

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR marcela Rodrigues
machado..... E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 24/02/2012


.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

Marcela Rodrigues Machado

Quantificação de Incertezas e Análise de Confiabilidade em Problemas Mecânicos

Campinas, 2012.

50/2012

Marcela Rodrigues Machado

Quantificação de Incertezas e Análise de Confiabilidade em Problemas Mecânicos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos

Orientador: José Maria Campos dos Santos

Campinas
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M18q	<p>Machado, Marcela Rodrigues Quantificação de incertezas e análise de confiabilidade em problemas mecânicos / Marcela Rodrigues Machado. --Campinas, SP: [s.n.], 2012.</p> <p>Orientador: José Maria Campos dos Santos. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.</p> <p>1. Incerteza. 2. Análise espectral. 3. Confiabilidade (Engenharia) Métodos estatísticos. I. Santos, José Maria Campos dos. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.</p>
------	---

Título em Inglês: Uncertainty quantification and reliability analysis in mechanical problems

Palavras-chave em Inglês: Uncertainty, Spectrum analysis, Reliability (Engineering) statistical methods

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: André Teófilo Beck, José Roberto de França Arruda

Data da defesa: 24-02-2012

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Quantificação de Incertezas e Análise de Confiabilidade em Problemas Mecânicos

Autora: Marcela Rodrigues Machado

Orientador: José Maria Campos dos Santos

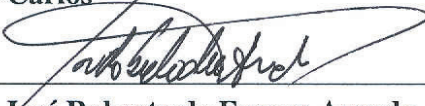
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos, Presidente
Unicamp



Prof. Dr. André Teófilo Beck
USP-São Carlos



Prof. Dr. José Roberto de França Arruda
Unicamp

Campinas, 24 de fevereiro de 2012.

DEDICATÓRIA:

Dedico este trabalho a minha princesa Sofia, aos meus pais Terezinha e José Carlos, ao meu querido Pedro, ao meu irmão Renan, a minha família e os amigos.

Agradecimentos

A minha família por todo apoio durante toda vida.

A minha filha Sofia.

Ao Pedro, pelo suporte e muitas vez me suportar.

Ao meu orientador Professor Dr. José Maria Campos dos Santos, pela ajuda e dedicação e confiança depositada em mim.

Aos colegas do DMC e as amigas Thais, Daniela, Priscila e a Beth pelas muitas risadas e ajuda inestimável durante esta etapa.

A Capes e ao Cnpq pelo apoio financeiro.

Aos Professores da FEM.

Todos têm algum grau de aleatoriedade em suas vidas, o melhor é tentar ser feliz com que se escolhe. Nunca se sabe com certeza o que vai acontecer, então é sempre bom estar preparado para tudo.

Leonard Mlodinow

Resumo

Este trabalho, trata do estudo de quantificação de incertezas ou aleatoriedade existentes em sistemas mecânicos. Neste sentido, o método de expansão em Polinômio de Caos e a simulação de Monte Carlos são aplicados para obter a resposta de um problema com parâmetros aleatórios. Além disso, estudos de confiabilidade em sistemas mecânicos também são abordados nesta dissertação. Com este propósito, os métodos de confiabilidade de primeira ordem e de segunda ordem são estudados e utilizados na análise de confiabilidade de sistemas mecânicos. Três problemas mecânicos diferentes foram abordados para os estudos mencionados. O primeiro aborda um problema dinâmico simples de um grau de liberdade, o segundo um problema de propagação de trinca em estrutura usando equação de Paris da mecânica da fratura linear e o terceiro um problema de detecção de falhas utilizando o método do elemento espectral em uma estrutura tipo viga. Para todos os casos parâmetros incertos foram considerados. Portanto, este trabalho contribui para o estudo da quantificação de incertezas em problemas de engenharia, bem como a confiabilidade de sistemas mecânicos levando em consideração as possíveis aleatoriedades presentes neles. Os casos simulados são realizados com o objetivo de verificar a validade do modelo incluindo os efeitos das incertezas dos parâmetros e avaliar sua eficiência computacional.

Palavras-chave: Quantificação de incertezas, Detecção e propagação de trinca, Detecção de Falha Estrutural, Método do elemento espectral, Confiabilidade estrutural.

Abstract

This work, deals with the study of uncertainty quantification or mechanical systems randomness. In this sense, the polynomial chaos expansion method and Monte Carlo simulation are applied to obtain the response of a problem with random parameters. In addition, reliability studies on mechanical systems are also discussed in this dissertation. For this purpose, the first- and second-order reliability methods are studied and used for the analysis of mechanical system reliability. Three different mechanical problems have been addressed in the studies mentioned. The first approach is a simple one degree of freedom dynamic problem, the second is a crack propagation problem based on Paris' linear fracture mechanics equation and the third is a damage detection problem using the spectral element method using, a beam type structure. For all cases uncertain parameters were considered. Therefore, this work contributes to the study of uncertainty quantification in engineering problems, as well as the reliability of mechanical systems taking into account the possible randomness present in them. The simulated cases are performed with the objective of verifying the validity of the model including the effects of uncertainties in parameters and to assess its computational efficiency.

Keywords: Uncertainty Quantification, Structural Reliability, Spectral Element Method, Crack propagation, Structural Damage Detection.

Lista de Ilustrações

1.1	Métodos de quantificação de incertezas.(SAMEER, 2006)	2
1.2	Ilustração experimental das variabilidades em um sistema real: (a)Modelo; (b)Medições das FRF. (DURAND <i>et al.</i> , 2008)	2
3.1	Fundamentos da confiabilidade estrutural (HALDAR E MAHADEVAN, 2000).	14
3.2	Conceito de estado limite.	17
3.3	Estado limite linear e não linear (BECK, 2011).	22
3.4	Rotação das coordenadas (HALDAR E MAHADEVAN, 2000).	23
3.5	Mapeamento da CDF inversa (HALDAR E MAHADEVAN, 2000).	28
3.6	Modelo de combinações do BBD para 3 variáveis.	31
3.7	Método de interpolação linear para a determinação do ponto central.	32
4.1	Sistema massa-mola de 1GDL com amortecimento histerético.	33
4.2	Médias e desvios padrão da resposta do sistema - CASO 1 : $\sigma_K = 2 : 10 : 52$	41
4.3	Médias e desvios padrão da resposta do sistema - CASO 2 com a ANÁLISE 1 : $\sigma_K = 2 : 10 : 52$ e $\sigma_M = 0,001$	43
4.4	Médias e desvios padrão da resposta do sistema - CASO 2 com a ANÁLISE 2 : $\sigma_K = 2$ e $\sigma_M = 0,001 : 0,01 : 0,051$	44
4.5	FRF do sistema de 1 GDL.	46
4.6	Probabilidade de falha do sistema - CASO 3 com a ANÁLISE 1 : $\sigma_K = 2 : 10 : 52$ e $\sigma_M = 0,001$	48
4.7	Probabilidade de falha do sistema - CASO 3 com a ANÁLISE 2 : $\sigma_K = 2$ e $\sigma_M = 0,001 : 0,01 : 0,051$	50
4.8	Modos básicos de deslocamento na superfície da trinca	53
4.9	Curva da taxa de propagação da trinca em fadiga.(BEDEN <i>et al.</i> , 2009)	55
4.10	Carga senoidal de amplitude e frequência constantes.	55
4.11	Modelo da placa com uma trinca de borda.	57
4.12	Comprimento da trinca versus números de ciclos.	58
4.13	Probabilidade de Falha para diferentes valores de $N_{serviço}$	60
4.14	Função de distribuição cumulativa do ciclo de falha.	61
4.15	PDF da distribuição de N_f	61

4.16	CDF da distribuição de N_f	61
4.17	Representação estrutural: (a)Estrutura física; (b)Modelo do elemento espectral.	63
4.18	Elemento espectral de viga saudável com dois nós.	64
4.19	Elemento espectral de viga semi-infinito.	66
4.20	elemento espectral de viga trincado.	67
4.21	Secção transversal da viga trincada na posição da trinca.	69
4.22	Modelo estrutural: (a)viga trincada; (b)viga saudável.	70
4.23	Representação da força pulso no tempo e na frequência (50 kHz).	71
4.24	Resposta em aceleração para as vigas saudável e trincada nas posições à $0, 25L$; $0, 50L$ e $0, 75L$	73
4.25	Gráfico de convergência da probabilidade de falha por Monte Carlo Direto com $a = 10\%h$ e $COV = 0, 1$	74
4.26	Probabilidade de falha com $L_1 = 25\%L$: (a)MC_RSM1; (b)MC_RSM2; e (c)MCS.	76
4.27	Probabilidade de falha com $L_1 = 50\%L$: (a)MC_RSM1; (b)MC_RSM2; e (c)MCS.	77
4.28	Probabilidade de falha com $L_1 = 75\%L$: (a)MC_RSM1; (b)MC_RSM2 ; e (c)MCS.	78
4.29	Comparação entre MCS, MC_RSM1 e MC_RSM2 em: (a)Baixa e (b)Alta probabilidade de falha com $L_1 = 25\%L$	79
4.30	Comparação entre MCS, MC_RSM1 e MC_RSM2 em: (a)Baixa e (b)Alta probabilidade de falha com $L_1 = 50\%L$	80
4.31	Comparação entre MCS, MC_RSM1 e MC_RSM2 em: (a)Baixa e (b)Alta probabilidade de falha com $L_1 = 75\%L$	80

Lista de Tabelas

4.1	Propriedades das variáveis para o problema dinâmico.	39
4.2	Probabilidades de falha e erros percentuais relativo ao MC1 - CASO 3 com a ANÁLISE 1	49
4.3	Probabilidades de falha e erros percentuais relativo ao MC1 - CASO 3 com a ANÁLISE 2	51
4.4	Propriedades das variáveis aleatórias para o problema de propagação de trinca.	57
4.5	Probabilidade de falha para o problema de propagação de trinca.	59
4.6	Propriedades e dimensões das vigas.	71
4.7	Tempo computacional.	81

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

a	- Tamanho da trinca
a_f	- Tamanho final da trinca
a_i	- Tamanho inicial da trinca
\hat{A}	- Solução de onda
b	- Base da secção transversal
\hat{B}	- Solução de amortecimento - ondas evanescentes
c	- Constante de Paris
\hat{C}	- Solução de onda
\hat{D}	- Solução de amortecimento - ondas evanescentes
\mathbf{D}	- Matriz derivativa quadrática
E	- Módulo de elasticidade
F	- Força
$f(X)$	- Função densidade de probabilidade
$F(X)$	- Função densidade cumulativa
$g(\cdot)$	- Função estado limite ou função de desempenho
$\hat{g}(\cdot)$	- Função estado limite aproximada pela RSM
$\hat{g}_i(x)$	- Funções de forma do elemento espectral
h	- Altura da secção transversal
$H(\omega)$	- FRF determinística
$H(\bar{\omega})$	- FRF da frequência de trabalho
$H_{max}(\bar{\omega})$	- Valor limite da amplitude da FRF
$I(X)$	- Função indicadora

k	-	Número de ondas
K	-	Rigidez
K	-	Fator de intensidade à tensão
K_{IC}	-	Tenacidade a fratura
\hat{K}	-	Matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral de viga saudável
\hat{K}_t	-	Matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral de viga semi-infinito
\hat{K}_c	-	Matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral de viga trincada
L	-	Parte determinística do operador estocástico
L	-	Comprimento
$L1$	-	Localização da trinca no comprimento
M	-	Massa
\hat{M}	-	Força nodal
$MC1$	-	simulação de Monte Carlo Direto
$MC2$	-	simulação de MC usando o índice de confiabilidade
MCS	-	simulação de Monte Carlo usando o modelo do SEM
N	-	Tamanho da amostra
N	-	Número de ciclos
N_{serv}	-	Número de ciclos limite para falha
N_f	-	Número de ciclos para falha
p_f	-	Probabilidade de falha
p_{f_2}	-	Probabilidade de falha do SORM
$PC1$	-	Polinômio do caos de primeira ordem
$PC2$	-	Polinômio do caos de segunda ordem
R	-	Resistência
S	-	Carga
S	-	Área de secção transversal
S_c	-	Área de secção transversal trincada

Letras Gregas

Π	-	Parte aleatório do operador estocástico
Λ	-	Operador estocástico
Γ_p	-	Polinômio do caos de ordem p
ξ	-	Variável aleatória ortonormal gaussiana
Ψ	-	polinômio de Hermite
μ	-	Média
σ	-	Desvio padrão
σ^2	-	Variância
β	-	Índice de segurança
$\Phi(\cdot)$	-	CDF normal padrão
$\phi(\cdot)$	-	PDF normal padrão
$\hat{\phi}$	-	Deslocamento nodal
$\mu_{X_i}^N$	-	Média normal equivalente de uma variável
$\sigma_{X_i}^N$	-	Desvio padrão normal equivalente de uma variável
α	-	Variação da profundidade de da trinca
α_{x_i}	-	Cosseno diretor
θ	-	Flexibilidade local adimensional da trinca
κ_i	-	Curvatura principal do estado limite
η	-	Fator de amortecimento
ω	-	Frequência circular
$\bar{\omega}$	-	Frequência de trabalho do sistema
ρ	-	Densidade do material
.....		

Superescritos

n	-	Número de variável aleatória
.....		

Subscritos

- p - Ordem do polinômio
- q - Número de variáveis aleatórias
- N - Valor determinístico (nominal)
.....

Abreviações

- serviço** - Serviço
- max** - Máximo
- min** - Mínimo
.....

Siglas

- AFOSM** - Método de Confiabilidade de Primeira Ordem Avançado (*Advanced First-order reliability method*)
- BBD** - (*Box-Behnken*)
- COV** - Covariância
- CDF** - Função Densidade Cumulativa (*Cumulative Density Function*)
- DOE** - Projeto de Experimentos (*Design of Experiment*)
- FEM** - Método dos Elemento Finitos (*Finite Element Method*)
- FORM** - Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (*First-order reliability Method*)
- FOSM** - Método de Primeira Ordem e Segundo Momento (*First-order Second-Moment Method*)
- FRF** - Função de Resposta em Frequência
- GDL** - Grau de Liberdade
- GEV** - Valor Extremo Generalizado (*Generalized extreme value distribution*)
- LEFM** - Mecânica da Fratura Linear Elástica
- LHS** - Hiper Cubo Latino (*Latin hypercube sampling*)
- LRFD** - Fator de Projeto Resistência Carga (*Load Resistance Factor Design*)
- MC** - simulação de Monte Carlo

- PC** - Expansão em Polinômio do Caos
 - PDF** - Função Densidade Probabilidade (*Probability Density Function*)
 - RSM** - Método da Superfície de Resposta (*Response Surface Method*)
 - RSM1** - Método da Superfície de Resposta primeira ordem
 - RSM2** - Método da Superfície de Resposta segunda ordem
 - rms*** - Valor Quadrático Médio (*Root Mean Square*)
 - SEM** - Método do Elemento Espectral (*Spectral Element Method*)
 - SFEM** - Método de elementos finitos estocástico (*Stochastic Finite Element Method*)
 - SORM** - Método de Confiabilidade de Segunda Ordem (*Second-order Reliability Method*)
-

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações	ix
Lista de Tabelas	xi
Lista de Abreviaturas e Siglas	xii
SUMÁRIO	xvii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos gerais	3
1.2 Estrutura do trabalho	4
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	11
3.1 Expansão em Polinômio do Caos	11
3.2 Fundamentos da Análise de Confiabilidade:	13
3.2.1 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem	18
3.2.2 Método de Confiabilidade de Segunda ordem	21
3.3 Simulação de Monte Carlo	25
3.3.1 Monte Carlo Direto	26
3.3.2 Método da Superfície de Resposta	27
4 APLICAÇÕES EM PROBLEMAS MECÂNICOS	33
4.1 Problema Dinâmico Estrutural Simples	33
4.1.1 Resultados simulados do problema dinâmico	39
4.2 Problema da Mecânica da Fratura	52
4.2.1 Propagação de trinca	52
4.2.2 Resultados simulados do problema de mecânica da fratura	56
4.3 Problema de Detecção de Falha Estrutural	62

4.3.1	Método do elemento espectral	63
4.3.2	Elemento espectral de viga saudável	63
4.3.3	Elemento espectral de viga semi-infinito	66
4.3.4	Elemento espectral de viga trincado	67
4.3.5	Flexibilidade da viga na posição da trinca	68
4.3.6	Resultados simulados do problema de detecção de falhas	70
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	83
5.1	Sugestões de Trabalhos Futuros	86
5.2	Publicações	87
	REFERÊNCIAS	88
	ÍNDICE	95

1 INTRODUÇÃO

Ao se tratar de projetos na área da engenharia, a fase inicial é o projeto conceitual do sistema mecânico, este considera possíveis falhas que possam vir ocorrer na vida útil do sistema e define um certo índice de segurança, além de buscar a aproximação do modelo às reais condições do sistema. No processo de manufatura do sistema mecânico real existe a presença de variabilidades nos parâmetros, condições de trabalho, manuseio etc; que são constantes e efetivos nele. Para tratar e quantificar as incertezas presentes em sistemas, o uso da modelagem estocástica é utilizada.

A modelagem estocástica de um problema começa com a identificação das variáveis, ou operadores, que são aleatórias. No caso das variáveis aleatórias é necessário construir um modelo probabilístico para cada uma delas. Esta é uma parte essencial da modelagem estocástica e dela depende o sucesso do modelo (SAMPAIO E RITTO, 2008). Quanto ao tratamento matemático de incertezas, as três predominantes são: análise de intervalos (DIMAROGONAS, 1996), teoria possibilísticas baseadas em aritmética nebulosa (fuzzy) (DeGersem *et al.*, 2005; Hanss, 2005; Moens e Vandepitte, 2005; Nunes *et al.*, 2006 *apud* Fabro, 2010) e teoria de probabilidade, que será utilizada neste trabalho.

Métodos que abordam a parte probabilística são divididos em duas áreas no tratamento com incertezas (Soize, 2000, 2003, 2005 *apud* Fabro, 2010). Um é o método probabilístico paramétrico em que incertezas são representadas através de distribuição de probabilidade e seus parâmetros (μ, σ). O outro é o método probabilístico não paramétrico que trata as incertezas associadas ao modelo mecânico-matemático utilizado para a prever o comportamento dinâmico da estrutura.

O diagrama ilustrado na Figura 1.1, faz um resumo da classificação de métodos que tratam com a incerteza.

Em geral, repetidas medições de um fenômeno físico podem gerar múltiplos resultados. Entre esses resultados, alguns são mais frequentes que outros. A ocorrência de múltiplos resultados que não podem ser descritos deterministicamente é descrito como resultados incer-

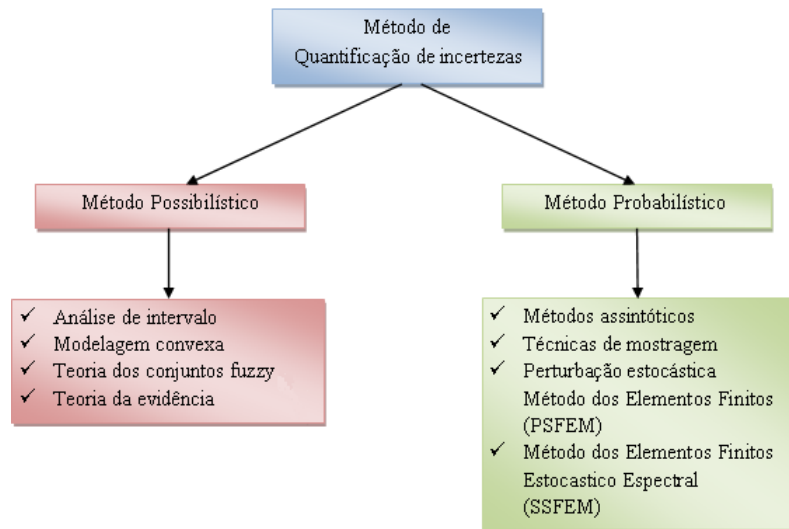


Figura 1.1: Métodos de quantificação de incertezas. (SAMEER, 2006)

tos, aleatórios ou estocástico (HALDAR E MAHADEVAN, 2000). Um caso que exemplifica a presença de incertezas em sistemas é um estudos sobre a aleatoriedade em medições realizada por Durand *et al.* (2008). Neste estudo os autores realizam medições vibroacústica experimentais para 20 carros do mesmo tipo com opcional extra. As variabilidades na resposta podem ocorrer devido ao processo de fabricação e a pequenas diferenças nas configurações do opcional. A Figura 1.2 mostra o modelo analisado e a resposta das medições das FRF para o ruído interno em 20 carros induzidos por excitações sólidas do motor e aplicadas à estrutura.

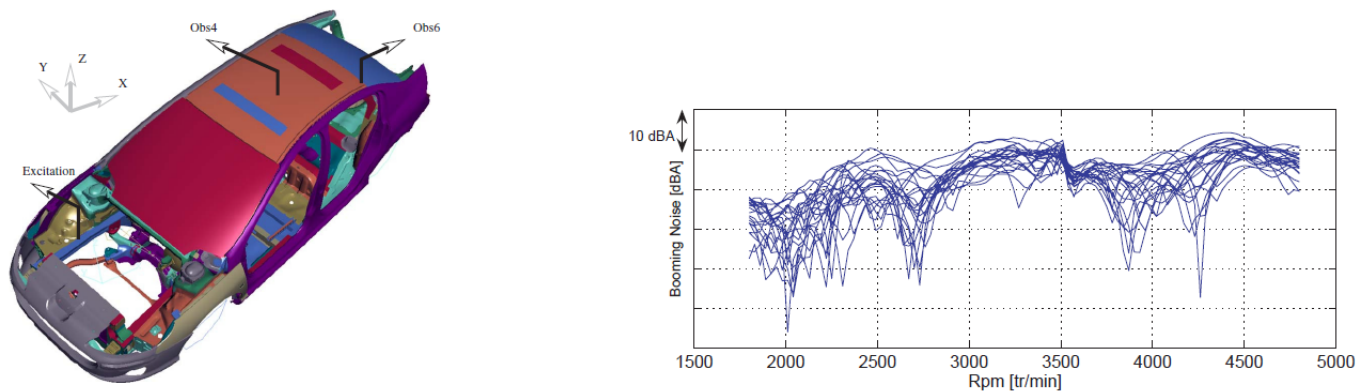


Figura 1.2: Ilustração experimental das variabilidades em um sistema real: (a)Modelo; (b)Medições das FRF. (DURAND *et al.*, 2008)

Os projetos de sistemas utilizam-se do conceito que a capacidade ou resistência deve ser maior que a solicitação. Tendo em mente este conceito, não importa como a resistência e a solicitação dos problemas de engenharia são modelados ou descritos o conceito de segurança deve se satisfazer. Quando a existência de incertezas é considerada nos sistemas o desempenho deles pode não ser absolutamente assegurado. Este desempenho probabilístico do sistema é referido como *confiabilidade*.

1.1 Objetivos gerais

Neste trabalho, incertezas ou aleatoriedade existentes em sistemas serão identificadas e quantificadas. Estudos de confiabilidade em sistemas são feitos e aplicados para três diferentes modelos. Assim, este trabalho contribui para o estudo e a quantificação de incertezas em problemas de engenharia, bem como para a confiabilidade de sistemas levando em consideração as possíveis aleatoriedades presentes neles.

Metodologias computacionais para quantificação de incertezas e confiabilidade de sistemas são aplicadas para os seguintes casos:

- Sistema dinâmico: o objetivo principal deste estudo foi a aplicação da expansão em Polinômio do Caos e análise da sua eficiência. Um estudo da confiabilidade também foi realizado;
- Problema da mecânica da fratura: neste caso é utilizada a equação de Paris (PARIS E ERDOGAN, 1963) com a teoria de confiabilidade estrutural. Três métodos probabilísticos serão utilizados: Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), Método de Confiabilidade de Segunda Ordem (SORM) e Simulação de Monte Carlo (MC);
- Problema de detecção de dano em estrutura: para esta análise um método de detecção de danos usando o elemento espectral juntamente com a teoria e quantificação de incertezas é utilizado. Os resultados apresentados mostram a eficiência do método na detecção da trinca quando a aleatoriedade do sistema é adicionado a ele. Além desta análise, três métodos são usados para avaliar a confiabilidade da estrutura danificada.

1.2 Estrutura do trabalho

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

Este primeiro capítulo é uma introdução do assunto estudado e traz um resumo dos casos apresentados. Nesta seção é apresentada a estrutura do trabalho.

O capítulo 2, apresenta uma revisão bibliográfica dos trabalhos publicados sobre os assuntos estudados. Os trabalhos mais utilizados para o desenvolvimento deste trabalho estão listados neste capítulo.

O Capítulo 3 expõe um embasamento teórico do método da expansão em Polinômio do Caos, que é uma solução estocástica da resposta do sistema projetada sobre uma base de polinômios ortogonais. Ainda neste capítulo são apresentados fundamentos da análise de confiabilidade são detalhados o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM) e o método de confiabilidade de segunda ordem (SORM). Para finalizar, uma seção sobre simulação de monte carlo, que inclui a simulação de monte carlo direto e o método da superfície de resposta são comentados.

No Capítulo 4 três diferentes problemas são aplicados. O primeiro é um problema dinâmico, o segundo é um problema da mecânica da fratura, que envolve o caso da propagação de trinca em placa e o terceiro e ultimo é um problema de detecção de dano em estruturas. Nos três problemas estudados, a teoria sobre o assunto em questão é abordada; em seguida os resultados e comentários são apresentados.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões dos métodos e dos resultados obtidos em cada caso, sugestões para trabalhos futuros e as publicações feitas durante o desenvolvimento deste trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é feita uma revisão das principais publicações que foram utilizadas como base para o desenvolvimento do trabalho. O enfoque deste estudo está relacionado com quantificação de incertezas associados a problemas mecânicos, bem como métodos para a confiabilidade estrutural. As seguintes publicações estão relacionadas com o estudo da parte de quantificação de incertezas e de confiabilidade.

Mahadevan e Haldar (2000) publicaram dois livros muito interessantes no estudo da confiabilidade utilizando processos estocásticos. O primeiro (MAHADEVAN E HALDAR, 2000), enfatiza os conceitos básicos de risco, confiabilidade e estatística para a análise e projetos de engenharia baseados em riscos. Assim, o livro apresenta conceitos básicos de risco e confiabilidade, começando com fundamentos da probabilidade e estatística, bem como apresentando conceitos da análise de confiabilidade aplicado a sistemas simples. Apresenta, também, discussões sobre os métodos para quantificar incertezas em termos da coleta de dados e análise para uma ou múltiplas variáveis aleatórias; estudos sobre vários métodos para evolução de incerteza na resposta de sistemas usando informação de variáveis aleatórias envolvidas no problema; e técnicas simples e avançadas de confiabilidade estrutural. No segundo livro Haldar e Mahadevan (2000), introduzem conceitos avançados, como a análise por elementos finitos estocástico (SFEM). Eles desenvolvem o conceito e a implementação do SFEM baseado na análise de confiabilidade em um contexto do projeto estrutural. Para demonstrar a robustez do método, problemas e exemplos são abordados considerando casos linear, não linear, estático e dinâmico.

Choi *et al.* (2007) fornecem ao leitor uma base da teoria de probabilidade, métodos estatísticos, métodos de análise de confiabilidade e incluem métodos de amostragem como; Simulação de Monte Carlo (MC) e Hipercubo Latino (LHS). O método de confiabilidade de primeira e segunda ordem, FORM e SORM respectivamente, são embasado e aplicados a diversos problemas mecânicos. Os autores também explicam como usar a expansão estocástica, incluindo a expansão em polinômio de caos e a expansão de Karhunen-Loeve para a otimização e a análise de confiabilidade de problemas práticos de engenharia.

Ghanem e Spanos (1991) apresentam neste livro uma extensão da formulação espectral de métodos de elementos finitos determinísticos para o espaço de funções aleatórias. Os conceitos são aprofundados com aplicações à problemas no campo da mecânica estrutural. Os parâmetros aleatórios do sistema são modelados com um processo estocástico de segunda ordem, definido pela média e a função de covariância. Portanto, a expansão de Karhunen-Loeve é usada para representar esse processo estocástico em termos das variáveis aleatórias não correlacionadas e uma representação do Polinômio do Caos é identificada. Neste contexto, a solução do processo é aproximado pela projeção sobre um subespaço finito por esses polinômios. O resultado obtido utilizando esse método é comparado com resultado encontrado pela solução do problema utilizando a simulação de Monte Carlo.

