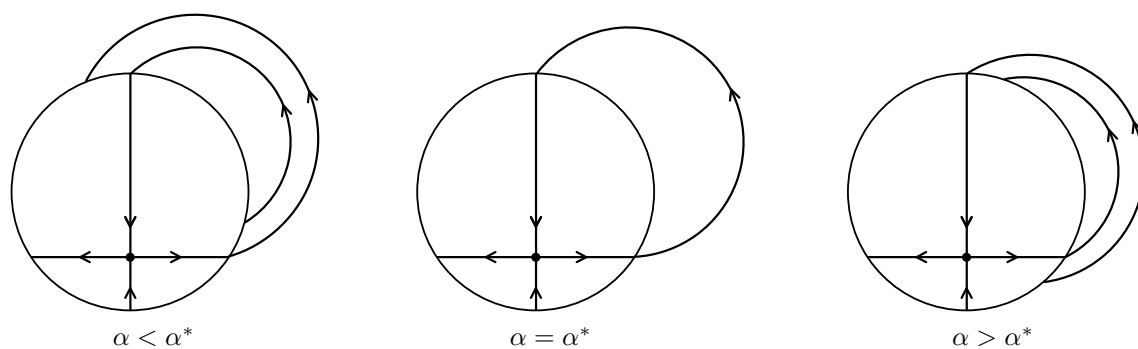


Figura 5.11: Comportamento das Variedades Invariantes.

Assim, estamos aptos a exibir o diagrama de bifurcação de Z_α , quando $\alpha \in (0, 1)$, que consiste em uma **Bifurcação Σ -Hopf-Homoclínica**:

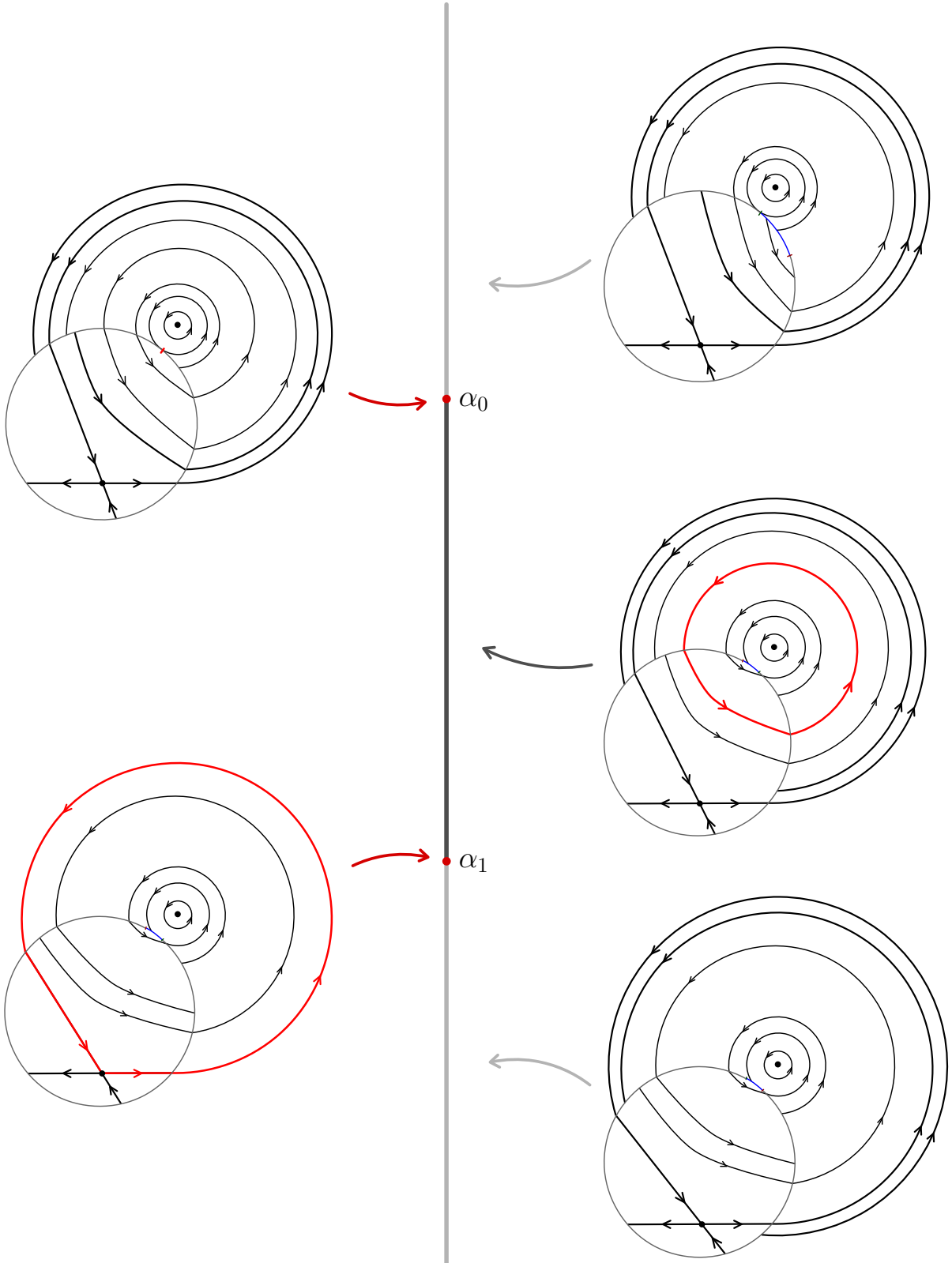


Figura 5.12: Diagrama de Bifurcação de Z_α .

Capítulo 6

Perspectivas Futuras

Apresentamos alguns tópicos que serão desenvolvidos no programa de doutorado e que podem ser vistos como uma continuação deste trabalho.

6.1 Sistemas de Filippov com Descontinuidade em \mathbb{S}^1

Nesta dissertação, apresentamos a existência de ciclos limite em famílias de sistemas descontínuos lineares por partes que possuem um círculo como variedade de descontinuidade. Como extensão desse estudo, investigaremos como essas famílias podem ser generalizadas.

No caso centro-sela, se considerarmos centros da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a, \\ \dot{y} = x + b, \end{cases} \quad (6.1.1)$$

onde a e b são números reais, e Σ um círculo qualquer, então as trajetórias deste centro intersectam Σ simetricamente, em relação ao ponto de tangência, para quaisquer valores de a e b .

Assim, se considerarmos uma sela de traço nulo cuja singularidade coincide com o centro de Σ , temos que suas órbitas também intersectam Σ simetricamente, em relação ao ponto de tangência da sela. Logo, podemos ter apenas duas situações:

- Se as tangências da sela e do centro coincidem, então todas as órbitas, em um setor da sela, são periódicas, e portanto não há a existência de ciclos limite.
- Se as tangências não coincidem, teremos uma região de deslize (ou escape), e nenhuma órbita, em um setor da sela, é periódica, e novamente não temos a existência de ciclos limite.

Isso ocorre devido as simetrias presentes no centro e na sela. Assim, para que se tenha ciclos limite, é necessário que essas simetrias sejam quebradas. Com isso, baseado no exemplo estudado nesta dissertação, surgem as seguintes perguntas:

1. Se a singularidade da sela não coincide com o centro de Σ e se ela possui traço nulo, então quais são as condições para que se tenha ciclos limite?

2. Caso exista, o ciclo limite é único?
3. Como podemos generalizar os resultados dos problemas anteriores para selas de traço qualquer?

No caso centro-foco, já vimos que podemos construir sistemas com um único ciclo limite costurante, porém há o surgimento de ciclos deslizantes também. Assim, gostaríamos de entender melhor como esses ciclos são originados.

Além disso, se considerarmos centros cujo retrato de fase são elipses concêntricas, queremos determinar qual é a quantidade máxima de ciclos limite que podem ser formados em configurações deste tipo.

Finalmente, estudaremos outras configurações, como foco-sela e sela-sela, em busca de determinar a existência e quantidade de ciclos limite para esses sistemas.

6.2 Sistemas Dinâmicos Não-Suaves no Toro

Investigaremos a dinâmica descontínua presente em um toro, e para isso, estabeleceremos uma maneira rigorosa e eficaz de definir campos vetoriais descontínuos nesta variedade.

Considere o toro \mathbb{T} como o espaço quociente gerado através do quadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ com a relação de equivalência:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 & \text{e} & y_1 - y_2 = 0 \text{ ou } 1, \\ & \text{ou} & \\ y_1 = y_2 & \text{e} & x_1 - x_2 = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

Geometricamente, temos a seguinte identificação:

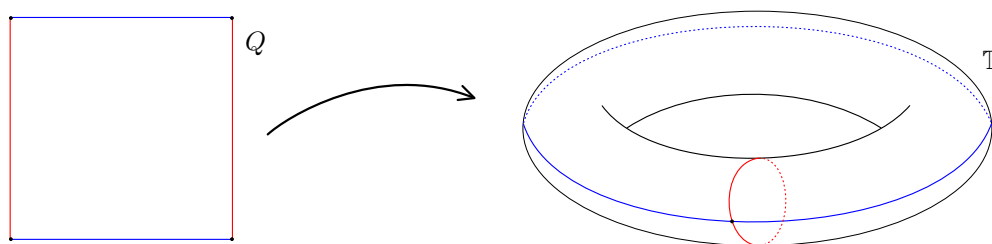


Figura 6.1: Identificação entre Q/\sim e \mathbb{T} .

A priori, podemos obter um comportamento descontínuo através de dois modos de definição para campos:

6.2.1 Campos Descontínuos em \mathbb{T} do tipo 1

Motivado pela convenção de Filippov apresentada neste trabalho, considere duas retas de descontinuidade em Q , sendo uma delas a reta $y = 0$ que é identificada com a reta $y = 1$, e a

outra a reta $y = 1/2$ (sem perda de generalidade para os nossos fins). Isto é, temos a seguinte situação:

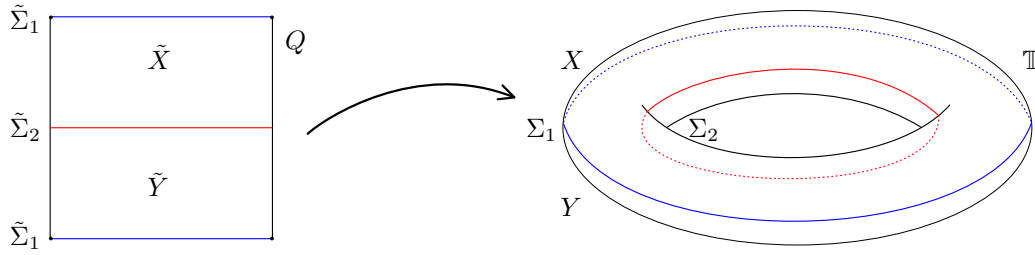


Figura 6.2: Campos descontínuos em \mathbb{T} do tipo 1.

E assim, podemos aplicar as definições de trajetória local estudadas neste trabalho. Matematicamente, temos que:

Definição 6.2.1. Se $\pi : Q \rightarrow \mathbb{T}$ é a projeção quociente da relação de equivalência definida acima, então dizemos que $Z = (X, Y)$ é um **campo descontínuo do tipo 1** em \mathbb{T} se:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & \text{se } (x, y) \in \pi([0, 1] \times (1/2, 1)) \\ Y(x, y), & \text{se } (x, y) \in \pi([0, 1] \times (0, 1/2)) \end{cases}, \quad (6.2.1)$$

onde X e Y são campos diferenciáveis definidos em $\overline{\pi([0, 1] \times (1/2, 1))}$ e $\overline{\pi([0, 1] \times (0, 1/2))}$, respectivamente.

Seja Ω_1 o espaço dos campos descontínuos do tipo 1 munido com a topologia $\mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^r$.

Observe que, utilizando esse tipo de definição, podemos construir campos descontínuos no toro a partir de campos \tilde{X} e \tilde{Y} em \mathbb{R}^2 , desde que estes satisfaçam:

$$\tilde{X}(0, y) = \tilde{X}(1, y) \text{ e } \tilde{Y}(0, y) = \tilde{Y}(1, y), \text{ para todo } y \in [0, 1].$$

Além disso, sabe-se que campos \mathbb{Z}_2 -reversíveis definem campos suaves em cilindros (ver [56]), e portanto, a partir de algumas adaptações, podem ser usados para os objetivos acima.

6.2.2 Campos descontínuos em \mathbb{T} do tipo 2

Outro modo bastante natural de se obter uma dinâmica descontínua é considerar um campo diferencial X em Q , e estudar o seu comportamento em ∂Q .

Assim, pretendemos estudar os campos da seguinte forma:

Definição 6.2.2. Se $\pi : Q \rightarrow \mathbb{T}$ é a projeção quociente da relação de equivalência definida acima, então dizemos que Z é um **campo descontínuo do tipo 2** em \mathbb{T} se:

$$Z(x, y) = X(x, y), \text{ se } (x, y) \in \pi((0, 1) \times (0, 1)), \quad (6.2.2)$$

onde X é um campo em \mathbb{T} induzido por um campo diferenciável \tilde{X} em Q .

Seja Ω_2 o espaço dos campos descontínuos do tipo 2 munido com a topologia \mathcal{C}^r .

Neste caso, num primeiro momento, não podemos seguir as definições de [24], já que a região de descontinuidade gerada não é uma variedade.

Contudo, tal região deixa de ser uma variedade apenas por um ponto (a saber, $\pi((0,0))$), motivados por [5], tal “problema” pode ser contornado se assumirmos que $p = \pi((0,0))$ é um vértice (como em [5]), e possui o comportamento de uma singularidade distinguida. Nos outros pontos podemos usar as definições de [24].

Com isso, temos a seguinte situação:

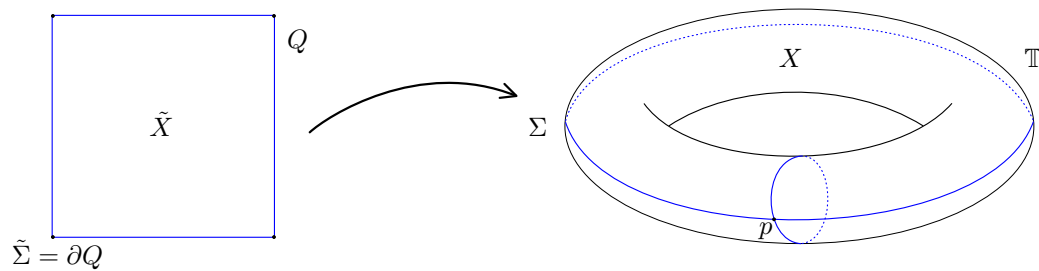


Figura 6.3: Campos descontínuos em \mathbb{T} do tipo 2.

