

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR EDSON HARUO
MIYAURA E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 29,02,12
R. F. F. F. F.
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Edson Haruo Miyaura

**Efeito das tensões residuais sobre a
propagação de trincas
em juntas soldadas por FSW**

Campinas, 2012

Edson Haruo Miyaura

Efeito das tensões residuais sobre a propagação de trincas em juntas soldadas por FSW

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

Campinas
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M699e Miyaura, Edson Haruo
Efeito das tensões residuais sobre a propagação de
trincas em juntas soldadas por FSW / Edson Haruo
Miyaura. – Campinas, SP: [s.n.], 2012.

Orientador: Renato Pavanello
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Mecânica da fratura. 2. Fadiga. 3. Tensões
residuais. 4. Soldagem por atrito. I. Pavanello, Renato.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Residual stress effect on crack propagation in friction stir welded
joints

Palavras-chave em Inglês: Fracture mechanics, Fatigue, Residual stress, Friction stir
welding

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Paulo Sollero, Carlos Eduardo Chaves

Data da defesa: 29-02-2012

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

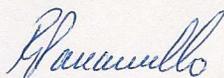
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Efeito das tensões residuais sobre a propagação de trincas em juntas soldadas por FSW

Autor: **Edson Haruo Miyaura**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
DMC / FEM / UNICAMP



Prof. Dr. Paulo Sollero
DMC / FEM / UNICAMP



Prof. Dr. Carlos Eduardo Chaves
EMBRAER S.A.

Campinas, 29 de Fevereiro de 2012.

Dedico esta obra aos meus pais Eli Yasuhiko e Carmem Timico.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Eli Yasuhiko e Carmem Timico pelo eterno apoio que resultou em todas as vitórias ao longo de minha vida.

Ao Renato Pavanello, pela oportunidade concedida e pela orientação deste trabalho.

À equipe de pesquisa FSW da EMBRAER, particularmente a Andreza Sommerauer Franchim, Fernando Ferreira Fernandez e Marcos Hideki Miyazaki pelo suporte técnico, financeiro e pelo incentivo dados na execução deste trabalho.

Ao Julio Antonio Beltrami da Silva, que me fez perceber a relevância do uso da mecânica da fratura na determinação experimental de tensões residuais.

Ao Renan Rodrigues de Mello Ozelo, que me mostrou aspectos importantes na modelagem computacional de componentes trincados.

Ao Auteliano Antunes dos Santos Junior, pelas críticas e sugestões que culminaram no bom encerramento deste trabalho e pela orientação durante meu período de graduação.

A todo o grupo de pesquisa FSW da UNICAMP, composta por Alberto Luiz Serpa, Amadeu Soares Ferlin, Cedric Marcelo Augusto Ayala Bravo, Janito Vaqueiro Ferreira, Jaqueline Mara de Carvalho, Pedro Henrique Andrade de Almeida e Rolando Melquiades Perez Ñaupá.

Agradeço também a todas as pessoas que estiveram ao meu lado neste período de grande aprendizado.

”Minha vida é minha mensagem.”

Mahatma Gandhi

Resumo

Inúmeros trabalhos de pesquisa tem sido feitos em torno de um processo de soldagem por atrito conhecido por FSW, ou *Friction Stir Welding*. A proposta deste trabalho é determinar o efeito das tensões residuais resultantes de tal processo sobre a propagação de trincas na região próxima à junta soldada. Este efeito é considerado calculando-se fatores de intensidade de tensão residual pelo uso de funções ponderadoras e pelo método de elementos finitos. Técnicas numéricas e equações de taxa de propagação modificadas são empregadas para determinar a vida residual em fadiga de sólidos com trincas que atravessam transversalmente a região da solda. É abordado e aplicado um meio de determinar uma curva de tensão residual longitudinal a partir de uma curva de fatores de intensidade de tensão residual. Finalmente, o ensaio *cut compliance* é apresentado como uma técnica experimental eficaz na determinação de uma curva de fatores de intensidade de tensão residual. A aplicação de tal método exige o conhecimento prévio ou o cálculo de funções de influência. Demonstra-se que o método de elementos finitos é eficaz na determinação de tais funções.

Palavras Chave: Mecânica da Fratura; Fadiga; Tensões Residuais; Soldagem por Atrito.

Abstract

Numerous research papers have been published on a process known as friction stir welding or FSW. The purpose of this work is to determine the effect of residual stresses resulting from such process on the propagation of a crack near the weld. This effect is taken into account by calculating residual stress intensity factors using weight functions and finite elements. Numerical techniques and crack propagation rate equations are employed to determine residual fatigue life of solids with cracks that traverse across the weld region. A way to determine a longitudinal residual stress curve from a residual stress intensity factor curve is discussed and applied in this work. Finally, the cut compliance method is presented as an effective experimental technique to determine residual stress intensity factor curves. The application of such method requires calculation of influence functions. It is shown that the finite element method is effective in determining those functions.

Key Words: Fracture Mechanics; Fatigue; Residual Stress; Friction Stir Welding.

Lista de Figuras

1.1	Exemplar do navio Liberty após falha estrutural	1
1.2	Aeronave da Aloha Airlines após o voo 243, em 1988	2
1.3	Soldagem de topo por FSW (Khaled, 2005)	4
1.4	Zonas afetadas pela soldagem FSW (Khaled, 2005)	4
2.1	(a) Corpo de prova sujeito a uma força P (b) Diagrama força-deslocamento do corpo de prova com trinca de comprimento a (c) Efeito do aumento do tamanho da trinca sobre o diagrama força-deslocamento (Gdoutos, 2005; Broek, 1988)	9
2.2	(a) Deslocamento constante, força variável (b) Força constante, deslocamento variável (Broek, 1988)	10
2.3	(a) Contorno aberto Γ envolvendo a ponta da trinca (b) Contorno fechado envolvendo a ponta da trinca (Rice, 1968)	12
2.4	Balanço energético na fratura de um corpo de prova frágil de dimensões infinitas com trinca de comprimento $2a_1$ (Gdoutos, 2005)	15
2.5	Balanço energético na propagação estável de uma trinca de comprimento inicial a_1 em um corpo de prova elasto-plástico de dimensões finitas (Gdoutos, 2005)	16
2.6	Modos de abertura de uma trinca (Hertzberg, 1996)	17
2.7	Coordenadas em relação à ponta da trinca (Hertzberg, 1996; Irwin, 1958)	18
2.8	(a) Trinca de comprimento $2a$ em corpo de dimensões infinitas, sujeito a carregamento σ (b) Trinca lateral de comprimento a em corpo semi-infinito, sujeito a carregamento σ	20
2.9	Chapas de altura infinita e largura definida. (a) Com trinca central (b) Com trinca lateral	21
2.10	Elementos finitos isoparamétricos com nós na posição <i>quarter point</i> (Barsoum, 1976)	23
2.11	Exemplo de malha de elementos finitos na ponta de uma trinca lateral	23
2.12	Tamanho da zona plástica em $\theta = 0$ (Anderson, 1995)	24
2.13	Zona plástica em condições de tensão plana e de deformação plana (Broek, 1984)	26

2.14	Forma tridimensional da região deformada plasticamente (Gdoutos, 2005)	27
2.15	Material frágil e material tenaz (Hertzberg, 1996)	28
2.16	Variação da tenacidade à fratura em função da espessura do corpo de prova (Gdoutos, 2005)	28
2.17	Notação que identifica a disposição de uma trinca em relação ao sentido de laminação (Hertzberg, 1996)	30
2.18	Típico comportamento da taxa de propagação de trincas em metais (Anderson, 1995)	31
2.19	Curvas da/dN x ΔK , segundo a equação de Walker, para trincas com orientação L-T em liga de alumínio 2024-T3	33
2.20	Formação do envelope de deformação plástica durante a propagação da trinca (Elber, 1971)	35
2.21	Campos de deformação plástica devido ao carregamento externo em trinca de fadiga e em corte produzido por uma serra ideal, de espessura nula (Elber, 1971)	35
2.22	No experimento de Elber: (a) Posicionamento do extensômetro na trinca (b) Curva tensão-deslocamento resultante	36
2.23	Relação entre ΔK_{eff} , K_{op} e K_{max} (Anderson, 1995)	37
2.24	Efeito da razão de tensão sobre curvas obtidas pela equação NASGRO, considerando-se trincas com orientação L-T em liga de alumínio 2024-T3	41
3.1	Tipos de tensão residual (Macherauch, 1987)	44
3.2	(a) Perfil de tensão residual longitudinal (b) Perfil de tensão residual transversal . .	45
3.3	Perfis de tensão residual longitudinal. Curva 1: equação 3.10a. Curva 2: equação 3.10b. Curva 3: equação 3.10c	46
3.4	Campo de tensões residuais longitudinais (σ_{yy}^{res}) em corpo de prova CT, utilizando-se a sub-rotina SIGINI do Abaqus. Legenda do mapa de cores em Pascal.	47
3.5	Perfis de tensão residual transversal devido à soldagem FSW em chapa original e em corpos de prova CT (Donne et al., 2000; Ohta et al., 1982)	48
3.6	Distribuição de tensão residual transversal devido à soldagem FSW em chapas com trinca central (Donne et al., 2000; Ohta et al., 1982)	49
3.7	Força atuante em superfície de trinca em chapa de dimensões infinitas	51

3.8	Corpo trincado e carregamentos considerados por Rice (1972)	52
3.9	Trinca lateral em chapa semi infinita, com carregamento distribuído $\sigma_{yy}(x)$ sobre as superfícies de fratura	54
3.10	Trinca central em chapas: (a) de comprimento infinito e largura $2W$ (b) de altura $2H$ e largura $2W$	57
3.11	(a) Tensão residual em chapa de largura W e altura infinita com trinca lateral (b) Tensão residual em corpo de prova CT	59
3.12	(a) Contato entre superfícies de fratura (b) Sobreposição de duas regiões fisicamente inaceitável (Parker, 1982)	61
3.13	Sobreposição de superfícies de fratura fisicamente inaceitável em modelo de elementos finitos. Legenda do mapa de cores em Pascal.	62
4.1	(a) Corpo de prova com perfil desconhecido de tensões residuais (b) Perfil de tensão do tipo degrau unitário para calcular o elemento B_{32} da matriz \mathbf{B}	66
4.2	Corpo de prova considerado no estabelecimento da relação entre K_I^{res} e a deformação ϵ_M no ponto M (Schindler et al., 1996)	67
4.3	Método <i>cut compliance</i> em corpo de prova circular (Schindler et al., 1996)	69
4.4	Método <i>cut compliance</i> em corpo de prova CT para medir K_I^{res} : (a) devido à tensão residual longitudinal; (b) devido à tensão residual transversal	71
4.5	Método <i>cut compliance</i> em chapa retangular para medir K_I^{res} : (a) devido à tensão residual longitudinal; (b) devido à tensão residual transversal	71
4.6	Relação entre procedimentos de análise de engenharia envolvendo tensões residuais longitudinais	73
4.7	Procedimento de análise de propagação de trinca central ou lateral sob efeito de tensão residual transversal (caso das figuras 3.5 e 3.6)	74
4.8	Procedimento alternativo de análise de propagação de trinca central ou lateral sob efeito de tensão residual transversal (caso das figuras 3.5 e 3.6)	74
5.1	Dimensões do corpo de prova considerado	80
5.2	Curva correspondente à equação 3.10a com $c = 0,03$ m, $x_{pico} = 0,130$ m e $\sigma_{yy}^{max} = 100$ MPa	80

5.3	Fluxograma do <i>script</i> em Python para o Abaqus para obtenção de fatores de intensidade de tensão e cálculo do número de ciclos até a fratura	81
5.4	Fluxograma do programa feito no Matlab para obtenção de fatores de intensidade de tensão e cálculo do número de ciclos até a fratura	83
5.5	Fator de intensidade de tensão residual em função do comprimento da trinca	84
5.6	Fator de intensidade de tensão devido ao carregamento externo máximo em função do comprimento da trinca	84
5.7	Procedimento para obter o número de ciclos até a fratura, utilizando análises de elementos finitos e um incremento Δa_{novo} obtido artificialmente.	85
5.8	Fator de intensidade de tensão total máximo (K_{tot}^{max}) em função do comprimento da trinca	86
5.9	Número de ciclos de carregamento em função do comprimento da trinca	86
5.10	Taxa de propagação em função do comprimento da trinca	87
5.11	ΔN em função do comprimento da trinca	87
5.12	Razão de tensão efetiva em função do comprimento da trinca	88
5.13	K_{res} em função do comprimento da trinca. Ambas as curvas são resultantes de análises de elementos finitos.	91
5.14	(a) Dimensões do corpo de prova soldado por FSW, com trinca central (b) Sistema de coordenadas adotado nas análises do caso da seção 5.4.2	93
5.15	Comparação de K_{res} calculado com o Abaqus e com a equação 3.15	94
5.16	Comparação de K_{app}^{max} calculado com o Abaqus e com a equação 2.40	94
5.17	K_{tot}^{max} em função de a	96
5.18	Taxa de propagação em função de a	97
5.19	ΔN em função de a	97
5.20	Número de ciclos em função de a	98
5.21	R_{eff} em função de a	98
5.22	Fluxograma do <i>script</i> em Python para o Abaqus simulando uma trinca central que atravessa um campo de tensões residuais deslocado em relação ao centro da chapa .	100
5.23	$(K_{app}^{max})_e$, $(K_{app}^{max})_d$ e K_{app}^{max} em função de a	101
5.24	$(K_{res})_d$ em função de a_d	102

5.25	$(K_{res})_e$ em função de a_e	103
5.26	Δa_d em função de a_d	103
5.27	$(a_e - a_d)$ em função do número de ciclos	103
5.28	a, a_e e a_d em função do número de ciclos	104
5.29	$(K_{app}^{max})_e$ em função do número de ciclos	104
5.30	$[(K_{app}^{max})_e - (K_{app}^{max})_d]$ em função de a	106
5.31	Operações preliminares para encontrar a matriz B	107
5.32	Curva original e curva calculada pelo método inverso, no caso de chapa retangular.	109
5.33	Curva original e curva calculada pelo método inverso, no caso de corpo de prova CT.	110
5.34	(a) Extensômetro posicionado a uma distância d da lateral oposta ao corte (b) Carregamento externo P aplicado ao corpo de prova CT	111
5.35	$\epsilon_{yy}^{ref}(a)$ em diversas distâncias à lateral	112
5.36	$Z(a)$ para diversas distâncias do extensômetro à lateral	113
5.37	ϵ_{yy} em função de a , para diversas distâncias em relação à lateral do corpo de prova.	114
5.38	K_{res} pelo método <i>cut compliance</i> , considerando-se a equação 4.18 e ϵ_{yy} de diferentes distâncias em relação à lateral do corpo de prova	115
5.39	K_{res} utilizando-se funções de influência para diferentes distâncias do extensômetro à lateral do corpo de prova	115

Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros necessários para o cálculo da taxa de propagação de trincas em alumínio 2024-T3, utilizando a equação de Walker (Forman et al., 2005).	34
2.2	Parâmetros necessários para o cálculo da taxa de propagação de trincas em alumínio 2024-T3, utilizando a equação NASGRO (Forman et al., 2005).	40
3.1	Valores de $\beta_i (a/W)$ na equação 3.38, para trinca lateral em chapa de largura W (Bao et al., 2010; Wu & Carlsson, 1991).	60
3.2	Valores de $\beta_i (a/W)$ na equação 3.39, para geometria CT (Bao et al., 2010).	60
5.1	Lista de <i>scripts</i> em Python feitos para o Abaqus.	76
5.2	Lista de programas criados para o Matlab.	76
5.3	Instruções em Fortran da sub-rotina SIGINI para inserir um perfil de tensão residual	77
5.4	Instruções em Fortran da sub-rotina SIGINI para inserir dois perfis de tensão residual	78
5.5	<i>Keywords</i> que devem ser inseridos pelo usuário no arquivo de input do Abaqus . . .	78
5.6	Para o caso 1, número de ciclos calculado pela integração numérica da equação de Walker, com constantes encontradas em Dowling (1999).	82
5.7	Para o caso 1, número de ciclos calculado pela integração numérica da equação de Walker, com constantes encontradas em Forman et al. (2005).	88
5.8	Para o caso 1, número de ciclos calculado pela integração numérica da equação NASGRO, com constantes encontradas em Forman et al. (2005).	89
5.9	Para o caso 2, número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Dowling (1999).	90
5.10	Para o caso 2, número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Forman et al. (2005).	90
5.11	Para o caso 2, número de ciclos até a fratura pela equação NASGRO.	90
5.12	Para o caso 3, número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Dowling (1999).	92

5.13	Para o caso 3, número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Forman et al. (2005).	92
5.14	Para o caso 3, número de ciclos até a fratura pela equação NASGRO.	92
5.15	Número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Dowling (1999).	95
5.16	Número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Forman et al. (2005).	95
5.17	Número de ciclos até a fratura pela equação NASGRO.	96
5.18	Número de ciclos até a fratura pela equação NASGRO, com perfil de tensão residual deslocado para a direita.	101
5.19	a_e , a_d , $(a_e - a_d)$ e a , em metro, no momento da fratura.	105
5.20	Instruções do Matlab para preencher a matriz B	108
5.21	Instruções do arquivo sigmah.m, para o caso de uma chapa retangular e um perfil de tensão do tipo degrau unitário.	108
5.22	Instruções do arquivo step_sf.m	109

Nomenclatura

Letras Latinas

a	Vetor de aceleração
A	Área da trinca, igual a $2at$ no caso de uma trinca central e at no caso de uma trinca lateral
a	Comprimento da trinca
a_0	Comprimento intrínseco da trinca
A_0, A_1, A_2, A_3	Coefficientes adimensionais usados na determinação da função f de abertura de trinca
a_d	Distância entre a origem e a ponta direita da trinca
a_e	Distância entre a origem e a ponta esquerda da trinca
A_I	Área de uma pequena região da seção de corte de uma peça, envolvendo um número limitado de grãos cristalinos
A_i	Área da seção de corte do grão cristalino i
A_k, B_k	Parâmetros adimensionais dependentes do material, usados para calcular a tenacidade a fratura em função da espessura do corpo de prova
A_p	Área total de uma seção de corte plana de uma peça
A_Γ	Área do corpo de prova plano, delimitada pelo contorno Γ
B	Matriz ponderadora, que relaciona fatores de intensidade de tensão residual com valores discretos de tensão residual
B_{ij}	Elemento ij da matriz B
b	Na função de Green, distância do ponto de aplicação da força P à origem do eixo x
C	Coefficiente de Paris $\left[\text{Pa}^{-n} \text{m}^{1-\frac{n}{2}} \right]$
c	Distância entre x_{pico} e a posição x em que a curva se torna zero
C_0	Coefficiente de Paris para o caso particular em que a razão de tensão R vale zero $\left[\text{Pa}^{-n} \text{m}^{1-\frac{n}{2}} \right]$

C_f	Coefficiente de Forman $\left[\text{Pa}^{1-n} \text{m}^{\left(\frac{3-n}{2}\right)} \right]$
C_N	Coefficiente da equação NASGRO $\left[\text{Pa}^{-n} \text{m}^{1-\frac{n}{2}} \right]$
C_{ijkl}	Elemento $ijkl$ do tensor constitutivo elástico
C_{th}	Coefficiente adimensional, associado ao <i>threshold</i>
C_{th}^+	Coefficiente adimensional, associado ao <i>threshold</i> , para R positivo
C_{th}^-	Coefficiente adimensional, associado ao <i>threshold</i> , para R negativo
D	Diâmetro de corpo de prova em forma de disco
d	Distância do extensômetro à lateral do corpo de prova
E	Soma das energias de deformação elástica e plástica
E	Módulo de elasticidade
E'	Módulo de elasticidade efetivo; $E' = E$ para tensão plana ou $E' = E/(1 - \nu^2)$ para deformação plana
e_{kl}	Componente kl do tensor de deformações elásticas
$\mathbf{f}(x, y)$	Campo vetorial de forças de corpo
f	Função de abertura de trinca (K_{op}/K_{max})
$F(a/W)$	Função da razão entre o comprimento da trinca e a largura da chapa, usada para calcular fatores de intensidade de tensão devido ao carregamento externo
f_{eff}	Função de abertura de trinca efetiva
\mathcal{G}	<i>Crack driving force</i> ou taxa de liberação de energia de deformação elástica
\mathcal{G}_c	Taxa crítica de liberação de energia de deformação elástica
$g(a, b)$	Função de Green para a ponta direita de uma trinca de comprimento $2a$ em chapa de dimensões infinitas
$g_i(a/W)$	Funções de a/W , usadas para calcular funções ponderadoras $h(x, a)$
$\mathbf{h}(x, y, a)$	Vetor de funções ponderadoras
H	Altura de chapa com trinca lateral; metade da altura de chapa com trinca central
$h(x, a)$	Função ponderadora, usada para determinar fatores de intensidade de tensão residual
J	Taxa de liberação de energia de deformação fornecida pela integral J
\mathbf{K}_{res}	Vetor com valores de fatores de intensidade de tensão residual, para diversos comprimentos de trinca de um corpo de prova

K	Energia cinética do sólido deformável
K_c	Tenacidade à fratura em estado de tensão plana
K_I, K_{II}, K_{III}	Fatores de intensidade de tensão em modos I, II e III de abertura de trinca
K_I^{app}	Fator de intensidade de tensão em modo I de abertura de trinca, devido ao carregamento externo aplicado
K_I^{res}	Fator de intensidade de tensão residual em modo I de abertura de trinca
K_I^{tot}	Fator de intensidade de tensão total em modo I de abertura de trinca
K_{Ic}	Tenacidade à fratura em estado de deformação plana
K_I^{ref}	Fator de intensidade de tensão em modo I de abertura, devido a um carregamento de referência
K_I^{cont}	Fator de intensidade de tensão devido ao contato entre superfícies de fratura
K_{min}, K_{max}	Mínimo e máximo fator de intensidade de tensões, considerando a oscilação do carregamento externo
K_{op}	Mínimo fator de intensidade de tensão para obter a completa separação das superfícies de fratura e a propagação da trinca
$K_{res}^{(i)}$	Elemento i do vetor de fatores de intensidade de tensão residual \mathbf{K}_{res}
m	Parâmetro adimensional conhecido como expoente de Walker
m^+	Expoente de Walker, para R positivo
m^-	Expoente de Walker, para R negativo
m_i	Parâmetro dependente de a/W , usado para calcular funções ponderadoras $h(x, a)$
n	Parâmetro adimensional conhecido como expoente de Paris
\mathbf{n}	Vetor normal ao contorno Γ
N	Número de ciclos de carregamento
N_g	Número de grãos cristalinos
P	Força atuante em superfícies de fratura
p	Expoente adimensional da equação NASGRO, associado ao <i>threshold</i>
q	Expoente adimensional da equação NASGRO, associado ao início da propagação instável da trinca

q_{ref}, q_{novo}	Respectivamente, carregamento externo de referência e carregamento externo novo
\mathcal{R}	Curva de resistência do sólido trincado
R	Razão de tensão ($\sigma_{min}/\sigma_{max}$, que equivale a K_{min}/K_{max})
r	Distância entre um ponto e a ponta da trinca
R_{eff}	Razão de tensão efetiva, considerando-se o efeito das tensões residuais
r_p	Tamanho da zona deformada plasticamente, considerando-se perfil de deformação elasto-plástico
r_y	Estimativa do tamanho da zona deformada plasticamente, considerando-se perfil de deformação linear-elástico
\mathbf{S}_{res}	Vetor com valores de tensão residual, para diversas posições x em relação ao local em que a trinca se nucleia
s	No método <i>cut compliance</i> , distância da força F ao ponto M
$S_{res}^{(i)}$	Elemento i do vetor de tensões residuais \mathbf{S}_{res}
$\mathbf{T}(x, y)$	Vetor de tração normal ao contorno Γ
t	Tempo
t	Espessura da chapa
t_0	Espessura mínima do corpo de prova para que um ensaio de tenacidade à fratura em deformação plana (K_{Ic}) seja válido
$\mathbf{u}(x, y, a)$	Campo vetorial de deslocamentos
$\mathbf{u}^{ref}(x, y, a)$	Campo vetorial de deslocamentos associado a um carregamento de referência
U^e	Energia de deformação elástica
U^p	Energia de deformação plástica
U	No modelo de Elber, razão entre ΔK_{eff} e ΔK
u_x, u_y, u_z	Deslocamentos em x, y e z
$v(x, a)$	Função que define o deslocamento em y de cada superfície de fratura
$v^{ref}(x, a)$	Função que define o deslocamento em y de cada superfície de fratura, devido a um carregamento de referência
W	Trabalho realizado pelo carregamento externo

W	Largura da chapa no caso de trinca lateral de comprimento a ; metade da largura da chapa no caso de trinca central de comprimento $2a$
w	Densidade de energia de deformação
x_{pico}	Posição em que o perfil de tensão residual é máximo
$Z(a)$	Função de influência do método <i>cut compliance</i>

Letras Gregas

α	Fator de restrição tensão/deformação plana (adimensional)
$\beta_i(a/W)$	Funções de a/W , usadas para calcular funções ponderadoras $h(x, a)$
Γ	Contorno do corpo de prova plano
γ	Energia de superfície do material, por unidade de área superficial
Γ_s	Energia empregada na separação das superfícies de fratura
Δa	Incremento sobre o comprimento da trinca
Δa_d	Incremento sobre a_d
Δa_e	Incremento sobre a_e
ΔK	Variação do fator de intensidade de tensão devido à oscilação do carregamento externo ($K_{max} - K_{min}$)
ΔK_0	ΔK_{th} quando a razão de tensão R vale zero
ΔK_1	ΔK_{th} quando a razão de tensão R tende a 1
ΔK_{eff}	Variação do fator de intensidade de tensões que efetivamente abre a trinca
ΔK_{th}	$\Delta K_{threshold}$
ΔK_{tot}	Variação do fator de intensidade de tensão, considerando-se o efeito das tensões residuais
ΔN	Incremento sobre o número de ciclos
δ	Deslocamento do ponto de aplicação de uma força P
δ_e	Deslocamento medido pelo extensômetro no experimento de Elber
δ_{fc}	Deslocamento de abertura de trinca para uma trinca de fadiga
δ_{sc}	Deslocamento de abertura de trinca para uma corte de serra ideal
$\epsilon_{0y}(y)$	Perfil de deformação plástica em uma seção Y-Y, próximo à ponta de uma trinca de fadiga

$(\Delta K_{th})_{eff}$	ΔK <i>threshold</i> , considerando-se R_{eff}
ϵ	Tensor de deformação
ϵ	Deformação
ϵ_f	Deformação no momento da fratura
ϵ_M^{ref}	Deformação do ponto M, devido a um carregamento de referência
ϵ_{kl}^*	Componente kl do tensor de deformações inelásticas
ϵ_{kl}^{app}	Componente kl do tensor de deformações elásticas devido ao carregamento externo
ϵ_{kl}^{res}	Componente kl do tensor de deformações elásticas associado às tensões residuais
η	Coordenada isoparamétrica de elemento finito
θ	Ângulo que fornece a posição de um ponto em relação à ponta da trinca em coordenadas polares
κ	$\kappa = 3 - 4\nu$ para deformação plana; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ para tensão plana
μ	Módulo de cisalhamento
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Coordenada isoparamétrica de elemento finito
Π	Energia potencial do sistema
ρ	Massa específica do material
σ	Tensor de tensões
σ	Tensão
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Componentes principais de tensão
σ_{fr}	Tensão de ruptura da peça na presença de uma trinca
σ_{ij}	Componente ij do tensor de tensões
$\sigma_{min}, \sigma_{max}$	Mínima e máxima tensão aplicada, considerando carregamento externo cíclico
σ_{op}	Mínima tensão aplicada para obter a completa separação das superfícies de fratura e a propagação da trinca
$\sigma_{res}^I, \sigma_{res}^{II}, \sigma_{res}^{III}$	Tensões residuais dos tipos I, II e III
σ_{YS}	Tensão de escoamento do material
σ_{yy}^{max}	Valor de pico do perfil de tensão residual

Abreviações

ASTM	<i>American Society for Testing and Materials</i>
CT	<i>Compact Tension</i>
FSW	<i>Friction Stir Welding</i>
HAZ	<i>Heat Affected Zone</i>
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
TMAZ	<i>Thermo-Mechanically Affected Zone</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Soldagem FSW	3
1.3	Objetivos	5
1.4	Organização do trabalho	5
2	MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA	7
2.1	Balanço de energia na propagação de uma trinca	7
2.2	Taxa de liberação de energia de deformação elástica linear (\mathcal{G})	8
2.3	Integral J	11
2.4	Curvas \mathcal{R}	14
2.5	Fator de intensidade de tensão	17
2.6	Fator de intensidade de tensão pelo método de elementos finitos	22
2.7	Tamanho da zona plasticamente deformada	24
2.8	Tenacidade à fratura	27
2.9	Anisotropia devido à laminação	29
2.10	Modelagem da taxa de propagação de trincas	30
2.10.1	Lei de Paris	31
2.10.2	Equação de Nicholls	32
2.10.3	Equação de Walker	32
2.10.4	Equação de Forman	34
2.10.5	O efeito de fechamento de trinca	34
2.10.6	Equação NASGRO	38
3	MECÂNICA DA FRATURA COM TENSÕES RESIDUAIS	42
3.1	<i>Eigenstrain</i> e <i>eigenstress</i>	42
3.2	Tensões residuais	43

3.2.1	Tipos de tensões residuais	43
3.2.2	Equilíbrio de forças	45
3.2.3	Distribuição de tensões residuais em chapas com trincas	47
3.3	Princípio da sobreposição	50
3.4	Função de Green	50
3.5	Funções ponderadoras	52
3.5.1	Método Petroski-Achenbach	54
3.5.2	Funções ponderadoras para diversas geometrias	56
3.6	Contato entre as superfícies de fratura	61
3.7	Influência de tensões residuais sobre a taxa de propagação de trincas	63
4	METODOLOGIA PARA DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE TENSÕES RESIDUAIS	64
4.1	Obtenção de $\sigma_{yy}^{res}(x)$ a partir de $K_I^{res}(a)$ (Método Inverso)	64
4.2	Método <i>cut compliance</i>	67
4.2.1	Determinação de funções de influência	68
4.3	Relação entre procedimentos experimentais e análises teóricas	72
5	ANÁLISES E RESULTADOS	75
5.1	Introdução	75
5.2	Inserção de tensões residuais em modelos de elementos finitos do Abaqus	77
5.3	Propagação de trinca lateral em chapa retangular	79
5.3.1	Caso 1	79
5.3.2	Caso 2: Influência de c	89
5.3.3	Caso 3: Influência de x_{pico}	91
5.4	Propagação de trinca central em chapa retangular	93
5.4.1	Caso 1: trinca nucleia-se na parte positiva do campo de tensão residual	94
5.4.2	Caso 2: trinca nucleia-se próximo, porém, fora do campo de tensão residual	99
5.5	Implementação de programas para encontrar a matriz B	106
5.5.1	Matriz B em corpo de prova retangular	107
5.5.2	Matriz B em corpo de prova CT	110

5.6	Influência do posicionamento do extensômetro no ensaio <i>cut compliance</i>	111
6	DISCUSSÕES FINAIS E CONCLUSÕES	116
	REFERÊNCIAS	117

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

A pesquisa em mecânica da fratura ganhou força após os incidentes ocorridos com os navios Liberty durante a Segunda Guerra Mundial (Anderson, 1995). Devido ao esforço de guerra, estes navios cargueiros deveriam ser produzidos mais rapidamente e em maior quantidade. Assim, foi decidido produzir os seus cascos utilizando apenas soldagem, ao invés de empregar rebites para juntar as chapas. Isto foi considerado um avanço técnico revolucionário até certo dia em 1943, quando um dos exemplares se dividiu completamente em duas partes, sem razão aparente e sem aviso prévio, enquanto viajava entre a Sibéria e o Alaska. Dos 2700 navios Liberty construídos durante aquela guerra, 400 sofreram fraturas, dos quais 90 foram consideradas graves. Vinte navios foram completamente inutilizados, dos quais dez se partiram em duas partes. A figura 1.1 exibe um Liberty após a falha de sua estrutura.



Figura 1.1: Exemplar do navio Liberty após falha estrutural

Entre outros fatores que contribuíram para a falha destes navios é que o casco, sendo inteiramente soldado, se comporta com uma peça única de metal. As trincas que surgiam podiam se propagar por todo o casco, sem encontrar fronteiras, como acontece com uma estrutura feita de chapas rebitadas. O problema foi amenizado com a adição de reforços estruturais, em localizações

estratégicas.

Algo semelhante aconteceu com a primeira aeronave civil a receber propulsão a jato: o DeHavilland Comet. Em 1952, quando foi colocado em serviço, tudo indicava que seria um grande sucesso, mas este otimismo durou pouco. Em 1954, dois exemplares caíram após apenas 1286 e 903 vôos (Schijve, 2009). Trincas causadas pelos ciclos de pressurização e despressurização da fuselagem começaram a surgir nas janelas, que não tinham um formato muito favorável, em termos de resistência à fadiga. Visto que se tratava do primeiro avião civil impulsionado por turbinas, seu teto operacional e sua altitude de cruzeiro eram muito superiores aos de aeronaves precedentes. Por consequência, a diferença de pressão entre o interior e o exterior da fuselagem também era superior. Antes do Comet ter sido colocado em serviço, sua fuselagem fora submetida a ensaios de fadiga que indicaram que as trincas mencionadas começariam a surgir após 16000 vôos. Antes destes ensaios de fadiga, porém, a mesma fuselagem havia sido submetida a ensaios de carregamento estático, que introduziram pequenas deformações plásticas, responsáveis pelo surgimento de tensões residuais favoráveis à vida em fadiga, distorcendo os resultados. A mesma fuselagem foi utilizada nos ensaios de fadiga visando a redução de custos na construção de protótipos. Apesar de tudo, versões posteriores do Comet, com o projeto modificado, se tornaram verdadeiros sucessos comerciais e estiveram em serviço durante várias décadas.



Figura 1.2: Aeronave da Aloha Airlines após o vôo 243, em 1988

Outro caso comumente citado em textos de mecânica da fratura é o do Boeing 737 da Aloha Airlines que em 1988 perdeu parte de sua fuselagem a 7300 m de altitude e pôde continuar voando até a aterrissagem em um aeroporto (Schijve, 2009). A falha exibida na figura 1.2 ocorreu devido

a um grande número de trincas que surgiram em furos de rebites em certa junta sobreposta. A aeronave era antiga: tinha 89680 ciclos de decolagem e aterrissagem, 35496 horas de voo e 19 anos. Havia um problema de corrosão no local e o problema era conhecido previamente pelo fabricante da aeronave, que fornecia instruções de inspeção que não foram devidamente executadas. Inúmeros casos semelhantes no setor aeronáutico são relatados em Schijve (2009).

Segundo Anderson (1995), a maioria das falhas estruturais se enquadram em uma (ou duas) das seguintes categorias:

- Negligência durante o projeto, construção ou operação da estrutura.
- Aplicação de alguma inovação no projeto ou o emprego de um novo material, ocasionando algum efeito inesperado e indesejável.

As falhas sofridas pelos navios Liberty e as quedas das aeronaves Comet poderiam ter sido evitadas se o projeto tivesse sido executado com maior cuidado, visto que em ambos os casos alguma inovação estava sendo empregada: a soldagem no caso do Liberty e a propulsão a jato no caso do Comet.

Este trabalho é parte do esforço empregado na verificação dos efeitos que um novo processo de soldagem, conhecido como FSW (*Friction Stir Welding*), causará em estruturas aeronáuticas. Particularmente, deseja-se determinar se a vida em fadiga de chapas unidas por FSW é prejudicada ou não.

1.2 Soldagem FSW

Friction Stir Welding (FSW) é uma técnica de soldagem que emprega o calor gerado pelo atrito de uma ferramenta em contato com o local onde deve ser feita a solda, como mostra a figura 1.3. Esta ferramenta é normalmente feita de aço e rotaciona ao mesmo tempo que exerce uma força contra as chapas e avança ao longo da junção. Além do calor gerado pelo atrito, são induzidas deformações plásticas no local da solda. A temperatura atingida neste processo é suficiente para deixar o material em estado semi-sólido, não ocorrendo a fusão do mesmo.

Segundo Khaled (2005), as principais vantagens da soldagem FSW são: baixa distorção, ausência de defeitos associados à fusão do material, alta resistência da junta (mesmo no caso de ligas consideradas não soldáveis por técnicas convencionais, como ligas de alumínio das séries

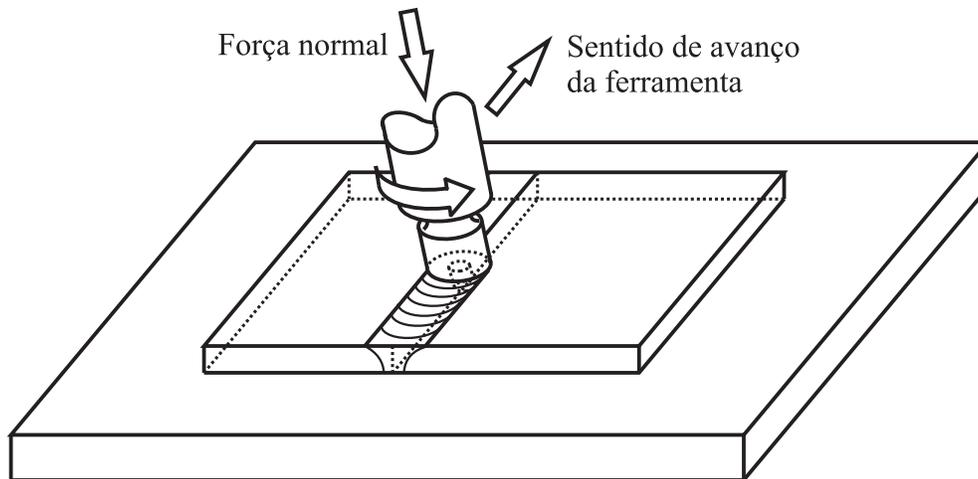


Figura 1.3: Soldagem de topo por FSW (Khaled, 2005)

2xxx e 7xxx) e ausência de defeitos associados ao metal de adição, já que não se adiciona metal algum. A substituição do emprego de rebites pela soldagem FSW pode levar a uma redução de peso do produto, redução de custos de produção (já que a soldagem pode ser realizada em menor tempo), e eliminação da concentração de tensões nos furos que seriam abertos para a instalação de rebites.

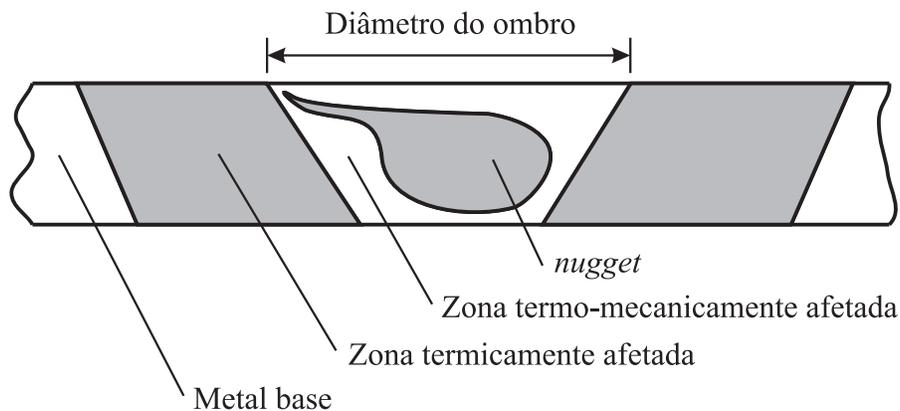


Figura 1.4: Zonas afetadas pela soldagem FSW (Khaled, 2005)

A figura 1.4 exibe zonas produzidas pela soldagem FSW. Devido ao intenso calor gerado no processo, ocorre a formação de uma região com microestrutura modificada, chamada de zona termicamente afetada (HAZ – *Heat Affected Zone*) e outra em seu interior denominada zona termo-mecanicamente afetada (TMAZ - *Thermo-Mechanically Affected Zone*). No interior desta última, encontra-se uma região denominada núcleo ou *nugget*.

Além das modificações microestruturais, são introduzidas tensões residuais na região da solda.

1.3 Objetivos

O objetivo do trabalho de pesquisa desta dissertação é desenvolver métodos para determinar a vida residual em fadiga de peças com trincas que atravessam a região da solda FSW, considerando-se o efeito do campo de tensões residuais.

Como um trabalho adicional, são abordadas técnicas que permitem predizer o perfil de tensão residual, utilizando conceitos de mecânica da fratura. Entre a coleta de dados experimentais e a obtenção do perfil de tensão residual há etapas de tratamento de dados que exigem a criação e uso de programas. Tais programas são implementados e testados de modo que possam ser utilizados posteriormente por outros integrantes do grupo de pesquisa do Departamento de Mecânica Computacional da UNICAMP, do qual o autor deste trabalho fez parte.

1.4 Organização do trabalho

A seguir é feita uma breve descrição dos seis capítulos que compõem esta dissertação:

Capítulo 1: Introdução. Aqui são dados o contexto e a motivação deste trabalho de pesquisa bem como uma sucinta descrição do processo de soldagem FSW.

Capítulo 2: Mecânica da fratura linear elástica. Este capítulo fornece todas as informações importantes na compreensão e no desenvolvimento deste trabalho, não relacionadas à presença de tensões residuais. Portanto, foi necessário incluir conceitos que envolvem balanço de energia, visto que o Abaqus utiliza a integral J no cálculo de fatores de intensidade de tensão e expressões importantes do método *cut compliance* são obtidas a partir daqueles conceitos. Critérios de falha são utilizados nas análises descritas no Capítulo 5, implicando na necessidade de abordar conceitos de tenacidade à fratura. Visto que a equação NASGRO é empregada neste trabalho e que tal equação leva em consideração o efeito de fechamento de trinca, este efeito é abordado no Capítulo 2.

Capítulo 3: Mecânica da fratura com tensões residuais. Este capítulo começa apresentando as tensões residuais como uma consequência da introdução de deformações inelásticas na peça. É abordada a condição de equilíbrio de forças no interior de um sólido com um campo de tensões residuais bem como a redistribuição de tal campo devido à propagação de trincas. O conceito de função ponderadora é dado neste capítulo e demonstra-se como utilizá-lo no cálculo de fatores

de intensidade de tensão residual. Finalmente, aborda-se a modificação de equações de taxa de propagação a fim de considerar os fatores de intensidade de tensão residual.

Capítulo 4: Metodologia para determinação experimental de tensões residuais. Este capítulo demonstra como obter uma curva de tensão residual longitudinal a partir de uma curva de fatores de intensidade de tensão residual pela montagem de um sistema de equações lineares. Os fundamentos teóricos do método *cut compliance* são abordados. A última seção descreve a relação entre procedimentos experimentais e teóricos de análise de mecânica da fratura envolvendo tensões residuais.

Capítulo 5: Análises e resultados. Este capítulo demonstra que fatores de intensidade de tensão residual podem ser determinados utilizando-se a sub-rotina SIGINI do Abaqus para inserir campos de tensões residuais em modelos de elementos finitos de peças trincadas. São apresentados gráficos que comprovam a boa concordância dos resultados obtidos por elementos finitos com expressões analíticas apresentadas nos capítulos precedentes. É abordada uma técnica numérica de integração de equações de taxa de propagação que se demonstrou adequada na determinação da vida residual em fadiga de sólidos com trincas que se propagam atravessando o campo de tensões residuais. Uma versão modificada da referida técnica se demonstrou capaz de lidar com assimetrias do componente devido às tensões residuais. A técnica descrita no Capítulo 4, para obter uma curva de tensão residual longitudinal a partir de uma curva de fatores de intensidade de tensão residual é aplicada, produzindo bons resultados para incrementos de 1 mm sobre o comprimento da trinca. Prova-se neste capítulo que o campo de deformações elásticas na região próxima à lateral de um corpo de prova se modifica com o aumento do comprimento do corte e que esta modificação pode ser utilizada na aplicação do ensaio *cut compliance* no caso de chapas muito finas.

Capítulo 6: Discussões finais e conclusões. Este capítulo enfatiza as conclusões mais importantes deste trabalho, além de apontar aspectos importantes que deverão ser investigados em trabalhos posteriores.

2 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

2.1 Balanço de energia na propagação de uma trinca

O balanço de energia que deve haver durante a propagação de uma trinca foi proposto por Griffith (1920) em sua obra. Considere uma trinca central ou lateral que se propaga em um sólido deformável sujeito a um carregamento externo arbitrário. Na notação adotada por Gdoutos (2005), se W é o trabalho realizado pelo carregamento aplicado, E e K são, respectivamente, as energias de deformação e cinética do sólido e Γ_S é a energia efetivamente empregada na separação das superfícies de fratura, a lei da conservação de energia exige que:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{dK}{dt} + \frac{d\Gamma_S}{dt} \quad (2.1)$$

onde t (não itálico) representa o tempo. A energia de deformação E é a soma das energias de deformação elástica (U^e) e plástica (U^p):

$$E = U^e + U^p \quad (2.2)$$

As áreas \mathcal{A} de uma trinca central de comprimento $2a$ e de uma trinca lateral de comprimento a em uma chapa de espessura t (em itálico) são dadas por:

$$\mathcal{A} = 2at \quad (\text{trinca central}) \quad (2.3a)$$

$$\mathcal{A} = at \quad (\text{trinca lateral}) \quad (2.3b)$$

A equação 2.1 também é válida se o tempo t é substituído pela área \mathcal{A} da trinca. A prova disso vem da consideração de que o comprimento da trinca e (por consequência) a área \mathcal{A} sejam expressos em função do tempo e que cada um dos parâmetros da equação 2.1 seja expresso em função da área \mathcal{A} . Neste caso, a regra da cadeia fornece:

$$\frac{dW(\mathcal{A}(t))}{dt} = \frac{dE(\mathcal{A}(t))}{dt} + \frac{dK(\mathcal{A}(t))}{dt} + \frac{d\Gamma_S(\mathcal{A}(t))}{dt} \quad (2.4a)$$

$$\frac{dW}{dA} \frac{dA}{dt} = \frac{dE}{dA} \frac{dA}{dt} + \frac{dK}{dA} \frac{dA}{dt} + \frac{d\Gamma_s}{dA} \frac{dA}{dt} \quad (2.4b)$$

$$\frac{dW}{dA} = \frac{dE}{dA} + \frac{dK}{dA} + \frac{d\Gamma_s}{dA} \quad (2.4c)$$

Ao abordar o balanço de energia na propagação da trinca, a maioria dos textos de mecânica da fratura inicia pela equação 2.4c, ao invés da equação 2.1, que pode ser mais intuitiva devido à semelhança com as equações encontradas em textos de termodinâmica.