Dessombz *et al.* (2000) propõe um método para calcular autovalores e autovetores de uma estrutura contendo parâmetros estocásticos. Este método é baseado na expansão em polinômio do caos, abordado por Ghanem e Spanos (1991) e estendido em busca das propriedades dos autovetores e autovalores aleatórios, que são usados para calcular a função de transferência (FRF) aleatória do sistema.

Dessombz *et al.* (2001), seguindo a mesma ideia da pesquisa anterior, utilizam o mesmo método para calcular a característica estocástica da FRF das estruturas incluindo parâmetros aleatórios. Este método foi baseado na teoria do caos polinomial, que é estendido para um caso dinâmico. A solução é expandida numa base ortogonal polinomial, cujas variáveis aleatórias são ortonormais gaussianas. Os resultados deste método são investigados em termos de sensibilidade da solução versus os valores dos parâmetros aleatórios, os coeficientes de amortecimento e a ordem dos polinômio. A distribuição estocástica da FRF também é avaliada. Para validar todos os resultados os autores utilizam simulações de Monte Carlo.

Beck (2011) escreveu uma apostila que é um material bem completo sobre confiabilidade estrutural, onde o autor começa com conceitos sobre incertezas, confiabilidade e definição e exemplos de risco. A teoria de probabilidade tem enfoque em variáveis aleatórias e há um capítulo sobre processo estocástico. Na parte que inclui a confiabilidade estrutural são citados conceitos de estado limite, coeficiente de segurança, os métodos de perturbação FOSM, FORM e SORM, idealizações de sistemas estruturais, múltiplos modos de falha e sistemas estruturais complexos. O autor também aborda a parte de simulação de Monte Carlo e fala sobre a

geração de variáveis aleatórias, técnicas de redução de variância e do método da Superfície de Reposta.

Para a aplicação da teoria da quantificação de incertezas e a de confiabilidade três diferentes problemas mecânicos foram estudados. O primeiro envolveu um problema dinâmico, assim as seguintes referências foram utilizadas.

Rao (2008) apresenta os principais fundamentos da engenharia de vibrações. A teoria, os aspectos de computação e as aplicações das vibrações são mostrados de maneira simples e dinâmica e as técnicas de análise por computador são amplamente abordadas. O livro ainda dispõe de um grande número de exemplos de problemas para ilustrar os princípios e conceitos estudados.

J.Inman (2001) apresenta um curso na área de vibrações mecânicas. Além dos tópicos normalmente apresentados em outros texto sobre este assunto, ele tem a adição de tópicos na área de projetos, medições, amortecimentos e aspectos computacionais. O autor faz uma integração de tópicos tradicionais na área de vibrações com ênfase em projetos e uma introdução de análise modal.

Outro problema analisado foi o estudo sobre a propagação de trincas em estruturas, assim, a teoria da mecânica da fratura foi aplicada. As principais referências utilizadas neste caso estão listadas a seguir.

Beden *et al.* (2009) fazem uma revisão dos modelos sobre a vida em fadiga de estruturas estudados durante as últimas duas décadas, o qual inclui a previsão de modelos sobre cargas constantes e de amplitude variadas. Para a seleção do modelo Beden *et al.* fazem uma sugestão que esta deve ser usualmente baseada na experiência e preferência do analista.

Gdoutos (1993) oferece uma cobertura abrangente da mecânica da fratura, desde princípios básicos e aplicações tradicionais até problemas de materiais compósito, filmes finos e nano materiais. Em todos estes problemas a mecânica da fratura desempenha um papel importante para a predição de falha e projeto de segurança de materiais e estruturas. O livro contém muitos exemplos de problemas da mecânica da fratura no campo da engenharia.

Nespurek (2009) apresenta em sua tese teorias de fratura, fadiga, mecânica computacional e método da análise de confiabilidade. Com essas ferramentas o autor propõe uma nova abordagem no conceito da análise estocástica de propagação de trinca em fadiga. A contribuição da tese é no âmbito do acordo do modelo numérico com a análise estocástica do problema de propagação de trinca.

Rizzatti (2005) implementou um elemento finito contendo três graus de liberdade por nó, uma trinca na região central, levou em consideração os esforços de flexão, carregamentos axiais e implementou o efeito do cisalhamento. Outro diferencial é a implementação do efeito da zona plástica na ponta da trinca, considerando os carregamentos citados. Nesta trabalho o autor compara resultados de simulações numéricas com análise modal experimental.

O terceiro e ultimo problema estudado foi a modelagem estocástica de uma viga trincada utilizando o Método de Elemento Espectral. As seguintes publicações foram estudadas.

Krawczuk *et al.* (2002) apresentaram um método de elemento finito espectral para viga trincada de Timoshenko que é adequado na análise de problemas de propagação de ondas no calculo dos parâmetros modais da estrutura com dano. Os autores analisam a influência dos parâmetros da trinca especialmente a mudança da localização da trinca, na propagação de onda examinada. Exemplos numéricos são dados com o objetivo de mostrar a influência da trinca na propagação da onda pela estrutura, e a capacidade de detectar o exato local do dano na estrutura.

Doyle (1997) aborda a análise espectral como um meio de investigar a propagação de ondas em estruturas. Este é um método eficiente na análise de ondas e abrangente na análise estrutural, incluindo método numéricos e métodos experimentais. O autor introduz os fundamentos da análise espectral e transformação de Fourier, além de trazer um tratamento completo de ondas em barras, vigas e placas de introduzir um método de matriz para a análise de estruturas complexas. O texto inclui também uma introdução à teorias estruturais de alta ordem.

Dimarogonas e Papadopoulos (1983) apresentam um estudo que exhibe uma resposta dinâmica de um eixo, devido à flexibilidade local da seção trincada. Este considerava apenas

um modo de abertura da trinca sujeita a carregamento de flexão baseado no fator intensidade de tensão. Um rotor de Laval com uma trinca aberta é investigado por meio de aplicação da teoria estudada. Anos mais tarde, Dimarogonas e Papadopoulos (1987) estenderam o modelo do elemento contendo a trinca para três modos de abertura da trinca devido aos possíveis esforços internos (tração, flexão e torção). Isto permitiu verificar o efeito do acoplamento entre as vibrações longitudinais e de flexão. Esta formulação por elementos finitos utilizando os fatores de intensidade de tensão tem sido uma das mais utilizadas para simulações de trincas em estruturas.

Pereira (2009) investiga o problema de propagação de ondas em estruturas do tipo barra com modelos de alta ordem. O enfoque principal do trabalho concentra-se na implementação de modelos numéricos que representam o fenômeno da propagação de ondas em barras saudáveis e danificadas por uma trinca. Para a investigação do problema o autor utilizou o método do elemento espectral e quatro diferentes modelos de barra, o modelo elementar; modelo de Love ou do primeiro modo; o modelo de Mindlin-Herrmann ou de dois modos; e o modelo de Mindlin-McNiven ou dos três modos.

Fabro *et al.* (2010) utilizam o método do elemento espectral para modelar uma viga trincada. A flexibilidade da trinca, que é um parâmetro para modelar a trinca, é derivada do teorema de Castigliano é considerada como parâmetro aleatório do sistema. Assim, o modelo probabilístico é construído diretamente para a flexibilidade. Dois diferentes modelos probabilísticos são construídos, onde as funções densidade de probabilidade são obtidos usando o Princípio da Máxima Entropia. Simulações de Monte Carlo são realizadas a fim de estimar a função resposta em frequência (FRF), o qual é analisada e discutida.

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 Expansão em Polinômio do Caos

Esta seção trata do método de análise das características da resposta de uma estrutura dinâmica incluindo parâmetros aleatórios. O método apresentado está baseado na teoria do Polinômio do Caos (PC) cujo conceito básico pode ser entendido como sendo uma solução estocástica projetada sobre uma base de polinômios ortogonais cuja variáveis são ortonormais e gaussianas (Ghanem e Spanos, 1991; Dessombz *et al.*, 2000). As propriedades dessa base polinomial são utilizadas para gerar um sistema de equações lineares através de projeções sobre os polinômios (Ghanem e Brzakala, 1996, Ghanem e Kruger, 1996). A resolução desse sistema conduz a uma expansão da solução, que pode ser utilizada para encontrar a média (analítica ou numérica), o desvio padrão ou a distribuição da solução aleatória (DESSOMBZ *et al.*, 2000). Wiener foi o primeiro a introduzir o caos homogêneo para representar uma processo gaussiano aleatório de segunda ordem. Entretanto, foi usado primeiramente por Ghanem e Spanos para resolver problemas da mecânica estrutural usando um enfoque espectral do método dos elementos finitos estocástico (GHANEM E SPANOS, 1991). O problema pode ser formulado como:

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x}, \theta)u(\mathbf{x}, \theta) = [\mathbf{L}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Pi}(\mathbf{x}, \theta)]u(\mathbf{x}, \theta) = F(\mathbf{x}, \theta), \quad (3.1)$$

onde \mathbf{L} é a parte determinística e $\mathbf{\Pi}$ é a parte aleatória do operador estocástico $\mathbf{\Lambda}$. O objetivo é resolver a Eq.(3.1) para a resposta $u(\mathbf{x}, \theta)$ em função da excitação $F(\mathbf{x}, \theta)$, onde \mathbf{x} pertence ao espaço de Hilbert definido por $H = \{f/f : D \rightarrow \mathbb{R}\}$, e θ pertence ao espaço de probabilidades (Ω, Ψ, P) , onde o espaço de funções mensuráveis é definido por $\Theta = \{g/g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Considere que $\{\xi(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$ é um conjunto de variáveis aleatórias ortonormais gaussianas e que Γ_p é o polinômio do caos de ordem p . Pode-se mostrar que qualquer elemento $w(\theta)$

definido no espaço Θ pode ser representado por:

$$\begin{aligned}
w(\theta) = & a_0\Gamma_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{i1}\Gamma_1(\xi_{i1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) \\
& + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta), \xi_{i_3}(\theta)) + \dots,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

o qual pode ser reescrita na forma truncada como:

$$w(\theta) = \sum_{i=1}^Q a_i \Psi_i. \tag{3.3}$$

O polinômio do caos Ψ_i corresponde aos polinômios de Hermite multidimensionais obtidos por:

$$\Gamma_p(\xi_{i1}, \dots, \xi_{ip}) = (-1)^n e^{1/2\xi^t \xi} \frac{\partial^n}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_n}} e^{-1/2\xi^t \xi}, \tag{3.4}$$

onde ξ consiste de n variáveis aleatórias gaussianas ortonormais. Por exemplo, os polinômios do caos bidimensionais de ordem 0, 1 e 2 são:

$$\Psi_0 = 1 \qquad \text{Ordem 0} \qquad (3.5)$$

$$\Psi_1 = \xi_1 \quad , \quad \Psi_2 = \xi_2 \qquad \text{Ordem 1} \qquad (3.6)$$

$$\Psi_3 = \xi_1^2 - 1 \quad , \quad \Psi_4 = \xi_1 \xi_2 \quad , \quad \Psi_5 = \xi_2^2 - 1 \qquad \text{Ordem 2.} \qquad (3.7)$$

Quando a função de correlação de $\mathbf{\Pi}$ é conhecida, uma expansão em série de Karhunen-Loeve é apropriada (GHANEM E SPANOS, 1991). Em geral, os problemas mecânicos considerados podem ser escritos como:

$$([L] + \sum_{q=1}^Q \xi_q [\Pi_q]) \{u\} = \{F\}. \tag{3.8}$$

Uma decomposição do vetor $\{u\}$ sobre o polinômio do caos de Q -variáveis é dada por:

$$\{u\} = \sum_{n=0}^N \{u_n\} \Psi_n(\{\xi_i\}_{i=1}^Q) \quad (3.9)$$

Substituindo a Eq.(3.9) na Eq.(3.8), multiplicando por Ψ_m , fazendo a média e utilizando as propriedades de ortogonalidade do polinômio, obteremos:

$$\{u_m\} \langle \Psi_m^2 \rangle = \sum_{q=1}^Q \sum_{n=0}^N \{u_n\} \langle \xi_q \Psi_n \Psi_m \rangle [\Pi_q] = \{F\} \langle \Psi_m \rangle \quad (3.10)$$

É importante observar que os valores de $\langle \Psi_m^2 \rangle$ e $\langle \xi_q \Psi_n \Psi_m \rangle$ devem ser calculados apenas uma vez e mantidos para serem usados em todos os cálculos deste método.

A obtenção da Eq.(3.10) para todos $m = 0, \dots, N$ produz um sistema de $(N + 1)$ equações algébricas lineares, cuja solução corresponde aos vetores $\{u_n\}$ (DESSOMBZ *et al.*, 2001). Uma vez que todos os $\{u_n\}$ são conhecidos, é fácil encontrar a média e a variância de $\{u\}$, onde a média é dada por:

$$\mu = \{u_0\} \quad (3.11)$$

e a variância é dada por

$$\sigma^2 = \sum_{n=1}^N \{u_n^2\} \langle \Psi_n^2 \rangle \quad (3.12)$$

3.2 Fundamentos da Análise de Confiabilidade:

A análise e o projeto de engenharia consistem em proporcionar os elementos do sistema de modo que estes satisfaçam vários critérios de desempenho, segurança, manutenção e durabilidade sobre diversas condições de solicitação. Por exemplo, uma estrutura deverá ser projetada tal que sua resistência seja maior que os efeitos da solicitação (carga) aplicada.

Como é sabido, existem numerosas fontes de incertezas nas cargas e nos parâmetros relacionados com a resistência. Assim, a necessidade de incorporar estas incertezas nas análises e projetos de engenharia tem levado a uma variedade de métodos de confiabilidade (HALDAR E MAHADEVAN, 2000). Nesta seção apresentam-se alguns dos conceitos básicos relacionados com alguns dos métodos de confiabilidade de sistemas usados nesta dissertação.

Na presença de incertezas não é fácil satisfazer as solicitações básicas de um projeto. A figura 3.1 ilustra um caso simples considerando duas variáveis aleatórias R (resistência) e S (solicitação). A aleatoriedade das variáveis são caracterizadas por sua médias (μ_R e μ_S), desvios padrão (σ_R e σ_S) e as correspondentes funções densidade de probabilidade (PDF) ($f_R(r)$ e $f_S(s)$). A figura 3.1 mostra também os valores nominais desses parâmetros (R_N e S_N), os quais são usados em uma abordagem convencional baseada no fator de segurança.

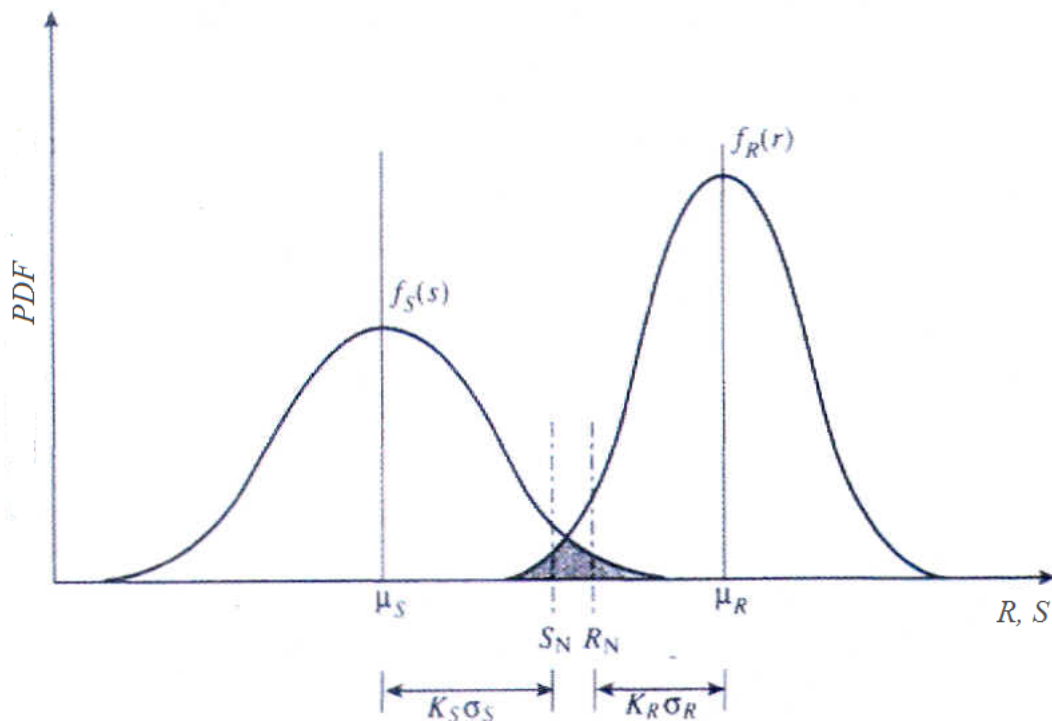


Figura 3.1: Fundamentos da confiabilidade estrutural (HALDAR E MAHADEVAN, 2000).

Introduzido por (FREUDENTHAL, 1956), o conceito do **projeto baseado em risco** tem se desenvolvido desde então e muito progresso tem sido feito na área da engenharia estrutural. Recomendações de projeto usando o conceito *Load and Resistance Factor De-*

sign (LRFD) estão essencialmente baseados no formato do projeto baseado na confiabilidade estrutural. Nas discussões seguintes enfatizaremos este conceito.

Da figura 3.1 observa-se que o projeto seguro é garantido por uma abordagem determinística, a qual exige que R_N seja maior que S_N com uma margem de segurança especificada por:

$$SF = \frac{R_N}{S_N}. \quad (3.13)$$

onde SF é o fator de segurança. No projeto determinístico o fator de segurança pode ser aplicado para a resistência, para a carga ou para ambos. A estratégia desta abordagem convencional pode ser explicada considerando-se a área sobreposta entre as duas curvas da figura 3.1, a qual fornece uma *medida qualitativa* da probabilidade de falha. Essa área sobreposta depende de três fatores relacionados com as duas curvas: 1) suas **posições relativas**, que mostram que quando a distância entre as duas curvas aumenta a área de sobreposição e a probabilidade de falha são reduzidas. Tal efeito pode ser representada pelas médias μ_R e μ_S ; 2) suas **dispersões**, as quais revelam que se as duas curvas são estreitas, então a área de sobreposição e a probabilidade de falha são pequenas. Essa dispersão pode ser caracterizada pelos desvios padrão σ_R e σ_S ; e 3) suas **formas**, que são representadas pelas PDF's $f_R(r)$ e $f_S(s)$. O projeto seguro tem como objetivo selecionar as variáveis de projeto de tal forma que a área de sobreposição entre as duas curvas seja tão pequena quanto possível, dentro das limitações econômicas. Assim, as posições das curvas podem ser deslocadas através do uso de fatores de segurança.

Uma abordagem mais consistente seria calcular a probabilidade de falha levando em consideração todos os três fatores de superposição das curvas e escolhendo as variáveis de projeto de modo que a probabilidade de falha aceitável seja obtida. Este é o fundamento do conceito do **projeto baseado na probabilidade de falha**. Entretanto, as informações das PDF's da carga e da resistência não estão usualmente disponíveis e torna-se necessário formular uma metodologia de projeto usando-se apenas as informações das médias e desvios padrão.

Na figura 3.1, as incertezas nas variáveis de carga e de resistência estão expressas na

forma das PDF's, logo, é possível expressar a medida do risco em termos da probabilidade de falha por:

$$p_f = P(\text{falha}) = P(R < S) \quad (3.14)$$

ou

$$p_f = \int_0^\infty \left[\int_0^S f_R(r) dr \right] f_S(s) ds = \int_0^\infty F_R(s) f_S(s) ds \quad (3.15)$$

onde $F_R(s)$ é a CDF de R avaliada em S . A Eq.(3.15) é a equação básica do projeto baseado em risco, a qual estabelece que quando a carga for $S = s$, a probabilidade de falha será $F_R(s)$. Como a carga é uma variável aleatória, a integração precisa ser feita para todos os valores possíveis de S , com suas respectivas probabilidades representadas pela PDF de S . Nem sempre a CDF de R ou a PDF de S estão disponíveis na forma explícita, logo a integração da Eq.(3.15) não pode ser obtida facilmente. Contudo, para alguns casos especiais a Eq.(3.15) pode ser resolvida sem realizar a integração.

O conceito da teoria clássica da confiabilidade estrutural pode ser apresentado de maneira mais formal considerando os parâmetros de carga e resistência como as variáveis aleatórias X_i e uma relação funcional entre elas correspondendo a cada critério de desempenho. Esta relação ou *função de desempenho* pode ser escrita matematicamente como:

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (3.16)$$

A *superfície de falha* ou o *estado limite* de interesse pode ser definido como $g(\mathbf{X}) = 0$. A superfície de falha e as regiões segura e insegura estão mostradas na figura 3.5. A *equação de estado limite* ou *função de desempenho* pode ser uma função explícita ou implícita, linear ou não-linear e pode ter uma forma simples ou complicada. Portanto, métodos de análise de confiabilidade tem sido desenvolvidos para diferentes tipos e complexidades de equações de estado limite. Da Eq.(3.16) observa-se que a falha ocorre quando $g(\mathbf{X}) < 0$. Logo, a probabilidade de falha é dada pela integral

$$p_f = \int \dots \int_{g(\mathbf{X}) < 0} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (3.17)$$

onde $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a função densidade de probabilidade conjunta para as variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n e a integração é feita sobre a região de falha ($g(\mathbf{X}) \leq 0$). Se as variáveis são estatisticamente independentes a função densidade de probabilidade conjunta pode ser substituída pelo produto das PDF's individuais.

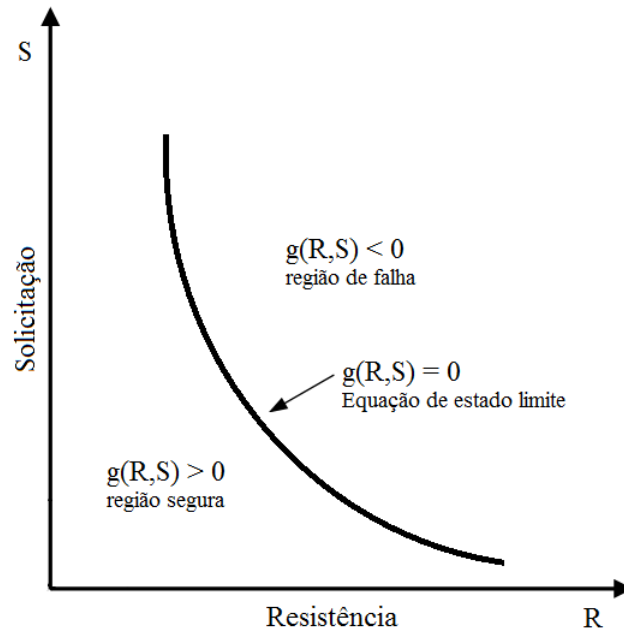


Figura 3.2: Conceito de estado limite.

O cálculo da probabilidade de falha (p_f) através da Eq.(3.17) é a equação fundamental da análise de confiabilidade. Em geral, a função densidade de probabilidade conjunta de variáveis aleatórias é quase impossível de ser obtida, e mesmo que fosse obtida a avaliação de integrais múltiplas é muito complicada. Portanto, uma abordagem factível é usar aproximações analíticas desta integral que são mais simples de calcular. Tais métodos podem ser agrupados em dois tipos: métodos de confiabilidade de primeira ordem (*First-Order Reliability Methods* - FORM) e métodos de confiabilidade de segunda ordem (*Second-Order Reliability Methods* - SORM).

3.2.1 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem

O método de confiabilidade de primeira ordem foi desenvolvido com base no método de primeira ordem e segundo momento estatístico (First-Order Second-Moment - FOSM). Este considera o primeiro e o segundo momento estatístico das variáveis aleatórias, isto é, a média e o desvio padrão. No método FOSM a equação de estado limite é aproximada por um função de primeira ordem (linear) usando uma expansão em série de Taylor e a informação estatística é limitada ao segundo momento (HALDAR E MAHADEVAN, 2000). Isso equivale a considerar todas as variáveis aleatórias do problema com uma distribuição normal. O método FORM como evolução do FOSM permite analisar o problema incorporando as funções das distribuições, bem como a correlação entre as variáveis aleatórias. No contexto da confiabilidade estrutural uma função de estado limite pode ser definida por:

$$Z = R - S. \quad (3.18)$$

O evento da falha ocorre quando $R < S$, ou $Z < 0$. Assumindo que R e S são variáveis aleatórias normais padrão e estatisticamente independentes, podemos determinar a probabilidade de falha como:

$$p_f = P(Z < 0) \quad (3.19)$$

ou

$$p_f = 1 - \Phi \left(\frac{\mu_r - \mu_s}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}} \right) \quad (3.20)$$

onde Φ é a função densidade de probabilidade cumulativa (CDF) normal padrão. A probabilidade de falha depende da relação entre a média e o desvio padrão de Z , esta relação é conhecida como *índice de confiabilidade* denotado por β , logo,

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \left(\frac{\mu_r - \mu_s}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}} \right) \quad (3.21)$$

Assim a probabilidade de falha em termos de β pode ser reescrita como:

$$p_f = 1 - \Phi(\beta) \quad (3.22)$$

Para o método FORM o valor inicial de β é de extrema importância, a escolha desse valor pode ser encontrado através de um solução iterativa, por exemplo, aplicando o método de Newton-Haphson. Choi *et al.* (2007) apresenta um método para computar o valor inicial do índice de confiabilidade usando o valor médio e o valor do desvio padrão da aproximação da função estado limite $g(\mathbf{X})$ dada por:

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (3.23)$$

onde o valor médio e o desvio padrão são dados por:

$$\mu_g = E[g(\mu_x)] = g(\mu_x) \quad (3.24)$$

$$\sigma_g = \sqrt{\text{var}[g(\mu_x)]} = \sqrt{[\nabla g(\mu_x)]^T * \nabla g(\mu_x)} = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g(\mu_x)}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \right]^{1/2} \quad (3.25)$$

Observou-se que o FORM é aplicável a variáveis aleatórias com distribuição normal. Este fato dificulta a sua aplicação pois comumente nos problemas de engenharia nos deparamos com variáveis não-normais e as vezes correlacionadas. Assim, para se tratar com variáveis deste tipo é necessário a transformação de variável não-normal em uma variável normal equivalente. Utilizando a Transformação de Rosenblat (ROSENBLATT, 1952) pode-se obter a variável normal padrão equivalente estatisticamente independente. Outros métodos usados nesta transformação são o de Rackwitz e Fiessler (1976), Chen e Lind (1983) e Wu e Wirsching (1987).

Duas condições são impostas para a estimação do parâmetro da distribuição normal equivalente, $\mu_{X_i}^N$ e $\sigma_{X_i}^N$. A CDF e a PDF da variável nos dois espaços devem ser iguais no ponto

de transformação. Considerando cada variável não-normal estatisticamente independente a CDF da variável normal equivalente pode ser expressa por,

$$\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = F_{x_i}(x_i^*) \quad (3.26)$$

onde, $\Phi()$ é a CDF, $\mu_{X_i}^N$ e $\sigma_{X_i}^N$ são a média e o desvio padrão da variável normal equivalente, respectivamente, e $F_{x_i}(x_i^*)$ é a CDF da variável não-normal original.

$$\mu_{X_i}^N = x_i^* - \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)]\sigma_{X_i}^N \quad (3.27)$$

A PDF da variável normal equivalente pode ser calculada como

$$\frac{1}{\sigma_{X_i}^N} \Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = f_{x_i}(x_i^*) \quad (3.28)$$

em que $\phi()$ representa a PDF da variável normal equivalente.

$$\sigma_{X_i}^N = \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)]\}}{f_{x_i}(x_i^*)} \quad (3.29)$$

A solução de problemas de confiabilidade via FORM é descrito a seguir (HALDAR E MAHADEVAN, 2000).

Algoritmo FORM: Para a estimação do índice de segurança e obtenção da probabilidade de falha sugere-se os seguintes passos:

1. Definir uma equação de estado limite apropriada;
2. Calcular ou assumir um valor inicial do índice de segurança β ;
3. Assumir os valores iniciais do ponto de projeto x_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$. Na ausência de qualquer outra informação, o ponto de projeto inicial pode ser assumido como os valores médios das variáveis aleatórias;
4. Calcular a média e o desvio padrão no ponto de projeto da distribuição normal equi-

valente caso a variável não seja normal;

5. Calcular as derivadas parciais $(\frac{\partial g}{\partial X_i})^*$ avaliadas no ponto de projeto x_i^* ;
6. Calcular os cossenos diretores α_i no ponto de projeto com:

$$\alpha_{x_i} = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^* \sigma_{x_i}^N}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g(\mu_x)}{\partial x_i} \sigma_{x_i}^N\right)^2}} \quad (3.30)$$

7. Calcular os novos valores para o ponto de projeto x_i^* como:

$$x_i^* = \mu_{x_i}^N - \alpha_{x_i} \beta \sigma_{x_i}^N \quad (3.31)$$

Após a primeira interação, se for necessário, repetir os passos de 4 à 7 até a convergência de α_{x_i} com uma tolerância pré-determinada. Um nível de tolerância comum é 0.005. Uma vez que os cossenos diretores tenham convergido, um novo ponto de projeto pode ser estimado, mantendo-se β como o parâmetro incógnito.

