

RICHARD DE SOUZA COSTA

**UM ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
APLICADO À FLEXÃO DE VIGAS**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mario Conrado Cavichia

**CAMPINAS
2010**

Um Estudo de Equações Diferenciais Aplicado à Flexão de Vigas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Richard de Souza Costa e aprovado pela comissão julgadora.

Campinas, 04 de dezembro de 2010



Prof. Dr. Mario Conrado Cavichia

Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Mario Conrado Cavichia – FEC/UNICAMP

Prof. Dr. Pêrsio Leister de Almeida Barros – FIC/UNICAMP

Prof. Dr. Francisco Antônio Menezes – FEC/UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Costa, Richard de Souza

C823e Um estudo de equações diferenciais aplicado à flexão de vigas/Richard de Souza Costa-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador: Mario Conrado Cavichia

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais. 2. Aplicações (Matemática). 3. Flexão (Engenharia Civil). 4. Vigas. 5. Elasticidade. I. Cavichia, Mario Conrado. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título

Título em inglês: A study of differential equations applied to the flexion of beams

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential equations. 2. Applications (Mathematics). 3. Flexure. 4. Beams. 5. Elasticity.

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Mario Conrado Cavichia (FEC - UNICAMP)
Prof. Dr. Pérsio Leister de Almeida Barros (FEC - UNICAMP)
Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes (FEC - UNICAMP)

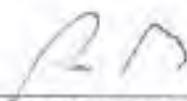
Data da defesa: 04/10/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 04 de outubro de 2010
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof. (a). Dr (a). MARIO CONRADO CAVICHIA



Prof. (a). Dr (a). PERSIO LEISTER DE ALMEIDA BARROS



Prof. (a). Dr (a). FRANCISCO ANTONIO MENEZES

Dedico este trabalho aos meus pais, Altamiro e Irene, por todo exemplo de garra, força e perseverança que sempre me dedicaram e a meu filho Arthur, que chegou agora, mas que já faz parte da construção desse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, o ser soberano, que me deu o dom da vida e proporcionou que eu realizasse o sonho de estar desfrutando deste momento.

Agradeço ao Prof. Dr. Mario Conrado Cavichia por ter tido a paciência, compreensão e dedicar tamanha sabedoria em conduzir e me orientar neste trabalho, muito obrigado.

Agradeço à Prof^ª. Dra. Sueli Costa por ter encarado a coordenação de um projeto de tamanha envergadura e me mostrar o caminho frente aos obstáculos que tive que enfrentar, muito obrigado.

Agradeço aos professores que ministraram as disciplinas, com os quais aprendi muito e levarei uma visão totalmente diferente da matemática que devemos transmitir aos alunos, muito obrigado.

Agradeço aos colegas de turma desse mestrado, que muito contribuíram, enfrentando exaustivas viagens e listas, mas juntos vencemos, muito obrigado.

Agradeço, dentre os colegas, em especial, aqueles caminhamos juntos não somente no mestrado, mas em nosso dia a dia no Campus Universitário da UNEMAT de Barra do Bugres, muito obrigado.

Agradeço à UNEMAT e à UNICAMP pela parceria que deu certo e me fez dela um dos frutos;

Agradeço à Escola CESC e à Escola 15 de Outubro que compreenderam a importância deste momento para mim e me apoiaram nas horas que necessitei estar ausente, muito obrigado.

Agradeço à minha família, que mesmo à distância deu apoio e encorajou a continuar a caminhada, muito obrigado aos meus pais, Irene e Altamiro, minhas irmãs Luciane e Larissa, meu avô Lucio Theodoro, meu cunhado Junior e sobrinho Igor, muito obrigado.

Agradeço à Edelvânia Silva Netto por cuidar com tanto carinho do nosso filho amado Arthur nos momentos que estive ausente, muito obrigado.

Agradeço a todas as pessoas que participaram, contribuindo para a realização deste trabalho, direta ou indiretamente, muito obrigado.

RESUMO

Grande parte da teoria estudada em engenharia civil é permeada de conceitos matemáticos; desde à geometria analítica, passando pela álgebra linear, pelo cálculo diferencial e integral. O estudo de aplicações de equações diferenciais ordinárias compõe o objetivo principal deste trabalho, centrado nossos exemplos na flexão de vigas. Este trabalho visa a confecção de um texto que auxilie no ensino de equações diferenciais em cursos de engenharia e arquitetura, descrevendo a relação existente entre conceitos puramente matemáticos e um tópico muito estudado quando da apresentação da fundamentação para a formação de um engenheiro ou arquiteto.

PALAVRAS CHAVES: Equações diferenciais – Aplicações (Matemática) – Flexão (Engenharia Civil e Arquitetura) – Vigas – Elasticidade.

ABSTRACT

Much of the theory studied in civil engineering is fraught with mathematical concepts, since the analytic geometry, through linear algebra, the differential and integral calculus. The study of applications of ordinary differential equations comprise the main objective of this work by focusing our examples on the bending of beams. This paper aims to elaborate a text to aid in the teaching of differential equations in engineering and architecture, describing the relationship between purely mathematical concepts and a much studied topic when submitting the reasons for the formation of an engineer or architect.

KEYWORDS: Differential equations - Applications (Mathematics) - Flexing (Civil Engineering and Architecture) - Beams – Elasticity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Representação Gráfica do Momento Estático de um Elemento	34
Figura 2.2 Representação Gráfica do Momento Estático de uma Superfície	34
Figura 2.3 Representação gráfica do Centro de Gravidade de uma Superfície	35
Figura 2.4 Representação gráfica do Centro de Gravidade de várias figuras	36
Figura 2.5 Representação gráfica da figura do Exemplo 1	36
Figura 2.6 Representação gráfica do Momento de inércia de uma Superfície	37
Figura 2.7 Representação gráfica para o Exemplo 2.a	39
Figura 2.8 Representação Gráfica para o Exemplo 2.b	39
Figura 2.9 Representação Gráfica para o Exemplo 3	40
Figura 2.10 Módulo Resistente de uma Superfície Plana	41
Figura 3.1 Barra prismática em tração	45
Figura 3.2 Diagrama de tensão-deformação para um aço estrutural típico em tração (sem escala)	48
Figura 3.3 Lei de Hooke para três tensões normais	51
Figura 3.4 Representação Gráfica para o Exemplo 1	51
Figura 3.5 Ilustração da tensão de cisalhamento duplo em uma conexão parafusada	52
Figura 3.6 Conexão parafusada em que o parafuso é carregado por cisalhamento duplo	52
Figura 4.1 Representação de uma Viga em 3D	55
Figura 4.2 Apoio Móvel	57
Figura 4.3 Apoio Fixo	57
Figura 4.4 Engastamento	58

Figura 4.5 Modelo de Estrutura Hipostática	59
Figura 4.6 Modelo de Estrutura Isostática	59
Figura 4.7 Modelo de Estrutura Hiperestática	60
Figura 4.8 Viga simplesmente apoiada submetida à uma carga concentrada transversal ao seu eixo longitudinal	61
Figura 4.9 Viga em balanço submetida à carga concentrada na extremidade livre	61
Figura 4.10 Viga Simples em Balanço	62
Figura 4.11 Carga Uniformemente Distribuída	62
Figura 4.12 Carga Distribuída Variável	63
Figura 4.13 Representação Gráfica para o Exemplo 1	63
Figura 4.14: Flexão em uma viga engastada	66
Figura 4.15 Curva de deflexão de uma viga.	67
Figura 4.16 Esforços atuantes em um elemento infinitesimal	70
Figura 4.17 Condições de contorno em apoio simples	72
Figura 4.18 Condições de contorno no engaste	72
Figura 4.19 Condições de continuidade no ponto C	73
Figura 5.1 Viga biapoiada com uma carga uniformemente distribuída	75
Figura 5.2 Linha elástica de viga engastada com um carregamento uniforme	78
Figura 5.3 Viga simplesmente apoiada com carregamento triangular distribuído	80
Figura 5.4 Viga simplesmente apoiada submetida à força concentrada em um ponto qualquer da viga	82
Figura 5.5 Viga simples em balanço submetida à força concentrada em uma das extremidades da viga	85

SUMÁRIO

Introdução	01
1. Equações Diferenciais	03
1.1 Classificações das Equações Diferenciais	03
1.1.1 Classificação por Tipo	04
1.1.2 Classificação por Ordem	04
1.1.3 Classificação por Linearidade	05
1.1.4 Sistemas de Equações Diferenciais	07
1.2 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	07
1.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem	14
1.3.1 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes	15
1.3.2 Equações Não-homogêneas com Coeficientes Constantes	24
1.4 Equações Lineares de Ordem mais alta	30
1.4.1 Teoria Geral para equações Lineares de ordem n	30
2. Figuras Geométricas e Esforços Solicitantes	33
2.1 Propriedades Geométricas de Figuras Planas	33
2.1.1 Área	33
2.1.2 Momento Estático	33
2.1.3 Centro de Gravidade	35
2.1.4 Momento de Inércia	37
2.1.4.1 Translação de Eixos	38
2.1.4.2 Produto de Inércia ou Momento Centrífugo	40
2.1.5 Módulo Resistente	41
2.2 Esforços Solicitantes	42
2.2.1 Classificação dos Esforços Solicitantes	42
2.2.2 Convenção de Sinais	44
3. Tensões e Deformações	45
3.1 Elasticidade Linear, Lei de Hooke e Coeficiente de Poisson	49
3.2 Tensão e Deformação de Cisalhamento	52

4.	Linha Elástica de Vigas	55
4.1	Elementos da Estática	55
4.1.1	Forças no Plano	55
4.1.2	Equilíbrio de um Ponto Material	56
4.1.3	Resultante de uma Força	56
4.2	Tipos de Apoios	57
4.3	Tipos de Estruturas	58
4.4	Tipos de Vigas e Cargas	61
4.5	Forças de Cisalhamento e Momentos Fletores	65
4.6	Equações Diferenciais da Linha Elástica	66
5.	Estudo de Casos	75
	Conclusão	91
	Bibliografia	93

INTRODUÇÃO

O estudo das equações diferenciais atraiu a atenção dos maiores matemáticos do mundo durante os três últimos séculos. Apesar disso, continua sendo uma área de pesquisa dinâmica hoje em dia, com muitas questões interessantes em aberto. Para alguns estudantes, o interesse intrínseco do assunto é motivação suficiente, mas, para a maioria, as possíveis aplicações importantes em outros campos é o que faz com que tal estudo valha a pena.

Uma das aplicações constantes de equações diferenciais é o estudo do comportamento de corpos sólidos sujeitos a diversos tipos de carregamentos e entre esses corpos, podemos incluir as vigas que são elementos estruturais projetados para suportar diversas cargas em sua extensão.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar aplicações de equações diferenciais no estudo sobre flexões de vigas, descrevendo a relação existente entre uma ferramenta matemática e um elemento da mecânica dos materiais.