Observe que com esta definição, existe uma facilidade maior de produzir campos descontínuos.

Além disso, incentivados por [5], podemos definir a seguinte noção de estabilidade estrutural para esses campos:

Definição 6.2.3. Dizemos que dois campos descontínuos do tipo 2, Z_1 e Z_2 , são **orbitalmente equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ que leva as órbitas de Z_1 em órbitas de Z_2 , preserva a orientação das órbitas e $h(\pi(\partial Q)) = \pi(\partial Q)$.

Se Z possui uma vizinhança \mathcal{U} em Ω_2 , de forma que Z' é orbitalmente equivalente à Z , para todo $Z' \in \mathcal{U}$, então Z é **estruturalmente estável**.

6.2.3 Objetivos

Com as ideias introduzidas aqui, gostaríamos de responder as seguintes perguntas:

- Quais são os campos descontínuos do tipo 1 e 2 que estruturalmente estáveis em Ω_1 e Ω_2 , respectivamente?
- Qual é o comportamento dos pontos de tangência para estas classes de campos?
- Quais são as bifurcações de codimensão 1 em Ω_1 e Ω_2 ?
- Quais são os ciclos limite que podem ser formados nessas configurações?

6.3 Ciclos Limite Originados de T-Singularidades

Atualmente, existe uma tendência a se estudar sistemas descontínuos em dimensão mais alta. Assim, também pretendemos estudar alguns tópicos em dimensão 3.

Sejam $\Sigma_1 = \{(x, -1, z); x, z \in \mathbb{R}\}$ e $\Sigma_2 = \{(x, 1, z); x, z \in \mathbb{R}\}$ planos de descontinuidade que dividem o espaço tridimensional em 3 regiões:

1. $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y < -1\}$,
2. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |y| < 1\}$,
3. $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y > 1\}$,

Considere agora três campos diferenciais X , Y e Z definidos em \bar{L} , \bar{C} e \bar{R} , respectivamente. Assim, podemos definir campos descontínuos $W = (X, Y, Z)$ nessa configuração, e utilizar os conceitos de [24] para definir o campo W em Σ_1 e Σ_2 , assim como a sua solução.

Definição 6.3.1. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável que possui 0 como valor regular, e X um campo vetorial em \mathbb{R}^3 . Definimos a **derivada de Lie** de X com respeito a f no ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como:

$$Xf(x, y, z) = \langle X(x, y, z), \nabla f(x, y, z) \rangle \quad (6.3.1)$$

Definição 6.3.2. Nas notações da definição acima, dizemos que X possui uma **curva de dobras** com a superfície $\Sigma = f^{-1}(0)$, se a equação $Xf(x, y, z) = 0$ restrita a Σ define uma curva γ_X em Σ homeomorfa a \mathbb{R} e além disso:

$$X^2f(x, y, z) = X(Xf)(x, y, z) \neq 0 \quad \forall (x, y, z) \in \gamma_X.$$

Definição 6.3.3. Dizemos que um ponto $p \in \Sigma_1$ é uma **T-singularidade** (ou singularidade de Teixeira) quando os campos X e Y possuem uma curva de dobras com Σ_1 e, se γ_X e γ_Y são as curvas de tangência, temos que $p \in \gamma_X \cap \gamma_Y$. Analogamente, temos definidas as T-singularidades em Σ_2 .

Pretendemos investigar a seguinte classe de sistemas descontínuos $W = (X, Y, Z)$:

- Assuma que X e Y possuem uma dobra com Σ_1 , e que Y e Z possuem uma dobra com Σ_2 ;
- γ_X^1 e γ_Y^1 são retas que passam por $p_1 = (0, -1, 0)$, e portanto p_1 é uma T-singularidade em Σ_1 ;
- γ_Y^2 e γ_Z^2 são retas que passam por $p_2 = (0, 1, 0)$, e portanto p_2 é uma T-singularidade em Σ_2 ;
- γ_Y^2 é um translação horizontal da reta γ_Y^1 .

Deste modo, temos a seguinte configuração:

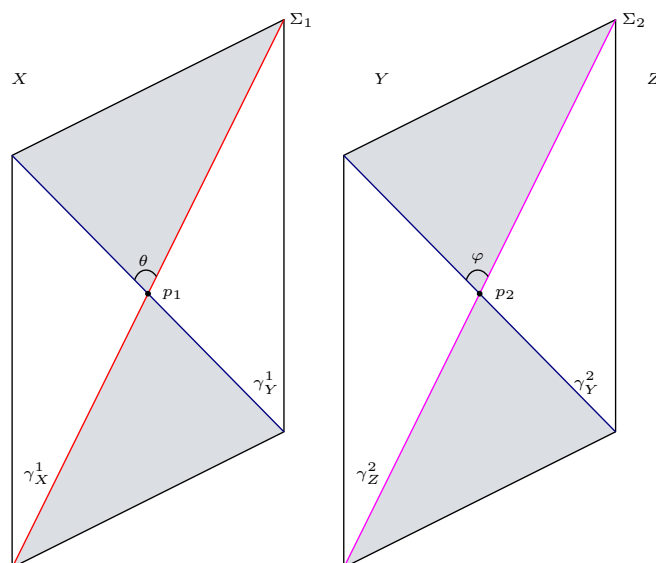


Figura 6.4: Configuração de um campo descontínuo em \mathbb{R}^3 com duas T-singularidades.

Na figura acima, a área hachurada nos planos de descontinuidade corresponde a uma região de deslize/escape, enquanto a área em branco corresponde a uma região de costura.

Neste contexto, gostaríamos de responder as seguintes perguntas:

- Quando há a formação de um ciclo limite que passa pelas três regiões R , C e L , nesta configuração?
- Quantos ciclos limite deste tipo podem coexistir nesses sistemas?
- Quais condições sobre os ângulos θ e φ entre as retas de tangências devem ser impostas para que haja ciclos limite?
- Os ciclos limite, quando existem, são persistentes a pequenas perturbações de θ e φ ?

Para atacar esse problema, utilizaremos o método das closing equations que vem produzindo muitos resultados em problemas similares, como pode ser visto em [54] e [20].

Referências Bibliográficas

- [1] O. B. Almeida, *Teoria do grau e aplicações*, 2006.
- [2] A. A. Andronov, A. A. Vitt, and S. E. Khaikin, *Theory of oscillators*, Translated from the Russian by F. Immirzi; translation edited and abridged by W. Fishwick, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto, Ont., 1966.
- [3] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *An introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [4] J. C. Artés, J. Llibre, J. C. Medrado, and M. A. Teixeira, *Piecewise linear differential systems with two real saddles*, *Math. Comput. Simulation* **95** (2014), 13–22.
- [5] M. E. Broucke, C. C. Pugh, and S. N. Simić, *Structural stability of piecewise smooth systems*, *Comput. Appl. Math.* **20** (2001), no. 1-2, 51–89, The geometry of differential equations and dynamical systems.
- [6] F. E. Browder, *Fixed point theory and nonlinear problems*, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **9** (1983), no. 1, 1–39.
- [7] A. Buică and J. Llibre, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, *Bull. Sci. Math.* **128** (2004), no. 1, 7–22.
- [8] C. Chicone and M. Jacobs, *Bifurcation of limit cycles from quadratic isochrones*, *Journal of Differential Equations* **91** (1991), no. 2, 268 – 326.
- [9] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, Robert E. Krieger, Malabar, Florida, 1984.
- [10] G. T. da Silva, *Introdução aos sistemas dinâmicos planares*, relatório de iniciação científica, PIBIC/Unicamp, 2014.
- [11] M. di Bernardo, C. J. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk, *Piecewise-smooth dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences, vol. 163, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2008, Theory and applications.
- [12] H. Dulac, *Sur les cycles limites*, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **51** (1923), 45–188 (fre).
- [13] F. Dumortier and C. Li, *On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Liénard equations*, *Nonlinearity* **9** (1996), no. 6, 1489–1500.

- [14] ———, *Quadratic Liénard equations with quadratic damping*, J. Differential Equations **139** (1997), no. 1, 41–59.
- [15] F. Dumortier and R. Roussarie, *Abelian integrals and limit cycles*, Journal of Differential Equations **227** (2006), no. 1, 116 – 165.
- [16] J. Ecalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de dulac*, Actualités mathématiques, Hermann, Paris, 1992.
- [17] R. D. Euzébio and J. Llibre, *On the number of limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two pieces separated by a straight line*, J. Math. Anal. Appl. **424** (2015), 475–486.
- [18] A. F. Filippov and F. M. Arscott, *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Mathematics and its applications. Soviet series, Kluwer Academic Publ, Dordrecht, 1988.
- [19] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo, and F. Torres, *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones*, International Journal of Bifurcation and Chaos **08** (1998), no. 11, 2073–2097.
- [20] E. Freire, E. Ponce, and J. Ros, *The focus-center-limit cycle bifurcation in symmetric 3D piecewise linear systems*, SIAM J. Appl. Math. **65** (2005), no. 6, 1933–1951. MR 2177733 (2006i:34090)
- [21] E. Freire, E. Ponce, and F. Torres, *Canonical discontinuous planar piecewise linear systems*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **11** (2012), no. 1, 181–211.
- [22] J. Giné, M. Grau, and J. Llibre, *Averaging theory at any order for computing periodic orbits*, Phys. D **250** (2013), 58–65.
- [23] J. Ginoux, *Henri poincaré et l'émergence du concept de cycle limite.*, arXiv:1501.03281v1 (2015).
- [24] M. Guardia, T. M. Seara, and M. A. Teixeira, *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems*, J. Differential Equations **250** (2011), no. 4, 1967–2023.
- [25] M. Han and P. Yu, *Bifurcation of limit cycles in quadratic hamiltonian systems with various degree polynomial perturbations*, Chaos, Solitons and Fractals: the interdisciplinary journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena **45** (2012), no. 6, 772–794 (eng).
- [26] ———, *Normal forms, melnikov functions and bifurcations of limit cycles*, Springer Publishing Company, Incorporated, 2014.
- [27] M. Han and W. Zhang, *On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems*, J. Differential Equations **248** (2010), no. 9, 2399–2416.
- [28] D. Hilbert, *Mathematical problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **8** (1902), no. 10, 437–479.
- [29] S. M. Huan and X. S. Yang, *Existence of limit cycles in general planar piecewise linear systems of saddle-saddle dynamics*, Nonlinear Anal. **92** (2013), 82–95.

- [30] Y. Ilyashenko, *Centennial history of hilbert's 16th problem*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S), 2003–34001.
- [31] ———, *Singular points and limit cycles of differential equations in the real and complex plane*, Preprint NIVTS AN SSSR (1982), 38.
- [32] ———, *Dulac's memoir "on limit cycles" and related topics of the theory of differential equations*, Russian Math. Surveys **40** (1985), no. 6, .41–78.
- [33] ———, *Finiteness theorems for limit cycles*, Russian Mathematical Surveys **45** (1990), no. 2, 129.
- [34] Y. Ilyashenko and J. Llibre, *A restricted version of Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields.*, Mosc. Math. J. **10** (2010), no. 2, 317–335 (English).
- [35] J. Itikawa, J. J. Llibre, and D. D. Novaes, *A new result on averaging theory for a class of discontinuous planar differential systems with applications*, preprint (2015).
- [36] j. Giné and J. Llibre, *Limit cycles of cubic polynomial vector fields via the averaging theory*, Nonlinear Analysis **66** (2007), no. 8, 1707–1721 (eng).
- [37] S. Karlin and W. J. Studden, *Tchebycheff systems: With applications in analysis and statistics*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XV, Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1966.
- [38] Y. A. Kuznetsov, S. Rinaldi, and A. Gragnani, *One-parameter bifurcations in planar filippov systems*, Int. J. Bifurc. Chaos **13** (2003), 215–218.
- [39] S. Li, Y. Zhao, and J. Li, *On the number of limit cycles of a perturbed cubic polynomial differential center*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **404** (2013), no. 2, 212 – 220.
- [40] A. Lins, W. de Melo, and C. C. Pugh, *On Liénard's equation*, Geometry and topology (Proc. III Latin Amer. School of Math., Inst. Mat. Pura Aplicada CNPq, Rio de Janeiro, 1976), Springer, Berlin, 1977, pp. 335–357. Lecture Notes in Math., Vol. 597.
- [41] J. Llibre, *Periodic solutions via averaging theory*, Notas do Advanced Course RTNS2014 oferecido em Bellaterra (CRM), Janeiro 27-31, 2014.
- [42] J. Llibre, B. D. Lopes, and J. R. De Moraes, *Limit cycles for a class of continuous and discontinuous cubic polynomial differential systems*, Qual. Theory Dyn. Syst. **13** (2014), no. 1, 129–148.
- [43] J. Llibre, R. M. Martins, and M. A. Teixeira, *Periodic orbits, invariant tori, and cylinders of Hamiltonian systems near integrable ones having a return map equal to the identity*, Journal of Mathematical Physics **51** (2010), no. 8, 082704.
- [44] J. Llibre and A. C. Mereu, *Limit cycles for discontinuous generalized Lienard polynomial differential equations*, Electron. J. Differential Equations (2013), No. 195, 8.
- [45] ———, *Limit cycles for discontinuous quadratic differential systems with two zones*, J. Math. Anal. Appl. **413** (2014), no. 2, 763–775.

