

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR BRUNO BARBOSA DE  
O.F. SALLES  
E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 23, 02, 2011  
[Signature]  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Bruno Barbosa de Oliveira Ferreira Salles

# Otimização da Superfície de Deslizamento em Mancais Hidrodinâmicos Radiais com Carregamento Estático

Campinas, 2011.

Bruno Barbosa de Oliveira Ferreira Salles

# Otimização da Superfície de Deslizamento em Mancais Hidrodinâmicos Radiais com Carregamento Estático

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Area de Concentração: Mecânica dos Sólidos  
e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Campinas  
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Sa34o Salles, Bruno Barbosa de Oliveira Ferreira  
Otimização da superfície de deslizamento em mancais  
hidrodinâmicos radiais com carregamento estático /  
Bruno Barbosa de Oliveira Ferreira Salles. –Campinas,  
SP: [s.n.], 2011.

Orientador: Marco Lúcio Bittencourt.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Mancais. 2. Hidrodinâmica. 3. Otimização.  
4. Método dos elementos finitos. 5. MATLAB (Programa de  
computador). I. Bittencourt, Marco Lúcio. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica.  
III. Título.

Título em Inglês:	Optimization of hydrodynamic radial bearing surface with static load
Palavras-chave em Inglês:	Bearing, Hydrodynamic, Optimization, Finite elements method, Matlab (Computer program)
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação:	Mestre em Engenharia Mecânica
Banca Examinadora:	Paulo Roberto Gardel Kurka, Durval Duarte Junior
Data da defesa:	24/02/2011
Programa de Pós Graduação:	Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

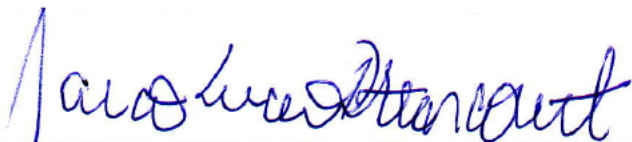
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

# Otimização da Superfície de Deslizamento em Mancais Hidrodinâmicos Radiais com Carregamento Estático

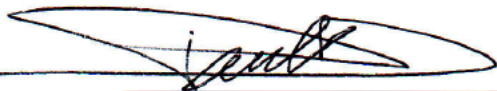
Autor: Bruno Barbosa de Oliveira Ferreira Salles

Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, Presidente  
DPM/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka  
DPM/FEM/UNICAMP



Dr. Durval Duarte Jr.  
D Duarte Engenharia

Campinas, 24 de Fevereiro de 2011.

Dedico este trabalho aos meus pais.

# Agradecimentos

À Deus, meu Senhor, Criador e Salvador.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, pela oportunidade a mim concedida, pelo apoio e paciência nos momentos de maior dificuldade; pelas horas de dedicação ao longo dos últimos anos e pela orientação tanto técnica quanto pessoal.

À minha família, meus irmãos Lucas e Henrique e especialmente aos meus pais Walter Guilherme e Margareth, pelo apoio durante todo o tempo, pelo interesse demonstrado pelo meu trabalho, mesmo tendo dificuldade em entender os conceitos envolvidos, e pelo incentivo nos momentos de desânimo.

Aos amigos do Laboratório de Simulação Computacional do DPM, Fabiano Bargos, Rodrigo Augusto, Guilherme Neves, Maurílio Cassiani, Felipe Furlan e Jaime Izuka pela ajuda mútua e companheirismo.

Aos amigos de trabalho da ThyssenKrupp, Robson Cruz, pelo acompanhamento do trabalho que originou esta dissertação, Renato Mussi, com que tive a oportunidade de trabalhar por apenas alguns meses, Luciana Diógenes, Sergio Vilalva, Rafael Lima, Alex Rodrigues, Pedro Ferreira e José Martinho pelo ambiente de trabalho saudável e pelo apoio.

À ThyssenKrupp, na pessoa de Luiz Galli pelo apoio financeiro.

Ao Dr. Sergio Guerreiro por me permitir conciliar as atividades acadêmicas e o trabalho.

”Porque melhor é a sabedoria do que as jóias;  
e de tudo o que se deseja nada se pode comparar com ela.”

*Provérbios 8:11*

# Resumo

Este trabalho tem por objetivo desenvolver um algoritmo computacional para otimização de forma da superfície de mancais hidrodinâmicos. O algoritmo usa a teoria de lubrificação elastohidrodinâmica que leva em conta a deformação elástica do mancal devido à distribuição de pressão hidrodinâmica. Esta distribuição de pressão é calculada resolvendo-se a equação de Reynolds por meio do Método de Elementos Finitos (MEF). O MEF também foi usado para calcular a deformação radial do mancal. Uma metodologia de otimização foi então aplicada para obter um novo mancal com melhor desempenho, mudando-se apenas a geometria da superfície do mancal.

*Palavras Chave:* Mancais, Hidrodinâmica, Elastohidrodinâmica, Otimização, Método de Elementos Finitos, MatLab, Motores.



# Abstract

The aim of this work is to develop a computational algorithm for bearing surface shape optimization. The algorithm uses the elastohydrodynamic lubrication theory that takes into account the elastic bearing deformation due to the hydrodynamic pressure distribution. This pressure distribution is calculated by solving the Reynolds equation using the Finite Element Method (FEM). The FEM is also used to calculate the bearing radial deformation. An optimization methodology is applied to obtain a new bearing with better performance characteristics by changing only the geometry of the bearing surface.

*Keywords:* Bearings, Hydrodynamics, Elastohydrodynamics, Optimization, Finite Elements Method, MatLab, Engines.

# Lista de Figuras

2.1	Mancal radial. . . . .	15
2.2	Parâmetros de um mancal radial (Duarte Jr. 2005). . . . .	16
2.3	Volume de controle (Fox e McDonald 2002). . . . .	17
2.4	Esforços atuantes na partícula na direção $x$ . . . . .	21
2.5	Condições de contorno. . . . .	28
2.6	Transformação de um elemento de referência para um elemento real. (Gerardin 2005) . . . . .	29
2.7	Força hidrodinâmica e suas componentes. . . . .	32
2.8	Malha com 47 elementos na direção $\theta$ e 20 na direção $z$ . Pressão de pico = $1,8316 \times 10^6$ Pa. Tempo para se obter a solução = 3,5 segundos. . . . .	33
2.9	Malha com 90 elementos na direção $\theta$ e 40 na direção $z$ . Pressão de pico = $1,8290 \times 10^6$ Pa. Tempo para se obter a solução = 13,9 segundos. . . . .	34
2.10	Malha com 130 elementos na direção $\theta$ e 60 na direção $z$ . Pressão de pico = $1,8286 \times 10^6$ Pa. Tempo para se obter a solução = 46,9 segundos. . . . .	34
2.11	1/4 da malha com 47 elementos na direção $\theta$ e 20 na direção $z$ . Pressão de pico = $1,8317 \times 10^6$ Pa. Tempo para se obter a solução = 1,2 segundos. . . . .	35
2.12	1/4 da malha com 90 elementos na direção $\theta$ e 40 na direção $z$ . Pressão de pico = $1,8316 \times 10^6$ Pa. Tempo para se obter a solução = 3,3 segundos. . . . .	36
2.13	1/4 da malha com 130 elementos na direção $\theta$ e 60 na direção $z$ . Pressão de pico = $1,8286 \times 10^6$ Pa. Tempo para se obter a solução = 7,0 segundos. . . . .	36
4.1	Discretização do domínio do problema. . . . .	47
4.2	Deslocamento nodal para um modelo de biela plana. . . . .	50
4.3	Deslocamento nodal para um modelo de biela tridimensional. . . . .	51
4.4	Fluxograma do algoritmo EHD. . . . .	52
4.5	Malha de elementos finitos utilizada. . . . .	55

4.6	Função seno utilizada como peso para os incrementos de folga radial. . . . .	56
4.7	Pico de Pressão (Pa) para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 10kN. . . . .	56
4.8	Força hidrodinâmica (N) para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 10kN. . . . .	57
4.9	Fator de excentricidade para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 10kN. . . . .	57
4.10	Espessura do filme de óleo para o mancal rígido e flexível antes (h(1)) e depois (h(n)) do processo de otimização para carga de 10kN. . . . .	58
4.11	Geometria do mancal e geometria deformada para carga de 10kN com fator de escala de deformação igual a 20. . . . .	58
4.12	Incremento de folga radial final obtido na otimização para incremento inicial de $5\mu$ para carga de 10kN. . . . .	59
4.13	Pico de Pressão (Pa) para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 40000N. . . . .	60
4.14	Força hidrodinâmica (N) para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 40000N. . . . .	60
4.15	Fator de excentricidade para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 40000N. . . . .	61
4.16	Espessura do filme de óleo para o mancal rígido e flexível antes (h(1)) e depois (h(n)) do processo de otimização para carga de 40000N. . . . .	61
4.17	Geometria do mancal inicial e geometria deformada para carga de 40kN com fator de escala de deformação igual a 10. . . . .	62
4.18	Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 10kN para o mancal rígido. . . . .	62
4.19	Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 10kN obtida pelo algoritmo EHD. . . . .	63
4.20	Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 10kN obtida pelo algoritmo EHD após a otimização. . . . .	63
4.21	Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 40kN para o mancal rígido. . . . .	64
4.22	Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 40kN obtida pelo algoritmo EHD. . . . .	64

4.23	Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 40kN obtida pelo algoritmo EHD após a otimização. . . . .	65
4.24	Pico de pressão hidrodinâmica utilizando-se a condição de Reynolds. . . . .	65
4.25	Força hidrodinâmica utilizando-se a condição de Reynolds. . . . .	66
4.26	Fator de excentricidade utilizando-se a condição de Reynolds. . . . .	66
4.27	Espessura do filme de óleo utilizando-se a condição de Reynolds. . . . .	66
4.28	Distribuição de pressão hidrodinâmica para mancal não otimizado com carregamento de 10kN e condição de contorno de Reynolds aplicada. . . . .	67
4.29	Pico de pressão hidrodinâmica utilizando-se uma malha de 177 por 8 elementos. . . . .	67
4.30	Força hidrodinâmica utilizando-se uma malha de 177 por 8 elementos. . . . .	68
4.31	Fator de excentricidade utilizando-se uma malha de 177 por 8 elementos. . . . .	68
4.32	Espessura do filme de óleo utilizando-se uma malha de 177 por 8 elementos. . . . .	68
4.33	Distribuição de pressão antes da otimização utilizando-se a malha refinada. . . . .	69
4.34	Distribuição de pressão após a otimização utilizando-se a malha refinada . . . . .	69
4.35	Pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de $-5\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	71
4.36	Pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de $-10\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	71
4.37	Pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de $-15\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	71
4.38	Distribuição de pressão hidrodinâmica para mancal não otimizado com carregamento de 10kN. . . . .	72
4.39	Distribuição de pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de $-5\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	72
4.40	Distribuição de pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de $-10\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	73
4.41	Distribuição de pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de $-15\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	73
4.42	Pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de $-5\mu m$ com carregamento de 40kN. . . . .	74
4.43	Pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de $-10\mu m$ com carregamento de 40kN. . . . .	74
4.44	Espessura do filme de óleo para incremento inicial de folga radial de $-5\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	75

4.45	Espessura do filme de óleo para incremento inicial de folga radial de $-10\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	75
4.46	Espessura do filme de óleo para incremento inicial de folga radial de $-15\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	75
4.47	Espessura do filme de óleo para incremento inicial de folga radial de $-5\mu m$ com carregamento de 40kN. . . . .	76
4.48	Espessura do filme de óleo para incremento inicial de folga radial de $-10\mu m$ com carregamento de 40kN. . . . .	76
4.49	Folga radial inicial e final obtido na otimização para incremento inicial de $-5\mu m$ para carga de 10kN. . . . .	77
4.50	Folga radial inicial e final obtido na otimização para incremento inicial de $-10\mu m$ para carga de 10kN. . . . .	78
4.51	Folga radial inicial e final obtido na otimização para incremento inicial de $-15\mu m$ para carga de 10kN. . . . .	79
4.52	Folga radial inicial e final obtido na otimização para incremento inicial de $-5\mu m$ para carga de 40kN. . . . .	80
4.53	Folga radial inicial e final obtido na otimização para incremento inicial de $-10\mu m$ para carga de 40kN. . . . .	81
4.54	Fator de excentricidade para incremento inicial de folga radial de $-5\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	81
4.55	Fator de excentricidade para incremento inicial de folga radial de $-10\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	82
4.56	Fator de excentricidade para incremento inicial de folga radial de $-15\mu m$ com carregamento de 10kN. . . . .	82
4.57	Fator de excentricidade para incremento inicial de folga radial de $-5\mu m$ com carregamento de 40kN. . . . .	82
4.58	Fator de excentricidade para incremento inicial de folga radial de $-10\mu m$ com carregamento de 40kN. . . . .	83

# Lista de Tabelas

1.1	Modelos de teoria EHD utilizado por diversos autores. . . . .	10
2.1	Parâmetros geométricos e de operação do mancal hidrodinâmico. . . . .	33
2.2	Tempo necessário para a obtenção da solução com malha de 64x32 elementos.	35
2.3	Tempo necessário para a obtenção da solução com malha de 128x64 elementos.	37
4.1	Parâmetros utilizados na simulação. . . . .	54
4.2	Espessura mínima do filme de óleo para incrementos de folga radial negativos	70

# Símbolos

$\vec{a}$	-	Aceleração
$c$	-	Folga radial
$D$	-	Diâmetro do alojamento
$e$	-	Excentricidade
$e_x, e_y$	-	Excentricidades nas direções dos eixos $x$ e $y$
$\vec{F}$	-	Resultante de forças no fluido
$[F]$	-	Vetor de forças nodais
$F_a$	-	Força aplicada ao mancal
$F_h$	-	Força de sustentação hidrodinâmica
$F_r$	-	Componente radial de $F_h$
$F_t$	-	Componente tangencial de $F_h$
$h$	-	Espessura de filme de óleo
$I_x$	-	Pontos de discretização do domínio na direção $x$
$I_z$	-	Pontos de discretização do domínio na direção $z$
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	-	Versores no plano cartesiano
$[J]$	-	Matriz jacobiana da transformação geométrica
$[K]$	-	Matriz de rigidez
$L$	-	Largura do mancal
$m$	-	Massa
$N_i$	-	Funções de interpolação

$N_{nos}$	-	Número de nós do elemento
$n_x, n_z$	-	Componentes do vetor normal em cada ponto de $\Gamma$
$\vec{P}$	-	Quantidade de movimento
$P$	-	Pressão termodinâmica
$p$	-	Pressão hidrodinâmica
$p_{cav}$	-	Pressão de cavitação
$\bar{p}$	-	Pressão mecânica média
$R$	-	Raio do alojamento
$Re$	-	Número de Reynolds
$r$	-	Raio do eixo rotor
$\vec{r}$	-	Vetor posição
$U_0$	-	Velocidade linear do alojamento
$U_1$	-	Velocidade linear do eixo
$u, v, w$	-	Componentes de velocidade
$\vec{V}$	-	Velocidade do fluido
$V_n$	-	Velocidade normal ao sentido de escoamento do fluido
$W_x, W_y$	-	Componentes de força aplicada ao mancal
$x, y, z$	-	Coordenadas cartesianas

### *Letras Gregas*

$\beta$	-	Fator de relaxação
$\Gamma$	-	Contorno do domínio $\Omega$
$\Delta x$	-	Espaçamento entre pontos da discretização na direção $x$
$\Delta z$	-	Espaçamento entre pontos da discretização na direção $z$
$[\delta]$	-	Deformação do alojamento
$[\delta h]$	-	Variação da espessura de filme
$\varepsilon$	-	Fator de Excentricidade



$\theta$	-	Coordenada polar na direção circunferencial
$\lambda$	-	Segundo coeficiente de viscosidade
$\mu$	-	Viscosidade do fluido
$\xi, \eta$	-	Coordenadas do elemento de referência
$\rho$	-	Massa específica
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	-	Componentes de tensão normal no fluido
$\varsigma$		Precisão dos resultados numéricos
$\tau_{xy} = \tau_{yx}$	-	Componentes de tensão cisalhante no fluido
$\tau_{yz} = \tau_{zy}$	-	Componentes de tensão cisalhante no fluido
$\tau_{zx} = \tau_{xz}$	-	Componentes de tensão cisalhante no fluido
$v$	-	Função teste
$\varphi$	-	Ângulo de carga
$\Omega$	-	Domínio
$\omega$	-	Velocidade angular do rotor

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Revisão Bibliográfica . . . . .	2
1.3	Objetivo . . . . .	12
1.4	Organização do Texto . . . . .	13
<b>2</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO DO MANCAL HIDRODINÂMICO RADIAL</b>	<b>14</b>
2.1	Definição dos Parâmetros de um Mancal . . . . .	14
2.2	Dedução da Equação de Reynolds . . . . .	16
2.2.1	Equação da Conservação da Massa . . . . .	17
2.2.2	Equação da Quantidade de Movimento . . . . .	20
2.2.3	Equações de Navier-Stokes . . . . .	22
2.2.4	Equação de Reynolds . . . . .	24
2.2.5	Equação de Reynolds para Carregamento Estático . . . . .	26
2.3	Resolução da Equação de Reynolds pelo Método de Elementos Finitos . . . . .	26
2.3.1	Forma Fraca da Equação de Reynolds . . . . .	26
2.3.2	Utilização de Elementos Finitos Isoparamétricos . . . . .	29
2.3.3	Capacidade de Carga . . . . .	31
2.3.4	Resultados do Mancal Hidrodinâmico Estático . . . . .	32
<b>3</b>	<b>PROGRAMA <math>(hp)^2</math>FEM</b>	<b>38</b>
3.1	Introdução . . . . .	38
3.2	Arquivos de Entrada . . . . .	40
3.3	Estruturas de Dados . . . . .	40
3.4	Documentação . . . . .	43

<b>4</b>	<b>LUBRIFICAÇÃO ELASTOHIDRODINÂMICA</b>	<b>44</b>
4.1	Introdução . . . . .	44
4.1.1	Teoria EHD . . . . .	44
4.2	Algoritmo EHD . . . . .	47
4.2.1	Entrada de Dados . . . . .	48
4.2.2	Pressão Hidrodinâmica . . . . .	48
4.2.3	Fator de Excentricidade . . . . .	49
4.2.4	Força Nodal . . . . .	49
4.2.5	Deformação Elástica . . . . .	49
4.3	Algoritmo de Otimização . . . . .	51
4.4	Resultados . . . . .	54
4.4.1	Resultados da Otimização para Incremento de Folga Radial Positivo .	54
4.4.2	Otimização com condição de contorno de Reynolds . . . . .	65
4.4.3	Otimização com malha refinada . . . . .	67
4.4.4	Resultados da Otimização para Incremento de Folga Radial Negativo	70
<b>5</b>	<b>COMENTÁRIOS FINAIS</b>	<b>84</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>86</b>
<b>A</b>	<b>-Método de Newton-Raphson</b>	<b>91</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação

A constante busca da indústria automobilística por inovação e ganhos de mercado tem impulsionado o desenvolvimento de motores com desempenho e eficiência cada vez maiores, e com consumo, custos e peso cada vez menores. Uma prática que atualmente tem tomado força na indústria automotiva é o aumento da pressão de combustão nos cilindros (PCP ou Peak Cylinder Pressure), com o objetivo de alcançar as restrições impostas pelas leis de emissões em todo o mundo. Neste contexto, também surge a constante exigência, por parte dos consumidores, de reduzir o consumo de combustíveis. Estes fatos têm levado a indústria automotiva a uma constante busca por novas soluções técnicas e idéias inovadoras. Altos níveis de PCP é uma das soluções técnicas para reduzir emissões. No entanto, esta solução resulta em maiores forças aplicadas aos mancais de virabrequins e bielas. Deste modo, os mancais devem ser projetados para resistir a estas condições.

Para permitir tais realizações, a simulação computacional e algoritmos de otimização desempenham um papel fundamental e são ferramentas usadas para se alcançar tais objetivos. Estas técnicas fornecem informações confiáveis acerca das características do mancal que podem ser usadas no desenvolvimento de melhores componentes. Por exemplo, a espessura do filme de óleo é um indicador da durabilidade do mancal, pois quanto menor a espessura maior é a probabilidade de haver contato entre o eixo e o alojamento, gerando assim desgaste. A pressão de filme de óleo está diretamente relacionada com as solicitações que a estrutura irá sofrer e que podem eventualmente levar à falha do componente. É desejável ter um pico de

pressão menor, mas com uma distribuição de pressão tal que seja suficiente para equilibrar as cargas impostas. A perda de potência por atrito viscoso está relacionada com o maior consumo de combustível do motor. Por fim, a velocidade do eixo tem impacto direto no ruído gerado pelo motor (Goenka e Oh 1986). Apenas listando alguns dos parâmetros que podem ser avaliados computacionalmente, é possível verificar o grande volume de informações que estas técnicas podem fornecer para auxiliar o projeto destes componentes, justificando assim seu estudo.

Os mancais são importantes elementos mecânicos presentes não apenas em motores de combustão interna, mas em uma grande variedade de máquinas e sistemas, tipicamente onde há movimentos de rotação. De maneira geral, suas funções são a de suportar, guiar e diminuir o atrito do movimento entre partes de máquinas, evitando o contato entre elas. Ao longo dos anos, diversos estudos sobre mancais e lubrificação hidrodinâmica vêm sendo realizados. A maioria deles envolvem simulações computacionais ou práticas experimentais, na busca pelo entendimento dos fenômenos físicos que ocorrem neste componente e assim realizar melhorias nos projetos.

Vários tipos de mancais podem ser encontrados nas mais variadas aplicações. Podem ser classificados em: mancais axiais, mancais radiais, mancais hidrodinâmicos, mancais de elementos rolantes, dentre outros. No entanto, o presente trabalho se restringe ao estudo de mancais hidrodinâmicos radiais.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Os princípios da lubrificação por filme de óleo são hoje bem entendidos e utilizados amplamente. As bases desta disciplina foram lançadas no final do século XIX, conforme relatado por Pinkus 1987 e sumarizado a seguir.

Três nomes foram os responsáveis pela descoberta e formulação dos princípios da lubrificação hidrodinâmica válidos até os dias de hoje: o russo Nicolai P. Petrov (1836-1920) e dois britânicos, Beauchamp Tower (1845-1904) e Osborne Reynolds (1842-1912). Durante os anos

de 1883 a 1886 foram concretizados por estes nomes, de forma independente, as bases tanto teóricas quanto experimentais desta área da tribologia. A elaboração dos conceitos iniciou-se com Petrov, quando formulou em 1883 a relação entre força de atrito e os parâmetros de um mancal. No mesmo período, o Comitê de Pesquisas em Atrito a Altas Velocidades, formado pelo Instituto de Engenheiros Mecânicos da Grã-Bretanha, nomeou Tower para conduzir uma série de experimentos em atrito de mancais ferroviários. Estes famosos experimentos, realizados nos anos de 1883 e 1884, levaram ao descobrimento da presença de pressão hidrodinâmica no filme de fluido de um mancal.

Petrov e Tower formularam os conceitos através de experimentos, mas não havia uma base teórica sólida que explicasse os resultados experimentais. Esta formulação teórica foi elaborada por Reynolds, quase que simultaneamente aos experimentos, porém sem ter conhecimentos destes. O artigo técnico escrito por Reynolds contendo a dedução da equação diferencial, que hoje leva seu nome, foi lido na Royal Society em 1886. Neste trabalho, a equação aparece da seguinte na forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left[ (U_0 + U_1) \frac{dh}{dx} + 2V \right], \quad (1.1)$$

onde  $x$  é a coordenada na direção de  $U$ ,  $z$  é a coordenada normal a  $U$ ,  $h$  é a espessura de filme de óleo,  $p$  é a pressão hidrodinâmica,  $\mu$  é a viscosidade do fluido,  $U_0$  e  $U_1$  as velocidades lineares do alojamento e do eixo, respectivamente, e  $V$  é a velocidade na direção normal.

Devido à dificuldade se obter uma solução para esta equação diferencial parcial não homogênea de segunda ordem, foram estudadas, no início, apenas versões simplificadas da mesma. Uma das abordagens é considerar o mancal como infinitamente longo, e esta solução analítica foi apresentada por Sommerfeld em 1904, embora Reynolds a havia proposto e tentado uma solução em seu artigo de 1886, mas sem sucesso. Oposta à idéia do mancal infinitamente longo, surge a proposta de solução da equação de Reynolds para um mancal infinitamente curto por Michael em 1929 e Cardullo em 1930. No entanto, a solução completa só foi alcançada em 1952 por Ocvirk.

Embora útil para uma primeira análise, estas soluções analíticas não forneciam dados

quantitativos confiáveis acerca do comportamento do mancal que pudessem ser usados por projetistas. Algumas outras formas de solução foram propostas como Hays 1959 que usou princípios do cálculo variacional, obtendo soluções por séries para o problema bi-dimensional.

A primeira solução da equação de Reynolds usando computadores foi feita por Pinkus 1956, que avaliou mancais circulares e elípticos para várias relações de  $L/D$ , onde  $L$  e  $D$  são a largura e o diâmetro do mancal, respectivamente. A partir de então vários trabalhos buscaram a solução da equação por meio de métodos computacionais. Um importante exemplo é o artigo de Booker e Huebner 1972 onde aplicou-se o método de elementos finitos ao problema geral de lubrificação líquida usando o método direto para o caso unidimensional e o método indireto ou variacional para o caso bidimensional. Mostrou-se que o método é capaz de tratar todos os efeitos encontrados neste tipo de problema, sendo que irregularidades na geometria foram facilmente tratadas pelo método, mostrando o potencial para aplicação em problemas reais e complexos de lubrificação por fluido.

