

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

**Sobre modelos e métodos de estimação de direção  
de chegada de sinais em sistemas digitais de  
comunicação sem fio**

Autor: Rafael Krummenauer

Orientador: Prof. Dr. Amauri Lopes

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Amauri Lopes (Presidente) - UNICAMP

Prof. Dr. Cristiano Magalhães Panazio - USP

Prof. Dr. Murilo Bellezoni Loiola - UFABC

Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes - UNICAMP

Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux - UNICAMP

Campinas, SP  
Agosto de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

K942s Krummenauer, Rafael  
Sobre modelos e métodos de estimação de direção de chegada de sinais em sistemas digitais de comunicação sem fio / Rafael Krummenauer. – Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientador: Amauri Lopes.

Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Processamento de sinais. 2. Sistemas de comunicação sem fio. 3. Teoria da estimação. 4. Modulação digital. I. Lopes, Amauri. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

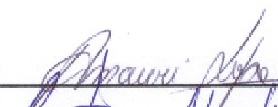
Título em Inglês: On models and methods for direction of arrival estimation of signals in digital wireless communication systems  
Palavras-chave em Inglês: Signal processing, Wireless communication systems, Estimation theory, Digital modulation  
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática  
Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica  
Banca Examinadora: Cristiano Magalhães Panazio, Murilo Bellezoni Loiola, Renato da Rocha Lopes, Romis Ribeiro de Faissol Attux  
Data da defesa: 26-08-2011  
Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

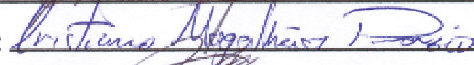
**COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO**


**Candidato:** Rafael Krummenauer

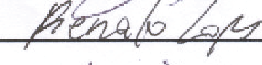
**Data da Defesa:** 26 de agosto de 2011

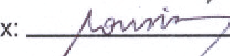
**Título da Tese:** "Sobre modelos e métodos de estimação de direção de chegada de sinais em sistemas digitais de comunicação sem fio"

Prof. Dr. Amauri Lopes (Presidente): 

Prof. Dr. Cristiano Magalhães Panazio: 

Prof. Dr. Murilo Bellezoni Loiola: 

Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes: 

Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux: 



# Resumo

Nesta tese tratamos do problema de estimação de direção de chegada de sinais digitalmente modulados, especificamente encontrado no enlace reverso de sistemas de comunicação sem fio multiusuário em que a estação rádio-base é composta por um arranjo de antenas, posicionadas de acordo com alguma geometria pré-definida. Os objetivos principais da tese são: esclarecer detalhes normalmente não tratados na descrição dos modelos de dados considerados na literatura existente, em especial, a respeito das condições de enlace e do sistema receptor necessárias para suportar a validade dos modelos empregados; agrupar alguns dos métodos de estimação existentes mais relevantes para o contexto tratado e avaliar suas vantagens e desvantagens; e introduzir o método de estimação desenvolvido nas pesquisas do período de doutorado, o qual representa a contribuição maior da tese em termos de metodologia. A solução proposta é fundamentada no critério da máxima verossimilhança e as análises de desempenho feitas através de simulações numéricas mostram que o estimador fornece resultados com qualidade próxima ao limite definido pelo limitante de Cramér-Rao. Algumas características importantes do método são: i) capacidade de operar com qualquer número de fontes se o número de antenas for maior ou igual a dois e o número de *snapshots* for suficientemente maior que a cardinalidade do espaço de sinal; ii) a qualidade da estimação não é afetada pela separação angular entre as fontes; e iii) possibilidade de operar com arranjos descalibrados.

**Palavras-chave:** Processamento de sinais de arranjo de antenas/sensores, sistemas de comunicação sem fio, estimação de direção de chegada, modulação digital.

# Abstract

This thesis deals with the problem of estimating the direction of arrival of digitally modulated signals, specifically found in the uplink of multiuser wireless communication systems where the base station uses an antenna array. The main objectives of the thesis are: to clarify some details normally not treated in the description of the data models assumed in the existing literature, specially, on link and receiver conditions that are necessary to validate the employed models; to present some of the most relevant estimation methods to the current context and to evaluate their advantages and disadvantages; and to introduce the estimation method developed in the researches during the doctoral period, which represents the greater contribution of the thesis in terms of methodology. The proposed solution is fundamented in the maximum likelihood criterion and the performance analysis done through numerical simulations show that the estimator yields results with a quality close to that defined by the Cramér-Rao bound. Some important characteristics of the method are: i) capacity to operate with any number of sources if the number of antennas is greater than or equal to two and the number of snapshots is sufficiently greater than the cardinality of the signal space; ii) the estimation quality does not depend on the angle separation between sources; and iii) possibility to operate with uncalibrated arrays.

**Keywords:** Antenna/sensor array signal processing, wireless communication systems, direction of arrival estimation, digital modulation.



# Agradecimentos

Agradeço

À minha família pelo apoio, carinho e também compreensão em relação ao tempo dedicado à pesquisa nestes anos de trabalho intenso.

Ao meu orientador Amauri Lopes pelos grandes ensinamentos e pela amizade. Muito obrigado pelas conversas, estudos em conjunto, conselhos profissionais e pessoais.

Aos amigos do Laboratório de Processamento de Sinais para Comunicações (DSPCom) pelo ótimo convívio.

À agência de fomento CNPq pelo apoio financeiro.





# Sumário

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Abreviaturas</b>   | <b>xi</b>   |
| <b>Notação Matemática</b>   | <b>xiii</b> |
| <b>Trabalhos publicados pelo autor</b>                            | <b>xv</b>   |
| <b>1 Introdução</b>   | <b>1</b>    |
| 1.1 Objetivos e organização da tese . . . . .                     | 5           |
| <b>2 Caracterização estatística de sinais modulados</b>           | <b>9</b>    |
| 2.1 Estacionariedade . . . . .                                    | 11          |
| 2.1.1 Filtro casado e estacionariedade . . . . .                  | 12          |
| 2.2 Cicloestacionariedade . . . . .                               | 15          |
| 2.2.1 Sobreamostragem e cicloestacionariedade . . . . .           | 20          |
| 2.3 Considerações Finais . . . . .                                | 22          |
| <b>3 Arranjo de antenas em recepção</b>                           | <b>23</b>   |
| 3.1 Modelo de banda estreita para arranjos coerentes . . . . .    | 24          |
| 3.2 Filtro Casado e Estacionariedade . . . . .                    | 29          |
| 3.3 Sobreamostragem e Cicloestacionariedade . . . . .             | 35          |
| <b>4 Técnicas baseadas no modelo estacionário</b>                 | <b>39</b>   |
| 4.1 Abordagem por ajuste de subespaços . . . . .                  | 39          |
| 4.1.1 MUSIC para sinais não-circulares . . . . .                  | 41          |
| 4.1.2 <i>Root</i> -MUSIC para sinais não-circulares . . . . .     | 42          |
| 4.1.3 <i>Weighted</i> -MUSIC para sinais não-circulares . . . . . | 44          |
| 4.2 A técnica do ajuste de covariâncias . . . . .                 | 44          |
| 4.2.1 COMET para sinais não-circulares . . . . .                  | 45          |
| 4.3 A técnica de <i>beamforming</i> com subarranjos . . . . .     | 48          |
| 4.4 Estimador de máxima verossimilhança . . . . .                 | 51          |
| 4.5 Limitantes de variância e limites de resolução . . . . .      | 54          |
| 4.6 Experimentos numéricos . . . . .                              | 56          |
| 4.6.1 Resolução espacial e capacidade . . . . .                   | 56          |
| 4.6.2 Acurácia . . . . .  | 58          |

---

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>5</b> | <b>Técnicas baseadas no modelo cicloestacionário</b>                 | <b>61</b> |
| 5.1      | Abordagem por ajuste de subespaços . . . . .                         | 62        |
| 5.1.1    | <i>Cyclic</i> MUSIC . . . . .  | 62        |
| 5.1.2    | <i>Cyclic</i> MUSIC NC . . . . .                                     | 63        |
| 5.1.3    | <i>Cyclic Root</i> -MUSIC NC . . . . .                               | 65        |
| 5.2      | Abordagem por correlação espectral . . . . .                         | 65        |
| 5.3      | Experimentos numéricos . . . . .                                     | 68        |
| <b>6</b> | <b>Uma nova abordagem para estimação ML DOA no caso estacionário</b> | <b>71</b> |
| 6.1      | Método Proposto . . . . .  | 71        |
| 6.1.1    | Redução da complexidade computacional . . . . .                      | 76        |
| 6.1.2    | Sensibilidade à calibração do arranjo . . . . .                      | 78        |
| 6.2      | Experimentos numéricos . . . . .                                     | 80        |
| 6.2.1    | Acurácia . . . . .   | 80        |
| 6.2.2    | Resolução . . . . .  | 82        |
| 6.2.3    | Capacidade . . . . .   | 84        |
| <b>7</b> | <b>Conclusões e Perspectivas</b>                                     | <b>87</b> |
|          | <b>Referências bibliográficas</b>                                    | <b>91</b> |
|          | Referências bibliográficas . . . . .                                 | 91        |

# Abreviaturas

|        |  |
|--------|--|
| ALU    | Arranjo Linear Uniforme  |
| AMV    | <i>Asymptotically Minimum Variance</i>                                     |
| AWGN   | <i>Additive White Gaussian Noise</i>                                       |
| BB-BP  | Banda-base para Banda-passante   |
| BP-BB  | Banda-passante para Banda-base   |
| BPSK   | <i>Binary Phase Shift Keying</i>   |
| CE     | Correlação Espectral   |
| CFO    | <i>Carrier Frequency Offset</i>  |
| COMET  | <i>Covariance Matching Technique</i>                                       |
| CRB    | <i>Cramér-Rao Bound</i> – Limite de Cramér-Rao                             |
| CRF    | Célula de Resolução de Fourier   |
| CRU    | Circunferência de Raio Unitário  |
| DET-DS | <i>Direction Estimation Technique for Discrete Sources</i>                 |
| DOA    | <i>Direction Of Arrival</i> – Direção de Chegada                           |
| EM     | <i>Expectation Maximization</i>  |
| ESPRIT | <i>Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Technique</i> |
| EVD    | <i>Eigenvalue Decomposition</i>  |
| FDMA   | <i>Frequency Division Multiple Access</i>                                  |
| FBMC   | <i>Filter Bank Multicarrier</i>  |
| FCM    | Filtro Casado Matricial  |
| FIM    | <i>Fisher Information Matrix</i>   |
| ICC    | Interferência Co-canal   |
| IIS    | Interferência Intersimbólica   |
| IQML   | <i>Iterative Quadratic Maximum Likelihood</i>                              |
| ILS    | <i>Iterative Local Search</i>  |
| LOS    | <i>Line-of-Sight</i>   |
| LMS    | <i>Least Mean Squares</i>  |
| LRE    | Limite de Resolução Estatístico  |
| LRF    | Limite de Resolução de Fourier   |
| MEQM   | Mínimo Erro Quadrático Médio   |
| MDL    | <i>Minimum Description Length</i>  |
| MIMO   | <i>Multiple-Input Multiple-Output</i>                                      |
| ML     | <i>Maximum Likelihood</i> – Máxima Verossimilhança                         |
| MMSE   | <i>Minimum Mean Squared Error</i>  |

---

|       |  |
|-------|--|
| MUSIC | <i>Multiple Signals Classification</i>               |
| MVU   | <i>Minimum Variance Unbiased</i>                     |
| NC    | <i>Non-circular</i>                                  |
| OFDM  | <i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i>    |
| OFDMA | <i>Orthogonal Frequency Division Multiple-Access</i> |
| PAM   | <i>Pulse Amplitude Modulation</i>                    |
| PSK   | <i>Phase Shift Keying</i>                            |
| QAM   | <i>Quadrature Amplitude Modulation</i>               |
| QPSK  | <i>Quadrature Phase Shift Keying</i>                 |
| RADAR | <i>RADio Detection And Ranging</i>                   |
| REQM  | <i>Raiz do Erro Quadrático Médio</i>                 |
| RLS   | <i>Recursive Least Squares</i>                       |
| RSIR  | <i>Relação Sinal-Interferente-Ruído</i>              |
| RSR   | <i>Relação Sinal-Ruído</i>                           |
| SDI   | <i>Sinal de Interesse</i>                            |
| SBDOA | <i>Subarray Beamforming for DOA Estimation</i>       |
| SMS   | <i>Subarranjo com Máxima Sobreposição</i>            |
| SC    | <i>Subarranjo Conjugado</i>                          |
| SAGE  | <i>Space Alternating Generalized EM</i>              |
| SRL   | <i>Statistical Resolution Limit</i>                  |
| SVD   | <i>Singular Value Decomposition</i>                  |
| SISO  | <i>Single-Input Single-Output</i>                    |
| SOC   | <i>Second-order Cyclostationary</i>                  |
| SOS   | <i>Second-order Stationary</i>                       |
| TF    | <i>Transformada de Fourier</i>                       |
| TIF   | <i>Transformada Inversa de Fourier</i>               |
| WSC   | <i>Wide-sense Cyclostationary</i>                    |
| WSS   | <i>Wide-sense Stationary</i>                         |
| MODE  | <i>Method Of Direction Estimation</i>                |
| MODEX | <i>MODE with EXtra roots</i>                         |
| MSK   | <i>Minimum Shift Keying</i>                          |

# Notação Matemática

|  |   |
|--|---|
| $a$ ou $A$                                 | escalar   |
| $\mathbf{a}$                               | vetor coluna (letra minúscula em negrito)                                       |
| $\mathbf{A}$                               | matriz (letra maiúscula em negrito)   |
| $\mathbf{I}_N$                             | matriz identidade de dimensão $N \times N$                                      |
| $\mathbf{0}$                               | vetor ou matriz com todos elementos iguais a zero                               |
| $(\cdot)^*$                                | complexo conjugado de um escalar, vetor ou matriz                               |
| $(\cdot)^T$                                | transposto de um vetor ou matriz  |
| $(\cdot)^H$                                | complexo conjugado e transposto de um vetor ou matriz                           |
| $\ \mathbf{a}\ , \ \mathbf{a}\ _2$         | norma $L_2$ do vetor $\mathbf{a}$   |
| $\text{Tr}\{\mathbf{A}\}$                  | traço da matriz $\mathbf{A}$  |
| $E\{\cdot\}$                               | operador esperança estatística  |
| $f(\cdot), g(\cdot)$                       | função  |
| $\arg \min_{\mathbf{a}}\{f(\mathbf{a})\}$  | argumento $\mathbf{a}$ que minimiza a função $f(\mathbf{a})$                    |
| $\arg \max_{\mathbf{a}}\{f(\mathbf{a})\}$  | argumento $\mathbf{a}$ que maximiza a função $f(\mathbf{a})$                    |
| $\sum_i$                                   | somatório com índice $i$  |
| $\det[\mathbf{A}]$                         | determinante da matriz $\mathbf{A}$   |
| $\delta_{k,i}$                             | operador delta de Kroneker  |
| $\sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{A})$ | possui distribuição Gaussiana com média $\mathbf{a}$ e covariância $\mathbf{A}$ |
| $p(\cdot)$                                 | função densidade de probabilidade   |
| $p(\cdot \cdot)$                           | função densidade de probabilidade condicional                                   |

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| $\mathbf{A}^\dagger$            | pseudo-inversa da matriz $\mathbf{A}$   |
| $\text{posto}(\mathbf{A})$      | dimensão da imagem da matriz $\mathbf{A}$   |
| $\hat{(\cdot)}$                 | estimativa de um escalar, vetor ou matriz   |
| $\min(\cdot)$                   | mínimo valor de $(\cdot)$   |
| $\max(\cdot)$                   | máximo valor de $(\cdot)$   |
| $\Re(\cdot)$                    | parte real de $(\cdot)$   |
| $\Im(\cdot)$                    | parte imaginária de $(\cdot)$   |
| $\in \mathbb{C}^{N \times A}$   | pertence ao espaço complexo de dimensão $N \times A$  |
| $\in \mathbb{R}^{N \times A}$   | pertence ao espaço real de dimensão $N \times A$  |
| $\text{Cholesky}(\mathbf{A})$   | fatoração de Cholesky da matriz $\mathbf{A}$  |
| $(A)!$                          | fatorial do valor inteiro $A$   |
| $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$   | produto de Hadamard (produto elemento-a-elemento) entre as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ |
| $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ | produto de Kronecker entre as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$                              |
| $\text{abs}(\cdot)$             | valor absoluto  |
| $\arg[a]$                       | fase do valor complexo $a$  |
| $\arcsen(\cdot)$                | função arco seno ( $\text{sen}^{-1}(\cdot)$ )   |
| $\star$                         | operador convolução   |
| $b^I[k]$                        | componente em fase do símbolo $b[k]$ , ou seja, $\Re(b[k])$                                     |
| $b^Q[k]$                        | componente em quadratura do símbolo $b[k]$ , ou seja, $\Im(b[k])$                               |

# Trabalhos publicados pelo autor

## Artigos em eventos científicos:

1. R. Attux, R. Suyama, R. Ferrari, C. Junqueira, R. Krummenauer, A. Lopes, P. Larzabal, “A clustering-based method for DOA estimation in wireless communications”, *European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2007)*, Poznań, Polônia, 2007;
2. R. Krummenauer, F.S. Chaves, R. Ferrari, M. Uliani Neto, J.M.T. Romano, A. Lopes, “Adaptive Bayesian equalizer with superimposed training for MIMO channels”, *1st IAPR Workshop on Cognitive Information Processing (CIP 2008)*, Santorini, Grécia, 2008;
3. L. Boccato, F.O. de França, R. Krummenauer, R. Attux, F. Von Zuben, A. Lopes, “Otimização dinâmica imuno-inspirada para o problema de estimação de direção de chegada”, *XXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT 2009)*, Blumenau, Brasil, 2009;
4. R. Krummenauer, A. Lopes, “Estimação de direção de chegada de sinais digitalmente modulados”, *I Simpósio de Processamento de Sinais da UNICAMP (SPS 2010)*, Campinas, Brasil, 2010;

## Artigos em revistas:

5. L. Boccato, R. Krummenauer, R. Attux, A. Lopes, “Um estudo da aplicação de algoritmos bio-inspirados ao problema de estimação de direção de chegada”, *Revista Controle & Automação*, v. 20, p. 609-626, 2009;
6. R. Krummenauer, M. Cazarotto, A. Lopes, P. Larzabal, P. Forster, “Improving the threshold performance of maximum likelihood estimation of direction of arrival”, *Signal Processing - Elsevier*, v. 90, p. 1582-1590, 2010;
7. R. Krummenauer, R. Ferrari, R. Suyama, R. Attux, C. Junqueira, P. Pascal, P. Forster, A. Lopes, “Maximum likelihood-based direction of arrival estimator for discrete signals”, *Digital Signal Processing - Elsevier*, submetido em julho de 2011.

Os trabalhos 1, 4 e 7 se relacionam diretamente com os trabalhos de doutorado relatados nesta tese.





# Capítulo 1

## Introdução

Esta tese trata do problema de estimação de direção de chegada de sinais digitalmente modulados, especificamente encontrado no enlace reverso de sistemas de comunicação sem fio multiusuário em que a estação rádio-base é composta por um arranjo de antenas, posicionadas de acordo com alguma geometria pré-definida. A informação espacial, representada pela direção das fontes (usuários ou terminais móveis), pode ser utilizada para melhor explorar a capacidade desses sistemas (Liberti & Rappaport, 1999; Paulraj et al., 2003). A melhora na exploração da capacidade neste caso provém do emprego de técnicas de filtragem espacial do tipo *beamforming*, que se beneficiam do ganho do arranjo ou ganho de diretividade (Zanatta, 2006). O objetivo das técnicas de *beamforming* é controlar o padrão de irradiação do arranjo de modo a aproveitar ao máximo a energia transmitida/recebida. Com isso, pode-se minimizar a potência transmitida tanto no enlace direto como no enlace reverso que, em conjunto com o direcionamento controlado, reduz a interferência co-canal (também chamada de interferência multiusuário), melhorando a qualidade do enlace dos usuários e, conseqüentemente, explorando mais plenamente a capacidade do sistema. Além disso, o consumo de energia nos terminais móveis é reduzido, lembrando que a energia é um recurso muito valioso em sistemas sem fio.

O uso de *beamforming* em recepção (enlace reverso) e em transmissão (enlace direto) é um problema que consideramos já bem estudado na literatura, sendo relevante aqui apenas como motivação. Indicamos as referências (Godara, 1997b, 1997a; Van Trees, 2001; Liberti & Rappaport, 1999; Paulraj et al., 2003; Zanatta, 2002, 2006) para mais detalhes a respeito deste tema. No presente trabalho, nos concentramos na estimação de parâmetros de direção dos usuários, começando pela descrição dos modelos de sinal relativos ao cenário em questão que, em conjunto com os critérios de otimalidade conhecidos, formam os pilares para a nossa proposta de estudo acerca do problema.

Salientamos que o estudo apresentado nesta tese concentra-se nos aspectos teóricos envolvidos no problema atacado. Sendo assim, os resultados apresentados ao longo do texto são fruto de simu-

lações numéricas criadas em computador, em que os dados aplicados aos métodos de estimação são sintetizados para atender às características do cenário que nos propomos a analisar. Esta metodologia permite controle total do cenário, tornando possível a caracterização estatística do desempenho dos métodos analisados, o que não seria possível com dados reais de experimentos práticos.

## Sobre os modelos

Começemos a apresentação do estudo com a seguinte observação: Em qualquer caso prático de estimação de parâmetros, quanto melhor for o modelo atribuído aos dados disponíveis, melhor poderá ser o desempenho do estimador. No sentido estatístico, isto significa, a propósito, que os processos aleatórios envolvidos nas componentes de sinal e de ruído são adequados para representar o comportamento estocástico dos dados. No caso de sinais modulados digitalmente (na transmissão) e sob a condição de canal invariante no tempo, duas classes especiais de processos estocásticos podem ser observados no receptor após a etapa de amostragem: i) processos estacionários e ii) processos cicloestacionários. Será mostrado no Capítulo 2 que os modelos de dados correspondentes em tempo-discreto dependem das técnicas de pré-processamento e amostragem usadas pelo receptor.

Estes modelos estocásticos, dotados de suas características peculiares, dividiram a evolução das pesquisas em estimação de direção de chegada aplicada a sistemas de comunicações digitais em ramos distintos e praticamente independentes.

A primeira frente de pesquisa tem trabalhado com a suposição de que os *snapshots* (termo em inglês para o vetor de dados recebido pelos elementos do arranjo num determinado instante) resultam de um processamento prévio feito com um filtro casado (veja, por exemplo, (Lavielle et al., 1994; Gounon et al., 1998; Chargé et al., 2001b, 2001a; Haardt & Romer, 2004; Delmas & Abeida, 2004, 2006a, 2006b; Delmas, 2004; Abeida & Delmas, 2006, 2008; Salameh & Tayem, 2006; Wang et al., 2006; Attux et al., 2007; J. Liu et al., 2008)), implicando que a amostragem ocorre à taxa de símbolo e que o receptor recuperou perfeitamente a temporização do relógio de referência para sincronização. Este processamento converte os sinais de tempo-contínuo recebidos em sequências de tempo-discreto contendo os símbolos transmitidos, mantendo intacto o comportamento estocástico da informação transmitida. Portanto, o desenvolvimento de métodos e limitantes de estimação para o modelo de *snapshot* resultante torna-se mais simples uma vez que a sequência de símbolos transmitidos é, geralmente, um processo estacionário. De fato, mesmo os métodos mais antigos e generalistas como o MUSIC (R. O. Schmidt, 1986) e o ESPRIT (Roy, 1987) podem ser adotados para realizar a tarefa de estimação sem penalizar muito o resultado final.

A outra frente de pesquisa tem explorado o comportamento cicloestacionário inerente aos sinais transmitidos. Exemplos são os trabalhos (Gardner, 1988b; Schell et al., 1989; Schell & Gardner, 1992; Schell, 1994; Xu & Kailath, 1992; Wylie & Roy, 1995; Xin et al., 1998; Y.-T. Lee & Lee,

2001; Chargé et al., 2003; Chargé & Wang, 2005; Z. Liu et al., 2005, 2006; Yan & Fan, 2005, 2007; Markhi et al., 2007; Inagaki et al., 2007; Reuven & Weiss, 2009). Em breves palavras, um sinal é dito cicloestacionário se suas estatísticas variam periodicamente com o tempo. Esta periodicidade é o que faz este sinal ser tão especial. Em vez de usar um pré-processamento, o receptor simplesmente sobreamostra o sinal complexo em banda-base de tal forma que o número de amostras por período de símbolo é adequado para preservar a cicloestacionariedade do sinal de entrada na sequência de tempo-discreto resultante. Estes tipos de receptores conseguem tirar vantagem do processamento temporal em vez de considerar somente o processamento espacial e, assim, são capazes de separar sinais com diferentes características cicloestacionárias. Em verdade, a maioria dos trabalhos supracitados explora esta capacidade para realizar estimação seletiva (por sinal) de direção de chegada. Outro ponto interessante é que podemos reduzir drasticamente o efeito do ruído, uma vez que o processo de ruído é geralmente suposto estacionário e, portanto, sua contribuição tende a desaparecer no processamento sob considerações adequadas (Gardner, 1987a, 1987b; Xu & Kailath, 1992).

Um ponto comum às frentes de pesquisa acima citadas é que os sinais modulados são geralmente processos aleatórios de valor complexo. Assim, a propriedade de circularidade também deve ser levada em consideração para garantir uma descrição estatística completa destes sinais. Expliquemos melhor a condição de circularidade/não-circularidade:  $z(t) \in \mathbb{C}$  é um processo aleatório circular se  $z(t)$  e  $e^{j\alpha}z(t)$  têm as mesmas distribuições de probabilidade para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$  (Picinbono, 1994; Picinbono & Bondon, 1997). Para o presente trabalho, é suficiente considerar estatísticas até segunda-ordem porque os métodos evocados trabalham nesta condição. Assim, considerando somente momentos de primeira e segunda-ordem, um processo aleatório complexo  $z(t)$  é dito circular se média e autocorrelação/autocovariância complementar  $E\{z(t + \tau)z(t)\}$  são ambas iguais a zero, o que significa que sua autocorrelação/autocovariância hermitiana  $E\{z(t + \tau)z^*(t)\}$ , com  $(\cdot)^*$  denotando a conjugação complexa, contém toda a informação estatística disponível. Do contrário,  $z(t)$  é dito não-circular. Um estudo completo a respeito da circularidade pode ser encontrada em (Picinbono, 1994). Alguns sinais digitais são inerentemente não-circulares. Exemplos comuns são os sinais gerados pelos esquemas BPSK (do inglês *binary phase shift keying*) e PAM (do inglês *pulse amplitude modulation*) de valor real. Outros alfabetos podem ser tanto circulares como não-circulares, dependendo da disposição cartesiana dos símbolos na constelação e das probabilidades *a priori* dos símbolos. No Capítulo 2, daremos exemplos para esclarecer estes conceitos.

Sob a luz das ideias até então expostas, os sinais recebidos, após a amostragem, podem ser classificados em quatro categorias: i) processos estacionários circulares; ii) processos estacionários não-circulares; iii) processos cicloestacionários circulares; e iv) processos cicloestacionários não-circulares. Apenas como curiosidade, a terminologia “circular/não-circular” no caso cicloestacionário não é consenso no campo da estatística. Por exemplo, em vez de usar o termo “covariância/correlação

complementar”, a maioria dos autores o têm denotado como “covariância/correlação conjugada” para evitar a palavra “complementar”, muito usada na análise de circularidade/ não-circularidade de segunda-ordem.

O comportamento não-circular de alguns sinais modulados digitalmente tem motivado pesquisadores a criar estimadores capazes de lidar com sinais circulares e não-circulares simultaneamente, nos quais a autocorrelação complementar serve como informação adicional caso seja não-nula. Os benefícios são inegáveis, como mostrado neste documento e, principalmente, na literatura relacionada.

## Sobre os métodos

Na cronologia das contribuições à estimação de direção de chegada de sinais modulados, podemos enumerar três épocas principais: a primeira considerando o modelo cicloestacionário circular; a segunda considerando o modelo estacionário não-circular, e a terceira tratando com o modelo cicloestacionário não-circular.

Precedendo o primeiro período, o conceito de cicloestacionariedade aplicado a sinais modulados foi introduzido por Gardner em 1987 em um notável artigo de duas partes (Gardner, 1987a, 1987b). Modulações analógicas e digitais são tratadas nestes trabalhos. Um ano depois, Gardner (Gardner, 1988b) introduziu o conceito de cicloestacionariedade em processamento de sinais de arranjos através de uma modificação dos algoritmos MUSIC e ESPRIT. Em 1989, Schell *et al.* (Schell et al., 1989) estenderam o método “tipo-MUSIC” recém citado para operar em um cenário com múltiplas fontes e, em 1992, Xu e Kailath (Xu & Kailath, 1992) desenvolveram um método que não apenas explora as propriedades de correlação espectral dos sinais em questão, mas também é assintoticamente exato para sinais de banda-estreita e de banda-larga.

O segundo período foi marcado pela introdução do conceito de sinais circulares e não-circulares no modelo de dados. Em 1994, Picinbono publicou o famoso trabalho (Picinbono, 1994), que serviu como gatilho para a disseminação da propriedade de circularidade de processos aleatórios de valor complexo no campo de processamento de sinais. Em 1997, Picinbono e Bondon (Picinbono & Bondon, 1997) consolidaram as bases da propriedade reportando um estudo minucioso a respeito das estatísticas de segunda-ordem de sinais complexos, um tópico de interesse direto para estimação paramétrica em processamento de sinais de arranjos.

Observando que a covariância complementar pode conter informação útil, Gounon *et al.* (Gounon et al., 1998) escreveram em 1998 o trabalho pioneiro em estimação de direção de chegada para fontes não-circulares. Esta proposta, inserida no contexto estacionário, é uma extensão do algoritmo MUSIC, no sentido de ser construída baseando-se em um novo modelo de dados, no qual o *snapshot* original é concatenado com sua própria versão complexa conjugada, de modo a incluir a informação da covariância complementar em um modelo paramétrico unificado. Seguindo esta ideia, Chargé *et al.*

(Chargé et al., 2001b) criaram o método root-MUSIC para fontes não-circulares (root-MUSIC NC). Embora este se restrinja a um arranjo linear uniforme, a técnica correspondente baseada na extração de raízes de polinômio (tradução do inglês para *polynomial rooting*) reduz a complexidade computacional e melhora a resolução se comparada com (Gounon et al., 1998). Salameh e Tayem (Salameh & Tayem, 2006), Haardt e Romer (Haardt & Romer, 2004), Delmas (Delmas, 2004) e Abeida juntamente com Delmas (Abeida & Delmas, 2006; Delmas & Abeida, 2004) também deram apreciáveis contribuições a este campo, todas estas vinculadas a estatísticas de segunda-ordem. De interesse teórico especial são (Delmas & Abeida, 2004), (Delmas, 2004) e (Abeida & Delmas, 2006), onde o Limite de Cramér-Rao (CRB do inglês *Cramér-Rao Bound*) para fontes gaussianas não-circulares, o estimador assintótico de mínima variância e o desempenho assintótico dos algoritmos tipo-MUSIC para fontes não-circulares, respectivamente, são discutidos.

No terceiro período, os esforços foram voltados para explorar a propriedade de cicloestacionariedade juntamente com a condição de não-circularidade. Exemplos são os trabalhos (Chargé et al., 2003; Chargé & Wang, 2005; Z. Liu et al., 2005, 2006; Yan & Fan, 2005; Markhi et al., 2007). Entre eles, iremos nos concentrar nos trabalhos de Chargé (Chargé et al., 2003) e (Chargé & Wang, 2005), dos quais podemos fazer uma ponte para os trabalhos previamente mencionados (Gounon et al., 1998) e (Chargé et al., 2001a).

Embora tenhamos dividido o desenvolvimento das pesquisas em três grupos principais, há também outras abordagens, não menos importantes, que exploram outras características dos sinais modulados para estimação de direção de chegada. Entre eles destacamos: i) a família de métodos que são projetados para tratar com sinais de módulo constante, o esquema PSK (do inglês *phase shift keying*) sendo o mais proeminente. Exemplos são os trabalhos (Shynk & Gooch, 1996), (Leshem & Veen, 1999) e (Stoica & Besson, 2000); e ii) a família de métodos que exploram as estatísticas de ordem superior dos dados recebidos. Um esplêndido levantamento deste tópico foi feito por Pascal Chevalier, Anne Ferréol e Laurent Albera em (Tuncer & Friedlander, 2009, Capítulo 8). Apenas para enumerar alguns desenvolvimentos, indicamos os artigos (Cardoso, 1990; Forster & Nikias, 1991; Porat & Friedlander, 1991; Chevalier & Ferreol, 1999; Chevalier et al., 2005, 2006, 2007).

## 1.1 Objetivos e organização da tese

Esta tese tem como objetivos principais: i) esclarecer detalhes normalmente não tratados nos trabalhos de estimação de direção de chegada voltados para sistemas digitais de comunicações sem fio, em especial, detalhes relativos às condições de enlace e do sistema receptor necessárias para suportar a descrição dos modelos de dados considerados na literatura internacional; ii) classificar alguns dos métodos de estimação existentes mais relevantes para o contexto tratado e avaliar suas

vantagens e desvantagens; e iii) introduzir o método de estimação desenvolvido nas pesquisas do período de doutorado.

O novo método de estimação DOA foi desenvolvido para operar no caso de modelo estacionário de dados, descrito no Capítulo 3. A ideia central do método é explorar a natureza discreta com cardinalidade finita da componente de sinal recebida para transformar o problema de estimação em um problema de decisão de estimativas candidatas. A solução proposta é fundamentada no critério da máxima verossimilhança e as análises de desempenho feitas através de simulações numéricas mostram que o estimador fornece resultados com qualidade similar àqueles obtidos pelo estimador ML.

Em acordo com os objetivos acima delineados, o restante da tese está organizado da seguinte maneira:

- Capítulo 2: São apresentados os aspectos básicos dos sinais modulados por pulso através da análise estatística de segunda-ordem da envoltória complexa na recepção. Especificamente, analisaremos as funções de autocorrelação hermitiana e complementar e as condições para que sinais de valor complexo sejam considerados circulares ou não-circulares. Além disso, veremos que a escolha da taxa de amostragem do receptor é fundamental para a seleção do modelo estocástico de tempo-discreto dos dados amostrados e os valores adequados estão diretamente relacionados com a taxa de símbolo dos transmissores. As conclusões delineadas ao longo deste capítulo servirão de base para os estudos apresentados nos capítulos posteriores;
- Capítulo 3: O modelo de sinais de banda estreita para arranjos coerentes é derivado a partir do modelo MIMO de canal. Revelamos aqui as considerações necessárias para esta passagem e também as restrições na estrutura do receptor em arranjo para que os modelos de tempo-discreto, estacionário e cicloestacionário, resultantes da amostragem sejam válidos;
- Capítulo 4: O modelo estacionário de *snapshot* coleciona um grande número de técnicas de estimação de direção de chegada. Descrevemos neste capítulo algumas destas técnicas, dividindo-as em função do tipo de critério de otimalidade usado na solução do problema de estimação. Dentre elas, destacamos as abordagens por ajuste de subespaços, por ajuste de covariância, *beamforming* com subarranjos e a máxima verossimilhança. Por fim, revisitamos os limitantes de variância das estimativas e os limites de resolução estatísticos para os cenários estudados.
- Capítulo 5: O modelo cicloestacionário de *snapshot* tende a conduzir a escolha do critério de otimalidade para aqueles que empregam matrizes de covariância dos dados ou alguma decomposição destas para derivar a técnica de estimação. O motivo está na forma de explorar a cicloestacionariedade que, por definição, se manifesta nos momentos dos processos estocásticos. Esta é a razão pela qual as abordagens por ajuste de subespaço são as mais empregadas

nesta classe. No estudo feito aqui, limitamo-nos a apresentar técnicas baseadas em ajuste de subespaços e em correlação espectral.

- Capítulo 6: A contribuição maior da tese, em termos de metodologia de estimação, é apresentada neste capítulo. Explorando as características particulares do modelo estacionário de *snapshot*, propomos uma nova solução para o problema de estimação dos parâmetros de direção dos usuários fundamentada no princípio da máxima-verossimilhança. Além da proposição do método, apresentamos um estudo de sua complexidade computacional e uma análise minuciosa de seu desempenho, comparando-o com outros métodos relevantes e limitantes de desempenho teóricos discutidos nos capítulos anteriores.
- Capítulo 7: Apresentamos um resumo e algumas conclusões dos estudos desenvolvidos e apontamos algumas perspectivas de continuidade da pesquisa no tema.





## Capítulo 2

# Caracterização estatística de sinais modulados

O conteúdo deste capítulo fundamenta os estudos apresentados nos Capítulos 3 a 6. Nele mostramos:

- (a) um estudo das características estatísticas de segunda-ordem de sinais modulados por pulso;
- (b) a relação entre o filtro casado e a estacionariedade do sinal discretizado no receptor;
- (c) a relação entre a sobreamostragem e a cicloestacionariedade do sinal modulado e como preservá-la na sequência de tempo-discreto resultante da amostragem no receptor.

O primeiro ponto a ser observado é que a análise estatística conduzida neste capítulo estará concentrada na envoltória complexa do sinal recebido, para o caso de um canal de uma entrada e uma saída (SISO, do inglês *Single-Input Single-Output*). Implicitamente, isto significa que o sinal recebido em banda-passante já foi filtrado e convertido para banda-base. As formas de implementação da conversão de banda-passante para banda-base não serão discutidas e, por ora, este processo será considerado ideal. Manteremos o foco na representação matemática dos eventos no receptor. Assim, seja  $\tilde{s}(t) = \sqrt{2}\Re\{s(t)e^{j2\pi f_c t}\}$  o sinal em banda-passante que chega no receptor, no qual  $s(t)$  é a envoltória complexa,  $f_c$  é a frequência da portadora e  $\Re\{\cdot\}$  é o operador que extrai a parte real do seu argumento. Nós abstraímos o mapeamento  $\tilde{s}(t) \rightarrow s(t)$  para nos concentrarmos somente no processamento de  $s(t)$ , o qual é modelado como um processo aleatório de tempo-contínuo e de valor complexo. Como tal,  $s(t)$  pode ser circular ou não-circular. Esta importante propriedade, *circularidade*, dos processos aleatórios de valor complexo deve ser usada para que a caracterização estatística do sinal correspondente seja completa, como mostramos na análise a seguir.