Se o carregamento externo não varia em função do tempo e a trinca cresce lentamente, a energia cinética K é desprezível. Assim, a equação 2.4c pode ser reescrita como:

$$\frac{dW}{dA} = \left(\frac{dU^e}{dA} + \frac{dU^p}{dA} \right) + \frac{d\Gamma_s}{dA} \quad (2.5)$$

A energia potencial Π do sistema é definida por:

$$\Pi = U^e - W \quad (2.6)$$

Neste caso, o balanço de energia também pode ser expresso como:

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dU^p}{dA} + \frac{d\Gamma_s}{dA} \quad (2.7)$$

2.2 Taxa de liberação de energia de deformação elástica linear (\mathcal{G})

A taxa de variação da energia potencial do sistema com relação à área da trinca é definida por (Anderson, 1995; Irwin, 1956):

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW}{dA} - \frac{dU^e}{dA} \quad (2.8)$$

\mathcal{G} é conhecido como *crack driving force* ou *crack extension force* ou ainda como taxa de liberação de energia de deformação elástica linear.

Considerando-se um deslocamento δ correspondente ao ponto de aplicação de uma força P no corpo de prova mostrado na figura 2.1a, há dois casos particulares em que \mathcal{G} pode ser calculado conhecendo-se apenas a taxa dU^e/dA . Estes casos são:

1. Deslocamento constante e força variável
2. Deslocamento variável e força constante

Na ausência de deformação plástica, o diagrama força-deslocamento do corpo de prova é linear, como mostra a figura 2.1b. Com o aumento do tamanho da trinca, a rigidez do corpo de prova diminui e a inclinação do diagrama força-deslocamento se torna menor, como mostra a figura 2.1c.

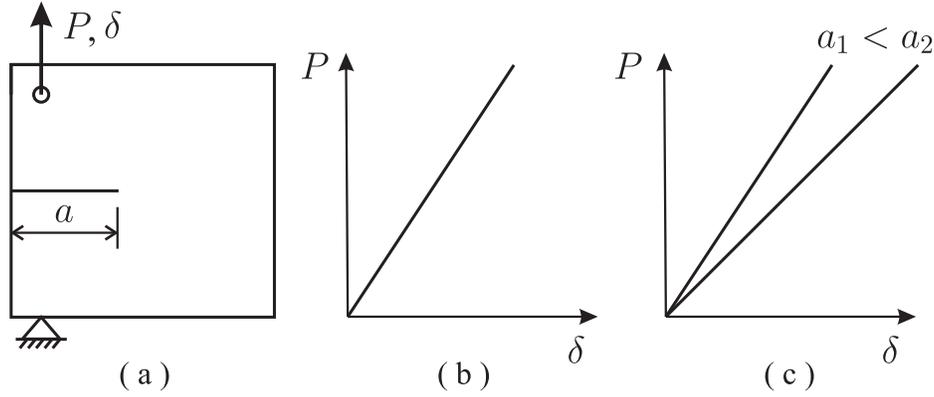


Figura 2.1: (a) Corpo de prova sujeito a uma força P (b) Diagrama força-deslocamento do corpo de prova com trinca de comprimento a (c) Efeito do aumento do tamanho da trinca sobre o diagrama força-deslocamento (Gdoutos, 2005; Broek, 1988)

A figura 2.2a corresponde ao caso 1, deslocamento constante e força variável. Ela mostra que se o comprimento da trinca aumenta de a_1 para a_2 e o ponto de aplicação da força não se desloca, então P deve ser reduzido de P_1 para P_2 . Entre os estados A e B, a força P não realiza trabalho, ($dW/dA = 0$) e ocorre uma redução da energia de deformação elástica ($dU^e/dA < 0$). Assim, \mathcal{G} é dado por:

$$\mathcal{G} = - \frac{dU^e}{dA} \quad (\text{Deslocamento constante, força variável, } dU^e/dA < 0) \quad (2.9)$$

A figura 2.2b mostra novamente o comprimento da trinca aumentando de a_1 para a_2 , mas, desta vez, a força P permanece constante e o ponto de aplicação desta força se desloca de δ_1 para δ_2 . Assim, P realiza um trabalho expresso por $P(\delta_2 - \delta_1)$, a energia de deformação aumenta de $1/2P\delta_1$ para $1/2P\delta_2$ e \mathcal{G} pode ser expresso por (Broek, 1988):

$$\mathcal{G} = \frac{dW}{dA} - \frac{dU^e}{dA} = \frac{P(\delta_2 - \delta_1)}{\Delta A} - \frac{\frac{1}{2}P(\delta_2 - \delta_1)}{\Delta A} = \frac{\frac{1}{2}P(\delta_2 - \delta_1)}{\Delta A} \quad (2.10)$$

Portanto, conclui-se que caso a trinca se propague devido a uma força constante, \mathcal{G} é igual a

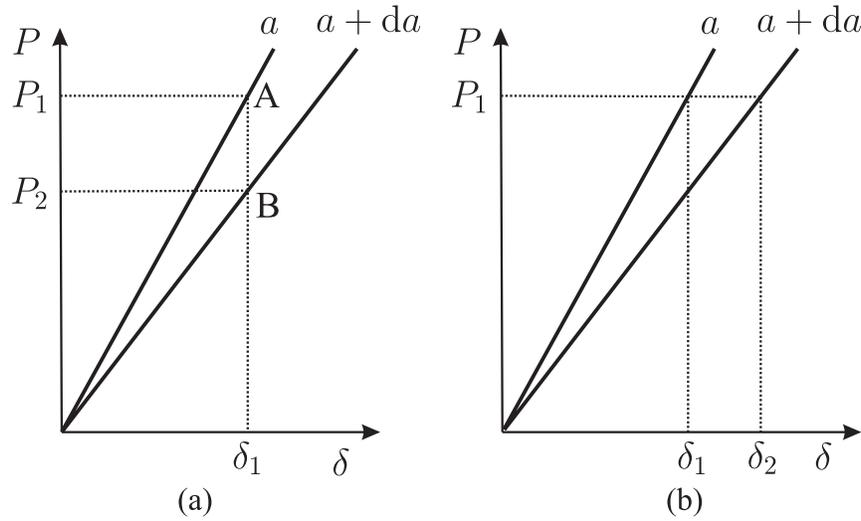


Figura 2.2: (a) Deslocamento constante, força variável (b) Força constante, deslocamento variável (Broek, 1988)

taxa de variação da energia de deformação elástica com relação à área \mathcal{A} :

$$\mathcal{G} = \frac{dU^e}{d\mathcal{A}} \quad (\text{Força constante, deslocamento variável, } dU^e/d\mathcal{A} > 0) \quad (2.11)$$

As equações 2.9 e 2.11 não devem ser vistas como formas alternativas da definição de \mathcal{G} . São apenas os resultados para dois casos particulares. \mathcal{G} é frequentemente chamado como taxa de liberação de energia de deformação elástica. Entretanto, a rigor, este termo seria adequado somente ao primeiro caso apresentado (deslocamento constante, força variável), onde a energia utilizada na propagação da trinca é de fato proveniente da energia de deformação elástica (Gdoutos, 2005). No segundo caso, porém, a energia utilizada na propagação da trinca provém do trabalho realizado pela força P e não há liberação de energia de deformação elástica; pelo contrário, ocorre uma absorção de energia nesta forma.

A mudança na energia de deformação elástica devido à presença de uma trinca de comprimento $2a$ em uma chapa de dimensões infinitas e espessura t sujeita a um carregamento σ que atua perpendicularmente ao plano da trinca é dada por (Gdoutos, 2005; Griffith, 1920):

$$U^e = \frac{\pi a^2 \sigma^2 t}{8\mu} (\kappa + 1) \quad (2.12)$$

onde μ é o módulo de cisalhamento do material e κ é um parâmetro dependente do coeficiente de

Poisson ν e do estado de tensão/deformação:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{(Tensão Plana)} \\ 3 - 4\nu & \text{(Deformação Plana)} \end{cases} \quad (2.13)$$

Se o material é isotrópico, tem-se a seguinte relação entre módulo de elasticidade, módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.14)$$

Derivando a equação 2.12 com relação à área \mathcal{A} dada por 2.3a, e igualando o resultado com a equação 2.11, obtém-se:

$$\mathcal{G} = \frac{dU^e}{d\mathcal{A}} = \frac{\frac{dU^e}{da}}{\frac{d\mathcal{A}}{da}} = \frac{\pi a \sigma^2 (\kappa + 1)}{8\mu} \quad (2.15)$$

A equação 2.15 é válida no caso de uma trinca de comprimento $2a$ em um meio infinito, sob carregamento constante. Nota-se que ela é linear com relação ao comprimento da trinca, visto que todos os demais parâmetros são independentes de a , cujo expoente é 1. Nos casos em que o corpo de prova apresenta dimensões finitas, esse comportamento linear com relação ao comprimento da trinca desaparece.

2.3 Integral J

A figura 2.3a exibe uma trinca em um sólido plano feito de material elástico linear ou não linear. Γ é um contorno qualquer que circunda a ponta da trinca e termina ao encontrar as superfícies de fratura, isto é, trata-se de uma curva aberta. O campo de deslocamentos é denotado por \mathbf{u} e o vetor de tração normal a Γ é expresso por:

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.16)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões e \mathbf{n} é um vetor unitário normal a Γ .

Segundo Rice (1968), se o contorno Γ é percorrido no sentido anti-horário, a taxa de liberação de energia de deformação elástica não linear pode ser calculada pela integral J, que é expressa por:

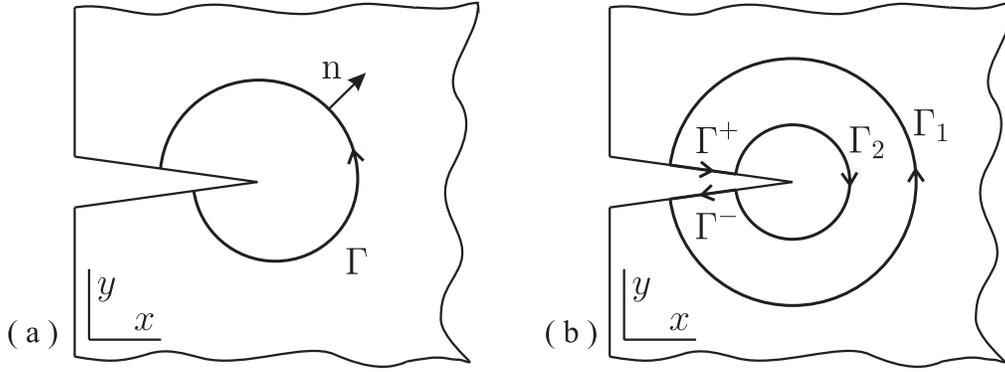


Figura 2.3: (a) Contorno aberto Γ envolvendo a ponta da trinca (b) Contorno fechado envolvendo a ponta da trinca (Rice, 1968)

$$J = - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathcal{A}} = \int_{\Gamma} w \, dy - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \, ds \quad (2.17)$$

Se o material se deforma apenas em regime linear elástico, tem-se $J = \mathcal{G}$. A densidade de energia de deformação w é um campo escalar que depende do estado de deformação infinitesimal em cada ponto de coordenada (x, y) da peça. Ela quantifica a energia de deformação por unidade de volume no ponto de interesse e é expressa por:

$$w = w(\epsilon_{ij}(x, y)) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} \, d\epsilon_{ij} \quad (2.18)$$

Em notação indicial, $x = x_1$ e $y = x_2$. Se a deformação é elástica linear, a densidade de energia de deformação é dada por:

$$w = w(\epsilon_{ij}(x, y)) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (2.19)$$

Deseja-se demonstrar que para uma dada peça sob um dado carregamento, o valor da integral J independe de qual contorno Γ é escolhido. Tal demonstração pode ser encontrada no trabalho de Rice (1968) e exige o conhecimento da relação entre o tensor de pequenas deformações e o gradiente do vetor de deslocamentos:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left[(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \right] \quad (2.20)$$

que em notação indicial é expressa por:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.21)$$

Além disso, é preciso conhecer a equação de movimento de Cauchy, que é, segundo Lai et al. (1993):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{a} \quad (2.22)$$

ou seja, o divergente do tensor de tensões mais o vetor de forças de corpo multiplicado pela massa específica do material é igual ao vetor de aceleração multiplicado pela massa específica. Tal equação, em notação indicial é expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho a_i \quad (2.23)$$

Se não há aceleração, a equação de movimento de Cauchy se torna uma equação de equilíbrio. Se além disso, não há forças de corpo, tem-se $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$.

É preciso demonstrar que a integral J é nula se Γ é um contorno fechado, que será expresso nas equações subsequentes como Γ_F . A área circundada por Γ_F será expressa por A_F . O teorema de Green, que relaciona a integral de linha ao longo de uma curva fechada com uma integral dupla sobre a área delimitada por aquela curva, permite escrever:

$$J = \int_{\Gamma_F} w \, dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \, ds = \int_{A_F} \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right] \, dx \, dy \quad (2.24)$$

Derivando-se a equação w em relação a x , tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{ij}} \cdot \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} \quad (2.25a)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.25b)$$

$$= \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (2.25c)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (2.25d)$$

A equação 2.25a é obtida a partir da definição de w , equação 2.18. A equação 2.25b é

resultante da equação 2.21, que expressa as componentes do tensor de deformações infinitesimais em termos de derivadas das componentes de deslocamentos. A penúltima igualdade (equação 2.25c) é válida pois $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, isto é, o tensor de tensões é simétrico. A última igualdade (equação 2.25d) é escrita considerando-se $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$.

A substituição da equação 2.25d na equação 2.24 permite concluir que a integral J é nula se o contorno Γ é fechado.

A figura 2.3b exibe um contorno fechado Γ_F dado pela união dos seguintes contornos:

- Γ_1 , que é percorrido no sentido anti-horário;
- Γ^+ , que coincide com a superfície de fratura superior e é percorrido de Γ_1 para Γ_2 ;
- Γ_2 , que é percorrido no sentido horário;
- Γ^- , que coincide com a superfície de fratura inferior e é percorrido de Γ_2 para Γ_1 .

Neste caso, a integral J sobre o contorno fechado Γ_F é expressa por:

$$0 \equiv J_F = J_1 + J_2 + J^- + J^+ \quad (2.26)$$

Nas superfícies de fratura, $\mathbf{T} = 0$ e $dy = 0$. Consequentemente, J^- e J^+ são nulos e $J_1 = -J_2$. Se Γ_2 é percorrido no sentido anti-horário, tem-se $J_1 = J_2$.

Na presença de deformações plásticas ou de dilatação térmica não uniforme, a integral J deixa de ser independente do contorno Γ escolhido (Carka & Landis, 2011; Bao et al., 2010).

2.4 Curvas \mathcal{R}

Independentemente do tamanho e forma do corpo de prova e do tipo de material utilizado, a seguinte condição é requerida para que haja propagação da trinca:

$$\mathcal{G} = \mathcal{R} \quad (2.27)$$

\mathcal{R} é chamado como curva \mathcal{R} ou curva de resistência (Anderson, 1995). No caso de materiais idealmente frágeis, ou seja, que apresentam apenas comportamento linear elástico, \mathcal{R} é constante:

$$\mathcal{R} = \frac{d\Gamma_s}{dA} = 2\gamma \quad (2.28)$$

onde γ é a energia de superfície do material, que quantifica a energia requerida para formar uma nova superfície, por unidade de área superficial. Visto que na propagação de uma trinca ocorre a ampliação de duas superfícies de fratura, γ é multiplicado por dois na equação 2.28.

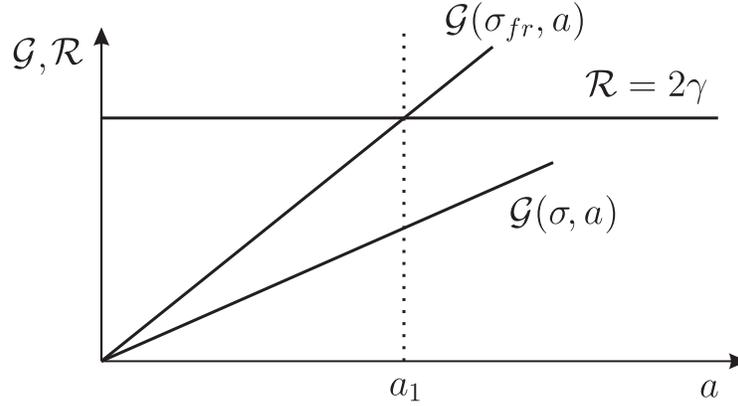


Figura 2.4: Balanço energético na fratura de um corpo de prova frágil de dimensões infinitas com trinca de comprimento $2a_1$ (Gdoutos, 2005)

A figura 2.4 representa graficamente o balanço de energia na fratura de uma chapa de dimensões infinitas com trinca de comprimento $2a_1$. \mathcal{G} é dado pela equação 2.15 e \mathcal{R} é uma reta horizontal pois um material frágil está sendo considerado. No início, o carregamento aplicado σ é menor do que σ_{fr} e não ocorre qualquer alteração no comprimento da trinca. O carregamento é aumentado e no instante em que σ se iguala a σ_{fr} , a condição da equação 2.27 é satisfeita e a trinca começa a se propagar de maneira instável, visto que \mathcal{G} continua crescendo devido ao aumento do comprimento da trinca enquanto a resistência do material \mathcal{R} permanece constante.

A tensão de ruptura σ_{fr} correspondente ao caso da figura 2.4 é calculado igualando-se a equação 2.15 à equação 2.28. Os resultados são (Gdoutos, 2005; Griffith, 1920):

$$\sigma_{fr} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a(1-\nu^2)}} \quad (\text{Deformação Plana}) \quad (2.29a)$$

$$\sigma_{fr} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad (\text{Tensão Plana}) \quad (2.29b)$$

Se o material é elasto-plástico, então \mathcal{R} é definido por (Gdoutos, 2005):

$$\mathcal{R} = \frac{d\Gamma_s}{d\mathcal{A}} + \frac{dU^p}{d\mathcal{A}} \quad (2.30)$$

A figura 2.5 mostra o comportamento de uma curva \mathcal{R} no caso de um material elasto-plástico. As demais curvas representam \mathcal{G} para diversos valores de σ , o carregamento externo aplicado perpendicularmente ao plano da trinca. Desta vez, \mathcal{G} não corresponde a uma reta pois um corpo de prova de dimensões limitadas está sendo considerado. O comprimento inicial da trinca é a_1 , e σ é aumentado a partir de zero até atingir o valor σ_2 , que é menor do que σ_{fr} . Neste caso, a trinca se propaga estávelmente até o comprimento a_2 . Se logo em seguida, o carregamento externo é removido e um novo carregamento é aplicado, o diagrama deve ser construído novamente, considerando-se desta vez um comprimento de trinca inicial igual a a_2 .

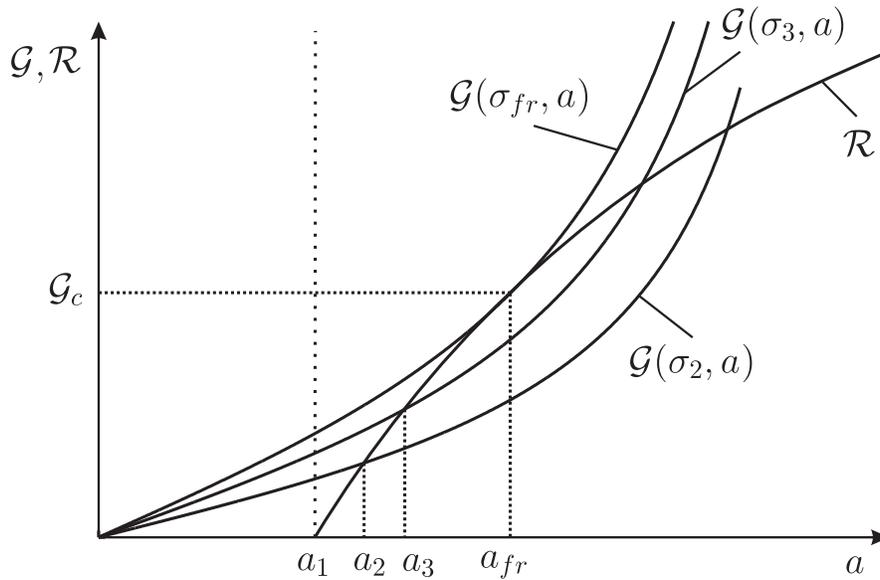


Figura 2.5: Balanço energético na propagação estável de uma trinca de comprimento inicial a_1 em um corpo de prova elasto-plástico de dimensões finitas (Gdoutos, 2005)

Visto que a concavidade de \mathcal{G} é para cima e a concavidade de \mathcal{R} é para baixo, conclui-se que as condições para que haja propagação estável da trinca são as fornecidas pelas equações 2.31a e 2.31b (Anderson, 1995):

$$\mathcal{G} = \mathcal{R} \quad (2.31a)$$

$$\frac{d\mathcal{G}}{da} < \frac{d\mathcal{R}}{da} \quad (2.31b)$$

Ainda considerando-se a figura 2.5, se o carregamento externo atingir o valor σ_{fr} , a propagação da trinca torna-se instável pela mesma razão apontada para o caso da figura 2.4.

Portanto, a condição para que haja a propagação instável da trinca é:

$$\frac{d\mathcal{G}}{da} \geq \frac{d\mathcal{R}}{da} \quad (2.32)$$

O valor \mathcal{G}_c , correspondente ao ponto em que as curvas \mathcal{G} e \mathcal{R} se tangenciam, é uma medida da tenacidade à fratura do sólido. O ponto de tangência muda em função do comprimento inicial da trinca (a_1), visto que a localização da curva \mathcal{R} no diagrama depende do valor de a_1 . Porém, devido à curvatura de \mathcal{G} e \mathcal{R} , o valor de \mathcal{G}_c é aproximadamente independente de a_1 . Esta dependência é mais forte no caso em que \mathcal{R} apresenta uma curvatura e \mathcal{G} é uma reta, isto é, quando se trata de uma trinca de comprimento $2a$ em uma chapa de dimensões infinitas feita de material elasto-plástico.

Segundo Anderson (1995), a geometria e as dimensões do corpo de prova produzem algum efeito sobre as curvas \mathcal{R} . Chapas mais finas correspondem a curvas \mathcal{R} mais inclinadas, isto é, com derivadas maiores, produzindo maiores valores de \mathcal{G}_c .

2.5 Fator de intensidade de tensão

A figura 2.6 ilustra cada um dos três possíveis modos de abertura de uma trinca, que são denominados como:

- Modo I: abertura
- Modo II: cisalhamento
- Modo III: rasgamento

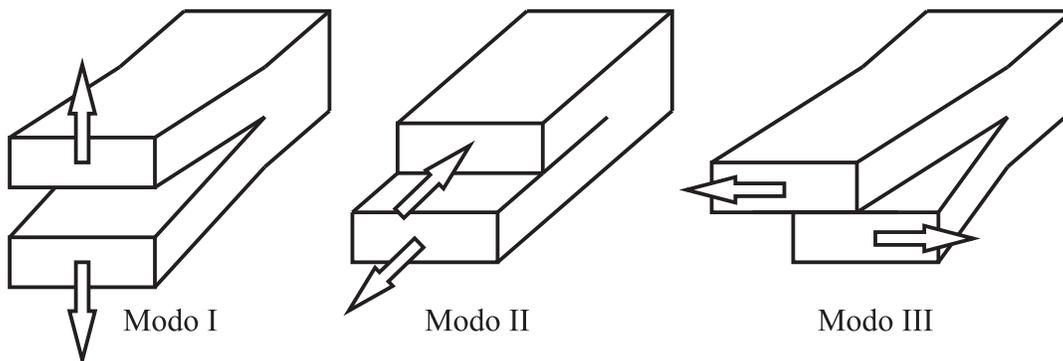


Figura 2.6: Modos de abertura de uma trinca (Hertzberg, 1996)

Segundo a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), as componentes de tensão e de deslocamentos de qualquer ponto localizado nas proximidades da ponta de uma trinca situada

em uma peça submetida a carregamentos externos podem ser expressos em termos dos fatores de intensidade de tensão K_I , K_{II} e K_{III} . Os índices dos fatores se referem ao modo de abertura de trinca.

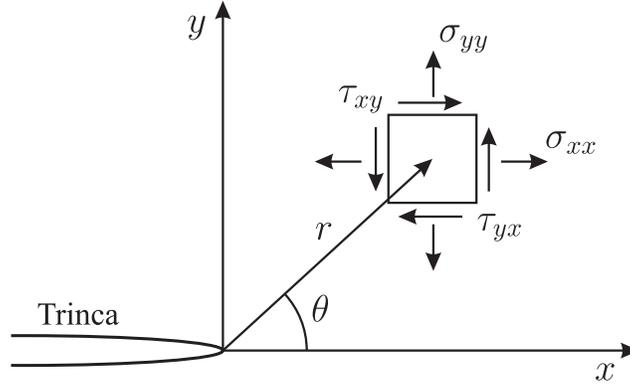


Figura 2.7: Coordenadas em relação à ponta da trinca (Hertzberg, 1996; Irwin, 1958)

Considerando-se o sistema de coordenadas polares definido pela distância r em relação à ponta da trinca e pelo ângulo θ mostrado na figura 2.7, os campos de tensões e de deslocamentos nas proximidades da ponta de uma trinca aberta apenas em modo I são definidos pelas equações 2.33 (Hertzberg, 1996; Irwin, 1958):

$$\sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (2.33a)$$

$$\sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (2.33b)$$

$$\tau_{xy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (2.33c)$$

$$u_x(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (2.33d)$$

$$u_y(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (2.33e)$$

Os campos de tensões e de deslocamentos nas proximidades da ponta de uma trinca aberta apenas em modo II são definidos pelas equações 2.34:

$$\sigma_{xx}(r, \theta) = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (2.34a)$$

$$\sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.34b)$$

$$\tau_{xy}(r, \theta) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[1 - \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (2.34c)$$

$$u_x(r, \theta) = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (2.34d)$$

$$u_y(r, \theta) = - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[\kappa - 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (2.34e)$$

A componente $\sigma_{zz}(r, \theta)$ é dada por:

$$\sigma_{zz}(r, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{(Tensão Plana)} \\ \nu [\sigma_{xx}(r, \theta) + \sigma_{yy}(r, \theta)] & \text{(Deformação Plana)} \end{cases} \quad (2.35)$$

Quando a trinca é aberta apenas em modo III, as componentes de tensão e deslocamentos não-nulas nas proximidades da ponta da trinca são definidas pelas equações 2.36:

$$\tau_{xz} = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (2.36a)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (2.36b)$$

$$u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (2.36c)$$

A região dentro da qual as equações 2.33, 2.34, 2.35 e 2.36 são válidas é chamada de região K -dominante. Porém, o tamanho desta região não é claramente definido, pois as curvas de desvio dos valores fornecidos por aquelas equações em relação aos valores corretos crescem de maneira suave com o aumento da distância r , como mostram Becker Jr et al. (1997) por meio de análises de elementos finitos. Tais curvas de desvio crescem a taxas diferentes quando corpos de prova de diferentes geometrias e dimensões são considerados (Knott, 1973).

A figura 2.8a mostra uma trinca de comprimento $2a$ em um corpo de dimensões infinitas, sujeito a um carregamento distante σ , que abre a trinca em modo I somente. Neste caso, o fator de intensidade de tensões K_I possui solução exata expressa por:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.37)$$

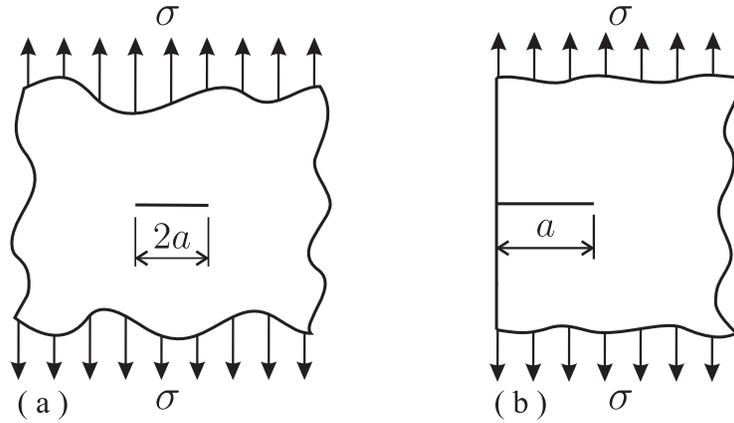


Figura 2.8: (a) Trinca de comprimento $2a$ em corpo de dimensões infinitas, sujeito a carregamento σ (b) Trinca lateral de comprimento a em corpo semi-infinito, sujeito a carregamento σ

A figura 2.8b exibe um corpo semi-infinito, com uma trinca lateral de comprimento a . Um carregamento distante σ abre a trinca em modo I. Neste caso, segundo Petroski & Achenbach (1978), K_I é expresso por:

$$K_I = 1,1215 \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.38)$$

Os fatores de intensidade de tensão para trincas em corpos de prova de largura limitada e altura infinita sujeitos a um carregamento distante σ , dependem da razão entre o comprimento da trinca e a largura da chapa. Assim, modifica-se a equação 2.37 multiplicando-a pela função $F(a/W)$, onde W vale a largura da chapa no caso de trinca lateral ou a metade da largura no caso de trincas centrais:

$$K_I = F(a/W) \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.39)$$

Tada et al. (1985) sugerem a equação 2.40 para expressar a função $F(a/W)$ correspondente a uma trinca central de comprimento $2a$ em chapa de largura $2W$ e altura infinita (figura 2.9a):

$$F(a/W) = \left[1 - 0,025 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 0,06 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right] \sqrt{\sec \left(\frac{\pi a}{2W} \right)} \quad (2.40)$$

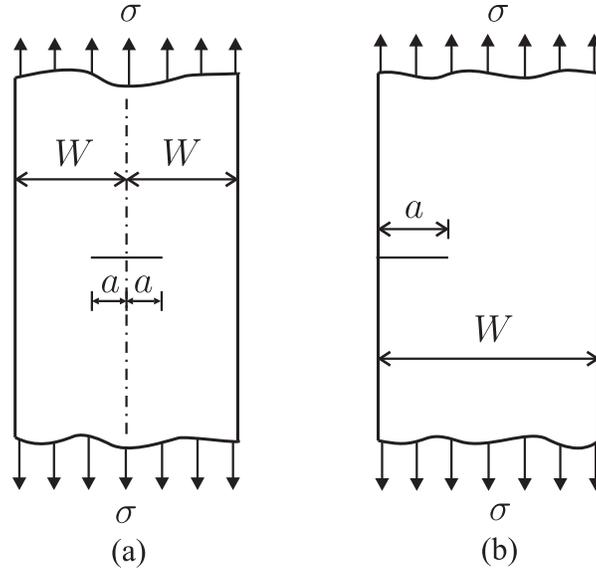


Figura 2.9: Chapas de altura infinita e largura definida. (a) Com trinca central (b) Com trinca lateral

No caso de trincas laterais de comprimento a em chapa de largura W e altura infinita (figura 2.9b), os mesmos autores sugerem a equação 2.41:

$$F(a/W) = \sqrt{\frac{2W}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \frac{0,752 + 2,02\left(\frac{a}{W}\right) + 0,37\left[1 - \sin\left(\frac{\pi a}{2W}\right)\right]^3}{\cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \quad (2.41)$$

Ainda segundo Tada et al. (1985), o fator de intensidade de tensão devido a um carregamento externo P , que é dado em unidade de força por unidade de espessura do corpo de prova CT (*compact tension*) pode ser calculado por:

$$K_I = \frac{P}{W} \sqrt{a} F_1 \quad (2.42)$$

Diferentemente de outras equações, não é preciso multiplicar o comprimento a da trinca por π na equação 2.42. F_1 é uma função de a/W e é dada por:

$$F_1 = \frac{2\left(2 + \frac{a}{W}\right)}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{W}}} F_2 \quad (2.43)$$

onde a função F_2 é dada por:

$$F_2 = 0,443 + 2,32\left(\frac{a}{W}\right) - 6,66\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 7,36\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 2,8\left(\frac{a}{W}\right)^4 \quad (2.44)$$

Segundo Anderson (1995), os fatores de intensidade de tensão K_I , K_{II} e K_{III} se relacionam com a taxa de liberação de energia de deformação elástica \mathcal{G} da seguinte forma:

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.45)$$

E' é o módulo de elasticidade efetivo, parâmetro que depende se o material está em estado de tensão plana ou de deformação plana:

$$E' = \begin{cases} E & \text{(Tensão Plana)} \\ \frac{E}{(1 - \nu^2)} & \text{(Deformação Plana)} \end{cases} \quad (2.46)$$

2.6 Fator de intensidade de tensão pelo método de elementos finitos

Observando-se as equações apresentadas na seção anterior, que expressam as componentes de tensão σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} em termos dos fatores de intensidade de tensão e de funções de coordenadas, nota-se que há uma singularidade no campo de deformações nas proximidades da ponta de uma trinca e que esta singularidade é do tipo $1/\sqrt{r}$, onde r é a distância em relação à ponta da trinca.

Henshell & Shaw (1975) mostraram em seu trabalho que é possível obter uma singularidade no campo de deformações de um elemento finito isoparamétrico se os nós do meio das arestas são suficientemente deslocados de suas posições originais.

A figura 2.10a mostra um elemento finito isoparamétrico quadrilateral de oito nós. Os nós 5 e 8 estão em posições denominadas *quarter point*. Se x_i é a coordenada x do nó i , e considerando-se que $x_1 = 0$, $x_2 = L_1$ e $x_5 = L_1/4$, Barsoum (1976) mostrou que:

$$\epsilon_{xx} = -\frac{1}{2} \left[\frac{3}{\sqrt{xL_1}} - \frac{4}{L_1} \right] u_1 + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\sqrt{xL_1}} + \frac{4}{L_1} \right] u_2 + \left[\frac{2}{\sqrt{xL_1}} - \frac{4}{L_1} \right] u_5 \quad (2.47)$$

onde u_i é o deslocamento do nó i na direção x . Nesta equação, nota-se que há uma singularidade do tipo $1/\sqrt{x}$, sugerindo que ϵ_{xx} é bem modelado na aresta formada pelos nós 1, 2 e 5 no caso em que há uma ponta de trinca no nó 1, o nó 5 está na posição *quarter point* e o material é elástico linear.

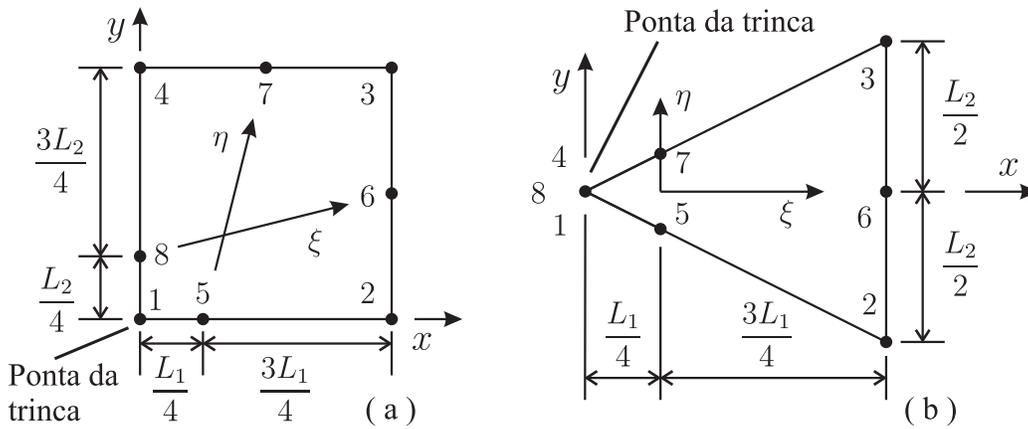


Figura 2.10: Elementos finitos isoparamétricos com nós na posição *quarter point* (Barsoum, 1976)

Ao longo de retas que passam pelo nó 1 e pelo interior do elemento finito da figura 2.10a, a deformação ϵ não apresenta uma singularidade do tipo $1/\sqrt{r}$. Levando-se isto em consideração, Barsoum (1976) propôs o elemento finito da figura 2.10b, com nós 5 e 7 na posição *quarter point* e 1, 4 e 8 colapsados. Neste caso, o campo de deformação dentro do elemento apresenta o comportamento desejado.

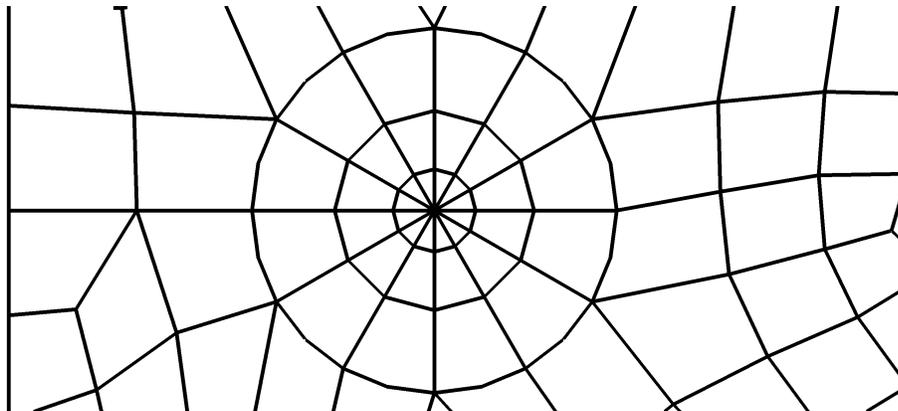


Figura 2.11: Exemplo de malha de elementos finitos na ponta de uma trinca lateral

É possível obter bons resultados de fatores de intensidade de tensão com elementos finitos convencionais se a malha é extremamente refinada na ponta da trinca. O uso de elementos finitos com nós em posições *quarter point* permite obter bons resultados mesmo se a malha é pouco refinada na ponta da trinca.

A figura 2.11 exibe um exemplo de malha que emprega o elemento finito da figura 2.10b na ponta de uma trinca lateral em um sólido plano.

2.7 Tamanho da zona plasticamente deformada

Segundo Kanninen & Popelar (1985), a mecânica da fratura linear elástica é válida se o tamanho da zona deformada plasticamente na ponta da trinca é muito inferior ao tamanho da zona K -dominante, cuja definição é dada na seção 2.5.

Considerando-se θ igual a zero na equação 2.33b, e substituindo σ_{yy} por σ_{YS} (a tensão de escoamento do material), conclui-se que há deformação plástica em distâncias r inferiores a r_y dado por:

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 \quad (\text{Tensão Plana}) \quad (2.48)$$

No entanto, r_y foi estimado utilizando-se a equação 2.33b, que fornece um perfil de tensão na ponta da trinca válido apenas em regime de deformação linear elástica. Considerando-se um perfil de deformação elasto-plástica na ponta da trinca, conclui-se que o tamanho da região plasticamente deformada é na verdade (Anderson, 1995):

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 \quad (\text{Tensão Plana}) \quad (2.49)$$

A figura 2.12 mostra esquematicamente os conceitos mencionados.

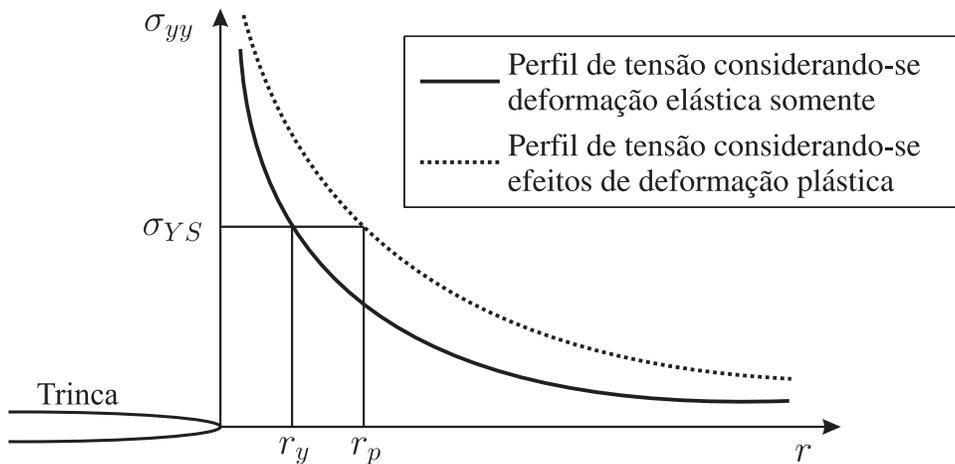


Figura 2.12: Tamanho da zona plástica em $\theta = 0$ (Anderson, 1995)

As equações 2.48 e 2.49 são válidas em condição de tensão plana. Em condição de deformação plana, Irwin (1968) estimou que o tamanho da região deformada plasticamente é três vezes menor do que em condição de tensão plana e seria portanto dado pela equação 2.50a se o perfil de deformação

considerado é linear-elástico e pela equação 2.50b se o perfil de deformação é elasto-plástico:

$$r_y = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 \quad (\text{Deformação Plana}) \quad (2.50a)$$

$$r_p = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{YS}} \right)^2 \quad (\text{Deformação Plana}) \quad (2.50b)$$

Com o objetivo de deduzir expressões equivalentes às equações 2.48 e 2.50a, mas desta vez em função do ângulo θ , é preciso considerar o critério de escoamento de von Mises expresso por:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{YS}^2 \quad (2.51)$$

Em estado de tensão ou deformação plana, as componentes principais de tensão são:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.52a)$$

$$\sigma_3 = \begin{cases} 0 & (\text{Tensão Plana}) \\ \nu(\sigma_1 + \sigma_2) & (\text{Deformação Plana}) \end{cases} \quad (2.52b)$$

A substituição das equações 2.33a, 2.33b e 2.33c nas equações 2.52 resulta em:

$$\sigma_{1,2} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[1 \pm \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.53a)$$

$$\sigma_3 = \begin{cases} 0 & (\text{Tensão Plana}) \\ \frac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & (\text{Deformação Plana}) \end{cases} \quad (2.53b)$$

Finalmente, a substituição das equações 2.53 no critério de escoamento de von Mises (equação 2.51) resulta em:

$$r_y(\theta) = \frac{K_I^2}{4\pi\sigma_{YS}^2} \left[1 + \cos\theta + \frac{3}{2}\sin^2\theta \right] \quad (\text{Tensão Plana}) \quad (2.54a)$$

$$r_y(\theta) = \frac{K_I^2}{4\pi\sigma_{YS}^2} \left[(1 - 2\nu)^2(1 + \cos\theta) + \frac{3}{2}\sin^2\theta \right] \quad (\text{Deformação Plana}) \quad (2.54b)$$

A figura 2.13 exibe as curvas correspondentes às equações 2.54a e 2.54b, considerando-se

$K_I = 30 \text{ MPa m}^{0,5}$, coeficiente de Poisson 0,33 e tensão de escoamento de 290 MPa.

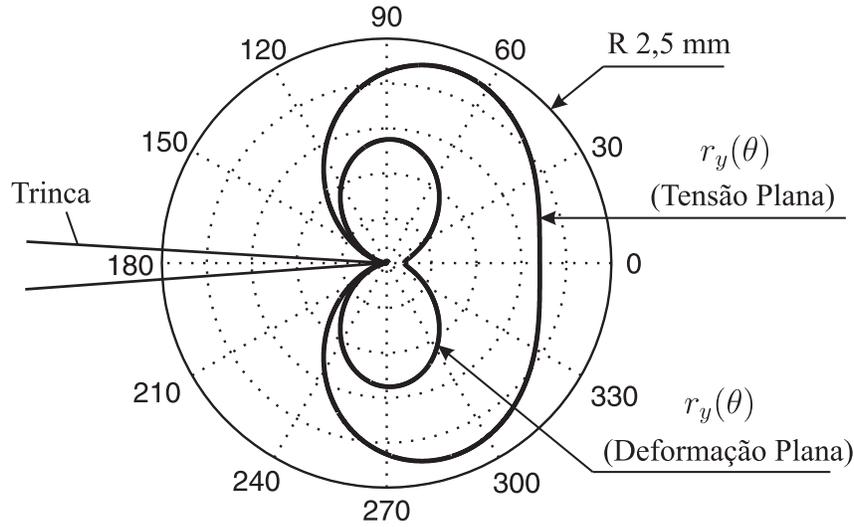


Figura 2.13: Zona plástica em condições de tensão plana e de deformação plana (Broek, 1984)

Segundo Broek (1984), o uso do critério de escoamento de Tresca conduziria aos seguintes resultados para $r_y(\theta)$:

$$r_y(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{YS}^2} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2 \quad (\text{Tensão Plana}) \quad (2.55a)$$

$$r_y(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{YS}^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin \frac{\theta}{2} \right]^2 \quad (\text{Deformação Plana}) \quad (2.55b)$$

$$r_y(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{YS}^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{Deformação Plana}) \quad (2.55c)$$

Em estado de deformação plana, deve ser adotado o maior valor entre os dois fornecidos pelas equações 2.55b e 2.55c. As zonas plásticas baseadas no critério de Tresca são ligeiramente maiores e apresentam formas ligeiramente diferentes daquelas baseadas no critério de von Mises.

A figura 2.14 mostra a forma tridimensional da região deformada plasticamente na ponta de uma trinca em corpo de prova de razoável espessura. Nota-se que nas proximidades da superfície, onde ocorre tensão plana, a região deformada plasticamente é maior do que no interior do corpo de prova, onde ocorre deformação plana.