Durante muito tempo o projeto de mancais foi feito considerando-se o eixo e o alojamento como corpos rígidos. No entanto, como apresentado em Carl 1963, deformações significativas dos componentes ocorrem em operação devido à pressão.

Em mancais hidrodinâmicos, a pressão do filme óleo presente entre as partes móveis, responsável pela separação dos elementos, é gerada pelo próprio movimento relativo entre o eixo e o alojamento. Esta pressão é responsável por suportar o carregamento aplicado ao eixo. Dependendo da magnitude da pressão hidrodinâmica pode ocorrer deformação do alojamento do mancal, dando origem à lubrificação Elastohidrodinâmica (Elastohydrodynamic lubrication - EHL ou EHD). O problema EHD consiste em: dados dois sólidos elásticos, com rotações independentes, separados por um filme de óleo e pressionados um contra o outro por uma força externa, encontrar a distribuição de pressão e a região de contato, levando em conta os efeitos da pressão nas propriedades do fluido e na geometria dos sólidos. É então possível obter o perfil da espessura do filme de óleo no mancal.

O estudo da teoria EHD data de 1936 quando Pepller estudou a lubrificação no contato entre dentes de engrenagens (Oh 1984). O primeiro trabalho notável deve-se a Ertel em

1939, que incorporou os efeitos elásticos e de viscosidade em função da pressão na análise de lubrificação (Hamrock, Steven e Jacobson 2004). Os resultados obtidos estavam mais perto daqueles encontrados experimentalmente para engrenagens e mancais com elementos rolantes do que os resultados obtidos utilizando-se a teoria hidrodinâmica. A análise EHD baseia-se no cálculo da pressão do lubrificante e da espessura do filme de óleo, sendo que estes parâmetros estão relacionados pela equação de Reynolds e pela equação da elasticidade. Há várias fontes de não-linearidade na formulação EHD, tais como a dependência da espessura do filme em relação à pressão do lubrificante, a dependência da viscosidade em relação à pressão (não tratada neste trabalho) e a restrição de pressão positiva, o que torna o problema de difícil solução.

O'Donoghue, Brighton e Hooke 1967 apresentou uma solução para o problema de lubrificação hidrodinâmica para mancais de deslizamento, levando em consideração as deformações elásticas do eixo e do alojamento, considerando fluido isoviscoso em um mancal infinitamente longo. A distribuição de pressão hidrodinâmica foi encontrada a partir das condições de contorno do problema e por um processo de tentativa e erro, através do qual se definiu o ângulo de pressão de cavitação. A deformação do mancal e do eixo foi então calculada utilizando-se esta distribuição de pressão expressa por séries de Fourier. O processo se inicia com um fator de excentricidade baixo e aplicando-se um coeficiente de relaxação, que é reduzido a medida que o fator de excentricidade aumenta, de modo a obter convergência. Os resultados mostraram uma redução no pico de pressão, bem como uma redução na relação pico de pressão/pressão média, e um aumento na espessura mínima de filme de óleo no mancal flexível quando comparado com um mancal rígido.

Oh e Huebner 1973 demonstraram como os efeitos da deformação elástica na performance de mancais radiais podem ser calculados pra geometrias tridimensionais de mancais reais. A equação de elasticidade do modelo tridimensional foram resolvidas simultaneamente à equação hidrodinâmica, usando um esquema iterativo direto de modo a prever a deformação do alojamento e a distribuição de pressão no filme de óleo. Foi aplicado o Método dos Elementos Finitos (FEM) para ambos os problemas por tratar bem as irregularidades da geometria



de um mancal real e a facilidade de acoplar a equação de elasticidade e hidrodinâmica com uma metodologia unificada. O esquema iterativo apresentado foi efetivo para fatores de excentricidade de até 1,15. Os resultados mostraram que a distribuição de pressão elasto-hidrodinâmica difere significativamente da distribuição de pressão obtida sem a consideração de deformação elástica.

LaBouff e Booker 1985 propuseram um tratamento unificado para o problema hidrodinâmico e elastohidrodinâmico usando o Método de Elementos Finitos, capaz de avaliar mancais com furos ou canais de alimentação de óleo, bem como irregularidades na superfície, tais como *barrelling* e *hourglassing*. A formulação de elementos finitos utilizada foi a mesma detalhada por Booker e Huebner 1972. O acoplamento dos problemas hidrodinâmico e estrutural foi realizado da seguinte forma. É feita uma suposição inicial dos parâmetros necessários para caracterizar a posição de equilíbrio do eixo em um determinado tempo. A velocidade do eixo no ponto de equilíbrio é então calculada juntamente com os esforços nodais e a condição de cavitação. Usa-se os valores de esforços nodais para calcular a deformação da estrutura, que por sua vez, é utilizada para o cálculo dos novos esforços e condição de cavitação, até que a convergência seja atingida. Dois critérios de convergência foram usados neste estudo. O primeiro foi a diferença da deflexão nodal entre iterações sucessivas, que deveria estar abaixo de um fração específica da espessura do filme de óleo. O segundo foi a diferença entre valores de pressão nodal de duas iterações sucessivas estar abaixo de uma fração da máxima pressão de filme. Várias técnicas foram aplicadas para melhorar a convergência do algoritmo, como a limitação dos valores de deflexão nodal, ponderação destes valores pela média das iterações anteriores, entre outras. Os resultados mostraram significativas reduções do pico de pressão no mancal elástico, em comparação com o mancal rígido, para carregamento cíclico e estático, bem como um aumento na espessura do filme do óleo no caso de carregamento variável (a diferença da espessura de filme de mancais elásticos e rígidos foi mínima no caso de carregamento estático).

O método de Newton-Raphson foi utilizado por Oh e Goenka 1985 em conjunto com o algoritmo de Murty e o método dos elementos finitos para analisar as características da

lubrificação elastohidrodinâmica de uma biela de motor de combustão interna sob carregamento dinâmico. O método de Newton-Raphson é capaz de tratar de forma robusta as não-linearidades que surgem do acoplamento da equação de Reynolds com a equação de elasticidade. A região de cavitação foi encontrada usando a formulação de complementaridade, na qual a pressão do lubrificante em determinada região é governada pela equação de Reynolds ou pela equação trivial  $p = 0$ . Logo, a região de interesse é dividida em duas sub-regiões, uma onde a pressão é maior que zero (equação de Reynolds pode ser aplicada) e uma outra subregião onde a pressão é menor que zero. Nesta última, assume-se a pressão igual a zero, visto que uma pressão negativa não tem sentido físico na análise em questão. Como as soluções para carregamento dinâmico são dependentes do tempo, foi utilizado o esquema implícito, que trata a pressão e a excentricidade como incógnitas, visto que a acumulação de erros de arredondamento são mais prováveis no sistema explícito. A distribuição de pressão apresentou um comportamento bimodal decorrente da deformação elástica do alojamento. Verificou-se também que, devido à deformação, a distribuição de espessura de filme de óleo apresentou uma região plana no ponto de máxima carga. O tempo de simulação do componente real foi de 36 horas, o que levou os autores a desenvolver um modelo simplificado, mas com uma eficiência computacional maior.

Este modelo, publicado em 1986 (Goenka e Oh 1986), foi chamado pelos autores de FEHD (Fast Elastohydrodynamic Analysis) para diferenciar do modelo anterior chamado de DEHD (Detailed Elastohydrodynamic Analysis). Este modelo assume que a viscosidade do fluido aumenta exponencialmente com a pressão e a solução obtida pelo método de Newton-Raphson. Para diminuir o tempo de simulação, a pressão foi considerada como a multiplicação de duas funções independentes, uma na coordenada  $\theta$  e outra na coordenada  $z$ , isto é,

$$p(\theta, z) = g(\theta)f(z), \tag{1.2}$$

onde  $f(z)$  é uma função conhecida que satisfaz as condições de contorno do problema. Esta hipótese implica que apenas a função  $g(\theta)$  deve ser determinada. Assumindo uma distribuição

parabólica para  $g(\theta)$ , a solução foi obtida em um tempo 50 vezes menor que no algoritmo DEHD. A variação dos valores de pico de pressão obtidos pelo métodos FEHD e DEHD foi de 13% na região de máximo carregamento, sendo que nas outras regiões a diferença não foi significativa. No entanto, a espessura de filme apresentou diferenças significativas entre os modelos, devido à imposição de um perfil parabólico para  $g(\theta)$ .

Usando um método iterativo para avaliar o comportamento de mancais em condições reais de velocidade e carregamento dinâmico, Fantino e Frene 1985 compararam dois mancais diferentes, um retirado de motor a gasolina e outro de um motor diesel. Ambos foram analisados com o modelo rígido e flexível. A pressão hidrodinâmica foi encontrada integrando-se analiticamente a equação de Reynolds com a hipótese de mancal curto. A deformação elástica foi calculada pelo Método dos Elementos Finitos usando uma malha com elementos cúbicos isoparamétricos. A matriz de rigidez de cada elemento foi obtida por integral gaussiana e combinadas para formar a matriz de rigidez  $[K]$  do mancal como um todo. A integração da pressão hidrodinâmica gerou o vetor de forças nodais  $[F]$ . Os deslocamentos foram então obtidos pela solução da equação

$$[F] = [K][\delta]. \quad (1.3)$$

Os deslocamentos calculados foram inseridos na equação de Reynolds pela expressão de espessura de filme de óleo e a pressão calculada novamente. Este processo iterativo foi realizado até a convergência, utilizando-se a técnica de sub-relaxação para garantir estabilidade da solução. Fatores de excentricidade de até 3,8 foram encontrados para o caso do mancal flexível de motor a gasolina. A comparação dos dois mancais mostrou que: o torque no modelo flexível aumenta em comparação ao rígido para os dois tipos de motor; o fluxo axial aumenta significativamente no motor a gasolina, mas não varia para o motor diesel; a espessura mínima de filme de óleo diminuiu em cerca de 15% no motor a gasolina e aumentou em 20% no motor diesel. Estas variações de comportamento devem-se às diferenças nas curvas de carregamentos.

O método de sub-relaxação, usado para garantir a convergência limitando a mudança

da espessura de filme ao longo das iterações, apesar de ser facilmente aplicável é muito dependente do fator aplicado, e sob grandes carregamentos pode ser difícil garantir a convergência. Com um carregamento variável, é necessário um fator de relaxação também variável que assegure a convergência durante todo o ciclo, podendo consumir grande quantidade de recursos computacionais e não ser sempre convergente para carregamentos severos.

Um algoritmo mais robusto e rápido foi desenvolvido por McIvor e Fenner 1989 utilizando o método de Newton-Raphson e elementos finitos de alta ordem ao invés de elementos lineares, o que permite obter soluções com a mesma precisão com menos nós. Foram usados elementos isoparamétricos de 8 nós para a malha de fluido e elementos isoparamétricos de 20 nós para a análise estrutural. Para obter a matriz de rigidez da estrutura, ao invés de se aplicar carregamentos unitários ao nós e compatibilizar o efeito na estrutura toda, foi aplicado o princípio da condensação, onde a matriz pode ser montada apenas para o deslocamento radial dos nós da superfície e não da estrutura toda. Três métodos baseados em Newton-Raphson foram investigados: o método de Newton-Raphson convencional (NR), o método de Newton-Raphson modificado (MNR) e o método de Newton-Raphson rápido (FNR). No método NR, a matriz de coeficientes, que relaciona a variação das equações do problema em função das variáveis, é modificada a cada iteração até que se obtenha a convergência. No método MNR, a matriz é modificada apenas quando há uma redefinição da região de cavitação. Já o método FNR foi desenvolvido pelos autores para diminuir o tempo computacional necessário. Consiste em definir uma matriz inicial considerando que nenhum dos nós está em condição de cavitação. A medida que a região de cavitação é encontrada, uma nova matriz é criada utilizando-se apenas as linhas e colunas dos nós fora da zona de cavitação, mantendo a matriz inicial. A combinação do método FNR com elementos de alta ordem obteve tempos de simulação mais que duas ordens de magnitude menores que as análises similares realizadas anteriormente.

A Tabela 1.1 resume as abordagens dos autores citados quanto ao método de solução da equação de elasticidade (Modelo de Elasticidade), método de solução da equação de Reynolds (Modelo de Lubrificação) e método de solução das equações.

Tabela 1.1: Modelos de teoria EHD utilizado por diversos autores.

Autor/Ano	Modelo de Elasticidade	Modelo de Lubrificação	Método de Solução
O'Donoghue et al. 1967	Analítico	Infinitamente longo	Iterativo + Relaxação
Oh e Huebner 1973	FEM 3D	FEM 2D	Iterativo
Fantino e Frene 1985	FEM 3D	Infinitamente curto	Iterativo + Relaxação
LaBouff e Booker 1985	FEM 2D	FEM 2D	Iterativo
Oh e Goenka 1985	FEM 3D	FEM 2D	Newton-Raphson
Goenka e Oh 1986	FEM 3D	Princípio de minimização	Newton-Raphson
McIvor e Fenner 1989	FEM 3D	FEM 2D	Newton-Raphson

A maioria dos modelos EHD não trata a conservação de massa na cavitação de filmes lubrificantes, pois considera-se que seu impacto no cálculo de espessura de filme e pressão hidrodinâmica é pequeno. No entanto, Kumar e Booker 1991 verificaram que os efeitos desta consideração no fluxo de lubrificante e na perda de potência do mancal podem ser grandes, principalmente quando se considera efeitos de temperatura, e propuseram então um modelo que pode ser integrado à formulação de elementos finitos. Em um segundo artigo (Kumar e Booker 1991), o algoritmo foi comparado com dados numéricos e experimentais já publicados buscando a validação do modelo. Os testes mostraram, que em alguns casos, há grande diferença nos resultados considerando a conservação de massa, porém em outros casos a consideração não tem efeito, ou seja, o modelo não acrescenta informações. Mostrou-se necessário um estudo para avaliar em que casos a conservação de massa na cavitação deve ser considerada e em quais ela pode ser negligenciada.

Similarmente, Bonneau et al. 1995 incluíram efeitos de inércia e um modelo de conservação de massa na análise EHD e compararam com o modelo de Goenka de uma biela da General Motors. Os efeitos de inércia, além de modificar a forma da distribuição da espessura de filme, também reduziu o valor do seu mínimo, mostrando que não podem ser desconsideradas e que, juntamente com a consideração da conservação de massa, tornam a modelagem suficientemente precisa para projetar e otimizar a geometria e posição dos pontos de fornecimento de lubrificante.

Uma formulação mais detalhada da conservação de massa foi feita por Boedo e Booker

1997, considerando a rugosidade das superfícies e forças de corpo provenientes do movimento da estrutura, esta última sendo importante em velocidades típicas dos motores automotivos. Já os efeitos da rugosidade na performance do mancal foram mínimos.

Um modelo EHD nodal foi desenvolvido por Garnier, Bonneau e Grente 1999 para examinar o comportamento dinâmico do conjunto bloco/virabrequim de um motor automotivo de quatro cilindros em linha, com um modelo bi-dimensional do fluido e tri-dimensional da estrutura, utilizando o método de Newton-Raphson e o Método de Elementos Finitos para a solução. Este trabalho mostrou a viabilidade de se aplicar a teoria EHD para todos os mancais de um motor, de modo a obter e otimizar os parâmetros de funcionamento dos componentes.

Vários trabalhos foram publicados considerando-se, além das deformações elásticas causadas pela pressão, as deformações de origem térmica, bem como a influência da temperatura nas propriedades do fluido. Esta abordagem, conhecida como Termoelastohidrodinâmica (TEHD) foi desenvolvida por vários autores como Mounmousseau, Fillon e Frêne 1998, Kim e Kim 2001, Fatu M. Hajjam 2006, e Michaud, Souchet e Bonneau 2007.

Já os trabalhos envolvendo otimização de mancais são menos numerosos, sendo que não é do conhecimento do autor algum trabalho que use a teoria EHD em conjunto com uma rotina de otimização. Seireg e Ezzat 1969 demonstrou a viabilidade de se aplicar uma metodologia automatizada para a seleção do comprimento, folga radial e viscosidade do lubrificante, que otimiza a performance de um mancal hidrodinâmico sujeito a carregamento e velocidade constantes ou variáveis. O problema de otimização foi montado de forma a minimizar o fornecimento de óleo e o aumento de temperatura do fluido e utilizou métodos baseados em gradiente para encontrar a solução.

A partir da observação de que no ser humano as juntas de articulação do fêmur com a bacia, que pode ser considerado como um mancal esférico, tem um formato não esférico resultando em um desempenho melhor, Goenka e Booker 1983 levantaram a hipótese de que mancais não cilíndricos poderiam ter uma performance melhor que o mancal comum (idealmente cilíndrico). Apesar de haver diversos trabalhos buscando a otimização de forma de

mancais com carregamento estático, até aquele momento nenhum estudo de otimização de mancais com carregamento dinâmico havia sido feito. Os raios do eixo e do alojamento, ao invés de constantes, foram considerados como sendo uma funções de dois sistemas de coordenadas, um fixo no eixo e outro fixo no alojamento. Como funções arbitrárias aumentariam significativamente o tempo de processamento até que a solução ótima fosse encontrada, essas funções foram escolhidas de forma a se obter apenas eixos e alojamentos elípticos. O objetivo da otimização foi aumentar a espessura mínima do filme de óleo. Para isso, plotaram uma curva de nível relacionando a espessura mínima de filme com várias excentricidades do eixo e do alojamento. Os valores ótimos de excentricidade do eixo e do alojamento encontrados foram 0,0 e 1,5 respectivamente, ou seja, um eixo circular e um alojamento elíptico. Para estes valores otimizados, a espessura mínima de filme de óleo aumentou por um fator de 36 e houve uma redução de 5 vezes na máxima pressão de pico, quando comparados com um mancal cilíndrico convencional.

### 1.3 Objetivo

Dado um mancal hidrodinâmico radial e a carga à qual o mesmo será submetido, é possível, através de técnicas matemáticas, determinar a forma ótima da superfície de deslizamento que garanta uma melhor performance e uma maior vida útil do mesmo.

A revisão da bibliografia mostra que não há nenhum trabalho publicado que utilize a formulação EHD, juntamente com uma metodologia de otimização para mancais radiais. No entanto, como já visto, as deformações elásticas do alojamento têm grande influência no desempenho destes componentes, de modo que um algoritmo de otimização que leve esses efeitos em conta é de grande utilidade e importância na fase de projeto. Sabendo desta lacuna, neste trabalho foi proposto desenvolver uma metodologia que permita determinar a forma ótima da superfície de deslizamento de mancais hidrodinâmicos, levando-se em conta as deformações do alojamento (teoria EHD). Essa metodologia foi incorporada a um conjunto de programas desenvolvidos em ambiente Matlab.

## 1.4 Organização do Texto

Essa dissertação está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2, descreve-se a dedução da equação de Reynolds e sua aproximação pelo MEF, finalizando com os resultados obtidos com a implementação do solver de elementos finitos em Matlab. O Capítulo 3 descreve as principais características do programa  $(hp)^2$ FEM, desenvolvido em Matlab para o Método de Elementos Finitos (FEM) de alta ordem. Este programa é empregado nesse trabalho para a implementação da solução da equação de Reynolds e no algoritmo de EHD para a solução da parte elástica do mancal. O Capítulo 4 apresenta o algoritmo de EHD e de otimização da superfície do mancal e os resultados obtidos. No capítulo 5 são feitos os comentários finais.

O Apêndice A aborda a aplicação do método de Newton-Raphson para o problema de elastohidrodinâmica, que foi implementado mas nenhum resultado pôde ser obtido.



# 2 MODELO MATEMÁTICO DO MANCAL HIDRODINÂMICO RADIAL

Neste capítulo, apresenta-se a modelagem matemática de um mancal hidrodinâmico radial, incluindo a dedução da equação de Reynolds, a partir das equações de Navier-Stokes, e a aproximação pelo método dos elementos finitos. A formulação que será apresentada foi baseada em Fox e Mcdonald 2002, Duarte Jr. 2005 e Gerardin 2005.

## 2.1 Definição dos Parâmetros de um Mancal

A Figura 2.1 apresenta as características geométricas de um mancal radial com raio do alojamento  $R$ , raio do eixo rotor  $r$  e comprimento  $L$ .

Define-se folga radial  $c$  como a distância entre a superfície do eixo e a superfície do alojamento, quando ambos estão concêntricos, ou seja,

$$c = R - r. \tag{2.1}$$

O rotor gira no sentido anti-horário com velocidade angular  $\Omega$  como mostrado na Figura 2.2. Devido às cargas aplicadas ao rotor e à rotação do mesmo, pode ocorrer desalinhamento radial do eixo em relação ao eixo do mancal (alojamento). A distância entre os centros do rotor

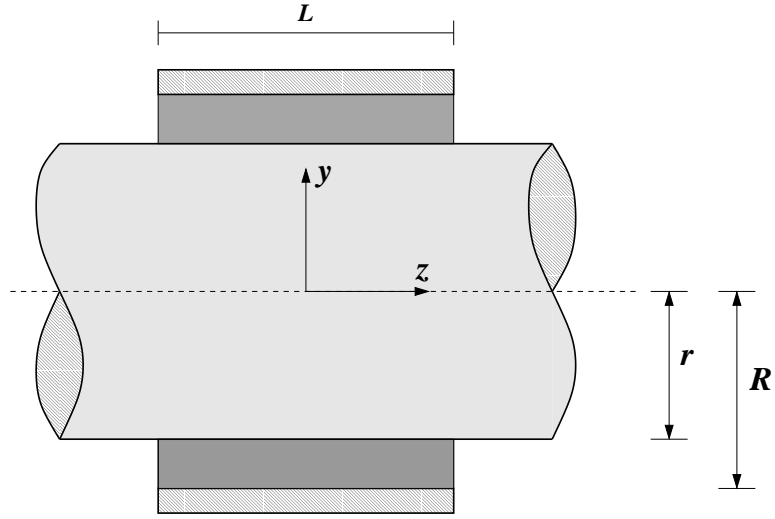


Figura 2.1: Mancal radial.

e do alojamento é chamada de excentricidade  $e$ . Define-se então o fator de excentricidade  $\varepsilon$  como a razão da excentricidade pela folga radial.

$$\varepsilon = \frac{e}{c}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (2.2)$$

É fácil perceber que a espessura do filme de óleo  $h$  varia com o ângulo  $\theta$ , que é medido a partir da linha de centros do mancal, definida como a linha que une os centros do alojamento e do rotor, como mostrado na Figura 2.2. Usando a lei dos cossenos, tem-se

$$(r + h)^2 = (r + c)^2 + e^2 - 2e(r + c) \cos(\alpha). \quad (2.3)$$

Além disso,

$$\cos(\alpha) = \cos(\pi - \theta) = -\cos(-\theta) = -\cos(\theta). \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3), tem-se

$$r^2 + 2rh + h^2 = r^2 + 2rc + c^2 + e^2 + 2er \cos(\theta) + 2ec \cos(\theta). \quad (2.5)$$

Desprezando-se os termos  $h^2$ ,  $c^2$ ,  $e^2$  e  $ec$  em (2.5), tem-se

$$h = c + e\cos(\theta) = c + c\varepsilon \cos(\theta) = c[1 + \varepsilon \cos(\theta)]. \quad (2.6)$$

Finalmente,

$$h(\theta) = c[1 + \varepsilon \cos(\theta)]. \quad (2.7)$$

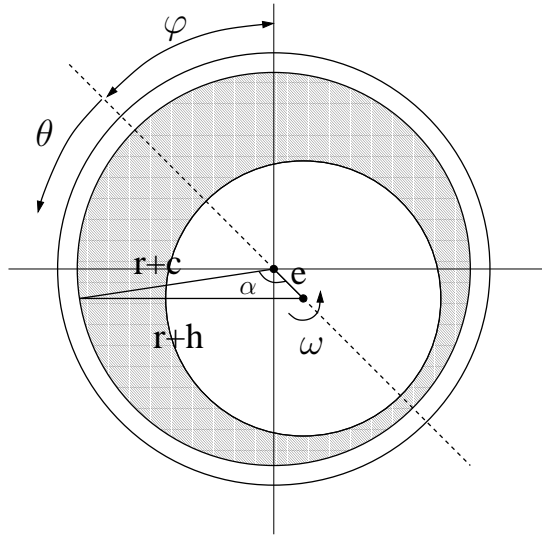


Figura 2.2: Parâmetros de um mancal radial (DuarteJr. 2005).

## 2.2 Dedução da Equação de Reynolds

A equação de Reynolds descreve o comportamento do fluido entre o rotor e o alojamento. A resolução desta equação permite determinar o campo de pressão no fluido do mancal. A seguir, apresentam-se as equações da conservação de massa, da conservação da quantidade de movimento e de Navier-Stokes, a partir das quais será deduzida a equação de Reynolds.

### 2.2.1 Equação da Conservação da Massa

Considere um volume de controle infinitesimal como ilustrado na Figura 2.3. A massa específica no centro  $O$  do volume é  $\rho$  e a velocidade é

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}, \quad (2.8)$$

sendo  $u$ ,  $v$  e  $w$  as componentes de velocidade ao longo de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

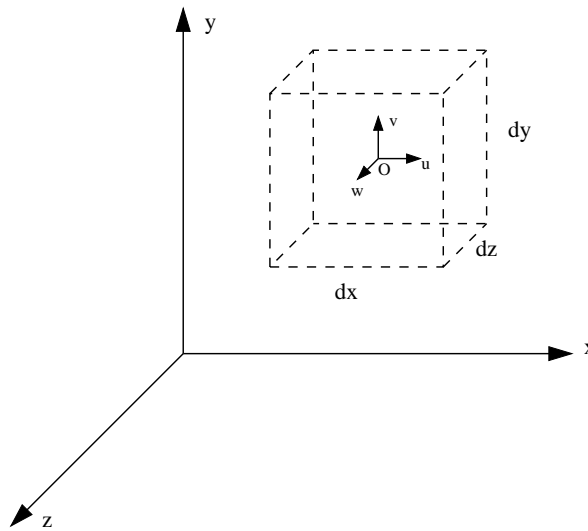


Figura 2.3: Volume de controle (Fox e Mcdonald 2002).

