
Instituto de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Coloração de Arestas em Grafos Split

Este exemplar corresponde à redação final da Tese devidamente corrigida e defendida por Sheila Morais de Almeida e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 28 de março de 2012.

Célia Picinin de Mello (Orientadora)

Tese apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ciência da Computação.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Almeida, Sheila Morais de, 1979-
AL64c Coloração de arestas em grafos Split / Sheila Morais de
Almeida. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Célia Picinin de Mello.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Computação.

1. Teoria dos grafos. 2. Grafos perfeitos. 3. Teoria da
computação. I. Mello, Célia Picinin de, 1950-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Edge-coloring of Split graphs

Palavras-chave em inglês:

Graph theory

Perfect graphs

Theory of computing

Área de concentração: Ciência da Computação

Titulação: Doutor em Ciência da Computação

Banca examinadora:

Célia Picinin de Mello [Orientador]

Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Fábio Protti

Jorge Stolfi

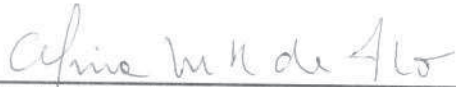
Orlando Lee

Data de defesa: 28-03-2012

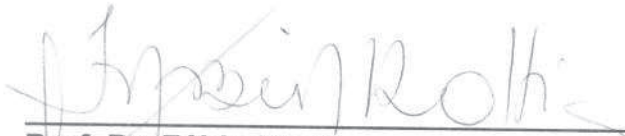
Programa de Pós-Graduação: Ciência da Computação

TERMO DE APROVAÇÃO

Tese Defendida e Aprovada em 28 de março de 2012, pela Banca examinadora composta pelos Professores Doutores:



Profª. Drª. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
COPPE / UFRJ



Prof. Dr. Fábio Protti
IC / UFF



Prof. Dr. Orlando Lee
IC / UNICAMP



Prof. Dr. Jorge Stolfi
IC / UNICAMP



Profª. Drª. Célia Picinin de Mello
IC / UNICAMP

Coloração de Arestas em Grafos Split

Sheila Morais de Almeida¹

Março de 2012

Banca Examinadora:

- Célia Picinin de Mello (Orientadora)
- Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE
Universidade Federal do Rio de Janeiro
- Fábio Protti
Instituto de Computação
Universidade Federal Fluminense
- Jorge Stolfi
Instituto de Computação
Universidade Estadual de Campinas
- Orlando Lee
Instituto de Computação
Universidade Estadual de Campinas

¹Suporte financeiro de: CAPES 03/2005–02/2007, CNPq (processo 140709/2008-8) 03/2008–02/2009

Resumo

Uma k -coloração de arestas em um grafo G é uma atribuição de k cores para as arestas de G tal que arestas incidentes em um mesmo vértice têm cores distintas. O índice cromático de G é o menor k para o qual G possui uma k -coloração de arestas e é denotado por $\chi'(G)$. Por definição, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo de G . Em 1964, Vizing provou que, para qualquer grafo simples G , $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, dando origem ao Problema da Classificação, que consiste em decidir, dado um grafo G , se $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. No primeiro caso, dizemos que G é Classe 1, caso contrário, G é Classe 2. Em 1981, Holyer mostrou que decidir se um grafo é Classe 1 é NP-completo. Em 1991, Cai e Ellis demonstraram que decidir se um grafo é Classe 1 continua NP-completo mesmo quando restrito a algumas classes de grafos, tais como os grafos perfeitos. Restringindo-se aos grafos perfeitos, nestes últimos 15 anos, até aonde vai o nosso conhecimento, somente os multipartidos completos e os split-indiferença foram inteiramente classificados. Resultados parciais foram obtidos para algumas classes de grafos, como os duplamente cordais com Δ ímpar e os split com Δ ímpar, que são Classe 1. Uma consequência da classificação dos grafos duplamente cordais com Δ ímpar foi a classificação dos grafos fortemente cordais, de intervalos e indiferença com grau máximo ímpar - todas subclasses dos grafos duplamente cordais. Uma condição suficiente para que um grafo G seja Classe 2 é garantir a desigualdade $m > \Delta(G) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, onde m e n representam o número de arestas e de vértices de G , respectivamente. Nesse caso, G é chamado de *sobrecarregado*. Se um grafo G possui um subgrafo H com $\Delta(H) = \Delta(G)$ e H é *sobrecarregado*, então G é chamado *subgrafo-sobrecarregado* e também é Classe 2. Esta tese apresenta um estudo sobre a coloração de arestas em grafos split, com novos resultados sobre a classificação de grafos split com grau máximo par. Entre os grafos split com Δ par, sabe-se que alguns são subgrafo-sobrecarregados e que, portanto, nem todo grafo split com grau máximo par é Classe 1. Por outro lado, não se conhece nenhum grafo split com grau máximo par que seja Classe 2 e não seja subgrafo-sobrecarregado. Neste trabalho, são apresentadas algumas técnicas com as quais se obtém uma Δ -coloração de arestas em alguns subconjuntos de grafos split com grau máximo par e é dada uma caracterização estrutural dos grafos split que são subgrafo-sobrecarregados.

Abstract

A k -edge-coloring of a graph G is an assignment of k colors to the edges of G such that adjacent edges have distinct colors. The *chromatic index* of G is the minimum number k for which G has a k -edge-coloring and is denoted by $\chi'(G)$. By definition, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G . In 1964, Vizing proved that, for every simple graph G , $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. This is the origin of the *Classification Problem*, that consists in deciding, for a given a graph G , if $\chi'(G) = \Delta(G)$ or $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. In the first case, G is *Class 1*, otherwise, G is *Class 2*. In 1981, Holyer proved that deciding if a graph is Class 1 is NP-complete. In 1991, Cai and Ellis [10] proved that this holds also when the problem is restricted to some classes of graphs such as perfect graphs. Considering the perfect graphs, in the last 15 years, as far as we know, only the classes of complete multipartite graphs and split-indifference graphs were entirely classified. Partial results were obtained for some classes of graphs, such as doubly chordal graphs with odd Δ and split graphs with odd Δ , which are Class 1. A consequence of the classification of doubly chordal graphs with odd Δ was the classification of strongly chordal graphs, interval graphs and indifference graphs with odd maximum degree - that are subclasses of doubly chordal graphs. A sufficient condition to classify a graph G as a Class 2 graph is to guarantee that G satisfies the inequality $m > \Delta(G) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, where m and n denote the number of edges and the number of vertices of G , respectively. In this case, G is called *overfull* graph. If a graph G has a subgraph H with $\Delta(H) = \Delta(G)$ and H is overfull, then G is called *subgraph-overfull* graph and is also Class 2. This thesis presents a study on edge-coloring of split graphs, with new results about the classification of split graphs with even maximum degree. It is known that some split graphs with even Δ are subgraph-overfull and, therefore, there are split graphs with even maximum degree that are Class 2. On the other hand, it is unknown if there is a Class 2 split graph that is not subgraph-overfull. In this work, some techniques with which we obtained a Δ -edge-coloring for split graphs with even maximum degree are presented and it is given a structural characterization for split graphs that are subgraph-overfull.

Agradecimentos

A primeira pessoa na lista enorme dos agradecimentos que preciso fazer é a minha orientadora de doutorado, Célia. A Célia me ensinou tantas coisas que 10 volumes de tese seriam insuficientes para descrever. O conhecimento que ela me transmitiu vai muito além da sólida base em teoria dos grafos e da análise de algoritmos. Não se limita a incutir em mim a intimidade que hoje sinto com os grafos split. A Célia me serviu de exemplo sobre como me portar no trabalho, como dar uma boa aula e sobre como reagir diante do mundo em muitas situações cotidianas que não têm nada a ver com grafos, mas que surgiram na minha vida ou na dela. Situações essas sobre as quais conversamos durante horas e que em alguns momentos me traziam valiosas lições de vida. Como se não bastasse, a Célia me apresentou a comunidade de Teoria de Grafos no Brasil e me fez conhecer excelentes pesquisadores da área fora do país também. Me deu a oportunidade de, assistindo ou apresentando trabalhos em eventos científicos, conhecer outros países. A cada evento, eu me senti mais motivada a estudar grafos e, a cada cidade visitada, eu senti que estava transbordando de cultura. A Célia me ajudou nos momentos em que tive problemas que não envolviam a universidade. Gastou horas comigo ao telefone, tanto para discutir sobre grafos, quanto para me motivar e instruir quando fui fazer a minha primeira prova de concurso público para ser docente. Não sei o que mais um orientador pode fazer por um aluno. Acho que a minha orientadora ultrapassou todos os limites do que se pode transmitir em uma orientação e acredito que encontrei uma das melhores amigas que eu poderia desejar. Célia, não tenho palavras para agradecer tudo o que você proporcionou a minha vida.

Agradeço a Professora Aurora Morgana, que contribuiu de forma determinante para o resultado desse trabalho. Muito obrigada, Aurora, por se dispor a trabalhar conosco em grafos split, pelo tempo que dedicou a essa pesquisa, por me acolher na universidade de Roma e por sempre ser tão receptiva.

Agradeço aos meus pais e aos meus irmãos por me apoiarem em todas as minhas decisões, mesmo quando elas nos afastaram. Muito obrigada por estarem sempre a minha volta, mesmo quando a distância física é enorme. Agradeço ao Seu Chico e a Dona Cida por me educarem da forma como o fizeram, tornando possível que eu defendesse uma tese

de doutorado agora, e por me encherem de ética e princípios que fazem com que toda a noite eu possa deitar a cabeça no travesseiro e dormir em paz.

Ao Daniel, quero agradecer por estar sempre ao meu lado, por me dar suporte sempre que é preciso, por me fazer feliz, tornando a minha vida mais simples. A Rê, por me incentivar e apoiar na empreitada de escrever essa tese e por me receber tão bem em sua casa todas as vezes que voltei a Barão para trabalhar no meu doutorado.

Muito obrigada aos membros da banca, que trouxeram para a defesa discussões interessantes e boas contribuições. Obrigada pela dedicação e cuidado na leitura desta tese.

A todos os orientadores que tive, desde a iniciação científica: Ariadne, Stolfi, Arnaldo, Flávio, Célia e Anamaria. Acredito que, se eu continuo querendo fazer pesquisa, é porque vocês sempre me proporcionaram um ambiente adequado e uma boa orientação, me instruindo sobre como fazer pesquisa da melhor forma possível. Vocês me fizeram sentir que investigar e produzir resultados sobre os conceitos adquiridos é prazeroso.

Aos meus professores da Unicamp, só depois que os deixei, percebi o quão sólida é a base que me deram e a quantidade de conhecimento que me transmitiram. Muito obrigada pelo empenho de vocês na nossa educação.

Ao Leo e ao Samuel por me receberem no M3 e me darem a chance de trabalhar perto da Unicamp, aprender um monte de coisas novas e dar continuidade ao doutorado.

À direção do Câmpus de Ponta Porã e a Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UFMS, pelo suporte ao meu projeto de pesquisa em coloração de arestas em grafos, sempre favorecendo o meu encontro com as Professoras Célia e Aurora.

A todos os meus amigos da Unicamp, Neumar, Jorge, Luiz, André Vignatti, Tatá, Rô, Maria, Clarice, Gi, Ana, Elô, Su, Bruna Mangini, Leo Tizei, Leozinho, Ju Dei Santi, Ju Borin, Minetto, Borin, Pará, Carlão, Renato, Evandro, Nielsen, Thiago Coelho, Candi, Sandrinha, Cláudio, Letícia, Raquel, Sushi, Lilian, Vagner, Edna, Cleo, Bruno Abreu, Alana, Jô, Ana Paula, Ariel, Chris, Luciano, Thelma, Isa, Dani, Bruninha, Fabi, Duda, Tati, Camila, Glenda, Amanda e tantos outros que me fazem sentir que esse tempo inesquecível de Unicamp vai sempre me fazer chorar de saudades.

Obrigada também ao pessoal da secretaria, dos setores administrativos, da segurança e da limpeza, do Instituto de Computação da Unicamp, por serem sempre tão educados e atenciosos e pelo suporte sempre prestado a contento.

Finalmente, agradeço à CAPES e ao CNPq por financiarem esse projeto de tese de doutorado.

Organização da Tese

Esta tese de doutorado é resultado de estudos sobre técnicas conhecidas de coloração de arestas em famosas classes de grafos com o objetivo de adaptá-las para resolver o Problema da Classificação para subconjuntos de grafos split com grau máximo par. O Problema da Classificação, que é NP-completo quando se considera um grafo simples qualquer, está resolvido desde meados da década de 90 para grafos split com grau máximo ímpar, entretanto, poucos subconjuntos de grafos split com grau máximo par estão classificados.

O primeiro capítulo desta tese destina-se a introduzir conceitos essenciais para o entendimento deste trabalho, como a própria definição de grafos, de coloração de arestas e do Problema da Classificação. Ainda no Capítulo 1, são apresentados os principais teoremas e suas demonstrações sobre soluções do Problema da Classificação em classes de grafos muito conhecidas. Todos os resultados apresentados serão usados adiante. O segundo capítulo, define grafos split e apresenta os resultados conhecidos sobre coloração de arestas e o o Problema da Classificação para esta classe. Algumas das técnicas apresentadas nos Capítulo 1 e 2 serão adaptadas para resolver o Problema da Classificação para subconjuntos de grafos split com grau máximo par.

A partir do Capítulo 3, são apresentados nossos resultados desses anos de estudo em coloração de arestas de grafos split. O Capítulo 3, em particular, apresenta uma caracterização estrutural do único conjunto conhecido de grafos split que são Classe 2. O Capítulo 4 faz uso de quadrados latinos para apresentar uma coloração de arestas para alguns grafos split com grau máximo par que são Classe 1. O Capítulo 5 classifica alguns grafos split com grau máximo par através da análise da vizinhança dos vértices de grau máximo, também conhecida como semi-núcleo. O Capítulo 6 classifica alguns grafos split com grau máximo par usando uma técnica parecida com a que é capaz de colorir grafos com vértice universal, ou seja, grafos que possuem pelo menos um vértice adjacente a todos os outros vértices do grafo. Vale ressaltar que os grafos split classificados no Capítulo 6 não possuem vértice universal. O Capítulo 7 apresenta as conclusões baseadas em uma análise das contribuições desta tese para o estado da arte da coloração de arestas de grafos split com grau máximo par.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	ix
Agradecimentos	xi
Organização da Tese	xiii
1 Introdução	1
1.1 Grafos	1
1.2 Pequena história da coloração de grafos	4
1.3 Coloração de arestas	6
1.3.1 Complexidade na solução de problemas de coloração de arestas . . .	9
1.3.2 Quadrados latinos e a coloração de arestas em grafos completos . .	10
1.3.3 Coloração de arestas em grafos bipartidos	13
1.3.4 Coloração de arestas em grafos com vértice universal	17
2 Grafos Split	23
2.1 Coloração de arestas em grafos split completos	24
2.2 Usando quadrados latinos e diagramas de cores para colorir grafos split . .	25
2.2.1 Diagrama de cores	25
2.2.2 Coloração de arestas em grafos split com grau máximo ímpar	27
2.3 Coloração de arestas em alguns grafos split com grau máximo par	34
2.4 Coloração de arestas em grafos split-indiferença	35
2.5 Coloração de arestas em grafos split considerando o núcleo	37
3 Sobre Grafos Split Classe 2	41
4 Usando Quadrados Latinos para Classificar Grafos Split	45
4.1 Usando quadrados latinos de ordem par	47

4.2 Usando quadrados latinos de ordem ímpar	57
5 Classificação de Grafos Split pelo Índice Cromático do Semi-Núcleo	69
6 Estendendo a Técnica de Plantholt	77
6.1 A técnica de coloração de Plantholt estendida	77
6.2 Como encontrar uma partição $[L, R]$	85
7 Conclusões	89
Bibliografia	93
Índice Remissivo	96

Lista de Figuras

1.1	Mapa da cidade de Königsberg na época de Euler.	2
1.2	a) Abstração do Mapa de Königsberg. b) Problema de Königsberg modelado como grafo.	3
1.3	Um mapa e o modelo criado por Kempe usando grafos.	4
1.4	Um mapa, M , e o mapa cúbico correspondente, M'	5
1.5	Uma $ S $ -coloração própria para cada grafo.	7
1.6	a) grafo sobrecarregado. b) subgrafo-sobrecarregado. c) vizinhança-sobrecarregado.	8
1.7	Grafo de Petersen sem um vértice.	8
1.8	K_5 , o grafo completo com cinco vértices.	10
1.9	a) Quadrado latino de ordem 6. b) Quadrado latino de ordem 7.	11
1.10	Grafo bipartido $B = [X, Y]$	13
1.11	Emparelhamento M com caminho aumentável $(y_1, x_1, y_2, x_3, y_4, x_2, y_3, x_4)$	14
1.12	Emparelhamento M' construído a partir do caminho aumentável da Figura (1.11).	14
1.13	Grafo G com um vértice universal v	18
1.14	Grafo com vértice universal e partição $[L, R]$, satisfazendo as condições de Plantholt.	19
1.15	Grafo bipartido gerado a partir da partição dos vértices do grafo da Figura (1.14).	19
1.16	A esquerda, o subgrafo $X = G[L]$ e, a direita, o subgrafo $Y = G[R]$	20
1.17	Grafo bipartido com o conjunto J de vértices com grau maior que $\frac{\Delta}{2}$	21
2.1	Grafo split com os vértices particionados em uma clique Q e conjunto independente S	23
2.2	Grafo split completo.	24
2.3	Quadrado latino de ordem 5 com sufixo $\mathcal{S}(3, 5)$	26
2.4	Diagramas de cores: a) $\mathcal{S}^r(3, 5)$ b) $\mathcal{D}(3, 5)$ c) $\mathcal{D}^r(3, 5)$	26
2.5	Prefixo crescente do diagrama de cores $\mathcal{D}(9, 11)$	28
2.6	Um grafo split $G = [Q, S]$ com $\Delta(G) = 7$ e seus subgrafos $G[Q]$, H_1 e H_2	32
2.7	Diagrama de cores $\mathcal{D}(5, 7)$ e seu sufixo \mathcal{C}	33
2.8	Interseções de cliques maximais em grafos split-indiferença.	36
3.1	Grafo split que não é vizinhança-sobrecarregado e satisfaz as condições do Lema 3.2.	42
4.1	Quadrado latino de ordem par e igual a 8.	47
4.2	Diagramas de cores: a) $\mathcal{S}(5, 8)$ b) $\mathcal{S}^r(5, 8)$ c) $\mathcal{D}(5, 8)$ e d) $\mathcal{D}^r(5, 8)$	48

4.3	Grafo split que não pode ser diretamente colorido pelo quadrado latino de ordem par.	52
4.4	Matriz de adjacências com uma Δ -coloração de arestas para o grafo da Figura 4.3.	53
4.5	Grafo split Classe 1 com uma ordem CFK em relação a λ	54
4.6	Grafo split com vértices em S com grau maior ou igual a $\frac{ Q }{2}$ e com $(d(Q))^2 \geq Q - 2$	58
4.7	a) Matriz A de ordem $ Q = 4$. b) Diagrama C' para $d(Q) = 3$ e $d(u_h) = 3$	60
4.8	a) Matriz A para clique de tamanho $ Q = 9$. b) Diagrama C' para $d(Q) = 2$ e $d(u_h) = 5$	62
5.1	Grafo com vértices do núcleo preenchidos de preto e semi-núcleo no retângulo cinza.	69
5.2	Grafo split com Δ par e $ X $ par que possui emparelhamento para coloração.	75
5.3	Grafo split com Δ par e $ X $ par que não possui emparelhamento para coloração.	75
6.1	Grafo split com os vértices particionados em L , R e P	80
6.2	Grafo split com partição $[L, R, P]$ e $ J = 2$	81
6.3	Grafo split com $\frac{\Delta}{2}$ par e vértices de R ordenados.	82
6.4	conjunto R e subconjuntos X e Y com distribuição de cores que faltam nos vértices.	83
6.5	Grafo que não possui partição $[L, R]$ para nenhum Δ -vértice v , mas pode ser colorido.	87

Capítulo 1

Introdução

1.1 Grafos

Para definir o que é um grafo, vamos partir do conceito de conjuntos. Segundo Cormen, Leiserson e Rivest [16], um *conjunto* é uma coleção de objetos distintos, chamados elementos ou membros. *Grafo* é uma estrutura matemática abstrata formada por um conjunto de elementos, denotado por V , e por um conjunto de pares de elementos de V , denotado por E . Mais especificamente, o conjunto E é uma relação entre os elementos de V e, pode ser definido matematicamente como uma relação binária $E \subseteq V \times V$. Os elementos de V são chamados *vértices* e os elementos de E são chamados *arestas*. Nesta tese, os dois vértices de uma aresta são sempre distintos, isto é, nenhuma aresta tem a forma (v, v) (tais arestas são comumente chamadas de *laços*). Um grafo G com um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E é denotado por $G = (V, E)$. Para evitar confusão, nos casos em que for necessário definir dois grafos ou mais, o conjunto de vértices do grafo G será denotado por $V(G)$, o conjunto de arestas do grafo G será denotado por $E(G)$ e, neste caso, o grafo G será denotado por $G = (V(G), E(G))$.

Considere um conjunto de vértices V . Quando a relação $E \subseteq V \times V$ não é simétrica, chamamos o grafo de *grafo orientado*, seu conjunto de arestas E é um conjunto de pares ordenados de V e, graficamente, os elementos do conjunto V são representados por pequenos círculos e cada par ordenado (u, v) do conjunto E é representado por uma seta do círculo que representa o vértice u ao círculo que representa o vértice v . Quando a relação $E \subseteq V \times V$ é simétrica, ou seja, quando para todo par $(u, v) \in E$ tem-se $(v, u) \in E$, chamamos o grafo de *grafo não-orientado* ou, simplesmente, grafo. Neste caso, E é representado matematicamente por um conjunto de pares não ordenados $\{u, v\}$ de elementos de V , portanto, $\{u, v\}$ e $\{v, u\}$ são a mesma aresta e, graficamente, não se utilizam as setas na representação das arestas, bastando uma única linha entre os círculos que representam os vértices u e v . Referimo-nos à representação gráfica de um grafo, de seus vértices e de

suas arestas como se fossem o próprio grafo, seus vértices e suas arestas.

O grafo $G_T = (\{v\}, \emptyset)$ é chamado *grafo trivial*. Quando $\{u, v\}$ é uma aresta em um grafo G , dizemos que u e v são vértices adjacentes em G . Um *caminho* de v_j a v_k em um grafo G é uma seqüência de vértices $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_{k-1}, v_k)$ tal que v_i é adjacente a v_{i+1} em G , para $j \leq i < k$. Um grafo é *conexo* se existe um caminho entre quaisquer dois de seus vértices. Nesta tese, os grafos considerados são todos conexos, não-orientados e diferentes do grafo trivial. Pela própria definição de conjuntos, os grafos tratados nesta tese não admitem as chamadas arestas múltiplas, ou seja, duas ou mais arestas com o mesmo par de vértices.

As cardinalidades dos conjuntos de vértices e de arestas são comumente denotadas por n e m , respectivamente. Dois vértices ligados por uma aresta são ditos *adjacentes*. Seja $G = (V, E)$ um grafo e v um dos vértices de V . Denota-se por $N_G(v)$ o conjunto composto por todos os vértices adjacentes a v em G . Tal conjunto é chamado *vizinhança de v em G* . Denota-se por $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ a *vizinhança fechada* do vértice v no grafo G . Quando não há ambigüidade, suprime-se o nome do grafo da notação, usando-se apenas $N(v)$ e $N[v]$. Considerando uma aresta $e = \{v, w\}$, dizemos que a aresta e *incide nos vértices v e w* . O número de arestas que incide em um vértice v é chamado de *grau de v* e denotado por $d(v)$. Para um dado grafo G , máximo dos graus dos vértices de G é chamado *grau máximo de G* e denotado por $\Delta(G)$. Duas arestas incidentes em um mesmo vértice são ditas *adjacentes*.

O primeiro trabalho publicado e amplamente divulgado sobre grafos foi apresentado por Leonhard Euler em 1736 [20] e refere-se ao problema das sete pontes de Königsberg. A cidade de Königsberg (hoje conhecida como Caliningrado) é banhada pelo rio Rio Pregel onde há duas grandes ilhas que juntas formam um complexo que na época continha sete pontes. Na Figura (1.1), pode-se ver o mapa de Königsberg na época de Euler e a posição das sete pontes do Rio Pregel naquele período. A imagem foi retirada da Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg).

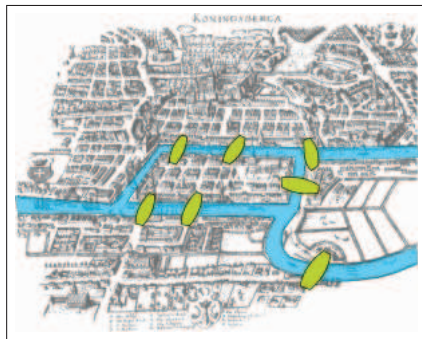


Figura 1.1: Mapa da cidade de Königsberg na época de Euler.

Conta-se que os habitantes da cidade tentavam fazer um percurso no qual atravessassem todas as pontes sem repetir nenhuma. A possibilidade de tal façanha havia se tornado uma lenda popular. Em 1736, Euler provou que tal percurso não era possível. Ele modelou o problema de forma que cada porção contínua de terra era representada por um ponto e cada ponte foi representada por um segmento de reta cujos extremos eram os pontos que representavam as porções de terra ligadas pela respectiva ponte. A Figura (1.2) mostra o modelo criado por Euler para representar o Problema das Pontes de Königsberg como um grafo. Em (a), pode-se ver um mapa bastante simplificado da cidade de Königsberg, onde ficam explicitados os elementos relevantes para a solução do problema: as porções de terra separadas pelo Rio Pregel e as pontes da cidade. Em (b) é apresentado o mapa modelado como um grafo, onde cada porção de terra corresponde a um vértice e as pontes são representadas por arestas.

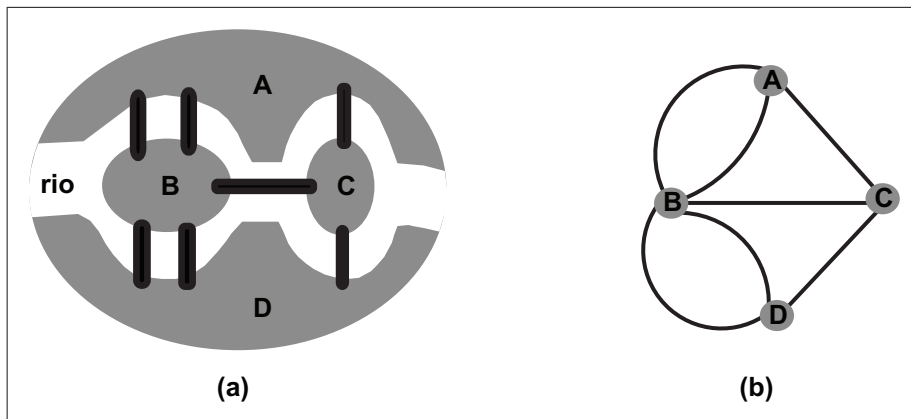


Figura 1.2: a) Abstração do Mapa de Königsberg. b) Problema de Königsberg modelado como grafo.

Modelando o problema como um grafo, Euler concluiu que só seria possível realizar o percurso passando uma única vez em cada ponte se houvesse no máximo dois pontos onde incidissem um número ímpar de segmentos de reta. Tais pontos seriam o início e o fim do percurso, todos os demais pontos deveriam ser tocados por um número par de segmentos de reta, pois cada ponte que leva a uma porção de terra necessita de uma outra ponte ainda não atravessada para que se continue o percurso.

O problema das pontes de Königsberg é um exemplo entre inúmeros outros que se seguiram da utilização de grafos para modelar matematicamente problemas reais. É muito comum que estes problemas envolvam a otimização na distribuição ou obtenção de recursos visando a maximização de lucros ou minimização de prejuízos. Grafos são usados nas mais diversas áreas do conhecimento. Pode-se encontrar com facilidade aplicações em redes de computadores e sistemas distribuídos, em bancos de dados, no desenvolvimento de circuitos eletrônicos, na inteligência artificial, na organização de torneios e de sistemas

de transporte público, na medicina, na aeronáutica, na telefonia, na ecologia, dentre muitos outros.

1.2 Pequena história da coloração de grafos

A origem da Teoria da Coloração de grafos é um famoso problema de coloração de mapas, que data de 1852 e ficou mundialmente conhecido como *Problema das Quatro Cores*. Certamente, foi um dos problemas mais estudados da Teoria dos Grafos e contribuiu significativamente para o desenvolvimento desta área. Esta seção baseia-se na história da coloração em grafos, descrita no livro *Chromatic Graph Theory*, de Gary Chartrand e Ping Zang [11].

O Problema das Quatro Cores surgiu quando Francis Guthrie, tentando colorir os condados de um mapa da Inglaterra, notou que poderia fazê-lo usando apenas 4 cores de forma que dois condados vizinhos sempre tivessem cores distintas. Francis contou sobre sua descoberta ao seu irmão mais novo, Frederick Guthrie, que conjecturou que, para pintar qualquer mapa de forma que regiões vizinhas tenham cores distintas, seriam necessárias no máximo quatro cores. Frederick apresentou a conjectura ao seu professor de Matemática, Augustus DeMorgan, que ficou muito interessado no problema e o disseminou entre matemáticos ingleses e americanos, mas faleceu sem saber se a conjectura era verdadeira.

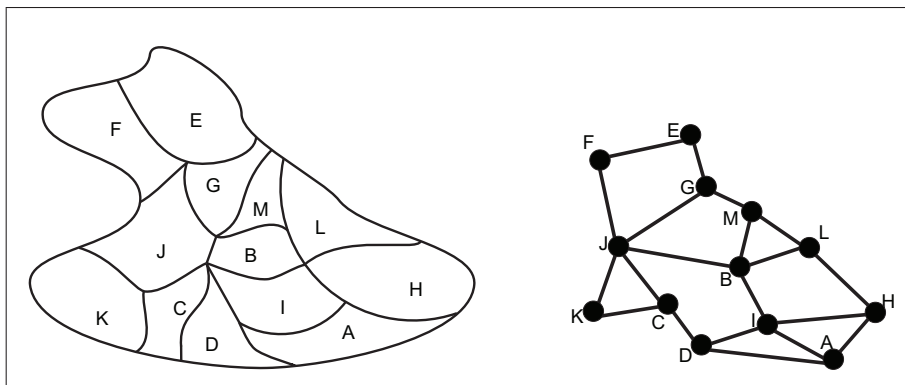


Figura 1.3: Um mapa e o modelo criado por Kempe usando grafos.

O problema foi estudado por muitos outros matemáticos e em 1879 uma prova da conjectura foi apresentada por Alfred Bray Kempe. Entretanto, a prova de Kempe continha um erro, que durante uma década não foi notado. Apesar disso, Kempe havia feito várias observações interessantes. Dentre elas, Kempe modelou o problema de forma que, em um mapa, cada região é representada por um vértice e existe aresta entre dois vértices se,

e somente se, as regiões que estes vértices representam são vizinhas no mapa. A Figura (1.3)) mostra, à esquerda, um mapa cujas regiões são rotuladas por letras de A a M e, à direita, o mapa modelado como um grafo, onde cada vértice corresponde a uma região distinta do mapa e existe aresta entre dois vértices se, e somente se, existe uma linha de fronteira entre as respectivas regiões no mapa.

Kempe mostrou que o problema de colorir os vértices desse grafo, usando no máximo quatro cores e de forma que vértices adjacentes tenham cores distintas, é equivalente ao problema de se colorir o próprio mapa. Foi a primeira vez que o problema das quatro cores foi modelado como um grafo.

Um físico escocês contemporâneo de Kempe, Peter Guthrie Tait, também se interessou pelo problema das quatro cores. Mais especificamente, Tait se interessou pela demonstração apresentada por Kempe e tentou produzir demonstrações mais simples e menores que a de Kempe. Todas as tentativas de Tait falharam. Entretanto, uma das idéias de Tait mostrou-se bastante útil e despertou o interesse da comunidade científica. Tait considerava uma espécie de mapa conhecido como *mapa cúbico*. Em um mapa cúbico, cada ponto de interseção de linhas que delimitam as regiões do mapa tem exatamente três linhas. Todo mapa M que não tem nenhuma região totalmente circundada por outra região pode ser transformado em um mapa cúbico M' desenhando-se um círculo (que representa uma nova região) no lugar de cada ponto de interseção de quatro ou mais regiões de M . A Figura 1.4 mostra um mapa M onde existem quatro pontos onde quatro ou mais regiões se intersectam e um mapa cúbico, M' , desenhado a partir de M , onde cada um destes pontos de interseção de quatro ou mais regiões foi substituído por uma nova região. As novas regiões no mapa M' são N , O , P e Q . Note que em M' cada ponto é a interseção de, no máximo, três regiões.

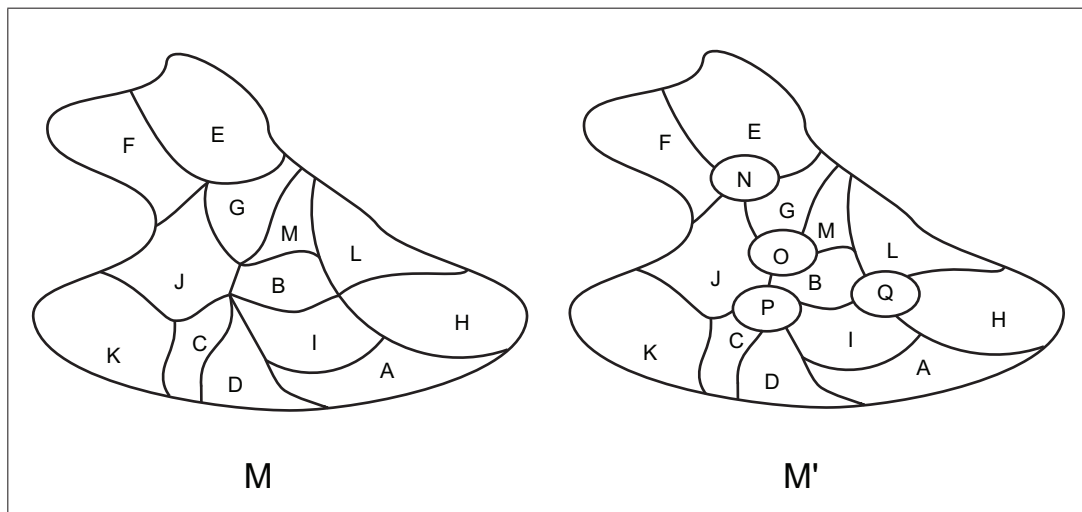


Figura 1.4: Um mapa, M , e o mapa cúbico correspondente, M' .

A idéia era colorir as linhas que delimitavam as regiões do mapa cúbico. Segundo Tait, era fácil demonstrar que as linhas de um mapa cúbico sempre podem ser coloridas com três cores de forma que linhas que se intersectam tenham cores distintas. Ele demonstrou como esta idéia poderia ser usada para provar a veracidade da conjectura das quatro cores. Tait estava correto ao afirmar que seu argumento poderia ser usado para provar a conjectura, entretanto ele errou ao afirmar que era fácil demonstrar que as linhas limitantes das regiões de um mapa cúbico sempre podem ser coloridas com três cores de forma que linhas que se intersectam tenham cores distintas. Na verdade, esta afirmação equivale ao Teorema das Quatro Cores e, portanto, é tão difícil de provar quanto a própria conjectura de Frederick Guthrie. Assim, a principal contribuição de Tait [48] para a coloração em grafos foi apresentar o problema das quatro cores a partir de outra perspectiva, dando origem ao problema de coloração de arestas.

Quase um século depois das tentativas de Kempe e Tait, em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken [7] finalmente provaram a veracidade da conjectura das quatro cores.

O problema das quatro cores deu origem a várias formas de coloração em grafos, dentre elas, a coloração de arestas que é o foco desta tese e será descrita em mais detalhes na seção seguinte.

1.3 Coloração de arestas

Uma *coloração de arestas* de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $c : E \rightarrow S$. Os elementos de S são chamados *cores*. Quando $c(e) \neq c(f)$ para quaisquer duas arestas e e f adjacentes, a coloração de arestas é dita *própria*. Nesta tese, estamos interessados apenas em colorações próprias das arestas de um grafo e, quando não houver ambiguidade, o termo *própria* poderá ser omitido. Uma *k-coloração de arestas* de G é qualquer coloração própria das arestas de G onde $|S| = k$. Note que, pela definição, nem sempre todas as k cores serão utilizadas em uma k -coloração de arestas, apesar de haver k cores disponíveis. Nesta tese, os termos coloração e k -coloração, sempre que usados, referem-se a uma coloração das arestas de um grafo. A Figura (1.5) mostra uma 4-coloração das arestas do grafo C_3 , uma 3-coloração do grafo C_4 e uma 2-coloração do grafo C_6 .

Um *conjunto independente de arestas* é um conjunto de arestas que, duas a duas, não incidem sobre um mesmo vértice. Um *emparelhamento* em um grafo G é um conjunto independente de arestas de G . Note que, em uma coloração de arestas de um grafo G , o conjunto de arestas coloridas com uma mesma cor é um emparelhamento em G . Considere uma aresta $t = \{u, v\}$. Quando $t \in M$, dizemos que t cobre u e v e que M cobre u e v .

Em geral, nos problemas que podem ser modelados como uma coloração em grafos, as cores são recursos a serem despendidos para a solução do problema. Portanto, quanto menos cores são utilizadas, melhor é a solução do problema. Assim, nos problemas de

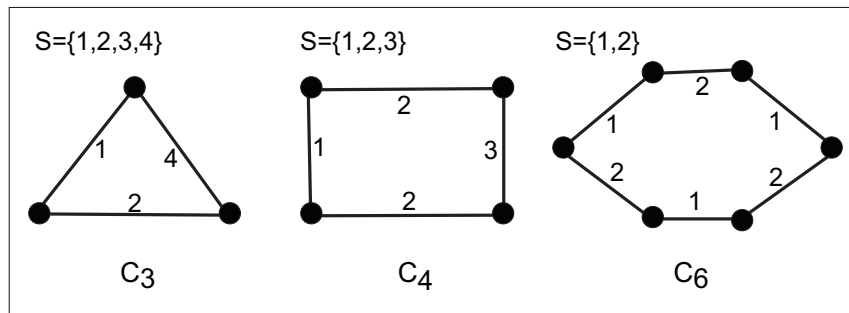


Figura 1.5: Uma $|S|$ -coloração própria para cada grafo.

coloração de arestas em um grafo, procura-se descobrir qual é o menor número k de cores com o qual se obtém uma k -coloração própria das arestas do grafo. Esse número é chamado de *índice cromático* do grafo e, para um dado grafo G , é denotado por $\chi'(G)$. Uma coloração de arestas de um grafo G que usa $\chi'(G)$ cores é dita *ótima*.

Obviamente, o grau máximo de um grafo é um limite inferior para o índice cromático do mesmo, ou seja, para um dado grafo G , $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Note que a coloração dada para o grafo C_6 na Figura (1.5) é ótima e $\chi'(C_6) = \Delta(C_6) = 2$. Mas, nem sempre o índice cromático de um grafo é igual ao seu grau máximo. Na Figura (1.5), por exemplo, é fácil verificar que o índice cromático do grafo C_3 é 3 e seu grau máximo é 2. Em 1964, Vadim Vizing [50] provou que o índice cromático de um grafo G é, no máximo, $\Delta(G) + 1$. Tal resultado restringiu de maneira muito significativa os possíveis valores do índice cromático de um grafo. Assim, surgiu o *Problema da Classificação*, segundo o qual um grafo G é Classe 1 se tem $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou Classe 2 se tem $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Para demonstrar que um determinado grafo G é Classe 1, é necessário provar que existe uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores para o grafo G . Para provar que G é Classe 2, é necessário provar que toda coloração de arestas de G precisa de pelo menos $\Delta(G) + 1$ cores.