As equações 2.54 e 2.55, assim como as equações 2.48 e 2.50a foram deduzidas considerando-se que o perfil de deformação nas proximidades da ponta da trinca é inteiramente elástico-linear, ao

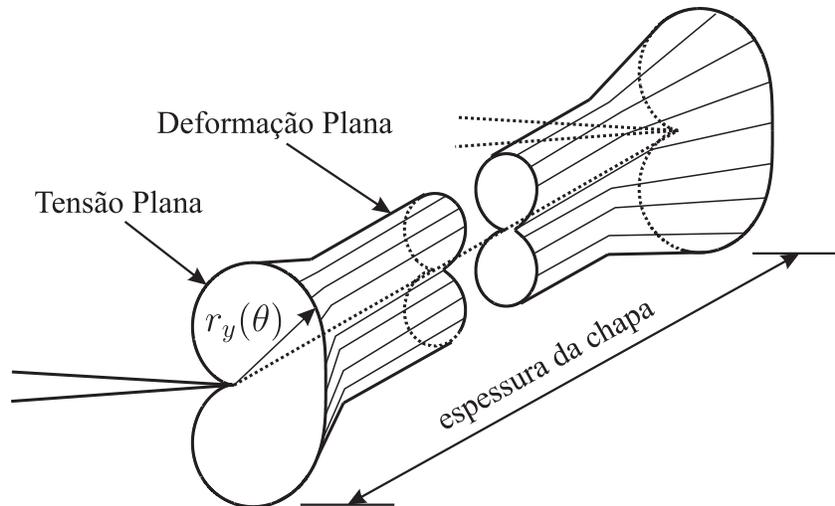


Figura 2.14: Forma tridimensional da região deformada plasticamente (Gdoutos, 2005)

invés de considerar deformações plásticas. Assim, elas são apenas aproximações das fronteiras que separam a região elástica-linear e a região que sofre deformação plástica. Tais fronteiras podem ser determinadas de maneira mais precisa utilizando-se métodos de relaxação (Jacobs, 1950).

2.8 Tenacidade à fratura

Segundo Hertzberg (1996), a tenacidade de um dado material é a medida da energia absorvida antes e durante o processo de fratura. A área sob a curva tensão-deformação fornece uma medida da tenacidade do material:

$$\frac{\text{energia}}{\text{volume}} = \int_0^{\epsilon_f} \sigma \, d\epsilon \quad (2.56)$$

Na presença de uma trinca, em mecânica da fratura linear elástica (MFLE), a tenacidade à fratura é definida como o fator de intensidade de tensão crítico no qual inicia-se a propagação instável da trinca. A figura 2.15 é um diagrama de dois corpos de prova de iguais dimensões produzidos com materiais elasto-plásticos diferentes no momento em que se inicia a propagação instável da trinca central. A figura mostra que ocorre deformação plástica nas proximidades das pontas das trincas devido ao alto nível de tensão nestes locais. O material cuja região deformada plasticamente é maior possui uma maior tenacidade à fratura, visto que ocorre muito mais absorção de energia na deformação plástica do que na deformação linear elástica.

Na figura 2.14, conforme a espessura do corpo de prova é diminuída, a região central que está

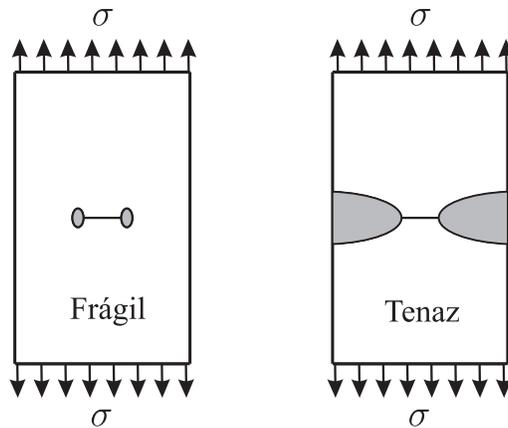


Figura 2.15: Material frágil e material tenaz (Hertzberg, 1996)

em estado de deformação plana diminui, até que haja apenas tensão plana. Neste caso, uma fração maior do corpo de prova sofre deformação plástica no momento da fratura e, portanto, a tenacidade à fratura é aumentada. Porém, se a espessura é reduzida abaixo de um certo limite, a tenacidade à fratura volta a diminuir, devido à redução da quantidade de material da peça. A figura 2.16 mostra o típico comportamento da tenacidade à fratura de uma chapa feita de material elasto-plástico em função de sua espessura.

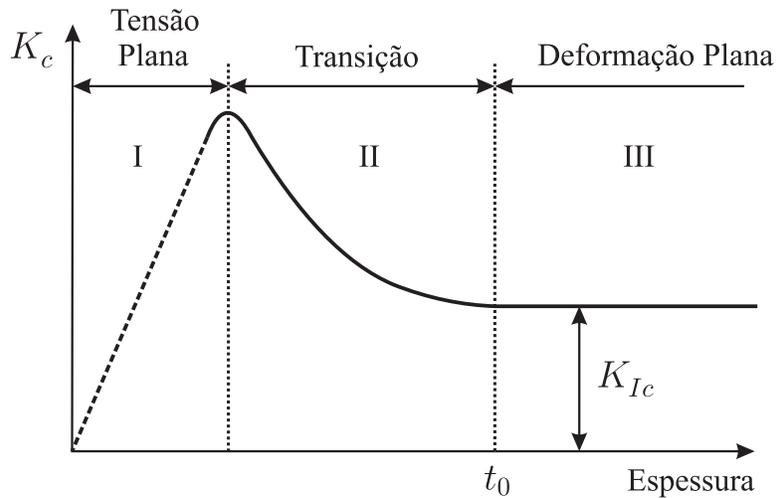


Figura 2.16: Variação da tenacidade à fratura em função da espessura do corpo de prova (Gdoutos, 2005)

A literatura em mecânica da fratura normalmente usa K_c para se referir à tenacidade à fratura em tensão plana e K_{Ic} para se referir à tenacidade à fratura em deformação plana. Ao contrário de K_{Ic} , que é uma propriedade intrínseca de um material, K_c é um parâmetro que depende da

espessura e das dimensões do corpo de prova. A norma E399 (2009), da ASTM, estabelece uma mínima espessura para que um ensaio de tenacidade à fratura em deformação plana K_{Ic} seja válido:

$$t > 2,5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{YS}} \right)^2 \quad (2.57)$$

Além disso, a norma estabelece que o comprimento da trinca a também seja maior que o valor dado pela equação 2.57. A razão a/W deve estar entre 0,45 e 0,55.

A tenacidade à fratura em estado de tensão plana pode ser estimada pela equação semi-empírica 2.58, proposta por Irwin (1960):

$$K_c = K_{Ic} \sqrt{1 + \frac{1,4}{t^2} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{YS}} \right)^4} \quad (2.58)$$

Uma equação alternativa é sugerida por Harter (2003):

$$K_c = K_{Ic} \left\{ 1 + B_k \exp \left[- \left(A_k \frac{t}{t_0} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.59)$$

Onde A_k e B_k são parâmetros dependentes do material e t_0 é a espessura obtida com a equação 2.57.

Forman et al. (2005) fornecem os dados requeridos na equação 2.59, referentes às principais ligas de alumínio utilizadas na indústria aeronáutica. Para o alumínio 2024-T3, a tabela 2.2 pode ser consultada para tal.

2.9 Anisotropia devido à laminação

Processos de laminação introduzem anisotropias das propriedades mecânicas do material, incluindo a tenacidade à fratura. Assim, a ASTM definiu uma notação para identificar a disposição de uma trinca em chapas laminadas, de modo que valores de tenacidade à fratura pudessem ser identificados segundo esta notação.

Na figura 2.17 a letra L denota o sentido longitudinal da chapa, ou seja, o sentido de laminação. A letra T denota o sentido transversal à laminação e a letra S se refere ao termo *short transverse*, que é o sentido associado à espessura da chapa.

Para definir a disposição de uma trinca em uma chapa laminada, é necessário conhecer dois sentidos:

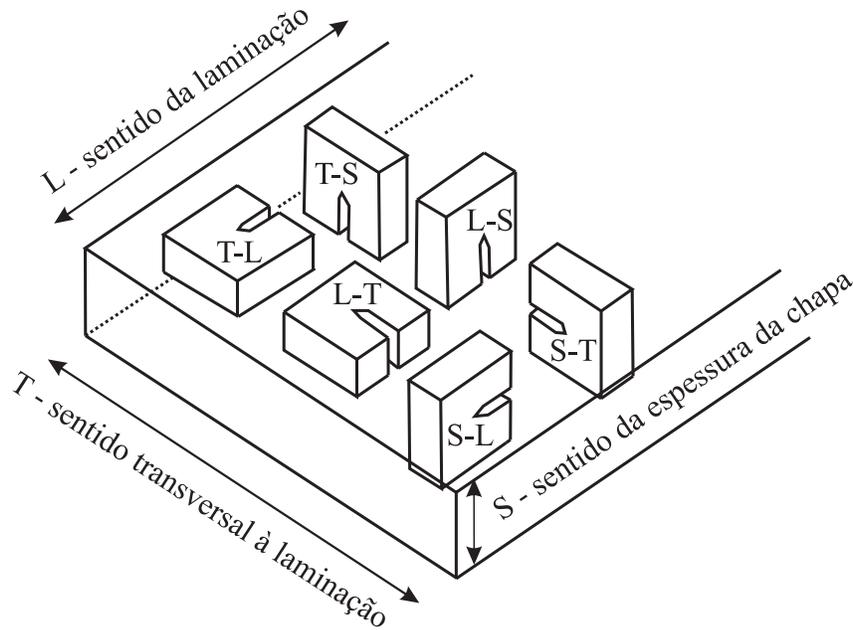


Figura 2.17: Notação que identifica a disposição de uma trinca em relação ao sentido de laminação (Hertzberg, 1996)

1. O sentido do carregamento que abre a trinca em modo I
2. O sentido em que a trinca se propaga

Assim, um corpo de prova T-L indica que o carregamento que abre a trinca em modo I atua no sentido transversal em relação à laminação e que a trinca se propaga no mesmo sentido da laminação. Um corpo de prova L-T indica que o carregamento que abre a trinca em modo I atua no mesmo sentido da laminação e que a trinca se propaga no sentido transversal à laminação.

Para um mesmo material, a tenacidade à fratura é maior em corpos de prova cuja trinca se propaga perpendicularmente ao sentido da laminação do que no caso em que a propagação se dá no mesmo sentido da laminação (Anderson, 1995; Hertzberg, 1996). Assim, a tenacidade à fratura em corpos de prova L-T é maior do que em corpos de prova T-L.

2.10 Modelagem da taxa de propagação de trincas

Considerando-se um corpo de prova com uma trinca submetido a um carregamento externo cujo valor oscila entre um valor mínimo e um valor máximo, o fator de intensidade de tensões também oscila entre um valor mínimo K_{min} e um valor máximo K_{max} . Atualmente, a maioria das equações utilizadas para modelar a taxa de propagação de trincas da/dN são função de ΔK , que

é a diferença entre K_{max} e K_{min} , e consideram o comportamento (ou parte do comportamento) observado na figura 2.18:

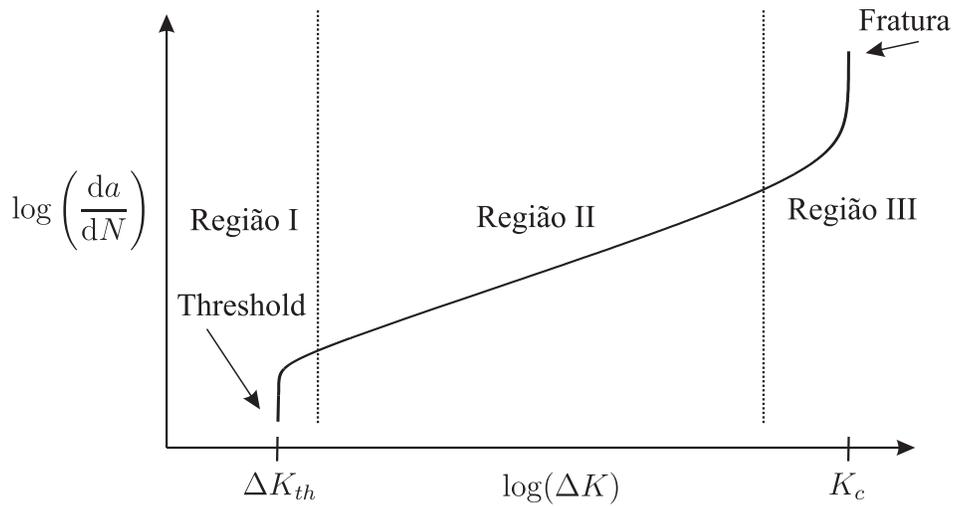


Figura 2.18: Típico comportamento da taxa de propagação de trincas em metais (Anderson, 1995)

A figura 2.18 mostra que há três fases na propagação de uma trinca:

- Fase I: Região do *threshold*. Nesta região, da/dN tende a zero se ΔK tende a ΔK_{th} .
- Fase II: Propagação estável da trinca.
- Fase III: Início da propagação instável da trinca. No momento em que K_{max} se torna maior ou igual a K_c , a trinca se propaga instavelmente até a ruptura completa do material.

2.10.1 Lei de Paris

Uma das mais conhecidas equações que modelam a taxa de propagação de trincas é a lei de Paris:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^n \quad (2.60)$$

Carregamentos compressivos não produzem concentrações de tensão na ponta da trinca, visto que em tal caso as superfícies de fratura estarão em contato. Se um fator de intensidade de tensão é calculado e resulta em um valor negativo, ele deve ser considerado igual a zero (Parker, 1982):

$$\Delta K = \begin{cases} K_{max} - K_{min} & \text{se } K_{min} > 0 \\ K_{max} & \text{se } K_{min} \leq 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

A constante n , conhecido como expoente de Paris é adimensional. Por outro lado, a unidade da constante C , conhecido como coeficiente de Paris, é uma associação da unidade de tensão e da unidade de comprimento, elevadas a potências dependentes do valor de n . Se a unidade de tensão é Pascal e a unidade de comprimento é metro, então a unidade de C seria $\text{Pa}^{-n} \text{m}^{1-\frac{n}{2}}$, onde n é o expoente de Paris (Harter, 2003).

C e n dependem principalmente das propriedades mecânicas do material ensaiado. Em menor grau, dependem também da frequência de aplicação do carregamento externo, da temperatura e de outras condições ambientais que podem promover a corrosão da peça. O coeficiente C apresenta uma forte dependência da razão de tensão R , que é a razão entre a tensão mínima e máxima aplicada ($\sigma_{min}/\sigma_{max}$ ou K_{min}/K_{max}).

2.10.2 Equação de Nicholls

O modelo de Nicholls (Golestaneh et al., 2009) sugere que a taxa de propagação de uma trinca é inversamente proporcional ao módulo de elasticidade do material, inversamente proporcional à tensão de escoamento e inversamente proporcional ao quadrado da tenacidade à fratura:

$$\frac{da}{dN} = \frac{1}{4E\sigma_{YS}K_c^2} \Delta K^4 \quad (2.62)$$

Devido à presença da tenacidade à fratura K_c na equação 2.62, conclui-se que a taxa de propagação da trinca depende também da espessura e das dimensões do corpo de prova ensaiado ou da estrutura em uso. Supondo que o corpo de prova seja espesso e grande o suficiente para que a taxa de propagação dependa apenas de propriedades materiais, Ciavarella et al. (2008) mostram que tais propriedades podem ser organizadas em parâmetros adimensionais que seriam usados para calcular os parâmetros C e n da lei de Paris e parâmetros similares de outras equações de taxas de propagação. Eles mostram também em seu trabalho equações que relacionam os parâmetros C e n da lei de Paris.

2.10.3 Equação de Walker

Diferentemente da lei de Paris, a razão de tensão R é levada em consideração de maneira explícita na equação de Walker (Walker, 1970):

$$\frac{da}{dN} = C_0 \left[\frac{\Delta K}{(1 - R)^{1-m}} \right]^n \quad (2.63)$$

onde C_0 é o coeficiente de Paris, determinado para o caso particular em que a razão de tensão R vale zero. m é um parâmetro adimensional, conhecido como expoente de Walker e se situa no intervalo $0 < m \leq 1$. Serve para controlar o efeito de R sobre a taxa de propagação da trinca e pode assumir dois valores distintos: m^+ e m^- , dependendo se R é positivo ou negativo (Forman et al., 2005). Se efeitos de fechamento de trinca não são considerados, assume-se que R vale zero se K_{min} é menor do que zero (Parker, 1982).

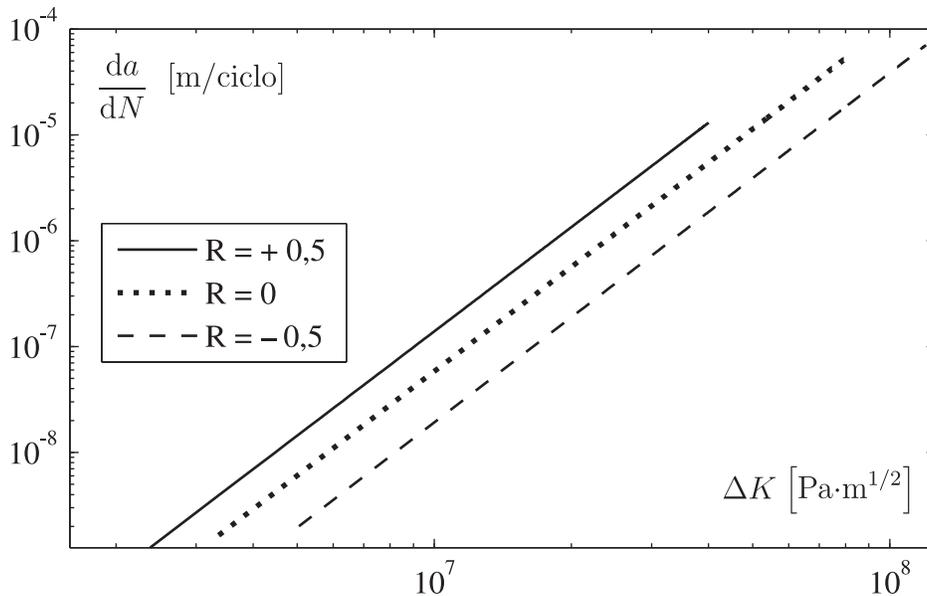


Figura 2.19: Curvas $da/dN \times \Delta K$, segundo a equação de Walker, para trincas com orientação L-T em liga de alumínio 2024-T3

Tanto a lei de Paris quanto a lei de Walker modelam apenas a região II da figura 2.18. A figura 2.19 mostra curvas definidas pela lei de Walker, correspondentes à liga de alumínio 2024-T3, com uma trinca de orientação L-T. O aumento da razão de tensão faz a curva ser deslocada para cima, de modo a aumentar a taxa de propagação da trinca. Por outro lado, razões de tensão negativas reduzem a velocidade de propagação. Utilizando-se a lei de Paris, este efeito é levado em consideração por meio da modificação do parâmetro C .

As curvas da figura 2.19 foram obtidas utilizando-se dados da tabela 2.1, publicados por Forman et al. (2005).

Tabela 2.1: Parâmetros necessários para o cálculo da taxa de propagação de trincas em alumínio 2024-T3, utilizando a equação de Walker (Forman et al., 2005).

Parâmetro	Unidade	L-T		T-L
		$R > 0$	$R < 0$	$R > 0$
C_0	$\text{Pa}^{-n} \cdot \text{m}^{1-\frac{n}{2}}$	$717,0783 \cdot 10^{-33}$	$459,5799 \cdot 10^{-33}$	$29,1713 \cdot 10^{-33}$
n	-	3,273	3,301	3,477
m^+	-	0,618	-	0,623
m^-	-	-	0,164	-

2.10.4 Equação de Forman

Com o objetivo de modelar a taxa de propagação de trincas não apenas na região II, mas também na região III da figura 2.18, foi proposta a equação de Forman (Forman et al., 1967):

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_f(\Delta K)^n}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad (2.64)$$

Segundo Harter (2003), a equação de Forman apresenta baixa flexibilidade na modelagem do efeito da razão de tensão R sobre a taxa de propagação. Este efeito é ajustado pela tenacidade à fratura em tensão plana K_c , enquanto na equação de Walker (2.63) existe o parâmetro m , especificamente criado para esta função.

2.10.5 O efeito de fechamento de trinca

Nas atividades experimentais de sua tese, Elber (1968) verificou que as superfícies de fratura de trincas de fadiga em ligas de alumínio se fecham antes que o carregamento externo de tração seja completamente removido.

Seus resultados ganharam maior aceitação após ter publicado um novo trabalho (Elber, 1971), onde explica o fenômeno e mostra como isso influencia na taxa de propagação da trinca. Esta subseção é baseada neste novo trabalho do referido autor.

A figura 2.20a exibe a zona plástica na ponta de uma trinca de fadiga que se formou a partir de um entalhe. A parte b da mesma figura exibe a mesma trinca um pouco maior, bem como a nova zona plástica e a antiga. Mesmo se os níveis de carregamento externo de tração se mantiveram

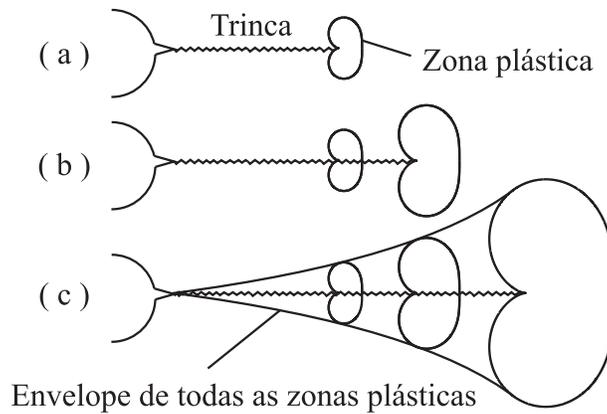


Figura 2.20: Formação do envelope de deformação plástica durante a propagação da trinca (Elber, 1971)

constantes, o tamanho da nova zona plástica deve ser maior, visto que o comprimento da trinca aumentou. A parte c mostra a mesma trinca ainda maior e o envelope dentro do qual o material sofreu deformação plástica.

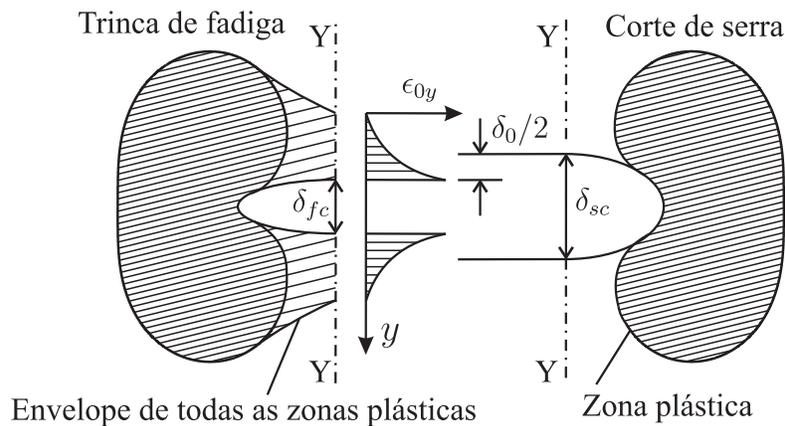


Figura 2.21: Campos de deformação plástica devido ao carregamento externo em trinca de fadiga e em corte produzido por uma serra ideal, de espessura nula (Elber, 1971)

A fim de explicar a razão pela qual a trinca se fecha antes de o carregamento externo ser completamente removido, a figura 2.21 compara uma trinca de fadiga com uma trinca feita por uma serra hipoteticamente ideal, isto é, que apresenta espessura zero e não provoca deformação plástica na execução do corte. As chapas de ambas as trincas são submetidas a um mesmo nível de carregamento externo de tração, que abre as trincas em modo I, gerando as zonas plásticas mostradas na figura. No caso da trinca de fadiga existe também a região plastificada devido aos ciclos anteriores de carregamento. Para uma seção Y-Y, próximo à ponta da trinca de fadiga, a figura

mostra o perfil de deformação plástica $\epsilon_{0y}(y)$, que é sempre positivo. A integração desta curva com relação a y é representada por:

$$\delta_0 = \int \epsilon_{0y}(y) dy \quad (2.65)$$

Visto que o resultado desta integração é positivo, nota-se que ocorre uma maior proximidade entre as superfícies de fratura da trinca de fadiga em relação ao caso em que a trinca é feita pela serra ideal. Por esta razão, a trinca se fecha antes que o carregamento externo seja completamente removido. Se δ_{fc} é o deslocamento de abertura de trinca na seção Y-Y da trinca de fadiga e δ_{sc} é o deslocamento de abertura de trinca de uma seção equivalente da trinca feita por corte de serra a seguinte relação é válida:

$$\delta_{sc} = \delta_0 + \delta_{fc} \quad (2.66)$$

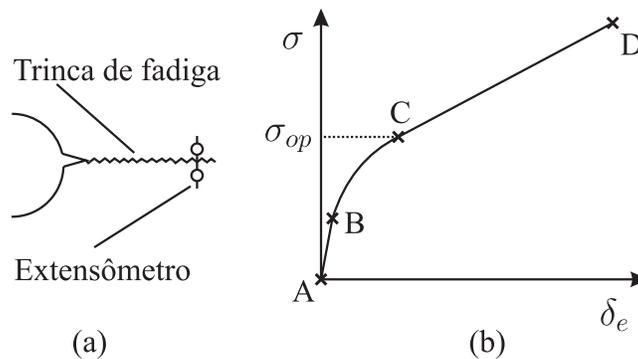


Figura 2.22: No experimento de Elber: (a) Posicionamento do extensômetro na trinca (b) Curva tensão-deslocamento resultante

Em seu experimento, Elber (1971) posicionou um extensômetro próximo à ponta da trinca, como mostra a figura 2.22a. A parte b da mesma figura é um gráfico do carregamento externo σ (que abre a trinca em modo I) em função do deslocamento δ_e determinado com auxílio do extensômetro. Entre os pontos A e B do referido gráfico o comportamento é linear, com a mesma inclinação que seria verificada se o corpo de prova não tivesse uma trinca de fadiga. Entre os pontos C e D, a curva volta a apresentar um comportamento linear, porém, com a inclinação que se espera realmente daquele corpo de prova na presença daquela trinca. Segundo Elber (1971), essa mudança de inclinação da curva tensão-deslocamento ocorre porque entre os pontos A e B, a trinca está

completamente fechada, fazendo o corpo de prova se comportar como se a trinca não existisse. Entre os pontos C e D, a trinca está completamente aberta, fazendo o corpo de prova se comportar da maneira que se espera na presença de uma trinca. Entre os pontos B e C ocorre uma transição: aos poucos a trinca vai se abrindo neste trecho.

O mesmo autor também afirma que a propagação da trinca não pode ocorrer se as superfícies de fratura não estiverem completamente separadas. Ou seja, considerando-se o gráfico da figura 2.22b, a trinca não se propaga se o carregamento externo σ estiver abaixo de σ_{op} . Assim, ele propõe que na lei de Paris ΔK seja substituído por ΔK_{eff} :

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K_{eff})^n \quad (2.67)$$

onde

$$\Delta K_{eff} = \begin{cases} K_{max} - K_{op} & \text{se } K_{min} < K_{op} \\ K_{max} - K_{min} & \text{se } K_{min} > K_{op} \end{cases} \quad (2.68)$$

A relação entre os parâmetros da equação 2.68 é exibida na figura 2.23.

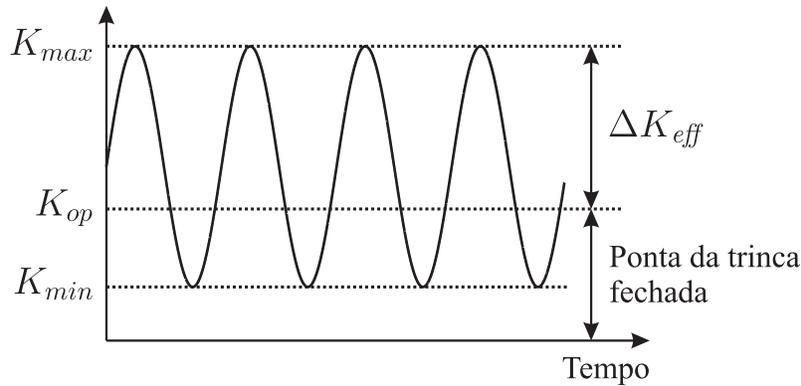


Figura 2.23: Relação entre ΔK_{eff} , K_{op} e K_{max} (Anderson, 1995)

A equação 2.67 pode ser escrita alternativamente como:

$$\frac{da}{dN} = C(U\Delta K)^n \quad (2.69)$$

onde

$$U = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{op}}{\sigma_{max} - \sigma_{min}} = \frac{\Delta\sigma_{eff}}{\Delta\sigma} = \frac{K_{max} - K_{op}}{K_{max} - K_{min}} = \frac{\Delta K_{eff}}{\Delta K} \quad (2.70)$$

Se o material da peça é liga de alumínio 2024-T3, Elber (1971) sugere calcular U pela seguinte relação:

$$U = 0,5 + 0,4R \quad (-0,1 < R < 0,7) \quad (2.71)$$

Segundo Schijve (1981), a equação 2.71 não produz bons resultados para razões de tensão negativas. Assim, para a mesma liga de alumínio, ele propõe a equação:

$$U = 0,55 + 0,33R + 0,12R^2 \quad (-1,0 < R < 0,54) \quad (2.72)$$

Conforme mencionado por Elber (1971), ao aplicar a lei de Paris em liga de alumínio 2024-T3 Hudson (1969) sugere $C = 2,3056 \cdot 10^{-31} \text{ Pa}^{-n} \cdot \text{m}^{1-\frac{n}{2}}$ e $n = 3,62$.

2.10.6 Equação NASGRO

A equação NASGRO (Harter (2003), Forman et al. (2002)), diferentemente da lei de Paris e da lei de Walker, é capaz de modelar as regiões I e III exibidas na figura 2.18. Ela foi desenvolvida em conjunto por diversos pesquisadores de diferentes centros de pesquisa: Forman e Newman da NASA, Shivakumar da Lockheed Martin, de Koning da NLR e Henriksen da ESA. No trabalho de Forman & Mettu (1990), ela já se apresentava em um formato muito semelhante ao atual, que é mostrado na equação 2.73:

$$\frac{da}{dN} = C_N \left[\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K \right]^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{max}}{K_c} \right)^q} \quad (2.73)$$

onde C_N é um parâmetro específico para a equação NASGRO, embora sua dimensão seja a mesma de C_0 na equação de Walker e de C na lei de Paris. p é um parâmetro adimensional que auxilia a modelagem da taxa de propagação da trinca em valores de ΔK próximos ao *threshold*. q é um parâmetro adimensional que produz efeitos na modelagem da taxa de propagação quando K_{max} está próximo de K_c , a tenacidade à fratura da peça.

Segundo Newman (1984), a função de abertura de trinca f pode ser calculado segundo a equação:

$$f = \frac{K_{op}}{K_{max}} = \begin{cases} \max(R, A_0 + A_1R + A_2R^2 + A_3R^3) & R \geq 0 \\ A_0 + A_1R & -2 \leq R < 0 \\ A_0 - 2A_1 & R < -2 \end{cases} \quad (2.74)$$

Se a razão de tensão R for maior ou igual a zero, f será igual a R ou será igual a $A_0 + A_1R + A_2R^2 + A_3R^3$, o que for maior entre os dois.

Na equação 2.74, os coeficientes adimensionais A_0 , A_1 , A_2 e A_3 são dados por:

$$A_0 = (0,825 - 0,34\alpha + 0,05\alpha^2) \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{YS}} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.75a)$$

$$A_1 = (0,415 - 0,071\alpha) \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{YS}} \quad (2.75b)$$

$$A_2 = 1 - A_0 - A_1 - A_3 \quad (2.75c)$$

$$A_3 = 2A_0 + A_1 - 1 \quad (2.75d)$$

Nas equações acima, α é o fator de restrição tensão/deformação plana e σ_{max}/σ_{YS} é a razão entre a máxima tensão aplicada (considerando um carregamento externo cíclico) e a tensão de escoamento.

Na equação NASGRO, ΔK_{th} pode ser calculado por (Harter, 2003):

$$\Delta K_{th} = \frac{\Delta K_0 \sqrt{\frac{a}{a + a_0}}}{\left[\frac{1 - f}{(1 - A_0)(1 - R)} \right]^{(1 + C_{th}R)}} \quad (2.76)$$

onde ΔK_0 é o mesmo que ΔK_{th} quando a razão de tensão R vale zero; a_0 é o comprimento intrínseco da trinca, com típico valor de 38,1 μm . C_{th} é um parâmetro associado ao *threshold* e assume valores diferentes, dependendo se a razão de tensão R é positivo ou negativo.

Alternativamente, ΔK_{th} pode ser calculado da seguinte maneira (Forman et al., 2002):

$$\Delta K_{th} = \frac{\Delta K_1^* \left[\frac{1 - R}{1 - fR} \right]^{(1 + RC_{th}^+)}}{(1 - A_0)^{(1 - R)C_{th}^+}} \quad (R \geq 0) \quad (2.77a)$$

$$\Delta K_{th} = \frac{\Delta K_1^* \left[\frac{1 - R}{1 - fR} \right]^{(1 + RC_{th}^-)}}{(1 - A_0)^{(C_{th}^+ - RC_{th}^-)}} \quad (R < 0) \quad (2.77b)$$

onde:

$$\Delta K_1^* = \Delta K_1 \sqrt{\frac{a}{a + a_0}} \quad (2.77c)$$

ΔK_1 é o valor de ΔK_{th} quando a razão de tensão R tende a um. C_{th}^+ e C_{th}^- são os valores de C_{th} quando R é positivo e negativo, respectivamente.

A tabela 2.2 exhibe valores dos parâmetros necessários para a aplicação da equação NASGRO em liga de alumínio 2024-T3.

Tabela 2.2: Parâmetros necessários para o cálculo da taxa de propagação de trincas em alumínio 2024-T3, utilizando a equação NASGRO (Forman et al., 2005).

Parâmetro	Unidade	L-T	T-L
σ_{YS}	Pa	$365 \cdot 10^6$	$331 \cdot 10^6$
K_{Ic}	$\text{Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$	$33 \cdot 10^6$	$30 \cdot 10^6$
C_N	$\text{Pa}^{-n} \cdot \text{m}^{1-\frac{n}{2}}$	$9,4826 \cdot 10^{-30}$	$248,8679 \cdot 10^{-30}$
n	-	3,200	3,000
A_k	-	1,00	1,00
B_k	-	1,50	1,50
α	-	2,000	2,000
p	-	0,250	0,250
q	-	1,000	1,000
C_{th}^+	-	1,21	1,50
C_{th}^-	-	0,10	0,10
ΔK_1	$\text{Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$	$1,34 \cdot 10^6$	$1,10 \cdot 10^6$

A figura 2.24 exhibe curvas resultantes da equação NASGRO, para trincas com orientação L-T em liga de alumínio 2024-T3, considerando-se valores de razão de tensão negativo, positivo e nulo.

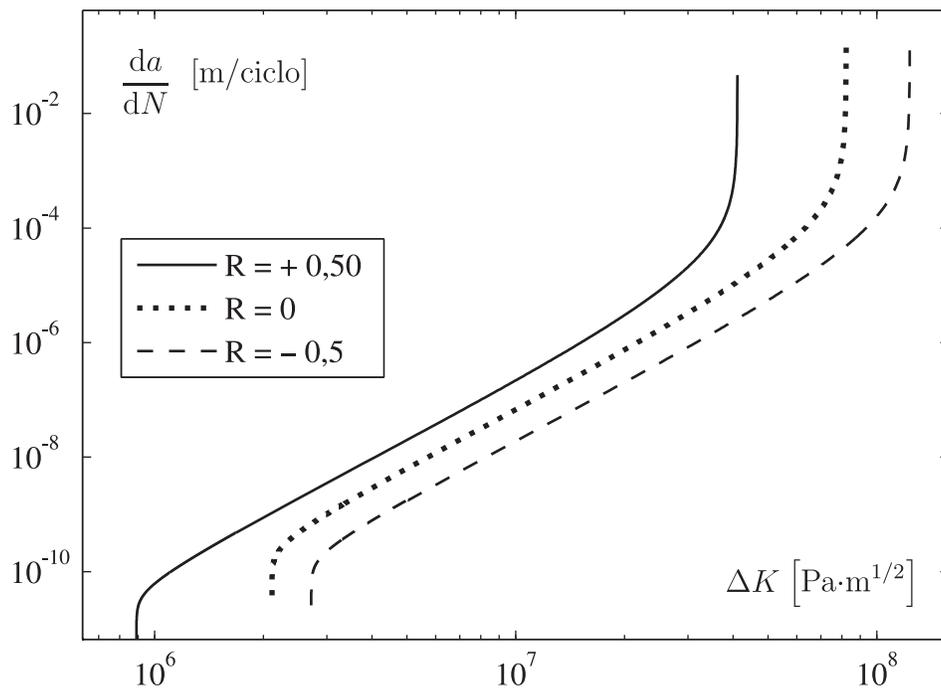


Figura 2.24: Efeito da razão de tensão sobre curvas obtidas pela equação NASGRO, considerando-se trincas com orientação L-T em liga de alumínio 2024-T3

3 MECÂNICA DA FRATURA COM TENSÕES RESIDUAIS

3.1 *Eigenstrain e eigenstress*

Se uma região no interior de um sólido sofre uma deformação inelástica, a compatibilidade de deslocamentos exige que haja deformações elásticas nas proximidades daquela região. Como resultado das deformações elásticas, surge um campo de tensões auto-equilibrantes.

Neste contexto, as deformações inelásticas são comumente chamadas na literatura em língua inglesa como *eigenstrain*. Alguns autores preferem fazer como Ueda et al. (1975) e usar o termo deformação inerente. Este tipo de deformação pode ser devido a um gradiente de temperatura (se o coeficiente de expansão térmica é diferente de zero), transformações de fase, escoamento localizado do material ou uma combinação destes fatores.

As tensões auto-equilibrantes devido à presença de deformações inelásticas podem ser chamadas como *eigenstresses*. Porém, é mais comum utilizar termos como tensões residuais se elas permanecem no material após e devido a um processo de fabricação ou tensões térmicas se elas são resultantes de dilatações térmicas.

Sob uma perspectiva teórica, se uma peça apresenta tensões residuais em seu interior e ela passa por um processo de corte ideal, isto é, que não introduz novas deformações inelásticas, o campo de tensões residuais se redistribui no interior do sólido. Porém, o campo de deformações inelásticas permanece o mesmo, não sofrendo nenhum tipo de redistribuição. Em outras palavras, o campo de tensões residuais depende de parâmetros geométricos da peça e o campo de deformações inelásticas não apresenta este tipo de dependência.

Para certo ponto de um sólido, se σ_{ij}^{app} é o tensor de tensões devido a um carregamento externo, σ_{ij}^{res} é o tensor de tensões residuais e σ_{ij} é o tensor de tensões total, segundo Mura (1987), as seguintes relações são válidas:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{app} + \sigma_{ij}^{res} = C_{ijkl} e_{kl} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad (3.1a)$$

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{kl}^{app} + \epsilon_{kl}^{res} + \epsilon_{kl}^* \quad (3.1b)$$

onde, C_{ijkl} é o tensor constitutivo elástico, e_{kl} é o tensor de deformação elástica, ϵ_{kl} é o tensor de

deformação total, ϵ_{kl}^{app} é o tensor de deformação elástica associado ao carregamento externo, ϵ_{kl}^{res} é o tensor de deformação elástica associado às tensões residuais e ϵ_{kl}^* é o tensor de deformações inelásticas. No trabalho de Mura (1987) podem ser encontradas equações para cada componente do tensor de tensões σ_{ij} em termos do módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e módulo de cisalhamento. Em outras palavras, o tensor constitutivo elástico C_{ijkl} é bem conhecido e facilmente encontrado na literatura.

3.2 Tensões residuais

3.2.1 Tipos de tensões residuais

Segundo Macherauch (1987), há três tipos de tensões residuais:

1. Tensão residual do tipo I: é a média de tensão residual quando considera-se uma cadeia de muitos grãos.
2. Tensão residual do tipo II: é a diferença entre a média de tensão residual de apenas um grão e a tensão residual do tipo I.
3. Tensão residual do tipo III: mede variações da tensão existente no interior de um grão em relação à tensão residual do tipo II.

Deste modo, a tensão residual de determinado ponto em um material é dada por:

$$\sigma_{res} = \sigma_{res}^I + \sigma_{res}^{II} + \sigma_{res}^{III} \quad (3.2)$$

A figura 3.1 ilustra os conceitos supracitados.

Em forma de equação, a tensão residual do tipo I é definida por:

$$\sigma_{res}^I = \frac{\int \sigma_{res} dA_I}{\int dA_I} \quad (3.3)$$

Considerando-se que a área total de uma seção de corte plana de uma peça com tensões residuais seja representada por A_p , então A_I , na equação 3.3, representa uma pequena região dentro de A_p e corresponde a um número limitado de grãos cristalinos. Assim, se o número de grãos considerados é N_g e A_i é a área da seção de corte do grão i , então A_I é definido por:

$$A_I = \sum_{i=1}^{i=N_g} A_i \quad (3.4)$$

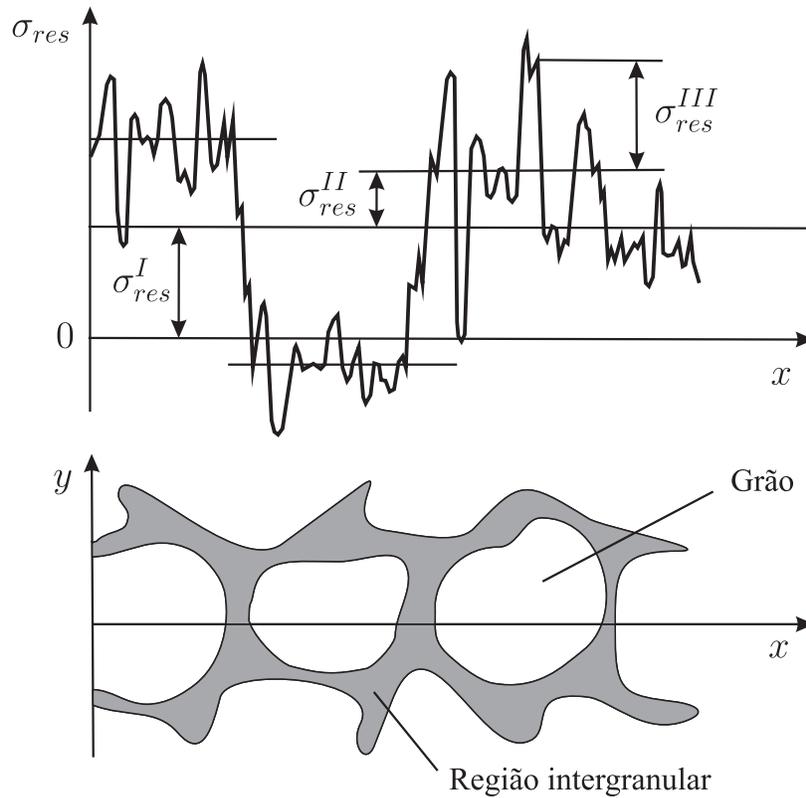


Figura 3.1: Tipos de tensão residual (Macherauch, 1987)

A tensão residual do tipo II, que assume um valor para cada grão, pode ser calculada por:

$$\sigma_{res}^{II} = \frac{\int \sigma_{res} dA_i}{\int dA_i} - \sigma_{res}^I \quad (3.5)$$

A tensão residual do tipo III é obtida substituindo-se 3.5 em 3.2 e isolando-se σ_{res}^{III} , resultando em:

$$\sigma_{res}^{III} = \sigma_{res} - \frac{\int \sigma_{res} dA_i}{\int dA_i} \quad (3.6)$$

Segundo Macherauch (1987), a maioria das análises de engenharia é feita utilizando-se a tensão residual do tipo I. Porém, isto não implica dizer que as tensões residuais dos tipos II e III sejam completamente ignoradas, visto que a tensão residual do tipo I é uma média cujo valor sofre interferência de pequenas variações que ocorrem dentro de cada grão cristalino.

3.2.2 Equilíbrio de forças

Um corpo sólido tridimensional com um campo de tensões residuais é considerado. Se $\sigma_{res}(x, y, z)$ é uma componente qualquer do tensor de tensões e A_p é a área de uma seção de corte plana qualquer, então a condição de equilíbrio de forças, segundo Winholtz (2003), é dada por:

$$\int_{A_p} \sigma_{res}(x, y, z) dA_p = 0 \quad (3.7)$$

Alternativamente, a seguinte relação é verdadeira (Macherauch, 1987):

$$\int_{A_p} \sigma_{res}^I(x, y, z) dA_p = 0 \quad (3.8)$$

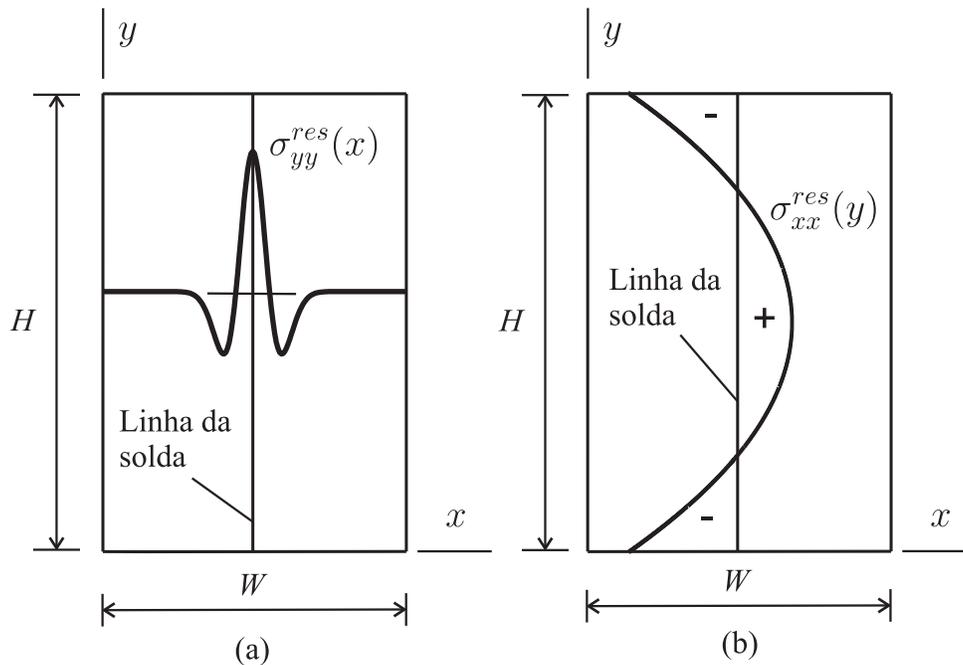


Figura 3.2: (a) Perfil de tensão residual longitudinal (b) Perfil de tensão residual transversal

A figura 3.2 considera uma chapa plana retangular com um campo de tensões residuais devido a um processo de solda feito paralelamente ao eixo y , em $x = W/2$. Neste caso, $\sigma_{yy}^{res}(x)$ é chamado de tensão residual longitudinal (ou paralela à solda) e $\sigma_{xx}^{res}(y)$ é chamado de tensão residual transversal (ou perpendicular à solda). A amplitude do perfil de tensão residual transversal diminui com o aumento da distância em relação ao centro da solda.