Avaliando a densidade na face direita da superfície do volume de controle, por expansão em série de Taylor a partir do ponto  $O$ , e desprezando os termos de ordem superior, obtém-se

$$\rho_{x+\frac{dx}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}. \quad (2.9)$$

Para a face esquerda,

$$\rho_{x-\frac{dx}{2}} = \rho - \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}. \quad (2.10)$$

Analogamente, para as componentes de velocidade  $u$  na direção  $x$ , nas faces direita e

esquerda respectivamente, tem-se,

$$u_{x+\frac{dx}{2}} = u + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{2}, \quad (2.11)$$

$$u_{x-\frac{dx}{2}} = u - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{2}. \quad (2.12)$$

As componentes  $v$  e  $w$  são avaliadas da mesma maneira.

O enunciado do Princípio da Conservação de Massa diz que a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle somada à taxa de variação de massa dentro do volume de controle deve ser igual a zero. Avaliando-se a taxa de fluxo de massa nas 6 faces, tem-se

$$\begin{aligned} \int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Big|_{+x} &= \left[ \rho + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] \left[ u + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] dydz \\ &= \rho u dydz + \frac{1}{2} \left[ u \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx dydz, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Big|_{-x} &= - \left[ \rho - \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] \left[ u - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] dydz \\ &= -\rho u dydz + \frac{1}{2} \left[ u \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx dydz, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Big|_{+y} &= \left[ \rho + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \frac{dy}{2} \right] \left[ v + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{dy}{2} \right] dx dz \\ &= \rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[ v \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy dz, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Big|_{-y} &= - \left[ \rho - \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \frac{dy}{2} \right] \left[ v - \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{dy}{2} \right] dx dz \\ &= -\rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[ v \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy dz, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}|_{+z} &= \left[ \rho + \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right] \left[ w + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right] dxdy \\
&= \rho w dxdy + \frac{1}{2} \left[ w \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dxdydz,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}|_{-z} &= - \left[ \rho - \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right] \left[ w - \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right] dxdy \\
&= -\rho w dxdy + \frac{1}{2} \left[ w \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dxdydz.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Para todas as seis faces, vem que

$$\begin{aligned}
\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} &= \left[ \left\{ u \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} + \left\{ v \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ w \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \right] dxdydz,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ou

$$\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dxdydz. \tag{2.20}$$

A taxa de variação de massa dentro do volume de controle pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz.$$

Obtem-se então a equação diferencial para a conservação de massa

$$\left[ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dxdydz = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{2.21}$$

Em notação vetorial,

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.22)$$

## 2.2.2 Equação da Quantidade de Movimento

Para se obter a forma diferencial da equação da quantidade de movimento, aplica-se a lei de Newton a uma partícula fluida infinitesimal de massa  $dm$ . Sabe-se que a resultante de forças é dada pela taxa de variação da quantidade de movimento linear, ou seja,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \text{ e } \vec{P} = \int \vec{V} dm.$$

Para um sistema infinitesimal de massa  $dm$ , tem-se

$$d\vec{F} = dm \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

A velocidade de uma partícula fluida em  $t$  é dado por  $\vec{V}_p = \vec{V}(x, y, z, t)$ . Logo,  $d\vec{V}_p$ , a variação da velocidade da partícula ao mover-se de uma posição  $\vec{r}$  para  $\vec{r} + d\vec{r}$ , é dada por

$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt.$$

A aceleração da partícula é dada por

$$\begin{aligned} \vec{a}_p &= \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \\ &= u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$d\vec{F} = dm\vec{a} = dm \left[ u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right].$$

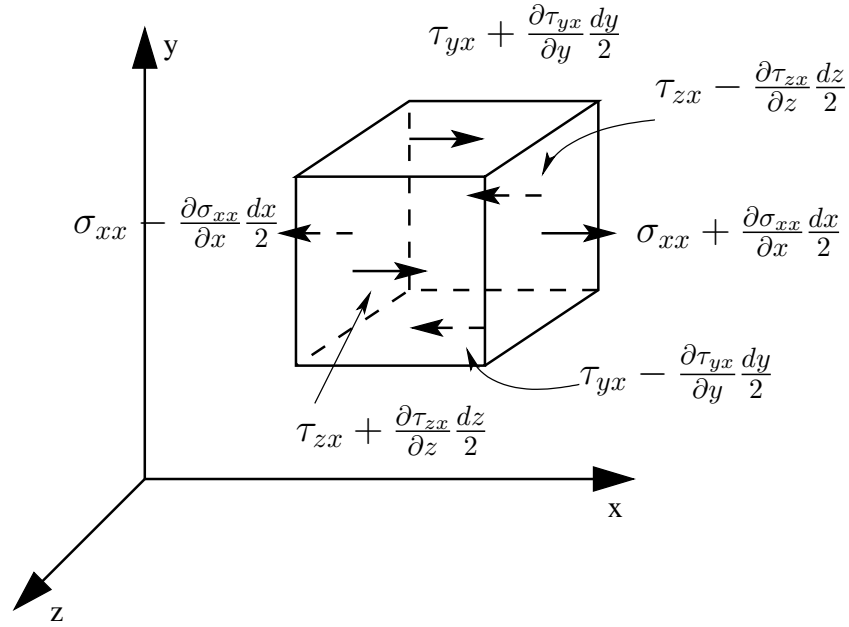


Figura 2.4: Esforços atuantes na partícula na direção  $x$ .

Considere agora as forças atuando em uma partícula de fluido, para um elemento diferencial de massa  $dm$  e volume  $dV = dxdydz$ , mostrado na Figura 2.4. No centro do elemento, as tensões são  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}$ .

Para obter a força de superfície líquida na direção  $x$ , somam-se todas as forças atuantes nessa direção. Assim,

$$\begin{aligned} dF_{S_x} = & \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dxdz \\ & - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dxdz + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy - \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy. \end{aligned}$$



Simplificando,

$$dF_{S_x} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Analogamente para as componentes de força de superfície em  $y$  e  $z$ . Supondo a força da gravidade a única força de campo atuante, obtém-se que as resultantes das forças nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  são, respectivamente

$$dF_x = dF_{B_x} + dF_{S_x} = \left( \rho f_x''' + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

$$dF_y = dF_{B_y} + dF_{S_y} = \left( \rho f_y''' + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

$$dF_z = dF_{B_z} + dF_{S_z} = \left( \rho f_z''' + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

Chega-se então à equação diferencial da quantidade de movimento

$$\rho f_x''' + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

$$\rho f_y''' + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$\rho f_z''' + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

### 2.2.3 Equações de Navier-Stokes

A equação constitutiva para um fluido newtoniano é dada por

$$\sigma_{xx} = -P + \lambda \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.23)$$

$$\sigma_{yy} = -P + \lambda \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.24)$$

$$\sigma_{zz} = -P + \lambda \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.25)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.26)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (2.27)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (2.28)$$

onde  $P$  é a pressão termodinâmica e  $\mu$  é a viscosidade do fluido.

Define-se  $\bar{p}$  como a pressão mecânica média dada por

$$\bar{p} = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{3}. \quad (2.29)$$

Substituindo (2.23), (2.24) e (2.25) em (2.29) tem-se

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} \left[ -3P + 2\mu \nabla \cdot \vec{V} + 3\lambda \nabla \cdot \vec{V} \right] = P - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} - \lambda \nabla \cdot \vec{V} = P - \nabla \cdot \vec{V} \left( \lambda + \frac{2\mu}{3} \right).$$

Para que  $\bar{p} = P$  é necessário que  $\frac{2\mu}{3} + \lambda = 0$ . Logo, tem-se que  $\lambda = -\frac{2\mu}{3}$ , onde  $\lambda$  é o segundo coeficiente de viscosidade. Esta condição é chamada de hipótese de Stokes.

Obtém-se assim as equações de Navier-Stokes como

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x''' - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y''' - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right],$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho f_z''' - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right].$$

Para o caso de escoamento incompressível com viscosidade constante, essas equações se

reduzem a

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x''' - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho f_y''' - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho f_z''' - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{array} \right. \quad (2.30)$$

## 2.2.4 Equação de Reynolds

A equação de Reynolds é deduzida a partir das equações de Navier-Stokes e da conservação de massa. Para isso, são feitas algumas hipóteses simplificadoras

### 1. Ignoram-se os efeitos de curvatura

Uma vez que  $h \ll r$ , esta hipótese se torna razoável.

### 2. Escoamento Laminar

Para mancais hidrodinâmicos convencionais, o número de Reynolds  $Re$  é da ordem de 1, bem abaixo do limite de 1000 para escoamento turbulento.

### 3. Fluido Incompressível

Para fluidos incompressíveis, tem-se que

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0.$$

### 4. Fluido Newtoniano

São válidas as equações para fluido newtoniano previamente apresentadas.

### **5. Forças de campo desprezíveis**

Na dedução das equações de Navier-Stokes, considerou-se apenas a força da gravidade como força de campo. No entanto, como as forças devido à pressão interna do mancal são muito maiores que a força gravitacional, esta pode ser desprezada.

### **6. Forças inerciais desprezíveis**

As forças inerciais podem ser desprezadas pelo mesmo motivo das forças de campo.

### **7. A velocidade do fluido na direção radial é desprezível**

### **8. A pressão não varia na direção radial**

### **9. A viscosidade não varia na direção radial**

Aplicando-se essas hipóteses, chega-se à seguinte equação

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{U}{2} h \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Rearranjando a equação anterior, obtem-se a equação de Reynolds para carregamento dinâmico.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.31)$$

Escrevendo a equação (2.31) em função do ângulo  $\theta$ , usando  $x = r\theta$ , tem-se

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.32)$$

## 2.2.5 Equação de Reynolds para Carregamento Estático

No caso estático, o qual não há variação da carga ou da rotação ao longo do tempo, a altura do filme de fluido lubrificante  $h$  é constante no tempo. Portanto, o termo que representa a variação de  $h$  no tempo é nulo. Tem-se então a equação de Reynolds para carregamento estático

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{r\omega}{2} \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (2.33)$$

ou em coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta}. \quad (2.34)$$

## 2.3 Resolução da Equação de Reynolds pelo Método de Elementos Finitos

A solução da equação de Reynolds permite encontrar a distribuição de pressão no filme de óleo lubrificante do mancal hidrodinâmico radial. Existem vários métodos de resolução desta equação, tais como Método das Diferenças Finitas e Método dos Elementos Finitos (MEF). Neste trabalho, emprega-se o MEF para a obtenção da solução apenas da equação de Reynolds para carregamento estático.

### 2.3.1 Forma Fraca da Equação de Reynolds

A forma fraca da equação (2.33) é obtida aplicando-se o Método dos Resíduos Ponderados, ou seja,

$$\int_{\Omega} v \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{r\omega}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \right] dx dz = 0, \quad (2.35)$$

onde  $v$  é a função teste.

Analisando o primeiro termo da integral de (2.35) e utilizando-se as identidades de Green vem que

$$\int_{\Omega} v \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] dx dz = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dz + \oint_{\Gamma} v \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) n_x d\Gamma. \quad (2.36)$$

Analogamente, para o segundo termo

$$\int_{\Omega} v \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] dx dz = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dx dz + \oint_{\Gamma} v \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) n_z d\Gamma, \quad (2.37)$$

sendo  $\Gamma$  o contorno do domínio  $\Omega$  e  $(n_x, n_z)$  as componentes do vetor normal em cada ponto de  $\Gamma$ .

Substituindo (2.36) e (2.37) em (2.35), chega-se a

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + v \frac{r\omega}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \right] dx dz \\ & + \oint_{\Gamma} \left[ v \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) n_x + v \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) n_z \right] d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

As integrais no contorno  $\Gamma$  são avaliadas de acordo com as condições de contorno do problema. Neste trabalho, a equação de Reynolds foi resolvida para dois tipos de condições de contorno: uma condição de simetria e outra sem simetria.

### **Mancal Completo (Sem Simetria)**

No primeiro caso, a equação de Reynolds foi resolvida para toda a superfície de deslizamento do mancal com pressão nula no contorno, como mostra a Figura 2.5, ou seja,

$$p = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma.$$

## Mancal com Simetria

No segundo caso, a equação de Reynolds foi resolvida para 1/4 de mancal, ilustrado na Figura 2.5 pela área sombreada. Nota-se que para este caso, as seguintes condições de contorno são impostas

$$\begin{aligned} p &= 0 \quad \text{em} \quad x = 0, \\ p &= 0 \quad \text{em} \quad z = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \quad \text{em} \quad x = \frac{r\theta}{2}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \quad \text{em} \quad z = \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

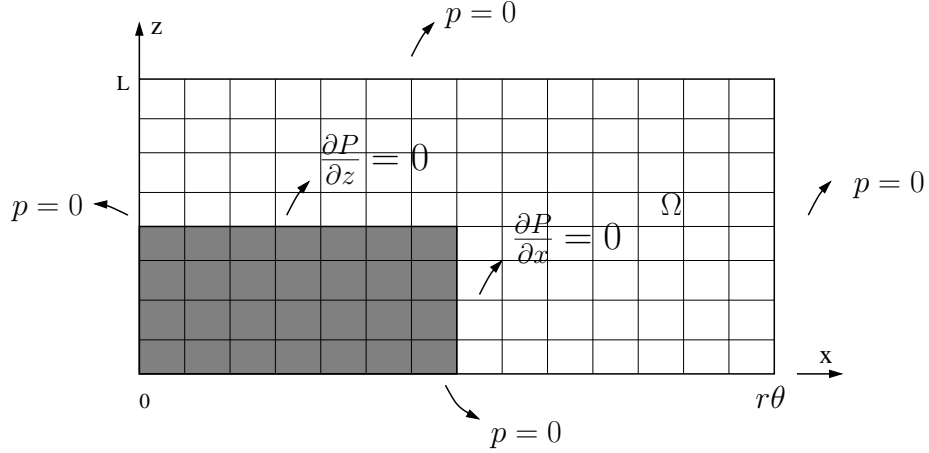


Figura 2.5: Condições de contorno.

Para ambos os casos, o termo da integral no contorno de (2.38) se anula, obtendo-se então a seguinte expressão

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right] dx dz = \int_{\Omega} v \frac{r\omega}{2} \frac{\partial h}{\partial x} dx dz. \quad (2.39)$$

Rearranjando os termos, chega-se à forma fraca da equação de Reynolds em coordenadas cartesianas

$$\int_{\Omega} h^3 \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} dx dz = \int_{\Omega} 6\mu r\omega \frac{\partial h}{\partial x} v dx dz. \quad (2.40)$$

Em coordenadas cilíndricas,

$$\int_{\Omega} h^3 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right\} d\theta dz = \int_{\Omega} 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} v d\theta dz. \quad (2.41)$$

Empregando-se uma aproximação por Galerkin com  $n$  funções de interpolação  $N_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), para a pressão  $p$  e para a função teste  $v$ , ou seja,

$$p = \sum_{i=1}^n N_i p_i \quad \text{e} \quad v = \sum_{j=1}^n N_j v_j,$$

chega-se à aproximação da forma fraca

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} h^3 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} d\theta dz = \int_{\Omega} 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} N_i d\theta dz \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.42)$$

### 2.3.2 Utilização de Elementos Finitos Isoparamétricos

Para a solução da equação de Reynolds foram usados elementos finitos isoparamétricos, que permitem representar a geometria do elemento a partir das coordenadas dos seus nós. É utilizado um elemento local de referência e as mesmas funções de interpolação são usadas para fazer o mapeamento entre elementos de referência e real. Neste trabalho, utilizou-se um elemento quadrilateral com quatro nós, como ilustrado na Figura 2.6.

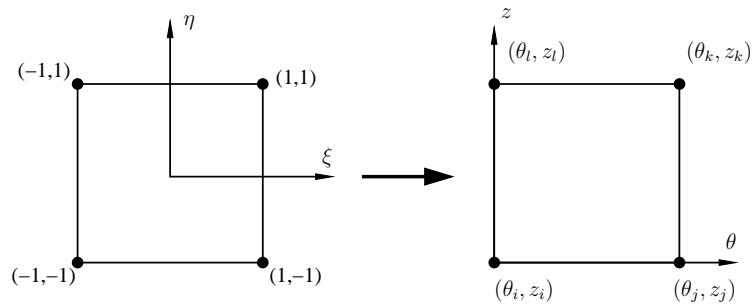


Figura 2.6: Transformação de um elemento de referência para um elemento real. (Gerardin 2005)

O mapeamento entre as coordenadas do elemento de referência para um elemento real



é dado por

$$\begin{cases} \theta(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_{nos}} N_i(\xi, \eta)\theta_i, \\ z(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{N_{nos}} N_n(\xi, \eta)Z_n, \end{cases}$$

sendo  $N_{nos}$  o número de nós do elemento,  $(\theta_i, Z_i)$  as coordenadas nodais do elemento e  $N_i$  as funções de forma ou interpolação. Neste caso, foram escolhidas as funções lineares

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned}$$

Estas funções permitem representar as coordenadas do elemento no sistema real a partir das coordenadas locais do elemento de referência. Esta abordagem simplifica a implementação do método de forma que a integração numérica de qualquer elemento pode ser feita no elemento de referência utilizando regras de integração conhecidas.

As derivadas no sistema local e global são relacionadas pela matriz Jacobiana da transformação geométrica  $[J]$ , ou seja,

$$\{\partial_{(\xi, \eta)}\} = [J] \{\partial_{(\theta, Z)}\},$$

ou ainda,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

A transformação inversa também é válida, ou seja,

$$\{\partial_{(\theta,z)}\} = [J]^{-1} \{\partial_{(\xi,\eta)}\}.$$

Deste modo, a forma fraca da equação de Reynolds para o caso de carregamento dinâmico dada na equação (2.32) é

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\Omega_e} \frac{1}{r^2} h^3 \left\{ \frac{\partial N_j}{\partial \theta} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right\} d\theta dz \right) \{p\} = \int_{\Omega_e} 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} N_j d\theta dz \\ & + \int_{\Omega_e} 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} d\theta dz. \end{aligned} \quad (2.43)$$

sendo  $\{p\}$  o vetor de incógnitas nodais do elemento.

### 2.3.3 Capacidade de Carga

A resolução da equação de Reynolds fornece a distribuição de pressão hidrodinâmica no mancal. Integrando-se a pressão do filme lubrificante sobre a área do mancal, determina-se a força de sustentação resultante ou capacidade de carga do mancal. Esta força pode ser decomposta em duas componentes, uma radial e outra tangencial, conforme mostra a Figura 2.7. Considerando-se um elemento da superfície do mancal de lado  $r d\theta$  por  $dz$ , a força resultante é  $pr d\theta dz$ . Integrando-se ao longo de todo o mancal, tem-se as expressões para as componentes radial  $F_r$  e tangencial  $F_t$  da força de sustentação, ou seja,

$$\begin{cases} F_r = \int_0^L \int_0^{2\pi} pr \cos \theta d\theta dz, \\ F_t = \int_0^L \int_0^{2\pi} pr \sin \theta d\theta dz, \end{cases}$$

para o caso sem simetria e

$$\begin{cases} F_r = 2 \int_0^{L/2} \int_0^\pi pr \cos \theta d\theta dz, \\ F_t = 2 \int_0^{L/2} \int_0^\pi pr \sin \theta d\theta dz, \end{cases}$$

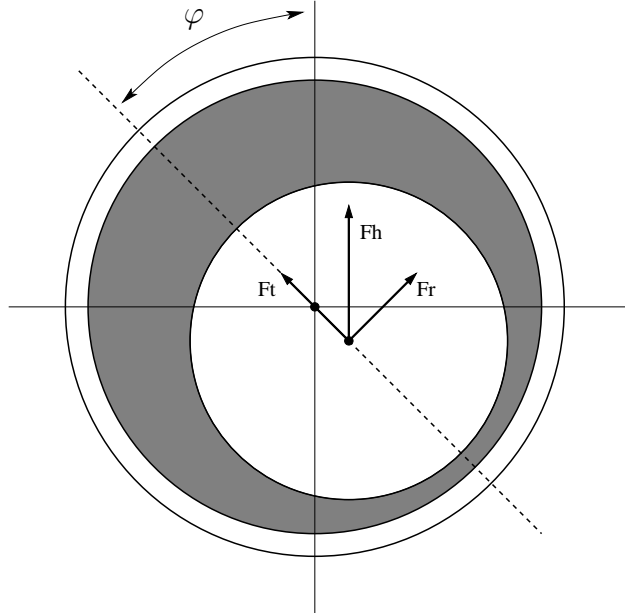


Figura 2.7: Força hidrodinâmica e suas componentes.

para o caso com simetria.

Portanto, a magnitude da força hidrodinâmica gerada pelo mancal,  $F_h$ , e que equilibra o carregamento externo aplicado, é dada por

$$F_h = \sqrt{F_r^2 + F_t^2}.$$

O ângulo entre o eixo vertical e a linha de centros do mancal é chamado ângulo de carga e é calculado pela expressão:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{F_t}{F_r}\right). \quad (2.44)$$

### 2.3.4 Resultados do Mancal Hidrodinâmico Estático

Os resultados para mancal hidrodinâmico com carregamento estático são apresentados nesta seção. Os resultados foram obtidos pela implementação da dedução mostrada anteriormente no programa  $(hp)^2$ FEM, que será apresentado com mais detalhes no próximo

capítulo.

A Tabela 2.1 apresenta as dimensões geométricas e características do mancal hidrodinâmico usado. O carregamento aplicado a este mancal é encontrado integrando-se o campo de pressão que, por sua vez, é função do fator de excentricidade.

Tabela 2.1: Parâmetros geométricos e de operação do mancal hidrodinâmico.

Rotação do rotor	$\omega = 3000$	<i>rpm</i>
Raio do eixo	$r = 36,69$	<i>mm</i>
Folga radial	$c = 0,050$	<i>mm</i>
Largura do mancal	$L = 32,00$	<i>mm</i>
Viscosidade do lubrificante	$\mu = 0,010$	<i>Ns/m<sup>2</sup></i>
Fator de excentricidade	$\varepsilon = 0,6$	

As Figuras 2.8 a 2.10 apresentam as distribuições de pressão para o mancal da Tabela 2.1 usando três malhas de elementos finitos diferentes. Nota-se que o refinamento da malha não traz mudanças significativas no valor da pressão máxima. No entanto, o tempo necessário para que a solução seja obtida aumenta consideravelmente.

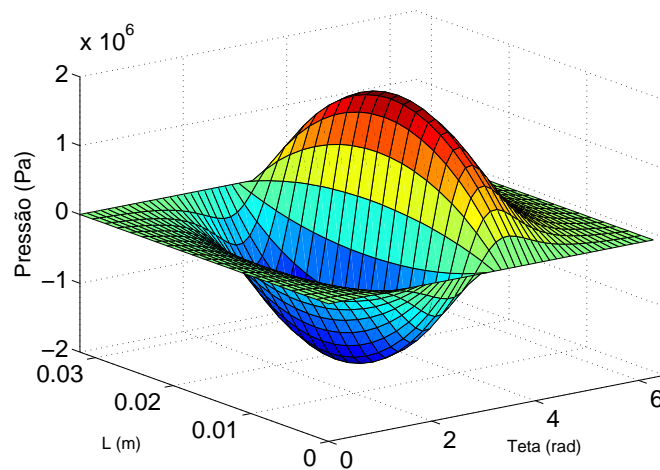


Figura 2.8: Malha com 47 elementos na direção  $\theta$  e 20 na direção  $z$ . Pressão de pico =  $1,8316 \times 10^6$  Pa. Tempo para se obter a solução = 3,5 segundos.

As Figuras 2.11 a 2.13 mostram as distribuições de pressão obtidas pela solução de apenas 1/4 do mancal para as mesmas malhas usadas anteriormente. Observa-se uma grande

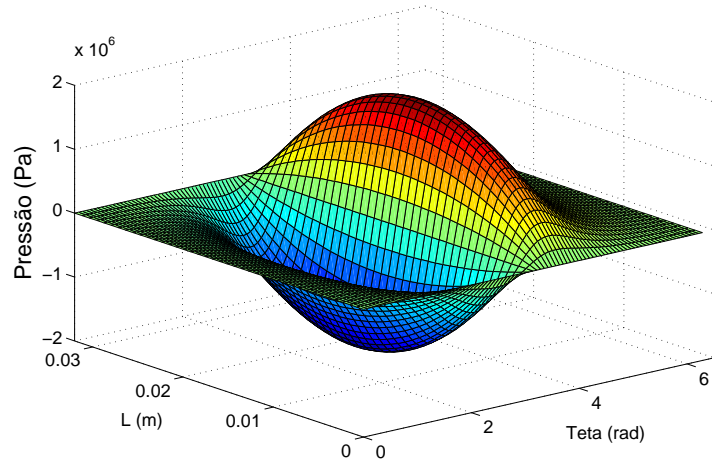


Figura 2.9: Malha com 90 elementos na direção  $\theta$  e 40 na direção  $z$ . Pressão de pico =  $1,8290 \times 10^6$  Pa. Tempo para se obter a solução = 13,9 segundos.