No Capítulo 1 apresentaremos um estudo sucinto de equações diferenciais, enfatizando conceitos necessários para o uso correto desta ferramenta matemática enquanto matéria prima para o estudo que estamos propondo fazer; no segundo capítulo, apresentaremos a base para o estudo de vigas. O dimensionamento e a verificação da capacidade resistente de qualquer elemento estrutural dependem de grandezas chamadas tensões, as quais se distribuem ao longo das seções transversais de um corpo. Daí vem a necessidade de se conhecer claramente as características ou propriedades das figuras geométricas que formam essas seções transversais. E este é o propósito do capítulo 2. Já no terceiro capítulo, apresentamos uma síntese sobre tensões e deformações a que estão sujeitos os elementos estruturais e entre eles, as vigas, principal objeto de estudo deste trabalho. No quarto capítulo, discutimos e apresentamos equações diferenciais que regem o comportamento de equilíbrio dessas estruturas, com o propósito de modelar este comportamento, bem como apresentar o papel das equações diferenciais nestas estruturas. Finalizamos com o quinto capítulo, formado por estudo de casos, onde exemplificamos as relações até então estudadas.

1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações envolvendo a taxa segundo a qual mudanças ocorrem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são Equações Diferenciais. Uma equação diferencial que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de modelo matemático do processo.

Apresentaremos um texto básico sobre equações diferenciais enfocando seu estudo qualitativo, em que se toma a atitude de extrair das equações informações sobre o comportamento de suas soluções, o que se justifica pelo fato de que o número de equações que podem ser resolvidas em termos de funções elementares, sem a utilização de métodos numéricos, é relativamente pequeno. Segundo Boyce & DiPrina (2006), esse estudo qualitativo das soluções é característico da fase moderna da teoria das equações diferenciais ordinárias. As aplicações em engenharia e outras ciências, como a Biologia e a Física, necessitam de uma prévia análise qualitativa das equações diferenciais ordinárias ou parciais que as modelam como forma de se verificar se as soluções estão de acordo com o problema que motivou o modelo.

DEFINIÇÃO 1 *Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação da forma*
$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Utilizam-se diferentes notações para apresentar uma equação diferencial ordinária. As mais comuns são aquelas que aparecem nos exemplos de equações diferenciais ordinárias a seguir:

$$\frac{dy}{dt} + 5y = e^t \qquad y' + 5y = e^t$$

1.1 Classificações das Equações Diferenciais

As Equações Diferenciais se classificam por tipo, ordem e linearidade.

1.1.1 Classificação por Tipo

Se uma equação contiver somente derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, ela será chamada de equação diferencial ordinária (EDO).

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

são exemplos equações diferenciais ordinárias.

Uma equação que envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial (EDP).

Por exemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x}$$

1.1.2 Classificação por Ordem

A ordem de uma equação diferencial (EDO ou EDP) é a ordem da maior derivada na equação.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$$

é um exemplo de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Em símbolos, podemos expressar uma equação diferencial ordinária de ordem n em uma variável dependente na forma geral:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (1.1)$$

onde F é uma função de valores reais de $n + 2$ variáveis $(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ e onde

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

1.1.3 Classificação por Linearidade

Uma classificação crucial de equações diferenciais é se elas são lineares ou não. Dizemos que uma equação diferencial ordinária de ordem n é linear se F é uma função linear das variáveis $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. Isso significa que uma equação diferencial ordinária linear de n -ésima ordem pode ser colocada na forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x) \quad (1.2)$$

Nesta equação observamos as duas propriedades características de uma equação linear: primeiramente, a variável dependente e todas as suas derivadas são funções de primeiro grau. Segundo, cada coeficiente depende no máximo da variável independente x . As equações

$$(y-x)dx + 4xdy = 0 \quad y'' - 2y' + y = 0 \quad \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

são, respectivamente, equações diferenciais ordinárias lineares de primeira, segunda e terceira ordem. Uma equação diferencial ordinária que não obedece a definição acima é dita não-linear.

DEFINIÇÃO 2 *Uma equação linear de segunda ordem, ou superior, é dita homogênea se a função $g(x)$ de (1.2) for identicamente nula. Caso contrário, a equação é dita não-homogênea.*

Agora classificadas, vamos considerar o conceito de solução de uma equação diferencial ordinária:

DEFINIÇÃO 3 *Solução de uma EDO: Toda função ϕ , definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I , as quais quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem n reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma solução da equação diferencial no intervalo.*

Em outras palavras, uma solução de uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma função ϕ que tem pelo menos n derivadas e para a qual $F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$ para todo x em I .

Não podemos pensar em solução de uma equação diferencial ordinária sem, simultaneamente, pensar em intervalo. O Intervalo I da *definição 2* é alternativamente conhecido por intervalo de definição, intervalo de existência, intervalo de validade ou domínio da solução.

Associados a $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ podem existir condições cujo número coincide com a ordem da equação diferencial ordinária. Se tais condições se referem a um único valor de x do intervalo de definição, tem-se um **Problema de Valor Inicial (PVI)**, caso contrário tem-se um **Problema de Valor de Contorno ou Fronteira**.

EXEMPLO 1 Considere o seguinte PVI de ordem dois:

$$\begin{cases} y'' = 3y' - 2y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Pretende-se encontrar funções $y(x)$ que satisfaçam a equação diferencial dada e que verifique as condições iniciais fixadas.

Várias aplicações físicas levam, muitas vezes a um problema de valores de contorno e um exemplo que podemos citar é a equação $u_{tt} + bu_t + ku = a^2 u_{xx} + F(x, t)$ onde $a^2 > 0$, $c \geq 0$ e $k \geq 0$ são constantes, conhecida como **equação do telégrafo** e aparece no estudo de uma corda elástica sob tensão.

Para resolver um problema de valor de contorno precisamos encontrar uma função $y = \phi(x)$ que satisfaça a equação diferencial no intervalo $I = [\alpha, \beta]$ e que tenha valores especificados y_0 e y_1 , nos extremos do intervalo.

As soluções dos problemas de valor inicial e de contorno diferem sob aspectos importantes. Os problemas de valor inicial têm, certamente, uma única solução. Já os problemas de valores de contorno podem ter uma única solução, mas podem, também, não ter solução ou, em alguns casos, ter uma infinidade de soluções. Sob esse aspecto, problemas de contorno lineares se assemelham a equações algébricas lineares.

1.1.4 Sistemas de Equações Diferenciais

Outra classificação de equações diferenciais depende do número de funções desconhecidas. Se existe uma única função a ser determinada, uma equação é suficiente. Se existem, no entanto, duas ou mais funções que devem ser determinadas, precisamos de um sistema de equações. Em um sistema de equações diferenciais ordinárias duas ou mais equações envolvem as derivadas de duas ou mais funções incógnitas de uma única variável independente. Por exemplo, se x e y denotarem variáveis dependentes e t denotar a variável independente, um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem será dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \end{cases}$$

Uma solução para este tipo de sistema é um par de funções diferenciáveis $x = \phi_1(t)$ e $y = \phi_2(t)$ definidas em um intervalo comum I , que satisfazem cada equação do sistema nesse intervalo.

1.2 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Vamos trabalhar agora com equações diferenciais de primeira ordem, $y'(x) = f(x, y)$ onde f é uma função de duas variáveis dada. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaça essa equação para todo x em algum intervalo é dita uma solução dessa equação.

A equação geral de primeira ordem é

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.3)$$

Vamos considerar uma subclasse de equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por um processo de integração direta. Para identificar essa classe, vamos primeiro observar a equação (1.3) na forma

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.4)$$

É sempre possível fazer isso definindo $M(x, y) = -f(x, y)$ e $N(x, y) = 1$, porém podem haver outras maneiras, como, por exemplo, no caso em que M depende apenas de x e N depende apenas de y , quando a equação (1.4) fica

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.5)$$

Essa equação é dita separável, porque, se for escrita na forma diferencial

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (1.6)$$

então, caso queira, as parcelas envolvendo cada variável podem ser separadas pelo sinal de igualdade.

Uma equação separável pode ser resolvida integrando-se as funções M e N . Ilustraremos essa resolução primeiramente através de um exemplo e depois apresentaremos uma solução mais geral para a equação (1.5).

EXEMPLO 2 Mostre que a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} \quad (1.7)$$

é separável e encontre uma equação para suas integrais.

SOLUÇÃO

Se escrevermos a equação (1.7) na forma

$$-x^2 + (1-y^2) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.8)$$

então ela tem a forma (1.5) e é, portanto, separável. A seguir, note que a primeira parcela de (1.8) é a derivada de $-\frac{x^3}{3}$ e que a segunda, pela regra da cadeia, é a derivada

em relação a x de $y - \frac{y^3}{3}$. Assim, a equação (1.8) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{3} \right) + \frac{d}{dy} \left(y - \frac{y^3}{3} \right) = 0, \text{ logo, } \frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3} \right) = 0$$

portanto, integrando, obtemos

$$-x^3 + 3y - y^3 = c \quad (1.9)$$

onde c é uma constante arbitrária.

Assim, qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação (1.9) é uma solução da equação (1.7).

Esse mesmo procedimento utilizado na resolução do exemplo anterior pode ser seguido, essencialmente, para qualquer equação separável. Voltando à equação (1.5), sejam H_1 e H_2 primitivas de M e N , respectivamente. Então

$$H_1'(x) = M(x) \qquad H_2'(y) = N(y) \qquad (1.10)$$

e a equação (1.5) fica

$$H_1'(x) + H_2'(y) \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (1.11)$$

Pela regra da cadeia,

$$H_2'(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} H_2(y) \qquad (1.12)$$

Assim, podemos escrever a equação (1.11) na forma

$$\frac{d}{dx} [H_1(x) + H_2(y)] = 0 \qquad (1.13)$$

E integrando a equação (1.13), obtemos

$$H_1(x) + H_2(y) = c \qquad (1.14)$$

onde c é uma constante arbitrária.

Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaça a equação (1.14) é uma solução da equação (1.5). Na prática, a equação (1.14) é obtida da equação (1.6), em geral, integrando-se a primeira parcela em relação a x e a segunda em relação a y .

Se além da equação diferencial, é dada uma condição inicial

$$y(x_0) = y_0 \qquad (1.15)$$

então a solução da equação (1.5) que satisfaz essa condição é obtida fazendo-se $x = x_0$ e $y = y_0$ na equação (1.14). Isso implica que

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0) \qquad (1.16)$$

Substituindo esse valor de c na equação (1.14) e observando que

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^x M(s) ds \qquad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^y N(s) ds$$

obtemos

$$\int_{x_0}^x M(s)ds + \int_{y_0}^y N(s)ds \quad (1.17)$$

A equação (1.17) é uma representação implícita da solução da equação diferencial (1.5) que também satisfaz a condição inicial (1.15).

EXEMPLO 3 Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1 \quad (1.18)$$

e determine o intervalo no qual a solução existe.