Considere o processo aleatório de valor complexo e de média zero  $z(t) = x(t) + jy(t)$ , sendo por suposição,  $x(t) \in \mathbb{R}$  e  $y(t) \in \mathbb{R}$  processos aleatórios de média zero. Para caracterizar as estatísticas

de  $z(t)$ , devemos descrever as estatísticas conjuntas de  $x(t)$  e  $y(t)$ . Considerando estatísticas de até segunda-ordem,  $x(t)$  e  $y(t)$  são caracterizados pelas funções de autocorrelação e correlação-cruzada

$$\begin{aligned} R_x(t, \tau) &\triangleq E\{x(t + \tau)x(t)\}, & R_y(t, \tau) &\triangleq E\{y(t + \tau)y(t)\}, \\ R_{xy}(t, \tau) &\triangleq E\{x(t + \tau)y(t)\}, & R_{yx}(t, \tau) &\triangleq E\{y(t + \tau)x(t)\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Todos estes momentos estão presentes na função de autocorrelação de  $z(t)$

$$R_z(t, \tau) \triangleq E\{z(t + \tau)z^*(t)\} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} &= E\{[x(t + \tau) + j y(t + \tau)][x(t) + j y(t)]^*\} \\ &= R_x(t, \tau) + R_y(t, \tau) + j [R_{yx}(t, \tau) - R_{xy}(t, \tau)]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

No entanto, para alguns processos aleatórios, pode ocorrer que  $z(t)$  e sua versão conjugada  $z^*(t)$  sejam correlacionados. Consequentemente,  $R_z(t, \tau)$  por si só não contém toda informação de segunda-ordem sobre o processo. Em tais casos, adicionalmente a  $R_z(t, \tau)$ , é necessária a função de autocorrelação *complementar* (também chamada por alguns autores de função de *relação*), definida por

$$\tilde{R}_z(t, \tau) \triangleq E\{z(t + \tau)z(t)\} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} &= E\{[x(t + \tau) + j y(t + \tau)][x(t) + j y(t)]\} \\ &= R_x(t, \tau) - R_y(t, \tau) + j [R_{xy}(t, \tau) + R_{yx}(t, \tau)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para o caso especial em que  $z(t)$  é de valor real, temos  $R_y(t, \tau) = R_{xy}(t, \tau) = R_{yx}(t, \tau) = 0$  e, consequentemente,  $R_z(t, \tau) = \tilde{R}_z(t, \tau)$ . Outro caso interessante surge quando  $x(t)$  e  $y(t)$  são mutuamente descorrelacionados e têm a mesma função de autocorrelação. Neste caso particular  $\tilde{R}_z(t, \tau) = 0$  e, consequentemente, a autocorrelação complementar de  $z(t)$  não contém informação.

Estas peculiaridades a respeito do comportamento em segunda-ordem de  $z(t)$  estão diretamente relacionadas às propriedades de circularidade (tradução do termo em inglês *circularity*, o qual também é às vezes definido como *properness*) e de não-circularidade (tradução do inglês *non-circularity/non-properness*). Como já explicado no Capítulo 1,  $z(t)$  é um processo circular se  $z(t)$  e  $e^{j\alpha}z(t)$  têm as mesmas distribuições de probabilidade para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$  (Picinbono, 1994). Além disso,  $z(t)$  é um processo circular de segunda-ordem se  $\tilde{R}_z(t, \tau) = 0$  (Picinbono & Bondon, 1997; Schreier & Scharf, 2003). De fato, de (2.2) podemos ver que as funções de autocorrelação de  $z(t)$  e  $e^{j\alpha}z(t)$  são as mesmas. Contudo, as funções de autocorrelação complementares correspondentes são iguais se e somente se  $\tilde{R}_z(t, \tau) = 0$ . Portanto, um processo circular de segunda-ordem preserva suas estatísticas de segunda-ordem frente à rotação de fase.

A mesma análise e conclusões se mantêm válidas para vetores e variáveis aleatórias de valor complexo. A única diferença é que o tempo não tem influência na análise. Outro ponto importante é que as mesmas propriedades observadas no domínio de tempo-contínuo são também válidas no domínio de tempo-discreto. Para mais detalhes sobre estas conexões, veja (Ollila, 2008; Schreier & Scharf, 2003; Picinbono & Bondon, 1997; Picinbono, 1994). Para o caso especial de processos gaussianos complexos, veja também (Barry et al., 2003, Cap. 3).

Uma vez que nosso objetivo é analisar o caso de sinais modulados digitalmente em sistemas de comunicações,  $z(t)$  fará o papel do sinal recebido. Como já estabelecido, trataremos do sinal após o estágio de conversão banda-passante para banda-base. Consequentemente,  $z(t)$  representa a envoltória complexa em banda-base corrompida por ruído aditivo e possíveis interferentes. Dependendo do método empregado pelo receptor para discretização, ou seja, para realizar o mapeamento  $z(t) \rightarrow z[k]$ , no qual  $k$  denota o índice de tempo da sequência, o sinal de tempo-discreto resultante  $z[k]$  pode ser um processo aleatório estacionário ou cicloestacionário.

## 2.1 Estacionariedade

Normalmente, um sinal complexo  $z(t)$  (ou  $z[k]$ ) é dito estacionário no sentido amplo (WSS do inglês *wide-sense stationary*) se seu valor médio é constante e se sua função de autocorrelação (2.3) é função somente da diferença de tempo  $\tau = \Delta t \in \mathbb{R}$  (ou *lag* de valor  $l = \Delta k \in \mathbb{Z}$ ). Entretanto, nada sobre a função de autocorrelação complementar é dito nesta definição. De acordo com Picinbono e Bondon (Picinbono & Bondon, 1997), um sinal  $z(t)$  (ou  $z[k]$ ) é estacionário de segunda-ordem (SOS do inglês *second-order stationary*) se ele for WSS e se sua função de autocorrelação complementar depender somente de  $\tau$  (ou  $l$ ).

Considerando  $z(t)$  SOS, temos que  $x(t)$  e  $y(t)$  são conjuntamente WSS. Portanto,  $R_x(t, \tau) = R_x(\tau)$ ,  $R_{xy}(t, \tau) = R_{xy}(\tau)$ ,  $R_{yx}(t, \tau) = R_{yx}(\tau)$  e  $R_y(t, \tau) = R_y(\tau)$ . Embora as correlações-cruzadas não sejam, em geral, funções pares como as autocorrelações, as primeiras estão relacionadas por  $R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$ . Usando estas equivalências em (2.3) e (2.5) obtemos

$$R_z(t, \tau) = R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + j [R_{xy}(-\tau) - R_{xy}(\tau)] \quad (2.6)$$

$$\tilde{R}_z(t, \tau) = \tilde{R}_z(\tau) = R_x(\tau) - R_y(\tau) + j [R_{xy}(\tau) + R_{xy}(-\tau)]. \quad (2.7)$$

De (2.7), as condições sobre  $x(t)$  e  $y(t)$  para que  $z(t)$  seja circular de segunda-ordem são  $R_x(\tau) = R_y(\tau)$  e  $R_{xy}(\tau) = -R_{xy}(-\tau)$ . Outra possibilidade é  $R_x(\tau) = R_y(\tau)$  e  $R_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau) = 0$ . Esta última condição ocorre somente quando  $x(t)$  e  $y(t)$  são descorrelacionados e balanceados. O termo *balanceado* será usado para os casos em que  $x(t)$  e  $y(t)$  têm a mesma autocorrelação (ou

autocovariância). Qualquer outra condição faz de  $z(t)$  um processo não-circular de segunda-ordem.

### 2.1.1 Filtro casado e estacionariedade

Seja o sinal recebido  $z(t)$  um processo aleatório complexo seguindo o modelo

$$z(t) = s(t) \star h(t) + n(t),$$

em que  $\star$  denota o operador convolução,  $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k]p(t - kT)$  é um sinal PAM (do inglês *Pulse Amplitude Modulation*) de valor complexo,  $b[k] = b^I[k] + j b^Q[k]$  denota o símbolo complexo,  $T$  é o período de símbolo,  $p(t)$  é o pulso transmitido,  $h(t)$  é a resposta ao impulso equivalente em banda-base do canal e  $n(t)$  representa um ruído gaussiano de valor complexo e de média zero com momentos de segunda-ordem  $E\{n(t+\tau)n^*(t)\} = \sigma_n^2\delta(\tau)$  e  $E\{n(t+\tau)n(t)\} = 0$ . Por suposição, a sequência de tempo-discreto  $\{b[k]\}$  é mutuamente independente e identicamente distribuída (i.i.d.) com  $E\{b[k]\} = 0$ . Adicionalmente,  $s(t)$  e  $n(\tau)$  são independentes  $\forall t, \tau$ . Pelo fato de o pulso  $p(t)$  ser transmitido periodicamente, constituindo assim  $s(t)$ , o processo  $z(t)$  não é WSS ou mesmo SOS porque sua autocorrelação depende necessariamente do instante  $t$  considerado. Porém, se processarmos  $z(t)$  com um filtro casado, um procedimento comum em sistemas de comunicação digital e de RADAR (do inglês *Radio Detection and Ranging*), obteremos após a amostragem um sinal de tempo-discreto do tipo SOS como demonstrado a seguir.

Como cada pulso recebido é dado pela forma de onda  $q(t) \triangleq p(t) \star h(t)$ , então o filtro casado  $f(t)$  tem resposta ao impulso  $f(t) = q^*(-t)$ . Se processarmos  $z(t)$  com o filtro casado teremos na saída

$$\begin{aligned} r(t) &= z(t) \star q^*(-t) \\ &= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k]\delta(t - kT) \right) \star q(t) \star q^*(-t) + n(t) \star q^*(-t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k]d(t - kT) + w(t) \end{aligned}$$

em que  $d(t) \triangleq q(t) \star q^*(-t)$  e  $w(t) \triangleq n(t) \star q^*(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)q^*(\tau - t)d\tau$ .

Amostrando  $r(t)$  nos instantes  $t = lT$ , com  $l \in \mathbb{Z}$ , temos

$$r(lT) = b[l]d(t - lT)|_{t=lT} + \sum_{k \neq l} b[k]d(t - kT) \Big|_{t=lT} + w(lT) \quad (2.8)$$

da qual notamos que o segundo termo à direita da igualdade representa a interferência intersimbólica (IIS). Para garantir que  $r(lT)$  seja livre de IIS, a forma de onda resultante  $d(t)$  deve obedecer a

condições especiais. Há duas possibilidades: i)  $d(t) \neq 0$  somente para  $0 \leq t \leq T$ , isto é,  $d(t)$  é limitada ao intervalo de símbolo; ii)  $d(t)$  obedece ao critério de pulsos de Nyquist (veja (Proakis, 2005; Barry et al., 2003)) que apresentam cruzamentos em zero nos instantes  $t = lT$  para  $l \neq 0$ .

Naturalmente, cada um destes casos implica restrições distintas em  $q(t)$  e, conseqüentemente, em  $p(t)$ . Para o primeiro caso, é suficiente que  $q(t)$  tenha duração limitada à metade do intervalo de símbolo enquanto para o segundo,  $q(t)$  deve ser um pulso de Nyquist do tipo raiz-quadrada (tradução do inglês *square-root Nyquist pulse*). Para detalhes a respeito do conceito e projeto destes pulsos veja (Farhang-Boroujeny, 2008). O ponto mais importante agora para a análise é que, se  $d(t)$  obedece a qualquer uma destas condições, então a IIS é zero porque  $d(t - kT)|_{t=lT} = 0$  para  $l \neq k$  e temos que  $r(lT) = b[l]E_q + w(lT)$ , na qual  $E_q \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau)q^*(\tau)d\tau = d(0)$  denota a energia de  $q(t)$ . Além disso, a desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser usada para demonstrar de maneira simples que o filtro casado maximiza a relação sinal-ruído (RSR) (veja (Barry et al., 2003, Capítulo 5) e (Proakis, 2005, Capítulo 5)).

Seguindo em frente, o filtro casado fornece na saída, após amostragem, a seqüência de tempo-discreto

$$r[k] = b[k]E_q + w[k], \quad (2.9)$$

na qual substituímos a notação do índice de tempo  $l \in \mathbb{Z}$  para  $k$ .

Pode ser mostrado em poucos passos que  $w[k]$  é uma seqüência SOS branca e de média zero. O cálculo da média estatística é direto

$$\mathbb{E}\{w(kT)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\{n(\tau)\}q^*(\tau - kT)d\tau = 0.$$

A autocorrelação  $\mathbb{E}\{w[k+l]w^*[k]\}$  pode ser obtida usando a expressão

$$\begin{aligned} w((k+l)T)w^*(kT) &= \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)q^*(\tau - (k+l)T)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} n^*(\xi)q(\xi - kT)d\xi d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)n^*(\xi)q^*(\tau - (k+l)T)q(\xi - kT)d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Aplicando o operador esperança estatística a (2.10), resulta

$$\mathbb{E}\{w((k+l)T)w^*(kT)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n^2 \delta(\tau - \xi)q^*(\tau - (k+l)T)q(\xi - kT)d\xi d\tau. \quad (2.11)$$

A solução não-trivial é obtida para  $\xi = \tau$  e  $l = 0$ , levando ao resultado

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{w((k+l)T)w^*(kT)\} &= \sigma_n^2 \delta(l) \int_{-\infty}^{\infty} |q(\tau - kT)|^2 d\tau \\ &= \sigma_n^2 \delta(l) E_q. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Usando a mesma abordagem, pode ser rapidamente mostrado que a autocorrelação complementar  $\mathbb{E}\{w((k+l)T)w(kT)\}$  é zero para todo  $k$  e  $l$ , uma vez que  $n(t)$  é um processo circular.

Sabemos que  $\{b[k]\}$  é i.i.d. e independente de  $w[k]$ , e que  $w[k]$  é SOS, circular e branca. Portanto,  $r[k]$  é SOS com momentos de segunda-ordem

$$R_r = R_b + R_w \quad \text{e} \quad \tilde{R}_r = \tilde{R}_b, \quad (2.13)$$

em que  $R_b \triangleq \mathbb{E}\{b[k]b^*[k]\}$ ,  $\tilde{R}_b \triangleq \mathbb{E}\{b[k]b[k]\}$  e  $R_w \triangleq \mathbb{E}\{w[k]w^*[k]\} = \sigma_n^2 E_q$ .

Baseando-se nestes resultados, concluímos que  $r[k]$  é circular de segunda-ordem se e somente se a variável aleatória discreta  $b[k]$  é circular.

Por exemplo, seja  $b[k]$  a representação dos símbolos de um alfabeto BPSK (do inglês *Binary Phase Shift Keying*) com energia  $E_a$ . A constelação tem cardinalidade  $\mathcal{L} = 2$  e é representada pelo alfabeto  $\mathbb{A} = \sqrt{E_a}\{\pm 1\}$ . As autocovariâncias são  $R_b = \mathbb{E}\{b[k]b^*[k]\} = \sum_{i=1}^2 |b_i|^2 P[b[k] = b_i] = E_a$  e  $\tilde{R}_b = \mathbb{E}\{b[k]b[k]\} = \sum_{i=1}^2 b_i^2 P[b[k] = b_i] = E_a$ .

Independentemente dos valores assumidos para as probabilidades *a priori* dos símbolos,  $R_b$  e  $\tilde{R}_b$  serão ambas sempre não-nulas e idênticas. Portanto, para sinalização BPSK,  $r[k]$  é definitivamente não-circular. Este também é o caso para a sinalização  $M$ -PAM de valor real, na qual  $M = 2^n$  e  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Para um alfabeto 4-QAM (do inglês *Quadrature Amplitude Modulation*), a constelação tem cardinalidade  $\mathcal{L} = 4$  e é representada pelo alfabeto  $\mathbb{A} = \sqrt{E_a/2}\{\pm 1 \pm j\}$ . As autocovariâncias são  $R_b = \sum_{i=1}^4 |b_i|^2 P[b[k] = b_i] = E_a$  e

$$\begin{aligned} \tilde{R}_b &= E_a j (P[b[k] = +1 + j] + P[b[k] = -1 - j]) \\ &\quad + E_a (-j) (P[b[k] = +1 - j] + P[b[k] = -1 + j]) . \end{aligned}$$

Assim, se o alfabeto tem símbolos equiprováveis,  $\tilde{R}_b = 0$  e então a sinalização 4-QAM equiprovável é circular. Da mesma forma, se  $P[b[k] = +1 + j] + P[b[k] = -1 - j] = P[b[k] = +1 - j] + P[b[k] = -1 + j]$ , então  $\tilde{R}_b = 0$ . Por outro lado, se esta igualdade não for válida, o esquema 4-QAM é não-circular.

Em poucas palavras, um dado alfabeto de valor complexo pode ser circular ou não-circular dependendo das probabilidades *a priori* dos símbolos e da disposição (distribuição) destes no plano

real-imaginário, enquanto alfabetos de valor real serão sempre não-circulares.

## 2.2 Cicloestacionariedade

Um sinal complexo  $z(t)$  é dito um processo cicloestacionário se suas estatísticas variam periodicamente com o tempo. Considerando estatísticas de segunda-ordem,  $z(t)$  é normalmente dito cicloestacionário no sentido amplo (WSC do inglês *wide-sense cyclostationary*) se a função de autocorrelação é periódica. Adotaremos o termo cicloestacionário de segunda-ordem (SOC do inglês *second-order cyclostationary*) para especificar que tanto a função de autocorrelação  $R_z(t, \tau)$  como a função de autocorrelação complementar  $\tilde{R}_z(t, \tau)$  variam periodicamente com o tempo. Como no caso SOC  $R_z(t, \tau)$  e  $\tilde{R}_z(t, \tau)$  exibem periodicidade, sob algumas condições de regularidade (veja (Gardner et al., 2006)), estas funções podem ser expandidas em série de Fourier. A frequência fundamental  $1/T_0$  e o conjunto de harmônicas  $n/T_0$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , são chamadas de *frequências de ciclo* (tradução do inglês *cycle frequencies*). Os coeficientes da série são, por sua vez, funções da diferença de tempo (*lag*)  $\tau$  e são chamados de *funções de autocorrelação cíclicas*. Estas funções retratam um tipo de “impressão digital” que pode ser usado para identificar e selecionar os sinais correspondentes quando superpostos por outros sinais (cicloestacionários ou não) em um processamento que pode ser visto como uma “filtragem banda-passante no domínio das estatísticas”.

Formalmente, um processo de valor real  $x(t)$  é WSC com período  $T_0$  se sua média  $E\{x(t)\}$  e função de autocorrelação  $R_x(t, \tau)$  são periódicos com período  $T_0$ , ou seja,  $E\{x(t+T_0)\} = E\{x(t)\}$  e  $R_x(t+T_0, \tau) = R_x(t, \tau)$  para todo  $t$  e  $\tau$ . Por suposição,  $E\{x(t)\} = 0 \forall t$  no presente contexto. Como  $R_x(t, \tau)$  é uma função periódica, a expansão em série de Fourier é dada por

$$R_x(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x^{n/T_0}(\tau) e^{j2\pi(n/T_0)t}, \quad (2.14)$$

na qual os coeficientes

$$R_x^{n/T_0}(\tau) \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_x(t, \tau) e^{-j2\pi(n/T_0)t} dt \quad (2.15)$$

são as funções de autocorrelação cíclicas e as frequências  $\{\alpha_n = n/T_0\}_{n \in \mathbb{Z}}$  são as frequências de ciclo (Gardner et al., 2006). Podemos classificar  $x(t)$  de acordo com os seguintes casos:

- Se  $R_x^{\alpha_n}(\tau) \equiv 0$  para todo  $\alpha_n \neq 0$  e  $R_x^0(\tau) \neq 0$ , então  $x(t)$  é *puramente estacionário*. Observe que, para  $n = 0$ ,  $R_x^{\alpha_n}(\tau) = R_x^0(\tau) = R_x(\tau)$ , ou seja, a autocorrelação cíclica é simplesmente a função de autocorrelação;
- Se  $R_x^{\alpha_n}(\tau) \neq 0$  somente para  $\alpha_n = n/T_0$ , com  $n \neq 0$ , então  $x(t)$  é *puramente cicloestacionário*;



- Se  $R_x^{\alpha n}(\tau) \neq 0$  para  $n = 0$  e também para algum  $n \neq 0$ , então  $x(t)$  é cicloestacionário e ambos itens anteriores são casos particulares deste. Este caso aparece na maioria das classes de sinais modulados. Um bom número de exemplos pode ser encontrado nos trabalhos seminais (Gardner, 1987a, 1987b) de Gardner. O Exemplo 2, à frente nesta seção, ilustra este caso nas Figuras 2.1 e 2.2.
- Se  $R_x^{\alpha n}(\tau) \neq 0$  para frequências de ciclo não-múltiplas da fundamental  $1/T_0$ , então  $x(t)$  *exibe cicloestacionariedade*. Este caso não é relevante para nosso estudo.

Processos cicloestacionários são modelos probabilísticos apropriados para sinais que passaram por transformações periódicas, tais como operações de amostragem, digitalização, modulação, multiplexação e codificação, desde que o sinal seja estacionário antes desta transformação periódica (Gardner, 1987a). Para sinais modulados, os períodos de cicloestacionariedade correspondem, por exemplo, às frequências da portadora, taxas de pulso, taxas de repetição do código de espalhamento, taxas de multiplexação por divisão no tempo, e outras mais (Gardner, 1987a).

No caso de processos de valor complexo, a caracterização no sentido amplo é feita em termos das funções de autocorrelação e autocorrelação complementar  $R_z(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_z^{n/T_0}(\tau) e^{j 2\pi(n/T_0)t}$  e  $\tilde{R}_z(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{R}_z^{n/T_0}(\tau) e^{j 2\pi(n/T_0)t}$ , nas quais  $R_z^{n/T_0}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_z(t, \tau) e^{-j 2\pi(n/T_0)t} dt$  e  $\tilde{R}_z^{n/T_0}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{R}_z(t, \tau) e^{-j 2\pi(n/T_0)t} dt$  são a função de autocorrelação cíclica e a função de autocorrelação cíclica complementar, respectivamente. As definições precedentes para sinais de valor real se estendem facilmente para o caso de valor complexo, veja (Gardner et al., 2006, Seção 3.5) e as referências citadas neste.

Recorde que o processo  $z(t)$  provém de uma operação de modulação na transmissão e, assim, este sinal é um processo cicloestacionário de tempo-contínuo. Considerando que  $z(t)$  é SOC com período  $T_0$ , então, de (2.3) e (2.5), temos que

$$R_z(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ R_x^{n/T_0}(\tau) + R_y^{n/T_0}(\tau) + j [R_{yx}^{n/T_0}(\tau) - R_{xy}^{n/T_0}(\tau)] \} e^{j 2\pi(n/T_0)t} \quad (2.16)$$

$$\tilde{R}_z(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ R_x^{n/T_0}(\tau) - R_y^{n/T_0}(\tau) + j [R_{yx}^{n/T_0}(\tau) + R_{xy}^{n/T_0}(\tau)] \} e^{j 2\pi(n/T_0)t}, \quad (2.17)$$

em que  $R_x^{n/T_0}(\tau)$  e  $R_y^{n/T_0}(\tau)$  são as funções de autocorrelação cíclicas de  $x(t)$  e  $y(t)$  respectivamente. Nas equações acima também aparecem  $R_{xy}^{n/T_0}(\tau)$  e  $R_{yx}^{n/T_0}(\tau)$ , que são as funções de correlação-cruzada cíclicas de  $x(t)$  e  $y(t)$ . A definição de correlação-cruzada cíclica é dada por

$$R_{xy}^{n/T_0}(\tau) \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_{xy}(t, \tau) e^{-j 2\pi(n/T_0)t} dt. \quad (2.18)$$



De acordo com a definição (Gardner, 1988a),  $x(t)$  e  $y(t)$  são conjuntamente cicloestacionários com frequência de ciclo  $\alpha_n \neq 0$  se e somente se  $R_{xy}^{\alpha_n}(\tau) \neq 0$ . Portanto, as condições sobre  $x(t)$  e  $y(t)$  para circularidade de segunda-ordem de  $z(t)$  são  $R_x^{n/T_0}(\tau) = R_y^{n/T_0}(\tau)$  ( $x(t)$  e  $y(t)$  são balanceados) e  $R_{yx}^{n/T_0}(\tau) = -R_{xy}^{n/T_0}(\tau)$  para todo  $n$  que resulte em funções de autocorrelação e correlação-cruzada cíclicas não-nulas. Outra possibilidade ocorre quando  $x(t)$  e  $y(t)$  são balanceados e mutuamente descorrelacionados, ou seja,  $R_x^{n/T_0}(\tau) = R_y^{n/T_0}(\tau)$  e  $R_{yx}^{n/T_0}(\tau) = R_{xy}^{n/T_0}(\tau) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Note que, se  $x(t)$  e  $y(t)$  não são conjuntamente cicloestacionários, então  $R_{xy}^{\alpha_n}(\tau) \equiv 0$  para todo  $\alpha_n \neq 0$ . Apesar disto, podemos ter  $R_{yx}(\tau) \neq 0$  e  $R_{yx}(\tau) \neq 0$ . Logo,  $x(t)$  e  $y(t)$  podem não ser mutuamente descorrelacionados.

Esta conclusão e outras análises semelhantes são melhor visualizadas quando reescrevemos (2.16) e (2.17) da forma

$$R_z(t, \tau) = R_z(\tau) + \sum_{n \neq 0} \left\{ R_x^{n/T_0}(\tau) + R_y^{n/T_0}(\tau) + j \left[ R_{yx}^{n/T_0}(\tau) - R_{xy}^{n/T_0}(\tau) \right] \right\} e^{j 2\pi(n/T_0)t} \quad (2.19)$$

$$\tilde{R}_z(t, \tau) = \tilde{R}_z(\tau) + \sum_{n \neq 0} \left\{ R_x^{n/T_0}(\tau) - R_y^{n/T_0}(\tau) + j \left[ R_{yx}^{n/T_0}(\tau) + R_{xy}^{n/T_0}(\tau) \right] \right\} e^{j 2\pi(n/T_0)t} \quad (2.20)$$

em que  $R_z(\tau)$  e  $\tilde{R}_z(\tau)$  são dadas por (2.6) e (2.7).

Resumindo:

- Se  $x(t)$  e  $y(t)$  são balanceados e descorrelacionados, então  $z(t)$  é um processo circular cicloestacionário de segunda-ordem;
- Se  $x(t)$  e  $y(t)$  são balanceados e correlacionados, então  $z(t)$  é um processo não-circular cicloestacionário de segunda-ordem;
- Se  $x(t)$  e  $y(t)$  são desbalanceados, então  $z(t)$  é um processo não-circular cicloestacionário de segunda-ordem, mesmo se  $x(t)$  e  $y(t)$  forem descorrelacionados.

Veja no exemplo a seguir alguns destes conceitos.

**Exemplo 1:** Seja  $z(t)$  modelado como na Seção 2.1.1, exceto pelo pulso  $p(t)$ , que agora não tem restrição no formato, e pelo canal, que agora é plano em frequência, ou seja,  $h(t) = \delta(t)$ . Assim,

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k]p(t - kT) + n(t).$$

Como  $s(t)$  e  $n(t')$  são independentes para todo  $t$  e  $t'$ , as funções de autocorrelação e autocorrela-

ção complementar de  $z(t)$  são dadas por

$$R_z(t, \tau) = R_s(t, \tau) + \sigma_n^2 \delta(\tau) \quad (2.21)$$

$$\tilde{R}_z(t, \tau) = \tilde{R}_s(t, \tau). \quad (2.22)$$

Para evitar confusão na notação, neste exemplo iremos supor que o pulso é de valor real. Devido à transmissão periódica de  $p(t)$  e à estacionariedade da sequência  $\{b[k]\}$ , o processo  $z(t)$  é cicloestacionário. Identificando  $x(t)$  e  $y(t)$  em  $z(t)$  temos que

$$x(t) = \sum_k b^I[k] p(t - kT) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Re\{n(t)\} \quad (2.23)$$

$$y(t) = \sum_k b^Q[k] p(t - kT) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Im\{n(t)\}. \quad (2.24)$$

Se as sequências  $\{b^I[k]\}$  e  $\{b^Q[m]\}$  são brancas com correlações  $E\{b^I[k]b^I[m]\} = \sigma_{b^I}^2 \delta(k-m)$  e  $E\{b^Q[k]b^Q[m]\} = \sigma_{b^Q}^2 \delta(k-m)$ , mas possivelmente correlacionadas entre si com correlação cruzada  $E\{b^I[k]b^Q[m]\} = \rho_{IQ} \delta(k-m)$ , então

$$R_z(t, \tau) = (\sigma_{b^I}^2 + \sigma_{b^Q}^2) g(t, \tau, T) + \sigma_n^2 \delta(\tau) \quad (2.25)$$

$$\tilde{R}_z(t, \tau) = (\sigma_{b^I}^2 - \sigma_{b^Q}^2 + j 2\rho_{IQ}) g(t, \tau, T), \quad (2.26)$$

em que  $g(t, \tau, T) \triangleq \sum_k p(t - kT + \tau) p(t - kT)$ .

De (2.25) e (2.26), vemos que a circularidade de  $z(t)$  depende da autocorrelação e correlação cruzada das componentes em fase e em quadratura da sequência de símbolos  $\{b[k]\}$  e que a função  $g(t, \tau, T)$  define a periodicidade de  $R_z(t, \tau)$  e  $\tilde{R}_z(t, \tau)$ .

■

Façamos uma análise sucinta dos resultados do Exemplo 1. A Figura 2.1 mostra a magnitude das funções de autocorrelação cíclicas  $R_z^{\alpha_n}(\tau)$  de  $z(t)$ , na ausência de ruído, quando o pulso  $p(t)$  é um pulso de Nyquist ideal, isto é,  $p(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_0}\right)$ . Neste caso, o espectro de frequência de  $p(t)$  é dado por  $P(f) = \frac{1}{2B_p} \text{rect}\left(\frac{f}{2B_p}\right)$ , com largura de banda  $B_p = \frac{1}{2T_0}$ , em que  $\text{rect}(t)$  é a função retangular. De acordo com esta figura, os maiores valores de magnitude das funções de autocorrelação cíclicas são encontrados em  $\tau = 0$  e as frequências de ciclo significantes estão no intervalo  $-2 \leq n \leq +2$ , ou seja, a “frequência zero”  $\alpha_n = 0$ , a “frequência fundamental”  $\pm 1/T_0$  e a “segunda harmônica”  $\pm 2/T_0$  são as mais relevantes na representação periódica da função de autocorrelação  $R_z(t, \tau)$ .

Na Figura 2.2, mostramos a magnitude de  $R_z^{\alpha_n}(\tau)$  para o caso em que  $p(t)$  é um pulso *meio-cosseno* (tradução do inglês *half cosine pulse*), na ausência de ruído, como um exemplo de pulso de duração limitada no tempo. Este pulso não é limitado em banda, mas a magnitude da *cauda* do

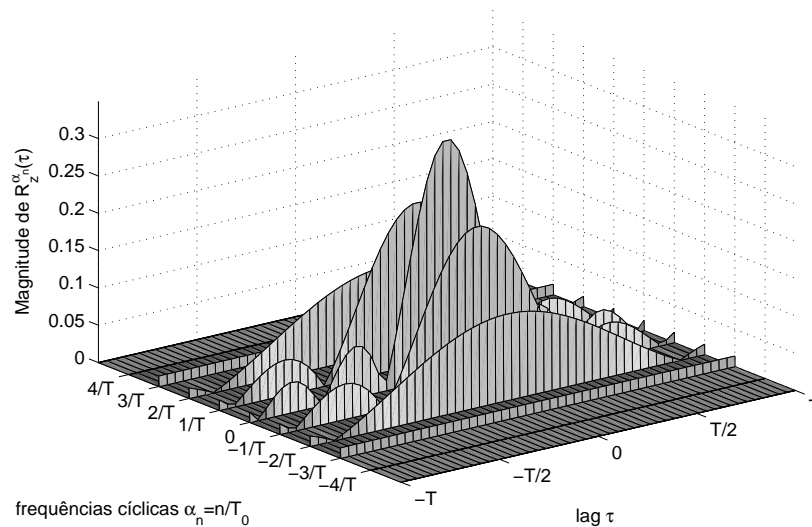


Figura 2.1: Funções de autocorrelação cíclicas de  $z(t)$  para  $p(t) = \text{sinc}(\pi t/T_0)$ , na ausência de ruído.

espectro decai mais rapidamente que a do pulso retangular. De acordo com a Figura 2.2, observamos que as funções de autocorrelação cíclicas se espalham na variável  $\tau$  assim como na variável  $\alpha_n$  e que os maiores picos na magnitude de  $R_z^{\alpha_n}(\tau)$  para  $n \neq 0$  ocorrem para  $n = \pm 2$  em  $\tau = 0$ .

Na presença de ruído estacionário, a magnitude de  $R_z^{\alpha_n}(\tau)$  mudaria apenas em  $\alpha_n = 0$ . Esta é a razão pela qual a RSR pode ser aumentada quando a cicloestacionariedade é explorada. Por exemplo, se o ruído é estacionário e branco, então as curvas das Figuras 2.1 e 2.2 mudariam apenas no ponto ( $\tau = 0, \alpha_n = 0$ ). Este resultado será revisitado nos experimentos numéricos da Seção 5.3.

Seguindo em frente, uma breve análise de (2.25) e (2.26) confirma as conclusões anteriores:

- Se  $b^I[k]$  e  $b^Q[m]$  são balanceados e descorrelacionados, então  $z(t)$  é um processo cicloestacionário circular de segunda-ordem;
- Se  $b^I[k]$  e  $b^Q[m]$  são balanceados e correlacionados, então  $z(t)$  é um processo cicloestacionário não-circular de segunda-ordem;
- Se  $b^I[k]$  e  $b^Q[m]$  são desbalanceados, então  $z(t)$  é um processo cicloestacionário não-circular de segunda ordem mesmo se  $b^I[k]$  e  $b^Q[m]$  forem descorrelacionados.

Portanto, somente as estatísticas da sequência de símbolos afetam a circularidade do processo  $z(t)$ . Por exemplo, seja  $b[k]$  uma sequência i.i.d. de símbolos equiprováveis que pertencem a uma constelação 4-QAM. Se as componentes em fase e em quadratura são balanceadas e descorrelacionadas, então  $\tilde{R}_z(t, \tau) = 0$  e  $z(t)$  é circular. Em contraste, se  $b[k]$  pertence a uma constelação BPSK (ou 2-PAM), então não há a possibilidade de haver balanceamento porque a componente em quadratura

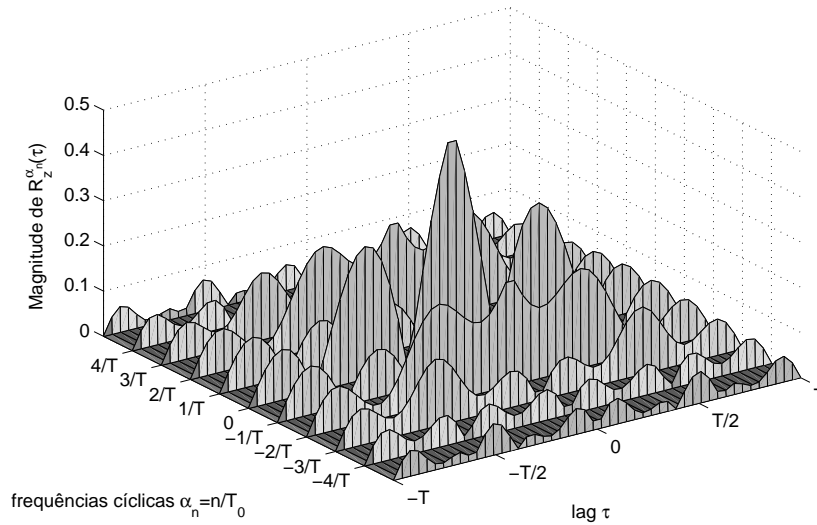


Figura 2.2: Funções de autocorrelação cíclicas de  $z(t)$  para um pulso meio-cosseno ( $p(t) = \cos(2\pi t/T_0)$  quando  $|t| \leq T_0/2$  e  $p(t) = 0$  caso contrário), na ausência de ruído.

tem variância zero uma vez que  $b[k]$  é de valor real. Neste caso,  $\tilde{R}_z(t, \tau) = \tilde{R}_s(t, \tau) = R_s(t, \tau) = \sigma_b^2 g(t, \tau, T)$  e, portanto,  $z(t)$  é inevitavelmente não-circular.

## 2.2.1 Sobreamostragem e cicloestacionariedade

Pode ser mostrado que, sob algumas condições, a operação de amostragem no receptor,  $z(t) \mapsto z[k]$ , preserva a cicloestacionariedade do sinal original  $z(t)$  no sinal de tempo-discreto  $z[k]$  (veja (Gardner et al., 2006, páginas 653-654) e as referências citadas neste). Uma breve análise desta transformação é apresentada a seguir.

Seja  $z[k]$  uma sequência obtida através de uma amostragem uniforme, com período  $T_s$ , do sinal de tempo-contínuo  $z(t)$ :  $z[k] \triangleq z(t)|_{t=kT_s}$ . Pode ser mostrado que as funções de autocorrelação e autocorrelação complementar de  $z[k]$  são dadas por (Gardner et al., 2006, página 653)

$$R_{z_s}[k, l] = R_z(t, \tau)|_{t=kT_s, \tau=lT_s} \quad (2.27)$$

$$\tilde{R}_{z_s}[k, l] = \tilde{R}_z(t, \tau)|_{t=kT_s, \tau=lT_s} \quad (2.28)$$

e

$$R_{z_s}^{\alpha_{n,s}}[l] = \sum_{q \in \mathbb{Z}} R_{z_s}^{\alpha_n - q/T_s}(\tau) \Big|_{\tau=lT_s, \alpha_{n,s}=\alpha_n T_s} \quad (2.29)$$

$$\tilde{R}_{z_s}^{\alpha_{n,s}}[l] = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \tilde{R}_{z_s}^{\alpha_n - q/T_s}(\tau) \Big|_{\tau=lT_s, \alpha_{n,s}=\alpha_n T_s} \quad (2.30)$$

são as funções de autocorrelação cíclicas. Como  $z(t)$  representa a envoltória complexa do sinal recebido, este é um sinal em banda-base limitado em frequência. Seja  $B$  a largura de banda de  $z(t)$ . Pode ser mostrado que as réplicas nos espectros periódicos das funções de autocorrelação cíclicas (2.29) e (2.30) (veja (Gardner et al., 2006, página 654, equação (3.110))) não sofrem sobreposição se e somente se

$$1/T_s \geq 4B. \quad (2.31)$$

Se esta condição é respeitada, então

$$R_z^{\alpha_n}(\tau) \Big|_{\tau=lT_s} = \begin{cases} R_{z_s}^{\alpha_{n,s}}[l] \Big|_{\alpha_{n,s}=\alpha_n T_s} & , \quad |\alpha_n| \leq \frac{1}{2T_s} \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\tilde{R}_z^{\alpha_n}(\tau) \Big|_{\tau=lT_s} = \begin{cases} \tilde{R}_{z_s}^{\alpha_{n,s}}[l] \Big|_{\alpha_{n,s}=\alpha_n T_s} & , \quad |\alpha_n| \leq \frac{1}{2T_s} \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.33)$$

Portanto, para  $T_s = T_0/L$ , na qual  $T_0$  é o período de cicloestacionariedade de  $z(t)$  e  $L \in \mathbb{Z}^+$ , então  $z[k]$  é uma sequência cicloestacionária de tempo-discreto com período  $L$ . Note também que  $\alpha_{n,s} = \alpha_n T_s$  e, portanto,  $\alpha_{n,s} = n/L$  é a frequência de ciclo correspondente no domínio de tempo-discreto.