Uma condição suficiente para garantir que um grafo seja Classe 2 é a existência de um número de arestas “muito grande”, tão grande que as arestas não possam ser coloridas com apenas $\Delta(G)$ cores. Nesse caso, o grafo é chamado *sobrecarregado*. Um grafo é *sobrecarregado* se satisfaz a desigualdade $m > \Delta(G) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Se G é sobrecarregado, então G é Classe 2, pois no máximo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ arestas de G podem ser coloridas com a mesma cor. Note que se um grafo G é sobrecarregado, então G tem um número ímpar de vértices.

Se um grafo G possui um subgrafo H com $\Delta(H) = \Delta(G)$ e H é sobrecarregado, então G é dito *subgrafo-sobrecarregado*. Grafos sobrecarregados e subgrafo-sobrecarregados foram definidos pela primeira vez em [29]. Quando o subgrafo sobrecarregado H é induzido por um $\Delta(G)$ -vértice e sua vizinhança, G é dito *vizinhança-sobrecarregado* [18]. Grafos sobre-

carregados, subgrafo-sobrecarregados e vizinhança-sobrecarregados são todos Classe 2. A Figura (1.6) mostra um grafo sobrecarregado em (a); um grafo subgrafo-sobrecarregado em (b), onde o grafo induzido pelas arestas pretas é sobrecarregado; e um grafo vizinhança-sobrecarregado em (c), induzido pela vizinhança do vértice v .

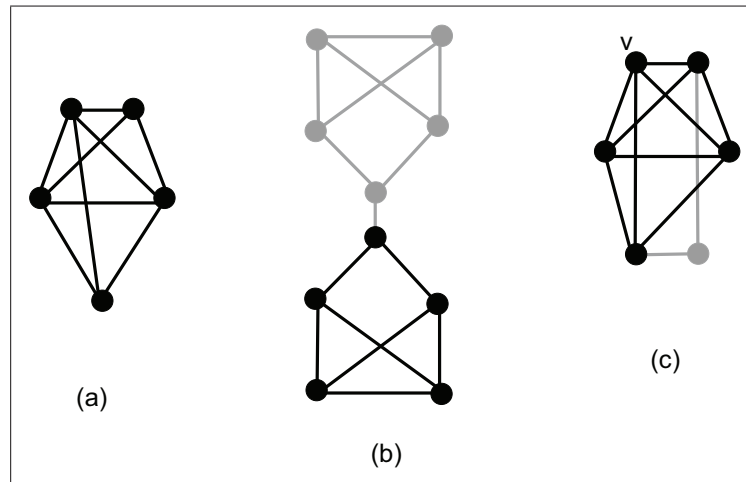


Figura 1.6: a) grafo sobrecarregado. b) subgrafo-sobrecarregado. c) vizinhança-sobrecarregado.

Apesar de raros, há exemplos de grafos Classe 2 que não são subgrafo-sobrecarregados. O menor desses grafos é conhecido como P^* e é obtido removendo-se um vértice qualquer do grafo de Petersen. O grafo P^* pode ser visto na Figura (1.7).

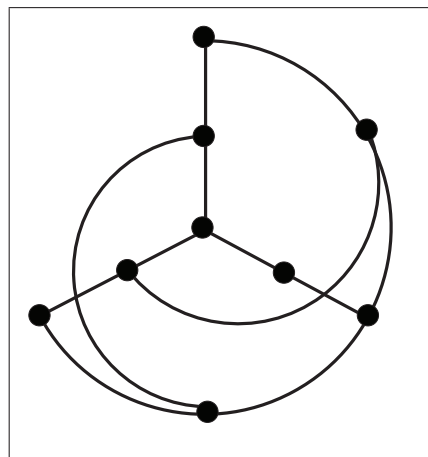


Figura 1.7: Grafo de Petersen sem um vértice.

Hilton e Chetwynd [13] propuseram a seguinte conjectura.

Conjectura 1.1 *Se o grafo G tem $\Delta(G) > \frac{|V(G)|}{3}$, G é Classe 2 se, e somente se, G é subgrafo-sobrecarregado.*

Esta conjectura é conhecida como *Conjectura Overfull* e provou-se verdadeira para todo grafo com vértice universal [44], todo grafo G tal que $\Delta(G) \geq |V(G)| - 3$ [14], para os grafos multipartidos completos [32], para os grafos split-indiferença [39], dentre outros. Note que, se a Conjectura Overfull for verdadeira, o teorema que dela resulta tem limite justo para o grau máximo do grafo, já que $\frac{|V(P^*)|}{3} = \Delta(P^*)$.

1.3.1 Complexidade na solução de problemas de coloração de arestas

Esta seção destina-se a dar uma visão geral da complexidade dos problemas de coloração de arestas em grafos. Mais especificamente, tem como objetivo apresentar casos em que a solução pode ser obtida por algoritmos eficientes e outros em que não se conhece nenhum algoritmo de complexidade de tempo polinomial.

Como dito anteriormente, a partir de 1964, o problema de encontrar o índice cromático de um grafo restringiu-se ao Problema da Classificação, que consiste em decidir se o grafo é Classe 1 (possui uma $\Delta(G)$ -coloração de arestas) ou não. Apesar desta simplificação no enunciado do problema, decidir se um grafo é Classe 1 é NP-completo e decidir se o grafo é Classe 2 é co-NP-completo [33].

Em 1991, Cai e Ellis [10] provaram que o Problema da Classificação apresenta esta complexidade mesmo quando restrito a algumas classes de grafos como, por exemplo, a classe dos grafos perfeitos. Mesmo assim, existem algoritmos eficientes que resolvem o Problema da Classificação para algumas classes de grafos bem conhecidas, tais como a classe dos grafos completos, dos grafos bipartidos [34], dos multipartidos completos [32], das potências de ciclos [38] e a classe dos grafos que possuem vértice universal [44]. Também é possível verificar em tempo polinomial se um grafo é subgrafo-sobrecarregado [41] e, caso a resposta seja afirmativa, sabe-se de imediato que o grafo é Classe 2.

Dada a dificuldade em se resolver o Problema da Classificação para o caso geral, muitos esforços têm sido realizados na tentativa de se obter soluções para algumas classes conhecidas e bem estruturadas. Algumas vezes, os resultados são parciais. Como exemplo, considerando-se a classe dos grafos indiferença com grau máximo ímpar, existe um algoritmo de complexidade polinomial que resolve o problema [17]. Na classe dos grafos split, o Problema da Classificação pode ser resolvido eficientemente para os split-indiferença [39], para os grafos split que possuem 2 ou 3 vértices de grau máximo [49], para os grafos split completos [12] e grafos split com grau máximo ímpar [12].

Nas próximas seções, são apresentadas demonstrações de alguns resultados sobre coloração de arestas em classes de grafos bem estruturadas e bastante conhecidas. Essas

demonstrações trazem, implicitamente, técnicas que colaboram para a solução do Problema da Classificação em outras classes de grafos.

1.3.2 Quadrados latinos e a coloração de arestas em grafos completos

Um grafo é *completo* se seus vértices são dois a dois adjacentes. O grafo completo com n vértices é denotado por K_n . Como exemplo, o grafo completo K_5 pode ser visto na Figura (1.8).

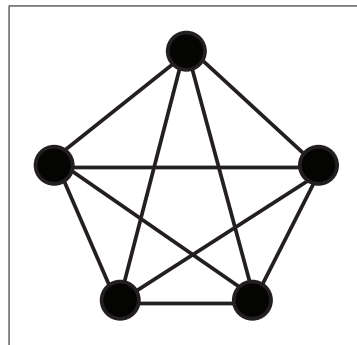


Figura 1.8: K_5 , o grafo completo com cinco vértices.

Esta seção apresenta uma técnica muito utilizada para colorir grafos completos, que faz uso de quadrados latinos. Além disso, apresenta o conceito de coloração equilibrada e mostra algumas de suas propriedades em grafos completos. O uso da coloração equilibrada permite encontrar uma coloração de arestas ótima para algumas classes de grafos como, por exemplo, grafos com vértice universal [44] e alguns grafos split [12].

1.3.2.1 Quadrados latinos

Um *quadrado latino de ordem k* é uma matriz $k \times k$ com valores do conjunto $\{0, \dots, k-1\}$ tal que cada elemento de $\{0, \dots, k-1\}$ aparece em cada linha e em cada coluna exatamente uma vez. Um quadrado latino $M = [m_{i,j}]$ é *comutativo* se $m_{i,j} = m_{j,i}$, para todo i e j tal que $0 \leq i, j \leq k-1$.

Os quadrados latinos usados nessa tese são matrizes $k \times k$, $M = [m_{i,j}]$, $0 \leq i, j \leq k-1$, definidas da seguinte forma:

$$m_{i,j} = (i + j) \pmod{k} \quad (1.1)$$

Note que M é um quadrado latino comutativo. Além disso, se k é ímpar, todos os elementos da diagonal principal de M são distintos e o quadrado latino é dito *idempotente*. Sabe-se que não existem quadrados latinos de ordem par idempotentes [12]. Considerando um quadrado latino de ordem par igual a k , construído conforme apresentamos em (1.1), o valor de $m_{i,i}$ é par e ocorre também em $m_{i+\frac{k}{2},i+\frac{k}{2}}$, para todo i tal que $0 \leq i \leq \frac{k}{2} - 1$.

A Figura (1.9) apresenta em (a) um quadrado latino de ordem par e igual a 6 e em (b) um quadrado latino de ordem ímpar e igual a 7, ambos construídos de acordo com a equação (1.1).

0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	0
2	3	4	5	0	1
3	4	5	0	1	2
4	5	0	1	2	3
5	0	1	2	3	4

(a)

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	1
3	4	5	6	0	1	2
4	5	6	0	1	2	3
5	6	0	1	2	3	4
6	0	1	2	3	4	5

(b)

Figura 1.9: a) Quadrado latino de ordem 6. b) Quadrado latino de ordem 7.

1.3.2.2 Coloração de arestas em grafos completos

Para fixar o conceito de quadrados latinos, vamos usá-lo para colorir as arestas de grafos completos.

Teorema 1.2 *Seja K_n , um grafo completo com n vértices, então*

$$\chi'(K_n) = n - 1, \text{ quando } n \text{ é par};$$

$$\chi'(K_n) = n, \text{ quando } n \text{ é ímpar}.$$

Demonstração: Considere um grafo completo K_n , n ímpar, e defina um quadrado latino $M = [m_{i,j}]$ de ordem n , como descrito em (1.1). Rotule os vértices $V(K_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ e pinte as arestas $\{v_i, v_j\}$ com a cor $m_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq n - 1$. Como

M é comutativo, as cores $m_{i,j}$ e $m_{j,i}$ são iguais, não havendo ambiguidade na escolha da cor da aresta $\{v_i, v_j\}$. Como em cada linha as cores são duas a duas distintas, não incidem num mesmo vértice duas arestas com a mesma cor. Como n é ímpar, o grafo K_n é sobrecarregado e, portanto, $\chi'(K_n) \geq n$. Como foram usadas n cores, esta é uma coloração de arestas ótima para o K_n e $\chi'(K_n) = n$, quando n é ímpar.

Nos casos em que n é par, construa um quadrado latino $M = [m_{i,j}]$ de ordem $n - 1$. Rotule os vértices $V(K_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$. Pinte as arestas $\{v_i, v_j\}$ com a cor $m_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq n - 2$. Pinte as arestas $\{v_i, v_{n-1}\}$ com a cor $m_{i,i}$, $0 \leq i \leq n - 2$. Como n é par, o quadrado latino tem ordem ímpar. Assim, as cores da diagonal principal, que incidem sobre o vértice v_{n-1} são todas distintas. Pelos mesmos argumentos apresentados para o caso em que n é ímpar, essa é uma coloração de arestas para o K_n com n par. Mais que isso, essa coloração usou $\Delta(K_n) = n - 1$ cores e, portanto, é ótima e $\chi'(K_n) = n - 1$ quando n é par. ■

Do Teorema 1.2, conclui-se que um grafo completo K_n é Classe 1 se, e somente, n é par.

1.3.2.3 Coloração equilibrada

Dado x , um número inteiro positivo, uma *coloração equilibrada* das arestas de um grafo G é uma coloração das arestas de G onde cada cor é usada para pintar x ou $x + 1$ arestas, ou seja, a cardinalidade de quaisquer duas classes de cor diferem de, no máximo, uma unidade. A $(n - 1)$ -coloração (quando n é par) e a n -coloração (quando n é ímpar) exibidas na demonstração do Teorema 1.2, para colorir o grafo K_n , são exemplos de coloração equilibrada em que x vale $\frac{n}{2}$ e $\frac{n-1}{2}$, respectivamente.

Lema 1.3 [44] *Se um grafo G tem uma k -coloração, então G tem uma k -coloração equilibrada.*

Dizemos que *a cor c falta no vértice v* quando c não é usada para colorir nenhuma aresta incidente em v , caso contrário, *c ocorre em v* . Os corolários 1.4 e 1.5, a seguir, são conseqüências do Teorema 1.2 e do Lema 1.3.

Corolário 1.4 *Seja n um inteiro par. Em uma coloração equilibrada de K_n com n cores, falta uma cor em cada vértice do grafo, cada uma de $\frac{n}{2}$ cores faltam em exatamente dois vértices e cada uma das outras $\frac{n}{2}$ cores ocorre em todos os vértices do K_n .*

Demonstração: Considere um grafo K_n com n par. Como K_n tem grau máximo $n - 1$, por Vizing [51], K_n tem uma n -coloração. Como cada vértice tem grau igual a $n - 1$, falta exatamente uma cor em cada vértice. Pelo Lema 1.3, K_n tem uma n -coloração equilibrada. Como K_n tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas, uma n -coloração equilibrada do K_n corresponde a $\frac{n}{2}$ classes

de cor, cada uma com cardinalidade $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n}{2} - 1$, e outras $\frac{n}{2}$ classes de cor, cada uma com cardinalidade $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \frac{n}{2}$. Por definição de coloração, cada classe de cor determina um emparelhamento do K_n . Como existem n vértices, cada uma das $\frac{n}{2}$ classes de cor com cardinalidade $\frac{n}{2} - 1$ cobre $n - 2$ vértices e, portanto, cada uma dessas cores falta em dois vértices de K_n . Cada uma das $\frac{n}{2}$ classes de cor com cardinalidade $\frac{n}{2}$ cobre n vértices de K_n e, portanto, cada uma dessas cores ocorre em todos os vértices do K_n . ■

Corolário 1.5 *Seja n um inteiro ímpar. Em uma coloração de K_n com n cores, cada uma das n cores falta em um vértice e em cada vértice falta exatamente uma das n cores.*

A demonstração do Corolário 1.5 é análoga a apresentada para o Corolário 1.4.

1.3.3 Coloração de arestas em grafos bipartidos

Um grafo é *bipartido* se o conjunto de seus vértices pode ser particionado em dois subconjuntos de forma que cada aresta tem um extremo em cada subconjunto. Um grafo bipartido B cujo conjunto de vértices está particionado em dois subconjuntos, X e Y , é denotado $B = [X, Y]$. Um exemplo de grafo bipartido pode ser visto na Figura (1.10).

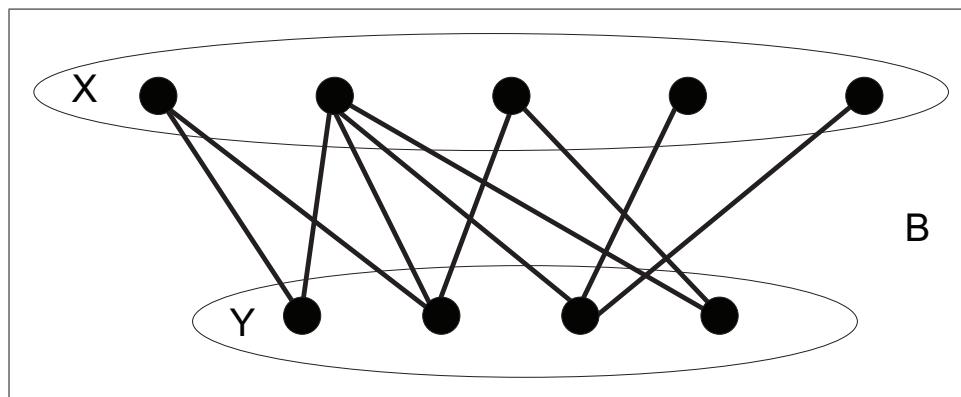


Figura 1.10: Grafo bipartido $B = [X, Y]$.

A seguir, definiremos alguns termos necessários para a compreensão desta seção. Para mais detalhes consulte o livro *Graph Theory*, de R. Diestel [19].

Considere um emparelhamento M em um grafo bipartido B . Um *caminho M -alternante* é um caminho que se inicia em um vértice que não está coberto por M e se alterna entre arestas do conjunto $E(B) \setminus M$ e do conjunto M . Note que é possível existir um *caminho alternante trivial*, ou seja, um caminho formado unicamente por um vértice não coberto por M . Seja P um caminho M -alternante. Se P não é um caminho alternante trivial e termina em um vértice u que também não está coberto pelo emparelhamento M não

trivial, então P é chamado de *caminho aumentável*. Essa nomenclatura deve-se ao fato de que é possível construir um novo emparelhamento M' com cardinalidade maior que $|M|$, onde $M' = (M \cup P) \setminus (P \cap M)$ (conhecido como diferença simétrica entre M e P). A Figura (1.11) mostra um emparelhamento M (arestas em preto) e pode-se observar que o caminho $(y_1, x_1, y_2, x_3, y_4, x_2, y_3, x_4)$, por definição, é um caminho aumentável.

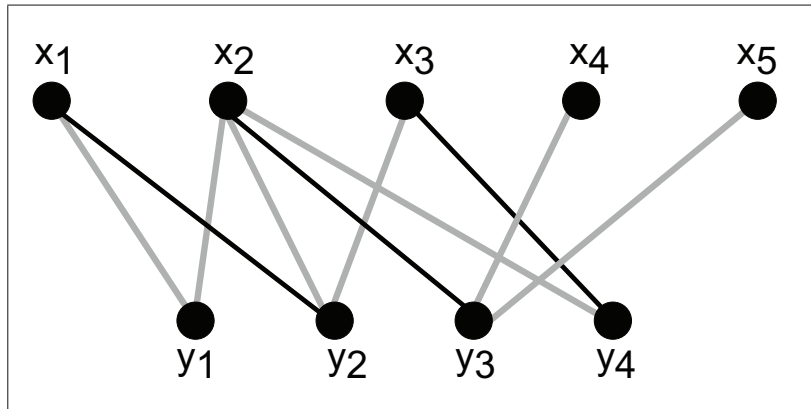


Figura 1.11: Emparelhamento M com caminho aumentável $(y_1, x_1, y_2, x_3, y_4, x_2, y_3, x_4)$.

A Figura (1.12) mostra um novo emparelhamento, M' , construído a partir do caminho aumentável apresentado na Figura (1.11). Note que o emparelhamento M' é máximo, já que a união de M' com qualquer outra aresta do grafo não é um emparelhamento.

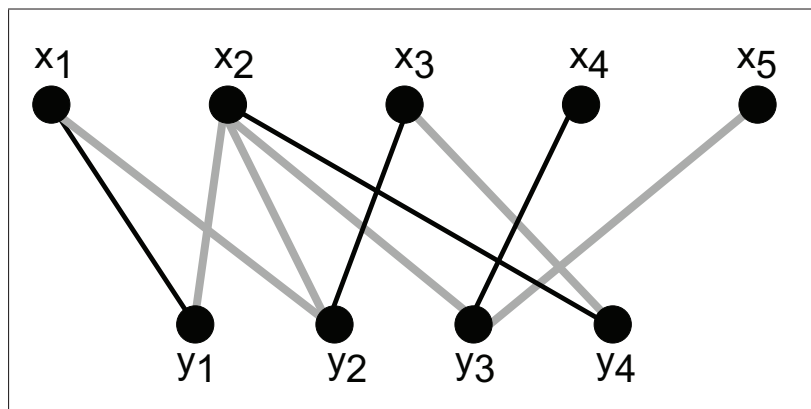


Figura 1.12: Emparelhamento M' construído a partir do caminho aumentável da Figura (1.11).

Considere um subconjunto V' de vértices de G . Um conjunto C de arestas de G é chamado de *cobertura dos vértices por arestas* de V' , se em cada vértice de V' incide pelo menos uma aresta de C . Neste caso, dizemos também que C cobre os vértices de V' .

Considere um grafo bipartido $B = [X, Y]$. Uma condição obviamente necessária para a existência de um emparelhamento que cubra os vértices de X é que a cardinalidade da vizinhança de cada subconjunto S de vértices de X seja, no mínimo, igual a cardinalidade do próprio subconjunto S , ou seja, $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$. Em 1935, Hall mostrou que essa condição necessária é também suficiente, como apresenta o teorema a seguir.

Teorema 1.6 [19] *Um grafo bipartido $B = [X, Y]$ contém um emparelhamento que cubra os vértices de X se, e somente se, $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.*

Demonstração: \Rightarrow Suponha que B tem um emparelhamento M que cubra todos os vértices da partição X e seja S um subconjunto de X . Como os vértices de S estão cobertos por arestas de M e cada aresta de M incide sobre um vértice distinto de $N(S)$, a cardinalidade de $N(S)$ é no mínimo igual à cardinalidade do subconjunto S , ou seja, $|N(S)| \geq |S|$.

\Leftarrow A prova é por contradição. Seja $B = [X, Y]$ um grafo bipartido com $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$ e sem nenhum emparelhamento que cubra os vértices de X . Seja M um emparelhamento máximo em B . Então M não cobre os vértices de X . Considere um vértice $v \in X$ que não está coberto por M e seja Z o conjunto dos vértices que podem ser alcançados a partir de v por caminhos M -alternantes. Como M é um emparelhamento máximo, não há caminhos aumentáveis para M e v é o único vértice não coberto por M que pertence ao conjunto Z . Sejam $S = Z \cap X$ e $T = Z \cap Y$. Note que v pertence a S e que os caminhos M -alternantes que partem de v atingem Y através de arestas que não pertencem a M e voltam para X através de arestas de M . Logo, cada vértice $y \in T$ é adjacente a um vértice $x \in S \setminus \{v\}$ tal que a aresta $\{y, x\}$ pertence a M , ou seja, $T \subseteq N(S)$. Por construção, $|T| = |S| - 1$. Vamos provar que $|T| = |N(S)|$. Seja $w \in N(S)$. Por definição, w é adjacente a algum vértice $u \in S$. Há dois casos: ou $v = u$, ou temos um caminho M -alternante de v a u que termina com uma aresta de M . No primeiro caso, quando $v = u$, a existência da aresta $\{u, w\}$ garante que $w \in Y$ e que w pode ser alcançado através de um caminho M -alternante que parte de v , ou seja, $w \in T$. No segundo caso, quando temos um caminho M -alternante de v a u que termina com uma aresta de M , há dois subcasos: $\{u, w\}$ pertence a M ou $\{u, w\}$ não pertence a M . Se $\{u, w\}$ pertence a M , $u \neq v$, pois o vértice v não está coberto por M . Como $\{u, w\}$ é a última aresta do caminho M -alternante de v a u , w pertence a T . Se $\{u, w\}$ não pertence a M , existe um caminho M -alternante de v a w , ou seja, $w \in T$. Logo, todo vértice w pertencente a $N(S)$ é um vértice do conjunto T . Então, $T = N(S)$ e, portanto, $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$, contradizendo o fato $|N(S)| \geq |S|$. ■

Um grafo é k -regular se todos os seus vértices tem grau k . Um *emparelhamento perfeito* é um emparelhamento que cobre todos os vértices do grafo. Uma aplicação da condição de Hall (Teorema 1.6) é a prova de que todo grafo bipartido k -regular tem um emparelhamento perfeito.

Lema 1.7 *Se B é um grafo bipartido k -regular, $k \geq 1$, então B tem um emparelhamento perfeito.*

Demonstração: Seja $B = [X, Y]$ um grafo bipartido k -regular. Note que o número de arestas de B é igual a soma dos graus dos vértices de uma das partes de B . Por hipótese, o grafo é k -regular, logo a soma dos graus dos vértices da parte X é igual a $k|X|$. Da mesma forma, a soma dos graus da parte Y é $k|Y|$. Como toda aresta de B incide em X e em Y , o número de arestas de B é igual a $k|X|$ que, por sua vez, é igual a $k|Y|$ e, como $k > 0$, $|X| = |Y|$. Agora, temos que verificar se existe um emparelhamento em B que cobre os vértices de X . Consideremos um subconjunto $S \subset X$. Seja m o número de arestas incidentes a S . Note que se $\{x, y\}$ é uma aresta tal que $x \in S$, então $y \notin S$. Pela hipótese, B é k -regular e, portanto, o número de arestas incidentes a S é $m = k|S|$, pois em cada vértice de S incidem k arestas. Estas arestas também incidem em $N(S)$ e, sendo assim, existem pelo menos $k|N(S)|$ arestas incidentes a vértices de $N(S)$. Logo, $m \leq k|N(S)|$ e, portanto, $k|S| \leq k|N(S)|$ que implica que $|N(S)| \geq |S|$. Pelo Teorema 1.6, existe um emparelhamento que cobre os vértices de X . Por outro lado, qualquer emparelhamento em B que cubra os vértices de X também cobre os vértices de Y , pois $|X| = |Y|$. Segue da definição, que tal emparelhamento é perfeito. ■

Usando o Lema 1.7, Schrijver apresenta em [46] a prova de que existe um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau máximo em qualquer grafo bipartido. Para tanto, Schrijver considera um conceito de grafos diferente do adotado nesta tese, onde admitem-se arestas múltiplas, ou seja, admite-se a existência no grafo de pares de arestas $\{u_1, v_1\}$ e $\{u_2, v_2\}$ tais que $u_1 = u_2$ e $v_1 = v_2$. Apesar da prova de Schrijver considerar um conceito mais geral de grafos, seu resultado é válido para todos os grafos considerados nesta tese. Esse importante resultado será usado adiante e, portanto, é formalizado a seguir com a apresentação da demonstração de Schrijver.

Teorema 1.8 *Se B é um grafo bipartido, então existe um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau máximo em B .*

Demonstração: Considere um grafo bipartido $B = [X, Y]$ com grau máximo $\Delta(B)$. Vamos construir, a partir de B , um novo grafo bipartido $\Delta(B)$ -regular B' que contém B como subgrafo induzido. Para tanto, crie uma cópia de B e crie $\Delta(B) - d_B(v)$ arestas

entre cada vértice $v \in V(B)$ e a sua cópia. Note que cada vértice que é cópia de algum vértice pertencente a X só pode ser adjacente a vértices de X e a vértices que são cópia de algum vértice do conjunto Y . Da mesma forma, cada vértice que é cópia de algum vértice pertencente a Y só pode ser adjacente a vértices de Y e a vértices que são cópia de um vértice do conjunto X . Logo, ao incluir as cópias dos vértices de X na partição Y e vice-versa, mantém-se a propriedade de que toda aresta do grafo tem um extremo em X e outro em Y . Portanto, B' também é um grafo bipartido. Além disso, o grafo B' construído é $\Delta(B)$ -regular e, pelo Lema 1.7, B' tem um emparelhamento perfeito M' . (Apesar de não havermos mencionado, pode-se verificar que a prova do Lema 1.7 também é válida para grafos que admitem arestas múltiplas.) Seja M um emparelhamento em B tal que $M = \{\{v, u\} : \{v, u\} \in E(B) \cap M'\}$. Considere um vértice v com grau máximo em B . Como M' é um emparelhamento perfeito, existe uma aresta $\{v, u\}$ pertencente a M' . Como v tem grau máximo em B , toda aresta incidente em v e pertencente a $E(B')$ pertence a $E(B)$. Logo, $\{v, u\} \in M' \cap E(B)$, ou seja, existe uma aresta $\{v, u\}$ pertencente a M . Portanto, M cobre todo vértice de grau máximo em B . ■

Do resultado apresentado no Teorema 1.8, pode-se obter a solução do Problema da Classificação para grafos bipartidos, conforme segue.

Teorema 1.9 [22] *Se B é um grafo bipartido então B é Classe 1.*

Demonstração: A demonstração é por indução em $\Delta(B)$. Se $\Delta(B) = 0$, B é Classe 1, já que não há arestas para colorir e não é necessária nenhuma cor. Se $\Delta(B) = 1$, não existem duas arestas incidindo sobre um mesmo vértice e, portanto, podemos usar uma única cor para pintar as arestas de B . Se $\Delta(B) \geq 2$, tome um emparelhamento M que cubra os vértices de grau máximo em B . Pelo Teorema 1.8, tal emparelhamento existe. Considere o subgrafo $B' = B[E(B) \setminus M]$. Note que B' tem grau máximo $\Delta(B) - 1$. Por indução, as arestas de B' podem ser coloridas com $\Delta(B) - 1$ cores. Pinte as arestas que pertencem a M com uma cor nova. Portanto, B possui uma $\Delta(B)$ -coloração e é Classe 1. ■

1.3.4 Coloração de arestas em grafos com vértice universal

Considere um grafo G e seu conjunto de vértices $V(G)$. Um vértice $v \in V(G)$ é *vértice universal* quando v é adjacente a todos os outros vértices do conjunto $V(G)$. A Figura (1.13) apresenta um exemplo de grafo com vértice universal.

Note que um vértice universal tem necessariamente grau máximo igual a $n - 1$, logo qualquer grafo G com vértice universal tem $\Delta(G) + 1$ vértices. Além disso, se um grafo G com grau máximo $\Delta(G)$ tem um vértice universal, então G é subgrafo de um $K_{\Delta(G)+1}$.

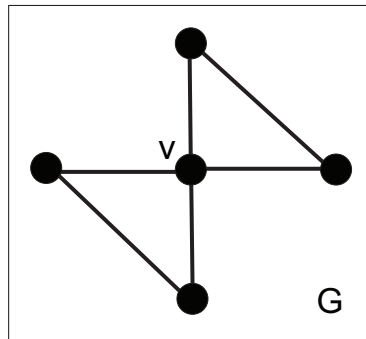


Figura 1.13: Grafo G com um vértice universal v .

Pelo Teorema 1.2, se $\Delta(G) + 1$ é par, $\chi'(K_{\Delta(G)+1}) = \Delta(G)$ e $K_{\Delta(G)+1}$ é Classe 1. Observe que, neste caso, qualquer subgrafo de $K_{\Delta(G)+1}$ com um vértice universal pode ser colorido com exatamente $\Delta(G)$ cores. Portanto, o subgrafo G com $\Delta(G) = \Delta(K_{\Delta(G)+1})$ tem $\chi'(G) = \Delta(G)$ e é Classe 1. Sendo assim, qualquer grafo G com vértice universal e $\Delta(G)$ ímpar é Classe 1.

Para os casos em que $\Delta(G)$ é par, o problema não é tão simples, visto que, nesses casos, $\chi'(K_{\Delta(G)+1}) = \Delta(G) + 1$. Apesar de $K_{\Delta(G)+1}$ ser Classe 2 quando $\Delta(G)$ é par, alguns subgrafos G com $\Delta(G) = \Delta(K_{\Delta(G)+1})$ são Classe 1. A classificação dos grafos com vértice universal e grau máximo par foi dada por Plantholt em [44]. Esta seção dedica-se a dar uma idéia da demonstração.

Teorema 1.10 [44] *Seja G um grafo com vértice universal e grau máximo par. O grafo G é Classe 1 se, e somente se, G não é subgrafo-sobrecarregado.*

Primeiro, note que se G é Classe 1, então G não é subgrafo-sobrecarregado. Considere o conjunto dos grafos com vértice universal, grau máximo par e que não são sobrecarregados. Plantholt apresentou uma $\Delta(G)$ -coloração para os grafos G que possuem o maior número de arestas possível ($|E(G)| = \Delta(G) \lfloor \frac{\Delta(G)+1}{2} \rfloor = \frac{\Delta(G)^2}{2}$). Qualquer subgrafo com o mesmo grau máximo que um dos grafos coloridos por Plantholt também é Classe 1, já que retirar arestas de um grafo não pode aumentar o seu índice cromático. Note que os grafos coloridos por Plantholt são obtidos retirando-se exatamente $\frac{\Delta(G)}{2}$ arestas de um grafo completo com um número ímpar de vértices. A idéia é particionar $V(G)$ em dois subconjuntos L e R , pintar os subgrafos de G induzidos por L e por R com as mesmas $\frac{\Delta(G)}{2}$ cores e pintar o subgrafo de G induzido pelas arestas $\{u, v\}$, $u \in L$ e $v \in R$, com outras $\frac{\Delta(G)}{2}$ cores. Para isso, Plantholt cria uma partição $[L, R]$ dos vértices de G , satisfazendo as seguintes condições:

- $|L| = \frac{\Delta(G)}{2} + 1$ e

- $G[R]$ é isomorfo ao $K_{\frac{\Delta(G)}{2}}$.

A Figura 1.14 mostra um grafo com vértice universal e uma partição dos vértices que satisfaz essas condições.

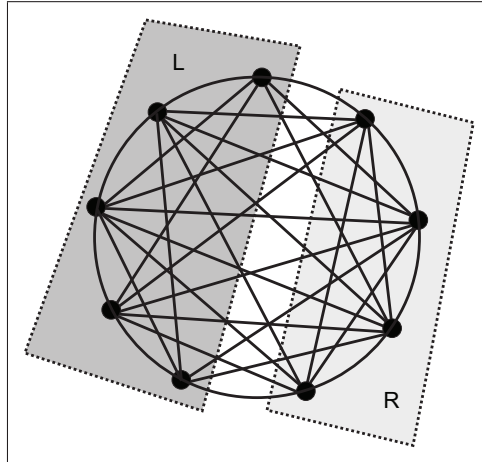


Figura 1.14: Grafo com vértice universal e partição $[L, R]$, satisfazendo as condições de Plantholt.

Plantholt prova que essa partição existe para qualquer grafo com vértice universal, grau máximo par e que não seja sobrecarregado. Então, define um grafo bipartido $B = [L, R]$, que é subgrafo de G . Note que $\Delta(B) \leq \frac{\Delta(G)}{2} + 1$ (a igualdade ocorre quando um vértice de R é adjacente a todos os vértices de L). A Figura (1.15) mostra o grafo bipartido gerado a partir da partição dos vértices da Figura (1.14).

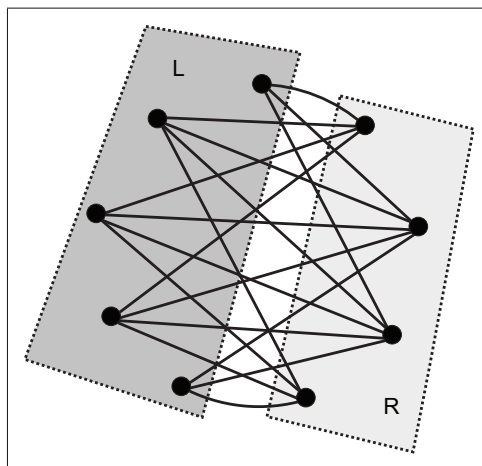


Figura 1.15: Grafo bipartido gerado a partir da partição dos vértices do grafo da Figura (1.14).

Em seguida, Plantholt define os subgrafos X , induzido pelos vértices de L ; Y , induzido pelos vértices de R ; e $Z = X \cup Y$. A Figura (1.16) mostra, a esquerda, o subgrafo X , induzido pelos vértices do conjunto L ; e, a direita, o subgrafo Y , induzido pelos vértices do conjunto R .

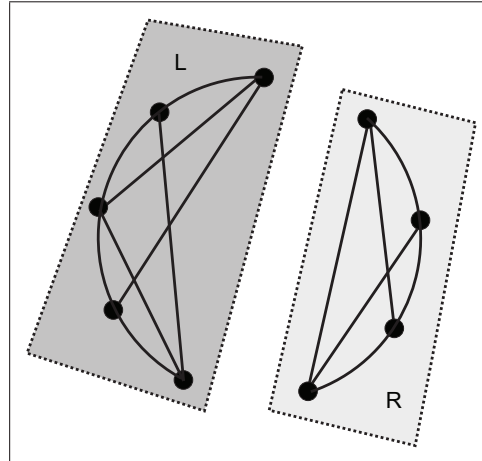


Figura 1.16: A esquerda, o subgrafo $X = G[L]$ e, a direita, o subgrafo $Y = G[R]$.

Note que o subgrafo Z é $G[E(G) \setminus E(B)]$. Como Y é isomorfo a um grafo completo $K_{\frac{\Delta(G)}{2}}$, por Vizing [51], $\chi'(Y) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$. Para a coloração do subgrafo X , há dois casos.

Caso 1: $\frac{\Delta(G)}{2}$ é ímpar. Como X é um subgrafo de um grafo completo $K_{\frac{\Delta(G)}{2}+1}$, $\chi'(X) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$.

Caso 2: $\frac{\Delta(G)}{2}$ é par. Plantholt prova que se G não é sobrecarregado, existe uma partição $[L, R]$ dos vértices de G que satisfaz, além das condições estabelecidas anteriormente, a restrição de que o subgrafo induzido por L não é um grafo subgrafo-sobrecarregado e possui um vértice universal. Com isso, o grafo X possui um vértice universal, tem grau máximo $\frac{\Delta(G)}{2}$ e, por indução, pode ser colorido com $\frac{\Delta(G)}{2}$ cores.

Como X e Y são disjuntos, podem ser coloridos com as mesmas $\frac{\Delta(G)}{2}$ cores. Seja J o conjunto dos vértices de B que possuem grau em B igual a $\frac{\Delta(G)}{2} + 1$. Se J é vazio, $\chi'(B) = \frac{\Delta(G)}{2}$ pelo Teorema 1.9. Quando J não é vazio, Plantholt mostra que é possível retirar uma aresta incidente em cada vértice de J e incluir estas arestas em Z sem aumentar o índice cromático de Z . Com isso, podemos usar $\frac{\Delta(G)}{2}$ novas cores para colorir B . A Figura (1.17) mostra o conjunto J de vértices com grau maior que $\frac{\Delta}{2}$ no grafo bipartido da Figura (1.14). A aresta tracejada deve ser removida do grafo bipartido $B[L, R]$ e incluída no grafo $Z = X \cup Y$ para que o grafo B tenha grau máximo igual a $\frac{\Delta}{2}$.

Como G é a união dos subgrafos B e Z , ou seja, $G(V(G), E(G))$ é tal que $V(G) =$

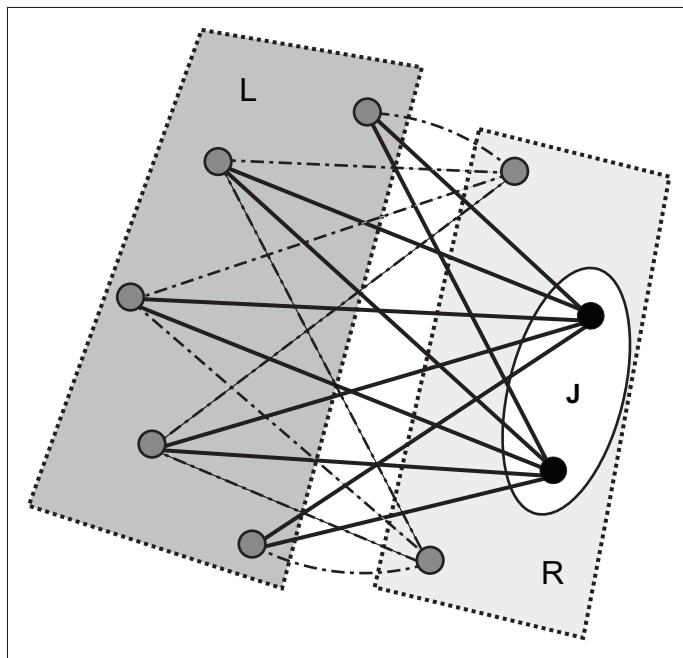


Figura 1.17: Grafo bipartido com o conjunto J de vértices com grau maior que $\frac{\Delta}{2}$.

$V(B) \cup V(Z)$ e $E(G) = E(B) \cup E(Z)$, G possui uma $\frac{\Delta(G)}{2} + \frac{\Delta(G)}{2} = \Delta(G)$ -coloração e, portanto, é Classe 1.