A condição de equilíbrio de forças exige que:

$$\int_0^W \sigma_{yy}^{res}(x) dx = 0 \quad (3.9a)$$

$$\int_0^H \sigma_{xx}^{res}(y) dy = 0 \quad (3.9b)$$

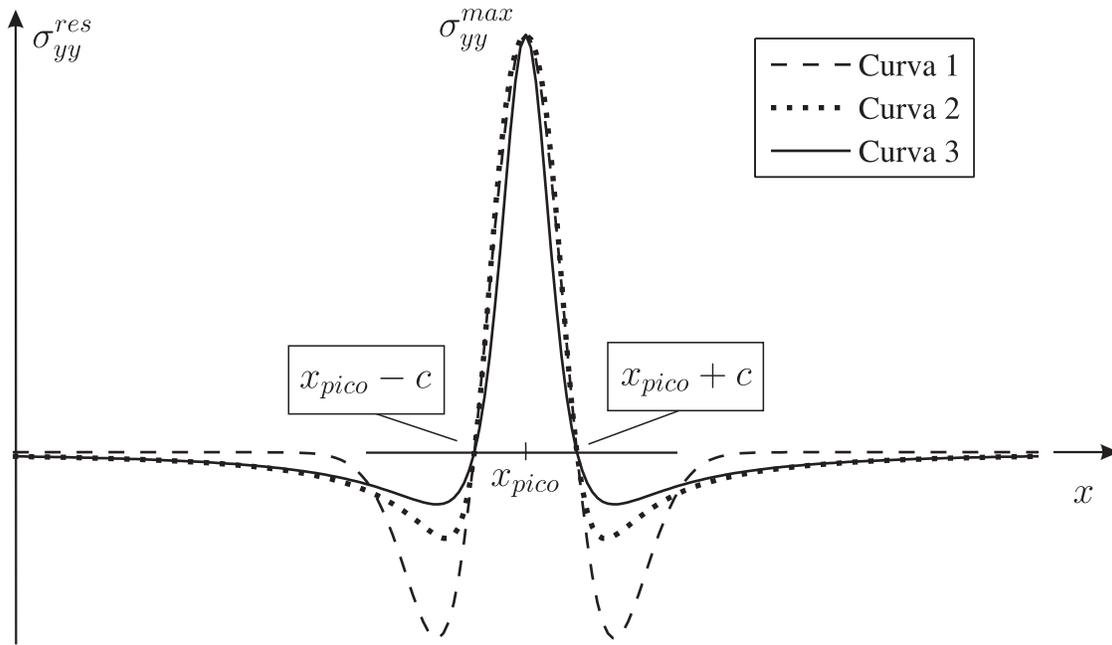


Figura 3.3: Perfis de tensão residual longitudinal. Curva 1: equação 3.10a. Curva 2: equação 3.10b. Curva 3: equação 3.10c

Típicos perfis de tensão residual longitudinal em chapas soldadas possuem a parte central positiva e as laterais negativas, são assimétricos e apresentam mais do que um pico. Mesmo assim, as equações 3.10a, 3.10b e 3.10c, propostas por Tada et al. (1985), podem se ajustar a alguns casos e respeitam a condição dada pela equação 3.10d:

$$\sigma_{yy}^{res}(x) = \sigma_{yy}^{max} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_{pico}}{c}\right)^2\right) \left[1 - \left(\frac{x-x_{pico}}{c}\right)^2\right] \quad (3.10a)$$

$$\sigma_{yy}^{res}(x) = \sigma_{yy}^{max} \frac{1 - \left(\frac{x-x_{pico}}{c}\right)^2}{1 + \left(\frac{x-x_{pico}}{c}\right)^4} \quad (3.10b)$$

$$\sigma_{yy}^{res}(x) = \sigma_{yy}^{max} \frac{1 - \left(\frac{x-x_{pico}}{c}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{x-x_{pico}}{c}\right)^2\right]^2} \quad (3.10c)$$

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{yy}^{res}(x) dx \quad (3.10d)$$

A figura 3.3 mostra que a equação 3.10a produz um perfil mais concentrado. Por outro lado, a máxima tensão de compressão é maior do que a obtida pelas equações 3.10b e 3.10c. A diferença entre estas últimas é que a equação 3.10c apresenta área positiva mais estreita e, portanto, menores valores (em módulo) de tensão de compressão.

3.2.3 Distribuição de tensões residuais em chapas com trincas

Pretende-se discutir nesta seção o efeito que trincas produzem sobre a distribuição dos campos de tensões residuais longitudinais e transversais em sólidos planos. A figura 3.4 exhibe o mapa de cores de um campo de tensão residual longitudinal em corpo de prova CT. O plano da trinca tem orientação perpendicular à linha da solda, de modo que o referido campo produz efeitos sobre o modo I de abertura. Os deslocamentos foram multiplicados por 100 para melhor visualização da deformação da peça devido às tensões residuais. O contato entre as superfícies de fratura não é modelado e não há carregamento externo, implicando em uma sobreposição de duas regiões da peça. Isto será discutido na seção 3.6.

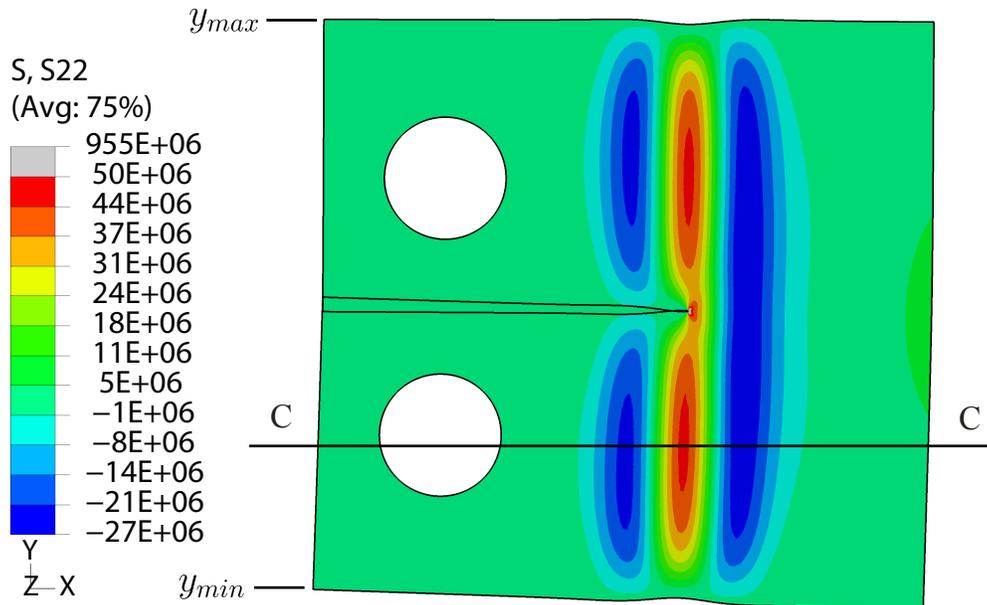


Figura 3.4: Campo de tensões residuais longitudinais (σ_{yy}^{res}) em corpo de prova CT, utilizando-se a sub-rotina SIGINI do Abaqus. Legenda do mapa de cores em Pascal.

No plano C-C, o campo de tensões residuais longitudinais sofre pouca influência das fronteiras

da peça. A ausência de forças externas atuantes nas arestas correspondentes a y_{min} , y_{max} e nas superfícies de fratura exige que σ_{yy} seja nulo em tais localizações. Para que isto seja satisfeito, o campo de tensões residuais longitudinais se distribui de tal maneira que haja uma concentração de tensões na ponta da trinca, associado ao fator de intensidade de tensão residual K_I^{res} . Supondo que a ponta de uma trinca perpendicular à solda parta de uma posição suficientemente distante do campo de tensões residuais e se propague atravessando-o completamente, K_I^{res} assumirá valores negativos, em seguida positivos e então tornará a assumir valores negativos (ver gráfico da figura 5.39). K_I^{res} se comporta de maneira diferente no caso de uma trinca paralela à solda, isto é, se o modo I de abertura da trinca é influenciado pelo campo de tensões residuais transversais. Neste caso, a redistribuição do campo de tensões residuais transversais devido ao aumento do comprimento da trinca ocorre da maneira sugerida por Donne et al. (2000) e Ohta et al. (1982) nas figuras 3.5 e 3.6.

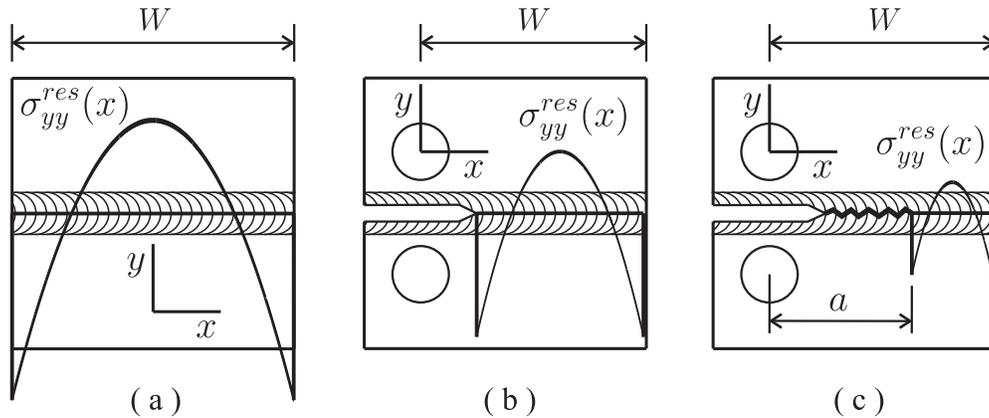


Figura 3.5: Perfis de tensão residual transversal devido à soldagem FSW em chapa original e em corpos de prova CT (Donne et al., 2000; Ohta et al., 1982)

A figura 3.5a exibe o perfil de tensão residual transversal de uma chapa livre de trincas, soldada por FSW. A parte b da mesma figura exibe o perfil de tensão residual transversal no corpo de prova CT extraído daquela chapa e a parte c exibe o perfil após o ensaio de propagação. Nota-se que a amplitude do perfil cai conforme a trinca se propaga. Além disso, nas proximidades da ponta da trinca a tensão residual é sempre compressiva, sugerindo que o fator de intensidade de tensão devido às tensões residuais (K_I^{res}) é sempre negativo neste caso. Na verdade, segundo curvas obtidas por Donne et al. (2000) através do método *cut compliance* (que é abordado na seção 4.2), K_I^{res} se torna ligeiramente positivo em altas razões de a/W .

Este comportamento também se verifica no trabalho de Ma et al. (2011b) que realizou ensaios

de propagação para o mesmo caso da figura 3.5 (Ma et al., 2011a), em três corpos de prova de diferentes dimensões. Foram encontradas três curvas distintas de K_I^{res} , sugerindo que a amplitude, bem como a distribuição de tensão residual transversal na peça dependem também das dimensões do corpo de prova. Na peça maior, K_I^{res} apresentou maiores amplitudes e chegou a assumir valores positivos de maior expressão.

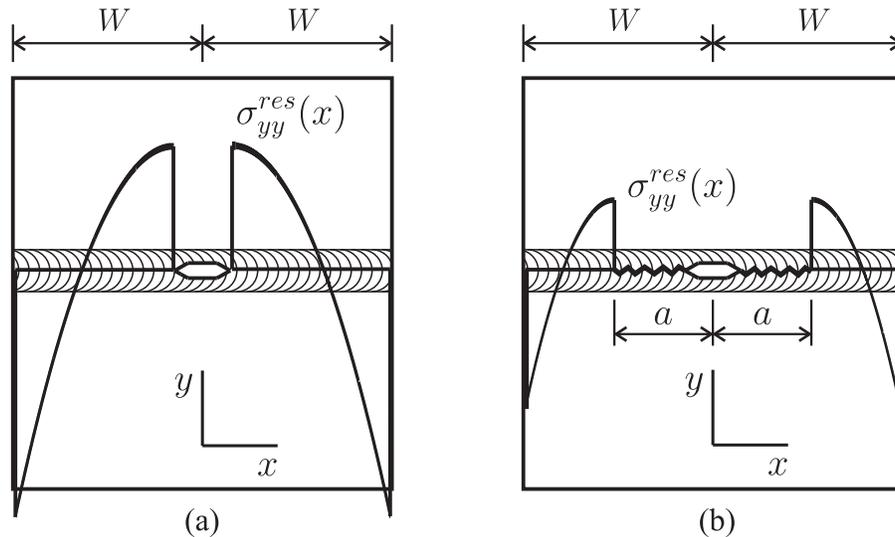


Figura 3.6: Distribuição de tensão residual transversal devido à soldagem FSW em chapas com trinca central (Donne et al., 2000; Ohta et al., 1982)

A figura 3.6a exibe o perfil de tensão residual transversal devido à soldagem FSW em chapa com trinca central em seu comprimento inicial. A parte b da mesma figura exibe o perfil resultante após o ensaio de propagação. Como no caso do corpo de prova CT, a amplitude do perfil cai conforme a trinca se propaga. Neste caso, porém, a tensão residual nas proximidades da ponta da trinca é sempre de tração, sugerindo que o fator de intensidade de tensão residual é sempre positivo neste caso. Isto se verifica nas curvas de K_I^{res} obtidas por John et al. (2003) a partir de ensaios de propagação.

O comportamento descrito de K_I^{res} devido às tensões residuais transversais não é observado no caso em que a trinca está sob o efeito de tensões residuais longitudinais; neste caso, em um mesmo ensaio de propagação, a ponta da trinca pode experimentar tanto efeito de abertura quanto de fechamento devido às tensões residuais, dependendo de sua localização dentro do perfil (ver gráfico da figura 5.5).

3.3 Princípio da sobreposição

O princípio da sobreposição (Anderson, 1995) afirma que o fator de intensidade de tensão total de uma trinca em um corpo de prova submetido a diversos carregamentos simultâneos é dado pela soma dos fatores de intensidade de tensão devido a cada um dos carregamentos considerados individualmente:

$$K_I^{tot} = K_I^{(1)} + K_I^{(2)} + \dots + K_I^{(n)} \quad (3.11a)$$

$$K_{II}^{tot} = K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)} + \dots + K_{II}^{(n)} \quad (3.11b)$$

$$K_{III}^{tot} = K_{III}^{(1)} + K_{III}^{(2)} + \dots + K_{III}^{(n)} \quad (3.11c)$$

Os superescritos cuja numeração varia de 1 até n correspondem a cada um dos n carregamentos. O princípio da sobreposição é válido apenas em mecânica da fratura linear elástica, que não considera efeitos de deformação plástica nas proximidades da ponta da trinca. Se uma grande região sofre deformação plástica, a análise deve ser feita segundo a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP), que utiliza outros parâmetros similares aos fatores de intensidade de tensão.

Segundo Bao et al. (2010), o princípio da sobreposição deve ser usado para levar em consideração o efeito das tensões residuais em análises de mecânica da fratura linear elástica:

$$K_I^{tot} = K_I^{app} + K_I^{res} \quad (3.12a)$$

$$K_{II}^{tot} = K_{II}^{app} + K_{II}^{res} \quad (3.12b)$$

$$K_{III}^{tot} = K_{III}^{app} + K_{III}^{res} \quad (3.12c)$$

K_I^{res} , K_{II}^{res} e K_{III}^{res} são fatores de intensidade de tensão residual, isto é, devido à presença de tensões residuais nas proximidades da ponta da trinca. As próximas seções abordam expressões que permitem a obtenção de tais fatores considerando-se o modo I de abertura de trinca.

3.4 Função de Green

A figura 3.7 apresenta uma trinca central de comprimento $2a$ em uma chapa infinita. Duas cargas pontuais P (em unidade de força por unidade de espessura da peça), são aplicadas em sentidos opostos em uma dada posição $x = b$ das superfícies de fratura, de modo a abrir a trinca em modo I.

Segundo Sih et al. (1962), o fator de intensidade de tensão K_I correspondente à ponta direita

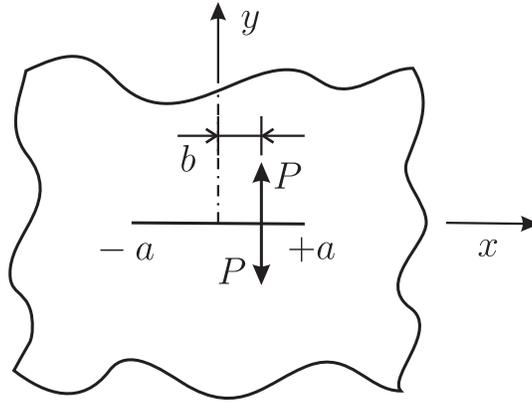


Figura 3.7: Força atuante em superfície de trinca em chapa de dimensões infinitas

desta trinca é:

$$K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad (\text{lado direito}) \quad (3.13)$$

Onde define-se

$$g(a, b) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad (\text{lado direito}) \quad (3.14)$$

como a função de Green apropriada ao caso descrito nesta sub-seção. A equação 3.14 é uma solução de forma fechada, isto é, uma solução exata para $g(a, b)$ e foi obtida por Sih et al. (1962) a partir das funções de tensão complexas descritas por Muskhelishvili (1953).

Dado um carregamento distribuído sobre a superfície da trinca descrito pela curva $\sigma_{yy}(x)$, que pode ser simétrico ou assimétrico em relação ao eixo y , considera-se o princípio da sobreposição para obter:

$$K_I(a) = \int_{-a}^a \sigma_{yy}(x) \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (\text{lado direito}) \quad (3.15)$$

Para a ponta esquerda da trinca, $K_I(a)$ é obtido por:

$$K_I(a) = \int_{-a}^a \sigma_{yy}(x) \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \quad (\text{lado esquerdo}) \quad (3.16)$$

ou, alternativamente, reflete-se a função $\sigma_{yy}(x)$ em torno do eixo y e aplica-se a equação 3.15 sem modificá-la.

Se é desejado obter K_I^{res} , isto é, o fator de intensidade de tensão em modo I devido às tensões residuais, deve-se conhecer previamente o perfil de tensão residual $\sigma_{yy}^{res}(x)$ que estaria presente na chapa se esta não estivesse trincada. Em seguida, tal perfil deve ser inserido nas equações 3.15 e 3.16, de modo a obter os resultados procurados.

3.5 Funções ponderadoras

A figura 3.8a considera uma chapa plana com uma trinca lateral que está submetida a um carregamento q_{ref} simétrico em relação ao plano da trinca, de modo que esta seja aberta apenas em modo I. Supõe-se que sejam conhecidos o fator de intensidade de tensões $K_I^{ref}(a)$ e o campo de deslocamentos $\mathbf{u}^{ref}(x, y, a)$, correspondentes àquele carregamento q_{ref} .

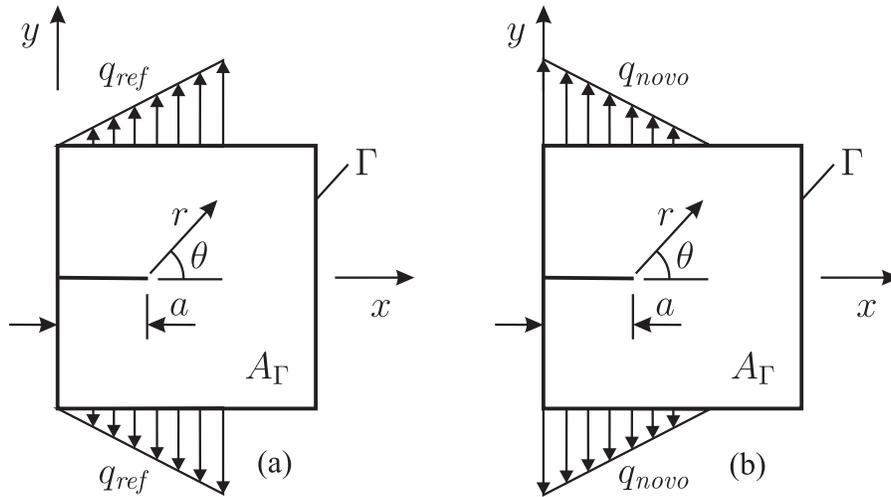


Figura 3.8: Corpo trincado e carregamentos considerados por Rice (1972)

Deseja-se calcular o fator de intensidade de tensões K_I^{novo} no mesmo corpo de prova devido a um novo carregamento q_{novo} (figura 3.8b). São conhecidos $\mathbf{T}^{novo}(x, y)$ e $\mathbf{f}^{novo}(x, y)$ que são, respectivamente, o vetor de tração normal ao contorno Γ e o campo de forças de corpo, correspondentes à nova condição. Considerando o princípio da sobreposição, Rice (1972) demonstrou que o fator de intensidade de tensões K_I^{novo} pode ser calculado por:

$$K_I^{novo}(a) = \frac{E'}{2K_I^{ref}(a)} \left[\int_{\Gamma} \mathbf{T}^{novo}(x, y) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{ref}(x, y, a)}{\partial a} d\Gamma + \int_{A_{\Gamma}} \mathbf{f}^{novo}(x, y) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{ref}(x, y, a)}{\partial a} dA_{\Gamma} \right] \quad (3.17)$$

Onde A_{Γ} é a área do corpo de prova, delimitada pelo contorno Γ , e E' é o módulo de

elasticidade efetivo, dado pela equação 2.46.

Dois anos antes de Rice, Bueckner (1970) havia definido a seguinte expressão como o vetor de funções ponderadoras:

$$\mathbf{h}(x, y, a) = \frac{E'}{2K_I^{ref}(a)} \frac{\partial \mathbf{u}^{ref}(x, y, a)}{\partial a} \quad (3.18)$$

Para um corpo de prova de uma determinada geometria, o vetor de funções ponderadoras $\mathbf{h}(x, y, a)$ é sempre o mesmo, independentemente de qual carregamento de referência é utilizado para obter o campo de deslocamentos $\mathbf{u}^{ref}(x, y, a)$ e o fator de intensidade de tensões $K_I^{ref}(a)$.

Se $v(x, a)$ é uma função tal que o seu dobro define a distância entre as superfícies de fratura, a componente y do vetor de funções ponderadoras é expresso por (Jones, 1998):

$$h(x, a) = \frac{E'}{K_I^{ref}(a)} \frac{\partial v^{ref}(x, a)}{\partial a} \quad (3.19)$$

Considerando-se novamente o caso da figura 3.7, porém, com a origem do sistema de coordenadas na ponta esquerda da trinca, $v(x, a)$ é, segundo Rice (1972):

$$v(x, a) = \frac{2\sigma}{E'} \sqrt{x(2a - x)} \quad (3.20)$$

onde σ é um carregamento externo distante que abre a trinca em modo I.

Visto que a trinca considerada tem comprimento $2a$, na equação 3.19, $v(x, a)$ deve ser derivado em relação a $2a$. Além disso, visto que K_I é expresso pela equação 2.37, obtém-se a seguinte função ponderadora para a ponta direita da trinca:

$$h(x, a) = \frac{E'}{K_I^{ref}(a)} \frac{\partial v^{ref}(x, a)}{\partial (2a)} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{x}{2a - x}} \quad (\text{lado direito}) \quad (3.21)$$

Analogamente ao que ocorre com a função de Green, discutida na seção 3.4, se duas cargas pontuais P (em unidade de força por unidade de espessura da chapa) atuam paralelamente ao eixo y em uma posição x das superfícies de fratura, $K_I(a)$ é obtido pela multiplicação de P com a função ponderadora $h(x, a)$:

$$K_I(a) = Ph(x, a) = P \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{x}{2a - x}} \quad (\text{lado direito}) \quad (3.22)$$

No caso de um carregamento distribuído $\sigma_{yy}(x)$, atuante nas superfícies de fratura, o princípio da sobreposição permite escrever:

$$K_I(a) = \int_0^{2a} \sigma_{yy}(x) \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx \quad (\text{lado direito}) \quad (3.23)$$

Para a ponta esquerda da trinca, $K_I(a)$ é expresso por:

$$K_I(a) = \int_0^{2a} \sigma_{yy}(x) \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{2a-x}{x}} dx \quad (\text{lado esquerdo}) \quad (3.24)$$

Tais resultados são compatíveis com as equações 3.15 e 3.16, que foram obtidas com funções de tensão complexas de Muskhelishvili (1953).

3.5.1 Método Petroski-Achenbach

Nesta sub-seção é abordada uma técnica de determinação de funções ponderadoras que, segundo Petroski & Achenbach (1978), é particularmente adequada para trincas laterais.

A figura 3.9 exibe uma chapa com uma trinca lateral de comprimento a . Considerando-se o sistema de coordenadas mostrado na figura e um carregamento $\sigma_{yy}(x)$ atuante nas superfícies de fratura, o fator de intensidade de tensão é dado por:

$$K_I = \int_0^a \sigma_{yy}(x) h(x, a) dx \quad (3.25)$$

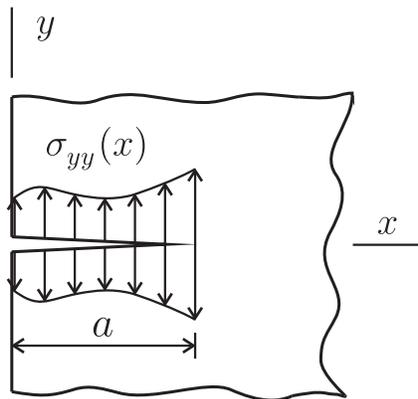


Figura 3.9: Trinca lateral em chapa semi infinita, com carregamento distribuído $\sigma_{yy}(x)$ sobre as superfícies de fratura

Considerando-se que K_I^{novo} é igual a K_I^{ref} , é possível escrever:

$$K_I^2 = E' \int_0^a \sigma_{yy}(x) \frac{\partial v}{\partial a} dx \quad (3.26)$$

Segundo Petroski & Achenbach (1978), visto que $v(x, a) = 0$ em $x = a$, a derivada em relação ao comprimento a pode ser colocada do lado de fora da integral. Uma integração subsequente em relação ao comprimento a fornece:

$$\int_0^a [K_I(a)]^2 da = E' \int_0^a \sigma_{yy}(x)v(x, a) dx \quad (3.27)$$

Segundo Paris & Sih (1965), nas proximidades da ponta de uma trinca lateral, $v(x, a)$ pode ser representado por:

$$v(x, a) = \frac{4K_I}{E'} \sqrt{\frac{a-x}{2\pi}} \quad (3.28)$$

se a origem de x é posicionado na raiz da trinca, onde ela se nucleia.

A fim de representar $v(x, a)$ em todo o domínio $0 < x < a$, Petroski & Achenbach (1978) propuseram a seguinte relação:

$$v(x, a) = \frac{\sigma^{ref}}{E' \sqrt{2}} \left[4F\left(\frac{a}{W}\right) a^{1/2}(a-x)^{1/2} + G\left(\frac{a}{W}\right) a^{-1/2}(a-x)^{3/2} \right] \quad (3.29)$$

A equação 3.29 pode ser vista como uma série de potências em $(a-x)$. O primeiro termo da série resulta da substituição de K_I fornecido pela equação 2.39 na equação 3.28. O fator $a^{-1/2}$ que multiplica $(a-x)^{3/2}$ foi escolhido a fim de que $v(x, a)$ apresente um comportamento consistente quando a é pequeno.

A substituição da equação 3.29 na equação 3.27 e subsequente resolução para $G(a/W)$ fornece:

$$G(a/W) = \frac{[I_1(a) - 4F(a/W)a^{1/2}I_2(a)] a^{1/2}}{I_3(a)} \quad (3.30a)$$

onde:

$$I_1(a) = \pi \sigma^{ref} \sqrt{2} \int_0^a [F(a/W)]^2 a da \quad (3.30b)$$

$$I_2(a) = \int_0^a \sigma_{yy}(x)(a-x)^{1/2} dx \quad (3.30c)$$

$$I_3(a) = \int_0^a \sigma_{yy}(x)(a-x)^{3/2} dx \quad (3.30d)$$

Infinitas funções $\sigma_{yy}(x)$ fazem K_I^{novo} se igualar a K_I^{ref} , tornando as equações 3.26 e 3.27 verdadeiras. Uma de tais infinitas funções é $\sigma_{yy}(x) = \sigma^{ref}$, que pode ser usada nas equações 3.30c e 3.30d.

Como exemplo de aplicação do método Petroski-Achenbach, considera-se uma trinca lateral em um corpo semi-infinito. Neste caso, segundo a equação 2.38, $F(a/W)$ vale 1,1215. Este valor na equação 3.30 resulta em $G(a/W) = -0,4916$. Substituindo-se a equação 3.29 na definição de $h(x, a)$, dada pela equação 3.19, obtém-se:

$$h(x, a) = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \frac{\left[0,7071 \left(2 - \frac{x}{a}\right) - 0,0775 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(2 + \frac{x}{a}\right)\right] \sqrt{1 + \frac{x}{a}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \quad (3.31)$$

Exceto no caso da trinca central de comprimento $2a$ em um corpo de dimensões infinitas, toda solução para $h(x, a)$ é aproximada. Algumas técnicas de determinação de tais funções podem produzir soluções de grande acuracidade; outras, nem tanto. O procedimento proposto por Petroski & Achenbach (1978), embora bastante mencionado pela literatura, apresenta certas limitações, conforme mostra o trabalho de Fett (1988). Funções $h(x, a)$ determinadas pelo método Petroski-Achenbach não produzem bons resultados se o carregamento $\sigma_{yy}(x)$ é muito diferente do carregamento de referência σ^{ref} . Isto ocorre particularmente se $\sigma_{yy}(x)$ atua somente em um trecho da superfície de fratura que é muito menor do que o comprimento da trinca a .

Outras técnicas de determinação de $h(x, a)$ envolvem o método de elementos finitos, como no trabalho de Morawietz et al. (1985), ou o método de elementos de contorno, como nos trabalhos de Cruse & Raveendra (1988) e Rajiyah & Atluri (1989).

3.5.2 Funções ponderadoras para diversas geometrias

Se na equação 3.25 é inserido $\sigma_{yy}^{res}(x)$, isto é, um perfil de tensão residual, obtém-se o fator de intensidade de tensão residual $K_I^{res}(a)$. Neste caso, há duas possibilidades:

1. $\sigma_{yy}^{res}(x)$ é um perfil de tensão residual longitudinal. Neste caso, deve-se determinar este perfil previamente, para a mesma chapa livre de trincas, empregando-se técnicas experimentais.

Em seguida, a equação 3.25 pode ser usada para encontrar $K_I^{res}(a)$.

2. $\sigma_{yy}^{res}(x)$ é um perfil de tensão residual transversal. Como já mencionado na sub-seção 3.2.3, este perfil muda conforme a trinca se propaga, isto é, para cada comprimento de trinca a existe uma função $\sigma_{yy}^{res}(x)$ válida no intervalo $0 < x < a$ (o perfil deste intervalo é omitido nas figuras 3.5 e 3.6) que permitiria a aplicação da equação 3.25. Em outras palavras, tem-se $\sigma_{yy}^{res}(x, a)$. Neste caso, dada a dificuldade e falta de acuracidade na obtenção de $\sigma_{yy}^{res}(x, a)$, sugere-se determinar diretamente $K_I^{res}(a)$, utilizando-se técnicas experimentais envolvendo taxas de propagação ou o método *cut compliance*, a ser abordado da seção 4.2.

As funções ponderadoras apresentadas a seguir também podem ser encontradas no trabalho de Bao et al. (2010). Considerando uma trinca lateral em chapa semi-infinita (figura 3.9), Sih (1973), determinou a função ponderadora da equação 3.32.

$$h(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a(1 - (x/a)^2)}} \left[1, 3 - 0, 3 \left(\frac{x}{a} \right)^{5/4} \right] \quad (3.32)$$

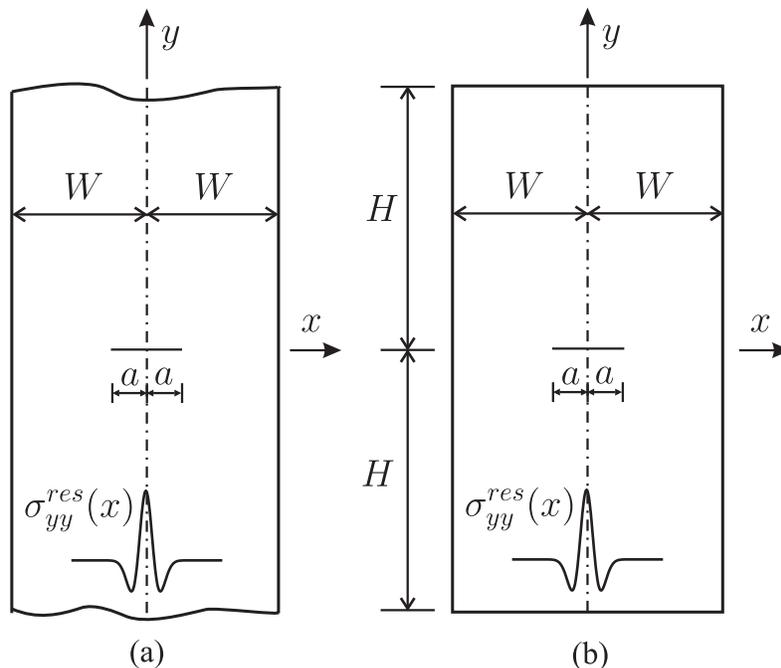


Figura 3.10: Trinca central em chapas: (a) de comprimento infinito e largura $2W$ (b) de altura $2H$ e largura $2W$

Considerando-se uma chapa de largura $2W$ e comprimento infinito, com uma trinca central de comprimento $2a$ e um perfil de tensão residual simétrico em relação ao centro da chapa (figura

3.10a), Tada et al. (1985) encontraram a função ponderadora exibida na equação 3.33.

$$h(x, a) = \frac{2}{\sqrt{2W}} \left\{ 1 + 0,297 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \right] \right\} \sqrt{\tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \left\{ 1 - \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2W}\right)} \right]^2 \right\}^{-1/2} \quad (3.33)$$

Considerando-se uma trinca central de comprimento $2a$ em uma chapa retangular de largura $2W$, altura $2H$ e razão $H/W \geq 2,0$, com um perfil de tensão residual simétrico em relação ao centro da chapa (figura 3.10b), Wu & Carlsson (1991) encontraram a função ponderadora dada pelas equações 3.34.

$$h(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sum_{i=1}^2 \beta_i \left(\frac{a}{W}\right) \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right]^{i-\frac{3}{2}} \quad (3.34a)$$

onde:

$$\beta_1(a/W) = 2,0 \quad (3.34b)$$

$$\beta_2(a/W) = \frac{\pi a}{2W} \tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \quad (3.34c)$$

É importante ressaltar que as funções ponderadoras para trincas centrais exibidas nesta seção consideram que o perfil de tensão residual seja simétrico em relação ao centro da chapa (e ao centro da trinca). Tais funções devem ser inseridas na equação 3.25 cujo limite inferior de integração é zero e fornece apenas um valor de fator de intensidade de tensão que deve ser considerado o mesmo para ambas as pontas da trinca. Isto mostra a vantagem em utilizar-se as equações 3.15 e 3.16, que são capazes de lidar com assimetrias do perfil de tensão residual em relação ao centro da trinca.

Bueckner (1970) considera a função ponderadora da equação 3.35a para uma trinca única lateral em chapa de largura finita e comprimento infinito (figura 3.11a):

$$h(x, a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(a-x)}} \left[1 + m_1 \left(\frac{a-x}{a}\right) + m_2 \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \right] \quad (3.35a)$$

onde:

$$m_1 = 0,6147 + 17,1844 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 8,7822 \left(\frac{a}{W}\right)^6 \quad (3.35b)$$

$$m_2 = 0,2502 + 3,2889\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 70,0444\left(\frac{a}{W}\right)^6 \quad (3.35c)$$

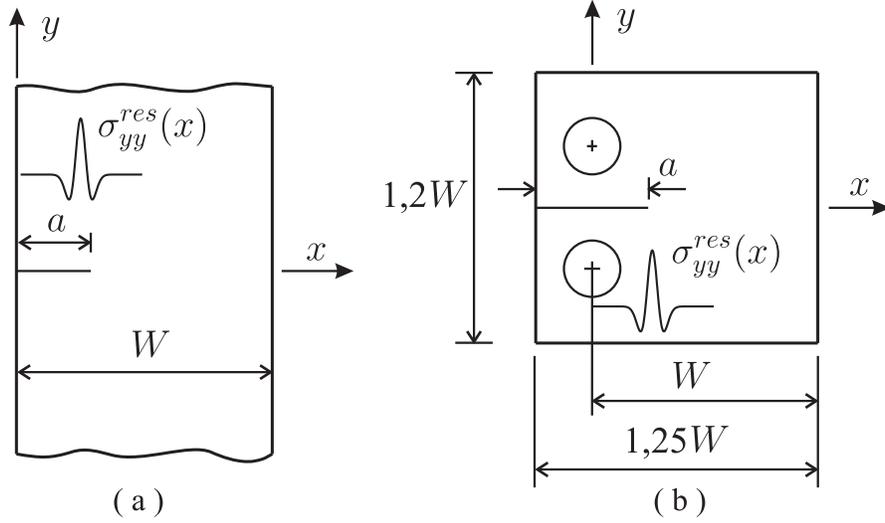


Figura 3.11: (a) Tensão residual em chapa de largura W e altura infinita com trinca lateral (b) Tensão residual em corpo de prova CT

Para a mesma geometria, isto é, para trinca única lateral em chapa de largura W e comprimento infinito, Kaya & Erdogan (1980) propuseram a seguinte função ponderadora:

$$h(x, a) = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \frac{g_1\left(\frac{a}{W}\right) + g_2\left(\frac{a}{W}\right)\frac{x}{a} + g_3\left(\frac{a}{W}\right)\left(\frac{x}{a}\right)^2 + g_4\left(\frac{a}{W}\right)\left(\frac{x}{a}\right)^3}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \quad (3.36)$$

Como mostra a equação 3.36, g_1, g_2, g_3 e g_4 são funções de a/W . Elas são dadas por:

$$g_1\left(\frac{a}{W}\right) = 0,46 + 3,06\left(\frac{a}{W}\right) + 0,84\left(1 + \frac{a}{W}\right)^5 + 0,66\left(\frac{a}{W}\right)^2\left(1 - \frac{a}{W}\right)^2 \quad (3.37a)$$

$$g_2\left(\frac{a}{W}\right) = -3,52\left(\frac{a}{W}\right)^2 \quad (3.37b)$$

$$g_3\left(\frac{a}{W}\right) = 6,17 - 28,22\left(\frac{a}{W}\right) + 34,54\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 14,39\left(\frac{a}{W}\right)^3 - \left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2} - 5,88\left(1 - \frac{a}{W}\right)^5 - 2,64\left(\frac{a}{W}\right)^2\left(1 - \frac{a}{W}\right)^2 \quad (3.37c)$$

$$g_4\left(\frac{a}{W}\right) = -6,63 - 25,16\left(\frac{a}{W}\right) - 31,04\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14,41\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 2\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2} + 5,04\left(1 - \frac{a}{W}\right)^5 + 1,98\left(\frac{a}{W}\right)^2\left(1 - \frac{a}{W}\right)^2 \quad (3.37d)$$

Também para uma trinca única lateral em chapa de largura W e altura infinita, Wu & Carlsson (1991) propuseram a seguinte função ponderadora:

$$h(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \sum_{i=1}^5 \beta_i \left(\frac{a}{W} \right) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right) \right]^{i-\frac{3}{2}} \quad (3.38)$$

Devido à complexidade das expressões que representam as funções $\beta_i(a/W)$ na equação 3.38, Wu & Carlsson (1991) apresentaram valores discretos de tais funções, conforme a tabela 3.1.

Tabela 3.1: Valores de $\beta_i(a/W)$ na equação 3.38, para trinca lateral em chapa de largura W (Bao et al., 2010; Wu & Carlsson, 1991).

a/W	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0,01	2,0	0,9765	1,1420	-0,3504	-0,0912
0,05	2,0	1,0927	1,1506	-0,3662	-0,0819
0,10	2,0	1,4187	1,1378	-0,3550	-0,0763
0,20	2,0	2,5366	1,2378	-0,3474	-0,0562
0,30	2,0	4,2381	1,6796	-0,4095	-0,0188
0,40	2,0	6,6359	2,8048	-0,6105	0,0394
0,50	2,0	10,0222	5,4999	-1,3401	0,2178
0,60	2,0	15,0359	11,8784	-3,6067	0,7858
0,70	2,0	29,5188	45,5066	-18,9281	4,8834
0,80	2,0	38,8128	78,7524	-36,5957	9,8712
0,85	2,0	53,8457	151,2119	-79,0151	22,2696
0,90	2,0	82,6869	350,9961	-207,0916	60,8592

Tabela 3.2: Valores de $\beta_i(a/W)$ na equação 3.39, para geometria CT (Bao et al., 2010).

a/W	β_1	β_2	β_3	β_4
0,2	2,0	3,3270	1,4351	-0,4652
0,3	2,0	4,9886	1,7280	-0,4130
0,4	2,0	7,2610	2,7054	-0,4570
0,5	2,0	10,4356	5,2943	-0,7632
0,6	2,0	15,1033	11,3700	-1,6671
0,7	2,0	22,6843	26,0237	-4,0924
0,75	2,0	28,5976	41,2320	-6,7399
0,8	2,0	37,2393	69,1970	-11,7568

Considerando a geometria CT (*Compact Tension*, figura 3.11b), Wu & Carlsson (1991) propuseram a função ponderadora da equação 3.39:

$$h(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \sum_{i=1}^4 \beta_i \left(\frac{a}{W} \right) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right) \right]^{i-\frac{3}{2}} \quad (3.39)$$

Valores discretos de $\beta_i(a/W)$ para a equação 3.39 são fornecidos na tabela 3.2.

3.6 Contato entre as superfícies de fratura

Uma trinca localizada em um campo de tensões residuais, sujeita a um carregamento externo é considerada. Em determinadas circunstâncias, pode haver contato entre as superfícies de fratura. Neste caso, segundo Beghini et al. (1994), o fator de intensidade de tensão total é dado por:

$$K_I^{tot} = K_I^{app} + K_I^{res} + K_I^{cont} \quad (3.40a)$$

$$K_{II}^{tot} = K_{II}^{app} + K_{II}^{res} + K_{II}^{cont} \quad (3.40b)$$

$$K_{III}^{tot} = K_{III}^{app} + K_{III}^{res} + K_{III}^{cont} \quad (3.40c)$$

onde, K_I^{cont} , K_{II}^{cont} e K_{III}^{cont} são fatores de intensidade de tensão devido ao contato entre as superfícies de fratura.

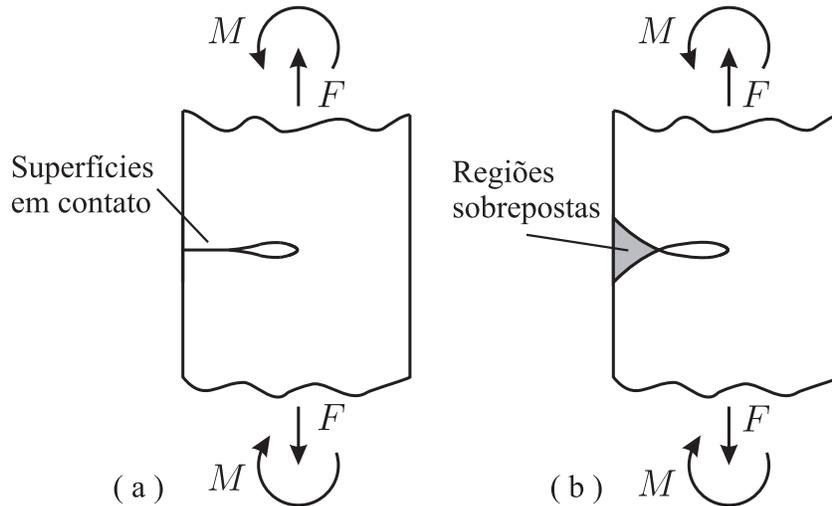


Figura 3.12: (a) Contato entre superfícies de fratura (b) Sobreposição de duas regiões fisicamente inaceitável (Parker, 1982)

Quando $K_I^{app} + K_I^{res}$ é menor do que zero, o contato entre as superfícies de fratura é inevitável.

Porém, valores positivos de $K_I^{app} + K_I^{res}$ não implicam em superfícies de fratura completamente separadas. Isto ocorre no caso na figura 3.12a, onde um sólido plano, sem tensões residuais, com uma trinca lateral é sujeito a um carregamento de tração combinado a um momento fletor. A figura 3.12b exibe o *overlap*, ou a sobreposição de duas regiões do material caso o contato entre as superfícies de fratura não seja modelado.