8. Calcular um valor atualizado para $\Delta\beta$ usando a condição de que a equação de estado limite deve ser satisfeita no novo ponto de projeto;
9. Repetir os passos de 3 à 8 até que β convirja para um nível de tolerância pré-determinado. Um nível de tolerância razoável para β pode ser de 0.001.

3.2.2 Método de Confiabilidade de Segunda ordem

Problemas de confiabilidade com uma equação de estado limite linear são relativamente simples, porém nem sempre estaremos lidando com casos como estes. Sistemas com equação de estado limite linear no espaço original podem tornar-se não-linear quando uma variável não-normal é transformada para o espaço normal padrão equivalente, ou pela transformação da variável correlacionada para não-correlacionada. Nestes casos, uma aproximação de segunda ordem pode fornecer um aproximação melhor da probabilidade de falha.

Devido a ordem da aproximação usada no método de confiabilidade de segunda ordem

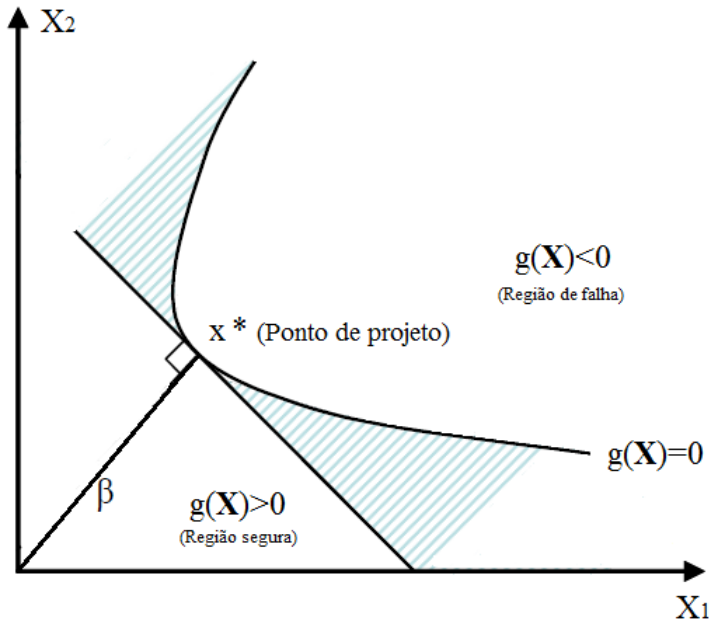


Figura 3.3: Estado limite linear e não linear (BECK, 2011).

(SORM), informações adicionais sobre a função estado limite são incluídas, enquanto o método de primeira ordem (FORM) não consegue captar (figura 3.3). Breitung (1984), Tvedt (1990), Hohenbichler e Rackwitz (1981), Koyluglu e Nielsan (1994) e Cai e Elishakoff (1994) desenvolveram o SORM usando aproximações de segunda ordem. Algumas destas usam uma expansão em série de Taylor para uma função não-linear geral. No método FORM a aproximação de Taylor usada ignora os termos além da primeira ordem, enquanto que no método SORM os termos além da segunda ordem são ignorados.

O SORM foi explorado primeiramente usando-se vários tipos de aproximações quadráticas. Uma solução simples para a probabilidade de falha usando uma aproximação de segunda ordem foi apresentada por Breitung (1984) usando a teoria da aproximação assintótica (Hohenbichler *et al.*, 1987 *apud* Haldar e Mahadevan, 2000) como:

$$p_{f_2} \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta \kappa_i)^{-1/2} \quad (3.32)$$

onde κ_i denota as curvaturas principais do estado limite no ponto de distância mínima e β é o índice de confiabilidade obtido usando o FORM. Para calcular as curvaturas, as variáveis

aleatórias X_i no espaço \mathbf{X} são rotacionadas em outro conjunto de variáveis denotadas como X'_i tal que as últimas variáveis desta coincidem com o vetor α , o qual é o vetor gradiente unitário do estado limite no ponto de distância mínima. Esta transformação está mostrada na figura 3.4 para um problema com duas variáveis aleatórias, onde fica claro que trata-se apenas de uma transformação de coordenadas.

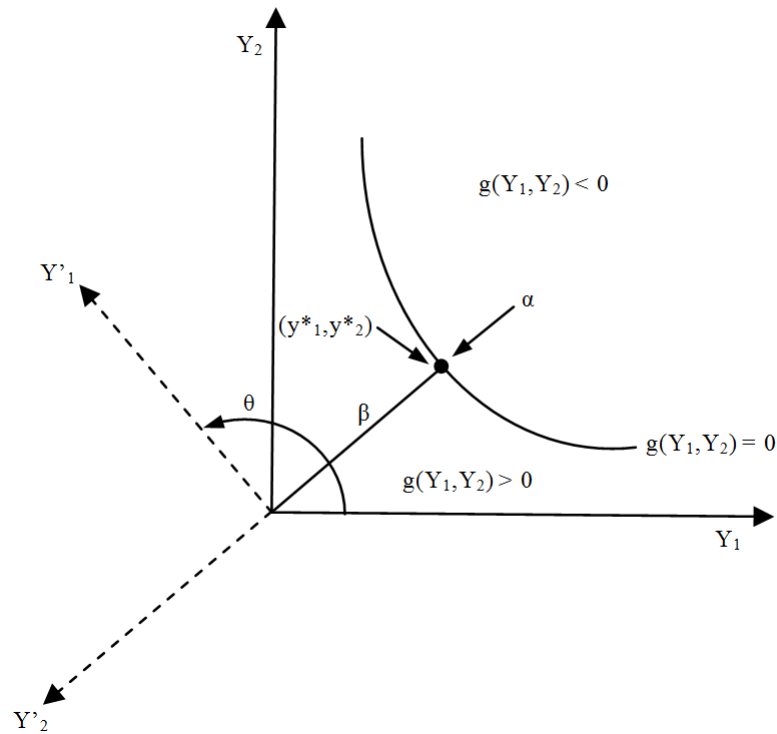


Figura 3.4: Rotação das coordenadas (HALDAR E MAHADEVAN, 2000).

A transformação do espaço \mathbf{X} para o espaço \mathbf{X}' é uma transformação ortogonal onde:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (3.33)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de rotação. Para um caso simples onde só existam duas variáveis aleatórias a matriz \mathbf{R} pode ser escrita como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

onde θ é o ângulo de rotação. Nos casos em que haja mais que duas variáveis aleatórias a obtenção da matriz \mathbf{R} é feita em duas etapas. Primeiro constrói-se uma matriz \mathbf{R}_0 da seguinte forma,

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{x_1} & \alpha_{x_2} & \dots & \alpha_{x_n} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

onde $\alpha_{x_1}, \alpha_{x_2}, \dots, \alpha_{x_n}$ são os cossenos diretores, isto é, componentes do vetor gradiente unitário α como mostrado na figura 3.4. Na etapa seguinte realiza-se uma ortogonalização de Gram-Schmidt na matriz \mathbf{R}_0 que resultará na matriz \mathbf{R} . Uma vez que matriz \mathbf{R} é obtida, os elementos da matriz \mathbf{A} podem ser calculados por:

$$a_{ij} = \frac{(\mathbf{RDR}^t)}{|\nabla G(y^*)|} \quad i, j = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (3.36)$$

onde \mathbf{D} é a matriz hessiana ($n \times n$) da superfície de estado limite no espaço normal padrão estimado no ponto de projeto, \mathbf{R} é a matriz de rotação e $|\nabla G(y^*)|$ é o comprimento do vetor gradiente no espaço normal padrão.

No espaço rotacionado, a última variável, Y_n coincide com o vetor β calculado pelo método FORM. No passo seguinte, a última linha e coluna da matriz \mathbf{A} e a última linha do vetor \mathbf{Y}' são descartadas para levar em conta este fator. Assim, o estado limite pode ser reescrito em termos da aproximação de segunda ordem neste espaço normal padrão rotacionado, \mathbf{Y}' por,

$$y'_n = \beta + \frac{1}{2} \mathbf{y}'^t \mathbf{A} \mathbf{y}' \quad (3.37)$$

onde a matriz \mathbf{A} tem agora dimensão $(n - 1) \times (n - 1)$. Finalmente, os k_i são calculados com os autovalores da matriz \mathbf{A} . A equação de estado limite é aproximada por uma função de segunda ordem e a probabilidade de falha pode ser calculada da Eq.(3.32).

Outros métodos SORM tem sido desenvolvidos, aqui será usado a abordagem de Breitung, cujo desenvolvimento matemático mais detalhado pode ser encontrado em Choi *et al.*

(2007).

Para a estimação da probabilidade de falha o algoritmo do SORM com os seguintes passos pode ser seguido:

1. Calcular β e o novo ponto de projeto (x_i^*) como o método FORM;
2. Calcular a matriz ortogonal \mathbf{R} ;
3. Calcular as derivadas de segunda-ordem da superfície de estado limite para calcular a matriz \mathbf{D} ;
4. Calcular a matriz \mathbf{A} ;
5. Calcular as curvaturas principais k_i da superfície de falha no MPP (Ponto de falha mais provável), através dos autovalores da matriz \mathbf{A} ;
6. Calcular a probabilidade de falha com a Eq.(3.32)

3.3 Simulação de Monte Carlo

Simulações de Monte Carlo são experimentos com números aleatórios com objetivo de validar expressões matemáticas. O nome do método tem sua origem nos jogos dos Cassinos de Monte Carlo, Monaco. Originado das pesquisas de Neumann e Ulam (SOBOL', 1994), que se baseou no comportamento aleatório característico de jogos de azar. O método de Monte Carlo consiste basicamente de uma geração de variáveis e/ou funções aleatórias, da análise estatística dos resultados e de técnicas de redução.

Os métodos de simulação são muitas vezes chamados de métodos exatos, porque, teoricamente, o resultado da simulação tende ao resultado exato quando o número de simulações tende ao infinito, além de evitarem certas aproximações dos métodos analíticos (BECK, 2011).

3.3.1 Monte Carlo Direto

Uma aplicação bastante utilizada da simulação de Monte Carlo é determinar o valor de uma integral definida multidimensional. Considere que a seguinte integral deve ser avaliada:

$$p_f = \int I(X)f(X)dX \quad (3.38)$$

Considerando-se $f(X)$ como uma função densidade de probabilidade pode-se estimar p_f como,

$$p_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(X_i) \quad (3.39)$$

onde os valores de X_i foram amostrados com densidade f e I é uma função indicadora dada por

$$I(X) = \begin{cases} 1 & \text{if } g(X) \geq 0 \\ 0 & \text{if } g(X) < 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

Esta abordagem do MC usa a chamada amostragem aleatória simples, que na maioria dos casos é bastante ineficiente. Da Eq.(3.39) fica evidente que a precisão da estimativa dependerá do número de amostras. A probabilidade de falha se aproximará do valor verdadeiro quando o número de amostras se aproximar do infinito. Logo, o tamanho da amostra na precisão da estimativa da probabilidade de falha é preocupante. Existem diversas formas de avaliar a precisão da Eq.(3.39). Uma delas é estudar o erro associado com o tamanho da amostra aproximando uma distribuição binomial de uma distribuição normal e estimando a probabilidade de falha para um intervalo de 95% de confiança (SHOOMAN, 1968). Neste caso, pode ser mostrado que o tamanho da amostra comum em um intervalo de confiança de 95% pode ser obtido por:

$$N = \frac{4(1 - p_f)}{p_f \varepsilon^2} \quad (3.41)$$

A geração de variáveis aleatórias de acordo com determinada distribuição é a base para a simulação de Monte Carlo. Contudo, computadores não possuem a capacidade de gerar números realmente aleatórios, visto que fazem uso de um algoritmo para gerar uma sequência de números. Assim, os computadores tem a capacidade de gerar sequências de números que apresentam propriedades estatísticas de acordo com uma dada distribuição. Tais sequências podem ser do tipo pseudo-aleatórias e quasi-aleatórias (Calfisch, 1998, Dutang, 2008).

Uma característica da simulação de Monte Carlo é a geração de uma série de valores de uma ou mais variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade específica. Um método de geração comumente usado é o *método da transformação inversa*. Considere que $F_x(x_i)$ seja a CDF da variável aleatória x_i . Por definição, o valor numérico de $F_x(x_i)$ é um valor no intervalo de $[0, 1]$. Assumindo-se que ν_i é o número aleatório gerado uniformemente distribuído ($0 \leq \nu_i \leq 1$), o método da transformação inversa é usado para igualar ν_i a $F_x(x_i)$ como segue:

$$F_x(x_i) = \nu_i \quad \text{ou} \quad x_i = F_x^{-1}(\nu_i) \quad (3.42)$$

A técnica da transformação inversa pode ser melhor entendida visualizando a figura 3.5, onde o gerador de números aleatórios produz números aleatórios uniformes entre 0 e 1 baseado na seleção arbitrária de valores de sementes. A partir do número aleatório uniforme gerado, o correspondente valor da CDF da distribuição uniforme e da distribuição alvo pode ser facilmente obtido. Assim, é possível obter o número aleatório da PDF alvo usando a equação Eq.(3.42).

3.3.2 Método da Superfície de Resposta

O Método da Superfície de Resposta (Response Surface Method - RSM) é um conjunto de técnicas estatísticas projetado para encontrar "o melhor" valor da resposta, considerando as incertezas ou variações nos valores das variáveis de entrada (KHURI E CORNELL, 1996). Teve sua origem no desenvolvimento de modelos na áreas de biologia e agricultura, mas recentemente tem sido usado na solução de vários tipos de problemas. A proposta desse

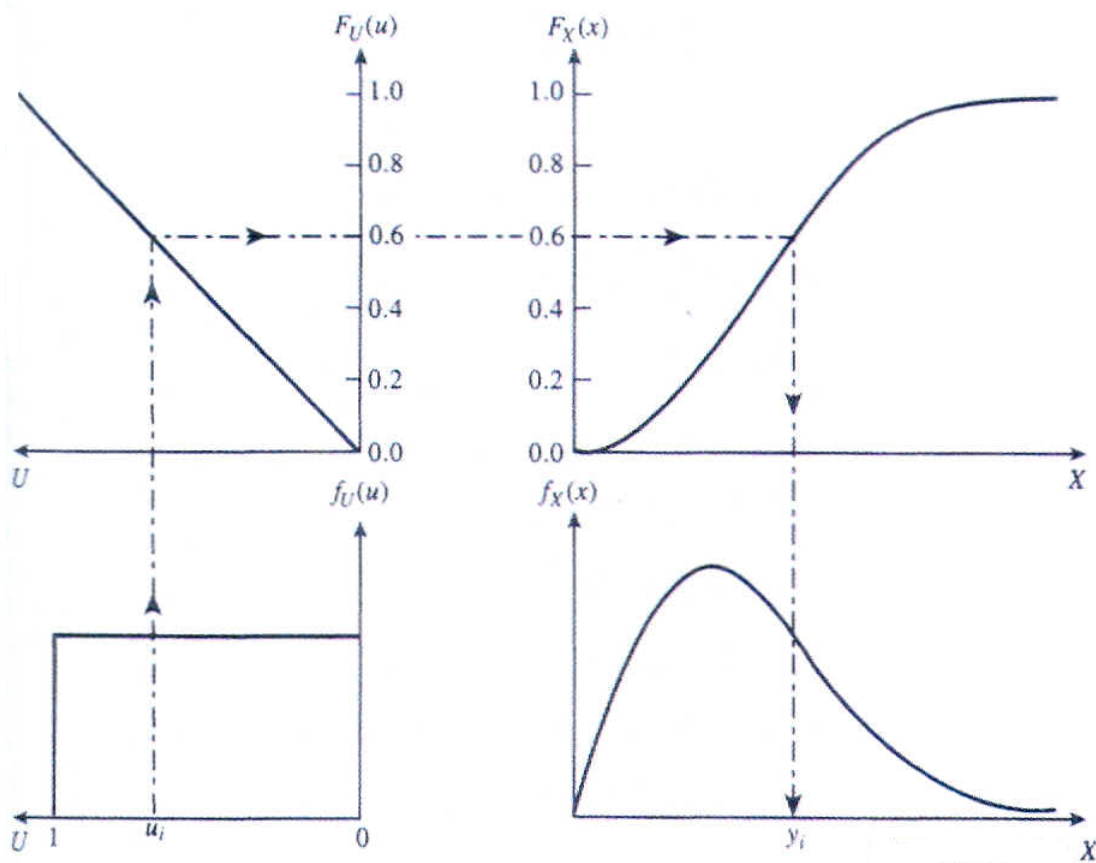


Figura 3.5: Mapeamento da CDF inversa (HALDAR E MAHADEVAN, 2000).

método na análise de confiabilidade é construir aproximadamente uma polinômio na forma explícita para representar uma função de desempenho implícita. A descrição do método RSM aqui apresentada baseia-se no trabalho de Haldar e Mahadevan (2000).

As componentes essenciais do RSM básico são: a) o grau do polinômio usado pra representar a função de desempenho; b) a região experimental e as variáveis codificadas; c) a seleção da amostragem ou pontos de projeto, isto é, o projeto de experimentos (Design of Experiments - DOE); e d) a determinação do ponto central.

a) Grau do polinômio na função de desempenho: Chamada de função de desempenho verdadeira, $g(\mathbf{X})$ é desconhecida, mas é assumida ser uma função continua das variáveis aleatórias individuais X_i . Para representar a função de desempenho polinômios de

primeira ou segunda ordem são comumente usados.

Para uma aproximação de primeira ordem o polinômio pode ser escrito como:

$$\hat{g}(\mathbf{X}) = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i \quad (3.43)$$

para uma aproximação de segunda ordem por:

$$\hat{g}(\mathbf{X}) = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} X_i^2 \quad (3.44)$$

ou para uma aproximação de segunda ordem com termos cruzados por:

$$\hat{g}(\mathbf{X}) = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>1}^k b_{ij} X_i X_j \quad (3.45)$$

onde, $X_i (i = 1, 2, \dots, k)$ é a i -ésima variável aleatória, k é o número total de variáveis aleatórias do problema, b_0 , b_i , b_{ii} e b_{ij} são os coeficientes a serem determinados e $\hat{g}(\mathbf{X})$ é a aproximação da função de desempenho verdadeira.

b) Região experimental e variáveis codificadas: Para uma construção precisa e eficiente de uma função de desempenho, a região experimental deve ser mantida em um mínimo (KHURI E CORNELL, 1996). A incerteza nas variáveis aleatórias podem ser usadas para definir a região experimental. Assim, os limites de cada variável podem ser especificados como:

$$X_i^{região} = X_i^C \pm h_i \sigma_{X_i} x_i \quad (3.46)$$

onde, X_i^C e σ_{X_i} são o ponto central e o desvio padrão da variável X_i , respectivamente, h_i é um fator arbitrário usado para definir a região e x_i é a variável codificada, a qual pode ser definida como

$$x_i = \frac{X_i - X_i^C}{h_i \sigma_{X_i}} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.47)$$

O valor de h_i é geralmente considerado estar entre 1 e 3. Da Equação 3.24, fica claro que o

valor da variável codificada no ponto central é zero. A transformação das variáveis aleatórias em variáveis codificadas facilita a avaliação dos coeficientes nas Eqs.(3.44) e (3.45) (SNEE, 1973).

c) Projeto de experimentos (DOE): A literatura sobre o DOE é muito vasta onde muitos métodos estão disponíveis nos livros textos sobre o assunto (MONTGOMERY, 2001). No projeto de experimentos, um conjunto de valores das variáveis aleatórias são selecionados dentro da região experimental para analisar determinísticamente um sistema, a fim de avaliar os coeficientes da função de desempenho. O número de pontos de projeto deve ser mínimo a fim de aumentar a eficiência computacional, mas deve ser pelo menos igual ao número de coeficientes p necessários para definir uma função de desempenho. Um posicionamento eficiente dos pontos de projeto em relação ao ponto central é essencial para uma construção precisa da função de desempenho. Neste trabalho foram realizados dois DOE's diferentes, um para a construção de uma função de desempenho contendo uma aproximação polinomial de primeira ordem e o outro para uma aproximação de segunda ordem.

Para a construção de uma função de desempenho com polinômio de primeira ordem um método simples e bastante conhecido foi usado. Denominado de projeto fatorial pleno (*full factorial design*), este considera dois ou três valores para cada variável e constrói a função de desempenho para todas as combinações possíveis destas. O procedimento a seguir mostra o desenvolvimento do experimento:

1. Selecionam-se os conjuntos dos valores das variáveis aleatórias para avaliar a função de desempenho $g(\mathbf{X})$. O número de combinações é 2^n ou 3^n , onde n é o número de variáveis aleatórias. Caso dois níveis sejam usados, esses valores podem ser assumidos como o maior e o menor valor, por exemplo, $(\mu \pm k\sigma)$. Caso três níveis sejam usados, eles podem ser assumidos como o maior valor, o valor médio e o menor valor $(\mu - k\sigma, \mu, \text{ e } \mu + k\sigma)$;
2. Avalia-se a função de desempenho $g(\mathbf{X})$ usando análises determinísticas de todos os conjuntos dos valores das variáveis aleatórias selecionados no passo 1;
3. Constrói-se um polinômio na ordem desejada usando análise de regressão com os dados obtidos no passo 2, obtendo-se uma expressão aproximada em forma fechada da função

de desempenho em termos das variáveis aleatórias.

Na construção de uma função de desempenho com polinômio de segunda ordem utilizou-se um método mais adequado para tal chamado projeto Box-Behnken (Box-Behnken Design - BBD). Este consiste de um DOE que requerer 3 níveis em cada variável ($\mu, \mu \pm k\sigma$), o qual é formado combinando-se 2^k fatoriais com blocos de projeto incompletos. Os projetos resultantes são geralmente muito eficientes em termos computacional. Este tipo de projeto é dito rotativo (*rotatable*) ou quase rotativo, isto é, a variância da resposta prevista em qualquer ponto x depende apenas da distância de x até o ponto central do projeto. Rotatividade é uma propriedade desejável para o RSM (NIST, 2010). No BBD os pontos das combinações estão no centro e nos pontos médios das arestas do cubo do espaço do projeto (figura 3.6). Isto o caracteriza como um projeto esférico pois todos os pontos caem sobre uma esfera de raio $\sqrt{2}$.

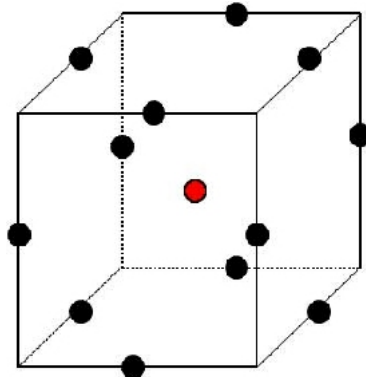


Figura 3.6: Modelo de combinações do BBD para 3 variáveis.

d) Determinação do ponto central: O ponto central em torno do qual os pontos de projeto são selecionados desempenha uma importante regra na construção da função de desempenho. Contudo, sua determinação não é uma tarefa fácil e requer uma abordagem iterativa sistemática. Uma interpolação linear iterativa é sugerida por Bucher e Bourgund (1990) *apud* (HALDAR E MAHADEVAN, 2000) e será brevemente apresentada.

Inicialmente assume-se que o ponto central está localizado nos valores médios das variáveis aleatórias X_i 's, e que será denotado como X_{C_1} na figura 3.7.

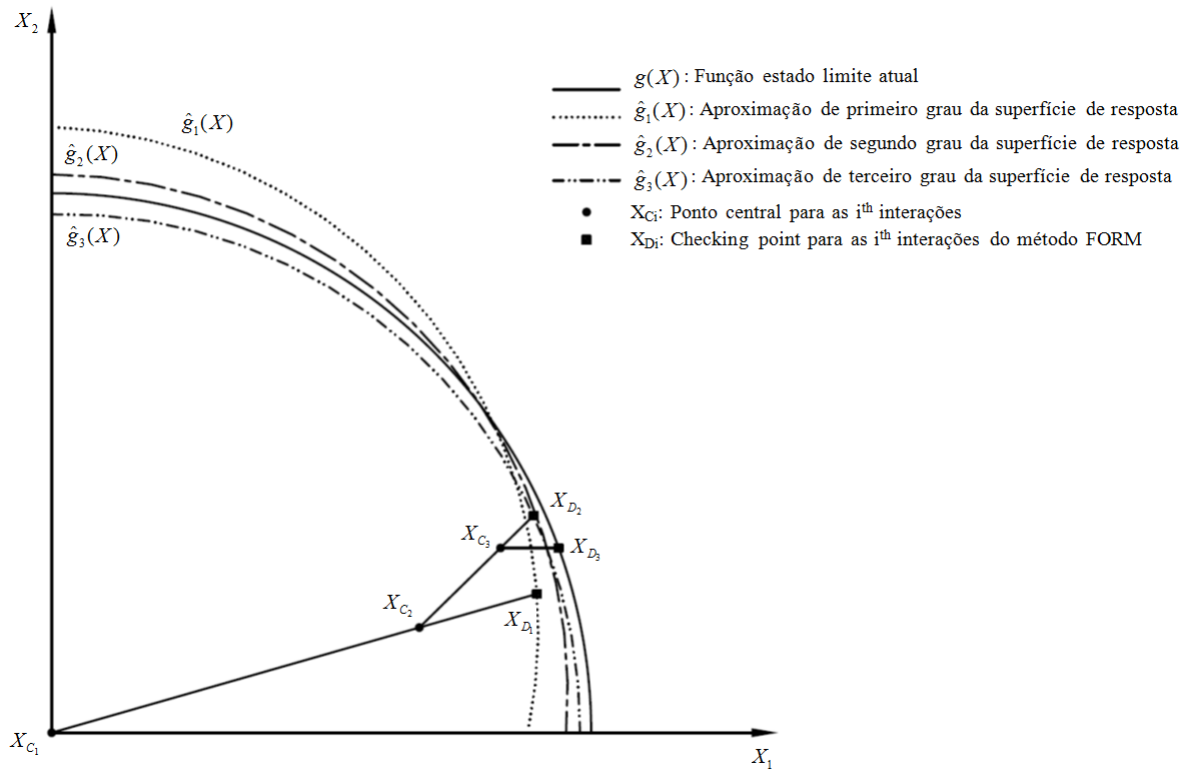


Figura 3.7: Método de interpolação linear para a determinação do ponto central.

Isso produzirá uma função de desempenho $\hat{g}(X)$ como mostrado na figura 3.7. Depois, um método de interpolação linear pode ser usado para selecionar o próximo ponto central como

$$x_{C_2} = x_{C_1} + (x_{D_1} - x_{C_1}) \times \frac{g(x_{C_1})}{x_{C_1} - x_{D_1}} \quad \text{if } g(x_{D_1}) \geq g(x_{C_1}) \quad (3.48)$$

ou

$$x_{C_2} = x_{D_1} + (x_{C_1} - x_{D_1}) \times \frac{g(x_{D_1})}{x_{D_1} - x_{C_1}} \quad \text{if } g(x_{D_1}) < g(x_{C_1}) \quad (3.49)$$

Outra função performance pode ser construída considerando-se os pontos de projetos em torno do novo ponto central x_{C_2} . Assim, o processo iterativo deve ser continuado até que todas as variáveis aleatórias no ponto central convergirem para um critério pré-selecionado. O processo é mostrado graficamente na figura 3.7.

4 APLICAÇÕES EM PROBLEMAS MECÂNICOS

4.1 Problema Dinâmico Estrutural Simples

Esta seção apresenta uma aplicação do Polinômio do Caos (PC) no contexto de um modelo dinâmico estrutural simples. O método calcula as características estocásticas da resposta em deslocamento de estruturas incluindo as incertezas nos parâmetros. Resultados simulados são investigados em termos da sensibilidade da solução em relação aos valores das variáveis aleatórias (média e desvio padrão) e da ordem do polinômio. O método PC é também avaliado na análise de confiabilidade e comparado com o FORM, SORM e simulações de Monte Carlo. Todos os resultados são verificados usando-se simulações de Monte Carlo.

Afim de estudar o método do Polinômio de Caos, um sistema estrutural bem simples de um grau de liberdade (GDL) constituído por massa-mola com amortecimento histerético é utilizado (figura 4.1).

