

Márcio Júnior Lacerda

FILTRAGEM ROBUSTA DE SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO POR MEIO DE
FUNÇÕES DE LYAPUNOV POLINOMIAIS

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

Co-orientador: Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão
Fontoura de Oliveira



Campinas
2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

L116f Lacerda, Márcio Júnior
Filtragem robusta de sistemas lineares invariantes no tempo por meio de funções de Lyapunov polinomiais / Márcio Júnior Lacerda. --Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientadores: Pedro Luis Dias Peres, Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Análise de sistemas. 2. Teoria de controle. 3. Incerteza. 4. Lyapunov, Funções de. 5. Otimização matemática. I. Peres, Pedro Luis Dias. II. Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura de. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Título em Inglês: Robust filtering of linear time invariant systems by means of polynomial Lyapunov functions

Palavras-chave em Inglês: Systems analysis, Control theory, Uncertainty, Lyapunov functions, Mathematical optimization

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Valter Júnior de Souza Leite, João Bosco Ribeiro do Val

Data da defesa: 27/10/2010

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

Márcio Júnior Lacerda

Engenheiro Eletricista – UFSJ-MG–2009

FILTRAGEM ROBUSTA DE SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO POR MEIO DE
FUNÇÕES DE LYAPUNOV POLINOMIAIS

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
CEFET-MG

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val
FEEC/UNICAMP

Campinas
2010

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Márcio Júnior Lacerda

Data da Defesa: 27 de outubro de 2010

Título da Tese: "Filtragem Robusta de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo por meio de Funções de Lyapunov Polinomiais"

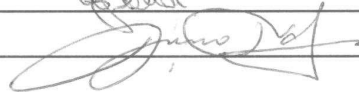
Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres (Presidente):



Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite:



Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val:



Dedico a todos que de alguma maneira
contribuem para um mundo melhor.

Agradecimentos

Agradeço,

Aos meus pais, Vera e Francisco, por terem me apoiado em todos os momentos dessa caminhada e que tantas vezes se sacrificaram para que fosse possível que eu chegasse até aqui, não existem palavras suficientes para expressar minha gratidão e meu amor por vocês, aos meus irmãos, Ananias, Luis, Zezé, Simone e Laurinha pelo suporte prestado várias vezes em todos os sentidos, vocês fazem parte dessa conquista.

Aos colegas do DT, principalmente Cristiano, Renato e Taís, acho que nunca vou poder recompensá-los pelo que fizeram por mim.

Ao professor Erivelton Nepomuceno, por ter me iniciado no mundo da investigação científica, e por ter aberto todas as portas para que eu pudesse alcançar meus objetivos. Agradeço também ao professor Valter e a prof. Valceres por auxiliarem nesse processo.

Ao prof. Pedro, pela disponibilidade e por orientar esse trabalho da melhor maneira possível e ao prof. Ricardo por acompanhar esse processo, sempre dispostos a responder meus questionamentos.

Aos amigos do GCoM, que foram fundamentais no aprendizado do trabalho em grupo, Rodrigo, Everthon, João Paulo, Wanderson. Aos amigos da república Calabouço em São João del-Rei, Samir, Kennedy, Rafael e Leonardo, ao Alípio que me aturou durante anos e aos amigos da Milhouse em Campinas, por me proporcionarem momentos de descontração durante todo este tempo. A Suzanne pelas conversas descontraídas e pela amizade verdadeira compartilhada durante todos esses anos.

Aos “velhos” amigos, que mesmo distante se fizeram presentes nessa caminhada.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro concedido durante todo o período do mestrado.

E a Deus, por tudo.

“Criar sim, mentir não. Criar não é
imaginação, é correr o grande risco de
se ter a realidade.”

Clarice Lispector

Resumo

Este trabalho apresenta novas condições na forma de desigualdades matriciais lineares para a síntese de filtros robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de ordem completa, para sistemas incertos, contínuos e discretos no tempo. Os parâmetros incertos invariantes no tempo pertencem a um politopo com vértices conhecidos. Graças à existência de um número maior de variáveis de folga e à utilização de relaxações baseadas em matrizes polinomiais homogêneas, desigualdades matriciais lineares podem ser obtidas das condições propostas para o projeto de filtros robustos, com desempenho superior aos métodos existentes. A superioridade e eficiência do método proposto para o projeto dos filtros robustos são ilustradas por meio de comparações numéricas e exemplos da literatura.

Palavras-chave: Sistemas incertos, Filtragem robusta \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , Funções de Lyapunov polinomiais homogêneas, Desigualdades matriciais lineares.

Abstract

This work presents new convex optimization procedures for full order robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for continuous and discrete-time uncertain linear systems. The time-invariant uncertain parameters are supposed to belong to a polytope with known vertices. Thanks to the use of a larger number of slack variables and homogeneous polynomial relaxations, linear matrix inequalities for the design of robust filters can be derived from the proposed conditions, outperforming the existing methods. The superiority and efficiency of the proposed method for robust filter design are illustrated by means of numerical comparisons in benchmark examples from the literature.

Key-words: Uncertain systems, Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering, Homogeneous polynomial Lyapunov functions, Linear matrix inequalities.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Acrônimos e Notação	xiv
Introdução	1
1 Fundamentos Matemáticos	4
1.1 Descrição do Sistema	4
1.2 Sistemas Contínuos	5
1.2.1 Estabilidade	5
1.2.2 Critério de Desempenho \mathcal{H}_2	6
1.2.3 Critério de Desempenho \mathcal{H}_∞	7
1.3 Sistemas Discretos	8
1.3.1 Estabilidade	8
1.3.2 Critério de Desempenho \mathcal{H}_2	9
1.3.3 Critério de Desempenho \mathcal{H}_∞	10
1.4 Sistemas com Incertezas Politópicas	11
1.5 Lemas Auxiliares	11
1.5.1 Lema de Finsler	11
1.5.2 Estabilidade com Funções de Lyapunov Afins	11
1.5.3 Estabilidade com Funções de Lyapunov Polinomiais	12
2 Filtragem Baseada na Estabilidade Quadrática	14
2.1 Sistemas Contínuos	14
2.1.1 Filtragem \mathcal{H}_2	14
2.1.2 Filtragem \mathcal{H}_2 Dual	16
2.1.3 Filtragem \mathcal{H}_∞	18
2.2 Sistemas Discretos	20
2.2.1 Filtragem \mathcal{H}_2	20
2.2.2 Filtragem \mathcal{H}_2 Dual	22
2.2.3 Filtragem \mathcal{H}_∞	23
2.3 Filtragem Robusta	24

3	Sistemas Contínuos	25
3.1	Resultados Preliminares	25
3.2	Filtragem \mathcal{H}_2	26
3.3	Filtragem \mathcal{H}_∞	28
3.4	Condições LMIs para Filtragem Robusta	29
3.5	Experimentos Numéricos	30
3.5.1	Funções de Lyapunov Afins	30
3.5.2	Funções de Lyapunov Polinomiais	33
4	Sistemas Discretos	35
4.1	Resultados Preliminares	35
4.2	Filtragem \mathcal{H}_2	35
4.3	Filtragem \mathcal{H}_∞	37
4.4	Condições LMIs para Filtragem Robusta	38
4.5	Experimentos Numéricos	39
4.5.1	Funções de Lyapunov Afins	39
4.5.2	Funções de Lyapunov Polinomiais	39
	Conclusões	43
	Bibliografia	44
A	Desigualdades Matriciais Lineares	49
A.1	Desigualdades Matriciais Lineares	49
A.2	Complemento de Schur	49
A.3	Prova do Lema de Finsler	50

Lista de Figuras

1.1	Problema de filtragem.	5
3.1	Nuvem de valores singulares do sistema (3.20)-(3.21) obtido com o Teorema 3.2, com o limitante 6.0596 (dB).	32
3.2	Nuvem de valores singulares do sistema (3.20)-(3.21) obtido com o filtro de [17], com o limitante 20.4486 (dB).	33
3.3	Análise temporal dos filtros robustos para o sistema (3.20)-(3.21).	33
4.1	Nuvem de valores singulares obtida com o Teorema 4.2, com o limitante 4.3901 (dB).	42
4.2	Nuvem de valores singulares obtida com o filtro de [17], com o limitante 4.6243 (dB).	42

Lista de Tabelas

3.1	Comparação entre o Teorema 3.1 $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_3 = 1$ utilizando função de Lyapunov afim e o método proposto em [17] para sistemas gerados aleatoriamente (n é o número de estados e N o número de vértices do sistema).	31
3.2	Comparação entre o Teorema 3.2 $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ utilizando função de Lyapunov afim e o método proposto em [17] para sistemas gerados aleatoriamente (n é o número de estados e N o número de vértices do sistema).	31
3.3	Custo \mathcal{H}_2 obtido pelo Teorema 3.1 (T3.1) e outros métodos.	34
3.4	Custo \mathcal{H}_∞ usando o Teorema 3.2 (T3.2), $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, e [17], com $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, em função dos valores de $\bar{\alpha}$	34
4.1	Comparação entre o Teorema 4.1 $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_3 = 1$ utilizando função de Lyapunov afim com o método proposto em [17] para sistemas gerados aleatoriamente (n é o número de estados e N o número de vértices do sistema).	39
4.2	Comparação entre o Teorema 4.2 $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ utilizando função de Lyapunov afim com o método de [17] para sistemas gerados aleatoriamente (n é o número de estados e N o número de vértices do sistema).	40
4.3	Custo \mathcal{H}_2 para o Caso C, usando Teorema 4.1 (T4.1), $\lambda_1 = -0.883$, $\lambda_2 = -0.913$, $\lambda_3 = 0$, [17], [18] e [24].	41

Lista de Acrônimos e Notação

LMI Linear Matrix Inequality (desigualdade matricial linear)

*	indica bloco simétrico nas LMIs
$L > 0$	indica que a matriz L é simétrica definida positiva
$L \geq 0$	indica que a matriz L é simétrica semi-definida positiva
A	notação para matrizes (letras maiúsculas do alfabeto latino)
A'	($'$), pós-posto a um vetor ou matriz, indica a operação de transposição
A^*	($*$), pós-posto a um vetor ou matriz, indica o conjugado transposto
$\text{Tr}(\cdot)$	representa o Traço de uma matriz
$\sigma_{max}(\cdot)$	representa o maior valor singular de uma matriz
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{Z}	conjunto dos números inteiros
\mathbb{Z}_+	conjunto dos números inteiros não negativos
\mathbb{N}	conjunto dos números naturais (incluindo o zero)
I	dentro de um bloco matricial indica uma matriz identidade de dimensão apropriada
0	dentro de um bloco matricial indica uma matriz de zeros de dimensão apropriada
g	grau das variáveis (matrizes) polinomiais
N	especialmente utilizado para denotar o número de vértices de um politopo
n	especialmente utilizado para representar a ordem de um sistema (número de estados)
Δ_N	simplex unitário de N variáveis
α	especialmente utilizado para representar as incertezas de um sistema

Introdução

O problema de obtenção de uma boa aproximação para uma grandeza corrompida por ruídos, leva o nome de *filtragem*. Quando a grandeza a ser aproximada é a saída de um sistema dinâmico, muitos autores se referem a esse problema como *filtragem dinâmica* [3]. Se a saída do sistema é o próprio vetor de estados, o problema de filtragem leva o nome de *estimador de estados* e o filtro torna-se um *observador de estados*. Na literatura de controle, o problema de estimação de estados é tratado como dual ao problema de controle por realimentação de estados, o que permite que muitas das técnicas desenvolvidas para o controle possam ser usadas no problema de filtragem.

O estudo de problemas de filtragem é um importante tópico em tratamento de sinais e controle de sistemas dinâmicos [3]. Como critérios de desempenho, as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ da função de transferência do sinal de ruído para o erro de estimação estão entre os mais utilizados. O problema torna-se mais complexo quando o modelo do sistema dinâmico é afetado por incertezas e um filtro robusto precisa ser projetado. Nesta dissertação, a robustez está relacionada com o desempenho do sistema, que é uma das características mais importantes em sistemas de controle.

Uma das formas de se resolver o problema de filtragem é por meio da solução de equações de Riccati de forma iterativa [43]. Em sistemas de controle as equações de Riccati são utilizadas extensivamente [5, 15], principalmente em sistemas com incertezas do tipo *norm-bounded* [40].

Outra forma é utilizando-se métodos de otimização baseados em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*). Além da simplicidade e consistência algébrica, a existência de algoritmos computacionais eficientes, para programação convexa, fizeram com que os métodos de análise e projetos baseados nas LMIs se popularizassem. Em [20], transformações de congruência e particionamento de variáveis permitiram que o problema de filtragem para sistemas politópicos a tempo contínuo fosse realizada por meio de LMIs. O artigo [21] apresenta uma extensão de [20] para o caso discreto, considerando os custos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Outro ponto importante apresentado em [20, 21], é a facilidade de obtenção de um filtro descentralizado, bastando para isso impor uma estrutura bloco diagonal às variáveis do problema.

A abordagem mais utilizada, nesses casos, baseia-se na existência de uma mesma função de Lyapunov, comum a todo o domínio de incertezas, assegurando a estabilidade (denominada estabilidade quadrática) do sistema dinâmico associado ao erro de estimação e limitantes para os valores da norma utilizada como critério de desempenho.

Desde então, diversos trabalhos proveram condições na forma de LMIs tanto para sistemas contínuos no tempo [6, 14, 22], discretos [21], com alocação de pólos [35, 36], sistemas com atrasos [13, 34, 48] ou considerando outros critérios de desempenho, como o ganho energia-a-pico [37].

Resultados menos conservadores, baseados em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, surgiram primeiramente no contexto de sistemas discretos no tempo, graças à separação da matriz de Lyapunov das variáveis utilizadas para síntese do filtro [23, 45] e, mais recentemente, tratando o

caso contínuo a partir de uma formulação com matrizes extras nas LMIs que satisfazem uma estrutura particular [4, 17, 18, 44]. É importante mencionar os resultados recentes baseados em LMIs para projeto de filtro em diversos contextos [8, 10, 11, 16, 26, 30, 41, 46, 48].

Na maioria dos casos, são usadas variáveis adicionais no procedimento de linearização das desigualdades, que provêm novos graus de liberdades na síntese do filtro e custos garantidos menos conservadores. Vale a pena mencionar também [25], com uma abordagem baseada em uma técnica de otimização que trabalha diretamente no espaço de parâmetros das matrizes que definem o filtro robusto.

Em [45] é apresentada a síntese de filtros robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , para o caso discreto, utilizando duas variáveis de folga, cujas partições provêm as matrizes do filtro. A síntese do filtro depende da busca de parâmetros escalares, tanto no caso \mathcal{H}_2 quanto no caso \mathcal{H}_∞ . Em [17], é apresentada uma extensão dos resultados de [45], com a síntese de filtros robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , para os casos contínuo e discreto, porém o projeto do filtro é baseado na subpartição das matrizes de folga, e, assim como em [45], as variáveis de folga possuem partições em comum relacionadas por escalares. Essa estratégia permite que o filtro seja recuperado por simples mudanças de variáveis. Utilizando variáveis polinomialmente dependentes de parâmetros de grau genérico, seguindo a estratégia apresentada em [33], obteve-se em [18] uma significativa melhora nos resultados em relação aos trabalhos anteriores.

Outra abordagem para o projeto de filtros pode ser encontrada em [24], que trata os casos contínuo e discreto para a norma \mathcal{H}_2 . O filtro é baseado em um certificado de desempenho, que é dado pela diferença entre um limitante superior e inferior de um problema min-max. Essa abordagem provê filtros de ordem superior à da planta, ou de mesma ordem, após o cancelamento de pólos e zeros, quando possível.

Este trabalho trata do problema de projeto de filtros robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares, contínuos e discretos no tempo, com incertezas politópicas e parâmetros invariantes no tempo. Utilizando o Lema de Finsler, novas condições na forma de LMIs dependentes de parâmetros são obtidas para a existência de um filtro robusto de ordem completa. Como critério de desempenho, são utilizados limitantes das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ da função de transferência do sinal de ruído para o erro de estimação. As condições são mais gerais e contêm como casos particulares outras condições presentes na literatura. Impondo uma estrutura particular para as variáveis de decisão, relaxações LMIs baseadas em matrizes polinomialmente dependentes de parâmetros de grau genérico são propostas para a resolução do problema, buscando um filtro robusto de ordem completa que minimiza um limitante do critério de desempenho \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . Os resultados são ilustrados por exemplos numéricos, incluindo comparações com técnicas da literatura. Os filtros obtidos com a metodologia proposta estão associados a limitantes menos conservadores do que os existentes na literatura.

A dissertação está organizada da seguinte forma.

Capítulo 1

Apresenta as definições e conceitos utilizados no decorrer da dissertação, como a definição do sistema, o problema de filtragem, o cálculo dos critérios de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para os casos contínuo e discreto por meio de LMIs, o Lema de Finsler utilizado na demonstração dos teoremas, os lemas utilizados para a obtenção das condições LMIs e a descrição das incertezas politópicas.

Capítulo 2

Apresenta as condições LMIs para o projeto de filtros \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , utilizando a partição da função de Lyapunov e de sua inversa. Esse foi um dos primeiros resultados na teoria de filtragem robusta e

serviu como referência para a extensão dos trabalhos na área de filtragem.

Capítulo 3

No capítulo, são apresentados os métodos propostos para a síntese de filtros robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas contínuos, as condições LMIs para filtragem robusta, além de experimentos numéricos incluindo comparações com técnicas presentes na literatura que demonstram a eficiência do método proposto.

Capítulo 4

No capítulo, os métodos propostos para a síntese de filtros robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos são apresentados. Novamente a eficiência dos métodos propostos é verificada por meio de experimentos numéricos retirados da literatura e comparação com outras técnicas.