**Exemplo 2:** Seja  $z(t)$  modelado como no Exemplo 1,

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b[k]p(t - kT_0) + n(t).$$

Vamos definir que  $p(t)$  é um pulso de Nyquist que satisfaz

$$B \geq \frac{1}{2T_0} \quad , \quad \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(f - \frac{k}{T_0}\right) = 1 \quad (2.34)$$

em que  $B$  é a largura de banda monolateral e  $P(f)$  é a transformada de Fourier de  $p(t)$ . Se a operação de amostragem é realizada à taxa de símbolo, (2.34) representa a condição para que não haja interferência intersimbólica. Porém, estamos interessados em sobreamostrar  $z(t)$ . A condição para que não haja sobreposição no espectro das funções de autocorrelação cíclicas é

$1/T_s \geq 4B$  estabelecido em (2.31). Portanto, para o caso idealizado em que  $p(t)$  é dado por uma função *sinc* e a largura de banda do pulso é mínima, temos que  $B = \frac{1}{2T_0}$ . Substituindo esta restrição em (2.31), obtemos o limitante  $T_s \leq T_0/2$  para o período de amostragem e, assim, o período  $L$  de cicloestacionariedade é limitado por  $L \geq 2$ . Combinando estas restrições, estabelecemos que

$$B \geq \frac{1}{2T_0} \quad \text{e} \quad T_s = \frac{T_0}{L} \quad \text{para algum } L \geq 2 \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.35)$$

são as condições para que  $z[k]$  preserve a cicloestacionariedade, garantindo que os espectros das funções de autocorrelação cíclicas não sejam sobrepostos. Aqui,  $L$  indica o período de cicloestacionariedade no domínio de tempo-discreto e também a taxa de sobreamostragem e  $T_0$  indica o período de cicloestacionariedade no domínio de tempo-contínuo. Salientamos ainda que, para  $L = 1$ , não há sobreamostragem e a sequência resultante  $z[k]$  é reduzida ao caso estacionário. ■

## 2.3 Considerações Finais

Resumindo os principais resultados deste capítulo:

- O resultado da amostragem da envoltória complexa  $z(t)$  a uma taxa  $1/T_s = 1/T_0$ , após recepção com o filtro casado, é uma sequência SOS  $z[k]$  livre de interferência intersimbólica para duas classes de pulsos: i) aqueles cuja duração no tempo é limitada ao período de símbolo  $T_0$ ; ii) pulsos de Nyquist do tipo raiz-quadrada;
- O resultado da amostragem da envoltória complexa  $z(t)$  a uma taxa  $1/T_s = L/T_0$ , com  $L \geq 2$ , é uma sequência SOC  $z[k]$  com período de cicloestacionariedade  $L$  e espectros das funções de autocorrelação cíclicas não-sobrepostos;
- O comportamento circular/não-circular de  $z[k]$  (para os casos estacionário e cicloestacionário) depende da constelação e das estatísticas da sequência de símbolos transmitida, particularmente das probabilidades *a priori* dos símbolos e da correlação entre a componente em fase e em quadratura da sequência transmitida.

# Capítulo 3

## Arranjo de antenas em recepção

A análise feita no Capítulo 2 refere-se propositalmente ao caso mais simples, em que um transmissor e um receptor estabelecem comunicação através de um canal de entrada e saída únicas (SISO, do inglês *Single-Input Single-Output*). No presente capítulo, estendemos a análise para o caso de um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *Multiple-Input Multiple-Output*) caracterizado por  $M$  transmissores e  $N$  pontos de recepção. Cada transmissor possui uma única antena enquanto o receptor é composto por um arranjo de  $N$  antenas, pouco espaçadas, com posições conhecidas e dispostas de acordo com uma geometria pré-definida. Esta configuração é especialmente útil para explorar a *coerência espacial* dos caminhos de propagação, em contraste com o caso tradicionalmente tratado em sistemas MIMO de comunicação, no qual os pontos de recepção são suficientemente distantes na tentativa de garantir *diversidade espacial* para todos canais SISO individuais que compõem o canal MIMO.

Neste capítulo apresentamos:

- (a) a derivação do modelo de *snapshot* em tempo-contínuo de sinais de banda-estreita para arranjos coerentes no enlace reverso a partir do modelo geral de canal MIMO;
- (b) as condições para a recepção com o filtro casado e o modelo de *snapshot* em tempo-discreto resultante desta recepção;
- (c) o modelo de *snapshot* de tempo-discreto no caso de sobreamostragem no receptor, as condições na taxa de amostragem para preservar a cicloestacionariedade do modelo de *snapshot* de tempo-contínuo e a caracterização estatística em segunda-ordem do modelo cicloestacionário de tempo-discreto.

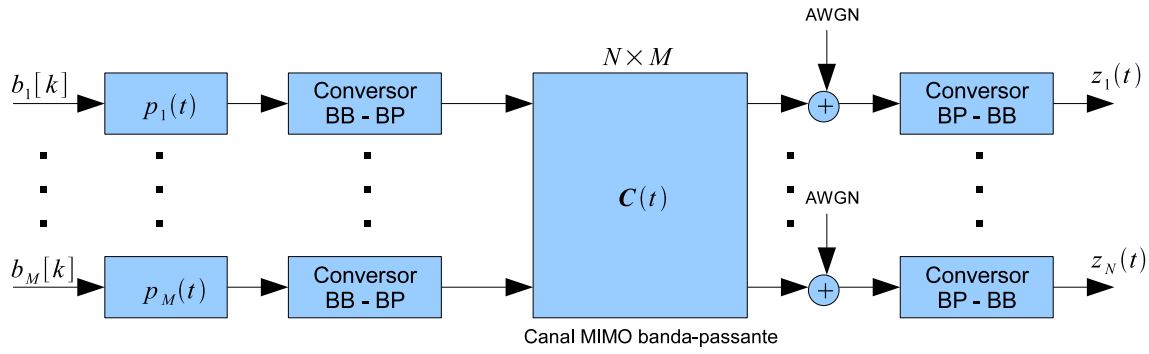


Figura 3.1: Canal MIMO banda-passante. AWGN é uma sigla para ruído gaussiano branco e aditivo (do inglês *Additive White Gaussian Noise*). Os conversores BB-BP e BP-BB representam os conversores de banda-base para banda-passante (*upconverter*) e de banda-passante para banda-base (*downconverter*).

### 3.1 Modelo de banda estreita para arranjos coerentes

O cenário MIMO é ilustrado em diagrama de blocos na Figura 3.1. Os sinais dos  $M$  transmissores são modelados como sinais PAM complexos com taxa de símbolo  $1/T_0$  como

$$s_m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_m[k] p_m(t - kT_0), \quad m = 1, \dots, M, \quad (3.1)$$

em que  $b_m[k] = b_m^I[k] + j b_m^Q[k]$  e  $p_m(t)$  são, respectivamente, o símbolo no instante  $kT_0$  e a forma de onda do pulso com largura de banda monolateral  $B_{p_m}$  relativos ao  $m$ -ésimo sinal. O canal banda-passante é representado pela matriz  $\mathbf{C}(t) \in \mathbb{R}^{N \times M}$ , a qual é composta pelas respostas ao impulso  $c_{nm}(t)$ , em que o índice  $n$  indica o elemento no receptor e  $m$  indica a fonte. Supomos que todos os canais  $c_{nm}(t)$  têm a mesma largura de banda  $B_c$ .

O modelo em banda-base equivalente pode ser escrito como (Barry et al., 2003, Capítulo 10)

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(t - kT_0) \mathbf{b}(k) + \mathbf{n}(t), \quad (3.2)$$

no qual  $\mathbf{H}(t) \in \mathbb{C}^{N \times M}$  é a matriz MIMO das respostas ao impulso em banda-base  $h_{nm}(t)$ ,  $\mathbf{b}(k) \triangleq [b_1(k), \dots, b_M(k)]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  é um vetor contendo os símbolos das fontes no instante  $kT_0$  e  $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  é o vetor de ruído, considerado um processo aleatório gaussiano circular, espacialmente e temporalmente decorrelacionado com variância  $\sigma_n^2$  e média zero. Como  $h_{nm}(t)$  representa a conversão banda-passante para banda-base da forma de onda recebida, sua transformada de Fourier pode ser



escrita como

$$H_{nm}(f) = P_m(f)C_{nm}(f + f_c)F(f + f_c), \quad (3.3)$$

na qual  $P_m(f)$ ,  $C_{nm}(f)$  e  $F(f)$  são as transformadas de Fourier (TFs) do pulso transmitido, da resposta ao impulso do canal banda-passante e do filtro banda-passante do receptor, respectivamente, e  $f_c$  é a frequência central da banda.

Em um cenário onde a distância entre cada fonte (transmissor) e o arranjo (receptor) é suficientemente grande para que as frentes de onda incidentes sejam aproximadamente planas e, supondo que toda energia recebida é exclusivamente escoada por caminhos em linha-de-visada (LOS, do inglês *line-of-sight*), a TF de cada canal  $c_{nm}(t)$  é dada por

$$C_{nm}(f) = G_m(f)e^{j2\pi f \tau_{nm}}, \quad (3.4)$$

na qual  $G_m(f)$  é a TF da resposta ao impulso relativa ao  $m$ -ésimo caminho, a qual é comum a todas as antenas do arranjo devido à coerência espacial, e  $\tau_{nm}$  é o atraso de propagação da  $m$ -ésima forma de onda entre o  $n$ -ésimo elemento e o elemento de referência do arranjo. Por exemplo, para um arranjo linear uniforme (ALU) com elementos espaçados de  $d$  metros, a expressão para  $\tau_{nm}$  pode ser descrita por

$$\tau_{nm} = \frac{(n-1)d}{c} \text{sen}(\theta_m), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.5)$$

na qual  $\theta_m$  é o ângulo de chegada do  $m$ -ésimo sinal e  $c$  é a velocidade da onda eletromagnética no ar. Arranjos com outras geometrias levam a diferentes expressões para o parâmetro  $\tau_{nm}$ , veja (Van Trees, 2001, Capítulos 2 e 3) para mais exemplos.

Uma consideração comum na literatura de processamento de sinais de arranjos, especialmente em estimação de direção de chegada, é que os sinais são de banda-estreita. Do ponto de vista do arranjo de antenas, uma definição bem aceita para banda-estreita é expressa pela condição  $B \tau_{\max} \ll 1$  (Van Trees, 2001; Zatman, 1998), na qual  $B$  é a largura de banda do sinal e  $\tau_{\max}$  é o tempo máximo de propagação ao longo do arranjo. Uma vez que o tamanho do arranjo é da ordem do comprimento de onda da portadora, esta condição é equivalente a  $f_c \gg \max\{B_m\}_{m=1}^M$ , na qual  $B_m$  é a largura de banda do  $m$ -ésimo sinal recebido. Como demonstrado por Zatman em (Zatman, 1998), à medida que a largura de banda do sinal recebido tende a zero, a correlação entre o sinal recebido em extremidades opostas do arranjo tende à unidade, pois, neste caso, os sinais recebidos nos sensores diferem entre si apenas pelo deslocamento de fase  $e^{j2\pi f_c \tau}$ , onde  $\tau$  é o atraso de propagação entre os elementos das extremidades opostas do arranjo. Para discussões a respeito das definições existentes para banda-estreita em processamento de sinais de arranjos, veja (Buckley, 1987), (Zatman, 1998) e (Delmas & Meurisse, 2003).

Do ponto de vista do canal de comunicação, o sinal transmitido é de banda-estreita se a largura

de banda do sinal (definida pela taxa de símbolo) for muito menor que a frequência da portadora. Se isto for verdade e se a largura de banda do sinal for também muito menor que a largura de banda do canal, a resposta em frequência do canal pode ser modelada como uma constante ao longo da banda de frequências ocupada pelo sinal. Lembre-se de que a faixa de frequências na qual o canal é considerado plano, ou seja, o intervalo de frequência no qual diferentes frequências do sinal sofrem desvanecimento coerente (ou de alta correlação) em amplitude, é chamado de *banda de coerência* do canal, que denotamos aqui por  $B_{co}$ . Então, considerando que todas as larguras de banda dos sinais  $B_m$  são menores que  $B_{co}$ , todos os canais banda-passante  $c_{nm}(t)$  são não-seletivos em frequência.

Este cenário é encontrado em sistemas de múltiplo-acesso por divisão em frequência (FDMA, do inglês *frequency division multiple access*), multiplexação por divisão ortogonal em frequência (OFDM, do inglês *orthogonal frequency division multiplexing*) e OFDM de múltiplo-acesso (OFDMA, do inglês *orthogonal frequency division multiple-access*), nos quais a largura de banda  $B_c$  do canal é particionada em um conjunto de sub-bandas estreitas e ortogonais, cada uma com uma sub-portadora (veja o artigo tutorial (Morelli et al., 2007) e também (Van Nee & Prasad, 1999) para detalhes destes sistemas). Um esquema muito similar, também baseado em múltiplas portadoras, é encontrado nos sistemas multi-portadora de banco de filtros (FBMC, do inglês *filter bank multicarrier*) (veja a o artigo de revisão (Farhang-Boroujeny & Yuen, 2010), que faz um paralelo entre OFDM e FBMC). A grande vantagem dos sistemas multi-portadora é a flexibilidade de gerenciar os recursos disponíveis de acordo com a severidade do canal em cada sub-banda. Por exemplo, esquemas de modulação e codificação adaptativa e técnicas de atribuição de sub-banda são usadas no padrão IEEE 802.16 (*IEEE802.16-2009, IEEE 802 Standard for local and metropolitan area networks, Part 16: Air Interface for Broadband Wireless Access Systems*, 2009) e propostos nos sistemas de rádio-cognitivo (Mitola, 1999; Haykin, 2005) para otimizar a eficiência espectral. No cenário de que estamos tratando, separamos uma destas sub-bandas, com frequência central/portadora  $f_{c_i}$  e largura de banda  $B_{c_i} \leq B_{co}$ , para representar os canais banda-passante  $c_{nm}(t)$  do modelo de dados no enlace reverso (ou de subida), isto é, dos nós (fontes) para a estação rádio-base (arranjo receptor). Como  $M$  usuários ativos compartilham a mesma sub-banda ao mesmo tempo, esta configuração pode ser vista como o enlace reverso de um sistema multi-portadora de múltiplo-acesso baseado em divisão espacial. Sob estes argumentos, após aplicarmos (3.4) em (3.3), temos que

$$H_{nm}^{(i)}(f) = P_m(f)G_m^{(i)}(f + f_{c_i})e^{j2\pi(f+f_{c_i})\tau_{nm}}F(f + f_c) \quad (3.6)$$

em que  $G_m^{(i)}(f)$  é o espectro plano de frequência da  $i$ -ésima sub-banda, centrada em  $f_{c_i}$ .

Como, por hipótese,  $B_{c_i} \ll f_{c_i}$ , temos que  $(f + f_{c_i})\tau_{nm} \approx f_{c_i}\tau_{nm}$  no intervalo  $f_{c_i} - B_{c_i}/2 \leq f \leq f_{c_i} + B_{c_i}/2$ , e o atraso de grupo é descrito por  $e^{j2\pi f_{c_i}\tau_{nm}}$  ao longo da faixa ocupada pela sub-banda. Adicionalmente, se o filtro banda-passante tem uma resposta retangular em frequência e

simetricamente posta ao redor de  $f_c$ , com largura equivalente a  $B_c \triangleq L_s B_{c_i}$ , em que  $L_s$  é o número de sub-bandas encapsuladas no canal banda-passante banda-larga, então a ação de  $F(f + f_c)$  é inócua e pode ser desprezada. Neste caso, a transformada inversa de Fourier (TIF) de (3.6) resulta em

$$h_{nm}^{(i)}(t) = p_m(t) \star g_m^{(i)} \delta(t) e^{j 2\pi f_{c_i} \tau_{nm}}, \quad (3.7)$$

em que  $g_m^{(i)} \delta(t)$  é a resposta ao impulso equivalente em banda-base de  $G_m^{(i)}(f)$  (canal LOS com desvanecimento plano) e  $g_m^{(i)} \in \mathbb{R}$  é um ganho/atenuação constante. Além disso, a expressão (3.7) é válida para o caso de usuários com velocidade relativamente baixa, na qual o máximo deslocamento Doppler ( $\Delta f_{\max}$ ) leva a um tempo de coerência  $T_{co} = \sqrt{9/(16\pi\Delta f_{\max})}$  (veja (Rappaport, 2002))<sup>1</sup> de duração equivalente a vários símbolos e, portanto, os parâmetros do canal  $g_m^{(i)}$  e  $\tau_{nm}$  são estáticos ao longo de vários blocos de dados, caracterizando um modelo de *desvanecimento lento*. Por simplicidade de notação, o índice de sub-banda  $i$  será ocultado doravante no texto, a menos que o contrário seja especificado.

Em sistemas de múltiplo-acesso, a sincronização de portadora e de símbolo no enlace reverso não são triviais porque os nós de transmissão não são coordenados. Como consequência, o receptor no enlace reverso é inerentemente não-coerente e a sincronização correspondente requer técnicas mais sofisticadas que aquelas dedicadas ao enlace direto, pois o enlace de cada usuário é afetado por erros de sincronização exclusivos devido aos deslocamentos Doppler e atrasos de propagação. O problema de sincronização no enlace reverso é por si só um assunto de pesquisa na medida que pode ser categorizado como um problema de estimação multi-paramétrico e não será tratado em conjunto com os métodos de estimação DOA apresentados neste trabalho. Uma excelente referência para este tópico, no contexto de sistemas OFDMA, é o tutorial (Morelli et al., 2007), anteriormente citado.

Para os estudos apresentados nesta tese, vamos supor perfeitas a recuperação de tempo de símbolo e a correção de deslocamento de frequência da portadora (CFO, do inglês *carrier frequency offset*) que surgem devido à instabilidade dos osciladores nos misturadores que compõem os conversores de banda-base para banda-passante e de banda-passante para banda-base e devido ao deslocamento Doppler. Assim, dado que a temporização de símbolo e frequência de portadora são recuperados, o receptor é não-coerente apenas em fase. Neste caso, o resultado (3.7) se torna

$$h_{nm}(t) = p_m(t) e^{j \phi_m^{\text{up}}} \star g_m \delta(t) e^{j \phi_n^{\text{down}}} e^{j 2\pi f_c \tau_{nm}} \quad (3.8)$$

$$= g_m p_m(t) e^{j (\phi_m^{\text{up}} + \phi_n^{\text{down}})} e^{j 2\pi f_c \tau_{nm}}, \quad (3.9)$$

no qual  $\phi_m^{\text{up}}$  e  $\phi_n^{\text{down}}$  representam a fase desconhecida da portadora no  $m$ -ésimo conversor BB-BP mais a fase devido ao atraso de propagação entre a antena transmissora e a receptora e a fase no  $n$ -ésimo

<sup>1</sup>Outras expressões para o tempo de coerência são definidas na literatura, veja também (Tse & Viswanath, 2005).

conversor BP-BB, respectivamente. Em um projeto sensato, o receptor emprega um único oscilador e linhas de atraso adequadas para sincronizar todos os elementos do arranjo. Neste caso,  $\varphi_n^{\text{down}} \triangleq \varphi^{\text{down}}$  para todo índice  $n$  e este parâmetro de fase pode ser agregado ao deslocamento de fase  $\phi_m^{\text{up}}$ , reduzindo (3.9) a

$$h_{nm}(t) = g_m p_m(t) e^{j\phi_m} e^{j2\pi f_c \tau_{nm}}, \quad (3.10)$$

na qual  $\phi_m \triangleq \phi_m^{\text{up}} + \varphi^{\text{down}}$ .

Usando (3.10) no modelo em banda-base (3.2), a envoltória complexa na saída da  $n$ -ésima antena é dada por

$$z_n(t) = \sum_{m=1}^M e^{j2\pi f_c \tau_{nm}} g_m e^{j\phi_m} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_m(k) p_m(t - kT_0) \right) + n_n(t), \quad (3.11)$$

para  $n = 1, 2, \dots, N$ . De acordo com (3.11), a matriz MIMO das formas de onda recebidas pode ser escrita como

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{P}(t), \quad (3.12)$$

na qual

$$\mathbf{P}(t) \triangleq \text{diag} (g_1 e^{j\phi_1} p_1(t), \dots, g_M e^{j\phi_M} p_M(t)) \in \mathbb{C}^{M \times M} \quad (3.13)$$

e  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \triangleq [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_M)] \in \mathbb{C}^{N \times M}$  é a matriz de resposta do arranjo composta pelos vetores de direção  $\mathbf{a}(\theta_m) = [e^{j2\pi f_c \tau_{1m}}, e^{j2\pi f_c \tau_{2m}}, \dots, e^{j2\pi f_c \tau_{Nm}}]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ . Com isto o modelo de *snapshot* é dado por

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(t - kT_0) \mathbf{b}(k) + \mathbf{n}(t). \quad (3.14)$$

Observe que (3.14) é um caso particular do modelo MIMO geral (3.2), em que a assinatura espacial do canal, representada pela matriz de resposta  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ , é posta em evidência e é claramente independente da envoltória do sinal. A razão por trás deste fato é que os sinais são de banda-estreita, permitindo a modelagem do atraso de tempo do sinal como um deslocamento de fase constante ao longo da banda inteira, isto é,  $s_m(t + \tau_{nm}) \approx s_m(t) e^{j2\pi f_c \tau_{nm}}$ , como já argumentamos no texto que precede (3.7).

Estamos interessados na discretização da envoltória complexa recebida  $\mathbf{z}(t)$  para permitir o processamento de sinais em tempo-discreto dos dados. Para o nosso caso, de modulação digital por pulso, temos duas formas interessantes para realizar a discretização. Primeiro, podemos empregar uma filtragem linear baseada no filtro casado matricial (FCM) seguida de amostragem à taxa de símbolo. Como verificado na Seção 2.1 para o caso SISO, este processo de discretização permite tirar vantagem da propriedade de estacionariedade da sequência de símbolos transmitidos ao mesmo tempo que garante zero IIS para duas classes especiais de pulsos. Sob algumas condições, isto também ocorre para o caso MIMO, como mostrado a seguir. Na segunda forma, a qual independe do formato do

pulso, podemos simplesmente sobreamostrar a envoltória complexa recebida a uma taxa adequada. Novamente, da Seção 2.2, este processo de discretização permite explorar a propriedade cicloestacionária dos sinais modulados. Estes dois procedimentos serão analisados agora do ponto de vista do arranjo receptor.

## 3.2 Filtro Casado e Estacionariedade

Como no caso SISO, para o receptor de um sistema MIMO de comunicação, a saída do filtro casado tem uma característica marcante. O FCM produz na saída *estatísticas suficientes* para decisão de símbolo sem IIS (Barry et al., 2003, Chapter 10). Isto significa que a dimensão da saída é sempre igual ao número  $M$  de transmissores independentemente do número  $N$  de antenas receptoras no receptor, restrito a  $N \geq M$ . A recepção com o FCM requer que a resposta ao impulso do canal esteja disponível no receptor, uma vez que a resposta ao impulso do FCM é dada por  $\mathbf{H}^H(-t)$ . Esta informação é apenas parcialmente conhecida pelo receptor no problema de estimação DOA, pois os parâmetros  $\theta_m$  do vetor  $\boldsymbol{\theta}$  de  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  são o objeto de estimação. Assim, embora nosso foco não seja decisão de símbolo, a análise dos mecanismos do receptor FCM irá nos auxiliar na busca por um esquema de recepção que nos leve a um modelo de *snapshot* de tempo-discreto livre de IIS.

Vamos começar com o FCM. Para o modelo de *snapshot* de banda-estreita (3.14), podemos dividir o canal  $\mathbf{H}(t)$  em parte espacial e parte temporal,  $\mathbf{H}_S(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  e  $\mathbf{H}_T(t) = \mathbf{P}(t)$  respectivamente. Portanto,  $\mathbf{H}^H(-t) = \mathbf{P}^H(-t)\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})$  e o FCM pode ser implementado em blocos como mostrado na Figura 3.2(a). Quando ocorre a divisão em bloco temporal e bloco espacial, o FCM deve ser aplicado em cascata, primeiro o bloco espacial e depois o temporal, de acordo com a expressão descrita previamente  $\mathbf{H}^H(-t) = \mathbf{P}^H(-t)\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta})$ .

O ponto importante é que o FCM fornece, após a amostragem, a estatística (sinal)  $\mathbf{y}[k] \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  com zero IIS se os pulsos  $p_m(t)$  obedecem a algumas restrições. Note, no entanto, que o FCM não elimina a interferência co-canal (ICC). Vamos explicar. A condição para zero IIS implica que a saída do FCM, quando amostrada à taxa de símbolo, na ausência de ruído, produz o sinal  $\mathbf{y}(lT_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^H(\tau - t)\mathbf{z}(\tau)d\tau \Big|_{t=lT_0} = \mathbf{D}\mathbf{b}[l]$ , na qual  $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  vem de

$$\mathbf{H}^H(-t) \star \mathbf{H}(t - kT_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^H(\tau - t)\mathbf{H}(\tau - kT_0)d\tau = \mathbf{D}(t, k) \quad (3.15)$$

com  $\mathbf{D} \triangleq \mathbf{D}(t = kT_0, k)$ . Pode ser facilmente mostrado que o elemento  $(m, i)$  da matriz  $\mathbf{D}(t, k)$  é

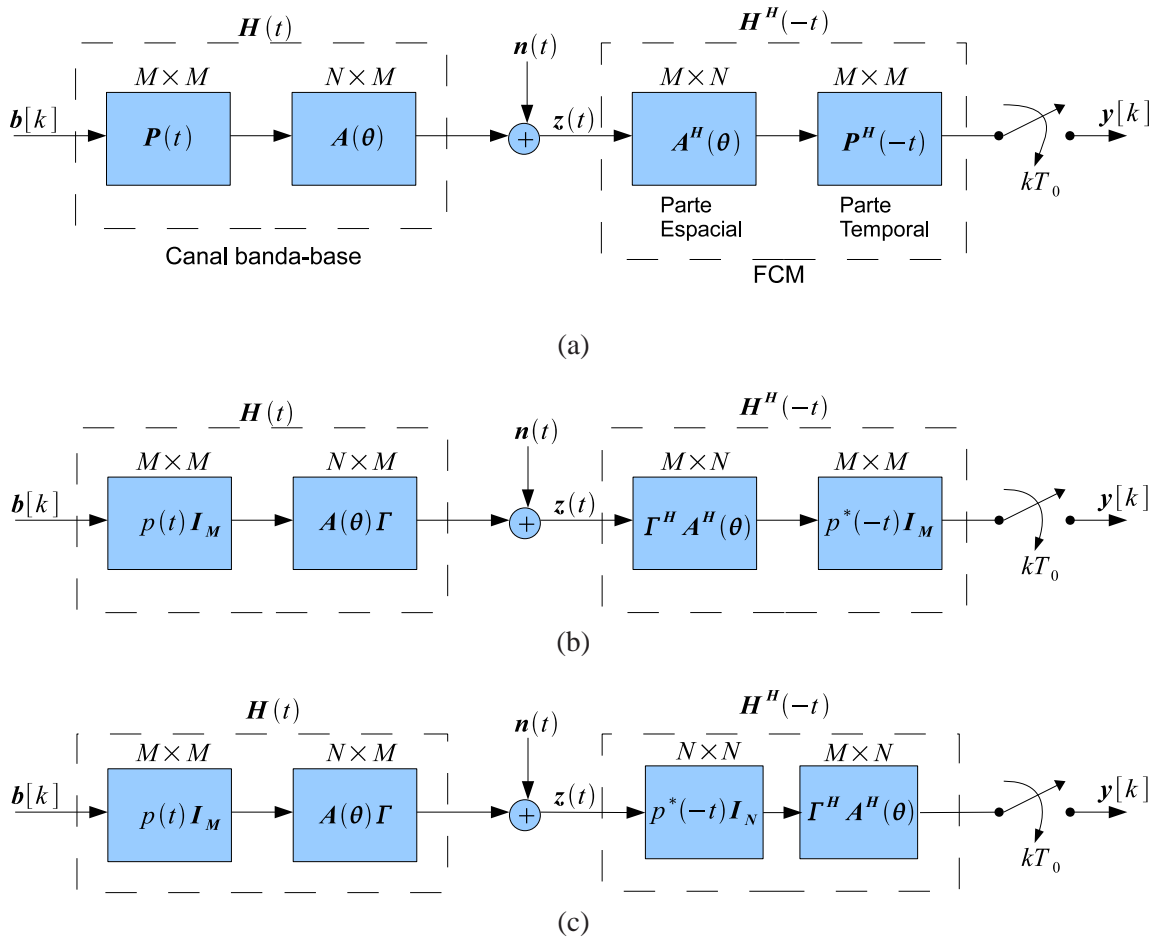


Figura 3.2: Esquemas FCM para decisão de símbolo: (a) caso geral em que  $p_i(t) \neq p_j(t) \forall i \neq j$ ; (b) caso reduzido em que  $p_i(t) = p(t) \forall 1 \leq i \leq M$ ; (c) caso reduzido e comutado.

descrito por

$$[\mathbf{D}(t, k)]_{mi} = \sum_{n=1}^N h_{nm}^*(-t) \star h_{ni}(t - kT_0), \quad \text{para } m, i = 1, \dots, M. \quad (3.16)$$

Aplicando (3.10) em (3.16), obtemos

$$[\mathbf{D}(t, k)]_{mi} = g_m g_i e^{j(\phi_i - \phi_m)} (p_m^*(-t) \star p_i(t - kT_0)) \sum_{n=1}^N e^{j2\pi f_c(\tau_{ni} - \tau_{nm})}. \quad (3.17)$$

Portanto, podemos constatar que o resultado  $\mathbf{y}(lT_0)$  tem zero IIS se os elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{D}(t, k)$ , denotados aqui por  $d_m(t, k) \triangleq [\mathbf{D}(t, k)]_{mm}$ , obedecem à relação  $d_m(t, k)|_{t=lT_0} = \kappa_m \delta(l - k)$ , na qual  $\kappa_m$  é uma constante. De (3.17), concluímos que esta condição é verificada se  $p_m^*(-t) \star p_m(t - kT_0)|_{t=lT_0} = E_{p_m} \delta(l - k)$ , na qual  $E_{p_m}$  é a energia da forma de onda  $p_m(t)$  e que  $\kappa_m = N E_{p_m} g_m^2$ . Além disso, como, para  $m \neq i$ , a relação  $p_m^*(-t) \star p_i(t - kT_0)|_{t=lT_0} \neq 0$  é em geral verificada, então a matriz  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(kT_0, k)$  é não-diagonal e, portanto, o FCM não elimina a ICC. Esta conclusão é reforçada no caso em que todos os  $M$  transmissores usam o mesmo pulso  $p_m(t) = p(t)$ .

Há dois casos possíveis que validam esta restrição de ausência de IIS. Na primeira possibilidade, todos os pulsos  $p_m(t)$  têm duração limitada ao período de símbolo, isto é,  $p_m(t) = 0$  fora do intervalo de símbolo  $0 \leq t \leq T_0$ . Como pulsos limitados no tempo têm largura de banda ilimitada, este caso é restrito a poucas aplicações. Por outro lado, o segundo caso é bastante adequado a canais de banda limitada. Se todas as formas de onda  $d_m(t)$  obedecem ao critério de pulsos de Nyquist, então a condição  $d_m(t, k)|_{t=lT_0} = \kappa_m \delta(l - k)$  é satisfeita porque  $d_m(t, k)$  tem passagens em zero em  $t = lT_0$  para  $l \neq k$ . Um pulso de Nyquist satisfaz a relação

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_m \left( f - \frac{k}{T_0} \right) = T_0,$$

na qual  $D_m(f)$  denota a TF de  $d_m(t)$ , cuja largura de banda normalmente está no intervalo  $[1/(2T_0), 1/T_0]$ , mas é necessariamente maior que  $1/(2T_0)$ .

A dificuldade com esta escolha de  $p_m(t)$  é que o pulso é não-causal e, portanto, não-realizável no que se refere à implementação. Para torná-lo realizável, usa-se uma versão atrasada, ou seja,  $p_m(t - t_0)$ , e o atraso  $t_0$  é escolhido tal que, para  $|t| > t_0$ , temos  $p_m(t) \approx 0$ . O instante de amostragem deve também ser deslocado para  $lT_0 + t_0$  (Proakis, 2005).

Portanto, supondo que as condições para zero IIS são válidas, a amostragem na saída do FCM à taxa de símbolo, na ausência de ruído, produz o sinal  $\mathbf{y}(lT_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^H(\tau - t) \mathbf{z}(\tau) d\tau \Big|_{t=lT_0} =$



$\text{Db}[l]$ . Na presença de ruído,  $\mathbf{y}(lT_0)$  é uma estatística suficiente para decisão de símbolo e o canal de comunicação equivalente é plano e sem memória mas com ICC.

Vamos agora retornar ao problema de estimação DOA e aplicar algumas peculiaridades da recepção FCM acima analisada na obtenção do modelo de *snapshot* de tempo-discreto livre de IIS. O ponto mais importante é que, no problema de estimação DOA, o receptor considera somente as formas de onda  $p_m(t)$  pelo fato da matriz  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  ser desconhecida, dado que o vetor  $\boldsymbol{\theta}$  é objeto de inferência. Como as formas de onda recebidas relativas às  $M$  fontes são superpostas em cada elemento do receptor, uma solução possível para recepção é definir um pulso comum  $p(t)$  a todos os transmissores tal que a resposta ao impulso do filtro de recepção seja dado por  $p^*(-t)\mathbf{I}_N$ . Se todos os transmissores usam a mesma forma de onda  $p(t)$  para o pulso, então a parte temporal do FCM é simplificada para

$$\mathbf{H}_T^H(-t) = p^*(-t)\mathbf{\Gamma}^H \quad (3.18)$$

na qual  $\mathbf{\Gamma} \triangleq \text{diag}(g_1 e^{j\phi_1}, \dots, g_M e^{j\phi_M}) \in \mathbb{C}^{M \times M}$  e o FCM é reduzido para

$$\mathbf{H}^H(-t) = \mathbf{\Gamma}^H \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}) p^*(-t). \quad (3.19)$$

Então, os processamentos espacial e temporal do FCM podem ser implementados em ordem inversa, como mostrado nas Figuras 3.2(b) e 3.2(c), sem perda de generalidade. Isto é equivalente a aplicar um filtro SISO com resposta ao impulso  $p^*(-t)$  individualmente em cada antena do receptor, semelhante à estrutura mostrada na Figura 3.2(c). O esquema de recepção correspondente é retratado na Figura 3.3(a).

Por razões práticas, os filtros de transmissão e recepção não são de valor complexo como os mostrados na Figura 3.3(a). Em verdade, filtros de Nyquist do tipo raiz-quadrada idênticos são em geral implementados no transmissor e no receptor. O conceito desta classe de pulsos é baseado na relação  $|P_{1/2}(f)|^2 = P_{\text{nf}}(f)$ , na qual  $P_{1/2}(f)$  é a TF do pulso de Nyquist do tipo raiz-quadrada  $p_{1/2}(t)$  e  $P_{\text{nf}}(f)$  é a TF do pulso de Nyquist correspondente. Isto significa que  $p_{1/2}(t) \star p_{1/2}(t)|_{t=lT_0} = a\delta(l)$ , na qual  $a$  é uma constante. Devido a estas características, estes pulsos são necessariamente de valor real e simétricos. A configuração do sistema é mostrada na Figura 3.3(b). Este mecanismo simplifica a implementação da camada física (filtragem e recuperação do relógio de referência) (Barry et al., 2003, Capítulo 5) e permite o uso eficiente do espectro disponível. O exemplo mais proeminente de um filtro de Nyquist do tipo raiz-quadrada é o bem conhecido filtro raiz de cosseno-levantado (tradução do inglês *root-raised-cosine filter*), o qual é caracterizado somente por dois parâmetros: o período de símbolo  $T_0$  e o fator de *roll-off* que controla a largura de banda dentro do intervalo  $[1/(2T_0), 1/T_0]$  (veja (Proakis, 2005) e (Barry et al., 2003) para detalhes).



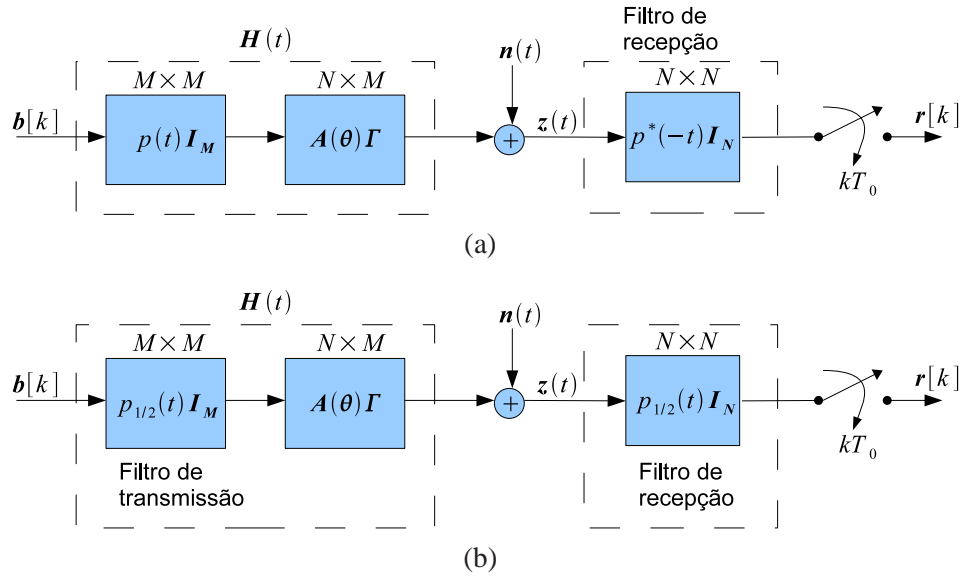


Figura 3.3: Esquemas de transmissão e recepção para estimação de direção de chegada. (a) filtro casado matricial; (b) filtro de Nyquist to tipo raiz-quadrada, em que  $p_{1/2}(t)$  representa a resposta ao impulso de um filtro, cuja convolução  $p_{1/2}(t) \star p_{1/2}(t)$  resulta em um pulso de Nyquist.

O resultado da recepção é obtido passando-se  $\mathbf{z}(t)$  através do filtro  $q(t) = p^*(-t) = p_{1/2}(-t)$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} q(t - \tau) \mathbf{z}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} p_{1/2}(\tau - t) \mathbf{z}(\tau) d\tau \\
 &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{b}[k] \int_{-\infty}^{\infty} p_{1/2}(\tau - kT_0) p_{1/2}(\tau - t) d\tau \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} p_{1/2}(\tau - t) \mathbf{n}(\tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Amostrando nos instantes  $t = lT_0$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(lT_0) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{b}[k] \int_{-\infty}^{\infty} p_{1/2}(\tau - kT_0) p_{1/2}(\tau - t) d\tau \Big|_{t=lT_0} \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} p_{1/2}(\tau - t) \mathbf{n}(\tau) d\tau \Big|_{t=lT_0} \\
 &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{b}[l] E_p + \mathbf{w}(lT_0),
 \end{aligned}$$

na qual  $E_p \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} p_{1/2}(\tau) p_{1/2}(\tau) d\tau$  é a energia do pulso e  $\mathbf{w}(lT_0) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} p_{1/2}(\tau - lT_0) \mathbf{n}(\tau) d\tau$  é um vetor de ruído. O resultado segue do fato que  $p_{1/2}(t - kT_0) \star p_{1/2}(-t) \Big|_{t=lT_0} = E_p \delta(l - k)$  para as duas

classes de pulsos discutidos acima. Assim, a recepção com filtros casados aos pulsos transmitidos  $p(t)$  (ou  $p_{1/2}(t)$ ), seguidos de uma amostragem à taxa de símbolo, transforma o sinal de tempo-contínuo  $\mathbf{z}(t)$  na sequência de vetores em tempo-discreto

$$\begin{aligned}\mathbf{r}[l] &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{b}[l]E_p + \mathbf{w}[l] \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}[l] + \mathbf{w}[l],\end{aligned}\quad (3.21)$$

na qual  $\mathbf{s}[l] \triangleq \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{b}[l]E_p$ ,  $\mathbf{w}[l]$  é um processo gaussiano complexo de média zero com covariâncias  $E\{\mathbf{w}[l]\mathbf{w}^H[k]\} = E_p\sigma_n^2\delta(l-k)\mathbf{I}$  e  $E\{\mathbf{w}[l]\mathbf{w}^T[k]\} = \mathbf{0}$  para todos inteiros  $k$  e  $l$ . Este resultado (inédito) valida os modelos usados em grande parte dos trabalhos que concernem estimação de direção de chegada em cenários caracterizados por sinais digitalmente modulados de banda-estreita e estabelece o elo entre sistemas MIMO multi-portadora de comunicação sem-fio e as pesquisas em processamento de sinais de arranjos para o problema de estimação de direção de chegada.