No Capítulo 6, apresentamos mais alguns detalhes desta técnica e uma adaptação da técnica de Plantholt para colorir alguns grafos sem vértice universal.

Capítulo 2

Grafos Split

Um conjunto de vértices que são dois a dois adjacentes é chamado de *clique*. Uma clique Q em um grafo G é *maximal* se não existe nenhuma outra clique em G que contenha todos os vértices de Q . Um conjunto de vértices que são dois a dois não-adjacentes é chamado de *conjunto independente*. Um grafo $G = [Q, S]$ é *split* se seu conjunto de vértices $V(G)$ admite uma partição em uma clique Q e um conjunto independente S . Como exemplo, a Figura (2.1) mostra um grafo split com clique Q e conjunto independente S .

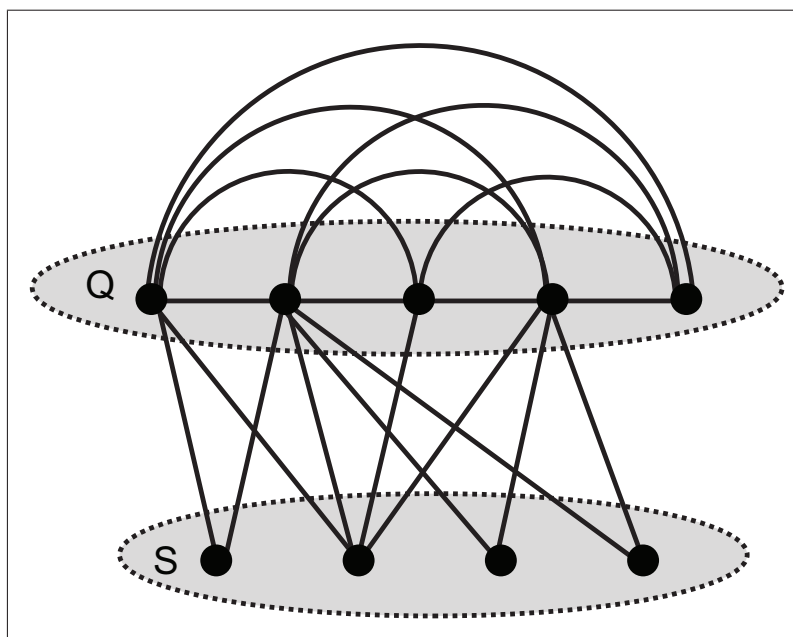


Figura 2.1: Grafo split com os vértices particionados em uma clique Q e conjunto independente S .

A classe dos grafos split foi introduzida em 1977 por Földes e Hammer [23] e é uma classe amplamente estudada [9, 12, 23, 35, 39, 40, 42, 45, 49]. É bastante conhecida, dentre

outros motivos, por ter relação com o problema do empacotamento e da mochila [15], com a teoria de matroides [24], com as funções booleanas [43], com a análise de processamento paralelo em programação de computadores [28] e com a alocação de tarefas em sistemas distribuídos [1].

Para os grafos split, conhece-se algoritmos polinomiais que dão a solução de muitos problemas combinatoriais reconhecidamente difíceis tais como encontrar a clique máxima e o conjunto independente máximo [26], o reconhecimento pela seqüência dos graus dos vértices [27], o número de grafos split não isomorfos em função da cardinalidade do conjunto de vértices [45] e o problema da coloração dos vértices [37].

Apesar de tantos problemas resolvidos eficientemente para esta classe, a complexidade da coloração de arestas em grafos split continua aberta. As seções a seguir apresentam brevemente alguns resultados conhecidos deste problema em subclasses dos grafos split.

2.1 Coloração de arestas em grafos split completos

Um grafo é *split completo* se é um grafo split $G = [Q, S]$ tal que cada vértice pertencente a Q é adjacente a todos os vértices do conjunto independente S . A Figura (2.2) apresenta um grafo split completo $G = [Q, S]$ com $|Q| = 3$ e $|S| = 4$.

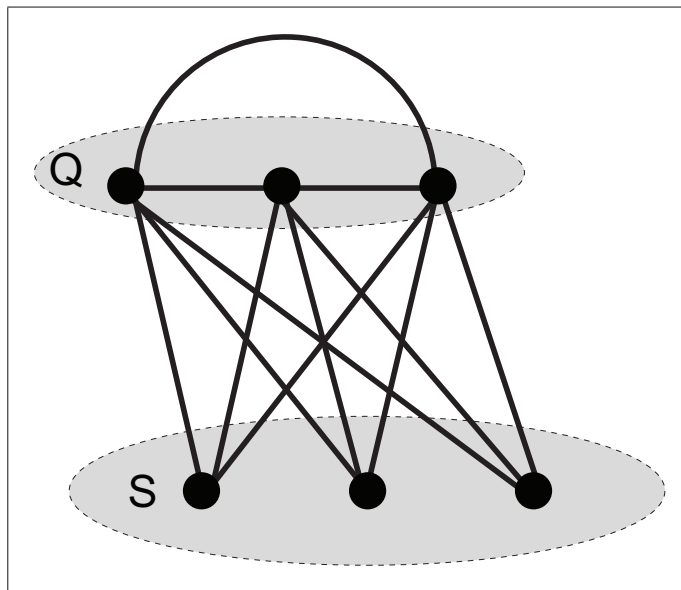


Figura 2.2: Grafo split completo.

Note que, por definição, em um grafo split completo a clique Q não é maximal. Note também que a classe dos grafos split completos é uma subclasse dos grafos com vértice

universal e, pelo Teorema 1.10, a conjectura 3.1 é válida para esta subclasse. Sendo assim, quando $\Delta(G)$ é par, o grafo split completo é Classe 2 se, e somente se, G é sobrecarregado. No caso dos grafos split completos, em particular, ser sobrecarregado significa que o número de arestas do grafo $\overline{G[S]}$ é menor que $\frac{\Delta(G)}{2}$. Quando $\Delta(G)$ é ímpar, G é subgrafo do K_n , $n = |V(G)|$ par, e, portanto, $\chi'(G) = \chi'(K_n) = n - 1 = \Delta(G)$, ou seja, G é Classe 1.

2.2 Usando quadrados latinos e diagramas de cores para colorir grafos split

Em [12], Chen, Fu e Ko usaram quadrados latinos (apresentados na seção 1.3.2.1) para criar uma técnica de coloração de arestas utilizada em grafos split com grau máximo ímpar, em grafos split completos e em um subconjunto dos grafos split com grau máximo par. Para entender a técnica apresentada por Chen, Fu e Ko, é preciso conhecer o conceito de diagrama de cores, descrito a seguir.

2.2.1 Diagrama de cores

Um *diagrama de cores* \mathcal{C} é uma seqüência de vetores de cores (C_0, C_1, \dots, C_k) , onde cada vetor de cor $C_i = [c_{i,0}, \dots, c_{i,d_i}]$, $0 \leq i \leq k$, é uma seqüência de cores duas a duas distintas. Um diagrama de cores \mathcal{C} é *monotônico* se a cor $c_{i,j}$ ocorre, no máximo, $d_i - j$ vezes em C_0, \dots, C_{i-1} , para todo i e j tal que $0 \leq i \leq k$ e $0 \leq j \leq d_i$.

Um vetor de cores $[c_0, c_1, \dots, c_n]$, que pode ser vazio, é um *sufixo de um vetor de cores* $R = [r_0, r_1, \dots, r_k]$ se $c_i = r_{k-n+i}$, para $0 \leq i \leq n$. Um diagrama de cores $\mathcal{C} = (C_0, \dots, C_k)$ é um *sufixo de um diagrama de cores* $\mathcal{R} = (R_0, R_1, \dots, R_k)$ se C_i é um sufixo de R_i , para todo i , $0 \leq i \leq k$. Chen, Fu e Ko apresentam o seguinte resultado sobre sufixos de diagramas de cores monotônicos.

Lema 2.1 [12] *Se um diagrama de cores \mathcal{C} é monotônico, então qualquer sufixo de \mathcal{C} é monotônico.*

Considere um quadrado latino $M = [m_{i,j}]$ de ordem k ímpar, definido como em (1.1) e um inteiro $n < k$. Denota-se por $\mathcal{S}_M(n, k)$ o *sufixo a partir da coluna n do quadrado latino M* . O sufixo $\mathcal{S}_M(n, k)$ é o diagrama de cores $(C_0, C_1, \dots, C_{n-1})$, onde $C_i = [m_{i,n}, m_{i,n+1}, \dots, m_{i,k-1}]$, $0 \leq i < n$. A Figura 2.3, a seguir, apresenta o quadrado latino M de ordem 5, construído como definimos em (1.1), e evidencia o sufixo $\mathcal{S}_M(3, 5)$ a título de exemplo.

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

}

S(3,5)

Figura 2.3: Quadrado latino de ordem 5 com sufixo $S(3,5)$.

O inverso do vetor de cores C_i é $C_i^r = [m_{i,k-1}, m_{i,k-2}, \dots, m_{i,n}]$, para $0 \leq i < n$. Para um quadrado latino M de ordem k construído como definimos em (1.1), o inverso de $\mathcal{S}_M(n, k)$, denotado por $\mathcal{S}_M^r(n, k)$, é o diagrama de cores $(C_{n-1}^r, C_{n-2}^r, \dots, C_1^r, C_0^r)$. É fácil ver que a única diferença entre os diagramas de cores $\mathcal{S}_M(n, k)$ e $\mathcal{S}_M^r(n, k)$ é uma troca de nomes entre cores. Pode-se concatenar cores da diagonal principal de M a vetores de cores dos diagramas $\mathcal{S}_M(n, k)$ e $\mathcal{S}_M^r(n, k)$ de forma a se obter novos diagramas de cores. Chamamos de *sufixo aumentado* ao diagrama de cores $\mathcal{D}_M(n, k) = (D_0, D_1, \dots, D_{n-1})$, onde $D_i = C_i \in \mathcal{S}_M(n, k)$ para $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e D_i é a concatenação de $(m_{i,i})$ com $C_i \in \mathcal{S}_M(n, k)$ para $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i < n$. Chamamos de *inverso do sufixo aumentado* ao diagrama de cores $\mathcal{D}_M^r(n, k) = (D_{n-1}^r, D_{n-2}^r, \dots, D_0^r)$ onde $D_i^r = C_i^r$ para $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i < n$ e D_i^r é a concatenação de $(m_{i,i})$ com C_i^r para $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Nesta tese, os diagramas de cores $\mathcal{S}_M(n, k)$, $\mathcal{S}_M^r(n, k)$, $\mathcal{D}_M(n, k)$ e $\mathcal{D}_M^r(n, k)$ são construídos sempre a partir de um quadrado latino M construído como definimos em (1.1). Por isso, a menos que haja ambigüidade, a identificação do quadrado latino será suprimida da notação, escrevendo-se $\mathcal{S}(n, k)$, $\mathcal{S}^r(n, k)$, $\mathcal{D}(n, k)$ e $\mathcal{D}^r(n, k)$. A Figura 2.4, a seguir, apresenta os diagramas $\mathcal{S}^r(3, 5)$, $\mathcal{D}(3, 5)$ e $\mathcal{D}^r(3, 5)$.

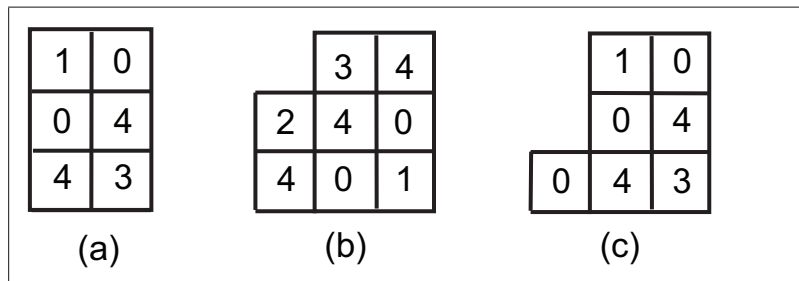


Figura 2.4: Diagramas de cores: a) $\mathcal{S}^r(3, 5)$ b) $\mathcal{D}(3, 5)$ c) $\mathcal{D}^r(3, 5)$.

Em [12] são apresentados os seguintes lemas.

Lema 2.2 [12] *Os diagramas de cores $\mathcal{S}(n, k)$ e $\mathcal{S}^r(n, k)$ são monotônicos, para k ímpar, $0 \leq n < k$.*

Lema 2.3 [12] *Os diagramas de cores $\mathcal{D}(n, k)$ e $\mathcal{D}^r(n, k)$ são monotônicos, para k ímpar, $0 \leq n < k$.*

Uma das aplicações do conceito de diagrama de cores monotônicos é na coloração de arestas de grafos bipartidos. Seja $B = [X, Y]$ um grafo bipartido. Considere $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{|X|-1}\}$. Para cada vértice $x_i \in X$, seja $C_{x_i} = [c_{i,0}, c_{i,1}, \dots, c_{i,d_B(x_i)-1}]$ um vetor com $d_B(x_i)$ cores duas a duas distintas. Se a seqüência $\mathcal{C} = (C_{x_0}, \dots, C_{x_{|X|-1}})$ é um diagrama de cores monotônico, então pode-se colorir as arestas de B utilizando-se as cores do vetor C_{x_i} para colorir as arestas incidentes ao vértice x_i , para cada vértice $x_i \in X$. O algoritmo é guloso e, para cada vértice x_i , utiliza consecutivamente as cores de C_{x_i} . Para cada cor $c_{i,j}$, escolhe um vértice adjacente a x_i onde não incide nenhuma aresta colorida com a cor $c_{i,j}$ e colore esta aresta com a cor $c_{i,j}$. Como \mathcal{C} é um diagrama de cores monotônico, quando o algoritmo está colorindo uma aresta de x_i e considerando a cor $c_{i,j}$, esta cor já coloriu, no máximo, $d_B(x_i) - j$ arestas do grafo, que é o número máximo de vezes que esta cor apareceu anteriormente em \mathcal{C} , nos vetores $C_{x_0}, C_{x_1}, \dots, C_{x_{i-1}}$. Como existem nesse momento, no mínimo, $d_B(x_i) - j + 1$ arestas incidentes a x_i que ainda não foram coloridas, certamente há pelo menos uma aresta que pode ser colorida com a cor $c_{i,j}$. O lema a seguir formaliza este resultado.

Lema 2.4 [12] *Sejam $B = [X, Y]$ um grafo bipartido e $\mathcal{C} = (C_{x_0}, C_{x_1}, \dots, C_{x_{|X|-1}})$ um diagrama de cores monotônico onde cada C_{x_i} tem pelo menos $d_B(x_i)$ cores. O grafo B tem uma coloração de arestas que usa as cores de C_{x_i} para colorir as arestas incidentes a x_i , para todo $x_i \in X$.*

Note que a coloração obtida através de um diagrama de cores monotônico é própria, mas não necessariamente ótima. A próxima seção apresenta a técnica de Chen, Fu e Ko para colorir as arestas de grafos split usando diagramas de cores monotônicos e quadrados latinos.

2.2.2 Coloração de arestas em grafos split com grau máximo ímpar

Esta seção apresenta uma coloração de arestas ótima para grafos split com grau máximo ímpar utilizando a técnica de Chen, Fu e Ko [12], que faz uso de quadrados latinos e diagramas de cores monotônicos. Com este resultado, os autores provam que tais grafos são Classe 1.

Para compreender esta técnica, é necessário conhecer o conceito de prefixo de diagrama de cores. Segundo Chen, Fu e Ko [12], um vetor de cores $[c_0, c_1, \dots, c_n]$, que pode ser vazio, é um *prefixo de um vetor de cores* $R = [r_0, r_1, \dots, r_k]$ se $c_i = r_i$, para $0 \leq i \leq n$. Um diagrama de cores $\mathcal{C} = (C_0, \dots, C_k)$ é um *prefixo de um diagrama de cores* $\mathcal{R} = (R_0, R_2, \dots, R_k)$ se C_i é um prefixo de R_i , para todo i , $0 \leq i \leq k$. Denota-se o tamanho de um vetor R por $|R|$. Um prefixo $\mathcal{C} = (C_0, \dots, C_k)$ de um diagrama de cores \mathcal{R} é chamado de *prefixo crescente* se $|C_0| \leq |C_1| \leq \dots \leq |C_k|$.

Lembre-se dos diagramas de cores $\mathcal{D}(n, k)$ e $\mathcal{D}^r(n, k)$ definidos na seção anterior. A Figura 2.5 apresenta um prefixo crescente do diagrama de cores $\mathcal{D}(9, 11)$.

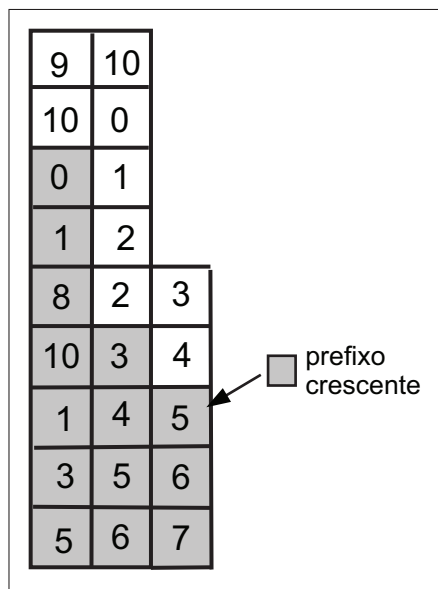


Figura 2.5: Prefixo crescente do diagrama de cores $\mathcal{D}(9, 11)$.

Em [12], os autores afirmam que se \mathcal{P} é um prefixo crescente do diagrama de cores $\mathcal{D}(n, k)$ ou $\mathcal{D}^r(n, k)$, para k ímpar, então \mathcal{P} é monotônico. Note que essa afirmação nem sempre é verdadeira. Considere o diagrama de cores $\mathcal{D}(n, k)$ com k ímpar, $k \geq 3$ e $n \geq 1$. Seja $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ um prefixo de $\mathcal{D}(n, k)$, onde $|P_i| = 1$ para $0 \leq i < n$. Note que, pela definição, \mathcal{P} é um prefixo crescente, já que $|P_0| \leq |P_1| \leq \dots \leq |P_{n-1}|$. Note também que, nos vetores de cores P_i , $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $P_i = [m_{i,i}]$, onde $m_{i,i}$ é a cor da diagonal principal do quadrado latino $M = [m_{i,j}]$, usado para construir o diagrama $\mathcal{D}(n, k)$. Se n é par, então a cor $m_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ está nos vetores P_0 e $P_{\frac{n}{2}}$, já que a primeira cor do vetor D_0 é a cor $m_{0,n} = n + 0 \pmod{k} = n$ e a cor do vetor $P_{\frac{n}{2}}$ é a cor $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} \pmod{k} = n$. Se n é ímpar e $n \geq 5$, a cor $m_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ está nos vetores P_1 e $P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, já que a cor do vetor P_1 é $m_{1,n} = 1 + n \pmod{k} = n + 1$ e a cor do vetor $P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ é $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \pmod{k} = n + 1$.

Como \mathcal{P} é um prefixo crescente de $\mathcal{D}(n, k)$ onde os vetores tem todos cardinalidade 1 e há cores que se repetem em \mathcal{P} , este prefixo não é monotônico. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para provar que nem todo prefixo crescente de $\mathcal{D}^r(n, k)$ é monotônico.

Mesmo assim, o algoritmo apresentado por Chen, Fu e Ko sempre produz uma coloração ótima para um grafo split com grau máximo ímpar. A seguir, apresentamos a nossa prova de que os diagramas de cores utilizados em [12] são monotônicos e, em seguida, apresentamos a técnica de Chen, Fu e Ko.

Lema 2.5 *Se $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ é um prefixo crescente de $\mathcal{D}(n, k)$ tal que $P_i = D_i$ para $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então \mathcal{P} é monotônico.*

Demonstração: Considere um prefixo crescente \mathcal{P} do diagrama de cores $\mathcal{D}(n, k)$ tal que $P_i = D_i$ para $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Note que, por construção, cada uma das cores $m_{i,i}$ do quadrado latino é a primeira cor do vetor P_i , $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i < n$.

Primeiro, vamos provar que cada cor $p_{i,0}$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i < n$, ocorre no máximo $|P_i|$ vezes em \mathcal{P} . Note que, como $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, P_i possui uma cor de diagonal principal e todas as cores das células $m_{i,n}$ a $m_{i,k-1}$. Portanto $|P_i| = k - n + 1$. Como $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $P_i = D_i$. Logo, a cor $p_{i,0}$ corresponde a cor da célula $m_{i,i}$. Como as cores da diagonal principal concatenadas na construção de $\mathcal{D}(n, k)$ são todas distintas, a cor $p_{i,0}$ não foi incluída mais que uma vez quando as cores da diagonal principal foram concatenadas aos vetores. Resta garantir que a cor $p_{i,0}$ não ocorre mais que $k - n$ vezes nas primeiras i linhas e últimas $k - n$ colunas do quadrado latino, que compõem o diagrama de cores $\mathcal{D}(n, k)$. As cores em cada coluna do quadrado latino são duas a duas distintas. Logo, se considerarmos as colunas de n a $k - 1$, a cor $p_{i,0}$ ocorre, no máximo, $k - n$ vezes.

Agora, vamos provar que cada cor $p_{i,j}$, com $j > 0$ e $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ocorre no máximo $|P_i| - 1 - j$ vezes em vetores de cores P_{i-x} , $x \geq 1$. A cor $p_{i,j}$ corresponde a cor $m_{i,n+j-1}$ do quadrado latino de ordem k . Por construção, se considerarmos as linhas menores que i e as colunas maiores ou iguais a n , a cor $m_{i,n+j-1}$ só se repete nas células $m_{i-x,n+j-1+x}$, $x \geq 1$. Como \mathcal{P} é um prefixo crescente, a cor $m_{i,n+j-1}$ ocorre nos vetores de cores P_{i-x} quando está presente nas linhas menores que i , entre as colunas $n + j$ e $k - 1$ do quadrado latino. Logo, a cor $p_{i,j}$ ocorre, no máximo, $k - 1 - (n + j) + 1 = (k - n + 1) - 1 - j = |P_i| - 1 - j$ vezes nos vetores de cores P_{i-x} , $x \geq 1$.

Note que a cor $m_{i,i}$ concatenada ao vetor de cores P_i não ocorre em vetores de cores P_{i+x} , $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $x \geq 1$. De fato, por construção, quando consideramos $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, as células do quadrado latino que podem ser iguais a $m_{i,i}$ e pertencer a vetores de cores P_{i+x} , $i < n$ e $x \geq 1$, são $m_{i+x,i-x}$. Como $i < n$, as células da coluna $i - x$ não pertencem ao diagrama de cores \mathcal{P} .

Para terminar, vamos provar que cada cor $p_{i,j}$, com $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ocorre no máximo $|P_i| - 1 - j$ vezes em vetores de cores P_{i-x} , $x \geq 1$. Como $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, o vetor de cores P_i não tem necessariamente a mesma cardinalidade que o vetor de cores D_i e cada cor $p_{i,j}$ corresponde a cor $m_{i,n+j}$ do quadrado latino de ordem k . Por construção, se considerarmos as linhas menores que i e colunas maiores ou iguais a n , a cor $m_{i,n+j}$ só se repete nas células $m_{i-x,n+j+x}$ do quadrado latino, $x \geq 1$. Como a última cor do vetor de cores P_i é $m_{i,n+|P_i|-1}$ e \mathcal{P} é um prefixo crescente, somente cores das colunas n a $n + |P_i| - 1$ podem pertencer aos vetores de cores P_{i-x} , $x \geq 1$. Além disso, por construção, a cor $m_{i,n+j}$ só se repete nas linhas menores que i entre as colunas $n + j + 1$ e $n + |P_i| - 1$. Logo, a cor $p_{i,j}$ ocorre, no máximo, $n + |P_i| - 1 - (n + j + 1) + 1 = |P_i| - 1 - j$ vezes nos vetores de cores P_{i-x} , $x \geq 1$. Note que nenhuma célula de diagonal principal foi concatenada aos vetores P_{i-x} , $x \geq 1$, já que $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Portanto, nenhuma cor ocorre nos vetores P_{i-x} mais vezes do que aparece entre as primeiras i linhas e últimas $k - n$ colunas do quadrado latino. ■

Lema 2.6 *Se $\mathcal{P} = (P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_0)$ é um prefixo crescente de $\mathcal{D}^r(n, k) = (D_{n-1}^r, D_{n-2}^r, \dots, D_0^r)$ tal que $P_i = D_i^r$ para $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então \mathcal{P} é monotônico.*

Demonstração: Considere um prefixo crescente $\mathcal{P} = (P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_0)$ do diagrama de cores $\mathcal{D}^r(n, k) = (D_{n-1}^r, D_{n-2}^r, \dots, D_0^r)$ onde $P_i = D_i^r$ para $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Note que, por construção, cada uma das cores $m_{i,i}$ do quadrado latino é a primeira cor do vetor P_i , $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Primeiro, vamos provar que cada cor $p_{i,0}$, $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ocorre no máximo $|P_i|$ vezes em \mathcal{P} . Note que, como $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, P_i possui uma cor de diagonal principal e todas as cores das células $m_{i,n}$ a $m_{i,k-1}$. Portanto $|P_i| = k - n + 1$. Como $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $P_i = D_i^r$. Logo, a cor $p_{i,0}$ corresponde a cor da célula $m_{i,i}$. Como as cores da diagonal principal concatenadas na construção de $\mathcal{D}^r(n, k)$ são todas distintas, resta garantir que a cor $p_{i,0}$ não ocorre mais que $k - n$ vezes nas últimas $k - n$ colunas do quadrado latino. Como as cores em cada coluna do quadrado latino são duas a duas distintas, se considerarmos as últimas $k - n$ colunas, a cor $p_{i,0}$ ocorre, no máximo, $k - n$ vezes.

Agora, vamos provar que cada cor $p_{i,j}$, com $j > 0$ e $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ocorre no máximo $|P_i| - 1 - j$ vezes em vetores de cores P_{i+x} , $x \geq 1$. Como \mathcal{P} é um prefixo crescente, sabemos que $|P_{i+x}| \leq |P_i|$, para $x \geq 1$. Além disso, como $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e a seqüência das cores é $[m_{i,k-1}, m_{i,k-2}, \dots, m_{i,n}]$, a cor $p_{i,j}$ corresponde a cor $m_{i,k-j}$ do quadrado latino de ordem k , $1 \leq j \leq k - n$. Por construção, se considerarmos as linhas maiores que i e colunas maiores que n , a cor $m_{i,k-j}$ só se repete nas células $m_{i+x,k-j-x}$, $x \geq 1$. Como \mathcal{P} é um prefixo crescente, as cores das colunas n a $k - 1$ podem pertencer aos vetores de cores P_{i+x} , $x \geq 1$. Como as cores das colunas do quadrado latino são duas a duas distintas, a cor $m_{i,k-j}$ só se repete nas linhas maiores que i entre as colunas n e $k - j - 1$. Logo, a cor

$p_{i,j}$ ocorre, no máximo, $k - j - 1 - n + 1 = |P_i| - 1 - j$ vezes nos vetores de cores P_{i+x} , $x \geq 1$.

Note que a cor $m_{i,i}$ concatenada ao vetor de cores P_i não ocorre em vetores de cores P_{i-x} , $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $x \geq 1$. De fato, por construção, quando consideramos $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, as células do quadrado latino que podem ser iguais a $m_{i,i}$ e pertencer a vetores de cores P_{i-x} , $x \geq 1$, são $m_{i-x,i+x}$. Como $i - x$ precisa ser no mínimo igual a zero, então $x \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Logo, $i + x < n$ e as células da coluna $i + x$ não pertencem ao diagrama de cores \mathcal{P} .

Para terminar, vamos provar que cada cor $p_{i,j}$, com $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ocorre no máximo $|P_i| - 1 - j$ vezes em vetores de cores P_{i+x} , $x \geq 1$. Como $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, o vetor de cores P_i não tem necessariamente a mesma cardinalidade que o vetor de cores D_i^r . Como \mathcal{P} é um prefixo crescente, sabemos que $|P_{i+x}| \leq |P_i|$, para $x \geq 1$. Além disso, como $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e a seqüência das cores é $[m_{i,k-1}, m_{i,k-2}, \dots, m_{i,n}]$, a cor $p_{i,j}$ corresponde a cor $m_{i,k-j-1}$, $0 \leq j \leq k - n - 1$, já que nestes vetores não houve a concatenação com a cor da diagonal principal. Por construção, se considerarmos as linhas maiores que i e as colunas maiores que n , então a cor $m_{i,k-j-1}$ só se repete nas células $m_{i+x,k-j-1-x}$, $x \geq 1$. Como a última cor do vetor de cores P_i é $m_{i,k-|P_i|-1-1}$ e \mathcal{P} é um prefixo crescente, somente cores das colunas $k-1$ a $k-|P_i|-1-1$ podem pertencer aos vetores de cores P_{i+x} , $x \geq 1$. Por construção, a cor $m_{i,k-j-1}$ só se repete nas linhas maiores que i entre as colunas $k-j-2$ e $k-|P_i|-1-1$. Como $j \leq |P_i|$, a cor $p_{i,j}$ ocorre, no máximo, $k-j-2 - (k-|P_i|-1-1) + 1 = |P_i| - 1 - j$ vezes nos vetores de cores P_{i+x} , $x \geq 1$. ■

Note que os lemas 2.5 e 2.6 são verdadeiros para quaisquer valores de k , sejam eles pares ou ímpares. Estes lemas serão usados no Capítulo 4, na coloração de um subconjunto dos grafos split com grau máximo par.

A seguir, apresentamos a técnica de Chen, Fu e Ko para coloração de grafos split com grau máximo ímpar.

Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com grau máximo ímpar e igual a $2k + 1$. Os autores assumem, sem perda de generalidade, que $d(v) = \Delta(G)$ para todo vértice $v \in Q$ e dividem o grafo split em três subgrafos da seguinte forma. Os vértices de S são arbitrariamente rotulados $u_0, u_1, \dots, u_{|S|-1}$. Sejam $h = \min\{x: |\cup_{i=0}^x N(u_i)| \geq \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil\}$ e $b = |\cup_{i=0}^h N(u_i)|$. Chamaremos o subgrafo de G induzido pelas arestas que possuem um extremo em Q e outro em S de *subgrafo bipartido associado* a G . Considere o subgrafo bipartido B associado a G . O grafo bipartido B é particionado em dois subgrafos H_1 e H_2 , tais que $H_2 = B[Q \cup \{u_0, u_1, \dots, u_h\}]$ e $H_1 = B[Q \cup \{u_{h+1}, u_{h+2}, \dots, u_{|S|-1}\}]$. O terceiro subgrafo é $G[Q]$.

Os vértices de Q são rotulados $v_0, v_1, \dots, v_{|Q|-1}$ de forma que $d_{H_2}(v_i) \geq d_{H_2}(v_{i+1})$ e quando dois vértices de Q tem o mesmo grau em H_2 , se um deles for vizinho de u_h e o outro não, o vértice que não é vizinho de u_h deve aparecer primeiro na ordem. Logo, para

todo i , $\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil - 1 \leq i < b$, tem-se $\{v_i, u_h\} \in E(G)$ e $d_{H_2}(v_i) = 1$. A Figura 2.6 apresenta um grafo split, G , com grau máximo ímpar e igual a 7 e seus subgrafos $G[Q]$, H_1 e H_2 .

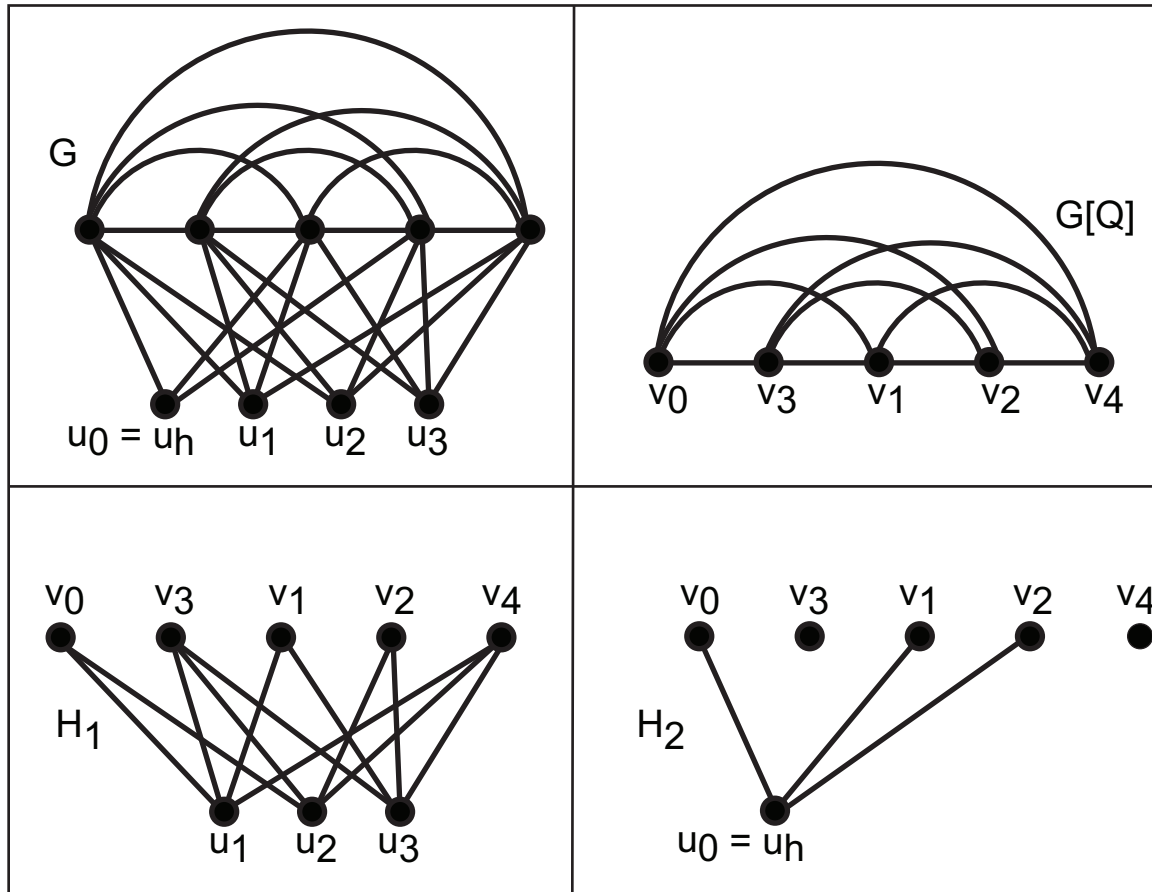


Figura 2.6: Um grafo split $G = [Q, S]$ com $\Delta(G) = 7$ e seus subgrafos $G[Q]$, H_1 e H_2 .

Note que os subgrafos H_1 e H_2 gerados e a ordem dos vértices em Q dependem da rotulação dada aos vértices de S . Portanto, uma vez rotulados os vértices de S , os mesmos tem uma ordem $\lambda = (u_0, u_1, \dots, u_{|S|-1})$ e esta ordem λ determina quais serão os vértices em H_1 e H_2 . Mais que isso, a ordem λ impõe uma ordem aos vértices de Q que permite pequenas variações apenas nos casos em que se considera a posição de vértices com mesmo grau em H_2 e ambos adjacentes (ou ambos não adjacentes) a u_h . De agora em diante, a ordem descrita para os vértices de Q em relação a uma ordem λ dos vértices de S será chamada de *ordem CFK em relação a λ* .

Os autores constroem um quadrado latino M de ordem $2k + 1$ e usam as cores das células das primeiras $|Q|$ linhas e colunas para colorir as arestas do subgrafo $G[Q]$ de

forma que a cor da célula $m_{i,j}$ é utilizada para colorir a aresta $\{v_i, v_j\}$, $0 \leq i, j < |Q|$. Note que as cores das células da diagonal principal do quadrado latino não são utilizadas na coloração de $G[Q]$. As cores $m_{i,i}$, $0 \leq i < |Q|$, e as cores das células das primeiras $|Q|$ linhas e últimas $2k + 1 - |Q|$ colunas do quadrado latino são utilizadas para construir dois diagramas de cores com os quais são coloridas as arestas dos subgrafos H_1 e H_2 .

Para colorir H_1 , considere o diagrama de cores $\mathcal{C} = (C_{v_0}, C_{v_1}, \dots, C_{v_{|Q|-1}})$, onde $C_{v_i} = [m_{i,|Q|}, m_{i,|Q|+1}, \dots, m_{i,|Q|+d_{H_1}(v_i)-1}]$, para $0 \leq i < b$, e $C_{v_i} = [m_{i,i}, m_{i,|Q|}, m_{i,|Q|+1}, \dots, m_{i,2k}]$, para $b \leq i < |Q|$. Como $b \geq \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$ e $d_{H_1}(v_0) \leq d_{H_1}(v_1) \leq \dots \leq d_{H_1}(v_{|Q|-1})$, o diagrama de cores \mathcal{C} é um sufixo de um prefixo crescente \mathcal{P} do diagrama de cores $\mathcal{D}(|Q|, 2k + 1)$, onde $P_i = D_i$, para $i \geq \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$. Pelos lemas 2.1 e 2.5, \mathcal{C} é monotônico. Logo, pelo Lema 2.4, H_1 pode ser colorido pelo diagrama de cores \mathcal{C} . A Figura 2.7 apresenta o diagrama de cores $\mathcal{D}(5, 7)$, que inclui a célula tracejada em cinza. As células em preto da Figura 2.7 representam o diagrama de cores \mathcal{C} a ser utilizado para colorir o grafo H_1 da Figura 2.6.

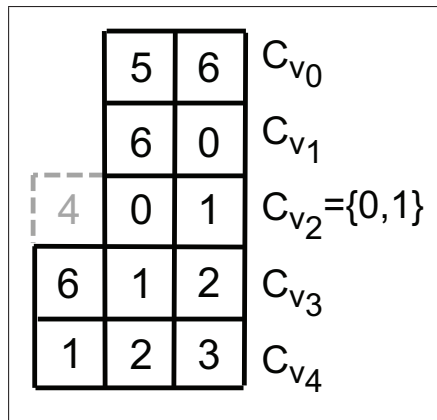


Figura 2.7: Diagrama de cores $\mathcal{D}(5, 7)$ e seu sufixo \mathcal{C} .

Para colorir H_2 , primeiro são coloridas as arestas incidentes a u_h com as cores das células da diagonal principal. Se a aresta $\{v_i, u_h\}$ pertence a $E(G)$, então a cor $m_{i,i}$ é usada para colorir $\{v_i, u_h\}$. Uma propriedade dos quadrados latinos de ordem ímpar definidos como em (1.1) é a de possuir cores duas a duas distintas em toda a diagonal principal. Isso garante que todas as cores que incidem em u_h são distintas. Para colorir arestas de $H_2[V(H_2) \setminus \{u_h\}]$, considere o diagrama de cores $\mathcal{R} = (R_{v_{|Q|-1}}, R_{v_{|Q|-2}}, \dots, R_{v_0})$, onde R_{v_i} é uma seqüência vazia para $i \geq b$ e, para $0 \leq i < b$, $R_{v_i} = [m_{i,2k}, m_{i,2k-1}, \dots, m_{i,|Q|+d_{H_1}(v_i)}]$, se $\{v_i, u_h\} \in E(G)$ ou $R_i = [m_{i,i}, m_{i,2k}, m_{i,2k-1}, \dots, m_{i,|Q|+d_{H_1}(v_i)}]$, caso contrário. Por vacuidade, se $|Q| + d_{H_1}(v_i) > 2k$, nenhuma das células do quadrado latino entre as colunas $2k$ e $|Q| + d_{H_1}(v_i)$ deve ser incluída no vetor de cores. Pela ordem imposta aos vértices de Q , a célula $m_{i,i}$, só é concatenada a R_{v_i} quando $i < \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil - 1$. Portanto, \mathcal{R} é um sufixo de um prefixo crescente \mathcal{P} de $\mathcal{D}^r(|Q|, 2k + 1)$, onde $P_i = D_i^r$, para $0 \leq i < \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$.