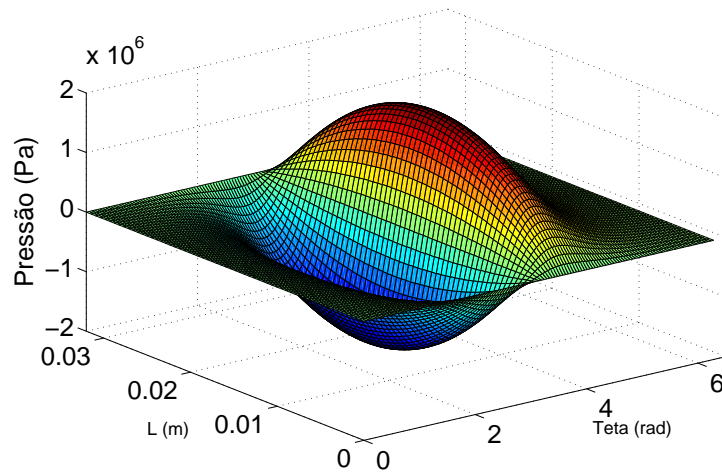


Figura 2.10: Malha com 130 elementos na direção  $\theta$  e 60 na direção  $z$ . Pressão de pico =  $1,8286 \times 10^6$  Pa. Tempo para se obter a solução = 46,9 segundos.

redução do tempo computacional, sendo que os resultados foram muito próximos dos obtidos com a malha completa.

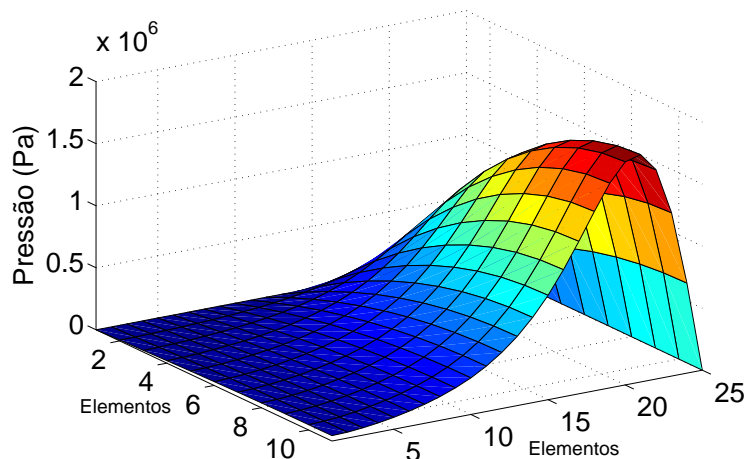


Figura 2.11: 1/4 da malha com 47 elementos na direção  $\theta$  e 20 na direção  $z$ . Pressão de pico =  $1,8317 \times 10^6$  Pa. Tempo para se obter a solução = 1,2 segundos.

Método	Precisão	Tempo(s)	Pressão Máxima (Pa)
GCP	$10^{-6}$	6,604720	1,9877e+006
GCP	$10^{-5}$	6,593835	1,9877e+006
GCP	$10^{-4}$	6,552678	1,9877e+006
GCP	$10^{-3}$	6,538386	1,9878e+006
GCP	$10^{-2}$	6,543455	1,9854e+006
GCP	$10^{-1}$	6,464720	2,0270e+006
Método Direto	-	6,310047	1,9877e+006

Tabela 2.2: Tempo necessário para a obtenção da solução com malha de 64x32 elementos.

Dois métodos de solução para o sistema de equações resultante da formulação de elementos finitos foram analisados. O primeiro deles é o método iterativo de gradiente conjugado com pré-condicionamento (GCP), e o segundo é método direto, mais comumente usado em Matlab. As Tabelas 2.2 e 2.3 apresentam os tempos necessários para se obter a solução, bem como os valores de pressão máxima para o método GCP com vários valores de precisão e para o método direto. A análise dos resultados mostra que não há diferenças significativas tanto no tempo, quanto na precisão da solução para ambos os métodos.

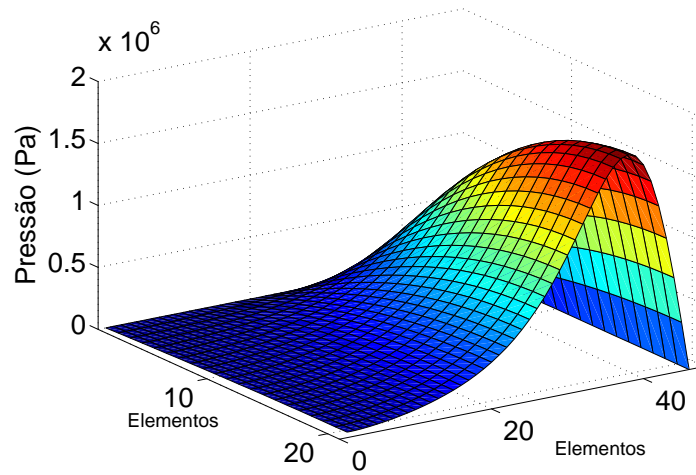


Figura 2.12: 1/4 da malha com 90 elementos na direção  $\theta$  e 40 na direção  $z$ . Pressão de pico =  $1,8316 \times 10^6$  Pa. Tempo para se obter a solução = 3,3 segundos.

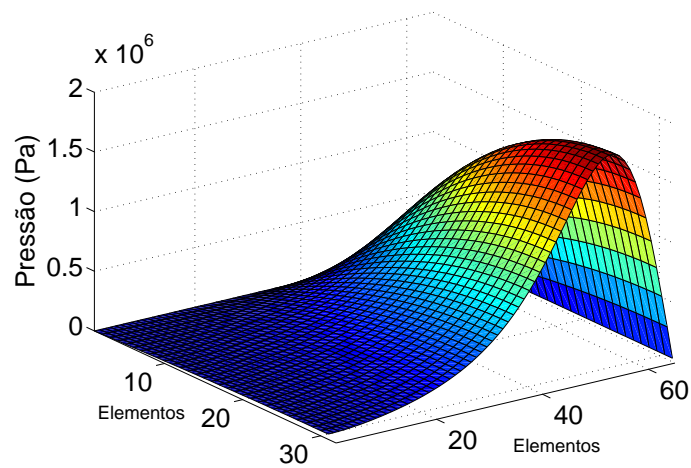


Figura 2.13: 1/4 da malha com 130 elementos na direção  $\theta$  e 60 na direção  $z$ . Pressão de pico =  $1,8286 \times 10^6$  Pa. Tempo para se obter a solução = 7,0 segundos.

Método	Tempo(s)	Pressão Máxima (Pa)	
GCP	$10^{-6}$	52,067436	1,9874e+006
GCP	$10^{-5}$	52,584977	1,9874e+006
GCP	$10^{-4}$	52,876234	1,9874e+006
GCP	$10^{-3}$	52,314260	1,9874e+006
GCP	$10^{-2}$	51,130728	1,9880e+006
GCP	$10^{-1}$	50,492411	2,0071e+006
Método Direto	-	54,219907	1,9874e+006

Tabela 2.3: Tempo necessário para a obtenção da solução com malha de 128x64 elementos.



## 3 PROGRAMA $(hp)^2$ FEM

### 3.1 Introdução

No contexto de uso intenso de simulação computacional na solução de problemas de engenharia, o desenvolvimento de programas é de fundamental importância. Facilidades de inclusão de novos modelos e técnicas de aproximação e solução, eficiência, confiabilidade e facilidades de uso são algumas das características desejáveis nos softwares de engenharia atuais. Além disso, com a disseminação de computadores no formato de clusters de vários processadores, o uso de recursos de alta performance tornam-se fundamentais.

Nos últimos 10 anos, um grupo da FEM/UNICAMP vem desenvolvendo programas de simulação computacional para problemas lineares e não-lineares de Mecânica dos Sólidos. Tem-se empregado conceitos de Engenharia de Software através do Processo Unificado Racional e Programação por Objetos. Atualmente, uma considerável biblioteca de classes em C++ está implementado para o Método de Elementos Finitos (MEF) de baixa ordem. Problemas de elasticidade linear, hiperelasticidade, plasticidade, dano, grandes deformações, otimização de forma e topologia estão implementados. Uma revisão do estágio atual da base de programas está apresentada em Silva e Bittencourt 2000.

Nos últimos anos, o grupo tem trabalhado em problemas de contato, otimização de topologia em problemas de grandes deformações e hiperelasticidade e o MEF de alta ordem, o qual permite evitar problemas comuns em métodos de baixa ordem, tais como o travamento numérico da solução. No entanto, o MEF de alta ordem requer algumas características não empregadas nos métodos de baixa ordem, tais como funções de interpolação e regras de

integração de alta ordem, diferenciação numérica, mapeamentos especiais, geração de malhas e algoritmos eficientes de solução, devido a maior densidade das matrizes envolvidas.

Assim, antes de migrar a base de programas em C++ para o MEF de alta ordem, resolveu-se implementar uma base de estruturas de dados e procedimentos em Matlab. Essa tem sido uma característica do grupo envolvido, pois as implementações em Matlab permitem testar mais facilmente os algoritmos, além de possibilitar uma rápida depuração do código em C++. Outro aspecto importante é permitir ter experiência nos procedimentos de alta ordem e conceitos de alta performance.

Denominou-se essa versão em Matlab de  $(hp)^2$ FEM, sendo que  $hp$  significa o uso de funções de interpolação dos tipos  $h$  e  $p$ , assim como *high-performance*. A idéia principal do programa  $(hp)^2$ FEM é ser um conjunto de rotinas escritas em linguagem MatLab, que torna possível a leitura de um modelo de elementos finitos e sua manipulação, além de permitir o uso de solvers para os mais diversos problemas presentes na engenharia estrutural. As características básicas do programa são:

- ter arquivos de leitura de dados e saída de resultados compatíveis com a base de programas em C++;
- usar procedimentos de tensorização de funções de interpolação de baixa e alta ordens, assim como regras de integração, usando produtos tensoriais, conforme apresentado em Bittencourt 2005; Bittencourt, Vazquez e Vazquez 2007; Bittencourt e Vazquez 2008;
- prover uma implementação dos operadores locais dos elementos de forma independente das funções de interpolação nodais e modais empregadas;
- considerar extensões de alta performance.

Na versão atual, o programa implementa a solução de problemas de Poisson, elasticidade linear, grandes deformações, contato, equação de Reynolds e procedimentos de soluções globais e elemento por elemento. A seguir, apresentam-se os arquivos de dados empregados, as estruturas de dados implementadas, documentação e aspectos a serem considerados implementados futuramente.

## 3.2 Arquivos de Entrada

O programa funciona através da leitura de dois arquivos ASCII. O primeiro arquivo, com extensão `.fem`, contém definições do modelo de elementos finitos, tais como dimensão do modelo, número de nós, coordenadas do nós, tipo de elementos, número de elementos, grupo de elementos e topologia geometria-malha como definido em GRUPO COMET 2006. O segundo arquivo, de extensão `.def`, contém parâmetros que definem o tipo de aplicação, condições de contorno, carregamentos, regras de integração, funções de interpolação e outros procedimentos também definidos em GRUPO COMET 2006.

As rotinas `ReadFEMFile` e `ReadDEFFile` são responsáveis pela leitura destes arquivos, interpretação e armazenamento das variáveis pertinentes a criação do modelo de elementos finitos. Essas informações são armazenadas em estruturas.

## 3.3 Estruturas de Dados

O programa é composto por estruturas de dados, sendo cada uma responsável por reunir informações para manipulação dos dados e solução do modelo de elementos finitos. Essas estruturas funcionam como variáveis globais que permitem o acesso e alterações em qualquer subrotina do programa. Em Hanselman e Littlefield 2004, têm-se maiores esclarecimentos quanto ao uso de estruturas e variáveis globais.

As seguintes estruturas estão associadas ao armazenamento dos atributos do modelo de elementos finitos:

**Model** : é uma estrutura usada para armazenamento de informações sobre o modelo de elementos finitos, tais como título, graus de liberdade, tipo de problema a ser analisado, coordenadas nodais, parâmetros de solução, tipo de malha, dentre outros.

**ElementGroups** : é uma estrutura responsável pelo armazenamento de informações do grupo de elementos finitos. Um grupo consiste de um conjunto de elementos de mesma forma, modelo mecânico, função de interpolação, regra de interpolação e propriedades

geométricas. As informações armazenadas nesta estrutura são: incidência; número de nós por grupo de elementos; propriedades mecânicas do material; tipo de elemento do grupo e propriedade geométrica.

**MaterialGroups** : armazena o número do material, o seu tipo e os valores das propriedades.

Atualmente, apenas materiais de Hooke e Mooney-Rivlin estão implementados.

**ElimDOF** : armazena as informações sobre as condições de contorno de Dirichlet do modelo.

**PrescDOF** : armazena as informações sobre as condições de contorno prescritas,

**GeomProp** : armazena as informações sobre as propriedades geométricas dos elementos, tais como área da seção e espessura.

**ConcLoad** : armazena os dados relativos às cargas nodais aplicadas na malha.

**SurfaceLoad** : armazena os dados das cargas de superfície aplicadas sobre as arestas e faces dos elementos. O carregamento pode estar nas direções normal e tangencial e a intensidade ser representada por um valor numérico ou expressão simbólica.

**BodyLoad** : armazena os dados das cargas de corpo aplicadas sobre um grupo de elementos. O carregamento pode estar nas direções normal e tangencial e a intensidade ser representada por um valor numérico ou expressão simbólica.

As estruturas abaixo armazenam informações sobre como as entidades de malha se relacionam com as entidades geométricas. Essa informação é opcional para os casos onde se deseja transferir condições de contorno aplicadas ao modelo sólido para nós e elementos da malha.

**Line** : é a estrutura que armazena o conjunto de nós que estão contidos nas linhas do modelo geométrico. O nós são ordenados de maneira simples, isto é, a lista inicia com o último nó na linha e termina com o primeiro da outra linha. A estrutura Line deve ser utilizada quando se deseja obter informação topológica, tal como, converter uma carga distribuída em uma linha do modelo geométrico em valores nodais da malha.

**Surface** : estrutura que tem como objetivo armazenar o conjunto de nós que pertencem a uma determinada superfície geométrica da malha do modelo tridimensional.

**SurfaceGroups** : estrutura que armazena para cada superfície geométrica tridimensional o número de faces de elementos finitos geradas nessa superfície, a forma e a incidência das faces.

Algumas estruturas são criadas durante o processo de solução. São elas:

**ElementNodeTable** : armazena para cada nós os elementos que o compartilham.

**NodeNodeTable** : é responsável por reunir na estrutura a informação de dado um nó quais são os seus nós vizinhos. Essa informação é utilizada para gerar a matriz global.

**ElementElementTable** : reúne para cada elemento, o número dos elementos vizinhos e a aresta ou face compartilhada pelos vizinhos.

**EquationEquationTable** : cria a tabela de relação de vizinhança equação-equação, isto é dada uma equação (que corresponde a um grau de liberdade) é possível dizer quais equações (graus-de-liberdade) são influenciados por esta equação.

**Equations** : armazena a numeração dos graus de liberdade dos nós do modelo, levando em conta as condições de contorno.

**Interpolation** : gerencia o cálculo das coordenadas dos pontos de integração e ponderações, pontos de colocação, funções de forma e suas derivadas e a tensorização dessas entidades para elementos bi e tridimensionais.

O programa implementa solvers globais e elemento por elemento. Para um solver global, emprega-se a estrutura de matriz esparsa disponível no Matlab. Armazena-se para cada coeficiente da matriz os números da linha e coluna, assim como o valor. A matriz esparsa é construída pela função nativa do MatLab chamada de `sparse` (THE MATHWORKS, Inc 2005). A topologia da matriz esparsa é construída pelo programa usando a tabela `EquationEquationTable`.

## 3.4 Documentação

A documentação do programa  $(hp)^2$ FEM foi gerada automaticamente por uma rotina, também escrita em MatLab, denominada de m2html (Flandin 2006). Essa documentação, que está em html, permite a navegação, através de hyperlinks, entre as diversas funções e estruturas que compõem o programa.

# 4 LUBRIFICAÇÃO ELASTOHIDRODINÂMICA

## 4.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se o algoritmo de elastohidrodinâmica utilizado como base para a otimização de forma da superfície do mancal. Em seguida, o algoritmo de otimização também é apresentado bem como os resultados das simulações realizadas.

### 4.1.1 Teoria EHD

A teoria EHD baseia-se no fato de a espessura variar de acordo com a deformação do alojamento do mancal, causada pela pressão hidrodinâmica. A distribuição de pressão é encontrada resolvendo-se a equação de Reynolds, apresentada anteriormente e reproduzida aqui por conveniência

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{R\Omega}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Para resolver a equação, é necessário saber a espessura do filme de óleo  $h$  ao longo do alojamento, que é dada pela expressão

$$h = c[1 + \varepsilon \cos \theta] + \delta h, \quad (4.2)$$

onde  $c$  é a folga radial (distância entre a superfície do alojamento do mancal e a do eixo, quando estes se encontram concêntricos),  $\varepsilon$  é o fator de excentricidade, definido como a razão da excentricidade pela folga radial  $c$ ; o termo  $\delta h$  é devido à deformação elástica do alojamento, cujo valor é inicialmente zero, e  $\theta$  é o ângulo medido a partir da linha de centros do mancal e do eixo.

A solução da equação de Reynolds pode resultar em valores de pressão negativos. Embora matematicamente possíveis, tais valores não possuem sentido físico, uma vez que valores negativos de pressão representam o fluido em tração, e sabe-se que um fluido apenas pode resistir a valores muito pequenos de tensão de tração. Por este fato, impõe-se uma nova condição, expressa da seguinte forma:

$$p < p_{cav} \Rightarrow p = p_{cav}, \quad (4.3)$$

onde  $p_{cav}$ , pressão de cavitação, é o valor de pressão abaixo da qual o fluido passa do estado líquido para o gasoso. Neste trabalho, assumiu-se a pressão de cavitação igual à pressão atmosférica.

Uma vez obtida a pressão, calcula-se a força de sustentação hidrodinâmica, gerada pelo mancal, integrando-se a pressão na área da superfície de deslizamento.

A força hidrodinâmica total ou de sustentação do mancal ( $F_h$ ) é dada por

$$F_h = \sqrt{F_r^2 + F_t^2}. \quad (4.4)$$

A força aplicada ao eixo do mancal desloca as superfícies de deslizamento, mudando o fator de excentricidade, até que seja atingido o equilíbrio. Pode-se então encontrar o fator de excentricidade de equilíbrio para o qual a força aplicada ao mancal  $F_a$  é igual a força hidrodinâmica  $F_h$  gerada pelo mesmo. O fator de excentricidade de equilíbrio é obtido usando o método da bissecção: o valor mínimo de  $\varepsilon$  é  $\varepsilon_{min} = 0$  e o valor máximo  $\varepsilon_{max} = 1$ .



O valor inicial de  $\varepsilon$  é dado por

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{\varepsilon_{max}^{(0)} + \varepsilon_{min}^{(0)}}{2}. \quad (4.5)$$

A partir deste valor, a força hidrodinâmica é calculada novamente, bem como os fatores de excentricidade limite, da seguinte forma:

- Se  $F_h(\varepsilon^{(0)}) > F_a \Rightarrow \varepsilon_{min}^{(1)} = \varepsilon_{min}^{(0)}$ , e  $\varepsilon_{max}^{(1)} = \varepsilon^{(0)}$ ,
- Se  $F_h(\varepsilon^{(0)}) < F_a \Rightarrow \varepsilon_{min}^{(1)} = \varepsilon^{(0)}$ , e  $\varepsilon_{max}^{(1)} = \varepsilon_{max}^{(0)}$ .

Assim,

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{\varepsilon_{max}^{(1)} + \varepsilon_{min}^{(1)}}{2}. \quad (4.6)$$

Utilizando-se o valor de  $\varepsilon^{(1)}$  (calculado na primeira iteração) na expressão da espessura do filme de óleo, encontra-se o novo campo de pressão e conseqüentemente a nova força de sustentação.

O processo se repete até que o critério de convergência seja atingido, ou seja, até que:

$$\left| \frac{F_h(\varepsilon^{(n)}) - F_a}{F_a} \right| < \varsigma, \quad (4.7)$$

onde  $\varsigma$  é um número positivo e seu valor está relacionado com a precisão desejada. Depois de encontrado o fator de excentricidade que equilibra a força externa aplicada ao mancal, bem como o campo de pressão associado ao mesmo, a deformação do alojamento pode ser obtida. O vetor de forças nodais é calculado integrando-se a pressão na área do elemento. Conhecidas as forças nodais é possível encontrar a deformação do alojamento por elementos finitos. Assim, os valores de deformação de cada nó da malha podem ser introduzidos na expressão (4.2). Todo o processo de cálculo apresentado é repetido até que o critério de

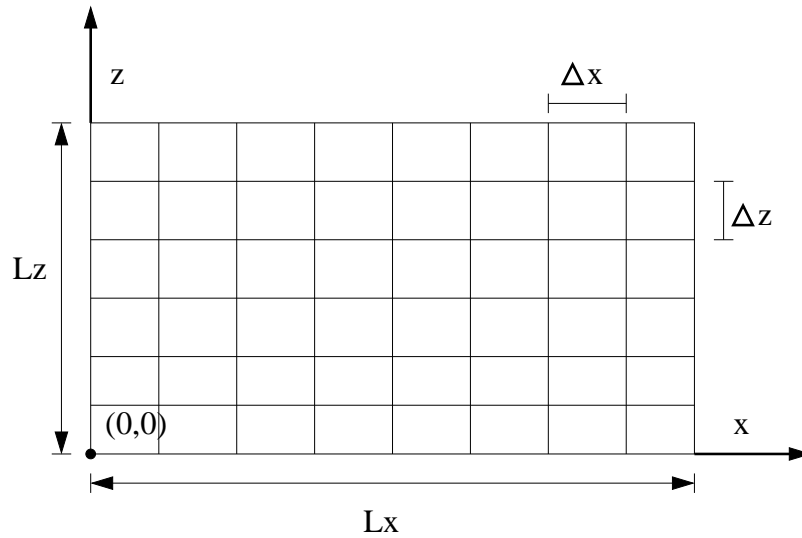


Figura 4.1: Discretização do domínio do problema.

convergência da deformação (que é análogo ao critério de convergência para a força) seja atingido.

A Figura 4.1 mostra um exemplo de malha usada para a resolução da equação de Reynolds. Divide-se o domínio em  $I_x$  pontos na direção  $x$  espaçados de  $\Delta x = \frac{Lx}{(I_x-1)}$  e  $I_z$  pontos na direção  $z$ , espaçados de  $\Delta z = \frac{Lz}{(I_z-1)}$ .

## 4.2 Algoritmo EHD

Para que a metodologia de otimização de mancais pudesse ser aplicada, foi desenvolvido um algoritmo computacional para simulação de mancais, baseado no código apresentado em Duarte Jr. 2005.

Os aspectos teóricos usados no programa já foram apresentados. A seguir, apresenta-se a estrutura do programa, as rotinas utilizadas e os resultados dos testes.

### 4.2.1 Entrada de Dados

Os parâmetros necessários para a caracterização do problema são:

- Carregamento estático aplicado,
- Rotação do eixo,
- Raio do mancal,
- Largura do mancal,
- Folga radial,
- Viscosidade do óleo.

Além dos parâmetros do mancal, define-se a malha que será utilizada para a solução da equação de Reynolds. Com esses dados são gerados os arquivos de entrada (.fem e .def) do solver de elementos finitos.

### 4.2.2 Pressão Hidrodinâmica

O campo de pressão hidrodinâmica é obtido pela solução da equação de Reynolds. Os arquivos .fem e .def gerados anteriormente são utilizados pelo solver de elementos finitos, que retorna a pressão hidrodinâmica nodal.

Como já foi dito, para se calcular a pressão hidrodinâmica é necessário conhecer a espessura do filme de óleo, que por sua vez é função da deformação elástica do alojamento do mancal. Assim, a cada iteração para a obtenção da deformação elástica é necessário recalcular o campo de pressão, a partir dos valores atualizados da espessura do filme de óleo. A distribuição de pressão é obtida fazendo-se variar o fator de excentricidade até que a força hidrodinâmica equilibre a força externa aplicada no mancal.

Aplica-se então a condição de contorno de cavitação, igualando-se todos valores de pressão negativos a zero.

### 4.2.3 Fator de Excentricidade

A integração do campo de pressão resulta na força hidrodinâmica gerada pelo mancal. Esta força deve equilibrar a força externa aplicada. Assim, sempre que a distribuição de pressão é obtida, um novo fator de excentricidade é calculado de modo que o equilíbrio de forças seja satisfeito.

### 4.2.4 Força Nodal

Satisfeita a condição de equilíbrio de forças, a força aplicada à superfície de deslizamento do mancal é obtida integrando-se o campo de pressão. Para cada elemento da malha da equação de Reynolds, calcula-se a força hidrodinâmica através da expressão (4.4) nos nós do elemento. A força atuante no elemento é transformada em uma força nodal utilizando-se uma média ponderada pela área. Identificam-se os elementos vizinhos a um determinado nó e multiplica-se a força pela área de cada um dos elementos. Soma-se o produto de força e área de todos os elementos vizinhos ao nó e divide-se pela área que esses elementos juntos ocupam, obtendo assim a força nodal. Este processo é repetido para todos os nós da malha. Em seguida todas as componentes nodais na direção  $z$  são somadas, resultando em um vetor de dimensão igual ao número de nós na direção  $\theta$ , ou seja, todas as forças nodais para uma mesma posição  $\theta$  são concentradas em um único ponto, transformando o modelo tridimensional do mancal em bidimensional.