- [46] J. Llibre, A. C. Mereu, D. D. Novaes, and M. A. Teixeira, *Averaging theory for discontinuous piecewise differential systems*, J. Differential Equation **258** (2015), 4007–4032.
- [47] J. Llibre, D. D. Novaes, and M. A. Teixeira, *Corrigendum: Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree (2014 nonlinearity 27 563)*, Nonlinearity **27** (2014), no. 9, 2417.
- [48] ———, *Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree*, Nonlinearity **27** (2014), no. 3, 563–583.
- [49] ———, *Limit cycles bifurcating from the periodic orbits of a discontinuous piecewise linear differential center with two zones*, to appear in Int. J. Bifurc. Chaos (2015).
- [50] ———, *Maximum number of limit cycles for certain piecewise linear dynamical systems*, preprint (2015).
- [51] ———, *On the birth of limit cycles for non-smooth dynamical systems*, Bull. Sci. Math. (2015).
- [52] ———, *On the periodic solutions of discontinuous piecewise differential systems*, arXiv:1504.03008 (2015).
- [53] J. Llibre and E. Ponce, *Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms **19** (2012), no. 3, 325–335.
- [54] J. Llibre, E. Ponce, and J. Ros, *Algebraic determination of limit cycles in a family of three-dimensional piecewise linear differential systems*, Nonlinear Analysis **74** (2011), no. 17, 6712–6727 (eng).
- [55] J. Llibre and G. Świrszcz, *On the limit cycles of polynomial vector fields*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **18** (2011), no. 2, 203–214.
- [56] J. Llibre and M. A. Teixeira, *Limit cycles bifurcating from a two-dimensional isochronous cylinder*, Applied Mathematics Letters **22** (2009), no. 8, 1231 – 1234.
- [57] W. S. Loud, *Behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers*, Contributions to Differential Equations **3** (1964), 21–36.
- [58] O. Makarenkov and J. S. W. Lamb, *Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: a survey*, Phys. D **241** (2012), no. 22, 1826–1844.
- [59] R. M. Martins, A. C. Mereu, and R. D. S. Oliveira, *An estimation for the number of limit cycles in a liénard-like perturbation of a quadratic nonlinear center*, Nonlinear Dynamics **79** (2015), no. 1, 185–194 (English).
- [60] N. Minorsky, *Nonlinear oscillations*, Krieger Pub., Malabar, FL, 1983.
- [61] M. M. Peixoto, *On structural stability*, Ann. of Math. (2) **69** (1959), 199–222.
- [62] D. D. Novaes, *On nonsmooth perturbations of nondegenerate planar centers*, Publ. Mat. **58** (2014), no. suppl., 395–420.

- [63] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Texts in applied mathematics, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2001, Autre tirage : 2006.
- [64] I. G. Petrovskii and E. M. Landis, *On the number of limit cycles of the equations $dy/dx = p(x, y)/q(x, y)$, where p and q are polynomials of 2nd degree*, Mat. Sb. N.S. **37(79)** (1955), 209–250 (Russian).
- [65] ———, *On the number of limit cycles of the equations $dy/dx = p(x, y)/q(x, y)$, where p and q are polynomials*, Mat. Sb. N.S. **85** (1957), 149–168 (Russian).
- [66] I. A. Pleshkan, *A new method of investigating the isochronicity of a system of two differential equations*, Differential Equations **5** (1969), 796–802.
- [67] Henri Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (2nde partie)*, Journal de mathématiques pures et appliquées **8** (1882), 251–296.
- [68] H. M. Rodrigues, *Equações diferenciais ordinárias*, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo, 2012.
- [69] J. A. Sanders, F. Verhulst, and J. Murdock, *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, second ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 59, Springer, New York, 2007.
- [70] S. Songling, *A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems*, Science China Mathematics **23 (2)** (1980), 153–158.
- [71] J. Sotomayor and M. A. Teixeira, *Regularization of discontinuous vector fields*, International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998, pp. 207–223.
- [72] J. Spanier and K. B. Oldham, *An atlas of functions*, pp. 609–633, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1987.
- [73] M. A. Teixeira, *Stability conditions for discontinuous vector fields*, J. Differential Equations **88** (1990), no. 1, 15–29.
- [74] ———, *Perturbation theory for non-smooth systems*, Encyclopedia of Complexity and Systems Science, vol. 22, Springer, New York, 2009, pp. 6697–6719.
- [75] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, second ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1996, Translated from the 1985 Dutch original.
- [76] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, fourth ed., Cambridge University Press, 1927, Reprinted 1990.
- [77] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, second ed., Texts in Applied Mathematics, vol. 2, Springer-Verlag, New York, 2003.

Apêndice A

Expressões das funções $F_1^{[n]}(Z)$

Explicitamos abaixo as expressões obtidas para as funções de Melnikov $F_1^{[n]}(Z)$ ($n = 1, 2, \dots, 7$), onde denotamos $\zeta = \sqrt{1 - Z^2}$:

$$F_1^{[1]}(Z) = -\frac{\pi \zeta}{\delta} \left(2 Z^2 b_{0,1} - a_{1,0} - 3 b_{0,1} \right),$$

$$F_1^{[2]}(Z) = -\frac{\pi \zeta}{\delta^2} \left((2 \delta b_{0,1} - b_{0,2} - b_{2,0}) Z^2 - \delta a_{1,0} - 3 \delta b_{0,1} \right. \\ \left. + b_{0,2} + b_{2,0} \right),$$

$$F_1^{[3]}(Z) = -\frac{\pi \zeta}{4 \delta^3} \left((8 \delta^2 b_{0,1} - 4 \delta b_{0,2} - 4 \delta b_{2,0} + a_{1,2} + 3 a_{3,0} \right. \\ \left. + 3 b_{0,3} + b_{2,1}) Z^2 - 4 \delta^2 a_{1,0} - 12 \delta^2 b_{0,1} + 4 \delta b_{0,2} + 4 \delta b_{2,0} - a_{1,2} \right. \\ \left. - 3 a_{3,0} - 3 b_{0,3} - b_{2,1} \right),$$

$$F_1^{[4]}(Z) = \frac{\pi \zeta}{4 \delta^4} \left((a_{1,3} + a_{3,1} + 2 b_{0,4} - 2 b_{4,0}) Z^4 + (-8 \delta^3 b_{0,1} \right. \\ \left. + 4 \delta^2 b_{0,2} + 4 \delta^2 b_{2,0} - \delta a_{1,2} - 3 \delta a_{3,0} - 3 \delta b_{0,3} - \delta b_{2,1} - 2 a_{1,3} \right. \\ \left. - 2 a_{3,1} - 4 b_{0,4} + 4 b_{4,0}) Z^2 + 4 \delta^3 a_{1,0} + 12 \delta^3 b_{0,1} - 4 \delta^2 b_{0,2} - 4 \delta^2 b_{2,0} \right. \\ \left. + \delta a_{1,2} + 3 \delta a_{3,0} + 3 \delta b_{0,3} + \delta b_{2,1} + a_{1,3} + a_{3,1} + 2 b_{0,4} - 2 b_{4,0} \right),$$

$$\begin{aligned}
F_1^{[5]}(Z) = & -\frac{\pi \zeta}{16 \delta^5} \left((5 a_{1,4} + 3 a_{3,2} + 5 a_{5,0} + 15 b_{0,5} + b_{2,3} \right. \\
& - b_{4,1}) Z^6 + (-4 \delta a_{1,3} - 4 \delta a_{3,1} - 8 \delta b_{0,4} + 8 \delta b_{4,0} - 17 a_{1,4} - 11 a_{3,2} \\
& - 25 a_{5,0} - 55 b_{0,5} - 5 b_{2,3} + b_{4,1}) Z^4 + (32 \delta^4 b_{0,1} - 16 \delta^3 b_{0,2} \\
& - 16 \delta^3 b_{2,0} + 4 \delta^2 a_{1,2} + 12 \delta^2 a_{3,0} + 12 \delta^2 b_{0,3} + 4 \delta^2 b_{2,1} + 8 \delta a_{1,3} \\
& + 8 \delta a_{3,1} + 16 \delta b_{0,4} - 16 \delta b_{4,0} + 19 a_{1,4} + 13 a_{3,2} + 35 a_{5,0} + 65 b_{0,5} \\
& + 7 b_{2,3} + b_{4,1}) Z^2 - 16 \delta^4 a_{1,0} - 48 \delta^4 b_{0,1} + 16 \delta^3 b_{0,2} + 16 \delta^3 b_{2,0} \\
& - 4 \delta^2 a_{1,2} - 12 \delta^2 a_{3,0} - 12 \delta^2 b_{0,3} - 4 \delta^2 b_{2,1} - 4 \delta a_{1,3} - 4 \delta a_{3,1} \\
& \left. - 8 \delta b_{0,4} + 8 \delta b_{4,0} - 7 a_{1,4} - 5 a_{3,2} - 15 a_{5,0} - 25 b_{0,5} - 3 b_{2,3} - b_{4,1}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{[6]}(Z) = & \frac{\pi \zeta}{16 \delta^6} \left((7 a_{1,5} + 3 a_{3,3} + 3 a_{5,1} + 28 b_{0,6} + 2 b_{2,4} \right. \\
& - 2 b_{6,0}) Z^8 + (-5 \delta a_{1,4} - 3 \delta a_{3,2} - 5 \delta a_{5,0} - 15 \delta b_{0,5} - \delta b_{2,3} + \delta b_{4,1} \\
& - 33 a_{1,5} - 15 a_{3,3} - 17 a_{5,1} - 137 b_{0,6} - 11 b_{2,4} - b_{4,2} + 13 b_{6,0}) Z^6 \\
& + (4 \delta^2 a_{1,3} + 4 \delta^2 a_{3,1} + 8 \delta^2 b_{0,4} - 8 b_{4,0} \delta^2 + 17 \delta a_{1,4} + 11 \delta a_{3,2} \\
& + 25 \delta a_{5,0} + 55 \delta b_{0,5} + 5 \delta b_{2,3} - \delta b_{4,1} + 57 a_{1,5} + 27 a_{3,3} + 33 a_{5,1} \\
& + 243 b_{0,6} + 21 b_{2,4} + 3 b_{4,2} - 27 b_{6,0}) Z^4 + (-32 \delta^5 b_{0,1} + 16 \delta^4 b_{0,2} \\
& - 4 \delta^3 a_{1,2} - 12 \delta^3 a_{3,0} - 12 \delta^3 b_{0,3} - 4 \delta^3 b_{2,1} - 8 \delta^2 a_{3,1} - 19 \delta a_{1,4} \\
& \left. - 13 \delta a_{3,2} - 65 \delta b_{0,5} - 7 \delta b_{2,3} - \delta b_{4,1} - 43 a_{1,5} - 21 a_{3,3} - 27 a_{5,1} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 187 b_{0,6} - 17 b_{2,4} - 3 b_{4,2} + 23 b_{6,0} - 16 \delta^2 b_{0,4} - 35 \delta a_{5,0} + 16 b_{4,0} \delta^2 \\
& + 16 \delta^4 b_{2,0} - 8 \delta^2 a_{1,3} \Big) Z^2 + 3 \delta b_{2,3} + \delta b_{4,1} + 7 \delta a_{1,4} + 5 \delta a_{3,2} \\
& + 15 \delta a_{5,0} + 25 \delta b_{0,5} + 53 b_{0,6} + 6 a_{3,3} + 12 a_{1,5} + 4 \delta^3 a_{1,2} + 12 \delta^3 b_{0,3} \\
& + 12 \delta^3 a_{3,0} - 16 \delta^4 b_{0,2} + 4 \delta^3 b_{2,1} - 16 \delta^4 b_{2,0} + 8 a_{5,1} + 5 b_{2,4} \\
& + 16 \delta^5 a_{1,0} - 7 b_{6,0} + b_{4,2} + 48 \delta^5 b_{0,1} + 4 \delta^2 a_{1,3} + 4 \delta^2 a_{3,1} + 8 \delta^2 b_{0,4} \\
& - 8 b_{4,0} \delta^2 \Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{[7]}(Z) &= -\frac{\pi \zeta}{64 \delta^7} \Big((42 a_{1,6} + 14 a_{3,4} + 10 a_{5,2} + 14 a_{7,0} \\
& + 210 b_{0,7} + 14 b_{2,5} + 2 b_{4,3} - 2 b_{6,1}) Z^{10} + (-28 \delta a_{1,5} - 12 \delta a_{3,3} \\
& - 12 \delta a_{5,1} - 112 \delta b_{0,6} - 8 \delta b_{2,4} + 8 \delta b_{6,0} - 252 a_{1,6} - 88 a_{3,4} \\
& - 68 a_{5,2} - 112 a_{7,0} - 1288 b_{0,7} - 92 b_{2,5} - 16 b_{4,3} + 12 b_{6,1}) Z^8 \\
& + (20 \delta^2 a_{1,4} + 12 \delta^2 a_{3,2} + 20 \delta^2 a_{5,0} + 60 \delta^2 b_{0,5} + 4 \delta^2 b_{2,3} - 4 \delta^2 b_{4,1} \\
& + 132 \delta a_{1,5} + 60 \delta a_{3,3} + 68 \delta a_{5,1} + 548 \delta b_{0,6} + 44 \delta b_{2,4} + 4 \delta b_{4,2} \\
& - 52 \delta b_{6,0} + 593 a_{1,6} + 215 a_{3,4} + 177 a_{5,2} + 343 a_{7,0} + 3087 b_{0,7} \\
& + 233 b_{2,5} + 47 b_{4,3} - 23 b_{6,1}) Z^6 + (-287 b_{2,5} - 228 \delta a_{1,5} - 108 \delta a_{3,3} \\
& - 132 \delta a_{5,1} - 972 \delta b_{0,6} - 84 \delta b_{2,4} + 108 \delta b_{6,0} + 17 b_{6,1} - 16 \delta^3 a_{3,1} \\
& + 32 b_{4,0} \delta^3 - 16 \delta^3 a_{1,3} - 32 \delta^3 b_{0,4} - 68 \delta^2 a_{1,4} - 44 \delta^2 a_{3,2} - 100 \delta^2 a_{5,0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 220 \delta^2 b_{0,5} - 20 \delta^2 b_{2,3} + 4 \delta^2 b_{4,1} - 12 \delta b_{4,2} - 223 a_{5,2} - 497 a_{7,0} \\
& - 687 a_{1,6} - 3633 b_{0,7} - 257 a_{3,4} - 65 b_{4,3}) Z^4 + (173 b_{2,5} + 172 \delta a_{1,5} \\
& + 84 \delta a_{3,3} + 108 \delta a_{5,1} + 748 \delta b_{0,6} + 68 \delta b_{2,4} - 92 \delta b_{6,0} - 3 b_{6,1} \\
& + 32 \delta^3 a_{3,1} - 64 b_{4,0} \delta^3 + 32 \delta^3 a_{1,3} + 64 \delta^3 b_{0,4} + 76 \delta^2 a_{1,4} + 52 \delta^2 a_{3,2} \\
& + 140 \delta^2 a_{5,0} + 260 \delta^2 b_{0,5} + 28 \delta^2 b_{2,3} + 4 \delta^2 b_{4,1} + 12 \delta b_{4,2} + 137 a_{5,2} \\
& + 343 a_{7,0} - 64 \delta^5 b_{0,2} + 128 \delta^6 b_{0,1} + 16 \delta^4 a_{1,2} + 48 \delta^4 a_{3,0} + 48 \delta^4 b_{0,3} \\
& + 16 \delta^4 b_{2,1} - 64 \delta^5 b_{2,0} + 393 a_{1,6} + 2107 b_{0,7} + 151 a_{3,4} + 43 b_{4,3}) Z^2 \\
& - 41 b_{2,5} - 48 \delta a_{1,5} - 24 \delta a_{3,3} - 32 \delta a_{5,1} - 212 \delta b_{0,6} - 20 \delta b_{2,4} \\
& + 28 \delta b_{6,0} - b_{6,1} - 16 \delta^3 a_{3,1} + 32 b_{4,0} \delta^3 - 16 \delta^3 a_{1,3} - 32 \delta^3 b_{0,4} \\
& - 28 \delta^2 a_{1,4} - 20 \delta^2 a_{3,2} - 60 \delta^2 a_{5,0} - 100 \delta^2 b_{0,5} - 12 \delta^2 b_{2,3} - 4 \delta^2 b_{4,1} \\
& - 4 \delta b_{4,2} - 33 a_{5,2} - 91 a_{7,0} + 64 \delta^5 b_{0,2} - 192 \delta^6 b_{0,1} - 16 \delta^4 a_{1,2} \\
& - 48 \delta^4 a_{3,0} - 48 \delta^4 b_{0,3} - 16 \delta^4 b_{2,1} + 64 \delta^5 b_{2,0} - 89 a_{1,6} - 483 b_{0,7} \\
& - 64 \delta^6 a_{1,0} - 35 a_{3,4} - 11 b_{4,3}).
\end{aligned}$$