Pelos lemas 2.1 e 2.6, o diagrama de cores \mathcal{R} é monotônico. Mais uma vez pelo Lema 2.4, $H_2[V(H_2) \setminus \{u_h\}]$ pode ser colorido pelo diagrama de cores \mathcal{R} . Como exemplo, note que, quando se considera o grafo H_2 da Figura 2.6, todos os vetores de cores do diagrama de cores \mathcal{R} são vazios por definição. De fato, todas as arestas existentes no grafo H_2 da Figura 2.6 são incidentes a u_h e, portanto, são coloridas com a cor correspondente da diagonal principal do quadrado latino de ordem 7.

Como o quadrado latino é de ordem $2k + 1 = \Delta(G)$, apenas $\Delta(G)$ cores são utilizadas na coloração de arestas de G e, portanto, o grafo G é Classe 1. A seguir, formalizamos o resultado de Chen, Fu e Ko.

Teorema 2.7 [12] *Se G é um grafo split com $\Delta(G)$ ímpar, então G é Classe 1.*

Sabe-se que não existem quadrados latinos de ordem par cujos elementos da diagonal principal sejam dois a dois distintos [12]. Portanto, a técnica utilizada por Chen, Fu e Ko não pode ser diretamente aplicada a grafos split com grau máximo par. O uso desta técnica para grafos split com grau máximo par pode resultar em arestas com a mesma cor incidentes ao vértice escolhido para ser u_h . A questão é saber em que casos poderíamos aplicar a técnica de Chen, Fu e Ko. Mais ainda, que alterações podem ser aplicadas ao algoritmo apresentado em [12] para que grafos split com grau máximo par possam ser coloridos? Com o objetivo de esclarecer tais dúvidas, a técnica de Chen, Fu e Ko foi amplamente explorada nesta tese de doutorado e tornou-se um dos nossos principais objetos de estudo. Suas aplicações podem ser vistas nos capítulos 4 e 5.

2.3 Coloração de arestas em alguns grafos split com grau máximo par

Apesar do Problema da Classificação não estar completamente resolvido para grafos split com grau máximo par, existem alguns resultados para subconjuntos desses grafos. Nessa seção, utilizando as técnicas de coloração de grafos completos e de coloração de grafos bipartidos, descreveremos uma coloração de arestas para um subconjunto dos grafos split com grau máximo par. Este resultado, apresentado anteriormente em [12], garante que todos os grafos desse subconjunto são Classe 1.

Seja G um grafo split. Considere uma partição $[Q, S]$ de $V(G)$, onde Q é uma clique maximal e S é um conjunto independente em G . Note que $G[Q]$ é isomorfo a $K_{|Q|}$. Associamos a G um grafo bipartido $B_G = [Q, S]$, com bipartição $[Q, S]$, obtido de G pela remoção de todas as arestas de $G[Q]$. Quando houver ambigüidade, acrescentaremos um índice que referencia o grafo. Denotamos por $d(Q) = \max\{d_B(v), \forall v \in Q\}$ e por $d(S) = \max\{d_B(v), \forall v \in S\}$. Portanto, $\Delta(B) = \max\{d(Q), d(S)\}$ e $\Delta(G) = d(Q) + \Delta(K_{|Q|})$.

Se G tem um vértice universal, pelo Teorema 1.10, G é Classe 1 se, e somente se, G não é sobrecarregado. Então, neste capítulo, G é um grafo split sem vértice universal. Há dois casos: $d(Q) \geq d(S)$ ou $d(S) > d(Q)$. No primeiro caso, $\Delta(B) = d(Q)$. A seguir apresentamos uma demonstração de que G é Classe 1 quando $d(Q) \geq d(S)$.

Lema 2.8 *Seja G um grafo split. Se $d(Q) \geq d(S)$, então G é Classe 1.*

Demonstração: Considere o subgrafo completo K_q . Se $\Delta(K_q)$ é ímpar, pelo Teorema 1.2, $\Delta(K_q)$ cores são suficientes para colorir as arestas de K_q . Pelo Teorema 1.9, as arestas do subgrafo bipartido B , podem ser coloridas com $\Delta(B) = d(Q)$ cores. Como $E(K_q) \cap E(B) = \emptyset$ e $E(K_q) \cup E(B) = E(G)$, as arestas de G podem ser coloridas com $\Delta(B) + \Delta(K_q) = \Delta(G)$ cores distintas. Logo G é Classe 1.

Se $\Delta(K_q)$ é par, pelo Teorema 1.2, o subgrafo completo K_q pode ser colorido com $\Delta(K_q) + 1$ cores e, pelo Corolário 1.5, em cada vértice de K_q falta uma cor distinta. Pelo Teorema 1.8, existe um emparelhamento M que cobre todos os vértices de grau máximo no grafo bipartido B . Pinte cada aresta $\{v, u\} \in M$, $v \in Q$ e $u \in S$, com a cor que falta em v . O grafo induzido pelas arestas de $E(B) \setminus M$ é um grafo bipartido com grau máximo $\Delta(B) - 1$ e, pelo Teorema 1.9, as arestas desse grafo podem ser coloridas com $\Delta(B) - 1$ cores. Então, as arestas do grafo split G podem ser coloridas com $\Delta(K_q) + 1 + \Delta(B) - 1 = \Delta(K_q) + \Delta(B) = \Delta(G)$ cores distintas. Portanto, G é Classe 1. ■

Em [12], os autores apresentam uma demonstração distinta para o Lema 2.8. Chen, Fu e Ko enunciam esse resultado para o caso em que $d(Q)$ é estritamente maior que $d(S)$, entretanto, a demonstração que apresentam inclui o caso $d(Q) = d(S)$.

2.4 Coloração de arestas em grafos split-indiferença

Um grafo é *split-indiferença* se pertence a interseção das classes de grafos split e indiferença. Um grafo é *indiferença* se pode ser representado através da interseção de uma família de intervalos unitários em uma reta. Os grafos split-indiferença foram caracterizados em [39] da seguinte forma.

Um grafo conexo G é split-indiferença se, e somente se,

1. G é um grafo completo; ou
2. G é o grafo induzido pela união de duas cliques Q_1 e Q_2 tal que $|Q_1 \setminus Q_2| = 1$; ou
3. G é o grafo induzido pela união de três cliques Q_1 , Q_2 e Q_3 tal que $|Q_1 \setminus Q_2| = 1$, $|Q_3 \setminus Q_2| = 1$ e $Q_1 \cup Q_3 = V(G)$; ou

4. G é o grafo induzido pela união de três cliques Q_1 , Q_2 e Q_3 tal que $|Q_1 \setminus Q_2| = 1$, $|Q_3 \setminus Q_2| = 1$ e $Q_1 \cap Q_3 = \emptyset$.

A Figura 2.8 mostra um exemplo para cada possível configuração das interseções de cliques maximais de grafos split-indiferença, de acordo com a caracterização apresentada.

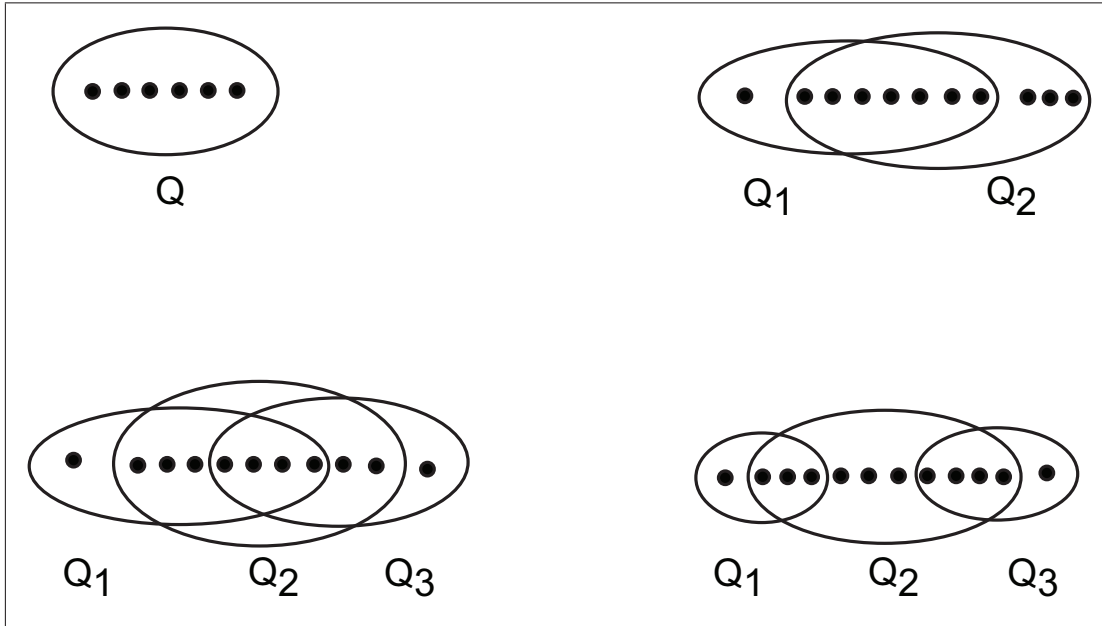


Figura 2.8: Interseções de cliques maximais em grafos split-indiferença.

A solução do Problema da Classificação para os grafos split-indiferença foi dada por Ortiz, Maculan e Szwarcfiter [39]. Note que grafos split-indiferença como os descritos nos casos (1), (2) e (3) possuem vértice universal e , pelo Teorema 1.10, são Classe 2 se, e somente se, são sobrecarregados. Em relação aos grafos que satisfazem as condições do caso (4), faremos uma breve descrição da solução dada em [39].

Considere um grafo split-indiferença G que satisfaz as condições do caso (4). Seja $|V(G)| = n$ e sejam $Q_1 \setminus Q_2 = \{v\}$ e $Q_3 \setminus Q_2 = \{u\}$. Note que G não tem vértice universal, $\Delta(G) = n - 2$ e $G[Q_2] \cong K_{n-2}$, $n \geq 4$.

Se n é ímpar, $G[Q_2]$ tem uma coloração ótima com $n - 2$ cores e , pelo Corolário 1.5, cada uma dessas cores falta em um vértice de $G[Q_2]$. Além disso, as cores que faltam nos vértices de $G[Q_2]$ são duas a duas distintas. Como não há interseção entre $G[Q_1]$ e $G[Q_3]$, pode-se pintar as arestas que ligam vértices de $G[Q_2]$ a v e a u com as cores que faltam nos vértices de $G[Q_2]$. Portanto, G é Classe 1.

Para os casos em que n é par, $n - 2$ é par. Se n é igual a 4, então G é isomorfo ao P_4 e é, portanto, Classe 1. Para os casos em que n é par e $n \geq 6$, os autores provam que todo

grafo completo K_n possui uma coloração ótima que contém um emparelhamento perfeito multicolorido. Este emparelhamento foi usado para colorir os grafos split-indiferença com n par. São descritos dois casos, como segue.

Se n é par e $|Q_1|$ e $|Q_3|$ são ambos no máximo $\frac{n}{2}$, então existe uma coloração de $G[Q_2]$ com $n - 3$ cores que fornece um emparelhamento perfeito multicolorido M . Além disso, sendo $G[Q_2]$ um grafo completo, é sempre possível escolher uma coloração de arestas de forma que se a aresta $\{v_1, v_2\}$ pertence a M , então v_1 e v_2 não são ambos adjacentes a v e não são ambos adjacentes a u . Faça uma coloração de $G[Q_2]$ com $n - 3$ cores de tal forma que M seja um emparelhamento multicolorido. Pinte as arestas $\{w, v\}$ tais que $w \in G[Q_2]$ com a mesma cor da aresta de M que incide em w . Pinte as arestas $\{w, u\}$ tais que $w \in G[Q_2]$ com a mesma cor da aresta de M que incide em w . Pinte o emparelhamento M com uma nova cor $n - 2$. Como G possui uma $n - 2$ -coloração, G é Classe 1.

Se n é par e $|Q_1|$ ou $|Q_3|$ é maior que $\frac{n}{2}$, então suponha que $|Q_1| > \frac{n}{2}$. Seja H o subgrafo induzido por $Q_1 \cup Q_2$. Note que H tem um vértice universal. Logo, como $|Q_3 \setminus Q_2| = 1$, $|V(H)| = n - 1$ e $\Delta(H) = n - 2$. Como $|Q_1 \setminus Q_2| = 1$ e $|Q_1| > \frac{n}{2}$, existem menos de $\frac{n}{2}$ arestas em \overline{H} . Então, H é sobrecarregado. Como $\Delta(H) = \Delta(G)$, o grafo G é vizinhança-sobrecarregado e pertence a Classe 2.

O Teorema de Ortiz, Maculan e Szwarcfiter é apresentado a seguir.

Teorema 2.9 [39] *Sejam G um grafo split-indiferença conexo, $|V(G)| = n > 1$. Então, G é Classe 1 se, e somente se, G não é vizinhança-sobrecarregado.*

2.5 Coloração de arestas em grafos split considerando o núcleo

O *núcleo* de um grafo G é o subgrafo de G induzido pelo conjunto dos vértices de grau máximo em G e é denotado por G_Δ . O estudo do núcleo de um grafo é uma ferramenta interessante na solução do Problema da Classificação. Núcleos de grafos são estudados desde 1965, quando Vizing [51] provou que G é Classe 1 se G_Δ tem, no máximo, 2 vértices. Este resultado foi generalizado por Fournier [25], que provou que se G_Δ é uma floresta, então o grafo G é Classe 1. A partir de então, o Problema da classificação voltou-se para os casos em que o núcleo do grafo contém um ciclo. Hilton e Zhao [30, 31] consideraram os grafos cujo núcleo é a união de ciclos e caminhos disjuntos, ou seja, $\Delta(G_\Delta) = 2$, e conjecturaram que todo grafo com $\Delta(G_\Delta) = 2$ que é diferente de P^* (Fig. (1.7)) é Classe 2 se, e somente se, é sobrecarregado. Em 2006, Tan e Hung [49] provaram que

essa conjectura é verdadeira para grafos split. A seguir, descreveremos brevemente os resultados de Tan e Hung.

Lembre-se que, segundo o Teorema de Hall (Teorema 1.6), um grafo bipartido $B = [X, Y]$ contém um emparelhamento que cobre os vértices de X se, e somente se, $|N(A)| \geq |A|$ para todo $A \subseteq X$. Neste caso, dizemos que X *satisfaz a condição de Hall para o grafo* B . Considere um grafo split $G = [Q, S]$. Seja H , um subgrafo de G induzido pelo conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices e pela vizinhança deste conjunto em S . Formalmente, se X é o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices, então $H = G[X \cup (S \cap N(X))]$. Como ser grafo split é uma propriedade hereditária, o grafo H também é split e, portanto, possui um subgrafo bipartido associado. Note que uma das classes da partição do subgrafo bipartido associado a H é exatamente o conjunto X . Tal grafo bipartido pode ser denotado por $B = [X, N(X)]$. Se X satisfaz a condição de Hall para o grafo B , então G é Classe 1. Este resultado é formalizado no Teorema 2.10, a seguir.

Teorema 2.10 [49] *Sejam $G = [Q, S]$ um grafo split e X o conjunto dos seus $\Delta(G)$ -vértices. Se $|N(A) \cap S| \geq |A|$, para todo subconjunto $A \subseteq X$, então G é Classe 1.*

Demonstração: Se $\Delta(G)$ é ímpar, pelo Teorema 2.7, G é Classe 1. Suponha que $\Delta(G)$ é par. Como Q é maximal, $X \subseteq Q$. Como $|N(A) \cap S| \geq |A|$ para todo $A \subseteq X$, pelo Teorema 1.6, existe um emparelhamento M que cobre todos os vértices de X . Seja $X = \{v_1, v_2, \dots, v_{|X|}\}$ e $M = \{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \dots, \{u_{|X|}, v_{|X|}\}\}$, onde $u_1, u_2, \dots, u_{|X|} \in S$. Considere o grafo G' tal que $V(G') = V(G)$ e $E(G') = E(G) \setminus M$. Note que $\Delta(G') = \Delta(G) - 1$. Como $\Delta(G)$ é par, $\Delta(G')$ é ímpar e G' tem uma coloração de arestas com $\Delta(G) - 1$ cores. Considere G' colorido com $\Delta(G) - 1$ cores. Inclua as arestas de M em G' e pinte as mesmas com uma nova cor. Esta é uma $\Delta(G)$ -coloração de arestas para G . Portanto, G é Classe 1. ■

O Teorema 2.11 e o Lema 2.12, a seguir, são necessários para a prova do Teorema 2.13, que garante que grafos split com $\Delta(G_\Delta) \leq 2$ são Classe 2 se, e somente se, são sobrecarregados. Lembre-se que $d(S)$ é o grau máximo de um vértice do conjunto independente S em um grafo split. No Teorema 2.11, os autores provam que todo grafo split com $d(S) \leq 2$ que não é isomorfo ao K_3 é Classe 1.

Teorema 2.11 [49] *Se $G = [Q, S]$ é um grafo split com $d(S) \leq 2$ e $G \not\cong K_3$, então G é Classe 1.*

Demonstração: Se $d(Q) \geq 2$, então pelo Lema 2.8, G é Classe 1. Suponha que $d(Q) = 1$. Note que $\Delta(G) = |Q|$. Sendo Q maximal, e $d(Q) = 1$, então $|Q| \geq 2$. Se $|Q| = 2$, obviamente, G é Classe 1.

Considere $|Q| > 2$ e $|Q|$ par, caso contrário, G é Classe 1 pelo Teorema 2.7. Como Q é maximal, $V(G_\Delta) \subseteq Q$. Como $d(S) \leq 2$, podemos dividir S em dois subconjuntos disjuntos a saber: T é o conjunto dos vértices em S que possuem grau 1 em G e W é o conjunto dos vértices em S que possuem grau 2 em G . Seja $|T| = t$. Ordene os vértices de $S = \{u_0, u_1, \dots, u_{|S|-1}\}$ de forma que os t primeiros sejam vértices do conjunto T . Como $d(Q) = 1$, cada vértice em Q é adjacente a no máximo um vértice em S . Ordene os vértices de $Q = \{v_0, v_1, \dots, v_{|Q|-1}\}$ de forma que o vértice v_i seja $N(u_i)$, para $0 \leq i \leq t-1$ e os vértices v_{2i-t} e v_{2i-t+1} sejam os vizinhos de u_i , para $t \leq i < |S|$.

Seja $M = [m_{i,j}]$, $0 \leq i, j < |Q|$ um quadrado latino de ordem $k = |Q|$, como definido em (1.1). Pinte as arestas $\{v_i, v_j\}$, $0 \leq i, j < n$, com cor $m_{i,j}$. Pinte as arestas $\{v_i, u_i\}$, $0 \leq i < t$, com cor $m_{i,i}$. Pinte as arestas $\{v_{2i-t}, u_i\}$, $t \leq i < |S|$, com cor $m_{2i-t, 2i-t}$. Finalmente, pinte as arestas $\{v_{2i-t+1}, u_i\}$, $t \leq i < |S|$, com cor $m_{2i-t+1, 2i-t+1}$. Lembre-se que os vértices v_{2i-t} e v_{2i-t+1} são ambos adjacentes a u_i , mas, como $k = |Q| > 2$, $m_{i,i} \neq m_{i+1, i+1}$, $i \geq 0$ e, portanto, esta é uma $\Delta(G)$ -coloração de arestas de G . Logo, G é Classe 1. ■

Lema 2.12 [30] *Se G é um grafo Classe 2 com $\Delta(G_\Delta) \leq 2$, então*

- G é crítico, ou seja, G é Classe 2 e o grafo G' obtido após a remoção de qualquer aresta de G é um grafo Classe 1.
- $N(V(G_\Delta)) = V(G)$.

Por fim, o Teorema 2.13 classifica todos os grafos split cujo núcleo tem grau máximo limitado por 2.

Teorema 2.13 [49] *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G_\Delta) \leq 2$. O grafo G é Classe 2 se, e somente se, G é sobrecarregado.*

Demonstração: A suficiência do teorema é bastante conhecida e não será demonstrada. Seja G um grafo split Classe 2. Se $G \cong K_3$, então G é sobrecarregado. Vamos considerar $G \not\cong K_3$. Pelo Teorema 2.11, tem-se $d(S) \geq 3$. Seja X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices. Note que $X \subseteq Q$ e $|X| \leq 3$. Se $|X| \leq 2$, pelo Teorema 2.10, G é Classe 1. Portanto, $|X| = 3$. Pelo Lema 2.12, $S \cap N(X) = S$. Se $d(Q) \geq 3$, então $|N(A) \cap S| \geq |A|$ para todo $A \subseteq X$. Pelo Teorema 2.10, G é Classe 1, uma contradição. Então $d(Q) \leq 2$. Se $|S| \geq 3$, então $|N(A) \cap S| \geq |A|$, para todo $A \subseteq X$. Novamente, pelo Teorema 2.10, G é Classe 1 e temos uma contradição. Então $|S| \leq 2$. Primeiro, suponha que $d(Q) = 2$. Então $|S| = 2$ e $\Delta(G) = |V(G)| - 1$, pelo Teorema 1.10, G é sobrecarregado. Agora suponha

que $d(Q) = 1$. Se $|S| = 2$, rotule os vértices de $S = \{u_1, u_2\}$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $|X| = \{v_1, v_2, v_3\}$, $N(u_1) = \{v_1\}$, $N(u_2) = \{v_2, v_3\}$. Considere o grafo G' tal que $V(G') = V(G)$ e $E(G') = E(G) \setminus \{\{u_1, v_1\}\}$. Pelo Lema 2.12, o grafo G' é Classe 1. Pinte as arestas de G' usando $\Delta(G') = \Delta(G)$ cores. Pinte a aresta $\{u_1, v_1\}$ com a cor não usada para colorir arestas incidentes a v_1 . Assim, G tem uma $\Delta(G)$ -coloração e é Classe 1, uma contradição. Portanto $|S| = 1$. Então $\Delta(G) = |V(G)| - 1$. Pelo Teorema 1.10, G é sobrecarregado. ■

De agora em diante, as técnicas para classificação e coloração de arestas apresentadas serão utilizadas na apresentação de novos resultados para a classe dos grafos split. Quando necessário, os resultados já apresentados serão abordados em mais detalhes para melhor compreensão desta tese.

Capítulo 3

Sobre Grafos Split Classe 2

No capítulo anterior, foram apresentados vários resultados conhecidos sobre grafos split que são Classe 1. Resultados sobre grafos split Classe 2 são mais raros. Os únicos grafos split Classe 2 conhecidos são os grafos split vizinhança-sobrecarregados. Em [18], Figueiredo, Meidanis e Mello mostram que todo grafo split sobrecarregado contém um vértice universal e, portanto, é vizinhança-sobrecarregado. Por conseqüência, como ser grafo split é uma propriedade hereditária, os autores mostram que todo grafo split subgrafo-sobrecarregado é vizinhança-sobrecarregado.

Um grafo G é *cordal* se todo subgrafo de G que é um ciclo C_n com $n > 3$ possui uma corda, ou seja, possui uma aresta do grafo que não pertence a ciclo, mas liga dois vértices do ciclo. Todo grafo split é um grafo cordal. Ainda em [18], os autores apresentam a seguinte conjectura para os grafos cordais.

Conjectura 3.1 *Todo grafo cordal Classe 2 é vizinhança-sobrecarregado.*

Note que a veracidade desta conjectura implica que o problema da classificação para grafos split pode ser resolvido em tempo polinomial. Neste capítulo, daremos uma caracterização estrutural dos grafos split que são vizinhança-sobrecarregados.

Considere um grafo split $G = [Q, S]$, onde o conjunto dos vértices tem uma partição $[Q, S]$ tal que Q é uma clique maximal e S é um conjunto independente. Seja B_G um grafo bipartido associado a G com partição $[Q, S]$. Relembre que $d(Q) = \max\{d_B(v), \forall v \in Q\}$ e $\Delta(G) = |Q| + d(Q) - 1$.

Lema 3.2 *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split. Se G é vizinhança-sobrecarregado, então Q e $d(Q)$ têm paridades distintas e $|Q| = (d(Q))^2 + i$ com i ímpar, $i \geq 3$.*

Demonstração: Seja $G = [Q, S]$ um grafo split. Se $\Delta(G)$ é ímpar, pelo Teorema 2.7, G é Classe 1, e, portanto, G não é vizinhança-sobrecarregado. Assim, $\Delta(G) = |Q| + d(Q) - 1$ deve ser par, implicando que $d(Q)$ e $|Q|$ têm paridades distintas.

Suponha que G é vizinhança-sobrecarregado. Se G é um grafo completo, então $d(Q) = 0$ e $|Q|$ deve ser ímpar com $|Q| \geq 3$, portanto, o Lema está provado. Se G não é completo, pela definição de grafo vizinhança-sobrecarregado, existe um $\Delta(G)$ -vértice $v \in Q$ tal que $|E(\overline{G[N[v]])}| \leq \frac{\Delta(G)}{2} - 1$. Note que, se G não é completo, então $S \neq \emptyset$. Como Q é uma clique maximal, para cada $u \in N[v] \cap S$ existe pelo menos um $w \in Q$ tal que $\{u, w\} \notin E(G)$. Então, $\binom{d(Q)}{2} + d(Q) \leq |E(\overline{G[N[v]])}| \leq \frac{\Delta(G)}{2} - 1$. Como as paridades de Q e $d(Q)$ são distintas, tem-se $|Q| = (d(Q))^2 + i$ com i ímpar, $i \geq 3$. ■

Pelo Lema 3.2, grafos split com $|Q| < (d(Q))^2 + 3$ não são vizinhança-sobrecarregados. Portanto, se a conjectura 3.1 for verdadeira, esses grafos são todos Classe 1. No capítulo 4, exibimos uma subclasse desse conjunto que é Classe 1. Por outro lado, as condições do Lema 3.2 não são suficientes para que um grafo split seja vizinhança-sobrecarregado, como mostra o exemplo da Figura 3.1. Note que neste grafo, $|Q|$ e $d(Q)$ tem paridades distintas, $|Q| = d^2(Q) + 3$.

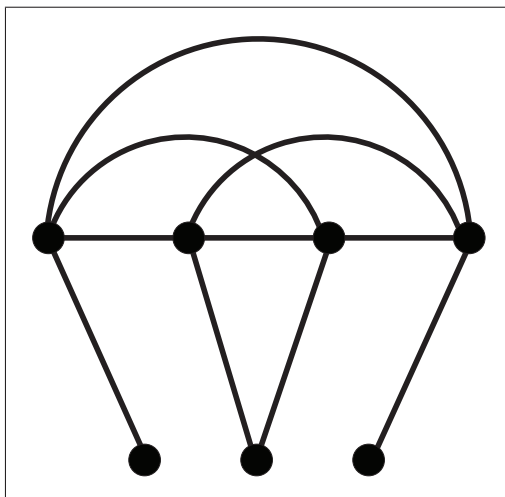


Figura 3.1: Grafo split que não é vizinhança-sobrecarregado e satisfaz as condições do Lema 3.2.

Dois vértices v e w pertencentes a um grafo G são gêmeos se $N_G[v] = N_G[w]$. No teorema a seguir, apresentamos uma caracterização estrutural dos grafos split que são vizinhança-sobrecarregados. É importante salientar que este teorema garante que todo grafo split vizinhança-sobrecarregado possui um certo número de $\Delta(G)$ -vértices gêmeos cuja vizinhança induz um subgrafo sobrecarregado.

Teorema 3.3 *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split, onde Q é uma clique maximal e S é um conjunto independente. O grafo G é vizinhança-sobrecarregado se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas.*

1. $\Delta(G)$ é par; e
2. existe um conjunto $X \subseteq Q$ com pelo menos $k = |Q| - \frac{\Delta(G)}{2} + \binom{d(Q)}{2} + 1$ vértices de grau $\Delta(G)$ que são gêmeos e tais que se $v \in X$, o número de arestas de $\overline{G[N[v]]}$ incidentes a vértices de $Q \setminus X$ é no máximo $|Q| - k$.

Demonstração: Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com partição $[Q, S]$. Suponha que G é vizinhança-sobrecarregado. Então, pelo Lema 3.2, a condição (1) é verdadeira. Se G for um grafo completo, todo vértice de $V(G)$ é um $\Delta(G)$ -vértice e as condições do Teorema são trivialmente satisfeitas. Logo, vamos considerar $S \neq \emptyset$. Como G é vizinhança-sobrecarregado, G contém um $\Delta(G)$ -vértice v tal que $G[N[v]]$ é sobrecarregado. Então, pelo Teorema 1.10, $|E(\overline{G[N[v]]})| < \frac{\Delta(G)}{2}$. Sendo assim, existem no máximo $\frac{\Delta(G)}{2} - 1 - \binom{d(Q)}{2}$ vértices em Q que não são adjacentes a pelo menos um vértice de $N[v] \cap S$. Portanto, $G[N[v]]$ contém pelo menos $k = |Q| - \frac{\Delta(G)}{2} + \binom{d(Q)}{2} + 1$ vértices de grau máximo. Seja X o conjunto dos vértices de grau máximo em $G[N[v]]$ ($|X| \geq k$). Como $|N[v] \cap S| = d(Q)$, todos os vértices do conjunto X são $\Delta(G)$ -vértices e são gêmeos. Além disso, $\sum_{w \in Q \setminus X} d_{\overline{G[N[v]]}}(w) \leq \frac{\Delta(G)}{2} - 1 - \binom{d(Q)}{2} = |Q| - k$.

Agora, suponha que as condições (1) e (2) são verdadeiras. Seja v um dos k $\Delta(G)$ -vértices que são gêmeos. Pela condição (2), tem-se $|E(\overline{G[N[v]]})| \leq \binom{d(Q)}{2} + |Q| - k = \frac{\Delta(G)}{2} - 1$. Como, pela condição (1), $\Delta(G)$ é par, G é vizinhança-sobrecarregado. ■

Uma consequência imediata do Teorema 3.3 é a identificação de uma propriedade estrutural dos grafos split que são vizinhança-sobrecarregados, como mostra o corolário a seguir.

Corolário 3.4 *Se G é um grafo split vizinhança-sobrecarregado, então $\Delta(G) > \frac{|V(G)|}{3}$.*

Demonstração: Seja $G = [Q, S]$ um grafo split vizinhança-sobrecarregado. Então G tem um $\Delta(G)$ -vértice v tal que $G[N[v]]$ é um grafo sobrecarregado. Seja X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices gêmeos em $G[N[v]]$. Pelo Teorema 3.3, o número de arestas incidentes em Q no grafo $\overline{G[N[v]]}$ é dado por $\sum_{w \in Q \setminus X} d_{\overline{G[N[v]]}}(w) \leq \frac{\Delta(G)}{2} - 1 - \binom{d(Q)}{2}$. Note que este é um limite superior para o número de arestas incidentes em vértices do conjunto $S \setminus N[v]$ no grafo G . Como cada uma dessas arestas, se existir, pode incidir em um vértice distinto de $S \setminus N[v]$, tem-se $|S| \leq d(Q) + \left(\frac{\Delta(G)}{2} - 1\right) - \binom{d(Q)}{2}$. Logo, $|V(G)| = |Q| + |S| \leq |Q| + d(Q) - 1 + \frac{\Delta(G)}{2} - \binom{d(Q)}{2}$. Lembre-se que $\Delta(G) = |Q| + d(Q) - 1$. Então, $|V(G)| \leq \Delta(G) + \frac{\Delta(G)}{2} - \binom{d(Q)}{2}$. Portanto, $\Delta(G) \geq 2 \left(\frac{|V(G)|}{3}\right) + \binom{d(Q)}{2} > \frac{|V(G)|}{3}$. ■

É interessante observar que, apesar de a Conjectura Overfull (Conjectura 1.1) considerar os grafos cujo grau máximo é limitado inferiormente por $\frac{|V(G)|}{3}$, o Corolário 3.4 mostra

que os grafos split que são vizinhança-sobrecarregados tem esse limite bem mais apertado, já que todo grafo split vizinhança-sobrecarregado tem $\Delta(G) \geq 2 \binom{|V(G)|}{3} + \frac{2}{3} \binom{d(Q)}{2}$.

Os grafos split descritos no Teorema 3.3 são Classe 2 e, se a Conjectura 3.1 for verdadeira, então esse teorema apresenta uma caracterização dos únicos grafos split Classe 2. Além disso, se a Conjectura 3.1 for verdadeira, o Lema 3.2 e o Corolário 3.4 apresentam outras propriedades que são satisfeitas por todo grafo split Classe 2.

Este trabalho foi apresentado no evento *IV Latin American Workshop on Cliques in Graphs 2010* e publicado em [5].

Capítulo 4

Usando Quadrados Latinos para Classificar Grafos Split

Como visto na seção 2.2.2, Chen, Fu e Ko [12] usam diagramas de cores monotônicos e quadrados latinos de ordem ímpar para mostrar que todo grafo split com grau máximo ímpar é Classe 1. Para colorir as arestas de um grafo split G com $\Delta(G)$ ímpar, os autores consideram somente grafos split $G = [Q, S]$ com $\Delta(G)$ ímpar e tais que todo vértice de Q é um $\Delta(G)$ -vértice. A justificativa é simples: se é possível colorir G com $\Delta(G)$ cores, então todo subgrafo de G também tem uma $\Delta(G)$ -coloração. Mais ainda, os subgrafos de G que possuem grau máximo igual a $\Delta(G)$ são Classe 1. Como os autores apresentam uma $\Delta(G)$ -coloração para todos os grafos split G que possuem $\Delta(G)$ ímpar e cujos vértices da clique são $\Delta(G)$ -vértices, podem afirmar que todo grafo split G com grau máximo ímpar é Classe 1. Mais que isso, exibem uma $\Delta(G)$ -coloração para todos esses grafos. Quando consideramos grafos split G com $\Delta(G)$ par, não é possível abordar o problema da mesma maneira já que, em alguns desses grafos, os vértices da clique são todos $\Delta(G)$ vértices e G é vizinhança-sobrecarregado e, portanto, não possui uma $\Delta(G)$ -coloração. O lema a seguir garante que todo grafo split $G = [Q, S_G]$ é subgrafo de algum grafo split $H = [Q, S_H]$ tal que H tem $|Q|$ vértices de grau máximo, $\Delta(G) = \Delta(H)$ e $\chi'(G) = \chi'(H)$.

Lema 4.1 *Se $G = [Q_G, S_G]$ é um grafo split, então G é subgrafo de um grafo split $H = [Q_H, S_H]$ tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$, $Q_G = Q_H$, todos os vértices de Q_H são Δ -vértices e $\chi'(G) = \chi'(H)$.*

Demonstração: Considere um grafo split $G = [Q_G, S_G]$. Se todos os vértices de Q_G são $\Delta(G)$ -vértices, então $G \cong H$ e o lema vale.

Resta considerar o caso em que G tem vértices de grau menor que $\Delta(G)$ em Q_G . Seja X o conjunto dos vértices que não são $\Delta(G)$ -vértices e pertencem a Q_G . Crie um novo grafo H a partir de G da seguinte forma. Para cada vértice $v \in X$, inclua $\Delta(G) - d_G(v)$

vértices novos em S_G e faça-os adjacentes a v . Note que $d_H(v) = \Delta(G) = \Delta(H)$, para todo $v \in Q_H$ e todos os novos vértices em S_H tem grau 1. Mais ainda, nenhum vértice foi adicionado a Q_G , logo $Q_G = Q_H$.

Como $\Delta(H) = \Delta(G)$, se $\Delta(G)$ é ímpar, pelo Teorema 2.7, $\chi'(H) = \chi'(G) = \Delta(G)$.

Agora, suponha $\Delta(G)$ par. Se o grafo G é vizinhança-sobrecarregado, então H também é vizinhança-sobrecarregado. De fato, considere G um grafo que é vizinhança-sobrecarregado. Então G tem um subgrafo sobrecarregado J induzido por um $\Delta(G)$ -vértice e seus vizinhos. Como G é subgrafo de H , então J também é subgrafo de H . Como J é um subgrafo induzido por um vértice de grau Δ em G , então nenhuma nova aresta e nenhum novo vértice foram inseridos no subgrafo J quando criamos H . Como $\Delta(H) = \Delta(G)$ e o número de vértices e arestas em J é o mesmo tanto em G quanto em H , então J também é subgrafo sobrecarregado em H . Neste caso, $\chi'(G) = \chi'(H) = \Delta(G) + 1$.

Se G não é vizinhança-sobrecarregado, então $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Como G é subgrafo de H , $\chi'(H) \geq \chi'(G)$. Vamos mostrar que $\chi'(H) = \chi'(G)$. Considere uma $\chi'(G)$ -coloração para o grafo G . Note que, para colorir as arestas do grafo H com $\chi'(G)$ cores, resta colorir as arestas inseridas em H que transformaram todos os vértices da clique Q_H em Δ -vértices. Em cada vértice $v \in Q_H$ incidem, no máximo, $\chi'(G) - d_G(v)$ arestas não coloridas. Note que em cada vértice v de grau menor que $\Delta(G)$ em Q_G faltam $\chi'(G) - d_G(v)$ cores distintas. Portanto, podemos usar cada uma dessas cores para colorir uma aresta incidente no vértice v . Observe que tais arestas incidem em vértices de grau 1 em S_H e, portanto, esta é uma coloração própria. Logo, $\chi'(H) = \chi'(G)$. ■

Observe que uma consequência do Lema 4.1 é a possibilidade de restringir os estudos de coloração de arestas em grafos split com grau máximo par ao conjunto dos grafos split com grau máximo par cujos vértices da clique são todos Δ -vértices, já que resolver o problema da Classificação para esta subclasse implica na solução do Problema da Classificação para todos os grafos split. Mais ainda, exibir uma Δ -coloração de arestas para os grafos split Classe 1 cujos vértices da clique têm todos grau Δ implica em exibir uma Δ -coloração de arestas para todo grafo split Classe 1.

Nesse capítulo, a menos que se diga o contrário, estamos considerando grafos split tal que todos os vértices da clique têm grau máximo.

Para colorir grafos split G que possuem grau máximo ímpar, em [12], Chen Fu e Ko constroem um quadrado latino M de ordem $\Delta(G)$ e usam uma propriedade que garante que as cores da diagonal principal dos quadrados latinos de ordem ímpar são duas a duas distintas. Com isso, podem usar cores da diagonal principal para colorir arestas incidentes a um único vértice. A técnica apresentada por eles não pode ser aplicada diretamente em grafos split com grau máximo par. Neste caso, o problema parece ser bem mais complexo, visto que a utilização de cores da diagonal principal para colorir arestas incidentes a um

único vértice pode resultar em arestas adjacentes com a mesma cor, pois é conhecido que não existem quadrados latinos de ordem par cujas cores da diagonal principal sejam duas a duas distintas [12].

Existem duas abordagens consideradas nesta tese. A primeira é a utilização de quadrados latinos de ordem par com aplicação direta da técnica de Chen, Fu e Ko. A segunda abordagem é utilizar quadrados latinos de ordem ímpar e igual a $\Delta - 1$ para colorir grafos split com grau máximo Δ . Para tanto, são feitas alterações na técnica de Chen, Fu, Ko de forma a garantir a inclusão de uma nova cor nos diagramas de cores. Em ambos os casos é possível colorir um subconjunto dos grafos split com grau máximo par usando Δ cores. As próximas seções apresentam os estudos resultantes dos dois métodos considerados.

4.1 Usando quadrados latinos de ordem par

Vamos dedicar o início desta seção ao estudo de diagramas de cores similares aos construídos em [12] mas, desta vez, a partir de quadrados latinos de ordem par. É conhecido que quadrados latinos de ordem par não são idempotentes [12]. O objetivo é responder se tais diagramas de cores são monotônicos. Considere um quadrado latino de ordem par igual a $k = 2s$, construído como definimos em (1.1) na seção 1.3.2.1. Note que nos quadrados latinos M de ordem par e igual a $2s$, construídos como definimos em (1.1), a cor da célula $m_{i,i}$ da diagonal principal se repete na célula $m_{i+s,i+s}$, $0 \leq i < s$. (Veja um exemplo na Figura 4.1.)