Conclusões

Apresenta as conclusões, perspectivas para trabalhos futuros e os artigos produzidos diretamente relacionados com essa dissertação.

Fundamentos Matemáticos

Este capítulo tem como objetivo familiarizar o leitor com conceitos e ferramentas que são utilizados no decorrer da dissertação. São apresentados a descrição do sistema investigado, o problema de filtragem, os critérios de desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , o cômputo dos limitantes das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por LMIs, o Lema de Finsler utilizado na obtenção das condições LMIs, bem como a descrição das incertezas politópicas.

1.1 Descrição do Sistema

Considere o sistema linear invariante no tempo livre de incertezas

$$\begin{aligned}\delta[x] &= Ax + B_1w \\ z &= C_1x + D_{11}w \\ y &= C_2x + D_{21}w\end{aligned}\tag{1.1}$$

com

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}, C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}, D_{11} \in \mathbb{R}^{p \times r}, C_2 \in \mathbb{R}^{q \times n} \text{ e } D_{21} \in \mathbb{R}^{q \times r}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ representa o estado, $w \in \mathbb{R}^r$ uma entrada externa, que denota o vetor de ruídos não mensuráveis, incluindo os ruídos que corrompem as medidas e os distúrbios do processo, $z \in \mathbb{R}^p$ a saída de referência e $y \in \mathbb{R}^q$ a saída medida. O operador $\delta[x]$ representa a derivada \dot{x} para sistemas contínuos e o operador deslocamento $x(k+1)$ para sistemas discretos no tempo.

O problema abordado neste trabalho é: determinar um filtro robusto de ordem completa, linear e invariante no tempo

$$\begin{aligned}\delta[x_f] &= A_f x_f + B_f y, \\ z_f &= C_f x_f + D_f y\end{aligned}\tag{1.2}$$

com

$$A_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}, B_f \in \mathbb{R}^{n_f \times q}, C_f \in \mathbb{R}^{p \times n_f} \text{ e } D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$$

em que $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$, $n_f = n$, é o estado estimado e $z_f \in \mathbb{R}^p$ a saída estimada, que seja assintoticamente estável e minimize alguma medida de desempenho, como por exemplo, a norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ da função de transferência de w para o erro $e = z - z_f$, como mostrado na Figura 1.1.

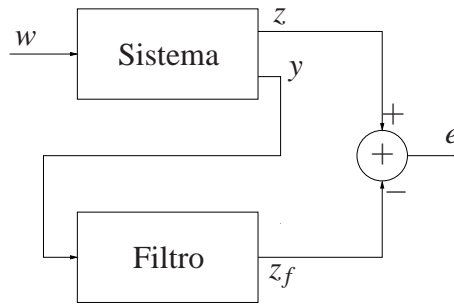


Figura 1.1: Problema de filtragem.

Definindo o sistema aumentado

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta[x] \\ \delta[x_f] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_2 & A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_f D_{21} \end{bmatrix} w \\ e &= [C_1 - D_f C_2 \quad -C_f] \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix} + [D_{11} - D_f D_{21}] w \end{aligned}$$

com $\tilde{x}' = [x' \quad x_f']$, tem-se

$$\begin{aligned} \delta[\tilde{x}] &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}w \\ e &= \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}w \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_2 & A_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_f D_{21} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times r}, \\ \tilde{C} &= [C_1 - D_f C_2 \quad -C_f] \in \mathbb{R}^{p \times 2n}, \quad \tilde{D} = [D_{11} - D_f D_{21}] \in \mathbb{R}^{p \times r} \end{aligned} \quad (1.4)$$

e a função de transferência de w para e é dada por

$$H(\tau) = \tilde{C}(\tau I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} + \tilde{D} \quad (1.5)$$

com τ denotando s ou z para sistemas contínuos e discretos, respectivamente. Para que a norma \mathcal{H}_2 seja finita, é preciso $\tilde{D} = 0$, ou seja, $D_{11} - D_f D_{21} = 0$. Neste trabalho, adota-se uma condição suficiente, impondo $D_{11} = 0$ e $D_f = 0$ em (1.4), e, neste caso,

$$H(\tau) = \tilde{C}(\tau I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} \quad (1.6)$$

1.2 Sistemas Contínuos

1.2.1 Estabilidade

A estabilidade assintótica do sistema (1.1) é definida a partir da teoria de Lyapunov [31]. O conceito de estabilidade assintótica está diretamente relacionado com a matriz A , que representa a dinâmica do sistema.

Lema 1.1 *O sistema $\dot{x} = Ax$ é Hurwitz assintoticamente estável se, e somente se, existir $P = P' > 0$ tal que*

$$A'P + PA < 0 \quad (1.7)$$

Prova: Escolhendo $V(x) = x'Px$ como função de Lyapunov tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} \\ &= (Ax)'Px + x'PAx \\ &= x'A'Px + x'PAx \\ &= x'(A'P + PA)x\end{aligned}$$

e assim,

$$V(x) > 0 \text{ e } \dot{V}(x) < 0, x \neq 0 \iff P > 0, A'P + PA < 0$$

■

1.2.2 Critério de Desempenho \mathcal{H}_2

A norma \mathcal{H}_2 da função de transferência dada em (1.6) é definida como

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(H(j\omega)^*H(j\omega))d\omega \quad (1.8)$$

Pelo teorema de Parseval tem-se que (1.8) é equivalente a

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(h(t)'h(t))dt \quad (1.9)$$

Em sistemas SISO causais a norma \mathcal{H}_2 corresponde à integral do quadrado da resposta impulsiva

$$\|H(s)\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} (h(t))^2 dt} \quad (1.10)$$

com

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \begin{cases} C \exp(At)B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Usando a definição de $h(t)$ dada em (1.11) a norma \mathcal{H}_2 de $H(s)$ é dada por

$$\begin{aligned}\|H(s)\|_2^2 &= \int_0^{+\infty} \text{Tr}(h(t)'h(t))dt = \int_0^{+\infty} \text{Tr}(h(t)h(t)')dt \\ &= \int_0^{+\infty} \text{Tr}(B' \exp(A't)C'C \exp(At)B)dt = \int_0^{+\infty} \text{Tr}(C \exp(At)BB' \exp(A't)C')dt\end{aligned}$$

Os gramianos de controlabilidade de (A,B) e de observabilidade de (A,C) , são dados respectivamente por (1.12) e (1.13)

$$L_c = \int_0^{+\infty} \exp(At)BB' \exp(A't)dt \quad (1.12)$$

$$L_o = \int_0^{+\infty} \exp(A't)C'C \exp(At)dt \quad (1.13)$$

Logo,

$$AL_c + L_cA' + BB' = 0 \quad (1.14)$$

$$A'L_o + L_oA + C'C = 0 \quad (1.15)$$

e, portanto, tem-se

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{Tr}(B'L_oB) = \text{Tr}(CL_cC') \quad (1.16)$$

Sendo assim, a norma \mathcal{H}_2 pode ser computada por meio de um procedimento convexo de otimização

$$\min \text{Tr}(B'PB) = \text{Tr}(BB'P), \quad P = P' > 0 \quad (1.17)$$

sujeito a

$$A'P + PA + C'C < 0 \quad (1.18)$$

ou, de maneira equivalente,

$$\min \text{Tr}(CWC') = \text{Tr}(C'CW), \quad W = W' > 0 \quad (1.19)$$

sujeito a

$$AW + WA' + BB' < 0 \quad (1.20)$$

Na solução ótima tem-se

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{Tr}(B'PB) = \text{Tr}(CWC') \quad (1.21)$$

1.2.3 Critério de Desempenho \mathcal{H}_∞

A norma \mathcal{H}_∞ de um sistema contínuo estável, com função de transferência dada por (1.5), é dada por

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(H(j\omega)) \quad (1.22)$$

Em sistemas SISO, a norma \mathcal{H}_∞ corresponde ao máximo do diagrama de magnitude de Bode.

Assim como a norma \mathcal{H}_2 , a norma \mathcal{H}_∞ possui uma equivalência no domínio do tempo

$$\|H(s)\|_\infty^2 = \sup_{\|w(t)\| \neq 0, \|w(t)\| \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z(t)\|^2}{\|w(t)\|^2} \quad (1.23)$$

Se nenhuma característica de $w(t)$ for conhecida, podemos interpretar essa norma como sendo o máximo ganho para uma entrada com características estatísticas desconhecidas. É possível calcular um limitante superior para esta norma por equações de Riccati, ou utilizando LMIs como apresentado a seguir. Note que

$$\|H(s)\|_\infty < \gamma \iff y'y < \gamma^2 w'w$$

Escolhendo a função de Lyapunov quadrática $v(x) = x'Px$, com $P > 0$, para garantir a estabilidade e a norma \mathcal{H}_∞ menor que γ , impõe-se $\dot{v} + y'y - \gamma^2 w'w < 0$, levando em conta as equações do sistema (1.3), tem-se

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (1.24)$$

Então, chega-se ao *bounded real lemma* [9], que garante a estabilidade assintótica da matriz dinâmica A e um limitante γ para a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência de w para e , se, e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva P tal que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.25)$$

Aplicando o complemento de Schur [9] em (1.25) obtêm-se condições equivalentes, como por exemplo

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -I & D' \\ C & D & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.26)$$

A norma \mathcal{H}_∞ pode ser computada a partir de um procedimento convexo de otimização. Defina $\mu = \gamma^2$ e resolva

$$\min \mu, \quad P = P' > 0 \quad (1.27)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.28)$$

ou, de maneira equivalente,

$$\min \mu, \quad W = W' > 0 \quad (1.29)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} AW + WA' + BB' & WC' + BD' \\ CW + DB' & DD' - \mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.30)$$

1.3 Sistemas Discretos

1.3.1 Estabilidade

Lema 1.2 *O sistema $x(k+1) = Ax(k)$ é Schur assintoticamente estável se, e somente se, existir $P = P' > 0$ tal que*

$$A'PA - P < 0 \quad (1.31)$$

ou, equivalentemente (por complemento de Schur)

$$\begin{bmatrix} P & A'P \\ PA & P \end{bmatrix} > 0 \quad (1.32)$$

Prova: Escolhendo $V(x(k)) = x(k)'Px(k)$ como função de Lyapunov tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) \\ &= (Ax(k))'PAx(k) + x(k)'Px(k) \\ &= x(k)'A'PAx(k) + x(k)'Px(k) \\ &= x(k)'(A'PA + P)x(k) \end{aligned}$$

e assim,

$$V(x(k)) > 0 \text{ e } \Delta V(x) < 0, x \neq 0 \iff P > 0, \quad A'PA + P < 0$$

No caso discreto, a utilização do complemento de Schur permite que a forma $A'PA - P$ seja tratada por uma LMI aumentada como em (1.32). ■

1.3.2 Critério de Desempenho \mathcal{H}_2

No caso discreto, admite-se que a matriz de transmissão direta seja diferente de zero, e a norma \mathcal{H}_2 é acrescida de um valor constante $Tr(D'D) = Tr(DD')$. A norma \mathcal{H}_2 da função de transferência dada em (1.6) é definida como

$$\|H(z)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Tr(H(\exp(j\omega))^* H(\exp(j\omega))) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_i \sigma_i(H(\exp(j\omega))) d\omega \quad (1.33)$$

A resposta ao impulso é dada por

$$h(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k > 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

e a norma \mathcal{H}_2 pode ser computada por

$$\|H(z)\|_2^2 = Tr\left(\sum_{k=1}^{+\infty} h(k)'h(k)\right) = Tr\left(\sum_{k=1}^{+\infty} h(k)h(k)'\right) \quad (1.35)$$

Substituindo a resposta ao impulso $h(k)$ em (1.35) têm-se os gramianos de observabilidade e controlabilidade respectivamente dados por

$$L_o = \sum_{k=0}^{+\infty} A^{k'} C' C A^k B \quad (1.36)$$

$$L_c = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k B B' A^{k'} C' \quad (1.37)$$

Os gramianos satisfazem as equações de Lyapunov para sistemas discretos

$$A' L_o A - L_o + C' C = 0 \quad (1.38)$$

$$A L_c A' - L_c + B B' = 0 \quad (1.39)$$

e, portanto,

$$\|H(z)\|_2^2 = Tr(B' L_o B) = Tr(C L_c C') \quad (1.40)$$

Então, a norma \mathcal{H}_2 pode ser computada por meio de um procedimento convexo de otimização

$$\min Tr(B' P B) = Tr(B B' P), \quad P = P' > 0 \quad (1.41)$$

sujeito a

$$A' P A - P + C' C < 0 \quad (1.42)$$

ou, de maneira equivalente,

$$\min Tr(C W C') = Tr(C' C W), \quad W = W' > 0 \quad (1.43)$$

sujeito a

$$A W A' - W + B B' < 0 \quad (1.44)$$

Na solução ótima, tem-se

$$\|H(z)\|_2^2 = Tr(B' P B) = Tr(C W C') \quad (1.45)$$

1.3.3 Critério de Desempenho \mathcal{H}_∞

Considere o sistema (1.3) com função de transferência (1.5). A norma \mathcal{H}_∞ é dada por

$$\|H(z)\|_\infty = \max_{\omega \in [-\pi, \pi]} \sigma_{\max}(H \exp(j\omega)) \quad (1.46)$$

Assim como no caso contínuo, a norma \mathcal{H}_∞ possui uma correspondência temporal,

$$\|H(z)\|_\infty^2 = \sup_{\|w(k)\| \neq 0, \|w(k)\| \in \ell_2} \frac{\|z(k)\|^2}{\|w(k)\|^2} \quad (1.47)$$

e seu cálculo pode ser realizado por meio de LMIs, levando-se em conta que

$$\|H(z)\|_\infty < \gamma \iff y'y < \gamma^2 w'w$$

Escolhendo a função de Lyapunov quadrática $v(x) = x'Px$, com $P > 0$, para garantir a estabilidade e a norma \mathcal{H}_∞ menor que γ , impõe-se $v(x(k+1)) - v(x(k)) + y'y - \gamma^2 w'w < 0$, ou seja

$$x(k+1)'Px(k+1) - x(k)'Px(k) + y'y - \gamma^2 w'w < 0 \quad (1.48)$$

Levando em conta as equações do sistema (1.3), tem-se

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'PA - P + C'C & A'PB + C'D \\ B'PA + D'C & B'PB + D'D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (1.49)$$

e assim obtém-se o *bounded real lemma* [9] para o caso discreto, que garante um limitante γ para a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência de w para e , se e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva P tal que

$$\begin{bmatrix} A'PA - P + C'C & A'PB + C'D \\ B'PA + D'C & B'PB + D'D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.50)$$

Aplicando o complemento de Schur, transformações de congruência, trocando linhas e colunas em (1.50), obtêm-se condições equivalentes, como por exemplo

$$\begin{bmatrix} P & A'P & 0 & C' \\ PA & P & PB & 0 \\ 0 & B'P & I & D' \\ C & 0 & D & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (1.51)$$

A norma \mathcal{H}_∞ pode ser computada a partir de um procedimento convexo de otimização. Defina $\mu = \gamma^2$ e resolva

$$\min \mu, \quad P = P' > 0 \quad (1.52)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A'PA - P + C'C & A'PB + C'D \\ B'PA + D'C & B'PB + D'D - \mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.53)$$

ou, de maneira equivalente,

$$\min \mu, \quad W = W' > 0 \quad (1.54)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} AWA' - W + BB' & AWC' + BD' \\ CWA' + DB' & CWC' + DD' - \mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.55)$$

1.4 Sistemas com Incertezas Politópicas

Nos casos em que é conhecida a faixa de variação de um parâmetro incerto de um sistema dinâmico, ou nos casos em que essa variação pode ser estimada, é possível construir um sistema politópico convexo que represente o sistema incerto. As incertezas presentes nos parâmetros podem ser inerentes ao projeto, ou ocorrer devido a não-linearidades desconsideradas no modelo.

Neste trabalho as matrizes incertas pertencem a um domínio politópico parametrizado em termos de um vetor α e são definidas por

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Z_i, \quad \alpha \in \Lambda_N \quad (1.56)$$

sendo $Z(\alpha)$ qualquer matriz do sistema apresentado em (1.1), Z_i os vértices, N o número de vértices do politopo e Λ_N é o conjunto conhecido como simplex unitário, dado por

$$\Lambda_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\} \quad (1.57)$$

1.5 Lemas Auxiliares

1.5.1 Lema de Finsler

O Lema de Finsler tem sido utilizado em vários trabalhos na área de filtragem nos últimos anos, com norma \mathcal{H}_2 [4], \mathcal{H}_∞ [7], e energia-a-pico [47]. O Lema de Finsler é utilizado nas demonstrações das condições propostas neste trabalho, sendo reproduzido a seguir.

Lema 1.3 *Sejam $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $\text{rank}(\mathcal{B}) < n$ e \mathcal{B}^\perp uma base para o espaço nulo de \mathcal{B} (isto é $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$). Então as seguintes condições são equivalentes:*

- i) $w' \mathcal{Q} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B} w = 0$*
- ii) $\mathcal{B}^\perp' \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp < 0$*
- iii) $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}' \mathcal{B} < 0$*
- iv) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' < 0$*

Uma das aplicações do Lema de Finsler é a eliminação de variáveis de projeto em desigualdades matriciais, por exemplo ao se passar da condição *iv)* para a condição *ii)*, eliminando a variável \mathcal{X} . No caso dos problemas tratados nesta dissertação, o interesse é passar da forma *ii)* para a forma da condição *iv)*, o que permite que variáveis de folga sejam acrescentadas e um espaço de busca maior seja explorado. A prova do Lema 1.3, dada no Apêndice A.3, pode também ser encontrada em [12].