SOLUÇÃO

A equação diferencial pode ser escrita como $2(y-1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$. Integrando a expressão à esquerda do sinal de igualdade em relação a y e a expressão à direita em relação a x , obtemos

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c \quad (1.19)$$

onde c é uma constante arbitrária. Para determinar a solução que satisfaz a condição inicial dada, substituímos os valores $x = 0$ e $y = -1$ na equação (1.19), obtemos $c = 3$. Portanto a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \quad (1.20)$$

Para obter a solução explicitamente, precisamos resolver a equação (1.20) para y em função de x . Como a equação (1.20) é quadrática na variável y , utilizando a fórmula de resolução deste tipo de equação e obtemos

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad (1.21)$$

A equação (1.21) fornece duas soluções da equação diferencial, mas apenas uma delas, satisfaz a condição inicial dada. Essa é a solução correspondente ao sinal negativo na equação (1.21), pois se a solução com sinal positivo for escolhido, então obteremos a solução da mesma equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 3$. Sendo assim,

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad (1.22)$$

Para determinar o intervalo no qual essa solução é válida, precisamos encontrar o intervalo no qual a quantidade interna à raiz quadrada é positiva. O único zero real dessa expressão é $x = -2$, logo o intervalo desejado é $x > -2$.

Outra classe de equações de primeira ordem $y'(x) = f(x, y)$ que vamos trabalhar são aquelas onde função f depende linearmente da variável y , então a equação é chamada de equação diferencial ordinária linear de primeira ordem, ou simplesmente, equação linear de primeira ordem. Em um contexto geral, a equação linear de primeira ordem pode ser escrita como:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \quad (1.23)$$

onde p e g são funções dadas da variável x .

Sejam p e g funções contínuas e suponha uma função não-nula $u(x)$. Multipliquemos a equação (1.23) por $u(x)$.

$$u(x)y'(x) + u(x)p(x)y(x) = u(x)g(x)$$

Somando e subtraindo $u'(x)y(x)$ no primeiro membro, obtemos

$$u(x)y'(x) + u'(x)y(x) - u'(x)y(x) + u(x)p(x)y(x) = u(x)g(x)$$

Assumindo que $-u'(x)y + u(x)p(x)y(x) = 0$

teremos,

$$u(x)y'(x) + u'(x)y(x) = u(x)g(x)$$

e daí, $(u(x)y(x))' = u(x)g(x)$.

Como agora a equação diferencial é separável, temos

$$u(x)y'(x) = \int u(x)g(x)dx + c$$

logo, a solução será

$$y(x) = u^{-1}(x) \int u(x)g(x)dx + cu^{-1}(x)$$

Para determinarmos $u(x)$, temos que levar em consideração o fato de que, ao assumir uma condição, a mesma deve ser obedecida, logo, de

$$-u'(x)y(x) + u(x)p(x)y(x) = 0 \Rightarrow y(x)(-u'(x) + u(x)p(x)) = 0 \Rightarrow -u'(x) + u(x)p(x) = 0$$

$$\text{daí, } u'(x) = u(x)p(x) \Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = p(x)$$

Assim, obtemos novamente uma equação diferencial de primeira ordem separável, logo, integrando os dois lados da igualdade, obtemos

$$\ln u(x) = \int p(x)dx \Rightarrow u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Quando a equação linear de primeira ordem não tem com coeficientes constantes, uma das opções para resolução é um método devido à Leibniz¹, conhecido como Método dos Fatores Integrantes que envolve multiplicar a equação diferencial por uma determinada função $\mu(x)$, escolhida de forma que a equação resultante se torne facilmente integrável. A função $\mu(x)$ é chamada fator integrante e a maior dificuldade desse método é saber como encontrá-la.

Considerando que o tema deste trabalho concentra-se em equações diferenciais ordinárias lineares, é pertinente citarmos sobre a existência e a unicidade de soluções para esse tipo de equação. Mais que isso, falar sobre soluções e família de soluções de uma equação diferencial, vale ressaltar as duas definições a seguir.

DEFINIÇÃO 4 Qualquer conjunto y_1, y_2, \dots, y_n de n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem em um intervalo I é chamado de **conjunto fundamental de soluções** no intervalo.

DEFINIÇÃO 5 Sejam y_1, y_2, \dots, y_n n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem em um intervalo I . A **solução geral** para a equação no intervalo é definida por

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

Ao nos deparar com um PVI durante algum dos problemas que serão levantados poderemos querer saber se ele tem solução antes de gastar tempo e esforço para resolvê-lo. Além disso, ao encontrarmos a solução, será útil saber se devemos continuar procurando outras soluções possíveis ou se pode ter certeza que não existem outras soluções. Para equações lineares, nossos questionamentos são respondidos pelo seguinte teorema:

¹ Gottfried Leibniz (1646 - 1716) - Matemático e Filósofo alemão e notável pensador que desenvolveu um novo método de cálculo chamado Cálculo Diferencial. Disputou com o físico inglês Isaac Newton (1642 - 1727) a glória dessa descoberta; de fato eles a desenvolveram simultânea e independente.

TEOREMA 1 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO DE UM PVI:

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto $I = (\alpha, \beta)$ contendo o ponto $x = x_0$, então existe uma única função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (1.24)$$

para cada x em I e que também satisfaça a condição inicial

$$y(x_0) = y_0, \quad (1.25)$$

onde y_0 é um valor inicial arbitrário prescrito.

DEMONSTRAÇÃO

Primeiramente, considerando a equação (1.24), onde p e g são funções dadas, devemos determinar um fator integrante apropriado e, para isso, multiplicamos esta equação por uma função $\mu(x)$ ainda indeterminada, obtendo

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + p(x)\mu(x)y = \mu(x)g(x) \quad (1.26)$$

Vemos que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na equação (1.26) é a derivada do produto $\mu(x)y$, desde que $\mu(x)$ satisfaça a equação

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x)\mu(x) \quad (1.27)$$

supondo $\mu(x)$ positiva, temos

$$\frac{d\mu(x)/dx}{\mu(x)} = p(x),$$

e, portanto,

$$\ln \mu(x) = \int p(x)dx + k.$$

Escolhendo a constante arbitrária k como zero, obtemos a função mais simples possível para $\mu(x)$, a saber,

$$\mu(x) = \exp \int p(x)dx \quad (1.28)$$

Vale notar que, por suposição, $\mu(x)$ é positiva para todo x . Voltando à equação (1.26), temos

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)g(x) \quad (1.29)$$

portanto,

$$\mu(x)y = \int \mu(x)g(x)dx + c, \quad (1.30)$$

onde c é uma constante arbitrária.

Assim, vemos que, a equação (1.24) tem solução e esta é dada pela equação (1.30). Como $p(x)$ é contínua para $\alpha < x < \beta$, $\mu(x)$ está definida nesse intervalo e é uma função diferenciável não-nula. Substituindo a fórmula para y dada pela equação (1.30) na equação (1.24) ou na equação (1.29), verificamos que y satisfaz a equação diferencial no intervalo $\alpha < x < \beta$ e, finalmente, a condição inicial (1.25) determina a constante c de maneira única, de modo que existe apenas uma solução do problema de valor inicial, completando então a demonstração.

1.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

onde f é alguma função dada. Ela é dita linear se a função f tem a forma

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y,$$

isto é, se f é linear em y e y' . Assim, podemos reescrever uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem como:

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x) \quad (1.31)$$

onde a linha denota diferenciação em relação a x .

Um problema de valor inicial consiste em um sistema do tipo:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

onde y_0 e y'_0 são valores dados.

Vale notar que as condições iniciais para uma equação de segunda ordem não indicam apenas um ponto particular (x_0, y_0) que tem que pertencer ao gráfico da

solução, mas também o coeficiente angular y'_0 da reta tangente ao gráfico naquele ponto.

Para efeito de nosso trabalho com flexão de vigas, vamos concentrar nossa atenção em equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem com coeficientes constantes ou, simplesmente, equações de segunda ordem com coeficientes constantes, ou seja, considerando na equação geral $p(x) = a$, $q(x) = b$ e $r(x) = c$. Assim, nossa equação torna-se:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1.32)$$

Equações de segunda ordem com coeficientes constantes homogêneas ou

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (1.33)$$

Equações de segunda ordem com coeficientes constantes não-homogêneas onde a , b e c são constantes dadas.

1.3.1 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Para efeito de familiarização vamos exemplificar através da solução de um PVI

EXEMPLO 4 Considere o PVI:

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Na equação dada, temos $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$. Nela procuramos uma função com a propriedade de que a derivada segunda seja igual a ela mesma. Podemos atentar para uma função bem conhecida do cálculo, a saber, a função exponencial $y_1(x) = e^x$ que possui essa propriedade, assim como $y_2(x) = e^{-x}$. A partir daí, segue que a combinação linear dessas funções também é solução, ou seja $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ quaisquer sejam os valores de c_1 e c_2 . Como consequência disso, essa expressão representa uma família infinita de soluções para a equação diferencial do PVI.

Considerando as condições iniciais, procuramos a solução cujo gráfico contém o ponto $(0, 2)$ e tal que o coeficiente angular da tangente ao gráfico nesse ponto seja -1 .

Vamos resolver o PVI citado. Sendo $y(0) = 2$, temos $x = 0$ e $y = 2$, assim,

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \Rightarrow 2 = c_1 e^0 + c_2 e^{-0} \Rightarrow c_1 + c_2 = 2 \quad (1.34)$$

Derivando a equação, obtemos:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \Rightarrow y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} \quad (1.35)$$

E recorrendo novamente às condições iniciais, observamos que $y'(0) = -1$, ou seja, se $x = 0$, então $y' = -1$, logo,

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} \Rightarrow -1 = c_1 e^0 - c_2 e^{-0} \Rightarrow c_1 - c_2 = -1 \quad (1.36)$$

Obtemos assim o sistema de equações lineares $\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - c_2 = -1 \end{cases}$ e, resolvendo-o,

obtemos $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = \frac{3}{2}$. Substituindo na equação de $y(x)$, teremos:

$$y(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{3}{2} e^{-x} \quad (1.37)$$

a solução geral do PVI proposto.

Pelo que observamos no desenvolvimento do PVI do exemplo proposto, vamos voltar à equação mais geral com coeficientes constantes reais e arbitrários e procurar também soluções exponenciais para a mesma.

Seja $ay'' + by' + cy = 0$ com $a, b, c \in \mathfrak{R}$. Suponhamos que $y(x) = e^{rx}$, onde r é um parâmetro a ser determinado. Segue que $y'(x) = re^{rx}$ e $y''(x) = r^2 e^{rx}$ e daí,

$$ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0 \quad (1.38)$$

Como $e^{rx} \neq 0$, então $ar^2 + br + c = 0$. Esta equação é chamada de equação característica da equação inicial e seu significado está no fato de que, se r é uma raiz dela, então $y(x) = e^{rx}$ é solução da equação diferencial proposta, uma vez que r validaria a identidade da mesma.