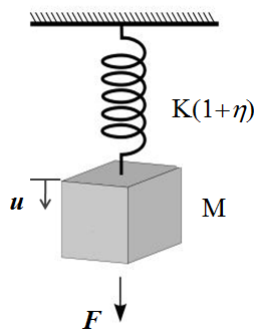


Figura 4.1: Sistema massa-mola de 1GDL com amortecimento histerético.

A equação dinâmica determinística do sistema no domínio da frequência pode ser escrita como (J.INMAN, 2001):

$$[K(1 + i\eta) - \omega^2 M]u = F \quad (4.1)$$

onde K é a rigidez, M é a massa, η o amortecimento, u o deslocamento, F a força e ω é a frequência circular. Da Eq.(4.1) obtém-se diretamente a resposta determinística do sistema

como:

$$u = \frac{F}{[K(1 + i\eta) - \omega^2 M]} \quad (4.2)$$

O primeiro caso analisado considera apenas a rigidez K como variável aleatória. Utilizando a Eq.(3.8) para $Q = 1$ variável obtém-se:

$$[(K + \sigma_K \xi_1)(1 + i\eta) - \omega^2 M]u = F \quad (4.3)$$

onde σ_K é o desvio padrão da rigidez. Usando o Polinômio de Caos de dimensão 1, ordem 1 e a Eq.(3.9) com $N = 1$ variável ortogonal, obtemos,

$$u = \sum_{n=0}^1 u_n \Psi_n(\xi_1) = \sum_{n=0}^1 u_n \Psi_n \quad (4.4)$$

Considerando-se um polinômio de Hermite do primeiro grau e a variável aleatória ξ_1 gaussiana com média nula e desvio padrão unitário (GHANEM E SPANOS, 1991) teremos,

$$\Psi_0 = 1 \quad \text{e} \quad \Psi_1 = \xi_1 \quad (4.5)$$

com as propriedades:

$$\langle \Psi_0 \rangle = 1; \quad \langle \Psi_1 \rangle = 0; \quad \langle \Psi_0^2 \rangle = 1; \quad \langle \Psi_1^2 \rangle = 1 \quad (4.6)$$

Da Eq.(3.10) obtemos o sistema linear de equações como:

$$\begin{aligned} u_0 \langle \Psi_0^2 \rangle [K(1 + i\eta) - \omega^2 M] + \sum_{n=0}^1 u_n \langle \xi_1 \Psi_n \Psi_0 \rangle [\sigma_K(1 + i\eta)] &= F \langle \Psi_0 \rangle \\ u_1 \langle \Psi_1^2 \rangle [K(1 + i\eta) - \omega^2 M] + \sum_{n=0}^1 u_n \langle \xi_1 \Psi_n \Psi_1 \rangle [\sigma_K(1 + i\eta)] &= F \langle \Psi_1 \rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

Desenvolvendo os somatórios e substituindo os valores das médias das Eqs.(4.6) nas

Eqs.(4.7), teremos

$$\begin{aligned} u_0[K(1 + \eta) - \omega^2 M] + u_0 \langle \xi_1 \Psi_0^2 \rangle [\sigma_K(1 + \eta)] + u_1 \langle \xi_1 \Psi_1 \Psi_0 \rangle [\sigma_K(1 + i\eta)] &= F \\ u_1[K(1 + \eta) - \omega^2 M] + u_0 \langle \xi_1 \Psi_0 \Psi_1 \rangle [\sigma_K(1 + \eta)] + u_1 \langle \xi_1 \Psi_1^2 \rangle [\sigma_K(1 + \eta)] &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Avaliando as médias remanescentes, teremos:

$$\langle \xi_1 \Psi_1 \Psi_0 \rangle = \langle \xi_1 \Psi_0 \Psi_1 \rangle = 1 = \langle \xi_1^2 \rangle = 1; \quad \langle \xi_1 \Psi_0^2 \rangle = \langle \xi_1 \rangle = 0; \quad \langle \xi_1 \Psi_1^2 \rangle = \langle \xi_1^3 \rangle = 0 \quad (4.9)$$

Substituindo as médias das Eqs.(4.9) nas Eqs.(4.8) obtém-se o sistema de equações,

$$\begin{aligned} u_0[K(1 + \eta) - \omega^2 M] + u_1[\sigma_K(1 + i\eta)] &= F \\ u_1[K(1 + \eta) - \omega^2 M] + u_0[\sigma_K(1 + \eta)] &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

cujas soluções são dadas por:

$$u_0 = \frac{F[K(1 + \eta) - \omega^2 M]}{[K(1 + \eta) - \omega^2 M]^2 - \sigma_K^2(1 + i\eta)^2} \quad (4.11)$$

$$u_1 = \frac{F\sigma_K(1 + i\eta)}{[K(1 + \eta) - \omega^2 M]^2 - \sigma_K^2(1 + i\eta)^2} \quad (4.12)$$

Assim, a média e o desvio padrão da resposta são calculadas das Eqs.(3.11) e (3.12) obtendo-se:

$$\mu_u = u_0 = \frac{F[K(1 + \eta) - \omega^2 M]}{[K(1 + \eta) - \omega^2 M]^2 - \sigma_K^2(1 + i\eta)^2} \quad (4.13)$$

$$\sigma_u = \sqrt{u_1^2} = \left| \frac{F\sigma_K(1+i\eta)}{[K(1+i\eta) - \omega^2 M]^2 - \sigma_K^2(1+i\eta)^2} \right| \quad (4.14)$$

Para o segundo caso analisado consideram-se a rigidez K e a massa M como variáveis aleatórias. Considerando o polinômio de Hermite de primeiro grau, as variáveis aleatórias ξ_1 e ξ_2 gaussianas com média nula e desvio padrão unitário, e desenvolvendo-se um procedimento similar ao apresentado no caso anterior com uma variável aleatória, obtém-se da Eq.(3.10) o sistema linear de equações como:

$$\begin{aligned} u_0 \langle \Psi_0^2 \rangle [K(1+i\eta) - \omega^2 M] + \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^2 u_n \langle \xi_q \Psi_n \Psi_0 \rangle [\sigma_K(1+i\eta) - \omega^2 \sigma_M] &= F \langle \Psi_0 \rangle \\ u_1 \langle \Psi_1^2 \rangle [K(1+i\eta) - \omega^2 M] + \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^2 u_n \langle \xi_q \Psi_n \Psi_0 \rangle [\sigma_K(1+i\eta) - \omega^2 \sigma_M] &= F \langle \Psi_1 \rangle \\ u_2 \langle \Psi_2^2 \rangle [K(1+i\eta) - \omega^2 M] + \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^2 u_n \langle \xi_q \Psi_n \Psi_0 \rangle [\sigma_K(1+i\eta) - \omega^2 \sigma_M] &= F \langle \Psi_2 \rangle \end{aligned} \quad (4.15)$$

Se mantivermos as mesmas condições anteriores e aumentarmos a ordem do polinômio

de Hermite para 2, obtém-se o sistema linear de equações como:

$$\begin{aligned}
u_0 \langle \Psi_0^2 \rangle [K(1+i\eta) - \omega^2 M] + \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^5 u_n \langle \xi_q \Psi_n \Psi_0 \rangle [\sigma_K(1+i\eta) - \omega^2 \sigma_M] &= F \langle \Psi_0 \rangle \\
u_1 \langle \Psi_1^2 \rangle [K(1+i\eta) - \omega^2 M] + \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^5 u_n \langle \xi_q \Psi_n \Psi_1 \rangle [\sigma_K(1+i\eta) - \omega^2 \sigma_M] &= F \langle \Psi_1 \rangle \\
u_2 \langle \Psi_2^2 \rangle [K(1+i\eta) - \omega^2 M] + \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^5 u_n \langle \xi_q \Psi_n \Psi_2 \rangle [\sigma_K(1+i\eta) - \omega^2 \sigma_M] &= F \langle \Psi_2 \rangle \\
u_3 \langle \Psi_3^2 \rangle [K(1+i\eta) - \omega^2 M] + \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^5 u_n \langle \xi_q \Psi_n \Psi_3 \rangle [\sigma_K(1+i\eta) - \omega^2 \sigma_M] &= F \langle \Psi_3 \rangle \\
u_4 \langle \Psi_4^2 \rangle [K(1+i\eta) - \omega^2 M] + \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^5 u_n \langle \xi_q \Psi_n \Psi_4 \rangle [\sigma_K(1+i\eta) - \omega^2 \sigma_M] &= F \langle \Psi_4 \rangle \\
u_5 \langle \Psi_5^2 \rangle [K(1+i\eta) - \omega^2 M] + \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^5 u_n \langle \xi_q \Psi_n \Psi_5 \rangle [\sigma_K(1+i\eta) - \omega^2 \sigma_M] &= F \langle \Psi_5 \rangle \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Desenvolvendo os somatórios das Eqs.(4.15) e (4.16), substituindo os valores das médias e simplificando as equações obtém-se a solução dos sistemas. Fazendo-se $A = [K(1+i\eta) - \omega^2 M]$ e $B = [\sigma_K(1+i\eta) - \omega^2 \sigma_M]$ podemos escrever a solução do sistema da Eq.(4.15) como:

$$\begin{aligned}
u_0^{(pc1)} &= \frac{FA}{A^2 - 2B^2}, \\
u_1^{(pc1)} &= \frac{FB}{-A^2 + 2B^2}, \\
u_2^{(pc1)} &= \frac{-FB}{A^2 - 2B^2} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Logo, a média e o desvio padrão da resposta com 2 variáveis aleatórias e polinômio de

caos de ordem 1 podem ser calculadas pelas Eqs.(3.11) e (3.12) obtendo-se:

$$\mu_u^{(pc1)} = u_0 = \frac{FA}{A^2 - 2B^2} \quad (4.18)$$

$$\sigma_u^{(pc1)} = \sqrt{(u_1^{(pc1)})^2 + (u_2^{(pc1)})^2} \quad (4.19)$$

De forma análoga escrevemos a solução do sistema gerado pela Eq(4.16) como:

$$\begin{aligned} u_0^{(pc2)} &= \frac{-FA^2 + 4FB^2}{A(A^2 - 6B^2)}, \\ u_1^{(pc2)} &= \frac{FB}{-A^2 + 6B^2}, \\ u_2^{(pc2)} &= \frac{-FB}{A^2 - 6B^2}, \\ u_3^{(pc2)} &= \frac{FB^2}{A(A^2 - 6B^2)}, \\ u_4^{(pc2)} &= \frac{2FB^2}{A(A^2 - 6B^2)}, \\ u_5^{(pc2)} &= \frac{FB^2}{A(A^2 - 6B^2)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Então, a média e o desvio padrão da resposta com 2 variáveis aleatórias e polinômio de caos de ordem 2 podem ser calculadas pelas Eqs.(3.11) e (3.12) obtendo-se:

$$\mu_u^{(pc2)} = u_0 = \frac{-FA^2 + 4FB^2}{A(A^2 - 6B^2)} \quad (4.21)$$

$$\sigma_u^{(pc2)} = \sqrt{(u_1^{(pc2)})^2 + (u_2^{(pc2)})^2 + 2(u_3^{(pc2)})^2 + (u_4^{(pc2)})^2 + 2(u_5^{(pc2)})^2} \quad (4.22)$$

4.1.1 Resultados simulados do problema dinâmico

Nesta seção o modelo massa-mola (figura 4.1) é utilizado para avaliação simulada da resposta usando a expansão em Polinômio de Caos. A sensibilidade em relação a média e desvio padrão dos parâmetros aleatórios e a ordem do Polinômio de Caos são investigados. Outra avaliação simulada é feita para análise da confiabilidade do sistema usando métodos FORM, SORM e simulação de Monte Carlo. Nos exemplos apresentados a rigidez e massa são as possíveis variáveis aleatórias, enquanto a força e amortecimento são variáveis determinísticas. Suas propriedades estatísticas e valores nominais estão listados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Propriedades das variáveis para o problema dinâmico.

Variável	Média/Nominal	Desvio Padrão	Distribuição
Massa [kg]	1	{0,001; 0,011; 0,021; 0,031; 0,041; 0,051}	lognormal
Rigidez [N/m]	1000	{2, 12, 22, 32, 42, 52}	gama
Amortecimento []	0.1	-	determinístico
Força [N]	1	-	determinístico

A escolha do tipo de distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias do problema, rigidez K e massa M , baseiam-se no fato de que ambas não assumem valores negativos nem nulos. Com base no Princípio da Máxima Entropia (Kapur e Kesavan (1992); Fabro *et al.* (2010)), foi determinado que a função densidade de probabilidade para variáveis aleatórias do tipo rigidez é a distribuição gama. A fim de tratar um caso geral, e ao mesmo tempo respeitar o intervalo $[0, +1[$ onde a variável existe, a função densidade de probabilidade estabelecida para a massa foi a distribuição lognormal. Entretanto, sabe-se que para obter uma taxa de convergência ótima na expansão do Caos Polinomial a escolha do polinômio ortogonal precisa estar associada ao tipo de distribuição de probabilidade da variável aleatória escolhida. Isto acontece devido os polinômios ortogonais membros do esquema de Askey terem funções de

ponderação que são idênticas a função de probabilidade de certas distribuições aleatórias (XIU E KARNIADAKIS, 2003). Assim, polinômios de Hermite estão associado com a distribuição Gaussiana, polinômios de Laguerre com a distribuição Gama e etc. Desta forma, para uma melhor convergência do PC os polinômios de Laguerre deveriam ter sido usados neste estudo. Contudo, devido o tempo restante para a conclusão do trabalho e facilidade de implementação computacional utilizou-se os polinômios de Hermite.

Considere o problema do **CASO 1** onde apenas a rigidez K é definida como variável aleatória com distribuições do tipo gama e as análises são realizadas variando-se o desvio padrão desde 0,2 até 5,2% de K . A solução do Polinômio de Caos (PC) com polinômio de primeira ordem é comparada com simulações de Monte Carlo (MC) com 500.000 amostras, onde é investigada a influência dessas variações nos resultados obtidos em termos da média e do desvio padrão da resposta em deslocamento. As figuras 4.2(a) à (f) mostram os resultados obtidos em termos da parte real da média e do desvio padrão do deslocamento, onde pode-se observar um comportamento já esperado para os dois métodos, ou seja, do aumento do desvio padrão da resposta com o aumento da variabilidade da rigidez. Em termos do valor médio da resposta ambos métodos apresentam boa concordância com exceção do caso extremo ($\sigma_K = 52$) onde o PC diverge um pouco do resultado de MC (figura 4.2(b)). Contudo, no que se refere ao desvio padrão os métodos concordam apenas nos valores mais baixos de $\sigma_K = 2$ e 12 (figuras 4.2(a) e (b)), mas divergem de forma crescente à proporção que o desvio padrão da rigidez aumenta (figuras 4.2(d) e 4.2(e)). De uma forma geral estas discordâncias entre os métodos ocorrem visivelmente na região próxima à frequência de ressonância do sistema ($\omega = 5,0329Hz$).

Para o problema do **CASO 2** consideram-se a rigidez K e a massa M como variáveis aleatórias de distribuições conforme a Tabela 4.1. As variações dos parâmetros estatísticos (desvios padrão da rigidez e da massa) são feitas de forma alternada. Na primeira análise (**ANÁLISE 1**) o desvio padrão da massa (σ_M) é fixado em 0,001 kg e o desvio padrão da rigidez é variado conforme a Tabela 4.1. Enquanto, na segunda análise (**ANÁLISE 2**) o desvio padrão da rigidez (σ_K) é fixado em 2,0 N/m e o desvio padrão da massa (σ_M) é variado conforme a Tabela 4.1. A solução do Polinômio de Caos com polinômio de primeira ordem (PC ordem 1) e com polinômio de segunda ordem (PC ordem 2) são comparadas a simulações de Monte Carlo (MC) com 500.000 amostras, onde é investigada a influência

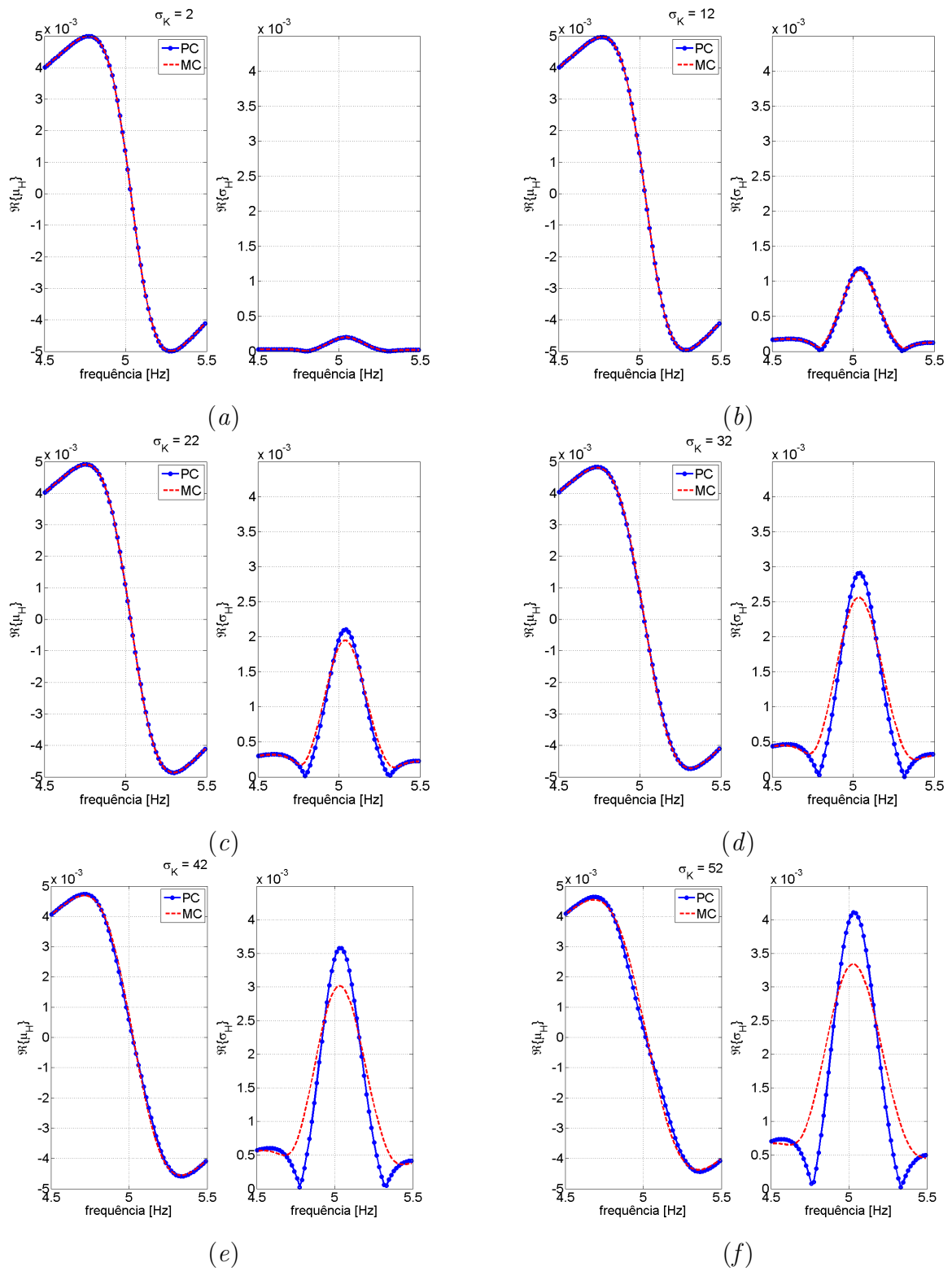


Figura 4.2: Médias e desvios padrão da resposta do sistema - **CASO 1**: $\sigma_K = 2 : 10 : 52$

dessas variações nos resultados obtidos em termos da média e do desvio padrão da resposta.

As figuras 4.3(a) à (f) mostram os resultados do **CASO 2** com a **ANÁLISE 1** obtidos em termos da parte real da média e do desvio padrão da resposta, onde observa-se também o comportamento esperado nas três soluções (PC ordem 1, PC ordem 2 e MC) do aumento do desvio padrão da resposta com o aumento da variabilidade da rigidez. Contudo, para o valor médio da resposta os métodos só apresentam uma boa concordância para valores baixos da variância da rigidez (figuras 4.3a a 4.3c), onde $\sigma_K = 2$ a 22. Em valores mais altos, estes divergem crescentemente à proporção que a variância de K aumenta (figuras 4.3(d) a 4.3(f)). No que se refere ao desvio padrão os métodos discordam para todos valores de σ_K , mostrando uma falta de precisão tanto nas amplitude quanto na forma da curva (PC ordem 2) de maneira crescente a proporção que o desvio padrão da rigidez aumenta seus valores (figuras 4.3(d) e 4.3(f)). As figuras 4.4(a) à (f) mostram os resultados do **CASO 2** com a **ANÁLISE 2** obtidos em termos da parte real da média e do desvio padrão da resposta, onde é visto também o comportamento já esperado nas três soluções (PC ordem 1, PC ordem 2 e MC) do aumento do desvio padrão da resposta com o aumento da variabilidade da rigidez. Uma comparação entre os resultados dos valores médios e desvios padrão obtidos pelos três métodos (figura 4.4) mostra que não existem alterações significativas destes resultados em relação aqueles obtidas no **CASO 2** com a **ANÁLISE 1** (figura 4.3). Assim, pode-se ponderar que os mesmos comentários já feitos para o **CASO 2** com a **ANÁLISE 1** se aplicam integralmente ao **CASO 2** com a **ANÁLISE 2**. Com isso conclui-se que as variações nos parâmetros estatísticos (desvios padrão da rigidez e da massa) aplicadas ao sistema apresentam sensibilidades semelhantes ou equivalentes em relação aos métodos utilizados.

Das respostas obtidas observa-se que para o cálculo da média da resposta, no geral o PC apresenta uma boa eficiência, tanto para o caso com apenas uma variável aleatória, onde quase todos os resultados das variações da dispersão convergiram bem, como no caso com duas variáveis e diferentes graus do polinômio, tendo uma imprecisão apenas quando ocorreram dispersões mais altas.

No cálculo do desvio padrão da resposta próximo a frequência de ressonância do sistema, pode-se observar que para o modelo com apenas uma variável aleatória (σ_K), a imprecisão entre PC e MC aumentara. Porém com uma dispersão pequena os resultados tem uma boa

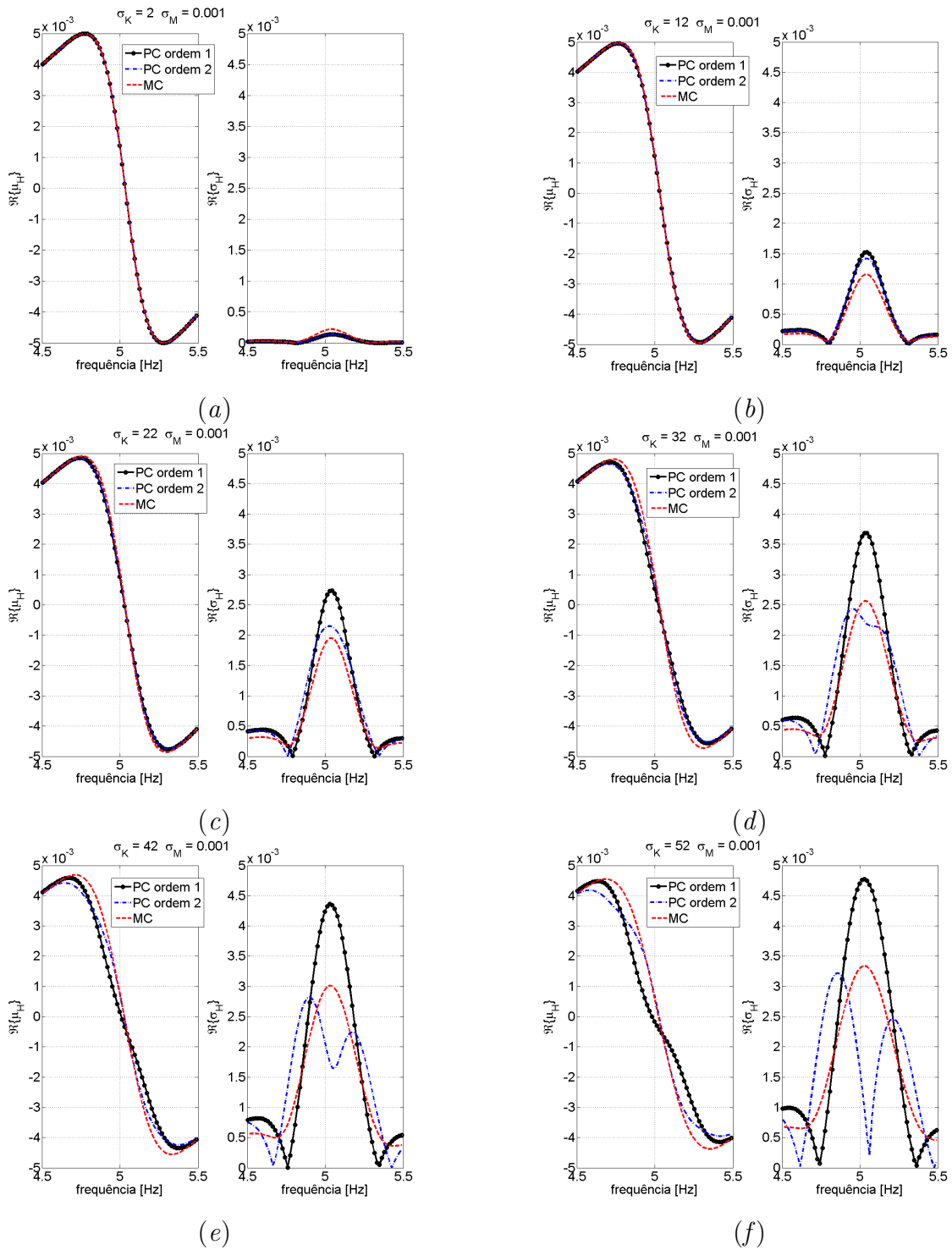


Figura 4.3: Médias e desvios padrão da resposta do sistema - **CASO 2** com a **ANÁLISE 1**: $\sigma_K = 2 : 10 : 52$ e $\sigma_M = 0,001$.