Apêndice B

Expressões das funções $F_2^{[n]}(Z)$

Explicitamos abaixo as expressões encontradas para as funções de Melnikov $F_2^{[k]}(Z)$ ($n = 1, 2, \dots, 6$):

$$F_2^{[1]}(R) = \pi R(a_{1,0} + b_{0,1}),$$

$$F_2^{[2]}(Z) = -\frac{\pi(Z-1)}{\sqrt{-(Z-1)(Z+1)}\delta^2} \left(2Z^2b_{2,0} + (\delta a_{1,0} + \delta b_{0,1} - a_{1,1} + b_{0,2} - b_{2,0})Z + \delta a_{1,0} + \delta b_{0,1} + a_{1,1} - b_{0,2} - b_{2,0} \right),$$

$$F_2^{[3]}(Z) = -\frac{\pi(Z-1)}{\sqrt{-(Z-1)(Z+1)}Z\delta^3} \left((2\delta b_{2,0} - 2b_{2,1})Z^3 + (\delta^2 a_{1,0} + \delta^2 b_{0,1} - \delta a_{1,1} + \delta b_{0,2} - \delta b_{2,0} + a_{1,2} - 3a_{3,0} - 3b_{0,3} + 3b_{2,1})Z^2 + (\delta^2 a_{1,0} + \delta^2 b_{0,1} + \delta a_{1,1} - \delta b_{0,2} - \delta b_{2,0} - 3a_{1,2} + 3a_{3,0} + 3b_{0,3} - b_{2,1})Z + 2a_{1,2} \right),$$

$$\begin{aligned}
F_2^{[4]}(Z) = & -\frac{\pi(Z-1)}{\sqrt{-(Z-1)(Z+1)}Z^3\delta^4} \left((2\delta^2b_{2,0} - 2\delta b_{2,1} + 2b_{2,2} - 3b_{4,0})Z^5 \right. \\
& + (\delta^3a_{1,0} + \delta^3b_{0,1} - \delta^2a_{1,1} + \delta^2b_{0,2} - \delta^2b_{2,0} + \delta a_{1,2} - 3\delta a_{3,0} \\
& - 3\delta b_{0,3} + 3\delta b_{2,1} - a_{1,3} + 3a_{3,1} + 5b_{0,4} - 5b_{2,2} + 6b_{4,0})Z^4 \\
& + (\delta^3a_{1,0} + \delta^3b_{0,1} + \delta^2a_{1,1} - \delta^2b_{0,2} - \delta^2b_{2,0} - 3\delta a_{1,2} + 3\delta a_{3,0} \\
& + 3\delta b_{0,3} - \delta b_{2,1} + 5a_{1,3} - 6a_{3,1} - 7b_{0,4} + 4b_{2,2} - 3b_{4,0})Z^3 \\
& \left. + (2\delta a_{1,2} - 6a_{1,3} + 3a_{3,1} - b_{2,2})Z^2 + (b_{0,4} + a_{1,3})Z + a_{1,3} + b_{0,4} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{[5]}(Z) = & -\frac{\pi(Z-1)}{\sqrt{-(Z-1)(Z+1)}Z^5\delta^5} \left((2\delta^3b_{2,0} - 2\delta^2b_{2,1} + 2\delta b_{2,2} - 3\delta b_{4,0}) \right. \\
& - 2b_{2,3} + 3b_{4,1})Z^7 + (a_{1,0}\delta^4 + b_{0,1}\delta^4 - \delta^3a_{1,1} + \delta^3b_{0,2} - \delta^3b_{2,0} \\
& + \delta^2a_{1,2} - 3\delta^2a_{3,0} - 3\delta^2b_{0,3} + 3\delta^2b_{2,1} + 3\delta a_{3,1} + 5\delta b_{0,4} - 5\delta b_{2,2} \\
& + 6\delta b_{4,0} + a_{1,4} - 3a_{3,2} + 5a_{5,0} - 7b_{0,5} + 7b_{2,3} - 8b_{4,1} - \delta a_{1,3})Z^6 \\
& + (a_{1,0}\delta^4 + b_{0,1}\delta^4 + \delta^3a_{1,1} - \delta^3b_{0,2} - \delta^3b_{2,0} - 3\delta^2a_{1,2} + 3\delta^2a_{3,0} \\
& - \delta^2b_{2,1} + 5\delta a_{1,3} - 6\delta a_{3,1} - 7\delta b_{0,4} + 4\delta b_{2,2} - 3\delta b_{4,0} - 7a_{1,4} \\
& + 9a_{3,2} - 10a_{5,0} + 13b_{0,5} - 8b_{2,3} + 7b_{4,1} + 3\delta^2b_{0,3})Z^5 + (2\delta^2a_{1,2} \\
& - 6\delta a_{1,3} + 3\delta a_{3,1} - \delta b_{2,2} + 12a_{1,4} - 8a_{3,2} + 5a_{5,0} + 3b_{2,3} \\
& - 2b_{4,1})Z^4 + (\delta a_{1,3} + \delta b_{0,4} - 4a_{1,4} + a_{3,2} - 5b_{0,5})Z^3 + (\delta a_{1,3} \\
& \left. + \delta b_{0,4} - 4a_{1,4} + a_{3,2} - 5b_{0,5})Z^2 + (2b_{0,5} + a_{1,4})Z + a_{1,4} + 2b_{0,5} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{[6]}(Z) = & -\frac{\pi(Z-1)}{4\sqrt{-(Z-1)(Z+1)}Z^7\delta^6} \left((8\delta^4b_{2,0} - 8\delta^3b_{2,1} + 8\delta^2b_{2,2} \right. \\
& - 12\delta^2b_{4,0} - 8\delta b_{2,3} + 12\delta b_{4,1} + 8b_{2,4} - 12b_{4,2} + 15b_{6,0}) Z^9 \\
& + (-4a_{1,5} - 45b_{6,0} + 40b_{4,2} - 4\delta^2a_{1,3} + 4\delta a_{1,4} - 28\delta b_{0,5} \\
& + 12\delta^2a_{3,1} - 4\delta^4a_{1,1} - 12\delta^3b_{0,3} + 4a_{1,0}\delta^5 + 4b_{0,1}\delta^5 + 20b_{0,4}\delta^2 \\
& - 12\delta a_{3,2} + 20\delta a_{5,0} - 12\delta^3a_{3,0} + 4\delta^3a_{1,2} + 4\delta^4b_{0,2} + 36b_{0,6} \\
& - 36b_{2,4} + 12a_{3,3} - 20a_{5,1} - 4\delta^4b_{2,0} + 12\delta^3b_{2,1} - 20\delta^2b_{2,2} \\
& + 24\delta^2b_{4,0} + 28\delta b_{2,3} - 32\delta b_{4,1}) Z^8 + (36a_{1,5} + 45b_{6,0} - 47b_{4,2} \\
& + 20\delta^2a_{1,3} - 28\delta a_{1,4} + 52\delta b_{0,5} - 24\delta^2a_{3,1} + 4\delta^4a_{1,1} + 12\delta^3b_{0,3} \\
& + 4a_{1,0}\delta^5 + 4b_{0,1}\delta^5 - 28b_{0,4}\delta^2 + 36\delta a_{3,2} - 40\delta a_{5,0} + 12\delta^3a_{3,0} \\
& - 12\delta^3a_{1,2} - 4\delta^4b_{0,2} - 84b_{0,6} + 52b_{2,4} - 48a_{3,3} + 55a_{5,1} - 4\delta^4b_{2,0} \\
& - 4\delta^3b_{2,1} + 16\delta^2b_{2,2} - 12\delta^2b_{4,0} - 32\delta b_{2,3} + 28\delta b_{4,1}) Z^7 + (8\delta^3a_{1,2} \\
& - 24\delta^2a_{1,3} + 12\delta^2a_{3,1} - 4\delta^2b_{2,2} + 48\delta a_{1,4} - 32\delta a_{3,2} + 20\delta a_{5,0} \\
& + 12\delta b_{2,3} - 8\delta b_{4,1} - 80a_{1,5} + 60a_{3,3} - 45a_{5,1} - 24b_{2,4} + 21b_{4,2} \\
& - 15b_{6,0}) Z^6 + (4\delta^2a_{1,3} + 4b_{0,4}\delta^2 - 16\delta a_{1,4} + 4\delta a_{3,2} - 20\delta b_{0,5} \\
& + 40a_{1,5} - 15a_{3,3} + 5a_{5,1} + 60b_{0,6} - b_{2,4} - b_{4,2}) Z^5 + (4\delta^2a_{1,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4b_{0,4}\delta^2 - 16\delta a_{1,4} + 4\delta a_{3,2} - 20\delta b_{0,5} + 40a_{1,5} - 15a_{3,3} + 5a_{5,1} \\
& + (60b_{0,6} - b_{2,4} - b_{4,2})Z^4 + (4\delta a_{1,4} + 8\delta b_{0,5} - 21a_{1,5} + 3a_{3,3} \\
& - 51b_{0,6} + b_{2,4})Z^3 + (4\delta a_{1,4} + 8\delta b_{0,5} - 21a_{1,5} + 3a_{3,3} - 51b_{0,6} \\
& + b_{2,4})Z^2 + (5a_{1,5} + 15b_{0,6})Z + 5a_{1,5} + 15b_{0,6} \Big).
\end{aligned}$$

Apêndice C

Condições Gerais sobre os Coeficientes da Perturbação para se obter o número máximo de ciclos limite no Sistema S1- δ

Para a produção dos exemplos que apresentam o número máximo de ciclos limite bifurcantes do sistema S1- δ , utilizamos o seguinte raciocínio:

- Para obter o resultado para a perturbação de grau n ($n = 1, \dots, 7$), devemos encontrar um exemplo de forma que $f_1^{[n]}$ tenha o número máximo de raízes em $(0, 1)$.
- Assim, escolhemos algumas raízes em $(0, 1)$ e, utilizando as expressões de $f_1^{[n]}$, encontramos condições sobre os coeficientes de forma que $f_1^{[n]}$ possua a raiz escolhida.
- Para a realização deste processo, utilizamos um software de manipulação algébrica. no caso o Maple.

C.1 Perturbação de grau 1

Se escolhermos:

$$a_{1,0} = -\frac{1}{2} \frac{b_{0,1}(2\delta^2 + 3)}{\delta^2},$$

e $b_{0,1} \neq 0$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_1^{[1]}$ é dada por:

$$2b_{0,1}Z^2 - \frac{1}{2}b_{0,1},$$

cujas raízes são $Z = \pm \frac{1}{2}$. Então $F_1^{[1]}$ possui apenas uma raiz em $(0, 1)$.

C.2 Perturbação de grau 2

Se escolhermos:

$$b_{0,2} = \frac{4}{3}\delta^3 a_{1,0} + \frac{4}{3}\delta^3 b_{0,1} + 2\delta b_{0,1} - b_{2,0},$$

e $a_{1,0} \neq -b_{0,1}$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_1^{[2]}$ é dada por:

$$-\frac{4}{3}(a_{1,0} + b_{0,1})\delta^3 Z^2 + \frac{1}{3}(a_{1,0} + b_{0,1})\delta^3,$$

que tem raízes $Z = \pm\frac{1}{2}$. Logo, $F_1^{[2]}$ possui somente uma raiz em $(0, 1)$.

C.3 Perturbação de grau 3

Se escolhermos:

$$a_{1,2} = -\frac{16}{3}\delta^4(a_{1,0} + b_{0,1}) - 8\delta^2 b_{0,1} + 4\delta(b_{0,2} + b_{2,0}) - 3(a_{3,0} + b_{0,3}) - b_{2,1},$$

e $a_{1,0} \neq -b_{0,1}$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_1^{[3]}$ é dada por:

$$-\frac{16}{3}(a_{1,0} + b_{0,1})\delta^4 Z^2 + \frac{4}{3}(a_{1,0} + b_{0,1})\delta^4,$$

cujas raízes são $Z = \pm\frac{1}{2}$. Portanto, $F_1^{[3]}$ possui somente uma raiz em $(0, 1)$.

C.4 Perturbação de grau 4

Se escolhermos:

$$\begin{aligned} a_{1,3} &= -\frac{64}{9}\delta^7(a_{1,0} + b_{0,1}) - \frac{32}{3}\delta^5 b_{0,1} + \frac{16}{3}\delta^4(b_{2,0} + b_{0,2}) - \frac{4}{3}\delta^3(a_{1,2} + b_{2,1}) \\ &\quad - 4\delta^3(a_{3,0} + b_{0,3}) + 2(b_{4,0} - b_{0,4}) - a_{3,1}, \end{aligned}$$

$$a_{1,2} = -\frac{59}{6}\delta^4(a_{1,0} + b_{0,1}) - 8\delta^2 b_{0,1} + 4\delta(b_{0,2} + b_{2,0}) - 3(a_{3,0} - b_{0,3}) - b_{2,1},$$

e $a_{1,0} \neq -b_{0,1}$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_1^{[4]}$ é dada por:

$$6(a_{1,0} + b_{0,1})\delta^7 Z^4 - \frac{13}{6}(a_{1,0} + b_{0,1})\delta^7 Z^2 + \frac{1}{6}(a_{1,0} + b_{0,1})\delta^7,$$

que tem raízes $Z = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}$. Então $F_1^{[4]}$ possui duas raízes em $(0, 1)$.