Como a equação característica é de segundo grau, vamos considerar suas raízes r_1 e r_2 e a partir daí, podemos ter três casos distintos:

1º caso *Raízes reais e distintas* ($r_1 \neq r_2$): Considerando que duas soluções da equação diferencial são representadas por $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$, como observamos no exemplo citado, $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ também é solução da equação. Para verificarmos

isso, basta encontrarmos $y''(x)$ e $y'(x)$ de acordo com a solução proposta e verificarmos a validade da identidade da equação diferencial. Assim,

$$\begin{aligned}y(x) &= c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ \Rightarrow y'(x) &= c_1 r_1 e^{r_1 x} + c_2 r_2 e^{r_2 x} \\ \Rightarrow y''(x) &= c_1 r_1^2 e^{r_1 x} + c_2 r_2^2 e^{r_2 x}\end{aligned}$$

Substituindo esses valores na expressão $ay''+by'+cy$, obtemos:

$$\begin{aligned}ay''+by'+cy &= a(c_1 r_1^2 e^{r_1 x} + c_2 r_2^2 e^{r_2 x}) + b(c_1 r_1 e^{r_1 x} + c_2 r_2 e^{r_2 x}) + c(c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}) \\ &= ac_1 r_1^2 e^{r_1 x} + ac_2 r_2^2 e^{r_2 x} + bc_1 r_1 e^{r_1 x} + bc_2 r_2 e^{r_2 x} + cc_1 e^{r_1 x} + cc_2 e^{r_2 x} \\ &= c_1 e^{r_1 x} (ar_1^2 + br_1 + c) + c_2 e^{r_2 x} (ar_2^2 + br_2 + c)\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, r_1 e r_2 são raízes da equação característica, portanto $ar_1^2 + br_1 + c = 0$ e $ar_2^2 + br_2 + c = 0$, logo, $ay''+by'+cy = 0$, mostrando assim que $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ é solução da equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes quando r_1 e r_2 são raízes distintas da equação característica, ou seja, o discriminante $b^2 - 4ac$ da equação $ar^2 + br + c = 0$ é maior que zero, como queríamos mostrar.

2º caso Raízes complexas conjugadas (r_1 e $r_2 \notin \mathfrak{R}$): quando isso acontece, estamos assumindo que, se considerarmos a equação característica $ar^2 + br + c = 0$, seu discriminante é negativo, ou seja, $b^2 - 4ac < 0$. Nesse caso as raízes são números complexos conjugados, que denotaremos por $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, onde $\lambda, \mu \in \mathfrak{R}$; $i = \sqrt{-1}$ e as expressões correspondentes para $y(x)$ são $y_1(x) = e^{(\lambda+i\mu)x}$ e $y_2(x) = e^{(\lambda-i\mu)x}$. Para atribuir significados a essas expressões, vamos definir a função exponencial complexa. Vamos recorrer ao cálculo de onde utilizaremos a série de Taylor².

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.39)$$

Nesta abordagem, vamos introduzir ix na definição, onde $i^2 = -1$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \quad -\infty < x < \infty \quad (1.40)$$

² Brook Taylor (1665 – 1731) foi um matemático britânico com grande trabalho para o desenvolvimento da matemática no século XVIII para a função exponencial em torno de $x = 0$.

Para n par, isto é, para $n = 2k$, para algum k inteiro,

$$i^n = i^{2k} = i^{2(k)} = (-1)^k \quad (1.41)$$

Enquanto que para n ímpar, isto é, $n = 2k + 1$, para algum k inteiro

$$i^n = i^{(2k+1)} = i^{2k} \cdot i^1 = (-1)^k \cdot i \quad (1.42)$$

assim,

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (1.43)$$

Onde separamos a soma em partes real e imaginária e pela série de Taylor, temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!} = \cos x \quad e \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sen} x \quad (1.44)$$

portanto, substituindo (1.44) em (1.43), obtemos:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad (1.45)$$

Essa equação é conhecida como *fórmula de Euler*, em referência a Leonhard Paul Euler (1707 – 1783)³.

A partir de agora, sempre que escrevermos e^{ix} , estaremos nos referindo à $\cos x + i \operatorname{sen} x$ e, portanto, devemos levar em consideração as variantes da fórmula de Euler, como por exemplo, substituindo x por $-x$ e lembrando que $\cos(-x) = \cos x$ e $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, temos:

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x \quad (1.46)$$

Considerando a validade das propriedades usuais da função exponencial para expoentes complexos, temos que:

$$e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x+i\mu x} = e^{\lambda x} \cdot e^{i\mu x} \quad (1.47)$$

Como $e^{i\mu x} = \cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x$, obtemos:

$$e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) = e^{\lambda x} \cos \mu x + i e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \quad (1.48)$$

Assim, as expressões correspondentes para $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são:

$$y_1(x) = e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) \quad (1.49)$$

³Leonhard Paul Euler (1707 – 1783), matemático e físico suíço, considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII.

$$y_2(x) = e^{\lambda x} (\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x) \quad (1.50)$$

Utilizando o fato de que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação $ay'' + by' + cy = 0$, então qualquer combinação linear de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ também é solução, temos:

$$\begin{aligned} y_1(x) + y_2(x) &= e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) + e^{\lambda x} (\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x) \\ &= e^{\lambda x} \cos \mu x + i e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x + e^{\lambda x} \cos \mu x - i e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \\ &= 2e^{\lambda x} \cos \mu x \end{aligned} \quad (1.51)$$

e

$$\begin{aligned} y_1(x) - y_2(x) &= e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) - e^{\lambda x} (\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x) \\ &= e^{\lambda x} \cos \mu x + i e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x - e^{\lambda x} \cos \mu x + i e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \\ &= 2i e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \end{aligned} \quad (1.52)$$

Logo, desprezando os fatores constantes 2 e $2i$, respectivamente, obtemos um par de soluções reais,

$$u(x) = e^{\lambda x} \cos \mu x \quad e \quad v(x) = e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \quad (1.53)$$

e a solução geral da equação $ay'' + by' + cy = 0$, com r_1 e $r_2 \notin \mathfrak{R}$ é:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \quad (1.54)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e pode ser escrita tão logo sejam conhecidos os valores de λ e μ .

3º caso Raízes reais e idênticas ($r_1 = r_2$) Esse caso ocorre quando o discriminante da equação característica $ar^2 + br + c = 0$ da equação diferencial linear ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes $ay'' + by' + cy = 0$ for igual a zero, ou seja, $b^2 - 4ac = 0$. Segue da fórmula para as soluções de uma equação do segundo grau que:

$$r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a} \quad (1.55)$$

e, conseqüentemente,

$$y_1 = y_2 = e^{rx} = e^{-\frac{b}{2a}x} \quad (1.56)$$

Para encontrarmos a solução geral da equação diferencial, precisamos de uma segunda solução que não seja múltiplo de $y_1(x)$. Para encontrá-la usaremos o método de D'Alembert⁴.

Sabemos que se $y_1(x)$ é solução da equação diferencial, então $cy_1(x)$ também o é para qualquer constante c . A idéia, usada por D'Alembert, foi generalizar essa observação, substituindo c por uma função $v(x)$ e depois determinar essa função de modo que o produto $v(x).y_1(x)$ também seja solução da equação.

Sendo assim, considerando (1.56), supomos que:

$$y(x) = v(x).y_1(x) = v(x).e^{\frac{b}{2a}x} \quad (1.57)$$

e, a partir daí, vamos encontrar $y'(x)$ e $y''(x)$ e substituí-los na equação diferencial para encontrarmos $v(x)$. Assim,

$$y'(x) = v'(x).e^{\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}.v(x).e^{\frac{b}{2a}x} \quad (1.58)$$

$$y''(x) = v''(x).e^{\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{a}.v'(x).e^{\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2}.v(x).e^{\frac{b}{2a}x} \quad (1.59)$$

E substituindo na equação diferencial $ay''+by'+cy = 0$, teremos:

$$\begin{aligned} a \left(v'' . e^{\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{a} . v' . e^{\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2} . v . e^{\frac{b}{2a}x} \right) + b \left(v' . e^{\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a} . v . e^{\frac{b}{2a}x} \right) + c . v . e^{\frac{b}{2a}x} &= 0 \\ a . v'' . e^{\frac{b}{2a}x} - b . v' . e^{\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a} . v . e^{\frac{b}{2a}x} + b . v' . e^{\frac{b}{2a}x} - \frac{b^2}{2a} . v . e^{\frac{b}{2a}x} + c . v . e^{\frac{b}{2a}x} &= 0 \\ e^{\frac{b}{2a}x} \left(av'' + \frac{b^2}{4a} . v - \frac{b^2}{2a} . v + cv \right) &= 0 \end{aligned}$$

Como $e^{\frac{b}{2a}x} \neq 0$ para qualquer valor de x , então:

$$av'' + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) . v = 0 \quad (1.60)$$

⁴ Jean D.Alembert (1717.1783), matemático francês contemporâneo de Euler e conhecido, principalmente, por seu trabalho em mecânica e equações diferenciais.

Organizando a expressão entre parênteses, temos:

$$\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4.a.c}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Mas por hipótese do problema, $b^2 - 4ac = 0$, logo, $\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$ e daí,

voltando à (1.50), temos que:

$$a.v''(x) = 0$$

também por hipótese do problema, $a \neq 0$, logo,

$$v''(x) = 0 \quad (1.61)$$

Integrando os dois lados da igualdade de (1.61), obtemos:

$$\int v''(x)dx = \int 0dx \Rightarrow v'(x) = c_1 \quad (1.62)$$

e novamente recorrendo à integral dos termos da igualdade:

$$\int v'(x)dx = \int c_1 dx \Rightarrow v(x) = c_1 x + c_2 \quad (1.63)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Finalmente, substituindo (1.63) em (1.57), obtemos:

$$y(x) = c_1 x e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 e^{-\frac{b}{2a}x} \quad (1.64)$$

que é uma combinação linear de duas soluções, sendo elas:

$$y_1(x) = x e^{-\frac{b}{2a}x} \quad e \quad y_2(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}$$

Portanto, nesse caso, existe uma solução exponencial correspondente à raiz repetida, enquanto uma segunda solução é obtida multiplicando-se a solução exponencial por x .

Podemos então resumir os três resultados obtidos para equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes da seguinte forma:

Se r_1 e r_2 são raízes do polinômio característico correspondente, temos os seguintes casos de solução para $ay'' + by' + cy = 0$:

1. Se r_1 e r_2 são raízes reais distintas, então a solução geral da equação diferencial será:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad (1.65)$$

2. Se r_1 e r_2 são raízes complexas e conjugadas, então a solução geral da equação diferencial será:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \operatorname{sen} \mu x \quad (1.66)$$

3. Se r_1 e r_2 são raízes reais e iguais, então a solução geral é:

$$y(x) = c_1 x e^{\frac{b}{2a}x} + c_2 e^{\frac{b}{2a}x} \quad (1.67)$$

A partir desses resultados que acabamos de apresentar, vamos obter uma visão mais clara da estrutura de soluções de todas as equações lineares homogêneas de segunda ordem.