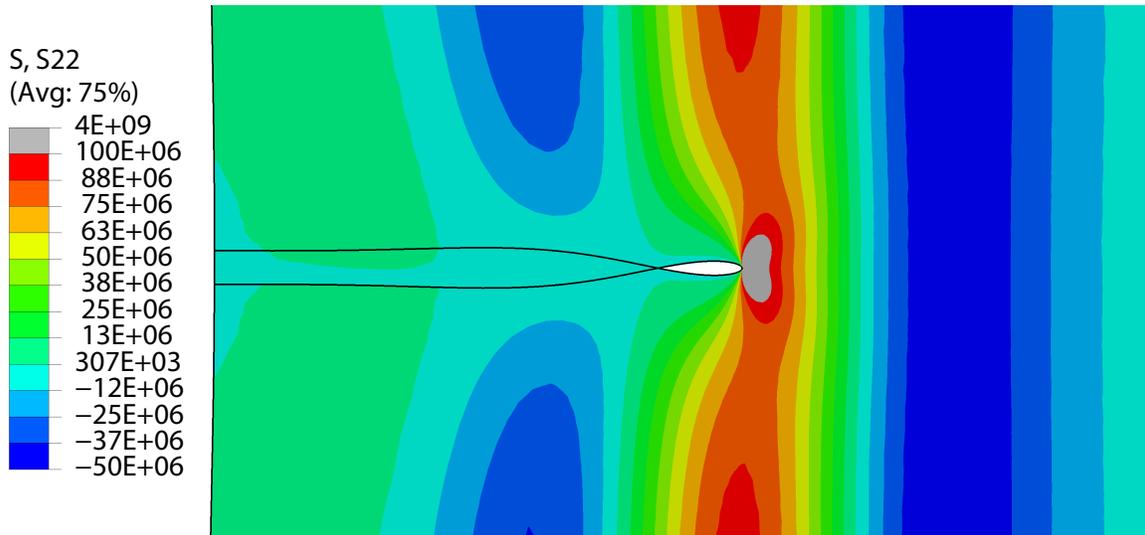


Figura 3.13: Sobreposição de superfícies de fratura fisicamente inaceitável em modelo de elementos finitos. Legenda do mapa de cores em Pascal.

Algo semelhante pode ocorrer quando uma trinca se propaga perpendicularmente a uma solda, ou seja, quando K_I^{res} é devido ao campo de tensão residual longitudinal. Isto é ilustrado na figura 3.13, que exibe o mapa de cores do campo de tensões residuais σ_{yy}^{res} em uma chapa plana com uma trinca lateral. O contato entre superfícies não é modelado e não há carregamento externo, resultando em um *overlap*, ou sobreposição de duas regiões do material. Os deslocamentos foram multiplicados por 100 para melhor visualização da deformação da peça devido às tensões residuais.

Não há expressões analíticas para K_I^{cont} . Tal fator somente pode ser calculado isolando-o na equação 3.40a. Neste caso, K_I^{tot} deve ser obtido em análises de elementos finitos onde são modelados simultaneamente o carregamento externo, o campo de tensões residuais e o contato entre as superfícies de fratura. K_I^{app} e K_I^{res} são fatores que não levam em consideração o problema de contato não linear entre as superfícies de fratura e devem ser calculados utilizando-se expressões analíticas ou análises de elementos finitos onde o contato não é modelado.

3.7 Influência de tensões residuais sobre a taxa de propagação de trincas

Segundo Parker (1982), na presença de tensões residuais, a equação 2.61 deve ser modificada da seguinte forma:

$$\Delta K_{tot} = \begin{cases} K_{app}^{max} - K_{app}^{min} & \text{se } K_{app}^{min} + K_{res} > 0 \\ K_{app}^{max} + K_{res} & \text{se } K_{app}^{min} + K_{res} \leq 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

No primeiro caso, ΔK_{tot} é igual a ΔK_{app} , pois K_{res} aparece duas vezes e é cancelado:

$$\Delta K_{tot} = K_{tot}^{max} - K_{tot}^{min} = (K_{app}^{max} + K_{res}) - (K_{app}^{min} + K_{res}) = \Delta K_{app} \quad (3.42)$$

Ainda segundo Parker (1982), na presença de um campo de tensões residuais, calcula-se a razão de tensão efetiva R_{eff} da seguinte maneira:

$$R_{eff} = \frac{K_{tot}^{min}}{K_{tot}^{max}} = \frac{K_{app}^{min} + K_{res}}{K_{app}^{max} + K_{res}} \quad (3.43)$$

Considerando-se as equações 3.41 e 3.43, a lei de Walker (equação 2.63) assume a seguinte forma:

$$\frac{da}{dN} = C_0 \left[\frac{\Delta K_{tot}}{(1 - R_{eff})^{1-m}} \right]^n \quad (3.44)$$

Se o modelo de Elber (equações 2.67 e 2.69) é empregado para o alumínio 2024-T3, Servetti & Zhang (2009) afirmam que R_{eff} deve ser utilizado nas equações 2.71 e 2.72 para calcular U , levando-se em consideração o efeito de tensões residuais.

Segundo Bao & Zhang (2010), na equação NASGRO, a função de abertura de trinca f e ΔK_{th} dependem da razão de tensão e, portanto, também devem ser modificados por meio do uso da razão de tensão efetiva nas equações 2.74, 2.76 e 2.77. Portanto, sob o efeito de tensões residuais, a equação NASGRO assume a seguinte forma:

$$\frac{da}{dN} = C_N \left[\left(\frac{1 - f_{eff}}{1 - R_{eff}} \right) \Delta K_{tot} \right]^n \frac{\left(1 - \frac{(\Delta K_{th})_{eff}}{\Delta K_{tot}} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{app}^{max} + K_{res}}{K_c} \right)^q} \quad (3.45)$$

4 METODOLOGIA PARA DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DE TENSÕES RESIDUAIS

4.1 Obtenção de $\sigma_{yy}^{res}(x)$ a partir de $K_I^{res}(a)$ (Método Inverso)

Se o modo I de abertura de uma trinca é influenciado por um campo de tensão residual longitudinal com perfil definido por $\sigma_{yy}^{res}(x)$, uma típica análise de mecânica da fratura considera que este perfil foi previamente determinado utilizando alguma técnica experimental, como difração de raios-X, difração de nêutrons, ultra-som ou as técnicas envolvendo mecânica da fratura, que são descritas neste capítulo. Em seguida, a partir daquele perfil, calculam-se os fatores de intensidade de tensão residual, que serão levados em consideração no cálculo de taxas de propagação de trincas, bem como em critérios de falha.

Esta seção aborda uma técnica numérica de obtenção de um perfil de tensão residual longitudinal $\sigma_{yy}^{res}(x)$ a partir de uma curva de fatores de intensidade de tensão residual $K_I^{res}(a)$, ou seja, trata-se de uma técnica inversa de análise. Se $\sigma_{yy}^{res}(x)$ é um perfil de tensão residual transversal, como nas figuras 3.5 e 3.6, esta técnica não se aplica, devido à redistribuição do campo de tensões residuais discutida na sub-seção 3.2.3 e novamente no início da sub-seção 3.5.2.

Conforme já mencionado, os fatores de intensidade de tensão residual $K_I^{res}(a)$ podem ser calculados utilizando-se a integral da equação 3.25, que envolve o produto da função que define o perfil de tensão residual $\sigma_{yy}^{res}(x)$ com uma função ponderadora $h(x, a)$. É importante notar que, segundo aquela equação, é necessário conhecer não apenas um valor, mas o perfil completo de tensão residual entre $x = 0$ e $x = a$ se é desejado obter o fator de intensidade de tensão residual para o comprimento de trinca a . Além disso, a equação 3.25 mostra que infinitas funções $\sigma_{yy}^{res}(x)$ podem produzir um mesmo valor de K_I^{res} , para um dado comprimento de trinca a . Portanto, se apenas um valor discreto de fator de intensidade de tensão residual for conhecido, não é possível obter informações a respeito do perfil de tensões $\sigma_{yy}^{res}(x)$. Para determinar este perfil entre $x = 0$ e $x = x_f$, é necessário conhecer a curva de $K_I^{res}(a)$ entre $a = 0$ e $a = x_f$. Na prática, porém, é conhecido $K_I^{res}(a)$ entre $a = x_1$ e $a = x_f$, sendo que $K_I^{res} = 0$ para $a < x_1$. Neste caso, obtém-se o perfil de tensão residual entre $x = x_1$ e $x = x_f$.

Conhecer a curva $K_I^{res}(a)$ é equivalente a conhecer o vetor \mathbf{K}_{res} da equação 4.1, proposta por Bao & Zhang (2010):

$$[\mathbf{B}] \{\mathbf{S}_{res}\} = \{\mathbf{K}_{res}\} \quad (4.1)$$

\mathbf{B} funciona como uma matriz de ponderação, analogamente ao papel de $h(x, a)$ na equação 3.25. Os elementos da matriz \mathbf{B} dependem da geometria e dimensões do corpo de prova, além do incremento Δa no vetor de comprimentos de trinca, cujos elementos correspondem aos do vetor \mathbf{K}_{res} . O vetor \mathbf{S}_{res} define a curva de tensão residual longitudinal $\sigma_{yy}^{res}(x)$, que deseja-se calcular. A fim de demonstrar como a matriz \mathbf{B} é encontrada, a equação 4.1 é expressa de outra maneira em 4.2.

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{res}^{(1)} \\ S_{res}^{(2)} \\ \vdots \\ S_{res}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{res}^{(1)} \\ K_{res}^{(2)} \\ \vdots \\ K_{res}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Para o mesmo propósito, uma chapa com uma trinca lateral e um campo desconhecido de tensões residuais é considerada, como mostra a figura 4.1a.

A fim de tornar o exemplo mais claro, o passo exibido na figura é muito grande e considera-se que são conhecidos os fatores de intensidade de tensão residual somente quando a ponta da trinca está nas posições 1, 2, 3 e 4. Tais fatores são denotados por $K_{res}^{(1)}$, $K_{res}^{(2)}$, $K_{res}^{(3)}$ e $K_{res}^{(4)}$ e correspondem aos comprimentos de trinca a_1 , a_2 , a_3 e a_4 , respectivamente.

Segundo o princípio da sobreposição, exposto na seção 3.3, $K_{res}^{(4)}$ pode ser calculado pela soma:

$$K_{res}^{(4)} = (K_{res}^{(4)})_{x1} + (K_{res}^{(4)})_{x2} + (K_{res}^{(4)})_{x3} + (K_{res}^{(4)})_{x4} \quad (4.3)$$

Onde $(K_{res}^{(4)})_{xi}$ é o fator de intensidade de tensão residual quando o comprimento da trinca vale a_4 , devido à tensão existente na posição xi .

A equação 4.3 pode ser expressa como:

$$K_{res}^{(4)} = B_{41}S_{res}^{(1)} + B_{42}S_{res}^{(2)} + B_{43}S_{res}^{(3)} + B_{44}S_{res}^{(4)} \quad (4.4)$$

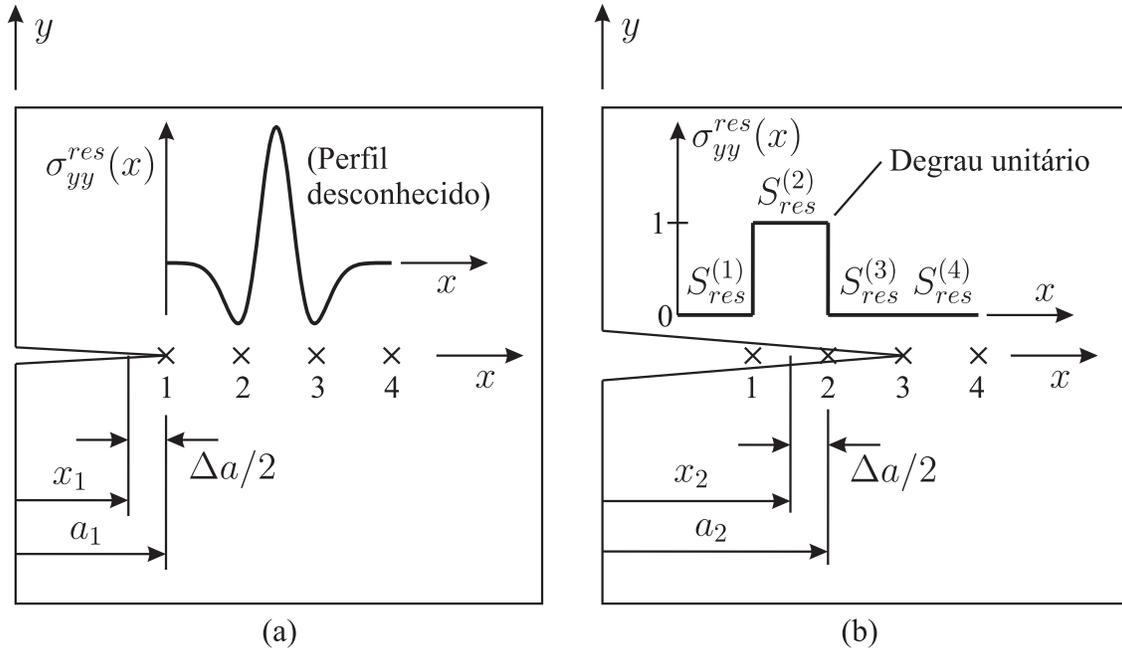


Figura 4.1: (a) Corpo de prova com perfil desconhecido de tensões residuais (b) Perfil de tensão do tipo degrau unitário para calcular o elemento B_{32} da matriz \mathbf{B}

Onde $S_{res}^{(1)}$, $S_{res}^{(2)}$, $S_{res}^{(3)}$ e $S_{res}^{(4)}$ são as tensões residuais nas posições x_1 , x_2 , x_3 e x_4 , respectivamente. Escrita desta forma, a equação 4.4 se torna mais semelhante com a equação 3.25. B_{41} , B_{42} , B_{43} e B_{44} podem ser vistos como pesos que ponderam os efeitos de cada trecho de tensão residual sobre o valor de $K_{res}^{(4)}$.

A fim de calcular B_{32} , consideram-se $S_{res}^{(1)}$, $S_{res}^{(3)}$ e $S_{res}^{(4)}$ iguais a zero e $S_{res}^{(2)}$ como um degrau unitário entre as posições $x = a_1$ e $x = a_2$ ou, em outras palavras, entre $x = x_2 - \Delta a/2$ e $x = x_2 + \Delta a/2$ conforme mostra a figura 4.1b. Considerando-se tal perfil hipotético de tensão residual, aplica-se a equação 3.25 para calcular $K_{res}^{(3)}$ que, neste caso, é igual a B_{32} . Procede-se de maneira análoga para o cálculo de B_{31} e B_{33} . B_{34} deve ser zero, pois corresponde a uma tensão residual que está além da ponta da trinca.

Nota-se, portanto, que o número da linha da matriz \mathbf{B} está associado ao número do comprimento da trinca. O número da coluna de \mathbf{B} está associado à posição que o perfil de tensão degrau unitário ocupa na chapa. Visto que o limite superior de integração na equação 3.25 é o comprimento a da trinca, conclui-se que a matriz \mathbf{B} é triangular inferior, isto é, B_{ij} vale zero se j é maior do que i .

4.2 Método *cut compliance*

O método *cut compliance* permite obter experimentalmente uma curva de fator de intensidade de tensão residual em função do comprimento da trinca, ou seja, permite obter $K_I^{res}(a)$. Tal técnica é válida tanto se $K_I^{res}(a)$ é devido às tensões residuais longitudinais quanto se $K_I^{res}(a)$ é devido às tensões residuais transversais. No primeiro caso, a curva obtida pode ser usada na técnica apresentada na seção 4.1 para obter o perfil de tensão residual longitudinal $\sigma_{yy}^{res}(x)$.

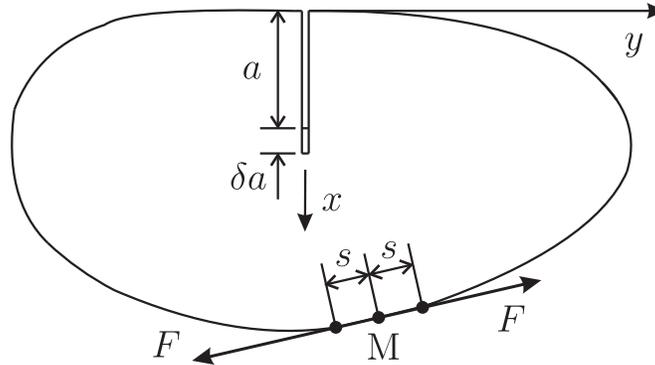


Figura 4.2: Corpo de prova considerado no estabelecimento da relação entre K_I^{res} e a deformação ϵ_M no ponto M (Schindler et al., 1996)

Os fundamentos teóricos do método *cut compliance* são bem abordados por Schindler et al. (1996). A figura 4.2 exibe uma chapa plana com um campo de tensões residuais desconhecido em seu interior e um corte estreito de comprimento a . Conforme o comprimento do corte aumenta, ocorrem mudanças na deformação ϵ em certas localizações da chapa, como no ponto M.

A partir de deduções feitas por Cheng & Finnie (1994) e considerando-se o teorema de Castigliano (Timoshenko & Goodier, 1970), um incremento δa sobre o comprimento do corte corresponde a uma variação de deformação $\delta\epsilon_M$ no ponto M expresso por:

$$\delta\epsilon_M = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta U^e}{\partial F \partial s} \Big|_{\substack{F=0 \\ s=0}} \quad (4.5)$$

Na equação 4.5, δU^e representa a variação de energia de deformação elástica da chapa devido ao incremento δa sobre o comprimento do corte. F é a magnitude de cada uma das duas forças virtuais opostas mostradas na figura 4.2. A direção de tais forças é definida pela reta que tangencia a superfície da peça no ponto M. s é a distância entre o ponto de aplicação de cada força ao ponto M. A equação 2.45, que define a relação entre \mathcal{G} e K permite escrever:

$$\delta U^e = \frac{t}{E'} \left[(K_I^{res} + K_I^F)^2 + (K_{II}^{res} + K_{II}^F)^2 \right] \delta a \quad (4.6)$$

onde K_I^F e K_{II}^F são os fatores de intensidade de tensão devido às forças F . Os demais parâmetros já foram definidos nos capítulos precedentes. Visto que K_I^F e K_{II}^F são funções lineares de F e K_I^{res} e K_{II}^{res} são independentes de s , a substituição da equação 4.6 na equação 4.5 resulta em:

$$\delta \epsilon_M = \frac{t}{E'F} \left[K_I^{res} \frac{\partial K_I^F}{\partial s} \Big|_{s=0} + K_{II}^{res} \frac{\partial K_{II}^F}{\partial s} \Big|_{s=0} \right] \delta a \quad (4.7)$$

Se o modo II de abertura de trinca não está presente, isto é, se K_{II}^{res} e K_{II}^F são nulos, a equação 4.7 pode ser reescrita como:

$$K_I^{res}(a) = \frac{E'}{Z(a)} \cdot \frac{d\epsilon_M}{da} \quad (4.8)$$

onde

$$Z(a) = \frac{t}{F} \left(\frac{\partial K_I^F}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \quad (4.9)$$

Pela equação 4.8, nota-se que é possível determinar experimentalmente o fator de intensidade de tensão residual K_I^{res} conhecendo-se as propriedades elásticas do material, a deformação ϵ_M medida no ponto M em função do comprimento a do corte e a função de influência $Z(a)$. Tal função depende das dimensões e geometria do corpo de prova, do plano de corte e da posição do ponto M onde é medida a deformação ϵ_M e independe do campo de tensões residuais que existe na peça.

No caso de um corpo de prova livre de tensões residuais, mas sujeito a um carregamento externo constante, que abre a trinca em modo I, a equação 4.8 fornece K_I^{app} , isto é, o fator de intensidade de tensões devido ao carregamento externo. No caso de um corpo de prova com tensões residuais que é sujeito a um carregamento externo, a equação 4.8 fornece K_I^{tot} , o fator de intensidade de tensão total.

4.2.1 Determinação de funções de influência

A determinação de funções de influência $Z(a)$ é bem abordada no trabalho de Schindler et al. (1996). Ainda considerando-se os parâmetros exibidos na figura 4.2, a equação 3.25 é reescrita da seguinte forma:

$$K_I^F(s) = \int_0^a h(x, a) \sigma_{yy}^F(x, s) dx \quad (4.10)$$

onde $\sigma_{yy}^F(x, s)$ é o perfil de tensão ao longo do eixo x devido à força F no mesmo sólido quando a trinca está ausente.

A combinação da equação 4.10 com a equação 4.9 produz:

$$Z(a) = \frac{t}{F} \int_0^a h(x, a) \frac{\partial \sigma_{yy}^F}{\partial s}(x, s = 0) dx \quad (4.11)$$

Utilizando-se a equação 4.11, é possível determinar funções de influência dependentes de parâmetros geométricos do corpo de prova se tanto $h(x, a)$ como $\sigma_{yy}^F(x, s)$ estiverem expressos em termos de tais parâmetros.

Se $h(x, a)$ ou $\sigma_{yy}^F(x, s)$ não é disponível para o corpo de prova de interesse, a equação 4.8 pode ser empregada para determinar $Z(a)$:

$$Z(a) = \frac{E'}{K_I^{ref}(a)} \frac{d\epsilon_M^{ref}}{da}(a) \quad (4.12)$$

onde $K_I^{ref}(a)$ define uma curva de fator de intensidade de tensão de referência que corresponde a uma curva de deformação $\epsilon_M^{ref}(a)$ de referência. Contudo, $Z(a)$ determinado pela equação 4.12 é válido apenas para a geometria e dimensões do corpo de prova associado a $K_I^{ref}(a)$ e $\epsilon_M^{ref}(a)$.

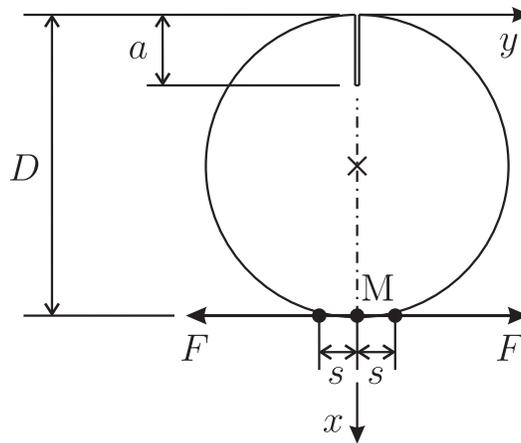


Figura 4.3: Método *cut compliance* em corpo de prova circular (Schindler et al., 1996)

Como exemplo de aplicação da equação 4.11, Schindler et al. (1996) considera o corpo de prova em forma de disco exibido na figura 4.3. O ponto M , onde é medida a deformação ϵ_M ,

localiza-se no mesmo plano do corte, no lado oposto do disco. Analogamente ao que é exibido na figura 4.2, consideram-se duas forças opostas F atuantes na direção da reta que tangencia o ponto M, a uma distância s daquele ponto. A partir de uma solução geral exata proposta por Timoshenko & Goodier (1970), o perfil de tensão ao longo do eixo x , devido às forças F é expresso por:

$$\sigma_{yy}^F(x, s) = \frac{2F}{\pi t} \left\{ \frac{s^3}{[(D-x)^2 + s^2]^2} - \frac{2s}{D^2} \right\} \quad (4.13)$$

Inserindo-se a equação 4.13 na equação 4.11 tem-se:

$$Z(a) = -\frac{4}{\pi D^2} \int_0^a h(x, a) dx \quad (4.14)$$

Para o mesmo corpo de prova, o fator de intensidade de tensão devido a um carregamento uniforme p atuante nas superfícies de fratura é, segundo Gregory (1989):

$$K_I = 1,988 p \left[\frac{a}{(1-a/D)^3} \right]^{1/2} \quad (4.15)$$

Igualando-se a equação 4.15 com a equação 3.25, obtém-se:

$$\int_0^a h(x, a) dx = 1,988 \left[\frac{a}{(1-a/D)^3} \right]^{1/2} \quad (4.16)$$

A substituição da equação 4.16 na equação 4.14 resulta em (Schindler, 1999):

$$Z(a) = -\frac{7,952}{\pi D^2} \left[\frac{a}{(1-a/D)^3} \right]^{1/2} \quad (4.17)$$

Segundo Schindler et al. (1996), a equação 4.17, a princípio, não apresenta restrições com relação ao comprimento a do corte. Contudo, se a é muito pequeno (da ordem de 5% de D), a sensibilidade do ensaio é muito baixa. Além disso, se a razão a/D é muito grande, a espessura do corte pode produzir um efeito significativo sobre os resultados, que serão muito diferentes do caso de uma trinca de fadiga.

Para a geometria CT (figura 4.4), a função de influência proposta por Ghidini & Donne (2006) é:

$$Z(a) = -\frac{2,532}{(W-a)^{3/2}} \left[1 - \exp\left(-9,761 \frac{a}{W}\right) \right] \quad (4.18)$$

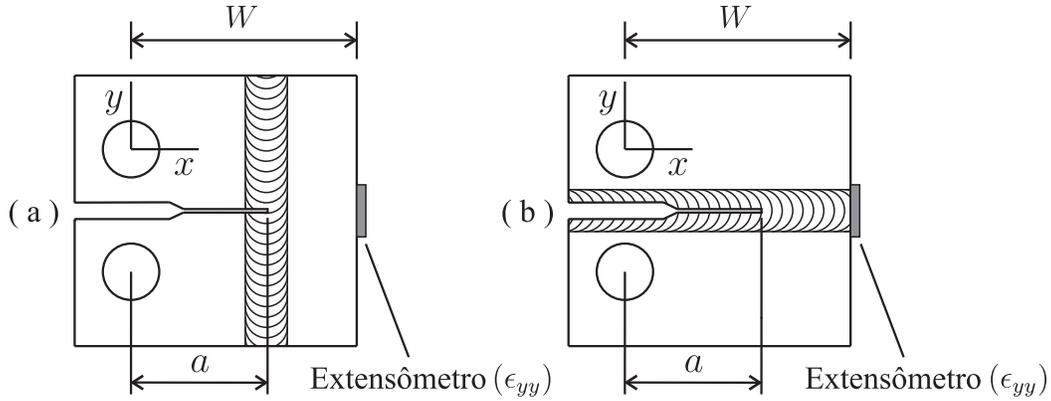


Figura 4.4: Método *cut compliance* em corpo de prova CT para medir K_I^{res} : (a) devido à tensão residual longitudinal; (b) devido à tensão residual transversal

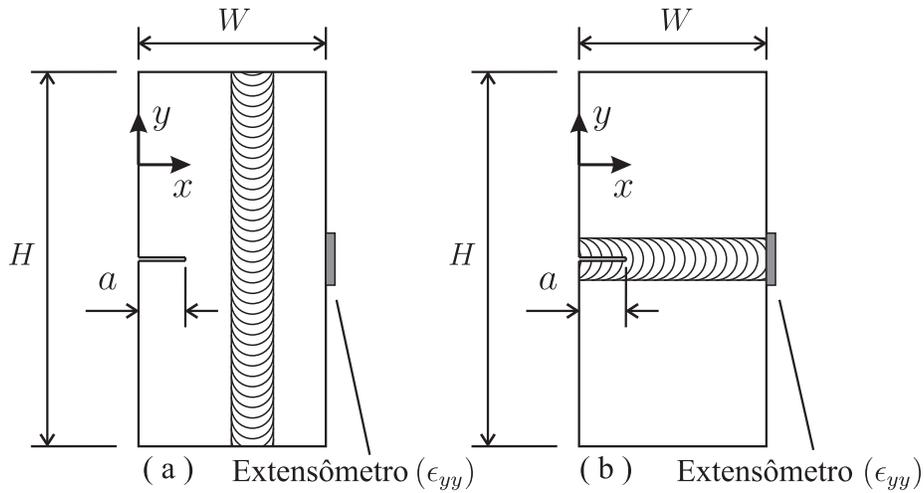


Figura 4.5: Método *cut compliance* em chapa retangular para medir K_I^{res} : (a) devido à tensão residual longitudinal; (b) devido à tensão residual transversal

No caso de uma chapa retangular com dimensões H e W tal que $1 < H/W < 2$, como mostra a figura 4.5, $Z(a)$ é dado pelas equações 4.19a e 4.19b (Schindler & Bertschinger, 1997):

• para $\frac{a}{W} \leq \left(1 - 0,4 \frac{H}{W}\right)$:

$$Z(a) = \frac{-2,532}{(W-a)^{3/2}} \left[1 - \frac{\left(\frac{a}{W} - 1 + 0,4 \frac{H}{W}\right)^2}{\left(1 - 0,4 \frac{H}{W}\right)^2} \right]^{1/2} \left[1 + \left(-3,268 + 4,597 \frac{H}{W}\right) \left(1 - 0,4 \frac{H}{W} - \frac{a}{W}\right)^2 - \left(-0,028 + 0,316 \frac{H}{W}\right) \left(1 - 0,4 \frac{H}{W} - \frac{a}{W}\right) \right] \quad (4.19a)$$

• para $\left(1 - 0,4 \frac{H}{W}\right) < \frac{a}{W} < 1$:

$$Z(a) = \frac{-2,532}{(W - a)^{3/2}} \quad (4.19b)$$

4.3 Relação entre procedimentos experimentais e análises teóricas

A figura 4.6 é um diagrama que relaciona procedimentos de análise envolvendo tensões residuais longitudinais. Assim, K_I^{res} é o fator de intensidade de tensão residual de uma trinca que se propaga perpendicularmente à solda.

No bloco D, equações de taxa de propagação são solucionadas para K_I^{res} a partir de curvas da/dN determinadas experimentalmente. A menos que os parâmetros de taxa de propagação associados ao material na região da solda sejam conhecidos, Bao & Zhang (2010) sugerem utilizar aqueles disponíveis para o metal base. Isto é equivalente a assumir a hipótese de que o processo de soldagem é responsável pela presença de tensões residuais na peça, mas não introduz alterações nas propriedades mecânicas do material. Neste sentido, o ensaio *cut compliance* é vantajoso em relação ao procedimento descrito pelo bloco D, pois baseia-se apenas em modificações dos campos de tensões e deformações da peça devido ao aumento do comprimento do corte.

No caso de uma trinca perpendicular à solda, independentemente de qual técnica experimental é empregada para determinar $K_I^{res}(a)$, o método inverso pode ser aplicado, de modo que uma curva de tensão residual longitudinal seja calculada pela montagem e inversão da matriz **B**. Os resultados podem ser empregados não apenas em análises de mecânica da fratura, mas também em outras análises estruturais onde o campo de tensões residuais longitudinais possa produzir um efeito significativo.

No caso de uma trinca que se propaga paralelamente à solda, o campo de tensões residuais transversais se rearranja de tal modo que o método inverso não pode ser aplicado. Neste caso, uma análise teórica de propagação de trinca pode ser feita a partir de K_I^{res} determinado experimentalmente, como mostram as figuras 4.7 e 4.8. No caso de trincas centrais, soluções analíticas para funções de influência $Z(a)$ não são disponíveis na literatura. Contudo, a equação 4.12 associada a análises de elementos finitos permite a obtenção de curvas $Z(a)$.

Do ponto de vista teórico, uma abordagem envolvendo *eigenstrain* (ou deformações

inelásticas) é capaz de prever o comportamento descrito pelas figuras 3.5 e 3.6. Isto será brevemente discutido na seção 5.2.

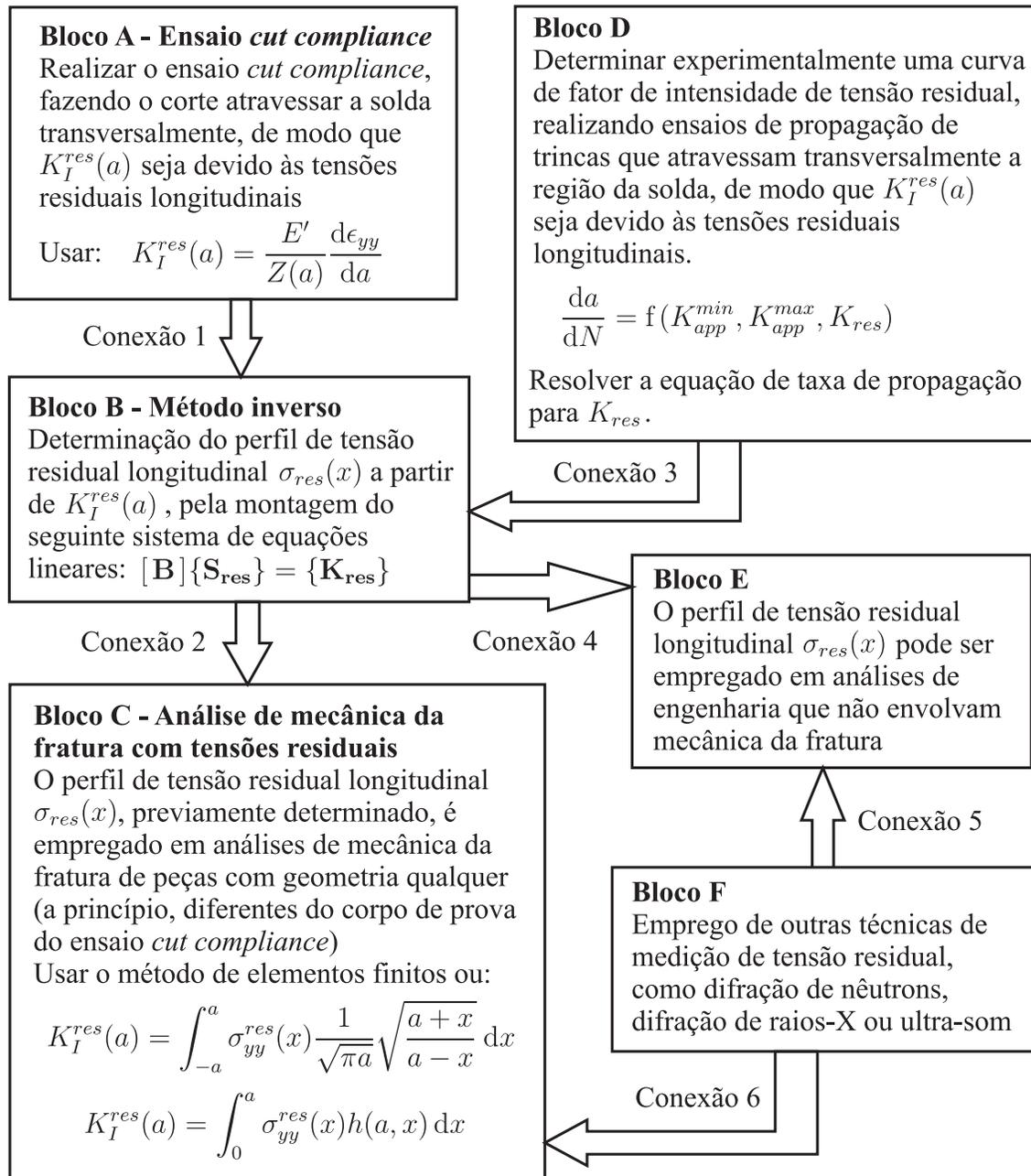


Figura 4.6: Relação entre procedimentos de análise de engenharia envolvendo tensões residuais longitudinais

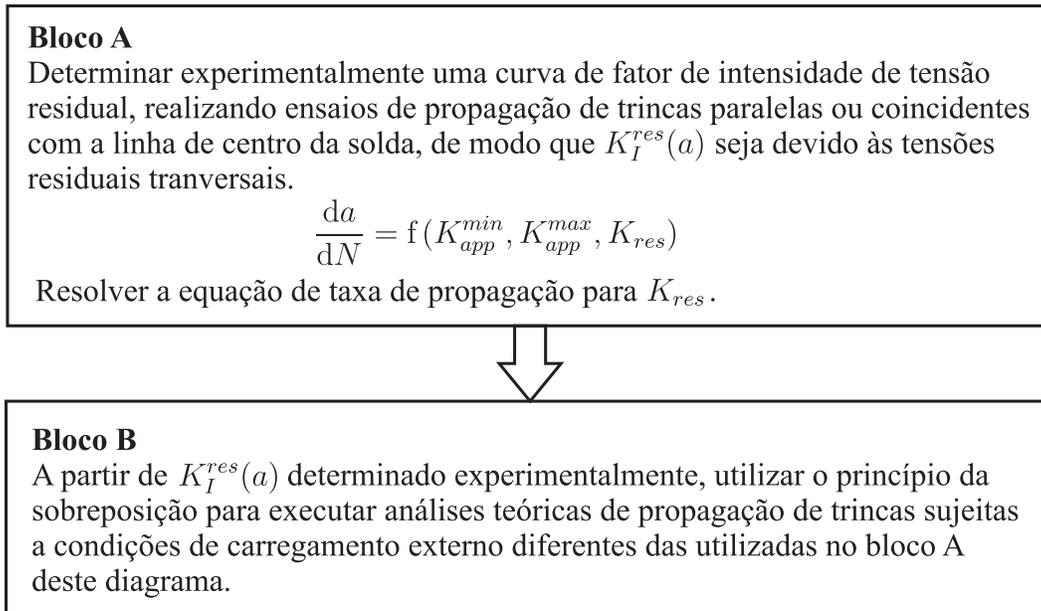


Figura 4.7: Procedimento de análise de propagação de trinca central ou lateral sob efeito de tensão residual transversal (caso das figuras 3.5 e 3.6)

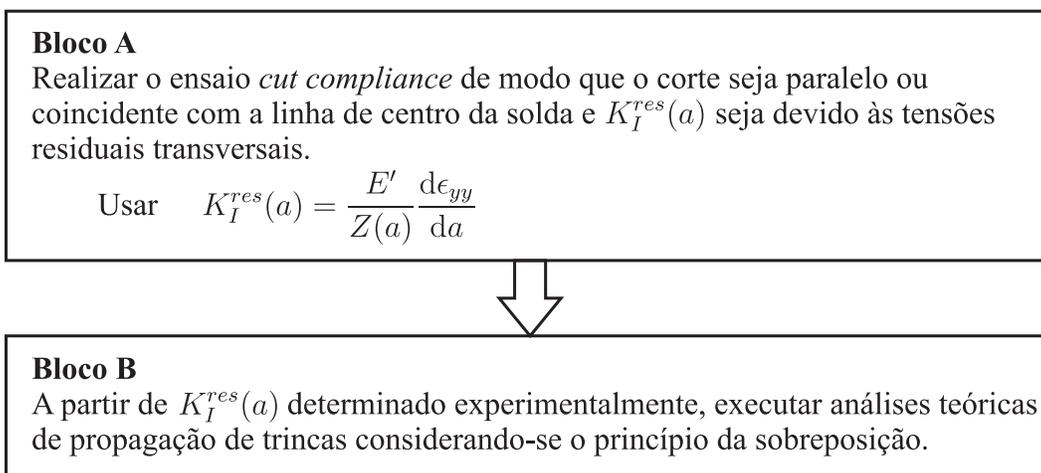


Figura 4.8: Procedimento alternativo de análise de propagação de trinca central ou lateral sob efeito de tensão residual transversal (caso das figuras 3.5 e 3.6)

5 ANÁLISES E RESULTADOS

5.1 Introdução

Esta seção visa fornecer uma visão geral dos programas criados e utilizados nas análises deste capítulo. Dois *softwares* comerciais foram utilizados: Matlab e Abaqus. O último foi concebido de tal modo que se obtenha sem grandes dificuldades valores discretos de fatores de intensidade de tensão. Contudo, se o usuário deseja obter curvas de fatores de intensidade de tensão em função do comprimento da trinca, ele deve escrever um *script* em Python para que o processo de criação de um modelo e obtenção de resultados seja automatizado. Isto foi feito para o caso de uma chapa retangular com uma trinca lateral que atravessa transversalmente a região da solda. Em seguida, o *script* foi modificado de modo que seja feita uma integração numérica da equação de Walker e da equação NASGRO a fim de obter o número de ciclos até a fratura. O referido *script* é o primeiro listado na tabela 5.1. Um programa que segue a mesma lógica, porém, utilizando expressões analíticas para os fatores de intensidade de tensão foi feito no Matlab. Tal programa é o primeiro listado na tabela 5.2.

O algoritmo utilizado nos programas supracitados foi modificado de modo que a propagação de uma trinca central pudesse ser simulada considerando-se efeitos de assimetria devido ao posicionamento da trinca em relação à solda. Utilizando-se este novo algoritmo, foram escritos o segundo *script* listado na tabela 5.1 e o segundo programa listado na tabela 5.2.

Os programas 4 e 5 da tabela 5.2 utilizam como dados de entrada dois vetores: um com valores de comprimentos de trinca e outro com valores de fatores de intensidade de tensão residual em modo I, devido a um campo de tensão residual longitudinal. Eles montam a matriz ponderadora **B** e retornam a curva de tensão residual longitudinal que deseja-se determinar.

O *script* 3 da tabela 5.1 obtém K_I^{ref} , empregando-se a integral J e ϵ^{ref} , considerando-se diferentes posicionamentos do extensômetro em relação à lateral do corpo de prova CT. Tais informações são utilizadas como dados de entrada do programa 6 da tabela 5.2, que retorna curvas correspondentes a funções de influência $Z(a)$. Estas curvas em associação com $\epsilon(a)$ a ser obtido experimentalmente devem ser utilizadas como dados de entrada do programa 7 da tabela 5.2, que

retorna uma curva de fatores de intensidade de tensão residual.

Tabela 5.1: Lista de *scripts* em Python feitos para o Abaqus.

<i>Script</i>	Descrição	Seção
1	Análise de propagação de trinca lateral em chapa retangular com tensões residuais (Figura 5.3)	5.3
2	Análise de propagação de trinca central em chapa retangular com tensões residuais (Figura 5.22)	5.4
3	Obtenção de K_I^{ref} e ϵ^{ref} em corpo de prova CT	5.6

Tabela 5.2: Lista de programas criados para o Matlab.

Programa	Descrição	Seção
1	Análise de propagação de trinca lateral em chapa retangular com tensões residuais, utilizando-se equações para calcular fatores de intensidade de tensão. (Figura 5.4)	5.3
2	Análise de propagação de trinca central em chapa retangular com tensões residuais, utilizando-se equações para calcular fatores de intensidade de tensão.	5.4
3	Interpola valores de fatores de intensidade de tensão obtidos com o Abaqus, de modo a obter artificialmente um incremento Δa menor do que o usado nas análises de elementos finitos. Em seguida, calcula o número de ciclos até a fratura. (Figura 5.7)	5.3 e 5.4.1
4	Aplicação do método inverso: calcula a matriz \mathbf{B} e resolve o sistema de equações para encontrar $\sigma_{res}(x)$, considerando-se corpos de prova retangulares com trinca lateral. (Figura 5.31, Tabelas 5.20, 5.21 e 5.22)	5.5.1
5	Idêntico ao programa anterior, para corpos de prova CT. (Figura 5.31, Tabelas 5.20 e 5.22)	5.5.2
6	Determinação de $Z(a)$ a partir de K_I^{ref} e ϵ^{ref} .	5.6
7	Obtenção de $K_I^{res}(a)$ a partir de $\epsilon_{yy}(a)$ e de $Z(a)$.	5.6

5.2 Inserção de tensões residuais em modelos de elementos finitos do Abaqus

Ao utilizar o *software* comercial de elementos finitos Abaqus, há duas maneiras de inserir um campo de tensões residuais no modelo:

1. através da sub-rotina SIGINI;
2. através da análise de dilatações térmicas devido a um campo de temperaturas não uniforme.

Tabela 5.3: Instruções em Fortran da sub-rotina SIGINI para inserir um perfil de tensão residual

```
SUBROUTINE SIGINI (SIGMA, COORDS, NTENS, NCRDS, NOEL, NPT, LAYER,  
1 KSPT, LREBAR, NAMES)  
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'  
DIMENSION SIGMA (NTENS), COORDS (NCRDS)  
CHARACTER NAMES (2) *80  
  
SigmaMa=100e6  
c=0.03  
Xpico=0.130  
fator1=SigmaMa*(2.71828182**(-0.5*((COORDS(1)-Xpico)/c)**2))  
fator2=(1-((COORDS(1)-Xpico)/c)**2)  
SIGMA(2)=fator1*fator2  
  
RETURN  
END
```

Se a sub-rotina SIGINI é utilizada, o usuário deve criar um arquivo em Fortran contendo uma função que define um perfil de tensão residual. A tabela 5.3 exibe um exemplo completo das instruções que devem estar dentro do referido arquivo. A equação 3.10a é empregada. COORDS (1) se refere à coordenada x e SIGMA (2) equivale a σ_{yy} .

Se o usuário deseja inserir dois ou mais campos de tensão residual no modelo, as instruções do arquivo em Fortran devem ser semelhantes às mostradas na tabela 5.4.

O usuário deve gerar o arquivo de *input* e modificá-lo, adicionando os *keywords* exibidos na tabela 5.5. Se `unbalanced stress=ramp`, o balanço de forças é resolvido linearmente ao longo de um *step*. Se `unbalanced stress=step`, o balanço de forças é obtido logo no primeiro incremento. Se nada é colocado após a palavra `user`, o Abaqus considera `unbalanced stress=ramp` como *default*. Ou seja, ao utilizar a sub-rotina SIGINI, o balanço de forças sempre

é obtido após a execução do *Job*, mesmo que o usuário tenha inserido no arquivo em Fortran uma função que não obedeça a equação 3.10d. Além disso, são obtidos os campos de deformações elásticas $\epsilon_{ij}^{res}(x, y)$ associados aos campos de tensão residual $\sigma_{ij}^{res}(x, y)$. Deformações inelásticas ϵ_{ij}^* não estão presentes no modelo quando se utiliza a sub-rotina SIGINI.