C.5 Perturbação de grau 5

Se escolhermos:

$$\begin{aligned}
 a_{1,0} &= -b_{0,1} - \frac{3}{2} \frac{b_{0,1}}{\delta^2} + \frac{3}{4} \frac{(b_{0,2} + b_{2,0})}{\delta^3} + \frac{-\frac{9}{16}(a_{3,0} + b_{0,3}) - \frac{3}{16}(b_{2,1} + a_{1,2})}{\delta^4} \\
 &+ \frac{-\frac{9}{64}(a_{1,3} + a_{3,1}) - \frac{9}{32}(b_{0,4} - b_{4,0})}{\delta^7} \\
 &+ \frac{-\frac{9}{128}(a_{1,4} + a_{3,2} + b_{2,3} + b_{4,1}) - \frac{45}{128}(a_{5,0} + b_{0,5})}{\delta^8} \\
 &+ \frac{-\frac{135}{1024}(a_{1,4} + a_{5,0}) - \frac{81}{1024}a_{3,2} - \frac{405}{1024}b_{0,5} + \frac{27}{1024}(b_{4,1} - b_{2,3})}{\delta^{10}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{1,2} &= -8b_{0,1}\delta^2 + 4(b_{0,2} + b_{2,0})\delta - 3(b_{0,3} + a_{3,0}) - b_{2,1} \\
 &+ \frac{-\frac{59}{36}(a_{1,3} + a_{3,1}) - \frac{59}{18}(b_{0,4} - b_{4,0})}{\delta^3} \\
 &+ \frac{-\frac{59}{72}(a_{1,4} + a_{3,2} + b_{2,3} + b_{4,1}) - \frac{295}{72}(a_{5,0} + b_{0,5})}{\delta^4} \\
 &+ \frac{\frac{2617}{5184}(b_{4,1} - b_{2,3}) - \frac{2617}{1728}a_{3,2} - \frac{13085}{5184}(a_{5,0} + a_{1,4}) - \frac{13085}{1728}b_{0,5}}{\delta^6},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{1,3} &= -a_{3,1} - 2(b_{0,4} - b_{4,0}) + \frac{-\frac{1}{2}(a_{1,4} + a_{3,2} + b_{2,3} + b_{4,1}) - \frac{5}{2}(a_{5,0} + b_{0,5})}{\delta} \\
 &+ \frac{-\frac{1855}{576}(a_{1,4} + a_{5,0}) - \frac{371}{192}a_{3,2} - \frac{1855}{192}b_{0,5} - \frac{371}{576}(b_{2,3} - b_{4,1})}{\delta^3},
 \end{aligned}$$

e $15b_{0,5} + 5a_{1,4} - b_{4,1} + b_{2,3} + 3a_{3,2} + 5a_{5,0} \neq 0$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_1^{[5]}$ é dada por:

$$(15b_{0,5} + 5a_{1,4} - b_{4,1} + b_{2,3} + 3a_{3,2} + 5a_{5,0}) \left(Z^6 - \frac{61}{144}Z^4 + \frac{29}{576}Z^2 - \frac{1}{576} \right),$$

cujas raízes são $Z = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}$. Então $F_1^{[5]}$ possui três raízes em $(0, 1)$.

C.6 Perturbação de grau 6

Se escolhermos

$$\begin{aligned}
a_{1,0} &= -b_{0,1} - \frac{3b_{0,1}}{2\delta^2} + \frac{3(b_{0,2} + b_{2,0})}{4\delta^3} + \frac{-\frac{9}{16}(a_{3,0} + b_{0,3}) - \frac{3}{16}(b_{2,1} + a_{1,2})}{\delta^4} \\
&+ \frac{-\frac{9}{64}(a_{1,3} + a_{3,1}) - \frac{9}{32}(b_{0,4} - b_{4,0})}{\delta^7} \\
&+ \frac{-\frac{9}{128}(a_{1,4} + a_{3,2} + b_{2,3} + b_{4,1}) - \frac{45}{128}(a_{5,0} + b_{0,5})}{\delta^8} \\
&+ \frac{-\frac{135}{1024}(a_{1,4} + a_{5,0}) - \frac{81}{1024}a_{3,2} - \frac{405}{1024}b_{0,5} + \frac{27}{1024}(b_{4,1} - b_{2,3})}{\delta^{10}} \\
&+ \frac{-\frac{135}{1024}(a_{1,5} + a_{5,1} - b_{6,0}) - \frac{81}{1024}(a_{3,3} + b_{2,4}) - \frac{27}{1024}b_{4,2} - \frac{675}{1024}b_{0,6}}{\delta^{11}} \\
&+ \frac{-\frac{567}{4096}(a_{1,5} + b_{0,6}) - \frac{243}{4096}(a_{3,3} + a_{5,1}) - \frac{81}{2048}(b_{2,4} + b_{6,0})}{\delta^{13}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,2} &= -8b_{0,1}\delta^2 + 4(b_{0,2} + b_{2,0})\delta - 3(b_{0,3} + a_{3,0}) - b_{2,1} \\
&+ \frac{-\frac{27}{16}(a_{1,3} + a_{3,1}) - \frac{27}{8}(b_{0,4} - b_{4,0})}{\delta^3} \\
&+ \frac{-\frac{27}{32}(a_{1,4} + a_{3,2} + b_{2,3} + b_{4,1}) - \frac{135}{32}(a_{5,0} + b_{0,5})}{\delta^4} \\
&+ \frac{\frac{549}{1024}(b_{4,1} - b_{2,3}) - \frac{1647}{1024}a_{3,2} - \frac{2745}{1024}(a_{5,0} + a_{1,4}) - \frac{8235}{1024}b_{0,5}}{\delta^6} \\
&+ \frac{-\frac{549}{1024}b_{4,2} - \frac{2745}{1024}(a_{1,5} + a_{5,1} - b_{6,0}) - \frac{1647}{1024}(a_{3,3} + b_{2,4}) - \frac{13725}{1024}b_{0,6}}{\delta^7} \\
&+ \frac{-\frac{69741}{16384}a_{1,5} - \frac{29889}{16384}(a_{3,3} + a_{5,1} - b_{6,0}) - \frac{69741}{4096}b_{0,6} - \frac{9963}{8192}(b_{6,0} + b_{2,4})}{\delta^9},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,3} &= -a_{3,1} - 2(b_{0,4} - b_{4,0}) + \frac{-\frac{1}{2}(a_{1,4} + a_{3,2} + b_{2,3} + b_{4,1}) - \frac{5}{2}(a_{5,0} + b_{0,5})}{\delta} \\
&+ \frac{-\frac{1059}{320}(a_{1,4} + a_{5,0}) - \frac{3177}{1600}a_{3,2} - \frac{3177}{320}b_{0,5} - \frac{1059}{1600}(b_{2,3} - b_{4,1})}{\delta^3} \\
&+ \frac{-\frac{1059}{320}(a_{1,5} + a_{5,0} - b_{6,0}) - \frac{3177}{1600}(a_{3,3} + b_{2,4}) - \frac{1059}{64}b_{0,6} - \frac{1059}{1600}b_{4,2}}{\delta^4} \\
&+ \frac{-\frac{5248467}{640000}a_{1,5} - \frac{5248467}{160000}b_{0,6} - \frac{2249343}{640000}(a_{3,3} - a_{5,1}) - \frac{749781}{320000}(b_{2,4} - b_{6,0})}{\delta^6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,4} &= -\frac{3}{5}a_{3,2} - a_{5,0} - 3b_{0,5} - \frac{1}{5}(b_{2,3} - b_{4,1}) \\
&+ \frac{-a_{1,5} - \frac{3}{5}(a_{3,3} + b_{2,4}) - a_{5,1} - 5b_{0,6} - \frac{1}{5}b_{4,2} + b_{6,0}}{\delta} \\
&+ \frac{-\frac{91217}{18000}a_{1,5} - \frac{13031}{6000}(a_{3,3} + a_{5,1}) - \frac{91217}{4500}b_{0,6} - \frac{13031}{9000}(b_{2,4} - b_{6,0})}{\delta^3},
\end{aligned}$$

e $7a_{1,5} + 3a_{3,3} + 3a_{5,1} + 28b_{0,6} + 2b_{2,4} - 2b_{6,0} \neq 0$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_1^{[6]}$ é dada por:

$$(7a_{1,5} + 3a_{3,3} + 3a_{5,1} + 28b_{0,6} + 2b_{2,4} - 2b_{6,0}) \left(Z^8 - \frac{1369}{3600}Z^6 + \frac{91}{2400}Z^4 - \frac{9}{6400}Z^2 + \frac{1}{57600} \right),$$

cujas raízes são $Z = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{6}$. Então $F_1^{[6]}$ possui quatro raízes em $(0, 1)$.

C.7 Perturbação de grau 7

Se escolhermos:

$$\begin{aligned}
a_{1,0} &= -b_{0,1} - \frac{3}{2}\frac{b_{0,1}}{\delta^2} + \frac{3}{4}\frac{(b_{0,2} + b_{2,0})}{\delta^3} + \frac{-\frac{9}{16}(a_{3,0} + b_{0,3}) - \frac{3}{16}(b_{2,1} + a_{1,,2})}{\delta^4} \\
&+ \frac{-\frac{9}{64}(a_{1,3} + a_{3,1}) - \frac{9}{32}(b_{0,4} - b_{4,0})}{\delta^7} \\
&+ \frac{-\frac{9}{128}(a_{1,4} + a_{3,2} + b_{2,3} + b_{4,1}) - \frac{45}{128}(a_{5,0} + b_{0,5})}{\delta^8} \\
&+ \frac{-\frac{135}{1024}(a_{1,4} + a_{5,0}) - \frac{81}{1024}a_{3,2} - \frac{405}{1024}b_{0,5} + \frac{27}{1024}(b_{4,1} - b_{2,3})}{\delta^{10}} \\
&+ \frac{-\frac{135}{1024}(a_{1,5} + a_{5,1} - b_{6,0}) - \frac{81}{1024}(a_{3,3} + b_{2,4}) - \frac{27}{1024}b_{4,2} - \frac{675}{1024}b_{0,6}}{\delta^{11}} \\
&+ \frac{-\frac{945}{4096}(a_{7,0} + b_{0,7}) - \frac{81}{4096}(b_{4,3} + a_{3,4}) - \frac{135}{4096}(a_{1,6} + b_{2,5} + b_{6,1} + a_{5,2})}{\delta^{12}} \\
&+ \frac{-\frac{567}{4096}(a_{1,5} + b_{0,6}) - \frac{243}{4096}(a_{3,3} + a_{5,1}) - \frac{81}{2048}(b_{2,4} + b_{6,0})}{\delta^{13}} \\
&+ \frac{-\frac{1701}{8192}(a_{1,6} + a_{7,0}) - \frac{729}{8192}(a_{3,4} + a_{5,2}) - \frac{9639}{8192}b_{0,7} - \frac{243}{8192}b_{4,3} - \frac{891}{8192}b_{2,5} + \frac{81}{8192}b_{6,1}}{\delta^{14}} \\
&+ \frac{-\frac{1701}{32768}(b_{2,5} + a_{7,0} + a_{3,4}) - \frac{243}{32768}(b_{4,3} - b_{6,1}) - \frac{25515}{32768}b_{0,7} - \frac{5103}{32768}a_{1,6} - \frac{1215}{32768}a_{5,2}}{\delta^{16}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,2} = & -8b_{0,1}\delta^2 + 4(b_{0,2} + b_{2,0})\delta - 3(b_{0,3} + a_{3,0}) - b_{2,1} \\
& + \frac{-\frac{59}{36}(a_{1,3} + a_{3,1}) - \frac{59}{18}(b_{0,4} - b_{4,0})}{\delta^3} \\
& + \frac{-\frac{59}{72}(a_{1,4} + a_{3,2} + b_{2,3} + b_{4,1}) - \frac{295}{72}(a_{5,0} + b_{0,5})}{\delta^4} \\
& + \frac{\frac{2617}{5184}(b_{4,1} - b_{2,3}) - \frac{2617}{1728}a_{3,2} - \frac{13085}{5184}(a_{5,0} + a_{1,4}) - \frac{13085}{1728}b_{0,5}}{\delta^6} \\
& + \frac{-\frac{2617}{1728}(b_{2,4} - a_{3,3}) - \frac{13085}{5184}(a_{1,5} + a_{5,1} - b_{6,0}) - \frac{2617}{5184}b_{4,2} - \frac{65425}{5184}b_{0,6}}{\delta^7} \\
& + \frac{-\frac{91595}{20736}(a_{7,0} + b_{0,7}) - \frac{2617}{6912}(a_{3,4} + b_{4,3}) - \frac{13085}{20736}(a_{1,6} + b_{2,5} + b_{6,1} + a_{5,2})}{\delta^8} \\
& + \frac{-\frac{103427}{62208}(a_{3,3} + a_{5,1}) - \frac{103427}{93312}(b_{2,4} - b_{6,0}) - \frac{723989}{186624}a_{1,5} - \frac{723989}{46656}b_{0,6}}{\delta^9} \\
& + \frac{-\frac{723989}{124416}(a_{1,6} + a_{7,0}) - \frac{103427}{41472}(a_{3,4} - a_{5,2}) - \frac{1}{373248}(12307813b_{0,7}}{\delta^{10}} \\
& + \frac{1137697b_{2,5} - 103427b_{6,1}) - \frac{103427}{124416}b_{4,3}}{\delta^{10}} \\
& + \frac{-\frac{26887735}{13436928}(a_{7,0} + b_{2,5} + a_{3,4}) - \frac{3841105}{13436928}(b_{4,3} - b_{6,1}) - \frac{1}{447876}(134438675b_{0,7}}{\delta^{12}} \\
& + \frac{26887735a_{1,6}) - \frac{19205525}{13436928}a_{5,2}}{\delta^{12}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,5} = & -\frac{3}{7}(a_{3,3} + a_{5,1}) - 4b_{0,6} - \frac{2}{7}(b_{2,4} - b_{6,0}) \\
& + \frac{-\frac{3}{2}(a_{1,6} + a_{7,0}) - \frac{9}{14}(a_{3,4} + a_{5,2}) - \frac{1}{14}(11b_{2,5} + 3b_{4,3} - b_{6,1}) - \frac{17}{2}b_{0,7}}{\delta} \\
& + \frac{-\frac{16231}{7200}(a_{7,0} + b_{2,5} + a_{3,4}) - \frac{16231}{50400}(b_{4,3} - b_{6,1}) - \frac{16231}{7200}b_{0,7} - \frac{16231}{2400}a_{1,6} - \frac{16231}{10080}a_{5,2}}{\delta^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,3} = & -a_{3,1} - 2(b_{0,4} - b_{4,0}) + \frac{-\frac{1}{2}(a_{1,4} + a_{3,2} + b_{2,3} + b_{4,1}) - \frac{5}{2}(a_{5,0} + b_{0,5})}{\delta} \\
& + \frac{-\frac{1855}{576}(a_{1,4} + a_{5,0}) - \frac{371}{192}a_{3,2} - \frac{1855}{192}b_{0,5} - \frac{371}{576}(b_{2,3} - b_{4,1})}{\delta^3} \\
& + \frac{-\frac{1855}{576}(a_{1,5} + a_{5,0} - b_{6,0}) - \frac{371}{192}(a_{3,3} + b_{2,4}) - \frac{9275}{576}b_{0,6} - \frac{371}{576}b_{4,2}}{\delta^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-\frac{12985}{2304}(a_{7,0} + b_{0,7}) - \frac{371}{768}(a_{3,4} + b_{4,3}) - \frac{1855}{2304}(a_{1,6} + b_{2,5} + b_{6,1} + a_{5,2})}{\delta^5} \\
& + \frac{-\frac{643699}{82944}a_{1,5} - \frac{643699}{20736}b_{0,6} - \frac{91957}{27648}(a_{3,3} - a_{5,1}) - \frac{91957}{41472}(b_{2,4} - b_{6,0})}{\delta^6} \\
& + \frac{-\frac{643699}{55296}(a_{1,6} + a_{7,0}) - \frac{91957}{18432}(a_{3,4} + a_{5,2}) - \frac{1}{165888}(10942883b_{0,7} + 1011527b_{2,5} \\
& - \frac{91957b_{6,1}}{\delta^7} - \frac{91957b_{4,3}}{55296}}{\delta^7} \\
& + \frac{-\frac{133234661}{23887872}(a_{7,0} + b_{2,5} + a_{3,4}) - \frac{19033523}{23887872}(b_{4,3} - b_{6,1}) - \frac{1}{796264}(666173305b_{0,7} \\
& + \frac{133234661a_{1,6}}{\delta^9} - \frac{95167615}{23887872}a_{5,2},}{\delta^9}, \\
a_{1,4} & = -\frac{3}{5}a_{3,2} - a_{5,0} - 3b_{0,5} - \frac{1}{5}(b_{2,3} - b_{4,1}) \\
& + \frac{-a_{1,5} - \frac{3}{5}(a_{3,3} + b_{2,4}) - a_{5,1} - 5b_{0,6} - \frac{1}{5}b_{4,2} + b_{6,0}}{\delta} \\
& + \frac{-\frac{7}{4}(a_{7,0} + b_{0,7}) - \frac{3}{20}(a_{3,4} + b_{4,3}) - \frac{1}{4}(a_{1,6} + b_{2,5} + b_{6,1} + a_{5,2})}{\delta^2} \\
& + \frac{-\frac{3577}{720}a_{1,5} - \frac{511}{240}(a_{3,3} + a_{5,1}) - \frac{3577}{180}b_{0,6} - \frac{511}{360}(b_{2,4} - b_{6,0})}{\delta^3} \\
& + \frac{-\frac{3577}{480}(a_{1,6} + a_{7,0}) - \frac{511}{160}(a_{3,4} + a_{5,2}) - \frac{1}{1440}(60809b_{0,7} + 5621b_{2,5} - 511b_{6,1}) - \frac{511}{480}b_{4,3}}{\delta^4} \\
& + \frac{-\frac{381493}{69120}(a_{7,0} + b_{2,5} + a_{3,4}) - \frac{54499}{69120}(b_{4,3} - b_{6,1}) - \frac{381493}{4608}b_{0,7} - \frac{381493}{23040}a_{1,6} - \frac{54499}{13824}a_{5,2}}{\delta^6},
\end{aligned}$$