Ao desenvolver a teoria de equações diferenciais lineares, é conveniente usar a notação de operador diferencial. Sejam p e q funções contínuas em um intervalo aberto I , isto é, para $\alpha < x < \beta$. Então, para qualquer função ϕ duas vezes diferenciável em I , definimos o operador diferencial L pela fórmula

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi \quad (1.68)$$

Note que $L[\phi]$ é uma função em I . O valor de $L[\phi]$ em um ponto x é

$$L[\phi](x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x)$$

Como é de costume usar o símbolo y para denotar $\phi(x)$, escreveremos normalmente, essa equação na forma

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1.69)$$

Vamos supor que y_1 e y_2 são duas soluções da equação (1.70). Então, sabemos que podemos gerar mais soluções formando as combinações lineares de y_1 e y_2 . Esse resultado pode ser enunciado como um teorema

TEOREMA 2 (Princípio da Superposição) Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então a combinação linear $c_1 y_1 + c_2 y_2$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2 .

Esse teorema diz que, começando com apenas duas soluções da equação (1.69), podemos construir uma família duplamente infinita de soluções definida pela equação

$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. E nesse caso, fica a pergunta: *todas as soluções da equação (1.69) estão incluídas nessa equação ou podem existir soluções com formas diferentes?* Responderemos essa questão examinando se as constantes c_1 e c_2 podem ser escolhidas de modo que a solução satisfaça as condições $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_0'$. Essas condições fazem com que c_1 e c_2 satisfaçam as equações

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= y_0, \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= y_0' \end{aligned} \quad (1.70)$$

Resolvendo essas equações para c_1 e c_2 , encontramos

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{y_0 y_2'(x_0) - y_0' y_2(x_0)}{y_1(x_0) y_2'(x_0) - y_1'(x_0) y_2(x_0)}, \\ c_2 &= \frac{-y_0 y_1'(x_0) + y_0' y_1(x_0)}{y_1(x_0) y_2'(x_0) - y_1'(x_0) y_2(x_0)} \end{aligned} \quad (1.71)$$

ou, em termos de determinantes,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}} \quad e \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}} \quad (1.65)$$

Para que essas fórmulas façam sentido, é preciso que os denominadores sejam diferentes de zero. Ambas possuem o mesmo denominador, a saber

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0) y_2'(x_0) - y_1'(x_0) y_2(x_0) \quad (1.72)$$

O determinante W é chamado **determinante wronskiano**, ou, simplesmente, **wronskiano**, das soluções y_1 e y_2 . Observamos que o wronskiano depende das funções y_1 e y_2 e que é calculado em um ponto x_0 . Esse argumento estabelece o seguinte resultado

TEOREMA 3 Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da equação $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ e que o wronskiano não se anula no ponto x_0 . Então existe uma escolha das constantes c_1 e c_2 para as quais satisfaz a equação diferencial dada e as condições iniciais do problema.

A expressão “solução geral” é justificada pelo seguinte teorema

TEOREMA 4 Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ e se existe um ponto x_0 onde o wronskiano de y_1 e y_2 é diferente de zero, então a família de soluções $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ com coeficientes arbitrários c_1 e c_2 inclui todas as soluções da equação diferencial dada.

Este teorema diz que, enquanto o wronskiano de y_1 e y_2 não for identicamente nulo, a combinação linear $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ contém todas as soluções da equação (1.62). É, portanto, natural chamar a expressão $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ com coeficientes constantes arbitrários de **solução geral** da equação (1.69). As soluções y_1 e y_2 , com wronskiano não-nulo, formam um **conjunto fundamental de soluções** dessa equação.

1.3.2 Equações Não-Homogêneas com Coeficientes Constantes

Para uma equação diferencial não-homogênea, os resultados são um pouco diferentes das equações que estudamos até agora. Considerando a equação não-homogênea,

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (1.74)$$

Com $a, b, c \in \mathfrak{R}$, com $a \neq 0$ e $g(x)$ uma função contínua, destacamos a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1.75)$$

como equação homogênea associada à primeira.

Os dois teoremas descritos a seguir, descrevem a estrutura de soluções da equação (1.76) e fornecem uma base para construção de sua solução geral.

TEOREMA 5 Se $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ são duas soluções da equação (1.74), então sua diferença $Y_1(x) - Y_2(x)$ é uma solução da equação homogênea associada (1.75). Se além disso, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação (1.74), então

$$Y_1(x) - Y_2(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (1.76)$$

onde c_1 e c_2 são constantes determinadas.

DEMONSTRAÇÃO

Partindo da hipótese de que $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ são duas soluções da equação (1.74), observamos que

$$aY_1'' + bY_1' + cY_1 = g(x) \quad e \quad aY_2'' + bY_2' + cY_2 = g(x)$$

Subtraindo a segunda da primeira dessas equações, temos:

$$(aY_1'' + bY_1' + cY_1) - (aY_2'' + bY_2' + cY_2) = g(x) - g(x) = 0 \quad (1.77)$$

No entanto, pela propriedade de derivada da diferença de duas funções,

$$a(Y_1'' - Y_2'') + b(Y_1' - Y_2') + c(Y_1 - Y_2) = (aY_1'' + bY_1' + cY_1) - (aY_2'' + bY_2' + cY_2) \quad (1.78)$$

portanto, por (1.77) observamos que

$$a(Y_1'' - Y_2'') + b(Y_1' - Y_2') + c(Y_1 - Y_2) = 0 \quad (1.79)$$

e concluímos que a diferença $Y_1(x) - Y_2(x)$ é uma solução da equação (1.75).

Finalmente, como todas as soluções da equação (1.75) podem ser expressas como uma combinação linear das funções em um conjunto fundamental de soluções segue que a solução $Y_1(x) - Y_2(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ e assim a demonstração está completa.

TEOREMA 6 A solução geral da equação não-homogênea (1.74) pode ser escrita na forma

$$y = \phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + Y(x) \quad (1.80)$$

onde $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada (1.69), c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e Y é uma solução específica da equação não-homogênea (1.68).

DEMONSTRAÇÃO

Pelo teorema precedente, observamos que $Y_1(x) - Y_2(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Sendo $Y_1(x)$ uma solução arbitrária da equação (1.74) e $Y_2(x)$ uma solução específica de Y obtemos:

$$\phi(x) - Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad (1.81)$$

que é equivalente à equação (1.74) e como $\phi(x)$ é uma solução arbitrária da equação (1.74), a expressão à direita do sinal de igualdade na equação (1.80) inclui todas as soluções da equação (1.74) e é natural chamá-la de solução geral da equação (1.74).

Reescrevendo de maneira simplificada o teorema anterior, para resolver a equação não-homogênea precisamos fazer três coisas:

1. Encontrar a solução geral $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ da equação homogênea associada. Essa solução é chamada de solução complementar e pode ser denotada por $y_c(x)$.

2. Encontrar uma única solução $Y(x)$ da equação não-homogênea. Referimo-nos a essa solução como uma solução particular.

3. Somar as duas funções encontradas nas duas etapas precedentes.

Uma vez que já discutimos como encontrar $y_c(x)$ para equações homogêneas com coeficientes constantes, vamos encontrar uma solução particular $Y(x)$ da equação não homogênea. Existem dois métodos que vamos apresentar o método dos coeficientes indeterminados e o método de variação dos parâmetros.

Método dos Coeficientes Indeterminados: também conhecido como método dos coeficientes a determinar, requer uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular $Y(x)$, mas com os coeficientes não especificados. Substituímos a expressão hipotética na equação (1.74) e tentamos determinar os coeficientes de modo que a equação seja satisfeita. Se tivermos sucesso, teremos encontrado uma solução da equação (1.74) e podemos usá-la como solução particular $Y(x)$. Se não pudermos determinar os coeficientes, significa que não existe solução da forma que supusemos e, nesse caso, temos que modificar a hipótese inicial e tentarmos de novo. A maior vantagem deste método é que ele é fácil de executar, uma vez feita a hipótese sobre a forma de $Y(x)$. Sua maior limitação é que é útil principalmente para equações em que é fácil escrever a forma correta da solução particular imediatamente. Por essa razão, esse método só é usado, em geral, para problemas nos quais a equação homogênea tem coeficientes constantes e o termo não homogêneo pertence a uma classe relativamente

pequena de funções. Em geral consideramos apenas termos homogêneos consistindo em polinômios, funções exponenciais, senos e cossenos.

EXEMPLO 5 Encontre uma solução particular de $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$

SOLUÇÃO

Procuramos uma função Y tal que $Y''(x) - 3Y'(x) - 4Y(x)$ é igual a $3e^{2x}$. Como a derivada de uma função exponencial é um múltiplo dela mesma, a maneira mais plausível de se obter o resultado desejado é supondo que $Y(x)$ é algum múltiplo de e^{2x} , isto é, $Y(x) = Ae^{2x}$, onde o coeficiente A ainda precisa ser determinado. Para encontrar A , vamos calcular $Y'(x) = 2Ae^{2x}$ e $Y''(x) = 4Ae^{2x}$, e substituir na equação solicitada. Assim, obtemos

$$(4A - 6A - 4A)e^{2x} = 3e^{2x}$$

Portanto, $-6Ae^{2x}$ tem que ser igual $3e^{2x}$, logo, $A = -\frac{1}{2}$. Assim, uma solução particular é:

$$Y(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$$

Método de Variação dos Parâmetros: esse método é devido a Lagrange⁵ e complementa muito bem o método dos coeficientes indeterminados. Sua principal vantagem é que é um método geral; pelo menos em princípio, pode ser aplicado a qualquer equação e não precisa de hipóteses detalhadas sobre a forma de solução. Por outro lado, podemos precisar calcular determinadas integrais envolvendo o termo não-homogêneo da equação diferencial, o que pode apresentar dificuldades. Mais geralmente, a solução sempre pode ser expressa em termos de integrais, como enunciado no teorema a seguir.

⁵ Joseph Louis Lagrange (Turim, 25 de janeiro de 1736 — Paris, 10 de abril de 1813) foi um matemático francês, pois apesar de ter nascido na Itália, naturalizou-se francês. Foi o único de dez irmãos que sobreviveu à infância. Napoleão Bonaparte fez dele senador, conde do império e grande oficial da Legião de Honra. Exaltando a superioridade do cálculo sobre os métodos aritméticos e geométricos dos gregos, dedicou-se à matemática, e logo dominou a moderna análise de sua época.

TEOREMA 7 Se as funções p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I e se as funções y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada à equação não homogênea $y''+p(x)y'+q(x)y = g(x)$, então uma solução particular é

$$Y(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds + y_2(x) \int \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds \quad (1.82)$$

onde x_0 é qualquer ponto em I escolhido convenientemente e $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2 . A solução geral é

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x) \quad (1.83)$$

EXEMPLO 6 Encontre uma solução particular de

$$y''+4y = 3 \csc x \quad (1.84).$$

SOLUÇÃO

Observe que esse problema não é um bom candidato para o método de coeficientes indeterminados por que o termo não homogêneo $g(x) = 3 \csc x$, envolve um quociente de $\sen x$ ou $\cos x$. Note, também, que a equação homogênea associada à equação solicitada é

$$y''+4y = 0 \quad (1.85)$$

e que a solução geral desta equação é

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sen 2x \quad (1.86)$$

A idéia básica no método da variação dos parâmetros é substituir as constantes c_1 e c_2 na equação (1.86) por funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$, respectivamente, e depois determinar essas funções de modo que a expressão resultante

$$y = u_1(x) \cos 2x + u_2(x) \sen 2x \quad (1.87)$$

seja solução da equação não-homogênea (1.84).