1.5.2 Estabilidade com Funções de Lyapunov Afins

Seja o sistema

$$\dot{x} = A(\alpha)x \quad (1.58)$$

com $A(\alpha)$ definida como em (1.56).

Como $A(\alpha)$ é dada pela combinação convexa de N matrizes A_i , $i = 1, \dots, N$, imagina-se que a estabilidade do sistema (1.58) pode ser investigada por uma função de Lyapunov com a mesma estrutura, ou seja,

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i, \quad \alpha \in \Lambda_N \quad (1.59)$$

Uma condição suficiente para a estabilidade de $A(\alpha)$ é dada no lema a seguir.

Lema 1.4 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas P_i , $i = 1, \dots, N$ tais que*

$$A_i' P_i + P_i A_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.60)$$

$$A_i' P_j + P_j A_i + A_j' P_i + P_i A_j < 0, \quad i = 1, \dots, N-1, j = i+1, \dots, N \quad (1.61)$$

então $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ estruturada como em (1.56) é uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros de maneira afim, que certifica a estabilidade do sistema (1.58) para todo $\alpha \in \Lambda_N$.

Prova: Multiplicando (1.60) por α_i^2 , (1.61) por $\alpha_i \alpha_j$ e somando, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (A_i' P_i + P_i A_i) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (A_i' P_j + P_j A_i + A_j' P_i + P_i A_j) \\ = A(\alpha)' P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) < 0 \quad (1.62) \end{aligned}$$

que, se as LMIs (1.60)-(1.61) são satisfeitas, garante a estabilidade do sistema (1.58) pois $\alpha \in \Lambda_N$. ■

O Lema 1.4 pode ser encontrado em [39], e a contrapartida para a estabilidade robusta de sistemas discretos em [38]. O Lema 1.4 foi utilizado nessa dissertação para tratar produtos duplos entre as matrizes dependentes de parâmetros de maneira afim, permitindo que sejam estabelecidas condições na forma de LMIs.

1.5.3 Estabilidade com Funções de Lyapunov Polinomiais

Funções de Lyapunov afins como em (1.59), produzem condições apenas suficientes de estabilidade. Como mostrado em [32], a estabilidade robusta de um sistema politópico pode ser investigada de maneira suficiente e assintoticamente necessária por meio de funções de Lyapunov polinomiais homogêneas de grau genérico g , aumentando-se gradativamente os valores de g . Por exemplo, para $g = 2$ e $N = 2$, tem-se a seguinte condição suficiente para a estabilidade de $A(\alpha)$, que é sempre menos conservadora que a do Lema 1.4.

Lema 1.5 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas P_{20} , P_{11} e P_{02} tais que*

$$A_1' P_{20} + P_{20} A_1 < 0 \quad (1.63)$$

$$A_1' P_{11} + P_{11} A_1 + A_2' P_{20} + P_{20} A_2 < 0 \quad (1.64)$$

$$A_1' P_{02} + P_{02} A_1 + A_2' P_{11} + P_{11} A_2 < 0 \quad (1.65)$$

$$A_2' P_{02} + P_{02} A_2 < 0 \quad (1.66)$$

então P_{20} , P_{11} e P_{02} compõem uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros polinomial de grau $g = 2$, que certifica a estabilidade do sistema (1.58) para todo $\alpha \in \Lambda_2$.

Prova: Multiplicando (1.63) por α_1^3 , (1.64) por $\alpha_1^2\alpha_2$, (1.65) por $\alpha_1\alpha_2^2$, (1.64) por α_2^3 e somando, tem-se

$$A(\alpha)'P_2(\alpha) + P_2(\alpha)A(\alpha) < 0$$

com

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, \quad P_2(\alpha) = \alpha_1^2 P_{20} + \alpha_1 \alpha_2 P_{11} + \alpha_2^2 P_{02}$$

que, se as LMIs (1.63)-(1.66) são satisfeitas, garante a estabilidade do sistema (1.58) pois $\alpha \in \Lambda_2$. ■

O Lema 1.5, apresenta uma condição suficiente para testar a estabilidade do sistema (1.58) com uma função de Lyapunov de grau $g = 2$ e $N = 2$. Note que se (1.60)-(1.61) são satisfeitas, sempre existem P_{20} , P_{11} e P_{02} que verificam o Lema 1.5. A abordagem polinomial foi utilizada nessa dissertação possibilitando que resultados menos conservadores fossem obtidos. Em [18], soluções polinomiais também foram propostas para melhorar os resultados de [17].

Na medida em que o grau dos polinômios cresce, a obtenção das condições LMIs torna-se mais complicada, principalmente quando existem produtos de variáveis polinomiais. Nessa dissertação foi utilizado um pacote computacional (*Robust LMI Parser*) [2], também utilizado em [1]. Dado um conjunto de operações com variáveis polinomiais com parâmetros no simplex, esse pacote retorna o conjunto de LMIs resultantes que, se verificadas, garantem a existência de uma solução para o problema. O pacote foi utilizado nos experimentos desta dissertação e está disponível em http://www.dt.fee.unicamp.br/~agulhari/Doutorado/polynomial_parser.zip.

Filtragem Baseada na Estabilidade Quadrática

Neste capítulo apresenta-se o projeto de filtros \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ usando LMIs, baseados na estabilidade quadrática e nas partições da matriz de Lyapunov e de sua inversa. Este foi um dos primeiros métodos utilizados para realizar a síntese de filtros robustos por meio de LMIs, caso contínuo [20] e caso discreto [21]. A mesma função de Lyapunov é usada para garantir a estabilidade de todo o politopo. Essa abordagem também permitiu que fossem projetados filtros dependentes de parâmetros, com taxas de variação ilimitadas para o caso contínuo [6].

2.1 Sistemas Contínuos

2.1.1 Filtragem \mathcal{H}_2

Do capítulo 1, pode-se enunciar o seguinte Lema.

Lema 2.1 *Seja \tilde{A} uma matriz Hurwitz estável. Se existirem matrizes simétricas $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e um escalar $\rho > 0$ tais que*

$$\text{Tr}(M) \leq \rho^2 \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} P & P\tilde{B} \\ \tilde{B}'P & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} & \tilde{C}' \\ \tilde{C} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.3)$$

sejam satisfeitas, então $\rho > 0$ é um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema aumentado.

Lema 2.2 *Existe um filtro de ordem completa que resolve o problema \mathcal{H}_2 com custo garantido dado por ρ se, e somente se, existirem matrizes simétricas $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $\text{Tr}(M) \leq \rho^2$*

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZB_1 \\ Z & X & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & A'X + ZA + C_2'L' + G' & C_1' - F' \\ XA + A'Z + LC_2 + G & A'X + XA + C_2'L' + LC_2 & C_1' \\ C_1 - F & C_1 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.5)$$

Em caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por

$$B_f = (U')^{-1}L, A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, C_f = F(VZ)^{-1}$$

Prova: Particionando a matriz $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e sua inversa P^{-1} (em blocos n por n) da seguinte forma

$$P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \tilde{Y} \end{bmatrix}$$

têm-se as seguintes relações

$$PP^{-1} = I \implies \begin{cases} XY + U'V = I, & XV' + U'\tilde{Y} = 0 \\ UV' + \tilde{X}\tilde{Y} = I, & UY + \tilde{X}V = 0 \end{cases}$$

Definindo as matrizes não singulares

$$S = \begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

com inversas

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & V^{-1} \\ I & -YV^{-1} \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

tem-se

$$S'PS = \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix}, \quad R^{-1}S'PSR^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} \\ Y^{-1} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix}, \quad Z = Y^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Multiplicando a equação (2.2) à esquerda por $\text{diag}(R^{-1}S', I)$ e à direita por $\text{diag}(SR^{-1}, I)$, tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R^{-1}S' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P\tilde{B} \\ \tilde{B}'P & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SR^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R^{-1}S'PSR^{-1} & R^{-1}S'P\tilde{B} \\ \tilde{B}'PSR^{-1} & M \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} & Y^{-1}B_1 \\ Y^{-1} & X & XB_1 + U'B_fD_{21} \\ B_1'Y^{-1} & B_1'X + D_{21}'B_f'U & M \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Resultando na condição (2.4) do Lema 2.2.

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZB_1 \\ Z & X & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.8)$$

que é equivalente a (2.2), com $L = U'B_f$.

De maneira similar, multiplicando a equação (2.3) à esquerda por $\text{diag}(R^{-1}S', I)$ e à direita por $\text{diag}(SR^{-1}, I)$, tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R^{-1}S' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} & \tilde{C}' \\ \tilde{C} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SR^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R^{-1}S'\tilde{A}'PSR^{-1} + R^{-1}S'P\tilde{A}SR^{-1} & R^{-1}S'\tilde{C}' \\ & \tilde{C}SR^{-1} & -I \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} A'Y^{-1} + Y^{-1}A & A'X + Y^{-1}A + C_2'B_f'U + Y^{-1}V'A_f'U & C_1' - Y^{-1}V'C_f' \\ XA + A'Y^{-1} + U'B_fC_2 + U'A_fVY^{-1} & A'X + XA + C_2'B_f'U + U'B_fC_2 & C_1' \\ C_1 - C_fVY^{-1} & C_1 & -I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

resultando (com $Z = Y^{-1}$) na condição

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & A'X + ZA + C_2' B_f' U + ZV' A_f' U & C_1' - ZV' C_f' \\ XA + A'Z + U' B_f C_2 + U' A_f VZ & A'X + XA + C_2' B_f' U + U' B_f C_2 & C_1' \\ C_1 - C_f VZ & C_1 & -I \end{bmatrix} < 0$$

Além disso, definindo

$$L = U' B_f \in \mathbb{R}^{n \times q}, \quad G = U' A_f VZ \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad F = C_f VZ \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad (2.9)$$

tem-se a condição (2.5) do Lema 2.2, que é equivalente a (2.3)

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & A'X + ZA + C_2' L' + G' & C_1' - F' \\ XA + A'Z + LC_2 + G & A'X + XA + C_2' L' + LC_2 & C_1' \\ C_1 - F & C_1 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.10)$$

Finalmente, note que

$$P > 0 \Leftrightarrow R^{-1} S' P S R^{-1} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow X > Z \quad (2.11)$$

o que impõe que as matrizes X e Z são definidas positivas. ■

Note que as partições U e V são obtidas a partir da identidade

$$XY + U'V = I \quad (2.12)$$

e, como $Z > 0$ e $X - Z > 0$, existem U e V não singulares solução de (2.12). Na verdade, as matrizes P e P^{-1} soluções das equações sempre podem ser “perturbadas” incrementalmente para que não ocorra nenhuma singularidade nas partições U e V . Note ainda que a restrição $P > 0$ (equação (2.11)) já aparece no bloco 2×2 superior esquerdo de (2.4).

As transformações de equivalência valem nos dois sentidos, ou seja, o Lema 2.2 apresenta condições convexas necessárias e suficientes para a existência de um filtro com desempenho ótimo \mathcal{H}_2 de ordem completa. O filtro ótimo \mathcal{H}_2 pode ser computado minimizando o valor de ρ tal que as condições do Lema 2.2 são satisfeitas. Note que, nessa formulação, o problema deixa de ser convexo se a ordem do filtro n_f for menor que a ordem da planta n , pois as matrizes U e V não mais são quadradas, impossibilitando a recuperação das matrizes do filtro.

2.1.2 Filtragem \mathcal{H}_2 Dual

Como apresentado no Capítulo 1 é possível obter condições equivalentes a partir do sistema dual para o cálculo do filtro com custo garantido \mathcal{H}_2 .

Lema 2.3 *Seja \tilde{A} uma matriz Hurwitz estável. Se existirem matrizes simétricas $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e um escalar $\rho > 0$ tais que*

$$\text{Tr}(M) \leq \rho^2 \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} W & W\tilde{C}' \\ \tilde{C}W & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}W + W\tilde{A}' & \tilde{B} \\ \tilde{B}' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.15)$$

sejam satisfeitas, então $\rho > 0$ é um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema aumentado.

Lema 2.4 *Existe um filtro de ordem completa que resolve o problema \mathcal{H}_2 com custo garantido dado por ρ se, e somente se, existirem matrizes simétricas $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $\text{Tr}(M) \leq \rho^2$,*

$$\begin{bmatrix} Z & Z & C_1' - F' \\ Z & X & C_1' \\ C_1 - F & C_1 & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & A'X + ZA + C_2'L' + G' & ZB_1 \\ XA + A'Z + LC_2 + G & A'X + XA + C_2'L' + LC_2 & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.17)$$

Em caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por

$$B_f = (U')^{-1}L, \quad A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, \quad C_f = F(VZ)^{-1}$$

sendo $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes não singulares arbitrárias que verificam

$$XZ^{-1} + U'V = I \quad (2.18)$$

Prova: Assim como no caso primal, a matriz de Lyapunov $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e sua inversa W^{-1} são particionadas em blocos n por n dados por

$$W = \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \tilde{Y} \end{bmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix}$$

implicando nas relações $W^{-1}W = I$, ou seja,

$$\begin{aligned} XY + U'V &= I, & XV' + U'\tilde{Y} &= 0 \\ UV' + \tilde{X}\tilde{Y} &= I, & UY + \tilde{X}V &= 0 \end{aligned}$$

Definindo as matrizes não singulares S e R como em (2.6), tem-se

$$R^{-1}S'W^{-1}WW^{-1}SR^{-1} = R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} \\ Y^{-1} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix}$$

com $Z = Y^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Multiplicando a equação (2.14) à esquerda por $\text{diag}(R^{-1}S'W^{-1}, I)$ e à direita por $\text{diag}(W^{-1}SR^{-1}, I)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} & R^{-1}S'\tilde{C}' \\ \tilde{C}SR^{-1} & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} & C_1' - Y^{-1}V'C_f' \\ Y^{-1} & X & C_1' \\ C_1 - C_fVY^{-1} & C_1 & M \end{bmatrix}$$

resultando na condição (2.16) do Lema 2.4, que é equivalente a (2.14)

$$\begin{bmatrix} Z & Z & C_1' - F' \\ Z & X & C_1' \\ C_1 - F & C_1 & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.19)$$

com $F = C_fVZ$.

De maneira similar, multiplicando a equação (2.15) à esquerda por $\text{diag}(R^{-1}S'W^{-1}, I)$ e à direita por $\text{diag}(W^{-1}SR^{-1}, I)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S'W^{-1}\tilde{A}SR^{-1} + R^{-1}S'\tilde{A}'W^{-1}SR^{-1} & R^{-1}S'W^{-1}\tilde{B} \\ \tilde{B}'W^{-1}SR^{-1} & -I \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} A'Y^{-1} + Y^{-1}A & A'X + Y^{-1}A + C_2'B_f'U + Y^{-1}V'A_f'U & Y^{-1}B_1 \\ XA + A'Y^{-1} + U'B_fC_2 + U'A_fVY^{-1} & A'X + XA + C_2'B_f'U + U'B_fC_2 & XB_1 + U'B_fD_{21} \\ B_1'Y^{-1} & B_1'X - D_{21}'B_f'U & -I \end{bmatrix}$$

Fazendo $Z = Y^{-1}$, obtém-se a seguinte condição LMI

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & A'X + ZA + C_2'B_f'U + ZV'A_f'U & ZB_1 \\ XA + A'Z + U'B_fC_2 + U'A_fVZ & A'X + XA + C_2'B_f'U + U'B_fC_2 & XB_1 + U'B_fD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X - D_{21}'B_f'U & -I \end{bmatrix}$$

Definindo L, G e F como em (2.9), tem-se a condição (2.17) do Lema 2.4, equivalente a (2.15)

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & A'X + ZA + C_2'L' + G' & ZB_1 \\ XA + A'Z + LC_2 + G & A'X + XA + C_2'L' + LC_2 & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.20)$$

Note também que

$$W > 0 \Leftrightarrow R^{-1}S'W^{-1}WW^{-1}SR^{-1} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} > 0 \quad (2.21)$$

■

2.1.3 Filtragem \mathcal{H}_∞

O *bounded real lemma* aplicado ao sistema aumentado garante a estabilidade assintótica da matriz dinâmica \tilde{A} e um limitante γ para a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência de w para e . As condições são dadas pela existência de $A_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ e de uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ tais que

$$\Gamma \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} & \tilde{C}' & P\tilde{B} \\ * & -I & \tilde{D} \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.22)$$

Condições equivalentes podem ser obtidas com o sistema dual $(\tilde{A}', \tilde{C}', \tilde{B}', \tilde{D}')$.