0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	0
2	3	4	5	6	7	0	1
3	4	5	6	7	0	1	2
4	5	6	7	0	1	2	3
5	6	7	0	1	2	3	4
6	7	0	1	2	3	4	5
7	0	1	2	3	4	5	6

Figura 4.1: Quadrado latino de ordem par e igual a 8.

Vamos relembrar as definições dos diagramas de cores $\mathcal{S}(n, k)$, $\mathcal{S}^r(n, k)$, $\mathcal{D}(n, k)$ e

$\mathcal{D}^r(n, k)$, apresentados na seção 2.2. Seja $M = [m_{i,j}]$ um quadrado latino de ordem k , definido como em (1.1) e considere um inteiro $1 \leq n < k$. O sufixo de M a partir da coluna n é definido pelo diagrama de cores $\mathcal{S}(n, k) = (C_0, C_1, \dots, C_{n-1})$, onde $C_i = [m_{i,n}, m_{i,n+1}, \dots, m_{i,k-1}]$, $0 \leq i < n$. Como visto, o inverso de C_i é $C_i^r = [m_{i,k-1}, m_{i,k-2}, \dots, m_{i,n}]$, para $0 \leq i < n$. O inverso de $\mathcal{S}(n, k)$, denotado por $\mathcal{S}^r(n, k)$, é o diagrama de cores $(C_{n-1}^r, C_{n-2}^r, \dots, C_1^r, C_0^r)$. O sufixo aumentado do digrama de cores $\mathcal{S}(n, k)$ é o diagrama de cores $\mathcal{D}(n, k) = (D_0, D_1, \dots, D_{n-1})$, onde $D_i = C_i \in \mathcal{S}(n, k)$ para $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e D_i é a concatenação de $(m_{i,i})$ com $C_i \in \mathcal{S}(n, k)$ para $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i < n$. O inverso do sufixo $\mathcal{S}(n, k)$ aumentado é o diagrama de cores $\mathcal{D}^r(n, k) = (D_{n-1}^r, D_{n-2}^r, \dots, D_0^r)$, onde $D_i^r = C_i^r$ para $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i < n$ e D_i^r é a concatenação de $(m_{i,i})$ com C_i^r para $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. A Figura 4.2 apresenta, para exemplificar, os diagramas $\mathcal{S}(5, 8)$, $\mathcal{S}^r(5, 8)$, $\mathcal{D}(5, 8)$ e $\mathcal{D}^r(5, 8)$.

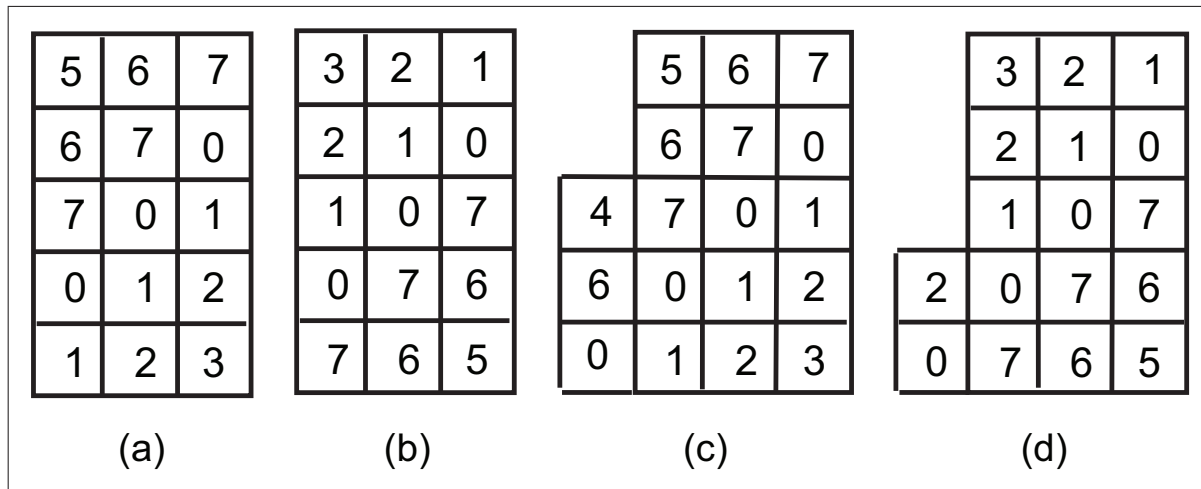


Figura 4.2: Diagramas de cores: a) $\mathcal{S}(5, 8)$ b) $\mathcal{S}^r(5, 8)$ c) $\mathcal{D}(5, 8)$ e d) $\mathcal{D}^r(5, 8)$.

Em [12] a validade dos lemas 2.2 e 2.3 é explicitamente garantida para os casos em que k é ímpar. Como, nesta seção, os mesmos diagramas de cores serão construídos a partir de quadrados latinos de ordem par, apresentamos os lemas a seguir para garantir a monotonicidade dos diagramas de cores $\mathcal{S}(n, k)$, $\mathcal{S}^r(n, k)$, $\mathcal{D}(n, k)$ e $\mathcal{D}^r(n, k)$, quando k é par.

Em todos os lemas, considere um quadrado latino $M = [m_{i,j}]$ de ordem k construído como definimos em (1.1) e onde k é par.

Lema 4.2 *Os diagramas de cores $\mathcal{S}(n, k)$ e $\mathcal{S}^r(n, k)$ são monotônicos, para k par, $0 < n < k$.*

Demonstração: No diagrama de cores $\mathcal{S}(n, k)$, cada vetor de cores tem tamanho $k - n$ e a cor da célula $m_{i,j}$ é a $(j - n + 1)$ -ésima cor do vetor de cores C_i . Para que $\mathcal{S}(n, k)$ seja monotônico, a cor $m_{i,j}$ pode ocorrer $k - n - (j - n + 1) = k - j - 1$ vezes em vetores de cores anteriores a C_i . Vamos provar que o número de vezes que cada cor $m_{i,j}$ ocorre nos vetores anteriores a C_i é no máximo $k - j - 1$. Por construção, a cor da célula $m_{i,j}$ é igual a cor de uma outra célula $m_{p,q}$ se, e somente se, $i + j \pmod{k} \equiv p + q \pmod{k}$. Logo, se considerarmos as n primeiras linhas e as últimas $k - n$ colunas de M , a cor da célula $m_{i,j}$ só se repete em uma linha p anterior a linha i se estiver em uma célula $m_{p,q}$ tal que $p = i - x$ e $q = j + x$. Note que x é o número de vezes que a cor $m_{i,j}$ pode ocorrer em linhas anteriores a i e colunas posteriores a j . Como $p \geq 0$, tem-se $x \leq i$. Como $q \leq k - 1$, tem-se $x \leq k - 1 - j$. Note também que x é, no máximo, o mínimo entre o número de linhas que existem entre a linha 0 e a linha $i - 1$ (inclusive) e o número de colunas que existem entre a coluna $j + 1$ e a coluna $k - 1$. Formalmente, $1 \leq x \leq \min\{i, k - j - 1\}$. Logo, a cor $m_{i,j}$ ocorre em vetores de cores anteriores a C_i , no máximo, $\min\{i, k - j - 1\}$ vezes. Logo, o diagrama de cores $\mathcal{S}(n, k)$ é monotônico. Usando o mesmo argumento apresentado em [12], se trocarmos os nomes das cores, é possível ver a diferença entre os diagramas $\mathcal{S}(n, k)$ e $\mathcal{S}^r(n, k)$ é uma troca de nome entre as cores e, portanto, $\mathcal{S}^r(n, k)$ é monotônico. ■

Em relação aos digramas de cores $\mathcal{D}(n, k)$ e $\mathcal{D}^r(n, k)$, note que a diferença desses diagramas para os diagramas $\mathcal{S}(n, k)$ e $\mathcal{S}^r(n, k)$ é a concatenação da célula $m_{i,i}$ a alguns vetores de cores. Logo, é preciso garantir que tais concatenações podem ser feitas de forma a se manter a monotonicidade para os novos diagramas de cores. Os lemas a seguir garantem que $\mathcal{D}(n, k)$ e $\mathcal{D}^r(n, k)$ são monotônicos quando k é par.

Lema 4.3 *O diagrama de cores $\mathcal{D}(n, k)$ é monotônico, para k par, $0 \leq n < k$.*

Demonstração: Para que $\mathcal{D}(n, k)$ seja monotônico, duas condições precisam ser garantidas. A primeira delas é que a cor $m_{i,i}$ concatenada ao vetor de cores C_i , $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i < n$, apareça no máximo $|D_i| - 1$ vezes anteriormente, já que $m_{i,i}$ é o primeiro elemento do vetor D_i . Primeiro note que, apesar de a cor $m_{i,i}$ ocorrer duas vezes na diagonal principal, ela será incluída em $\mathcal{D}(n, k)$ somente uma vez, já que as cores se repetem na diagonal principal de $\frac{k}{2}$ em $\frac{k}{2}$ linhas e somente as cores de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < \frac{k}{2}$ linhas consecutivas são concatenadas aos vetores C_i , $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq i < n$. Note que para os vetores de cores D_i que tem a célula $m_{i,i}$ concatenada, a cardinalidade de D_i é $k - n + 1$ ($k - n$ últimas células da linha i do quadrado latino mais a célula $m_{i,i}$) e, portanto, se $\mathcal{D}(n, k)$ é monotônico, a cor da célula $m_{i,i}$ pode ocorrer em $k - n$ vetores de cores anteriores a D_i . Como a cor da célula $m_{i,i}$ não foi concatenada a outros vetores de cores (somente a D_i), basta considerar as cores que

existem nos vetores de cores $C_j \in \mathcal{S}(n, k)$, $j < i$, e verificar se a cor da célula $m_{i,i}$ ocorreu mais que $k - n$ vezes. Note que cada vetor de cores C_j , $0 \leq j < n$, tem cardinalidade igual a $k - n$ e as cores que os compõem são as cores das últimas $k - n$ colunas do quadrado latino M . Como cada cor só ocorre uma vez em cada coluna de M , a cor da célula $m_{i,i}$ ocorre no máximo $k - n$ vezes no diagrama de cores $\mathcal{S}(n, k)$ e, portanto, no máximo $k - n$ vezes nos vetores de cores D_j , $0 \leq j < i$.

A segunda condição que deve ser garantida é que a cor $m_{i,i}$ não apareça em vetores de cores posteriores a D_i . Suponha, por contradição, que existe uma célula $m_{p,q}$ com cor igual a da célula $m_{i,i}$ tal que $m_{p,q}$ pertence a um vetor de cores D_p , $p > i$. Note que a cor $m_{i,i}$ só ocorre em $m_{p,q}$ se $i + i \pmod{k} \equiv p + q \pmod{k}$. Como $p > i$, $p = i + x$ e $q = i - x$. Como a maior linha usada na construção do diagrama $\mathcal{D}(n, k)$ é a linha $n - 1$, $p \leq n - 1$ e, portanto, $x \leq n - 1 - i$. Como a menor coluna usada na construção do diagrama de cores $\mathcal{D}(n, k)$, excetuando-se os elementos incluídos da diagonal principal, é a coluna n , $q \geq n$ e, portanto, $x \leq i - n$. Note que x é o número de vezes que a cor $m_{i,i}$ pode ocorrer nos vetores de cores D_p , $p > i$. Note também que x é, no máximo, o mínimo entre o número de linhas que existem entre a linha $i + 1$ e a linha $n - 1$ (inclusive) e o número de colunas que existem entre a coluna n e a coluna $i - 1$ (inclusive). Formalmente, $1 \leq x \leq \min\{n - 1 - i, i - n\}$. Logo, a cor da célula $m_{i,i}$ ocorre em vetores de cores D_p , $p > i$, no máximo $\min\{n - i - 1, i - n\}$ vezes. Como $i < n$, tem-se $\min\{n - i - 1, i - n\} < 0$ e o número de vezes que a cor $m_{i,i}$ ocorre é negativo, uma contradição. Logo, a cor da célula $m_{i,i}$ não ocorre em vetores de cores posteriores a D_i , garantindo a segunda condição. Portanto, $\mathcal{D}(n, k)$ é monotônico. ■

Lema 4.4 *O diagrama de cores $\mathcal{D}^r(n, k)$ é monotônico, para k par, $0 \leq n < k$.*

Demonstração: Para que $\mathcal{D}^r(n, k)$ seja monotônico, a cor $m_{i,i}$ concatenada ao vetor de cores C_i^r , $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, deve ocorrer no máximo $|D_i^r| - 1$ vezes anteriormente, já que $m_{i,i}$ é o primeiro elemento em D_i^r . Como no caso anterior, a cor $m_{i,i}$ será incluída em $\mathcal{D}^r(n, k)$ somente uma vez. Note que, os vetores de cores do diagrama de cores $\mathcal{D}^r(n, k)$ estão em ordem inversa das linhas do quadrado latino M . Além disso, as células em cada vetor de cores também estão em ordem inversa. Nos vetores de cores D_i^r em que se concatena a célula $m_{i,i}$, a cardinalidade de D_i^r é $k - n + 1$ e, portanto, se $\mathcal{D}^r(n, k)$ é monotônico, a cor da célula $m_{i,i}$ pode ocorrer em $k - n$ vetores de cores anteriores a D_i^r . Note que é equivalente dizer que a cor da célula $m_{i,i}$ pode ocorrer em $k - n$ vetores de cores posteriores a C_i no diagrama de cores $\mathcal{S}(n, k)$. Pelos mesmos argumentos apresentados no lema anterior, cada cor ocorre no máximo $k - n$ vezes no diagrama de cores $\mathcal{S}(n, k)$ e, portanto, esta condição está garantida.

A segunda condição a ser garantida é que a cor $m_{i,i}$ não apareça em vetores de cores posteriores a D_i^r . Note que é equivalente dizer que queremos garantir que a cor da célula $m_{i,i}$ não ocorre em vetores de cores $C_p \in \mathcal{S}(n, k)$, com $p < i$.

Suponha, por contradição, que existe uma célula $m_{p,q}$, $p < i$, com cor igual a da célula $m_{i,i}$ tal que $m_{p,q}$ pertence ao digrama de cores C_p . Logo, $i+i \pmod{k} \equiv p+q \pmod{k}$ para algum $p < i$ e, portanto, $p = i - x$ e $q = i + x$. Como $m_{p,q} \in C_p$, tem-se $q \geq n$ e, portanto, $i + x \geq n$. Como $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tem-se $x > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Como $p \geq 0$, então $x \leq i$. Como $q \leq k - 1$, então $x \leq k - 1 - i$. Como x é, no máximo, o mínimo entre o número de linhas que existem entre a linha 0 e a linha $i - 1$ (inclusive) e o número de colunas que existem entre a coluna $i + 1$ e a coluna $k - 1$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < x \leq \min\{i, k - 1 - i\}$, uma contradição, já que $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $k > n$. Logo, a cor da célula $m_{i,i}$ não ocorre em vetores de cores C_p , $p < i$. Portanto, $\mathcal{D}(n, k)$ é monotônico. ■

Em relação aos prefixos crescentes de $\mathcal{D}(n, k)$ e $\mathcal{D}^r(n, k)$ quando k é par, valem os lemas 2.5 e 2.6, que garantem que se $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ é um prefixo crescente de $\mathcal{D}(n, k)$ tal que $P_i = D_i$ para $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então \mathcal{P} é monotônico; e, se $\mathcal{P} = (P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_0)$ é um prefixo crescente de $\mathcal{D}^r(n, k) = (D_{n-1}^r, D_{n-2}^r, \dots, D_0^r)$ tal que $P_i = D_i^r$ para $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, então \mathcal{P} também é monotônico.

Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par. Assim como em [12], vamos considerar que todo vértice em Q é um $\Delta(G)$ -vértice. Se aplicarmos o algoritmo de Chen, Fu e Ko para colorir G , um vértice pertencente a $S = \{u_0, u_1, \dots, u_{|S|-1}\}$ será escolhido para receber somente cores da diagonal principal. Como visto na seção 2.2, tal vértice é chamado de u_h , onde $h = \min\{x : |\cup_{i=0}^x N(u_i)| \geq \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor\}$. Em [12], os autores garantem que as cores incidentes a u_h são todas distintas, já que o quadrado latino utilizado é de ordem ímpar e, portanto, as cores da diagonal principal são duas a duas distintas. O mesmo não ocorre em quadrados latinos de ordem par. Como visto, em quadrados latinos de ordem par e igual a Δ , construídos como definido em (1.1), a cor $m_{i,i}$ se repete na célula $m_{i+\frac{\Delta}{2}, i+\frac{\Delta}{2}}$. Logo, se o vértice escolhido para ser u_h no grafo G , com $\Delta(G)$ par, tem grau $d(u_h) > \frac{\Delta}{2}$, então pelo menos uma das cores da diagonal principal incide duas vezes sobre u_h e a coloração dada não é válida. Portanto, se G é um grafo split com $\Delta(G)$ par e $d(u) > \frac{\Delta}{2}$ para todo $u \in S$, não é possível aplicar o algoritmo de Chen, Fu e Ko diretamente. Mesmo assim, existem grafos que satisfazem essa condição e são Classe 1, como o grafo split apresentado na Figura 4.3.

Note que o grafo da Figura 4.3 tem $\Delta = 14$, $d(Q) = 5$, $d(S) = 9$ e todo vértice $u \in S$ tem $d(u) \geq 8 > \frac{\Delta}{2}$. A Figura 4.4 apresenta a matriz de adjacências do respectivo grafo, onde o número em cada célula refere-se à cor da aresta correspondente, apresentando uma Δ -coloração para este exemplo. Na próxima seção, apresentamos um algoritmo capaz de

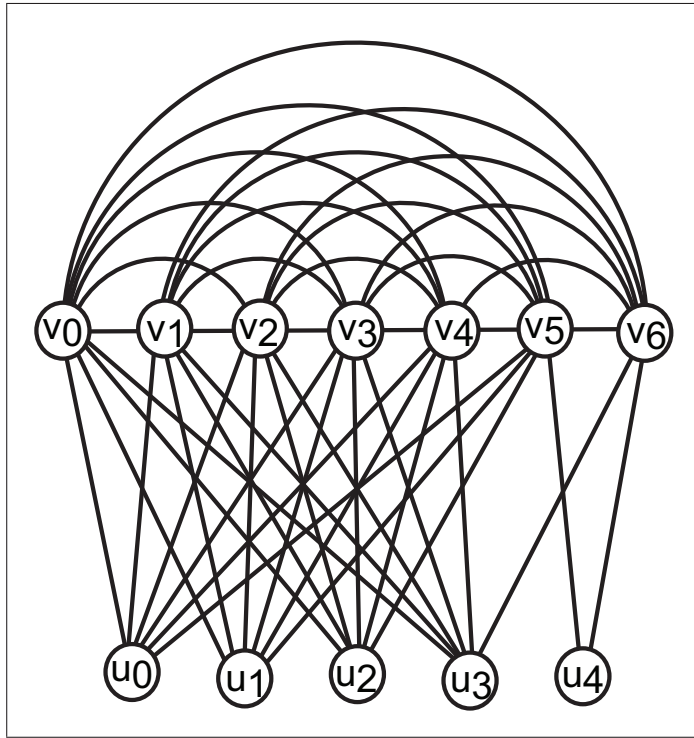


Figura 4.3: Grafo split que não pode ser diretamente colorido pelo quadrado latino de ordem par.

colorir alguns desses grafos.

Vamos considerar agora grafos split com grau máximo par que possuem vértices no conjunto independente com grau menor ou igual a $\frac{\Delta}{2}$. Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com grau máximo par e B o grafo bipartido associado a G . Seja $\lambda = (u_0, u_1, \dots, u_h, \dots, u_{|S|-1})$, uma ordem arbitrária dos vértices de S . Lembre-se que u_h é um vértice em S tal que $h = \min\{x : |\cup_{i=0}^x N(u_i)| \geq \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil\}$. Note que, a escolha do vértice que será u_h depende da ordem λ escolhida para os vértices de S .

Lembre-se que, de acordo com o algoritmo de Chen, Fu e Ko, o grafo split G é particionado em três subgrafos disjuntos nas arestas, são eles: $G[Q]$, $H_2 = B[Q \cup \{u_0, u_1, \dots, u_h\}]$ e $H_1 = B[Q \cup \{u_{h+1}, u_{h+2}, \dots, u_{|S|-1}\}]$. Lembre-se também que os vértices em Q são ordenados $\{v_0, v_1, \dots, v_{|Q|-1}\}$ obedecendo a ordem CFK em relação a λ , onde $d_{H_2}(v_i) \geq d_{H_2}(v_{i+1})$ e quando dois vértices de Q tem o mesmo grau em H_2 , se um deles for vizinho de u_h e o outro não, o vértice que não é vizinho de u_h deve aparecer primeiro na ordem. Portanto, a ordem dos vértices em Q é completamente dependente do vértice escolhido para ser u_h . Se das duas células da diagonal principal que possuem a mesma cor apenas uma for utilizada para colorir arestas incidentes a u_h , então a coloração dada pelo algoritmo de Chen, Fu e Ko é válida para G . Como visto na seção 2.2, todo vértice v_i com

	v0	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9	u0	u1	u2	u3	u4	u5
v0	-	1	2	3	4	5	6	7	8	13	0	9	10	11	12	-
v1	1	-	3	4	5	6	7	8	13	10	2	11	9	12	0	-
v2	2	3	-	5	6	7	8	9	10	11	4	13	12	0	-	1
v3	3	4	5	-	7	8	9	13	11	12	6	10	0	1	-	2
v4	4	5	6	7	-	9	10	11	12	0	8	1	13	-	2	3
v5	5	6	7	8	9	-	13	12	0	1	10	2	-	3	11	4
v6	6	7	8	9	10	13	-	0	1	2	12	-	11	4	3	5
v7	7	8	9	13	11	12	0	-	2	3	1	-	4	10	5	6
v8	8	13	10	11	12	0	1	2	-	4	-	3	5	9	6	7
v9	13	10	11	12	0	1	2	3	4	-	-	5	6	7	9	8
u0	0	2	4	6	8	10	12	1	-	-	-	-	-	-	-	-
u1	9	11	13	10	1	2	-	-	3	5	-	-	-	-	-	-
u2	10	9	12	0	13	-	11	4	5	6	-	-	-	-	-	-
u3	11	12	0	1	-	3	4	10	9	7	-	-	-	-	-	-
u4	12	0	-	-	2	11	3	5	6	9	-	-	-	-	-	-
u5	-	-	1	2	3	4	5	6	7	8	-	-	-	-	-	-

Figura 4.4: Matriz de adjacências com uma Δ -coloração de arestas para o grafo da Figura 4.3.

$\lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor - 1 \leq i < |\cup_{i=0}^h N(u_i)|$ é adjacente a u_h . (Veja um exemplo na Figura 4.5). Logo, se for possível escolher u_h tal que para todo vértice v_i adjacente a u_h tem-se $\{v_{i-\frac{\Delta}{2}}, u_h\} \notin E(G)$, para $i \geq \frac{\Delta}{2}$, então G é Classe 1, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 4.5 *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par. Se existe uma ordem $\lambda = (u_0, u_1, \dots, u_h, \dots, u_{|S|-1})$ para os vértices de S tal que os vértices de Q admitem uma ordem CFK em relação a λ onde $\{v_i, u_h\} \notin E(G)$ quando $i < |\cup_{i=0}^h N(u_i)| - \frac{\Delta(G)}{2}$, então G é Classe 1*

Demonstração: Considere um grafo split $G = [Q, S]$ com $\Delta(G)$ par e seja B o grafo bipartido associado a G . Suponha que existe uma ordem $\lambda = (u_0, u_1, \dots, u_{|S|-1})$ para os vértices de S , onde os vértices de Q admitem uma ordem CFK $(v_0, v_1, \dots, v_{|Q|-1})$ em relação a λ e $\{v_i, u_h\} \notin E(G)$ quando $i < |\cup_{i=0}^h N(u_i)| - \frac{\Delta(G)}{2}$. Construa os subgrafos $G[Q]$, $H_1 = B[Q \cup \{u_{h+1}, u_{h+2}, \dots, u_{|S|-1}\}]$ e $H_2 = B[Q \cup \{u_0, u_1, \dots, u_h\}]$. Construa um quadrado latino $M = [m_{i,j}]$ de ordem $\Delta(G)$ como definido em (1.1) e use as cores das

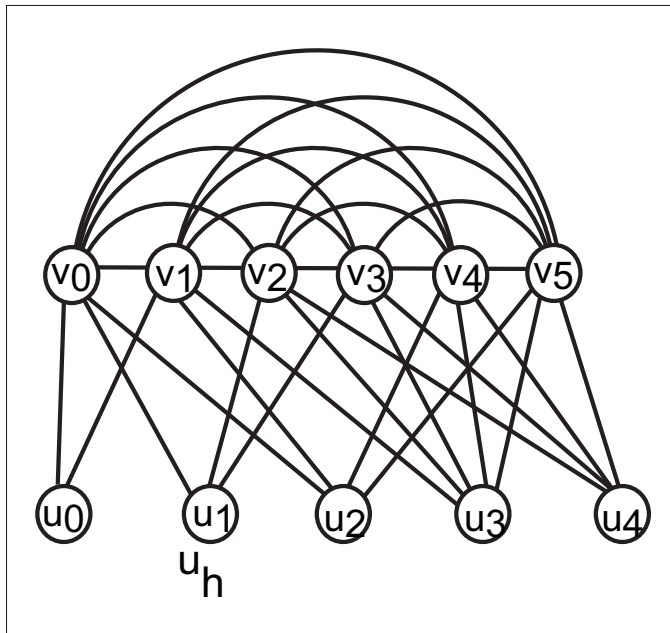


Figura 4.5: Grafo split Classe 1 com uma ordem CFK em relação a λ .

primeiras $|Q|$ linhas e primeiras $|Q|$ colunas para colorir as arestas de $G[Q]$ de forma que à aresta $\{v_i, v_j\}$ seja atribuída a cor $m_{i,j}$.

Seja $b = |\cup_{i=0}^h N(u_i)|$. Para colorir H_1 , considere o diagrama de cores $\mathcal{C} = (C_{v_0}, C_{v_1}, \dots, C_{v_{|Q|-1}})$, onde $C_{v_i} = [m_{i,|Q|}, m_{i,|Q|+1}, \dots, m_{i,|Q|+d_{H_1}(v_i)-1}]$, para $0 \leq i < b$, e $C_{v_i} = [m_{i,i}, m_{i,|Q|}, m_{i,|Q|+1}, \dots, m_{i,\Delta(G)-1}]$, para $b \leq i < |Q|$. Como $b \geq \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$ e $d_{H_1}(v_0) \leq d_{H_1}(v_1) \leq \dots \leq d_{H_1}(v_{|Q|-1})$, o diagrama de cores \mathcal{C} é um sufixo de um prefixo crescente \mathcal{P} do diagrama de cores $\mathcal{D}(|Q|, \Delta(G))$, onde $P_i = D_i$, para $i \geq \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor$. Pelo Lema 4.3, o diagrama de cores $\mathcal{D}(|Q|, \Delta(G))$ é monotônico. Pelo Lema 2.5, o prefixo \mathcal{P} do diagrama $\mathcal{D}(|Q|, \Delta(G))$ é monotônico. Pelo Lema 2.1, \mathcal{C} é monotônico. Logo, pelo Lema 2.4, H_1 pode ser colorido pelo diagrama de cores \mathcal{C} .

Agora pinte as arestas incidentes em u_h com as cores da diagonal principal de forma que se a aresta $\{v_i, u_h\}$ pertence a $E(G)$, então a cor $m_{i,i}$ é atribuída a $\{v_i, u_h\}$. Note que $N(u_h) \subset \{v_{b-\frac{\Delta(G)}{2}}, v_{b-\frac{\Delta(G)}{2}+1}, \dots, v_{b-1}\}$ e que o intervalo entre o menor e o maior índice dos elementos desse conjunto não excede $\frac{\Delta(G)}{2}$. Como a cor $m_{i,i}$ só se repete em $m_{i+\frac{\Delta(G)}{2}, i+\frac{\Delta(G)}{2}}$, para $0 \leq i < \frac{\Delta(G)}{2}$, então as cores atribuídas às arestas incidentes a u_h são todas distintas.

As demais arestas de H_2 , são coloridas com o diagrama de cores $\mathcal{R} = (R_{v_{|Q|-1}}, R_{v_{|Q|-2}}, \dots, R_{v_0})$, onde R_{v_i} é uma seqüência vazia para $i \geq b$ e, para $0 \leq i < b$, $R_{v_i} = [m_{i,\Delta(G)-1}, m_{i,\Delta(G)-2}, \dots, m_{i,|Q|+d_{H_1}(v_i)}]$ se $\{v_i, u_h\} \in E(G)$ ou $R_i = [m_{i,i}, m_{i,\Delta(G)-1}, m_{i,\Delta(G)-2}, \dots,$

$m_{i,|Q|+d_{H_1}(v_i)}$, caso contrário. Pela ordem imposta aos vértices de Q , a célula $m_{i,i}$, só é concatenada a R_{v_i} quando $i < \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil - 1$. Portanto, \mathcal{R} é um sufixo de um prefixo crescente \mathcal{P} de $\mathcal{D}^r(|Q|, \Delta(G))$, onde $P_i = D_i^r$, para $0 \leq i < \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$. Pelo Lema 4.4, $\mathcal{D}^r(|Q|, \Delta(G))$ é monotônico. Pelo Lema 2.6, o prefixo \mathcal{P} é monotônico. Pelo Lema 2.1, o diagrama de cores \mathcal{R} é monotônico. Mais uma vez pelo Lema 2.4, $H_2[V(H_2) \setminus \{u_h\}]$ pode ser colorido pelo diagrama de cores \mathcal{R} . Como foram usadas $\Delta(G)$ cores para colorir as arestas de G , essa coloração é ótima e G é Classe 1. ■

Pela definição de ordem CFK, o vértice u_h é tal que $h = \min\{x: |\cup_{i=0}^x N(u_i)| \geq \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil\}$. Para satisfazer a condição imposta no Teorema 4.5, de que os vértices de Q admitem uma ordem CFK em relação a λ onde $\{v_i, u_h\} \notin E(G)$ quando $i < |\cup_{i=0}^h N(u_i)| - \frac{\Delta}{2}$, o grau do vértice u_h é, no máximo, $\frac{\Delta}{2}$. Mais ainda, todo vértice u_i tal que $i \leq h$ tem grau no máximo $\frac{\Delta}{2}$. Portanto, um grafo split que satisfaça as condições do Teorema 4.5 tem, obrigatoriamente, um conjunto de vértices $S' = \{u_0, u_1, \dots, u_h\}$ tal que todos os vértices em S' tem grau menor ou igual a $\frac{\Delta}{2}$ e a cardinalidade de $|N(S')| \geq \frac{|Q|}{2}$.

Não é simples verificar a existência de uma ordem λ dos vértices de S que permita uma ordem CFK nos vértices de Q satisfazendo o Teorema 4.5. É preciso verificar, no pior caso, todas as combinações possíveis de subconjuntos $S' \subseteq S$ tal que $|N(S')| \geq \frac{|Q|}{2}$ e cujos vértices tem grau menor ou igual a $\frac{\Delta}{2}$. Entretanto, alguns casos particulares facilitam a escolha do subconjunto S' , como veremos nos corolários a seguir.

O próximo corolário garante que, se existir um vértice u em S tal que $\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil \leq d(u) \leq \frac{\Delta}{2}$, basta que se escolha este vértice para ser u_0 e G é Classe 1.

Corolário 4.6 *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par. Se existe $u \in S$ tal que $\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil \leq d(u) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$, então G é Classe 1.*

Demonstração: Sejam G um grafo split com grau máximo par, B o grafo bipartido associado a G e $u \in S$ tal que $\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil \leq d(u) \leq \frac{\Delta}{2}$. Faça u ser o primeiro vértice na ordem λ dos vértices de S , ou seja, $u = u_0$. Considere os subgrafos $G[Q]$, $H_2 = B[Q \cup \{u_0\}]$ e $H_1 = B[Q \cup \{u_1, u_2, \dots, u_{|S|-1}\}]$. Faça uma ordem CFK em relação a λ para os vértices de Q . Construa um quadrado latino $M = [m_{i,j}]$ de ordem $\Delta(G)$, como definido em (1.1). Para colorir $G[Q]$, atribua a cor $m_{i,j}$ à aresta $\{v_i, v_j\}$, $0 \leq i, j < |Q|$. Para colorir H_2 , pinte a aresta $\{v_i, u_0\}$ com a cor $m_{i,i}$. Como $d(u_0) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$, as cores usadas nas arestas incidentes em u_0 são todas distintas. Resta colorir H_1 . Construa, o diagrama de cores $\mathcal{C} = (C_{v_0}, C_{v_1}, \dots, C_{v_{|Q|-1}})$, onde $C_{v_i} = [m_{i,|Q|}, m_{i,|Q|+1}, \dots, m_{i,|Q|+d_{H_1}(v_i)-1}]$, para $0 \leq i < d(u_0)$, e $C_{v_i} = [m_{i,i}, m_{i,|Q|}, m_{i,|Q|+1}, \dots, m_{i,\Delta(G)-1}]$, para $d(u_0) \leq i < |Q|$. Como $d(u_0) \geq \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$ e $d_{H_1}(v_0) \leq d_{H_1}(v_1) \leq \dots \leq d_{H_1}(v_{|Q|-1})$, \mathcal{C} é um sufixo do diagrama de cores $\mathcal{D}(|Q|, \Delta(G))$. Pelos lemas 4.3 e 2.1, \mathcal{C} é monotônico. Logo, pelo Lema 2.4, H_1 pode ser colorido pelo diagrama de cores \mathcal{C} . ■

Caso não exista um vértice u nas condições do Corolário 4.6, pode-se verificar a existência em G de um subconjunto S' de vértices de S tal que $|N(S')| \geq \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$, $d(u) < \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$ para todo $u \in S'$ e $N_{H_2}(u) \cap N_{H_2}(w) = \emptyset$, para todo u e w pertencentes a S' . Neste caso, G também é Classe 1, como mostra o corolário a seguir.

Corolário 4.7 *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par. Se existe um subconjunto $S' \subset S$ tal que $|N(S')| \geq \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$, $d(u) < \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$ para todo $u \in S'$ e $N(u) \cap N(w) = \emptyset$, para todo u e w em S' , então G é Classe 1.*

Demonstração: Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par e S' um subconjunto de S tal que $d(u) < \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$ para todo $u \in S'$ e $N(u) \cap N(w) = \emptyset$, para todo u e w pertencentes a S' . Seja B o grafo bipartido associado a G . Considere os subgrafos $G[Q]$, $H_2 = B[Q \cup S']$ e $H_1 = B[Q \cup (S \setminus S')]$. Faça uma ordem λ dos vértices de S de forma que os $|S'|$ primeiros sejam os vértices do conjunto S' . Todo vértice de Q tem grau no máximo 1 em H_2 , pois $N(u) \cap N(w) = \emptyset$. Então, construa uma ordem CFK em relação a λ onde os vizinhos de u_0 sejam os primeiros, os vizinhos de u_1 sejam os próximos, seguidos dos vizinhos de u_2 e assim sucessivamente até os vizinhos de u_h . Obviamente, os últimos vértices na ordem CFK serão aqueles que não são adjacentes a vértices de S' e, portanto, tem grau zero em H_2 . Para colorir G , construa um quadrado latino $M = [m_{i,j}]$ de ordem $\Delta(G)$, como definido em (1.1). Pinte as arestas $\{v_i, v_j\}$ do subgrafo $G[Q]$ com a cor $m_{i,j}$, $0 \leq i, j < |Q|$. Para colorir H_2 , atribua a cor $m_{i,i}$ à aresta que tem um extremo em v_i e o outro em algum vértice $u \in S'$. Como todo vértice u pertencente a S' tem grau menor que $\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$, $\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil < \frac{\Delta}{2}$ e seus vizinhos em Q são consecutivos na ordem CFK, então as cores das arestas incidentes em u são duas a duas distintas. Resta colorir H_1 . Construa, o diagrama de cores $\mathcal{C} = (C_{v_0}, C_{v_1}, \dots, C_{v_{|Q|-1}})$, onde $C_{v_i} = [m_{i,|Q|}, m_{i,|Q|+1}, \dots, m_{i,|Q|+d_{H_1}(v_i)-1}]$, para $0 \leq i < |N(S')|$, e $C_{v_i} = [m_{i,i}, m_{i,|Q|}, m_{i,|Q|+1}, \dots, m_{i,\Delta(G)-1}]$, para $|N(S')| \leq i < |Q|$. Como $|N(S')| \geq \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$, o grau máximo de um vértice em H_2 é 1 e $d_{H_1}(v_0) \leq d_{H_1}(v_1) \leq \dots \leq d_{H_1}(v_{|Q|-1})$, \mathcal{C} é um sufixo do diagrama de cores $\mathcal{D}(|Q|, \Delta(G))$. Pelos lemas 4.3 e 2.1, o diagrama de cores \mathcal{C} é monotônico. Pelo Lema 2.4, H_1 pode ser colorido usando-se o diagrama de cores \mathcal{C} . ■

Observe que os corolários 4.6 e 4.7 são casos particulares do Teorema 4.5.

Até o momento, consideramos que todos os vértices da clique de um grafo split $G = [Q, S]$ são $\Delta(G)$ -vértices. Considerando os grafos split com grau máximo par, podemos tirar vantagem do fato de alguns vértices de Q não serem $\Delta(G)$ -vértices para classificar tais grafos. Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com grau máximo par. Se Q possui pelo menos $\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$ vértices que não são $\Delta(G)$ -vértices, então G é Classe 1, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 4.8 *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par. Se existem pelo menos $\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$ vértices em Q que não são $\Delta(G)$ -vértices, então G é Classe 1.*

Demonstração: Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par e um subconjunto de vértices $Q' = \{v_0, v_1, \dots, v_{\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil - 1}\} \subset Q$ tal que todo vértice em Q' tem grau menor que $\Delta(G)$. Inclua um novo vértice u em S e faça-o adjacente a todos os vértices de Q' . Para que todos os vértices de Q sejam $\Delta(G)$ -vértices e seja possível utilizar o algoritmo de Chen, Fu e Ko, acrescente repetidamente um novo vértice em S e torne-o adjacente a algum vértice $v \in Q$ que não seja $\Delta(G)$ -vértice, até que todos os vértices de Q sejam $\Delta(G)$ -vértices. Agora, G é um grafo split com grau máximo par que possui um vértice $u \in S$ com $d(u) = |Q'| = \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$. Pelo Corolário 4.6, G é Classe 1. Como só incluímos arestas incidentes em vértices que não são $\Delta(G)$ -vértices, o grau máximo do grafo resultante é igual ao grau máximo do grafo original. Logo, se após a coloração retirarmos as arestas e vértices que foram incluídos em G , teremos uma $\Delta(G)$ -coloração de arestas para o grafo original, provando que G é Classe 1. ■

Considerando grafos split com grau máximo par tais que todo vértice da clique é um Δ -vértice, nenhum dos resultados apresentados nesta seção aborda o caso em que todo vértice $u \in S$ tem grau maior que $\frac{\Delta}{2}$. Alguns desses grafos serão tratados na próxima seção.

4.2 Usando quadrados latinos de ordem ímpar

Como visto no último capítulo, uma condição necessária para que um grafo G seja Classe 1 é a garantia de que G não é vizinhança-sobrecarregado. Além disso, em relação aos grafos split, conjectura-se que esta condição seja também suficiente (Conjectura 3.1). Note que, pelo Lema 3.2, grafos split com $(d(Q))^2 \geq |Q| - 2$ não são vizinhança-sobrecarregados. Na última seção, nosso interesse foi tratar alguns grafos split que possuem em S um subconjunto de vértices com grau no máximo igual a $\frac{\Delta}{2}$. Provamos que se existe um vértice em S com grau entre $\frac{|Q|}{2}$ e $\frac{\Delta}{2}$, então o grafo é Classe 1. Provamos também que, sob determinadas condições, grafos split que possuem em S um subconjunto de vértices com grau menor que $\frac{|Q|}{2}$ são Classe 1. Esta seção é dedicada ao estudo de grafos split com $(d(Q))^2 \geq |Q| - 2$ e que possuem pelo menos um vértice em S com grau maior ou igual a $\frac{|Q|}{2}$. A Figura 4.6 mostra um desses grafos e, a seguir, apresentamos um subconjunto desses grafos que é Classe 1.