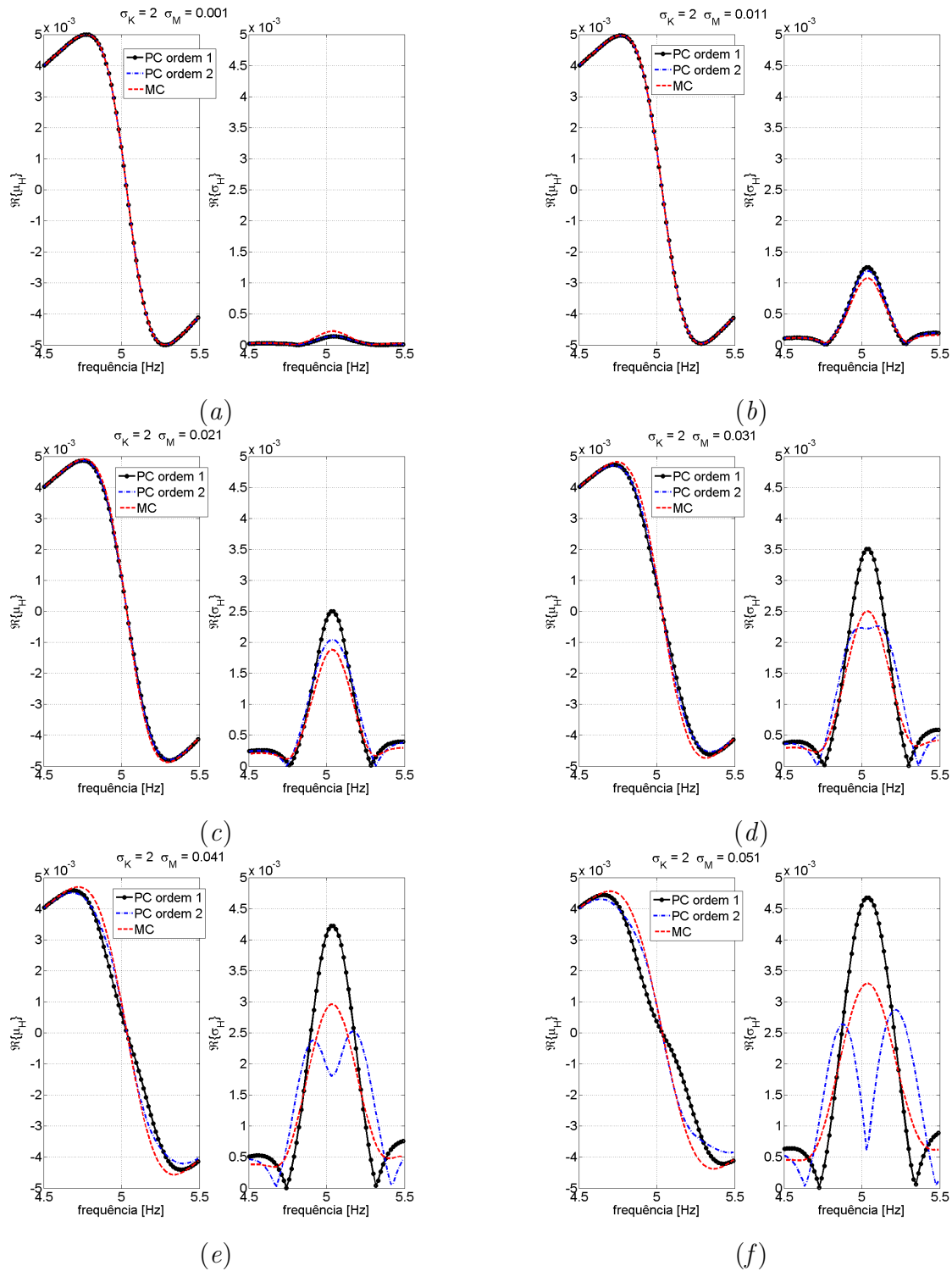


Figura 4.4: Médias e desvios padrão da resposta do sistema - **CASO 2** com a **ANÁLISE 2**: $\sigma_K = 2$ e $\sigma_M = 0,001 : 0,01 : 0,051$.

convergência. Calculando a resposta do sistema, agora para o caso de duas variáveis aleatórias, observa-se que mesmo com baixa dispersão tanto na análise de (σ_M) variando quanto para (σ_K) variando, a convergência dos métodos não ocorrem. Este comportamento de divergência também é válido para o primeiro e segundo grau do polinômio utilizados nos cálculos. Aumentando a dispersão dos parâmetros ocorre também um aumento na imprecisão das respostas. Algumas soluções aproximadas no caso do polinômio de segundo grau oscila em torno da solução de referência. Uma possível explicação para estas diferenças encontradas, pode ser pelo uso de polinômios de Hermite em vez de polinômios de Laguerre, o qual é o mais indicado para a distribuição das variáveis aleatórias e possivelmente pelo baixo grau do polinômio. Na análise de sensibilidade dos parâmetros observa-se que a medida que as variabilidades dos desvios padrão tanto da massa como da rigidez aumentam, os resultados da resposta passam a divergir. Comparando os resultado das variabilidade da massa e rigidez, é visto que a rigidez mostrou-se mais sensível que a massa, indicando que este parâmetro influencia mais no sistema que o outro.

No problema do **CASO 3** a solução procurada é a probabilidade de falha do sistema massa-mola com amortecimento histerético, usando a função de resposta em frequência (FRF) do sistema, a qual pode ser obtida a partir da Eq.(4.2) como:

$$H(\omega) = \frac{u}{F} = \frac{1}{[K(1 + \eta\eta) - \omega^2 M]} \quad (4.23)$$

onde $H(\omega)$ é a FRF determinística do sistema. A solução da Eq. 4.23 calculada com os valores dos parâmetros da Tabela 4.1 para a faixa de frequências $f = 0 - 60\text{Hz}$ resulta na curva da função de resposta em frequência mostrada na figura 4.5.

Para o estudo da análise de confiabilidade do sistema, a função de estado limite assumida para o cálculo da probabilidade de falha é definida por

$$g(\mathbf{X}) = H_{max}(\bar{\omega}) - H(\bar{\omega}) \quad (4.24)$$

onde $H_{max}(\bar{\omega})$ é o valor limite da amplitude da FRF $H(\bar{\omega})$ na frequência circular $\bar{\omega}$, a qual representa a frequência de trabalho do sistema. Esta situação simples pode ilustrar um verdadeiro sistema dinâmico com parâmetros aleatórios, que deve ter um nível de vibração

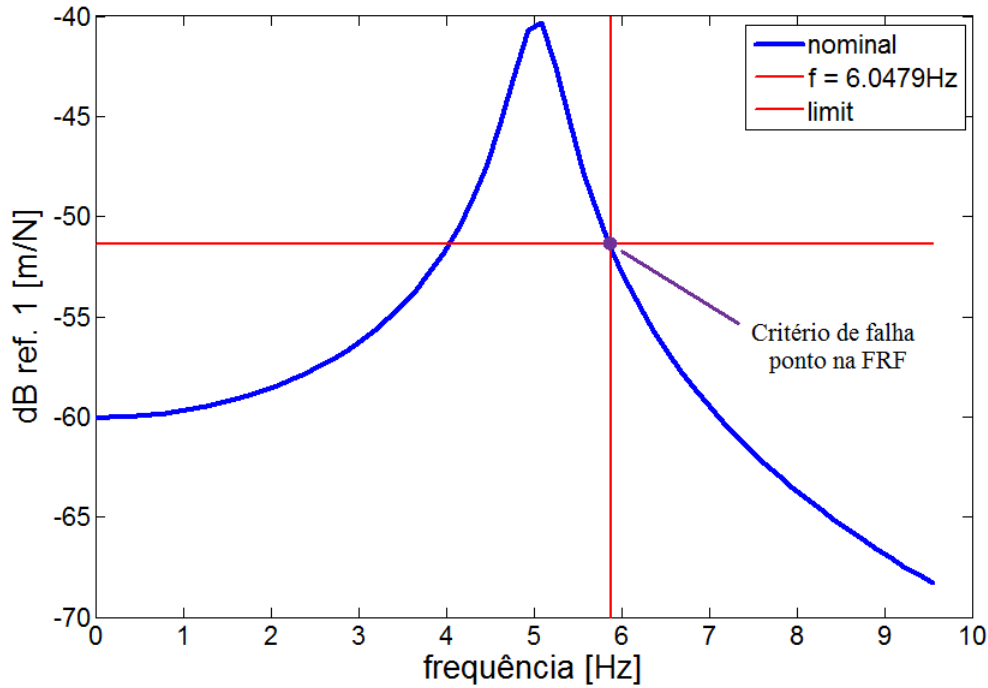


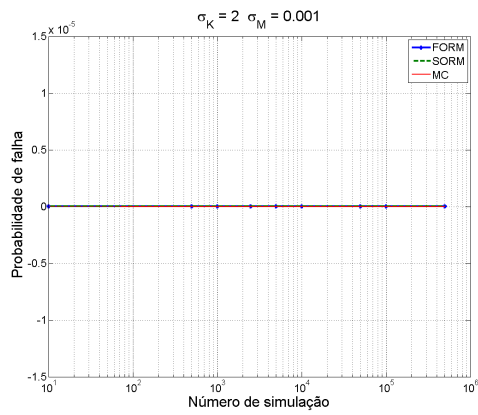
Figura 4.5: FRF do sistema de 1 GDL.

delimitado em uma determinada frequência e amplitude.

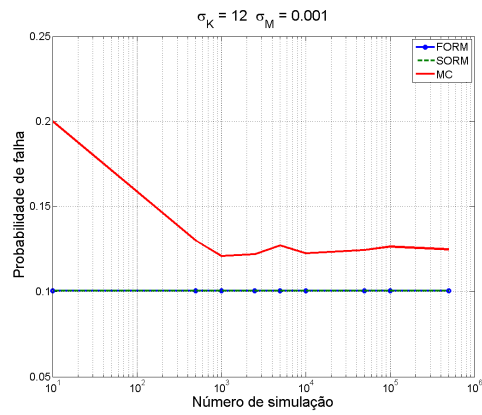
Para as análise de confiabilidade utilizou-se a frequência $f = 6.0479\text{Hz}$ com um valor limite da amplitude da FRF $H_{max} = 52,906\text{dB}$. Consideram-se também a rigidez K e a massa M como variáveis aleatórias de distribuições conforme a Tabela 4.1. As variações dos parâmetros estatísticos (desvios padrão da rigidez e da massa) são feitas de tal forma que na primeira análise (**ANÁLISE 1**) $\sigma_M = 0,001 \text{ kg}$ e $\sigma_K = \{2 : 10 : 52\} \text{ N/m}$, enquanto, na segunda análise (**ANÁLISE 2**) $\sigma_K = 2 \text{ N/m}$ e $\sigma_M = \{0,001 : 0,01 : 0,051\} \text{ kg}$. A probabilidade de falha é calculada usando os seguintes métodos: método de confiabilidade de primeira ordem (FORM); método de confiabilidade de segunda ordem (SORM) e simulação de Monte Carlo Direto (MC1) Todos os resultados são comparadas a simulações de Monte Carlo Direto (MC1) realizadas com 500.000 amostras.

A figura 4.6 mostra os resultados do **CASO 3** com a **ANÁLISE 1** obtidos em termos da probabilidade de falha do sistema onde se observa um comportamento já esperado para todos

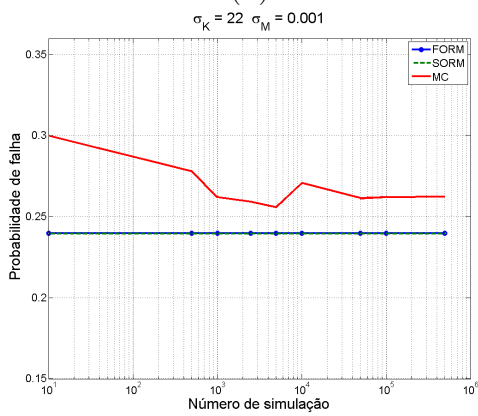
os métodos (FORM, SORM, e MC1) do aumento da probabilidade de falha com o aumento da variabilidade da rigidez. Na figura 4.6a observa-se que para baixas variabilidades dos parâmetros ($\sigma_K = 2$ e $\sigma_M = 0,001$) as probabilidades de falha são bem pequenas ($p_f < 0,001$) e os 3 métodos convergem para valores bem próximos. Os métodos FORM e SORM concordam entre si mas divergem um pouco em relação ao MC1 (figuras 4.6b a f) com tendência a subestimar a probabilidade de falha com erros de 20% quando $\sigma_K = 12$ que vão decrescendo com o aumento de σ_K de 9 a 4.5%. A Tabela 4.6 mostra uma comparação em termos dos valores numéricos obtidos pelos 3 métodos e os erros relativos percentuais calculados em relação ao método de referência (MC1). Em relação aos métodos FORM e SORM acredita-se que o número de amostras 500.000 usadas para o MC1 tenha boa convergência para probabilidades de falha mais altas, porém ainda não é suficiente para valores menores de p_f .



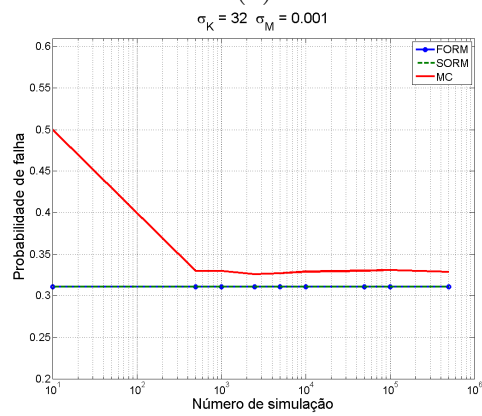
(a)



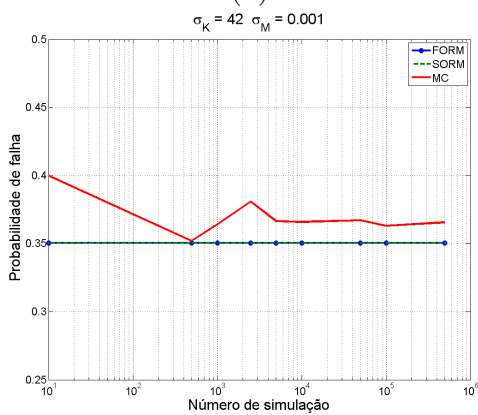
(b)



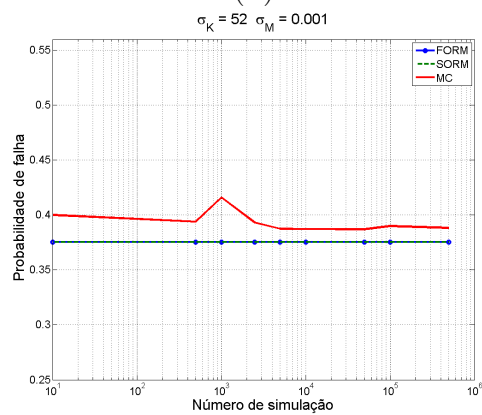
(c)



(d)



(e)



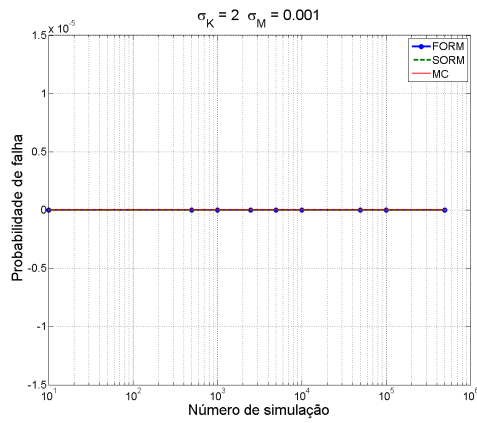
(f)

Figura 4.6: Probabilidade de falha do sistema - **CASO 3** com a **ANÁLISE 1**: $\sigma_K = 2 : 10 : 52$ e $\sigma_M = 0,001$.

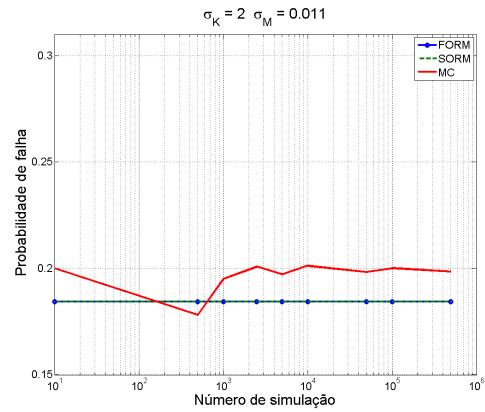
Tabela 4.2: Probabilidades de falha e erros percentuais relativo ao MC1 - **CASO 3** com a **ANÁLISE 1**.

σ_K	FORM	erro [%]	SORM	erro [%]	MC1
2	0	0	0	0	0
12	0.1006	20.2	0.1006	20.2	0.1261
22	0.2396	8.8	0.2396	8.8	0.2628
32	0.3106	4.7	0.3106	4.7	0.3260
42	0.3505	4.2	0.3504	4.2	0.3657
52	0.3752	4.4	0.3752	4.4	0.3927

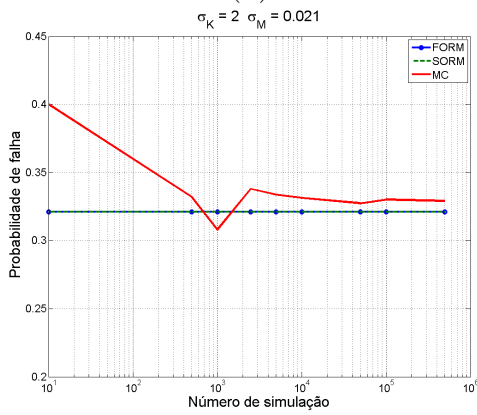
A figura 4.7 mostra os resultados do **CASO 3** com a **ANÁLISE 2** para as probabilidades de falha do sistema onde também se observa o mesmo comportamento geral para todos os métodos (FORM, SORM e MC1) do aumento da probabilidade de falha com o aumento da variabilidade de M , já observado para este mesmo caso na **ANÁLISE 1** em relação à variabilidade de K . Uma comparação entre os resultados das probabilidades de falha obtidas pelos 3 métodos (figura 4.7(a) a (f)) mostra que os resultados são similares aqueles obtidas no **CASO 3** com a **ANÁLISE 1** (figura 4.6(a) a (f)). A Tabela 4.7 mostra também uma comparação em termos dos valores numéricos obtidos pelos 3 métodos e os erros relativos percentuais calculados em relação ao método de referência (MC1). A principal diferença entre estas análises está nos valores numéricos obtidos para as probabilidades de falha. Uma comparação entre as Tabelas 4.6 e 4.7 também confirma a similaridade entre os resultados. Assim, pode-se afirmar que os mesmos comentários já realizados para o **CASO 3** com a **ANÁLISE 1** se aplicam aqueles do **CASO 3** com a **ANÁLISE 1**. Com isso conclui-se que as variações nos parâmetros estatísticos aplicadas ao sistema apresentam sensibilidades semelhantes ou equivalentes em relação aos métodos utilizados. Entretanto, os erros relativos percentuais em relação ao MC1 são menores para a variabilidade da massa do que aqueles obtidos com a variabilidade da rigidez.



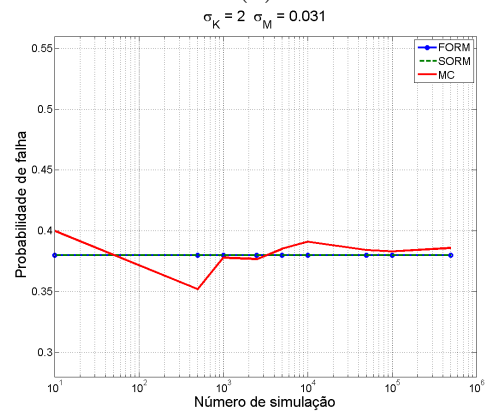
(a)



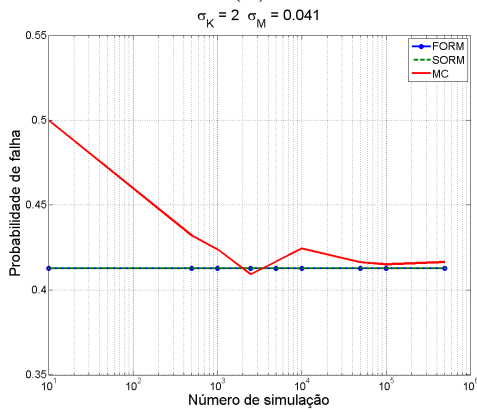
(b)



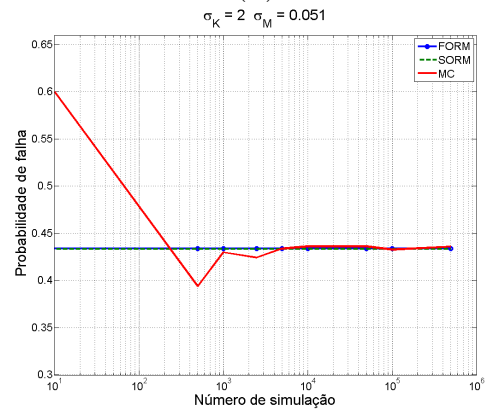
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.7: Probabilidade de falha do sistema - **CASO 3** com a **ANÁLISE 2**: $\sigma_K = 2$ e $\sigma_M = 0,001 : 0,01 : 0,051$.

Tabela 4.3: Probabilidades de falha e erros percentuais relativo ao MC1 - **CASO 3** com a **ANÁLISE 2**.

σ_M	FORM	erro [%]	SORM	erro [%]	MC1
0,001	0	0	0	0	0
0,011	0.1844	8.1	0.1844	8.1	0.2007
0,021	0.3212	2.1	0.3212	2.1	0.3280
0,031	0.3801	1.8	0.3801	1.8	0.3870
0,041	0.4126	1.2	0.4126	1.2	0.4176
0,051	0.4337	0.6	0.4337	0.6	0.4363

4.2 Problema da Mecânica da Fratura

A mecânica da fratura probabilística é um campo da engenharia moderna que está se desenvolvendo rapidamente. Uma recente pesquisa nesta área é a de Nespurek (2009), que dá base para trabalhos que envolvam incertezas com a área da mecânica da fratura. Para um problema de trinca ser analisado com base na teoria da mecânica da fratura um conhecimento prévio sobre a trinca é necessário. Ao considerar a aleatoriedade do tamanho da trinca, a localização, as propriedades do material, cargas externas e geometria uma análise determinística fornece uma avaliação incompleta da segurança do problema. Para resolver estes problemas, a mecânica da fratura probabilística é uma ferramenta útil, desde que combinemos a teoria da mecânica da fratura com métodos estocásticos. Um estudo básico da mecânica da fratura probabilística e sua aplicação com a análise de incertezas em sistemas estruturais pode ser encontrada em (LIU E BELYTSCHKO, 1989). Uma proposta apresentada aqui considerará a complexidade do mecanismo de falha com métodos de confiabilidade, para isso será feita uma combinação da equação de Paris (PARIS E ERDOGAN, 1963) com os métodos de confiabilidade estrutural. Quatro métodos serão utilizados: Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), Método de Confiabilidade de Segunda Ordem (SORM) e simulação de Monte Carlo Direta (MC1).

4.2.1 Propagação de trinca

Há três tipos de movimento cinemático entre as superfícies superiores e inferiores da trinca. Estes três modos básicos de deformação estão ilustradas na Figura 4.8, que apresenta os deslocamentos relativos das superfícies da trinca de um elemento local que contém uma trinca frontal. Qualquer deformação das superfícies da trinca pode ser visto como uma superposição destes modos de deformações básicos, que são definidos como segue:

1. Modo I (Abertura): As superfícies da trinca são separadas de forma simétrica em relação ao planos xy e xz .
2. Modo II (Cisalhamento): Uma superfície da trinca desliza em relação à outra de forma

simétrica em relação aos plano xy e oblíquo-simétrica em relação ao plano xz .

3. Modo III (Rasgamento): As superfícies da trinca deslizam uma em relação a outra de forma oblíquo-simétrica em relação a ambos os planos xy e xz .

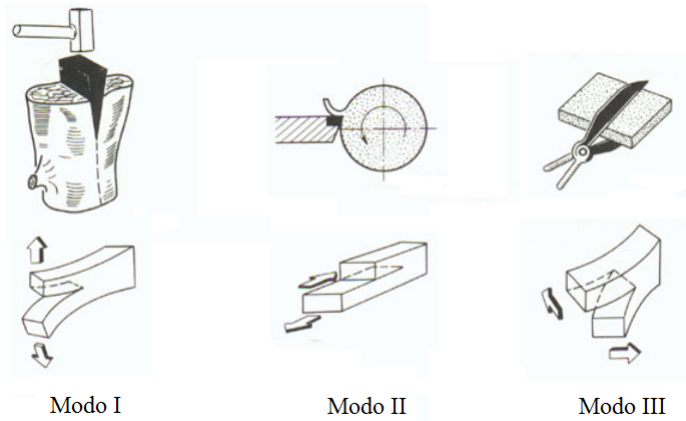


Figura 4.8: Modos básicos de deslocamento na superfície da trinca

Os modelos de predição da propagação de trinca em fadiga são baseados nos modelos da mecânica da fratura que tem sido desenvolvido para dar suporte ao conceito de tolerância a dano em estruturas metálicas. Os modelos de predição são caracterizados de acordo com o tipo de carga e a descrição de cada modelo. Geralmente a predição da propagação da trinca em fadiga e a vida em fadiga é feita sobre constantes cargas de amplitudes variadas. Numerosos estudos sobre este assunto foram feitos. Pode-se observar que no início da microtincas no início da vida em fadiga. Assim, ficou claro que o ciclo a fadiga sobre constantes cargas cíclicas consiste em duas fases, a vida de iniciação da trinca seguido pelo período de propagação até a falha. O problema que envolvia a transição o período de iniciação da trinca para o período de propagação foi primeiro estudado por Paris e Erdogan (1963). O resultado do teste de Paris e Erdogan foi expresso em termos de da/dN com a função de ΔK (faixa do fator de intensidade a tensão). Uma abordagem comum para a análise da propagação da trinca em fadiga descrita pela equação diferencial resulta no comprimento da trinca a versus o número de ciclos N e na previsão do número requerido para o crescimento da trinca do início até seu tamanho final (BEDEN *et al.*, 2009).

O tempo de vida de estruturas submetidas a cargas de fadiga consiste de três fases distintas: nucleação da trinca; propagação da trinca; e o limite de resistência a fratura residual ou tenacidade a fratura. Esse processo pode ser entendido a partir da curva da taxa de propagação da trinca por fadiga, Figura 4.9, também referida como a curva da relação da/dN versus ΔK . Esta curva é definida pelas Regiões I, II e III (GDOUTOS, 1993).

A *Região I*, é a fase inicial da propagação da trinca por fadiga e uma fase estável (lenta) da propagação da trinca, além de definir o fator de intensidade à tensão, ΔK_{th} , abaixo do qual a trinca à fadiga não deve se propagar.

A *Região II* é a etapa de propagação intermediária da trinca, onde o uso do conceito da mecânica da fratura linear elástica (LEFM) é aceitável. É na região II que os estudos deste trabalho foram realizados.

A *Região III* é a etapa em que a taxa de crescimento da trinca aumenta rapidamente à medida que a instabilidade global é aproximada. Ao atingir a região III o sistema está propenso à falhas devido a fadiga.

A propagação de trinca em fadiga (Região II), representa uma grande porção da vida em fadiga de um material. É nesta região que a lei de Paris pode ser aplicada, a lei da potência descrito por Paris e Erdogan (1963) é um método simples para prever a propagação da trinca por fadiga e pode ser expresso por

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \quad (4.25)$$

onde a é o comprimento da trinca e N é o número de ciclos de fadiga. O coeficiente c e o expoente m são determinados a partir de dados experimentais. $\Delta K = K_{max} - K_{min}$, onde K_{max} e K_{min} são os fatores de intensidade de tensão ao máximo e mínimo no ciclo de carga. O fator de intensidade a tensão K é dada por

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (4.26)$$

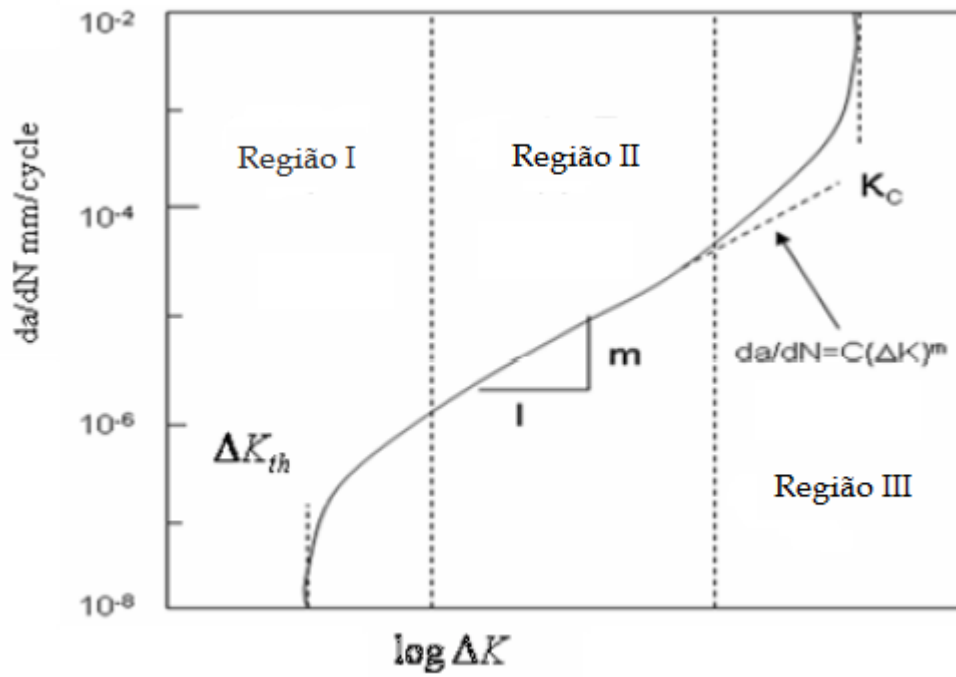


Figura 4.9: Curva da taxa de propagação da trinca em fadiga. (BEDEN *et al.*, 2009)

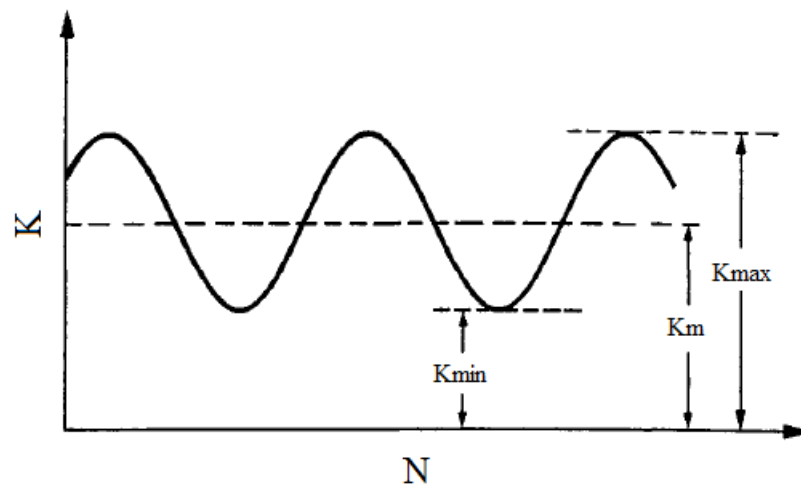


Figura 4.10: Carga senoidal de amplitude e frequência constantes.

onde σ é a tensão na trinca, portanto, a variação de tensão pode ser obtida da seguinte forma

$$\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (4.27)$$

Quando um componente estrutural é submetido a carga de fadiga, uma trinca dominante atinge um tamanho crítico sob a carga de pico durante o último ciclo levando a uma falha catastrófica (GDOUTOS, 1993). O objetivo básico da análise de propagação de trincas por fadiga é a determinação do tamanho da trinca, a , em função do número de ciclos, N . Assim, é possível estimar o tempo de vida da estrutura quando esta contém um dano. Este tempo de vida pode ser previsto integrando a equação que calcula o número de ciclos para falha N_f , a qual pode ser obtido por

$$N_f = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{c(\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^m} \quad (4.28)$$

onde a_i é o comprimento inicial da trinca e a_f é o comprimento final, que pode ser obtido como

$$a_f = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{ic}}{Y\Delta\sigma} \right)^2 \quad (4.29)$$

K_{ic} é a tenacidade à fratura. Integrando e substituindo o tamanho final da trinca, Eq.(4.29) na Eq.(4.28) o número de ciclos para falha é obtido como

$$N_f = \frac{a_f^{1-m/2} - a_i^{1-m/2}}{c(\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^m \pi^{m/2} (1 - m/2)} \quad (4.30)$$

4.2.2 Resultados simulados do problema de mecânica da fratura

No intuito de analisar a eficiência dos métodos FORM, SORM e simulação de Monte Carlo Direta (MC1) na obtenção da probabilidade de falha devido à propagação da trinca, estes são aplicados a um problema de propagação de trinca cujo modelo é uma placa retangular contendo uma trinca partindo da borda sujeita a uma carga de amplitude constante,

Figura 4.11 . As variáveis aleatórias e suas distribuições foram extraídas no trabalho de Millwater *et al.* (1994) e estão mostradas na Tabela 4.4.