Lema 2.5 *Existem A_f, B_f, C_f e D_f tais que a dinâmica do erro (1.3) é estável com norma \mathcal{H}_∞ menor do que $\gamma > 0$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ tais que*

$$\Xi \triangleq \begin{bmatrix} A'Z + ZA & ZA + A'X + C_2'L' + G' & C_1' - C_2'D_f' - F' & ZB_1 \\ * & A'X + XA + C_2'L' + LC_2 & C_1' - C_2'D_f' & XB_1 + LD_{21} \\ * & * & -I & D_{11} - D_fD_{21} \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} Z & Z \\ \star & X \end{bmatrix} > 0 \quad (2.24)$$

No caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por

$$A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, B_f = (U')^{-1}L, C_f = F(VZ)^{-1}, D_f$$

sendo $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes não singulares arbitrárias que verificam

$$XZ^{-1} + U'V = I \quad (2.25)$$

Prova: Particionando as matrizes P e P^{-1} , definindo as matrizes não singulares S, R e $Y^{-1} = Z$ tem-se

$$P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \tilde{Y} \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

e

$$R^{-1}S'PSR^{-1} = \begin{bmatrix} I & Y^{-1}V' \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ VY^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} \\ Y^{-1} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix}$$

Assim, (2.24) é equivalente a $P > 0$. Definindo $T = \text{diag}(SR^{-1}, I, I)$ e as transformações de variáveis

$$L = U'B_f \in \mathbb{R}^{n \times q}, \quad G = U'A_fVZ \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad F = C_fVZ \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad (2.27)$$

pode-se mostrar que Ξ dado em (2.23) satisfaz

$$\Xi = T'\Gamma T \quad (2.28)$$

com Γ definido em (2.22). De fato

$$\begin{aligned} R^{-1}S'(\tilde{A}'P + P\tilde{A})SR^{-1} &= \begin{bmatrix} I & Y^{-1}V' \\ I & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ B_fC_2 & A_f \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_fC_2 & A_f \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I & I \\ VY^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A'Y^{-1} + Y^{-1}A & A'X + Y^{-1}A + C_2'B_f'U + Y^{-1}V'A_f'U \\ \star & A'X + XA + C_2'B_f'U + U'B_fC_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$R^{-1}S'\tilde{C}' = \begin{bmatrix} I & Y^{-1}V' \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' - C_2'D_f' \\ -C_f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1' - C_2'D_f' - Y^{-1}V'C_f' \\ C_1' - C_2'D_f' \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}S'P\tilde{B} = \begin{bmatrix} I & Y^{-1}V' \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_fD_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{-1}B_1 \\ XB_1 + U'B_fD_{21} \end{bmatrix}$$

A equivalência (2.28) segue da mudança de variáveis (2.27) e, como consequência,

$$\Gamma < 0 \iff \Xi < 0$$

■

2.2 Sistemas Discretos

2.2.1 Filtragem \mathcal{H}_2

Considerando $D_{11} = 0$ e $D_f = 0$ por simplicidade (poderiam ser considerados diferentes de zero, alterando o valor da norma \mathcal{H}_2 de uma constante), tem-se o seguinte Lema.

Lema 2.6 Se existirem matrizes simétricas $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e um escalar $\rho > 0$ tais que

$$\text{Tr}(M) \leq \rho^2 \quad (2.29)$$

$$\begin{bmatrix} P & P\tilde{B} \\ \tilde{B}'P & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.30)$$

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{A}'P & \tilde{C}' \\ P\tilde{A} & P & 0 \\ \tilde{C} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.31)$$

sejam satisfeitas, então $\rho > 0$ é um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema aumentado.

Lema 2.7 Existe um filtro de ordem completa que resolve o problema \mathcal{H}_2 com custo garantido dado por ρ se, e somente se, existirem matrizes simétricas $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $\text{Tr}(M) \leq \rho^2$,

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZB_1 \\ Z & X & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.32)$$

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'L' + G' & C_1' - F' \\ * & X & A'Z & A'X + C_2'L' & C_1' \\ * & * & Z & Z & 0 \\ * & * & * & X & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.33)$$

Em caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por

$$A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, \quad B_f = (U')^{-1}L, \quad C_f = F(VZ)^{-1}$$

sendo $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes não singulares arbitrárias que verificam

$$XZ^{-1} + U'V = I \quad (2.34)$$

Prova: Como no caso contínuo, a matriz $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e sua inversa P^{-1} são particionadas (em blocos n por n) da seguinte forma

$$P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \tilde{Y} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$PP^{-1} = I \implies \begin{cases} XY + U'V = I, & XV' + U'\tilde{Y} = 0 \\ UV' + \tilde{X}\tilde{Y} = I, & UY + \tilde{X}V = 0 \end{cases}$$

Definindo as matrizes não singulares

$$S = \begin{bmatrix} Y & I \\ V & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

com inversas

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & V^{-1} \\ I & -YV^{-1} \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

tem-se

$$S'PS = \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix}, \quad R^{-1}S'PSR^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} \\ Y^{-1} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix}, \quad Z = Y^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Multiplicando a equação (2.30) à esquerda por $\text{diag}(R^{-1}S', I)$ e à direita por $\text{diag}(SR^{-1}, I)$, tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R^{-1}S' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P\tilde{B} \\ \tilde{B}'P & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SR^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R^{-1}S'PSR^{-1} & R^{-1}S'P\tilde{B} \\ \tilde{B}'PSR^{-1} & M \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} & Y^{-1}B_1 \\ Y^{-1} & X & XB_1 + U'B_fD_{21} \\ B_1'Y^{-1} & B_1'X + D_{21}'B_f'U & M \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

resultando na condição (2.32) do Lema 2.7

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZB_1 \\ Z & X & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.38)$$

que é equivalente a (2.30), com $L = U'B_f$. De maneira similar, multiplicando a equação (2.31) à esquerda por $\text{diag}(R^{-1}S', R^{-1}S', I)$ e à direita por $\text{diag}(SR^{-1}, SR^{-1}, I)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S'PSR^{-1} & R^{-1}S'A'PSR^{-1} & R^{-1}S'C' \\ R^{-1}S'PASR^{-1} & R^{-1}S'PSR^{-1} & 0 \\ CSR^{-1} & 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

resultando (com $Z = Y^{-1}$) na condição

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'B_f'U + ZV'A_f'U & C_1' - ZV'C_f' \\ * & X & A'Z & A'X + C_2'B_f'U & C_1' \\ * & * & Z & Z & 0 \\ * & * & * & X & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} > 0$$

Definindo

$$L = U'B_f, \quad G = U'A_fVZ, \quad F = C_fVZ \quad (2.39)$$

tem-se a condição (2.33) do Lema 2.7, equivalente a (2.31),

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'L' + G' & C_1' - F' \\ * & X & A'Z & A'X + C_2'L' & C_1' \\ * & * & Z & Z & 0 \\ * & * & * & X & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.40)$$

Finalmente, note que

$$P > 0 \Leftrightarrow R^{-1}S'PSR^{-1} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} > 0 \quad (2.41)$$

e que essa restrição já está presente nas LMIs (2.38) e (2.40). ■

2.2.2 Filtragem \mathcal{H}_2 Dual

Um custo garantido \mathcal{H}_2 dado por $\rho > 0$ pode ser obtido das condições duais, como apresentado no lema a seguir.

Lema 2.8 Se existirem matrizes simétricas $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e um escalar $\rho > 0$ tais que

$$\text{Tr}(M) \leq \rho^2 \quad (2.42)$$

$$\begin{bmatrix} W & W\tilde{C}' \\ \tilde{C}W & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.43)$$

$$\begin{bmatrix} W & \tilde{A}W & \tilde{B} \\ W\tilde{A}' & W & 0 \\ \tilde{B}' & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.44)$$

sejam satisfeitas, então $\rho > 0$ é um custo garantido \mathcal{H}_2 para o sistema aumentado.

Lema 2.9 Existe um filtro de ordem completa que resolve o problema \mathcal{H}_2 com custo garantido dado por ρ se, e somente se, existirem matrizes simétricas $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $\text{Tr}(M) \leq \rho^2$,

$$\begin{bmatrix} Z & Z & C_1' - F' \\ Z & X & C_1' \\ C_1 - F & C_1 & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'L' + G' & ZB_1 \\ * & X & A'Z & A'X + C_2'L' & XB_1 + LD_{21} \\ * & * & Z & Z & 0 \\ * & * & * & X & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.46)$$

Em caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por

$$A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, \quad B_f = (U')^{-1}L, \quad C_f = F(VZ)^{-1}$$

sendo $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes não singulares arbitrárias que verificam

$$XZ^{-1} + U'V = I \quad (2.47)$$

Prova: A matriz $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e sua inversa W^{-1} são particionadas (em blocos n por n) da seguinte forma

$$W = \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \tilde{Y} \end{bmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix}$$

implicando nas relações $W^{-1}W = I$, ou seja,

$$\begin{aligned} XY + U'V &= I, & XV' + U'\tilde{Y} &= 0 \\ UV' + \tilde{X}\tilde{Y} &= I, & UY + \tilde{X}V &= 0 \end{aligned}$$

Definindo as matrizes não singulares S e R como em (2.6), tem-se

$$R^{-1}S'W^{-1}WW^{-1}SR^{-1} = R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} \\ Y^{-1} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix}$$

com $Z = Y^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Multiplicando a equação (2.43) à esquerda por $\text{diag}(R^{-1}S'W^{-1}, I)$ e à direita por $\text{diag}(W^{-1}SR^{-1}, I)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} & R^{-1}S'\tilde{C}' \\ \tilde{C}SR^{-1} & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} & C'_1 - Y^{-1}V'C'_f \\ Y^{-1} & X & C'_1 \\ C_1 - C_fVY^{-1} & C_1 & M \end{bmatrix}$$

resultando na condição (2.45) do Lema 2.9, equivalente a (2.43),

$$\begin{bmatrix} Z & Z & C'_1 - F' \\ Z & X & C'_1 \\ C_1 - F & C_1 & M \end{bmatrix} > 0 \quad (2.48)$$

com $F = C_fVZ$.

De maneira similar, multiplicando a equação (2.44) à esquerda por $\text{diag}(R^{-1}S'W^{-1}, R^{-1}S'W^{-1}, I)$ e à direita por $\text{diag}(W^{-1}SR^{-1}, W^{-1}SR^{-1}, I)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} & R^{-1}S'W^{-1}\tilde{A}SR^{-1} & R^{-1}S'W^{-1}\tilde{B} \\ R^{-1}S'\tilde{A}'W^{-1}SR^{-1} & R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} & 0 \\ \tilde{B}'W^{-1}SR^{-1} & 0 & I \end{bmatrix}$$

Resultando (com $Z = Y^{-1}$) na condição

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C'_2B'_fU + ZV'A'_fU & ZB_1 \\ * & X & A'Z & A'X + C'_2B'_fU & XB_1 + U'B_fD_{21} \\ * & * & Z & Z & 0 \\ * & * & * & X & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} > 0$$

Definindo L , G e F como em (2.39), tem-se a condição (2.46) do Lema 2.9, equivalente a (2.44),

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C'_2L' + G' & ZB_1 \\ * & X & A'Z & A'X + C'_2L' & XB_1 + LD_{21} \\ * & * & Z & Z & 0 \\ * & * & * & X & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.49)$$

Note também que

$$W > 0 \Leftrightarrow R^{-1}S'W^{-1}WW^{-1}SR^{-1} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} > 0 \quad (2.50)$$

■

2.2.3 Filtragem \mathcal{H}_∞

Assim como no caso contínuo, a versão discreta do *bounded real lemma* aplicado ao sistema aumentado garante a estabilidade assintótica da matriz dinâmica \tilde{A} e um limitante γ para a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência de w para e . As condições são dadas pela existência de $A_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ e de uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} P & P\tilde{A} & P\tilde{B} & 0 \\ \tilde{A}'P & P & 0 & \tilde{C}' \\ \tilde{B}'P & 0 & I & \tilde{D}' \\ 0 & C & D & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.51)$$

Condições equivalentes podem ser obtidas com o sistema dual $(\tilde{A}', \tilde{C}', \tilde{B}', \tilde{D}')$. Utilizando as partições para P e P^{-1} como em (2.35), multiplicando a LMI (2.51) por $\text{diag}(R^{-1}S', R^{-1}S', I, I)$ à esquerda e por $\text{diag}(SR^{-1}, SR^{-1}, I, I)$ à direita chega-se à condição para a existência do filtro, expressa no próximo lema.

Lema 2.10 *Existem A_f, B_f, C_f e D_f tais que a dinâmica do erro (1.3) é estável com norma \mathcal{H}_∞ menor do que $\gamma > 0$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZA & ZA & ZB_1 & 0 \\ * & X & XA + LC_2 + G & XA + LC_2 & XB_1 + LD_{21} & 0 \\ * & * & Z & Z & 0 & C_1' - C_2' D_f' - F' \\ * & * & * & X & 0 & C_1' - C_2' D_f' \\ * & * & * & * & I & D_{11} - D_f D_{21} \\ * & * & * & * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.52)$$

No caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por

$$A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, B_f = (U')^{-1}L, C_f = F(VZ)^{-1} \text{ e } D_f$$

sendo $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes não singulares arbitrárias que verificam

$$XZ^{-1} + U'V = I \quad (2.53)$$

2.3 Filtragem Robusta

As condições apresentadas neste capítulo, para sistemas contínuos e discretos, casos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ podem ser estendidas para tratar a filtragem robusta. Para isso, basta considerar as matrizes $A_i, B_{1i}, C_{1i}, C_{2i}, D_{11i}, D_{21i}$, e testar as LMIs para $i = 1, \dots, N$, com P constante. Esse caso, conhecido na literatura como filtragem robusta baseada na estabilidade quadrática (isto é, uma mesma matriz de Lyapunov $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ assegura a estabilidade do sistema aumentado), permite tratar tanto parâmetros variantes no tempo quanto incertos, desde que pertencentes ao politopo que descreve o sistema linear incerto.

É importante ressaltar que os custos garantidos \mathcal{H}_2 obtidos para o sistema primal e dual podem ser diferentes em sistemas com incertezas politópicas, apesar de serem idênticos no caso precisamente conhecido.

Sistemas Contínuos

Este capítulo da dissertação apresenta os resultados principais de filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas contínuos. Utilizando o Lema de Finsler, foi possível aumentar o número de variáveis de folga em relação às abordagens existentes [24, 17, 18] e, assim, superar o desempenho (isto é, obter filtros robustos que asseguram normas menores) desses métodos, como ilustrado na Seção 3.5.

3.1 Resultados Preliminares

A partir das deduções realizadas no Capítulo 1, é possível enunciar os seguintes lemas, para os casos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Lema 3.1 *Seja $\tilde{A}(\alpha)$ uma matriz Hurwitz estável. A desigualdade $\|H(s)\|_2^2 < \rho^2$ é válida para todo $\alpha \in \Lambda_N$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas dependentes de parâmetros $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ tais que*

$$\text{Tr}(M(\alpha)) < \rho^2 \quad (3.1)$$

$$\tilde{C}(\alpha)P(\alpha)\tilde{C}(\alpha)' - M(\alpha) < 0 \quad (3.2)$$

$$\tilde{A}(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha)' + \tilde{B}(\alpha)\tilde{B}(\alpha)' < 0 \quad (3.3)$$

sejam satisfeitas.

O *bounded real lemma* [9] aplicado ao sistema aumentado garante a estabilidade assintótica da matriz dinâmica $\tilde{A}(\alpha)$ e um limitante γ para a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência de w para e .

Lema 3.2 *Seja $\tilde{A}(\alpha)$ uma matriz Hurwitz estável. A desigualdade $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ é válida para todo $\alpha \in \Lambda_N$ se, e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva dependente de parâmetros $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ tal que*

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & \tilde{C}(\alpha)' & P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) \\ * & -I & \tilde{D}(\alpha) \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.4)$$

Considerando que um filtro estável (A_f, B_f, C_f, D_f) é dado *a priori*, os Lemas 3.1 e 3.2 caracterizam o cálculo da norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do sistema (1.3), respectivamente, a partir de condições LMIs dependentes de parâmetros. Para calcular a norma de pior caso de $H(s)$ (dado por (1.6) para o caso

\mathcal{H}_2 e por (1.5) para o caso \mathcal{H}_∞) para todo $\alpha \in \Lambda_N$, basta minimizar ρ sob as restrições (3.1)–(3.3) no caso \mathcal{H}_2 e minimizar γ na condição (3.4) para o caso \mathcal{H}_∞ , construindo uma solução polinomial homogênea $(P(\alpha), W(\alpha))$ de grau suficientemente grande [33].

3.2 Filtragem \mathcal{H}_2

Lema 3.3 *Seja $\tilde{A}(\alpha)$ uma matriz Hurwitz estável. A desigualdade $\|H(s)\|_2^2 < \rho^2$ é válida para todo $\alpha \in \Lambda_N$ se, e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas dependentes de parâmetros $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes dependentes de parâmetros $E(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times 2n}$, tais que*

$$\text{Tr}(M(\alpha)) < \rho^2 \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} M(\alpha) & \tilde{C}(\alpha) \\ \star & W(\alpha) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'K(\alpha)' + K(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & \star & \star \\ W(\alpha) + E(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - K(\alpha)' & -E(\alpha) - E(\alpha)' & \star \\ \tilde{B}(\alpha)'K(\alpha)' + Q(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & \tilde{B}(\alpha)'E(\alpha)' - Q(\alpha) & Q(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)'Q(\alpha)' - I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.7)$$

Prova: Aplicando o complemento de Schur em (3.6) tem-se $M(\alpha) > \tilde{C}(\alpha)W^{-1}(\alpha)\tilde{C}(\alpha)'$, que é equivalente à condição (3.2). Escolhendo

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} K(\alpha) \\ E(\alpha) \\ Q(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & W(\alpha) & 0 \\ \star & 0 & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = [\tilde{A}(\alpha) \quad -I \quad \tilde{B}(\alpha)] \quad (3.8)$$

na condição iv) do Lema 1.3, com

$$\mathcal{B}^{\perp'} = \begin{bmatrix} I & \tilde{A}(\alpha)' & 0 \\ 0 & \tilde{B}(\alpha)' & I \end{bmatrix}$$

tem-se, pela condição ii) do Lema 1.3,

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'W(\alpha) + W(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & W(\alpha)\tilde{B}(\alpha) \\ \tilde{B}(\alpha)'W(\alpha) & -I \end{bmatrix} < 0$$

e, portanto,

$$W(\alpha)(\tilde{A}(\alpha)W(\alpha)^{-1} + W(\alpha)^{-1}\tilde{A}(\alpha)' + \tilde{B}(\alpha)\tilde{B}(\alpha)')W(\alpha) < 0$$

que é equivalente a (3.3) com $P(\alpha) = W(\alpha)^{-1}$. ■

Vale a pena mencionar que a equivalência entre as condições dos Lemas 3.1 e 3.3 foi estabelecida sem a especificação de uma estrutura particular para as variáveis dependentes de parâmetros. Além disso, as variáveis de projeto A_f , B_f e C_f aparecem em alguns blocos multiplicando outras variáveis do problema e, portanto, a síntese do filtro robusto a partir dessas condições é um problema de otimização não linear de dimensão infinita (uma vez que as desigualdades dependentes de parâmetros precisam ser verificadas para todo $\alpha \in \Lambda_N$). A busca de uma solução convexa para essas desigualdades, sem conservadorismo, é um problema em aberto no contexto de sistemas incertos. Note ainda que, impondo $Q(\alpha) = 0$ em (3.7), obtém-se uma condição equivalente à apresentada em [17, 18]. A matriz $Q(\alpha)$ provê um grau de liberdade adicional.