Para determinarmos $u_1(x)$ e $u_2(x)$, precisamos substituir y da equação (1.87) na equação (1.84). No entanto, podemos antecipar que o resultado será uma única equação envolvendo alguma combinação de u_1, u_2 e suas derivadas primeiras e segundas. Ainda podemos ser capazes de impor uma segunda condição de nossa escolha, obtendo assim, duas equações para as duas funções desconhecidas $u_1(x)$ e $u_2(x)$.

Voltando à equação (1.80), derivando-a e rearrumando os termos, obtemos

$$y' = 2u_1(x) \sen 2x + 2u_2(x) \cos 2x + u_1'(x) \cos 2x + u_2'(x) \sen 2x \quad (1.88)$$

Visando a possibilidade de se escolher uma segunda condição sobre $u_1(x)$ e $u_2(x)$, vamos supor que a soma das duas últimas parcelas à direita do sinal e igualdade na equação (1.88) seja nula; isto é, supomos que

$$u_1'(x)\cos 2x + u_2'(x)\operatorname{sen}2x = 0 \quad (1.89)$$

Segue então, da equação (1.88) que

$$y' = -2u_1(x)\operatorname{sen}2x + 2u_2(x)\cos 2x \quad (1.90)$$

E derivando essa equação, obtemos

$$y'' = -4u_1'(x)\cos 2x - 4u_2'(x)\operatorname{sen}2x - 2u_1'(x)\operatorname{sen}2x + 2u_2'(x)\cos 2x \quad (1.91)$$

Então, substituindo y e y'' na equação (1.84) pelas equações (1.87) e (1.88), respectivamente, vemos que $u_1(x)$ e $u_2(x)$ têm que satisfazer

$$-2u_1'(x)\operatorname{sen}2x + u_2'(x)\cos 2x = 3\operatorname{csc} x \quad (1.92)$$

Queremos então escolher $u_1(x)$ e $u_2(x)$ de modo a satisfazer as equações (1.89) e (1.92). Essas equações podem ser consideradas como um par de equações lineares algébricas para as quantidades desconhecidas $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$. Resolvendo a equação (1.89) para $u_2'(x)$, temos

$$u_2'(x) = -u_1'(x)\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}2x} \quad (1.93)$$

Substituindo $u_2'(x)$ na equação (1.92) por essa expressão e simplificando, obtemos

$$u_1'(x) = -\frac{3\operatorname{csc} x \operatorname{sen}2x}{2} = -3\cos x \quad (1.94)$$

Agora, substituindo essa expressão para $u_1'(x)$ de volta na equação (1.93) e usando as fórmulas para ângulo duplo, vemos que

$$u_2'(x) = \frac{3\cos x \cos 2x}{\operatorname{sen}2x} = \frac{3(1 - \operatorname{sen}^2 x)}{2\operatorname{sen}x} = \frac{3}{2}\operatorname{csc} x - 3\operatorname{sen}x \quad (1.95)$$

Tendo obtido $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$, integramos a seguir para encontrar $u_1(x)$ e $u_2(x)$. O resultado é

$$u_1(x) = -3\operatorname{sen}x + c_1 \quad \text{e} \quad u_2(x) = \frac{3}{2}\ln|\operatorname{csc} x - \cot x| + 3\cos x + c_2 \quad (1.96)$$

Substituindo essas expressões na equação (1.90), temos

$$y = -3\operatorname{sen}x \cos 2x + \frac{3}{2}\ln|\operatorname{csc} x - \cot x|\operatorname{sen}2x + 3\cos x \operatorname{sen}2x + c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen}2x$$

Finalmente, usando mais uma vez as fórmulas para o dobro do ângulo, obtemos

$$y = 3\text{sen}x + \frac{3}{2}|\text{csc}x - \cot x|\text{sen}2x + c_1 \cos 2x + c_2 \text{sen}2x \quad (1.98)$$

As parcelas da equação (1.98) envolvendo as constantes arbitrárias c_1 e c_2 correspondem à solução geral da equação homogênea associada, enquanto que a soma restante forma uma solução particular da equação não homogênea solicitada. Portanto a equação (1.98) é a solução geral da equação (1.84)

Segundo Boyce e DiPrina (1996, p.103): “Uma grande vantagem do método de variação dos parâmetros é que a equação (1.76) fornece uma expressão para a solução particular $Y(t)$ em termos de uma função não-homogênea arbitrária.” Essa expressão é um bom ponto de partida para investigar o efeito de variações no termo não-homogêneo, ou se quiser analisar a resposta de um sistema sujeito a um número de forças externas diferentes, como é o caso em que estamos estudando sobre flexão de vigas.

1.4 Equações Lineares de Ordem mais Alta

A estrutura teórica e os métodos de resolução desenvolvidos para equações lineares de segunda ordem podem ser estendidos, diretamente, para equações de terceira ordem ou de ordem mais alta.

1.4.1 Teoria Geral para Equações Lineares de Ordem n

Uma equação diferencial linear de ordem n é uma equação da forma

$$P_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y = G(x) \quad (1.99)$$

sendo que P_0, \dots, P_n e G são funções reais e contínuas definidas em algum intervalo

$$I: \alpha < x < \beta.$$

A teoria matemática associada à equação (1.99) é inteiramente análoga à teoria para equações lineares de segunda ordem. Por essa razão, apenas enunciaremos os resultados para o problema de ordem n.

Como a equação dada envolve a n -ésima derivada de y em relação a x , serão necessárias, grosso modo, n integrações para se resolver essa equação. Cada uma dessas integrações vai gerar uma constante arbitrária. Podemos esperar, portanto, que, para obter uma única solução, será preciso especificar n condições iniciais,

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

onde x_0 pode ser qualquer ponto no intervalo I e $y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ é qualquer conjunto dado de constantes reais.

A Equação Homogênea

Como no problema de segunda ordem, vamos discutir primeiro a equação homogênea

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (1.100)$$

Se as funções y_1, y_2, \dots, y_n são soluções da equação (1.100), segue, por cálculo direto, que a combinação linear

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (1.101)$$

onde c_1, \dots, c_n são constantes arbitrárias, também é solução da equação (1.100). Podemos dizer ainda que todas as soluções da equação (1.100) podem ser expressas como uma combinação linear de y_1, y_2, \dots, y_n , desde que seja possível escolher as constantes c_1, \dots, c_n de modo que a combinação linear (1.101) satisfaça as condições iniciais, sejam elas quais forem. Isto quer dizer que para qualquer escolha do ponto x_0 em I e para qualquer escolha de $y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, precisamos ser capazes de determinar c_1, \dots, c_n de modo que as equações

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) &= y_0' \\ &\dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

sejam satisfeitas. Essas equações podem ser resolvidas de maneira única para as constantes c_1, \dots, c_n desde que o determinante dos coeficientes não seja nulo. Por outro lado, se o determinante dos coeficientes é nulo, então sempre é possível escolher valores

$y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ de modo que as equações não tenham solução. Portanto, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução para as equações dadas, para valores arbitrários de $y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, é que o wronskiano

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (1.102)$$

não se anule em $x = x_0$. Como x_0 pode ser qualquer ponto do intervalo I , é necessário e suficiente que $W(y_1, \dots, y_n)$ não se anule em nenhum ponto do intervalo.

Um conjunto de soluções y_1, y_2, \dots, y_n da equação (1.103) cujo wronskiano não se anula é chamado de conjunto fundamental de soluções. Como todas as soluções da equação (1.100) são da forma da combinação linear (1.101), usamos o termo solução geral para nos referirmos a qualquer combinação linear de qualquer conjunto fundamental de soluções da equação (1.100).

A Equação Não - Homogênea

Consideremos agora a equação não-homogênea

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x) \quad (1.103)$$

se Y_1 e Y_2 são duas soluções quaisquer da equação (1.97), segue imediatamente da linearidade do operador L que

$$L(Y_1 - Y_2)(x) = L(Y_1)(x) - L(Y_2)(x) = g(x) - g(x) = 0$$

portanto, a diferença entre duas soluções quaisquer da equação não-homogênea é uma solução da equação homogênea. Como qualquer solução da equação homogênea pode ser escrita como uma combinação linear de um conjunto fundamental de soluções y_1, y_2, \dots, y_n segue que qualquer solução da equação homogênea pode ser escrita na forma

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + Y(x) \quad (1.104)$$

onde Y é alguma solução particular da equação não-homogênea. A combinação linear (1.104) é chamada de solução geral da equação não-homogênea.

2. FIGURAS GEOMÉTRICAS E ESFORÇOS SOLICITANTES

O dimensionamento e a verificação da capacidade resistente de qualquer elemento estrutural dependem de grandezas chamadas tensões, as quais se distribuem ao longo das seções transversais de um corpo. Daí vem a necessidade de se conhecer claramente as características ou propriedades das figuras geométricas que formam essas seções transversais.

2.1 *Propriedades Geométricas de Figuras Planas*

As principais propriedades geométricas de figuras planas são:

- Área (A);
- Momento Estático (S);
- Centróide de Gravidade (CG);
- Momento de Inércia (I);
- Módulo de Resistência (W);

2.1.1 – Área (A)

A área de uma figura plana é a superfície limitada pelo seu contorno. Para contornos complexos, a área pode ser obtida aproximando-se a forma real pela justaposição de formas geométricas de área conhecida (retângulos, triângulos, etc). A área é utilizada para a determinação das tensões normais (tração e compressão) e das tensões transversais ou de corte. A unidade de medida da área é a unidade de comprimento ao quadrado.

2.1.2 – Momento Estático (S)

Define-se Momento Estático (S) de um elemento de superfície como o produto da área do elemento pela distância que o separa de um eixo de referência.

$$S_x = y \cdot dA \quad \text{e} \quad S_y = x \cdot dA$$

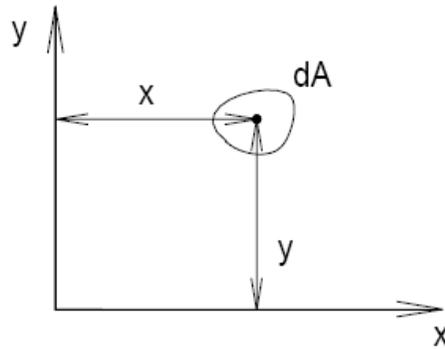


Figura 2.1 Representação Gráfica do Momento Estático de um Elemento
 Fonte: GASPAR: 2005.