Com respeito à circularidade do processo  $\mathbf{r}[k]$ , uma análise similar àquela da Seção 2.1 pode ser feita. Aqui adotamos o índice  $k$  em substituição a  $l$ . Geralmente, é suposto que os símbolos transmitidos  $b_m[k]$  de todas as fontes são processos aleatórios discretos i.i.d. de média zero. Adicionalmente,  $b_m[k]$  é independente do processo de ruído  $\mathbf{w}[k]$ , o qual é, por sua vez, temporalmente decorrelacionado e SOS. Assim, do modelo de *snapshot* (3.21), concluímos que  $\mathbf{r}[k]$  é SOS com momentos de segunda-ordem

$$\mathbf{R}_r = E_p^2 \mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{R}_b\boldsymbol{\Gamma}^H \mathbf{A}^H + E_p\sigma_n^2\mathbf{I}, \quad (3.22)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_r = E_p^2 \mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}\tilde{\mathbf{R}}_b\boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{A}^T, \quad (3.23)$$

onde  $\tilde{\mathbf{R}}_r = \tilde{\mathbf{R}}_r[0] \triangleq E\{\mathbf{r}[k]\mathbf{r}^T[k]\}$ .

De (3.23), podemos ver que  $\mathbf{r}[k]$  é circular de segunda-ordem se e somente se todos processos aleatórios  $b_m[k]$ , com  $m = 1, \dots, M$ , são circulares. Esta é uma forte restrição, pois, mesmo para um único processo  $b_m[k]$  ser circular, como já verificado, algumas condições especiais devem ser satisfeitas tanto nas probabilidades *a priori* dos símbolos que constituem o alfabeto digital como no tipo da constelação por si só. Estes argumentos são suficientes para concluir que, em geral,  $\mathbf{r}[k]$  poderá ser de fato não-circular e, portanto, levar em consideração a covariância complementar  $\tilde{\mathbf{R}}_r$  no projeto dos algoritmos de estimação DOA é justificável.

Além disso, o comportamento estacionário do processo  $\mathbf{r}[k]$  leva a uma convergência relativamente rápida das estimativas dos momentos de segunda-ordem, que são geralmente feitas empregando-se as covariâncias *amostrais* (ou de amostras finitas)

$$\hat{\mathbf{R}}_r = 1/K \sum_{k=1}^K \mathbf{r}[k]\mathbf{r}^H[k] \quad \text{e} \quad \hat{\tilde{\mathbf{R}}}_r = 1/K \sum_{k=1}^K \mathbf{r}[k]\mathbf{r}^T[k]. \quad (3.24)$$

Estas estimativas são consistentes (Stoica & Nehorai, 1990; Krim & Viberg, 1996).

### 3.3 Sobreamostragem e Cicloestacionariedade

Amostrar à taxa de símbolo pode evitar a indesejada IIS e leva ao bem conhecido modelo estacionário. O preço pago por este benefício é a perda da assinatura temporal contida nos sinais modulados. Nesta seção, veremos que a propriedade de cicloestacionariedade pode ser útil para identificar e selecionar um pequeno grupo de sinais, separando-os de interferentes co-canal antes do estágio de estimação DOA. Isto pode ser realizado sobreamostrando-se a envoltória complexa recebida a uma taxa múltipla inteira da taxa de símbolo usada pelos sinais de interesse (SDI).

Relembre o modelo de *snapshot* (3.14) dado por

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(t - iT_0) \mathbf{b}[i] + \mathbf{n}(t)$$

com  $i \in \mathbb{Z}$ .

Vamos estender este modelo para o caso em que há também um grupo de interferentes co-canal, que podem ser sinais cicloestacionários mas com frequências de ciclo fundamentais diferentes de  $1/T_0$ . Suponha que existam  $M$  sinais *alvo* (ou de interesse) e  $J$  interferentes. Então, a envoltória complexa recebida pode ser escrita na forma

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(t - iT_0) \mathbf{b}[i] + \mathbf{A}_{\text{int}} \mathbf{s}_{\text{int}}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (3.25)$$

em que  $\mathbf{A}_{\text{int}} \triangleq \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_{\text{int}})$  e  $\boldsymbol{\theta}_{\text{int}} \in \mathbb{R}^{J \times 1}$  é um vetor contendo os parâmetros de direção de chegada dos interferentes, que, por sua vez, estão empilhados no vetor  $\mathbf{s}_{\text{int}}(t) \in \mathbb{C}^{J \times 1}$ . Vamos denotar o vetor de sinais de interesse por  $\mathbf{s}(t) \triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(t - iT_0) \mathbf{b}[i]$ . Supomos que os transmissores são independentes tal que os  $M + J$  processos em  $\mathbf{s}(t)$  e  $\mathbf{s}_{\text{int}}(t)$  são mutuamente independentes e ainda independentes do ruído  $\mathbf{n}(t)$ .

Então, a autocovariância e autocovariância complementar de  $\mathbf{z}(t)$  são dadas por

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(t, \tau) = \mathbf{A} \mathbf{R}_{\mathbf{s}}(t, \tau) \mathbf{A}^H + \mathbf{A}_{\text{int}} \mathbf{R}_{\mathbf{s}_{\text{int}}}(t, \tau) \mathbf{A}_{\text{int}}^H + \sigma_n^2 \delta(\tau) \mathbf{I}_N \quad (3.26)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}}(t, \tau) = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{s}}(t, \tau) \mathbf{A}^T + \mathbf{A}_{\text{int}} \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{s}_{\text{int}}}(t, \tau) \mathbf{A}_{\text{int}}^T, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{R}_s(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_s^{n/T_0}(\tau) e^{-j2\pi(n/T_0)t} \quad (3.28)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_s(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{R}}_s^{n/T_0}(\tau) e^{-j2\pi(n/T_0)t} \quad (3.29)$$

e  $\mathbf{R}_s^{n/T_0}(\tau)$  e  $\tilde{\mathbf{R}}_s^{n/T_0}(\tau)$  são a autocovariância cíclica e a autocovariância cíclica complementar, respectivamente, dos alvos  $\mathbf{s}(t)$ .  $\mathbf{R}_{\mathbf{s}_{\text{int}}}(t, \tau)$  e  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{s}_{\text{int}}}(t, \tau)$  têm elementos periódicos mas não compartilham a mesma frequência fundamental  $1/T_0$ . Como os sinais são mutuamente independentes, as autocovariâncias  $(\mathbf{R}_s(t, \tau), \tilde{\mathbf{R}}_s(t, \tau))$  e as autocovariâncias cíclicas  $(\mathbf{R}_s^{n/T_0}(\tau), \tilde{\mathbf{R}}_s^{n/T_0}(\tau))$  são matrizes diagonais.

Vamos denotar

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}_{\text{sdi}}}^{n/T_0}(\tau) \triangleq \mathbf{A} \mathbf{R}_s^{n/T_0}(\tau) \mathbf{A}^H \quad (3.30)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}_{\text{sdi}}}^{n/T_0}(\tau) \triangleq \mathbf{A} \tilde{\mathbf{R}}_s^{n/T_0}(\tau) \mathbf{A}^T \quad (3.31)$$

e proceder de forma análoga com interferentes.

Estamos interessados na discretização de  $\mathbf{z}(t)$ . Seja  $T_s$  o período de amostragem. Como verificado na Seção 2.2, se a condição de sobreamostragem  $T_s = T_0/L$  com  $L \geq 2 \in \mathbb{Z}^+$  é satisfeita, então  $z_n(kT_s)$  é uma sequência cicloestacionária de tempo-discreto com período  $L$ , sem sobreposição dos espectros dos coeficientes cíclicos.

As versões amostradas das autocovariâncias de  $\mathbf{z}(t)$  são dadas por

$$\mathbf{R}_z[k, l] = \mathbf{R}_z(t, \tau)|_{t=kT_s, \tau=lT_s} \quad (3.32)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_z[k, l] = \tilde{\mathbf{R}}_z(t, \tau)|_{t=kT_s, \tau=lT_s} \quad (3.33)$$

e, conseqüentemente, as autocovariâncias cíclicas de tempo-discreto correspondentes a  $\mathbf{z}(t)$  são

$$\mathbf{R}_z^{\alpha_{n,s}}[l] = \mathbf{R}_{\mathbf{z}_{\text{sdi}}}^{\alpha_{n,s}}[l] = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \mathbf{R}_{\mathbf{z}_{\text{sdi}}}^{\alpha_n - q/T_s}(\tau)|_{\tau=lT_s, \alpha_{n,s} = \alpha_n T_s} \quad (3.34)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_z^{\alpha_{n,s}}[l] = \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}_{\text{sdi}}}^{\alpha_{n,s}}[l] = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}_{\text{sdi}}}^{\alpha_n - q/T_s}(\tau)|_{\tau=lT_s, \alpha_{n,s} = \alpha_n T_s}, \quad (3.35)$$

enquanto  $\mathbf{R}_{\mathbf{z}_{\text{int}}}^{\alpha_n}(\tau) = \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}_{\text{int}}}^{\alpha_n}(\tau) = \mathbf{R}_{\mathbf{z}_{\text{int}}}^{\alpha_{n,s}}[l] = \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}_{\text{int}}}^{\alpha_{n,s}}[l] \equiv \mathbf{0}$  para todos os  $J$  interferentes, pois  $\alpha_n = n/T_0 \forall n$  (e  $\alpha_{n,s} = n/L$ ). A autocovariância cíclica do ruído é também nula porque este é um processo estacionário temporalmente branco, ou seja, a função de autocovariância é não-nula apenas para  $\tau = 0$  e  $\alpha_n = 0$ .

Como  $T_s \leq T_0/2$ , não há sobreposição dos espectros cíclicos e, portanto, somente a réplica com  $q = 0$  tem contribuição não-zero na região de suporte (veja (Gardner et al., 2006)), tal que (3.34) e (3.35) se reduzem a

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\alpha_{n,s}}[l] = \mathbf{R}_{\mathbf{z}_{\text{sdi}}}^{\alpha_{n,s}}[l] = \mathbf{R}_{\mathbf{z}_{\text{sdi}}}^{\alpha_n}(\tau)|_{\tau=lT_s, \alpha_{n,s}=\alpha_n T_s} \quad (3.36)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}}^{\alpha_{n,s}}[l] = \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}_{\text{sdi}}}^{\alpha_{n,s}}[l] = \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}_{\text{sdi}}}^{\alpha_n}(\tau)|_{\tau=lT_s, \alpha_{n,s}=\alpha_n T_s} . \quad (3.37)$$

Este resultado é bastante importante porque os métodos de estimação de direção de chegada que exploram a cicloestacionariedade usam essencialmente a versão amostrada das autocovariâncias cíclicas para fazer a inferência. As relações (3.36) e (3.37) garantem que os espectros cíclicos não sofrem sobreposição quando a amostragem de  $\mathbf{z}(t)$  é realizada em uma taxa adequada.

Concluindo, se  $\mathbf{z}(t)$  é um processo aleatório SOC de tempo-contínuo, então sua versão amostrada  $\mathbf{z}[k] \triangleq \mathbf{z}(kT_s)$  também é SOC com período de cicloestacionariedade  $L$ , seus espectros cíclicos não se sobrepõem e as autocovariâncias cíclicas são idealmente livres de componentes de interferência e de ruído desde que valores adequados para a frequência de ciclo  $\alpha_n$ , diferença de tempo  $\tau$  e taxa de sobreamostragem  $L$  são adotados.

Também,  $\mathbf{z}(t)$  e, conseqüentemente  $\mathbf{z}[k]$ , são circulares de segunda-ordem se e somente se todos os  $M + J$  sinais são circulares. Como no caso estacionário, esta é uma forte restrição, pois condições especiais devem ser satisfeitas mesmo para uma única fonte ser classificada como circular. Portanto,  $\mathbf{z}[k]$  provavelmente será não-circular, e levar em consideração a autocovariância complementar cíclica  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}}^{\alpha_{n,s}}[l]$  no projeto dos algoritmos é mais do que justificável.

A estimação de  $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\alpha_{n,s}}[l]$  e  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}}^{\alpha_{n,s}}[l]$  é realizada com as versões amostradas de tempo finito

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}}^{\alpha_{n,s}}[l] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{z}[k+l] \mathbf{z}^H[k] e^{-j2\pi\alpha_{n,s}k} \quad (3.38)$$

$$\hat{\tilde{\mathbf{R}}}_{\mathbf{z}}^{\alpha_{n,s}}[l] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{z}[k+l] \mathbf{z}^T[k] e^{j2\pi\alpha_{n,s}k} \quad (3.39)$$

em que  $\alpha_{n,s} = n/L$  e  $K$  é o número de *snapshots*. A convergência para o valor verdadeiro é lenta, mas o estimador é consistente se o processo é suposto cicloergódico (Gardner, 1987a; Gardner et al., 2006).



# Capítulo 4

## Técnicas baseadas no modelo estacionário

O modelo estacionário de *snapshot* (3.21) tem sido extensivamente usado nas pesquisas em estimação de direção de chegada para fontes moduladas. Exemplos são os trabalhos (Lavielle et al., 1994; Gounon et al., 1998; Chargé et al., 2001a; Delmas, 2004; Delmas & Abeida, 2006a, 2006b; Wang et al., 2006; Attux et al., 2007; Abeida & Delmas, 2006, 2008; Chevalier et al., 2005, 2006, 2007). Numa breve análise conceitual destes trabalhos, pode-se ver que há uma classificação das técnicas de acordo com as seguintes abordagens: i) ajuste de subespaços; ii) ajuste de covariâncias; iii) *beamforming* com subarranjos; e iv) máxima verossimilhança.

Neste capítulo, apresentamos as idéias que suportam estas abordagens, derivamos as expressões de alguns estimadores, revelamos suas limitações de operação e testamos a qualidade das suas estimativas através de simulações numéricas. Para completar a análise, revisitamos na Seção 4.5 os limitantes de variância e de resolução para as técnicas acima mencionadas. Vamos começar com a mais popular e disseminada, a abordagem por ajuste de subespaços.

### 4.1 Abordagem por ajuste de subespaços

Como o nome revela, as técnicas de ajuste de subespaços usam o conceito de subespaço para projetar o estimador. O termo *subespaço*, no campo de processamento de sinais de arranjo de sensores, é associado à decomposição do espaço dos dados de entrada em um conjunto de espaços distintos e complementares, cujas bases são ortogonais. Normalmente, o espaço dos dados é dividido em duas partes, os bem conhecidos subespaços de sinal e de ruído. Desta forma, a abordagem consiste em explorar a ortogonalidade entre estes subespaços e certas propriedades geométricas do modelo de dados considerado para derivar o estimador.

Seja o modelo de dados descrito pelo modelo de *snapshot* (3.21). A matriz de covariância dos dados  $\mathbf{z}[k]$  é  $\mathbf{R}_z = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}$ , considerando que a energia do pulso é unitária ( $E_p = 1$ ). Esta

matriz é positiva-definida e, após decomposição em autovalores e autovetores, pode ser escrita como  $\mathbf{R}_z = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$ , na qual  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  é a matriz dos autovetores e  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  é uma matriz diagonal contendo os autovalores de  $\mathbf{R}_z$ , com os  $M$  maiores autovalores associados à componente de sinal (Viberg & Ottersten, 1991). Podemos dividir o espaço de  $\mathbf{R}_z$  em dois subespaços (Viberg & Ottersten, 1991; Krim & Viberg, 1996) na forma:  $\mathbf{R}_z = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \sigma_n^2 \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ , na qual  $\mathbf{U}_s \in \mathbb{C}^{N \times M}$  é a matriz dos autovetores de sinal associados aos autovalores de sinal  $\mathbf{\Lambda}_s \in \mathbb{R}^{M \times M}$  e  $\mathbf{U}_n \in \mathbb{C}^{N \times (N-M)}$  é a matriz dos autovetores de ruído representando o subespaço de ruído, com a suposição de que  $N \geq M$ . O subespaço de sinal tem posto  $M$ , pois supomos que as fontes são descorrelacionadas.

As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{U}_s$  geram o mesmo espaço e suas colunas estão no espaço nulo de  $\mathbf{U}_n^H$ . Assim, baseando-se na ortogonalidade entre os subespaços, podemos imaginar um critério para estimação DOA fundamentado na minimização da potência da projeção do sinal sobre o subespaço de ruído. Este critério foi originalmente proposto por Schmidt em (R. Schmidt, 1979; R. O. Schmidt, 1986) e independentemente por Bienvenu e Kopp (Bienvenu & Kopp, 1980), e as estimativas DOA são obtidas minimizando-se a seguinte função custo

$$J(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta) \quad (4.1)$$

com respeito à variável  $\theta \in \mathbb{R}$ . Os  $M$  mínimos de  $J(\theta)$  compõem a estimativa de  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ . Vários outros métodos baseados em subespaços foram também propostos empregando idéias similares (veja (Krim & Viberg, 1996, Seção “Subspace-Based Methods”) e as referências citadas neste).

Um passo promissor para tratar com fontes moduladas foi a criação de um modelo de dados que leva em consideração a possibilidade de os sinais incidentes serem não-circulares, nos quais a covariância complementar não é nula. A incorporação desta informação pode ser feita através da concatenação do vetor de *snapshot* com sua versão conjugada complexa, resultando no modelo de *snapshot* estendido

$$\mathbf{z}_{nc}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{z}[k] \\ \mathbf{z}^*[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}[k] \\ \mathbf{s}^*[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}[k] \\ \mathbf{n}^*[k] \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

A matriz de covariância correspondente continua sendo positiva-definida e hermitiana com a seguinte estrutura (Gounon et al., 1998)

$$\mathbf{R}_{nc} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{A}^* \mathbf{\Psi}^* \end{bmatrix} \mathbf{R}_s \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ & \mathbf{A}^* \mathbf{\Psi}^* \end{bmatrix}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{2N}. \quad (4.3)$$

Observe que a covariância complementar do sinal  $\mathbf{s}[k]$  pode ser escrita com uma função de sua covariância hermitiana na forma  $\tilde{\mathbf{R}}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{\Psi}$ , na qual  $\mathbf{\Psi}$  é uma matriz diagonal contendo dois tipos de



parâmetros, a saber, *razão de não-circularidade*  $\rho_m \in \mathbb{R}$  e *fase de não-circularidade*  $\psi_m \in \mathbb{R}$ , na forma  $\Psi = \text{diag}[\rho_1 e^{j\psi_1}, \dots, \rho_M e^{j\psi_M}]$ . Esta relação, e portanto (4.3), são válidas somente para fontes decorrelacionadas.

### 4.1.1 MUSIC para sinais não-circulares

Seguindo o modelo (4.2), Gounon *et al.* (Gounon et al., 1998) desenvolveram o método MUSIC para fontes não-circulares (MUSIC NC). Vamos começar a sua descrição definindo o vetor de direção estendido

$$\mathbf{a}_{nc} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta) \\ \mathbf{a}^*(\theta)e^{-j\psi} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

e a decomposição em autovalores e autovetores da matriz de covariância estendida

$$\mathbf{R}_{nc} = \mathbf{U}_{s,nc} \mathbf{\Lambda}_{s,nc} \mathbf{U}_{s,nc}^H + \sigma_n^2 \mathbf{U}_{n,nc} \mathbf{U}_{n,nc}^H, \quad (4.5)$$

na qual  $\mathbf{U}_{s,nc} \in \mathbb{C}^{2N \times M}$  é a matriz cujas colunas são os autovetores de sinal associados aos respectivos autovalores em  $\mathbf{\Lambda}_{s,nc} \in \mathbb{R}^{M \times M}$  e  $\mathbf{U}_{n,nc} \in \mathbb{C}^{2N \times (2N-M)}$  é a matriz cujas colunas são os autovetores de ruído representando o subespaço de ruído.

As estimativas DOA são obtidas através da minimização da seguinte função custo

$$J(\theta, \psi) = \mathbf{a}_{nc}^H \mathbf{U}_{n,nc} \mathbf{U}_{n,nc}^H \mathbf{a}_{nc}, \quad (4.6)$$

no espaço das variáveis de decisão  $\theta \in \mathbb{R}$  (ângulo) e  $\psi \in \mathbb{R}$  (fase de não-circularidade). Este é um problema de otimização bidimensional. Felizmente, este pode ser reduzido a uma busca unidimensional utilizando-se o valor ótimo de  $\psi$  que minimiza (4.6). Como demonstrado em (Gounon et al., 1998), a solução ótima transforma (4.6) em

$$J(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{a}(\theta) + \mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{a}^*(\theta) - 2 \|\mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta)\|, \quad (4.7)$$

na qual  $\|\cdot\|$  é a norma-L2 (ou norma euclidiana),  $\mathbf{U}_{n1} \in \mathbb{C}^{N \times (2N-M)}$  e  $\mathbf{U}_{n2} \in \mathbb{C}^{N \times (2N-M)}$  são matrizes originárias da partição  $\mathbf{U}_{n,nc} = [\mathbf{U}_{n1}^T, \mathbf{U}_{n2}^T]^T$ , e  $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H$  e  $\mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n2}^H$  são as matrizes de projeção do subespaço de ruído. O espectro espacial do MUSIC NC é dado por  $1/J(\theta)$  e os  $M$  mínimos de (4.7) (ou os  $M$  máximos do espectro espacial correspondente) são as estimativas DOA.

### 4.1.2 Root-MUSIC para sinais não-circulares

O procedimento de busca inerente ao MUSIC NC pode ser substituído por uma técnica de extração de raízes de um polinômio especialmente parametrizado para o caso em que um arranjo do tipo ALU é considerado. Esta é a proposta de Chargé *et al.* em (Chargé et al., 2001a), no qual a técnica Root-MUSIC NC foi concebida. As vantagens desta técnica são a redução da complexidade computacional, operação com fontes correlacionadas e a melhora na resolução das estimativas em comparação com aquelas referentes ao algoritmo MUSIC NC.

Em vez de concentrar a função custo (4.6) com respeito a  $\theta$ , Chargé *et al.* reescreveram-na na forma

$$J(\theta, \psi) = \mathbf{q}^H \mathbf{M} \mathbf{q}, \quad (4.8)$$

com  $\mathbf{q} = [1, e^{-j\psi}]^T \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$  e  $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta) & \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{a}^*(\theta) \\ \mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta) & \mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{a}^*(\theta) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

na qual  $\mathbf{U}_{n1}$  e  $\mathbf{U}_{n2}$  são aquelas mesmas definidas para o MUSIC NC na seção anterior.

É sabido que o valor mínimo de (4.8) é dado pelo menor autovalor da matriz  $\mathbf{M}$  e, devido à forma quadrática da função custo, este autovalor é sempre não-negativo. Quando a variável  $\theta$  iguala-se a um dos ângulos verdadeiros, o menor autovalor de  $\mathbf{M}$  iguala-se a zero. Como consequência, o determinante de  $\mathbf{M}$  é nulo também.

Definindo  $z \triangleq e^{j(2\pi d/\lambda) \sin(\theta)} = e^{j\omega}$ , podemos reescrever o vetor de direção como  $\mathbf{a}(z) = [1, z, z^2, \dots, z^{N-1}]^T$ , tal que  $\mathbf{M}$  é agora uma função de  $z$ . Esta reparametrização é então usada para obter as estimativas DOA através da extração das raízes do polinômio caraterístico ( $\det[\mathbf{M}]$ ) que obedece à condição anteriormente mencionada

$$\det[\mathbf{M}] = 0. \quad (4.10)$$

Foi mostrado em (Chargé et al., 2001a) que (4.10) pode ser escrita como

$$\det[\mathbf{M}] = \sum_{p=1}^{4N-3} (\kappa_p - \epsilon_p) z^{p-(2N-1)} = 0 \quad (4.11)$$

com  $\kappa_p$  e  $\epsilon_p$  dados por

$$\kappa_p = \sum_{i=\max[1,p-2N+2]}^{\min[2N-1,p]} [\mathbf{u}\mathbf{u}^T]_{i,p-i+1}, \quad (4.12)$$

$$\epsilon_p = \sum_{i=\max[1,2N-p]}^{\min[2N-1,4N-p-2]} [\mathbf{v}\mathbf{v}^H]_{i,p+i-(2N-1)}, \quad (4.13)$$

nas quais  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores coluna de comprimento  $(2N - 1)$  cujos elementos são dados por

$$u_p = \sum_{l=\max[1,N-p+1]}^{\min[N,2N-p]} [\mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H]_{l,p+l-N}, \quad (4.14)$$

$$v_p = \sum_{l=\max[1,p-N+1]}^{\min[N,p]} [\mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n2}^H]_{l,p-l+1}. \quad (4.15)$$

Observe que há  $4N - 4$  raízes para a solução de (4.11) e, devido à simetria dos coeficientes do polinômio, as raízes aparecem em pares conjugados recíprocos  $z_i$  e  $1/z_i^*$ . Como cada raiz do par tem o mesmo ângulo no plano complexo, podemos decidir pelo uso, por exemplo, das raízes que estão dentro da circunferência de raio unitário (CRU) (duas raízes coincidem se elas estão em cima da circunferência de raio unitário). Portanto, podemos usar até  $2(N - 1)$  das  $4N - 4$  raízes disponíveis para representar os ângulos estimados. Isto significa que a capacidade (número máximo de DOAs que o método é capaz de estimar) do método é exatamente  $2(N - 1)$ . Para obter as estimativas DOA, selecionamos as  $M$  raízes que estão mais próximas do CRU e aplicamos as mesmas na função

$$\theta_m = \arcsin \left( \frac{\lambda}{2\pi d} \arg(z_m) \right), \quad m = 1, \dots, M. \quad (4.16)$$

Este algoritmo foi desenvolvido especialmente para o caso em que um ALU é utilizado. Além disso, o método é adequado para cenários com fontes com razão de não-circularidade  $\rho_m = 1$  para  $m = 1 \dots, M$ .

Apenas como nota, há uma forma de contornar a restrição da geometria do arranjo através de um método elegante de pré-processamento desenvolvido inicialmente por Bronez (Bronez, 1988), seguido das contribuições importantes de Doran *et al.* (Doran et al., 1993), Friedlander (Friedlander & Weiss, 1993) e Friedlander e Weiss (Friedlander & Weiss, 1992). Esta técnica emprega um mapeamento dos elementos do arranjo baseando-se em uma interpolação, motivo pelo qual é chamada de técnica da interpolação do arranjo. Este procedimento permite transformar os dados dos sensores da geometria real para uma outra geometria com certa precisão.

### 4.1.3 *Weighted*-MUSIC para sinais não-circulares

Um outro algoritmo tipo-MUSIC foi desenvolvido por Abeida e Delmas em (Abeida & Delmas, 2006). O algoritmo é baseado nas idéias do algoritmo *weighted*-MUSIC, no qual uma matriz de ponderação é introduzida na função custo (4.1) para modificar a influência de cada um dos autovetores em  $\mathbf{U}_n$  que geram o subespaço de ruído. A inovação fica por conta do modelo de dados estendido (4.2), que entra em cena em conjunto com a matriz de ponderação, alterando (4.6) para a função custo concentrada

$$J(\theta) = \text{Tr} \left[ \mathbf{W} \bar{\mathbf{A}}^H(\theta) \mathbf{U}_{n,nc} \mathbf{U}_{n,nc}^H \bar{\mathbf{A}}(\theta) \right], \quad (4.17)$$

na qual  $\mathbf{W}$  é uma matriz de ponderação não-negativa-definida de dimensão  $2 \times 2$  e a matriz  $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{2N \times 2}$  é definida como

$$\bar{\mathbf{A}}(\theta) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^*(\theta) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

A desvantagem é que o valor ótimo de  $\mathbf{W}$  depende de  $\theta$ . Porém, os autores demonstraram que o uso de uma estimativa consistente de  $\mathbf{W}$  em substituição ao seu valor ótimo desconhecido não altera o comportamento assintótico na variância das estimativas do algoritmo. Como exemplo, Abeida e Delmas propuseram inicializar o algoritmo usando as estimativas do algoritmo MUSIC convencional para encontrar estimativas consistentes dos elementos de  $\mathbf{W}$  e então iterar localmente para permitir a convergência para um mínimo da função. Para mais detalhes, veja (Abeida & Delmas, 2006, Seções VI e V).

Este último procedimento demanda maior esforço computacional que aquele referente ao algoritmo Root-MUSIC NC. Em contrapartida, o algoritmo *Weighted*-MUSIC NC é flexível em relação à geometria do arranjo. A capacidade de ambos os métodos é a mesma,  $M_{max} = 2(N - 1)$ , na qual  $M_{max}$  é denotado como o número máximo de fontes com que o método é capaz de operar.

## 4.2 A técnica do ajuste de covariâncias

A técnica de estimação baseada em ajuste de covariâncias (COMET, do inglês *covariance matching estimation technique*) foi introduzida no processamento de sinais de arranjo de sensores por Ottersten *et al.* em (Ottersten, Stoica, & Roy, 1998). Nas palavras dos autores: “Estas técnicas têm suas raízes na literatura de estatística onde são às vezes referenciadas como métodos de quadrados mínimos generalizados. O ajuste de covariâncias é uma alternativa à estimação de máxima verossimilhança, fornecendo as mesmas propriedades para grande número de amostras geralmente a custos computacionais mais baixos.”

A ideia principal é separar o conjunto de parâmetros em parâmetros *lineares* e *não-lineares* tal

que o problema de estimação possa ser também particionado. Esta abordagem é bastante adequada para matrizes de covariância que podem ser modeladas como a seguir

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{R}_s(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{R}_n(\boldsymbol{\sigma}), \quad (4.19)$$

na qual  $\mathbf{R}_s(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})$  é a matriz de covariância do sinal e  $\mathbf{R}_n(\boldsymbol{\sigma})$  é a matriz de covariância do ruído,  $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})$  é o conjunto de parâmetros da componente de sinal e  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor de parâmetros do ruído. Vamos supor que estas matrizes de covariância sejam linearmente parametrizadas pelos parâmetros de valor real  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$ , tal que (4.19) possa ser reescrita como

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}) = \text{vec}(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})) \quad (4.20a)$$

$$= \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\sigma} \quad (4.20b)$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}) & \boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\alpha}, \quad (4.20c)$$

em que  $\text{vec}(\cdot)$  é o operador de *vetorização* que transforma uma matriz em um vetor através do empilhamento das colunas da matriz uma abaixo da outra,  $\boldsymbol{\Sigma}$  é uma matriz conhecida e  $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta})$  é uma matriz com estrutura conhecida mas parametrizada de maneira altamente não-linear com os parâmetros de sinal  $\boldsymbol{\theta}$ . Suponha que  $\mathbf{z}[k]$  represente o *snapshot* no instante  $t = kT$  de um conjunto de  $K$  medições. Então, dado que a matriz de covariância de amostras finitas  $\mathbf{R}_K = 1/K \sum_{k=1}^K \mathbf{z}[k]\mathbf{z}^H[k]$  seja sabidamente a estimativa ML de  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})$ , a técnica de ajuste de covariâncias baseia-se no ajuste dos dados  $\mathbf{r}_K = \text{vec}(\mathbf{R}_K)$  ao modelo (4.20) no sentido dos quadrados mínimos ponderado não-linear (tradução do inglês *weighted non-linear least squares*). Como  $\boldsymbol{\mu}$  é geralmente de valor complexo no modelo de *snapshot*, alguns ajustes simples devem ser feitos. Para mais detalhes, veja (Ottersten et al., 1998, Seções 3.1 e 3.2).

A vantagem desta técnica é que os parâmetros lineares podem ser resolvidos analiticamente em termos dos parâmetros não-lineares, resultando em um problema de otimização de dimensão menor. Adicionalmente, esta abordagem é capaz de operar com fontes espacialmente correlacionadas e arranjos com geometria arbitrária.

### 4.2.1 COMET para sinais não-circulares

Partindo dessas premissas, a proposta de Delmas em (Delmas, 2004) é uma extensão do COMET para estimação DOA que leva em consideração a possibilidade de fontes não-circulares. A técnica resultante é o algoritmo de quadrados mínimos não-linear mostrado a seguir.

Seja  $\mathbf{x}[k]$  um conjunto de processos aleatórios complexos, possivelmente não-circulares e cor-

relacionados, com matrizes de covariância hermitiana e complementar denotadas por  $\mathbf{R}_x$  e  $\tilde{\mathbf{R}}_x$  respectivamente. Na roupagem do modelo (3.21),  $\mathbf{x}[k] = \Gamma \mathbf{b}[k]$  e o *snapshot* é modelado por  $\mathbf{z}[k] = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}[k] + \mathbf{n}[k]$ . Assim, as matrizes de covariância de  $\mathbf{z}[k]$  são dadas por

$$\mathbf{R}_z(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}_N \quad (4.21a)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_z(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{R}}_x\mathbf{A}^T, \quad (4.21b)$$

nas quais

$$\boldsymbol{\mu} = \left[ \left( \Re([\mathbf{R}_x]_{ik}), \Im([\mathbf{R}_x]_{ik}), \Re([\tilde{\mathbf{R}}_x]_{ik}), \Im([\tilde{\mathbf{R}}_x]_{ik}) \right)_{1 \leq k < i \leq M}, \right. \\ \left. \left( ([\mathbf{R}_x]_{ii}), \Re([\tilde{\mathbf{R}}_x]_{ii}), \Im([\tilde{\mathbf{R}}_x]_{ii}) \right)_{i=1, \dots, M} \right]^T \quad (4.22)$$

é um vetor coluna com  $M^2 + M(M + 1)$  parâmetros reais e  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_n^2 \in \mathbb{R}$ . Sejam as estimativas de (4.21) obtidas pelas covariâncias de amostras finitas  $\mathbf{R}_{z,K} = (1/K) \sum_{k=1}^K \mathbf{z}[k]\mathbf{z}^H[k]$  e  $\tilde{\mathbf{R}}_{z,K} = (1/K) \sum_{k=1}^K \mathbf{z}[k]\mathbf{z}^T[k]$ . Em vez de usar somente  $\mathbf{r}_K = \text{vec}(\mathbf{R}_{z,K})$  para obter as estimativas de  $\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\mu}^T, \boldsymbol{\sigma}^T]^T \in \mathbb{R}^L$  com  $L = M + M^2 + M(M + 1) + 1$ , Delmas criou o vetor de estatísticas

$$\mathbf{s}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_K \\ \tilde{\mathbf{r}}_K \\ \tilde{\mathbf{r}}_K^* \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

com  $\tilde{\mathbf{r}}_K = \text{v}(\tilde{\mathbf{R}}_{z,K})$  e  $\tilde{\mathbf{r}}_K^* = \text{v}((\tilde{\mathbf{R}}_{z,K})^*)$ , em que  $\text{v}(\cdot)$  é um operador obtido a partir do operador  $\text{vec}(\cdot)$  eliminando-se todos elementos supradiagonais da matriz no seu argumento. O mesmo é válido para a descrição de  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\Theta})$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})$  e  $\mathbf{s}(\boldsymbol{\Theta})$  usando  $\mathbf{R}_z(\boldsymbol{\theta})$  e  $\tilde{\mathbf{R}}_z(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})$ . Esta modificação introduz elegantemente a covariância complementar no modelo de dados do COMET sem alterar muito as expressões da solução original mostrada em (Ottersten et al., 1998).

Aqui, o conjunto  $\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}]^T$  representa os parâmetros indesejados. De forma similar a (4.20), podemos escrever  $\mathbf{s}(\boldsymbol{\Theta})$  como a transformação linear de  $\boldsymbol{\alpha}$

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\Theta}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_s(\boldsymbol{\theta}) & \boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.24)$$

na qual  $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta})$  é uma matriz com estrutura “conhecida” e parametrizada somente pelos parâmetros DOA  $\boldsymbol{\theta}$ .

Portanto, dado  $\boldsymbol{\theta}$  e ajustando-se os dados  $\mathbf{s}_K$  ao modelo (4.24), o estimador ótimo, no sentido dos

quadrados mínimos ponderados, dos parâmetros indesejados é simplesmente

$$\alpha_K = [\Psi^H(\theta) \mathbf{W} \Psi(\theta)]^{-1} \Psi^H(\theta) \mathbf{W} \mathbf{s}_K, \quad (4.25)$$

no qual  $\mathbf{W} = \mathbf{C}_{\mathbf{s},K}^{-1}$  e  $\mathbf{C}_{\mathbf{s},K}$  é a covariância amostral de  $\mathbf{s}(\Theta)$ . A estimativa  $\mathbf{s}_K$  é obtida pela média amostral  $\mathbf{s}_K = 1/K \sum_{k=1}^K \mathbf{s}[k]$ , com

$$\mathbf{s}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^*[k] \otimes \mathbf{z}[k] \\ \mathbf{U}(\mathbf{z}[k] \otimes \mathbf{z}[k]) \\ \mathbf{U}(\mathbf{z}^*[k] \otimes \mathbf{z}^*[k]) \end{bmatrix}$$

na qual  $\mathbf{U}$  é a matriz de seleção  $N(N+1)/2 \times N^2$  que satisfaz  $\mathbf{v}(\cdot) = \mathbf{U} \text{vec}(\cdot)$  para todas matrizes  $N \times N$  e  $\otimes$  denota o produto de Kronecker. Uma estimativa consistente da covariância  $\mathbf{C}_{\mathbf{s}} = \mathbf{E}\{\mathbf{s}[k] \mathbf{s}^H[k]\}$  é obtida com a covariância amostral

$$\mathbf{C}_{\mathbf{s},K} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^K [(\mathbf{s}[k] - \mathbf{s}_K)(\mathbf{s}[k] - \mathbf{s}_K)^H]. \quad (4.26)$$

Delmas provou que o estimador de quadrados mínimos não-linear

$$\Theta_K = \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^L} [\mathbf{s}_K - \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]^H \mathbf{C}_{\mathbf{s}}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) [\mathbf{s}_K - \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})] \quad (4.27)$$

é assintoticamente (no número de *snapshots*) o estimador de mínima variância de  $\Theta$ , sigla AMV do inglês *asymptotically minimum variance*. Em (4.27),  $\boldsymbol{\xi}$  é a variável de decisão representando os possíveis valores de  $\Theta_K$ . Após observar que a covariância da distribuição assintótica de  $\Theta_K$  obtida com o estimador arbitrário de quadrados mínimos não-linear

$$\Theta_K = \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^L} [\mathbf{s}_K - \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]^H \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}) [\mathbf{s}_K - \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})] \quad (4.28)$$

é preservada se a matriz de ponderação, definida-positiva e hermitiana  $\mathbf{W}(\boldsymbol{\xi})$ , é substituída por uma estimativa arbitrária consistente  $\mathbf{W}_K$ , como a inversa da matriz de covariância amostral  $\mathbf{C}_{\mathbf{s},K}$ , por exemplo, Delmas concebeu o estimador AMV

$$\Theta_K = \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^L} [\mathbf{s}_K - \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]^H \mathbf{C}_{\mathbf{s},K}^{-1} [\mathbf{s}_K - \mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]. \quad (4.29)$$

Usando a estimativa COMET (4.25) dos parâmetros indesejados, podemos concentrar a otimiza-

ção em (4.29) com respeito a  $\theta$ , tal que a estimativa COMET dos parâmetros DOA seja dada por

$$\theta_K = \arg \max_{\gamma \in \mathbb{R}^M} J(\gamma) \quad (4.30)$$

com

$$J(\gamma) = \mathbf{s}_K^H \mathbf{W} \Psi(\gamma) [\Psi^H(\gamma) \mathbf{W} \Psi(\gamma)]^{-1} \Psi^H(\gamma) \mathbf{W} \mathbf{s}_K, \quad (4.31)$$

na qual  $\gamma$  é a variável de decisão representando os possíveis valores de  $\theta_K$ . Devido ao apelo por fontes não-circulares, este método será referido aqui como COMET NC.