Para linearizar as desigualdades do Lema 3.3 de modo que as variáveis de projeto do filtro possam ser obtidas diretamente por mudanças de variáveis convencionais, uma estrutura particular é imposta às matrizes $K(\alpha)$, $E(\alpha)$ e $Q(\alpha)$, dada por

$$K(\alpha) = \begin{bmatrix} K_{11}(\alpha) & \lambda_1 \hat{K} \\ K_{21}(\alpha) & \lambda_2 \hat{K} \end{bmatrix}, E(\alpha) = \begin{bmatrix} E_{11}(\alpha) & \hat{K} \\ E_{21}(\alpha) & \hat{K} \end{bmatrix}, Q(\alpha) = [Q_1(\alpha) \quad \lambda_3 T \hat{K}] \quad (3.9)$$

sendo que $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $T \in \mathbb{R}^{r \times n}$ é uma matriz a ser definida. Além disso, por conveniência, a matriz $W(\alpha)$ é particionada em blocos $n \times n$ como segue

$$W(\alpha) = \begin{bmatrix} W_{11}(\alpha) & W_{12}(\alpha) \\ W_{12}(\alpha)' & W_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

e adotam-se as seguintes mudanças de variáveis, $K_1 = \hat{K}A_f$ e $K_2 = \hat{K}B_f$. O teorema abaixo expressa uma condição suficiente para que exista uma solução para o Lema 3.3.

Teorema 3.1 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $W(\alpha)$, particionada como em (3.10), e $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, matrizes $Q(\alpha)$, $K(\alpha)$, $E(\alpha)$ como em (3.9), uma matriz pré-definida $T \in \mathbb{R}^{r \times n}$, matrizes $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\rho > 0$ e escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, tais que*

$$\min_{\rho} \text{Tr}(M(\alpha)) < \rho^2 \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} M(\alpha) & C_1(\alpha) & -C_f \\ * & W_{11}(\alpha) & W_{12}(\alpha) \\ * & * & W_{22}(\alpha) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)'K_{11}(\alpha)' + \lambda_1(C_2(\alpha)'K_2' + K_2C_2(\alpha)) & A(\alpha)'K_{21}(\alpha)' + \lambda_2C_2(\alpha)'K_2' + \lambda_1K_1 \\ * & \lambda_2(K_1 + K_1') \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ W_{11}(\alpha) - K_{11}(\alpha) + A(\alpha)'E_{11}(\alpha)' + C_2(\alpha)'K_2' & W_{12}(\alpha) - \lambda_1\hat{K} + A(\alpha)'E_{21}(\alpha)' + C_2(\alpha)'K_2' \\ W_{12}(\alpha)' - K_{21}(\alpha) + K_1' & W_{22}(\alpha) - \lambda_2\hat{K} + K_1' \\ -E_{11}(\alpha) - E_{11}(\alpha)' & -\hat{K} - E_{21}(\alpha)' \\ * & -\hat{K} - \hat{K}' \\ * & * \\ K_{11}(\alpha)B_1(\alpha) + \lambda_1K_2D_{21}(\alpha) + A(\alpha)'Q_1' + \lambda_3C_2(\alpha)'K_2'T' & \\ K_{21}(\alpha)B_1(\alpha) + \lambda_2K_2D_{21}(\alpha) + \lambda_3K_1'T' & \\ E_{11}(\alpha)B_1(\alpha) + K_2D_{21}(\alpha) - Q_1(\alpha)' & \\ E_{21}(\alpha)B_1(\alpha) + K_2D_{21}(\alpha) - \lambda_3\hat{K}'T' & \\ Q_1(\alpha)B_1(\alpha) + B_1(\alpha)'Q_1(\alpha)' + \lambda_3TK_2D_{21}(\alpha) + \lambda_3D_{21}(\alpha)'K_2'T' - I & \end{bmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

sejam verificadas $\forall \alpha \in \Lambda$, então $A_f = \hat{K}^{-1}K_1$, $B_f = \hat{K}^{-1}K_2$ e C_f são as matrizes do filtro robusto que assegura que a função de transferência de w para e é estável, com um custo garantido \mathcal{H}_2 dado por ρ .

Note que a abordagem apresentada não poderia ser aplicada diretamente ao problema primal \mathcal{H}_2 , que apresenta produtos do tipo $\tilde{A}(\alpha)K(\alpha) + K(\alpha)'\tilde{A}(\alpha)'$.

3.3 Filtragem \mathcal{H}_∞

Lema 3.4 *Seja $\tilde{A}(\alpha)$ uma matriz Hurwitz estável. A desigualdade $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ é válida para todo $\alpha \in \Lambda_N$ se, e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva dependente de parâmetros $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, matrizes $E(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times 2n}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} K(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'K(\alpha)' & * & * & * \\ P(\alpha) - K(\alpha)' + E(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & -E(\alpha) - E(\alpha)' & * & * \\ \tilde{B}(\alpha)'K(\alpha)' + Q(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & \tilde{B}(\alpha)'E(\alpha)' - Q(\alpha) & \tilde{B}(\alpha)'Q(\alpha)' + Q(\alpha)\tilde{B}(\alpha) - I & * \\ F(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha) & -F(\alpha) & F(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{D}(\alpha) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

Prova: Escolhendo

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} K(\alpha) \\ E(\alpha) \\ Q(\alpha) \\ F(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) & 0 & \tilde{C}(\alpha)' \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & \tilde{D}(\alpha)' \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = [\tilde{A}(\alpha) \quad -I \quad \tilde{B}(\alpha) \quad 0] \quad (3.15)$$

na condição *iv)* do Lema 1.3 com

$$\mathcal{B}^{\perp'} = \begin{bmatrix} I & \tilde{A}(\alpha)' & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}(\alpha)' & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

tem-se, pela condição *ii)* do Lema 1.3, a equação (3.4) (a menos da troca de linhas e colunas 2 e 3). ■

Assim como no caso \mathcal{H}_2 , no caso \mathcal{H}_∞ a equivalência entre o Lema 3.4 e o Lema 3.2 é estabelecida sem a especificação de uma estrutura para as variáveis dependentes de parâmetros. Para que seja possível a obtenção das matrizes do filtro robusto pelo Lema 3.4, as matrizes $K(\alpha)$, $E(\alpha)$ e $Q(\alpha)$ foram particionadas como em (3.9) e a matriz $F(\alpha)$ é particionada em blocos $p \times n$ como segue

$$F(\alpha) = [F_1(\alpha) \quad \lambda_4 T_2 \hat{K}] \quad (3.16)$$

sendo que $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a mesma matriz que aparece nos blocos de $K(\alpha)$, $E(\alpha)$ e $Q(\alpha)$ em (3.9) e $T_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é uma matriz a ser definida, possibilitando graus de liberdade a mais na síntese de filtros.

O teorema abaixo expressa uma condição suficiente para que exista uma solução para o Lema 3.4, com as mudanças de variáveis, $K_1 = \hat{K}A_f$ e $K_2 = \hat{K}B_f$.

Teorema 3.2 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $W(\alpha)$, particionada como em (3.10), matrizes $Q(\alpha)$, $K(\alpha)$, $E(\alpha)$ como em (3.9) e $F(\alpha)$ como em (3.16) com $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times q}$, com matrizes pré-definidas $T \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $T_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, matrizes $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $\gamma > 0$ e escalares*

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 tais que

$$\left[\begin{array}{cc}
 K_{11}(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)'K_{11}(\alpha)' & A(\alpha)'K_{21}(\alpha)' + \lambda_2 C_2(\alpha)'K_2' + \lambda_1 K_1 \\
 + \lambda_1 (C_2(\alpha)'K_2' + K_2 C_2(\alpha)) & \\
 * & \lambda_2 (K_1 + K_1') \\
 * & * \\
 * & * \\
 * & * \\
 * & * \\
 W_{11}(\alpha) - K_{11}(\alpha) + A(\alpha)'E_{11}(\alpha)' & W_{12}(\alpha) - \lambda_1 \hat{K} + A(\alpha)'E_{21}(\alpha)' + C_2(\alpha)'K_2' \\
 + C_2(\alpha)'K_2' & \\
 W_{12}(\alpha)' - K_{21}(\alpha) + K_1' & W_{22}(\alpha) - \lambda_2 \hat{K} + K_1' \\
 - E_{11}(\alpha) - E_{11}(\alpha)' & - \hat{K} - E_{21}(\alpha)' \\
 * & - \hat{K} - \hat{K}' \\
 * & * \\
 * & * \\
 K_{11}(\alpha)B_1(\alpha) + \lambda_1 K_2 D_{21}(\alpha) + A(\alpha)'Q_1' + \lambda_3 C_2(\alpha)'K_2' T' & \\
 K_{21}(\alpha)B_1(\alpha) + \lambda_2 K_2 D_{21}(\alpha) + \lambda_3 K_1' T' & \\
 E_{11}(\alpha)B_1(\alpha) + K_2 D_{21}(\alpha) - Q_1(\alpha)' & \\
 E_{21}(\alpha)B_1(\alpha) + K_2 D_{21}(\alpha) - \lambda_3 \hat{K}' T' & \\
 Q_1(\alpha)B_1(\alpha) + B_1(\alpha)'Q_1(\alpha)' + \lambda_3 T K_2 D_{21}(\alpha) + \lambda_3 D_{21}(\alpha)'K_2' T' - I & \\
 * & \\
 \lambda_4 C_2(\alpha)'K_2' T_2' + A(\alpha)'F_1(\alpha)' + C_1(\alpha)' - C_2(\alpha)'D_f' & \\
 - C_f' + \lambda_4 K_1' T_2' & \\
 - F_1(\alpha)' & \\
 - \lambda_4 \hat{K}' T_2' & \\
 \lambda_4 D_{21}(\alpha)'K_2' T_2' + B_1(\alpha)'F_1(\alpha)' + D_{11}(\alpha)' - D_{21}(\alpha)'D_f' & \\
 - \gamma^2 I &
 \end{array} \right] < 0 \quad (3.17)$$

seja verificada $\forall \alpha \in \Lambda$, então $A_f = \hat{K}^{-1}K_1$, $B_f = \hat{K}^{-1}K_2$, C_f e D_f são as matrizes do filtro robusto que assegura que a função de transferência de w para e é estável, com um custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ .

Observe que, no caso \mathcal{H}_∞ têm-se quatro variáveis de folga, o dobro das variáveis de folga da condição apresentada em [17]. Impondo $Q(\alpha) = 0$ e $F(\alpha) = 0$ em (3.14), obtém-se uma condição equivalente à apresentada em [17].

3.4 Condições LMIs para Filtragem Robusta

Os Teoremas 3.1 e 3.2 apresentam condições LMI dependentes de parâmetros suficientes para a existência de um filtro robusto \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , obtido diretamente dos Lemas 3.3 e 3.4, impondo estruturas particulares para as matrizes $K(\alpha)$, $E(\alpha)$, $Q(\alpha)$ e $F(\alpha)$. Note ainda que a existência dos parâmetros escalares λ_1 , λ_2 , λ_3 e λ_4 nos Teoremas 3.1 e 3.2 exige uma estratégia de busca linear aplicada à resolução das LMIs (similarmente aos resultado de [17, 18]). A principal diferença em comparação com os Lemas 3.3 e 3.4, é que as matrizes do filtro A_f , B_f , C_f e D_f podem ser obtidas diretamente de uma solução factível por uma simples mudança de variáveis.

Para resolver as condições LMI dependentes de parâmetros dos Teoremas 3.1 e 3.2, utilizou-se a técnica proposta em [39] como apresentado no Lema 1.4 com funções de Lyapunov afins e [32] que resolve LMIs dependentes de parâmetros por meio de aproximações polinomiais homogêneas de grau crescente como mostrado no Lema 1.5. Para isto, as matrizes polinomiais (variáveis de decisão nas LMIs dependentes de parâmetros, i.e. $W(\alpha)$, $K_{11}(\alpha)$, $K_{21}(\alpha)$, $E_{11}(\alpha)$, $E_{21}(\alpha)$, $Q_1(\alpha)$ e $F_1(\alpha)$) são tratadas como polinômios homogêneos de grau arbitrário g e condições LMI suficientes são expressas somente em termos dos vértices do politopo.

3.5 Experimentos Numéricos

Todos os experimentos foram implementados em Matlab versão 7.1.0.246 (R14) SP 3 usando os programas Yalmip [29] e SeDuMi [42] e o *Robust LMI Parser* [2]. O computador utilizado foi um Intel Quad Core, 3.00 GHz, 4 GB de RAM com sistema Operacional Windows Vista. Nos exemplos apresentados, utilizou-se como matrizes $T \in \mathbb{R}^{r \times n}$ em (3.9) e $T_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ em (3.16) matrizes compostas apenas por uns, i.e., usando o comando do Matlab, $T = \text{ones}(r, n)$ e $T_2 = \text{ones}(p, n)$ respectivamente

3.5.1 Funções de Lyapunov Afins

Filtragem \mathcal{H}_2

Nessa seção o objetivo é verificar a sensibilidade do método proposto frente as variações de λ . A Tabela 3.1 apresenta uma comparação entre o Teorema 3.1, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_3 = 1$ e a técnica apresentada em [17], considerando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ nos dois casos e utilizando-se $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ em [17]. Para cada par n (ordem do sistema), N (número de vértices), foram gerados 100 sistemas aleatórios estáveis, isto é, todos os autovalores da matriz $A(\alpha)$ com parte real à esquerda de -0.05 . Para gerar os politopos estáveis são seguidos os seguintes passos: 1) É gerada uma matriz aleatória com valores compreendidos entre -1 e 1 ; 2) é feita uma varredura em todos os vértices e em combinações lineares dos vértices para encontrar a maior parte real dos autovalores do politopo; 3) este valor é somado à distância desejada que o politopo esteja da origem, multiplicado por uma matriz identidade de dimensão apropriada e subtraído de cada matriz que compõe o vértice do politopo. Procedimento semelhante para a geração de politopos estáveis pode ser encontrado em [28]. Para cada método foi calculado o somatório dos valores de custo obtido.

$$C_m = \sum_{i=1}^{100} \mu_i \quad (3.18)$$

Os valores apresentados na tabela, correspondem à normalização do somatório dos custos para cada par n , N com

$$C_n = \frac{C_m}{C_k} \quad (3.19)$$

e $C_k = \max C_m$. Observa-se que quanto maiores os valores de n e N maior é a redução do custo garantido \mathcal{H}_2 dado pelo Teorema 3.1 em comparação com [17]. Observa-se ainda que fazendo $\lambda_3 = 0$ os resultados tendem a ser melhores.

Filtragem \mathcal{H}_∞

A Tabela 3.2 apresenta a comparação realizada entre [17] e o Teorema 3.2 com $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e com $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Novamente considera-se $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ nos dois casos e utiliza-se $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ em [17].

Tabela 3.1: Comparação entre o Teorema 3.1 $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_3 = 1$ utilizando função de Lyapunov afim e o método proposto em [17] para sistemas gerados aleatoriamente (n é o número de estados e N o número de vértices do sistema).

n	N	$\lambda_3 = 0$	$\lambda_3 = 1$	[17]
2	2	0.8490	0.8758	1.0000
	3	0.8493	0.8635	1.0000
	4	0.8089	0.8113	1.0000
3	2	0.8436	0.8570	1.0000
	3	0.8068	0.8243	1.0000
	4	0.7665	0.7742	1.0000
4	2	0.8307	0.8411	1.0000
	3	0.7765	0.7893	1.0000
	4	0.7943	0.7998	1.0000

Para $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ os resultados são ligeiramente melhores.

Tabela 3.2: Comparação entre o Teorema 3.2 $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ utilizando função de Lyapunov afim e o método proposto em [17] para sistemas gerados aleatoriamente (n é o número de estados e N o número de vértices do sistema).

n	N	$\lambda_3 = \lambda_4 = 0$	$\lambda_3 = \lambda_4 = 1$	[17]
2	2	0.6499	0.6508	1.0000
	3	0.6331	0.6334	1.0000
	4	0.6162	0.6164	1.0000
3	2	0.5798	0.5873	1.0000
	3	0.5585	0.5689	1.0000
	4	0.5952	0.5950	1.0000
4	2	0.5880	0.5998	1.0000
	3	0.5765	0.5791	1.0000
	4	0.5393	0.5393	1.0000

Considere o seguinte sistema contínuo no tempo, gerado aleatoriamente, com $n = 2$ e $N = 2$

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.81 & 0.44 & -0.92 & 0.92 \\ 0.63 & -0.84 & 0.24 & -0.66 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.20 & 0.02 & -1.21 & -1.37 \\ -0.85 & -0.60 & -2.62 & 0.02 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.61 & -1.29 \\ 1.01 & 1.63 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.31 & 0.57 \\ -0.70 & -1.84 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} D_{211} \\ D_{212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & -0.61 \\ -0.16 & 0.36 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

O custo garantido \mathcal{H}_∞ obtido com o Teorema 3.2, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, foi 2.009. Aplicando-se [17, Teorema 4], com $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, obteve-se um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a 10.53, o que ilustra que os filtros robustos projetados com a técnica proposta neste trabalho podem prover custos bem menores que os obtidos com o método de [17].