### 4.2.5 Deformação Elástica

Para o cálculo das deformações, uma malha de elementos finitos foi criada utilizando-se o software Ansys. A partir dos dados desta malha bidimensional e do vetor de forças nodais foram criados os arquivos de entrada .fem e .def do solver de elementos finitos para estado plano de tensão. A solução fornece a deformação do mancal devido à pressão do filme de óleo. A deformação modifica os valores da espessura do filme de óleo, sendo necessário recalcular o campo de pressão, como descrito anteriormente.

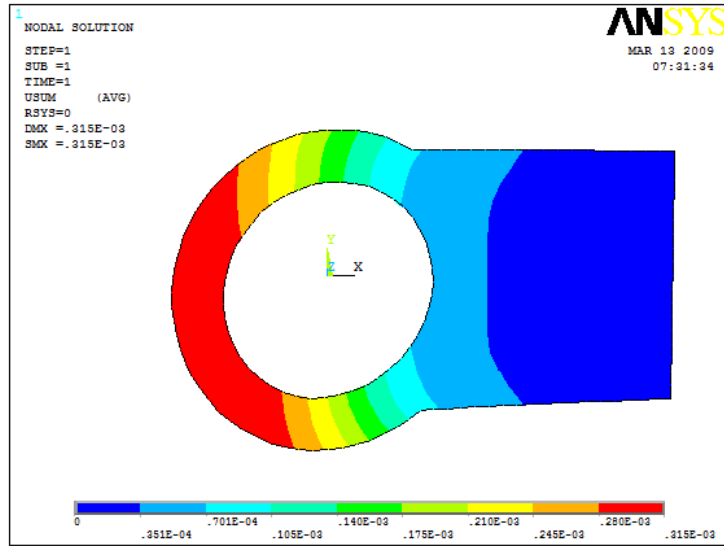


Figura 4.2: Deslocamento nodal para um modelo de biela plana.

Para cada iteração, apenas uma pequena parte da deformação calculada é realmente aplicada, multiplicando-se a deformação calculada por um fator  $\beta$  ( $< 1$ ). Este procedimento é usado para evitar instabilidade na convergência da solução.

O programa é encerrado quando o critério de convergência da deformação é atingido, ou seja,

$$\left| \frac{(\delta h)^i - (\delta h)^{i-1}}{(\delta h)^{i-1}} \right| < \varsigma, \quad (4.8)$$

onde o índice  $i$  refere-se à iteração atual e  $\varsigma$  é a precisão desejada (neste caso foi usado  $\varsigma = 10^{-5}$ ).

Para simplificar a análise dos mancais, o programa EHD utiliza um modelo plano, onde as forças nodais de todos os nós que possuem a mesma coordenada  $\theta$  são somadas. Logo, todas as forças distribuídas pelos nós na direção axial do mancal são somadas de modo a se obter apenas uma força para cada posição  $\theta$ . Essa força então é aplicada ao modelo bidimensional do mancal. Para validar essa simplificação foram feitas simulações em Ansys de um modelo tridimensional e de um modelo plano com os esforços calculados da maneira acima descrita. As Figuras 4.2 e 4.3 mostram os resultados obtidos para os dois casos, onde

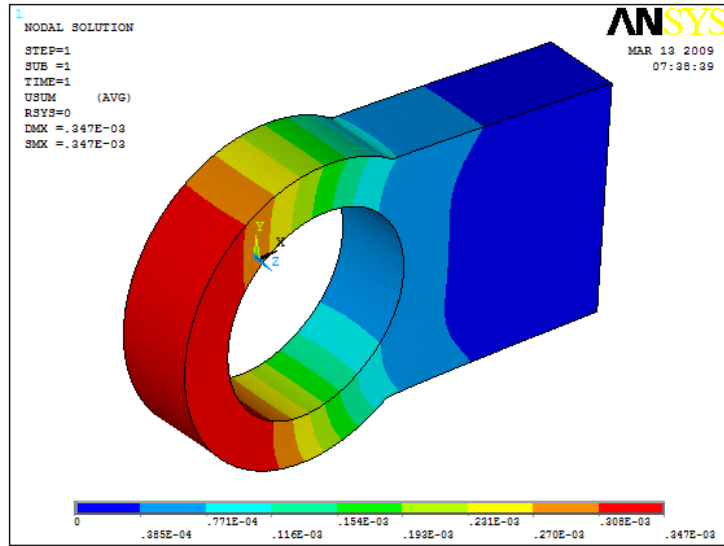


Figura 4.3: Deslocamento nodal para um modelo de biela tridimensional.

nota-se a equivalência dos modelos. Os mesmos resultados encontrados no Ansys foram obtidos pelo programa  $(hp)^2$ FEM.

A Figura 4.4 mostra o diagrama do algoritmo EHD.

### 4.3 Algoritmo de Otimização

O algoritmo de otimização utilizado é baseado nos métodos de gradientes e busca maximizar a mínima espessura do filme de óleo MOFT (Minimum Oil Film Thickness), definida como

$$MOFT = h_{min} = \min(h_k), \quad (4.9)$$

onde  $h_k$  são os valores de espessura de filme nos pontos de discretização. Pode ser que existam valores da espessura de óleo menores que um valor mínimo admissível. Poderiam então ser feitas algumas alterações para modificar a espessura do filme de óleo, como aumentar a largura do mancal, aumentar o diâmetro do eixo do mancal, entre outras alternativas. No entanto, na maioria dos casos esses parâmetros já estão definidos, sendo que a única alternativa viável

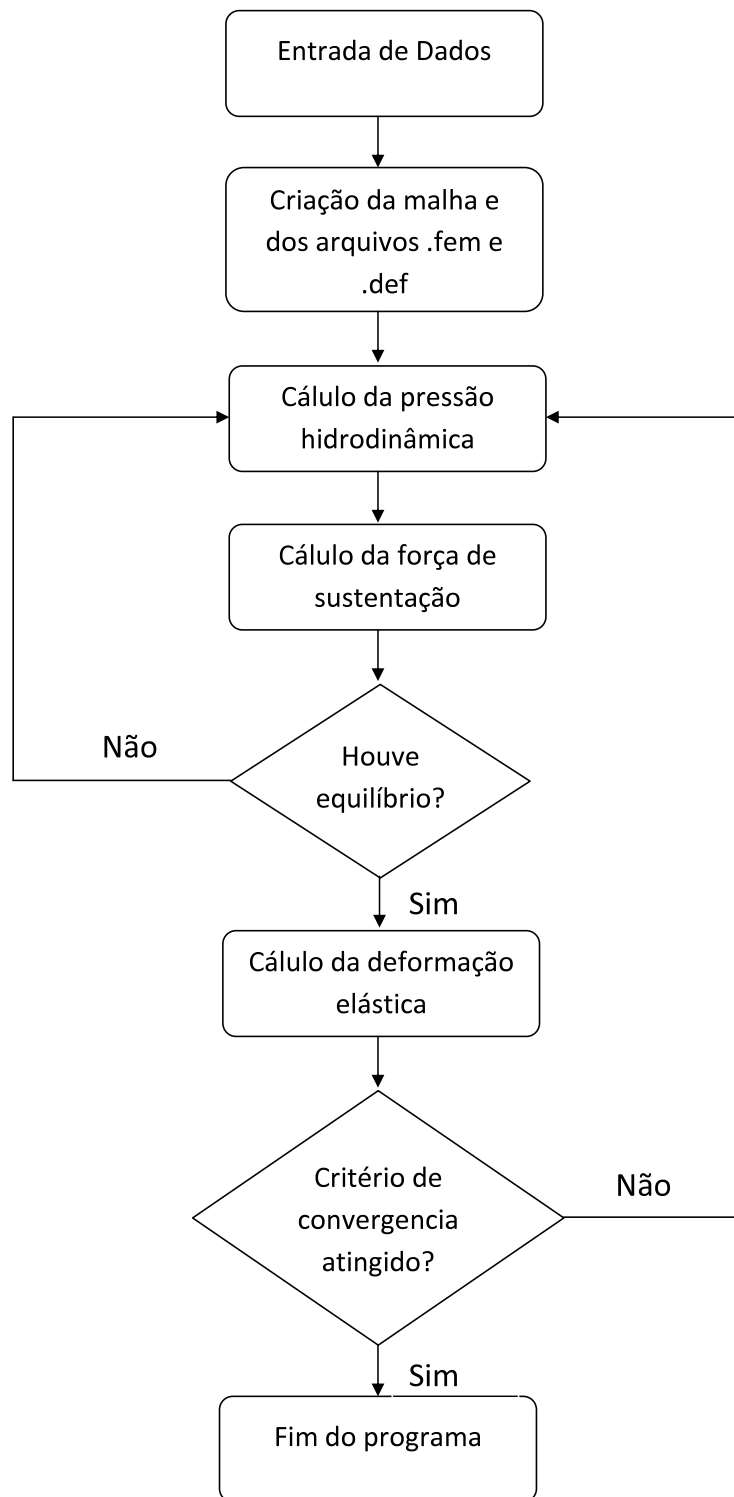


Figura 4.4: Fluxograma do algoritmo EHD.

é aumentar a MOFT por meio de um perfilamento da geometria do mancal. Dando-se um incremento  $FR_k$  na folga radial do  $k$ -ésimo ponto da superfície de deslizamento, obtém-se

$$FR_k = FR_R + \delta FR_k; \quad 1 \leq k \leq I_x - 1, \quad (4.10)$$

onde  $FR_R$  é a folga radial de referência. Tem-se então uma nova geometria circunferencial no alojamento. Resolve-se novamente a equação de Reynolds, usando-se os novos valores de folga radial e obtém-se os valores da espessura do filme de óleo para a nova geometria. Subtraindo os valores de  $h$  atuais pelos obtidos inicialmente, obtém-se os incrementos  $\delta h_k$  das espessuras de filme de óleo. Se os incrementos nas folgas radiais são suficientemente pequenos, pode-se escrever:

$$\frac{\partial h_k}{\partial FR_k} \approx \frac{\delta h_k}{\delta FR_k}, \quad (4.11)$$

que pode ser usada como aproximação para a variação da espessura de filme de óleo

$$\delta h_k = \frac{\partial h_k}{\partial FR_k} \delta FR_k, \quad 1 \leq k \leq I_x - 1. \quad (4.12)$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \delta h_1 \\ \delta h_2 \\ \vdots \\ \delta h_{I_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial FR_1} & \frac{\partial h_1}{\partial FR_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial FR_{I_x}} \\ \frac{\partial h_2}{\partial FR_1} & \frac{\partial h_2}{\partial FR_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial FR_{I_x}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_{I_x}}{\partial FR_1} & \frac{\partial h_{I_x}}{\partial FR_2} & \cdots & \frac{\partial h_{I_x}}{\partial FR_{I_x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta FR_1 \\ \delta FR_2 \\ \vdots \\ \delta FR_{I_x} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

A equação acima permite modificar a espessura mínima do filme de óleo através de incrementos na folga de referência do mancal. Se deseja-se assegurar que a espessura mínima de filme não apresente valores menores que um determinado  $\delta h$ , pode-se montar um sistema linear com os valores de  $\delta h_k = \delta h$  e a solução deste sistema fornece o vetor de incremento da folga radial que assegura os valores de espessura de filme de óleo desejados. Desta maneira,



Parâmetro	Unidades	Valores
Rotação do Eixo	RPM	3000
Raio do Mancal	mm	36,39
Largura do Mancal	mm	32,00
Folga Radial	microns	50,00
Viscosidade do Óleo	mPa	20,00

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados na simulação.

é possível projetar um mancal com uma geometria não circular cuja espessura mínima de filme seja maior que um limite desejado.

## 4.4 Resultados

A seguir, encontram-se os resultados obtidos pelos algoritmos EHD e de otimização. Para a solução da equação de Reynolds foi utilizada uma malha de quadrados de 4 nós com 47 elementos na direção  $\theta$  e 20 elementos na direção  $z$ , totalizando 1008 nós e 940 elementos. O mancal foi simulado utilizando-se a geometria de uma biela. A malha de elementos finitos foi criada pelo software Ansys e está apresentada na Figura 4.5. A Tabela 4.2 mostra os parâmetros do mancal utilizados na simulação. Todos os resultados apresentados a seguir foram obtidos para  $\beta = 1$ .

### 4.4.1 Resultados da Otimização para Incremento de Folga Radial Positivo

O algoritmo de otimização apresentado anteriormente foi implementado em Matlab e incorporado ao algoritmo EHD. Foi usado um incremento de folga radial inicial de  $5 \mu\text{m}$  igual para todos os pontos da discretização na direção  $\theta$ . Uma das características do algoritmo utilizado é que a forma da superfície otimizada segue o padrão do incremento de folga radial inicial, ou seja, se um incremento inicial constante é assumido, o algoritmo irá encontrar um valor de folga radial ótimo, mas constante para todos os pontos da discretização. Portanto,

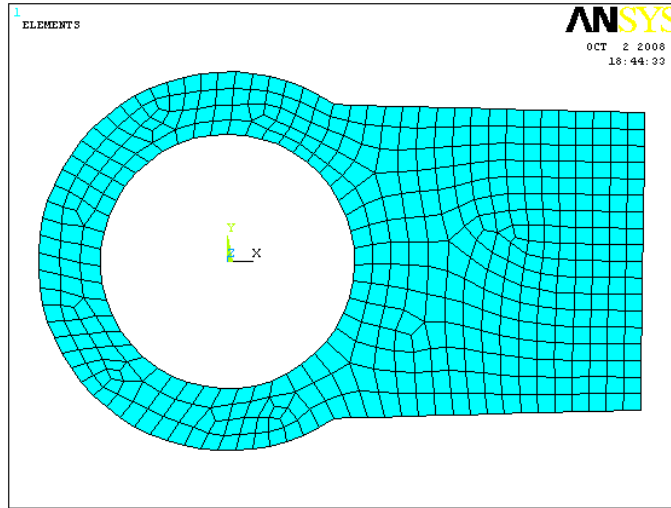


Figura 4.5: Malha de elementos finitos utilizada.

foi utilizada uma função senoidal como peso para os valores de incremento de folga radial encontrados a cada iteração. Deste modo, os incrementos seguem um perfil senoidal onde um incremento maior é aplicado na região de maior pressão e um menor é aplicado na região de baixa pressão. Isto é feito multiplicando-se o vetor de incrementos por meio período de uma função senoidal e fazendo com que o máximo valor da função coincida com a posição onde ocorre máxima pressão no mancal. A Fig 4.6 ilustra esse processo. Logo, os incrementos de folga radial são dados pela expressão

$$\delta FR_k = \delta FR_k \cdot \sin(\theta).$$

A seguir, apresenta-se a evolução dos parâmetros de um mancal, tais como pico de pressão, fator de excentricidade, força hidrodinâmica e espessura do filme de óleo durante o processo de otimização para cargas de 10kN e 40kN considerando os casos de mancal rígido e flexível.

A geometria do mancal rígido e do mancal deformado é mostrada na Figura 4.11 para carga de 10kN e na Figura 4.17 para 40kN. Os incrementos de folga radial inicial e final estão apresentados na Figura 4.12 para o caso de carregamento igual a 10kN e incremento inicial

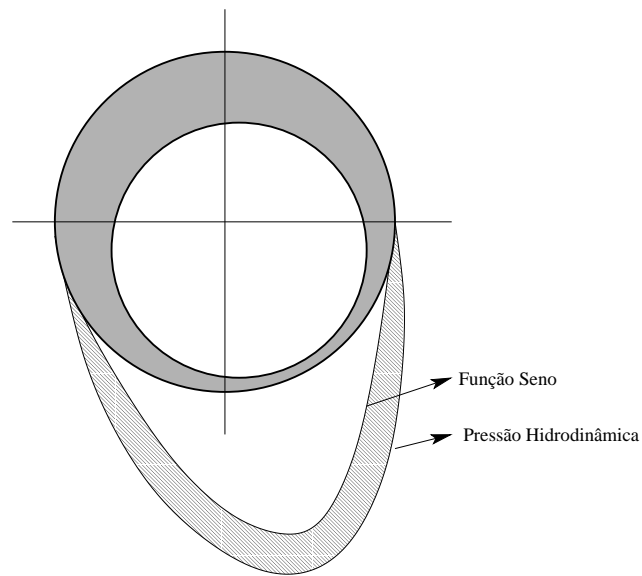


Figura 4.6: Função seno utilizada como peso para os incrementos de folga radial.

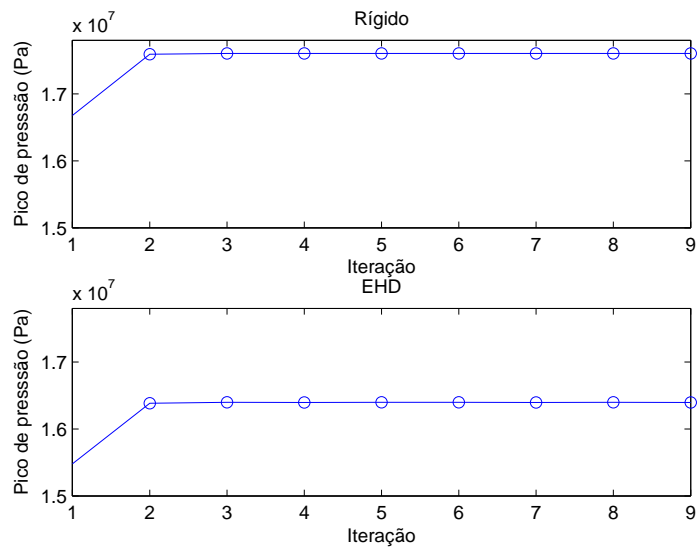


Figura 4.7: Pico de Pressão (Pa) para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 10KN.

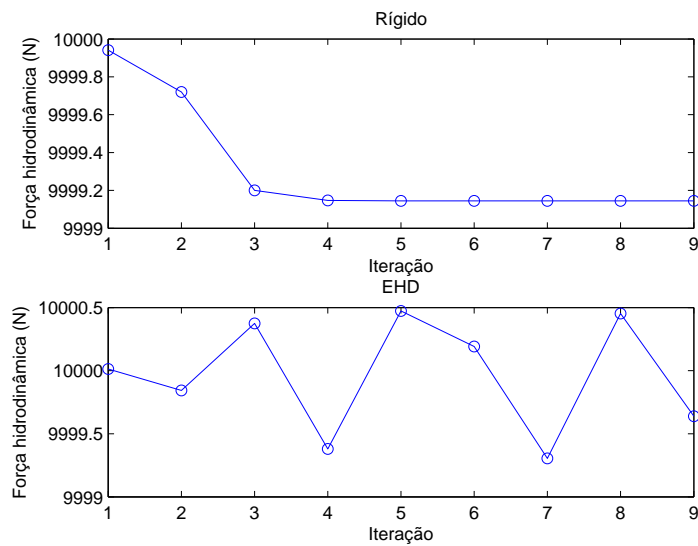


Figura 4.8: Força hidrodinâmica (N) para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 10KN.

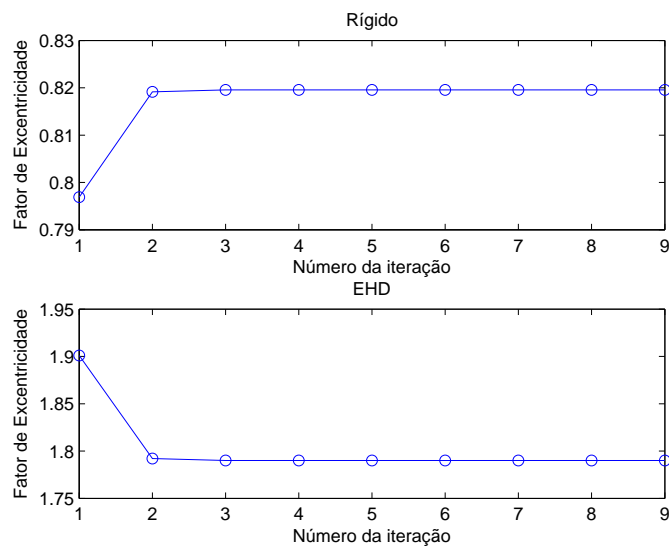


Figura 4.9: Fator de excentricidade para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 10KN.

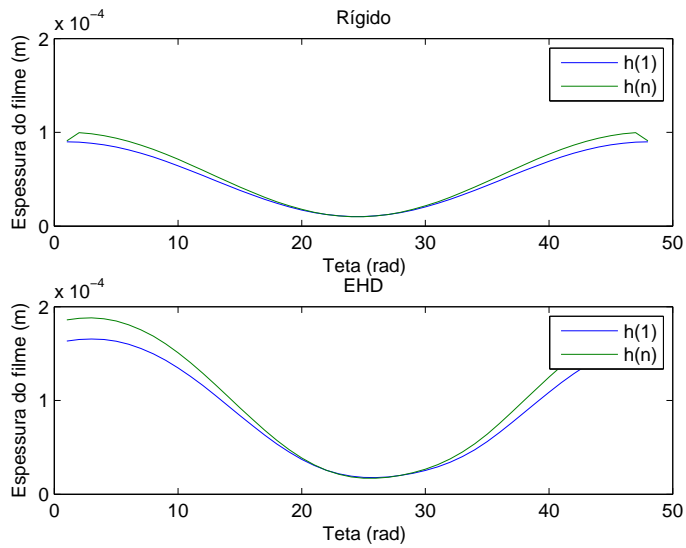


Figura 4.10: Espessura do filme de óleo para o mancal rígido e flexível antes ( $h(1)$ ) e depois ( $h(n)$ ) do processo de otimização para carga de 10KN.

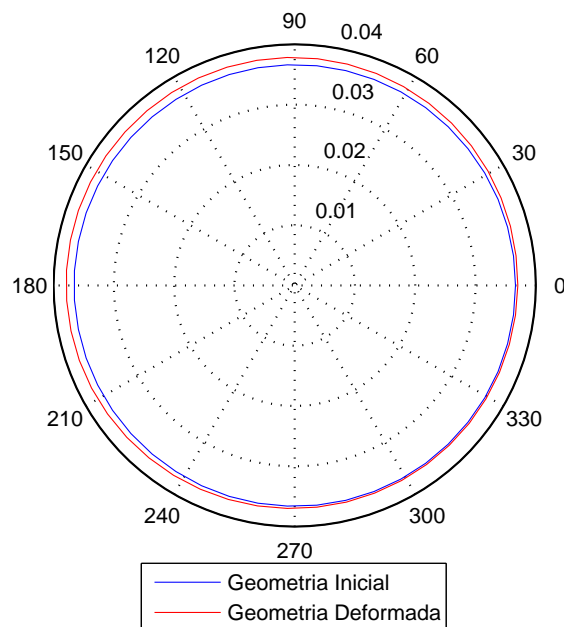


Figura 4.11: Geometria do mancal e geometria deformada para carga de 10kN com fator de escala de deformação igual a 20.

de  $5\mu$ .

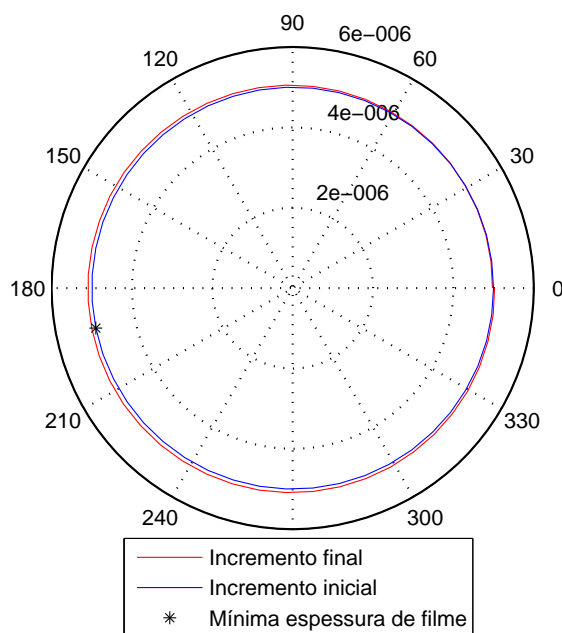


Figura 4.12: Incremento de folga radial final obtido na otimização para incremento inicial de  $5\mu$  para carga de 10kN.

Para os dois valores de carregamento, observou-se no mancal flexível otimizado um aumento da pressão de pico e uma redução do fator de excentricidade, quando comparado com o mesmo mancal não otimizado. Quando comparado com o mancal rígido, nota-se uma significativa diferença nos valores de pressão de pico. Essa diferença era esperada e é devida à deformação da superfície do mancal que resulta em uma redução no valor de pressão máxima.

A forma da curva referente à espessura do filme de óleo apresenta algumas diferenças quando se compara o mancal rígido e o flexível. Quando a deformação elástica do alojamento é levada em conta, ocorre uma suavização da curva de espessura de filme na região de máxima pressão, gerando um patamar quase plano típico do comportamento EHD, além de um aumento da espessura mínima do filme do óleo para mancal flexível.

As curvas de pressão hidrodinâmica para carregamento igual a 10kN referente ao mancal rígido, EHD sem otimização e EHD com otimização estão mostradas nas Figuras 4.18, 4.19 e 4.20 respectivamente, e para carregamento de 40kN nas Figuras 4.21, 4.22 e 4.23.