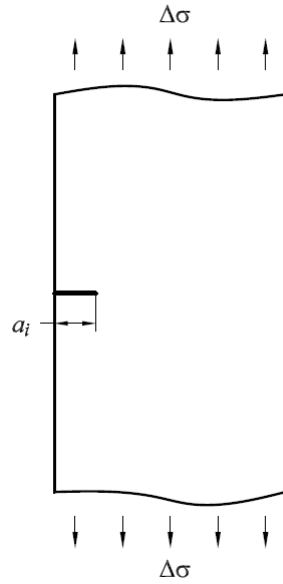


Figura 4.11: Modelo da placa com uma trinca de borda.

Tabela 4.4: Propriedades das variáveis aleatórias para o problema de propagação de trinca.

Variáveis aleatórias	Distribuição	Média	Desvio Padrão
Carga ($\Delta\sigma$), [ksi]	Lognormal	100	10
Tamanho inicial da trinca (a_i), [in]	Lognormal	0.01	0.005
Constante de Paris (c)	Lognormal	1.2×10^{-10}	1.2×10^{-11}
Tenacidade a fratura K_{IC} , [ksi/ \sqrt{in}]	Normal	60	6

Da teoria da propagação de trinca à fadiga (Região II) e da lei da potência descrito por Paris e Erdogan (1963) é possível determinar o número de ciclos de falha, N_f , aplicando a Eq.(4.30) e o comprimento final da trinca, a_f , pela Eq.(4.29). Usando os valores da Tabela

4.4 obtém-se a curva de variação do comprimento da trinca, a , versus o número de ciclos, N , onde é possível observar a tendência do número de ciclos para 8.000 ciclos no ponto de instabilidade da trinca, como mostrado na Figura 4.12.

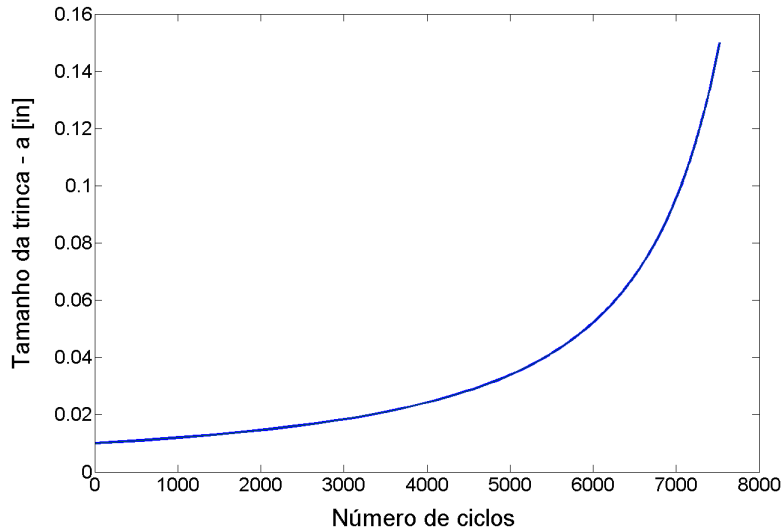


Figura 4.12: Comprimento da trinca versus números de ciclos.

Para o cálculo da probabilidade de falha a equação de estado limite é definida como $g(\mathbf{X}) = N_{serviço} - N_f$. O número de ciclos admissíveis $N_{serviço}$ e o expoente m são considerados variáveis determinísticas, onde $m = 3,32$ e $N_{serviço} = 8.000$ ciclos. Ao se tratar um problema com as possíveis variações que estão presentes no sistema, podemos observar que existe a probabilidade de falha mesmo na fase em que ainda há uma considerável margem de segurança.

A Tabela 4.5 mostra os resultados da probabilidade de falha obtida pelos 3 métodos (FORM, SORM e MC1) com os erros relativos percentuais em relação ao MC1 calculados para diferentes números de ciclos admissíveis, $N_{serviço}$. Todas as simulações de Monte Carlo (MC1) foram calculadas com 100.000 amostras.

Da Tabela 4.5 observa-se que de forma geral para baixos números de ciclos de $N_{serviço}$ os métodos apresentam maiores erros na avaliação da probabilidade de falha, que vão reduzindo com o aumento do número de ciclos. Os métodos FORM e SORM apresentam entre si erros da

Tabela 4.5: Probabilidade de falha para o problema de propagação de trinca.

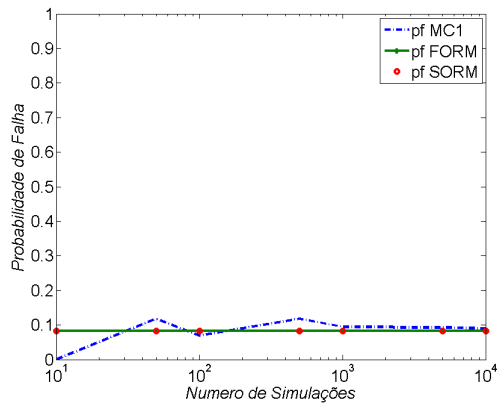
Valor admissível ($N_{serviço}$)	MC1 _(100.000)	FORM	SORM
1.000	0.0939	0.0835	0.08351
3.000	0.4045	0.3915	0.39152
3.704	0.5121	0.5000	0.50001
4.000	0.5568	0.5417	0.54176
5.000	0.6752	0.6629	0.66293
6.000	0.7671	0.7539	0.75400
7.000	0.8337	0.8195	0.81957
8.000	0.8817	0.8656	0.86561

mesma ordem em relação a referência MC1. Entretanto, quando $N_{serviço}$ aproxima-se do valor da instabilidade da trinca os dois métodos (FORM, SORM) convergem para valores de p_f bem próximos, com erros percentuais inferiores a 2%. Em relação à coincidência aproximada dos resultados obtidos com os métodos FORM e SORM, uma possível explicação poderia ser, que uma aproximação de primeira ordem (FORM) para este sistema já seria suficiente e a abordagem com uma segunda ordem (SORM) mostra-se desnecessária.

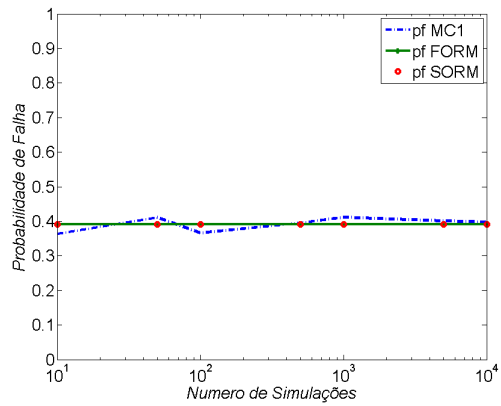
A figura 4.13 mostra uma comparação dos resultados da probabilidade de falha em função do número de amostras para os diferentes valores de $N_{adm\,serviço}$, obtidos pelos três métodos (FORM, SORM e MC1). De forma geral os resultados dos gráficos coincidem com aqueles mostrados na Tabela 4.5. Assim, os comentários anteriores se aplicam também neste caso. Entretanto, nestes gráficos pode-se observar mais claramente o processo de convergência dos métodos.

No geral os três métodos chegaram a um resultado de confiabilidade similares e de aproximações satisfatórias. A Figura 4.14 mostra a CDF de N_f , onde observa-se a coincidência das CDF's nos métodos FORM e MC1, como já era previsto.

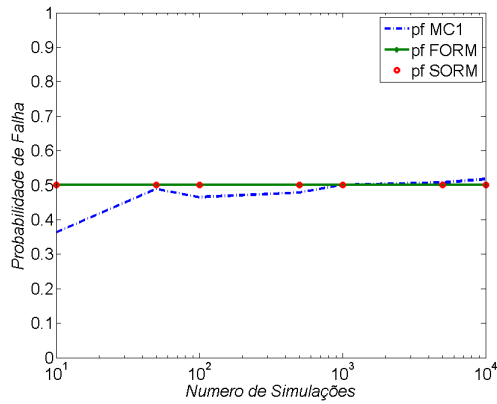
Um estudo para estimar a distribuição resultante da resposta do sistema foi realizado em cima da variável N_f . Como o valor desta variável é função das outras variáveis do problema



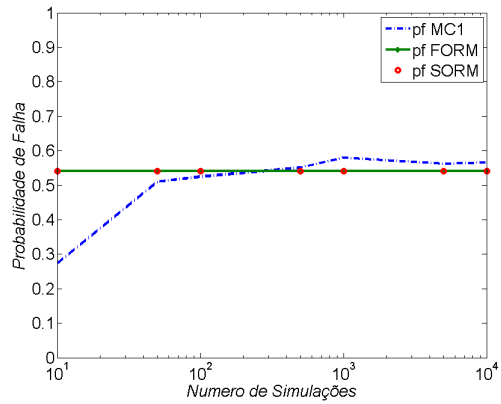
(a) $N_{serviço} = 1.000$



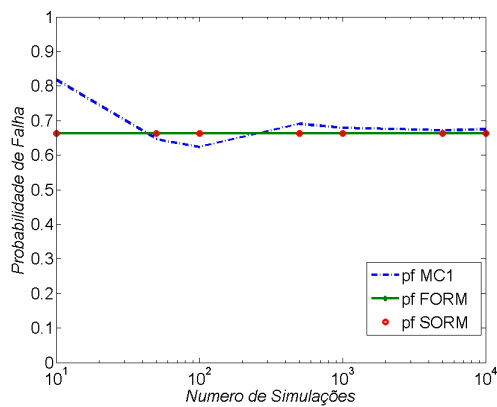
(b) $N_{serviço} = 3.000$



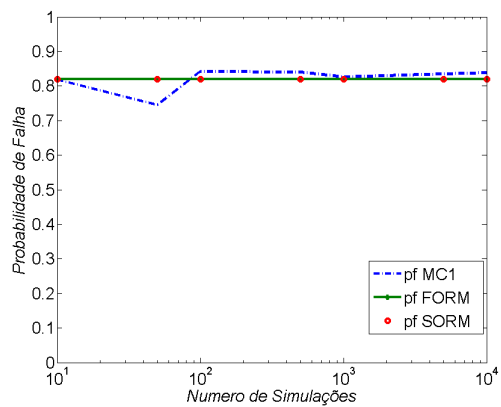
(c) $N_{serviço} = 3.704$



(d) $N_{serviço} = 4.000$



(e) $N_{serviço} = 5.000$



(f) $N_{serviço} = 7.000$

Figura 4.13: Probabilidade de Falha para diferentes valores de $N_{serviço}$.

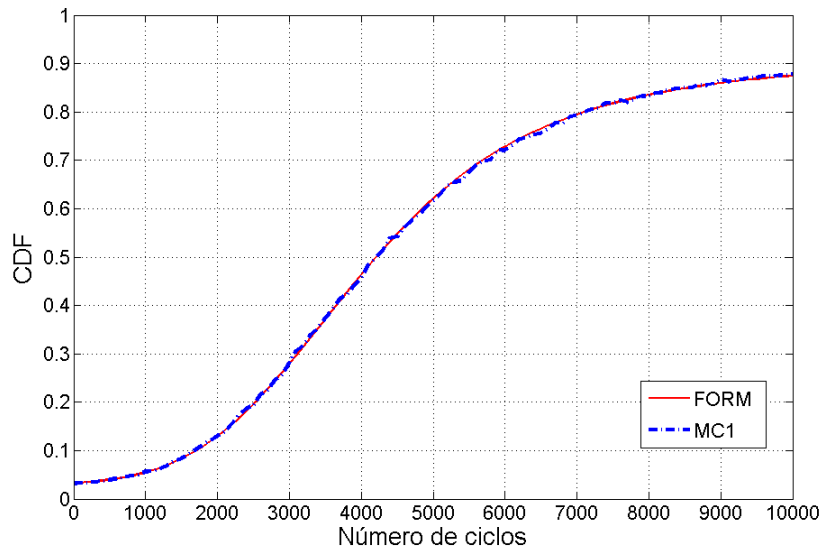


Figura 4.14: Função de distribuição cumulativa do ciclo de falha.

e ela é a variável aleatória da função estado limite, é a mais indicada para a análise. Para isso a função *dfittool* do programa *Matlab*[®], que é uma ferramenta interativa para ajuste da distribuição dos dados, foi utilizada. A Figura 4.15 ilustra o ajuste da distribuição da variável, a qual se aproximou da distribuição de valor extremo generalizada (*generalized extreme value* - GEV) em vez de uma distribuição gaussiana.

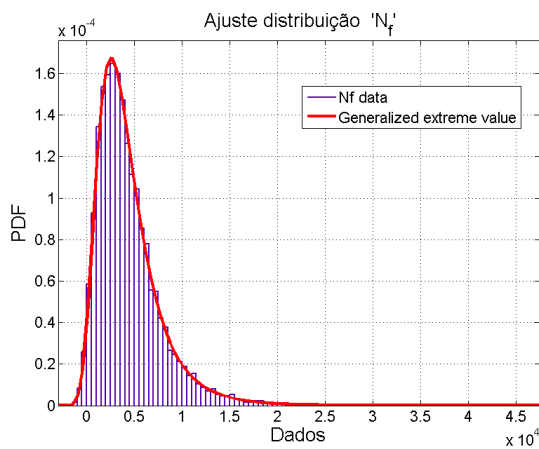


Figura 4.15: PDF da distribuição de N_f .

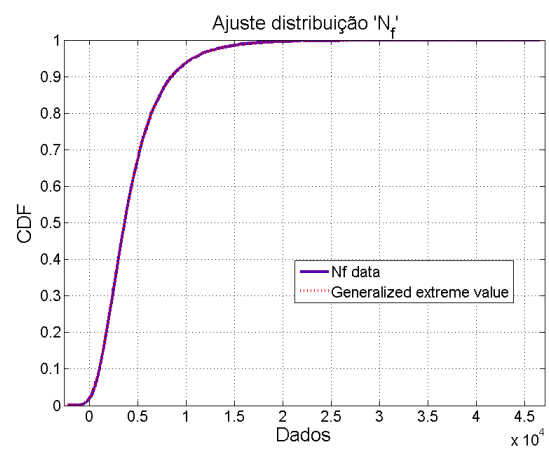


Figura 4.16: CDF da distribuição de N_f .

4.3 Problema de Detecção de Falha Estrutural

Com o objetivo de proporcionar um ambiente seguro no desenvolvimento de projetos estruturais, muitas investigações para controlar os níveis de ruído e vibração indesejáveis têm sido feitas. Ferramentas para prever o comportamento do ruído e da vibração são necessárias para controlar essas ocorrências. Um problema difícil neste assunto está relacionado com os caminhos da energia de vibração e da propagação de ondas através da estrutura. Conhecendo-se corretamente esses caminhos obtêm-se meios de controlar o ruído e a vibração. Uma técnica para a detecção de falha decorrida de trinca é a de inspeção visual. Recentemente, novas tecnologias têm sido desenvolvidas com o objetivo de evitar esse procedimento. A presença de um dano estrutural, como uma trinca, introduz uma alteração da flexibilidade local da estrutura, que modifica a sua resposta vibratória (DIMAROGONAS, 1996). Portanto, a energia de vibração pode ser usada para investigar o estado de saúde de uma estrutura. Recentemente, muitas pesquisas estão focadas em métodos que utilizam propagação de ondas elásticas em bandas de média e alta frequências (Pereira, 2009, Krawczuk, 2002). Em bandas de média e alta frequências, as abordagens, tais como o método dos elementos finitos (FEM) criam modelos muito grandes. Quando as incertezas associadas com o sistema são consideradas, as análises de falha podem ser proibitivas tendo em conta o custo computacional (FABRO, 2010). Proposto por Doyle (1997), o método do elemento espectral (SEM) consiste no desenvolvimento matricial de um elemento, baseado na solução analítica da equação da onda escrita em função do deslocamento no domínio da frequência. Isso é equivalente a um número infinito de elementos finitos. Uma das grandes vantagens do SEM é o número reduzido de elementos necessários para a modelagem do sistema em comparação com outros métodos computacionais. Esta característica e o domínio espectral fazem do SEM um método mais adequado para resolver o problema de estruturas trincadas incluindo parâmetros incertos.

Neste trabalho, um método de detecção de danos usando o elemento espectral de viga trincada apresentada por Krawczuk (2002) é estendido para incluir as incertezas no material e nos parâmetros geométricos. O método mais simples para estimar a confiabilidade estrutural é a simulação de Monte Carlo (MCS), porém para estruturas complexas com função implícita a avaliação de desempenho de cada realização é computacionalmente cara. Portanto MCS direto não é uma ferramenta computacional prática para estimar a probabilidade de falha

ou a resposta estocástica do sistema. Nestes casos, métodos aproximados como o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM) e Método da Superfície de Resposta (*Response Surface Method* - RSM) são ferramentas alternativas melhores para estimar a probabilidade de falha e resposta estocástica da estrutura. Neste trabalho esses três métodos são usados para avaliar a confiabilidade e a resposta de uma estrutura tipo viga com dano modelado pelo SEM.

4.3.1 Método do elemento espectral

O método do elemento espectral se assemelha a método de elementos finitos, porém com duas importantes ressalvas: a formulação do método do elemento espectral (SEM) é escrita no domínio da frequência; e a função de interpolação do elemento é a solução analítica da equação da onda. Baseado na última característica o número de elementos requerido para um modelo espectral coincidirá com o número de descontinuidades na estrutura, Figura 4.17

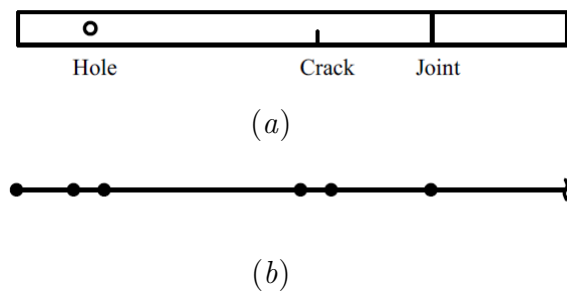


Figura 4.17: Representação estrutural: (a)Estrutura física; (b)Modelo do elemento espectral.

4.3.2 Elemento espectral de viga saudável

Para a análise da propagação de ondas considere uma viga esbelta com modelo de viga tipo Euler-Bernoulli, com um carga aplicada transversalmente. Será assumido que o deslocamento transversal e rotacional são pequenos. Desconsiderando as deformação de cisalhamento a equação diferencial do movimento escrita no domínio da frequência (DOYLE, 1997) é dada

por,

$$\frac{d^4 \hat{v}}{dx^4} - k^4 \hat{v} = F \quad (4.31)$$

cuja solução da equação homogênea é dada por

$$\hat{v} = Ae^{-ik_1x} + Be^{-k_2x} + Ce^{ik_1(L-x)} + De^{k_2(L-x)} \quad (4.32)$$

onde \hat{v} é o deslocamento transversal no domínio da frequência, F é a força externa e L é o comprimento da viga. Os números de onda são dados por,

$$k \equiv \sqrt{\frac{\omega^2 \rho S}{EI}}; \quad k_1 = \pm k; \quad k_2 = \pm ik \quad (4.33)$$

onde ω é a frequência circular, E é o módulo de Young, S é a área da seção transversal, ρ é a densidade do material, I é o momento de inércia e $i = \sqrt{-1}$. Usando o módulo de Young complexo, $E_c = E(1 + i\eta)$, um amortecimento estrutural interno é introduzido, onde η é o fator de perda estrutural histerético.

A Figura 4.18 ilustra um elemento de viga saudável com dois nós, dois graus de liberdade por nó (\hat{v} e $\hat{\phi}$) e duas cargas nodais (\hat{V} e \hat{M}).

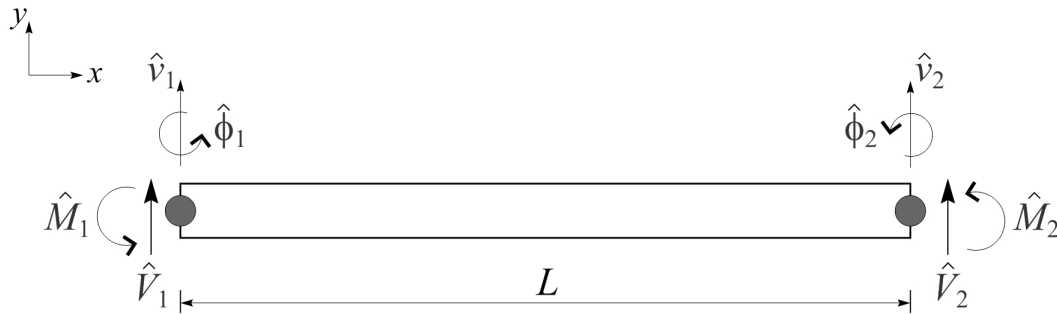


Figura 4.18: Elemento espectral de viga saudável com dois nós.

Aplicando-se os deslocamentos e rotações nodais do elemento da figura 4.18 na Eq.(4.32) os coeficientes A, B, C e D podem ser obtidos. Substituindo-se esses coeficientes de volta na Eq.(4.32), a expressão do cálculo dos deslocamentos e rotações em qualquer ponto arbitrário

da viga pode ser escrita como:

$$\hat{v}(x) = \hat{g}_1(x)\hat{v}_1 + \hat{g}_2(x)\hat{\phi}_1 + \hat{g}_3(x)\hat{v}_2 + \hat{g}_4(x)\hat{\phi}_2 \quad (4.34)$$

onde $\hat{g}_i(x)$ são as funções de forma, definidas por (DOYLE, 1997):

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(x) &= [r_1\hat{h}_1(x) + r_2\hat{h}_2(x)]/\Delta \\ \hat{g}_2(x) &= [r_1\hat{h}_3(x) + r_2\hat{h}_4(x)]/\Delta \\ \hat{g}_3(x) &= [r_1\hat{h}_2(x) + r_2\hat{h}_1(x)]/\Delta \\ \hat{g}_4(x) &= [r_1\hat{h}_4(x) + r_2\hat{h}_3(x)]/\Delta \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta &= -r_1^2 + r_2^2 \\ r_1 &= i(k_1 - k_2)(1 - e^{-ik_1L}e^{-ik_2L}) \\ r_2 &= i(k_1 + k_2)(e^{-ik_1L}e^{-ik_2L}) \\ \hat{h}_1(x) &= ik_2(e^{-ik_1x} - e^{-ik_2L}e^{-ik_1(L-x)}) - ik_1(e^{-ik_2x} - e^{-ik_1L}e^{-ik_2(L-x)}) \\ \hat{h}_2(x) &= ik_2(e^{-ik_2L}e^{-ik_1x} - e^{-ik_1(L-x)}) + ik_1(e^{-ik_1L}e^{-ik_2x} - e^{-ik_2(L-x)}) \\ \hat{h}_3(x) &= (e^{-ik_1x} + e^{-ik_2L}e^{-ik_1(L-x)}) - (e^{-ik_2x} + e^{-ik_1L}e^{-ik_2(L-x)}) \\ \hat{h}_4(x) &= (e^{-ik_2L}e^{-ik_1x} + e^{-ik_1(L-x)}) - (e^{-ik_1L}e^{-ik_2x} + e^{-ik_2(L-x)}) \end{aligned}$$

Usando-se a relação entre as cargas nodais e os graus de liberdade dos nós, e aplicando-se as condições de contorno no elemento espectral, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{M}_2 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

onde $\hat{\mathbf{K}}$ é a matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral de viga saudável, a qual é

simétrica, usualmente complexa e pode ser expressa como:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^{-ikL} & e^{-kL} \\ -ik & -k & ike^{-ikL} & ke^{-kL} \\ e^{-ikL} & e^{-kL} & 1 & 1 \\ -ike^{-ikL} & -ke^{-kL} & ik & k \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

4.3.3 Elemento espectral de viga semi-infinito

O elemento espectral de viga semi-infinito pode ser considerado como um caso particular do elemento espectral da viga saudável onde o nó 2 tende a infinito (Figura 4.19).

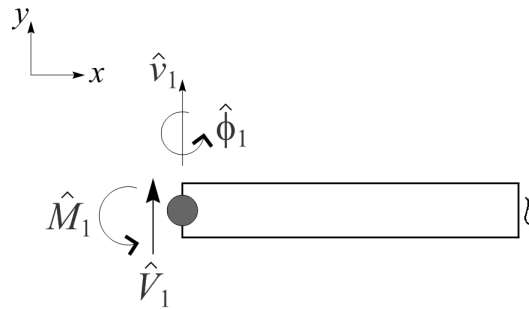


Figura 4.19: Elemento espectral de viga semi-infinito.

Similar a teoria para o elemento espectral de viga desenvolvido anteriormente, a construção do elemento espectral de viga semi-infinito segue a mesma linha, assim aplicando a mesma teoria, a matriz de rigidez dinâmica espectral do elemento throw-off pode ser expressa como:

$$\hat{\mathbf{K}}_t = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} (i-1)k^3 & ik^2 \\ ik^2 & (i-1)k^3 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

4.3.4 Elemento espectral de viga trincado

O elemento espectral de viga com uma trinca transversal e não propagante (KRAWCZUK, 2002) está ilustrada na figura 4.20. O elemento contém dois nós com dois GDL/nó, onde L é o comprimento, L_1 é a posição da trinca em relação ao nó 1 e a é o comprimento ou profundidade da trinca. A trinca é modelada por uma flexibilidade local adimensional representada por θ , a qual é calculada pelo teorema de Castigliano e as leis da mecânica da fratura (TADA *et al.*, 1973).