Tabela 5.4: Instruções em Fortran da sub-rotina SIGINI para inserir dois perfis de tensão residual

```

c  Perfil da esquerda
      IF (COORDS (1)>0.050.AND.COORDS (1)<0.225) THEN
      SigmaMa=100e6
      c=0.014
      Xpico=0.155
      fator1=SigmaMa*(2.71828182**(-0.5*((COORDS (1)-Xpico)/c)**2))
      fator2=(1-((COORDS (1)-Xpico)/c)**2)
      SIGMA(2)=fator1*fator2
      ENDIF
c  Perfil da direita
      IF (COORDS (1)>0.225.AND.COORDS (1)<0.400) THEN
      SigmaMa=100e6
      c=0.014
      Xpico=0.295
      fator1=SigmaMa*(2.71828182**(-0.5*((COORDS (1)-Xpico)/c)**2))
      fator2=(1-((COORDS (1)-Xpico)/c)**2)
      SIGMA(2)=fator1*fator2
      ENDIF

```

Tabela 5.5: *Keywords* que devem ser inseridos pelo usuário no arquivo de input do Abaqus

*Initial conditions, type=stress, user, unbalanced stress = ramp
*Initial conditions, type=stress, user, unbalanced stress = step

Como será demonstrado nas próximas seções, tal sub-rotina do Abaqus é capaz de modelar muito bem o efeito de tensões residuais longitudinais sobre o fator de intensidade de tensões em modo I de abertura de trincas que se propagam perpendicularmente à solda. Porém, não é adequada na modelagem de tensões residuais transversais e não prevê o comportamento descrito pelas figuras 3.5 e 3.6 sem que o arquivo em Fortran seja modificado pelo usuário. Esta é a limitação mais importante da sub-rotina SIGINI.

A segunda maneira de inserir um campo de tensões residuais no modelo de elementos finitos do Abaqus é impor um campo previamente conhecido de deformações inelásticas $\epsilon^*(x, y)$ com um campo de temperaturas não uniforme e a consequente dilatação não uniforme da peça. Como mencionado na seção 3.1, na presença de deformações inelásticas, a compatibilidade de deslocamentos exige que haja deformações elásticas e, conseqüentemente, tensões. Este fenômeno se verifica independentemente se o campo de deformações inelásticas é devido a deformações plásticas localizadas, gradientes de temperatura, transformações de fase ou uma combinação destes três fatores. Portanto, um campo de tensões residuais pode ser simulado em um modelo de elementos finitos termo-mecânico, utilizando-se gradientes de temperaturas, mesmo que a causa das tensões residuais no componente real seja devido a deformações plásticas ou transformações de fase. Estes conceitos são defendidos por Hill (1996).

5.3 Propagação de trinca lateral em chapa retangular

5.3.1 Caso 1

Considera-se uma chapa retangular de largura $W = 1,5$ m e altura $H = 3,0$ m, com uma trinca lateral de comprimento inicial $a = 0,015$ m (figura 5.1). A chapa apresenta um campo de tensões residuais longitudinais $\sigma_{yy}^{res}(x)$ que pode ser encontrado em Ge et al. (2006). Este perfil é modelado utilizando-se a equação 3.10a, com $c = 0,03$ m, $x_{pico} = 0,130$ m e $\sigma_{yy}^{max} = 100$ MPa. A figura 5.2 exibe a curva resultante.

A chapa é sujeita a um carregamento externo σ_{app} que atua nas superfícies superior e inferior, de modo a abrir a trinca em modo I. O carregamento oscila entre 30 MPa e 60 MPa, fazendo a trinca se propagar atravessando transversalmente a região da solda.

O material considerado é a liga de alumínio 2024-T3, cujo coeficiente de Poisson e módulo de elasticidade são, respectivamente, 0,33 e 73,1 GPa, segundo o site Matweb (2011). A espessura considerada é 2,54 mm, que corresponde a um valor de tenacidade à fratura de 81,7 MPa·m^{1/2} (Forman et al., 2005).

Deseja-se calcular o número de ciclos que a peça em questão pode resistir com e sem tensões residuais. Para alcançar tal objetivo, empregando fatores de intensidade de tensão obtidos pelo método de elementos finitos, implementa-se um *script* para o Abaqus, em linguagem Python, que obedece o fluxograma da figura 5.3. Em suma, trata-se de uma integração numérica da

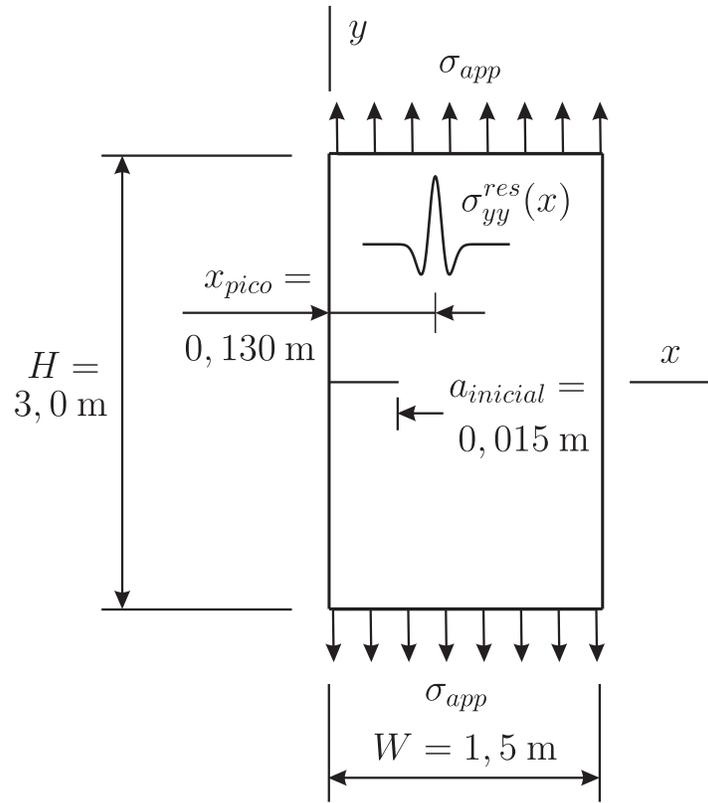


Figura 5.1: Dimensões do corpo de prova considerado

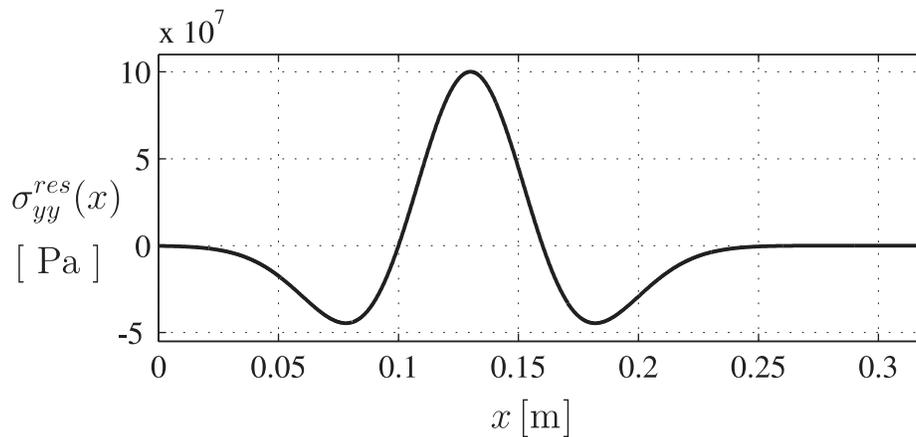


Figura 5.2: Curva correspondente à equação 3.10a com $c = 0,03 \text{ m}$, $x_{pico} = 0,130 \text{ m}$ e $\sigma_{yy}^{max} = 100 \text{ MPa}$

equação de Walker, resolvendo-a para N , o número de ciclos. Na primeira iteração, cria-se uma malha específica para o comprimento de trinca $a = 0,015 \text{ m}$. No *Step-1* do Abaqus aplica-se a sub-rotina SIGINI para obter o fator de intensidade de tensão residual K_{res} correspondente àquele comprimento de trinca. No *Step-2*, a sub-rotina SIGINI continua sendo utilizada e aplica-

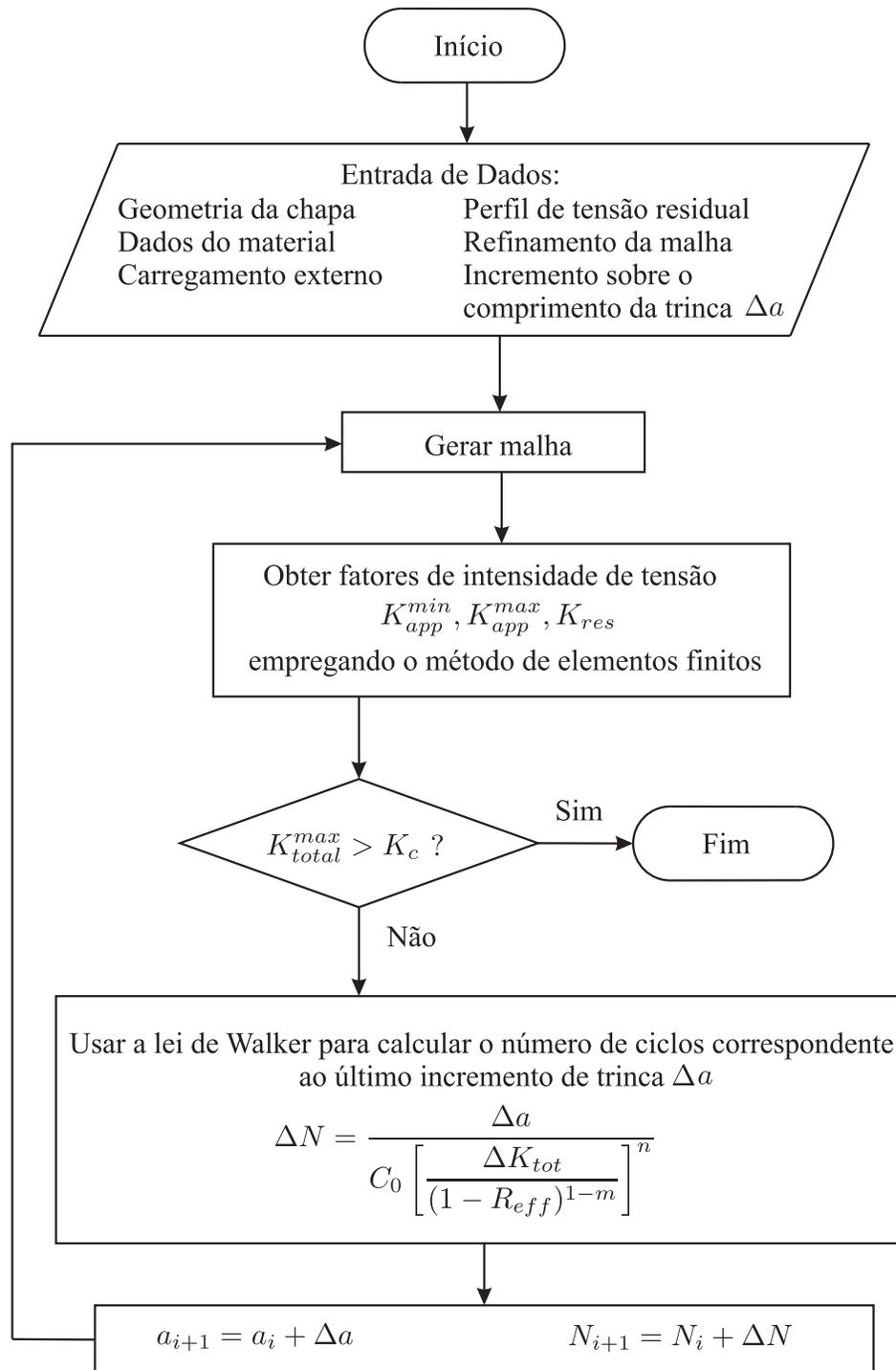


Figura 5.3: Fluxograma do *script* em Python para o Abaqus para obtenção de fatores de intensidade de tensão e cálculo do número de ciclos até a fratura

se o carregamento externo σ_{app}^{min} ao modelo. Com isto, obtém-se K_{tot}^{min} , que vale $K_{app}^{min} + K_{res}$. K_{app}^{max} é o dobro de K_{app}^{min} , visto que σ_{app}^{max} é o dobro de σ_{app}^{min} . Conhecendo-se todos estes valores

de fatores de intensidade de tensão, é possível aplicar a equação 3.44 para encontrar a taxa de propagação da trinca. Considerando-se um incremento Δa sobre o comprimento da trinca, calcula-se o correspondente aumento ΔN sobre o número de ciclos. Na segunda iteração, o comprimento da trinca é $a = 0,015 + \Delta a$ m e todo o procedimento descrito é executado novamente e assim sucessivamente, até que K_{tot}^{max} atinja o valor da tenacidade à fratura K_c . O número final de ciclos é a somatória de todos os valores de ΔN obtidos em cada iteração.

Os parâmetros da lei de Walker que Dowling (1999) sugere para o alumínio 2024-T3 são $C_0 = 4,0953 \cdot 10^{-33} \text{ Pa}^{-n} \text{ m}^{1-\frac{n}{2}}$, $n = 3,59$ e $m^+ = 0,680$. Considerando-se tais parâmetros e utilizando-se o *script* em Python correspondente ao fluxograma da figura 5.3, com $\Delta a = 1$ mm, são obtidos os números de ciclos apresentados nas células C1 e D1 da tabela 5.6.

Tabela 5.6: Para o caso 1, número de ciclos calculado pela integração numérica da equação de Walker, com constantes encontradas em Dowling (1999).

	Número de ciclos até a fratura				
	equações 2.39 e 3.25		elementos finitos		
Incremento Δa [m]	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	Linha
0,001	418142	456893	422958	464445	1
0,0001	406656	445299	412067	452719	2
0,00001	405529	444161	410996	451573	3
0,000001	405417	444048	410889	451459	4
Coluna	A	B	C	D	

Deseja-se verificar se o incremento Δa de 1 mm sobre o comprimento da trinca é suficiente para obter bons resultados ou se é necessário reduzi-lo significativamente. Cada iteração do fluxograma da figura 5.3 corresponde a uma malha de aproximadamente 90000 elementos. Assim, em termos de esforço computacional é inviável reduzir significativamente o valor de Δa . Para resolver este problema, implementa-se no Matlab o fluxograma da figura 5.4, que substitui a análise de elementos finitos pelas equações 2.39 e 3.25 para obter fatores de intensidade de tensão. Considera-se a função $F(a/W)$ da equação 2.41 e a função ponderadora $h(x, a)$ da equação 3.35. Embora estas funções sejam para chapas de altura infinita, as figuras 5.5 e 5.6 mostram que há concordância entre os resultados gerados pelas análises de elementos finitos e pelas equações mencionadas.

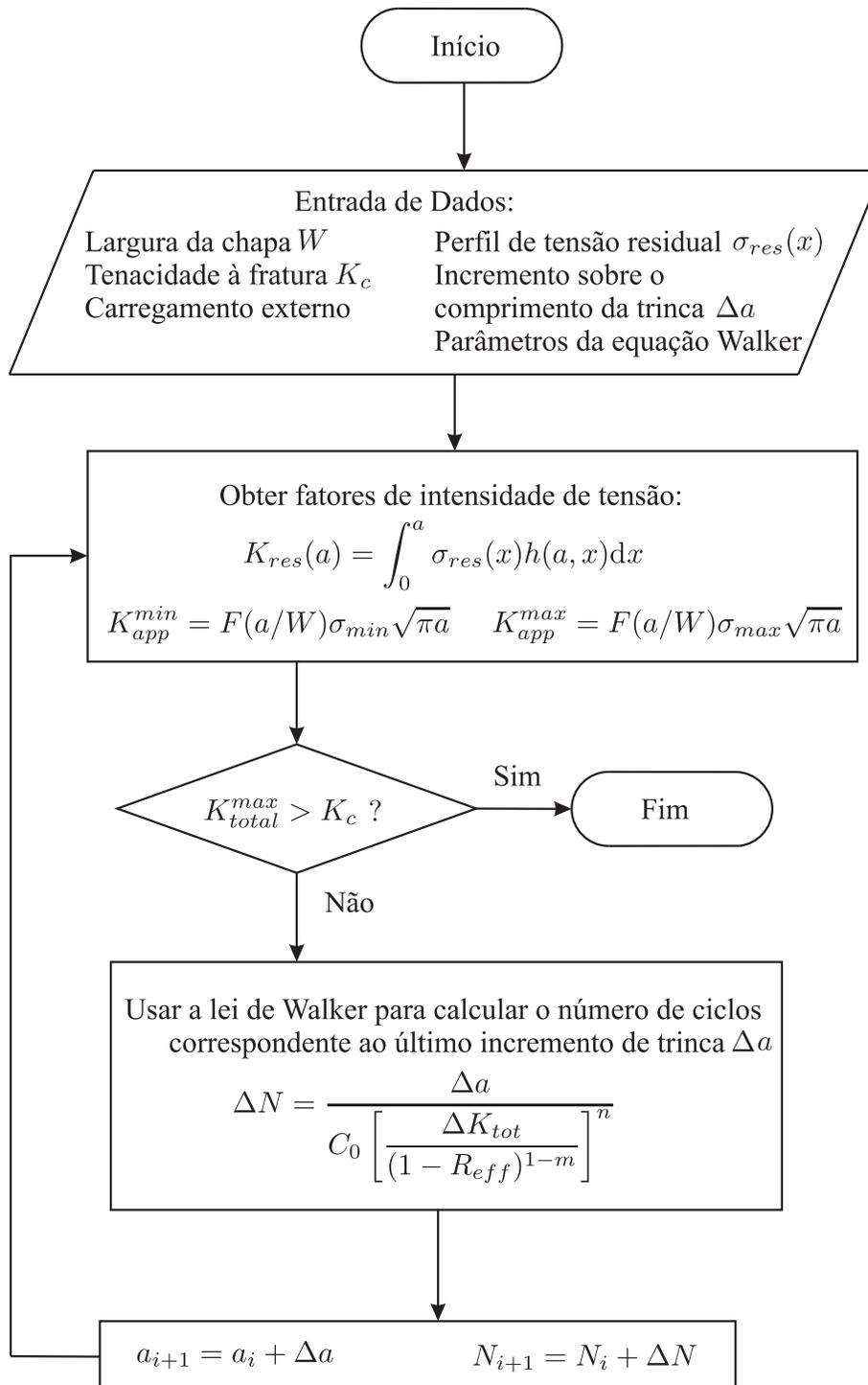


Figura 5.4: Fluxograma do programa feito no Matlab para obtenção de fatores de intensidade de tensão e cálculo do número de ciclos até a fratura

O programa em Matlab, correspondente ao fluxograma da figura 5.4 gerou os resultados das colunas A e B da tabela 5.6. Deseja-se preencher as células C2, C3, C4, D2, D3 e D4 da

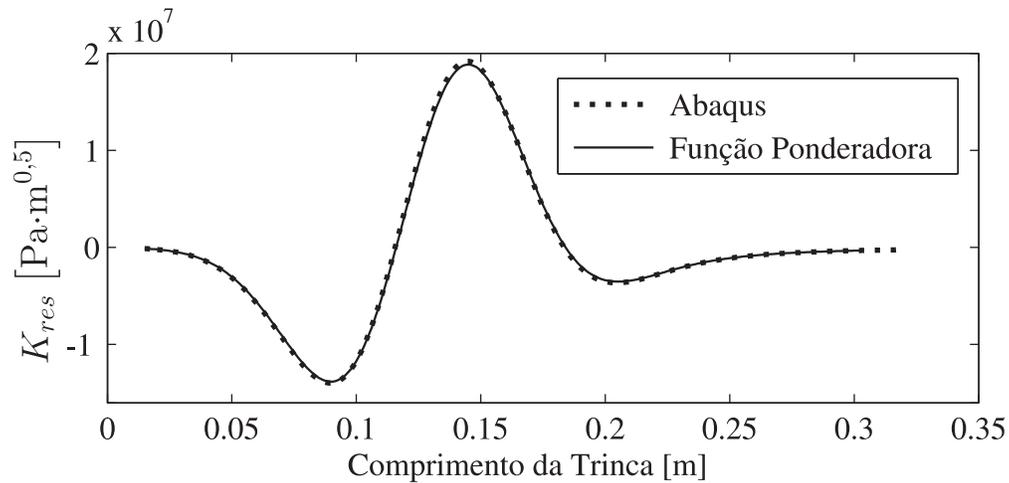


Figura 5.5: Fator de intensidade de tensão residual em função do comprimento da trinca

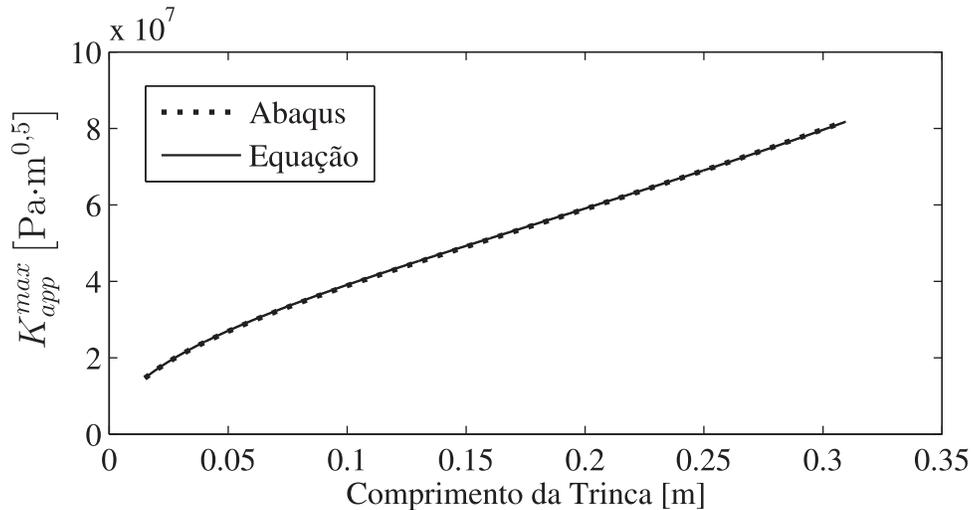


Figura 5.6: Fator de intensidade de tensão devido ao carregamento externo máximo em função do comprimento da trinca

mesma tabela. Devido a questões de esforço computacional, já discutidas anteriormente nesta seção, implementa-se o fluxograma da figura 5.7, que tem por objetivo aumentar artificialmente o número de pontos das curvas das figuras 5.5 e 5.6, correspondentes às análises de elementos finitos. Os pontos que aparecem nas referidas curvas são apenas uma representação gráfica e não refletem o número de pontos analisados, que é em torno de 300. Este aumento artificial do número de pontos é obtido por meio de interpolação quadrática a cada três pontos previamente conhecidos. O novo incremento sobre o comprimento da trinca Δa_{novo} é especificado no programa feito para o Matlab e vale o incremento Δa utilizado no *script* em Python para o Abaqus, dividido por dez elevado a

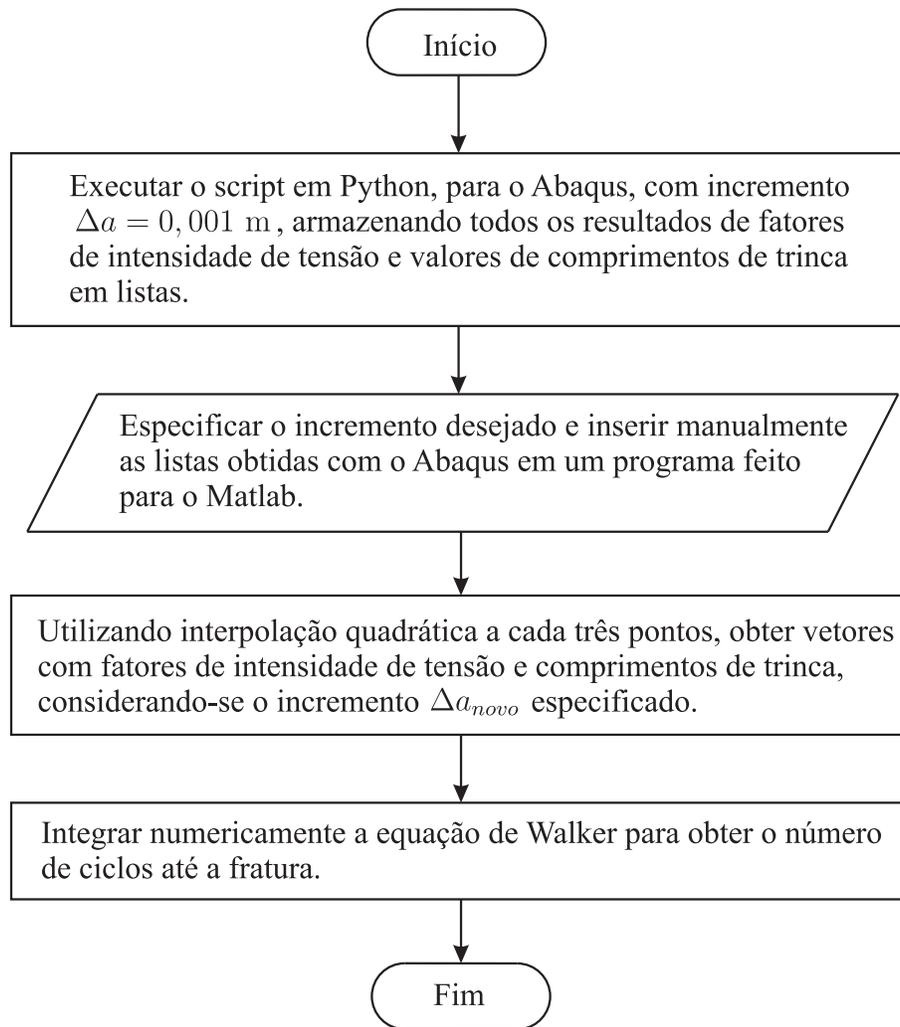


Figura 5.7: Procedimento para obter o número de ciclos até a fratura, utilizando análises de elementos finitos e um incremento Δa_{novo} obtido artificialmente.

um número inteiro.

A figura 5.8 mostra que a tenacidade à fratura sob tensão plana é alcançada quase no mesmo comprimento de trinca para ambos os casos: com e sem tensão residual. Seria visivelmente diferente se o corpo de prova fosse espesso e o estado de deformação plana fosse considerado.

A figura 5.9 mostra o número de ciclos de carregamento em função do comprimento da trinca para os casos com e sem tensões residuais. Para todo valor de comprimento de trinca, o número de ciclos é maior no caso com tensão residual. Em outras palavras, as duas curvas não se cruzam. Isto sugere que, para o caso analisado, a parte compressiva do campo de tensão residual produz um efeito mais importante sobre a vida residual em fadiga do que a parte trativa do campo de tensão

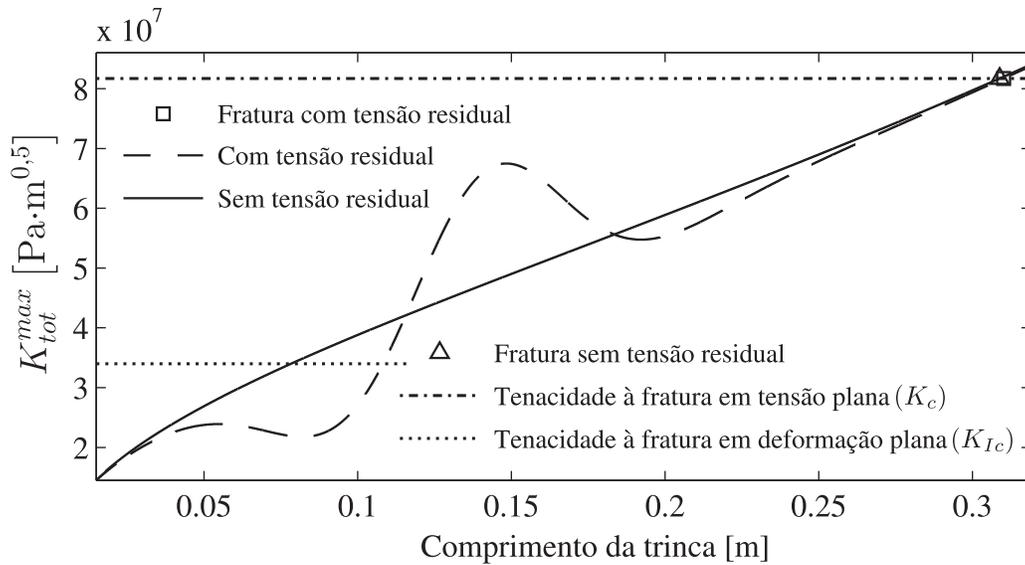


Figura 5.8: Fator de intensidade de tensão total máximo (K_{tot}^{max}) em função do comprimento da trinca

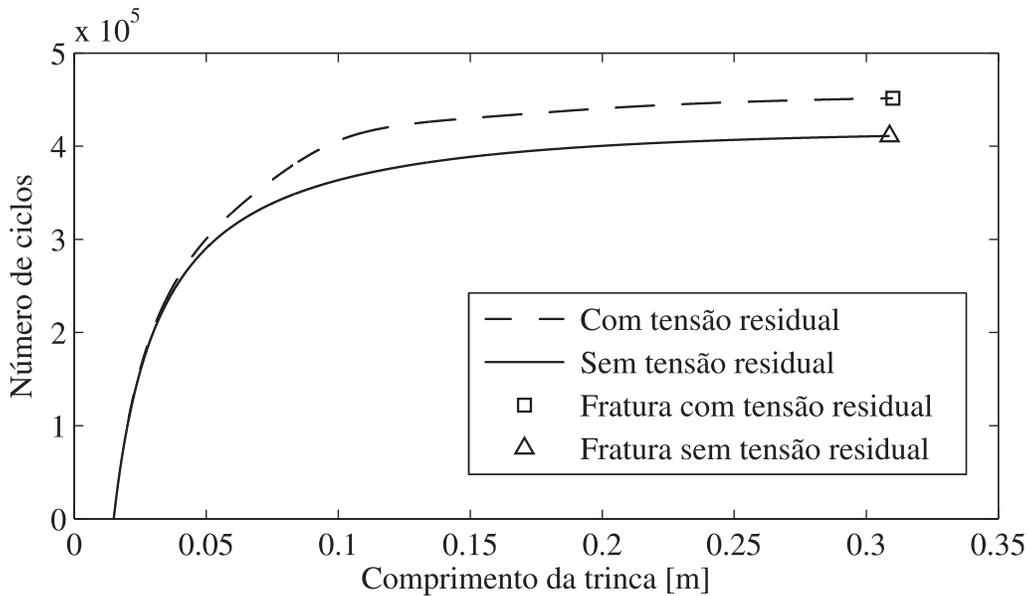


Figura 5.9: Número de ciclos de carregamento em função do comprimento da trinca

residual.

Antes que o comprimento da trinca alcance 0,116 m, a trinca está (predominantemente) sob o efeito da parte compressiva do campo de tensões residuais. Assim, nesta região, a taxa de propagação com tensão residual é menor do que no caso sem tensão residual (ver figura 5.10). Visto que a taxa de propagação ainda é baixa, os valores de ΔN encontrados (figura 5.11) são altos

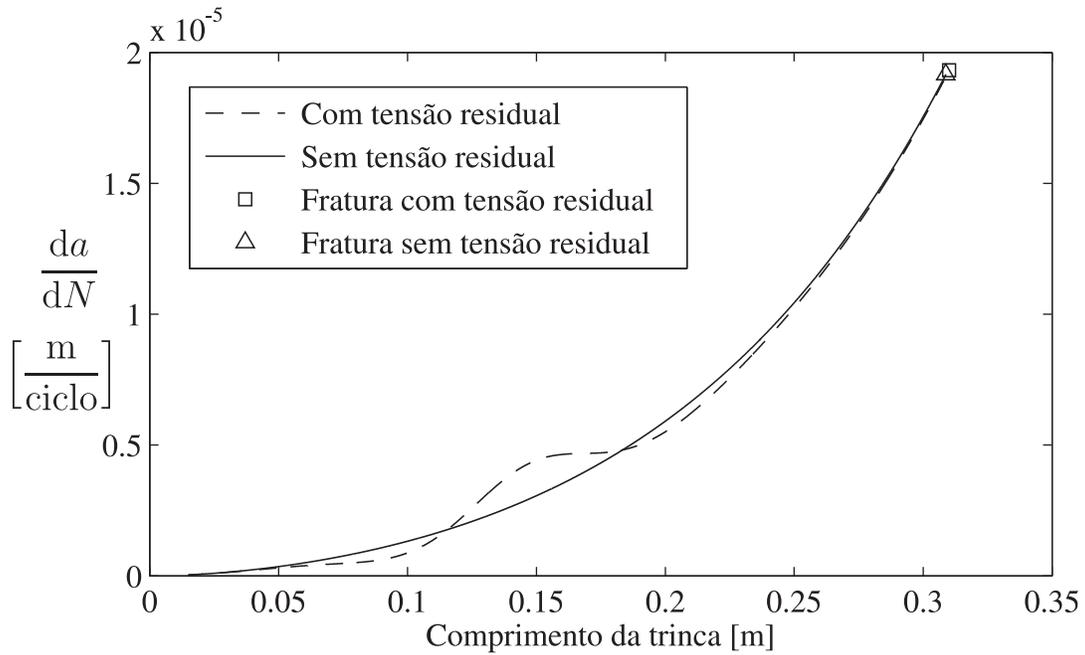


Figura 5.10: Taxa de propagação em função do comprimento da trinca

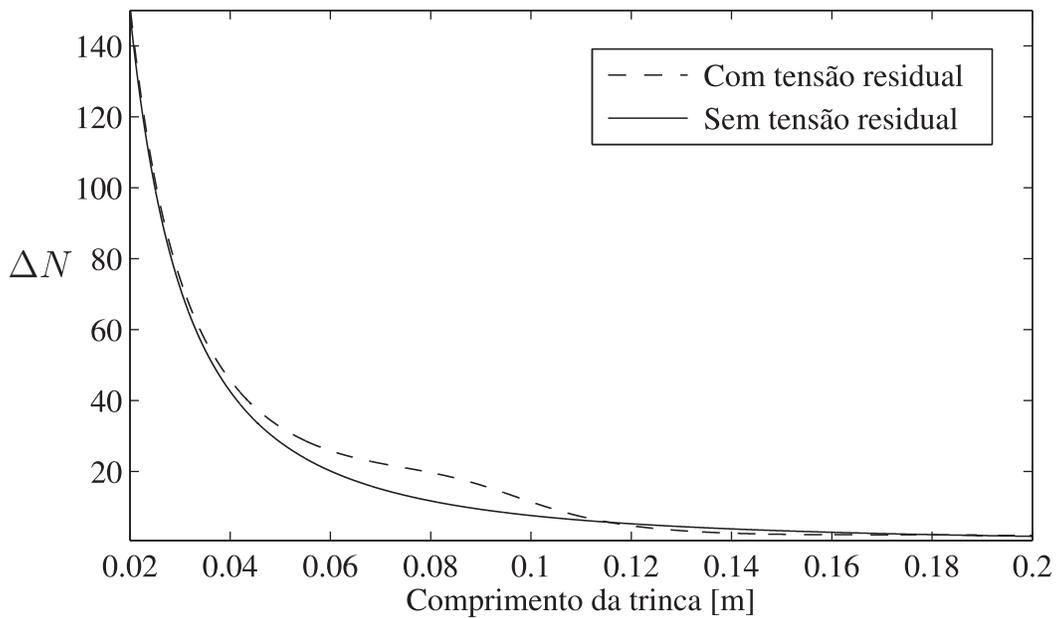


Figura 5.11: ΔN em função do comprimento da trinca

e qualquer mudança sobre a taxa de propagação causa grandes mudanças sobre ΔN . Como cada valor de ΔN é adicionado aos resultados anteriores para encontrar o número total de ciclos até que o comprimento da trinca alcance certo valor, o efeito final é um grande aumento sobre o número de ciclos até que o comprimento da trinca alcance 0,116 m.

Quando o comprimento da trinca está entre 0,116 m e 0,183 m, a taxa de propagação na presença de tensões residuais é mais alto do que na ausência. Aqui, os valores da taxa de propagação já são altos e os valores de ΔN são baixos. Conseqüentemente, após o comprimento da trinca ter ultrapassado 0,116 m, mudanças sobre a taxa de propagação não causam mudanças significativas sobre ΔN , nem sobre o número final de ciclos.

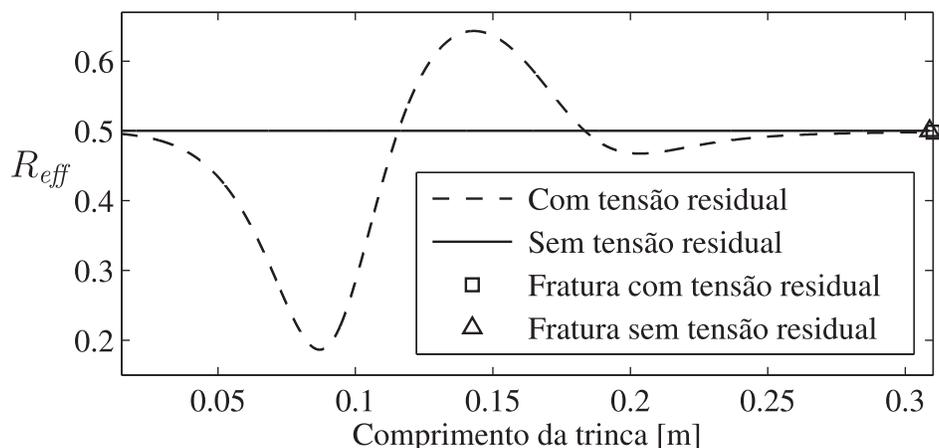


Figura 5.12: Razão de tensão efetiva em função do comprimento da trinca

A figura 5.12, mostra as mudanças da razão de tensão devido à presença de tensões residuais. Visto que a razão de tensão muda devido às tensões residuais, a taxa de propagação também muda.

Tabela 5.7: Para o caso 1, número de ciclos calculado pela integração numérica da equação de Walker, com constantes encontradas em Forman et al. (2005).

Incremento Δa [m]	Número de ciclos até a fratura				Linha
	equações 2.39 e 3.25		elementos finitos		
	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	
0,001	387773	430577	392612	437531	1
0,0001	378567	421299	383236	428140	2
0,00001	377662	420385	382324	427224	3
0,000001	377572	420294	382233	427132	4
Coluna	A	B	C	D	

A tabela 5.7 exhibe os resultados de número de ciclos até fratura, desta vez considerando os dados da equação de Walker da tabela 2.1, referentes à orientação L-T, que podem ser encontrados

em Forman et al. (2005). A tabela 5.8 exibe os resultados da análise feita utilizando a equação NASGRO.

Tabela 5.8: Para o caso 1, número de ciclos calculado pela integração numérica da equação NASGRO, com constantes encontradas em Forman et al. (2005).

	Número de ciclos até a fratura				Linha
	equações 2.39 e 3.25		elementos finitos		
Incremento Δa [m]	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	
0,001	221764	247025	224825	251575	1
0,0001	215543	240760	218564	245266	2
0,00001	214933	240145	217950	244647	3
0,000001	214872	240084	217888	244585	4
Coluna	A	B	C	D	

5.3.2 Caso 2: Influência de c

Deseja-se demonstrar que a vida residual em fadiga de um componente com tensões residuais e uma trinca depende da distância que esta se nucleia em relação à região do campo de tensões residuais. O campo de tensão residual do caso 1, isto é, da sub-seção anterior, não serve para este estudo pois a propagação instável da trinca ocorre imediatamente após a sua ponta ter atravessado completamente o campo de tensão residual, mesmo que este se localize muito próximo ao ponto de nucleação da trinca. Portanto, é necessário executar análises com um campo de tensão residual mais estreito, isto é, mais concentrado. O caso 2 é idêntico ao caso 1, porém, considerando-se o parâmetro c , da equação 3.10a, igual a 0,012 m ao invés de 0,030 m.

As tabelas 5.9, 5.10 e 5.11 mostram que o campo de tensões residuais do caso 2 produz um efeito desprezível sobre a vida residual em fadiga da peça. Conforme ficará claro com os resultados do caso 3, o campo de tensão residual do caso 2 produz pouco efeito sobre a vida residual em fadiga da peça não apenas por ser mais estreito, mas principalmente por estar mais distante do ponto de nucleação da trinca.

Tabela 5.9: Para o caso 2, número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Dowling (1999).

	Número de ciclos até a fratura				Linha
	equações 2.39 e 3.25		elementos finitos		
Incremento Δa [m]	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	
0,001	418174	419800	422955	424629	1
0,0001	406661	408293	412064	413799	2
0,00001	405532	407162	410993	412733	3
0,000001	405419	407050	410886	412626	4
Coluna	A	B	C	D	

Tabela 5.10: Para o caso 2, número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Forman et al. (2005).

	Número de ciclos até a fratura				Linha
	equações 2.39 e 3.25		elementos finitos		
Incremento Δa [m]	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	
0,001	387773	389731	392613	394701	1
0,0001	378567	380533	383224	385312	2
0,00001	377662	379626	382385	384479	3
0,000001	377572	379536	382302	384396	4
Coluna	A	B	C	D	

Tabela 5.11: Para o caso 2, número de ciclos até a fratura pela equação NASGRO.

	Número de ciclos até a fratura				Linha
	equações 2.39 e 3.25		elementos finitos		
Incremento Δa [m]	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	
0,001	221764	222816	224872	225995	1
0,0001	215543	216596	218572	219691	2
0,00001	214933	215985	217991	219113	3
0,000001	214872	215924	217933	219056	4
Coluna	A	B	C	D	

5.3.3 Caso 3: Influência de x_{pico}

O caso 3 é idêntico ao caso 2, considerando-se x_{pico} igual a 0,065 m ao invés de 0,130 m e mantendo-se c igual a 0,012 m.

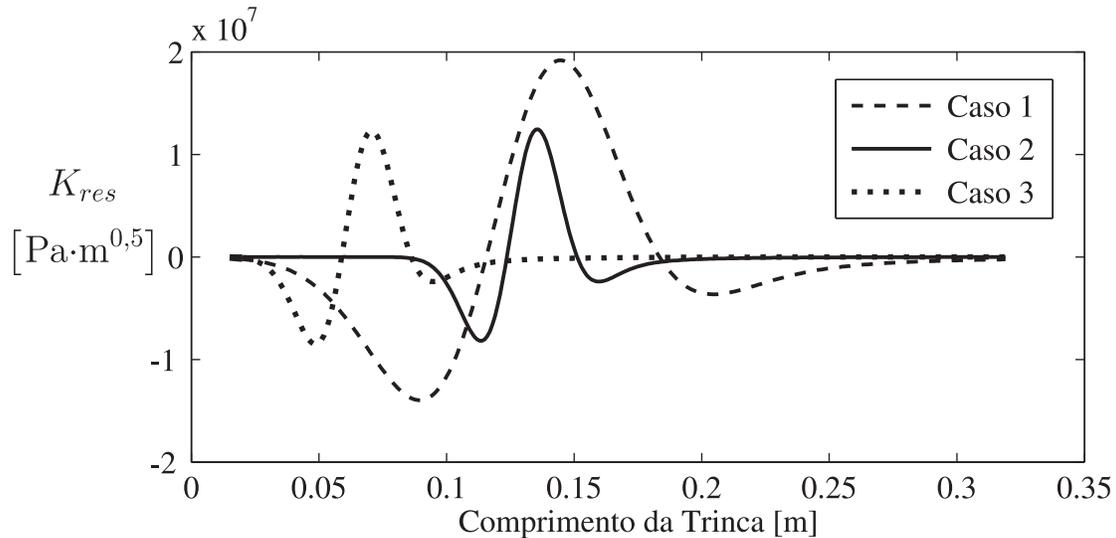


Figura 5.13: K_{res} em função do comprimento da trinca. Ambas as curvas são resultantes de análises de elementos finitos.

A figura 5.13 mostra as curvas de K_{res} em função do comprimento da trinca, para os casos 1, 2 e 3. Analisando-se apenas os casos 1 e 2, nota-se que a redução da largura do perfil de tensão residual faz não apenas a largura da curva de K_{res} diminuir, mas também sua amplitude. Entre os casos 2 e 3 não ocorre mudanças significativas de K_{res} em termos de largura da curva e de amplitude.

Os resultados de vida residual em fadiga do caso 3 são exibidos nas tabelas 5.12, 5.13 e 5.14. A comparação dos resultados dos casos 2 e 3 sugere que o efeito do campo de tensões residuais é amplificado quando este se encontra em uma posição onde a trinca ainda é pequena. Em outras palavras, o efeito é maior quando a trinca nucleia-se nas proximidades da solda. As explicações feitas com base nos resultados do caso 1 podem ser estendidas para explicar também os casos 2 e 3.

No caso 2, no momento em que a ponta da trinca finalmente atinge o campo de tensão residual, a taxa de propagação já é grande e os valores de ΔN são baixos. A maior parte do número de ciclos que a peça pode resistir se dá antes que a ponta da trinca encontre a região da solda.

O caso 3 é similar ao caso 1, pois a trinca encontra o campo de tensões residuais assim que a

Tabela 5.12: Para o caso 3, número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Dowling (1999).

	Número de ciclos até a fratura				Linha
	equações 2.39 e 3.25		elementos finitos		
Incremento Δa [m]	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	
0,001	418174	444578	422959	450800	1
0,0001	406661	433047	412067	439932	2
0,00001	405532	431917	410996	438863	3
0,000001	405419	431805	410889	438757	4
Coluna	A	B	C	D	

Tabela 5.13: Para o caso 3, número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Forman et al. (2005).

	Número de ciclos até a fratura				Linha
	equações 2.39 e 3.25		elementos finitos		
Incremento Δa [m]	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	
0,001	387773	414919	391722	420310	1
0,0001	378567	405697	383227	411848	2
0,00001	377662	404793	382388	411014	3
0,000001	377572	404703	382305	410931	4
Coluna	A	B	C	D	

Tabela 5.14: Para o caso 3, número de ciclos até a fratura pela equação NASGRO.