Para aspectos de implementação deste problema de otimização multidimensional não-linear, Delmas estimula o leitor a seguir as propostas em (Ottersten et al., 1998). Em (Ottersten et al., 1998), somente procedimentos de busca local são discutidos. Nós estimulamos o leitor também a seguir (Castro & Timmis, 2002), (Duda et al., 2000) e (Castro, 2006) para procedimentos de busca global, pois a superfície da função custo em questão é multimodal.

### 4.3 A técnica de *beamforming* com subarranjos

*Beamforming* com subarranjos é um técnica supervisionada introduzida em (Wang et al., 2006) na qual a estimação DOA de cada fonte de interesse é realizada após a rejeição, usando filtragem espacial (*beamforming*) de sinais co-canal. Como os ângulos DOA são estimados após o *beamforming*, a relação sinal-interferência-mais-ruído (RSIR) é aumentada e, portanto, resolução e acurácia são ambas melhoradas. Além disso, o método é capaz de operar com um número elevado de fontes mesmo usando um arranjo com poucas antenas, ou seja,  $M_{max} \gg N$ . Uma pequena penalidade da técnica é a necessidade de as fontes serem descorrelacionadas e terem ângulos de incidência distintos.

O conceito de subarranjo vem da estratégia ESPRIT. O arranjo de antenas é decomposto em dois subarranjos de mesmo tamanho tal que, para cada elemento em um subarranjo, há um elemento correspondente no outro subarranjo deslocado por uma distância de translação fixa (Wang et al., 2006). A Figura 4.1 mostra um diagrama de blocos simplificado representando o esquemático da estratégia de *beamforming* com subarranjos para estimação DOA (SBDOA, do inglês *subarray beamforming for DOA estimation*). O ângulo DOA de cada fonte de interesse é computado usando o deslocamento de fase estimado, tomado após a comparação da saída do *beamformer* do subarranjo B com o sinal de referência (piloto) correspondente.

Por simplicidade, a descrição será feita para um ALU. Para esta geometria, pode ser mostrado que



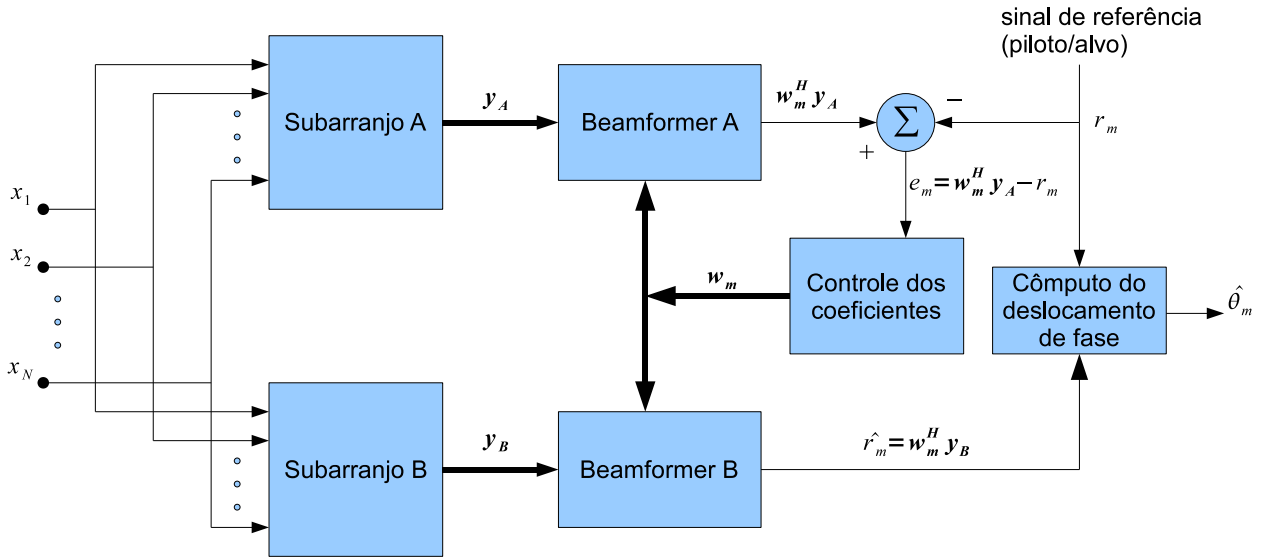


Figura 4.1: Diagrama de blocos simplificado da técnica SBDOA.

os modelos de *snapshot* para os subarranjos A e B são dados por

$$\mathbf{y}_A[k] = \sum_{l=1}^{M+J} s_l[k] \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) + \mathbf{n}_A[k] \quad (4.32)$$

$$\mathbf{y}_B[k] = \sum_{l=1}^{M+J} e^{j\varphi_m} s_l[k] \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) + \mathbf{n}_B[k], \quad (4.33)$$

nos quais  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) = [1, e^{j\varphi_m}, \dots, e^{j\mathcal{P}\varphi_m}]^T$ ,  $s_l[k]$  denota o sinal da  $l$ -ésima fonte,  $M$  é o número de fontes de interesse e  $J$  é o número de interferentes co-canal. Nesta representação,  $\mathcal{P}$  define o tipo de configuração do subarranjo. Se  $\mathcal{P} = N - 1$ , então temos a configuração *Subarranjo com Máxima Sobreposição* (SMS), na qual o subarranjo A consiste dos  $N - 1$  primeiros elementos do arranjo e o subarranjo B consiste dos últimos  $N - 1$  elementos. Se  $\mathcal{P} = N$  temos a configuração do tipo *Subarranjo Conjugado* (SC) e o subarranjo A é composto por todos  $N$  elementos do arranjo e o subarranjo B é dado por  $\mathbf{y}_B[k] = [z_2^*(t), z_1[k], z_2[k], \dots, z_{N-1}[k]]^T$ , onde  $z_n[k]$  é o  $n$ -ésimo elemento do *snapshot*  $\mathbf{z}[k]$  recebido.

O propósito do *beamformer* B é rejeitar todas componentes de sinal e de interferentes correspondentes a fontes outras que não a  $m$ -ésima de interesse, com  $m = 1, \dots, M$ . Esta tarefa pode ser realizada empregando-se o critério do mínimo erro quadrático médio (MEQM, ou MMSE do inglês *minimum mean squared error*)

$$\min_{\mathbf{w}_m^B} E \left\{ \left| (\mathbf{w}_m^B)^H \mathbf{y}_B[k] - e^{j\varphi_m} s_m[k] \right|^2 \right\}, \quad (4.34)$$

o qual é mostrado ser equivalente a resolver

$$\min_{\mathbf{w}_m^A} E \left\{ \left| (\mathbf{w}_m^A)^H \mathbf{y}_A[k] - s_m[k] \right|^2 \right\}, \quad (4.35)$$

em que  $s_m[k]$  representa o sinal de referência da  $m$ -ésima fonte de interesse.

Sabemos que a solução ótima para o vetor de pesos em (4.35) é dada pela solução de Wiener  $\mathbf{w}_{m,\text{opt}}^A = \mathbf{R}_A^{-1} \mathbf{h}_m^A$ , na qual  $\mathbf{R}_A = E\{\mathbf{y}_A[k] \mathbf{y}_A^H[k]\}$  é a matriz de covariância dos *snapshots*  $\mathbf{y}_A[k]$  e  $\mathbf{h}_m^A = E\{s_m^*[k] \mathbf{y}_A[k]\}$  é a correlação-cruzada entre a  $m$ -ésima fonte de interesse e o *snapshot*  $\mathbf{y}_A[k]$ . Wang *et al.* demonstraram que, sob a hipótese de ruído estacionário espacialmente branco, a solução para (4.34) é a mesma que aquela para (4.35) tal que  $\mathbf{w}_{m,\text{opt}}^B \equiv \mathbf{w}_{m,\text{opt}}^A$ . Para número finito de amostras, sob a hipótese de cenário estacionário, as estimativas de  $\mathbf{R}_A$  e  $\mathbf{h}_m^A$  são classicamente obtidas através da autocorrelação amostral  $\hat{\mathbf{R}}_A = 1/K \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_A[k] \mathbf{y}_A^H[k]$  e da correlação-cruzada amostral  $\hat{\mathbf{h}}_m^A = 1/K \sum_{k=1}^K s_m^*[k] \mathbf{y}_A[k]$  (veja (Haykin, 2001)). Então,  $\mathbf{w}_m \triangleq \hat{\mathbf{w}}_{m,\text{opt}}^B = \hat{\mathbf{w}}_{m,\text{opt}}^A = \hat{\mathbf{R}}_A^{-1} \hat{\mathbf{h}}_m^A$ .

Denotando  $\hat{r}_m[k] = \mathbf{w}_m^H \mathbf{y}_B[k]$  como a saída do *beamformer* B e dado que  $\hat{r}_m[k]$  é a solução ótima para a estimação de  $e^{j\varphi_m} s_m[k]$  no sentido do critério MEQM, podemos modelá-la como  $\hat{r}_m[k] = e^{j\varphi_m} s_m[k] + e[k]$ , na qual  $e[k]$  é o erro de estimação. Portanto, a solução ótima no sentido MEQM para o deslocamento de fase  $\varphi_m$ , dado um número finito de amostras, pode ser obtida usando-se o critério dos quadrados mínimos

$$\min_{\varphi_m} \|\hat{\mathbf{r}}_m - e^{j\varphi_m} \mathbf{s}_m\|_2^2, \quad (4.36)$$

na qual  $\hat{\mathbf{r}}_m = [\hat{r}_m[1], \hat{r}_m[2], \dots, \hat{r}_m[K]]^T$  e  $\mathbf{s}_m = [s_m[1], s_m[2], \dots, s_m[K]]^T$ , cuja solução é dada pela simples expressão

$$\hat{\varphi}_m = \arg(\mathbf{s}_m^H \hat{\mathbf{r}}_m). \quad (4.37)$$

A solução do deslocamento de fase é mapeada de volta para o domínio angular através das transformações

$$\hat{\theta}_m = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{+\lambda \hat{\varphi}_m}{2\pi d}\right) & \text{para configuração SMS} \\ \arcsin\left(\frac{-\lambda \hat{\varphi}_m}{2\pi d}\right) & \text{para configuração SC} \end{cases}. \quad (4.38)$$

A técnica SBDOA não é restrita a ambientes estacionários, pois seu mecanismo se ajusta bem à operação em modo recursivo. Assim, a estimação do vetor de pesos do *beamformer* pode ser implementada usando algum algoritmo adaptativo, como os bem conhecidos algoritmos LMS (do inglês *least mean squares*), RLS (do inglês, *recursive least squares*) e filtro de Kalman (veja (Haykin, 2001)).

## 4.4 Estimador de máxima verossimilhança

Vimos que as abordagens não-supervisionadas apresentadas nas Seções 4.1 e 4.2 são capazes de levar em consideração alguma informação adicional se comparadas com os métodos baseados no modelo gaussiano circular. Vimos também que o método da Seção 4.3 se baseia em informação adicional, no caso a supervisão do próprio sinal de interesse. Nesta seção, apresentamos um estimador não-supervisionado que leva em consideração a caracterização estatística do modelo de sinais. A informação adicional neste caso será o simples fato de reconhecer que a distribuição dos sinais digitais é discreta e de cardinalidade finita.

Os dados observados são descritos pelo modelo estacionário de *snapshot* (3.21). Como fora previamente descrito, o vetor  $\mathbf{s}[k] = [s_1[k], \dots, s_M[k]]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  contém os sinais  $s_m[k] = g_m e^{j\phi_m} b_m[k]$ , em que  $\{b_m[k]\}_{k=1}^K$  é uma sequência de símbolos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) que pertencem à constelação digital  $\mathbb{A}$  (igual para todas as fontes) com cardinalidade  $\mathcal{L}$ . Consideramos aqui que a energia do pulso é unitária ( $E_p = 1$ ). Os parâmetros desconhecidos  $\phi_m$  e  $g_m$  representam o deslocamento de fase e amplitude, respectivamente, para a  $m$ -ésima fonte, e são supostos constantes ao longo do tempo de amostragem  $k = 1, \dots, K$ . Os vetores de ruído  $\mathbf{n}[k] \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  são considerados processos aleatórios gaussianos circulares de média zero e i.i.d. com momentos de segunda-ordem  $E\{\mathbf{n}[k]\mathbf{n}[l]^H\} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_N \delta(k-l)$  e  $E\{\mathbf{n}[k]\mathbf{n}[l]^T\} = \mathbf{0}$  para todos valores dos índices  $k$  e  $l$ , no qual  $\sigma_n^2$  denota a variância do ruído. Adicionalmente, os vetores de sinal  $\mathbf{s}[k]$  são considerados independentes dos vetores de ruído  $\mathbf{n}[k]$ . A distribuição conjunta das amostras observadas  $\mathbf{z}[k]$ , condicionadas às variáveis desconhecidas, é assim dada por

$$p(\mathbf{z}[k] | \mathbf{b}[k]; \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{\pi^N \sigma_n^{2N}} e^{-\|\mathbf{z}[k] - \mathbf{A}\mathbf{s}[k]\|^2 / \sigma_n^2} \quad (4.39)$$

com  $\boldsymbol{\psi} = [\sigma_n, \{g_m, \phi_m, \theta_m\}_{m=1}^M]^T$  representando o vetor de parâmetros desconhecidos e  $\mathbf{s}[k] = \mathbf{\Gamma}\mathbf{b}[k]$ .

Como  $\mathbf{\Gamma}$  é suposto constante ao longo de todos  $K$  *snapshots*, o vetor de símbolos transmitidos  $\mathbf{b}[k]$  define todas as possibilidades para  $\mathbf{s}[k]$  (dados  $\{g_m\}$  e  $\{\phi_m\}$ ). Por conseguinte, podemos dividir o espaço de entrada do vetor de dados  $\mathbf{z}[k]$  em  $P = \mathcal{L}^M$  partições, cada uma correspondente a um dos possíveis valores do sinal recebido  $\mathbf{s}[k] = \mathbf{\Gamma}\mathbf{b}[k]$ . Além disso, cada partição tem um *centróide* definido por

$$\mathbf{c}_p \triangleq E\{\mathbf{z}[k] | \mathbf{b}_p\}, \quad p = 1, \dots, \mathcal{L}^M, \quad (4.40)$$

no qual  $\mathbf{b}_p$  é um dos possíveis vetores de símbolos recebidos.

Definindo  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_P] \in \mathbb{A}^{M \times P}$  como a matriz (previamente conhecida) que contém todos

as combinações de  $\mathbf{b}[k]$ , os vetores ditos centróides são as colunas da matriz

$$\mathbf{C}_M \triangleq \mathbf{A}\Gamma\mathbf{B} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_P] \in \mathbb{C}^{N \times P}. \quad (4.41)$$

As sequências de símbolos são desconhecidas e não são usadas no processo de estimação (estimação não-supervisionada). Portanto, a dependência de  $p(\mathbf{z}[k] | \mathbf{b}[k]; \boldsymbol{\psi})$  com respeito a  $\mathbf{b}[k]$ , que é considerado sobressalente (parâmetro indesejado), deve ser eliminada através de uma integração adequada levando em conta as suas probabilidades *a priori*. Definindo  $\Pr(\mathbf{b}[k] = \mathbf{b}_p) = 1/\mathcal{L}^M$ , para  $p = 1, \dots, \mathcal{L}^M$ , como as probabilidades *a priori* de  $\mathbf{b}[k]$ , a integração leva à seguinte função densidade de probabilidade (f.d.p.)

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}[k]; \boldsymbol{\psi}) &= \sum_{\mathbf{b}_p \in \mathbb{A}^M} p(\mathbf{z}[k] | \mathbf{b}[k] = \mathbf{b}_p; \boldsymbol{\psi}) \Pr(\mathbf{b}[k] = \mathbf{b}_p) \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}^M \pi^N \sigma_n^{2N}} \sum_{p=1}^{\mathcal{L}^M} e^{-\|\mathbf{z}[k] - \mathbf{A}\Gamma\mathbf{b}_p\|^2 / \sigma_n^2} \end{aligned} \quad (4.42)$$

e, como os  $K$  *snapshots* são independentes, a função de verossimilhança para este modelo pode ser escrita como

$$L(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{(\mathcal{L}^M \pi^N \sigma_n^{2N})^K} \prod_{k=1}^K \sum_{p=1}^{\mathcal{L}^M} e^{-\|\mathbf{z}[k] - \mathbf{A}\Gamma\mathbf{b}_p\|^2 / \sigma_n^2}. \quad (4.43)$$

A estimativa de máxima verossimilhança de  $\boldsymbol{\psi}$  é dada pelo argumento que maximiza a função custo (4.43). Infelizmente, este é um problema de otimização multidimensional e altamente não-linear, mesmo para  $M = 1$ , e nenhuma solução em forma fechada é conhecida até o momento. Em verdade, acreditamos que não há uma solução fechada para este problema.

Lavielle *et al.* propuseram em (Lavielle et al., 1994) uma solução iterativa baseada na estratégia EM (do inglês *Expectation-Maximization*). Esta estratégia é uma opção atrativa para resolver o problema de estimação ML pois a cada iteração o valor da verossimilhança é aumentado (ou permanece inalterado, pois há garantia de que o valor não diminui (Fessler & Hero, 1993)) a custo de um esforço computacional relativamente baixo. O método EM é baseado no conceito de dados *completos* e *incompletos* como segue.

Sejam os dados incompletos o conjunto de *snapshots* observados  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}[1], \dots, \mathbf{z}[K]\}$  e a correspondente verossimilhança a *função de verossimilhança incompleta*, tal qual descrita em (4.43). Sejam os dados completos o conjunto  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Z}, \mathbf{S}\}$  e a correspondente verossimilhança a *função de verossimilhança completa*. Aqui,  $\mathbf{S} = \{\mathbf{s}[1], \dots, \mathbf{s}[K]\}$  é o conjunto de sinais recebidos desconhecidos (não-observados ou faltantes na terminologia EM usual) e a verossimilhança completa é a função descrita pela f.d.p. conjunta  $p(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\psi}) = p(\mathbf{Z}, \mathbf{S}; \boldsymbol{\psi})$ . Reproduzindo as palavras de Lavielle: “a ideia

básica por trás do método EM é maximizar a verossimilhança incompleta através de uma maximização iterativa da verossimilhança completa”. Para mais detalhes e aspectos de implementação do algoritmo EM resultante para este problema, direcionamos o leitor para (Lavielle et al., 1994, Seções 3.2 e 3.3).

Outra técnica de otimização similar é o método EM generalizado empregando a solução de espaços alternados (SAGE, do inglês *Space-Alternating Generalized EM*). Como o nome revela, o algoritmo SAGE é uma forma generalizada do algoritmo EM. Esta estratégia permite um esquema de otimização mais flexível e, por vezes, converge mais rápido que o algoritmo EM (Chung & Böhme, 2002). Até onde sabemos, nenhum algoritmo do tipo SAGE foi desenvolvido especificamente para tratar com a função de verossimilhança (4.43) associada ao modelo (3.21).

Como qualquer procedimento de busca local, estes algoritmos iterativos podem não convergir para a solução ótima global se a inicialização não for apropriada. Neste caso, a inicialização inclui os parâmetros DOA, deslocamento de fase e amplitude representados pelo vetor de parâmetros  $\psi$ . Felizmente, já foi demonstrado que os algoritmos EM e SAGE aumentam ou mantêm inalterada (não diminuem) a verossimilhança a cada passo e a solução converge ao menos para um ótimo local. A inicialização poderia ser feita usando-se, por exemplo, o resultado do algoritmo Root-MUSIC NC apresentado na Seção 4.1.2 se um arranjo do tipo ALU estiver sendo usado. Apenas como registro, testes feitos com a versão determinística do algoritmo EM apresentado em (Lavielle et al., 1994) mostraram que mesmo fornecendo os valores verdadeiros dos parâmetros como inicialização, as soluções convergem para mínimos espúrios. A versão estocástica não foi testada.

Outra solução interessante foi apresentada por Attux *et al.* em (Attux et al., 2007), no qual um procedimento baseado em agrupamento de dados foi usado para estimar os centróides (4.41). Estas estimativas são então usadas para compor um sistema de equações lineares, baseado no modelo discreto de sinal, cujas variáveis independentes estão diretamente relacionadas com os ângulos de incidência. As estimativas DOA são obtidas resolvendo-se este sistema de equações e mapeando-se a solução para o domínio angular. O método *Clust-DOA* (assim denominado em (Attux et al., 2007)), não resolve diretamente o problema de otimização ML mas, sob certas condições, pode ser mostrado que a estimativa resultante é uma solução ML. Mais detalhes sobre este método serão apresentados no Capítulo 6.

A capacidade do estimador ML não é limitada pelo número de sensores, pois não há restrições algébricas como, por exemplo, nas abordagens de ajuste de subespaço. Ou seja,  $M_{max}$  pode ser muito maior que o número de sensores, embora não há consenso a respeito desta quantificação. Via de regra, a capacidade (também chamada identificabilidade) do estimador de máxima verossimilhança pode ser imaginada como o número de amostras disponíveis que, no contexto de arranjos, é dado pelo número de sensores  $N$  multiplicado pelo número de *snapshots*. Além disto, o estimador ML é, como

se sabe, assintoticamente eficiente (no número de amostras) e consistente (erro de estimação tende a zero à medida que o número de amostras tende a infinito).

## 4.5 Limitantes de variância e limites de resolução

Resolução e acurácia são as métricas centrais para análise de desempenho em problemas de estimação paramétrica. Resolução, no contexto de estimação, significa a capacidade de distinção entre dois pontos pouco espaçados no espaço do parâmetro. Acurácia significa fidelidade da estimativa com relação ao valor verdadeiro e, portanto, está relacionada ao erro de estimação.

Embora resolução e acurácia sejam conceitualmente distintas, essas noções podem ser relacionadas pelo limite de Cramér-Rao (CRB, do inglês *Cramér-Rao Bound*). O CRB define a mínima variância alcançável por um estimador não-polarizado e, como consequência, estabelece um limite fundamental em acurácia. O limite estatístico de resolução (SRL, do inglês *Statistical Resolution Limit*) é definido como a separação de pontos, no espaço do parâmetro, que se iguala à raiz quadrada de seu próprio CRB (Smith, 2005). Trazendo este conceito para o contexto de DOA, temos que

$$\text{SRL} = \sqrt{\text{CRB}(\theta_1 - \theta_2)} \leq \Delta\theta, \quad (4.44)$$

na qual  $(\theta_1 - \theta_2)$  é a separação dos pontos no espaço angular. Portanto, duas fontes são discrimináveis se  $\Delta\theta \geq \text{SRL}$ , na qual  $\Delta\theta = |\theta_1 - \theta_2|$ .

Conjuntamente considerados, o CRB e o SRL delimitam o desempenho do estimador e provêm medidas quantitativas de quão confiável é a informação contida nas estimativas.

É importante notar que o CRB é um limitante local pois é válido somente para casos em que as perturbações causadas pelos erros de estimação são limitadas ao lóbulo principal da função de verossimilhança (Renaux et al., 2008; Athley, 2005). Portanto, o CRB é válido como limitante de desempenho apenas para a região assintótica (“altos” valores de RSR e “grande” número de amostras), onde o desempenho do estimador ML encontra o CRB. Boas referências para limitantes globais, ou seja, aqueles que levam em consideração grandes erros de estimação e com isso conseguem prever o comportamento dos estimadores em situações de baixa RSR e pequeno número de amostras, são (Chaumette et al., 2008; Renaux et al., 2008) e os trabalhos citados nestes.

Como consequência da nota acima, o SRL definido em (4.44) é um limite de resolução local, válido somente para situações de alta RSR e grande número de amostras.

Delmas e Abeida (Delmas & Abeida, 2006a) derivaram o CRB para os parâmetros do modelo (3.21) quando as fontes discretas pertencem aos casos específicos de esquemas de modulação BPSK, QPSK e MSK. Infelizmente, para o caso de múltiplas fontes ( $M \geq 2$ ), o CRB aparenta não ter

nenhuma forma explícita. Entretanto, sob a consideração de altos valores de RSR, pode-se fazer uma aproximação que leva a uma elegante expressão em forma fechada. Usando este resultado, Delmas e Abeida em (Delmas & Abeida, 2006b) contribuíram também com uma expressão simples para o SRL.

O CRB é dado pela expressão

$$\begin{aligned} \text{CRB}_{\text{BPSK}}^{\text{HSNR}}(\boldsymbol{\theta}) &\approx \text{CRB}_{\text{QPSK}}^{\text{HSNR}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \text{CRB}_{\text{MSK}}^{\text{HSNR}}(\boldsymbol{\theta}) \\ &\approx \frac{1}{K} \text{diag} \left( \frac{1}{\gamma_1 r_1}, \dots, \frac{1}{\gamma_M r_M} \right), \end{aligned} \quad (4.45)$$

na qual  $\gamma_m \triangleq 2 \dot{\mathbf{a}}_m^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{a}_m}^\perp \dot{\mathbf{a}}_m$  com  $\dot{\mathbf{a}}_m \triangleq \frac{d\mathbf{a}_m}{d\theta_m}$ ,  $\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{a}_m}^\perp \triangleq \mathbf{I}_N - \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^H / N$ , e  $r_m \triangleq \frac{g_m^2}{\sigma_n^2}$  é a RSR da  $m$ -ésima fonte, com  $m = 1, \dots, M$ .

Pode-se mostrar (Delmas & Abeida, 2006b) que usando (4.45) na definição (4.44) para o caso de duas fontes independentes, o SRL é dado por

$$\sqrt{\frac{1}{K} \left( \frac{1}{\gamma_1 r_1} + \frac{1}{\gamma_2 r_2} \right)} \leq \Delta\theta \quad (4.46)$$

pois  $\theta_1$  e  $\theta_2$  estão desacopladas em (4.45). Definindo  $\frac{1}{r_e} \triangleq \frac{1}{\gamma_1 r_1} + \frac{1}{\gamma_2 r_2}$ , temos que

$$\Delta\theta \geq \frac{1}{(K r_e)^{1/2}} \quad (4.47)$$

na qual  $r_e$  pode ser interpretada como uma RSR estendida. No caso de um arranjo do tipo ALU,  $\gamma_1 = \gamma_2 = N(N^2 - 1)/6$  e, portanto,

$$r_e = \frac{N(N^2 - 1)}{6} \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_n^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}. \quad (4.48)$$

Como demonstrado em (Delmas & Abeida, 2006b), os parâmetros de potência ( $\sigma_n^2, g_i^2$ ) e de fase ( $\phi_j, \theta_j$ ) são desacoplados para qualquer par  $(i, j)$  nas matrizes de informação de Fisher (FIM, do inglês *Fisher Information Matrix*) que definem o CRB, com  $i, j = 1, \dots, M$ . Esta é a razão pela qual a matriz do CRB para o vetor dos parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  (equação (4.45)) é diagonal.

É interessante observar que a FIM para cada conjunto de parâmetros ( $g_i^2, \phi_i, \theta_i$ ) não depende do parâmetro de deslocamento de fase  $\phi_i$ . Portanto, o SRL ( $\Delta\theta_{\min} = (K r_e)^{-1/2}$ ) é insensível em relação a este parâmetro.

Para fins de comparação, apresentamos resumidamente os limitantes de Cramér-Rao para os modelos em que os sinais  $s[k]$  são considerados processos aleatórios gaussianos circulares ou não-



circulares. Como demonstrado em (Delmas & Abeida, 2004), a FIM dos parâmetros  $\theta$  depende dos parâmetros  $\phi$ , diferentemente do caso anterior (BPSK/QPSK/MSK), e o limitante de Cramér-Rao para sinais gaussianos não-circulares é dado por

$$\text{CRB}_{\text{NCG}}(\theta) = \frac{\sigma_n^2}{2} \left\{ \Re \left[ \mathbf{J}_{\mathbf{A}}^H \mathbf{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp} \mathbf{J}_{\mathbf{A}} \odot (\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^H \mathbf{R}_{\mathbf{z}_{\text{nc}}}^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{A}})^T \right] \right\}^{-1}, \quad (4.49)$$

na qual

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{R}_{\mathbf{s}} \\ \mathbf{A}^* \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{s}}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2N \times M},$$

$\mathbf{J}_{\mathbf{A}} \triangleq d\mathbf{A}(\theta)/d\theta$  é a matriz jacobiana de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp}$  é a matrix de projeção ortogonal às colunas da matrix  $\mathbf{A}$  e  $\odot$  denota o produto de Hadamard (produto elemento-a-elemento).

Para sinais gaussianos circulares,  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ , e portanto (4.49) é reduzida à forma clássica

$$\text{CRB}_{\text{CG}}(\theta) = \frac{\sigma_n^2}{2} \left\{ \Re \left[ \mathbf{J}_{\mathbf{A}}^H \mathbf{\Pi}_{\mathbf{A}}^{\perp} \mathbf{J}_{\mathbf{A}} \odot (\mathbf{R}_{\mathbf{s}} \mathbf{A}^H \mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_{\mathbf{s}})^T \right] \right\}^{-1}. \quad (4.50)$$

## 4.6 Experimentos numéricos

Nesta seção apresentamos algumas análises de desempenho dos métodos de estimação de direção de chegada baseados no modelo estacionário. As análises são feitas partindo dos resultados de experimentos numéricos, especialmente criados para avaliar a qualidade dos métodos frente a cenários desafiadores. As simulações foram realizadas usando-se o esquema de modulação BPSK, cada transmissor tem uma única antena e o receptor é composto por um arranjo do tipo ALU. Os cenários foram escolhidos com o propósito de avaliar o potencial das técnicas com respeito a resolução espacial, capacidade e acurácia. Pelo termo capacidade, entenda-se o máximo número de fontes que o método é capaz de detectar. Por resolução espacial, entenda-se a habilidade de distinguir picos subsequentes no espectro espacial, medidos pela agudez.

### 4.6.1 Resolução espacial e capacidade

Na análise feita nesta subseção, supomos que o número de fontes é desconhecido e deve ser estimado antes da aplicação da técnica de estimação DOA. A razão para isto é que a capacidade das técnicas está sob análise. Especificamente, um cenário com um número de fontes transmissoras maior que o número de antenas no receptor será analisado e, desta forma, o estágio de detecção (estimação



do número de fontes ativas) tem um papel fundamental por causa da limitação dos métodos que se baseiam na autodecomposição (autovalores e autovetores) da matriz de covariância convencional.

Em um primeiro cenário, um receptor com quatro antenas é empregado para avaliar os espectros espaciais do MUSIC e do MUSIC NC para o caso em que três fontes independentes estão ativas. As fontes incidem com ângulos de  $-10$ ,  $5$  e  $25$  graus e a amostragem é feita sob uma RSR de  $5$  dB. A relação sinal-ruído é definida como

$$\text{RSR} = 10 \log \left( \frac{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g_m^2}{\sigma_n^2} \right) \quad (\text{dB}). \quad (4.51)$$

Os parâmetros de amplitude e deslocamento de fase são ajustados para  $\mathbf{g} = [0,9; 1,2; 0,8]^T$  e  $\boldsymbol{\phi} = [\pi/10, \pi/8, \pi/6]^T$  respectivamente, e seguindo a ordenação de fontes apontada acima (isto é,  $(-10, 5, 25)$ ). O conjunto de dados contém  $100$  *snapshots*. A Figura 4.2 mostra um ensaio para este cenário. Do resultado, observamos que a resolução espacial do MUSIC NC é melhor que aquela do MUSIC convencional. Este resultado já era esperado, pois fontes BPSK são inerentemente não-circulares, como mostrado previamente na Seção 2.1, e, assim, há informação não-nula na matriz de covariância complementar.

Utilizamos o critério MDL (do inglês, *Minimum Description Length*) (Wax & Kailath, 1985) para estimar o número de fontes para cada algoritmo. O critério MDL é baseado na aplicação de critérios de informação para seleção de modelos introduzido por Akaike (Akaike, 1973), Schwarz (Schwarz, 1978) e Rissanen (Rissanen, 1978). Para mais detalhes, veja o artigo de Wax e Kailath (Wax & Kailath, 1985). O MUSIC (usando a covariância convencional) e o MUSIC NC (usando a covariância estendida) detectaram ambos três fontes corretamente em todos os ensaios executados. Naturalmente, na medida que a RSR é diminuída abaixo de um determinado limiar, a probabilidade de erro de detecção começa a aumentar, uma vez que um número finito de *snapshots* é usado para computar as matrizes de covariância.

A capacidade de operação dos métodos não-circulares fica mais evidente quando utilizamos um cenário subdeterminado, ou seja, há mais fontes do que antenas receptoras. Vamos considerar as mesmas condições que aquelas do cenário anterior, porém agora com cinco fontes ativas. Os sinais das fontes incidem em  $-40$ ,  $-10$ ,  $5$ ,  $25$  e  $45$  graus e as respectivas amplitudes e deslocamentos de fase são ajustadas para  $\mathbf{g} = [0,9; 1,2; 0,8; 1,1; 1,0]^T$  e  $\boldsymbol{\phi} = [\pi/10, \pi/8, \pi/6, \pi/4, \pi/3]^T$ . A Figura 4.3 mostra o resultado de um ensaio para este cenário. Como esperado, não existe a possibilidade do método MUSIC detectar corretamente o número de fontes porque, neste caso, o critério MDL usa a matriz de covariância convencional para realizar a estimação. Em relação ao método de detecção utilizado, em todos os ensaios realizados, o critério MDL aplicado ao algoritmo MUSIC detectou a presença de três fontes e quando aplicado ao algoritmo MUSIC NC, detectou cinco fontes corretamente. Recorde-se

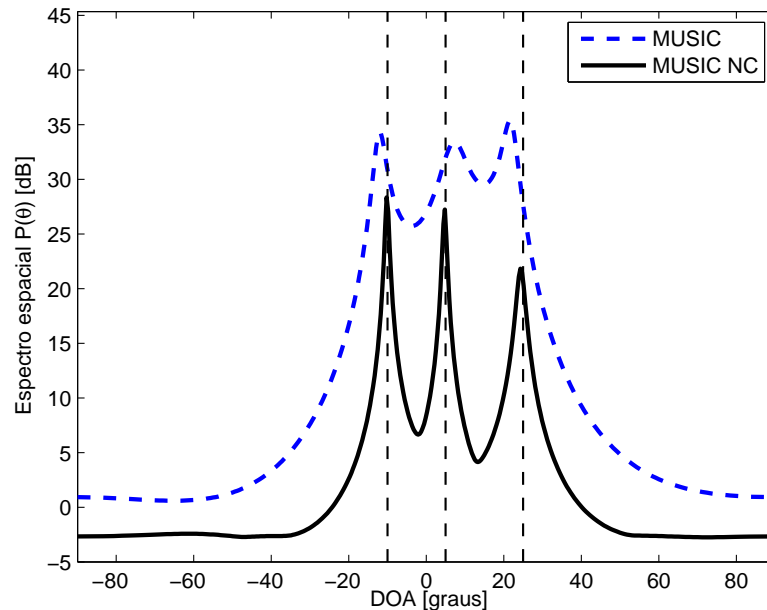


Figura 4.2: Comparação dos espectros espaciais dos algoritmos MUSIC e MUSIC NC enfatizando a resolução.

de que a capacidade do MUSIC é  $M_{max} = N - 1 = 3$ . Em contrapartida, o algoritmo MUSIC NC não sofre desta limitação no cenário imposto pois este emprega a matriz de covariância estendida. A capacidade do MUSIC NC é  $M_{max} = 2(N - 1) = 6$  enquanto o número de fontes é  $M = 5$ . Salientamos que a Figura 4.3 serve apenas como ilustração qualitativa, pois as capacidades e resolução dos métodos não podem ser comparadas quantitativamente através dos seus espectros espaciais.

### 4.6.2 Acurácia

Nesta subseção, o número de fontes é conhecido *a priori*, o que permite concentrar a análise somente na acurácia das técnicas de estimação DOA. Um arranjo com três antenas é empregado para estimar os ângulos DOA de duas fontes independentes e pouco espaçadas no domínio angular. A separação angular foi projetada para ser muito menor que o limite de resolução de Fourier (LRF)  $2\pi/N$  rad, mas também para ser maior que o limite de resolução estatístico (LRE ou SRL), que é dado neste exemplo por (4.47), para todos os valores de RSR que estão sob análise. O desempenho dos algoritmos Root-MUSIC NC, COMET NC e SBDOA são calculados e comparados com outros dois estimadores clássicos: ESPRIT (Roy, 1987) e MODE (Stoica & Sharman, 1990). O desempenho é avaliado em termos da Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM) das estimativas e é calculado para RSRs entre  $-10$  e  $40$  dB.

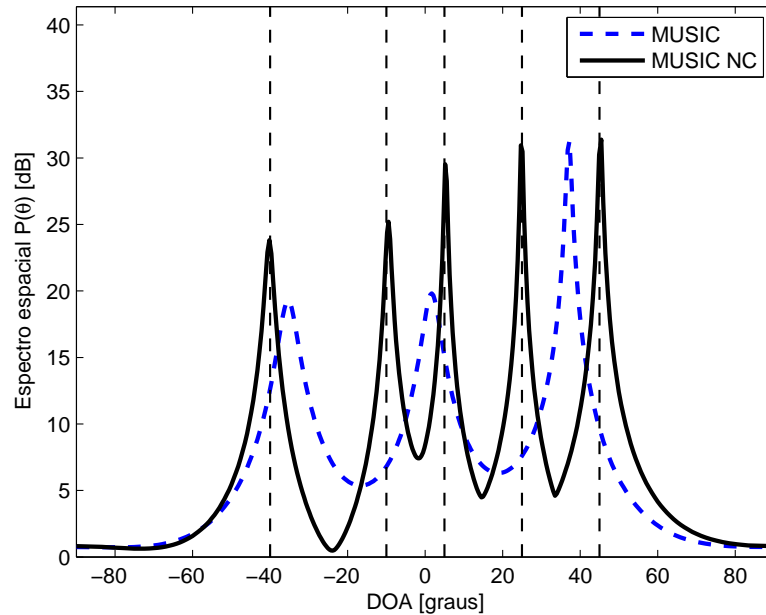


Figura 4.3: Comparação dos espectros espaciais dos algoritmos MUSIC e MUSIC NC enfatizando a capacidade.