Momento Estático de uma superfície plana é definido como a somatória de todos os momentos estáticos dos elementos de superfície que formam a superfície total.

$$S_x = \int_A y dA \quad e \quad S_y = \int_A x dA$$

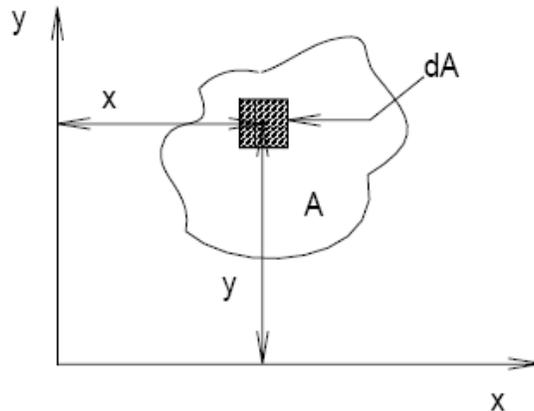


Figura 2.2 Representação Gráfica do Momento Estático de uma Superfície
 Fonte: GASPAR: 2005.

É utilizado para a determinação das tensões transversais que ocorrem em uma peça submetida à flexão. O Momento Estático de uma superfície composta por várias figuras conhecidas é a somatória dos Momentos Estáticos de cada figura. A unidade de medida é a unidade de comprimento ao cubo.

2.1.3 – Centro de Gravidade (CG)

A fim de definir as coordenadas do centro de gravidade de uma área, utilizar-se-á a área A e o sistema de coordenadas x, y mostrado na figura 2.3, onde também se vê um elemento de área dA , de coordenadas x e y . A área total pode ser achada por integração,

$$A = \int dA$$

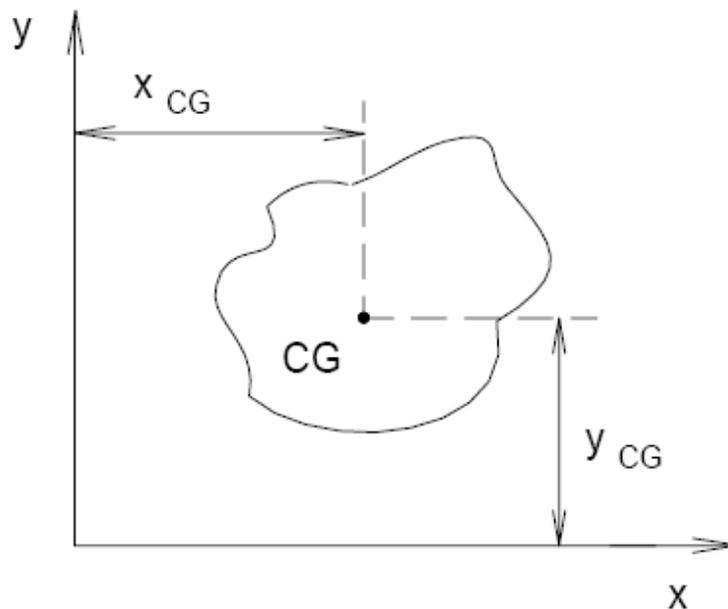


Figura 2.3 Representação gráfica do Centro de Gravidade de uma Superfície

Fonte: GASPAR: 2005.

As distancias x_{CG} e y_{CG} ao centro de gravidade de uma superfície plana é, por definição, o ponto de coordenadas:

$$x_{CG} = \frac{S_y}{A} = \frac{1}{A} \int_A x \cdot dA \quad \text{e} \quad y_{CG} = \frac{S_x}{A} = \frac{1}{A} \int_A y \cdot dA$$

- **Centro de Gravidade de áreas compostas por várias figuras**

O Centro de Gravidade de uma superfície composta por várias figuras é expresso por:

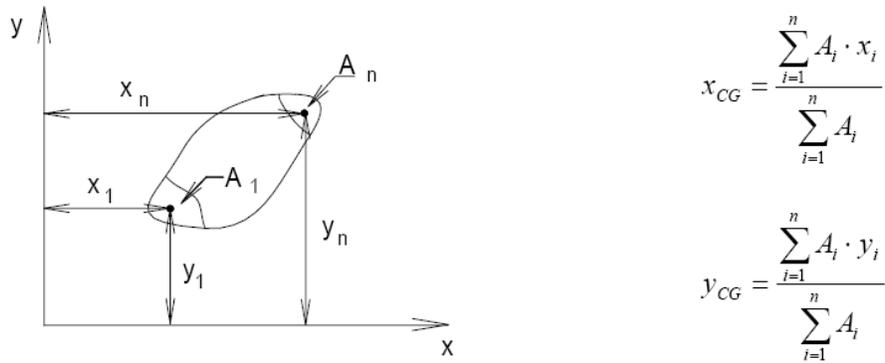


Figura 2.4 Representação gráfica do Centro de Gravidade de várias figuras planas
 Fonte: GASPAR: 2005.

EXEMPLO 1: Determinar o Centro de Gravidade da figura, medidas em centímetros:

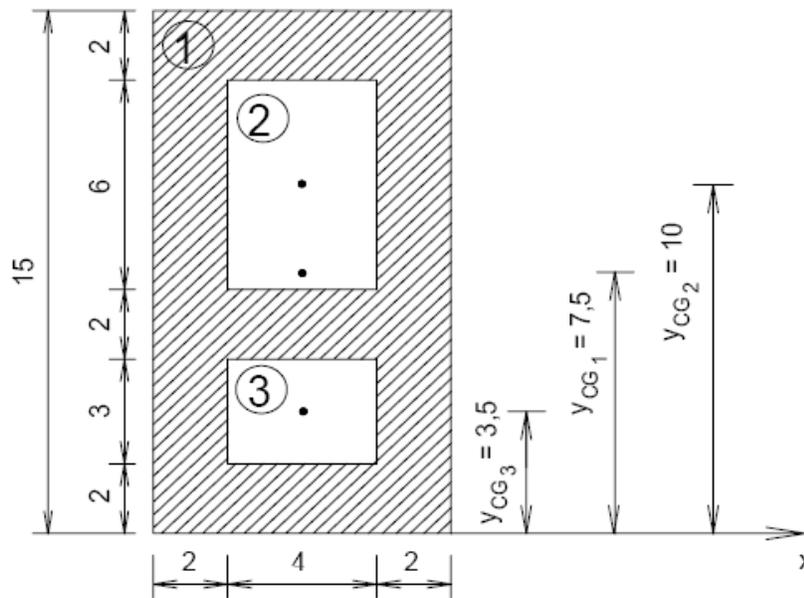


Figura 2.5 Representação gráfica da figura do Exemplo 1
 Fonte: GASPAR: 2005.

SOLUÇÃO:

Cálculo da área hachurada:

$$A = A_1 - A_2 - A_3 \rightarrow A = (8 \cdot 15) - (6 \cdot 4) - (4 \cdot 3) \rightarrow A = 84 \text{ cm}^2$$

Cálculo do Momento Estático do retângulo em relação ao eixo x:

$$S_{1,x} = y_{CG_1} \cdot A_1 = 7,5 \cdot 120 = 900 \text{ cm}^3$$

$$S_{2,x} = y_{CG_2} \cdot A_2 = 10 \cdot 24 = 240 \text{ cm}^3$$

$$S_{3,x} = y_{CG_3} \cdot A_3 = 3,5 \cdot 12 = 42 \text{ cm}^3$$

$$S_x = S_{1,x} - S_{2,x} - S_{3,x} = 618 \text{ cm}^3$$

- Cálculo do Momento Estático do retângulo em relação ao eixo y:

$$S_{1,y} = x_{CG_1} \cdot A_1 = 4 \cdot 120 = 480 \text{ cm}^3$$

$$S_{2,y} = x_{CG_2} \cdot A_2 = 4 \cdot 24 = 96 \text{ cm}^3$$

$$S_{3,y} = x_{CG_3} \cdot A_3 = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}^3$$

$$S_y = S_{1,y} - S_{2,y} - S_{3,y} = 336 \text{ cm}^3$$

- Coordenadas do Centro de Gravidade da figura:

$$x_{CG} = \frac{S_y}{A} \rightarrow x_{CG} = \frac{336}{84} \rightarrow x_{CG} = 4 \text{ cm}$$

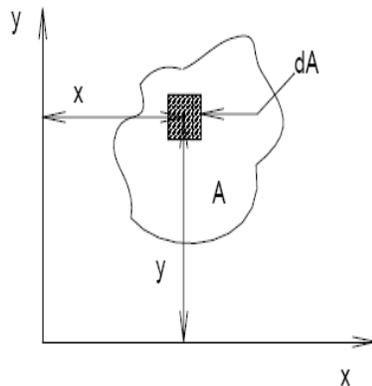
$$y_{CG} = \frac{S_x}{A} \rightarrow y_{CG} = \frac{618}{84} \rightarrow y_{CG} = 7,36 \text{ cm}$$

- Centro de Gravidade

$$CG(4;7,36)$$

2.1.4 – Momento de Inércia (I)

O momento de inércia de uma superfície plana em relação a um eixo de referência é definido como sendo a integral de área dos produtos dos elementos de área que compõem a superfície pelas suas respectivas distâncias ao eixo de referência, elevadas ao quadrado.



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

Figura 2.6 Representação gráfica do Momento de inércia de uma Superfície plana

Fonte: GASPAR: 2005.

O momento de inércia é uma característica geométrica relacionada com a distribuição (geométrica) das massas de um corpo em torno de um eixo de rotação. Quanto maior for o momento de inércia de um corpo, mais difícil será fazê-lo girar. O momento de inércia é importante no dimensionamento dos elementos de construção, pois fornece através de valores numéricos, uma noção de resistência da peça. A unidade de medida do momento de inércia é a unidade de comprimento elevada à quarta potência.

O Momento de Inércia total de uma superfície é a somatória dos momentos de inércia das figuras que a compõe.

$$I_x = I_{1,x} + I_{2,x} + I_{3,x}$$

2.1.4.1 – Translação de Eixos

O momento de inércia de uma superfície em relação a um eixo qualquer é igual ao momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo seu centro de gravidade, acrescido do produto da área (A) pelo quadrado da distância que separa os dois eixos.

$$I_x = I_{x_{CG}} + A \cdot y_{CG}^2 \quad e \quad I_y = I_{y_{CG}} + A \cdot x_{CG}^2$$

I_x = momento de inércia da figura em relação ao eixo x .

I_y = momento de inércia da figura em relação ao eixo y .

$I_{x_{CG}}$ = momento de inércia da figura em relação ao eixo x_{CG} que passa pelo CG da figura.

$I_{y_{CG}}$ = momento de inércia da figura em relação ao eixo y_{CG} que passa pelo CG da figura.

x_{CG} = distância do eixo y até o eixo y_{CG} .

y_{CG} = distância do eixo x até o eixo x_{CG} .

O momento de inércia é utilizado para a determinação das tensões normais a que estão sujeitas as peças submetidas à flexão.