	Número de ciclos até a fratura				Linha
	equações 2.39 e 3.25		elementos finitos		
Incremento Δa [m]	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	
0,001	221764	237253	224498	240930	1
0,0001	215543	231025	218574	235027	2
0,00001	214933	230414	217993	234447	3
0,000001	214872	230353	217935	234389	4
Coluna	A	B	C	D	

propagação se inicia. Visto que a ponta da trinca se submete primeiro à parte compressiva do campo de tensão residual e depois à parte em tração, a peça soldada suporta maior número de ciclos do que a mesma peça feita apenas do material base.

5.4 Propagação de trinca central em chapa retangular

Uma chapa retangular com as mesmas dimensões consideradas na seção 5.3 é utilizada para as análises de propagação de uma trinca central através de um campo de tensão residual longitudinal. O perfil de tensão considerado é o mesmo da sub-seção 5.3.1. Não há modificações com relação ao carregamento externo, que oscila entre 30 e 60 MPa.

Considerando-se que a origem do eixo x encontra-se na metade da largura da chapa, define-se a_e como a distância entre a origem e a ponta esquerda da trinca e a_d como a distância entre a origem e a ponta direita da trinca. O valor inicial de a_e e a_d , considerado nas análises é 0,007 m.

O problema resume-se, portanto, às informações exibidas na figura 5.14.

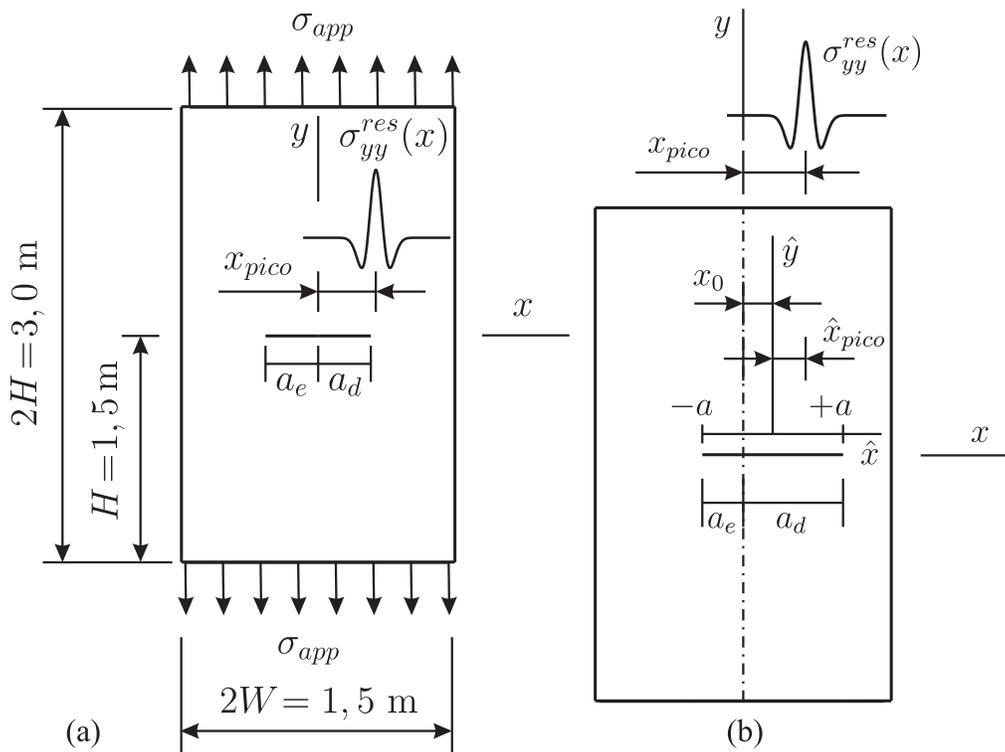


Figura 5.14: (a) Dimensões do corpo de prova soldado por FSW, com trinca central (b) Sistema de coordenadas adotado nas análises do caso da seção 5.4.2

5.4.1 Caso 1: trinca nucleia-se na parte positiva do campo de tensão residual

O primeiro caso analisado considera $x_{pico} = 0$, ou seja, o perfil de tensão residual localiza-se no centro da chapa, onde nucleia-se a trinca. É um caso importante, visto que é mais provável que uma trinca se nucleie na região em que o campo de tensão residual é de tração.

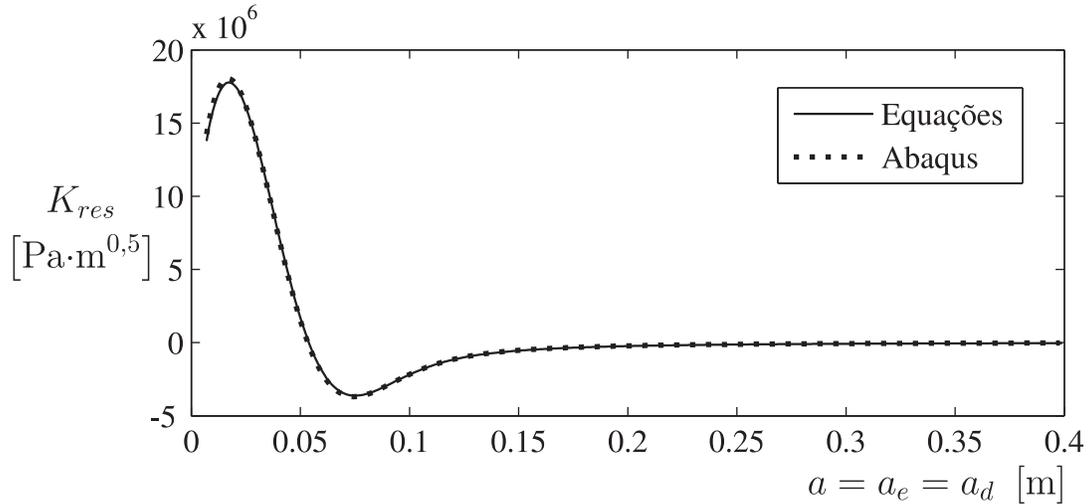


Figura 5.15: Comparação de K_{res} calculado com o Abaqus e com a equação 3.15

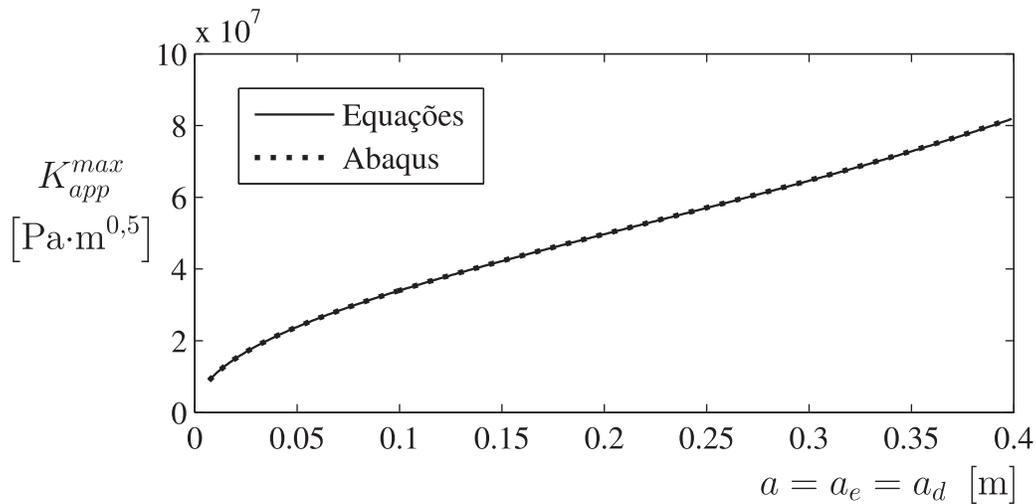


Figura 5.16: Comparação de K_{app}^{max} calculado com o Abaqus e com a equação 2.40

Devido à simetria da peça, as funções ponderadoras das equações 3.33 e 3.34 poderiam ser utilizadas para implementar o fluxograma da figura 5.4. No entanto, utiliza-se a equação 3.15, que fornece valores de fatores de intensidade de tensão residual com menor desvio em relação aos

resultados obtidos pelo método de elementos finitos. As curvas correspondentes aos dois métodos de análise são exibidas na figura 5.15.

Na figura 5.16, verifica-se a acuracidade da função $F(a/W)$ da equação 2.40, comparando-se K_{app}^{max} obtido pelo método de elementos finitos com os valores resultantes da equação 2.39.

Tabela 5.15: Número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Dowling (1999).

	Número de ciclos até a fratura				
	equações 2.39, 2.40 e 3.15		elementos finitos		
Incremento Δa [m]	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	Linha
0,001	1321938	678075	1317461	670977	1
0,0001	1251456	653999	1248263	648707	2
0,00001	1244695	651688	1241622	646568	3
0,000001	1244022	651458	1240961	646355	4
Coluna	A	B	C	D	

Tabela 5.16: Número de ciclos até a fratura pela equação de Walker, com constantes encontradas em Forman et al. (2005).

	Número de ciclos até a fratura				
	equações 2.39, 2.40 e 3.15		elementos finitos		
Incremento Δa [m]	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	Linha
0,001	1067935	563809	1064182	558419	1
0,0001	1020026	548903	1017548	545176	2
0,00001	1015417	547469	1013056	543900	3
0,000001	1014957	547326	1012608	543773	4
Coluna	A	B	C	D	

Os resultados das tabelas 5.15, 5.16 e 5.17 indicam que quando a trinca se nucleia em uma posição onde o campo de tensão residual é de tração, abrindo a trinca em modo I, a durabilidade da peça submetida a carregamento cíclico é prejudicada em relação ao caso sem tensões residuais. Visto que o comprimento inicial da trinca nesta análise é muito pequeno ($2a = 0,007$ m), a propagação se dá, inicialmente, próximo ao *threshold*. Levando-se isto em consideração, afirma-se

Tabela 5.17: Número de ciclos até a fratura pela equação NASGRO.

	Número de ciclos até a fratura				Linha
	equações 2.39, 2.40 e 3.15		elementos finitos		
Incremento Δa [m]	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	
0,001	689694	464549	687405	460871	1
0,0001	654727	443417	653092	440632	2
0,00001	651364	441388	649792	438690	3
0,000001	651029	441186	649464	438497	4
Coluna	A	B	C	D	

que os resultados gerados pela equação NASGRO (tabela 5.17) são mais confiáveis do que aqueles das tabelas 5.15 e 5.16, que consideram a lei de Walker.

Como nas tabelas da seção 5.3, os resultados das células C2, C3, C4, D2, D3 e D4 das tabelas desta seção foram obtidos utilizando-se o fluxograma da figura 5.7, que emprega interpolação quadrática para gerar mais pontos de análise.

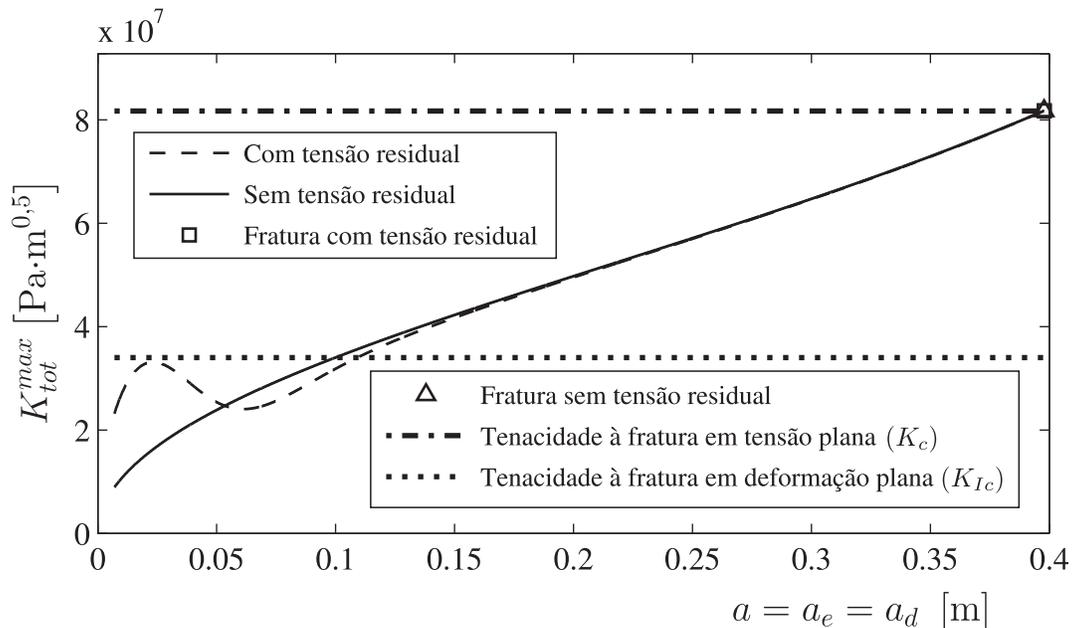


Figura 5.17: K_{tot}^{max} em função de a

A figura 5.17 exhibe a evolução de K_{tot}^{max} em função de a , para os casos com tensão residual e sem tensão residual. Após a ter atingido 0,160 m, a diferença entre as duas curvas se torna inferior a $0,4 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{0,5}$. No momento da fratura, quando K_{tot}^{max} atinge $81,7 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{0,5}$, o valor de a , para os

dois casos, é 0,398 m.

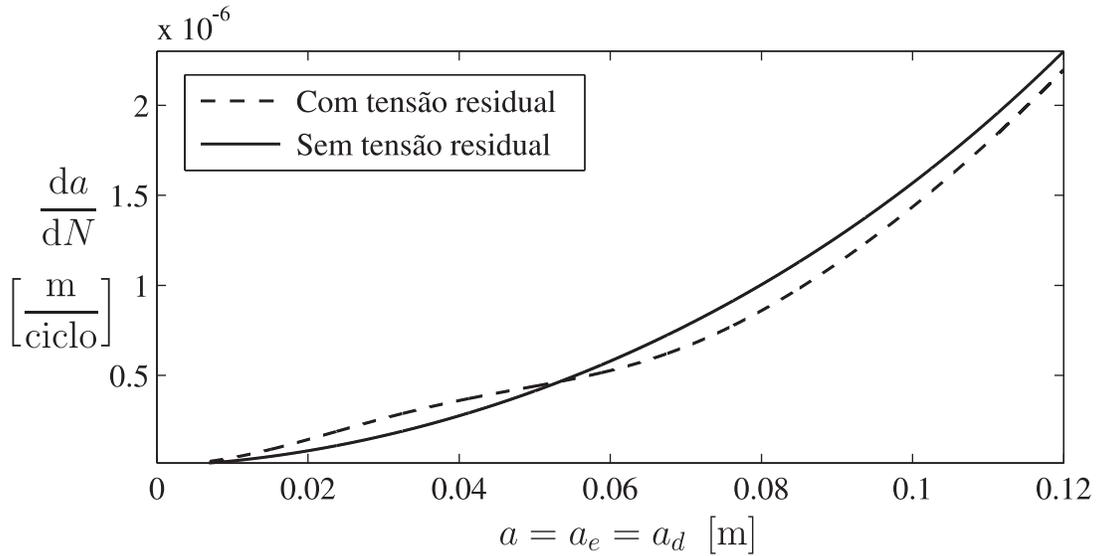


Figura 5.18: Taxa de propagação em função de a

A figura 5.18 mostra que existem dois momentos na propagação da trinca em questão: inicialmente, até que a ultrapasse 0,053 m, a trinca está predominantemente sob efeito da parte positiva do campo de tensão residual e, portanto, a taxa de propagação com tensão residual é maior do que a taxa de propagação em peça similar, sem tensão residual; para valores de a superiores a 0,053 m, o efeito da parte negativa do campo de tensão residual prevalece e a taxa de propagação com tensão residual é menor do que no caso sem tensão residual.

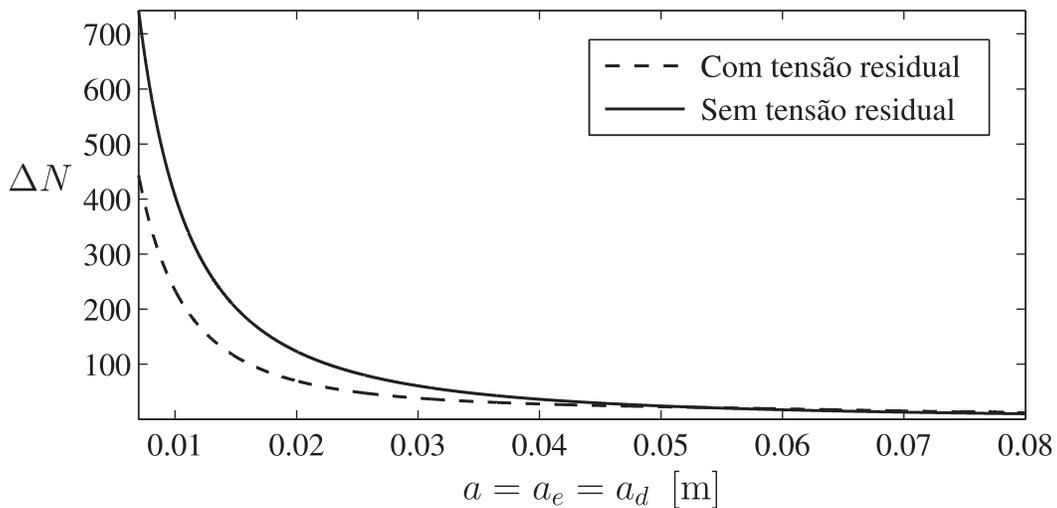


Figura 5.19: ΔN em função de a

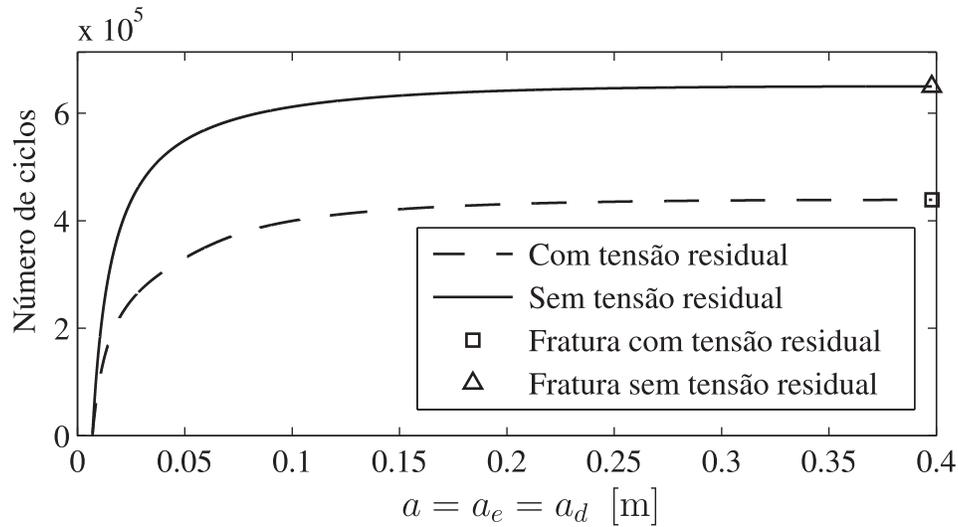


Figura 5.20: Número de ciclos em função de a

A figura 5.19 mostra que a maior parte do número de ciclos que uma peça pode resistir ocorre quando o comprimento da trinca ainda é pequeno. Espera-se, portanto, que a resistência à fadiga da peça trincada seja mais sensível às mudanças que ocorrem quando a trinca ainda é pequena. Visto que, no caso desta sub-seção, a trinca está inicialmente na parte positiva do campo de tensão residual, espera-se que a peça com tensão residual apresente desempenho inferior à peça similar, sem tensão residual e é exatamente isto que ocorre, como mostra a figura 5.20.

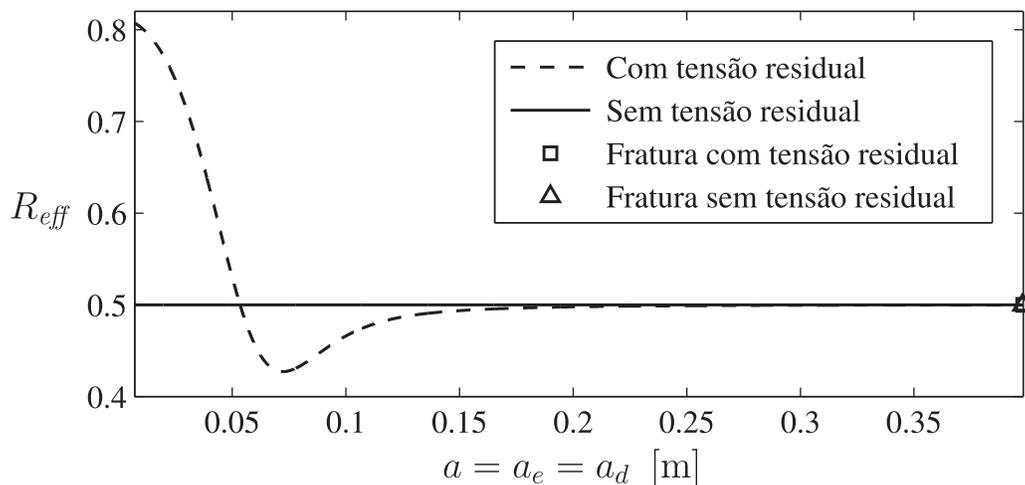


Figura 5.21: R_{eff} em função de a

A figura 5.21 exhibe as variações da razão de tensão efetiva (R_{eff}) devido ao campo de tensão residual.

As figuras com numeração entre 5.17 e 5.21 foram obtidas com a técnica apresentada na figura 5.7, utilizando a equação NASGRO, com Δa igual a 10 μm . Correspondem, portanto, aos resultados das células C3 e D3 da tabela 5.17.

5.4.2 Caso 2: trinca nucleia-se próximo, porém, fora do campo de tensão residual

No caso analisado na sub-seção 5.4.1, visto que o perfil de tensão residual é simétrico e encontra-se no centro da chapa, a taxa de propagação da ponta esquerda da trinca é sempre idêntica à taxa de propagação da ponta direita da trinca. Assim, o fluxograma exibido na figura 5.4 (implementado inicialmente para analisar o caso de uma trinca lateral) pôde ser empregado novamente utilizando-se as equações 2.40 e 3.15 no lugar das equações 2.41, 3.25 e 3.35.

Nesta sub-seção, analisa-se uma chapa com dimensões idênticas às das seções anteriores, porém, com o perfil de tensão residual deslocado à direita em relação à linha vertical de centro da chapa. O perfil de tensão residual e o carregamento externo considerados são os mesmos da sub-seção 5.4.1.

Considerando-se o sistema de coordenadas exibido na figura 5.14, o valor de x_{pico} é 0,122 m. Inicialmente, a_e e a_d valem 0,007 m. Os valores mencionados são tais que a ponta direita da trinca encontra-se inicialmente fora do campo de tensão residual, mas muito próximo a ele.

Dada a assimetria da peça, a taxa de propagação da ponta esquerda da trinca é diferente da taxa de propagação da ponta direita da trinca. O programa implementado em linguagem Python, para o Abaqus, correspondente ao fluxograma da figura 5.22 é capaz de lidar com tal assimetria, predizendo os valores de a_e e de a_d para um dado número de ciclos, bem como o número de ciclos até a fratura.

Como no fluxograma da figura 5.3, dados como geometria da peça, comprimento inicial da trinca, propriedades mecânicas do material, constantes referentes à taxa de propagação da trinca, refinamento da malha, perfil de tensão residual e carregamento externo são dados de entrada a serem inseridos antes da execução do programa. O incremento sobre o comprimento esquerdo da trinca Δa_e não varia em função do número da iteração e também é inserido pelo usuário como dado de entrada. Um valor de 0,001 m é adotado para Δa_e no *script* feito para o Abaqus.

A partir dos dados de entrada, o *script* faz o Abaqus gerar a malha e obter os fatores de intensidade de tensão requeridos a cada iteração: $(K_{res})_e$, $(K_{app}^{min})_e$, $(K_{app}^{max})_e$, $(K_{res})_d$, $(K_{app}^{min})_d$ e

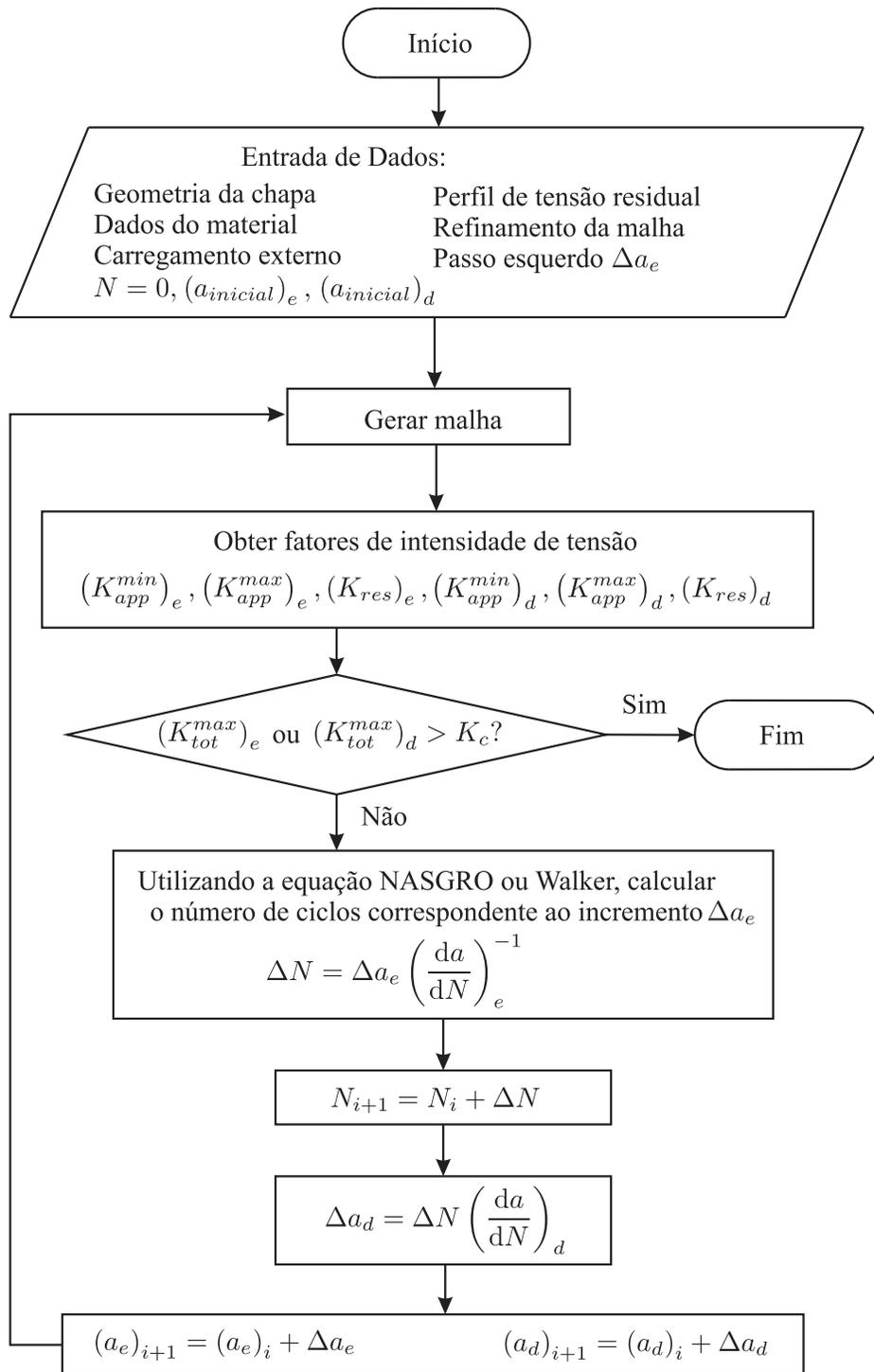


Figura 5.22: Fluxograma do *script* em Python para o Abaqus simulando uma trinca central que atravessa um campo de tensões residuais deslocado em relação ao centro da chapa

$(K_{app}^{max})_d$.

Com os dados obtidos, calcula-se a taxa de propagação da ponta esquerda da trinca e em

seguida o número de ciclos ΔN correspondente ao incremento Δa_e . Calcula-se então a taxa de propagação da ponta direita da trinca e o incremento Δa_d correspondente ao número de ciclos ΔN .

Para a iteração seguinte, acrescenta-se Δa_e sobre o último valor de a_e e o valor calculado Δa_d sobre o último valor de a_d . A somatória dos valores de ΔN de todas as iterações é o número de ciclos que a peça pode suportar até o início da propagação instável da trinca, que pode ocorrer do lado esquerdo ou do lado direito, dependendo do perfil e localização do campo de tensão residual.

Tabela 5.18: Número de ciclos até a fratura pela equação NASGRO, com perfil de tensão residual deslocado para a direita.

Incremento Δa_e [m]	Número de ciclos até a fratura				Linha
	equações 2.39, 2.40, 3.15 e 3.16		elementos finitos		
	Sem tensão residual	Com tensão residual	Sem tensão residual	Com tensão residual	
0,001	689694	714474	687405	714044	1
0,0001	654727	679615	653092	-	2
0,00001	651364	676262	649792	-	3
0,000001	651029	675928	649464	-	4
Coluna	A	B	C	D	

A célula D1 da tabela 5.18 exibe o resultado correspondente ao fluxograma da figura 5.22. O campo de tensão residual atua beneficiando a resistência à fadiga da peça para o caso descrito nesta sub-seção.

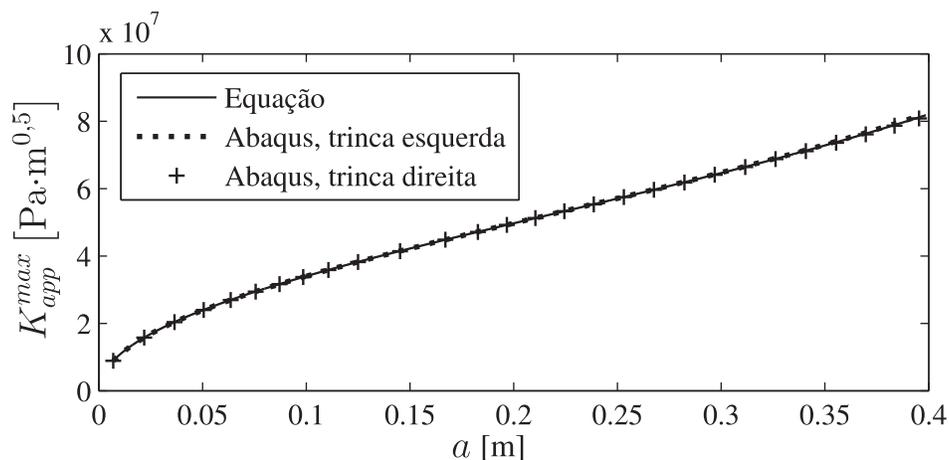


Figura 5.23: $(K_{app}^{max})_e$, $(K_{app}^{max})_d$ e K_{app}^{max} em função de a

Na figura 5.23, $(K_{app}^{max})_e$ e $(K_{app}^{max})_d$, obtidos pelo método de elementos finitos, são traçados

em função de a , que é dado por:

$$a = \frac{a_e + a_d}{2} \quad (5.1)$$

Desta forma, as referidas curvas se ajustam bem àquela fornecida pelas equações 2.39 e 2.40.

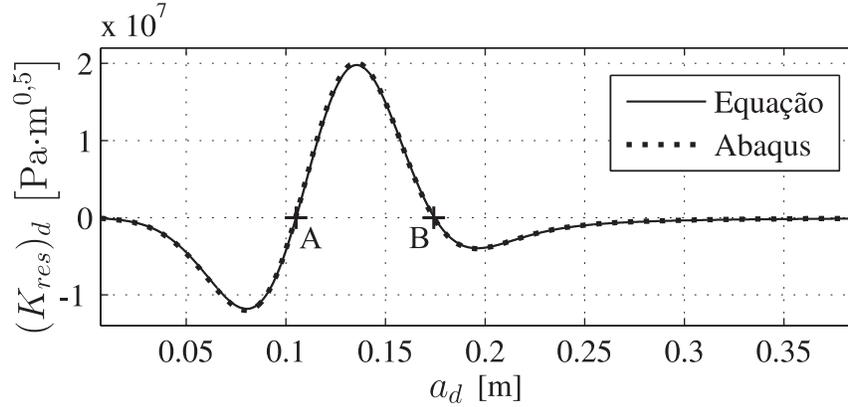


Figura 5.24: $(K_{res})_d$ em função de a_d

A figura 5.24 compara os resultados de $(K_{res})_d$ obtidos por elementos finitos com os fornecidos pela equação 3.15. É importante notar que o sistema de coordenadas usado nesta equação é dado por \hat{x} e \hat{y} na figura 5.14b, não por x e y . Assim, as seguintes relações são úteis ao escrever um programa que utiliza aquela equação:

$$x_0 = \frac{a_d - a_e}{2} \quad (a_e \text{ e } a_d > 0) \quad (5.2a)$$

$$\hat{x}_{pico} = x_{pico} - x_0 \quad (5.2b)$$

A figura 5.25 compara os resultados de $(K_{res})_e$ produzidos pela equação 3.16 com os obtidos pelas análises de elementos finitos.

Na figura 5.26, pode-se observar as mudanças de Δa_d conforme a ponta direita da trinca se propaga.

O ponto A da figura 5.27 corresponde ao momento em que a diferença entre a_e e a_d é máxima e vale 0,033 m. Naquele ponto, o número de ciclos que a peça fora submetida é 651600. Este é o número de ciclos correspondente ao ponto A da figura 5.24.

No ponto B da figura 5.27, a diferença entre a_e e a_d vale 0,008 m e o número de ciclos é 664500, que corresponde ao ponto B da figura 5.24.

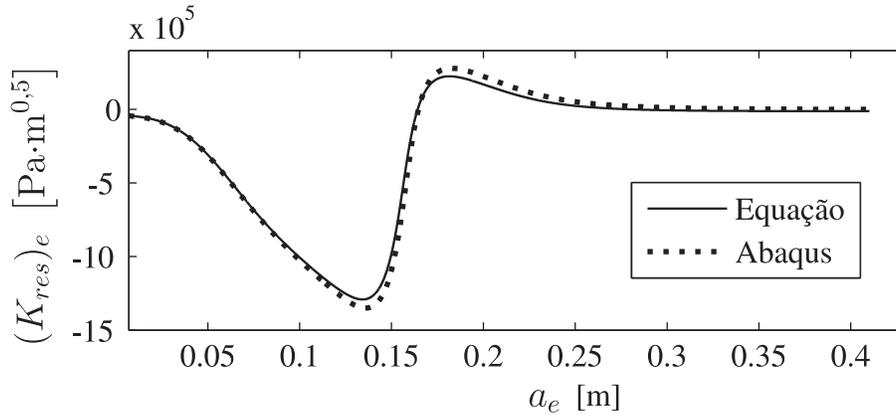


Figura 5.25: $(K_{res})_e$ em função de a_e

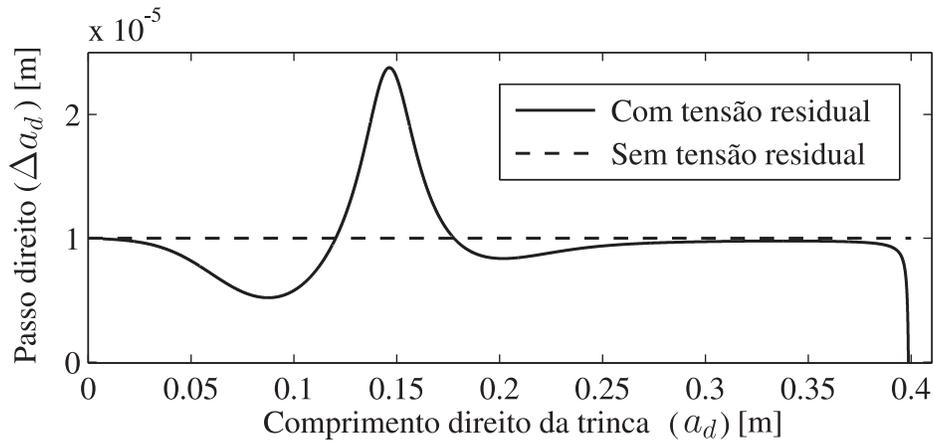


Figura 5.26: Δa_d em função de a_d

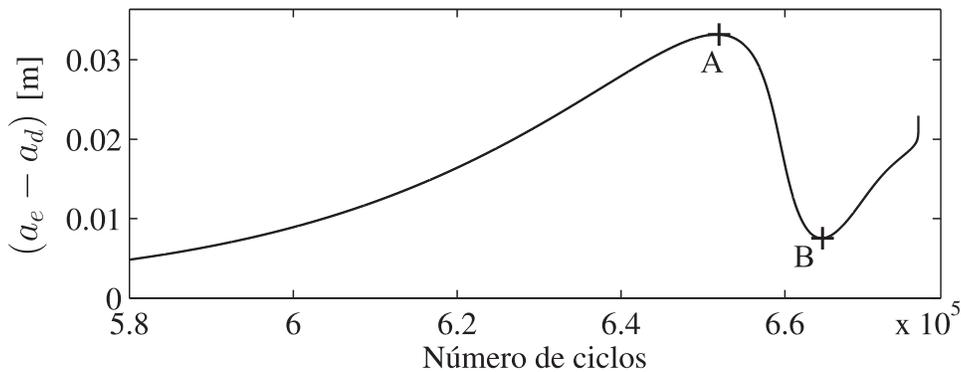


Figura 5.27: $(a_e - a_d)$ em função do número de ciclos

Na figura 5.28, a ponta direita da trinca se propaga mais devagar em relação ao caso sem tensão residual, conforme o esperado. Além disso, a ponta esquerda da trinca também se propaga mais devagar e a razão para isto pode não ser tão intuitiva. Na figura 5.25, segundo a equação 3.16,

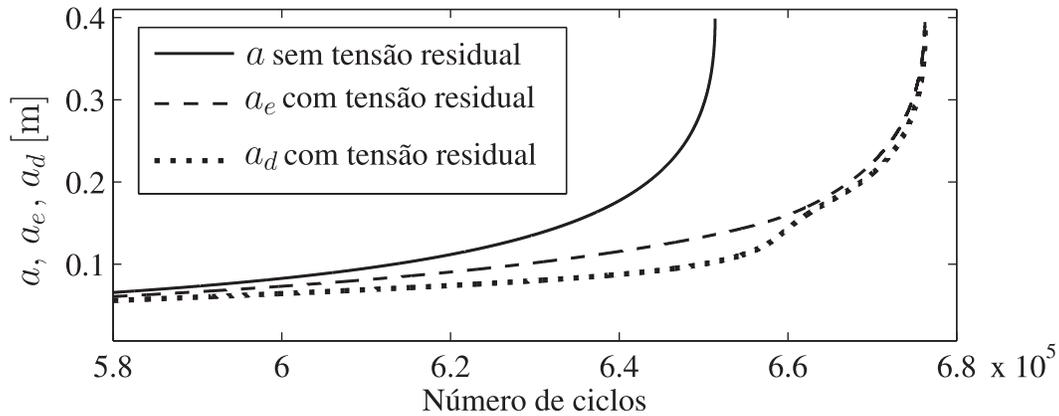


Figura 5.28: a , a_e e a_d em função do número de ciclos

o valor máximo de $(K_{res})_e$ é $224 \text{ kPa}\cdot\text{m}^{0.5}$ e o valor mínimo é $-1,3 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$. São valores que não podem produzir efeitos significativos sobre a curva de a_e em função do número de ciclos, exibida na figura 5.28.

A ponta esquerda da trinca se propaga mais devagar porque $(K_{app}^{min})_e$ e $(K_{app}^{max})_e$ evolui mais lentamente em função do número de ciclos, como mostra a figura 5.29. Esta evolução mais lenta ocorre porque $(K_{app}^{min})_e$ e $(K_{app}^{max})_e$ dependem de a (dado pela equação 5.1), que evolui mais lentamente.

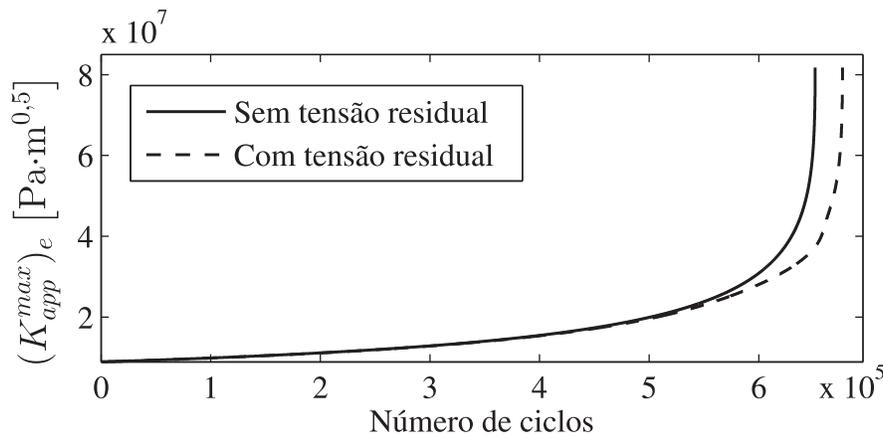


Figura 5.29: $(K_{app}^{max})_e$ em função do número de ciclos

As figuras com numeração entre 5.23 e 5.29 foram obtidas com um programa feito no Matlab, cujo fluxograma é similar ao da figura 5.22. Elas correspondem à célula B3 da tabela 5.18, isto é, o passo considerado é $10 \mu\text{m}$. Os fatores de intensidade de tensão são obtidos com as equações 2.39, 2.40 3.15 e 3.16 ao invés de empregar o método de elementos finitos. Embora não sejam

publicadas neste trabalho, também foram traçadas as curvas correspondentes à célula D1 da tabela 5.18, isto é, correspondentes às análises de elementos finitos. Nenhuma curva se comportou de maneira diferente da descrita pelas figuras com numeração entre 5.23 e 5.29.

A semelhança entre os dois métodos termina quando se deseja explicar as diferenças observadas na tabela 5.19. O programa feito para o Matlab considera que $(K_{app}^{min})_e$ e $(K_{app}^{max})_e$ são iguais, respectivamente, a $(K_{app}^{min})_d$ e $(K_{app}^{max})_d$. Rigorosamente, a igualdade não é verdadeira se a_e é diferente de a_d , isto é, se a distância entre a ponta esquerda da trinca e a lateral esquerda da chapa é diferente da distância entre a ponta direita da trinca e a lateral direita da chapa. Este efeito é detectado pelas análises de elementos finitos, mas não pelas soluções analíticas empregadas neste trabalho.

Tabela 5.19: a_e , a_d , $(a_e - a_d)$ e a , em metro, no momento da fratura.

	Com tensão residual				Sem tensão residual
	a_e	a_d	a	$a_e - a_d$	$a_e = a_d = a$
Equações	0,410	0,387	0,399	0,023	0,399
Abaqus	0,413	0,379	0,396	0,034	0,398

Quando a_e é maior do que a_d , as equações 2.39 e 2.40 produzem valores de $(K_{app}^{min})_e$ e $(K_{app}^{max})_e$ ligeiramente abaixo daqueles produzidos pelas análises de elementos finitos (mesmo considerando-se a equação 5.1). Além disso, aquelas equações produzem valores de $(K_{app}^{min})_d$ e $(K_{app}^{max})_d$ ligeiramente acima dos valores calculados por elementos finitos. Desta forma, no programa escrito para o Matlab, a ponta esquerda da trinca de propaga ligeiramente mais devagar do que o esperado e a ponta direita da trinca se propaga ligeiramente mais rápido do que o previsto pelo *script* feito para o Abaqus. É preciso observar o gráfico da figura 5.23 ampliado para chegar a estas conclusões.

A figura 5.30 exhibe a curva de $[(K_{app}^{max})_e - (K_{app}^{max})_d]$ em função de a , com resultados obtidos pelo Abaqus.

Como já mencionado, a curva da figura 5.27 é traçada com resultados obtidos pelo programa para o Matlab, com incremento Δa_e de 10 μm . O trecho bastante inclinado que precede a fratura seria maior se a curva fosse traçada com os resultados das análises de elementos finitos. Isto se reflete nos valores de $(a_e - a_d)$ no momento da fratura, exibidos na tabela 5.19. Isto ocorre porque,

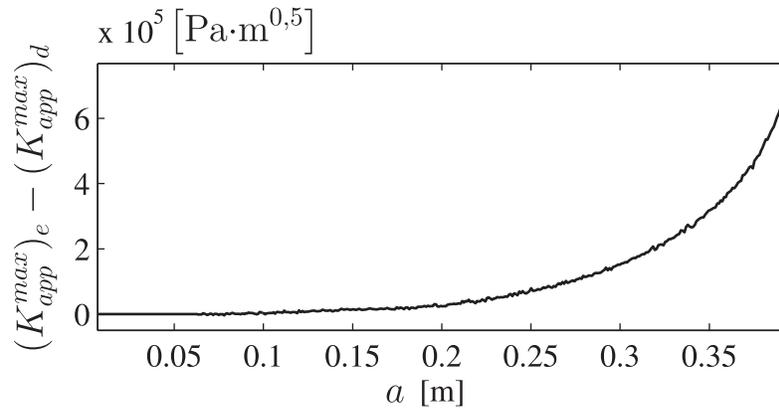


Figura 5.30: $[(K_{app}^{max})_e - (K_{app}^{max})_d]$ em função de a

segundo as análises de elementos finitos, a ponta esquerda da trinca entra na região III da curva da/dN antes do que a ponta direita (considerando-se material perfeitamente homogêneo em termos de tenacidade à fratura). As análises de elementos finitos prevêem que no momento em que $(K_{tot}^{max})_e$ atinge $81,7 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{0,5}$, $(K_{tot}^{max})_d$ é $80,8 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{0,5}$.

Os resultados da tabela 5.19, correspondentes ao programa para o Matlab, variam de maneira desprezível se Δa_e é reduzido de 1 mm para 1 μm . Assim, se o objetivo é calcular os valores de a_e e a_d no momento da fratura, o programa feito para o Matlab não é capaz de fornecer melhores resultados do que o *script* feito para o Abaqus, que usa Δa_e de 1 mm.