Para colorir tais grafos, adotaremos um novo método: usaremos quadrados latinos de ordem ímpar e igual a $\Delta - 1$. A partir desses quadrados latinos somos capazes de criar matrizes de cores cujas células têm valores entre 0 e $\Delta - 1$, as cores da diagonal principal

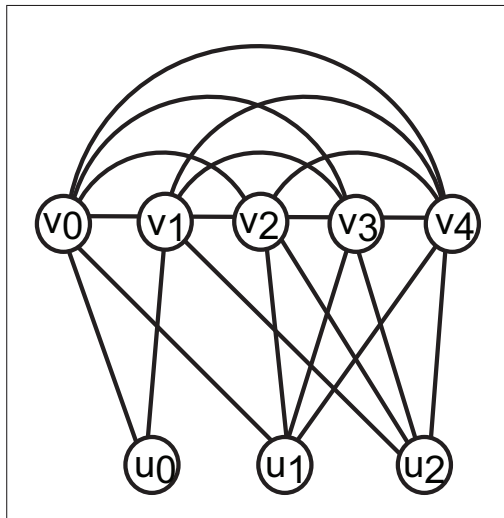


Figura 4.6: Grafo split com vértices em S com grau maior ou igual a $\frac{|Q|}{2}$ e com $(d(Q))^2 \geq |Q| - 2$.

são duas a duas distintas e as cores em cada linha e em cada coluna também são duas a duas distintas. A seguir, apresentamos um algoritmo polinomial para construir tais matrizes. O algoritmo também constrói um diagrama de cores monotônico com o qual se pode colorir grafos bipartidos.

O algoritmo começa construindo um quadrado latino M de ordem $\Delta - 1$ onde cada elemento representa uma das cores do conjunto $\mathcal{L} = \{0, 1, \dots, \Delta - 2\}$. A partir das primeiras $|Q|$ linhas e colunas de M , construímos uma submatriz $A = [a_{i,j}]$ cujas cores serão usadas na coloração de $G[Q]$. Considerando um vértice $u_h \in S$ com $d(u_h) \geq \frac{|Q|}{2}$ e as primeiras $|Q|$ linhas das últimas $\Delta - 1 - |Q|$ colunas de M , construímos um diagrama de cores monotônico $\mathcal{C} = (C_0, C_1, \dots, C_{|Q|-1})$, tal que:

- $C_i = [m_{i,|Q|}, \dots, m_{i,\Delta-2}]$, $0 \leq i < d(u_h)$;
- $C_i = [m_{i,i}, m_{i,|Q|}, \dots, m_{i,\Delta-2}]$, $d(u_h) \leq i < |Q|$.

Como \mathcal{C} é construído a partir de M , as cores presentes nesse diagrama de cores pertencem ao conjunto \mathcal{L} . Como $|\mathcal{L}| = \Delta - 1$ e o objetivo é usar o diagrama \mathcal{C} para colorir um grafo split com Δ cores, vamos incluir uma nova cor em \mathcal{C} . Assim, construímos um diagrama de cores $\mathcal{C}' = (C'_0, C'_1, \dots, C'_{|Q|-1})$ onde C'_i é a concatenação de $(\Delta - 1)$ com o vetor de cores C_i , para todo i tal que $0 \leq i < |Q|$. Note que \mathcal{C}' não é monotônico. Entretanto, nos casos em que $(d(Q))^2 \geq 2|Q| + 1$, o diagrama \mathcal{C}' pode ser transformado em um diagrama de cores monotônico através de algumas trocas de cores entre A e \mathcal{C}' . Mais precisamente, trocaremos algumas cores $a_{i,j}$ de um determinado conjunto de células de A pela cor $\Delta - 1$ e usaremos a cor $a_{i,j}$ no lugar de $\Delta - 1$ nos vetores C'_i e C'_j .

A seguir, apresentamos uma descrição formal do algoritmo. A entrada é composta da cardinalidade de uma clique maximal do grafo split, do valor de $d(Q)$ e de $d(u_h)$, onde $u_h \in S$ e $d(u_h) \geq \frac{|Q|}{2}$.

Algoritmo ColorDiagrams($|Q|, d(Q), d(u_h)$)

Entrada: Inteiros positivos $|Q|, d(Q)$ e $d(u_h)$, onde $d(u_h) \geq \frac{|Q|}{2}$, $d(Q) > 1$ e $d(Q)^2 \geq 2|Q| + 1$.

$\Delta = d(Q) + |Q| - 1$.

Construa uma matriz $M_{(\Delta-1) \times (\Delta-1)}$, tal que

$m_{i,j} = (i + j) \pmod{\Delta - 1}$, $0 \leq i, j \leq \Delta - 2$.

Construa uma seqüência $\mathcal{C} = (C_0, \dots, C_{|Q|-1})$, onde

$C_i = [m_{i,|Q|}, \dots, m_{i,\Delta-2}]$, $0 \leq i < d(u_h)$.

$C_i = [m_{i,i}, m_{i,|Q|}, \dots, m_{i,\Delta-2}]$, $d(u_h) \leq i < |Q|$.

Construa o diagrama de cores \mathcal{C}' da seguinte forma:

\mathcal{C}'_i é a concatenação de $(\Delta - 1)$ com C_i , $0 \leq i < |Q|$.

Construa uma matriz $A_{|Q| \times |Q|}$, tal que $a_{i,j} \leftarrow m_{i,j}$, $0 \leq i, j < |Q|$;

$l \leftarrow 0$; $l' \leftarrow |Q| - 1$; $x \leftarrow -1$; $c \leftarrow |Q| + x$;

Se c é ímpar, então $count \leftarrow \lfloor \frac{d(Q)-2-x}{2} \rfloor$;

Se c é par, então $count \leftarrow \lfloor \frac{d(Q)-3-x}{2} \rfloor$;

Enquanto $(l < l')$ e $(c < \Delta - 2)$ faça

Troque a cor c da célula $a_{l,l'}$ e da célula $a_{l',l}$ por $\Delta - 1$;

Troque a cor $\Delta - 1$ dos vetores de cor \mathcal{C}'_l e $\mathcal{C}'_{l'}$ por c ;

$l \leftarrow l + 1$; $l' \leftarrow l' - 1$; $count \leftarrow count - 1$;

Se $count = 0$ então

$x \leftarrow x + 1$; $c \leftarrow |Q| + x$;

Se c é ímpar então $count \leftarrow \lfloor \frac{d(Q)-2-x}{2} \rfloor$;

Se c é par então $count \leftarrow \lfloor \frac{d(Q)-3-x}{2} \rfloor$;

$l \leftarrow l + 1$;

Retorne(A, \mathcal{C}').

A Figura 4.7 apresenta a matriz A e o diagrama de cores \mathcal{C}' construídos pelo Algoritmo ColorDiagrams para a coloração de um grafo split com clique de tamanho 4, $d(Q) = 3$ e $d(u_h) = 3$, como o grafo da Figura 4.6.

Os lemas 4.9 e 4.10, apresentados abaixo, garantem algumas propriedades da matriz A exibida pelo Algoritmo ColorDiagrams.

Lema 4.9 *A matriz A apresentada pelo Algoritmo ColorDiagrams é comutativa, seus elementos pertencem ao conjunto $\mathcal{L}_\Delta = \{0, \dots, \Delta - 1\}$ e são dois a dois distintos em cada linha e em cada coluna.*

0	1	2	5
1	2	3	4
2	3	4	0
5	4	0	1

(a)

3	4	
5	0	
5	1	
3	1	2

(b)

Figura 4.7: a) Matriz A de ordem $|Q| = 4$. b) Diagrama \mathcal{C}' para $d(Q) = 3$ e $d(u_h) = 3$.

Demonstração: O algoritmo constrói a matriz A usando as primeiras $|Q|$ linhas e as primeiras $|Q|$ colunas de um quadrado latino M . Isto é possível, pois $\Delta = |Q| + d(Q) - 1$ e $d(Q) \geq 2$, logo $|Q| \leq \Delta - 1$. Como M é um quadrado latino comutativo, antes das trocas, a matriz A é comutativa e seus elementos em cada uma das linhas e das colunas são dois a dois distintos. Como, antes das trocas, a matriz A é uma submatriz da matriz M cujos elementos pertencem ao conjunto $\mathcal{L} = \{0, 1, \dots, \Delta - 2\}$ e a única cor nova usada nas trocas é a cor $\Delta - 1$, os elementos da matriz A apresentada pelo Algoritmo ColorDiagrams pertencem ao conjunto $\mathcal{L}_\Delta = \{0, 1, 2, \dots, \Delta - 1\}$. (Note que A não é um quadrado latino.)

O laço de repetição *enquanto* considera cada cor c que pertence ao conjunto $\{|Q| - 1, |Q|, \dots, \Delta - 3\}$ em ordem crescente, iniciando-se com a cor $|Q| - 1$ e fazendo a troca com a cor $\Delta - 1$ nas células $a_{l,v} = a_{0,|Q|-1}$ e $a_{v,l} = a_{|Q|-1,0}$. Note que quando l' é decrementado de 1, l é incrementado em 1 ou 2 e duas células de A recebem a cor $\Delta - 1$. O laço de repetição *enquanto* termina quando todas as cores do conjunto $\{|Q| - 1, |Q|, \dots, \Delta - 3\}$ já foram usadas nas trocas (isto é, quando $c = \Delta - 2$) ou após todas as linhas de A serem visitadas (isto é, quando $l \geq l'$). Em ambos os casos, cada linha e cada coluna recebe, no máximo, uma vez a cor $\Delta - 1$. Como os elementos de cada linha e de cada coluna da matriz A , antes das trocas, eram dois a dois distintos e, como após cada troca, a linha l e a coluna l' são incrementadas e decrementadas, respectivamente, a matriz A apresentada pelo Algoritmo ColorDiagrams tem elementos dois a dois distintos em cada linha e em cada coluna.

Como, antes das trocas, a matriz A é comutativa e cada troca é realizada simultaneamente em $a_{l,v}$ e em $a_{v,l}$, a matriz A apresentada pelo Algoritmo ColorDiagrams é também comutativa. ■

Lema 4.10 *Se Δ é par, os elementos da diagonal principal da matriz A , apresentada pelo Algoritmo ColorDiagrams, são dois a dois distintos.*

Demonstração: Por hipótese, Δ é par. Logo, a matriz M usada na construção da matriz A tem ordem ímpar e igual a $\Delta - 1$. Antes das trocas de cores, l assume o valor 0, l' assume o valor $|Q| - 1$ e os elementos da diagonal principal de A são dois a dois distintos. As trocas ocorrem sempre nas células $a_{l,l'}$ e $a_{l',l}$. A cada troca, l é incrementado e l' é decrementado. Como a condição do laço de repetição não é mais satisfeita quando l é igual a l' , nenhuma troca de cores é realizada na diagonal principal e os elementos desta diagonal permanecem dois a dois distintos. ■

A matriz A construída pelo Algoritmo ColorDiagrams é capaz de colorir com Δ cores o subgrafo induzido pelos vértices de uma clique maximal de um grafo split G com Δ par. Se formos capazes de, com as mesmas Δ cores, colorir o subgrafo bipartido B associado a G , então G é Classe 1. O diagrama de cores \mathcal{C}' , construído pelo Algoritmo ColorDiagrams, tem Δ cores distintas e, quando todas as trocas necessárias são realizadas, este diagrama é monotônico e pode ser usado para colorir as arestas de B . Note que, quando a cor $\Delta - 1$ é concatenada a cada um dos vetores de cores, o número de cores $\Delta - 1$ nesse diagrama é muito grande, maior que $d(Q) - 1$. Para reduzir esse número, trocas são feitas entre a cor $\Delta - 1$ dos vetores de cores de \mathcal{C}' e cores do conjunto $F = \{|Q| - 1, |Q|, \dots, \Delta - 2\}$ nas linhas da matriz A . Essas trocas também não podem ser feitas indiscriminadamente, pois corre-se o risco de ter mais que $d(Q) - 1$ vezes a mesma cor em \mathcal{C}' , o que impediria \mathcal{C}' de ser monotônico. Portanto, o número de trocas que podem ser feitas para que cada cor do conjunto F seja inserida em \mathcal{C}' é determinado pela variável *count* e calculado de forma que cada cor apareça em \mathcal{C}' no máximo $d(Q) - 1$ vezes. Existem casos em que o número de trocas que se pode fazer para reduzir o número de cores $\Delta - 1$ em \mathcal{C}' não são suficientes para tornar esse diagrama de cores monotônico como, por exemplo, quando $|Q| = 9$, $d(Q) = 2$ e $d(u_h) = 5$ (veja a matriz A e o diagrama de cores \mathcal{C}' resultantes da execução do Algoritmo ColorDiagrams na Figura 4.8).

Entretanto, podemos afirmar que quando $d(Q) > 1$ e $(d(Q))^2 \geq 2|Q| + 1$ o número de trocas de cores que podem ser feitas são suficientes para garantir que \mathcal{C}' seja monotônico. Os lemas a seguir garantem a monotonicidade de \mathcal{C}' nos casos em que $d(Q) > 1$ e $(d(Q))^2 \geq 2|Q| + 1$.

Lema 4.11 *Se $d(Q) > 1$ e $(d(Q))^2 \geq 2|Q| + 1$, então não existem mais que $d(Q) - 1$ cores $\Delta - 1$ na seqüência \mathcal{C}' resultante da execução do Algoritmo ColorDiagrams.*

Demonstração: O Algoritmo ColorDiagrams concatena a cor $\Delta - 1$ a cada um dos $|Q|$ vetores de cores do diagrama \mathcal{C} , criando o diagrama \mathcal{C}' com $|Q|$ ocorrências da cor $\Delta - 1$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	0
2	3	4	5	6	7	8	0	1
3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	5	6	7	8	0	1	2	3
5	6	7	8	0	1	2	3	4
6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	8	0	1	2	3	4	5	6
8	0	1	2	3	4	5	6	7

(a)

9	
9	
9	
9	
9	
9	1
9	3
9	5
9	7

(b)

Figura 4.8: a) Matriz A para clique de tamanho $|Q| = 9$. b) Diagrama \mathcal{C}' para $d(Q) = 2$ e $d(u_h) = 5$.

Para reduzir esse número, o Algoritmo ColorDiagrams faz trocas entre algumas cores $\Delta - 1$ existentes em \mathcal{C}' e algumas cores de células da matriz A pertencentes ao conjunto de cores $F = \{|Q| - 1, |Q|, \dots, \Delta - 3\}$. (Note que F está sendo descrito pelo conjunto $\{|Q| + x, -1 \leq x \leq \Delta - |Q| - 3 = d(Q) - 4\}$.) Assim, o algoritmo usa no máximo $|F| = d(Q) - 2$ cores distintas para fazer as trocas com a cor $\Delta - 1$. Para cada cor distinta usada, o algoritmo deixa um vetor de cores com a cor $\Delta - 1$. (Isso ocorre quando $count = 0$.)

Se o laço de repetição *enquanto* termina porque $l \geq l'$ mas com $c < \Delta - 2$, então o número de vezes que a cor $\Delta - 1$ aparece em \mathcal{C}' quando o algoritmo termina é menor ou igual a $|F| = d(Q) - 2$ (incluindo o caso em que a cor $\Delta - 1$ aparece em \mathcal{C}'_i quando $l = l' = \lfloor \frac{|Q|}{2} \rfloor + 1$). Logo, o número de vezes que a cor $\Delta - 1$ ocorre em \mathcal{C}' é menor que $d(Q) - 1$.

Se o laço de repetição *enquanto* termina porque $c = \Delta - 2$, então, o número de vezes que a cor $\Delta - 1$ aparece em \mathcal{C}' depende da paridade de Q .

Se $|Q|$ é par, o menor e o maior elemento de F são ímpares. Portanto, o número t de vezes que a cor $\Delta - 1$ aparece em \mathcal{C}' é determinado a seguir.

$$\begin{aligned}
t &= |Q| - \left(d(Q) - 1 + 2 \left(\frac{(d(Q) - 3)}{2} + \frac{(d(Q) - 3)}{2} + \frac{(d(Q) - 5)}{2} + \dots + \frac{2}{2} \right) \right) = \\
&= |Q| - (d(Q) - 1 + 2(d(Q) - 3 + d(Q) - 5 + \dots + d(Q) - (d(Q) - 2))) = \\
&= |Q| - \left(d(Q) - 1 + \frac{(d(Q) - 1)(d(Q) - 3)}{2} \right) = \\
&= |Q| - \frac{(d(Q) - 1)^2}{2}
\end{aligned}$$

Por hipótese, $((d(Q))^2 \geq 2|Q| + 1$, logo

$$t = |Q| - \frac{(d(Q) - 1)^2}{2} \leq \frac{(d(Q))^2 - 1}{2} - \frac{(d(Q) - 1)^2}{2} = d(Q) - 1$$

Se $|Q|$ é ímpar, $(d(Q))^2$ é par e $(d(Q))^2 \geq 2|Q| + 2$. Logo, o número t de vezes que a cor $\Delta - 1$ aparece em \mathcal{C}' é:

$$\begin{aligned}
t &= |Q| - 2(d(Q) - 2 + d(Q) - 4 + \dots + d(Q) - (d(Q) - 2)) = \\
&= |Q| - \left(\frac{d(Q)(d(Q) - 2)}{2} \right) \leq \\
&= \frac{(d(Q))^2 - 2}{2} - \frac{d(Q)(d(Q) - 2)}{2} = d(Q) - 1
\end{aligned}$$

■

O Lema 4.12 garante que, para uma entrada válida, \mathcal{C}' é um diagrama de cores monotônico.

Lema 4.12 *Se $d(Q) > 1$, $d(u_h) \geq \frac{|Q|}{2}$ e $(d(Q))^2 \geq 2|Q| + 1$, então a seqüência \mathcal{C}' apresentada pelo Algoritmo ColorDiagrams é um diagrama de cores monotônico.*

Demonstração: Primeiro, note que o diagrama de cores \mathcal{C}' é construído a partir do diagrama de cores \mathcal{C} e que \mathcal{C} é um sufixo do diagrama de cores $\mathcal{D}(|Q|, \Delta - 1)$. Pelos lemas 2.1 e 2.3, \mathcal{C} é monotônico.

Como $(d(Q))^2 \geq 2|Q| + 1$, quando $d(Q) = 2$ tem-se $|Q| = 1$. Neste caso, o Algoritmo ColorDiagrams apresenta uma matriz $A = [0]$ e um diagrama de cores $\mathcal{C}' = \{C'_0\}$ tal que $C'_0 = \{1\}$. Logo, \mathcal{C}' é um diagrama de cores monotônico.

Agora, considere $d(Q) \geq 3$. O Algoritmo ColorDiagrams constrói um diagrama de cores $\mathcal{C}' = (C'_0, C'_1, \dots, C'_{|Q|-1})$ onde cada vetor de cores C'_i é a concatenação das seqüências $(\Delta - 1)$ e C_i . Note que, neste momento, \mathcal{C}' não é um diagrama de cores monotônico.

Em seguida, para garantir que a seqüência \mathcal{C}' apresentada seja um diagrama de cores monotônico, o Algoritmo ColorDiagrams troca a cor $\Delta - 1$ de alguns vetores de cores C'_i pela cor $|Q| + x \in F = \{|Q| - 1, |Q|, \dots, \Delta - 3\}$ de forma que a cor $|Q| + x$ apareça em \mathcal{C}' no máximo $\Delta - |Q| = d(Q) - 1$ vezes.

Considere o diagrama de cores \mathcal{C} usado para gerar \mathcal{C}' . Note que a cor $|Q| + x \in F$ ocorre $x + 1$ vezes em \mathcal{C} quando é ímpar, e ocorre, no máximo, $x + 2$ vezes em \mathcal{C} quando é par. De fato, quando a cor $|Q| + x$ é par, é uma das cores da diagonal principal de M que pode ter sido incluída em \mathcal{C} . Note que quando $d(u_h) = \frac{|Q|}{2}$, a cor $|Q| + x$ aparece $x + 2$ vezes em \mathcal{C} e, quando $d(u_h) > \frac{|Q|}{2}$, menos cores da diagonal principal são concatenadas aos vetores de \mathcal{C} e a cor $|Q| + x$ pode aparecer menos que $x + 2$ vezes em \mathcal{C} .

Como a cardinalidade dos vetores de cores de \mathcal{C}' é, no mínimo, $|C'_0| = d(Q) - 1$ e como as cores incluídas nos vetores do diagrama \mathcal{C}' através de trocas ocupam a primeira posição em cada vetor, para garantir que \mathcal{C}' é monotônico, é preciso garantir que cada cor incluída durante as trocas não ocorrerá mais que $d(Q) - 2$ vezes nos vetores de cores anteriores. Considerando então que cada cor pode ocorrer $d(Q) - 1$ vezes em \mathcal{C}' , é possível determinar o número de vezes que a cor $|Q| + x \in F$ pode ser incluída em \mathcal{C}' durante a execução do laço *enquanto*. Assim, se $|Q| + x$ é ímpar, esta cor pode ser incluída em \mathcal{C}' no máximo $d(Q) - 1 - (x + 1) = d(Q) - 2 - x$ vezes. Como o Algoritmo ColorDiagrams faz as trocas entre a cor $\Delta - 1$ e a cor $|Q| + x$ em C'_i e C'_j ao mesmo tempo, este par de trocas ocorre exatamente $\lfloor \frac{d(Q) - 2 - x}{2} \rfloor$ vezes, a menos que l se torne maior que l' e o algoritmo termine.

Analogamente, se $|Q| + x$ é par, a cor $\Delta - 1$ pode ser trocada no máximo $d(Q) - 1 - (x + 2) = d(Q) - 3 - x$ vezes pela cor $|Q| + x$ e o par de trocas (em C'_i e C'_j) ocorre exatamente $\lfloor \frac{d(Q) - 3 - x}{2} \rfloor$ vezes, a menos que l torne-se maior que l' e o algoritmo termine.

Por construção, a cor $|Q| - 1$ não ocorre no vetor de cores \mathcal{C} e, portanto, pode ser incluída $d(Q) - 1$ vezes em \mathcal{C}' . Para as demais cores de F , vale a regra de que o último vetor de cores do diagrama \mathcal{C} que contém a cor $|Q| + x$, $0 \leq x \leq d(Q) - 4$, é o vetor C_x . Se a cor $|Q| + x \in F$ é incluída no diagrama de cores \mathcal{C}' , então cada cor $|Q| + e \in F$ com $e < x$ é incluída pelo menos 1 vez em \mathcal{C}' antes da inclusão de $|Q| + x$. Além disso, a primeira troca ocorre em C'_0 e as trocas são em ordem crescente do número da cor $|Q| + x$. Como o primeiro valor de x no Algoritmo ColorDiagrams é igual a -1 , a inserção da cor $|Q| + x$ substituindo a cor $\Delta - 1$ sempre ocorre em vetores posteriores a C'_x . Como toda cor $|Q| + x$ que substitui uma cor $\Delta - 1$ ocupa a primeira posição de um vetor de cores, esta cor pode ocorrer $d(Q) - 2$ vezes em vetores de cores anteriores, devido a cardinalidade de cada vetor de cores. Como o número de trocas foi calculado para que cada cor $|Q| + x$ ocorra, no máximo, $d(Q) - 1$ vezes em \mathcal{C}' , os vetores que receberam cores do conjunto F durante as trocas satisfazem a condição para monotonicidade.

Resta garantir que os elementos de \mathcal{C}' com cor $\Delta - 1$ satisfazem as condições de

monotonicidade. Pelo Lema 4.11, quando o Algoritmo ColorDiagrams termina, existem no máximo $d(Q) - 1$ cores $\Delta - 1$ em \mathcal{C}' . Lembre-se que cada cor $\Delta - 1 \in C'_i$ é o primeiro elemento do vetor de cores C'_i . Como há no máximo $d(Q) - 1$ ocorrências da cor $\Delta - 1$ em \mathcal{C}' , há no máximo $d(Q) - 2$ cores $\Delta - 1$ em (C'_0, \dots, C'_j) com $j < i$.

Portanto, a seqüência \mathcal{C}' apresentada pelo Algoritmo ColorDiagrams é um diagrama de cores monotônico. ■

O teorema a seguir, mostra que fazendo uso do diagrama de cores monotônico \mathcal{C}' e da matriz A , construídos pelo Algoritmo ColorDiagrams a partir de um quadrado latino de ordem ímpar, é possível classificar alguns grafos split que possuem grau máximo par.

Teorema 4.13 *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com grau máximo par. Se S tem um vértice u_h tal que $d(u_h) \geq \frac{|Q|}{2}$ e $d^2(Q) \geq 2|Q| + 1$, então G é Classe 1.*

Demonstração: Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par. Seja Q uma clique maximal. Note que remover arestas de um grafo não pode aumentar o seu índice cromático, logo é suficiente mostrar que $\chi'(G) = \Delta$ quando todos os vértices de Q são $\Delta(G)$ -vértices. Lembre-se que B é um grafo bipartido obtido a partir de G removendo-se todas as arestas que incidem em dois vértices distintos de Q . Lembre-se também que $d(Q) = \max\{d_B(v), v \in Q\}$ e que $\Delta(G) = |Q| + d(Q) - 1$.

Suponha que S tem um vértice u_h com $d(u_h) \geq \frac{|Q|}{2}$ e que $d^2(Q) \geq 2|Q| + 1$.

Ordene os vértices em $S = \{u_0, u_1, \dots, u_{|S|-1}\}$ de forma que $u_0 = u_h$. Ordene os vértices em $Q = \{v_0, v_1, \dots, v_{|Q|-1}\}$ de forma que os primeiros $d(u_h)$ vértices sejam adjacentes a u_h .

Seja A a matriz resultante da execução do algoritmo ColorDiagrams($|Q|, d(Q), d(u_h)$). Para $0 \leq i, j \leq |Q| - 1$, use a cor $a_{i,j}$ para colorir a aresta $\{v_i, v_j\}$. Pelo Lema 4.9, os elementos de qualquer linha da matriz A são dois a dois distintos e A é comutativa. Logo, essa é uma coloração das arestas de $G[Q]$. Resta colorir as arestas de B .

Primeiro, vamos colorir as arestas de B incidentes a u_h . Por hipótese, $d(u_h) \geq \frac{|Q|}{2}$. Use as cores $a_{i,i}$ da diagonal principal de A para colorir as arestas $\{v_i, u_h\}$, $0 \leq i < d(u_h)$. Como $\Delta(G)$ é par, pelo Lema 4.10, os elementos da diagonal principal de A são dois a dois distintos. Logo, as arestas incidentes a u_h são coloridas com cores distintas. Como G é um grafo simples, somente cores $a_{i,j}$ com $i \neq j$ são usadas para colorir arestas de $G[Q]$. Logo, cada cor $a_{i,i}$ difere de todas as outras cores incidentes ao vértice v_i . Portanto, essa é uma coloração de arestas de $G[Q \cup \{u_h\}]$.

Seja B' o grafo bipartido induzido pelas arestas que possuem um extremo em Q e outro em $S \setminus \{u_h\}$. Considere o diagrama de cores $\mathcal{C}' = (C_0, C_1, \dots, C_{|Q|-1})$ construído pelo Algoritmo ColorDiagrams($|Q|, d(Q), d(u_h)$). As primeiras $d(u_h)$ seqüências em \mathcal{C}' têm tamanho $d(Q) - 1$ e as demais têm tamanho $d(Q)$. De fato $C'_i = [c, m_{i,|Q|}, \dots, m_{i,\Delta-2}]$,

quando $0 \leq i < d(u_h)$, e $C'_i = [c, m_{i,i}, m_{i,|Q|}, \dots, m_{i,\Delta-2}]$, quando $d(u_h) \leq i < |Q|$, onde $c \in F \cup \{\Delta - 1\} = \{|Q| - 1, |Q|, \dots, \Delta - 2, \Delta - 1\}$.

Lembre-se que $d_B(v_i) \leq d(Q)$, $0 \leq i < |Q|$. Como os vértices de $|Q|$ estão rotulados de forma que os primeiros $d(u_h)$ vértices sejam vizinhos de u_h , esses vértices tem grau, no máximo, $d(Q) - 1$ no grafo B' . O tamanho de uma seqüência C'_i é pelo menos $d_{B'}(v_i)$, $0 \leq i < |Q|$. Pelo Lema 4.12, C' é um diagrama de cores monotônico. Logo, pelo Lema 2.4, pode-se colorir as arestas de B' usando o diagrama de cores C' e esta é uma coloração de arestas de B' .

As cores das arestas incidentes a v_i em G são duas a duas distintas, $0 \leq i < |Q|$. De fato, para cada i , $0 \leq i < |Q|$, as cores das arestas $\{v_i, v_j\}$ pertencem a linha i da matriz A e as cores das arestas $\{v_i, u_j\}$, $u_j \in S$, pertencem a C'_i , que possui no máximo uma cor $\Delta - 1$. Lembre-se que todos os elementos da linha i da matriz A e todos os elementos de C'_i , exceto $\Delta - 1$, pertencem a linha i da matriz M e são distintos. Como M é um quadrado latino, as cores das arestas incidentes a cada v_i , $0 \leq i < |Q|$, são duas a duas distintas. Então tem-se uma $\Delta(G)$ -coloração das arestas de G e, portanto, G é Classe 1. ■

A Figura 4.3 e a Figura 4.4 mostram, respectivamente, um grafo split que pode ser colorido usando a técnica apresentada no Teorema 4.13 e a coloração obtida através dessa técnica.

Os corolários a seguir apresentam alguns casos em que o grafo split G com $d^2(Q) \geq 2|Q| + 1$ não tem um vértice em S com grau pelo menos $\frac{|Q|}{2}$ e, mesmo assim, pode ser colorido por essa técnica.

Corolário 4.14 *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com grau máximo par. Suponha que $d^2(Q) \geq 2|Q| + 1$. Se S tem um subconjunto de vértices S' tal que $N(u_i) \cap N(u_j) = \emptyset$ para todo u_i e u_j pertencentes a S' e uma das condições a seguir é satisfeita, então G é Classe 1.*

- $|N(S')| \geq \frac{|Q|}{2}$, ou
- $|N(S')| < \frac{|Q|}{2}$ e existe um conjunto $Q' = \{v : v \in Q \setminus N(S') \text{ e } d(v) < \Delta(G)\}$ tal que $|Q'| + |N(S')| \geq \frac{|Q|}{2}$.

Demonstração: Considere $S' \subset S$ tal que $N(u_i) \cap N(u_j) = \emptyset$ para cada $u_i, u_j \in S'$. Primeiro, suponha que $|N(S')| \geq \frac{|Q|}{2}$. Construa um grafo split G' a partir de G , contraindo o conjunto S' em um vértice u_h . Como $N(u_i) \cap N(u_j) = \emptyset$ para cada $u_i, u_j \in S'$, o grafo G' é simples e split. Além disso, u_h tem grau pelo menos $\frac{|Q|}{2}$. Como a desigualdade $d^2(Q) \geq 2|Q| + 1$ também é verdadeira para G' , pois os inteiros $|Q|$ e $d(Q)$ não se alteraram,

pelo Teorema 4.13, G' tem uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores. Use a cor de cada aresta de $E(G')$ que não incide em u_h para colorir a aresta correspondente em $E(G)$ e para cada vértice $u_i \in S'$, atribua a cor da aresta $\{u_h, v_j\} \in E(G')$ para a aresta $\{u_i, v_j\} \in E(G)$.

Agora, suponha que $|N(S')| < \frac{|Q|}{2}$ e que existe $Q' = \{v : v \in Q \setminus N(S') \text{ e } d(v) < \Delta(G)\}$ com $|Q'| + |N(S')| \geq \frac{|Q|}{2}$. Construa um grafo split G' a partir de G contraindo o conjunto S' a um vértice u_h e incluindo exatamente uma nova aresta $\{v_i, u_h\}$ incidente em cada $v_i \in Q'$. Como $|Q'| + |N(S')| \geq \frac{|Q|}{2}$, o vértice u_h é um vértice de G' com grau pelo menos $\frac{|Q|}{2}$. Além disso, G' é um grafo split simples, já que $N(u_i) \cap N(u_j) = \emptyset$ para cada u_i e u_j pertencentes a S' e $Q' \cap N(S') = \emptyset$. Note que $\Delta(G') = \Delta(G)$ pois foi adicionada uma única aresta a cada vértice que possui grau menor que $\Delta(G)$. Finalmente, a desigualdade $d^2(Q) \geq 2|Q| + 1$ também é verdade para G' , pois os inteiros $|Q|$ e $d(Q)$ não se alteram. A atribuição de cores às arestas de $E(G)$ é análoga ao caso anterior. Portanto, tem-se uma coloração de arestas para G com $\Delta(G)$ cores. ■

Corolário 4.15 *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com grau máximo par e $d^2(Q) \geq 2|Q| + 1$. Se $|N(S)| \leq \frac{|Q|}{2}$, então G é Classe 1.*

Demonstração: Suponha $|N(S)| \leq \frac{|Q|}{2}$. Então, existem pelo menos $\lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$ vértices em Q com grau $|Q| - 1$. Rotule os vértices $v_0, \dots, v_{|Q|-1}$ em Q de forma que $d(v_0) \leq d(v_1) \leq \dots \leq d(v_{|Q|-1})$.

Vamos colorir G com $\Delta(G)$ cores. Execute o Algoritmo ColorDiagrams($|Q|, d(Q), \lceil \frac{|Q|}{2} \rceil$). Por hipótese, $d^2(Q) \geq 2|Q| + 1$, logo, pelo Lema 4.12, a seqüência \mathcal{C}' construída pelo algoritmo Colordigrams é monotônica.

Para colorir a aresta $\{v_i, v_j\}$ de $G[Q]$, $0 \leq i, j \leq |Q| - 1$, use a cor $a_{i,j}$ da matriz A construída pelo algoritmo.

Seja B o grafo bipartido associado a G . Resta colorir as arestas de B . Seja $x = |Q| - |N(S)|$. Logo, v_x é o primeiro vértice em Q tal que $d_B v_x > 0$. Considere a seqüência $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}'$ formada pelos vetores C'_i , $x \leq i < |Q|$.

O diagrama de cores \mathcal{T} é monotônico. De fato, seja $t_{i,j} \in T_i$ um elemento de um dos vetores de cores em \mathcal{T} . Pela construção de \mathcal{T} , existe um vetor C'_k , $k > i$, tal que $T_i = C'_k$ e, portanto, $|T_i|$ é exatamente igual a $|C'_k|$. Como $i < k$, há menos vetores de cores precedendo T_i que C'_k . Além disso, se há algum vetor de cores $T_{i'}$, $i' < i$, então existe em \mathcal{C}' algum vetor de cores $C'_{k'}$, $k' < k$, tal que $C'_{k'}$ é exatamente igual a $T_{i'}$. Portanto, o número de cores iguais a $t_{i,j}$ que precedem T_i em \mathcal{T} é menor ou igual a $|C'_k| - j = |T_i| - j$.

Então, pelo Lema 2.4, nós podemos colorir as arestas do grafo bipartido B usando o diagrama de cores \mathcal{T} .

Para verificar que as cores das arestas incidentes a $v_i \in V(G)$, $0 \leq i < |Q|$, são duas a duas distintas, os argumentos são os mesmos apresentados no Teorema 4.13. Portanto,

G é Classe 1. ■

A coloração de arestas de grafos split usando quadrados latinos de ordem ímpar foi apresentada no evento *Seventh Cologne Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, em 2008, na cidade de Gargnano, Itália. Um resumo deste trabalho foi publicado em [4].

Capítulo 5

Classificação de Grafos Split pelo Índice Cromático do Semi-Núcleo

Como visto na seção 2.5, o estudo do núcleo de um grafo fornece informações úteis para resolver o Problema da Classificação. O mesmo se pode dizer do *semi-núcleo* de um grafo G , definido como o subgrafo induzido pelo núcleo de G e sua vizinhança. A Figura 5.1 apresenta um grafo com os vértices do seu núcleo preenchidos de preto e o seu semi-núcleo circundado por um retângulo cinza de bordas tracejadas.

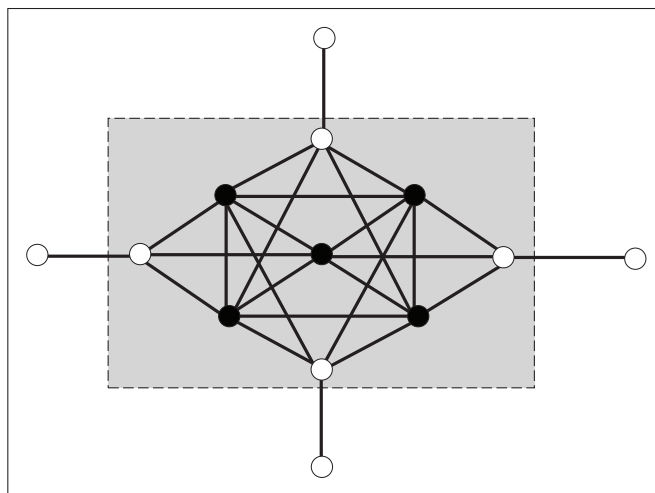


Figura 5.1: Grafo com vértices do núcleo preenchidos de preto e semi-núcleo no retângulo cinza.

Em 2010, Machado e Figueiredo [36] enunciaram o seguinte teorema.

Teorema 5.1 [36] *O índice cromático de um grafo G é igual ao índice cromático do seu semi-núcleo.*

Neste capítulo, usamos o semi-núcleo H de um grafo split G para determinar o índice cromático de G . Considerando grafos split, encontrar o índice cromático de H pode ser tão difícil quanto encontrar o índice cromático de G , pois o semi-núcleo de um grafo split é também um grafo split. Entretanto mostraremos que, em alguns casos específicos, essa abordagem é útil na classificação desses grafos. Por exemplo, o próximo teorema é resultado da aplicação da técnica de Plantholt para colorir grafos com vértice universal (Teorema 1.10) em semi-núcleos de grafos split.

Teorema 5.2 *Sejam $G = [Q, S]$ um grafo split e H o seu semi-núcleo. Se H tem um vértice universal, então G é Classe 2 se, e somente se, H é sobrecarregado.*

Demonstração: Sejam $G = [Q, S]$ um grafo split e H o seu semi-núcleo. Como ser split é uma propriedade hereditária, o grafo H também é um grafo split. Pela definição de semi-núcleo, $\Delta(H) = \Delta(G)$. Para determinar o índice cromático de G , pelo Teorema 5.1, é suficiente calcular o índice cromático de H . Por hipótese, H tem um vértice universal. Logo, pelo Teorema 1.10, H é Classe 2 se, e somente se, H é sobrecarregado. Portanto, G é Classe 2 se, e somente se, H é sobrecarregado. ■

Como o problema da classificação está resolvido para todo grafo simples que possui um vértice universal, vamos considerar grafos split cujo semi-núcleo não possui vértice universal. Considere um grafo split $G = [Q, S]$ cujo semi-núcleo $H = [Q, S_H]$ não possui vértice universal. Lembre-se que todo grafo split possui um subgrafo bipartido associado a si. Seja $B = [Q, S_H]$, o subgrafo bipartido associado a H . Seja X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices do grafo split G . Note que X também é o conjunto dos $\Delta(H)$ -vértices. Segundo o Teorema de Hall (Teorema 1.6), B contém um emparelhamento que cobre os vértices de X se, e somente se, X satisfaz a condição de Hall para o subgrafo bipartido B . Neste caso, pelo Teorema 2.10, H é Classe 1 e, conseqüentemente, G é Classe 1. O resultado a seguir garante que se $d_G(Q) \geq |X| - 1$ e H não possui vértice universal, então X satisfaz a condição de Hall no subgrafo bipartido associado a H .