O filtro obtido pelo Teorema 3.2 é dado por

$$A_f = \begin{bmatrix} -1.4905 & 0.6437 \\ -0.3263 & -0.4639 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.4808 \\ 0.4038 \end{bmatrix}, C_f = [0.2518 \quad 0.1954], D_f = [-1.1926]$$

A seguir são apresentadas as nuvens de valores singulares para combinações lineares dos vértices do sistema aumentado, ou seja, $Z = \alpha Z_1 + (1 - \alpha)Z_2$, $\alpha = 0 : 0.1 : 1$, com Z_1 e Z_2 vértices do sistema. A Figura 3.1 apresenta a nuvem obtida com o filtro robusto dado pelo Teorema 3.2, e o custo garantido obtido com o Teorema 3.2 enquanto a Figura 3.2 mostra a nuvem obtida com o filtro dado pelo método de [17], com seu respectivo custo garantido. Observa-se que a nuvem de valores singulares obtida com o filtro do Teorema 3.2 assegura limitantes bem menores.

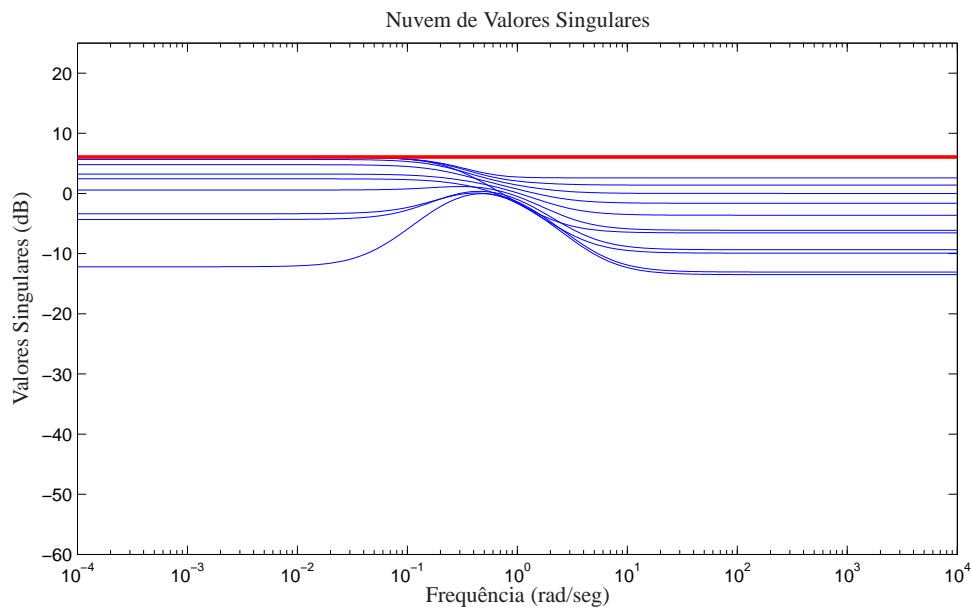


Figura 3.1: Nuvem de valores singulares do sistema (3.20)-(3.21) obtido com o Teorema 3.2, com o limitante 6.0596 (dB).

A Figura 3.3 apresenta a saída do sistema aumentado, ou seja, o sinal de erro do filtro robusto, considerando-se o sistema no vértice 2, para a seguinte entrada externa

$$w(t) = \exp(-0.1t) \cos(0.5t) + \varepsilon \quad (3.22)$$

com ε um sinal pseudo-aleatório de média zero e variância unitária. O gráfico $e_1(t)$ apresenta a resposta para o filtro obtido pelo método de [17], enquanto o gráfico $e_2(t)$ apresenta a resposta para o filtro obtido por meio do Teorema 3.2. Observa-se que a resposta obtida com o Teorema 3.2 apresenta uma maior atenuação do sinal de ruído.

Note que o filtro obtido com o Teorema 3.2 apresenta ganhos elevados em alta frequência, o que acarreta a maior presença de ruídos na análise temporal, em oposição ao filtro de [17], que possui uma faixa de passagem menor.

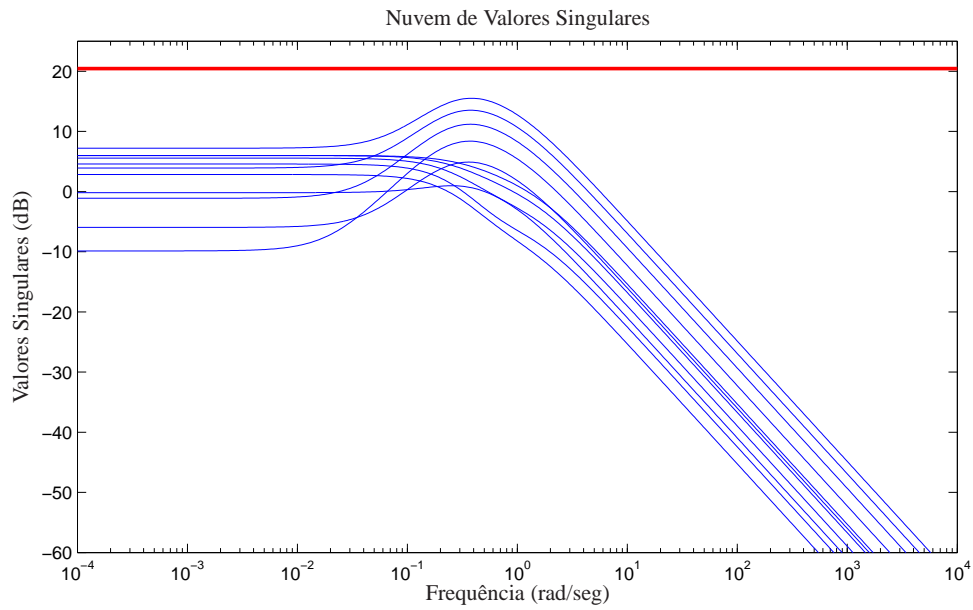


Figura 3.2: Nuvem de valores singulares do sistema (3.20)-(3.21) obtido com o filtro de [17], com o limitante 20.4486 (dB).

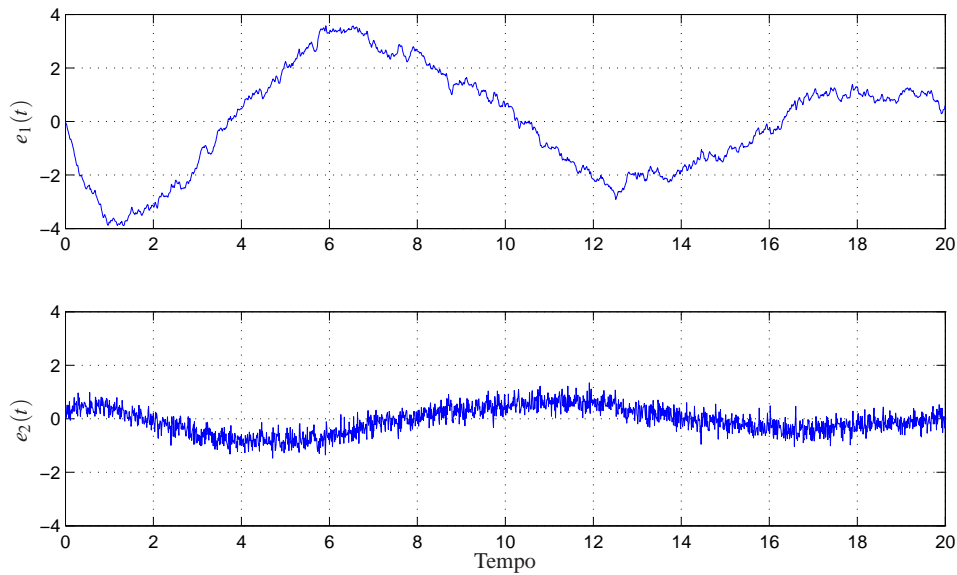


Figura 3.3: Análise temporal dos filtros robustos para o sistema (3.20)-(3.21).

3.5.2 Funções de Lyapunov Polinomiais

Filtragem \mathcal{H}_2

Considere o seguinte sistema contínuo no tempo, também analisado em [4, 17, 18, 24].

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 + 0.3\alpha \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [-100 + 10\beta \quad 100], C_1 = [1 \quad 0], D_{21} = [0 \quad 1]$$

A Tabela 3.3 mostra o custo \mathcal{H}_2 associado ao filtro robusto obtido com o Teorema 3.1, para $g = 2$ e $g = 3$, comparado com os métodos de [4], [17, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$], [18, $g = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$] e [24], em duas situações: (a) $|\alpha| \leq 3$ e $\alpha = \beta$, e (b) $|\alpha| \leq 3$ e $|\beta| \leq 1$. Foi utilizado um procedimento de busca para encontrar $\lambda_1 = -1.941$, $\lambda_2 = 3.174$ (a) e $\lambda_1 = 0.496$, $\lambda_2 = 0.382$ (b), que apresentam os menores custos. Observa-se que o método proposto provê os melhores resultados, garantindo o menor custo \mathcal{H}_2 com $g = 2$. O limitante é levemente reduzido com $g = 3$. É importante ressaltar que o filtro em [24] tem ordem igual ao (número de vértices) x (número de estados), i.e. quatro neste caso, e o método em [18] tem grau $g = 3$ nas matrizes polinomiais.

Tabela 3.3: Custo \mathcal{H}_2 obtido pelo Teorema 3.1 (T3.1) e outros métodos.

Casos	T3.1 ($g = 3$)	T3.1 ($g = 2$)	[24]	[18] ($g = 3$)	[17]	[4]
(a)	13.6553	13.6560	13.7425	14.0900	14.2400	14.6200
(b)	15.7432	15.7433	15.8921	15.8000	15.8000	15.8000

O filtro obtido pelo Teorema 3.1, caso (a) para $g = 3$ é dado por

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.9386 & -2.7653 \\ 1.4133 & -3.0959 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.0120 \\ 0.0154 \end{bmatrix}, C_f = [-0.3010 \quad 0.5152]$$

e para o caso (b), $g = 3$,

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.5880 & 0.3068 \\ 2.5848 & -2.6411 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.0119 \\ -0.0178 \end{bmatrix}, C_f = [0.1733 \quad -0.2191]$$

Filtragem \mathcal{H}_∞

Considere o sistema contínuo no tempo apresentado em [27]

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 4 + \alpha \\ -4 & -0.6 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_1 = [0 \quad 1]; C_2 = [0 \quad -1.2]; D_{21} = [0 \quad 1]; |\alpha| \leq \bar{\alpha}.$$

A Tabela 3.4 mostra o custo garantido \mathcal{H}_∞ obtido com o Teorema 3.2 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, ($g = 1, 2$), e com [17, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$], para vários valores de $\bar{\alpha}$. Como pode ser visto, a abordagem proposta provê os menores níveis de atenuação, especialmente quando $\bar{\alpha}$ cresce.

Tabela 3.4: Custo \mathcal{H}_∞ usando o Teorema 3.2 (T3.2), $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, e [17], com $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, em função dos valores de $\bar{\alpha}$.

$\bar{\alpha}$	1	1.3	1.5	2	2.5
T3.2 ($g = 1$)	0.7017	0.7059	0.7094	0.7208	0.7366
T3.2 ($g = 2$)	0.6964	0.6967	0.6970	0.6987	0.7028
[17]	0.7496	0.7763	0.7976	0.8653	0.9584

Sistemas Discretos

Este capítulo apresenta os resultados principais obtidos para sistemas discretos, casos \mathcal{H}_2 , Seção 4.2 e \mathcal{H}_∞ , Seção 4.3. O desempenho dos métodos propostos é ilustrado na Seção 4.5.

4.1 Resultados Preliminares

Lema 4.1 *Seja $\tilde{A}(\alpha)$ uma matriz Schur estável. A desigualdade $\|H(z)\|_2^2 < \rho^2$ é válida para todo $\alpha \in \Lambda_N$ se, e somente se existirem matrizes simétricas dependentes de parâmetros $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ tais que*

$$\text{Tr}(M(\alpha)) < \rho^2 \quad (4.1)$$

$$\tilde{C}(\alpha)P(\alpha)\tilde{C}(\alpha)' - M(\alpha) < 0 \quad (4.2)$$

$$\tilde{A}(\alpha)P(\alpha)\tilde{A}(\alpha)' - P(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)\tilde{B}(\alpha)' < 0 \quad (4.3)$$

são satisfeitas.

Lema 4.2 *Seja $\tilde{A}(\alpha)$ uma matriz Schur estável. A desigualdade $\|H(z)\|_\infty < \gamma$ é válida para todo $\alpha \in \Lambda_N$ se, e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva e dependente de parâmetros $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ tal que*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & P(\alpha)\tilde{A}(\alpha)' & P(\alpha)\tilde{B}(\alpha) & 0 \\ \star & P(\alpha) & 0 & \tilde{C}(\alpha)' \\ \star & \star & I & \tilde{D}(\alpha)' \\ \star & \star & \star & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.4)$$

4.2 Filtragem \mathcal{H}_2

Lema 4.3 *Seja $\tilde{A}(\alpha)$ uma matriz Schur estável. A desigualdade $\|H(z)\|_2^2 < \rho^2$ é válida para todo $\alpha \in \Lambda_N$ se, e somente se existirem matrizes simétricas definidas positivas, dependentes de parâmetros $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes dependentes de parâmetros $E(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times 2n}$ tais que*

$$\text{Tr}(M(\alpha)) < \rho^2 \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} M(\alpha) & \tilde{C}(\alpha) \\ \star & W(\alpha) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'K(\alpha)' + K(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & \star & \star \\ E(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - K(\alpha)' & -W(\alpha) - E(\alpha) - E(\alpha)' & \star \\ \tilde{B}(\alpha)'K(\alpha)' + Q(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & \tilde{B}(\alpha)'E(\alpha)' - Q(\alpha) & Q(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)'Q(\alpha)' + I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.7)$$

Prova: Aplicando o complemento de Schur em (4.6) obtém-se uma condição equivalente a (4.2), com $P(\alpha) = W(\alpha)^{-1}$. Considerando

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} K(\alpha) \\ E(\alpha) \\ Q(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} W(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & -W(\alpha) & 0 \\ \star & \star & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = [\tilde{A}(\alpha) \quad -I \quad \tilde{B}(\alpha)] \quad (4.8)$$

na condição *iv*) do Lema 1.3, com

$$\mathcal{B}^{\perp'} = \begin{bmatrix} I & \tilde{A}(\alpha)' & 0 \\ 0 & \tilde{B}(\alpha)' & I \end{bmatrix}$$

tem-se, pela condição *ii*) do Lema 1.3,

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) - \tilde{A}(\alpha)'W(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & -\tilde{A}(\alpha)'W(\alpha)\tilde{B}(\alpha) \\ \star & I - \tilde{B}(\alpha)'W(\alpha)\tilde{B}(\alpha) \end{bmatrix} > 0$$

Aplicando o complemento de Schur e rearranjando, tem-se

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) & \tilde{A}(\alpha)'W(\alpha) & 0 \\ \star & W(\alpha) & W(\alpha)\tilde{B}(\alpha) \\ \star & \star & I \end{bmatrix} > 0$$

ou

$$T' \begin{bmatrix} W(\alpha)^{-1} & W(\alpha)^{-1}\tilde{A}(\alpha)' & 0 \\ \star & W(\alpha)^{-1} & \tilde{B}(\alpha) \\ \star & \star & I \end{bmatrix} T > 0$$

com $T = \text{diag}(W(\alpha), W(\alpha), I)$, implicando (pelo complemento de Schur) que (4.3) é verificada com $P(\alpha) = W(\alpha)^{-1}$. ■

A mesma discussão realizada no caso contínuo é válida para o caso discreto. A correspondência entre os lemas foi estabelecida sem a especificação de uma estrutura para as variáveis de folga. Uma condição LMI dependente de parâmetros suficiente que assegura uma solução para o Lema 4.3 é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 4.1 *Se existir uma matriz simétrica dependente de parâmetros definida positiva $W(\alpha)$ como em (3.10) e $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times r}$, matrizes $Q(\alpha)$, $K(\alpha)$, $E(\alpha)$ como em (3.9), uma matriz pré-definida $T \in \mathbb{R}^{r \times n}$, matrizes $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\rho > 0$ e escalares λ_1, λ_2 tais que,*

$$\min_{\rho} \text{Tr}(M(\alpha)) < \rho^2 \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} M(\alpha) & C_1(\alpha) & -C_f \\ \star & W_{11}(\alpha) & W_{12}(\alpha) \\ \star & \star & W_{22}(\alpha) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.10)$$

$$\left[\begin{array}{cc}
W_{11}(\alpha) + K_{11}(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)'K_{11}(\alpha)' & W_{12}(\alpha) + A(\alpha)'K_{21}(\alpha)' \\
+ \lambda_1(C_2(\alpha)'K_2' + K_2C_2(\alpha)) & + \lambda_2C_2(\alpha)'K_2' + \lambda_1K_1 \\
\star & W_{22}(\alpha) + \lambda_2(K_1 + K_1') \\
\star & \star \\
\star & \star \\
\star & \star \\
-K_{11}(\alpha) + A(\alpha)'E_{11}(\alpha)' + C_2(\alpha)'K_2' & -\lambda_1\hat{K} + A(\alpha)'E_{21}(\alpha)' + C_2(\alpha)'K_2' \\
-K_{21}(\alpha) + K_1' & -\lambda_2\hat{K} + K_1' \\
-W_{11}(\alpha) - E_{11}(\alpha) - E_{11}(\alpha)' & -W_{12}(\alpha) - \hat{K} - E_{21}(\alpha)' \\
\star & -W_{22}(\alpha) - \hat{K} - \hat{K}' \\
\star & \star \\
K_{11}(\alpha)B_1(\alpha) + \lambda_1K_2D_{21}(\alpha) + A(\alpha)'Q_1' + \lambda_3C_2(\alpha)'K_2'T' & \\
K_{21}(\alpha)B_1(\alpha) + \lambda_2K_2D_{21}(\alpha) + \lambda_3K_1'T' & \\
E_{11}(\alpha)B_1(\alpha) + K_2D_{21}(\alpha) - Q_1(\alpha)' & \\
E_{21}(\alpha)B_1(\alpha) + K_2D_{21}(\alpha) - \lambda_3\hat{K}'T' & \\
Q_1(\alpha)B_1(\alpha) + B_1(\alpha)'Q_1(\alpha)' + \lambda_3TK_2D_{21}(\alpha) + \lambda_3D_{21}(\alpha)'K_2'T' + I &
\end{array} \right] > 0 \quad (4.11)$$

sejam verificadas $\forall \alpha \in \Lambda$, então $A_f = \hat{K}^{-1}K_1$, $B_f = \hat{K}^{-1}K_2$ e C_f são as matrizes do filtro robusto estável que assegura um custo garantido \mathcal{H}_2 dado por ρ .