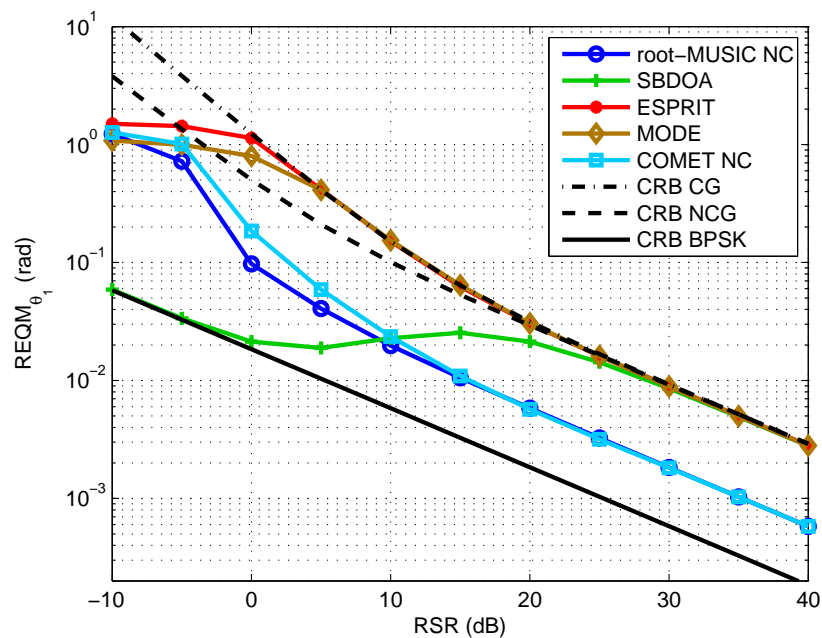


Figura 4.4: Desempenho dos métodos ESPRIT (ajuste de subespaços clássico), MODE (estimador ML assintótico para o modelo gaussiano circular convencional), SBDOA (técnica supervisionada baseada no critério MMSE), Root-MUSIC NC e COMET NC em função da RSR. Os limitantes relevantes também são mostrados.

A Figura 4.4 mostra os resultados para este cenário, no qual os sinais incidem com ângulos de  $\theta_1 = -2$  e  $\theta_2 = +2$  graus. Os parâmetros de amplitude e deslocamento de fase são ajustados para  $\phi = [0; 0,01]^T$  rad e  $\mathbf{g} = [0,8; 1,2]^T$ , respectivamente, e 1200 *snapshots* compõem o conjunto de dados. Foram realizados 1000 ensaios independentes nesta simulação. Os erros de estimação são dados em termos de REQM entre o verdadeiro valor de  $\theta_1$  e suas estimativas.

Da Figura 4.4, observamos que os métodos que exploram a não-circularidade, Root-MUSIC NC e COMET NC, alcançam uma REQM consideravelmente menor para todos os valores de RSR quando comparados com os métodos baseados no modelo gaussiano circular (ESPRIT e MODE), os quais apresentam desempenhos similares. Note que estes métodos são assintoticamente limitados pelo CRB para fontes gaussianas circulares (Stoica & Nehorai, 1990) (denotado por CRB CG), como esperado. Também observamos que o Root-MUSIC NC e o COMET NC não tendem assintoticamente ao CRB para fontes BPSK e, portanto, não são assintoticamente eficientes. A principal razão é que estes métodos levam em consideração estatísticas até segunda-ordem, enquanto os sinais considerados também contêm informação não-nula nos momentos de ordem superior. Para uma REQM de 0.01 rad, o ganho em comparação com os estimadores baseados no modelo gaussiano circular é de aproximadamente 15 dB de RSR. O gráfico também mostra o desempenho do método SBDOA, que é uma técnica supervisionada, e, como tal, não apresenta efeitos de limiar como aqueles experimentados pelos métodos não-supervisionados. Note que, o desempenho da técnica SBDOA tende assintoticamente para o CRB CG e o CRB para fontes gaussianas não-circulares (Delmas & Abeida, 2004) (denotado por CRB NCG) para elevados valores de RSR e também tende para o CRB BPSK para valores baixos de RSR. Muito embora a prova deste comportamento não seja simples, uma possível interpretação é a seguinte: para valores baixos de RSR a supervisão fornece mais informação para o estimador que as probabilidades *a priori* dos sinais, enquanto para elevados valores de RSR o inverso é observado.

Uma regra simples para obtermos o valor da RSR de limiar no sentido do LRE pode ser imaginada impondo-se  $g_1 = g_2 \triangleq g_s$  em (4.47). Assim, definindo  $\text{RSR} \triangleq g_s^2 / \sigma_n^2$  temos que a RSR de limiar ( $\text{RSR}_{\text{lim}}$ ) no sentido do LRE, para um arranjo do tipo ALU e fontes BPSK/QPSK/MSK, é dada pela igualdade na condição

$$\text{RSR} \geq \frac{12}{KN(N^2 - 1)(\Delta\theta)^2} \quad (4.52)$$

com  $\Delta\theta$  em radianos. No presente exemplo, a RSR de limiar é de aproximadamente  $-10,68$  dB significando que as fontes são discrimináveis para todos os valores de RSR analisados no gráfico.

Com este exemplo, terminamos os experimentos numéricos das técnicas que tratam do modelo estacionário de *snapshot* para fontes moduladas digitalmente. O próximo capítulo versa sobre as técnicas existentes que tratam com o modelo cicloestacionário de *snapshot*.

## Capítulo 5

# Técnicas baseadas no modelo cicloestacionário

Como já enfatizamos anteriormente, a propriedade de cicloestacionariedade tem recebido cada vez mais atenção na comunidade de processamento de sinais, especialmente para resolver o problema de estimação DOA. Os esforços têm sido concentrados majoritariamente na exploração desta propriedade em abordagens baseadas em ajuste de subespaços, com ênfase especial nos algoritmos tipo-MUSIC. A razão desta preferência é a facilidade de agregar a informação da covariância cíclica no critério de otimalidade sem mudar significativamente as bem consolidadas soluções baseadas em estacionariedade, especialmente aquelas apresentadas na Seção 4.1.

As vantagens de se usar a covariância cíclica (ou correlação espectral) são claras. Primeiramente, a covariância cíclica deve ser computada para a escolha da frequência de ciclo  $\alpha_n \neq 0$ . Como consequência, a interferência de todos os sinais co-canal que não apresentam comportamento cicloestacionário, em especial nesta frequência de ciclo, converge para zero à medida que o número de amostras usadas para estimar a covariância cíclica tende ao infinito. Além disso, o número de interferentes pode ser virtualmente ilimitado, estes podem exibir alto grau (arbitrário) de correlação entre si e ainda podem incidir em direções arbitrariamente próximas àquelas dos sinais de interesse (Schell et al., 1989). Segundo ponto, o efeito do ruído também converge para zero à medida que o número de amostras aumenta porque o processo de ruído é considerado estacionário. Como desvantagem podemos apontar a necessidade de um grande número de *snapshots* e, conseqüentemente, alto tempo de aquisição, o que pode limitar seu uso prático se os parâmetros do modelo não forem “tão estáticos”.

A propriedade de cicloestacionariedade foi pioneiramente empregada para estimação DOA em (Gardner, 1988b) por William Gardner, que propôs o uso da covariância cíclica no lugar da matriz de covariância ordinária nos algoritmos clássicos MUSIC e ESPRIT. Esta substituição, no entanto, não é direta, pois tanto o MUSIC como o ESPRIT são métodos estruturados na autodecomposição

(EVD, do inglês *eigenvalue decomposition*) e as covariâncias cíclicas não são, em geral, hermitianas simétricas. Desta forma, a decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *singular value decomposition*) deve ser usada em detrimento da decomposição em autovalores EVD. Em (Gardner, 1988b), os métodos foram concebidos para classificar somente uma fonte cicloestacionária, porém a idéia serviu de semente para o trabalho seguinte (Schell et al., 1989) no qual o algoritmo Cyclic MUSIC foi proposto para tratar com  $M$  fontes que possuem comportamento cicloestacionário na mesma frequência de ciclo.

Como ponto inicial para os estudos apresentados neste capítulo, retome o modelo de dados de tempo-contínuo (3.25) e as correspondentes covariâncias cíclicas de tempo-discreto para a frequência de ciclo  $\alpha_n = n/T_0$  e deslocamento de tempo  $\tau$  pré-definidos

$$\mathbf{R}_z^{\alpha_n, s}[l] = \mathbf{R}_z^{\alpha_n}(\tau)|_{\tau=lT_s, \alpha_n, s=\alpha_n T_s} \quad (5.1)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_z^{\alpha_n, s}[l] = \tilde{\mathbf{R}}_z^{\alpha_n}(\tau)|_{\tau=lT_s, \alpha_n, s=\alpha_n T_s}, \quad (5.2)$$

com

$$\mathbf{R}_z^{n/T_0}(\tau) = \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}\mathbf{R}_s^{n/T_0}(\tau)\mathbf{\Gamma}^H\mathbf{A}^H \quad (5.3)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_z^{n/T_0}(\tau) = \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}\tilde{\mathbf{R}}_s^{n/T_0}(\tau)\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{A}^T. \quad (5.4)$$

A estimação das covariâncias cíclicas (5.1) e (5.2) é feita com os processos de média amostral

$$\hat{\mathbf{R}}_z^{\alpha_n, s}[l] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{z}[k+l]\mathbf{z}^H[k]e^{-j2\pi\alpha_n, s k} \quad (5.5)$$

$$\hat{\tilde{\mathbf{R}}}_z^{\alpha_n, s}[l] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{z}[k+l]\mathbf{z}^T[k]e^{j2\pi\alpha_n, s k}, \quad (5.6)$$

nos quais  $\alpha_{n, s} = n/L$ ,  $L$  é a taxa de sobreamostragem e  $K$  é o número de amostras (*snapshots*).

Nas seções a seguir, apresentamos os métodos de estimação DOA que exploram a cicloestacionariedade que consideramos como os mais interessantes e relevantes na literatura.

## 5.1 Abordagem por ajuste de subespaços

### 5.1.1 Cyclic MUSIC

Assim como no algoritmo MUSIC convencional, o critério de otimalidade é dado pela minimização da energia resultante da projeção da assinatura espacial sobre o subespaço de ruído. A diferença

em comparação com (4.1) é que aqui a matriz  $\mathbf{U}_n$  correspondente é tomada aplicando-se a SVD em  $\mathbf{R}_z^{\alpha_n, s}[l]$  (ou  $\tilde{\mathbf{R}}_z^{\alpha_n, s}[l]$ ), a qual pode ser escrita como

$$\mathbf{R}_z^{\alpha_n, s}[l] = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{V}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{V}_n^H, \quad (5.7)$$

na qual  $[\mathbf{U}_s, \mathbf{U}_n]$  é a matriz dos vetores singulares à esquerda associados (em ordem de coluna) aos valores singulares dos subespaços de sinal  $\mathbf{\Lambda}_s \in \mathbb{R}^{M \times M}$  e de ruído  $\mathbf{\Lambda}_n \in \mathbb{R}^{(N-M) \times (N-M)}$ , os quais estão arranjados em ordem decrescente. Os vetores singulares à direita correspondentes são representados pela matriz  $[\mathbf{V}_s, \mathbf{V}_n]$ . Os subíndices  $s$  e  $n$  denotam os subespaços de sinal e de ruído, respectivamente. As estimativas DOA são obtidas buscando-se os  $M$  mínimos da função custo

$$J(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta) \quad (5.8)$$

com respeito à variável  $\theta \in \mathbb{R}$ , com  $\mathbf{U}_n$  obtida de (5.7). Note que o procedimento é o mesmo que aquele do MUSIC convencional. A diferença está no pré-processamento, ou seja, no cômputo da covariância cíclica para uma dada frequência de ciclo  $\alpha_n$  e um dado deslocamento de tempo  $\tau$ , e na decomposição em subespaços através da técnica SVD.

### 5.1.2 Cyclic MUSIC NC

Tomando como base as idéias empregadas nos métodos fundamentados no modelo estacionário e sinais não-circulares, nos quais a covariância complementar pode melhorar a qualidade da estimação, Chargé *et al.* desenvolveram em (Chargé et al., 2003) o *Cyclic MUSIC NC*, um algoritmo que incorpora as duas covariâncias cíclicas, a ordinária  $\mathbf{R}_z^{\alpha_n, s}[l]$  e a complementar  $\tilde{\mathbf{R}}_z^{\alpha_n, s}[l]$ . Isto pode ser realizado criando-se o modelo de *snapshot* estendido

$$\mathbf{z}_e[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{z}[k] \\ \mathbf{z}^*[k] \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^M \bar{\mathbf{A}}(\theta_m) \begin{bmatrix} s_m[k] \\ s_m^*[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{int}[k] \\ \mathbf{z}_{int}^*[k] \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

no qual  $\bar{\mathbf{A}}$  é dado por (4.18),  $s_m[k] = g_m e^{j\phi_m} \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_m[k] p(kT_s - lT_0)$  é o sinal amostrado no instante  $kT_0$  e  $\mathbf{z}_{int}[k] = \mathbf{z}_{jam}[k] + \mathbf{n}[k]$  é o vetor de interferência total, ou seja, ruído e interferentes (*jammers*) co-canal.

Esta é exatamente a mesma formulação usada para criar (4.2), porém a representação (5.9) permite uma interpretação distinta a respeito do problema em questão. Existem, virtualmente, duas componentes de sinais para cada ângulo  $\theta_m$  e a relação entre estas componentes define o posto da matriz de covariância cíclica dos *snapshots* estendidos. Com isso, esta inter-relação define também a capacidade do método ( $M_{max}$ ).

Para uma dada frequência de ciclo  $\alpha_n \neq 0$  das fontes de interesse, a covariância cíclica estendida é idealmente livre de componente de interferências, incluindo o ruído, e pode ser escrita na forma particionada

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}_e}^{\alpha_n, s}[l] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\alpha_n, s}[l] & \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}}^{\alpha_n, s}[l] \\ (\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}}^{\alpha_n, s}[l])^* & (\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\alpha_n, s}[l])^* \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

na qual  $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{\alpha_n, s}[l]$  e  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}}^{\alpha_n, s}[l]$  são dadas por (5.1) e (5.2), respectivamente.

Se a magnitude das funções de correlação cíclicas ordinária  $R_{s_m}^{\alpha_n, s}[l]$  e complementar  $\tilde{R}_{s_m}^{\alpha_n, s}[l]$  forem as mesmas, então o posto de  $\mathbf{R}_{\mathbf{z}_e}^{\alpha_n, s}[l]$  é incrementado somente de 1 (um) porque as componentes de sinal  $s_m[k]$  e  $s_m^*[k]$  são ciclicamente coerentes. Caso contrário, o posto é incrementado de dois. Portanto, denotando  $\bar{M}$  como o posto da matriz de covariância cíclica estendida  $\mathbf{R}_{\mathbf{z}_e}^{\alpha_n, s}[l]$ , o posto desta matriz deverá estar no intervalo  $M \leq \bar{M} \leq 2M$ . Pelo fato de a estratégia MUSIC estar fundamentada na decomposição de subespaços da matriz de covariância dos dados, podemos concluir, pelos argumentos acima, que a capacidade do método  $M_{max}$  pertence ao intervalo  $N - 1 \leq M_{max} \leq 2(N - 1)$ .

Vamos definir o vetor de direção estendido como

$$\bar{\mathbf{a}}(\theta, \mathbf{c}) = \bar{\mathbf{A}}(\theta)\mathbf{c}, \quad (5.11)$$

no qual  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$  é um vetor de ponderação desconhecido e  $\bar{\mathbf{A}}(\theta)$  foi definida em (4.18). As estimativas DOA são obtidas minimizando-se a função custo

$$J(\theta, \mathbf{c}) = \bar{\mathbf{a}}^H(\theta, \mathbf{c})\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\bar{\mathbf{a}}(\theta, \mathbf{c}) \quad (5.12)$$

no espaço de  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{c}$ . Podemos concentrar esta função custo com respeito a  $\theta$  se usarmos o valor de  $\mathbf{c}$  que minimiza esta função. Semelhantemente a (4.8), pode ser mostrado que o vetor ótimo  $\mathbf{c}_o$  é o autovetor associado ao menor autovalor da matriz  $\bar{\mathbf{A}}(\theta)\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\bar{\mathbf{A}}(\theta)$ . Como demonstrado em (Chargé et al., 2003), esta solução ótima reduz (5.12) para

$$J(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_{n1}\mathbf{U}_{n1}^H\mathbf{a}(\theta) - \|\mathbf{a}^T(\theta)\mathbf{U}_{n2}\mathbf{U}_{n1}^H\mathbf{a}(\theta)\|, \quad (5.13)$$

na qual  $\mathbf{U}_{n1} \in \mathbb{C}^{N \times (2N - \bar{M})}$  e  $\mathbf{U}_{n2} \in \mathbb{C}^{N \times (2N - \bar{M})}$  são matrizes originárias da partição  $\mathbf{U}_n = [\mathbf{U}_{n1}^T, \mathbf{U}_{n2}^T]^T$ , e o procedimento de busca torna-se uma conveniente busca unidimensional no espaço do parâmetro  $\theta$ . Os  $M$  mínimos de (5.13) são as estimativas DOA.

A estimativa da covariância cíclica estendida pode ser obtida usando-se o processo de média



amostral

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}_e}^{\alpha_{n,s}}[l] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{z}_e[k+l] \mathbf{z}_e^H[k] \mathbf{I}_{2N}^{\alpha_{n,s}}[k] \quad (5.14)$$

com

$$\mathbf{I}_{2N}^{\alpha_{n,s}}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N e^{-j2\pi\alpha_{n,s}k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N e^{+j2\pi\alpha_{n,s}k} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

ou, alternativamente, com as estimativas individuais (5.5) e (5.6) e então arranjadas como em (5.10).

### 5.1.3 *Cyclic Root-MUSIC NC*

Este algoritmo foi criado através de uma adaptação da solução *Root-MUSIC NC* introduzida em (Chargé et al., 2001b) (veja a Seção 4.1.2) para o modelo de *snapshot* estendido (5.9) usado pelo *Cyclic-MUSIC NC* (Chargé et al., 2003). De fato, as diferenças estão no uso da matriz de covariância cíclica (5.10) ao invés da matriz de covariância e na definição do vetor de direção estendido, agora dado por (5.11), e nas implicações correspondentes.

Portanto, as estimativas são obtidas buscando-se os mínimos de (5.12), a qual pode ser escrita na forma

$$J(\theta, \mathbf{c}) = \mathbf{c}^H \mathbf{M} \mathbf{c}, \quad (5.16)$$

com

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta) & \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{a}^*(\theta) \\ \mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta) & \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_{n2}^* \mathbf{U}_{n2}^T \mathbf{a}(\theta) \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Da mesma forma que na solução *Root-MUSIC NC*, pode ser mostrado que o valor mínimo de (5.16) é dado pelo menor autovalor da matriz  $\mathbf{M}$  e, devido à forma quadrática da função custo, este autovalor é sempre não-negativo. Quando a variável  $\theta$  iguala-se a um dos ângulos verdadeiros, o menor autovalor de  $\mathbf{M}$  iguala-se a zero. Como consequência, o determinante de  $\mathbf{M}$  também é nulo. Doravante, as estimativas DOA são obtidas através dos mesmos passos que aqueles da técnica de extração de raízes de polinômio discutida na Seção 4.1.2 para o *Root-MUSIC NC*. A capacidade do *Cyclic Root-MUSIC NC* também é igual àquela do *Root-MUSIC NC*, ou seja,  $M_{max} = 2(N - 1)$ .

## 5.2 Abordagem por correlação espectral

As técnicas apresentadas até agora são baseadas no modelo de *snapshot* de banda-estreita (3.14). Contudo, sob a hipótese de sinais de banda-larga, o modelo MIMO (3.2) não se reduz a (3.14) mas é

dado, em uma forma mais geral, por

$$z_n(t) = \sum_{m=1}^M x_m(t + \tau_{nm}) + n_n(t), \quad (5.18)$$

na qual  $x_m(t) = h_{nm}(t) * s_m(t)$  e  $\tau_{nm}$  é o atraso de propagação dependente de  $\theta_m$ . Por exemplo, para um arranjo do tipo ALU temos  $\tau_{nm} = (n-1)d \sin(\theta_m)/c$ , na qual  $d$  é o espaçamento entre elementos e  $c$  é a velocidade da onda no meio. Considerando que o canal é plano em frequência e invariante no tempo, (5.18) reduz-se a

$$z_n(t) = \sum_{m=1}^M h_{nm} s_m(t + \tau_{nm}) + n_n(t), \quad (5.19)$$

na qual  $h_{nm}$ , para  $m = 1, \dots, M$  e  $n = 1, \dots, N$ , são constantes complexas que representam os coeficientes do canal equivalente em banda-base.

O método de Correlação Espectral (CE) estabelece sua base na propriedade do atraso de tempo da transformada de Fourier. Seja  $x(t)$  um processo cicloestacionário com função de correlação cíclica  $R_x^{\alpha_n}(\tau)$ . Então a função de correlação cíclica de  $y(t) = x(t + T)$  é simplesmente  $R_y^{\alpha_n}(\tau) = R_x^{\alpha_n}(\tau) e^{j2\pi\alpha_n T}$ , isto é, o atraso de tempo é transformado em deslocamento de fase no domínio espectral. Desta forma, considerando que os sinais e interferentes são mutuamente e ciclicamente descorrelacionados, pode ser mostrado (Xu & Kailath, 1992) que

$$R_{z_n}^{\alpha_n}(\tau) = \sum_{m=1}^M R_{s_m}^{\alpha_n}(\tau) e^{j2\pi\alpha_n \tau_{nm}} \quad n = 1, \dots, N, \quad (5.20)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{r}_z^{\alpha_n}(\tau) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \alpha_n) \mathbf{r}_s^{\alpha_n}(\tau), \quad (5.21)$$

na qual  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \alpha_n) = [\mathbf{a}(\theta_1, \alpha_n), \dots, \mathbf{a}(\theta_M, \alpha_n)] \in \mathbb{C}^{N \times M}$  é a matriz dos vetores de direção “relativos”

$$\mathbf{a}(\theta_m, \alpha_n) \triangleq [1, e^{j2\pi\alpha_n \tau_{nm}}, \dots, e^{j2\pi\alpha_n (n-1)\tau_{nm}}]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1} \quad (5.22)$$

e  $\mathbf{r}_s^{\alpha_n}(\tau) \triangleq [R_{s_1}^{\alpha_n}(\tau), \dots, R_{s_M}^{\alpha_n}(\tau)]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ .

Note a similaridade da expressão (5.21) com o modelo de *snapshot* de banda-estreita (3.14), na qual as informações temporal e espacial estão inteiramente separadas na componente de sinal. Para tornar isto mais familiar, considere que a estimação de  $\mathbf{r}_z^{\alpha_n}(\tau)$  seja feita com um número finito de amostras  $K$ . Com isso, inevitavelmente haverá um erro na estimação que pode ser modelado como

$$\hat{\mathbf{r}}_z^{\alpha_n}(\tau) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \alpha_n) \mathbf{r}_s^{\alpha_n}(\tau) + \mathbf{e}(\tau), \quad (5.23)$$

na qual  $\mathbf{e}(\tau) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  representa o erro de estimação que é modelado como um processo aleatório i.i.d. temporal e espacialmente. Estimando-se o vetor  $\mathbf{r}_z^{\alpha_n}(\tau)$  para um número  $Q$  de atrasos de tempo uniformemente espaçados  $\tau = qT_s$ , com  $q = 0, 1, \dots, Q - 1$ , podemos criar um conjunto de pseudo-*snapshots*

$$\mathbf{R}_{z,b}^{\alpha_n} = \{\hat{\mathbf{r}}_z^{\alpha_n}(0), \hat{\mathbf{r}}_z^{\alpha_n}(T_s), \dots, \hat{\mathbf{r}}_z^{\alpha_n}((Q-1)T_s)\} \quad (5.24)$$

e usá-los nos algoritmos convencionais construídos para operar com sinais de banda-estreita, por exemplo, nos algoritmos baseados em ajuste de subespaços anteriormente tratados.

Esta é uma estratégia muito interessante, pois é capaz de operar com sinais de banda-larga e de banda-estreita igualmente. Note que as correlações-cruzadas cíclicas entre diferentes antenas não são consideradas, implicando que somente processamento temporal é realizado com as amostras de cada antena para obter os pseudo-*snapshots*  $\hat{\mathbf{r}}_z^{\alpha_n}(\tau)$ .

De certo modo, podemos interpretar a estratégia usada pelo método CE como um pré-processamento temporal uma vez que este prepara os dados coletados, não importando a largura de banda dos sinais, para serem aplicados a outro método de estimação existente.

Numa breve meditação acerca da abordagem CE, podemos imaginar uma técnica que leva em consideração o conhecimento da função da correlação cíclica  $R_{s_m}^{\alpha_n}(\tau)$  de cada fonte. Isto é possível toda vez que conhecemos o formato dos pulsos  $p_m(t)$  usados na transmissão. Por exemplo, a estratégia mais intuitiva é resolver o conjunto de sistemas lineares

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \alpha_n) \mathbf{r}_s^{\alpha_n}(\tau) = \hat{\mathbf{r}}_z^{\alpha_n}(\tau), \quad \text{para } \tau = 0, T_s, \dots, (Q-1)T_s \quad (5.25)$$

com respeito a  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ . Isto pode ser realizado escrevendo-se na forma “batelada”

$$\mathbf{R}_{s,e} \text{vec}(\mathbf{A}^T) = \text{vec}(\mathbf{R}_{z,b}), \quad (5.26)$$

na qual  $\mathbf{R}_{s,e} \triangleq \mathbf{1}_Q^T \otimes \mathbf{R}_{s,b}$  e

$$\mathbf{R}_{s,b} \triangleq [\mathbf{r}_s^{\alpha_n}(0), \mathbf{r}_s^{\alpha_n}(T_s), \dots, \mathbf{r}_s^{\alpha_n}((Q-1)T_s)]. \quad (5.27)$$

Como o resultado da multiplicação  $N \times Q$  é maior ou igual a  $N \times M$ , ou seja,  $Q \geq M$ , o sistema linear (5.26) é sempre sobredeterminado, levando a soluções únicas para  $\text{vec}(\mathbf{A}^T) \in \mathbb{C}^{NM \times 1}$ . As estimativas DOA são obtidas recuperando-se a matriz  $\hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}, \alpha_n)$  da solução obtida e desta extraíndo-se as estimativas  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

Naturalmente, o cálculo do conjunto de pseudo-*snapshots* demanda uma carga computacional relativamente alta na medida que  $Q$  aumenta. Este ponto é ainda mais crítico na generalização da abordagem CE para estatísticas de  $k$ -ésima ordem introduzidas em (Shamsunder & Giannakis, 1994).

Independentemente das abordagens tratadas até agora, outros algoritmos interessantes têm sido criados para explorar a propriedade de cicloestacionariedade. Entre estes, destacamos os trabalhos (Wylie & Roy, 1995; Xin et al., 1998; Y.-T. Lee & Lee, 2001; Z. Liu et al., 2005, 2006; Yan & Fan, 2005, 2007; Markhi et al., 2007; Inagaki et al., 2007; Reuven & Weiss, 2009).

Como um último comentário, do ponto de vista prático, os métodos baseados em cicloestacionariedade parecem ser mais simples de serem implementados se comparados com os métodos baseados em estacionariedade, principalmente porque a sincronização de símbolo não é necessária. Não é necessária pois os métodos baseados em cicloestacionariedade usam como informação as funções de autocorrelação dos sinais recebidos, para as quais deslocamentos no tempo dos sinais considerados não alteram sua periodicidade.

### 5.3 Experimentos numéricos

Nesta seção apresentamos exemplos numéricos que foram criados com a intenção de mostrar as vantagens e desvantagens de se explorar a propriedade cicloestacionária dos sinais modulados em estimação DOA. As simulações foram feitas nas seguintes condições: i) nas transmissões usamos o alfabeto BPSK e filtro de transmissão com pulso meio-cosseno, para as fontes de interesse e interferentes; ii) o arranjo no receptor é do tipo ALU. A potência de transmissão das fontes de interesse e interferentes é a mesma, mas as taxas de símbolo são diferentes. Ajustamos as taxas de transmissão para  $T_0^{\text{INT}} = 1.2T_0^{\text{SDI}}$  em que  $T_0^{\text{SDI}}$  e  $T_0^{\text{INT}}$  são os períodos de símbolo das fontes de interesse e dos interferentes, respectivamente. A taxa de sobreamostragem é  $L = 8$  com respeito a  $T_0^{\text{SDI}}$ , isto é,  $T_s = T_0^{\text{SDI}}/8$ . Assim, imagine que a taxa de transmissão das fontes de interesse é ajustada para  $R_{\text{SDI}} = 6 \text{ M symbols/s} = 6 \text{ Mbps}$  (megabits por segundo). Então a taxa de transmissão dos interferentes é  $R_{\text{INT}} = 5 \text{ M symbols/s} = 5 \text{ Mbps}$  e a frequência de amostragem é  $f_s = 48 \text{ MHz}$ .

A primeira coisa a ser feita é definir uma frequência de ciclo  $\alpha_n$  adequada e, então, determinar a diferença de tempo  $\tau$  ótima na função de autocorrelação cíclica das fontes de interesse. A escolha do filtro de transmissão com pulso meio-cosseno foi feita pensando neste detalhe. Relembre que a autocorrelação cíclica para um sinal PAM complexo modulado por este pulso já foi analisada na Seção 2.2. A função de autocorrelação cíclica é mostrada na Figura 2.2. A partir desta função e escolhendo-se a frequência de ciclo  $\alpha_n = 2/T_0^{\text{SDI}}$ , a diferença de tempo ótima (no sentido do valor máximo da função) é  $\tau = 0$ . Estes valores serão usados para calcular as matrizes de autocovariância cíclicas dos *snapshots* coletados.

As simulações mostradas nesta seção supõem que o número de fontes não é conhecido *a priori* e deve ser estimado antes de se aplicar as técnicas de estimação DOA. Como na Seção 4.6.1, a análise diz respeito à resolução espacial e à capacidade.

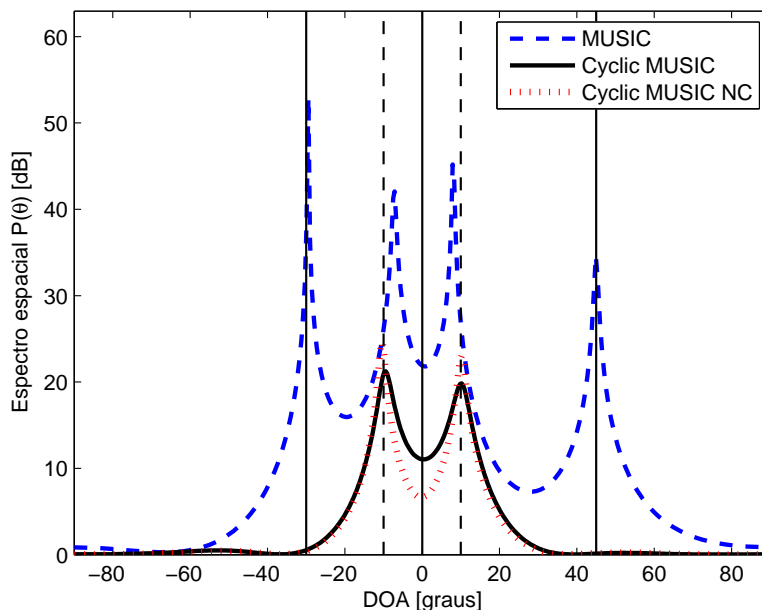


Figura 5.1: Espectro espacial enfatizando a capacidade de rejeição. Os verdadeiros ângulos das fontes de interesse são marcados pelas linhas verticais tracejadas e dos interferentes por linhas verticais contínuas.

No primeiro cenário, demonstramos a habilidade dos métodos cicloestacionários em suprimir interferentes. Um receptor com cinco antenas é usado na simulação. A análise de desempenho é feita através dos espectros espaciais dos algoritmos MUSIC, *Cyclic MUSIC* e *Cyclic MUSIC NC*, para duas fontes de interesse incidindo a  $-10$  e  $10$  graus, e três interferentes incidindo a  $-30$ ,  $0$  e  $45$  graus, sob uma condição de RSIR (relação sinal-interferente-ruído) de  $5$  dB. O resultado é mostrado na Figura 5.1. Assim como nos exemplos do caso de modelo baseado em estacionariedade apresentados na Seção 4.6, empregamos aqui o critério MDL em cada método para estimar o número de fontes. Como resultado, o conjunto MUSIC detectou quatro fontes pois o subespaço de sinal da matriz de covariância convencional  $\mathbf{R}_z = \mathbf{R}_z^{\alpha_n=0}(\tau = 0)$  é composto pelas fontes e interferentes. Em contraste, os métodos cíclicos detectaram somente duas fontes devido à característica de “filtragem” no cômputo das matrizes de covariância cíclicas. Observe que, neste cenário, o *Cyclic MUSIC* apresenta uma resolução espacial similar àquela do *Cyclic MUSIC NC*. O número de *snapshots* usado é  $K = 1600$ , correspondendo a 200 símbolos (das fontes de interesse) e o tempo de amostragem de  $KT_s = 33,33 \mu\text{s}$  (microsegundos). A posição das fontes deve permanecer inalterada durante este período.

Em um segundo exemplo adicionamos mais cinco fontes de interesse com a mesma taxa de transmissão usada no cenário anterior. As novas fontes incidem a  $-45$ ,  $-30$ ,  $25$ ,  $40$  e  $60$  graus. O resultado é mostrado na Figura 5.2. Novamente, o critério MDL usado no algoritmo MUSIC detectou

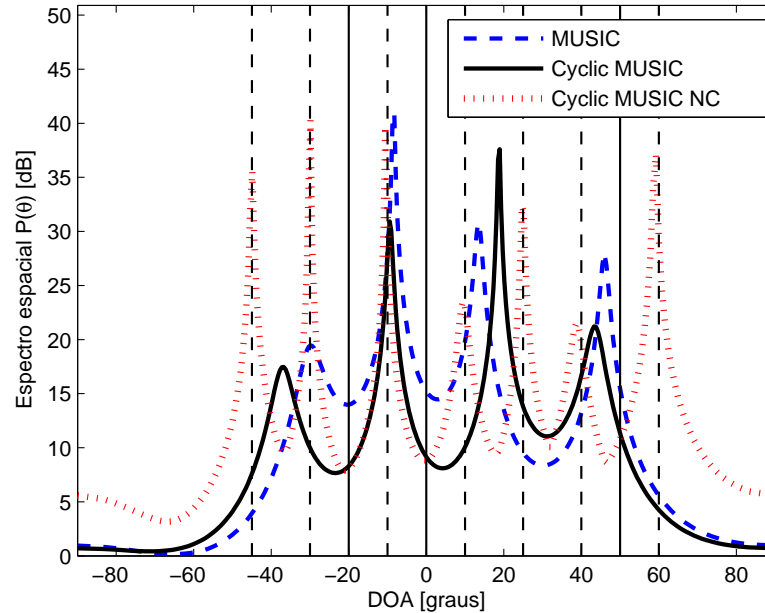


Figura 5.2: Espectro espacial enfatizando a capacidade dos métodos cíclicos. Os verdadeiros ângulos de chegada das fontes de interesse são marcados pelas linhas verticais tracejadas e os interferentes pelas linhas verticais contínuas.

quatro fontes em todos os ensaios executados, como esperado. O critério MDL para o *Cyclic MUSIC* também detectou quatro fontes. Esta limitação é exclusivamente devida ao número de sensores, contrastando com o MUSIC convencional, que, além de ser limitado pelo número de sensores, não tem meios para descartar os interferentes. O algoritmo *Cyclic MUSIC NC* foi capaz de detectar todas as sete fontes de interesse. A razão é que, para fontes BPSK,  $\mathbf{R}_b^{\alpha_n}(\tau) = \tilde{\mathbf{R}}_b^{\alpha_n}(\tau)$  e, conseqüentemente,  $\mathbf{R}_s^{\alpha_n}(\tau) = \tilde{\mathbf{R}}_s^{\alpha_n}(\tau)$ . Portanto, o *Cyclic MUSIC NC* alcança a capacidade máxima  $2(N - 1)$ , como discutido nas subseções precedentes. Note que o algoritmo *Cyclic MUSIC NC* é capaz de resolver todas as fontes de interesse.

## Capítulo 6

# Uma nova abordagem para estimação ML DOA no caso estacionário

Neste capítulo introduzimos uma solução baseada no critério da máxima verossimilhança para o problema de estimação DOA de sinais digitalmente modulados de banda-estreita restrito ao modelo estacionário de *snapshot* (3.21). A estratégia da solução consiste em transformar o problema de estimação em um problema de decisão. A motivação desta transformação está na dificuldade de se obter uma expressão em forma fechada para o estimador ML dos parâmetros desconhecidos, a saber, os ângulos de chegada dos sinais e seus respectivos deslocamentos de fase e amplitudes. Para realizar esta transformação, exploramos a natureza discreta dos sinais transmitidos pelas fontes. Num primeiro passo, utilizamos esta informação sobre o modelo de sinal para estimar o espaço do sinal nos dados recebidos, especificamente, os centróides. Com estas estimativas em mãos, geramos soluções candidatas para os parâmetros desconhecidos do modelo. Estes dois primeiros passos são fundamentados nas idéias do método *Clust-DOA* (Attux et al., 2007). Finalmente, submetemos esta família de candidatas a um processo de decisão utilizando como critério o princípio da máxima verossimilhança. O resultado da decisão é a estimativa do método proposto.

### 6.1 Método Proposto

Estamos interessados em estimar os parâmetros DOA ( $\theta$ ) a partir de um conjunto de *snapshots* que obedecem ao modelo (3.21). A partir da análise deste modelo, notamos na definição (4.41) uma estrutura parametrizada do espaço do sinal. Esta característica especial será explorada para projetar a técnica de estimação para os parâmetros DOA ( $\theta$ ) e os parâmetros indesejados ( $\alpha, \phi$ ). Vamos começar com a descrição dos centros como uma função dos parâmetros e dos símbolos recebidos. Esta relação é a base da solução proposta.

Antes de continuar, vamos definir alguns termos e quantidades. Iremos adotar o termo *centro* para denotar um escalar complexo no espaço do sinal enquanto o termo *centróide* é visto como um vetor complexo no espaço do sinal seguindo a definição (4.40). Seguindo esta convenção, a expressão

$$\mathbf{C}_M = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_P] = [\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N-1}]^T \quad (6.1)$$

relaciona os centros aos centróides, em que os centróides são os vetores  $\mathbf{c}_p \in \mathbb{C}^N$  e os centros da  $n$ -ésima antena são definidos pelos elementos do vetor  $\mathbf{y}_n \in \mathbb{C}^P$ .

De acordo com a relação (6.1) e com a definição do espaço de sinal (4.41), os centros são descritos pelas equações

$$y_p|_{n=0} = \sum_{m=1}^M g_m e^{j\phi_m} b_{m,p} \quad (6.2)$$

$$y_p|_{n=1, \dots, N-1} = \sum_{m=1}^M g_m e^{j\phi_m} e^{j2\pi f_c \tau_n(\theta_m)} b_{m,p}, \quad (6.3)$$

para  $p = 1, \dots, P$  e  $b_{m,p} \in \mathbb{A}$ . Escrevendo na forma matricial, temos

$$\mathbf{B}^T \mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.4)$$

em que  $\mathbf{B}$  foi definida em (4.41) e  $\mathbf{x}_n \triangleq [g_1 e^{j(2\pi f_c \tau_n(\theta_1) + \phi_1)}, \dots, g_M e^{j(2\pi f_c \tau_n(\theta_M) + \phi_M)}]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  é o vetor que carrega todos os parâmetros relacionados à  $n$ -ésima antena e os sinais  $s(k)$ . Denotamos  $\mathbb{A}_n$  como o conjunto de centros da  $n$ -ésima antena. Assim,  $\mathbf{y}_n \in \mathbb{A}_n^P$  e  $\mathbb{A}_n = \{y_1|_n, y_2|_n, \dots, y_P|_n\}$ .