e $42a_{1,6} + 14a_{3,4} + 10a_{5,2} + 14a_{7,0} + 210b_{0,7} + 14b_{2,5} + 2b_{4,3} - 2b_{6,1} \neq 0$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_1^{[7]}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
& (42a_{1,6} + 14a_{3,4} + 10a_{5,2} + 14a_{7,0} + 210b_{0,7} + 14b_{2,5} + 2b_{4,3} - 2b_{6,1}) \left(Z^{10} - \frac{1769}{3600}Z^8 \right. \\
& \left. + \frac{1039}{12960}Z^6 - \frac{971}{172800}Z^4 + \frac{1}{5760}Z^2 - \frac{1}{518400} \right),
\end{aligned}$$

cujas raízes são $Z = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{6}$. Então $F_1^{[7]}$ possui cinco raízes em $(0, 1)$.

Apêndice D

Condições Gerais sobre os Coeficientes da Perturbação para se obter o número máximo de ciclos limite no Sistema S2- δ

O método para a obtenção de tais exemplos é análogo ao descrito no apêndice C.

D.1 Perturbação de grau 1

A única raiz de $f_2^{[1]}$ é $R = 0$, então $F_2^{[1]}$ não possui zeros em $(0, 1)$.

D.2 Perturbação de grau 2

Se escolhermos:

$$a_{1,1} = -3\delta(a_{1,0} + b_{0,1}) + b_{0,2} + 2b_{2,0},$$

$$b_{2,0} = 3\delta(a_{1,0} + b_{0,1}),$$

e $a_{1,0} \neq -b_{0,1}$ e $b_{0,1} \neq 0$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_2^{[2]}$ é dada por:

$$(a_{1,0} + b_{0,1}) \delta(6Z^2 - 5Z + 1),$$

cujas raízes são $Z = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Então $F_2^{[2]}$ possui duas raízes em $(0, 1)$.

D.3 Perturbação de grau 3

Se escolhermos:

$$a_{1,2} = -\delta^2(a_{1,0} + b_{0,1}) + \frac{\delta}{3}(b_{0,2} + 2b_{2,0} - a_{1,1}) - a_{3,0} - b_{0,3},$$

$$b_{2,1} = -9\delta^2(a_{1,0} + b_{0,1}) + \delta(2b_{0,2} + 5b_{2,0} - 2a_{1,1}) - 6(a_{3,0} + b_{0,3}),$$

$$a_{3,0} = -\frac{5}{6}\delta^2(a_{1,0} + b_{0,1}) + \frac{\delta}{3}(b_{0,2} + 2b_{2,0} - a_{1,1}) - b_{0,3},$$

e $a_{1,0} \neq -b_{0,1}$ e $b_{0,1} \neq 0$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_2^{[3]}$ é dada por:

$$(a_{1,0} + b_{0,1}) \delta^2 \left(8Z^3 - \frac{26}{3}Z^2 + 3Z - \frac{1}{3} \right)$$

cujas raízes são $Z = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Então $F_2^{[3]}$ possui três raízes em $(0, 1)$.

D.4 Perturbação de grau 4

Se escolhermos:

$$\begin{aligned} b_{4,0} &= 2\delta^3(a_{1,0} + b_{0,1}) + \frac{2}{3}\delta^2(a_{1,1} - b_{0,2} - 2b_{2,0}) \\ &+ 2\delta(a_{1,2} + a_{3,0} + b_{0,3}) + 6a_{1,3} + 2a_{3,1} + 10b_{0,4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2,2} &= -3\delta^3(a_{1,0} + b_{0,1}) - \frac{1}{2}\delta^2(a_{1,1} - b_{0,2} - 3b_{2,0}) \\ &+ \frac{1}{2}\delta(3a_{1,2} - 3a_{3,0} - 3b_{0,3} - b_{2,1}) + 33a_{1,3} + 3a_{3,1} + 39b_{0,4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{1,3} &= -\frac{5}{54}\delta^3(a_{1,0} + b_{0,1}) - \frac{1}{72}\delta^2(a_{1,1} - b_{0,2} - 3b_{2,0}) \\ &- \frac{1}{72}\delta(a_{1,2} + 3a_{3,0} + 3b_{0,3} + b_{2,1}) - b_{0,4}, \end{aligned}$$

$$a_{1,2} = -\frac{169}{24}\delta^2(a_{1,0} + b_{0,1}) - \delta(a_{1,1} - b_{0,2} - 3b_{2,0}) - 3(a_{3,0} + b_{0,3}),$$

e $a_{1,0} \neq -b_{0,1}$ e $b_{0,1} \neq 0$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_2^{[4]}$ é dada por:

$$(a_{1,0} + b_{0,1}) \delta^3 \left(\frac{75}{8}Z^5 - \frac{365}{32}Z^4 + \frac{911}{192}Z^3 - \frac{139}{192}Z^2 + \frac{1}{192}Z + \frac{1}{192} \right),$$

cujas raízes são $Z = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{15}$. Então $F_2^{[4]}$ possui quatro raízes em $(0, 1)$.

D.5 Perturbação de grau 5

Se escolhermos:

$$\begin{aligned} b_{4,1} &= 6\delta^4(a_{1,0} + b_{0,1}) + 2\delta^3(a_{1,1} - b_{0,2} - 2b_{2,0}) \\ &+ 6\delta^2(a_{1,2} + a_{3,0} + b_{0,3}) + \delta(18a_{1,3} + 6a_{3,1} + 30b_{0,4} - 3b_{4,0}) \\ &+ 70a_{1,4} + 14a_{3,2} + 10a_{5,0} + 182b_{0,5} + 4b_{2,3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{3,2} &= 5\delta^4(a_{1,0} + b_{0,1}) + \frac{1}{2}\delta^3(3a_{1,1} - 3b_{0,2} - \frac{19}{3}b_{2,0}) \\ &+ \frac{1}{2}\delta^2(7a_{1,2} + 9a_{3,0} + 9b_{0,3} + \frac{1}{3}b_{2,1}) + \delta(a_{1,3} + 3a_{3,1} + 7b_{0,4} + \frac{1}{3}b_{2,2} - 2b_{4,0}) \\ &- 87a_{1,4} + 5a_{5,0} - 177b_{0,5} + \frac{5}{3}b_{2,3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2,3} &= -\frac{55}{18}\delta^4(a_{1,0} + b_{0,1}) - \frac{109}{120}\delta^3(a_{1,1} - b_{0,2} - \frac{231}{109}b_{2,0}) \\ &- \frac{1}{40}\delta^2(\frac{253}{4}a_{1,2} + 109a_{3,0} + 109b_{0,3} + \frac{13}{4}b_{2,1}) - \frac{1}{5}\delta(6a_{1,3} + 9a_{3,1} + 24b_{0,4} + b_{2,2} - 6b_{4,0}) \\ &- \frac{59}{2}a_{1,4} - 3a_{5,0} + 59b_{0,5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{1,4} &= \frac{169}{56232}\delta^4(a_{1,0} + b_{0,1}) + \frac{1}{2343}\delta^3(a_{1,1} - b_{0,2} - 3b_{2,0}) \\ &+ \frac{1}{2343}\delta^2(a_{1,2} + 3a_{3,0} + 3b_{0,3} + b_{2,1}) - 2b_{0,5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= -\frac{5899}{810}\delta^2(a_{1,0} + b_{0,1}) - \delta(a_{1,1} - b_{0,2} - 3b_{2,0}) \\ &- 3a_{3,0} - 3b_{0,3} - b_{2,1}, \end{aligned}$$

e $a_{1,0} \neq -b_{0,1}$ e $b_{0,1} \neq 0$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_2^{[5]}$ é dada por:

$$(a_{1,0} + b_{0,1}) \delta^4 \left(\frac{280}{27} Z^7 - \frac{364}{27} Z^6 + \frac{14999}{2430} Z^5 - \frac{2641}{2430} Z^4 + \frac{25}{1944} Z^3 + \frac{25}{1944} Z^2 - \frac{1}{9720} Z - \frac{1}{9720} \right),$$

cujas raízes são $Z = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{3}{40} - \frac{\sqrt{119}}{280}i, -\frac{3}{40} + \frac{\sqrt{119}}{280}i$. Então $F_2^{[5]}$ possui cinco raízes em $(0, 1)$.

D.6 Pertubação de grau 6

Se escolhermos:

$$\begin{aligned}
 b_{6,0} &= \frac{8}{5}\delta^5(a_{1,0} + b_{0,1}) + \frac{8}{15}\delta^4(a_{1,1} - b_{0,2} - 2b_{2,0}) \\
 &+ \frac{8}{5}\delta^3(a_{1,2} + a_{3,0} + b_{0,3}) + \frac{1}{5}\delta^2(24a_{1,3} + 8a_{3,1} + 40b_{0,4} - 4b_{4,0}) \\
 &+ \frac{1}{15}(16b_{2,3} + 40a_{5,0} + 56a_{3,2} + 728b_{0,5} + 280a_{1,4} - 4b_{4,1}) \\
 &+ \frac{1}{5}(32b_{2,4} + 1448b_{0,6} + 56a_{3,3} + 20a_{5,1} + 408a_{1,5}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{4,2} &= -2\delta^5(a_{1,0} + b_{0,1}) - \frac{5}{9}\delta^4(a_{1,1} - b_{0,2} - \frac{11}{5}b_{2,0}) \\
 &- \frac{1}{3}\delta^3(3a_{1,2} + 5a_{3,0} + 5b_{0,3} + \frac{1}{3}b_{2,1}) + \frac{1}{3}\delta^2(10a_{1,3} - 2a_{3,1} + 6b_{0,4} + 2b_{4,0} - \frac{2}{3}b_{2,2}) \\
 &+ \frac{1}{9}\delta(34a_{3,2} - 2b_{2,3} - 10a_{5,0} + 1426b_{0,5} + 662a_{1,4} - 2b_{4,1}) \\
 &+ \frac{1}{3}(193b_{2,4} + 9541b_{0,6} + 157a_{3,3} + 15a_{5,1} + 2971a_{1,5}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{2,4} &= -\frac{128}{1047}\delta^5(a_{1,0} + b_{0,1}) - \frac{1}{349}\delta^4(11a_{1,1} - 11b_{0,2} - 25b_{2,0}) \\
 &- \frac{1}{349}\delta^3(19a_{1,2} + 33a_{3,0} + 33b_{0,3} + 3b_{2,1}) - \frac{1}{349}\delta^2(12a_{1,3} + 12a_{3,1} + 36b_{0,4} + 4b_{2,2} - 12b_{4,0}) \\
 &- \frac{1}{349}\delta(4b_{2,3} + 20a_{5,0} + 4a_{3,2} + 2812b_{0,5} + 1400a_{1,4} - 4b_{4,1}) \\
 &+ \frac{175971}{349}b_{0,6} - 3a_{3,3} - \frac{57261}{349}a_{1,5},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{1,5} &= \frac{658789}{667707840}\delta^5(a_{1,0} + b_{0,1}) + \frac{1}{111284640}\delta^4(27169a_{1,1} - 24169b_{0,2} - 20921b_{2,0}) \\
 &+ \delta^3\left(\frac{27169}{37094880}(b_{0,3} + a_{3,0}) + \frac{45913}{111284640}a_{1,2} + \frac{1685}{22256928}b_{2,1}\right) \\
 &+ \frac{1}{3091240}\delta^2(781a_{1,3} + 781a_{3,1} + 2343b_{0,4} + \frac{781}{3}b_{2,2} - 781b_{4,0}) \\
 &+ \frac{781}{9273720}\delta(b_{2,3} + 5a_{5,0} + 5a_{3,2} + 5b_{0,5} + a_{1,4} + b_{4,1}) - 3b_{0,6},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,4} = & -\frac{121027363}{9732600}\delta^4(a_{1,0} + b_{0,1}) - \frac{1}{324420}\delta^3(972539(a_{1,1} - b_{0,2}) - 2268777b_{2,0}) \\
& - \frac{1}{324420}\delta^2(2917617(b_{0,3} + a_{3,0}) + 1621379a_{1,2} + 323699b_{2,1}) \\
& - \delta(3a_{1,3} + 3a_{3,1} + 9b_{0,4} + b_{2,2} - 3b_{4,0}) \\
& - (b_{2,3} + 5a_{5,0} + a_{3,2} + 5b_{0,5} + b_{4,1}),
\end{aligned}$$