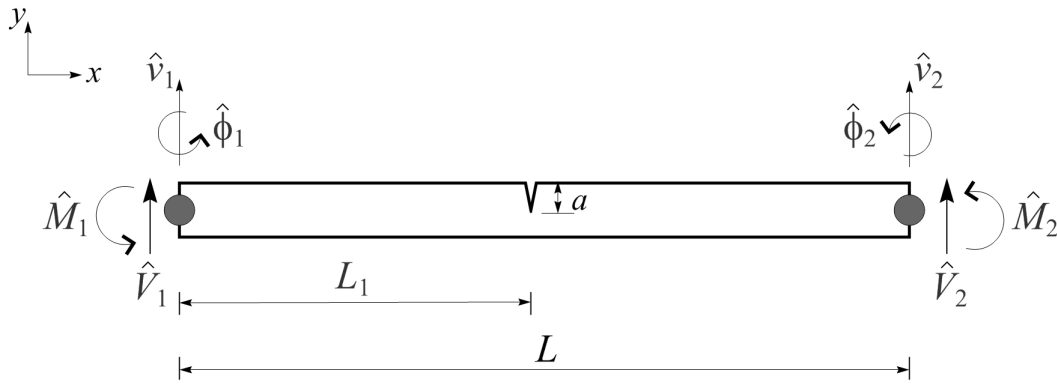


Figura 4.20: elemento espectral de viga trincado.

A solução da Eq.(4.32) aplicada a esse elemento é dividida em duas partes:

$$\hat{v}^l(x) = A_1 e^{-i(k_1 x)} + B_1 e^{-(k_2 x)} + C_1 e^{-ik_1(L_1-x)} + D_1 e^{-k_2(L_1-x)} \quad [0 \leq x \leq L_1] \quad (4.39)$$

$$\hat{v}^r(x) = A_2 e^{-ik_1(L_1+x)} + B_2 e^{-k_2(L_1+x)} + C_2 e^{-ik_1(L-(L_1+x))} + D_2 e^{-k_2(L-(L_1+x))} \quad [0 \leq x \leq L-L_1] \quad (4.40)$$

onde \hat{v}^l e \hat{v}^r são os deslocamentos verticais à esquerda e à direita da trinca, respectivamente. Os coeficientes $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2,$ e D_2 são determinados pela condição de contorno.

Dos deslocamentos, cargas nodais e a matriz de rigidez espectral são obtida de forma similar ao elemento espectral de viga saudável. Portanto, a matriz de rigidez dinâmica do

elemento espectral de viga trincado é escrita como:

$$\hat{\mathbf{K}}_c = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ik & -k & ika & kb & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & -b & -1 & -1 & a & b & c & d \\ iak - a\theta k^2 & bk + b\theta k^2 & -ik - \theta k^2 & -k + \theta k^2 & -ika & -kb & ikc & kd \\ -k^2 a & k^2 b & -k^2 & k^2 & k^2 a & -k^2 b & k^2 c & -k^2 d \\ ik^3 a & -k^3 b & -ik^3 & k^3 & -k^3 a & k^3 b & ik^3 c & -k^3 d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & g & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ikf & -kg & ik & k \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

onde: $a = e^{ikL_1}$, $b = e^{-kL_1}$, $c = e^{-ik(L-L_1)}$, $d = e^{k(L-L_1)}$, $f = e^{-ikL}$, $g = e^{-kL}$.

4.3.5 Flexibilidade da viga na posição da trinca

O coeficiente de flexibilidade da trinca θ , é calculado usando o teorema de Castigliano, onde a flexibilidade na posição da trinca para um elemento espectral de viga unidimensional pode ser obtido por:

$$c = \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} \quad (4.42)$$

onde U denota a energia de deformação elástica devido à trinca e P é a carga nodal no elemento. Considerando que somente o modo I da trinca está presente no elemento de viga, a energia de deformação elástica pode ser expressa como:

$$U = \frac{1 - \nu^2}{E} \int_{S_c} K_I^2 dS_c \quad (4.43)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, S_c é a área trincada e K_I é um fator de intensidade de tensão correspondendo ao modo I da trinca, o qual pode ser representado por:

$$K_I = \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi\alpha} f\left(\frac{\alpha}{h}\right) \quad (4.44)$$

onde b é a base e h a altura da seção transversal da viga; α é a variação da profundidade da trinca (Figura 4.21); M é o momento fletor na posição da trinca e f é uma função de correção do fator de intensificação de tensão do modo I, o qual pode ser escrito como:

$$f\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \sqrt{\frac{2h}{\pi\alpha} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2h}\right)} \frac{0.923 + 0.199(1 - \sin(\frac{\pi\alpha}{2h}))^4}{\cos(\frac{\pi\alpha}{2h})} \quad (4.45)$$

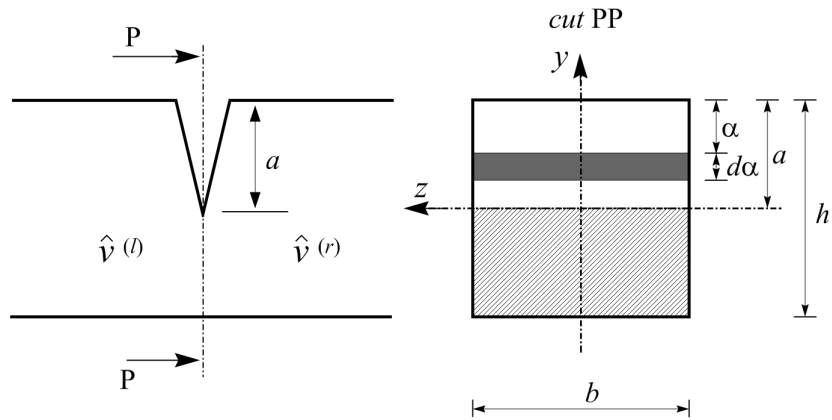


Figura 4.21: Seção transversal da viga trincada na posição da trinca.

O coeficiente c usado para calcular a flexibilidade da trinca pode ser expresso da seguinte forma:

$$c = \frac{72\pi}{bh^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} f^2(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \quad (4.46)$$

onde $\bar{a} = \frac{a}{h}$ e $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{h}$. A flexibilidade local adimensional é dada por:

$$\theta = \frac{EIc}{L} \quad (4.47)$$

4.3.6 Resultados simulados do problema de detecção de falhas

Para os testes simulados do problema de detecção de falhas os modelos utilizados consistem de: a) uma estrutura composta por um elemento espectral de viga saudável conectado à um elemento espectral de viga semi-infinito; e b) uma estrutura composta por um elemento espectral de viga trincado conectado à um elemento espectral de viga semi-infinito. A figura 4.22 mostra o aspecto dos dois sistemas. Assumindo a condição de contorno livre-livre, as estruturas são excitadas no nó dois por uma força impulsiva. As propriedades estatísticas do material e das dimensões das vigas estão descritas na Tabela 4.6.

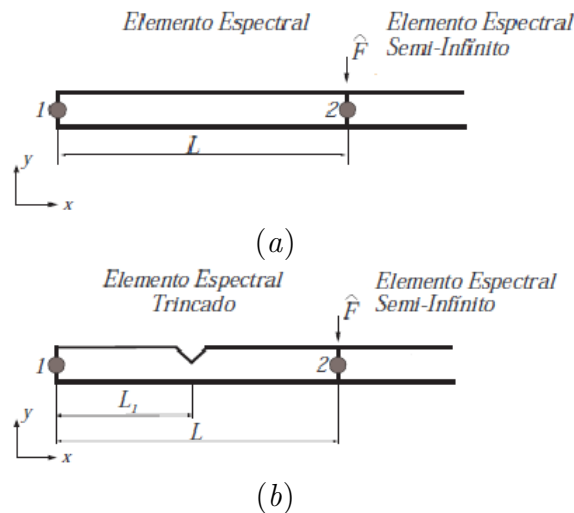


Figura 4.22: Modelo estrutural: (a)viga trincada; (b)viga saudável.

A força impulsiva é utilizada para facilitar a visualização do sinal na propagação de ondas e possibilita localizar a trinca na viga. O pulso é obtido com uma força senoidal modulada por uma janela triangular e construído por uma função seno com 10,0 N de amplitude e 50,0 kHz de frequência. A função seno é gerada com 100 pontos e a janela triangular inclui cinco períodos. A Figura 4.23 mostra o pulso gerado no domínio tempo e no domínio da frequência.

A força de excitação é aplicada no nó 2 e a resposta é obtida no mesmo ponto (Fi-

Tabela 4.6: Propriedades e dimensões das vigas.

Variável	Média	Desvio Padrão	Distribuição
Profundidade da trinca - a [m]	0.02 - 0.28 h	0.01 - 0.31	lognormal
Módulo de elasticidade - E [GPa]	210	0.01	lognormal
Posição da trinca - $L1$ [m]	0.25 L , 0.5 L , 0.75 L	0.06	normal
Altura da secção transversal - h [m]	0.030	0.06	lognormal
Base da secção transversal - b [m]	0.01	-	-
Densidade do material - ρ [kg/m ³]	7850	-	-
Comprimento - L [m]	4	-	-
Fator de amortecimento - η	0.01	-	-

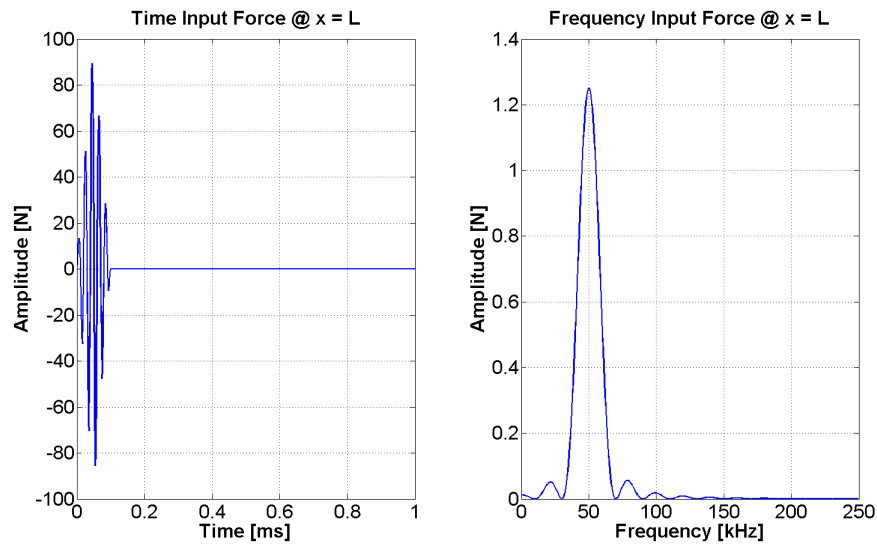


Figura 4.23: Representação da força pulso no tempo e na frequência (50 kHz).

gura 4.22). A onda viaja através da estrutura até atingir o nó 1, onde é refletida de volta para o nó 2, e continua para o infinito através do elemento semi-infinito. O elemento semi-infinito funciona como uma terminação anecoica dissipando a energia restante no sistema. A amplitude da aceleração vertical diminui através do comprimento da estrutura devido ao amortecimento interno η . A figura 4.24 mostra a resposta em aceleração no tempo para a

estrutura saudável, que apresenta dois pulsos, um no tempo de excitação (nó 2) e outro no tempo de reflexão (nó 1). No entanto, para a resposta da aceleração da viga trincada nas posições à $0,25L$; $0,50L$ e $0,75L$, dois pulsos adicionais aparecem, um entre o tempo de excitação e tempo de reflexão e outra após o tempo de reflexão. Estes pulsos adicionais caracterizam as ondas parcialmente refletida e transmitida por uma descontinuidade localizada no material, o que poderia ser a existência de uma trinca. Estes resultados mostram que o modelo SEM é capaz de reproduzir o comportamento da propagação de ondas na estrutura da viga e de localizar a posição da trinca.

A análise da confiabilidade do sistema será realizada para a estrutura da viga trincada. A função de estado limite a fim de verificar a confiabilidade estrutural avalia o valor *rms* do vetor da resposta em aceleração no tempo no nó 2 ($ac_2^{(rms)}$), o qual deve estar acima do valor crítico ($\bar{ac}_2^{(rms)}$). Ao estabelecer o valor limite com a profundidade da trinca de $a = 30\%h$, o valor *rms* crítico determinístico na resposta aceleração/tempo no nó 2 pode ser obtido da função de desempenho descrita como:

$$g(\mathbf{X}) = \bar{ac}_2^{(rms)} - ac_2^{(rms)}(\mathbf{X}) \quad (4.48)$$

Considerando a profundidade da trinca $a = 10\%h$ com um $COV = 0,1$ e mantendo as outras variáveis aleatórias como mostrado na Tabela 4.6, uma simulação de Monte Carlo Direta é realizada para analisar a convergência da probabilidade de falha. Variando o número de amostras um teste para a convergência da probabilidade de falha é obtido. A Figura 4.25 mostra o gráfico de convergência, o qual mostra convergência com mais de 500.000 amostras. Utilizando a Equação 3.41 para uma probabilidade de falha $p_f \cong 0.038$ e 5% de erro um $N \cong 40.000$ amostras é obtido. Assim, um tamanho de amostragem de 50.000 amostras será considerada para todas as simulações de Monte Carlo desta aplicação.

Para avaliar o desempenho dos métodos RSM e MCS no cálculo da probabilidade de falha, as seguintes simulações são realizadas: A referência para a probabilidade de falha é calculado pela simulação de Monte Carlo usando o modelo do SEM da viga trincada, o qual é referido como MCS. Para calcular a probabilidade de falha pelo RSM com aproximação de primeira ordem o modelo fatorial completo do projeto de experimentos (DOE) é usado.

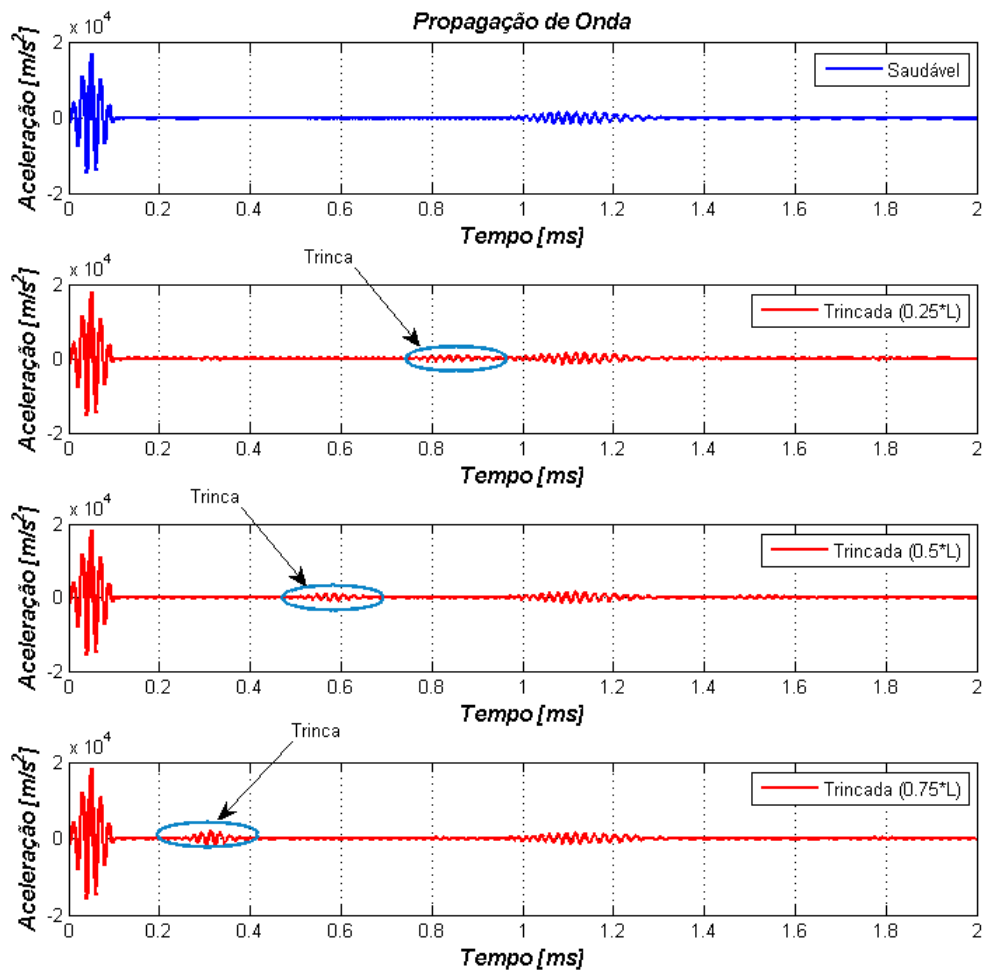


Figura 4.24: Resposta em aceleração para as vigas saudável e trincada nas posições à $0, 25L$; $0, 50L$ e $0, 75L$.

Quatro variáveis ($a, E; L1; h$) com os níveis $\mu, \mu \pm \sigma$ são consideradas e a função de desempenho é calculada para todas as combinações possíveis ($N_d = 2^n + 1 = 2^4 + 1 = 17$ pontos). Usando a Equação 3.43, os coeficientes do polinômio de primeira ordem são estimados usando uma análise de regressão. Para a aproximação do RSM de segunda ordem o projeto de experimentos de Box-Behnken (BBD) é usado. O BBD é um projeto independente quadrático, no qual não há um fatorial incorporado ou fatorial fracionado. Neste projeto as combinações de tratamento são nos pontos médios das arestas do espaço de processo e no centro. Estes

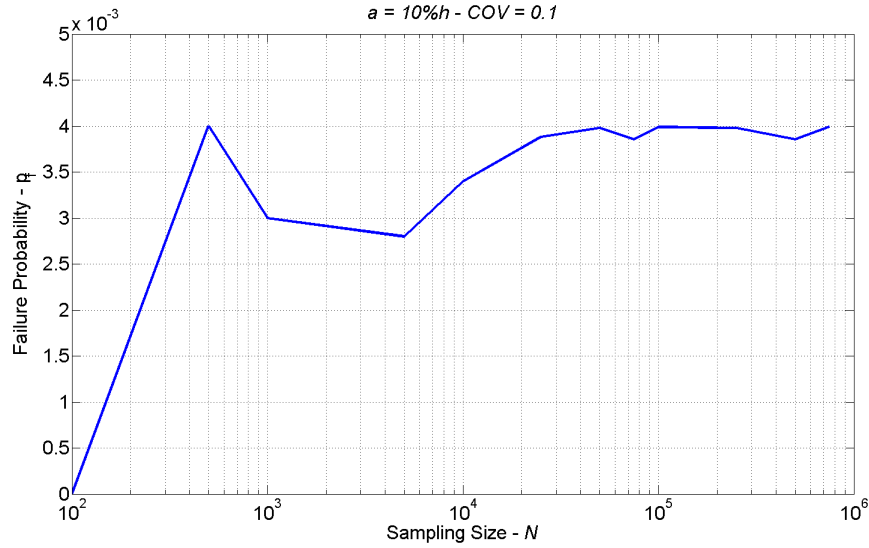


Figura 4.25: Gráfico de convergência da probabilidade de falha por Monte Carlo Direto com $a = 10\%h$ e $COV = 0,1$.

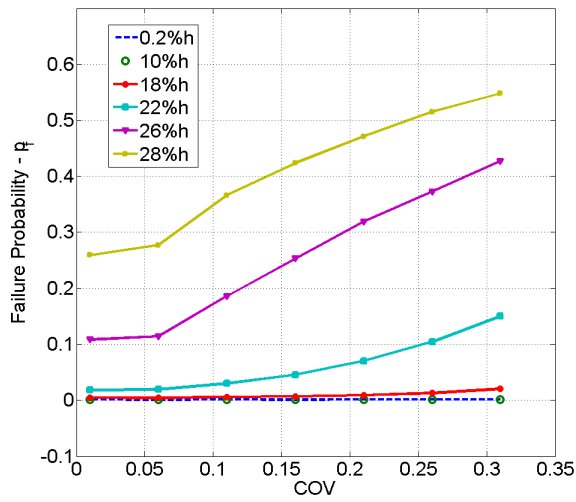
projetos são rotativos ou quasi rotativos e requerem três níveis em cada variável. Para este caso, consideramos as mesmas quatro variáveis ($a, E, L1eh$) com os níveis de μ e $\mu \pm \sigma$. A função de desempenho é calcular para o modelo de segunda ordem sem termos cruzados, assim, $p = (n+1)(n+2)/2 = 15$ coeficientes e $N_d = 27$ pontos. Da Equação 3.43 os coeficientes para o polinômio de segunda ordem são estimados usando uma análise de regressão. Quando a probabilidade de falha é calculada por simulação de Monte Carlo usando aproximação de RSM de primeira e segunda ordem, o modelo é denotado como MC_RSM1 e MC_RSM2, respectivamente.

A fim de avaliar a sensibilidade do elemento espectral de viga trincada com a profundidade da trinca, todas as simulações são realizadas variando a profundidade da trinca de um valor pequeno até perto do limite permitido de falha ($a = \{0.02, 0.10, 0.18, 0.22, 0.26, 0.28\}h$). Além disso, para cada caso, as variações no COV da profundidade da trinca são feitas com $COV = \{0.01 : 0.05 : 0.31\}$.

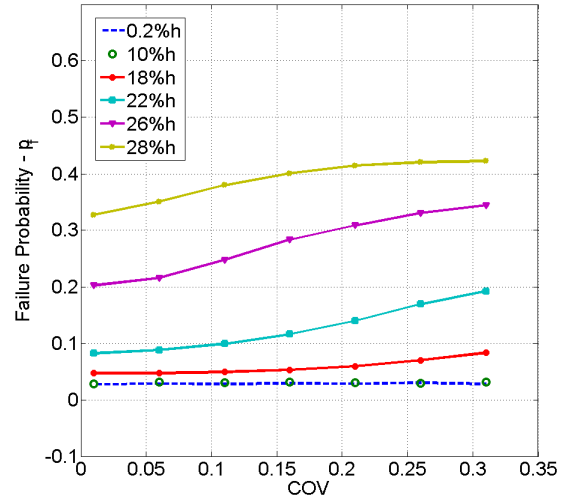
As Figuras 4.26(b), 4.27(b) e 4.28(b) mostram a probabilidade de falha calculada pelo MC_RSM1. Estes apresentam resultados próximos ao do FORM, pois eles tem comportamentos similares e tem aproximação de primeiro grau.

As Figuras 4.26(c), 4.27(c) e 4.28(c) mostram a probabilidade de falha calculada pelo MC_RSM2. Para este caso, o comportamento geral parece ser semelhante aos casos anteriores, à medida que a e COV aumenta a p_f aumenta. No entanto, a probabilidade de falha começa a aumentar cedo. Quando o valor da profundidade atinge $a \geq 18\% h$ e COV aumenta, a p_f começa a aumentar, porém em um ritmo mais lento do que os casos anteriores

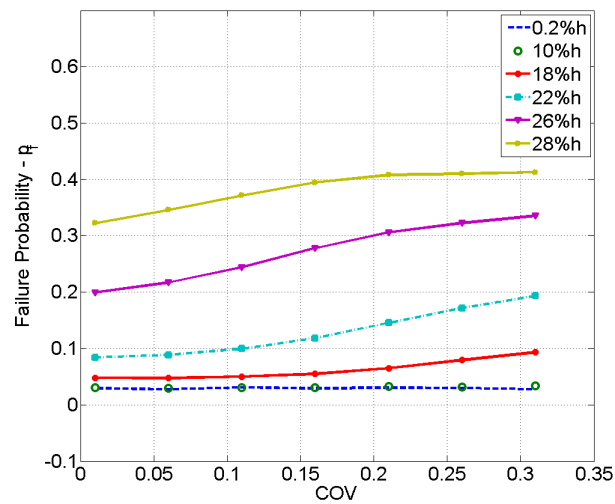
As Figuras 4.26(d), 4.27(d) e 4.28(d) mostram a probabilidade de falha calculada pelo MCS, que apresenta um comportamento semelhante ao MC_RSM2. O comportamento geral desses resultados parecem estar de acordo com a física do problema, uma vez que as probabilidades de falha são muito pequenas para um $a \leq 10\% h$ e seus valores de COV , tornando-se mais alto para $a \leq 18\% h$ em valores mais elevados de COV .



(a)

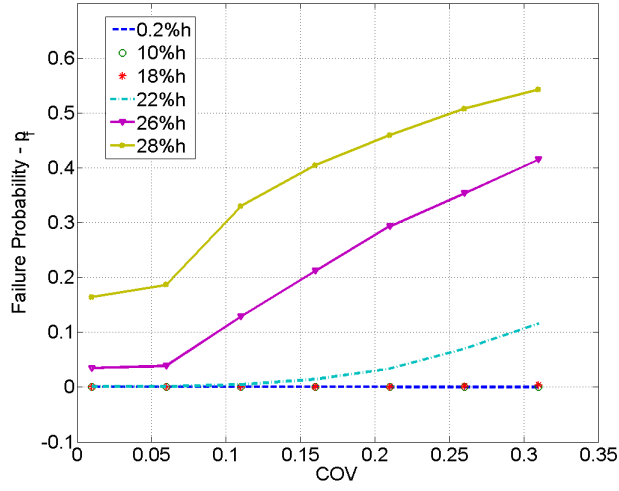


(b)

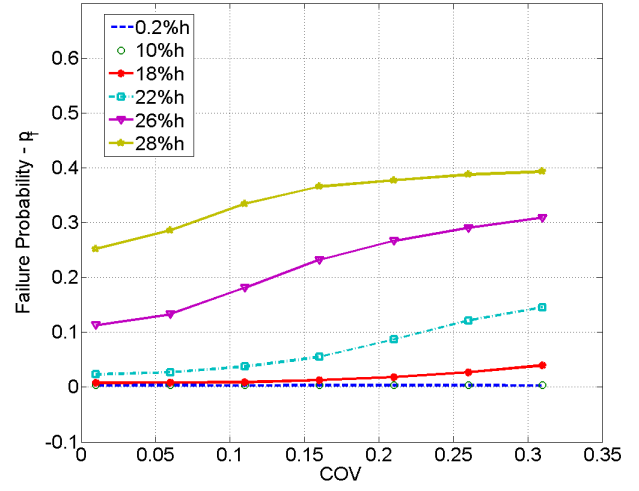


(c)

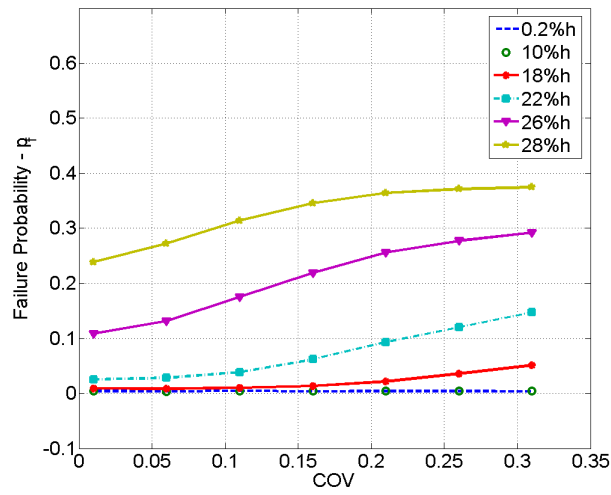
Figura 4.26: Probabilidade de falha com $L_1 = 25\%L$: (a)MC_RSM1; (b)MC_RSM2; e (c)MCS.



(a)

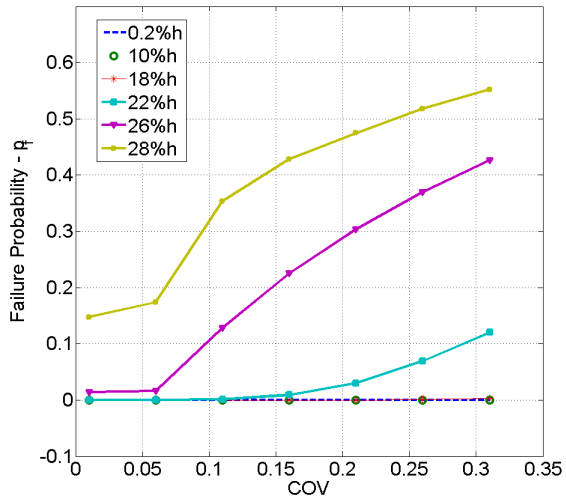


(b)

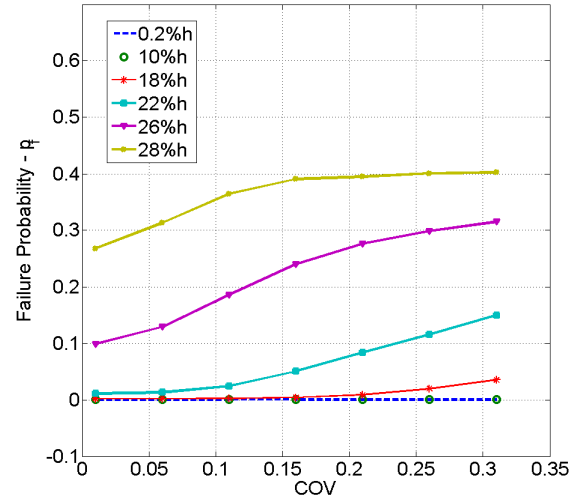


(c)

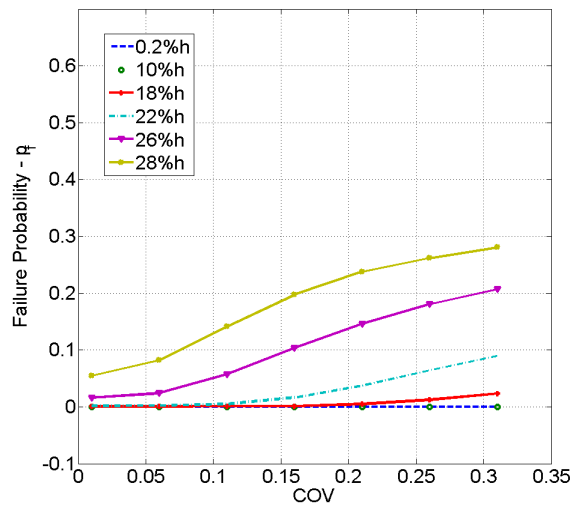
Figura 4.27: Probabilidade de falha com $L_1 = 50\%L$: (a)MC_RSM1; (b)MC_RSM2; e (c)MCS.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.28: Probabilidade de falha com $L_1 = 75\%L$: (a)MC_RSM1; (b)MC_RSM2 ; e (c)MCS.