Lema 5.3 *Sejam $G = [Q, S]$ um grafo split, X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices e H o semi-núcleo de G . Se H não tem vértice universal e $d_G(Q) \geq |X| - 1$, então para cada $A \subseteq X$, $|N(A) \cap S| \geq |A|$.*

Demonstração: Sejam H o semi-núcleo do grafo split $G = [Q, S]$ e X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices. Então H é um grafo split com partição $[Q, N(X) \cap S]$. Como qualquer $\Delta(G)$ -vértice é também um $\Delta(H)$ -vértice, $d_H(Q) \geq |X| - 1$. Por hipótese, H não tem vértice universal, então existem dois vértices distintos, v_i e v_j pertencentes a X , tais que

$N_H(v_i) \neq N_H(v_j)$. Portanto, $|N(X) \cap S| \geq d(Q) + 1$. Como $d(Q) + 1 \geq |X|$, tem-se $|N(X) \cap S| \geq |X|$. Logo, o conjunto $|X|$ satisfaz $|N(X) \cap S| \geq |X|$; e para cada subconjunto $A \subset X$ tal que $|A| \leq |X| - 1$, $|N(A) \cap S| \geq |X| - 1$, pois $d(Q) \geq |X| - 1$, validando o lema. ■

Usando o lema acima, é possível classificar o subconjunto dos grafos split com grau máximo par que possuem $d(Q) \geq |X| - 1$, onde X é o conjunto dos Δ -vértices do grafo.

Teorema 5.4 *Sejam $G = [Q, S]$ um grafo split e X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices. Se $d(Q) \geq |X| - 1$, então G é Classe 2 se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado.*

Demonstração: Sejam $G = [Q, S]$ um grafo split, H o seu semi-núcleo e X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices.

Se H tem vértice universal, então pelo Teorema 5.2, G é Classe 2 se, e somente se, H é sobrecarregado. Se H é sobrecarregado, G é vizinhança-sobrecarregado.

Suponha que H não tem vértice universal. Por hipótese, $d(Q) \geq |X| - 1$. Logo, pelo Lema 5.3 e pelo Teorema 2.10, H é Classe 1. Pelo Teorema 5.1, G é Classe 1. Portanto, G é Classe 2 se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado. ■

Considere um grafo split $G = [Q, S]$ com $\Delta(G)$ par. Seja X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices. No Teorema 2.13, Tan e Hung [49] provaram que quando $\Delta(G_\Delta) \leq 2$, o grafo split G é Classe 2 se, e somente se, G é sobrecarregado. Note que nesses grafos $|X| \leq 3$. Considere o grafo H induzido por $N[X]$ com $|X| = 3$. Se H possuir vértice universal, os três $\Delta(G)$ -vértices são gêmeos. Logo, pelo Teorema 1.10, H é Classe 1 se, e somente se, H não é sobrecarregado e, pelo Teorema 5.1, G é Classe 1 se, e somente se, G não é vizinhança-sobrecarregado. Suponha que H não possui vértice universal. Se $d(Q) \geq |X| - 1$, pelo Lema 5.3 e pelo Teorema 2.10, G é Classe 1. Então, os grafos split Classe 2 com $|X| = 3$ possuem $d(Q) = 0$ ou $d(Q) = 1$. Sendo assim, K_3 e $K_5 \setminus \alpha$, onde $\alpha \in E(K_5)$, são os únicos grafos split Classe 2 com $\Delta(G_\Delta) = 2$.

Considere agora um grafo split G com $\Delta(G)$ par, $|X| \geq 4$ e $d(Q) = |X| - 2$. Note que $\Delta(G) = |Q| + |X| - 3$ e $\Delta(G_\Delta) \geq 3$. Mostraremos primeiro que G não é vizinhança-sobrecarregado. Em seguida, mostraremos que se $|X|$ é ímpar, então G é Classe 1.

Lema 5.5 *Sejam $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par e X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices. Se $|X| \geq 4$ e $d(Q) = |X| - 2$, então G não é vizinhança-sobrecarregado.*

Demonstração: Sejam $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par e X o conjunto dos seus $\Delta(G)$ -vértices. Por hipótese, assumamos $|X| \geq 4$ e $d(Q) = |X| - 2$. Note que, como $\Delta(G) = |Q| + d(Q) - 1$, então $\Delta(G) = |Q| + |X| - 3$. Suponha que G é vizinhança-sobrecarregado,

então, pelo Lema 3.2, a condição $(d(Q))^2 \leq |Q| - 3$ implica $|Q| \geq (|X| - 2)^2 + 3$ e, pelo Teorema 3.3, $|Q| - \frac{\Delta(G)}{2} + \binom{d(Q)}{2} + 1 \leq |X|$ implica $|Q| \leq -|X|^2 + 8|X| - 11$. Essas desigualdades implicam que existe um grafo split que é vizinhança-sobrecarregado se, e somente se, $|X| = 3$. Portanto, G não é vizinhança-sobrecarregado. ■

Lema 5.6 *Sejam $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par e X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices. Se $d(Q) = |X| - 2$, $|X|$ é ímpar e $|X| > 4$, então G é Classe 1.*

Demonstração: Sejam $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par e $d(Q) = |X| - 2$, onde X é o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices com $|X| > 4$ e $|X|$ ímpar. Pelo Lema 5.5, G não é vizinhança-sobrecarregado.

Como $\Delta(G) = |Q| + d(Q) - 1$, tem-se $\Delta(G) = |Q| + |X| - 3$. Por hipótese, $|X|$ é ímpar e $\Delta(G)$ é par. Logo $|Q|$ é par.

Para determinar o índice cromático de G , pelo Teorema 5.1, é suficiente determinar o índice cromático do semi-núcleo de G . Como Q é uma clique maximal, $X \subseteq Q$. Considere o semi-núcleo H de G . Por definição de semi-núcleo, $H = [Q, S_H]$ é um grafo split com partição Q e $S_H = N(X) \cap S$, com $\Delta(H) = \Delta(G) = \Delta$. Como G não é vizinhança-sobrecarregado, para cada Δ -vértice v , $G[N[v]]$ não é sobrecarregado. Logo, H não é vizinhança-sobrecarregado, pois $G[N[v]] = H[N[v]]$ para todo Δ -vértice v . Se H tem um vértice universal, pelo Teorema 1.10, H é Classe 1.

Agora, suponha que H não tem vértice universal. Então existem em X dois Δ -vértices, v e w , tais que $N[v] \neq N[w]$. Logo, $|S_H| \geq d(Q) + 1 = |X| - 1$. Se $|N(A) \cap S_H| \geq |A|$ para todo $A \subseteq X$, então, pelo Teorema 2.10, H é Classe 1 e o lema está provado. Resta considerar o caso em que existe um subconjunto $A \subset X$ tal que $|N(A) \cap S_H| < |A|$. Nesse caso, apresentaremos uma Δ -coloração de arestas para H .

Como $d(Q) = |X| - 2$, se $|N(A) \cap S_H| < |A|$, então ou $|A| = |X| - 1$ e $|N(A) \cap S_H| = |X| - 2$ ou $|A| = |X|$ e $|N(A) \cap S_H| = |X| - 1$. (Note que, quando $|A| = |X|$, $|N(A) \cap S_H|$ só pode ser igual a $|X| - 1$, pois estamos considerando que H não tem vértice universal.) Em ambos os casos, existem pelo menos dois Δ -vértices que são gêmeos, sejam eles y e z . Note que $|N(y) \cap S_H| = |N(z) \cap S_H| = d_H(Q) = d_G(Q) = d(Q)$. Seja u um vértice de grau mínimo pertencente a $N(y) \cap S_H$ e seja M um emparelhamento em H com $|X| - 2$ arestas que cobre $X \setminus \{y, z\}$ e não incide em u . Considere o conjunto de arestas $M' = M \cup \{\{y, u\}, \{z, u\}\}$. Note que tanto $M \cup \{\{y, u\}\}$ quanto $M \cup \{\{z, u\}\}$ são emparelhamentos.

Construa, a partir de H , um grafo split $H' = [Q_{H'}, S_{H'}]$ de forma que $H' = (V(H) \cup V_f, (E(H) \setminus M') \cup E_f)$, onde o conjunto de vértices V_f é formado por $\Delta - d_H(v) - 1$ novos vértices de grau 1 adjacentes a cada vértice $v \in Q$ e o conjunto de arestas E_f são as respectivas arestas incidentes aos vértices do conjunto V_f . Note que $Q_{H'} = Q$ e

$S_{H'} = S_H \cup V_f$, o conjunto dos $\Delta(H)$ -vértices é X , o conjunto dos $\Delta(H')$ -vértices é $Q_{H'}$ e $\Delta(H') = \Delta(H) - 1$.

Como $\Delta(H')$ é ímpar e H' é um grafo split, H' tem uma $\Delta(H')$ -coloração, com cores $\{0, 1, \dots, \Delta(H') - 1\}$, dada pelo algoritmo de Chen, Fu, e Ko [12]. Vamos denotar por y' , z' e u' os vértices em H' que correspondem, respectivamente, aos vértices y , z e u pertencentes ao grafo H . Considere uma ordem λ dos vértices de $S_{H'}$ tal que os vértices em $N_{H'}(y') \cap S'_H$ sejam os primeiros e o vértice u' seja o último na ordem. Agora, ordene os vértices em $Q_{H'}$ de forma que y' e z' sejam os dois primeiros vértices em uma ordem CFK em relação a λ . Tal ordem para os vértices de $Q_{H'}$ existe. Para verificar este fato, considere o subconjunto $S_{H_2} \subseteq S_{H'}$, com $S_{H_2} = (u'_0, u'_1, \dots, u'_h)$, tal que h é o menor número para o qual $|N_{H'}(S_{H_2})| \geq \frac{|Q|}{2}$. Considere também o subgrafo $H_2 = [Q_{H'}, S_{H_2}]$ induzido pelas arestas de H' com um extremo em $Q_{H'}$ e outro em S_{H_2} . Note que H_2 é definido de acordo com a forma como será construído pelo algoritmo de Chen, Fu e Ko. Se $|N_{H_2}(y')| < |S_{H_2}| = h + 1$, então $\{y', u'_h\} \notin E(H')$ e $\{z', u'_h\} \notin E(H')$. Neste caso, $d_{H_2}(y') = d_{H_2}(Q_{H'})$ e, portanto, $d_{H_2}(v) \leq d_{H_2}(y')$ para cada vértice $v \in Q_{H'}$. Caso contrário, se $|N_{H_2}(y')| \geq h + 1$, então $d_{H_2}(y') = h + 1 = |S_{H_2}|$, $\{y', u'_h\} \in E(H')$ e, como y' e z' são gêmeos, $\{z', u'_h\} \in E(H')$. Neste caso, para todo vértice v , $v \neq y'$ e $v \neq z'$, tal que $\{v, u'_h\} \in E(H')$ tem-se $d_{H_2}(v) \leq d_{H_2}(y') = h + 1$. Portanto, y' e z' podem ser os dois primeiros vértices na ordem CFK em relação a λ , ou seja, $v_0 = y'$ e $v_1 = z'$. Atribua uma coloração π' para as arestas do grafo H' , aplicando o algoritmo de Chen, Fu e Ko, utilizando as ordens λ e CFK descritas.

Para colorir as arestas de H , ordene os vértices em Q e em S_H de forma que obedecem a mesma ordem que seus respectivos correspondentes em H' . Vamos denotar por v'_i o vértice de $Q_{H'}$ correspondente a $v_i \in Q_H$, $0 \leq i < |Q|$. Usaremos as cores aplicadas as arestas correspondentes em H' e nos restará colorir as arestas de M' . Como $M' = M \cup \{\{y, u\}, \{z, u\}\}$ e M é um emparelhamento que não cobre os vértices y , z e u , podemos usar uma nova cor para colorir o conjunto de arestas $M \cup \{\{y, u\}\}$ ou o conjunto de arestas $M \cup \{\{z, u\}\}$, mas não ambos.

Pela própria forma de se construir o quadrado latino, apresentada em 1.1, pode-se notar que após a coloração de H' cada aresta $\{v_i, v_j\} \in Q_{H'}$ tal que $i + j = |Q| - 1 \pmod{\Delta - 1}$ será colorida com a cor $|Q| - 1$. Mais ainda, como $|Q|$ é par, nenhuma aresta incidente em vértices de $S_{H'}$ será colorida com a cor $|Q| - 1$. Neste caso, podemos trocar a cor da aresta $\{v_0, v_{|Q|-1}\}$ por uma nova cor $\Delta(H) - 1$, colorir a aresta $\{v_0, u\}$ com a cor $|Q| - 1$ e colorir as arestas de $M \cup \{\{v_1, u\}\}$ com a cor $\Delta(H) - 1$. Entretanto, se $v_{|Q|-1}$ for um $\Delta(H)$ -vértice, então está coberto por M e a cor $\Delta(H) - 1$ incide duas vezes sobre esse vértice (nas arestas $\{v_0, v_{|Q|-1}\}$ e $\{v_{|Q|-1}, u_m\} \in M$). Como $\Delta(G) = |Q| + d(Q) - 1$ e $d(Q) = |X| - 2$, sabemos que $|Q| > |X|$, caso contrário, $\Delta(G)$ é ímpar, contradizendo a hipótese. Como $|Q| > |X| > 4$, tem-se $v_0 \neq v_{(|Q|-1)}$ e $v_1 \neq v_{|Q|-1}$. Como $M \cup \{v_0, u\}$ é um

emparelhamento, e a aresta $\{v_{|Q|-1}, u_m\}$ pertence a esse emparelhamento, $u \neq u_m$. Como a cor $|Q| - 1$ já não incide no vértice $v_{|Q|-1}$ e incide somente no vértice u do conjunto S_H , podemos substituir a cor da aresta $\{v_{|Q|-1}, u_m\}$ pela cor $|Q| - 1$. Portanto, se $|Q|$ é par, H tem uma $\Delta(H)$ -coloração de arestas.

Pelo teorema 5.1, G é Classe 1. ■

No Teorema 5.7, a seguir, classificamos os grafos split com grau máximo par que possuem $|Q|$ par, $d(Q) \geq |X| - 2$, onde X é o conjunto dos seus Δ -vértices.

Teorema 5.7 *Sejam $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par e X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices com $|X|$ ímpar. Se $d(Q) \geq |X| - 2$, então G é Classe 2 se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado.*

Demonstração: Considere um grafo split $G = [Q, S]$ com $\Delta(G)$ par e seja X o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices com $|X|$ ímpar.

Se $d(Q) \geq |X| - 1$, então, pelo Teorema 5.4, G é Classe 2 se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado.

Seja $d(Q) = |X| - 2$. Se $|X| = 3$, então $d(Q) \geq 1$ e $\Delta(G_\Delta) \leq 2$. Pelo Teorema 2.13, G é Classe 2 se, e somente se, G é sobrecarregado. Finalmente, se $|X| > 4$, o teorema segue pelo Lema 5.6. ■

A técnica de coloração apresentada no Lema 5.6 não pode ser diretamente aplicada a um grafo split G com $\Delta(G)$ par, $|X| > 4$ e $d(Q) = |X| - 2$ que possua $|X|$ par. Note que, neste caso, $|Q|$ é ímpar e a aresta $\{v_{(|Q|-1)/2}, u_h\}$ está colorida com a cor $|Q| - 1$ e para que a técnica apresentada seja aplicada com êxito, é preciso garantir que $u \neq u_h$ e $u_m \neq u_h$. Por contradição, suponha que $u_h = u$, então, $u'_h = u'$ no grafo H' . Logo, $|S_{H'}| = h + 1$. Então, $|N_{H'}(S_{H_2}) \setminus \{u'\}| < |Q|/2$. Isso implica que existem $|Q|/2 + 1$ vértices de $Q_{H'}$ que não são adjacentes aos vértices u'_0, \dots, u'_{h-1} pertencentes a S_{H_2} . Como $d_{H'}(v) \geq 1$ para cada v pertencente a $Q_{H'}$, então $d_{H'}(u') \geq |Q|/2 + 1$. Portanto, $d_{H'}(u') > d_{H'}(u'_0)$. Um absurdo, já que u'_0 e u' pertencem a $N_{H'}(y')$ e escolhemos u' como sendo um vértice com o menor grau em $N_{H'}(y')$.

Não é tão simples assim garantir que $u_m \neq u_h$. Para tanto, é preciso encontrar um emparelhamento M que cobre o conjunto de vértices $X \setminus \{y, z\}$, não cobre o vértice u e ao qual a aresta $\{v_{|Q|-1}, u_h\}$ não pertence. Além disso, a ordem escolhida para os vértices de S_H pode interferir na determinação de u_h e, conseqüentemente, na existência de tal emparelhamento.

A Figura 5.2 mostra um grafo split com Δ par, $|X| \geq 4$, $d(Q) = |X| - 2$ e $|Q|$ ímpar no qual é feita uma ordenação dos vértices de S_H e um emparelhamento que permitem a coloração de G .

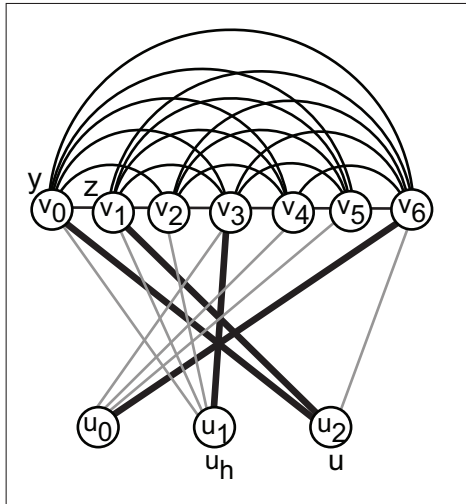


Figura 5.2: Grafo split com Δ par e $|X|$ par que possui emparelhamento para coloração.

A Figura 5.3 mostra um grafo split com Δ par, $|X| \geq 4$, $d(Q) = |X| - 2$ e $|Q|$ ímpar no qual é feita uma ordenação dos vértices de S_H e um emparelhamento que não permitem a coloração de G . Observe que os grafos das figuras 5.2 e 5.3 são isomorfos.

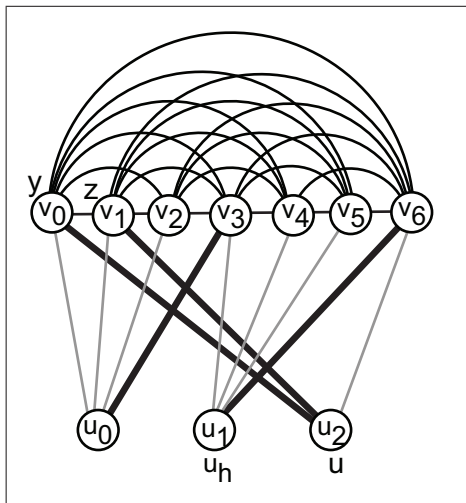


Figura 5.3: Grafo split com Δ par e $|X|$ par que não possui emparelhamento para coloração.

Durante o desenvolvimento desta tese, tentamos aplicar a mesma técnica para classificar grafos split com $d(Q) = |X| - i$, $i \geq 3$, e notamos que a dificuldade de se utilizar esta técnica aumenta a medida que o número de vértices não cobertos pelo emparelhamento

aumenta. Note que o número de Δ -vértices não cobertos pelo emparelhamento M é igual a diferença entre $|X|$ e $|N(X) \cap S|$ e no Lema 5.6, $|X| - |N(X) \cap S| = 1$, sendo necessária apenas mais uma cor disponível (a cor $|Q| - 1$) para colorir uma das arestas incidentes ao vértice não coberto pelo emparelhamento.

Esta classificação de alguns grafos split pelo índice cromático do semi-núcleo foi publicada em [6].

Capítulo 6

Estendendo a Técnica de Plantholt

Como visto na seção 1.3.4, em 1981 Plantholt [44] resolveu o Problema da Classificação para os grafos simples com vértice universal. O autor apresentou uma técnica capaz de colorir com Δ cores os grafos com vértice universal que não são sobrecarregados e têm grau máximo par. Neste capítulo, será apresentada uma adaptação da técnica de Plantholt que permite uma Δ -coloração de arestas em alguns grafos split sem vértice universal e com grau máximo par.

Dizemos que *a cor c falta no vértice v* quando c não é usada para colorir nenhuma aresta incidente em v . Seja $G = [Q, S]$ um grafo split sem vértice universal, com grau máximo par e que não é vizinhança-sobrecarregado. Considere o subgrafo $G' = G[N[v]]$, onde v é um $\Delta(G)$ -vértice. Note que G' é um grafo split com vértice universal que não é sobrecarregado e $\Delta(G')$ é par e igual a $\Delta(G)$. Logo, a técnica de Plantholt pode ser aplicada para colorir as arestas de G' com $\Delta(G)$ cores. Note que existem vértices em G' que não são $\Delta(G')$ -vértices. Logo, ao aplicarmos a técnica de Plantholt para colorir as arestas de G' , algumas cores faltarão em alguns vértices. Seja $P = V(G) \setminus N[v]$. Note que toda aresta incidente em P não pertence a $E(G')$ e, portanto, não pode ser colorida quando usamos a técnica de Plantholt. Neste capítulo apresentamos condições suficientes para garantir que as cores que faltam nos vértices do subgrafo G' colorido com a técnica de Plantholt possam ser distribuídas de forma a garantir a coloração das arestas que incidem em P . Mais ainda, mostraremos que verificar se o grafo split sem vértice universal G satisfaz as condições para que esta técnica seja aplicada tem complexidade de tempo polinomial e que o algoritmo para coloração de arestas de G também é polinomial.

6.1 A técnica de coloração de Plantholt estendida

Seja G um grafo com vértice universal e $\Delta(G) = n$, onde n é par. Note que $|V(G)| = n + 1$. Plantholt particiona os $n + 1$ vértices de $V(G)$ em dois conjuntos L e R com tamanhos

$\frac{n}{2} + 1$ e $\frac{n}{2}$, respectivamente. Em seguida, mostra que os subgrafos induzidos por L e por R são subgrafos de grafos completos que podem ser coloridos com as mesmas $\frac{n}{2}$ cores. Como o sucesso da aplicação da técnica de particionamento de Plantholt em grafos sem vértice universal depende diretamente de quantas e quais são as cores não utilizadas por Plantholt na coloração das arestas de $G[R]$ e de $G[L]$, começaremos por determinar com mais precisão as cores que faltam nos vértices desses subgrafos. A partir do Lema 1.3 e dos corolários 1.5 e 1.4 da seção 1.3.2.3, pode-se validar algumas propriedades da coloração equilibrada de subgrafos dos grafos completos, como apresentamos nos lemas a seguir.

Lema 6.1 *Seja n um inteiro par e $G \cong K_n \setminus F$, onde F é um subconjunto de $E(K_n)$ com $|F| = f$. Então G tem uma $(n - 1)$ -coloração equilibrada onde cada uma de $f' = \min\{f, n - 1\}$ cores faltam em dois vértices de G .*

Demonstração: Seja F um subconjunto de $E(K_n)$ com $|F| = f$ e $G = K_n \setminus F$. Por hipótese, n é par, então pelo Teorema 1.2, K_n tem uma $(n - 1)$ -coloração de arestas. Como G é subgrafo de K_n , o grafo G também tem uma $n - 1$ -coloração. Logo, pelo Lema 1.3, G tem uma $(n - 1)$ -coloração equilibrada. Pela definição de coloração equilibrada e porque $|E(G)| = \frac{n(n-1)}{2} - f$, cada classe de cor de uma $(n - 1)$ -coloração equilibrada de G ou tem tamanho $\frac{n}{2} - \left\lceil \frac{f}{n-1} \right\rceil$ ou tem tamanho $\frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{f}{n-1} \right\rfloor$.

Se $f \geq n - 1$, cada uma das $n - 1$ classes de cor tem tamanho máximo $\frac{n}{2} - 1$ e corresponde a uma cor que falta em pelo menos dois vértices. Se, por outro lado, $f < n - 1$, então existem f classes de cor com tamanho $\frac{n}{2} - 1$ e $n - 1 - f$ classes de cor com tamanho $\frac{n}{2}$. Neste caso, cada uma das f classes de cor de tamanho $\frac{n}{2} - 1$ corresponde a uma cor que falta em dois vértices de G . ■

Lema 6.2 *Seja n um inteiro ímpar e $G \cong K_n \setminus F$, onde F é um subconjunto de $E(K_n)$ com $|F| = f$, $f \geq \frac{n-1}{2}$. Então G tem uma $(n - 1)$ -coloração equilibrada e*

- se $\frac{n-1}{2} \leq f \leq \frac{3(n-1)}{2}$, cada uma de $f - \frac{n-1}{2}$ cores falta em exatamente três vértices de G e cada uma das $\frac{3(n-1)}{2} - f$ cores restantes falta em exatamente um vértice de G ;
- se $f \geq \frac{3(n-1)}{2}$, toda cor falta em pelo menos três vértices de G .

Demonstração: O grafo G descrito no enunciado deste lema tem uma $(n - 1)$ -coloração equilibrada. De fato, se G tem grau máximo menor que $n - 1$, por Vizing [51] e pela definição de coloração de arestas, G tem uma $(n - 1)$ -coloração. Se $\Delta(G) = n - 1$, então G tem um vértice universal. Por hipótese, $|E(\overline{G})| = |F| = f \geq \frac{n-1}{2}$, então G não é

sobrecarregado e, pelo Teorema 1.10, G tem uma $(n - 1)$ -coloração. Em ambos os casos, pelo Lema 1.3, G tem uma $(n - 1)$ -coloração equilibrada.

Se $\frac{n-1}{2} \leq f \leq \frac{3(n-1)}{2}$, então uma $(n - 1)$ -coloração equilibrada de G corresponde a $f - \frac{n-1}{2}$ classes de cor com tamanho $\frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$ e $n - 1 - (f - \frac{n-1}{2}) = \frac{3(n-1)}{2} - f$ classes de cor com tamanho $\frac{n-1}{2}$. Portanto, cada uma de $f - \frac{n-1}{2}$ cores falta em exatamente três vértices e cada uma das outras $\frac{3(n-1)}{2} - f$ cores falta em exatamente um vértice.

Note que, quando $f = \frac{3(n-1)}{2}$, todas as cores faltam em exatamente três vértices. Portanto, quando $f > \frac{3(n-1)}{2}$, toda cor de uma $(n - 1)$ -coloração equilibrada de G falta em pelo menos três vértices de G . ■

O Teorema a seguir apresenta condições suficientes para que um grafo split G com $\Delta(G)$ par seja Classe 1. Antes, para facilitar a compreensão, vamos apresentar em linhas gerais como será feita a coloração de um grafo split $G = [Q, S]$ com $\Delta(G)$ par, sem vértice universal e que satisfaz as condições do teorema a seguir. Nós particionamos G em dois subgrafos de forma que cada um deles possua uma $\frac{\Delta(G)}{2}$ -coloração de arestas. Para fazer isso, usamos um $\Delta(G)$ -vértice especial, v , e particionamos o conjunto $V(G)$ em $N[v]$ e $P = V(G) \setminus N[v]$. Note que $P \subset S$. Em seguida, particionamos $N[v]$ em dois conjuntos, L e R , de forma que o subconjunto R tenha $\frac{\Delta(G)}{2}$ vértices de Q e contenha, obrigatoriamente, o subconjunto $N(P)$. Note que $|L| = \frac{\Delta(G)}{2} + 1$. O subgrafo de G induzido pelas arestas que possuem um extremo em R e outro em $L \cup P$ é um grafo bipartido cujo grau máximo não excede $\frac{\Delta(G)}{2} + 1$. As demais arestas de G possuem ambos os extremos em R ou em L e induzem os subgrafos $G[R]$ com $\Delta(G[R]) = \frac{\Delta(G)}{2} - 1$ e $G[L]$ com $\Delta(G[L]) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$. Nós escolhemos uma aresta incidente a cada vértice com grau $\frac{\Delta(G)}{2} + 1$ no subgrafo bipartido e denotamos esse conjunto de arestas por F . Em seguida, mostramos que é possível colorir $E(G[R]) \cup E(G[L]) \cup F$ com $\frac{\Delta(G)}{2}$ cores. O grau máximo do grafo bipartido sem as arestas do conjunto F não excede $\frac{\Delta(G)}{2}$ e, pelo Teorema 1.9, este subgrafo pode ser colorido com $\frac{\Delta(G)}{2}$ novas cores. Como todas as arestas de G podem ser apropriadamente coloridas e são usadas $\Delta(G)$ cores, o grafo G é Classe 1.

Teorema 6.3 *Seja $G = [Q, S]$ um grafo split com $\Delta(G)$ par. O grafo G é Classe 1 se existe um $\Delta(G)$ -vértice v tal que $N[v]$ admite uma partição $[L, R]$ que obedece as seguintes condições.*

1. $R \subset Q$;
2. $|R| = \frac{\Delta(G)}{2}$;
3. os vértices em L não são adjacentes a vértices do conjunto $V(G) \setminus (L \cup R)$;
4. $\overline{G[L]}$ tem $f \geq \frac{\Delta(G)}{4}$ arestas; e

5. o número máximo de $\Delta(G)$ -vértices em R é $f' = \min\{f, \frac{\Delta(G)}{2}\}$

Demonstração: Seja G um grafo split com partição $[Q, S]$ e $\Delta = \Delta(G)$ par. Suponha que existe um Δ -vértice v em G tal que $N[v]$ admite uma partição $[L, R]$ como a descrita no enunciado deste teorema e seja $P = V(G) \setminus (L \cup R)$. (Para um exemplo de como particionar os vértices de G , veja a Figura 6.1.)

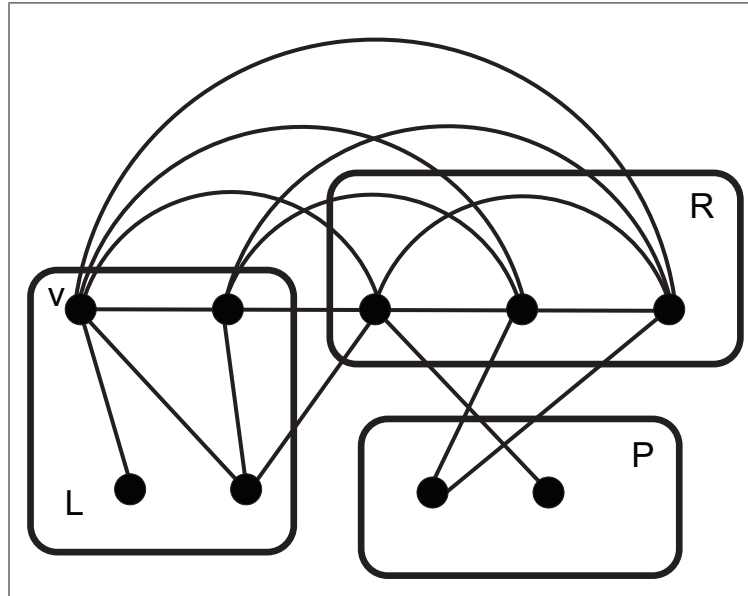


Figura 6.1: Grafo split com os vértices particionados em L , R e P .

Como v é um Δ -vértice, $|N[v]| = \Delta + 1$. Como, por hipótese, $N[v] = L \cup R$ e $|R| = \frac{\Delta}{2}$, tem-se $|L| = \frac{\Delta}{2} + 1$. Logo, o maior grau possível para um vértice do conjunto L no subgrafo $G[L]$ é $\frac{\Delta}{2}$. Note que $G[R]$ tem grau máximo $\frac{\Delta}{2} - 1$. De fato, por hipótese, $R \subset Q$ e $|R| = \frac{\Delta}{2}$. Logo, o grafo $G[R]$ é isomorfo a um $K_{\frac{\Delta}{2}}$. A forma de colorir os subgrafos $G[R]$ e $G[L]$ depende da paridade de $\frac{\Delta}{2}$. Portanto, o problema será dividido em dois casos: $\frac{\Delta}{2}$ é ímpar ou $\frac{\Delta}{2}$ é par.

Caso 1: $\frac{\Delta}{2}$ é ímpar.

O grafo $G[L]$ é isomorfo a algum subgrafo do $K_{\frac{\Delta}{2}+1}$ e, por hipótese, $\overline{G[L]}$ tem $f \geq \frac{\Delta}{4}$ arestas. Pelo Lema 6.1, $G[L]$ tem uma $\frac{\Delta}{2}$ -coloração equilibrada onde cada cor c_i falta em pelo menos dois vértices pertencentes a L , $1 \leq i \leq f' = \min\{f, \frac{\Delta}{2}\}$.

Seja $R = \{v_1, v_2, \dots, v_{\frac{\Delta}{2}}\}$ e seja $J = \{v_1, v_2, \dots, v_{|J|}\}$ o subconjunto dos vértices de R que são adjacentes a todos os vértices de L . Cada vértice pertencente ao conjunto J é adjacente a $\frac{\Delta}{2} - 1$ vértices do conjunto R e a $\frac{\Delta}{2} + 1$ vértices do conjunto L . Portanto,

cada vértice do conjunto J é um $\Delta(G)$ -vértice. Por hipótese, há no máximo f' vértices de grau $\Delta(G)$ em R . Logo, $|J| \leq f'$. (Note que no exemplo da Figura 6.1, $J = \emptyset$. A Figura 6.2 mostra um exemplo em que $J = \{v_1, v_2\}$.)

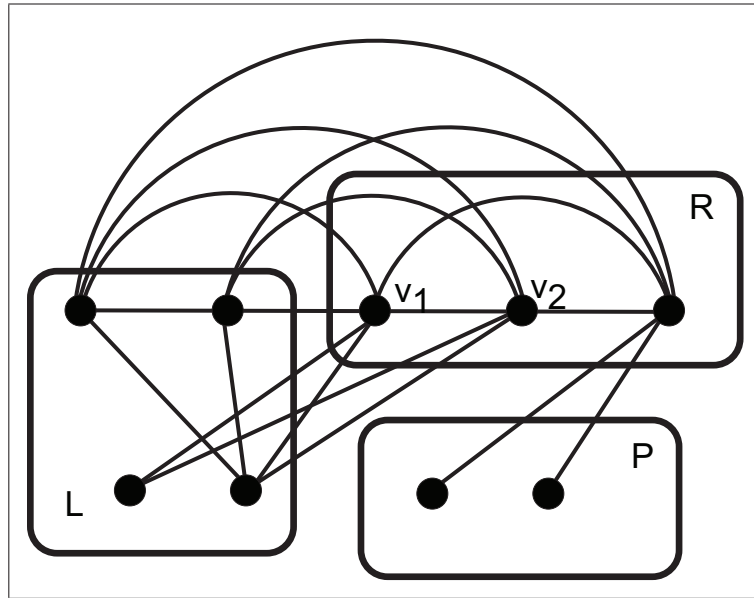


Figura 6.2: Grafo split com partição $[L, R, P]$ e $|J| = 2$.

O grafo $G[R]$ é isomorfo a $K_{\frac{\Delta}{2}}$ e $\frac{\Delta}{2}$ é ímpar. Pelo Corolário 1.5, $G[R]$ pode ser colorido com $\frac{\Delta}{2}$ cores de forma que em cada vértice falte uma cor distinta e cada cor falte em exatamente um vértice. Pela simetria de $G[R]$, pode-se escolher qual cor c_i faltará no vértice v_i , $1 \leq i \leq \frac{\Delta}{2}$. Como $|J| \leq f'$ e cada vértice $v_i \in J$ é adjacente a todo vértice do conjunto L , v_i é adjacente a um vértice $u \in L$ onde falta a cor c_i . Atribua a cor c_i a aresta $\{v_i, u\}$. Para cada vértice $v \in R \setminus J$ que seja adjacente a $\frac{\Delta}{2} + 1$ vértices do conjunto $L \cup P$, existe um vértice $w \in P$ tal que w é adjacente a v . Atribua a cor c , que falta no vértice v após a coloração de $G[R]$, à aresta $\{v, w\}$. Note que não haverá duas cores iguais incidindo em um mesmo vértice do conjunto P , já que as cores que faltam nos vértices do conjunto R após a coloração de $G[R]$ são duas a duas distintas.

Por hipótese, os vértices pertencentes a L não são adjacentes a vértices do conjunto P . Então, cada vértice do conjunto $L \cup P$ é adjacente a no máximo $\frac{\Delta}{2}$ vértices do conjunto R . Além disso, cada vértice do conjunto R é adjacente a, no máximo, $\frac{\Delta}{2} + 1$ vértices do conjunto $L \cup P$. Note que, quando um vértice $v \in R$ é adjacente a $\frac{\Delta}{2} + 1$ vértices do conjunto $L \cup P$, então uma das arestas incidentes a v já está colorida. Assim, o grafo induzido pelas arestas não coloridas do grafo G é um grafo bipartido com grau máximo $\frac{\Delta}{2}$. Pelo Teorema 1.9, pode-se colorir tal grafo bipartido com $\frac{\Delta}{2}$ cores novas.

Caso 2: $\frac{\Delta}{2}$ é par.

O grafo $G[L]$ é isomorfo a algum subgrafo do $K_{\frac{\Delta}{2}+1}$, onde $\frac{\Delta}{2}+1$ é ímpar. Pela condição (4), $|E(\overline{G[L]})| = f \geq \frac{\Delta}{4}$. Logo, pelo Lema 6.2, $G[L]$ tem uma $\frac{\Delta}{2}$ -coloração equilibrada tal que cada cor de um conjunto com $p = \min\{f - \frac{\Delta}{4}, \frac{\Delta}{2}\}$ cores falta em pelo menos três vértices de L e cada uma das outras $\frac{\Delta}{2} - p$ cores falta em pelo menos um vértice pertencente a L . Note que $p \in [0, \frac{\Delta}{2}]$, $p = f - \frac{\Delta}{4}$, quando $\frac{\Delta}{4} \leq f \leq 3\frac{\Delta}{4}$, e $p = \frac{\Delta}{2}$, quando $f \geq 3\frac{\Delta}{4}$. Sejam c_1, c_2, \dots, c_p , as cores que faltam em pelo menos três vértices de L .

O grafo $G[R]$ é isomorfo ao $K_{\frac{\Delta}{2}}$ e $\frac{\Delta}{2}$ é par. Então, pelo Corolário 1.4, $G[R]$ tem uma $\frac{\Delta}{2}$ -coloração equilibrada onde cada uma de um conjunto de $\frac{\Delta}{4}$ cores falta em dois vértices, cada uma das outras $\frac{\Delta}{4}$ cores não falta em nenhum vértice de R e em cada vértice de R falta exatamente uma cor. Nós ordenamos os vértices de R de forma que os primeiros sejam os $\Delta(G)$ -vértices adjacentes a todos os vértices de L , seguidos dos $\Delta(G)$ -vértices adjacentes a pelo menos um vértice do conjunto P e, por fim, os demais vértices do conjunto R . (Veja um exemplo de como ordenar os vértices de R na Figura 6.3.)

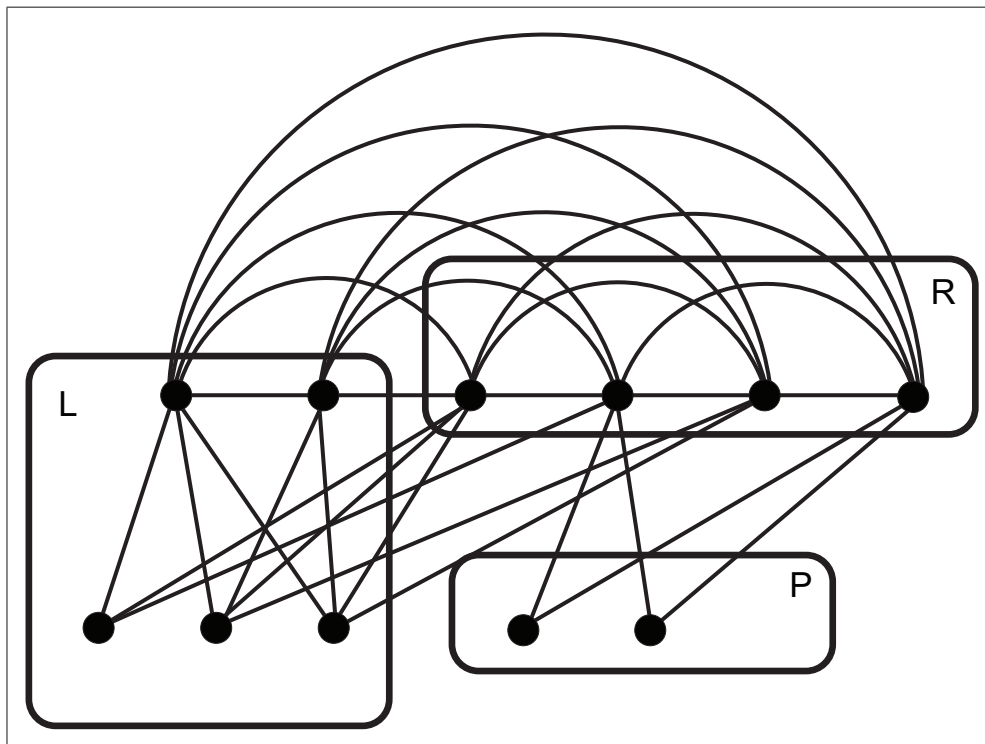


Figura 6.3: Grafo split com $\frac{\Delta}{2}$ par e vértices de R ordenados.