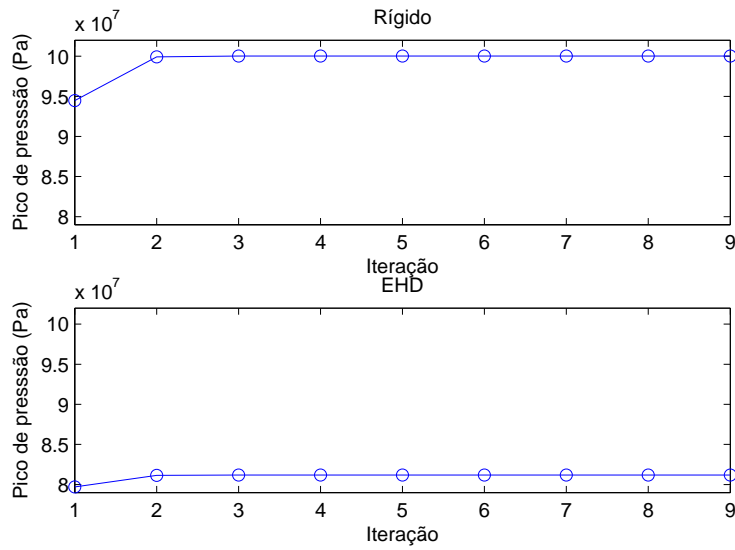


Figura 4.13: Pico de Pressão (Pa) para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 40000N.

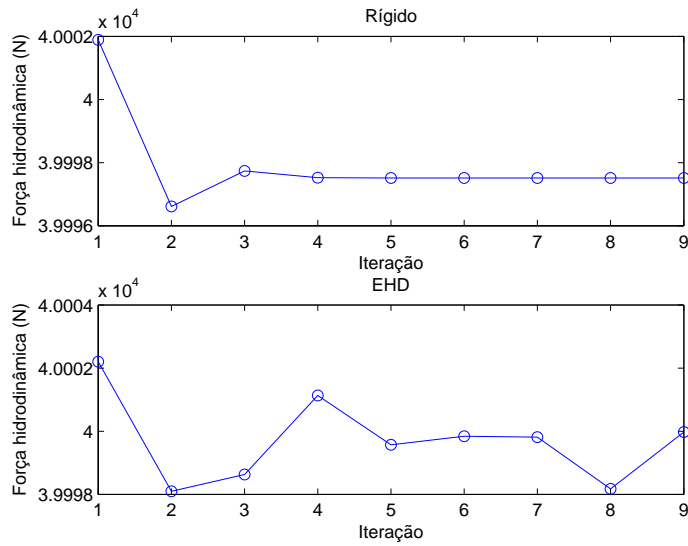


Figura 4.14: Força hidrodinâmica (N) para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 40000N.

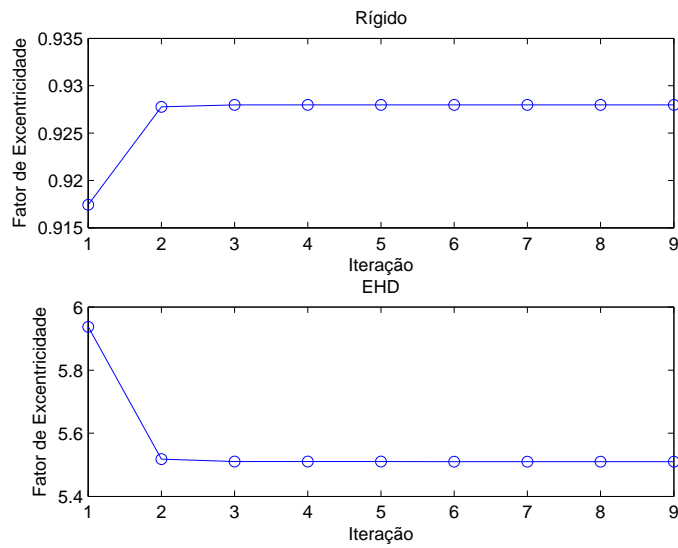


Figura 4.15: Fator de excentricidade para o mancal rígido e flexível ao longo das iterações do processo de otimização para carga de 40000N.

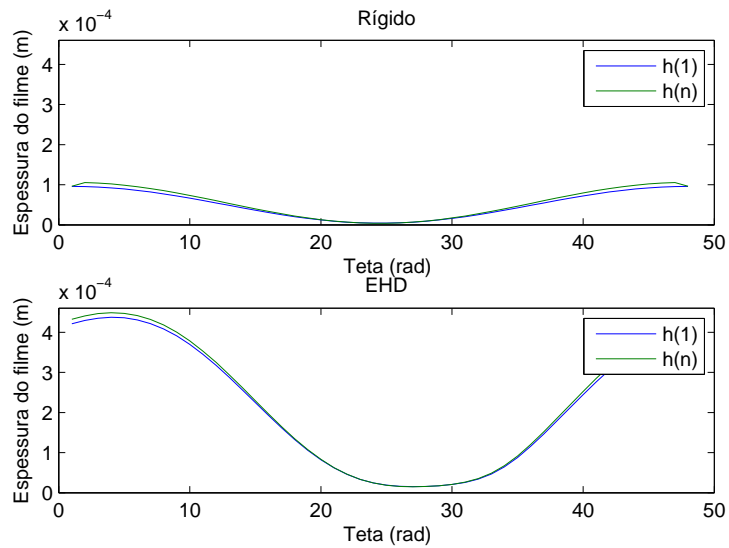


Figura 4.16: Espessura do filme de óleo para o mancal rígido e flexível antes (h(1)) e depois (h(n)) do processo de otimização para carga de 40000N.



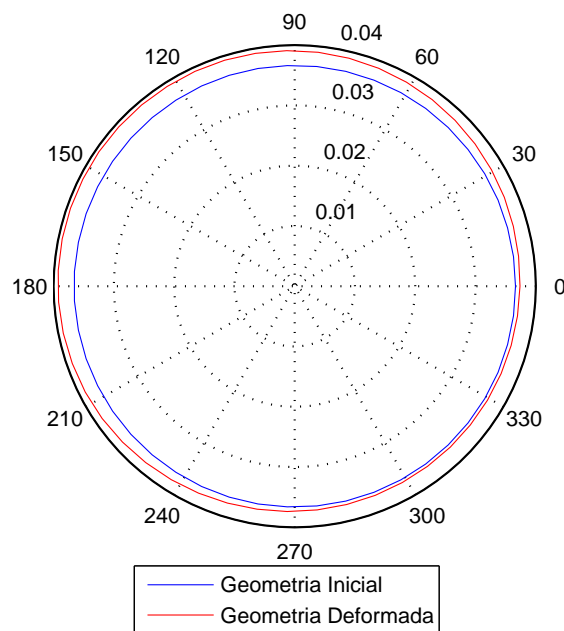


Figura 4.17: Geometria do mancal inicial e geometria deformada para carga de 40kN com fator de escala de deformação igual a 10.

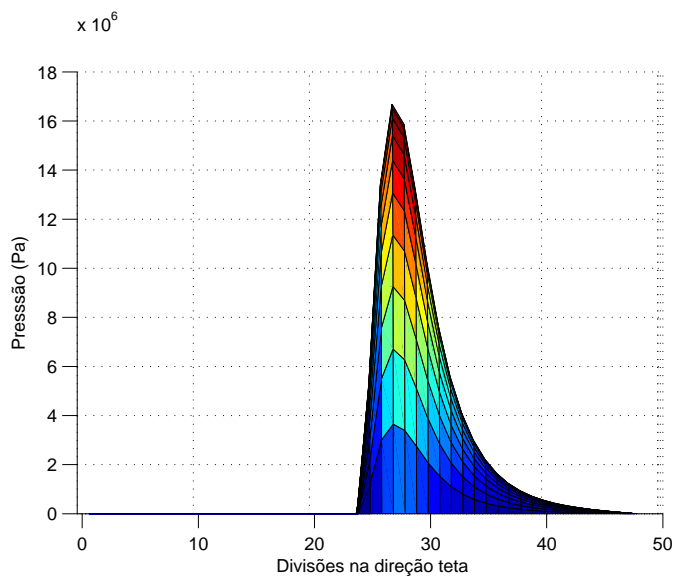


Figura 4.18: Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 10kN para o mancal rígido.

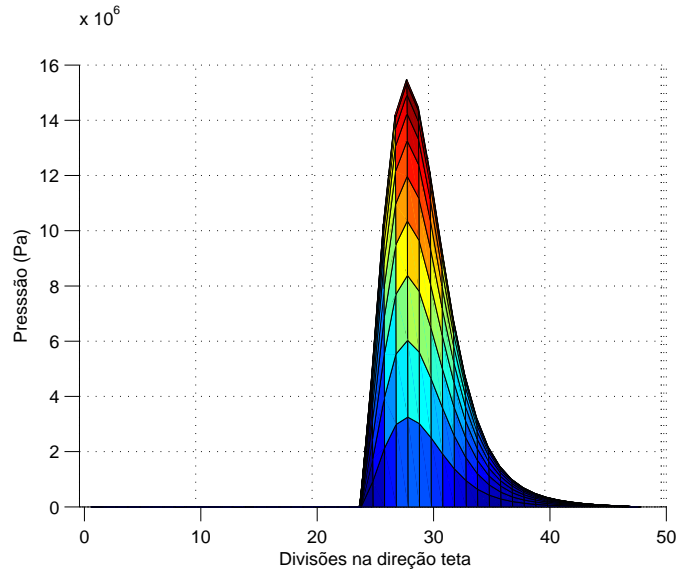


Figura 4.19: Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 10kN obtida pelo algoritmo EHD.

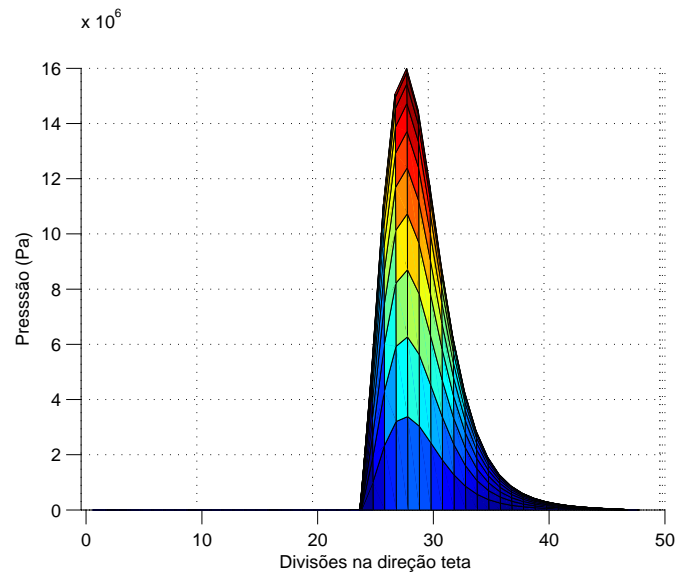


Figura 4.20: Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 10kN obtida pelo algoritmo EHD após a otimização.

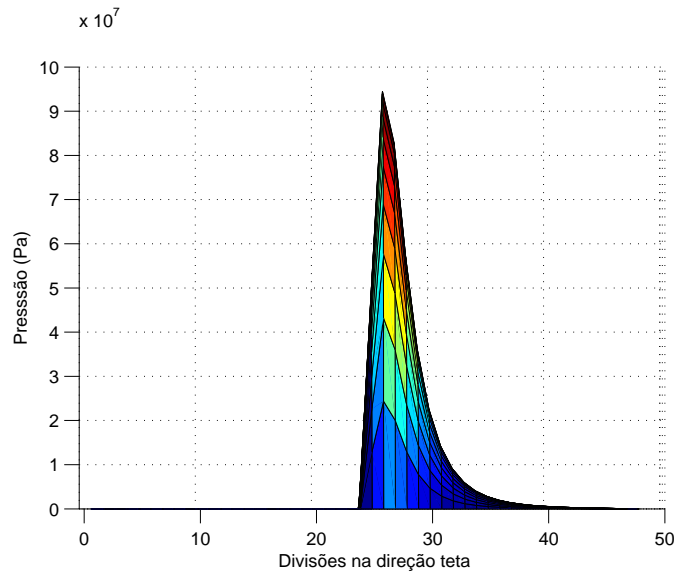


Figura 4.21: Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 40kN para o mancal rígido.

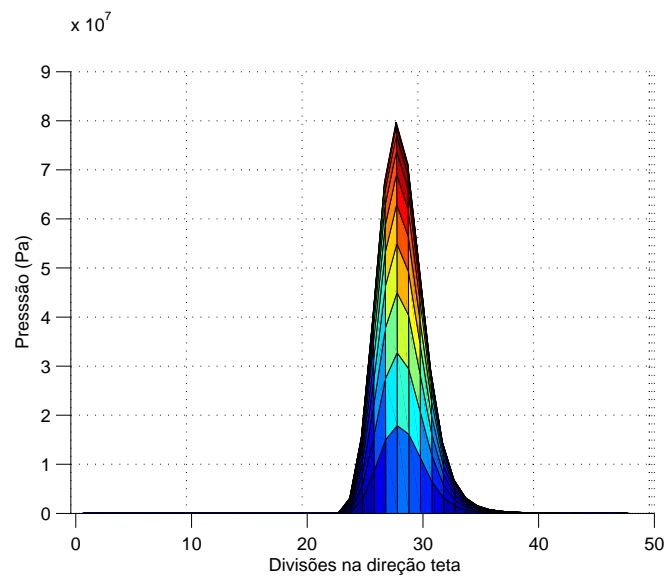


Figura 4.22: Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 40kN obtida pelo algoritmo EHD.

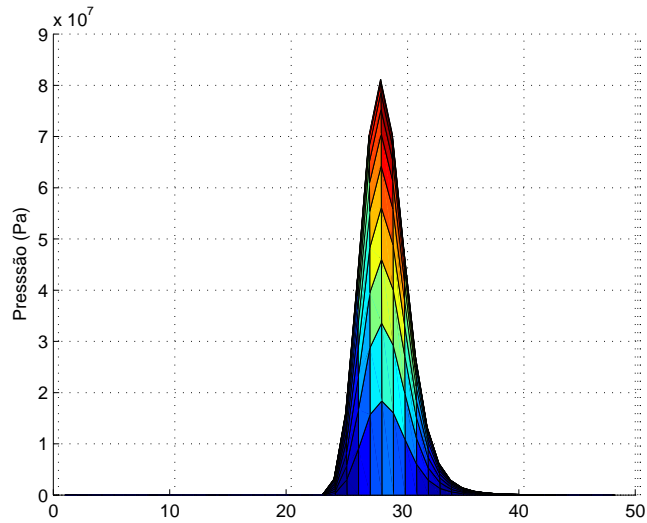


Figura 4.23: Distribuição de pressão hidrodinâmica para carregamento de 40kN obtida pelo algoritmo EHD após a otimização.

#### 4.4.2 Otimização com condição de contorno de Reynolds

O mesmo caso de otimização foi avaliado utilizando-se a condição de contorno de Reynolds para uma carga de 10kN. As Figuras 4.24 a 4.27 apresentam os resultados obtidos durante o processo de otimização.

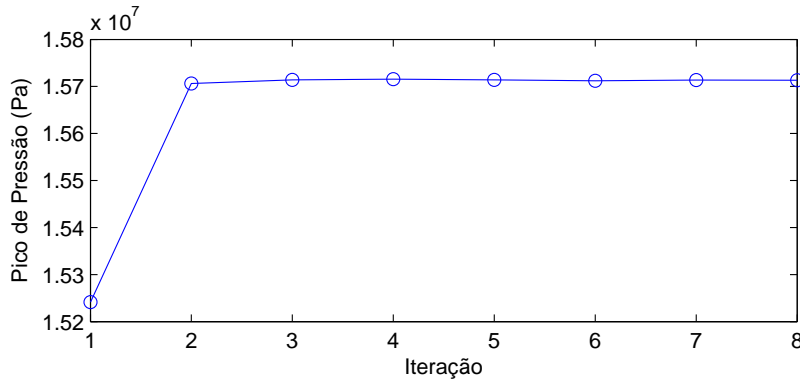


Figura 4.24: Pico de pressão hidrodinâmica utilizando-se a condição de Reynolds.

A Figura 4.28 apresenta a distribuição de pressão obtida utilizando-se a condição de contorno de Reynolds. Quando comparado com a Figura 4.19, nota-se uma pequena redução do pico de pressão, compensada por um ligeiro deslocamento do ângulo de cavitação, ou seja,

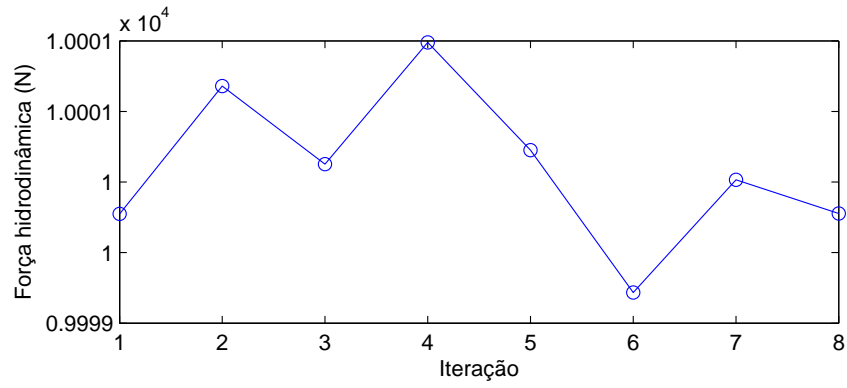


Figura 4.25: Força hidrodinâmica utilizando-se a condição de Reynolds.

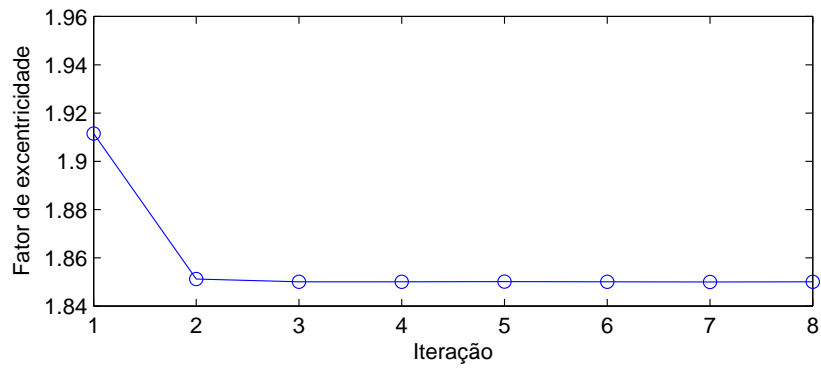


Figura 4.26: Fator de excentricidade utilizando-se a condição de Reynolds.

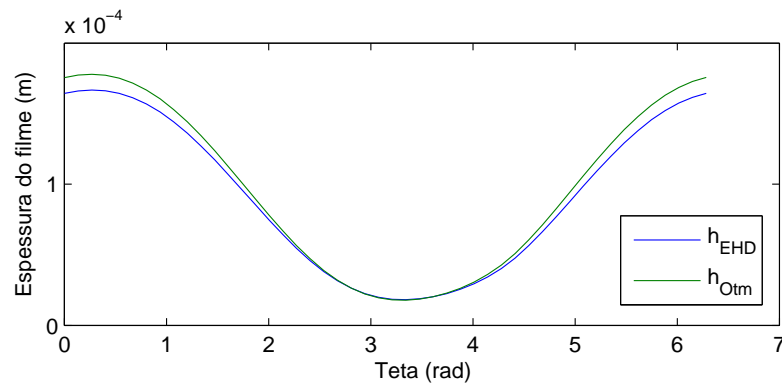


Figura 4.27: Espessura do filme de óleo utilizando-se a condição de Reynolds.

o ângulo onde a pressão cai a zero.

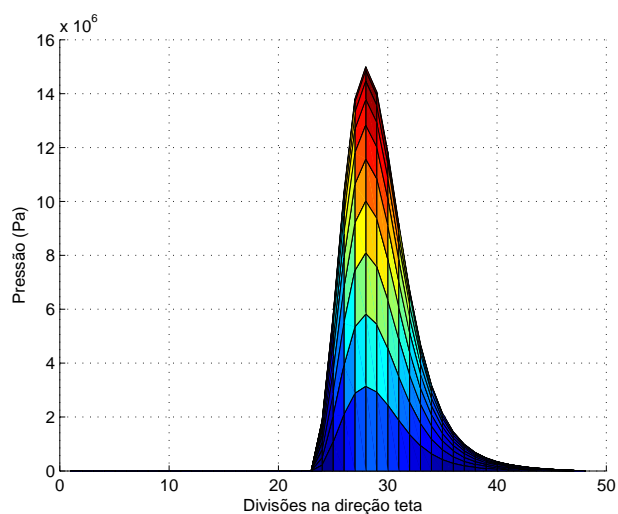


Figura 4.28: Distribuição de pressão hidrodinâmica para mancal não otimizado com carregamento de 10kN e condição de contorno de Reynolds aplicada.

### 4.4.3 Otimização com malha refinada

A rotina de otimização também foi aplicada utilizando-se uma malha refinada, com 177 elementos na direção  $\theta$  e 8 elementos na direção  $z$ . Os resultados estão apresentados nas Figuras 4.29 a 4.34.

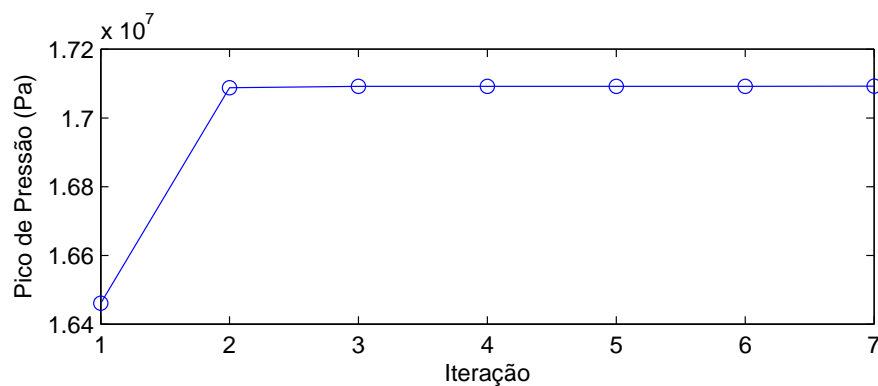


Figura 4.29: Pico de pressão hidrodinâmica utilizando-se uma malha de 177 por 8 elementos.

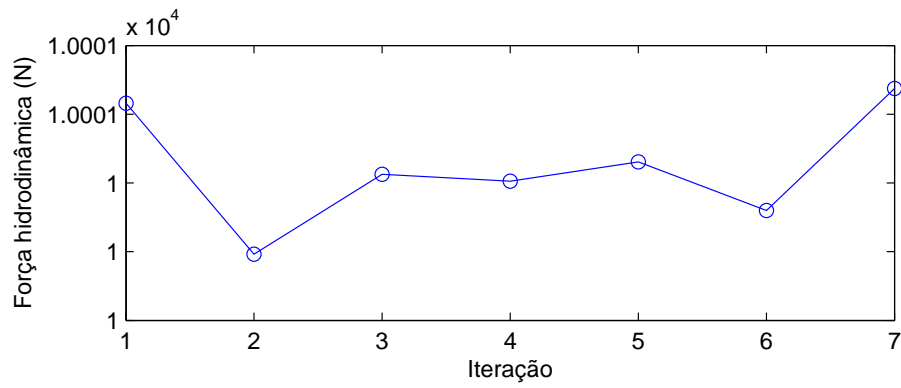


Figura 4.30: Força hidrodinâmica utilizando-se uma malha de 177 por 8 elementos.

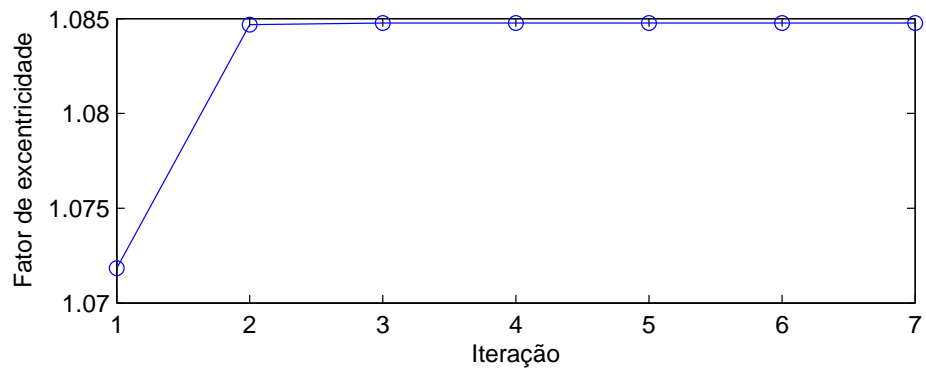


Figura 4.31: Fator de excentricidade utilizando-se uma malha de 177 por 8 elementos.

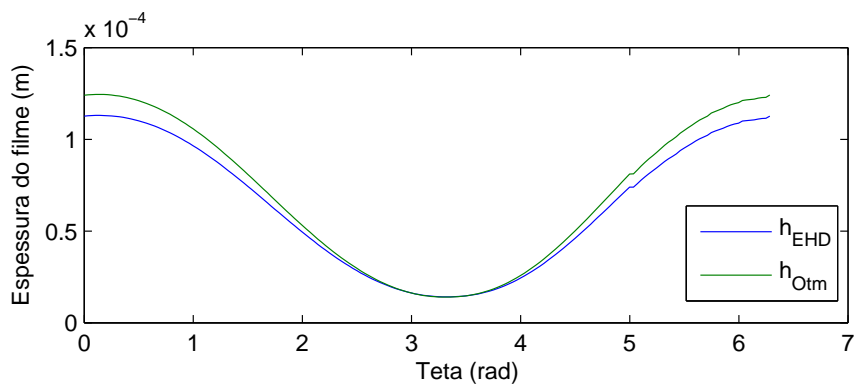


Figura 4.32: Espessura do filme de óleo utilizando-se uma malha de 177 por 8 elementos.