4.3 Filtragem \mathcal{H}_∞

Lema 4.4 *Seja $\tilde{A}(\alpha)$ uma matriz Schur estável. A desigualdade $\|H(z)\|_\infty < \gamma$ é válida para todo $\alpha \in \Lambda_N$ se, e somente se, existir uma matriz dependente de parâmetros, simétrica e definida positiva $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, e matrizes dependentes de parâmetros $E(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times 2n}$ e $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times 2n}$ tais que*

$$\left[\begin{array}{cc}
W(\alpha) + K(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'K(\alpha)' & \star \\
-K(\alpha)' + E(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & -W(\alpha) - E(\alpha) - E(\alpha)' \\
\tilde{B}(\alpha)'K(\alpha)' + Q(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & \tilde{B}(\alpha)'E(\alpha)' - Q(\alpha) \\
F(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha) & -F(\alpha) \\
\star & \star \\
\star & \star \\
\tilde{B}(\alpha)'Q(\alpha)' + Q(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + I & \star \\
F(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{D}(\alpha) & \gamma^2 I
\end{array} \right] > 0 \quad (4.12)$$

Prova: A prova do Lema 4.4 segue os mesmos passos da prova do Lema 3.4, considerando

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} W(\alpha) & 0 & 0 & \tilde{C}(\alpha)' \\ \star & -W(\alpha) & 0 & 0 \\ \star & \star & I & \tilde{D}(\alpha)' \\ \star & \star & \star & \gamma^2 I \end{bmatrix}$$

■

Teorema 4.2 *Se existir uma matriz simétrica dependente de parâmetros definida positiva $W(\alpha)$ particionada como em (3.10) e matrizes dependentes de parâmetros $Q(\alpha)$, $K(\alpha)$, $E(\alpha)$ como em (3.9) e $F(\alpha)$ como em (3.16) $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times q}$, com matrizes pré-definidas $T \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $T_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, matrizes $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $\gamma > 0$ e escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 tais que*

$$\left[\begin{array}{cc} W_{11}(\alpha) + K_{11}(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)'K_{11}(\alpha)' & W_{12}(\alpha) + A(\alpha)'K_{21}(\alpha)' \\ + \lambda_1(C_2(\alpha)'K_2' + K_2C_2(\alpha)) & + \lambda_2C_2(\alpha)'K_2' + \lambda_1K_1 \\ * & W_{22}(\alpha) + \lambda_2(K_1 + K_1') \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ -K_{11}(\alpha) + A(\alpha)'E_{11}(\alpha)' + C_2(\alpha)'K_2' & -\lambda_1\hat{K} + A(\alpha)'E_{21}(\alpha)' + C_2(\alpha)'K_2' \\ -K_{21}(\alpha) + K_1' & -\lambda_2\hat{K} + K_1' \\ -W_{11}(\alpha) - E_{11}(\alpha) - E_{11}(\alpha)' & -W_{12}(\alpha) - \hat{K} - E_{21}(\alpha)' \\ * & -W_{22}(\alpha) - \hat{K} - \hat{K}' \\ * & * \\ * & * \\ K_{11}(\alpha)B_1(\alpha) + \lambda_1K_2D_{21}(\alpha) + A(\alpha)'Q_1' + \lambda_3C_2(\alpha)'K_2'T' & \\ K_{21}(\alpha)B_1(\alpha) + \lambda_2K_2D_{21}(\alpha) + \lambda_3K_1'T' & \\ E_{11}(\alpha)B_1(\alpha) + K_2D_{21}(\alpha) - Q_1(\alpha)' & \\ E_{21}(\alpha)B_1(\alpha) + K_2D_{21}(\alpha) - \lambda_3\hat{K}'T' & \\ Q_1(\alpha)B_1(\alpha) + B_1(\alpha)'Q_1(\alpha)' + \lambda_3TK_2D_{21}(\alpha) + \lambda_3D_{21}(\alpha)'K_2'T' + I & \\ * & \\ \lambda_4C_2(\alpha)'K_2'T_2' + A(\alpha)'F_1(\alpha)' + C_1(\alpha)' - C_2(\alpha)'D_f' & \\ -C_f' + \lambda_4K_1'T_2' & \\ -F_1(\alpha)' & \\ -\lambda_4\hat{K}'T_2' & \\ \lambda_4D_{21}(\alpha)'K_2'T_2' + B_1(\alpha)'F_1(\alpha)' + D_{11}(\alpha)' - D_{21}(\alpha)'D_f' & \\ \gamma^2I & \end{array} \right] > 0 \quad (4.13)$$

seja verificada $\forall \alpha \in \Lambda$, então $A_f = \hat{K}^{-1}K_1$, $B_f = \hat{K}^{-1}K_2$, C_f e D_f são as matrizes do filtro robusto que assegura que a função de transferência de w para e é estável, com um custo garantido \mathcal{H}_∞ dado por γ .

4.4 Condições LMIs para Filtragem Robusta

Para obter LMIs que provêm condições suficientes para a solução dos teoremas apresentados, o procedimento é: i) escolher uma estrutura para as variáveis de decisão do problema. Por exemplo, matrizes dependentes de parâmetros na forma afim, como no Lema 1.4, ou matrizes polinomiais de grau genérico g ; ii) desenvolver as LMIs dependentes de parâmetros para identificar os coeficientes associados a cada um dos monômios; iii) programar as LMIs.

Em linhas gerais, segue-se o mesmo procedimento apresentado na Seção 3.4 (caso contínuo). As LMIs são obtidas com o auxílio do *Robust LMI Parser* [2].

4.5 Experimentos Numéricos

4.5.1 Funções de Lyapunov Afins

Filtragem \mathcal{H}_2

A Tabela 4.1 apresenta uma comparação entre o Teorema 4.1, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_3 = 1$ e a técnica apresentada em [17], com $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ em [17]. Para cada par n, N , foram gerados 100 sistemas aleatórios estáveis, sendo que o maior autovalor em módulo do polítopo tem uma distância mínima de 0.05 do círculo de raio unitário, ou seja o máximo autovalor permitido em módulo é 0.95. A obtenção dos polítopos estáveis é feita de maneira análoga ao caso contínuo apresentado no Capítulo 3. Para efeito de comparação, foi utilizado o mesmo método apresentado na Subseção 3.5.1. Neste caso observa-se que fazendo $\lambda_3 = 0$, os resultados são melhores que os obtidos em [17].

Tabela 4.1: Comparação entre o Teorema 4.1 $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_3 = 1$ utilizando função de Lyapunov afim com o método proposto em [17] para sistemas gerados aleatoriamente (n é o número de estados e N o número de vértices do sistema).

n	N	$\lambda_3 = 0$	$\lambda_3 = 1$	[17]
2	2	0.6278	1.0000	0.7067
	3	0.7765	1.0000	0.9012
	4	0.7814	1.0000	0.8973
3	2	0.7003	1.0000	0.7495
	3	0.7995	1.0000	0.9099
	4	0.8583	0.9878	1.0000
4	2	0.8423	1.0000	0.9556
	3	0.8525	0.9816	1.0000
	4	0.8663	1.0000	0.9962

Filtragem \mathcal{H}_∞

A Tabela 4.2 apresenta uma comparação entre o Teorema 4.2, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_3 = 1$ e a técnica apresentada em [17]. Neste caso, os valores obtidos com $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e com $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$, foram idênticos.

4.5.2 Funções de Lyapunov Polinomiais

Filtragem \mathcal{H}_2

Caso – A

Considere o sistema discreto no tempo, com $n = 2$ e $N = 2$, gerado aleatoriamente, dado por

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.3 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.3 & -1.2 \\ 0.9 & 0.3 & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 1.0 \\ 1.7 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.2 \\ 1.2 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} D_{211} \\ D_{212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Tabela 4.2: Comparação entre o Teorema 4.2 $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ utilizando função de Lyapunov afim com o método de [17] para sistemas gerados aleatoriamente (n é o número de estados e N o número de vértices do sistema).

n	N	$\lambda_3 = \lambda_4 = 0$	$\lambda_3 = \lambda_4 = 1$	[17]
2	2	0.7842	0.7842	1.0000
	3	0.7205	0.7205	1.0000
	4	0.7257	0.7257	1.0000
3	2	0.8921	0.8921	1.0000
	3	0.8378	0.8378	1.0000
	4	0.6978	0.6978	1.0000
4	2	0.9296	0.9296	1.0000
	3	0.8441	0.8441	1.0000
	4	0.7900	0.7900	1.0000

Os custos garantidos \mathcal{H}_2 obtidos pelo Teorema 4.1 ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$) são 11.8113 ($g = 1$) e 9.8195 ($g = 2$), enquanto pelas condições em [18, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$], tem-se 18.8988 ($g = 1$) e 15.3342 ($g = 2$). Para este exemplo o método proposto em [24] provê um custo garantido \mathcal{H}_2 de 30.8397. Neste caso, o custo garantido \mathcal{H}_2 obtido pelo Teorema 4.1 com $g = 1$ é menor que o custo obtido em [18] com $g = 2$ e muito menor que o limitante \mathcal{H}_2 obtido por [24], ilustrando claramente que a abordagem proposta é menos conservadora.

Para $g = 1$, o filtro obtido pelo Teorema 4.1 é dado por

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.4242 & 0.7321 \\ 0.3792 & 0.4638 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -0.5359 \\ 0.6562 \end{bmatrix}, C_f = [-0.2249 \quad 0.1745]$$

e para $g = 2$ por

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.4438 & 0.7452 \\ 0.3353 & 0.5165 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -0.8882 \\ 0.8682 \end{bmatrix}, C_f = [-0.1048 \quad 0.1091]$$

Caso – B

Considere o sistema discreto no tempo apresentado em [24], com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.8187 + \delta \\ 1 & -0.9854 + 2\delta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [-100 \quad 10], C_1 = [1 \quad 0], D_{21} = [0 \quad 1], |\delta| \leq 0.08$$

Para este exemplo, o Teorema 4.1, com $\lambda_1 = 10000$, $\lambda_2 = 0.001$, $\lambda_3 = 0$, provê um custo garantido \mathcal{H}_2 de 54.2116 ($g = 2$), enquanto [24] fornece 56.0013 e [18, $g = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$] provê um limitante \mathcal{H}_2 de 63.9823. Observe que, se um domínio de incertezas maior é considerado, por exemplo $|\delta| \leq 0.15$, o Teorema 4.1 com $\lambda_1 = 10000$, $\lambda_2 = 1e - 5$, $\lambda_3 = 0$, provê um limitante \mathcal{H}_2 de 72.4853 ($g = 2$), o método de [24] fornece 76.3454 e [18, $g = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$] garante um custo \mathcal{H}_2 de 122.9226, ilustrando que o método proposto pode superar ainda mais os outros métodos quando o sistema é sujeito a mais incertezas.

Caso – C

Considere o sistema discreto no tempo, analisado em [17], dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 + 0.06\alpha \\ 0.01 + 0.05\beta & 0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [1 \ 0], C_1 = [1 \ 1], D_{21} = [0 \ 0 \ 1.414], |\alpha| \leq 1 \text{ e } |\beta| \leq 1.$$

O custo garantido \mathcal{H}_2 obtido pelo Teorema 4.1 (T4.1), $\lambda_1 = -0.883$, $\lambda_2 = -0.913$, $\lambda_3 = 0$, é 10.7730 ($g = 2$). Aplicando [18], com $\alpha_1 = -0.89$, $\alpha_2 = -0.921$, tem-se 10.8200, e aplicando o método proposto por [24], o custo \mathcal{H}_2 é 11.3220. Novamente, este exemplo ilustra o fato de que o método proposto pode prover filtros robustos que garantem limitantes \mathcal{H}_2 menores que os outros métodos.

Tabela 4.3: Custo \mathcal{H}_2 para o Caso C, usando Teorema 4.1 (T4.1), $\lambda_1 = -0.883$, $\lambda_2 = -0.913$, $\lambda_3 = 0$, [17], [18] e [24].

Métodos	T4.1 ($g = 2$)	[24]	[18] ($g = 2$)	[17]
\mathcal{H}_2	10.7730	11.3220	10.8200	13.4600

É importante ressaltar que o filtro obtido por [24] é um filtro de quarta ordem, enquanto o filtro obtido pelo Teorema 4.1 é um filtro de segunda ordem, dado por

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.3484 & 0.0297 \\ 0.1657 & 0.9006 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -0.8457 \\ 0.1354 \end{bmatrix}, C_f = [-1.0078 \quad -0.1910]$$

Filtragem \mathcal{H}_∞

Considere o seguinte sistema discreto no tempo de [17]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1 + \delta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = [-100 \ 10],$$

$$C_1 = [1 \ 0], D_{21} = [0 \ 1], |\delta| \leq 0.45.$$

Para este exemplo, o Teorema 4.2 com $\lambda_1 = -1.43$, $\lambda_2 = -0.08$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e $g = 1$, provê um custo garantido \mathcal{H}_∞ de 1.6577, enquanto [17] ($\lambda_1 = 0.05$, $\lambda_2 = -0.33$) obtém 1.7030 e [19, Corollary 5] provê 1.8600 para $g = 1$ e 1.8208 para $g = 2$. Neste caso, o limitante \mathcal{H}_∞ obtido pelo Teorema 4.2 com $g = 1$ é menor que o custo garantido obtido por [19] com matrizes polinomiais de grau $g = 2$.

O filtro obtido pelo Teorema 4.2 é dado por

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.0070 & -1.2289 \\ 0.2619 & -0.3566 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.0058 \\ 0.0130 \end{bmatrix}, C_f = [0.0061 \quad -0.0599], D_f = [-0.0079]$$

A seguir são apresentadas as nuvens de valores singulares para combinações lineares dos vértices do sistema aumentado, ou seja, $Z = \alpha Z_1 + (1 - \alpha)Z_2$, $\alpha = 0 : 0.1 : 1$, com Z_1 e Z_2 vértices do sistema. A Figura 4.1 apresenta a nuvem obtida com o filtro robusto dado pelo Teorema 4.2 e o custo garantido obtido, a Figura 4.2 mostra a nuvem obtida com o filtro dado pelo método de [17] e o limitante superior obtido com o método de [17]. Observa-se que, assim como no caso contínuo, a nuvem de valores singulares obtida com o filtro do Teorema 4.2 assegura limitantes menores.

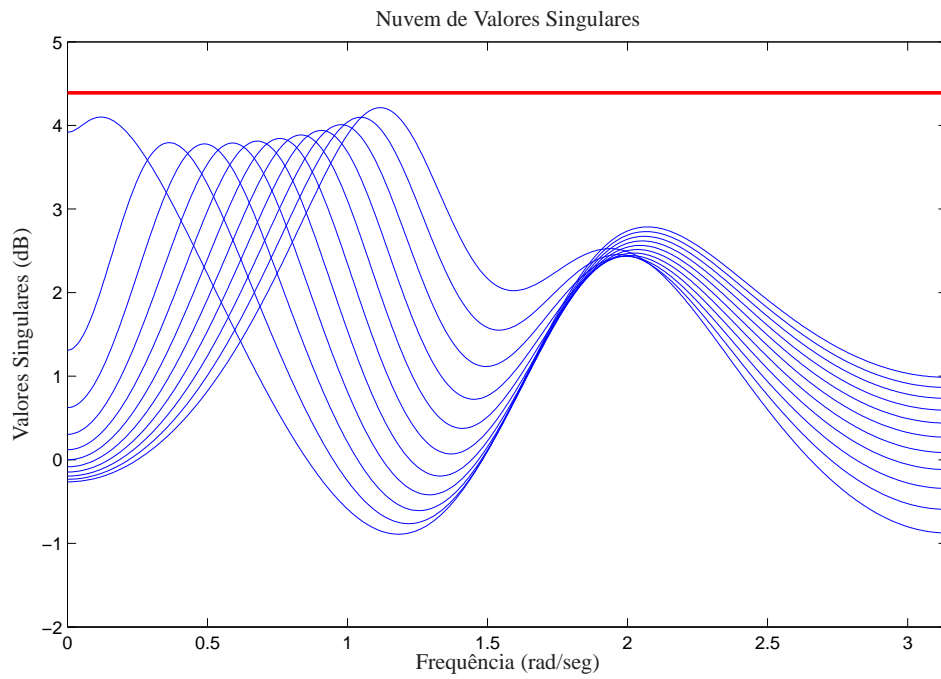


Figura 4.1: Nuvem de valores singulares obtida com o Teorema 4.2, com o limitante 4.3901 (dB).