Por outro lado, se o objetivo é calcular o número de ciclos até a fratura, o programa para o Matlab, que utiliza equações para encontrar fatores de intensidade de tensão é vantajoso em relação ao *script* para o Abaqus, pela viabilidade do uso de incrementos Δa_e menores, produzindo resultados de maior acuracidade e ao mesmo tempo mais conservadores.

No caso de uma trinca central de comprimento $2a$ próximo a um campo de tensão residual em uma chapa muito grande, pertencente a uma grande estrutura, a suposição de que $(K_{app})_e$ é igual a $(K_{app})_d$ se torna perfeitamente verdadeira.

5.5 Implementação de programas para encontrar a matriz B

O método descrito na seção 4.1, para determinar o perfil de tensão residual a partir de uma conhecida curva de K_{res} , que é chamado por Bao & Zhang (2010) como método inverso, foi implementado em dois programas utilizando Matlab: um destinado a corpos de prova retangulares e outro destinado a corpos de prova CT. Tais programas e seus resultados são descritos nesta seção.

5.5.1 Matriz **B** em corpo de prova retangular

Conforme mostra o fluxograma da figura 5.31, os dados de entrada do programa são a largura da chapa, um vetor com os valores de fatores de intensidade de tensão residual e um vetor com os respectivos valores de comprimentos de trinca. O programa obtém o tamanho dos vetores de entrada, ou seja, o número de comprimentos de trinca (n) considerado, os valores de $a_{inicial}$ e a_{final} , o passo Δa e um vetor cujos elementos são iguais aos do vetor de comprimentos de trinca menos $\Delta a/2$ ($x_{sigmaunitario}$ vetor na tabela 5.20).

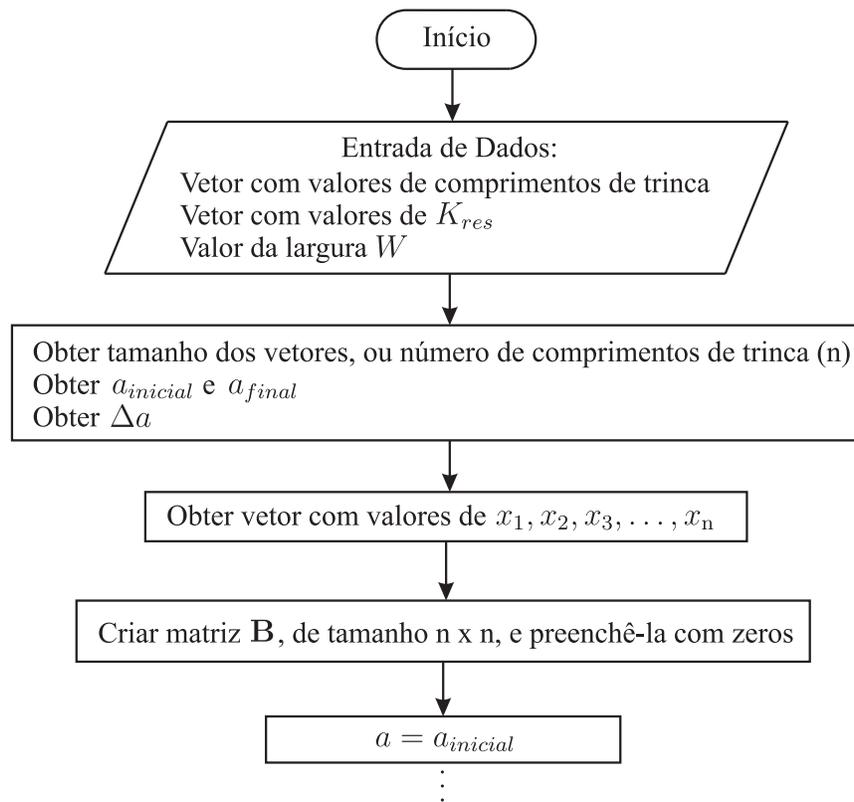


Figura 5.31: Operações preliminares para encontrar a matriz **B**

Nos comandos exibidos na tabela 5.20, o primeiro e o segundo comando *for* fazem variar, respectivamente, a linha e a coluna da matriz **B**. Da maneira como o programa foi implementado, é requerido que o passo Δa seja constante em todo o vetor de comprimentos de trinca. A fim de torná-lo mais robusto, fazendo-o funcionar para Δa não constante, deve-se igualar x_{menor} e x_{maior} , respectivamente, aos elementos $j-1$ e j do vetor de comprimentos de trinca. Neste caso, alguma consideração deve ser feita com relação ao elemento $j-1$ do vetor de comprimentos de trinca, quando j é igual a 1. Um acréscimo sobre o passo Δa entre os elementos $j-1$ e j do vetor

de comprimentos de trinca produz um acréscimo sobre os valores de cada elemento da coluna j da matriz \mathbf{B} .

A tabela 5.21 exibe os comandos que executam a função `sigmah`, empregada no código da tabela 5.20. Tal função devolve um vetor com resultados da multiplicação de $\sigma_{yy}^{res}(x)$ pela função ponderadora $h(x, a)$, com x variando entre X_{menor} e X_{maior} . Para o caso de uma chapa retangular, foi utilizada a função ponderadora da equação 3.35.

Tabela 5.20: Instruções do Matlab para preencher a matriz \mathbf{B} .

```
for i=1:numero decomprimentos detrinca
    for j=1:numero decomprimentos detrinca;
        Xsigmaunitario=Xsigmaunitariovetor(j);
        Xmenor=Xsigmaunitario-Deltaa/2;
        Xmaior=Xsigmaunitario+Deltaa/2;
        if Xsigmaunitario>a
            Kresidual=0;
        else
            Kresidual=quad(@ (x) sigmah(x,W,a,Xmenor,Xmaior),
                Xmenor,Xmaior-0.000001,1e-9);
        end
        B(i,j)=Kresidual;
    end
    a=a+Deltaa;
end
```

Tabela 5.21: Instruções do arquivo `sigmah.m`, para o caso de uma chapa retangular e um perfil de tensão do tipo degrau unitário.

```
function y=sigmah(x,W,a,Xmenor,Xmaior)
    m1=(0.6147+17.1844*(a/W)^2+8.7822*(a/W)^6);
    m2=(0.2502+3.2889*(a/W)^2+70.0444*(a/W)^6);
    h=(2*(2*pi*(a-x)).^(-0.5)).*(1+m1*((a-x)/a)+m2*((a-x)/a).^2);
    sigma=step_sf(x,Xmenor)-step_sf(x,Xmaior);
    y=sigma.*h;
```

O comando `step_sf(x,Xsingularidade)`, exibido na tabela 5.22, devolve 0 se x é menor do que $X_{singularidade}$ e 1 se x é maior do que $X_{singularidade}$.

Tabela 5.22: Instruções do arquivo step_sf.m

```
function y=step_sf(x,Xsingularidade)
    y =(x>Xsingularidade);
```

Quando o programa termina de executar o primeiro *for*, a matriz **B** está totalmente preenchida. Se o passo Δa do vetor de comprimentos de trinca é da ordem de 1 mm (como ocorre nas análises descritas nesta seção) a matriz **B** é pequena o bastante para que sua inversão seja feita rapidamente pelo Matlab, a fim de encontrar S_{res} na equação 4.1. Se Δa for muito pequeno (como pode acontecer se $K_{res}(a)$ for medido de modo contínuo, isto é, com muitos pontos), então a equação 4.1 deve ser resolvida de maneira mais eficiente, considerando-se que **B** é uma matriz triangular inferior. Contudo, independentemente da maneira como o sistema de equações lineares é solucionado, o custo computacional no preenchimento da matriz **B** é sempre consideravelmente maior.

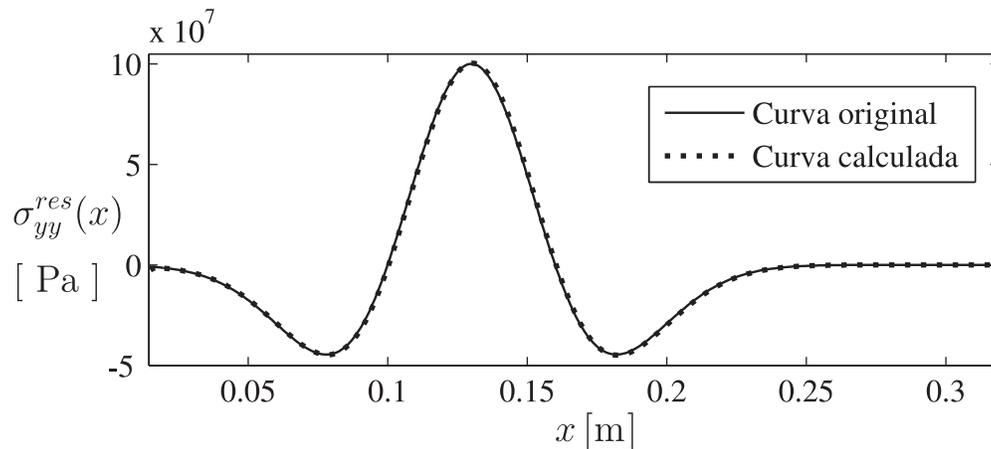


Figura 5.32: Curva original e curva calculada pelo método inverso, no caso de chapa retangular.

Os resultados de K_{res} gerados pelo Abaqus no caso da sub-seção 5.3.1, cuja curva é exibida na figura 5.5, foram inseridos como dados de entrada no programa descrito nesta sub-seção. A largura da chapa e o vetor de comprimentos de trinca inseridos no programa também são aqueles usados nas análises do Abaqus na sub-seção 5.3.1. A aplicação do método inverso resulta na curva da figura 5.32.

5.5.2 Matriz B em corpo de prova CT

A parte principal do programa que aplica o método inverso no caso da geometria CT é idêntico ao programa descrito na sub-seção 5.5.1. As instruções da função `sigma_h` são modificadas de modo a utilizar a função ponderadora da equação 3.39. Os valores de β_i foram retirados da tabela 3.2. Valores não tabelados foram obtidos por interpolação quadrática.

Para verificar se as modificações foram bem implementadas, foi realizada uma análise de elementos finitos similar àquela descrita na seção 5.3.1, porém, em corpo de prova CT. O valor de W considerado é 0,3 m. O perfil de tensão residual é dado pela equação 3.10a, com $\sigma_{yy}^{max} = 100$ MPa, $c = 0,014$ m e $x_{pico} = 0,121$ m no sistema de coordenadas da figura 3.11b. Como no *script* usado na seção 5.3.1, valores de comprimentos de trinca e de fatores de intensidade de tensão residual de todas as iterações são armazenados em listas. Tais listas são inseridas no programa do Matlab correspondente a corpos de prova CT, descrito nesta sub-seção. A curva resultante de tal programa é exibida na figura 5.33.

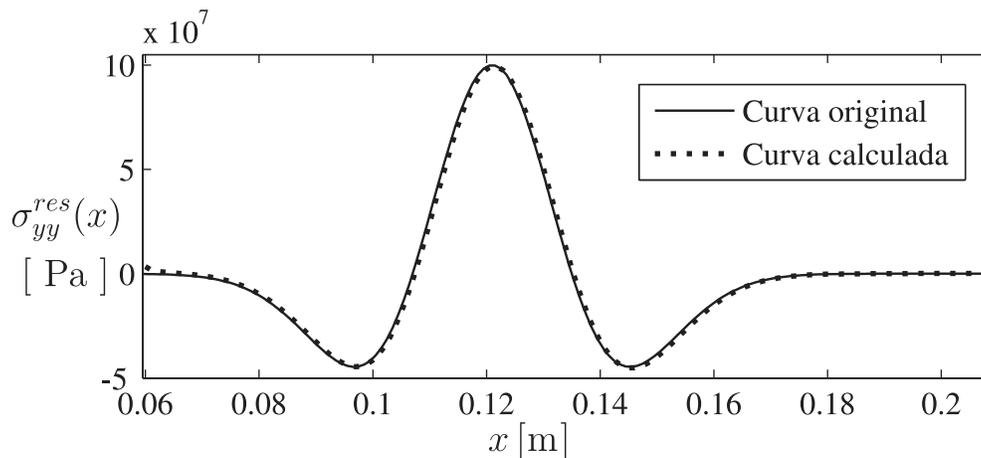


Figura 5.33: Curva original e curva calculada pelo método inverso, no caso de corpo de prova CT.

Observando-se as figuras 5.32 e 5.33, conclui-se que o método numérico para encontrar uma curva de tensão residual longitudinal a partir de uma curva de fatores de intensidade de tensão residual, abordado na seção 4.1, é capaz de produzir resultados de grande acuracidade se o intervalo entre cada valor de comprimento de trinca é de 1 mm ou menor.

5.6 Influência do posicionamento do extensômetro no ensaio *cut compliance*

Em um ensaio *cut compliance*, quando o corpo de prova apresenta muito baixa espessura, não é possível posicionar o extensômetro na lateral, como nas figuras 4.4 e 4.5. Nesta seção, pretende-se demonstrar que o campo de deformações elásticas na região próxima à lateral da chapa também sofre mudanças em função do aumento do comprimento do corte e que estas mudanças podem ser utilizadas para medir $K_I^{res}(a)$.

Conforme mostra a figura 5.34a, define-se d como a distância do extensômetro à lateral oposta ao corte. Deseja-se estudar a influência de d na sensibilidade do ensaio.

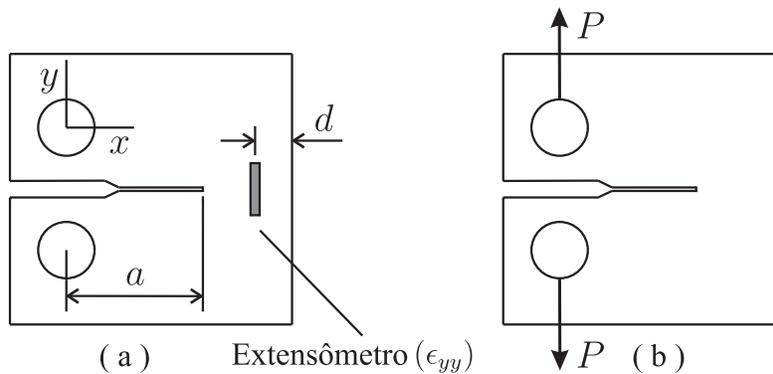


Figura 5.34: (a) Extensômetro posicionado a uma distância d da lateral oposta ao corte (b) Carregamento externo P aplicado ao corpo de prova CT

Um *script* em Python para o Abaqus, cujo fluxograma é similar ao exibido na figura 5.3, é feito considerando-se o corpo de prova CT. Desta vez, porém, a intenção não é obter o número de ciclos até a fratura. Deseja-se apenas calcular fatores de intensidade de tensão K_I^{res} e K_I^{app} em função do comprimento da trinca a .

Como em todos os demais *scripts* para o Abaqus feitos neste trabalho, no primeiro *step* de carregamento é inserido apenas o campo de tensões residuais através da sub-rotina SIGINI. Se desejado pelo usuário do *script*, um segundo *step* de carregamento é criado onde, além do campo de tensões residuais, está presente um carregamento externo que, no caso do corpo de prova CT, é uma força P , por unidade de espessura da peça, atuante no sentido indicado na figura 5.34b. Os pinos que aplicam este carregamento nos orifícios do corpo de prova são modelados e as superfícies em contato podem deslizar sem atrito. Para obter resultados que consideram apenas o carregamento externo, o usuário deve definir um perfil de tensão residual constante e igual a zero no arquivo em

Fortran da sub-rotina SIGINI.

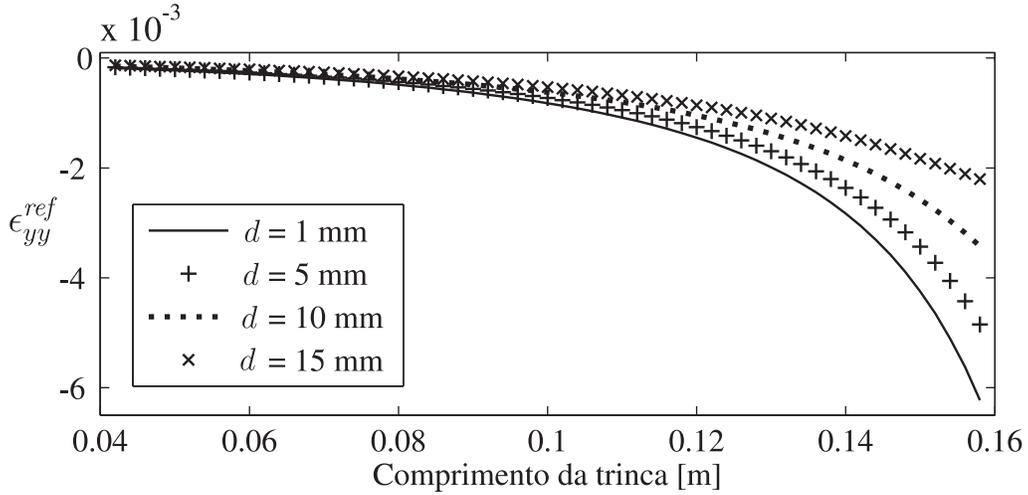


Figura 5.35: $\epsilon_{yy}^{ref}(a)$ em diversas distâncias à lateral

Com o *script* descrito, duas análises são executadas, considerando-se $W=0,20$ m, módulo de elasticidade 70 GPa e estado de tensão plana. Na primeira análise, não há campo de tensões residuais, mas aplica-se um carregamento externo P^{ref} de 937,5 kN por metro de espessura do corpo de prova. Empregando-se a integral J, é obtida a curva de K_I^{ref} em função do comprimento da trinca a , que varia entre 0,040 m e 0,160 m em incrementos de 1 mm. Além disso, são obtidas curvas de deformação ϵ_{yy}^{ref} em função de a , para d igual a 1, 5, 10 e 15 mm. Tais curvas são exibidas na figura 5.35.

Para cada uma das quatro curvas de ϵ_{yy}^{ref} , é feito um ajuste polinomial com o comando `polyfit` do Matlab. Em seguida, o comando `polyder` é empregado para obter as equações 5.3a, 5.3b, 5.3c e 5.3d que são, respectivamente, as derivadas das deformações em d igual a 1, 5, 10 e 15 mm.

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_{yy}^{ref}}{da} = & -5,0865 \cdot 10^9 a^9 + 4,1505 \cdot 10^9 a^8 - 1,4863 \cdot 10^9 a^7 + 3,0584 \cdot 10^8 a^6 \\ & - 3,9783 \cdot 10^7 a^5 + 3,3873 \cdot 10^6 a^4 - 1,8854 \cdot 10^5 a^3 + 6,6074 \cdot 10^3 a^2 \\ & - 132,2740 a + 1,1491 \quad (d = 1 \text{ mm}) \end{aligned} \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_{yy}^{ref}}{da} = & -2,0296 \cdot 10^9 a^9 + 1,6341 \cdot 10^9 a^8 - 5,7855 \cdot 10^8 a^7 + 1,1788 \cdot 10^8 a^6 \\ & - 1,5201 \cdot 10^7 a^5 + 1,2844 \cdot 10^6 a^4 - 7,1012 \cdot 10^4 a^3 + 2,4737 \cdot 10^3 a^2 \\ & - 49,3093a + 0,4258 \quad (d = 5 \text{ mm}) \end{aligned} \quad (5.3b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_{yy}^{ref}}{da} = & -4.2585 \cdot 10^8 a^9 + 3.7236 \cdot 10^8 a^8 - 1.4333 \cdot 10^8 a^7 + 3.1650 \cdot 10^7 a^6 \\ & - 4.4031 \cdot 10^6 a^5 + 3.9906 \cdot 10^5 a^4 - 2.3524 \cdot 10^4 a^3 + 868.0299 a^2 \\ & - 18.2595a + 0.1646 \quad (d = 10 \text{ mm}) \end{aligned} \quad (5.3c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_{yy}^{ref}}{da} = & +7.7769 \cdot 10^9 a^9 - 6.6605 \cdot 10^9 a^8 + 2.4907 \cdot 10^9 a^7 - 5.3308 \cdot 10^8 a^6 \\ & + 7.1881 \cdot 10^7 a^5 - 6.3252 \cdot 10^6 a^4 + 3.6285 \cdot 10^5 a^3 - 1.3073 \cdot 10^4 a^2 \\ & + 268.1372a - 2.3861 \quad (d = 15 \text{ mm}) \end{aligned} \quad (5.3d)$$

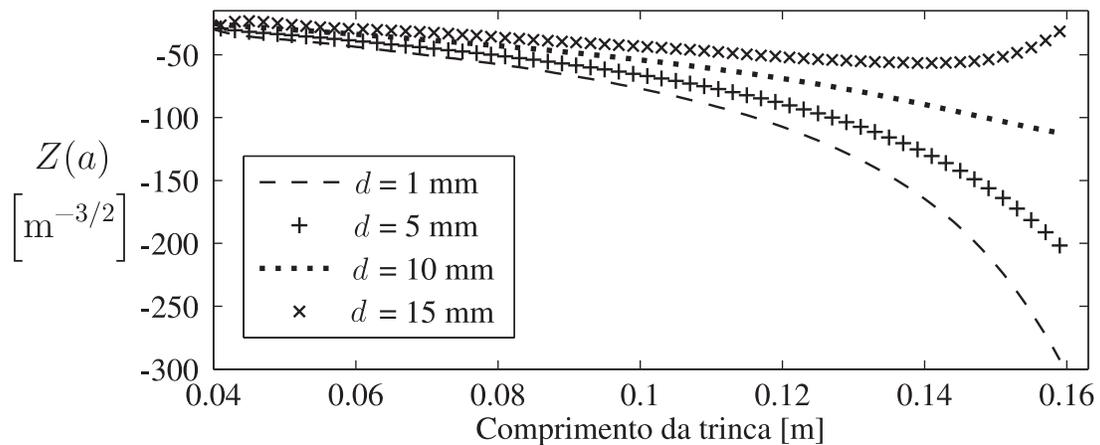


Figura 5.36: $Z(a)$ para diversas distâncias do extensômetro à lateral

Um ajuste polinomial também é feito para a curva de K_I^{ref} obtida com o Abaqus. Isto equivale a utilizar a equação 2.42, visto que ela fornece resultados em boa concordância com as análises de elementos finitos. A aplicação da equação 4.12 permite obter funções de influência cujas curvas são exibidas na figura 5.36.

Na segunda das duas análises descritas nesta seção, não há carregamento externo, mas há um campo de tensões residuais longitudinais que influencia o modo I de abertura da trinca. O perfil que corresponde a este campo é expresso pela equação 3.10a, com $\sigma_{yy}^{max} = 50 \text{ MPa}$, $c = 0,014 \text{ m}$ e

$x_{pico} = 0,100$ m (no sistema de coordenadas da figura 5.34). São obtidas curvas de ϵ_{yy} em função de a , para d igual a 1, 5, 10 e 15 mm, que são mostradas na figura 5.37. Além disso, é obtida a curva de K_I^{res} em função do comprimento da trinca pela integral J, que é a técnica padrão do Abaqus para determinar fatores de intensidade de tensão.

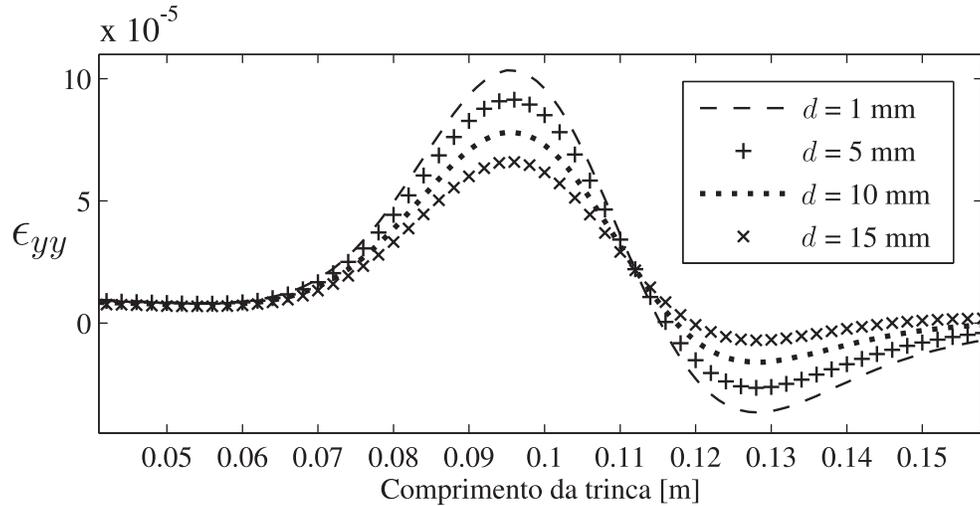


Figura 5.37: ϵ_{yy} em função de a , para diversas distâncias em relação à lateral do corpo de prova.

Para encontrar a derivada de um ponto de uma das curvas da figura 5.37, ajusta-se uma equação de segundo grau utilizando aquele ponto e seus dois pontos vizinhos. Considera-se então a derivada da equação no ponto do meio. Esta técnica produz resultados semelhantes aos que se obtém com os comandos `polyfit` e `polyder` e melhores em relação ao uso do comando `diff` do Matlab.

A aplicação da equação 4.8 utilizando-se a função de influência da equação 4.18 conduz aos resultados da figura 5.38. Os valores obtidos de K_I^{res} são subestimados, visto que a função de influência da equação 4.18 é deduzida para o caso em que d é igual a zero.

O uso das funções de influência da figura 5.36 conduz aos resultados de K_I^{res} exibidos na figura 5.39. Com isto, é demonstrado que o posicionamento do extensômetro na lateral da chapa não é uma condição estritamente necessária à aplicação do método *cut compliance*. Porém, é uma condição desejável, visto que a sensibilidade do ensaio aumenta com a redução da distância d do extensômetro à lateral, conforme sugere a figura 5.36. O valor em módulo de $Z(a)$ quantifica a sensibilidade do ensaio.

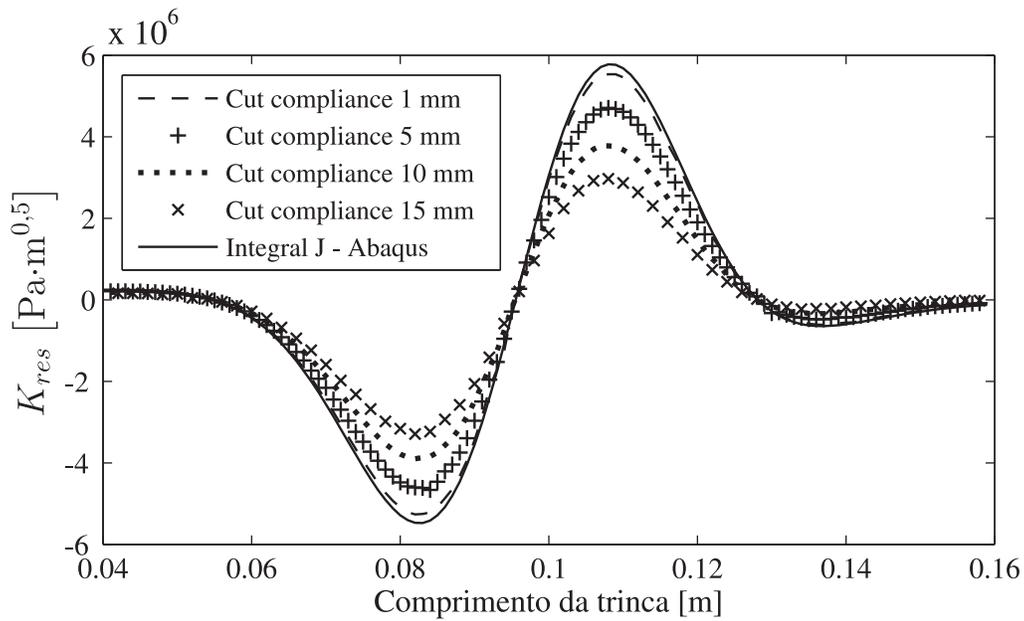


Figura 5.38: K_{res} pelo método *cut compliance*, considerando-se a equação 4.18 e ϵ_{yy} de diferentes distâncias em relação à lateral do corpo de prova

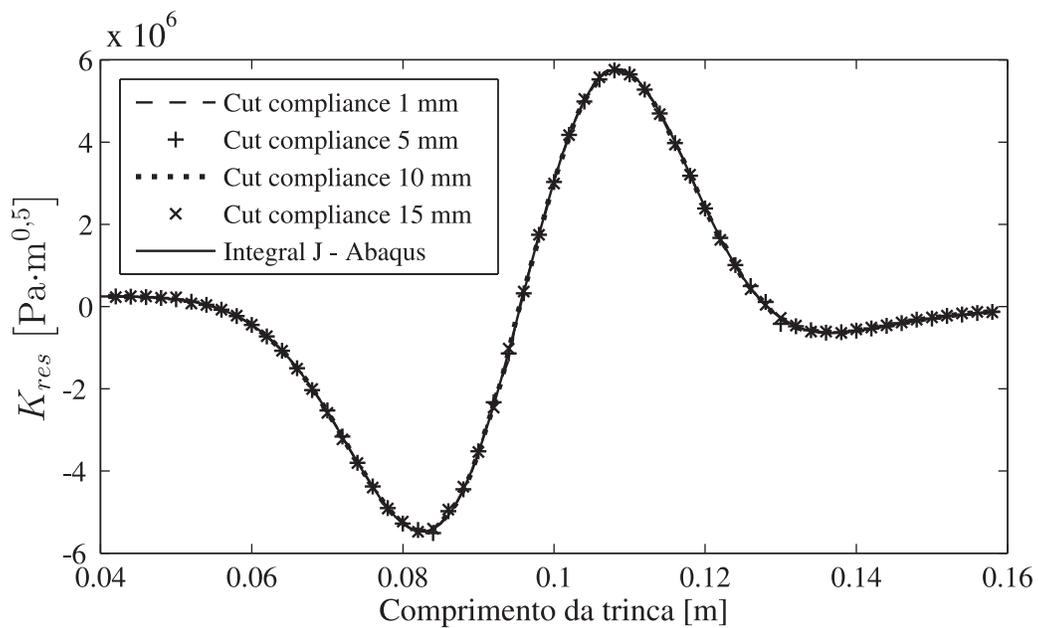


Figura 5.39: K_{res} utilizando-se funções de influência para diferentes distâncias do extensômetro à lateral do corpo de prova

6 DISCUSSÕES FINAIS E CONCLUSÕES

O uso de elementos finitos quadrilaterais colapsados com nós em posição *quarter point* permite uma boa modelagem do campo de tensões na região próxima à ponta da trinca, mesmo que a malha não seja muito refinada em tal localização. Desta maneira, a integral J é calculada com precisão e obtém-se fatores de intensidade de tensão em boa concordância com valores fornecidos pelo uso de soluções analíticas. O uso de elementos finitos é uma possível alternativa quando uma solução analítica ou uma função ponderadora $h(x, a)$ não é disponível para certa geometria.

Considerando-se um carregamento externo que oscila entre dois valores fixos, atuante em um componente trincado, os fatores de intensidade de tensão devido ao carregamento externo crescem com o aumento do comprimento da trinca. Conseqüentemente, a taxa de propagação aumenta conforme o comprimento da trinca aumenta. Isto é um conceito básico, porém, a maioria dos textos em mecânica da fratura não enfatiza que a maior parte do número de ciclos de carregamento que uma peça pode resistir ocorre quando a trinca ainda é pequena. As análises executadas para esta dissertação deixam claro a importância de que a região I de uma curva da/dN seja bem modelada se o objetivo é calcular a vida residual em fadiga de um componente com uma trinca de comprimento inicial muito pequeno.

O mesmo tipo de consideração exposto no parágrafo anterior explica por que a vida residual em fadiga de uma peça com uma trinca perpendicular a uma junta soldada - e que a atravessa completamente - se modifica pela presença do campo de tensões residuais longitudinais, mesmo que a área positiva do perfil deste campo seja idêntica à área negativa (a condição de equilíbrio de forças exige esta igualdade).

Ainda tendo-se em vista as considerações do segundo parágrafo, nota-se que a distância que uma trinca se nucleia em relação à localização do campo de tensões residuais é um parâmetro importante para determinar se este campo exercerá ou não efeitos significativos sobre o número de ciclos até a fratura.

Foi demonstrado que é possível obter uma curva de tensão residual longitudinal a partir de uma curva de fatores de intensidade de tensão residual em modo I de abertura. A mesma técnica não

pode ser empregada quando a trinca se propaga paralelamente à solda, visto que a redistribuição do campo de tensão residual transversal ocorre de maneira diferente.

Em relação ao método *cut compliance* foi demonstrado que o posicionamento do extensômetro na lateral do corpo de prova não é uma condição estritamente necessária para a obtenção de bons resultados. O campo de deformações elásticas na região próxima à lateral também sofre modificações com o aumento do comprimento do corte e isto foi utilizado para obter curvas de K_I^{res} em boa concordância com aquelas correspondentes à aplicação da integral J. Um aspecto que deve ser ressaltado é que o uso de um *software* de elementos finitos como o Abaqus em associação com a equação que expressa a função de influência $Z(a)$ em termos de K_I^{ref} e ϵ^{ref} permite que seja alcançada total independência em relação a expressões analíticas de $Z(a)$ encontradas na literatura. Isto viabiliza a execução de um ensaio *cut compliance* para determinar K_I^{res} de trincas centrais. Tal ensaio seria particularmente útil se K_I^{res} é devido às tensões residuais transversais. Por outro lado, se K_I^{res} é devido às tensões residuais longitudinais, um ensaio *cut compliance* com trinca central não apresentaria nenhuma vantagem em relação ao caso de uma trinca lateral. A execução de experimentos envolvendo o método *cut compliance* é uma das duas frentes de pesquisa nas quais este trabalho deve se bifurcar.

A sub-rotina SIGINI do Abaqus demonstrou-se adequada na modelagem do campo de tensões residuais longitudinais e inadequada na modelagem do campo de tensões residuais transversais. Acredita-se que a solução seja determinar experimentalmente o campo de deformações inelásticas devido ao processo de soldagem, ao invés de determinar o campo de tensões residuais, que sofre influência da geometria da peça. O campo de deformações inelásticas deve ser imposto em um modelo de elementos finitos termo-mecânico, pela inserção de um campo de temperaturas não uniforme. Este tipo de abordagem, que utiliza o conceito de *eigenstrain* é suficientemente complexo para que um novo trabalho de mestrado ou mesmo de doutorado seja feito posteriormente, representando a segunda frente de pesquisa que dará continuidade a este trabalho.

Outro aspecto que deve ser melhor investigado é a modelagem do contato entre as superfícies de fratura, de modo que K_I^{cont} seja levado em consideração no valor de K_I^{tot} . Visto que não há expressões analíticas para K_I^{cont} , a modelagem do contato pelo método de elementos finitos apresenta-se com uma possível solução.

Referências

- Anderson, T. L. (1995). *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. (2nd ed.). CRC Press.
- Bao, R. & Zhang, X. (2010). An inverse method for evaluating weld residual stresses via fatigue crack growth test data. *Engineering Fracture Mechanics*, 77, 3143–3156.
- Bao, R., Zhang, X., & Yahaya, N. A. (2010). Evaluating stress intensity factors due to weld residual stresses by the weight function and finite element methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 77, 2550–2566.
- Barsoum, R. S. (1976). On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10, 25–37.
- Becker Jr, T. L., McNaney, J. M., Cannon, R. M., & Ritchie, R. O. (1997). Limitations on the use of the mixed-mode delaminating beam test specimen: Effects of the size of the region of k-dominance. *Mechanics of Materials*, 25, 291–308.
- Beghini, M., Bertini, L., & Vitale, E. (1994). Fatigue crack growth in residual stress fields: experimental results and modelling. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 17, 1433–1444.
- Broek, D. (1984). *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers.
- Broek, D. (1988). *The Practical Use of Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers.
- Bueckner, H. F. (1970). A novel principle for the computation of stress intensity factors. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 50, 529–545.
- Caraka, D. & Landis, C. M. (2011). On the path-dependence of the j-integral near a stationary crack in an elastic-plastic material. *Journal of Applied Mechanics*, 78.
- Cheng, W. & Finnie, I. (1994). An overview of the crack compliance method for residual stress measurement. In *Proceedings of the 4th International Conference on Residual Stress*.

- Ciavarella, M., Paggi, M., & Carpinteri, A. (2008). One, no one, and one hundred thousand crack propagation laws: A generalized barenblatt and botvina dimensional analysis approach to fatigue crack growth. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, *56*, 3416–3432.
- Cruse, T. A. & Raveendra, S. T. (1988). A general solution procedure for fracture mechanics weight function evaluation based on the boundary element method. *Computational Mechanics*, *3*, 157–166.
- Donne, C. D., Biallas, G., Ghidini, T., & Raimbeaux, G. (2000). Effect of weld imperfections and residual stresses on the fatigue crack propagation in friction stir welded joints. *Second International Conference on Friction Stir Welding*, 26–28.
- Dowling, N. E. (1999). *Mechanical Behavior of Materials: engineering methods for deformation, fracture and fatigue*. Ed. Prentice-Hall.
- E399 (2009). *Standard Test Method for Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness K_{Ic} of Metallic Materials*. ASTM.
- Elber, W. (1968). *Fatigue Crack Propagation*. PhD thesis, University of New South Wales.
- Elber, W. (1971). The significance of fatigue crack closure. In *ASTM STP 486*. American Society for Testing and Materials.
- Fett, T. (1988). Limitations of the petroski-achenbach procedure demonstrated for a simple load case. *Engineering Fracture Mechanics*, *29*, 713–716.
- Forman, R. G., Kearney, V. E., & Engle, R. M. (1967). Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. *Journal of Basic Engineering*, *89*, 459–464.
- Forman, R. G. & Mettu, S. R. (1990). Behavior of surface and corner cracks subjected to tensile and bending loads in ti-6al-4v alloy. Technical report, NASA.
- Forman, R. G., Shivakumar, V., Cardinal, J. W., Williams, L. C., & McKeighan, P. C. (2005). Fatigue crack growth database for damage tolerance analysis. Technical report, Federal Aviation Administration.

- Forman, R. G., Shivakumar, V., Mettu, S. R., Beek, J. M., Williams, L. C., & Yeh, F. (2002). *NASGRO: Fracture Mechanics and Fatigue Crack Growth Analysis Software* (4th ed.). NASA Johnson Space Center, European Space Agency e Federal Aviation Administration.
- Gdoutos, E. E. (2005). *Fracture Mechanics: An Introduction* (2nd ed.). Springer.
- Ge, Y. Z., Sutton, M. A., Deng, X., & Reynolds, A. P. (2006). Limited weld residual stress measurements in fatigue crack propagation: Part i. complete representation through least-squares finite-element smoothing. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 29, 524–536.
- Ghidini, T. & Donne, D. (2006). Fatigue crack propagation assessment based on residual stresses obtained through cut-compliance technique. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 30, 214–222.
- Golestaneh, A. F., Ali, A., & Zadeh, M. (2009). Modelling the fatigue crack growth in friction stir welded joint of 2024-T351 Al alloy. *Materials & Design*, 30, 2928–2937.
- Gregory, R. D. (1989). The spinning circular disc with a radial edge crack: an exact solution. *International Journal of Fracture*, 41, 39–50.
- Griffith, A. A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 221, 163–198.
- Harter, J. A. (2003). *AFGROW users guide and technical manual*.
- Henshell, R. D. & Shaw, K. G. (1975). Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9, 495–507.
- Hertzberg, R. W. (1996). *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*. John Wiley & Sons.
- Hill, M. R. (1996). *Determination of residual stress based on the estimation of eigenstrain*. PhD thesis, Stanford University.

- Hudson, C. M. (1969). Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 and 2024-T3 aluminium alloy specimens. In *NASA Technical Note 5390*. National Aeronautics and Space Administration.
- Irwin, G. R. (1956). Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys. *Sagamore Research Conference Proceedings*, 2, 289–305.
- Irwin, G. R. (1958). Fracture. In *Encyclopedia of Physics*, volume 6 (pp. 551). Springer.
- Irwin, G. R. (1960). Fracture mode transition for a crack transversing a plate. *Journal of Basic Engineering*, 82, 417–425.
- Irwin, G. R. (1968). Linear fracture mechanics, fracture transition and fracture control. *Engineering Fracture Mechanics*, 1, 241–257.
- Jacobs, J. A. (1950). Relaxation Methods Applied to Problems of Plastic Flow: I. Notched Bar Under Tension. *Philosophical Magazine*, 41, 349–361.
- John, R., Jata, K. V., & Sadananda, K. (2003). Residual stress effects on near-threshold fatigue crack growth in friction stir welds in aerospace alloys. *International Journal of Fatigue*, 25, 939–948.
- Jones, I. S. (1998). A wide range weight function for a single edge cracked geometry with clamped ends. *International Journal of Fracture*, 89, 1–18.
- Kanninen, M. F. & Popelar, C. H. (1985). *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press.
- Kaya, A. C. & Erdogan, F. (1980). Stress intensity factors and cod in an orthotropic strip. *International Journal of Fracture*, 16, 171–190.
- Khaled, T. (2005). An outsider looks at friction stir welding. Technical report, Federal Aviation Administration, em http://www.faa.gov/aircraft/air_cert/design_approvals/csta/publications/media/friction_stir_welding.pdf.
- Knott, J. F. (1973). *Fundamentals of Fracture Mechanics*. Butterworth.

- Lai, W. M., Rubin, D., & Krempl, E. (1993). *Introduction to Continuum Mechanics*. Butterworth Heinemann.
- Ma, Y. E., Staron, P., Fischer, T., & Irving, P. E. (2011a). Size effects on residual stress and fatigue crack growth in friction stir welded 2195-T8 aluminium - Part I: Experiments. *International Journal of Fatigue*, 33, 1417–1425.
- Ma, Y. E., Staron, P., Fischer, T., & Irving, P. E. (2011b). Size effects on residual stress and fatigue crack growth in friction stir welded 2195-T8 aluminium - Part II: Modelling. *International Journal of Fatigue*, 33, 1426–1434.
- Macherauch, E. (1987). *Advances in Surface Treatments*, volume 4. Pergamon Press.
- Matweb (2011). <http://www.matweb.com>.
- Morawietz, P., Mattheck, C., & Munz, D. (1985). Calculation of approximate weight functions in fracture mechanics by FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 1487–1497.
- Mura, T. (1987). *Micromechanics of Defects in Solids*. Martinus Nijhoff Publishers.
- Muskhelishvili, N. I. (1953). *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*.
- Newman, J. C. (1984). A crack opening stress equation for fatigue crack growth. *International Journal of Fracture*, 24(3), R131–R135.
- Ohta, A., Sasaki, E., Nihei, M., Kosuge, M., Kanao, M., & Inagaki, M. (1982). Fatigue crack propagation rates and threshold stress intensity factors for welded joints of HT80 steel at several stress ratios. *International Journal of Fatigue*, 4, 233–237.
- Paris, P. C. & Sih, G. C. (1965). Stress analysis of cracks. In *ASTM STP 381*. American Society for Testing and Materials.
- Parker, A. P. (1982). Stress intensity factors, crack profiles, and fatigue crack growth rates in residual stress fields. In *ASTM STP 776* (pp. 13–31). American Society for Testing and Materials.

- Petroski, H. J. & Achenbach, J. D. (1978). Computation of the weight function from a stress intensity factor. *Engineering Fracture Mechanics*, 10, 257–266.
- Rajiyah, H. & Atluri, S. N. (1989). Evaluation of K-factors and weight functions for 2-d mixed-mode multiple cracks by the boundary element alternating method. *Engineering Fracture Mechanics*, 32, 911–922.
- Rice, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35, 379–386.
- Rice, J. R. (1972). Some remarks on elastic crack-tip stress fields. *International Journal of Solids and Structures*, 8, 751–758.
- Schijve, J. (1981). Some formulas for the crack opening stress level. *Engineering Fracture Mechanics*, 14, 461–465.
- Schijve, J. (2009). Fatigue damage in aircraft structures, not wanted, but tolerated? *International Journal of Fatigue*, 31, 998–1011.
- Schindler, H.-J. (1999). Experimental determination of crack closure by the cut compliance technique. In R. C. McClung & J. C. Newman (Eds.), *Advances in Fatigue Crack Closure Measurement and Analysis*, volume 2. ASTM STP 1343.
- Schindler, H.-J. & Bertschinger, P. (1997). Some steps towards automation of the crack compliance method to measure residual stress distributions. In *Proceedings of the 5th International Conference on Residual Stresses*, volume 1.
- Schindler, H.-J., Cheng, W., & Finnie, I. (1996). Experimental determination of stress intensity factors due to residual stresses. *Experimental Mechanics*, 37, 272–277.
- Servetti, G. & Zhang, X. (2009). Predicting fatigue crack growth rate in a welded butt joint: the role of effective R ratio in accounting for residual stress effect. *Engineering Fracture Mechanics*, 76, 1589–1602.
- Sih, G. (1973). *Handbook of stress intensity factors*. Bethlehem (Pennsylvania): Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University.

- Sih, G. C., Paris, P. C., & Erdogan, F. (1962). Crack-tip, stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems. *Journal of Applied Mechanics*, 306–312.
- Tada, H., Paris, P. C., & Irwin, G. R. (1985). *The stress analysis of cracks handbook* (2nd ed.). Louis (Missouri): Paris Publications Incorporated.
- Timoshenko, S. P. & Goodier, N. P. (1970). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill.
- Ueda, Y., Fukuda, K., Nakacho, K., & Endo, S. (1975). A new measuring method of residual stresses with the aid of finite element method and reliability estimated values. *Transaction of JWRI*, 4, 123–131.
- Walker, K. (1970). The Effect of Stress Ratio During Crack Propagation and Fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 Aluminium. In *ASTM STP 462*. American Society for Testing and Materials.
- Winholtz, R. A. (2003). *Analysis of Residual Stress by Diffraction using Neutron and Synchrotron Radiation*, chapter 4, (pp.66). Taylor & Francis.
- Wu, X. R. & Carlsson, A. J. (1991). *Weight functions and stress intensity factor solutions*. Oxford: Pergamon Press.