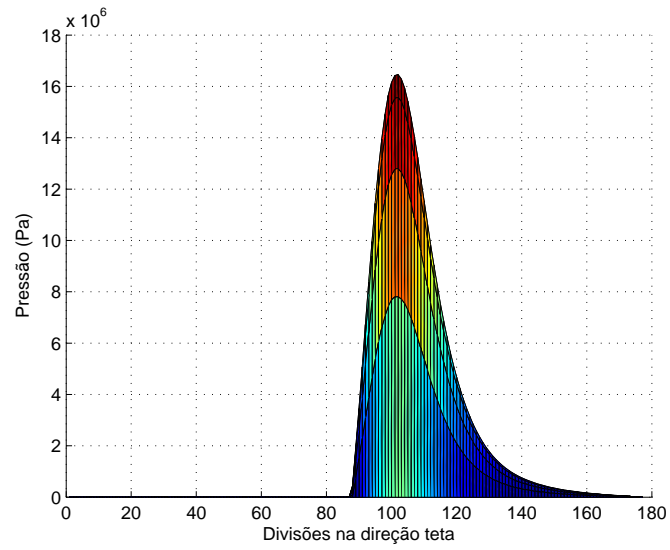


Figura 4.33: Distribuição de pressão antes da otimização utilizando-se a malha refinada.

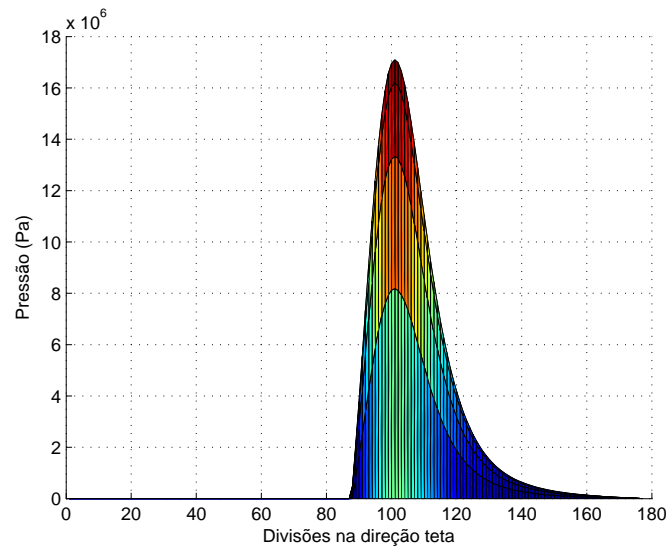


Figura 4.34: Distribuição de pressão após a otimização utilizando-se a malha refinada



#### 4.4.4 Resultados da Otimização para Incremento de Folga Radial Negativo

A otimização do mancal descrito anteriormente foi feita utilizando também um incremento inicial de folga radial negativo. Utilizou-se dois valores de carga, uma de  $10kN$  e outra de  $40kN$ , sendo que para cada uma delas foram usados incrementos de  $-5\mu m$ ,  $-10\mu m$  e  $-15\mu m$ . Os resultados estão agrupados primeiramente em função de cada parâmetro do mancal (pressão hidrodinâmica, espessura do filme e fator de excentricidade) e em seguida pelo valor de carga aplicada. Nota-se que, para ambos os valores de carregamento, um incremento inicial de folga radial negativo resulta em menores picos de pressão, sendo que a queda de pressão é mais acentuada à medida que se aumenta o valor em módulo do incremento. A espessura de filme de óleo também é modificada pelo processo de otimização. No entanto, essas mudanças são mais sensíveis na região de baixa pressão, visto que na região de alta pressão, ela é insignificante.

##### Pressão Hidrodinâmica

As Figuras 4.35, 4.36 e 4.37 mostram a variação do valor de pico de pressão hidrodinâmica, ao longo do processo de otimização, para valores de incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$ ,  $-10\mu m$  e  $-15\mu m$ , respectivamente. A distribuição de pressão para o mancal flexível é mostrada na Figura 4.38 e nas Figuras 4.39, 4.40 e 4.41 para valores de incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$ ,  $-10\mu m$  e  $-15\mu m$  respectivamente.

Carga(N)	Incremento ( $\mu m$ )	$h_{min}$ EHD ( $\mu m$ )	$h_{min}$ otimizado ( $\mu m$ )
10k	+5	17,76	17,40
10k	+10	17,76	17,06
10k	-5	17,76	18,14
10k	-10	17,76	18,55
10k	-15	17,76	18,99
40k	-5	15,22	15,46
40k	-10	15,22	15,70

Tabela 4.2: Espessura mínima do filme de óleo para incrementos de folga radial negativos

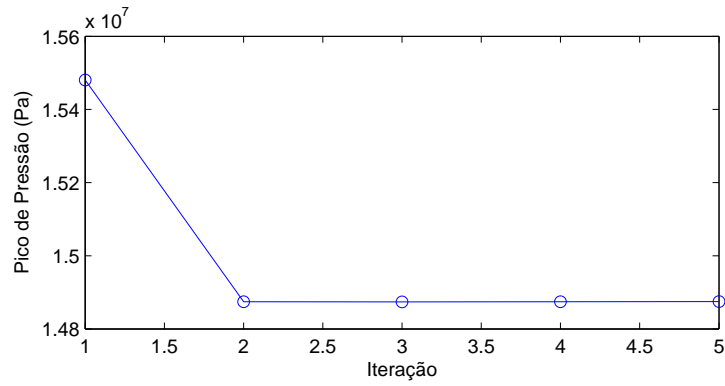


Figura 4.35: Pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$  com carregamento de 10kN.

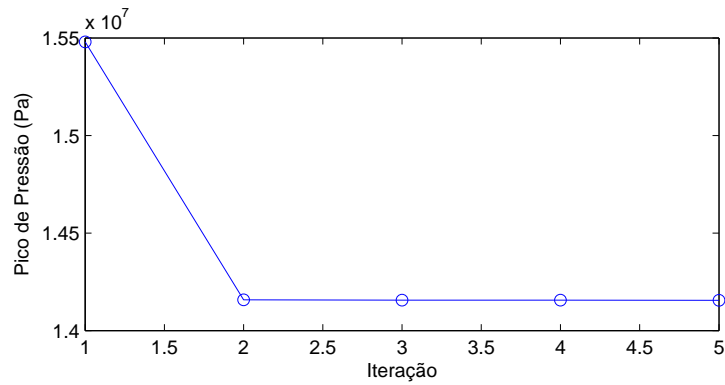


Figura 4.36: Pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de  $-10\mu m$  com carregamento de 10kN.

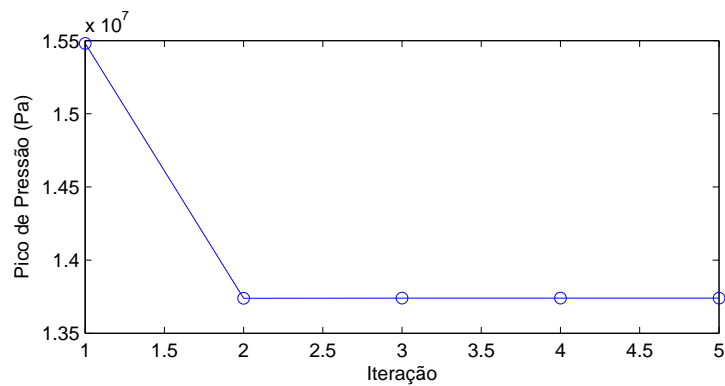


Figura 4.37: Pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de  $-15\mu m$  com carregamento de 10kN.

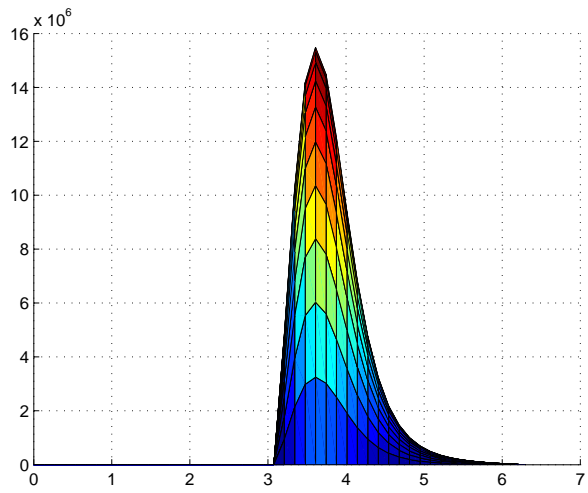


Figura 4.38: Distribuição de pressão hidrodinâmica para mancal não otimizado com carregamento de 10kN.

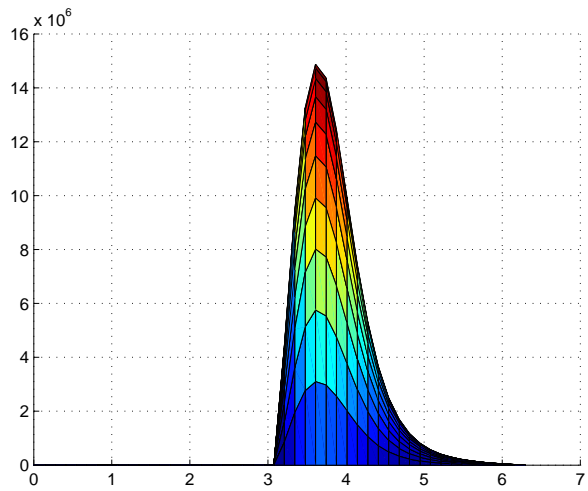


Figura 4.39: Distribuição de pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$  com carregamento de 10kN.

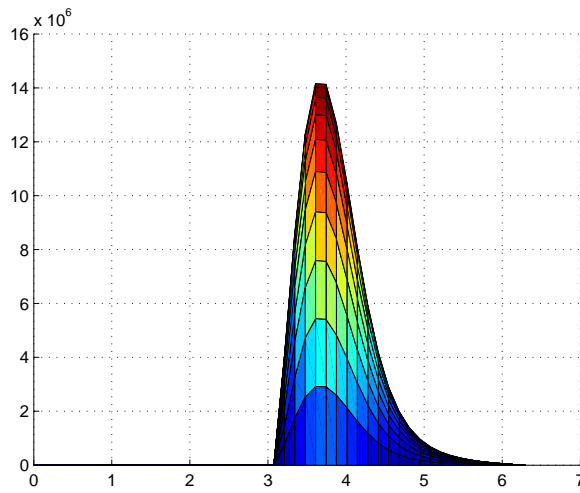


Figura 4.40: Distribuição de pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de  $-10\mu m$  com carregamento de  $10kN$ .

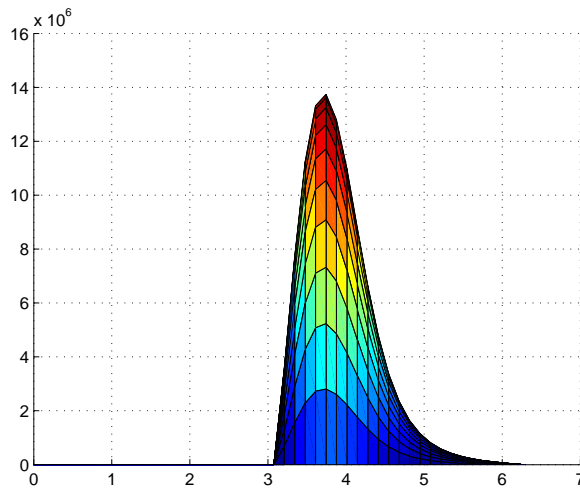


Figura 4.41: Distribuição de pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de  $-15\mu m$  com carregamento de  $10kN$ .

As Figuras 4.42 e 4.43 mostram os valores de pico de pressão para carregamento de 40kN para valores de incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$  e  $-10\mu m$ , respectivamente.

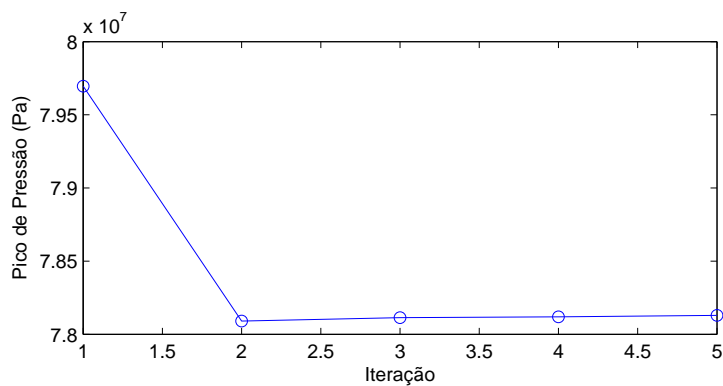


Figura 4.42: Pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$  com carregamento de 40kN.

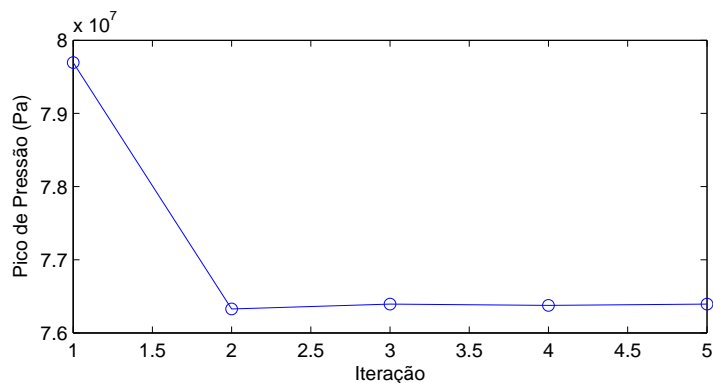


Figura 4.43: Pressão hidrodinâmica para incremento inicial de folga radial de  $-10\mu m$  com carregamento de 40kN.

### Espessura do filme de óleo

As Figuras 4.44, 4.45 e 4.46 mostram a espessura do filme de óleo para o mesmo mancal com e sem otimização, com incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$ ,  $-10\mu m$  e  $-15\mu m$  respectivamente.

Para um carregamento de 40kN, a espessura do filme de óleo no mancal é mostrada nas Figuras 4.47 e 4.48.

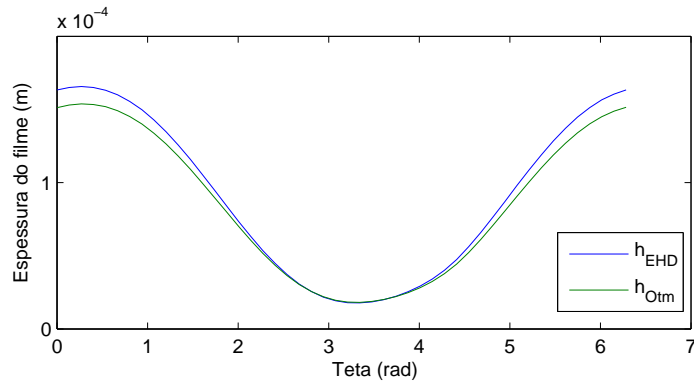


Figura 4.44: Espessura do filme de óleo para incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$  com carregamento de 10kN.

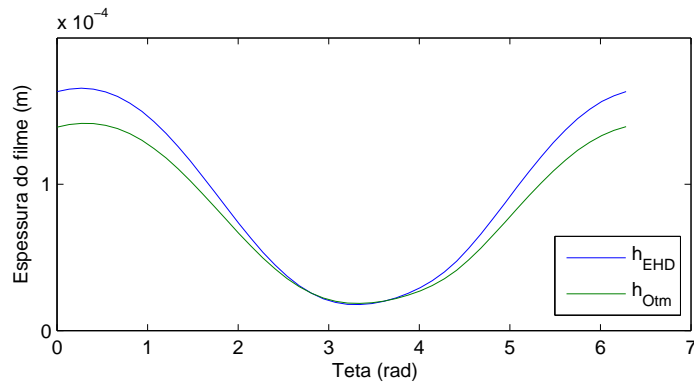


Figura 4.45: Espessura do filme de óleo para incremento inicial de folga radial de  $-10\mu m$  com carregamento de 10kN.

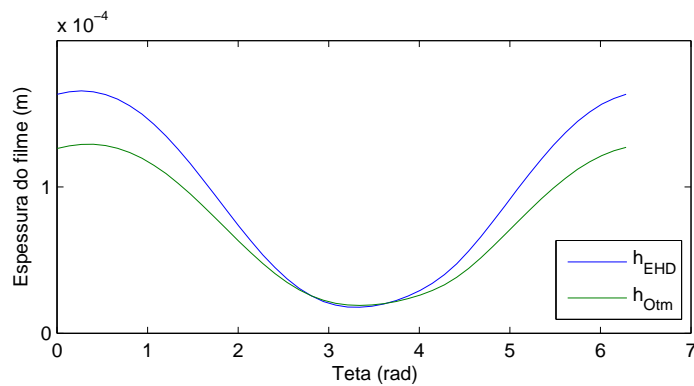


Figura 4.46: Espessura do filme de óleo para incremento inicial de folga radial de  $-15\mu m$  com carregamento de 10kN.

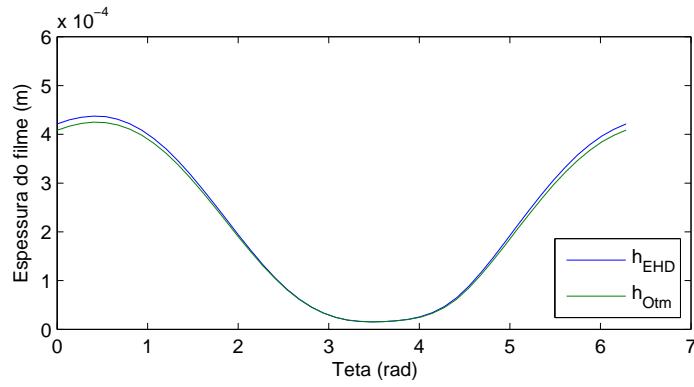


Figura 4.47: Espessura do filme de óleo para incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$  com carregamento de 40kN.

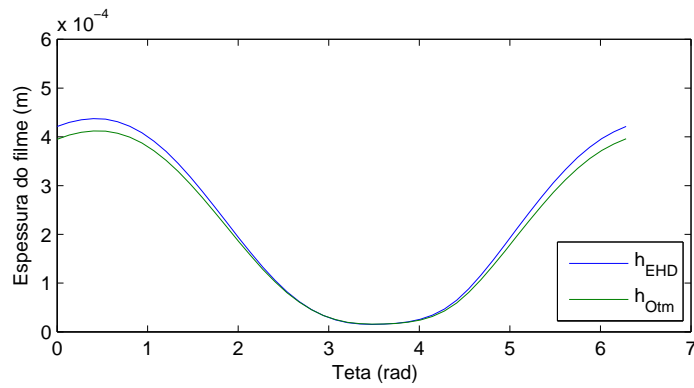


Figura 4.48: Espessura do filme de óleo para incremento inicial de folga radial de  $-10\mu m$  com carregamento de 40kN.

As Figuras 4.49, 4.50 e 4.51 apresentam a folga radial inicial e final para carregamento de 10kN e incrementos iniciais de  $-5\mu m$ ,  $-10\mu m$  e  $-15\mu m$  respectivamente. Os valores de folga radial inicial e final para carregamento de 40kN são apresentados nas Figuras 4.52 e 4.53.

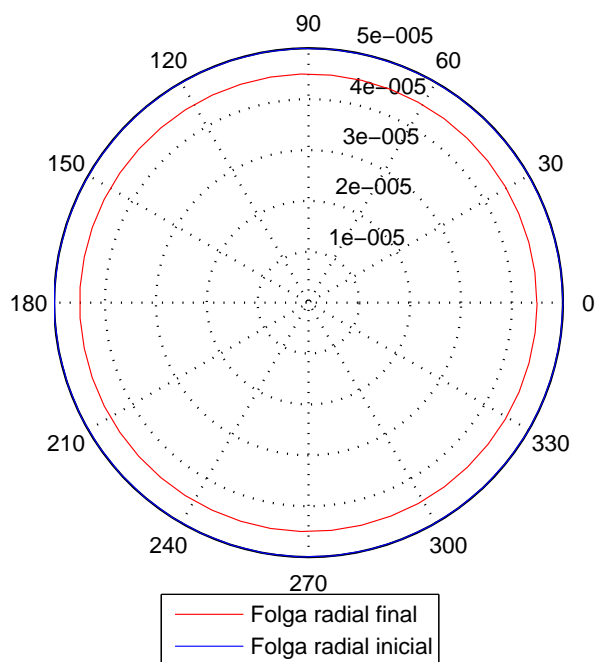


Figura 4.49: Folga radial inicial e final obtido na otimização para incremento inicial de  $-5\mu m$  para carga de 10kN.

### Fator de Excentricidade

As Figuras 4.54, 4.55 e 4.56 mostram os valores de fator de excentricidade ao longo do processo de otimização com incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$ ,  $-10\mu m$  e  $-15\mu m$  respectivamente.

Para um carregamento de 40kN, o fator de excentricidade é mostrado nas Figuras 4.47 e 4.48.



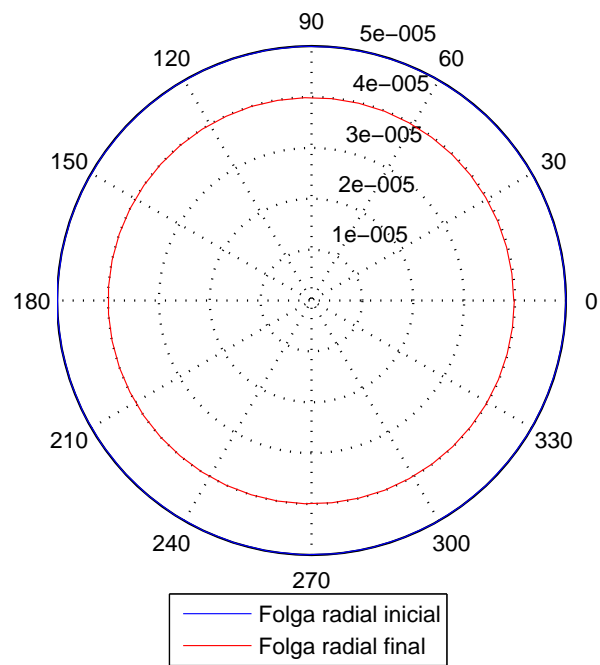


Figura 4.50: Folga radial inicial e final obtido na otimização para incremento inicial de  $-10\mu m$  para carga de 10kN.

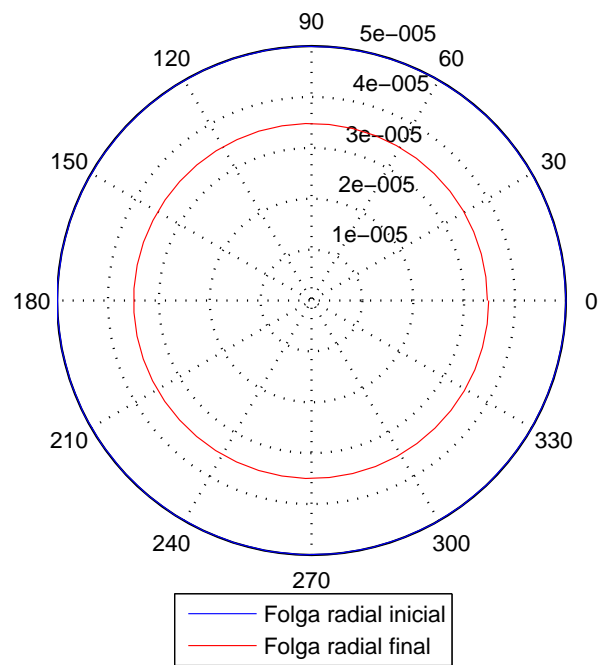


Figura 4.51: Folga radial inicial e final obtido na otimização para incremento inicial de  $-15\mu m$  para carga de 10kN.

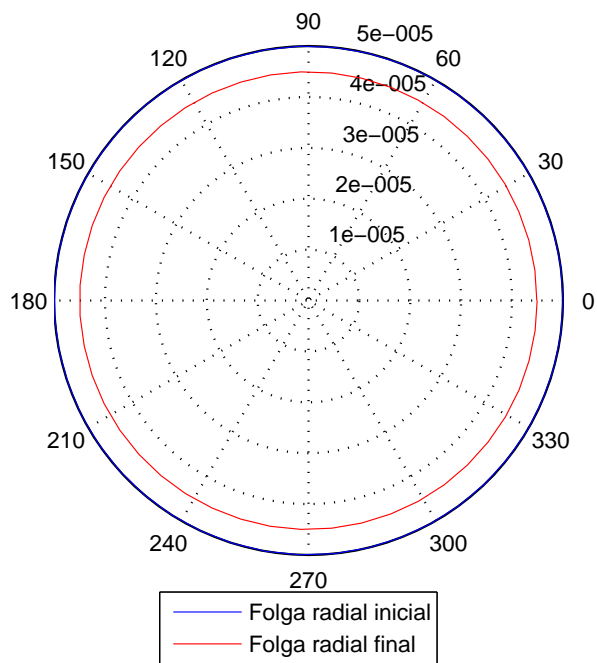


Figura 4.52: Folga radial inicial e final obtido na otimização para incremento inicial de  $-5\mu m$  para carga de 40kN.