No método *Clust-DOA* (Attux et al., 2007), as equações (6.2) e (6.3) são simplificadas pelas hipóteses: i) a potência recebida é a mesma para todas as fontes, isto é,  $\{g_m\}_{m=1}^M = g$  em que  $g \in \mathbb{R}$  não é necessariamente conhecida pelo receptor; ii) os deslocamentos de fase são iguais para todas as fontes e conhecidos pelo receptor, isto é,  $\{\phi_m\}_{m=1}^M = \phi$ , em que  $\phi \in \mathbb{R}$  é conhecido. Portanto, temos que  $\mathbf{\Gamma} = g e^{j\phi} \mathbf{I}$  de forma que a matriz dos centróides se reduz a  $\mathbf{C}_M = g e^{j\phi} \mathbf{A} \mathbf{B}$  e  $\mathbf{x}_n = g e^{j\phi} [e^{j2\pi f_c \tau_n(\theta_1)}, \dots, e^{j2\pi f_c \tau_n(\theta_M)}]^T$ .

Neste caso, as fases dos centros na antena de referência  $\mathbf{y}_0$  são conhecidos e esta informação é explorada para associar cada centro  $y_p|_n$  de  $\mathbf{y}_n$  ao respectivo vetor  $\mathbf{b}_p$  em  $\mathbf{B}$  para construir o sistema correto (6.4). Esta associação pode ser feita utilizando-se um critério de mínima distância entre os centros ideais (elementos de  $\mathbf{y}_0$ ) e os estimados (elementos de  $\hat{\mathbf{y}}_0$ ). É fato de (6.1) que as estimativas dos centros de cada antena  $\{\mathbf{y}_n\}_{n=0}^{N-1}$  estarão disponíveis se tivermos as estimativas dos centróides  $\{\mathbf{c}_p\}_{p=1}^P$ .

Assim, as estimativas DOA são obtidas resolvendo-se (6.4) em relação a  $\mathbf{x}_n$  e extraído-se os



ângulos da solução obtida  $\hat{\mathbf{x}}_n$  com um mapeamento inverso que depende da geometria do arranjo. Por exemplo, no caso de um arranjo linear uniforme com espaçamento entre elementos de meio comprimento de onda, temos que  $\tau_n(\theta_m) = \frac{n}{2f_c} \text{sen}(\theta_m)$  (Van Trees, 2001). Portanto,  $e^{j(2\pi f_c \tau_n(\theta_m))} = e^{jn\pi \text{sen}(\theta_m)}$  e a estimativa DOA é obtida com o mapeamento inverso

$$\hat{\theta}_m = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \arcsen((\arg[\hat{\mathbf{x}}_{n,m}] - \phi)/(n\pi)),$$

em que  $\arg[\cdot]$  é o operador elemento-a-elemento que extrai a fase de uma quantidade complexa (escalar, vetor ou matriz) e mapeia-a no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Em contraste, para o modelo geral tratado nesta tese, os centros na antena de referência ( $n = 0$ ) não são conhecidos devido ao escalamento e à rotação causada pelos parâmetros indesejados  $\{g_m\}$  e  $\{\phi_m\}$ , agora, desconhecidos. Portanto, não mais é possível relacionar cada centro  $y_p|_n$  à respectiva transmissão  $\mathbf{b}_p$  como feito no método *Clust-DOA*.

Felizmente, podemos distinguir os centros da antena de referência dos outros centros. Os centros no vetor  $\mathbf{y}_0$  contêm apenas os parâmetros indesejados de deslocamento de fase e amplitude, enquanto os centros das outras antenas  $\mathbf{y}_n$ , para  $n = 1, 2, \dots, N-1$ , contêm os parâmetros indesejados e mais os parâmetros DOA. Assim, se pudermos de alguma forma determinar o arranjo correto dos sistemas (6.4), então conseguiríamos separar a estimação dos deslocamentos de fase dos parâmetros DOA resolvendo-se duas classes similares de sistemas. A primeira classe envolve a solução do sistema (6.4) para  $n = 0$ , enquanto a segunda envolve a solução dos sistemas (6.4) para  $n = 1, 2, \dots, N-1$ .

Uma situação na qual é possível determinar o arranjo correto das equações é o caso supervisionado. Embora este não seja o caso de interesse do nosso trabalho, vamos explicar os mecanismos envolvidos na solução baseada em supervisão com o propósito de auxiliar a abordagem não-supervisionada apresentada adiante nesta seção. Com o conhecimento da sequência dos símbolos transmitidos, o arranjo correto do sistema (6.4) é direto uma vez que cada centro estimado  $y_p|_n$  está, sem ambiguidade, associado ao respectivo vetor  $\mathbf{b}_p$ . Com isto, as estimativas de  $\mathbf{g}$  e  $\phi$  são obtidas com os mapeamentos simples

$$\hat{\phi} = \arg[\hat{\mathbf{x}}_0], \quad (6.5)$$

$$\hat{\mathbf{g}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \text{abs}[\hat{\mathbf{x}}_n] \quad (6.6)$$

e não dependem da geometria do arranjo. Usando (6.5) a estimativa de  $\theta$  é então obtida através do

mapeamento

$$\hat{\theta}_m = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \arcsen \left( \frac{\arg[\hat{x}_{n,m}] - \hat{\phi}_m}{n\pi} \right), \quad (6.7)$$

para  $m = 1, \dots, M$ , no caso de um arranjo do tipo ALU. A solução para outros tipos de geometrias é facilmente obtida e depende somente da função específica  $\tau_n(\theta_m)$ .

Note que a estimação de  $\phi$  não entra em processo de média ao longo de todos os sensores. A razão está na impossibilidade de se distinguir a fase  $\phi_m$  da frequência angular  $f_c \tau_n(\theta_m)$  quando linearmente combinadas no argumento de uma exponencial complexa sem conhecimento *a priori* sobre uma delas.

Em uma breve análise desta solução, observamos que, dada a estimativa do espaço do sinal  $\hat{\mathbf{C}}_M = \hat{\mathbf{Y}}^T$ , o restante de procedimento é determinístico. Isto significa que o erro de estimação em  $\hat{\mathbf{Y}}$  determina a qualidade da estimativa DOA.

*Consideração 1.* Seja  $\hat{\mathbf{y}}_n = \mathbf{y}_n + \boldsymbol{\eta}$  uma estimativa de mínima variância não-polarizada (MVU, do inglês *minimum variance unbiased*) de  $\mathbf{y}_n$ , em que  $\boldsymbol{\eta}$  representa o erro de estimação. Se  $\boldsymbol{\eta}$  é um processo assintoticamente gaussiano circular de média zero, então o estimador  $\hat{\mathbf{x}}_n = (\mathbf{B}^* \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}^* \hat{\mathbf{y}}_n$  produz estimativas de máxima verossimilhança de  $\mathbf{x}_n$ .

A prova segue prontamente dos seguintes fatos: 1) o estimador de mínima variância é o estimador de máxima verossimilhança para o modelo gaussiano linear (veja (Kay, 1993, Capítulo 4)), ou seja,  $\hat{\mathbf{y}}_n$  é uma estimativa de máxima verossimilhança de  $\mathbf{y}_n$ ; 2) como  $\hat{\mathbf{y}}_n$  é uma estimativa ML de  $\mathbf{y}_n$ , a propriedade da invariância garante que  $\hat{\mathbf{x}}_n = f(\hat{\mathbf{y}}_n)$  é uma estimativa ML de  $\mathbf{x}_n$ , na qual  $f(\cdot)$  neste caso é a transformação linear  $(\mathbf{B}^T)^\dagger = (\mathbf{B}^* \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}^*$ , onde  $(\cdot)^\dagger$  denota o operador de pseudo-inversão. Concluindo,  $\hat{\mathbf{x}}_n$  é uma estimativa ML de  $\mathbf{x}_n$  pelo fato de  $\hat{\mathbf{y}}_n$  ser uma estimativa ML de  $\mathbf{y}_n$ .

Sob estas condições, o método *Clust-DOA* forneceria estimativas ML dos ângulos  $\boldsymbol{\theta}$  extraídos de  $\hat{\mathbf{x}}_n$ , suportado pela propriedade da invariância da estimação ML.

Logicamente, a Consideração 1 só será válida se o estimador dos centróides  $\mathbf{C}_M = \mathbf{Y}^T$  for um estimador MVU. Até onde sabemos, não há nenhum método na literatura que garanta este resultado.

*Nota 1.* De (6.4), é fácil verificar que dois sensores são (teoricamente) suficientes para estimar os ângulos de qualquer número  $M$  de fontes discretas. Isto é verdade porque o sistema de equações sempre será sobredeterminado, pois, na medida que o número de centros  $P = \mathcal{L}^M$  é sempre maior que o número de fontes  $M$ , o número de colunas na matriz  $\mathbf{B}$  é sempre maior que o número de linhas.

*Nota 2.* O número mínimo de *snapshots*  $K_{min}$  para estimar os centros é definido pela cardinalidade do espaço de sinal  $P = \mathcal{L}^M$ . Porém, com este valor não há processo de média na estimação e não há garantias que todos  $\mathcal{L}^M$  centróides estão representados no conjunto de dados.

Agora estamos prontos para expor a idéia da nossa proposta para o caso em que  $g_m$  e  $\phi_m$  são desconhecidos e não há supervisão. Mantendo em mente a solução prévia, podemos imaginar uma estratégia para estimar todos os parâmetros em uma forma não-supervisionada. Como não é possí-

vel arranjar efetivamente os centros estimados das antenas de acordo com os símbolos transmitidos, podemos gerar soluções candidatas para todas as combinações possíveis dos elementos de  $\mathbf{y}_n$  no sistema linear (6.4). Pelo fato de não termos nenhuma informação a respeito do melhor arranjo, todas as combinações são equiprováveis. Então, a melhor solução pode ser encontrada por um processo de seleção que, de certa forma, assemelha-se com técnicas consagradas de estimação como o método de Kumaresan-Tufts (Kumaresan & Tufts, 1982) e MODEX (Gershman & Stoica, 1999) ou mesmo algoritmos de computação natural (Castro, 2006; Castro & Timmis, 2002).

Neste sentido, a maximização da função de verossimilhança (4.43) é ótima como estratégia de decisão. Portanto, o método de estimação engloba os seguintes procedimentos:

**Passo 1.** Estimar os centróides ( $\mathbf{C}_M = \mathbf{Y}^T$ ).

**Passo 2.** Definir todas as combinações das linhas da matrix  $\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{\mathbf{y}}_0, \hat{\mathbf{y}}_1, \dots, \hat{\mathbf{y}}_{N-1}]$ , montar e resolver com respeito a  $\mathbf{x}_n$  todo sistema da forma

$$\mathbf{B}^T \mathbf{x}_n^{(i)} = \hat{\mathbf{y}}_n^{(i)}, \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, N-1 \\ i = 1, 2, \dots, N_c \end{cases}, \quad (6.8)$$

o qual pode ser expresso na forma compacta

$$\mathbf{B}^T \mathbf{X}^{(i)} = \hat{\mathbf{Y}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N_c, \quad (6.9)$$

em que  $N_c = \mathcal{L}^M!$  é o número de permutações possíveis de  $P = \mathcal{L}^M$  elementos, em que  $(\cdot)!$  denota a função fatorial. Como a matrix  $\mathbf{B}$  é pré-definida e mantida igual para todas  $N_c$  disposições, e a solução do sistema linear correspondente é uma simples operação de pseudo-inversão, precisamos calcular a matrix pseudo-inversa  $(\mathbf{B}^T)^\dagger \triangleq (\mathbf{B}^* \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}^*$  somente uma vez.

**Passo 3.** Usando as matrizes estimadas  $\hat{\mathbf{X}}^{(i)} = (\mathbf{B}^T)^\dagger \hat{\mathbf{Y}}^{(i)}$  para  $i = 1, \dots, N_c$ , extrair as soluções candidatas de amplitude, deslocamento de fase e parâmetros DOA usando as equações (6.6), (6.5) e (6.7), respectivamente. Armazenar cada conjunto  $\hat{\boldsymbol{\psi}}^{(i)}$  ( $\boldsymbol{\psi}$  foi definido em (4.39)) associado àquele índice  $i$ . A variância do ruído  $\sigma_n^2$  é estimada no Passo 1 calculando-se a média das variâncias de todos os  $N \times \mathcal{L}^M$  centros estimados.

**Passo 4.** Aplicar cada solução candidata  $\hat{\boldsymbol{\psi}}^{(i)}$  na função de verossimilhança (4.43) e decidir pelo índice  $i$  que a maximiza.

Um procedimento de clusterização pode ser usado para estimar os centróides  $\mathbf{c}_p$  do espaço de sinal  $\mathbf{C}_M$  no Passo 1. Outros métodos cegos também podem ser empregados. Nos experimentos numéricos

apresentados na Seção 6.2, adotamos uma poderosa técnica de clusterização chamada ILS (do inglês *Iterated Local Search* (Merz, 2003)). Outra técnica interessante é o bem conhecido algoritmo  $k$ -means (Duda et al., 2000). A estratégia de clusterização é adequada para executar o Passo 1 porque, do ponto de vista estatístico, a clusterização tem como objetivo realizar um processo de média no espaço dos dados de entrada cujo resultado seja tão próximo quanto possível da esperança estatística posta em (4.40). Uma descrição detalhada do método ILS usado nos nossos experimentos pode ser encontrada em (Attux et al., 2007).

De certa forma conectado à nossa estratégia representada pelos Passos 1 a 4, em (Anand, Mathew, & Reddy, 1995) Anand *et al.* propuseram uma estratégia baseada em clusterização para separação cega de fontes do tipo BPSK, na qual a matriz de resposta do arranjo  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  é estimada. Este resultado poderia ser usado para estimar os parâmetros DOA de maneira similar ao segundo passo do algoritmo em (Leshem & Veen, 1999). No entanto, o método desenvolvido por Anand *et al.* destina-se a receptores coerentes em fase. Este não é o caso do nosso trabalho e, desta forma, o método não é aplicável aqui.

O montante de computação requerida para executar o algoritmo proposto depende pesadamente do método empregado no Passo 1. Supondo que o algoritmo de clusterização  $k$ -means seja escolhido, o limite superior para a complexidade computacional é  $O(K^{N\mathcal{L}^M})$  (Inaba, Katoh, & Imai, 1994). Outros algoritmos de clusterização irão geralmente apresentar uma complexidade computacional mais alta. Com relação aos passos restantes: i) a geração (Passo 2) das soluções candidatas  $\hat{\mathbf{X}}^{(i)}$ , para  $i = 1, \dots, N_c$ , tem complexidade computacional  $O(N_c M \mathcal{L}^M)$ ; ii) a extração (Passo 3) das respectivas estimativas candidatas  $\hat{\boldsymbol{\psi}}^{(i)}$  requer  $O(N_c M N)$ ; iii) a seleção no Passo 4 tem complexidade computacional  $O(N_c N \mathcal{L}^M K)$ .

Com relação à complexidade computacional, há uma importante propriedade relacionada à natureza do problema que deve ser salientada. Se o alfabeto de transmissão é tido como um conjunto de símbolos simétricos de média zero (como nas modulações PSK, PAM ou QAM), existirá simetria entre os centros dos clusters (conjuntos  $\{\mathbb{A}_n\}_{n=0}^{N-1}$ ) no espaço de entrada do receptor e, conseqüentemente, um significativo esforço computacional pode ser eliminado, como será discutido a seguir.

### 6.1.1 Redução da complexidade computacional

Para alfabetos de transmissão simétricos, haverá  $Q \triangleq \mathcal{L}^M/2$  pares de centros simétricos (em relação à origem) em cada conjunto  $\mathbb{A}_n$ , para  $n = 0, \dots, N-1$ . Estes conjuntos de centros são estimados e usados no segundo passo do algoritmo, no qual  $N_c$  sistemas geradores de candidatas (6.9) são formados. Cada um dos sistemas lineares em (6.8) é sobredeterminado com  $\mathcal{L}^M - M$  graus de liberdade, pois o posto da matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M \times \mathcal{L}^M}$  é igual a  $M$ . Assim, a solução com respeito a  $\mathbf{x}_n^{(i)}$  pode ser calculada usando somente  $M$  equações lineares independentes sem perda de generalidade.

A escolha por  $M$  colunas linearmente independentes da matriz  $\mathbf{B}$  para resolver os sistemas implica que pares de centros simétricos não podem estar no lado direito da igualdade, porque simetria, neste caso, implica dependência linear. Concluindo, esforço computacional pode ser diminuído eliminando-se as combinações contendo centros estimados aproximadamente simétricos porque: i) o número de sistemas geradores de candidatas reduz de  $\mathcal{L}^M!$  para  $(\mathcal{L}^M!/((M!(\mathcal{L}^M - M)!))/2)$ ; e ii) a dimensão do sistema reduz de  $\mathcal{L}^M$  para  $M$  equações.

No Quadro 1 apresentamos o pseudocódigo de um algoritmo simples projetado para suprimir disposições indesejadas.

---

**Quadro 1** Algoritmo para redução da dimensão e número de candidatas.  $N_r = \mathcal{L}^M!/((M!(\mathcal{L}^M - M)!)$  e  $N_p = M!/(2!(M - 2)!)$ .  $\text{Comb}(\mathbf{a}, b)$  é uma função que gera todas as combinações de  $b$  elementos do vetor  $\mathbf{a}$  e armazena-as nas colunas de uma matriz.  $\text{Soma}(\mathbf{a})$  é uma função que faz a somatória dos elementos do vetor  $\mathbf{a}$  e  $\text{abs}(c)$  retorna a magnitude do número complexo  $c$ .

---

```

1: Escolha arbitrariamente qualquer  $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ 
2:  $\mathbf{C} \leftarrow \text{Comb}(\hat{\mathbf{y}}_n, M)$  //  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times N_r}$ 
3:  $q \leftarrow 0$ 
4: Para  $i = 1 : N_r$  faça
5:    $\mathbf{C}_p \leftarrow \text{Comb}(\mathbf{C}(:, i), 2)$  //  $\mathbf{C}_p \in \mathbb{C}^{2 \times N_p}$ 
6:   Para  $j = 1 : N_p$  faça
7:      $\kappa \leftarrow \text{abs}(\text{Soma}(\mathbf{C}_p(:, j)))$ 
8:     Se  $\kappa < \epsilon$  então
9:       sair do loop atual //  $\epsilon$  é um limiar de tolerância
10:    Fim Se
11:    Se  $j = N_p$  então
12:       $q \leftarrow q + 1$ 
13:       $\mathbf{Y}_s(1 : M, n + 1, q) \leftarrow \mathbf{C}(:, i)$ 
14:       $\mathbf{v}(q) \leftarrow i$  // armazenamento do índice
15:    Fim Se
16:  Fim Para
17: Fim Para
18: Para  $l = 0 : N - 1$  faça
19:  Se  $l \neq n$  então
20:     $\mathbf{C} \leftarrow \text{Comb}(\hat{\mathbf{y}}_l, M)$ 
21:    Para  $m = 1 : q$  faça
22:       $\mathbf{Y}_s(1 : M, l + 1, m) \leftarrow \mathbf{C}(:, \mathbf{v}(m))$ 
23:    Fim Para
24:  Fim Se
25: Fim Para

```

---

O algoritmo retorna um tensor  $\mathbf{Y}_s \in \mathbb{C}^{M \times N \times N_r/2}$  ( $N_r$  é definido no Quadro 1), contendo as candidatas sobreviventes que substituirão as matrizes  $\hat{\mathbf{Y}}^{(i)}$  em (6.9). Mais precisamente, (6.9) é substituída

por

$$\mathbf{B}_r^T \mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{Y}_s^{(i)} \quad i = 1, \dots, N_r/2 \quad (6.10)$$

na qual  $\mathbf{B}_r \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é uma matriz de posto completo composta por  $M$  colunas linearmente independentes de  $\mathbf{B}$ . Relacionando (6.10) ao algoritmo apresentado no Quadro 1, temos  $\mathbf{Y}_s^{(i)} = \mathbf{Y}_s(:, :, i)$ , onde  $:$  denota que todos os elementos da dimensão em questão são tomados, tal que  $\mathbf{Y}_s^{(i)} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ . Consequentemente, a complexidade computacional passa a ser: i) Passo 2 -  $O(N_r M^2)$ ; ii) Passo 3 -  $O(N_r M N)$ ; e iii) Passo 4 -  $O(N_r N \mathcal{L}^M K)$ .

### 6.1.2 Sensibilidade à calibração do arranjo

Se o arranjo está descalibrado, podemos modelar os desajustes (imperfeições nos circuitos de RF, geometria do arranjo etc.) como variáveis complexas, possivelmente diferentes para cada antena do arranjo. Cada uma destas variáveis (agora parâmetros do modelo) é considerada estática (de valor fixo) durante o tempo de amostragem correspondente ao bloco de  $K$  *snapshots*. Empacotando estes desajustes em parâmetros  $\gamma_n \in \mathbb{C}$ , para  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , os centros (6.2) e (6.3) são reescritos na forma

$$\begin{aligned} \bar{y}_p|_{n=0} &= \gamma_0 \sum_{m=1}^M g_m e^{j\phi_m} b_{m,p}, \\ \bar{y}_p|_{n=1, \dots, N-1} &= \gamma_n \sum_{m=1}^M g_m e^{j\phi_m} e^{j2\pi f_c \tau_n(\theta_m)} b_{m,p}, \end{aligned}$$

para  $p = 1, \dots, P$ . Definindo  $g_m^{(n)} \triangleq \text{abs}(\gamma_n) g_m$  e  $\phi_m^{(n)} \triangleq \arg(\gamma_n) + \phi_m$  temos as expressões equivalentes

$$\bar{y}_p|_{n=0} = \sum_{m=1}^M g_m^{(0)} e^{j\phi_m^{(0)}} b_{m,p}(k), \quad (6.11)$$

$$\bar{y}_p|_{n=1, \dots, N-1} = \sum_{m=1}^M g_m^{(n)} e^{j\phi_m^{(n)}} e^{j2\pi f_c \tau_n(\theta_m)} b_{m,p}. \quad (6.12)$$

As equações (6.11) e (6.12) são similares às originais (6.2) e (6.3). A principal diferença é que os parâmetros de amplitude e deslocamento de fase dos sinais recebidos são diferentes para cada antena. Diferentes ganhos (magnitudes) para cada antena são aceitáveis para a abordagem proposta, mas diferentes fases não. A razão está na necessidade de se estimar primeiramente os parâmetros de deslocamento de fase, usando a antena de referência, para adiante usá-los no cálculo dos parâmetros DOA  $\theta$ . Contudo,  $\phi_m^{(0)} \neq \phi_m^{(n)}$  para  $n \neq 0$ . Consequentemente, os parâmetros DOA não podem

ser separados dos parâmetros de fase. Esta dificuldade pode ser superada somente se  $\{\phi^{(n)}\}$  para  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  forem conhecidos *a priori*, ou  $\arg(\gamma_n) = \gamma_0, \forall n$ .

Com relação ao ganho de cada antenna, podemos estimá-lo de forma semelhante àquela mostrada em (6.6) através das expressões

$$\mathbf{g}^{(n)} = \text{abs}[\hat{\mathbf{x}}_n], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (6.13)$$

na qual  $\mathbf{g}^{(n)} = [g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \dots, g_M^{(n)}]^T \in \mathbb{R}^M$ .

Também há uma pequena mudança na função de verossimilhança (4.43) usada no processo de decisão pela estimativa candidata mais provável de  $\boldsymbol{\theta}$ . Esta mudança ocorre na descrição da matriz  $\mathbf{A}$ , que agora é composta pelos novos vetores de direção  $\bar{\mathbf{a}}(\theta_m, \boldsymbol{\zeta}_m) = \boldsymbol{\zeta}_m \odot \mathbf{a}(\theta_m)$ , com  $\boldsymbol{\zeta}_m = [g_m^{(0)}, g_m^{(1)}, \dots, g_m^{(N-1)}]^T \in \mathbb{R}^N$  e, também na matriz  $\boldsymbol{\Gamma}$ , que agora é dada por  $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}(e^{j\phi_1}, \dots, e^{j\phi_M})$ . Estas mudanças na função de verossimilhança podem ser inferidas das semelhanças entre o novo modelo de dados  $\mathbf{z}[k] = E_p \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{b}[k] + \mathbf{w}[k]$ , onde  $\bar{\mathbf{A}} \triangleq [\bar{\mathbf{a}}(\theta_1, \boldsymbol{\zeta}_1), \bar{\mathbf{a}}(\theta_2, \boldsymbol{\zeta}_2), \dots, \bar{\mathbf{a}}(\theta_M, \boldsymbol{\zeta}_M)]$ , e aquele descrito em (3.21). Com estas mudanças, o procedimento de quatro passos introduzido anteriormente permanece plenamente válido.

A presente abordagem pode também ser estendida ao caso no qual cada elemento do arranjo apresenta um padrão de irradiação anisotrópico, ou seja, quando o ganho em magnitude depende do ângulo de incidência. Em tal caso, cada sinal terá a amplitude determinada pela sua própria potência na recepção e pelo ganho do elemento em questão, que é função da direção de incidência. Denotando esta amplitude por  $v_n(\theta)$ , de forma semelhante ao caso anterior, os centros de cada antenna são escritos exatamente na mesma forma que aqueles em (6.11) e (6.12). A diferença está exclusivamente na descrição dos parâmetros de amplitude e deslocamento de fase de cada antenna, que são agora dados por  $g_m^{(n)} \triangleq g_m^{(n)}(\theta_m) = \text{abs}(v_n(\theta_m))g_m$  e  $\phi_m^{(n)} \triangleq \phi_m^{(n)}(\theta_m) = \arg(v_n(\theta_m)) + \phi_m$ .

Novamente, a presença dos desajustes de fase não é permitida pela mesma razão do caso anterior. A principal limitação que esta restrição impõe na prática é a necessidade dos elementos do arranjo possuírem linhas de atraso e estágios de amplificação idênticos. Com relação aos diferentes parâmetros de amplitude  $g_m^{(n)}$ , estes podem ser estimados usando-se (6.13). Isto é possível porque o processo de estimação de  $g_m^{(n)}$  e  $\theta_m$  gera soluções separadas.

De fato, a consideração de elementos anisotrópicos no arranjo não afeta a funcionalidade do procedimento de estimação proposto, uma vez que o modelo dos centros é algebricamente idêntico do ponto de vista da estimação.



## 6.2 Experimentos numéricos

O desempenho do método proposto foi avaliado em três diferentes cenários para o esquema de modulação BPSK ( $\mathcal{L} = 2$ ). Os cenários foram escolhidos com o propósito de avaliar o potencial da proposta com respeito à resolução espacial, capacidade e acurácia das estimativas, comparando-a com estimadores e limitantes relevantes.

### 6.2.1 Acurácia

No primeiro cenário, um arranjo com três antenas foi empregado para estimar os parâmetros DOA de dois sinais independentes ( $N = 3, M = 2$ ). O desempenho da técnica proposta, aqui denominada DET-DS (do inglês, *Direction Estimation Technique for Discrete Sources*), é comparado com outros cinco estimadores: ESPRIT (Roy, 1987), MODE (Stoica & Sharman, 1990), SBDOA (Wang et al., 2006), Root-MUSIC NC (Chargé et al., 2001a) e COMET NC (Delmas, 2004). O desempenho é avaliado com respeito à RSR e ao número de *snapshots*.

Considere primeiro que o número de *snapshots* é fixo para analisarmos o comportamento em função da RSR. A relação sinal-ruído é definida como

$$\text{RSR} = 10 \log \left( \frac{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g_m^2}{\sigma_n^2} \right) \quad (\text{dB}). \quad (6.14)$$

O conjunto de dados é formado por  $100 \times L^M = 400$  *snapshots*, indicando que aproximadamente 100 amostras por centro são consideradas. Os experimentos foram realizados com 1000 ensaios independentes e o valor adotado para o parâmetro de tolerância, relativo à eliminação dos centros simétricos na redução da carga computacional, foi de  $\epsilon = 0,2$  (veja Quadro 1). A qualidade de estimação do método não é afetada por este limiar se o intervalo considerado na escolha do seu valor for adequado. Valores adequados são da ordem ou menores que o desvio padrão do ruído  $\sigma_n$  porque a densidade de dados recebidos no entorno dos centros é inversamente proporcional ao valor deste parâmetro. Desta forma, uma heurística para a escolha deste valor é  $\epsilon \leq \kappa \sqrt{\hat{\sigma}_n^2}$ , com  $\kappa \in \{1, 2, 3\}$ .

A Figura 6.1 mostra o resultado da simulação para este cenário, no qual os sinais incidem com ângulos de 0 e +4 graus. Os valores dos parâmetros de deslocamento de fase e amplitude são ajustados para  $\phi = [\pi/10; \pi/10 + 0,01]^T$  rad e  $\mathbf{g} = [0,8; 1,2]^T$ , respectivamente. Os erros de estimação são dados em termos da raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) entre o verdadeiro  $\theta_1$  e sua respectiva estimativa. Da Figura 6.1, podemos observar que o método DET-DS atinge uma REQM consideravelmente menor para todos os valores de RSR quando comparado com os métodos baseados no modelo gaussiano circular (ESPRIT e MODE), que têm desempenhos similares. Note que estes métodos são limitados assintoticamente pelo CRB para fontes gaussianas circulares (denotado



por CRB CG), como esperado. Podemos também observar que o DET-DS tem uma variância menor que aquela dos métodos baseados em estatísticas de segunda-ordem para fontes não-circulares (root-MUSIC NC e COMET NC) e que o CRB para fontes gaussianas não-circulares (Delmas & Abeida, 2004) (denotado por CRB NCG). Para uma REQM de 0,01 rad, o ganho com relação aos estimadores baseados no modelo gaussiano circular é de aproximadamente 17 dB de RSR, e em relação aos estimadores baseados em segunda-ordem para fontes não-circulares, o ganho chega a aproximadamente 8 dB de RSR.

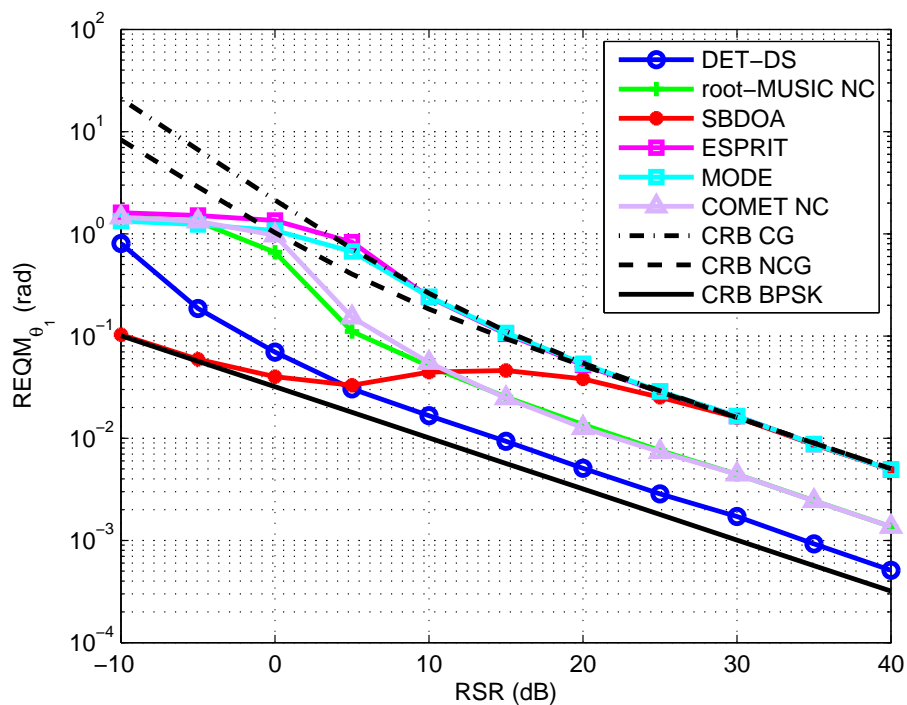


Figura 6.1: REQM para sinais BPSK incidindo com ângulos de 0 e 4 graus.  $\Delta\phi = 0,01$  rad e  $\mathbf{g} = [0,8; 1,2]^T$ .

Apesar do bom resultado, o estimador DET-DS não atingiu o limitante de Cramér-Rao para fontes BPSK (CRB BPSK). Isto significa que a estimação dos centróides ( $\mathbf{C}_M = \tilde{\mathbf{Y}}^T$ ) executada pelo algoritmo de clusterização não alcançou a mínima variância, como aquela que seria obtida com o respectivo estimador ML.

O padrão de comportamento do método SBDOA é o mesmo daquele descrito na análise da simulação numérica apresentada na Seção 4.6 referente à Figura 4.4.

A Figura 6.2 mostra o comportamento dos métodos anteriores para o mesmo cenário da Figura 6.1, mas com a RSR fixa em 10 dB e o número de *snapshots* variando de 10 a milhares de *snapshots*. Os

comportamentos assintóticos para todos os métodos são muito similares àqueles observados na Figura 6.1. Um fato impressionante é que o erro de estimação obtido pelo DET-DS permanece próximo ao CRB BPSK mesmo para poucos *snapshots*. Em uma comparação entre os métodos, tome como exemplo uma REQM de 0,08 rad. Enquanto o DET-DS requer aproximadamente 20 *snapshots* para alcançar esta REQM, os métodos de segunda-ordem baseados em não-circularidade requerem aproximadamente 200 *snapshots* e os métodos baseados no modelo gaussiano circular requerem aproximadamente 5000 *snapshots*.

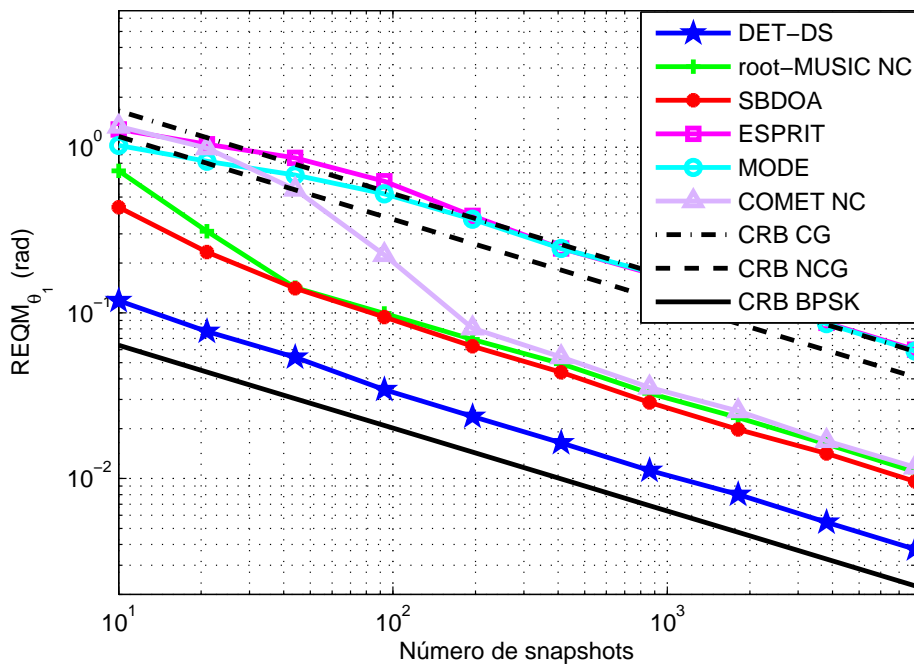


Figura 6.2: REQM para sinais BPSK incidindo com ângulos de 0 e 4 graus.  $\Delta\phi = 0,01$  rad e  $\mathbf{g} = [0,8; 1,2]^T$ .

## 6.2.2 Resolução

No segundo cenário, avaliamos a resolução dos estimadores variando a separação angular de duas fontes e analisando o comportamento da respectiva  $REQM(\theta_1)$ . Uma das fontes é mantida em  $\theta_1 = 0$  rad e a outra em  $\theta_2 = \Delta\theta$  rad. A vantagem desta forma de análise, especialmente com esta configuração dos ângulos, é que ambos limite físico para a separação das fontes e limite de resolução estatística (SRL) podem ser explorados na sua plenitude para definir quando os resultados dos estimadores são significativos e confiáveis. Este ponto de vista geralmente não é evidenciado na análise assintótica (RSR e número de amostras).

O limite físico do arranjo, representando a máxima separação angular entre as fontes, é dado por  $\Delta\theta_{max} = \pi$  rad. O SRL é dado pela igualdade em (4.47), ou seja,  $\Delta\theta_{min} = (Kre)^{-1/2}$ . Desta forma, a separação das fontes  $\Delta\theta$  deve estar dentro do intervalo entre estes dois limites para as estimativas serem *significativas e confiáveis*. Significativas porque não podemos ter fisicamente uma fonte localizada fora do espaço do parâmetro angular. Confiável porque somente para  $\Delta\theta \geq \Delta\theta_{min}$  há a possibilidade de resolução.

É importante repetir que o CRB é um limitante local e, como tal, não leva em consideração os erros grosseiros que ocorrem para RSRs baixas, onde a ambiguidade é pronunciada. Consequentemente, a SRL é um limitante local, válido somente para RSRs altas.

Na Figura 6.3, mostramos os resultados da simulação para um cenário em que o arranjo possui três antenas, no qual uma RSR de 20 dB foi considerada na avaliação da REQM das estimativas de  $\theta_1$  em relação à separação angular entre as fontes. Os mesmos valores dos parâmetros de deslocamento de fase e amplitude, bem como o número de *snapshots* do primeiro cenário, são usados aqui. Os resultados são mostrados em termos do limite de resolução de Fourier  $2\pi/N$  (CRF, Célula de Resolução de Fourier), o qual é comumente usado na literatura<sup>1</sup> como base de comparação para os limites de resolução de métodos de alta-resolução.

Na Figura 6.3, a região R1 corresponde a  $\Delta\theta > \pi$  indicando que uma das fontes está localizada fora do espaço dos parâmetros DOA e, portanto, a região é *impossível*. Nesta região, o desempenho dos estimadores não tem significado físico, apenas matemático. A região R2 é a região que nenhum estimador não-polarizado pode alcançar (em um cenário de sinais BPSK), porque esta é delimitada pelo CRB para sinais BPSK. Na região R3, não há resolução entre as fontes porque a separação entre elas é menor que o SRL. Na região R4, os estimadores são capazes de resolver as duas fontes, a respectiva separação é permitida e a variância do erro de estimação é atingível.

Analisando o desempenho dos estimadores na região R4, observamos que aqueles baseados no modelo gaussiano circular e os baseados em segunda-ordem para sinais não-circulares são afetados pela separação entre as fontes, enquanto o estimador DET-DS apresenta aproximadamente a mesma variância no erro de estimação ao longo de todo espaço permitido. Note que o comportamento do DET-DS é aproximadamente o mesmo que aquele do CRB BPSK, o qual é independente de  $\Delta\theta$ , uma vez que o  $i$ -ésimo elemento na diagonal principal da matriz de covariância  $\text{CRB}_{\text{BPSK}}^{\text{HSNR}}(\theta)$  depende somente do respectivo parâmetro  $\theta_i$ . A dependência da separação angular  $\Delta\theta$  para o CRB CG e o CRB NCG são bem conhecidas (veja (Delmas & Abeida, 2004) para mais detalhes).