$$a_{1,2} = -\frac{59087}{7930}\delta^2(a_{1,0} + b_{0,1}) - \delta(a_{1,1} - b_{0,2} - b_{2,0}) - (3b_{0,3} + 3a_{3,0} + b_{2,1}),$$

e $a_{1,0} \neq -b_{0,1}$ e $b_{0,1} \neq 0$ na perturbação polinomial, então a expressão de $f_1^{[1]}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
(a_{1,0} + b_{0,1}) \delta^5 \left(\frac{35280}{793} Z^9 - \frac{47880}{793} Z^8 + \frac{116329}{3965} Z^7 - \frac{22271}{3965} Z^6 + \frac{12079}{142740} Z^5 + \frac{12079}{142740} Z^4 \right. \\
\left. - \frac{41}{35685} Z^3 - \frac{41}{35685} Z^2 + \frac{1}{142740} Z + \frac{1}{1427401} \right),
\end{aligned}$$

cujas raízes são $Z = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{8}{105} - \frac{\sqrt{41}}{105}i, -\frac{8}{105} + \frac{\sqrt{41}}{105}i$. Então $F_2^{[6]}$ possui seis raízes em $(0, 1)$.

Apêndice E

Cálculos dos Sistemas de Chebyshev

E.1 $f_2^{[4]}$ possui no máximo 4 raízes em $(0,1)$

Para escrever $f_2^{[4]}$ como:

$$f_2^{[4]} = a_0(Z + 1) + a_1Z^2 + a_2Z^3 + a_3Z^4 + a_4Z^5,$$

basta tomar:

$$b_{4,0} = 2/3 \delta^2 b_{2,0} - 2/3 \delta b_{2,1} - a_0/3 + 2/3 b_{2,2},$$

$$\begin{aligned} a_{1,3} &= \delta^3 a_{1,0} + \delta^3 b_{0,1} - \delta^2 a_{1,1} + \delta^2 b_{0,2} + 3 \delta^2 b_{2,0} + \delta a_{1,2} - 3 \delta a_{3,0} \\ &- 3 \delta b_{0,3} - \delta b_{2,1} - 2 a_0 - a_1 + 3 a_{3,1} + 5 b_{0,4} - b_{2,2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{0,4} &= -1/3 \delta^3 a_{1,0} - 1/3 \delta^3 b_{0,1} + 2/9 \delta^2 a_{1,1} - 2/9 \delta^2 b_{0,2} - 2/3 \delta^2 b_{2,0} \\ &- 1/9 \delta a_{1,2} + 2/3 \delta a_{3,0} + 2/3 \delta b_{0,3} + 2/9 \delta b_{2,1} + a_0/2 + \frac{5 a_1}{18} \\ &+ a_2/18 - 1/2 a_{3,1} + 1/6 b_{2,2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \delta^2 b_{2,0} &= -12 \delta^3 a_{1,0} - 12 \delta^3 b_{0,1} + 2 \delta^2 a_{1,1} - 2 \delta^2 b_{0,2} + 2 \delta a_{1,2} \\ &+ 6 \delta a_{3,0} + 6 \delta b_{0,3} + 2 \delta b_{2,1} + 9 a_0 + 7 a_1 + 5 a_2 + 3 a_3, \end{aligned}$$

$$2 \delta^3 b_{0,1} = -2 \delta^3 a_{1,0} + a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + 2 a_4.$$

Para utilizar o teorema de caracterização de ECT, temos que calcular os Wronskianos de todas as ordens da família $\{Z + 1, Z^2, Z^3, Z^4, Z^5\}$. Denote o Wronskiano de ordem i da família $\{f_0, \dots, f_n\}$ por $W(f_0, \dots, f_i)$. Assim:

- $W(Z + 1, Z^2, Z^3, Z^4, Z^5) = 288 Z^5 + 1440 Z^4$;
- $W(Z + 1, Z^2, Z^3, Z^4) = 12 Z^4 + 48 Z^3$;
- $W(Z + 1, Z^2, Z^3) = 2 Z^3 + 6 Z^2$;
- $W(Z + 1, Z^2) = Z^2 + 2 Z$;
- $W(Z + 1, Z^2) = Z + 1$;

Logo, nenhum Wronskiano se anula em $(0, 1)$ e portanto o sistema forma um *ECT* em $(0, 1)$, logo $f_2^{[4]}$ possui no máximo 4 raízes em $(0, 1)$ para qualquer escolha de coeficientes da perturbação de grau 4.

E.2 $f_2^{[5]}$ possui no máximo 5 raízes em $(0, 1)$

Para escrever $f_2^{[5]}$ como:

$$f_2^{[5]} = a_0(Z + 1) + a_1(Z^3 + Z^2) + a_2Z^4 + a_3Z^5 + a_4Z^6 + a_5Z^7,$$

basta tomar:

$$2\delta^3 b_{2,0} = 2\delta^2 b_{2,1} - 2\delta b_{2,2} + 3\delta b_{4,0} + a_0 + 2b_{2,3} - 3b_{4,1},$$

$$-6\delta^2 b_{0,3} = -2a_{1,0}\delta^4 - 2b_{0,1}\delta^4 + 2\delta^3 a_{1,1} - 2\delta^3 b_{0,2} - 2\delta^2 a_{1,2} + 6\delta^2 a_{3,0} - 4\delta^2 b_{2,1}$$

$$+ 2\delta a_{1,3} - 6\delta a_{3,1} - 10\delta b_{0,4} + 8\delta b_{2,2} - 9\delta b_{4,0} + a_0 + 2a_1 - 2a_{1,4}$$

$$+ 6a_{3,2} - 10a_{5,0} + 14b_{0,5} - 12b_{2,3} + 13b_{4,1},$$

$$-2\delta b_{0,4} = -2a_{1,0}\delta^4 - 2b_{0,1}\delta^4 + 2\delta^2 a_{1,2} - 4\delta a_{1,3} + 3\delta a_{3,1} - \delta b_{2,2} + a_0$$

$$+ a_1 + a_2 + 6a_{1,4} - 6a_{3,2} + 5a_{5,0} - 6b_{0,5} + 3b_{2,3} - 2b_{4,1},$$

$$2\delta^2 a_{1,2} = 6\delta a_{1,3} - 3\delta a_{3,1} + \delta b_{2,2} + a_3 - 12a_{1,4} + 8a_{3,2} - 5a_{5,0} - 3b_{2,3} + 2b_{4,1},$$

$$2\delta^4 a_{1,0} = -2b_{0,1}\delta^4 + a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 + 2a_{1,4} + 4b_{0,5},$$

$$b_{0,5} = a_5/2 - 1/2 a_{1,4}.$$

Para utilizar o teorema de caracterização de ECT, temos que calcular os Wronskianos de todas as ordens da família $\{Z + 1, Z^3 + Z^2, Z^4, Z^5, Z^6, Z^7\}$. Assim:

- $W(Z + 1, Z^3 + Z^2, Z^4, Z^5, Z^6, Z^7) = 207360 Z^{11} + 1244160 Z^{10} + 2419200 Z^9$;
- $W(Z + 1, Z^3 + Z^2, Z^4, Z^5, Z^6) = 1440 Z^9 + 7200 Z^8 + 11520 Z^7$;
- $W(Z + 1, Z^3 + Z^2, Z^4, Z^5) = 48 Z^7 + 192 Z^6 + 240 Z^5$;
- $W(Z + 1, Z^3 + Z^2, Z^4) = 6 Z^5 + 18 Z^4 + 16 Z^3$;
- $W(Z + 1, Z^3 + Z^2) = 2 Z^3 + 4 Z^2 + 2 Z$;
- $W(Z + 1) = Z + 1$;

Logo, nenhum Wronskiano se anula em $(0, 1)$ e portanto o sistema forma um *ECT* em $(0, 1)$, logo $f_2^{[5]}$ possui no máximo 5 raízes em $(0, 1)$ para qualquer escolha de coeficientes da perturbação de grau 5.

E.3 $f_2^{[6]}$ possui no máximo 6 raízes em $(0, 1)$

Para escrever $f_2^{[5]}$ como:

$$f_2^{[6]} = a_0(Z + 1) + a_1(Z^3 + Z^2) + a_2(Z^5 + Z^4) + a_3Z^6 + a_4Z^7 + a_5Z^8 + a_6Z^9,$$

basta tomar:

$$8\delta^4 b_{2,0} = 8\delta^3 b_{2,1} - 8\delta^2 b_{2,2} + 12\delta^2 b_{4,0} + 8\delta b_{2,3} - 12\delta b_{4,1} + a_0 - 8b_{2,4} + 12b_{4,2} - 15b_{6,0},$$

$$\begin{aligned} b_{4,2} &= \frac{75b_{6,0}}{68} + \frac{16b_{2,4}}{17} + \frac{10a_{5,1}}{17} - \frac{6a_{3,3}}{17} + 2/17 a_{1,5} - \frac{18b_{0,6}}{17} + 2/17 \delta^2 a_{1,3} \\ &+ \frac{13\delta b_{4,1}}{17} - \frac{4\delta^3 b_{2,1}}{17} + \frac{8\delta^2 b_{2,2}}{17} - \frac{9\delta^2 b_{4,0}}{17} - \frac{12\delta b_{2,3}}{17} + \frac{6\delta^3 b_{0,3}}{17} - 2/17 \delta a_{1,4} \\ &+ \frac{14\delta b_{0,5}}{17} - \frac{6\delta^2 a_{3,1}}{17} + 2/17 \delta^4 a_{1,1} + \frac{6\delta a_{3,2}}{17} - \frac{10\delta a_{5,0}}{17} - 2/17 b_{0,1} \delta^5 - \frac{10b_{0,4} \delta^2}{17} \\ &- 2/17 a_{1,0} \delta^5 - 2/17 \delta^4 b_{0,2} + \frac{6\delta^3 a_{3,0}}{17} - 2/17 \delta^3 a_{1,2} + \frac{a_0}{68} + a_1/34, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{6,0} &= \frac{416b_{2,4}}{405} + 4a_{5,1} - \frac{664a_{3,3}}{135} + \frac{2024a_{1,5}}{405} - \frac{632b_{0,6}}{135} - \frac{68a_2}{405} + \frac{104\delta^2 a_{1,3}}{45} \\ &- \frac{148\delta b_{4,1}}{135} + \frac{304\delta^3 b_{2,1}}{405} - \frac{112\delta^2 b_{2,2}}{135} + \frac{76\delta^2 b_{4,0}}{45} + \frac{32\delta b_{2,3}}{135} - \frac{152\delta^3 b_{0,3}}{135} - \frac{296\delta a_{1,4}}{81} \\ &+ \frac{568\delta b_{0,5}}{405} - \frac{8\delta^2 a_{3,1}}{9} - \frac{152\delta^4 a_{1,1}}{405} + \frac{392\delta a_{3,2}}{135} - \frac{40\delta a_{5,0}}{27} + \frac{232b_{0,1} \delta^5}{135} + \frac{8b_{0,4} \delta^2}{15} \\ &+ \frac{232a_{1,0} \delta^5}{135} + \frac{152\delta^4 b_{0,2}}{405} - \frac{152\delta^3 a_{3,0}}{135} - \frac{392\delta^3 a_{1,2}}{405} - \frac{29a_0}{135} - \frac{106a_1}{405}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{0,6} &= \frac{7b_{2,4}}{102} + \frac{7a_{3,3}}{34} - \frac{31a_{1,5}}{51} - \frac{37a_2}{1632} - \frac{3\delta^2 a_{1,3}}{68} - \frac{\delta b_{4,1}}{68} + \frac{\delta^3 b_{2,1}}{51} \\
&- \frac{\delta^4 a_{1,1}}{102} - \frac{\delta a_{3,2}}{68} - \frac{5\delta a_{5,0}}{68} + \frac{13b_{0,1}\delta^5}{68} - \frac{9b_{0,4}\delta^2}{68} + \frac{13a_{1,0}\delta^5}{68} + \frac{\delta^4 b_{0,2}}{102} \\
&- \frac{1}{34}\delta^3 a_{3,0} - \frac{2\delta^3 a_{1,2}}{51} - \frac{9a_3}{544} - \frac{13a_0}{544} - \frac{41a_1}{1632},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
48\delta^4 b_{0,2} &= 144\delta^3 a_{3,0} + 192\delta^3 a_{1,2} + 72\delta a_{3,2} + 360\delta a_{5,0} - 1480b_{0,1}\delta^5 + 648b_{0,4}\delta^2 \\
&- 1480a_{1,0}\delta^5 + 144\delta^3 b_{0,3} - 728\delta a_{1,4} - 1240\delta b_{0,5} + 216\delta^2 a_{3,1} + 48\delta^4 a_{1,1} \\
&+ 216\delta^2 a_{1,3} + 72\delta b_{4,1} - 96\delta^3 b_{2,1} + 72\delta^2 b_{2,2} - 216\delta^2 b_{4,0} + 72\delta b_{2,3} + 149a_3 \\
&+ 179a_2 + 191a_1 + 136a_4 + 185a_0 + 800a_{1,5} - 200b_{2,4} - 600a_{3,3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{3,3} &= -4/5 a_5 - 4/3 \delta a_{1,4} - 8/3 \delta b_{0,5} + 4/3 a_{1,5} - \frac{17a_2}{30} - 1/3 b_{2,4} + \frac{68b_{0,1}\delta^5}{15} \\
&+ \frac{68a_{1,0}\delta^5}{15} - \frac{17a_1}{30} - \frac{17a_4}{15} - \frac{17a_0}{30} - \frac{17a_3}{30},
\end{aligned}$$

$$8\delta^5 a_{1,0} = -8b_{0,1}\delta^5 + a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6.$$