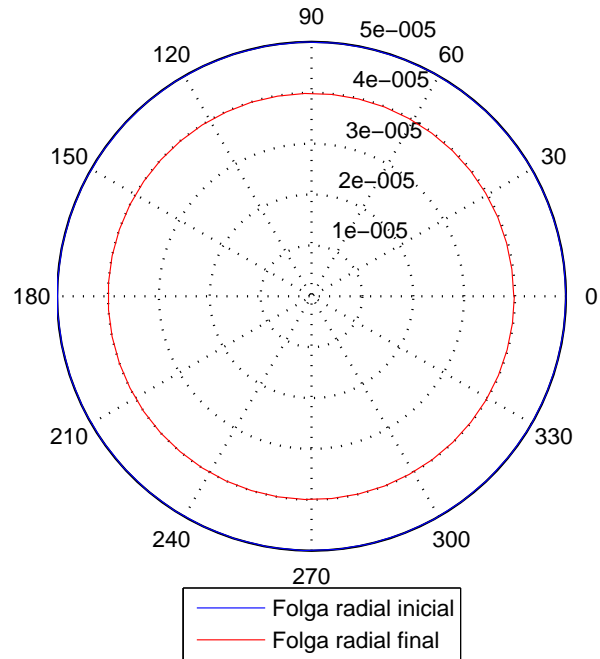


Figura 4.53: Folga radial inicial e final obtido na otimização para incremento inicial de  $-10\mu m$  para carga de 40kN.

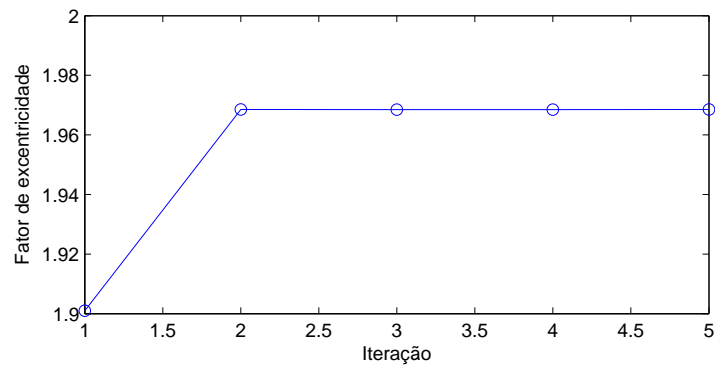


Figura 4.54: Fator de excentricidade para incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$  com carregamento de 10kN.

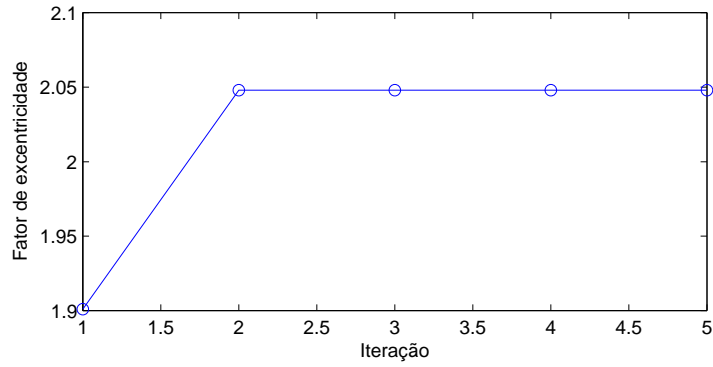


Figura 4.55: Fator de excentricidade para incremento inicial de folga radial de  $-10\mu m$  com carregamento de 10kN.

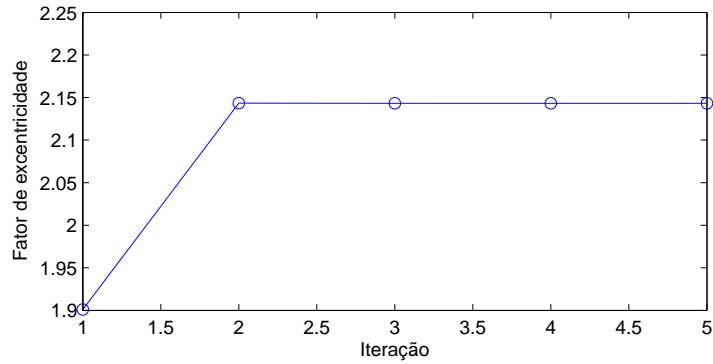


Figura 4.56: Fator de excentricidade para incremento inicial de folga radial de  $-15\mu m$  com carregamento de 10kN.

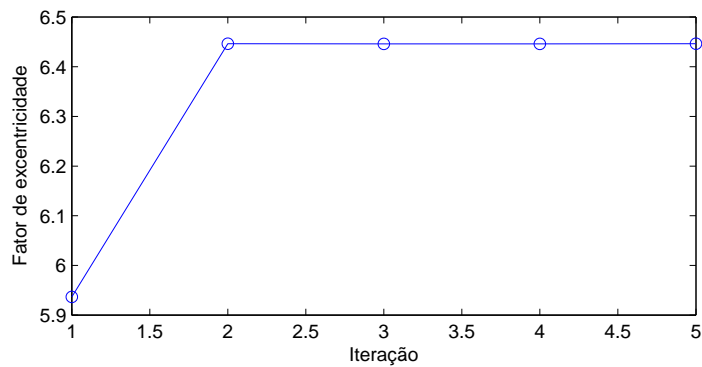


Figura 4.57: Fator de excentricidade para incremento inicial de folga radial de  $-5\mu m$  com carregamento de 40kN.

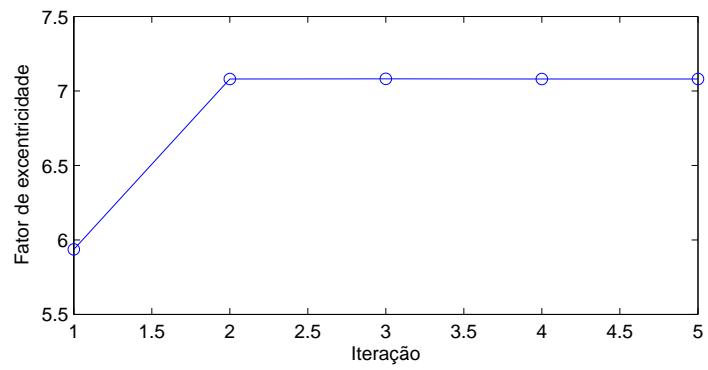


Figura 4.58: Fator de excentricidade para incremento inicial de folga radial de  $-10\mu m$  com carregamento de 40kN.

## 5 COMENTÁRIOS FINAIS

Este trabalho consistiu na implementação, em Matlab, de um algoritmo de otimização de mancais hidrodinâmicos radiais, utilizando-se a teoria elastohidrodinâmica.

O solução da equação de Reynolds foi validada comparando-se os resultados obtidos neste trabalho com os dados gerados pelo programa de simulação de mancais encontrado em Duarte Jr. 2005, que utiliza para a solução o método das diferenças finitas. Os resultados foram os mesmos em ambos os programas.

A análise dos resultados obtidos pelo programa EHD mostra uma redução do pico de pressão nos mancais flexíveis em comparação com o mesmo mancal quando rígido. Além disso, há um aumento da espessura mínima de filme de óleo nos mancais flexíveis, bem como uma mudança no perfil do filme de óleo próximo à região de mínima espessura. Essas características estão de acordo com o que era esperado para uma modelagem elastohidrodinâmica, e que pode ser verificado pela literatura da área.

O algoritmo de otimização apresentou algumas limitações. Os valores de incremento de folga radial obtidos ao final do processo de otimização seguem o mesmo padrão dos incrementos iniciais. Portanto, o algoritmo é bastante dependente dos valores iniciais, chegando a não obter resultado algum se esses valores iniciais não forem adequados. Mesmo com essas limitações, verificou-se um aumento da pressão de pico tanto para o mancal rígido quanto para o flexível após a otimização, quando se utilizou um incremento inicial de folga radial positivo. Para incrementos negativos houve uma redução nos valores de pressão de pico, sendo que a espessura mínima do filme de óleo se manteve inalterada. Estes resultados mostram que é possível obter um mancal com características mais interessantes do ponto de vista de

desempenho, realizando-se pequenas modificações na geometria do mesmo.

Uma alternativa para que a otimização de mancais seja mais efetiva é utilizar algoritmos genéticos ao invés de métodos baseados em gradiente, que tem grande dependência das condições iniciais, e utilizar o método de Newton-Raphson para solução acoplada das equações do fluido e de elasticidade, que não foi efetivamente utilizado neste trabalho devido aos problemas apresentados. Esta abordagem permitirá obter um algoritmo de simulação mais robusto e estável que o atual, com resultados menos dependentes dos dados de entrada do programa. Esta metodologia é sugerida para trabalhos futuros.



## Referências Bibliográficas

- BITTENCOURT, M. Fully tensorial nodal and modal shape functions for triangles and tetrahedra. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 63, n. 2, p. 1530–1558, 2005.
- BITTENCOURT, M.; VAZQUEZ, M. G.; VAZQUEZ, T. G. Construction of shape functions for the  $h$ - and  $p$ - versions of the fem using tensorial product. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 71, n. 5, p. 529–563, 2007.
- BITTENCOURT, M.; VAZQUEZ, T. G. A nodal spectral stiffness matrix for the fem (to appear). *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2008.
- BOEDO, S.; BOOKER, J. F. Surface roughness and structural inertia in a mode-based mass-conserving elastohydrodynamic lubrication model. *ASME Journal of Tribology*, v. 119, p. 449–455, July 1997.
- BONNEAU, D. et al. Ehd analysis, including structural inertia effects and a mass-conserving cavitation model. *ASME Journal of Tribology*, v. 117, p. 540–547, July 1995.
- BOOKER, J. F.; HUEBNER, K. H. Application of the finite element method to lubrication: An engineering approach. *ASME Journal of Lubrication Technology*, v. 94, n. 4, p. 313–323, 1972.
- CARL, T. E. An experimental investigation of a cylindrical journal bearing under constant and sinusoidal loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, v. 178, n. 3, p. 100–119, 1963.

- DUARTEJR., D. *Tribologia, Lubrificação e Mancais de Deslizamento*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005.
- FANTINO, B.; FRENE, J. Comparison of dynamic behavior of elastic connecting-rod bearing in both petrol and diesel engines. *ASME Journal of Tribology*, v. 107, p. 87–91, 1985.
- FATU M. HAJJAM, D. B. A. A new model of thermoelastohydrodynamic lubrication in dynamically loaded journal bearings. *ASME Journal of Tribology*, v. 128, n. 1, p. 85–95, January 2006.
- FLANDIN, G. *M2HTML*: Documentation system for matlab in html. [S.l.], 2006. Disponível em: <<http://www.artefact.tk/software/matlab/m2html/>>. Acesso em: 08 out. 2006.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T. *Introdução à mecânica dos fluidos*. 5ª edição. ed. [S.l.]: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2002.
- GARNIER, T.; BONNEAU, D.; GREUTE, C. Three-dimensional ehd behavior of the engine block/crankshaft assembly for a four cylinder inline automotive engine. *ASME Journal of Tribology*, v. 121, p. 721–730, October 1999.
- GERARDIN, R. C. *Modelo Dinâmico do Sistema Pistão Biela Manivela com Mancais Hidrodinâmicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2005.
- GOENKA, P. K.; BOOKER, J. F. Optimum design of hydrodynamic journal bearings. *Trans. ASME Journal of Lubrication Technology*, v. 105, n. 1, p. 1–12, 1983.

- GOENKA, P. K.; OH, K. P. An optimum short bearing theory for the elastohydrodynamic solution of journal bearings. *ASME Journal of Tribology*, v. 108, p. 294–299, 1986.
- GRUPO COMET. *FEAWEB ASP ASCII File Format for Mesh and Problem Definition Modules*. [S.l.], 2006.
- HAMROCK, B. J.; STEVEN, R. S.; JACOBSON, B. O. *Fundamentals of Fluid Film Lubrication 2<sup>o</sup> Ed.* New York: Marcel Dekker, 2004.
- HANSELMAN, D. C.; LITTLEFIELD, B. *MATLAB 6: curso completo*. São Paulo: Prentice-Hall, 2004.
- HAYS, D. F. A variational approach to lubrication problems and the solution of the finite journal bearing. *ASME Journal of Basic Engineering*, p. 13–23, 1959.
- KIM, B.-J.; KIM, K.-W. Thermo-elastohydrodynamic analysis of connecting rod bearing in internal combustion engines. *ASME Journal of Tribology*, v. 123, p. 444–450, 2001.
- KUMAR, A.; BOOKER, J. F. A finite element cavitation algorithm. *ASME Journal of Tribology*, v. 113, p. 276–286, April 1991.
- KUMAR, A.; BOOKER, J. F. A finite element cavitation algorithm: Application/validation. *ASME Journal of Tribology*, v. 113, p. 255–261, April 1991.
- LABOUFF, G. A.; BOOKER, J. F. Dynamically loaded journal bearings: A finite element treatment for rigid and elastic surfaces. *ASME Journal of Tribology*, v. 107, p. 505–515, 1985.

- MCIVOR, J. D. C. *The Analysis of Dynamically Loaded Flexible Journal Bearings Using Higher-Order Finite Elements*. Tese (Doutorado) — Kings College London, 1988.
- MCIVOR, J. D. C.; FENNER, D. N. Finite element analysis of dynamically loaded flexible journal bearings: A fast newton-raphson method. *ASME Journal of Tribology*, v. 111, p. 597–604, 1989.
- MICHAUD, P.; SOUCHET, D.; BONNEAU, D. Thermohydrodynamic lubrication analysis for a dynamically loaded journal bearing. *Proc. IMechE Part J: J. Engineering Tribology*, v. 221, p. 49–61, 2007.
- MOUNMOUSSEAU, P.; FILLON, M.; FRÊNE, J. Transient thermoelastohydrodynamic study of tilting-pad journal bearings - application to bearing seizure. *ASME Journal of Tribology*, v. 120, p. 319–324, April 1998.
- O'DONOGHUE, J.; BRIGHTON, D. K.; HOOKE, C. J. K. The effect of elastic distortions on journal bearing performance. *Trans. ASME Journal of Lubrication Technology*, v. 89, n. 4, p. 409–417, 1967.
- OH, K. P. The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem. *ASME Journal of Tribology*, v. 106, p. 88–95, 1984.
- OH, K. P.; GOENKA, P. K. The elastohydrodynamic solution of journal bearings under dynamic loading. *ASME Journal of Tribology*, v. 107, p. 389–395, 1985.
- OH, K. P.; HUEBNER, K. H. Solution of the elastohydrodynamic finite journal bearing problem. *ASME Journal of Tribology*, v. 95, p. 342–352, 1973.

PINKUS, O. Analysis of elliptical bearings. *Trans. ASME*, v. 78, July 1956.

PINKUS, O. The reynolds centennial: A brief history of the theory of hydrodynamic lubrication. *ASME Journal of Tribology*, v. 109, p. 02–20, 1987.

SEIREG, A.; EZZAT, H. Optimum design of hydrodynamic journal bearings. *Trans. ASME Journal of Lubrication Technology*, v. 91, p. 516–523, 1969.

SILVA, C.; BITTENCOURT, M. An object-oriented structural optimization program. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 20, n. 2, p. 154–166, October 2000.

THE MATHWORKS, Inc. *MATLAB HELP*: Function reference. [S.l.], 2005.

# APÊNDICE A - Método de Newton-Raphson

O método iterativo mostrado anteriormente mostrou-se eficaz para a solução dos casos abordados neste trabalho. No entanto, buscou-se criar um algoritmo mais robusto, com convergência em uma faixa maior de parâmetros operacionais e o consumo de um tempo computacional menor. Para isso, foi implementado o método de Newton-Raphson, que é conhecido pela sua alta taxa de convergência tanto para filmes finos quanto para espessos, com soluções obtidas em média após apenas 5 iterações (McIvor 1988). No entanto, não foram obtidos resultados utilizando este método devido à uma inconsistência no processo de superposição das matrizes derivadas do método. A formulação apresentada aqui foi baseada no trabalho de McIvor 1988.

As equações que modelam o problema de lubrificação podem ser escritas da seguinte forma

$$f_1 = \nabla(h^3 \nabla p) - 6\mu \left( u \frac{\partial h}{r \partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) = 0, \quad (\text{A -.1})$$

$$f_2 = \int_A p \cos \theta R dA - W_x = 0, \quad (\text{A -.2})$$

$$f_3 = \int_A p \sin \theta R dA - W_y = 0, \quad (\text{A -3})$$

onde a primeira equação é a equação de reynolds e as duas seguintes são derivadas do equilíbrio de forças. A espessura de filme é dada pela expressão

$$h = c - e_x \cos \theta - e_y \sin \theta + \delta h = c - e_x \cos \theta - e_y \sin \theta + Lp, \quad (\text{A -4})$$

onde  $L$  é o operador integral que relaciona a deformação do mancal com o pressão hidrodinâmica. Esta expressão é análoga a 4.2, porém são usadas dois valores de excentricidade,  $e_x$  e  $e_y$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente ao invés do fator de excentricidade  $\varepsilon$  e do ângulo de atitude  $\varphi$ .

Pode-se resolver este sistema de equações usando expansões em séries de Taylos. Para uma função  $f(x)$  a expansão em série de Taylor é  $f(x + \delta) = f(x) + \delta f'(x)$ , ignorando os termos de ordem maior ou igual a  $\delta^2$ . Deseja-se então encontrar a solução para  $f(x) = 0$ , assume-se um chute inicial  $x_i$  e tem-se

$$0 = f(x_i) + \delta f'(x_i). \quad (\text{A -5})$$

Assim a correção para  $x_i$  é

$$\delta = -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (\text{A -6})$$

Para o caso específico tratado aqui, supomos  $p^{(k)}$ ,  $e_x^{(k)}$  e  $e_y^{(k)}$  a solução para a  $k$ -ésima iteração e  $f_i^{(k)}$  o correspondente valor para a função  $f_i$ . O método de Newton-Raphson pode

então ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
p^{(k+1)} &= p^{(k)} + \delta p^{(k)} \\
e_x^{(k+1)} &= e_x^{(k)} + \delta e_x^{(k)} \\
e_y^{(k+1)} &= e_y^{(k)} + \delta e_y^{(k)}.
\end{aligned} \tag{A -7}$$

As correções  $\delta p^{(k)}$ ,  $\delta e_x^{(k)}$  e  $\delta e_y^{(k)}$  são encontradas por expansão em séries de Taylor de primeira ordem das funções  $f_i^{(k+1)}$  dadas por

$$\begin{aligned}
f_1(p, e_x, e_y) = 0 &\Rightarrow f_1^{(r+1)} = f_1^{(k)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p}\right)^{(k)} \delta p^{(k)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_x}\right)^{(k)} \delta e_x^{(k)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_y}\right)^{(k)} \delta e_y^{(k)} \\
f_2(p, e_x, e_y) = 0 &\Rightarrow f_2^{(r+1)} = f_2^{(k)} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial p}\right)^{(k)} \delta p^{(k)} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial e_x}\right)^{(k)} \delta e_x^{(k)} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial e_y}\right)^{(k)} \delta e_y^{(k)} \\
f_3(p, e_x, e_y) = 0 &\Rightarrow f_3^{(r+1)} = f_3^{(k)} + \left(\frac{\partial f_3}{\partial p}\right)^{(k)} \delta p^{(k)} + \left(\frac{\partial f_3}{\partial e_x}\right)^{(k)} \delta e_x^{(k)} + \left(\frac{\partial f_3}{\partial e_y}\right)^{(k)} \delta e_y^{(k)},
\end{aligned} \tag{A -8}$$

ou em forma matricial

$$\begin{bmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ f_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial p}\right)^{(k)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_x}\right)^{(k)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_y}\right)^{(k)} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial p}\right)^{(k)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial e_x}\right)^{(k)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial e_y}\right)^{(k)} \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial p}\right)^{(k)} & \left(\frac{\partial f_3}{\partial e_x}\right)^{(k)} & \left(\frac{\partial f_3}{\partial e_y}\right)^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p^{(k)} \\ \delta e_x^{(k)} \\ \delta e_y^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{A -9}$$

ou

$$R = [A]X, \tag{A -10}$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} \delta p^{(k)} \\ \delta e_x^{(k)} \\ \delta e_y^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{A -11}$$



As derivadas das funções  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  devem ser encontradas por expansão em séries de Taylor em torno de um ponto da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
f_1(p + \delta p, e_x, e_y) &= f_1(p, e_x, e_y) + \delta p \frac{\partial f_1}{\partial p}(p, e_x, e_y) \\
&= \nabla(h^3 \nabla(p + \delta p)) - 6 \left( u \frac{\partial h}{r \partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) = 0 \\
&= \nabla((h_0 + c(p + \delta p))^3 \nabla(p + \delta p)) \\
&\quad - 6\mu \left( u \frac{\partial(h_0 + c(p + \delta p))}{r \partial \theta} + 2 \frac{\partial(h_0 + c(p + \delta p))}{\partial t} \right) = 0 \tag{A -.12}
\end{aligned}$$

onde a o valor de  $h$  foi substituído pela expressão A -.4. Expandindo os termos tem-se

$$\begin{aligned}
f_1(p + \delta p, e_x, e_y) &= \nabla((h_0^3 + 3h_0^2 c(p + \delta p) + 3h_0 c^2(p^2 + 2p\delta p + \delta p^2) \\
&\quad + c^3(p^3 + 3p^2\delta p + 3p\delta p^2 + \delta p^3)) \nabla(p + \delta p)) \\
&\quad - 6\mu \left( u \frac{\partial(h_0 + cp)}{r \partial \theta} + u \frac{\partial(c\delta p)}{r \partial \theta} + 2 \frac{\partial(h_0 + cp)}{\partial t} + 2 \frac{\partial(c\delta p)}{\partial t} \right). \tag{A -.13}
\end{aligned}$$

Eliminando os termos de ordem  $\delta p^2$  ou superior

$$\begin{aligned}
f_1(p + \delta p, e_x, e_y) &= \nabla((h_0^3 + 3h_0^2 cp + 3h_0^2 c\delta p + 3h_0 c^2 p^2 + 3h_0 c^2 2p\delta p \\
&\quad + c^3 p^3 + c^3 3p^2 \delta p) \nabla(p + \delta p)) - 6\mu u \frac{\partial(h_0 + cp)}{r \partial \theta} - 6\mu u \frac{\partial(c\delta p)}{r \partial \theta} \\
&\quad - 12\mu \frac{\partial(h_0 + cp)}{r \partial \theta} - 12\mu \frac{\partial(c\delta p)}{r \partial \theta} \tag{A -.14}
\end{aligned}$$

Organizando os termos

$$\begin{aligned}
f_1(p + \delta p, e_x, e_y) &= \nabla(h^3 \nabla p) - 6\mu \left( u \frac{\partial h}{r \partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{r \partial t} \right) \\
&\quad + \nabla(h^3 \nabla \delta p + (3h_0^2 c\delta p + 3h_0 c^2 2p\delta p + c^3 3p^2 \delta p) \nabla(p + \delta p)) \\
&\quad - 6\mu \left( u \frac{\partial(c\delta p)}{r \partial \theta} + 2 \frac{\partial(c\delta p)}{r \partial t} \right) \tag{A -.15}
\end{aligned}$$

Por comparação com a equação A -1 vemos que

$$f_1(p + \delta p, e_x, e_y) = f_1(p, e_x, e_y) + \nabla(h^3 \nabla \delta p) + \nabla(3c\delta p h^2 \nabla(p + \delta p)) - 6\mu \left( u \frac{\partial(c\delta p)}{r\partial\theta} + 2 \frac{\partial(c\delta p)}{r\partial t} \right) \quad (\text{A -.16})$$

Deste modo, da equação A -.8 tem-se que

$$\delta p \frac{\partial f_1}{\partial p} = \nabla(h^3 \nabla \delta p) + \nabla(3c\delta p h^2 \nabla(p + \delta p)) - 6\mu \left( u \frac{\partial(c\delta p)}{r\partial\theta} + 2 \frac{\partial(c\delta p)}{r\partial t} \right) \quad (\text{A -.17})$$

De forma análoga são encontradas as expressões para  $\partial f_1 / \partial e_x$

$$\delta e_x \frac{\partial f_1}{\partial e_x} = -\nabla(3h^2 \delta e_x \cos \theta \nabla p) - 6\mu \left( \frac{u}{r} \delta e_x \sin \theta - 2 \frac{\partial(\delta e_x \cos \theta)}{\partial t} \right) \quad (\text{A -.18})$$

e para  $\partial f_1 / \partial e_y$

$$\delta e_y \frac{\partial f_1}{\partial e_y} = -\nabla(3h^2 \delta e_y \sin \theta \nabla p) + 6\mu \left( \frac{u}{r} \delta e_y \cos \theta + 2 \frac{\partial(\delta e_y \sin \theta)}{\partial t} \right) \quad (\text{A -.19})$$

As derivadas de  $f_2$  e  $f_3$  em relação a  $p$  são obtidas da mesma maneira em resultam em

$$\delta p \frac{\partial f_2}{\partial p} = \int_a \delta p \cos \theta dA \quad (\text{A -.20})$$

e

$$\delta p \frac{\partial f_3}{\partial p} = \int_a \delta p \sin \theta dA \quad (\text{A -.21})$$

As derivadas restantes são todas nulas, ou seja,

$$\frac{\partial f_2}{\partial e_x} = \frac{\partial f_2}{\partial e_y} = \frac{\partial f_3}{\partial e_x} = \frac{\partial f_3}{\partial e_y} = 0 \quad (\text{A -.22})$$

Com estas expressões cria-se a matriz  $[A]$  do método aplicando-se o princípio de Galerkin

e o teorema de Green-Gauss, como pode ser visto em McIvor 1988. Foram utilizados elementos de grau dois para criar o modelo tri-dimensional do mancal e a matriz de flexibilidade foi obtida para os nós da superfície pelo princípio da condensação. Porém uma inconsistência na superposição das matrizes dos elementos para formar a matriz global do método de Newton-Raphson impediu que fossem obtidos resultados com esta abordagem. O motivo de tal inconsistência foi estudado mas não se chegou a nenhuma conclusão. Por este motivo o método foi descartado e considerados apenas os resultados apresentados no texto.