Um comportamento similar ocorre com respeito à separação  $\Delta\phi$  nos valores dos parâmetros de deslocamento de fase. Isto significa que, enquanto os estimadores baseados no modelo gaussiano circular e os baseados em segunda-ordem para sinais não-circulares são afetados pela separação de fase

<sup>1</sup>Dentre as referências mais relevantes destacamos (Smith, 2005) e (H. B. Lee, 1992).

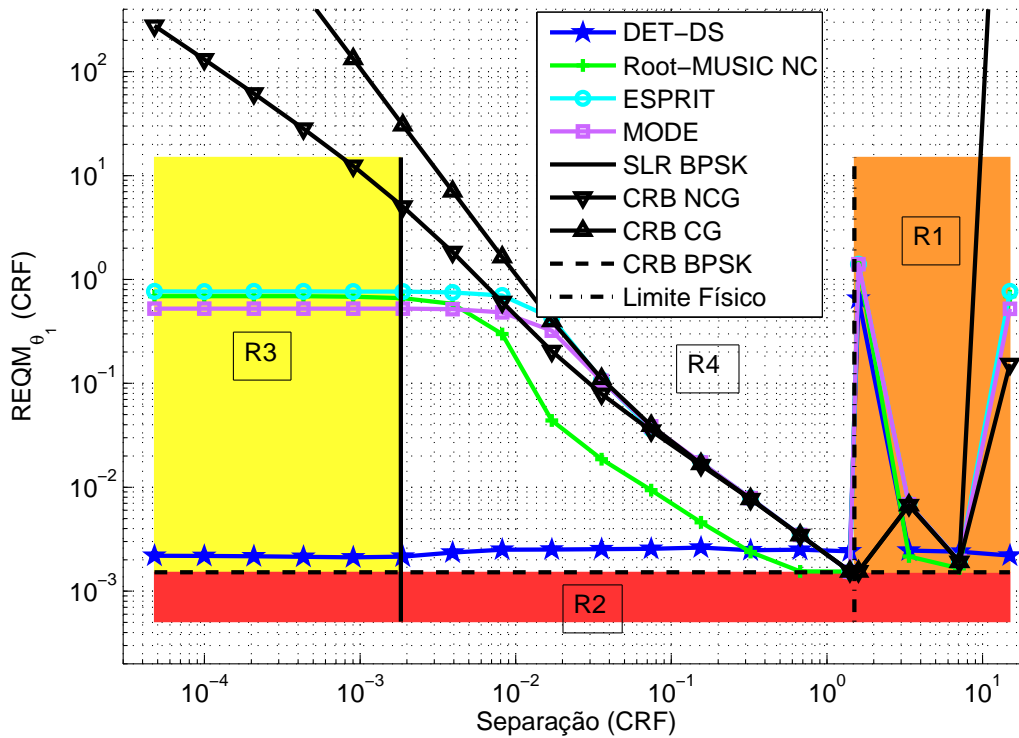


Figura 6.3: REQM da estimativa de  $\theta_1$  versus separação angular para 20 dB em termos da Célula de Resolução de Fourier (CRF)  $2\pi/N$  rad.

$\Delta\phi$ , o estimador DET-DS bem como o CRB BPSK não são. Como ilustração deste fato, mostramos na Figura 6.4 a razão  $r_1(\theta_1) \triangleq \text{REQM}_{\theta_1}^{\text{DET-DS}} / \text{REQM}_{\theta_1}^{\text{root-MUSIC NC}}$  como função da separação entre as fontes para três valores da separação de deslocamento de fase  $\Delta\phi$ . Como podemos observar, a diferença de desempenho dos estimadores diminui à medida que a separação de fase aumenta. Também, à medida que a separação entre as fontes aumenta, os desempenhos tendem a ser aproximadamente os mesmos.

### 6.2.3 Capacidade

No último cenário, um arranjo com duas antenas é usado para estimar os parâmetros DOA de quatro fontes BPSK, uma situação que não poderia ser gerenciada por nenhum dos outros estimadores não-supervisionados mencionados. Os estimadores baseados no modelo gaussiano circular são capazes de detectar até  $M_{max} = N - 1$  fontes devido às restrições intrínsecas ao modelo de sinal. Os estimadores baseados em estatísticas de segunda-order para sinais não-circulares são capazes de detectar até  $M_{max} = 2(N - 1)$  fontes, uma vez que o modelo é estendido para levar em considera-

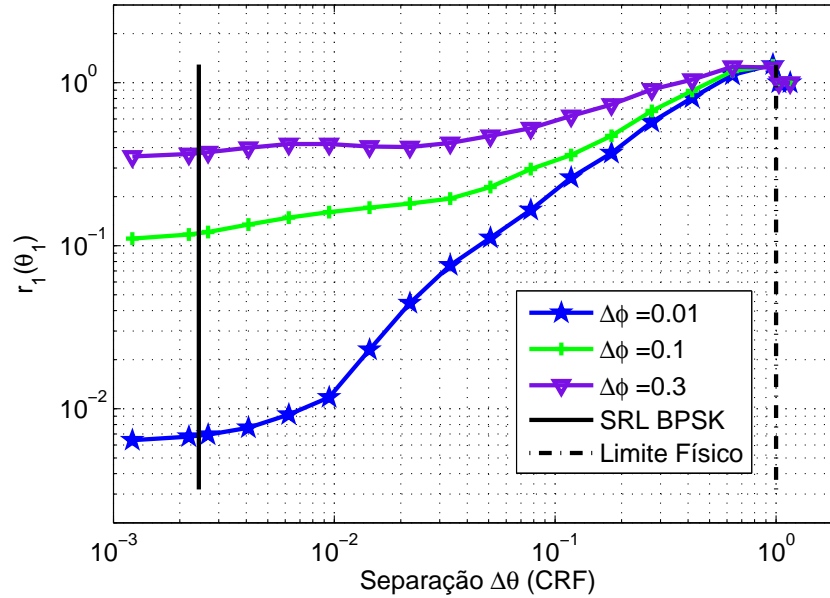


Figura 6.4:  $r_1(\theta_1 = 0) = \text{REQM}_{\theta_1}^{\text{DET-DS}} / \text{REQM}_{\theta_1}^{\text{root-MUSIC NC}}$  versus separação das fontes em termos da CRF para uma RSR de 20 dB.

ção a informação da covariância complementar. O estimador proposto, especialmente confeccionado para tratar de sinais discretos, é teoricamente capaz de operar com um número ilimitado de fontes, caso houver um número suficiente de *snapshots* para estimar todos os centróides do espaço de sinal. Além disso, este estimador é capaz de lidar, aparentemente sem penalidades, com cenários de fontes arbitrariamente próximas em ângulo, incluindo o caso em que estas compartilham a mesma posição angular. Esta última situação não é permitida para os estimadores baseados no modelo gaussiano circular e os baseados em segunda-order para fontes não-circulares.

Na Figura 6.5 apresentamos um histograma das estimativas obtidas pelo DET-DS em 3000 ensaios para um cenário com quatro sinais BPSK incidindo com ângulos de 0, 4, 8 e 12 graus em relação à normal ao arranjo, com valores para os parâmetros de deslocamento de fase de  $\phi = [0; 0,1; 0,2; 0,3]^T$  rad, parâmetros de amplitude  $\mathbf{g} = [0,7; 0,8; 1,0; 1,2]^T$ , RSR igual a 10 dB e  $K = 200\mathcal{L}^M = 3200$  *snapshots*.

Como última análise, para ilustrar como o número de sensores afeta a qualidade do processo de estimação dos centróides, e, portanto, a variância das estimativas DOA, apresentamos na Tabela 6.1 um resumo do REQM, em radianos, das estimativas DET-DS para diferentes números de antenas. Foram realizados 1000 ensaios, em um cenário com três fontes BPSK incidindo em 0, 10 e 20 graus com  $\phi = [0; 0,1; 0,2]^T$  rad,  $\mathbf{g} = [0,8; 1,0; 1,2]^T$ , RSR igual a 0 dB e  $K = 300\mathcal{L}^M = 2400$  *snapshots*. Como podemos observar, o valor da REQM (média entre todos os ângulos) diminui à

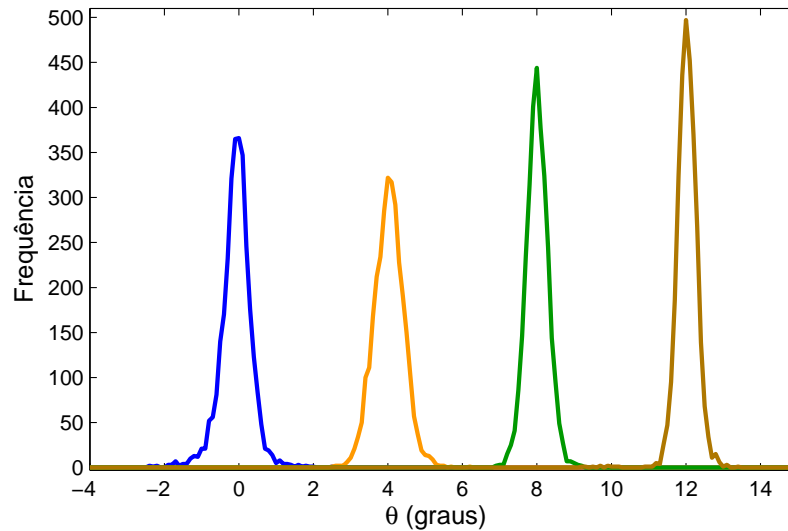


Figura 6.5: Histograma das estimativas do DET-DS para 4 fontes BPSK sob  $RSR = 10$  dB usando um arranjo com 2 antenas para um total de 3000 ensaios independentes.

medida que o número de antenas aumenta. A explicação para esta dependência está no fato de o problema de clusterização ser mais simples de ser resolvido em espaços de maior dimensão.

| # Antenas  | 2     | 3     | 4     | 5     |
|------------|-------|-------|-------|-------|
| REQM (rad) | 1,878 | 0,553 | 0,368 | 0,293 |

Tabela 6.1: Análise da qualidade de estimação dos centróides como função do número de antenas.

Apesar de termos apresentado análises numéricas apenas para o caso de modulação BPSK, testamos e validamos o método proposto DET-DS para outros esquemas de modulação, a saber, 4-QAM, QPSK, 8-PSK, 8-PAM e 16-QAM.

# Capítulo 7

## Conclusões e Perspectivas

Nesta tese, tratamos do problema de estimação de direção de chegada de sinais digitalmente modulados, especificamente encontrado no enlace reverso de sistemas de comunicação sem fio multiusuário em que a estação rádio-base é composta por um arranjo de antenas, posicionadas de acordo com alguma geometria pré-definida.

Iniciamos a apresentação da tese com um levantamento das pesquisas publicadas nas últimas duas décadas sobre o tema. Deste levantamento constatamos que os métodos de estimação desenvolvidos foram baseados em dois modelos de dados principais: a) modelo estacionário de *snapshot*; e b) modelo cicloestacionário de *snapshot*. Fizemos então um estudo minucioso destes modelos, e esclarecemos detalhes a respeito das condições de enlace e do sistema receptor necessárias para suportar sua validade. Partindo do modelo de canal MIMO geral, chegamos ao modelo de sinal de tempo-contínuo em banda-base no receptor com arranjo (coerente) de antenas. Nesta derivação, verificamos que existe a necessidade dos sinais serem de banda-estreita em relação à frequência da portadora, que a largura de banda dos sinais seja menor ou igual que a largura de banda do canal, que esta seja menor que a banda de coerência do canal, e que no modelo de canal seja levado em consideração apenas a propagação em linha de visada. Quanto ao receptor (parte analógica), este deve usar um único oscilador para fazer a conversão banda-passante para banda-base (BP-BB) e linhas de atraso adequadas para sincronizar todos os elementos do arranjo conjuntamente.

Deste modelo de sinal em tempo-contínuo originam-se os dois modelos de tempo-discreto citados acima. O modelo estacionário de *snapshot* surge da aplicação do filtro casado matricial (FCM) com amostragem à taxa de símbolo. Demonstramos que as condições necessárias para a aplicação correta do FCM são: i) a forma de onda dos pulsos moduladores em todos os transmissores (usuários) deve ser a mesma; ii) a taxa de símbolo deve ser a mesma para todos os transmissores; e iii) sincronização do tempo de símbolo. O modelo cicloestacionário de *snapshot* surge da amostragem do sinal em banda-base a uma taxa com valor múltiplo inteiro da taxa de símbolo. Demonstramos que sob esta

condição a sequência de tempo-discreto resultante da amostragem é cicloestacionária com período igual à razão de sobreamostragem. O modelo cicloestacionário não exige sincronização do tempo de símbolo e as formas de onda dos pulsos moduladores de cada usuário podem ser diferentes.

Na sequência, descrevemos algumas das técnicas mais relevantes para estimação DOA baseadas nestes modelos de *snapshot*. No caso estacionário, estudamos as abordagens: i) ajuste de subespaços; ii) ajuste de covariâncias; iii) *beamforming* com subarranjos; e iv) máxima verossimilhança. No caso cicloestacionário, estudamos as abordagens: i) ajuste de subespaços; e ii) correlação espectral. Vimos que cada uma destas técnicas incorpora na sua solução alguma informação que especifica o tipo de sinal presente nos dados. Entre estas especificações são destaque: a) não-circularidade; b) cicloestacionariedade; c) não-circularidade em conjunto com cicloestacionariedade; d) distribuição estatística dos dados; e e) sinal piloto (supervisão). Analisando os dois grandes casos pelas suas vantagens e desvantagens, pudemos concluir que: 1) em cenários em que há presença de interferentes, os métodos cicloestacionários são adequados, pois têm a habilidade de filtrar/selecionar apenas aqueles cuja taxa de símbolo é de interesse. A desvantagem, neste caso, é a necessidade do canal ser de variação muito lenta, pois a convergência das estimativas dos métodos cicloestacionários exige um número elevado de amostras no tempo; 2) os métodos estacionários exigem que a taxa de símbolo seja a mesma para todos os usuários mas, em compensação, podem operar com um número bastante pequeno de amostras, o que implica em menor complexidade computacional além de serem menos afetados pela variação do canal ao longo do tempo.

Por fim, um novo método de estimação DOA foi desenvolvido para operar no caso de modelo estacionário de dados. A ideia central do método é explorar a natureza discreta com cardinalidade finita da componente de sinal recebida, para transformar o problema de estimação em um problema de decisão com estimativas candidatas. A solução proposta é fundamentada no critério da máxima verossimilhança, e as análises de desempenho feitas através de simulações numéricas mostram que o estimador fornece resultados com qualidade próxima ao limite definido pelo limitante de Cramér-Rao. Algumas características importantes do método são: i) capacidade de operar com qualquer número de fontes se o número de antenas for maior ou igual a dois e o número de *snapshots* for suficientemente maior que a cardinalidade do espaço de sinal; ii) a qualidade da estimação não é afetada pela separação angular entre as fontes; e iii) possibilidade de operar com arranjos descalibrados.

Prevendo a continuidade do trabalho apresentado nesta tese, consideramos a possibilidade de rastreamento dos usuários num cenário não-estacionário. Especificamente, pretendemos estender o modelo estacionário de *snapshot* (3.21) para o caso de canais de propagação com múltiplos percursos (sem a necessidade de linha de visada) e que apresentam desvanecimento rápido (do inglês, *fast fading*).

Tomando-se os devidos cuidados na derivação, de forma semelhante ao apresentado na Seção 3.1,



pode-se mostrar que este modelo em tempo-discreto do sinal recebido (em banda-base) no instante  $t_k = kT_0$  pode ser descrito na forma

$$\mathbf{z}[k] = \sum_{l=0}^{\mathcal{P}-1} \mathbf{H}_l[k] \mathbf{b}[k-l] + \mathbf{n}[k], \quad (7.1)$$

onde  $\mathcal{P} \in \mathbb{Z}$  indica o número de múltiplos percursos considerado no modelo,  $\mathbf{b}[k] = [b_1[k], \dots, b_M[k]]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  é o vetor de símbolos das  $M$  fontes,  $\mathbf{H}_l[k]$  é a matriz de coeficientes da resposta ao impulso do canal MIMO referente ao caminho de índice  $l$  no instante  $t_k$ , que pode ser descrita pela expressão

$$\mathbf{H}_l[k] = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_l[k]) \mathbf{G}_l[k], \quad (7.2)$$

em que  $\mathbf{G}_l[k] = \text{diag}(g_{1,l}[k], \dots, g_{M,l}[k]) \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é a matriz que contém os coeficientes ( $g_{m,l}[k]$ ) da resposta ao impulso do canal referente ao  $l$ -ésimo caminho de cada uma das  $M$  fontes e  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_l[k])$  é a matriz de resposta do arranjo cujas colunas são os vetores de direção  $\mathbf{a}(\theta_{m,l}[k]) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  para  $m = 1, \dots, M$ .

Neste modelo, a não-estacionariedade do canal está ligada à variação no tempo de duas variáveis: i) os ângulos de incidência  $\theta_{m,l}[k]$  das fontes em cada caminho de propagação; e ii) coeficientes  $g_{m,l}[k]$  da resposta ao impulso do canal para os respectivos caminhos de propagação. A dinâmica das variáveis angulares está relacionada ao deslocamento geográfico do usuário (transmissor) relativo ao arranjo receptor e acreditamos que esta possa ser considerada lenta se comparada com a dinâmica da magnitude dos coeficientes relativos aos percursos do canal. Estes últimos podem ser descritos pelos bem conhecidos modelos de canal Rice e Rayleigh (vide (Rappaport, 2002; Tse & Viswanath, 2005)). Vale aqui lembrar que o canal Rice considera no modelo um caminho em linha de visada de magnitude conhecida e superior a dos outros caminhos, os quais são considerados independentes. Já no modelo Rayleigh, não há a previsão de caminho em linha de visada, sendo que a magnitude de todos os coeficientes do canal são considerados variáveis aleatórias independentes.

A partir destes modelos, o problema de estimação DOA se funde com o problema de estimação de canal MIMO variante no tempo e, conseqüentemente, técnicas de processamento adaptativo devem ser empregadas.

Como mostrado por Loiola em (M. B. Loiola, 2009), o rastreamento de canal usando abordagens baseadas em descrição por espaço de estados tem se mostrado bastante adequado para ambientes não-estacionários. Especificamente, Loiola estudou o uso do filtro de Kalman para rastreamento e equalização conjuntos de canais MIMO com desvanecimento rápido. Como o modelo (7.1) que pretendemos utilizar é bastante similar ao modelo tratado em (M. B. Loiola, 2009), as essências das soluções encontradas neste estudo podem ser adaptadas para o nosso caso (receptor com arranjo co-

erente). De fato, estudos preliminares mostram que a solução baseada no filtro de Kalman estendido obtida em (M. Loiola & Lopes, 2008), que é parte do estudo apresentado em (M. B. Loiola, 2009), pode ser utilizada, após algumas modificações na matriz de transição de estados que descreve a dinâmica do canal, para rastreamento dos usuários e decisão das sequências de símbolos.

Os trabalhos futuros partindo da presente tese devem seguir nesta direção, sendo esta proposta de adaptação do trabalho (M. Loiola & Lopes, 2008) para o modelo (7.1) o ponto inicial. Num segundo passo, pretendemos estudar a utilização de algumas especificações do modelo 3GPP *Spatial Channel Model* (SCM) dentro do modelo (7.1). O modelo 3GPP-SCM é descrito em (3GPP-SCM, 2003) e foi desenvolvido para o caso em que tanto o receptor como o transmissor são compostos por arranjo de antenas. Este não é o caso tratado nesta tese nem no modelo (7.1), onde os usuários possuem apenas uma antena transmissora. Daí a necessidade de adaptação das especificações do modelo 3GPP-SCM.

Por fim, acreditamos que os estudos e discussões apresentados ao longo desta tese possam servir como semente para novas pesquisas e desenvolvimentos na área de processamento de sinais de arranjo de sensores/antenas.

## Referências bibliográficas

- 3GPP-SCM. (2003). *Spatial channel model for Multiple Input Multiple Output (MIMO) simulations* [3GPP Technical Report 25.996]. (Disponível em [http://projects.celtic-initiative.org/winner+/3gpp\\_scm.html](http://projects.celtic-initiative.org/winner+/3gpp_scm.html).)
- Abeida, H., & Delmas, J. P. (2006, July). MUSIC-like estimation of direction of arrival for noncircular sources. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(7), 2678–2690.
- Abeida, H., & Delmas, J. P. (2008, September). Statistical Performance of MUSIC-like Algorithms in Resolving Noncircular Sources. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(9), 4317–4329.
- Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In *Proceedings of the 2nd International Symposium on Information Theory* (pp. 267–281).
- Anand, K., Mathew, G., & Reddy, V. (1995, sep). Blind separation of multiple co-channel bpsk signals arriving at an antenna array. *Signal Processing Letters, IEEE*, 2(9), 176 -178.
- Athley, F. (2005, April). Threshold region performance of maximum likelihood direction of arrival estimators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(4), 1359–1373.
- Attux, R., Suyama, R., Ferrari, R., Junqueira, C., Krummenauer, R., Larzabal, P., et al. (2007, Sep). A Clustering-based Method for DOA Estimation in Wireless Communications. In *15th European Signal Processing Conference* (pp. 262–266). Poznań, Poland: EURASIP.
- Barry, J. R., Messerschmitt, D. G., & Lee, E. A. (2003). *Digital communication: Third edition*. Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers.
- Bienvenu, G., & Kopp, L. (1980, April). Adaptivity to background noise spatial coherence for high resolution passive methods. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '80*. (Vol. 5, p. 307 - 310).
- Bronez, T. (1988, April). Sector interpolation of non-uniform arrays for efficient high resolution bearing estimation. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1988. ICASSP-88., 1988 International Conference on* (p. 2885 -2888 vol.5).
- Buckley, K. (1987, March). Spatial/Spectral filtering with linearly constrained minimum variance beamformers. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 35(3), 249 - 266.
- Cardoso, J. (1990). Localisation et identification par la quadricovariance. *Traitement du Signal*, 7(5), 1235 -1247.
- Castro, L. N. de. (2006). *Fundamentals of Natural Computing: Basic Concepts, Algorithms, and Applications* (Chapman & Hall/Crc Computer and Information Sciences). Chapman & Hall/CRC. Hardcover.
- Castro, L. N. de, & Timmis, J. (2002, May). An artificial immune network for multimodal function

- optimization. In *Evolutionary Computation, 2002. CEC '02. Proceedings of the 2002 Congress on* (Vol. 1, pp. 699–704). Honolulu, HI, USA.
- Chargé, P., & Wang, Y. (2005). A root-MUSIC-like direction finding method for cyclostationary signals. *EURASIP J. Appl. Signal Process.*, 2005(1), 69–73.
- Chargé, P., Wang, Y., & Saillard, J. (2001a). A non-circular sources direction finding method using polynomial rooting. *Signal Processing*, 81(8), 1765 - 1770.
- Chargé, P., Wang, Y., & Saillard, J. (2001b). A root-MUSIC algorithm for non-circular sources. In *ICASSP '01: Proceedings of the Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. on IEEE International Conference* (pp. 2985–2988). Washington, DC, USA: IEEE Computer Society.
- Chargé, P., Wang, Y., & Saillard, J. (2003, July). An extended cyclic MUSIC algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(7), 1695–1701.
- Chaumette, E., Galy, J., Quinlan, A., & Larzabal, P. (2008, nov.). A New Barankin Bound Approximation for the Prediction of the Threshold Region Performance of Maximum Likelihood Estimators. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 56(11), 5319 -5333.
- Chevalier, P., Albera, L., Ferreol, A., & Comon, P. (2005, April). On the virtual array concept for higher order array processing. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 53(4), 1254 - 1271.
- Chevalier, P., & Ferreol, A. (1999, September). On the virtual array concept for the fourth-order direction finding problem. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 47(9), 2592 -2595.
- Chevalier, P., Ferreol, A., & Albera, L. (2006, August). High-Resolution Direction Finding From Higher Order Statistics: The 2q-MUSIC Algorithm. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 54(8), 2986 -2997.
- Chevalier, P., Ferreol, A., Albera, L., & Birot, G. (2007, November). Higher Order Direction Finding From Arrays With Diversely Polarized Antennas: The PD-2q-MUSIC Algorithms. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 55(11), 5337 -5350.
- Chung, P. J., & Böhme, J. F. (2002). DOA Estimation using fast EM and SAGE Algorithms. *Signal Processing*, 82(11), 1753–1762.
- Delmas, J. P. (2004, May). Asymptotically minimum variance second-order estimation for noncircular signals with application to DOA estimation. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 52(5), 1235–1241.
- Delmas, J. P., & Abeida, H. (2004, November). Stochastic Cramér-Rao bound for noncircular signals with application to DOA estimation. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 52(11), 3192–3199.
- Delmas, J. P., & Abeida, H. (2006a, January). Cramér-Rao bounds of DOA estimates for BPSK and QPSK Modulated signals. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 54(1), 117–126.
- Delmas, J. P., & Abeida, H. (2006b, May 14–19.). Statistical Resolution Limits of DOA for Discrete

- Sources. In *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2006. ICASSP 2006 Proceedings. 2006 IEEE International Conference on* (Vol. 4). Toulouse.
- Delmas, J.-P., & Meurisse, Y. (2003). Robustness of narrowband DOA algorithms with respect to signal bandwidth. *Signal Processing*, 83(3), 493–510.
- Doran, M., Doron, E., & Weiss, A. (1993, January). Coherent wide-band processing for arbitrary array geometry. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(1), 414.
- Duda, R. O., Hart, P. E., & Stork, D. G. (2000). *Pattern classification (2nd edition)*. Wiley-Interscience. Hardcover.
- Farhang-Boroujeny, B. (2008, May). A Square-Root Nyquist (M) Filter Design for Digital Communication Systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(5), 2127–2132.
- Farhang-Boroujeny, B., & Yuen, C. H. (2010, January). Cosine modulated and offset QAM filter bank multicarrier techniques: a continuous-time prospect. *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, 2010, 6:1–6:11. Available from <http://dx.doi.org/10.1155/2010/165654>
- Fessler, J., & Hero, A. (1993). Complete-data spaces and generalized EM algorithm. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1993. ICASSP-93., 1993 International Conference on* (Vol. 4).
- Forster, P., & Nikias, C. (1991, September). Bearing estimation in the bispectrum domain. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(9), 1994–2006.
- Friedlander, B., & Weiss, A. (1992, April). Direction finding using spatial smoothing with interpolated arrays. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 28(2), 574–587.
- Friedlander, B., & Weiss, A. (1993, April). Direction finding for wide-band signals using an interpolated array. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(4), 1618–1634.
- Gardner, W. A. (1987a, June). Spectral Correlation of Modulated Signals: Part I—Analog Modulation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 35(6), 584–594.
- Gardner, W. A. (1987b, June). Spectral Correlation of Modulated Signals: Part I—Digital Modulation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 35(6), 595–601.
- Gardner, W. A. (1988a, August 3–5.). Exploitation of spectral correlation in cyclostationary signals. In *Spectrum Estimation and Modeling, 1988., Fourth Annual ASSP Workshop on* (pp. 1–6). Minneapolis, MN, USA.
- Gardner, W. A. (1988b, July). Simplification of MUSIC and ESPRIT by exploitation of cyclostationarity. *Proceedings of the IEEE*, 76(7), 845–847.
- Gardner, W. A., Napolitano, A., & Paura, L. (2006). Cyclostationarity: Half a century of research. *Signal Processing*, 86(4), 639–697.
- Gershman, A., & Stoica, P. (1999, March). MODE with extra-roots (MODEX): a new DOA estimation algorithm with an improved threshold performance. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1999. ICASSP '99. Proceedings., 1999 IEEE International Conference on* (Vol. 5,

- pp. 2833–2836). Phoenix, AZ.
- Godara, L. (1997a, August). Application of antenna arrays to mobile communications. II. Beamforming and direction-of-arrival considerations. *Proceedings of the IEEE*, 85(8), 1195–1245.
- Godara, L. (1997b, July). Applications of antenna arrays to mobile communications. I. Performance improvement, feasibility, and system considerations. *Proceedings of the IEEE*, 85(7), 1031–1060.
- Gounon, P., Adnet, C., & Galy, J. (1998). Localisation angulaire de signaux non circulaires. *Traitement du Signal [Trait. Signal]*, 15(1), 17–23.
- Haardt, M., & Romer, F. (2004, May 17–21.). Enhancements of unitary ESPRIT for non-circular sources. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004. Proceedings. (ICASSP '04). IEEE International Conference on* (Vol. 2, pp. 101–4).
- Haykin, S. (2001). *Adaptive filter theory (4th edition)*. Prentice Hall. Hardcover.
- Haykin, S. (2005, February). Cognitive radio: brain-empowered wireless communications. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 23(2), 201–220.
- IEEE802.16-2009, IEEE 802 Standard for local and metropolitan area networks, Part 16: Air interface for broadband wireless access systems* [Standard]. (2009). Available from <http://standards.ieee.org/getieee802/download/802.16-2009.pdf>
- Inaba, M., Katoh, N., & Imai, H. (1994). Applications of weighted Voronoi diagrams and randomization to variance-based k-clustering: (extended abstract). In *SCG '94: Proceedings of the Tenth Annual Symposium on Computational Geometry* (pp. 332–339). New York, NY, USA: ACM.
- Inagaki, Y., Kikuma, N., Hirayama, H., & Sakakibara, K. (2007). DOA estimation of desired signals by cyclic ESPRIT based on noise subspace and its performance improvement. *Electronics and Communications in Japan (Part I: Communications)*, 90(11), 95–104.
- Kay, S. M. (1993). *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall Signal Processing Series.
- Krim, H., & Viberg, M. (1996, July). Two decades of array signal processing research: the parametric approach. *IEEE Signal Processing Magazine*, 13(4), 67–94.
- Kumaresan, R., & Tufts, D. (1982, December). Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 30(6), 833–840.
- Lavielle, M., Moulines, E., & Cardoso, J. F. (1994, June). A Maximum Likelihood Solution to DOA Estimation for Discrete Sources. In *Statistical Signal and Array Processing, 1994., IEEE Seventh SP Workshop on* (pp. 349–352).
- Lee, H. B. (1992, June). The Cramér-Rao bound on frequency estimates of signals closely spaced in frequency. *Signal Processing, IEEE Transactions on* [see also *Acoustics, Speech, and Signal*



- Processing, IEEE Transactions on*], 40(6), 1507–1517.
- Lee, Y.-T., & Lee, J.-H. (2001, December). Direction-finding methods for cyclostationary signals in the presence of coherent sources. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 49(12), 1821–1826.
- Leshem, A., & Veen, A. van der. (1999, November). Direction-of-arrival estimation for constant modulus signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(11), 3125–3129.
- Liberti, J. C., & Rappaport, T. S. (1999). *Smart Antennas for Wireless Communications: IS-95 and Third Generation CDMA Applications*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall PTR.
- Liu, J., Huang, Z., & Zhou, Y. (2008). Extended 2q-MUSIC algorithm for noncircular signals. *Signal Process.*, 88(6), 1327–1339.
- Liu, Z., Wang, J., & Wang, F. (2006). Unitary Solution to Coherent Cyclic DOA Estimation Problem. In *Signal Processing, 2006 8th International Conference on* (Vol. 1).
- Liu, Z., Wang, J., & Xue, Y. (2005, December). Unitary cyclic ESPRIT-like direction finding. In *Microwave Conference Proceedings, 2005. APMC 2005. Asia-pacific Conference Proceedings* (Vol. 3).
- Loiola, M., & Lopes, R. (2008, july). A state-space approach to semi-blind signal detection in fast frequency-selective fading MIMO channels. In *Signal Processing Advances in Wireless Communications, 2008. SPAWC 2008. IEEE 9th Workshop on* (p. 276 -280).
- Loiola, M. B. (2009). *Estimação de canais MIMO variantes no tempo usando filtros de Kalman* [Tese de doutorado]. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas - SP - Brasil.
- Markhi, H. E., Haibala, M. M. O., Mrabti, F., Chargé, P., & Zouak, M. (2007, August). An improved cyclic beamforming method for signal DOA estimation. *Signal Image and Video Processing*, 1(3), 267–272.
- Merz, P. (2003). An Iterated Local Search Approach for Minimum Sum-of-Squares Clustering. In *Advances in Intelligent Data Analysis V, 5th International Symposium on Intelligent Data Analysis, IDA 2003* (Vol. 2810, pp. 286–296). Berlin, Germany: Springer.
- Mitola, I., J. (1999). Cognitive radio for flexible mobile multimedia communications. In *Mobile multimedia communications, 1999. (MoMuC '99) 1999 IEEE international workshop on* (p. 3 -10).
- Morelli, M., Kuo, C.-C., & Pun, M.-O. (2007, July). Synchronization techniques for orthogonal frequency division multiple access (ofdma): A tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 95(7), 1394 -1427.
- Ollila, E. (2008). On the Circularity of a Complex Random Variable. *IEEE Signal Processing Letters*, 15, 841–844.
- Ottersten, B., Stoica, P., & Roy, R. (1998). Covariance Matching Estimation Techniques for Array

- Signal Processing Applications. *Digital Signal Processing*, 8(3), 185–210.
- Paulraj, A., Nabar, R., & Gore, D. (2003). *Introduction to space-time wireless communications* (1st ed.). New York, NY, USA: Cambridge University Press.
- Picinbono, B. (1994, December). On circularity. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(12), 3473–3482.
- Picinbono, B., & Bondon, P. (1997, February). Second-order statistics of complex signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(2), 411–420.
- Porat, B., & Friedlander, B. (1991, September). Direction finding algorithms based on high-order statistics. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 39(9), 2016–2024.
- Proakis, J. (2005). *Digital Communications* (Fourth ed.). McGraw-Hill Science/Engineering/Math. Hardcover.
- Rappaport, T. (2002). *Wireless Communications: Principles and Practice* (2nd ed.). Prentice Hall. Hardcover.
- Renaux, A., Forster, P., Larzabal, P., Richmond, C., & Nehorai, A. (2008, nov.). A Fresh Look at the Bayesian Bounds of the Weiss-Weinstein Family. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(11), 5334–5352.
- Reuven, A. M., & Weiss, A. J. (2009). Direct position determination of cyclostationary signals. *Signal Processing*, 89(12), 2448–2464. (Special Section: Visual Information Analysis for Security)
- Rissanen, J. (1978). Modeling by shortest data description. *Automatica*, 14, 465–471.
- Roy, R. (1987). *ESPRIT: Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques* [Tese de doutorado]. Stanford University, Stanford, California - USA.
- Salameh, A., & Tayem, N. (2006, May 14–19.). Conjugate MUSIC for Non-circular Sources. In *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2006. ICASSP 2006 Proceedings. 2006 IEEE International Conference on* (Vol. 4). Toulouse.
- Schell, S. V. (1994, November). Performance analysis of the cyclic MUSIC method of direction estimation for cyclostationary signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(11), 3043–3050.
- Schell, S. V., Calabretta, R. A., Gardner, W. A., & Agee, B. G. (1989, May). Cyclic MUSIC algorithms for signal-selective direction estimation. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989. ICASSP-89., 1989 International Conference on* (pp. 2278–2281). Glasgow, UK.
- Schell, S. V., & Gardner, W. A. (1992, July). The Cramér-Rao lower bound for directions of arrival of Gaussian cyclostationary signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(4), 1418–1422.
- Schmidt, R. (1979, Oct). Multiple emitter location and signal parameter estimation. In *Proc. RADC Spectral Estimation Workshop* (p. 243–258). Griffiss AFB, NY.



- Schmidt, R. O. (1986). Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, AP-34(3), 276-280.
- Schreier, P. J., & Scharf, L. L. (2003, March). Second-order analysis of improper complex random vectors and processes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(3), 714–725.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461–464.
- Shamsunder, S., & Giannakis, G. (1994, October). Signal selective localization of nongaussian cyclostationary sources. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 42(10), 2860 -2864.
- Shynk, J., & Gooch, R. (1996, March). The constant modulus array for cochannel signal copy and direction finding. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(3), 652–660.
- Smith, S. T. (2005, May). Statistical resolution limits and the complexified Cramér-Rao bound. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(5), 1597–1609.
- Stoica, P., & Besson, O. (2000, April). Maximum likelihood DOA estimation for constant-modulus signal. *Electronics Letters*, 36(9), 849–851.
- Stoica, P., & Nehorai, A. (1990, October). Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 38(10), 1783–1795.
- Stoica, P., & Sharman, K. (1990, February). Novel eigenanalysis method for direction estimation. *IEE Proceedings F Radar and Signal Processing*, 137(1), 19–26.
- Tse, D., & Viswanath, P. (2005). *Fundamentals Wireless Communication*. Cambridge University Press. Hardcover.
- Tuncer, T. E., & Friedlander, B. (2009). *Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation*. Academic Press.
- Van Trees, H. L. (2001). *Optimum Array Processing. Part IV of Detection, Estimation and Modulation Theory*. New York, USA: John Wiley and Sons.
- Van Nee, R., & Prasad, R. (1999). *OFDM for Wireless Multimedia Communications*. Artech House Publishers. Hardcover.
- Viberg, M., & Ottersten, B. (1991, May). Sensor array processing based on subspace fitting. *Signal Processing, IEEE Transactions on [see also Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions on]*, 39(5), 1110–1121.
- Wang, N., Agathoklis, P., & Antoniou, A. (2006, September). A new DOA estimation technique based on subarray beamforming. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(9), 3279–3290.
- Wax, M., & Kailath, T. (1985, April). Detection of Signals by Information Theoretical Criteria. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-33(2)*, 387–392.
- Wylie, M. P., & Roy, S. (1995, October/November). Virtual array processing using wideband cyclostationary signals. In *Signals, Systems and Computers, 1995. 1995 Conference Record of the*

- Twenty-ninth Asilomar Conference on* (Vol. 1, pp. 506–510). Pacific Grove, CA, USA.
- Xin, J., Tsuji, H., Hase, Y., & Sano, A. (1998). Direction-of-arrival estimation of cyclostationary coherent signals in array processing. In *European Signal Processing Conference Proceedings, 1998. EUSIPCO 1998* (Vol. 9, pp. 1785–1788). Rhodes, Grece.
- Xu, G., & Kailath, T. (1992, July). Direction-of-arrival estimation via exploitation of cyclostationary - A combination of temporal and spatial processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(7), 1775–1786.
- Yan, H., & Fan, H. H. (2005). On improvements of cyclic MUSIC. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2005(1), 61–68.
- Yan, H., & Fan, H. H. (2007, May). Signal-selective DOA Tracking for Wideband Cyclostationary Sources. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55, 2007–2015.
- Zanatta, D. (2002). *Algoritmos de Processamento Espacial para Enlaces de Comunicação sem Fio* [Dissertação de mestrado]. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas - SP - Brasil.
- Zanatta, D. (2006). *Novas técnicas de processamento espaço-temporal em transmissão conciliando diversidade e beamforming* [Tese de doutorado em co-tutela]. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas - SP - Brasil, Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM), França.
- Zatman, M. (1998, April). How narrow is narrowband? *Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings -*, 145(2), 85 -91.