A fim de tornar mais clara a análise do resultado, dois gráficos adicionais comparando os resultados das probabilidades de falha de todos os métodos juntos foram feitos. No primeiro gráfico estão agrupadas as probabilidade de falha de valores mais baixos (Fig 4.29, Fig 4.30 e Fig 4.31) e no segundo as probabilidades de falha de valores mais altos (Fig 4.29, Fig 4.30 e Fig 4.31). Nas figura Figuras 4.29(a), 4.30(a) e 4.31(a) pode-se visualizar que para baixas probabilidades de falha obtidas pelo método MC_RSM1 apresentam uma boa convergência para todos os valores de profundidade de trinca, faixa ($a = 0.2 - 0.18h$). Comparando MCS com MC_RSM1 uma diferença significativa é apresentada, o que significa que a não-linearidade presente na flexibilidade da trinca não permite uma aproximação linear para a função de estado limite. Isso pode ser confirmado pela boa concordância entre MCS e os resultados da MC_RSM2. As Figuras 4.29(b), 4.30(b) e 4.31(b) mostram que para altas probabilidades de falha comportamentos semelhantes são observados.

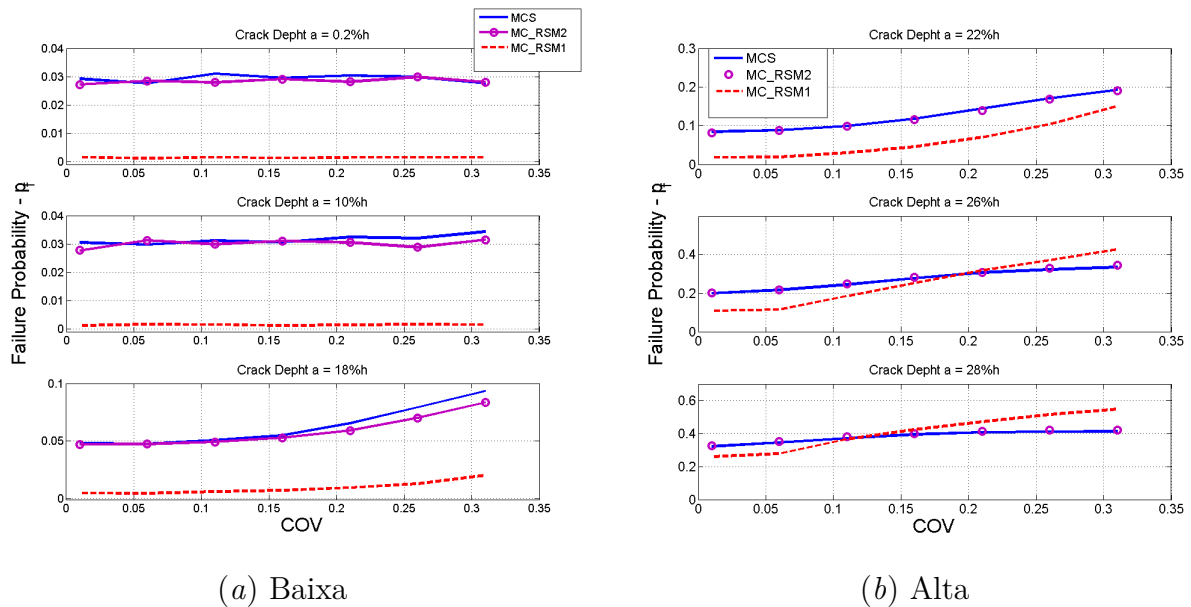
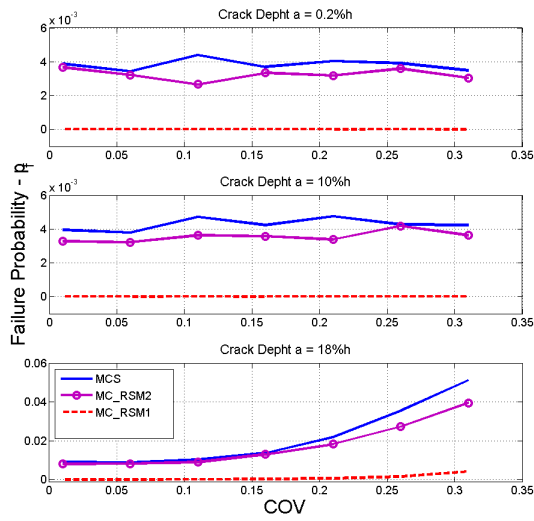
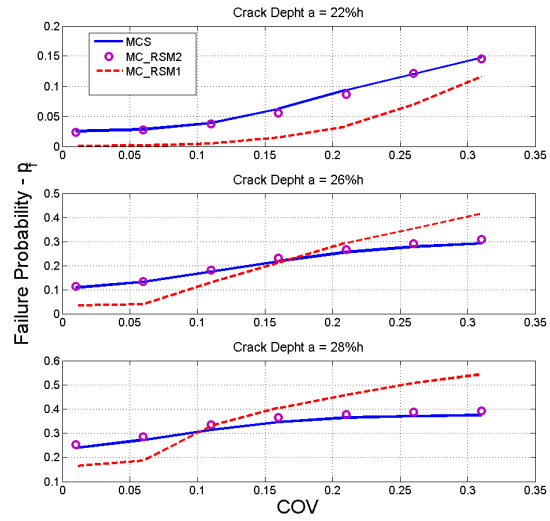


Figura 4.29: Comparação entre MCS, MC_RSM1 e MC_RSM2 em: (a)Baixa e (b)Alta probabilidade de falha com $L_1 = 25\%L$.

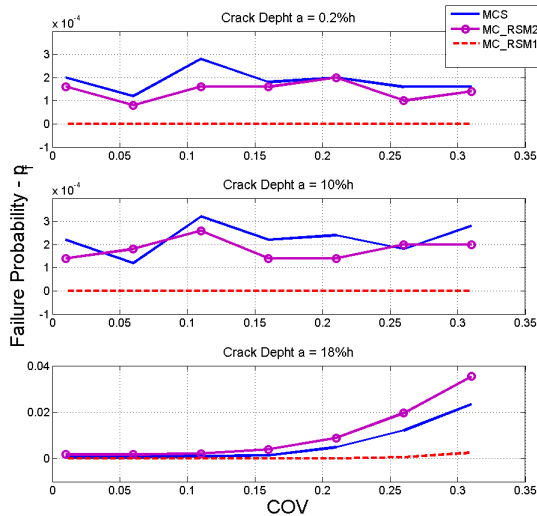


(a) Baixa

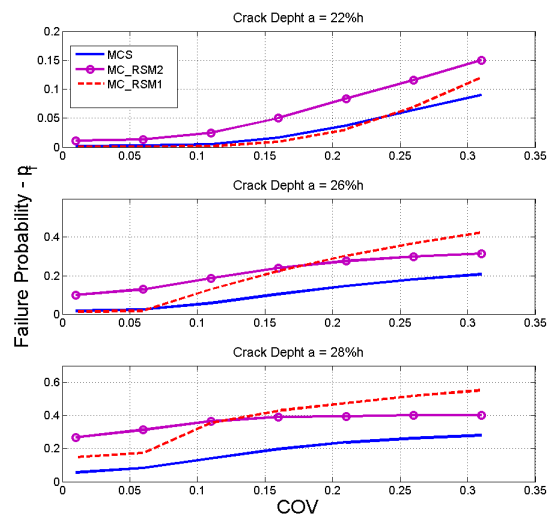


(b) Alta

Figura 4.30: Comparação entre MCS, MC_RSM1 e MC_RSM2 em: (a) Baixa e (b) Alta probabilidade de falha com $L_1 = 50\%L$.



(a) Baixa



(b) Alta

Figura 4.31: Comparação entre MCS, MC_RSM1 e MC_RSM2 em: (a) Baixa e (b) Alta probabilidade de falha com $L_1 = 75\%L$.

Para comparar o custo dos métodos o tempo computacional foi computado. Como esperado, o Monte Carlo direto (MCS) apresentou alto tempo computacional em comparação

aos outros métodos. O Monte Carlo com superfície de resposta de primeira e de segunda ordem (MC_RSM1 e MC_RSM2) obtiveram tempos computacionais próximos. Todas as simulações foram realizadas em um *PC Desktop*, utilizando o processador Intel(R) Core(TM)i7 CPU 930 @2.80 GHz, 12.0Gb de memória RAM e Windows 7, 64 bits como sistema operacional. A Tabela 4.7 mostra os resultados obtidos.

Tabela 4.7: Tempo computacional.

Método	CPU tempo [s]
MC_SRM1	96.3
MC_SRM2	99.2
MCS	12,161.2

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou conceitos sobre quantificação de incertezas e métodos para análise de confiabilidade. Conceitos que foram aplicados à problemas dinâmico, de propagação de trinca e detecção de dano em estruturas. Para cada caso analisado, foi realizado a quantificação de incertezas presentes nos paramentos do sistema. Após isso, foi assumido uma equação de estado limite para cada um e feito o estudo de confiabilidade.

O capítulo de fundamentos teóricos, tem início pela teoria da expansão em Polinômio do caos, método que trata da análise das características da resposta de uma estrutura dinâmica incluindo parâmetros aleatórios. Este método é baseado na teoria do Polinômio do Caos (PC) cujo conceito básico pode ser entendido como sendo uma solução estocástica projetada sobre uma base de polinômios ortogonais e as variáveis são ortonormais e gaussianas. A resolução desse sistema conduz a uma expansão da solução, que pode ser utilizada para encontrar a média (analítica ou numérica), o desvio padrão ou a distribuição da solução aleatória. Após, é apresentada a teoria de fundamentos da análise de confiabilidade, que basicamente trata da análise do projeto de engenharia onde este, consiste em proporcionar aos elementos do sistema de modo que satisfaçam vários critérios de desempenho, segurança, manutenção e durabilidade sobre diversas condições de solicitações. Métodos para a análise confiabilidade do sistema como FORM e SORM são detalhados e algoritmos proposto por (HALDAR E MAHADEVAN, 2000) são ilustrados nesta seção. Ainda neste capítulo, uma introdução sobre a simulação de Monte Carlo (MC), que é um método de geração simples aleatória e faz realizações baseadas em um conjunto de amostragem aleatória gerada para variáveis incertas. O método da Superfície de Resposta (RSM) e abordado nesta seção, para a análise de confiabilidade consiste em construir aproximadamente um polinômio de forma explícita para representar a função performance implícita $g(\mathbf{X})$.

Dos problemas analisados, é observado que no **caso dinâmico**, das respostas obtidas observa-se que para o cálculo da média da resposta, no geral o PC apresenta uma boa eficiência, tanto para o caso com apenas uma variável aleatória, onde quase todos os resultados das variações da dispersão convergiram bem, como no caso com duas variáveis e diferentes graus do polinômio, ocorrem falta de precisão apenas em dispersões mais altas.

No cálculo do desvio padrão da resposta próximo a frequência de ressonância do sistema, pode-se observar que para o modelo com apenas uma variável aleatória (σ_K), a divergência entre PC e MC aumenta. Porém com uma dispersão pequena os resultados tem uma boa convergência. Calculando a resposta do sistema, agora para o caso de duas variáveis aleatórias, observa-se que mesmo com baixa dispersão tanto na análise de (σ_M) variando quanto para (σ_K) variando, a precisão do PC não é boa. Este comportamento também é válido para o primeiro e segundo grau do polinômio utilizados nos cálculos. Aumentando a dispersão dos parâmetros ocorre a diminuição da precisão da resposta (PC). Algumas soluções aproximadas no caso do polinômio de segundo grau oscilam em torno da solução de referência. Uma possível explicação para estas diferenças encontradas, pode ser possivelmente pelo baixo grau do polinômio. Na análise de sensibilidade dos parâmetros observa-se que a medida que as variabilidades dos desvios padrão tanto da massa como da rigidez aumentam, os resultados da resposta passam a divergir. Comportamento este já esperado, pois com o aumento da dispersão a tendência das respostas são divergirem. Comparando os resultados das variabilidades da massa e rigidez, é visto que a rigidez mostrou-se mais sensível que a massa, indicando que este parâmetro influencia mais no sistema que o outro .

Na análise de confiabilidade mostrado nos resultados do **CASO 3** com a **ANÁLISE 1**, observa-se um comportamento já esperado para a probabilidade de falha do sistema em todos os métodos (FORM, SORM e MC1): o aumento da probabilidade de falha com o aumento da variabilidade da rigidez. Para baixas variabilidades dos parâmetros as probabilidades de falha são bem pequenas e os três métodos convergem para valores bem próximos. Os métodos FORM e SORM concordam entre si mas divergem um pouco em relação ao MC1 com tendência a subestimar a probabilidade de falha com erros de 20% quando $\sigma_K = 12$ que vão decrescendo com o aumento de σ_K . Os métodos FORM e SORM acredita-se que o número de amostras 500.000 usadas para o MC1 tenha boa convergência para probabilidades de falha mais altas, porém ainda não é suficiente para valores menores de p_f .

Na análise de confiabilidade mostrado nos resultados do **CASO 3** com a **ANÁLISE 2** para as probabilidades de falha do sistema onde também se observa o mesmo comportamento geral para todos os métodos (FORM, SORM e MC12). Uma comparação entre os resultados das probabilidades de falha obtidas pelos três métodos mostra que os resultados são similares aqueles obtidas no **CASO 3** com a **ANÁLISE 1**. Assim, pode-se afirmar que os mesmos

comentários já realizados para o **CASO 3** com a **ANALISE 1** se aplicam a este. Com isso conclui-se que as variações nos parâmetros estatísticos aplicadas ao sistema apresentam sensibilidades semelhantes ou equivalentes em relação aos métodos utilizados. Entretanto, os erros relativo percentuais em relação ao MC1 são menores para a variabilidade da massa do que aqueles obtidos com a variabilidade da rigidez.

No **caso da mecânica da fratura**, os três métodos de confiabilidade obtiveram resultados semelhantes, assim, eles foram validados para o problema da propagação da trinca em fadiga. Os métodos FORM e SORM se mostraram eficientes, obtendo resultados próximos do MC, assim para esta análise o MC, que requer um maior esforço computacional poderia ser substituído por eles. O método FORM e SORM apresentaram um pequena diferença para este caso numérico, uma possível explicação poderia ser pelo fato de que uma aproximação de primeira ordem já fosse o suficiente.

Para o ultimo estudo analisado, **caso da detecção de danos**, conclui-se que a reposta a propagação de ondas em uma estrutura de viga trincada incluindo incertezas no material e nos parâmetros geométricos foram analisados. Uma análise de confiabilidade é feita para quantificar a probabilidade de falha de um modelo de estrutura trincada com elemento espectral de viga em altas frequências. A função de estado limite avalia o valor *rms* da resposta na aceleração tempo, o qual pode ser dentro do valor limite. A profundidade da trinca de $a = 30\%h$ define o valor *rms* determinístico permitido da resposta tempo/aceleração. Variando a profundidade da trinca (a) e seus coeficientes de variação (*COV*) a análise de confiabilidade é realizada usando o método da superfície de resposta linear (RSM1) resolvido pela simulação de Monte Carlo (MC_RSM1) e pelo método de confiabilidade de primeira ordem (FORM). Uma aproximação de segunda ordem também foi utilizada através do método da Superfície de resposta quadrática (RSM2), também resolvido pela simulação de Monte Carlo (MC_RSM2). Todos os métodos são comparados com o Monte Carlo direto (MCS). Em geral todos os métodos apresentam resultados em concordância com a física do problema, por exemplo, as probabilidades de falha são baixas para profundidades de trincas pequenas e torna-se maior com o aumento de a .

A divergência entre Monte Carlo direto (MCS) e o modelo de primeira ordem MC_RSM1, revela que o grau de não-linearidade presente na trinca no elemento espec-

tral de viga trincada não permite uma aproximação linear para a função de estado limite. Isso pode ser confirmado pela boa concordância entre Monte Carlo direto (MCS) e resultados de Monte Carlo com uma superfície de resposta de segunda ordem (MC_RSM2). Como resultados esperados o tempo computacional confirma que a abordagem da Superfície de Resposta reduz significativamente o tempo computacional em comparação ao Monte Carlo Direto. Neste caso, Monte Carlo com superfície de resposta de segunda ordem (MC_RSM2) representa uma redução de 12,159.3% no tempo computacional em comparação ao MCS.

Os métodos de confiabilidade mostraram-se satisfatórios em todos os casos analisados. Casos que apresentaram uma não-linearidade, ao utilizar os métodos de segunda ordem obtiveram bons desempenhos.

5.1 Sugestões de Trabalhos Futuros

Este estudo pode ser utilizado como base para contínuos trabalhos nesta linha, de quantificação de incertezas em problemas mecânicos e confiabilidade estrutural. Ideias que surgiram ao longo deste trabalho e passam a ser sugestões para os próximos trabalhos são:

- Implementação de métodos para geração de variáveis como por exemplo o Importance Sampling (IS), Hiper Cubo Latino (LHS), que vem a ser uma otimização do Monte Carlo direto. Tendo como objetivo a diminuição do tempo de simulação e do custo computacional;
- Utilizar a expansão em Polinômio do Caos juntamente com o Método do Elemento Espectral para obter a resposta de uma barra livre - livre com uma força excitadora em um dos nós;
- Estudar outros polinômios para a implementação do PC, ou seja, combinar o tipo de distribuição da variável aleatória com o correto polinômio associado a ela;
- Na formulação do elemento espectral para um viga trincada é utilizado o coeficiente de flexibilidade θ , até então utilizamos a flexibilidade levando em conta somente a

ação do momento, porém sabendo das reações consideráveis na viga, falta a adição da flexibilidade em relação ao cisalhamento;

5.2 Publicações

Durante o desenvolvimento desta dissertação os seguintes artigos foram publicados em congressos:

Machado, M.R., Santos, T. B., Dos Santos, J. M. C., Arruda, J. R. F., Reliability analysis using simple models aiming a comparison among stochastic methods. Proceeding of 18th International Congress on Sound & Vibration - ICSV18, (Rio de Janeiro,Brazil), 2011.

Machado, M.R., Dos Santos, J. M. C., Reliability analysis for probabilistic fatigue crack growth. Proceeding of 21th Brazilian Congress of Mechanical Engineering - COBEM, (Natal,Brazil), 2011.

Machado, M.R., Dos Santos, J. M. C., Wave propagation in a cracked beam spectral element including parameter uncertainty. Proceeding of the 1st International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling - Uncertainties, (Maresias,Brazil), 2012.

REFERÊNCIAS

BECK, A.T. Curso de confiabilidade estrutural. Relatório técnico, EESC-USP, 2011.

BEDEN, S.M.; ABDULLAH, S. e ARIFFIN, A.K. Review of crack propagation models for metallic components. **European Journal of Scientific Research**, vol. 28, 364–397, 2009.

BREITUNG, K. Asymptotic approximations for multinormal integrals. **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 110, 357–366, 1984.

BUCHER, C.G. e BOURGUND, Y.M. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. **Structural Safety**, vol. 7, 57–66, 1990.

CAI, G.Q. e ELISHAKOFF, I. Refined second-order reliability ana. **Structural Safety**, vol. 14, 267–276, 1994.

CALFISCH, R. Monte carlo and quasi mone carlo methods. **Acta Numerica**, vol. 1, 2–49, 1998.

CHEN, X. e LIND, N.C. Fast probability integration by three-parameter normal tail approximation. **Structural Safety**, vol. 1, 269–276, 1983.

CHOI, S.T.; V.GRANDHI, R. e A.CANFIELD, R. **Reliability-based Structural Design**. Srpinger, 2007.

DEGERSEM, H.; DESMET, D.M.W. e VANDEPITTE, D. A fuzzy finite element procedure

for the calculation of uncertain frequency-response functions of damped structures: Part 2 - numerical case studies. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 288, 463–486, 2005.

DESSOMBZ, O.; THOUVEREZ, F.; LAINE, J.P. e JEZEQUEL, L. Calcul des valeurs et vecteurs propres d'une structure stochastique par projection sur un chaos polynomial. calcul de fonctions de transfert stochastiques. Relatório técnico, Ecole Centrale de Lyon - Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systemes, 2000.

DESSOMBZ, O.; THOUVEREZ, F.; LAINE, J.P. e JEZEQUEL, L. Expansion of stochastic frequency response function on polynomial chaos. Relatório técnico, Ecole Centrale de Lyon, 2001.

DIMAROGONAS, A.D. Vibration of cracked structures: a state of the art review. **Engineering Fracture Mechanics**, vol. 55, 831–857, 1996.

DIMAROGONAS, A.D. e PAPADOPOULOS, C.A. Vibration of cracked shafts in bending. **Journal of sound and vibration**, vol. 91, 583–593, 1983.

DIMAROGONAS, A.D. e PAPADOPOULOS, C.A. Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 22, 81–93, 1987.

DOYLE, J.F. **Wave propagation in structures : spectral analysis using fast discrete Fourier transforms**. Mechanical engineering. Springer-Verlag New York, Inc., New York, second ed., 1997.

DURAND, J.F.; SOIZE, C. e GAGLIARDINI, L. Structural acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation. **Journal Acoustical Society of America**, vol. 124, 1513 – 1525, 2008.

DUTANG, C. A note on random numbers. Relatório técnico, Cambridge, 2008.

FABRO, A. T. **Análise estocástica do comportamento dinâmico de estruturas via métodos probabilísticos**. 2010. Dissertação de Mestrado. Unicamp.

FABRO, A.T.; RITTO, T.G.; SAMPAIO, R. e ARRUDA, J.R.F. Stochastic analysis of a cracked rod modeled via the spectral element method. **Mechanics Research Communications**, vol. 37, 326–331, 2010.

FREUDENTHAL, A.M. Safety and probability of structure failure. **ASCE Transactions**, vol. 121, 1337–1397, 1956.

GDOUTOS, E.E. **Fracture Mechanics: an Introduction**. Ed. Kluwer Academic Publishers, 1993.

GHANEM, R. e BRZAKALA, W. Stochastic finite-element analysis of soil layers with random interface. **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 122, 361–369, 1996.

GHANEM, R. e KRUGER, R.M. Numerical solution of a spectral stochastic finite element systems. **Computers Methods Apply Mechanical Engineering**, vol. 129, 289–303, 1996.

GHANEM, R. e SPANOS, P. **Stochastic Finite Elements - A Spectral Approach**. Sprin, 1991.

HALDAR, A. e MAHADEVAN, S. **Reliability assessment using stochastic finite element analysis**. John Wiley & Sons, Inc, new york ed., 2000.

HANSS, M. **Applied Fuzzy Arithmetic**. Springer Berlin, 2005.

HOHENBICHLER, M.; GOLLWITZER, S.; KRUSE, W. e RACKWITZ, R. New light on first- and second-order reliability methods. **Structural Safety**, vol. 4, 267–284, 1987.

HOHENBICHLER, M. e RACKWITZ, R. Non-normal dependent vectors in structural safety. **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 107, 1227–1238, 1981.

J.INMAN, D. **Engineering Vibration**. Prentice-Hall, 2001.

KAPUR, J.N. e KESAVAN, H.K. **Entropy Optimization Principles with Applications**. Academic Press Inc., 1992.

KHURI, A. e CORNELL, J.A. **Response Surface: Designs and Analyses**. Dekker, New York, 1996.

KOYLUGLU, H.U. e NIELSAN, S.N. New approximations for sorm integ. **Structural Safety**, vol. 13, 235–246, 1994.

KRAWCZUK, M. Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection. **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 80, 1809–1816, 2002.

KRAWCZUK, M.; PALACZ, M. e OSTACHOWICS, W. The dynamic analysis of a cracked timoshenko beam by the spectral element method. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 264, 1139–1153, 2002.

LIU, W.K. e BELYTSCHKO, T. **Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis**. Elme Press International, 1989.

MAHADEVAN, S. e HALDAR, A. **Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design**. John Wiley & Sons, Inc, 2000.

MILLWATER, H.; WU, Y.T. e CARDINAL, J.W. Probabilistic structural analysis of fatigue and fracture. In **Proceedings of the 35th AIAA Structures, Structural Dynamics and Material Conference**. 1994.

MOENS, D. e VANDEPITTE, D. A fuzzy finite element procedure for the calculation of uncertain frequency-response functions of damped structures: Part 1 - procedure. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 288, 431–462, 2005.

MONTGOMERY, D.C. **Design and Analysis of Experiments**. John Wiley & Sons, Inc, 2001.

NESPUREK, L. **Stochastic Crack Propagation Modelling Using the Extended Finite Element Method**. 2009. Tese de Doutorado. BRNO University of Technology.

NIST. e-handbook of statistical methods. 2010.
URL: <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>

NUNES, R.F.; KLIMKE, A. e ARRUDA, J.R.F. On estimating frequency response function envelopes using the spectral element method and fuzzy sets. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 291, 986–1003, 2006.

PARIS, P. e ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. **ASME**, vol. 85, 528–534, 1963.

PEREIRA, F. N. **Propagação de ondas e detecção de danos com modelos de barra de alta ordem pelo método do elemento espectral**. 2009. Dissertação de Mestrado. Unicamp.

RACKWITZ, R. e FIESSLER, B. Note on discrete safety checking when using non-normal stochastic models for basic variables. Relatório técnico, Cambridge, 1976.

RAO, S.S. **Mechanical Vibration**. Person Prentice-Hall, 2008.

RIZZATTI, L. **Análise dinâmica, numérica e experimental de uma viga trincada**. 2005. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas . Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP.

URL: <http://cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000349175>

ROSENBLATT, M. Remarks on a multivariate transformation. **Annals of Mathematical Statistics**, vol. 23, 470–472, 1952.

SAMEER, B. M. **Uncertainty quantification in dynamic problems with large uncertainties**. 2006. Tese de Doutorado. Faculty of the Virginia Polytechnic Institute.

SAMPAIO, R. e RITTO, T. Short course on dynamics of flexible structures - deterministic and stochastic analysis. Relatório técnico, PUC-Rio, 2008.

SHOUMAN, M.L. **Probabilistic reliability: an engineering approach**. McGraw-Hill, 1968.

SNEE, R.D. Some aspects of nonorthogonal data analysis: Part i, developing prediction equations. **Journal of Quality Tech**, vol. 5, 67–79, 1973.

SOBOL', I.M. **A primer for the Monte Carlo method**. CRC Press, 1994.

SOIZE, C. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. **Probabilistic Engineering Mechanics**, vol. 15, 277– 294, 2000.

SOIZE, C. Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 263, 893 – 916, 2003.

SOIZE, C. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 288(3), 623 – 652, 2005.

TADA, H.; PARIS, P. e IRWIN, G.R. **Stress Analysis of Cracks Handbook**. Del Research Corporatoin, 1973.

TVEDT, L. Distribution of quadracti forms in normal space: application to structural reliability. **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 116, 1183–1197, 1990.

WIENER, N. The homogeneous caos. **Americam Journal of Mathematics**, vol. 60, 897–936, 1938.

WU, Y.T. e WIRSCHING, P.H. New algorithm for structural reliability estimation. **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 113, 1319–1336, 1987.

XIU, D. e KARNIADAKIS, G.E. The wiener - askey polynomial chaos for stochastic differential equations. Relatório técnico, Brown University, Division of Applied Mathematics, 182 George Street, Providence, RI, 2003.