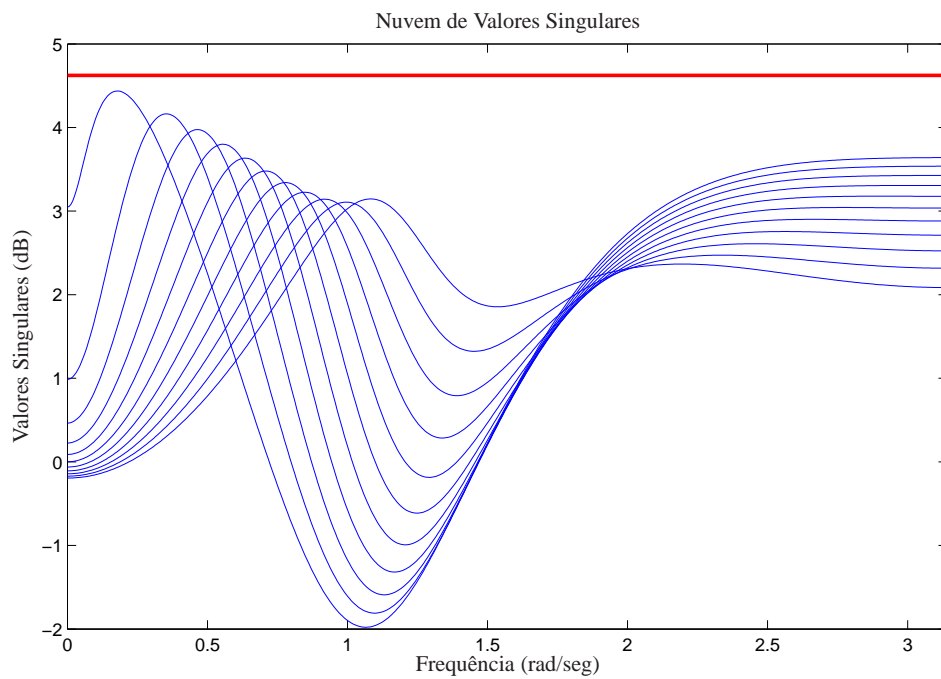


Figura 4.2: Nuvem de valores singulares obtida com o filtro de [17], com o limitante 4.6243 (dB).

Conclusões

Nesta dissertação foram abordados os projetos de filtros robustos para sistemas incertos lineares invariantes, contínuos e discretos no tempo. O projeto dos filtros foi baseado em dois critérios de desempenho, \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . O Capítulo 2 apresenta o projeto de filtros baseados no conceito da estabilidade quadrática para sistemas contínuos e discretos no tempo, custos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , resultados já conhecidos da literatura e que podem ser estendidos para o caso robusto de maneira imediata. No Capítulo 3 foram propostas novas condições LMIs dependentes de parâmetros para o projeto de um filtro robusto de ordem completa para sistemas contínuos. Como critério, um limitante da norma \mathcal{H}_2 ou da norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência do ruído para o erro é minimizado. A contrapartida para o caso discreto foi apresentada no Capítulo 4, novamente foram abordados os critérios \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Foram utilizadas relaxações LMIs baseadas em funções de Lyapunov afins nos parâmetros, tratando os produtos duplos entre as variáveis dependentes de parâmetros como apresentado no Lema 1.4, essa abordagem permitiu que fossem encontrados resultados menos conservadores, além de relaxações baseadas em polinômios homogêneos de grau arbitrário, como exemplificado no Lema 1.5, neste caso foi utilizado o *Robust LMI Parser* [2], que retorna um conjunto de LMIs resultantes das operações com variáveis polinômias, que se verificadas provêm o filtro robusto desejado.

O maior número de variáveis de folga presentes nas condições apresentadas nessa dissertação aliadas à estruturas polinômias para as variáveis do problema proporcionaram resultados menos conservadores que os obtidos com abordagens da literatura. As condições obtidas dependem de escalares e, em princípio os resultados poderiam ser melhorados se alguma estratégia de busca fosse utilizada, ao preço de um maior esforço computacional.

Perspectivas

Extensões para trabalhos futuros incluem:

- Projeto de filtros dependentes de parâmetros.
- Inclusão de atrasos e não linearidades, como saturação, chaveamento, etc.
- Projeto de filtros de ordem reduzida.
- Realimentação de estados estimados.
- Tratar os casos de parâmetros variantes no tempo, com taxas de variação arbitrárias e taxas de variação limitadas.

Trabalhos produzidos

- M. J. Lacerda, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, Filtragem robusta \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ usando LMIs para sistemas incertos contínuos politópicos invariantes no tempo, Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito, MS, Brasil. Páginas 4110-4117. Setembro 2010.
- M. J. Lacerda, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, Robust \mathcal{H}_2 filter design for polytopic linear systems via LMIs and polynomial matrices, Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control, Atlanta, GA, USA, December, 2010.
- M. J. Lacerda, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Filter Design for Uncertain Linear Systems via LMIs and Polynomial Matrices, Signal Processing, 2010, DOI 10.1016/j.sigpro.2010.10.013

Bibliografia

- [1] C. M. Agulhari, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, “Robust \mathcal{H}_∞ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains,” in *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, Baltimore, MD, June 2010, pp. 4677–4682.
- [2] —, “Robust LMI parser : A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems,” in *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Milan, Italy, September 2011, submetido.
- [3] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Filtering*. Englewood, NJ: Prentice-Hall, 1979.
- [4] K. A. Barbosa, C. E. de Souza, and A. Trofino, “Robust \mathcal{H}_2 filtering for uncertain linear systems: LMI based methods with parametric Lyapunov functions,” *Systems & Control Letters*, vol. 54, no. 3, pp. 251–262, March 2005.
- [5] D. S. Bernstein and W. M. Haddad, “LQG control with an \mathcal{H}_∞ performance bound: a Riccati equation approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 3, pp. 293–305, March 1989.
- [6] R. A. Borges, V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, and P.-A. Bliman, “Parameter-dependent \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for linear systems with arbitrarily time-varying parameters in polytopic domains,” *Signal Processing*, vol. 88, no. 7, pp. 1801–1816, July 2008.
- [7] R. A. Borges, R. C. L. F. Oliveira, C. T. Abdallah, and P. L. D. Peres, “ \mathcal{H}_∞ filtering of networked systems with time-varying sampling rates,” in *Proceedings of the 2009 American Control Conference*, St. Louis, MO, USA, June 2009, pp. 3372–3377.
- [8] —, “ \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time linear systems with bounded time-varying parameters,” *Signal Processing*, vol. 90, no. 1, pp. 282–291, January 2010.
- [9] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [10] C. Chen, H. Liu, and X. Guan, “ \mathcal{H}_∞ filtering of time-delay T-S fuzzy systems based on piecewise Lyapunov-Krasovskii functional,” *Signal Processing*, vol. 89, no. 10, pp. 1998–2005, October 2009.
- [11] Y. Chen, A. Xue, and S. Zhou, “New delay-dependent \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_∞ filter design for stochastic time-delay systems,” *Signal Processing*, vol. 89, no. 6, pp. 974–980, July 2009.

- [12] M. C. de Oliveira and R. E. Skelton, "Stability tests for constrained linear systems," in *Perspectives in Robust Control*, ser. Lecture Notes in Control and Information Science, S. O. Reza Moheimani, Ed. New York: Springer-Verlag, 2001, vol. 268, pp. 241–257.
- [13] C. E. de Souza, R. M. Palhares, and P. L. D. Peres, "Robust \mathcal{H}_∞ filter design for uncertain linear systems with multiple time-varying state delays," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 3, pp. 569–576, March 2001.
- [14] C. E. de Souza and A. Trofino, "A linear matrix inequality approach to the design of robust \mathcal{H}_2 filters," in *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, ser. Advances in Design and Control, L. El Ghaoui and S. I. Niculescu, Eds. Philadelphia, PA: SIAM, 2000, pp. 175–185.
- [15] J. B. R. do Val, J. C. Geromel, and O. L. V. Costa, "Uncoupled Riccati iterations for the linear quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 12, pp. 1727–1733, December 1998.
- [16] H. Dong, Z. Wang, and H. Gao, " \mathcal{H}_∞ filtering for systems with repeated scalar nonlinearities under unreliable communication links," *Signal Processing*, vol. 89, no. 8, pp. 1567–1575, August 2009.
- [17] Z. S. Duan, J. X. Zhang, C. S. Zhang, and E. Mosca, "Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain linear systems," *Automatica*, vol. 42, no. 11, pp. 1919–1926, November 2006.
- [18] H. Gao, X. Meng, and T. Chen, "A new design of robust \mathcal{H}_2 filters for uncertain systems," *Systems & Control Letters*, vol. 57, no. 7, pp. 585–593, July 2008.
- [19] —, " \mathcal{H}_∞ filter design for discrete delay systems: a new parameter-dependent approach," *International Journal of Control*, vol. 82, no. 6, pp. 993–1005, 2009.
- [20] J. C. Geromel, "Optimal linear filtering under parameter uncertainty," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 1, pp. 168–175, 1999.
- [21] J. C. Geromel, J. Bernussou, G. Garcia, and M. C. de Oliveira, " \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for discrete-time linear systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 5, pp. 1353–1368, May 2000.
- [22] J. C. Geromel and M. C. de Oliveira, " \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for convex bounded uncertain systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 1, pp. 100–107, January 2001.
- [23] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and J. Bernussou, "Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 41, no. 3, pp. 700–711, 2002.
- [24] J. C. Geromel and R. H. Korogui, " \mathcal{H}_2 robust filter design with performance certificate via convex programming," *Automatica*, vol. 44, no. 4, pp. 937–948, April 2008.
- [25] E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, and R. H. C. Takahashi, " $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filter design for systems with polytope-bounded uncertainty," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 9, pp. 3620–3626, September 2006.
- [26] Y. He, G.-P. Liu, D. Rees, and M. Wu, " \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time systems with time-varying delay," *Signal Processing*, vol. 89, no. 3, pp. 275–282, March 2009.

- [27] S. H. Jin and J. B. Park, "Robust \mathcal{H}_∞ filtering for polytopic uncertain systems via convex optimisation," *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, vol. 148, no. 1, pp. 55–59, January 2001.
- [28] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres, "An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 3, pp. 500–504, March 2003.
- [29] J. Löfberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei, Taiwan, September 2004, pp. 284–289, <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- [30] R. Lu, Y. Xu, and A. Xue, " \mathcal{H}_∞ filtering for singular systems with communication delays," *Signal Processing*, vol. 90, no. 4, pp. 1240–1248, April 2010.
- [31] K. Ogata, *Modern Control Engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1990.
- [32] R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres, "Parameter-dependent LMIs in robust analysis: characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 7, pp. 1334–1340, July 2007.
- [33] —, "A convex optimization procedure to compute \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms for uncertain linear systems in polytopic domains," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 29, no. 4, pp. 295–312, July/August 2008.
- [34] R. M. Palhares, C. E. de Souza, and P. L. D. Peres, "Robust \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 8, pp. 1096–1703, August 2001.
- [35] R. M. Palhares and P. L. D. Peres, "Robust \mathcal{H}_∞ filtering design with pole constraints for discrete-time systems: an LMI approach," in *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, vol. 1, San Diego, CA, June 1999, pp. 4418–4422.
- [36] —, "Robust \mathcal{H}_∞ filtering design with pole placement constraint via LMIs," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 102, no. 2, pp. 239–261, August 1999.
- [37] —, "Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance — an LMI approach," *Automatica*, vol. 36, no. 6, pp. 851–858, June 2000.
- [38] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres, "A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems," *Systems & Control Letters*, vol. 43, no. 5, pp. 371–378, August 2001.
- [39] —, "An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 4, pp. 675–678, April 2002.
- [40] W. E. Schmitendorf, "Designing stabilizing controllers for uncertain systems using Riccati equation approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, no. 4, pp. 376–378, 1988.
- [41] P. Shi, M. Mahmoud, S. K. Nguang, and A. Ismail, "Robust filtering for jumping systems with mode-dependent delays," *Signal Processing*, vol. 86, no. 1, pp. 140–152, January 2009.

- [42] J. F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones," *Optimization Methods and Software*, vol. 11–12, pp. 625–653, 1999, <http://sedumi.mcmaster.ca/>.
- [43] K. Takaba and T. Katayama, "Discrete-time \mathcal{H}_∞ algebraic Riccati equation and parametrization of all \mathcal{H}_∞ filters," *International Journal of Control*, vol. 64, no. 6, pp. 1129–1149, August 1996.
- [44] H. D. Tuan, P. Apkarian, and T. Q. Nguyen, "Robust and reduced-order filtering: New LMI-based characterizations and methods," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 12, pp. 2975–2984, December 2001.
- [45] L. Xie, L. Lu, D. Zhang, and H. Zhang, "Improved robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain discrete-time systems," *Automatica*, vol. 40, no. 5, pp. 873–880, May 2004.
- [46] B. Zhang, J. Lam, and S. Xu, "Deconvolution filtering for stochastic systems via homogeneous polynomial Lyapunov functions," *Signal Processing*, vol. 89, no. 4, pp. 605–614, April 2009.
- [47] H. Zhang, A. S. Mehr, and Y. Shi, "Improved robust energy-to-peak filtering for uncertain linear systems," *Signal Processing*, vol. 90, no. 9, pp. 2667–2675, September 2010.
- [48] W. A. Zhang, L. Yu, and X. F. Jiang, "Delay-dependent generalized \mathcal{H}_2 filtering for uncertain systems with multiple time-varying state delays," *Signal Processing*, vol. 87, no. 4, pp. 709–724, April 2007.

Desigualdades Matriciais Lineares

A.1 Desigualdades Matriciais Lineares

A forma geral de uma desigualdade matricial linear (LMI) [9] é

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (\text{A.1})$$

sendo que $x \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis do problema e as matrizes simétricas $F_i = F_i' \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $i = 0, \dots, m$, são dadas. O símbolo da desigualdade em (A.1) significa que $F(x)$ é definida positiva, o que equivale a dizer que $u'F(x)u > 0, \forall u \neq 0$. O objetivo é encontrar escalares x_i que satisfaçam a restrição em (A.1). A LMI é factível se, e somente se, existir x tal que $F(x) > 0$.

A.2 Complemento de Schur

O Complemento de Schur é utilizado para converter desigualdades não lineares em LMIs [9].

Lema A.1 Considerando as matrizes $Q = Q'$ e $R = R'$, o conjunto,

$$Q > 0, \quad R > S'Q^{-1}S \quad (\text{A.2})$$

É equivalente ao conjunto descrito pela LMI

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.3})$$

Prova: Seja a matriz R

$$R = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S'Q^{-1}S \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

que é definida positiva se, e somente se, $Q > 0$ e $R - S'Q^{-1}S > 0$. Definindo uma matriz invertível T

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S'Q^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

cujos autovalores são todos iguais a um, tem-se

$$R = T \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} T' \quad (\text{A.6})$$

Portanto conclui-se que (A.3) é verdadeira se, e somente se, $R > 0$, ou seja, se (A.2) for satisfeita. ■

Permutando linhas e colunas em (A.3), e seguindo o mesmo procedimento, é possível mostrar que (A.3) é equivalente a

$$R > 0, \quad Q > SR^{-1}S' \quad (\text{A.7})$$

A.3 Prova do Lema de Finsler

Esse resumo da prova segue os passos dados em [12].

i) → *ii*) $w' \mathcal{Q} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B} w = 0$. Todo w tal que $\mathcal{B} w = 0$ pode ser reescrito como $w = \mathcal{B}^\perp y$. Consequentemente pode-se escrever *i*) como $y' \mathcal{B}^\perp{}' \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp y < 0$, para todo $y \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}^\perp{}' \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp < 0$

ii) → *i*) Da mesma forma pré e pós multiplicando *ii*) por y' e y respectivamente tem-se *i*).

iii), *iv*) → *ii*) Multiplicando-se *iii*) ou *iv*) à direita por \mathcal{B}^\perp e a esquerda por $\mathcal{B}^\perp{}'$ obtém-se *ii*).

ii) → *iii*) Assuma que *ii*) é verificada. Particionando \mathcal{B} em duas matrizes com *rank* completo $\mathcal{B} = \mathcal{B}_l \mathcal{B}_r$, definindo uma matriz $\mathcal{D} = \mathcal{B}_r' (\mathcal{B}_r \mathcal{B}_r')^{-1} (\mathcal{B}_l' \mathcal{B}_l)^{1/2}$ e aplicando a transformação de congruência, dada por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}' \\ \mathcal{B}^\perp{}' \end{bmatrix} [\mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}' \mathcal{B}] \begin{bmatrix} \mathcal{D} \\ \mathcal{B}^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}' \mathcal{Q} \mathcal{D} - \mu I & \mathcal{D}' \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp \\ \mathcal{B}^\perp{}' \mathcal{Q} \mathcal{D} & \mathcal{B}^\perp{}' \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp \end{bmatrix} < 0$$

Como o segundo bloco da diagonal é negativo, por definição, então existe um μ suficientemente grande tal que a matriz é definida negativa.

iv) → *iii*) Basta escolher $\mathcal{X} = \frac{-\mu}{2} \mathcal{B}'$