Para utilizar o teorema de caracterização de ECT, temos que calcular os Wronskianos de todas as ordens da família $\{Z + 1, Z^3 + Z^2, Z^5 + Z^4, Z^6, Z^7, Z^8, Z^9\}$. Assim:

- $W(Z+1, Z^3+Z^2, Z^5+Z^4, Z^6, Z^7, Z^8, Z^9) = 2786918400 Z^{18} + 19508428800 Z^{17} + 52951449600 Z^{16} + 58525286400 Z^{15}$;
- $W(Z + 1, Z^3 + Z^2, Z^5 + Z^4, Z^6, Z^7, Z^8) = 2419200 Z^{15} + 14515200 Z^{14} + 33384960 Z^{13} + 30965760 Z^{12}$;
- $W(Z + 1, Z^3 + Z^2, Z^5 + Z^4, Z^6, Z^7) = 11520 Z^{12} + 57600 Z^{11} + 108288 Z^{10} + 80640 Z^9$;
- $W(Z + 1, Z^3 + Z^2, Z^5 + Z^4, Z^6) = 240 Z^9 + 960 Z^8 + 1392 Z^7 + 768 Z^6$;
- $W(Z + 1, Z^3 + Z^2, Z^5 + Z^4) = 16 Z^6 + 48 Z^5 + 48 Z^4 + 16 Z^3$;
- $W(Z + 1, Z^3 + Z^2) = 2 Z^3 + 4 Z^2 + 2 Z$;
- $W(Z + 1) = Z + 1$;

Logo, nenhum Wronskiano se anula em $(0, 1)$ e portanto o sistema forma um ECT em $(0, 1)$, logo $f_2^{[6]}$ possui no máximo 6 raízes em $(0, 1)$ para qualquer escolha de coeficientes da perturbação de grau 6.

Apêndice F

Funções da equação (3.4.12)

Explicitamos abaixo as expressões de $D(R, \psi)$, $A_{i,j}(R, \psi)$, $B_{i,j}(R, \psi)$, que aparecem na equação (3.4.12):

$$\begin{aligned} A_{1,0}(R, \psi) &= -2 R (\cos(\psi))^2 \\ &- 16 R^2 (\cos(\psi))^3 \delta \sin(\psi) \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\ &- 32 R^4 (\cos(\psi))^5 \delta^3 (\sin(\psi))^3 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\ &+ 8 R^4 (\cos(\psi))^3 \delta^3 (\sin(\psi))^3 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\ &+ 24 R^4 (\cos(\psi))^3 \delta^3 \sin(\psi) \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\ &- 120 R^4 (\cos(\psi))^5 \delta^3 \sin(\psi) \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\ &+ 96 R^4 (\cos(\psi))^7 \delta^3 \sin(\psi) \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\ &+ 8 R^3 (\cos(\psi))^2 \delta^2 (\sin(\psi))^2 + 4 R^3 (\cos(\psi))^2 \delta^2 + 24 R^3 (\cos(\psi))^6 \delta^2 \\ &+ 16 R^5 (\cos(\psi))^4 \delta^4 - 64 R^5 (\cos(\psi))^{10} \delta^4 - 28 R^3 (\cos(\psi))^4 \delta^2 \\ &+ 144 R^5 (\cos(\psi))^8 \delta^4 - 96 R^5 (\cos(\psi))^6 \delta^4 \\ &+ 2 R^2 \cos(\psi) \delta \sin(\psi) \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\ &- 40 R^3 (\cos(\psi))^4 \delta^2 (\sin(\psi))^2 + 48 R^5 (\cos(\psi))^4 \delta^4 (\sin(\psi))^2 \\ &- 240 R^5 (\cos(\psi))^6 \delta^4 (\sin(\psi))^2 + 192 R^5 (\cos(\psi))^8 \delta^4 (\sin(\psi))^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{0,1}(R, \psi) &= 12 \cos(\psi) \delta^2 R^3 \text{sen}(\psi) + 56 R^3 (\cos(\psi))^5 \delta^2 \text{sen}(\psi) \\
&+ 8 R^2 (\cos(\psi))^4 \delta \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
&- 10 R^2 (\cos(\psi))^2 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \delta \\
&- 68 R^3 (\cos(\psi))^3 \delta^2 \text{sen}(\psi) - 2 \cos(\psi) \text{sen}(\psi) R \\
&+ 72 R^4 (\cos(\psi))^6 \delta^3 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
&- 48 R^4 (\cos(\psi))^4 \delta^3 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
&+ 16 \delta^4 (\cos(\psi))^3 (\text{sen}(\psi))^3 R^5 - 8 R^3 (\cos(\psi))^3 \delta^2 (\text{sen}(\psi))^3 \\
&+ 64 R^5 (\cos(\psi))^7 \delta^4 (\text{sen}(\psi))^3 - 80 R^5 (\cos(\psi))^5 \delta^4 (\text{sen}(\psi))^3 \\
&- 288 R^5 (\cos(\psi))^5 \delta^4 \text{sen}(\psi) + 432 R^5 (\cos(\psi))^7 \delta^4 \text{sen}(\psi) \\
&- 192 R^5 (\cos(\psi))^9 \delta^4 \text{sen}(\psi) + 48 (\cos(\psi))^3 \delta^4 R^5 \text{sen}(\psi) \\
&+ 8 \delta^3 (\cos(\psi))^2 R^4 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
&- 32 R^4 (\cos(\psi))^8 \delta^3 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
&+ 2 R^2 \delta \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
&- 120 R^4 (\cos(\psi))^4 \delta^3 (\text{sen}(\psi))^2 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
&+ 96 R^4 (\cos(\psi))^6 \delta^3 (\text{sen}(\psi))^2 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
&+ 24 \delta^3 (\cos(\psi))^2 (\text{sen}(\psi))^2 R^4 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
&- 8 R^2 (\cos(\psi))^2 \delta (\text{sen}(\psi))^2 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{1,0}(R, \psi) &= -2 \cos(\psi) \text{sen}(\psi) R \\
&+ 56 R^4 (\cos(\psi))^6 \delta^3 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
&- 24 R^4 (\cos(\psi))^4 \delta^3 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
&- 6 R^2 (\cos(\psi))^2 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \delta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 56 R^3 (\cos(\psi))^5 \delta^2 \text{sen}(\psi) \\
& + 8 R^2 (\cos(\psi))^4 \delta \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& - 44 R^3 (\cos(\psi))^3 \delta^2 \text{sen}(\psi) \\
& + 96 R^4 (\cos(\psi))^6 \delta^3 (\text{sen}(\psi))^2 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& - 72 R^4 (\cos(\psi))^4 \delta^3 (\text{sen}(\psi))^2 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& - 8 R^2 (\cos(\psi))^2 \delta (\text{sen}(\psi))^2 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& - 8 R^3 (\cos(\psi))^3 \delta^2 (\text{sen}(\psi))^3 + 64 R^5 (\cos(\psi))^7 \delta^4 (\text{sen}(\psi))^3 \\
& - 48 R^5 (\cos(\psi))^5 \delta^4 (\text{sen}(\psi))^3 + 336 R^5 (\cos(\psi))^7 \delta^4 \text{sen}(\psi) \\
& - 192 R^5 (\cos(\psi))^9 \delta^4 \text{sen}(\psi) - 144 R^5 (\cos(\psi))^5 \delta^4 \text{sen}(\psi) \\
& - 32 R^4 (\cos(\psi))^8 \delta^3 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{0,1}(R, \psi) & = -2 R + 2 R (\cos(\psi))^2 - 144 R^5 (\cos(\psi))^4 \delta^4 (\text{sen}(\psi))^2 \\
& + 336 R^5 (\cos(\psi))^6 \delta^4 (\text{sen}(\psi))^2 - 192 R^5 (\cos(\psi))^8 \delta^4 (\text{sen}(\psi))^2 \\
& + 40 R^3 (\cos(\psi))^4 \delta^2 (\text{sen}(\psi))^2 - 32 R^3 (\cos(\psi))^2 \delta^2 (\text{sen}(\psi))^2 \\
& + 44 R^3 (\cos(\psi))^4 \delta^2 \\
& - 14 R^2 \cos(\psi) \delta \text{sen}(\psi) \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& - 20 R^3 (\cos(\psi))^2 \delta^2 - 176 R^5 (\cos(\psi))^8 \delta^4 - 48 R^5 (\cos(\psi))^4 \delta^4 \\
& + 160 R^5 (\cos(\psi))^6 \delta^4 \\
& - 72 R^4 (\cos(\psi))^3 \delta^3 \text{sen}(\psi) \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& + 168 R^4 (\cos(\psi))^5 \delta^3 \text{sen}(\psi) \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& + 64 R^5 (\cos(\psi))^{10} \delta^4 - 24 R^3 (\cos(\psi))^6 \delta^2 \\
& + 16 R^2 (\cos(\psi))^3 \delta \text{sen}(\psi) \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 32 R^4 (\cos(\psi))^5 \delta^3 (\sin(\psi))^3 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& - 24 R^4 (\cos(\psi))^3 \delta^3 (\sin(\psi))^3 \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& - 96 R^4 (\cos(\psi))^7 \delta^3 \sin(\psi) \sqrt{1 + 4 \delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4 \delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(R, \psi) & = -1 - 10\delta \cos(\psi) \sin(\psi) R \sqrt{1 + 4\delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4\delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& + 52\delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2 - 52\delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 \\
& - 160\delta^3 (\cos(\psi))^3 \sin(\psi) R^3 \sqrt{1 + 4\delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4\delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& - 512\delta^5 (\cos(\psi))^5 \sin(\psi) R^5 \sqrt{1 + 4\delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4\delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& + 1024\delta^5 (\cos(\psi))^7 \sin(\psi) R^5 \sqrt{1 + 4\delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4\delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& + 896\delta^4 R^4 (\cos(\psi))^6 - 448\delta^4 (\cos(\psi))^8 R^4 + 3072\delta^6 R^6 (\cos(\psi))^8 \\
& - 3072\delta^6 (\cos(\psi))^{10} R^6 + 1024\delta^6 (\cos(\psi))^{12} R^6 - 448\delta^4 (\cos(\psi))^4 R^4 \\
& - 1024\delta^6 (\cos(\psi))^6 R^6 \\
& + 160\delta^3 (\cos(\psi))^5 \sin(\psi) R^3 \sqrt{1 + 4\delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4\delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2} \\
& - 512\delta^5 (\cos(\psi))^9 \sin(\psi) R^5 \sqrt{1 + 4\delta^2 (\cos(\psi))^2 R^2 - 4\delta^2 (\cos(\psi))^4 R^2}.
\end{aligned}$$

Apêndice G

Expressão da função α (5.3.8)

A expressão da função α (5.3.8) é dada por:

$$\alpha(x) = \lambda \frac{P(x)}{Q(x)},$$

onde:

$$\begin{aligned} P(x) = & 2AB \left(64ABERx^5 - 208ABERx^4 - 144ABEx^5 - 1024Ex^7 - 512Rx^7 \right. \\ & - 112ABERx^3 + 130ABEx^4 - 4992ERx^5 + 7040Ex^6 + 3520Rx^6 + 3520x^7 \\ & + 182ABERx^2 + 1240ABEx^3 - 384AEx^4 - 192RAx^4 + 26208ERx^4 \\ & - 2304Ex^5 + 3840Rx^5 - 20144x^6 + 725ABERx - 1170ABEx^2 - 1248AERx^2 \\ & + 1248AEx^3 + 624RAx^3 + 1008Ax^4 - 16276ERx^3 - 49108Ex^4 - 50762Rx^4 \\ & - 2038x^5 - 1355ABEx + 2028AERx + 1920AEx^2 + 2208RAx^2 - 2262Ax^3 \\ & - 72904ERx^2 + 7736Ex^3 + 20144Rx^3 + 151080x^4 + 3120AER - 3120AEx \\ & - 3588RAx - 6600Ax^2 + 27950ERx + 216630Ex^2 + 181219Rx^2 - 62401x^3 \\ & - 7470AE - 6855RA + 8190Ax + 106340ER - 76820Ex - 66360Rx - 452060x^2 \\ & \left. + 15270A - 234800E - 223740R + 146695x + 500650 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(x) = & E \left(8192 x^{10} + 45056 R x^8 - 69632 x^9 + 3072 A x^7 - 312832 R x^7 + 106496 x^8 \right. \\
& + 14976 R A x^5 - 21120 A x^6 + 669312 R x^6 + 398464 x^7 - 78624 R A x^4 + 6912 A x^5 \\
& - 54912 R x^5 - 1304584 x^6 + 48828 R A x^3 + 147324 A x^4 - 2738616 R x^4 - 288048 x^5 \\
& + 218712 R A x^2 - 23208 A x^3 + 3591640 R x^3 + 9142732 x^4 - 83850 R A x - 649890 A x^2 \\
& + 9048840 R x^2 - 11257880 x^3 - 319020 R A + 230460 A x - 10602540 R x - 23137410 x^2 \\
& \left. + 704400 A - 14867650 R + 23582900 x + 33262175 \right),
\end{aligned}$$

$$R = \sqrt{-x^2 + 5},$$

$$A = \sqrt{64 x^4 - 208 x^3 + 208 R x^2 - 320 x^2 - 338 R x + 520 x - 520 R + 1245},$$

$$E = \sqrt{\frac{A}{(4R + 4x - 13)^2 (R - x)^2}},$$

$$\begin{aligned}
b = & 64 x^5 - 336 x^4 + 208 R x^3 + 96 x^3 + 24 A x^2 - 754 R x^2 + 1160 x^2 - 39 A x \\
& + 156 R x + 39 R A + 205 x - 60 A + 1040 R - 2490,
\end{aligned}$$

$$B = \operatorname{csgn}\left(\frac{1}{b}\right),$$

e para cada $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, definimos:

$$\operatorname{csgn}(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) > 0, \\ -1, & \text{se } \operatorname{Re}(z) < 0 \text{ ou } \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$