Quando realizamos a $\frac{\Delta}{2}$ -coloração do grafo $G[R]$, a simetria de $G[R]$ nos permite escolher em quais vértices de R deve faltar cada cor. Lembre-se que $p = \min\{f - \frac{\Delta}{4}, \frac{\Delta}{2}\}$

e seja $p' = \min\{p, \frac{\Delta}{4}\}$. Como $p \in [0, \frac{\Delta}{2}]$, tem-se $p' \in [0, \frac{\Delta}{4}]$ e, pela definição de p' , $p' \leq p$. Seja $X = \{v_1, \dots, v_{2p'}\}$ o conjunto dos $2p'$ primeiros vértices de R . Durante a $\frac{\Delta}{2}$ -coloração de $G[R]$, nós obrigamos cada cor c_i , $1 \leq i \leq p'$ a faltar em um par de vértices, v_{2i-1} e v_{2i} , pertencente a X . Note que p' é o número de cores que faltam em pelo menos três vértices de L e dois vértices de R . Note também que quando $f = \frac{\Delta}{4}$, o conjunto X é vazio.

Lembre-se que $p = \min\{f - \frac{\Delta}{4}, \frac{\Delta}{2}\}$ é o número de cores que faltam em pelo menos três vértices de L ; $p' = \min\{p, \frac{\Delta}{4}\}$ é o número de cores que faltam em dois vértices de R e em pelo menos três vértices de L ; e $f' = \min\{f, \frac{\Delta}{2}\}$ é o número máximo de $\Delta(G)$ -vértices em R .

Se $f \geq \frac{\Delta}{2}$, então $p \in [\frac{\Delta}{4}, \frac{\Delta}{2}]$, $p' = \frac{\Delta}{4}$, $|X| = 2p' = \frac{\Delta}{2}$ e, portanto, X pode ser igual a R .

Se $\frac{\Delta}{4} \leq f < \frac{\Delta}{2}$, então $p = f - \frac{\Delta}{4}$, $p' = p$ e $f' = f$. Neste caso, X é um subconjunto próprio de R . Logo, existem $\frac{\Delta}{2} - 2p' = 2(\frac{\Delta}{2} - f)$ vértices em $R \setminus X$.

Por construção, cada uma das cores $c_1, c_2, \dots, c_{p'}$ falta em dois vértices de X (se $X \neq \emptyset$) e $p' < \frac{\Delta}{4}$. Além disso, pelo Corolário 1.4, há $\frac{\Delta}{4}$ cores que faltam em dois vértices de R e em cada vértice de R deve faltar exatamente uma cor. Então, cada cor do conjunto $\alpha = \{c_{p'+1}, c_{p'+2}, \dots, c_{\frac{\Delta}{4}}\}$ deve faltar em dois vértices de $R \setminus X$. Seja Y o conjunto dos $\Delta(G)$ -vértices que pertencem a $R \setminus X$. A cardinalidade de Y é, no máximo, $|\alpha|$. De fato, pela condição (5), o número de vértices de R que não são $\Delta(G)$ -vértices é pelo menos $\frac{\Delta}{2} - f$ e, portanto, há no máximo $\frac{\Delta}{2} - f = |\alpha|$ vértices com grau $\Delta(G)$ em $R \setminus X$. Então, durante a coloração de $G[R]$, nós forçamos que em cada vértice do conjunto Y falte uma cor distinta do conjunto α . (A Figura 6.4 mostra o conjunto R e os subconjuntos X e Y com a distribuição das cores que faltam nos vértices desses subconjuntos. Note que $k' \leq |\alpha|$.)

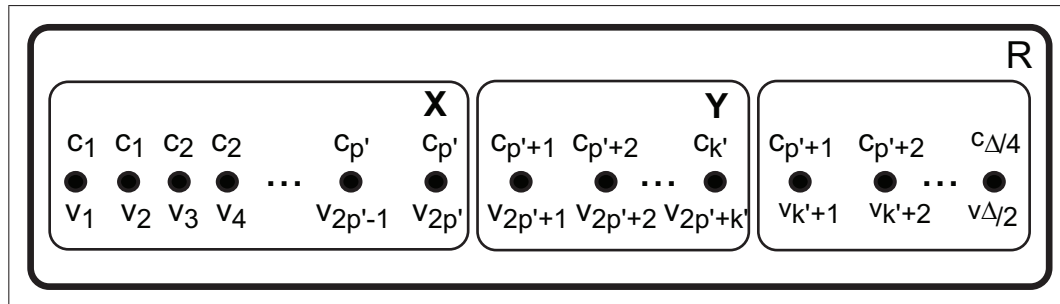


Figura 6.4: conjunto R e subconjuntos X e Y com distribuição de cores que faltam nos vértices.

Para cada $\Delta(G)$ -vértice v pertencente a R nós usamos a cor que falta em v para colorir uma aresta incidente em v . Pela ordem imposta aos vértices de R , os $\Delta(G)$ -vértices que estão em R pertencem a $X \cup Y$.

Se X não é vazio, então existem p' pares de vértices, v_{2i-1} e v_{2i} , onde falta a cor c_i , $1 \leq i \leq p'$. Seja v um $\Delta(G)$ -vértice pertencente a X . Então v é adjacente a $\frac{\Delta}{2} + 1$ vértices

do conjunto $L \cup P$. Como $|L| = \frac{\Delta}{2} + 1$, para cada vértice de L que não é adjacente a v , existe um vértice em P que é adjacente a v . Lembre-se que existem pelo menos três vértices em L onde falta a cor c_i , $1 \leq i \leq p'$. Como todas as cores faltam em todos os vértices de P , para cada vértice $u \in L$ onde falta a cor c_i , se u não é adjacente a v , então existe um vértice $w \in P$ que é adjacente a v e tal que a cor c_i falta em w . Portanto, cada $\Delta(G)$ -vértice $v \in X$ é adjacente a pelo menos três vértices do conjunto $L \cup P$ onde falta a mesma cor que falta em v . Logo, para cada par de $\Delta(G)$ -vértices do conjunto X , v_{2i-1} e v_{2i} , onde falta a cor c_i , é possível escolher um par de vértices distintos, x_1 e x_2 , pertencentes a $L \cup P$, onde falta a cor c_i e tal que x_1 é adjacente a v_{2i-1} e x_2 é adjacente a v_{2i} , $1 \leq i \leq p'$. Então, colorimos as arestas $\{x_1, v_{2i-1}\}$ e $\{x_2, v_{2i}\}$ com a cor c_i , $1 \leq i \leq p'$. Lembre-se que os $\Delta(G)$ -vértices que estão no conjunto R estão ordenados de forma que sejam os primeiros vértices na ordem. Assim, quando o número de $\Delta(G)$ -vértices é ímpar e menor que $|X|$, temos um par de vértices v_{2i-1} e v_{2i} onde v_{2i-1} é um $\Delta(G)$ vértice, mas v_{2i} não é $\Delta(G)$ -vértice. Neste caso, o vértice v_{2i-1} é adjacente a pelo menos três vértices de $L \cup P$ onde falta a cor c_i e podemos escolher qualquer um desses vértices (seja w este vértice) para colorir a aresta $\{v_{2i-1}, w\}$ com a cor c_i .

Se Y não é vazio, podemos colorir uma aresta incidente em cada vértice de Y da seguinte forma. Para cada vértice v pertencente a Y e adjacente a todos os vértices de L , existe um vértice $u \in L$ onde falta a mesma cor que falta em v . Então, nós atribuímos a cor que falta em v a aresta $\{v, u\}$. Para cada vértice $v \in Y$ e adjacente a algum vértice $w \in P$, nós atribuímos a cor que falta em v para a aresta $\{v, w\}$. (Lembre-se que as cores que faltam nos vértices de Y são duas a duas distintas.)

Note que não há $\Delta(G)$ -vértices em $R \setminus (X \cup Y)$ e, portanto, nos vértices do conjunto $R \setminus (X \cup Y)$ incidem no máximo $\frac{\Delta}{2}$ arestas sem cor. Além disso, após a coloração de uma aresta incidente em cada $\Delta(G)$ -vértice do conjunto R , o número de arestas não coloridas incidentes a cada $\Delta(G)$ -vértice pertencente a R é igual a $\frac{\Delta}{2}$. Por hipótese, os vértices do conjunto L não são adjacentes aos vértices do conjunto P . Mais ainda, cada vértice do conjunto $L \cup P$ é adjacente a, no máximo, $\frac{\Delta}{2}$ vértices de R . Então, existem no máximo $\frac{\Delta}{2}$ arestas sem cor incidentes a cada vértice de G . O grafo induzido pelas arestas sem cor de G é um grafo bipartido com partição $[R, L \cup P]$ e grau máximo $\frac{\Delta}{2}$. Pelo Teorema 1.9, este subgrafo bipartido pode ser colorido com $\frac{\Delta}{2}$ cores novas.

Portanto, pelos casos (1) e (2), concluímos que G é Classe 1. ■

Dado um grafo split G e uma partição $[L, R]$ de $N[v]$, onde v é um $\Delta(G)$ -vértice, o algoritmo que realiza a $\Delta(G)$ -coloração descrita no Teorema 6.3 tem complexidade de tempo polinomial, já que uma coloração equilibrada dos vértices de $G[L]$ e de $G[R]$ pode ser feita em tempo polinomial [44] e a coloração de grafos bipartidos também pode ser feita em tempo polinomial [46]. Mais ainda, se existe uma partição $[L, R]$ de $N[v]$ que satisfaça

as condições apresentadas no Teorema 6.3, esta partição também pode ser encontrada em tempo polinomial. A seguir, mostramos como construir tal partição, se ela existir.

6.2 Como encontrar uma partição $[L, R]$

Nesta seção, apresentamos uma ordenação dos vértices de Q que permite fácil verificação das condições do Teorema 6.3 e a construção de uma partição $[L, R]$ que satisfaz tais condições.

Considere um grafo split G com uma clique maximal Q , um conjunto independente S e um $\Delta(G)$ -vértice v . Seja $P = V(G) \setminus N[v]$. Particione o conjunto Q em quatro subconjuntos como segue.

- P_l é o conjunto de vértices de Q com grau menor que $\Delta(G)$ e adjacentes a algum vértice em P .
- P_Δ é o conjunto de vértices de Q com grau exatamente igual a $\Delta(G)$ e adjacentes a algum vértice em P .
- L_l é o conjunto de vértices de Q com grau menor que $\Delta(G)$ e que não são adjacentes a nenhum vértice em P .
- L_Δ é o conjunto de vértices de Q com grau exatamente igual a $\Delta(G)$ e que não são adjacentes a nenhum vértice em P .

Nós consideramos a seguinte ordenação para os vértices de Q : primeiro, os vértices do conjunto L_l em ordem não-decrescente de graus; depois, os vértices de L_Δ ; depois, os vértices de P_Δ ; e os últimos são os vértices de P_l .

Se $|Q| < \frac{\Delta(G)}{2}$, não há partição $[L, R]$ para os vértices de $N[v]$ que satisfaça as condições (1) e (2). Se $|Q| \geq \frac{\Delta(G)}{2}$, então seja R o conjunto dos últimos $\frac{\Delta(G)}{2}$ vértices na ordem imposta aos vértices de Q . Então, as condições (1) e (2) do Teorema 6.3 estão satisfeitas. Neste caso, L é o conjunto $(Q \setminus R) \cup (N[v] \cap S)$.

Se $|P_l| + |P_\Delta| > \frac{\Delta(G)}{2}$, então cada vértice de R é adjacente a algum vértice do conjunto P e existe pelo menos um vértice de $P_\Delta \cup P_l$ pertencente ao conjunto L . Então a condição (3) do Teorema 6.3 não é satisfeita e, portanto, não há partição $[L, R]$ para os vértices de $N[v]$. Se $|P_l| + |P_\Delta| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$, a condição (3) é satisfeita e vamos verificar o número de arestas em $\overline{G[L]}$ (condição (4)).

Se $|E(\overline{G[L]})| < \frac{\Delta(G)}{4}$, então não existe partição $[L, R]$ para os vértices de $N[v]$. De fato, a ordenação imposta aos vértices de Q garante o maior número possível de arestas em $\overline{G[L]}$. Note que os vértices pertencentes a R ou são adjacentes a vértices do conjunto

P ou tem grau maior ou igual ao grau dos vértices pertencentes a L . Se $|E(\overline{G[L]})| \geq \frac{\Delta(G)}{4}$, a condição (4) é satisfeita.

Agora, verificamos o número de $\Delta(G)$ -vértices em R (condição 5). Se esse número for maior que o número de arestas em $\overline{G[L]}$, uma partição $[L, R]$ para os vértices de $N[v]$ não existe. De fato, a ordenação imposta aos vértices de Q garante o maior número possível de arestas em $\overline{G[L]}$. Logo, se o número de vértices em R exceder $|E(\overline{G[L]})|$, a única alternativa é diminuir o número de $\Delta(G)$ -vértices pertencentes a R , trocando $\Delta(G)$ -vértices de R por vértices que não são $\Delta(G)$ -vértices em L . Se todos os vértices em L são $\Delta(G)$ -vértices, não há o que fazer, a partição $[L, R]$ dos vértices de $N[v]$ não existe. Caso contrário, nós substituímos um $\Delta(G)$ -vértice de R por um vértice de L que não seja $\Delta(G)$ vértice. Se fizermos isso, a condição (5) permanece insatisfeita. Essa substituição diminui em pelo menos um o número de arestas em $\overline{G[L]}$ e diminui em no máximo um o número de $\Delta(G)$ -vértices em R . (Note que, se o $\Delta(G)$ -vértice escolhido para a troca pertencer ao conjunto P_Δ , a condição (3) também não será satisfeita.) Sendo assim, neste caso, não há partição $[L, R]$ para os vértices de $N[v]$.

Portanto, dados um $\Delta(G)$ vértice e a ordenação dos vértices de Q apresentada nesta seção para construção da partição $[L, R]$, se o número de $\Delta(G)$ -vértices em R for menor ou igual ao número de arestas em $\overline{G[L]}$, $|P_l| + |P_\Delta| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ e o número de arestas em $\overline{G[L]}$ for maior que $\frac{\Delta(G)}{4}$, então $[L, R]$ é uma partição de $N[v]$ que satisfaz as condições do Teorema 6.3. Se, para todo $\Delta(G)$ -vértice, a partição $[L, R]$ construída, da forma como apresentamos nesta seção, não satisfaz essas condições (número de $\Delta(G)$ -vértices em R menor ou igual ao número de arestas em $\overline{G[L]}$, $|P_l| + |P_\Delta| \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ e o número de arestas em $\overline{G[L]}$ maior que $\frac{\Delta(G)}{4}$), então não existe uma partição $[L, R]$ nas condições do Teorema 6.3.

Em [27], os autores apresentam um algoritmo de complexidade de tempo linear para reconhecer um grafo split e apresentar uma partição $[Q, S]$, onde Q é uma clique maximal. As condições do Teorema 6.3 podem ser verificadas em tempo polinomial para um $\Delta(G)$ -vértice fixo. Como há, no máximo, $|Q|$ vértices de grau máximo em G , a subclasse de grafos split descrita no Teorema 6.3 pode ser reconhecida em tempo polinomial.

A técnica apresentada neste capítulo também pode ser aplicada a outros subconjuntos de grafos split. Como exemplo, se um grafo split G com grau máximo par tem um conjunto de $\Delta(G) + 1$ vértices que admitem uma partição $[L, R]$ que satisfaça as condições do Teorema 6.3, então G é Classe 1. Note que este conjunto de $\Delta(G) + 1$ vértices não é necessariamente a vizinhança de um $\Delta(G)$ -vértice (veja um exemplo na Figura 6.5).

Este trabalho foi apresentado no evento *IV Latin American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium* e um resumo expandido foi publicado em [3]. Mais detalhes e outras observações sobre a extensão da técnica de Plantholt para coloração de arestas em

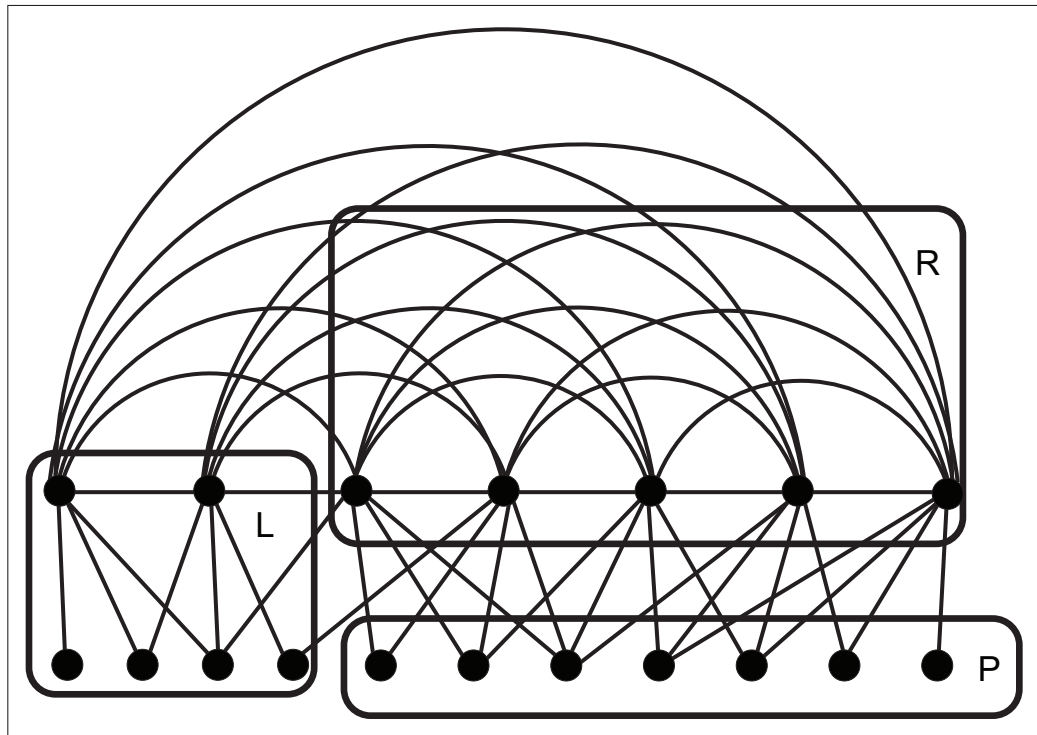


Figura 6.5: Grafo que não possui partição $[L, R]$ para nenhum Δ -vértice v , mas pode ser colorido.

grafos split com Δ par estão em um artigo aceito para publicação em [2].

Capítulo 7

Conclusões

Um dos resultados interessantes desta tese é apresentação de uma caracterização estrutural dos grafos split que são vizinhança-sobrecarregados. Segundo o Teorema 3.3, um grafo split $G = [Q, S]$ é vizinhança-sobrecarregado se, e somente se, $\Delta(G)$ é par e existe um conjunto $X \subseteq Q$ com pelo menos $k = |Q| - \frac{\Delta(G)}{2} + \binom{d(Q)}{2} + 1$ vértices de grau $\Delta(G)$ que são gêmeos e tais que se $v \in X$, o número de arestas de $\overline{G[N[v]]}$ incidentes a vértices de $Q \setminus X$ é no máximo $|Q| - k$. É importante salientar que este teorema garante que todo grafo split vizinhança-sobrecarregado possui um certo número de $\Delta(G)$ -vértices gêmeos cuja vizinhança fechada induz um subgrafo sobrecarregado. Uma consequência imediata é a identificação de uma propriedade estrutural dos grafos split que são vizinhança-sobrecarregados, apresentada no Corolário 3.4, segundo a qual todo grafo split vizinhança-sobrecarregado possui $\Delta(G) > \frac{|V(G)|}{3}$. Além disso, como os grafos split descritos no Teorema 3.3 são Classe 2, se a Conjectura 3.1 for verdadeira, esse teorema apresenta uma caracterização dos únicos grafos split Classe 2. Conhecer propriedades estruturais de grafos split que sabemos que são Classe 2 pode fornecer argumentos para garantir que outros subconjuntos de grafos split que não possuem tais propriedades tenham uma Δ -coloração de arestas e sejam enfim classificados.

Como afirmamos anteriormente, se a Conjectura 3.1 for verdadeira, a resposta do Problema da Classificação para grafos split pode ser obtida em tempo polinomial. Nossa expectativa é de que a Conjectura 3.1 seja verdadeira para os grafos split. Lembre-se que essa conjectura foi proposta para grafos cordais, uma superclasse dos grafos split. Vários problemas combinatoriais conhecidos possuem o mesmo grau de complexidade tanto para grafos split quanto para os grafos cordais. Em [47] são apresentados os seguintes exemplos dessa afirmação: o problema de coloração de vértices e de encontrar a clique máxima, que são polinomiais para ambas as classes; e os problemas de encontrar um conjunto dominante, encontrar o corte máximo e um circuito hamiltoniano, que são NP-completos para ambas as classes. No artigo [21] de Celina Figueiredo, a autora diz que problemas capazes

de separar grafos split e grafos cordais em relação ao grau de complexidade são raros e o problema da coloração de arestas é citado como um dos possíveis problemas capazes de apresentar graus de complexidade distintos para tais classes, servindo de motivação para o estudo aqui apresentado.

O Lema 3.2 também apresenta propriedades que são satisfeitas por todo grafo split vizinhança-sobrecarregado. Segundo este lema, se o grafo split $G = [Q, S]$ é vizinhança-sobrecarregado, então Q e $d(Q)$ têm paridades distintas e $|Q| = (d(Q))^2 + i$ com i ímpar, $i \geq 3$. Sendo assim, grafos split com $|Q| < (d(Q))^2 + 3$ não são vizinhança-sobrecarregados e, se a conjectura 3.1 for verdadeira, esses grafos são todos Classe 1. Este resultado tornou bastante atraente a tentativa de apresentar uma Δ -coloração de arestas para grafos split com grau máximo par que tenham $|Q| < (d(Q))^2 + 3$. No capítulo 4, exibimos uma subclasse desse conjunto que é Classe 1.

O estudo da técnica de Chen, Fu e Ko para grafos split permitiu rápidas conclusões sobre a classificação de alguns grafos split com grau máximo par. A grande barreira para a aplicação desta técnica são os quadrados latinos de ordem par, em que os elementos da diagonal principal sempre se repetem. Mas a técnica pode ser diretamente utilizada em qualquer grafo split que possua um vértice no conjunto independente capaz de “absorver” metade das cores da diagonal principal. Neste caso, o grafo é Classe 1. Este resultado, foi apresentado no Corolário 4.6: se $G = [Q, S]$ é um grafo split com $\Delta(G)$ par e existe $u \in S$ tal que $\lceil \frac{Q}{2} \rceil \leq d(u) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$, então G é Classe 1. Em alguns casos, apesar de o grafo split não possuir tal vértice u , é possível simular a existência deste vértice para colorir o grafo, quer seja incluindo arestas incidentes a um novo vértice do conjunto independente que incidem em vértices com grau menor que Δ na clique, quer seja utilizando um conjunto de vértices de S que possuem suas vizinhanças duas a duas disjuntas, como apresentamos no Corolário 4.7 e no Teorema 4.8.

Para os grafos split que não possuem o precioso vértice u capaz de receber metade das cores da diagonal principal e para os quais não se pode sequer simular a existência de u , outras alternativas que não são tão óbvias foram observadas, como a apresentada no Teorema 4.5. Por este teorema, se um grafo split $G = [Q, S]$ com $\Delta(G)$ par tem uma ordem $\lambda = (u_0, u_1, \dots, u_h, \dots, u_{|S|-1})$ para os vértices de S tal que os vértices de Q admitem uma ordem CFK em relação a λ onde $\{v_i, u_h\} \notin E(G)$ quando $i < |\cup_{i=0}^h N(u_i)| - \frac{\Delta(G)}{2}$, então G é Classe 1.

Em outros casos, como quando os vértices em S tem todos grau maior que $\frac{\Delta}{2}$ ou quando as vizinhanças dos subconjuntos de vértices de S não satisfazem as propriedades exigidas para a classificação do grafo através da técnica com quadrados latinos de ordem par, ainda pode-se obter um resultado através da técnica que utiliza quadrados latinos de ordem ímpar, cujo resultado aparece no Teorema 4.13. Utilizar um quadrado latino de ordem ímpar e incluir nele mais uma cor de forma que ainda se possa garantir a monotonicidade

dos diagramas de cores, a comutatividade da matriz A e a propriedade de que nessa matriz as cores de cada linha e de cada coluna são duas a duas distintas foi um trabalho difícil. Para nossa satisfação, o subconjunto de grafos split que conseguimos colorir com esta técnica são exatamente aqueles que possuem pelo menos um vértice em S com grau maior que $\frac{|Q|}{2}$ e $d^2(Q) \geq 2|Q| + 1$. Note que dentre esses grafos estão alguns daqueles que não possuem vértices em S com grau entre $\frac{|Q|}{2}$ e $\frac{\Delta}{2}$ e não são capazes de simular a existência deste vértice. Note também que este é um subconjunto daqueles grafos cujo estudo da classificação consideramos muito atraente por possuírem $|Q| < (d(Q))^2 + 3$. Sobre esta técnica, percebemos que ainda existe uma pequena folga entre o número de vezes que algumas cores aparecem no diagrama \mathcal{C}' e o número de vezes que estas cores poderiam aparecer. Pretendemos ainda responder a pergunta sobre como tais folgas podem ser aproveitadas para ampliar o número de grafos split que podem ser coloridos por esta técnica.

Da mesma forma que fizemos com a técnica dos quadrados latinos de ordem par, quando consideramos os quadrados latinos de ordem ímpar, também podemos simular a existência de um vértice u dentro das condições do Teorema 4.13 para poder ampliar o número de grafos que somos capazes de classificar, como apresentamos no Corolário 4.14 e no Corolário 4.15.

Uma propriedade dos grafos split que futuramente pretendemos explorar mais intensamente é a apresentada no Lema 4.1, que garante que se $G = [Q_G, S_G]$ é um grafo split, então G é subgrafo de um grafo split $H = [Q_H, S_H]$ tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$, $Q_G = Q_H$, todos os vértices de Q_H são Δ -vértices e $\chi'(G) = \chi'(H)$. Uma consequência do Lema 4.1 é a possibilidade de restringir os estudos de coloração de arestas em grafos split com grau máximo par ao conjunto dos grafos split com grau máximo par cujos vértices da clique são todos Δ -vértices, já que resolver o problema da Classificação para esta subclasse implica na solução do Problema da Classificação para todos os grafos split. Mais ainda, exibir uma Δ -coloração de arestas para os grafos split Classe 1 cujos vértices da clique têm todos grau Δ implica em exibir uma Δ -coloração de arestas para todo grafo split Classe 1. Apesar de termos discutido sobre a veracidade ou não desta propriedade no início dos trabalhos dessa tese, a demonstração só foi feita depois de alguns anos, pois estávamos envolvidas em outras abordagens que não necessitavam deste resultado. Assim, muitas vezes consideramos grafos split que possuem vértices em Q com grau menor que Δ . Mas a propriedade apresentada no Lema 4.1 pode ser uma boa restrição a se impor nas pesquisas sobre coloração de arestas em grafos split com Δ par, a medida que diminui o conjunto de grafos que precisam ser considerados e fornece mais uma propriedade estrutural que pode ser utilizada como argumento para que se obtenha uma classificação. Um exemplo de restrição como essa que permitiu a classificação de mais um subconjunto dos grafos split é a de se considerar apenas o semi-núcleo de grafos split, sabendo que os resultados

obtidos classificam também todo grafo split cujo semi-núcleo satisfaça as condições do Teorema 5.7.

Por fim, o estudo da técnica de coloração de arestas em grafos com vértice universal, dada por Plantholt, permitiu uma diversificação significativa no tratamento que demos ao Problema da Classificação para grafos split. Por ser uma técnica de decomposição que não envolve quadrados latinos, nos permitiu ampliar nossos horizontes sobre o problema. Ao mesmo tempo, é interessante observar que é freqüente a decomposição do grafo split em grafos bipartidos e grafos completos para solução desse problema.

A técnica de coloração de Plantholt estendida que apresentamos ainda é um campo fértil para a classificação de grafos split, pois observamos que pode ser aplicada a outros subconjuntos de grafos split, por exemplo, em grafos split G com grau máximo par que tenham um conjunto de $\Delta(G) + 1$ vértices que admitem uma partição $[L, R]$ que satisfaça as condições do Teorema 6.3. Note que este conjunto de $\Delta(G) + 1$ vértices não é necessariamente a vizinhança de um $\Delta(G)$ -vértice.

O conjunto de técnicas apresentadas nesta tese pode ser visto como um algoritmo para classificação de um subconjunto dos grafos split. Em cada um dos capítulos, são fornecidas condições distintas que, se satisfeitas, respondem ao Problema da Classificação para um dado grafo split. Nos casos em que o grafo split é Classe 1, os métodos utilizados para se obter tal classificação, apresentados na forma de demonstrações dos lemas e teoremas ou através de algoritmos, também exibem uma Δ -coloração para as arestas do grafo.

Assim, esta tese contribui para a solução do Problema da Classificação de grafos split a medida que impõe, com a apresentação de cada técnica, mais restrições para a existência de grafos split ainda não classificados.

Apesar de todos os nossos esforços, o Problema da Classificação continua aberto para esta classe. Por outro lado, os vários métodos aplicados e resultados obtidos sem que chegássemos à classificação de todos os split demonstram que trata-se de um problema complexo. Apesar da dificuldade, não é um terreno árido. O estudo da coloração de arestas em grafos split é uma área de pesquisa bastante fértil e, apesar de todas as técnicas estudadas e aplicadas sobre a classe, existem ainda outras alternativas que merecem a atenção de quem decide estudar este problema.

Nossos próximos passos são o estudo da caracterização dos grafos split-permutação, resultado recentemente publicado em [40] e a tentativa de resolver o Problema da Classificação para esta subclasse. Além de continuar na tentativa de solucionar o problema para todos os grafos split.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Ali and H. El-Rewini. Task allocation in distributed systems: a split graph model. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 14:15–32, 1993.
- [2] S. M. Almeida, C. P. de Mello, and A. Morgana. Edge-coloring of split graphs. *ARS Combinatoria*. (aceito para publicação).
- [3] S. M. Almeida, C. P. de Mello, and A. Morgana. Edge-coloring of split graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30:21–25, 2008.
- [4] S. M. Almeida, C. P. de Mello, and A. Morgana. Using latin squares to color split graphs. *Proceedings of the 7th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, pages 127–130, 2008.
- [5] S. M. Almeida, C. P. de Mello, and A. Morgana. On class 2 split graphs. *Matemática Contemporânea*, 39:161–168, 2010.
- [6] S. M. Almeida, C. P. de Mello, and A. Morgana. On the classification problem for split graphs. *Journal of the Brazilian Computer Society*, pages 1–7, 2011. <http://dx.doi.org/10.1007/s13173-011-0046-2>.
- [7] K. Appel and W. Haken. *Every Planar Map is Four-Colorable*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. ISBN: 0-8218-5103-9.
- [8] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, and R. J. Wilson. *Graph Theory: 1736-1936*. Oxford Univ. Press, Oxford, UK, first edition, 1976.
- [9] R. E. Burkard and P. L. Hammer. A note on hamiltonian split graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing - Ser. B*, 28:245–248, 1980.
- [10] L. Cai and J. A. Ellis. Np-completeness of edge-colouring some restricted graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 30:15–27, 1991.

- [11] G. Chartrand and P. Zang. *Chromatic Graph Theory*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, first edition, 2009.
- [12] B.-L. Chen, H.-L. Fu, and M. T. Ko. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 17:137–146, 1995.
- [13] A. G. Chetwynd and A. J. W. Hilton. Star multigraphs with three vertices of maximum degree. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 100:300–317, 1986.
- [14] A. G. Chetwynd and A. J. W. Hilton. The edge-chromatic class of graphs with even maximum degree at least $|v| - 3$. *Annals of Discrete Mathematics*, 41:91–110, 1989.
- [15] V. Chvatal and P. L. Hammer. Aggregation of inequalities in integer programming. *Annals of Discrete Mathematics*, 1:145–162, 1977.
- [16] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, Cambridge, MA, first edition, 1990.
- [17] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. On edge-colouring indifference graphs. *Theoretical Computer Science*, 181(1):91–106, 1997.
- [18] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. Local conditions for edge-coloring. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 32:79–91, 2000.
- [19] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg, 4th edition, 2010.
- [20] L. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8:128–140, 1736. (tradução para inglês em [8]).
- [21] C. M. H. Figueiredo. P versus np-complete dichotomy of some challenging problems in graph theory. *Discrete Applied Mathematics*, 2011.
- [22] S. Fiorini and R. J. Wilson. *Edge-colourings of graphs*. Pitman, London, UK, first edition, 1977.
- [23] S. Földes and P. L. Hammer. Split graphs. *Proceedings of the Eighth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing - Congressus Numerantium*, pages 311–315, 1977.

- [24] S. Földes and P. L. Hammer. On a class of matroid-producing graphs. *Proceedings of the Fifth Hungarian Colloquium*, 1:331–352, 1978.
- [25] J. C. Fournier. Coloration des arêtes d'un graphe. *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle*, 15:311–314, 1973.
- [26] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, first edition, 1980. ISBN 0-12-289260-7.
- [27] P. L. Hammer and B. Simeone. The splitance of a graph. *Combinatorica*, 1:275–284, 1981.
- [28] P. B. Henderson and Y. Zacstein. A graph-theoretic characterization of the pv_{chunk} class of synchronizing primitive. *SIAM Journal on Computing*, 6:88–108, 1977.
- [29] A. J. W. Hilton. Two conjectures on edge-coloring. *Discrete Mathematics*, 74:61–64, 1989.
- [30] A. J. W. Hilton and C. Zhao. The chromatic index of a graph whose core has maximum degree two. *Discrete Mathematics*, 101:135–147, 1992.
- [31] A. J. W. Hilton and C. Zhao. On the edge-colouring of graphs whose core has maximum degree two. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 21:97–108, 1996.
- [32] D. G. Hoffman and C. A. Rodger. The chromatic index of complete multipartite graphs. *Journal of Graph Theory*, 16:159–163, 1992.
- [33] I. Holyer. The np-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing*, 10:718–720, 1981.
- [34] D. König. Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 77:453–465, 1916.
- [35] D. Kratsch, J. Lehel, and H. Müller. Toughness, hamiltonicity and split graphs. *Discrete Mathematics*, 150:231–245, 1996.
- [36] R. C. S. Machado and C. M. H. Figueiredo. Decompositions for edge-coloring join graphs and cobipartite graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 158(12):1336–1342, 2010.
- [37] F. Maffray. *On the coloration of perfect graphs*. CMS Books in Mathematics, 2003.

- [38] J. Meidanis. Edge coloring of cycle powers is easy. 1998. Disponível em www.ic.unicamp.br/~meidanis/research/edge/cpowers.ps.
- [39] C. Ortiz, N. Maculan, and J. L. Szwarcfiter. Characterizing and edge-coloring split-indifference graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 82:209–217, 1998.
- [40] C. Ortiz and M. Villanueva. Threshold dimension of split-permutation graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 75:117–127, 2010.
- [41] M. Padberg and M. R. Rao. Odd minimum cut-sets and b-matchings. *Mathematics of Operation Research*, 17(1):67–80, 1985.
- [42] J. Peemöller. Necessary conditions for hamiltonian split graphs. *Discrete Mathematics*, 54:39–47, 1985.
- [43] U. N. Peled. *Regular Boolean Functions and their Polytope*. University of Waterloo, 1975.
- [44] M. J. Plantholt. The chromatic index of graphs with a spanning star. *Journal of Graph Theory*, 5:45–53, 1981.
- [45] G. F. Royle. Counting set covers and split graphs. *Journal of Integer Sequences*, 3:1–5, 2000.
- [46] A. Schrijver. Bipartite edge coloring in $O(\Delta m)$ time. *SIAM Journal on Computing*, 28(3):841–846, 1999.
- [47] J. P. Spinrad. *Efficient Graph Representations*, volume 19. AMS, 2003.
- [48] P. G. Tait. Listing’s topologie. *Philosophical Magazine*, 5(17):30–46, 1884. Reprinted in *Scientific Papers*, Vol. II, pp. 85–98.
- [49] N. D. Tan and L. X. Hung. On colorings of split graphs. *ACTA Mathematica Vietnamica*, 31(3):195–204, 2006.
- [50] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. *Diskret. Analiz.*¹, 3:25–30, 1964.
- [51] V. G. Vizing. Critical graphs with a given chromatic class. *Diskret. Analiz.*¹, 5:9–17, 1965. (in Russian).

¹O nome completo deste periódico era *Akademiya Nauk SSSR. Sibirskoe Otdelenie. Institut Matematiki. Diskretnyĭ i Analiz. Sbornik Trudov*. O nome foi alterado para *Metody Diskretnogo Analiza* no ano de 1980 e o periódico parou de ser publicado em 1991.

Índice Remissivo

- Aresta, 1
 - Adjacente, 2
 - Incidente, 2
- Caminho, 2
 - Alternante, 13
 - Trivial, 13
 - Aumentável, 14
- Clique, 23
 - Maximal, 23
- Cobertura de Vértices por Arestas, 6, 14
- Coloração, 4, 6
 - k -coloração, 6
 - de Arestas, 6
 - Equilibrada, 12
 - Ótima, 7
 - Própria, 6
 - Coloração Equilibrada, 12
- Conjectura de Hilton e Chetwynd, 9
- Conjectura Overfull, 9
- Conjunto, 1
 - Independente, 23
 - de Arestas, 6
- Cor, 6
 - Falta, 12, 77
 - Ocorre, 12
- Diagrama de Cores, 25
 - Monotônico, 25
- Emparelhamento, 6
 - Perfeito, 16
- Grafo, 1
 - Bipartido, 13
 - Associado, 31
 - Completo, 10
 - Conexo, 2
 - Cordal, 41
 - Indiferença, 35
 - Não-orientado, 1
 - Orientado, 1
 - Regular, 16
 - Sobrecarregado, 7
 - Split, 23
 - Split Completo, 24
 - Split-indiferença, 35
 - Subgrafo-sobrecarregado, 7
 - Vizinhança-sobrecarregado, 7
- Grau, 2
 - Máximo, 2
- Hall, 38
 - Condição de, 38
- Índice Cromático, 7
- Inverso do Vetor de Cores, 26
- Mapa Cúbico, 5
- Núcleo, 37
 - Semi-Núcleo, 69
- Ordem λ , 32
- Ordem CFK, 32
- Prefixo, 28

- Crescente, 28
- Problema da Classificação, 7
- Problema das Quatro Cores, 4

- Quadrado Latino, 10
 - Comutativo, 10
 - Idempotente, 11

- Semi-Núcleo, 69
- Sufixo, 25
 - Aumentado, 26

- Vértice, 1
 - Adjacente, 2
 - Universal, 17
- Vizinhança, 2
 - Fechada, 2