Podemos relacionar o momento de inércia com momento estático, da seguinte forma:

$$S_x = y.A \rightarrow S_x^2 = y^2.A^2 \rightarrow y^2 = \frac{S_x^2}{A^2}$$

$$I_x = I_{x_{CG}} + A.y_{CG}^2 \rightarrow I_x = I_{x_{CG}} + \frac{S_x^2}{A^2}.A \Rightarrow \begin{cases} I_x = I_{x_{CG}} + \frac{S_x^2}{A} \\ I_{x_{CG}} = I_x - \frac{S_x^2}{A} \end{cases}$$

EXEMPLOS 2 e 3

2 - Determinar o momento de inércia do retângulo em relação aos seguintes eixos:

a) x , passando pela base inferior.

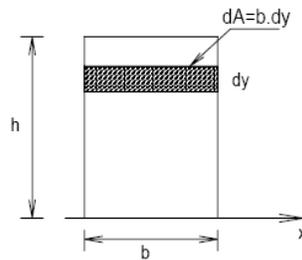


Figura 2.7 Representação gráfica para o Exemplo 2.a

Fonte: GASPAR: 2005.

SOLUÇÃO:

$$I_x = \int_A y^2 dA \rightarrow I_x = \int_0^h y^2 b dy \rightarrow I_x = \left[\frac{b.y^3}{3} \right]_0^h \rightarrow I_x = \frac{b.h^3}{3}$$

b) x_{CG} , passando pelo CG.

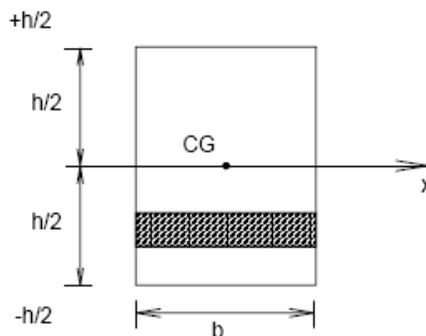


Figura 2.8 Representação Gráfica para o Exemplo 2.b

Fonte: GASPAR: 2005.

SOLUÇÃO:

$$I_{x_{CG}} = \int_A y^2 dA \rightarrow I_{x_{CG}} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy \rightarrow I_{x_{CG}} = \left[\frac{b \cdot y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \rightarrow I_{x_{CG}} = \frac{b}{3} \cdot \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right] \rightarrow I_{x_{CG}} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

3 – Determinar o momento de inércia da superfície hachurada em relação ao eixo x que passa pelo CG . (Medidas em centímetros)

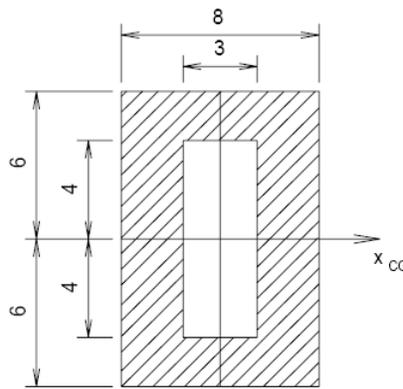


Figura 2.9 Representação Gráfica para o Exemplo 3

Fonte: GASPAR: 2005.

SOLUÇÃO:

$$I_{x_{CG}} = \frac{b \cdot h^3}{12} \rightarrow I_{x_{CG}} = \frac{1}{12} (8 \cdot 12^3 - 3 \cdot 8^3) \rightarrow I_{x_{CG}} = 1024 \text{ cm}^4$$

2.1.4.2 – Produto de Inércia ou Momento Centrífugo

O produto de inércia (momento centrífugo) de uma superfície plana, como na figura 2.6, é definido através da integral de área dos produtos entre os infinitésimos de área dA que compõem a superfície e as suas respectivas coordenadas aos eixos de referencia.

$$J_{xy} = \int xy dA$$

O produto de inércia denota uma noção de assimetria de superfície e relação aos eixos de referência.

2.1.5 – Módulo Resistente

Define-se módulo resistente de uma superfície plana em relação aos eixos que contém o CG como sendo a razão entre o momento de inércia relativo ao eixo que passa pelo CG da figura e a distância máxima entre o eixo e a extremidade da seção estudada.

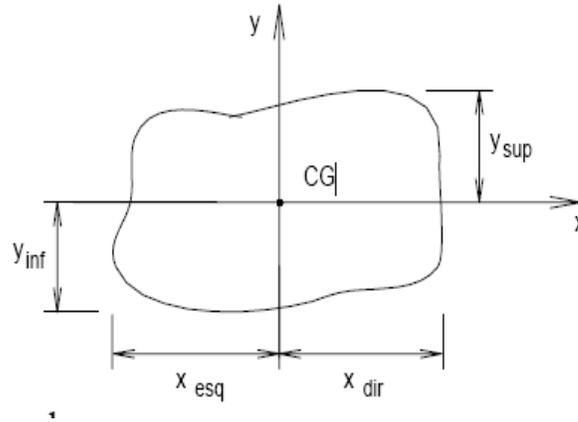


Figura 2.10 Módulo Resistente de uma Superfície Plana

Fonte: GASPAR: 2005.

$$W_x = \frac{I_{x_{CG}}}{y_{\max}} \quad e \quad W_y = \frac{I_{y_{CG}}}{x_{\max}}$$

onde,

$I_{x_{CG}}$ = momento de inércia da figura em relação ao eixo x_{CG} que passa pelo CG da figura.

$I_{y_{CG}}$ = momento de inércia da figura em relação ao eixo y_{CG} que passa pelo CG da figura.

y_{\max} : distância entre o eixo horizontal do CG e a extremidade vertical da peça;

x_{\max} : distância entre o eixo vertical do CG e a extremidade horizontal da peça.

A unidade do módulo resistente é a unidade de comprimento ao cubo e o mesmo é utilizado para o dimensionamento de peças submetidas à flexão.

2.2 Esforços Solicitantes

Experimentalmente sabemos que, quando submetidos a forças externas, os corpos se deformam, ou seja, variam de dimensões. Os esforços internos que tendem a resistir às forças externas são chamados esforços solicitantes.

Segundo Timoshenko/Gere (1994), denomina-se viga uma barra que suporta cargas transversais em relação ao seu eixo. Admite-se sempre que a viga tenha um plano de simetria paralelo ao da figura e, assim, que a seção transversal tenha um eixo vertical de simetria. As cargas aplicadas são sempre consideradas como atuantes no plano de simetria, acarretando, portanto, flexão da viga nesse plano.

Se as forças externas produzirem tensões abaixo do limite de proporcionalidade das tensões do material do corpo sólido, ao cessarem, este readquire a forma e as dimensões originais. Esta propriedade chama-se elasticidade e a deformação chama-se, então, elástica. Se as forças, porém, passarem de um determinado valor, de modo que, ao cessarem, o corpo não volta mais à forma primitiva, mantendo-se com uma deformação residual, diz-se que o corpo foi solicitado além do limite de proporcionalidade das tensões. Se as forças aumentarem ainda mais, as deformações permanentes aumentam rapidamente até provocarem ruptura do corpo. A força que provoca ruptura do corpo serve para medir sua resistência à ruptura. Ao se dimensionar uma peça deve-se não só evitar a sua ruptura, como também evitar deformações permanentes, ou seja, ao cessar a força externa, as deformações devem também cessar.

2.2.1 – Classificação dos Esforços Solicitantes

Quando uma viga sofre a ação de forças ou momentos, são criadas tensões e deformações em seu interior. Para determinar essas tensões e deformações, primeiro devemos encontrar as forças e os momentos internos que atuam nas seções transversais da viga.

Por meio da estática, sabemos que a resultante das tensões agindo na seção transversal pode ser reduzida a uma **força de cisalhamento** V ou um **momento fletor** M . Forças de cisalhamento e momentos fletores, são resultantes de tensões distribuídas sobre a seção transversal e são conhecidos genericamente por **resultante de tensões**.

- **Força Normal (N)**

Força Normal é a componente da força interna que age perpendicularmente à seção transversal. Se for dirigida para fora do corpo, provocando alongamento no sentido da aplicação da força, é chamada de força normal de tração ou solicitação de tração. Se for dirigida para dentro do corpo, provocando encurtamento no sentido de aplicação da força, é chamada de força normal de compressão ou solicitação de compressão.

- **Força Cortante (V)**

Força Cortante é componente de força interna que equilibra uma dada seção transversal de barra (ou viga), contida no plano da seção transversal que tende a deslizar uma porção do corpo em relação à outra, provocando corte (deslizamento da seção em seu plano). As tensões desenvolvidas internamente que opõem resistência às forças cortantes são denominadas tensões de cisalhamento ou tensões tangenciais (força por unidade de área), representadas pela letra grega τ (Thau).

- **Momento Fletor (M)**

Considerando a análise de membros prismáticos sujeitos a dois conjugados ou momentos, iguais e de sentidos opostos, M e M' , atuando no mesmo plano longitudinal. Se passarmos uma seção transversal cortando a viga, as condições de equilíbrio de uma parte da viga exigem que os esforços elementares exercidos sobre essa parte formem um conjugado equivalente. Desse modo, a seção transversal da barra submetida à flexão pura apresentará esforços internos equivalentes a um conjugado. O momento M desse conjugado é chamado *momento fletor* da seção. Por convenção, indica-se como positivo o momento M que flexiona a barra e como negativo o caso em que M e M' tem sentidos inverso.

- **Momento Torçor (T)**

Consideremos peças submetidas a efeito de torção. Os conjugados que tendem a torcer as peças de seção transversal circular, gerando tensões e deformações são chamados momentos de torção, momentos torcionais ou torque, T e T' . São conjugados de mesma intensidade e sentidos opostos.

2.2.2 – Convenções de Sinais

Vamos agora observar as convenções de sinais para as forças de cisalhamento e momentos fletores. Deve-se ater ao fato de que o sinal algébrico de uma tensão resultante é determinado pelo modo como ela deforma o material em que atua em vez de ser determinado pela sua direção no espaço. No caso de uma viga, uma força de cisalhamento positiva tende a girar o material no sentido horário e uma força de cisalhamento negativa tende a girar o material no sentido anti-horário. Além disso, um momento fletor positivo comprime a parte superior da viga e um momento fletor negativo, comprime a parte inferior.

Convenções de sinais para tensões resultantes são chamadas de convenções de sinais para deformação, porque são baseadas em como o material é deformado. Por exemplo, utilizamos uma convenção de sinais para deformação para lidar com forças axiais em uma barra. Estabeleceu-se que uma força axial produzindo alongamento (ou tração) em uma barra é positiva e uma força axial produzindo diminuição (ou compressão) em uma barra é negativa. Assim, o sinal de uma força axial depende de como ela deforma o material e não de sua direção no espaço.

Todavia, quando escrevemos as equações de equilíbrio, usamos a convenção de sinais da estática, segundo a qual as forças são positivas ou negativas de acordo com sua direção em relação aos eixos coordenados.

3. TENSÕES E DEFORMAÇÕES

Os conceitos de **tensão** e **deformação** podem ser ilustrados em suas formas mais elementares considerando uma barra prismática sujeita à forças axiais. Uma **barra prismática** é um membro estrutural reto, tendo a mesma seção transversal ao longo de seu comprimento e uma **força axial** é uma carga direcionada ao longo do eixo do membro, resultando em tração ou compressão da barra.

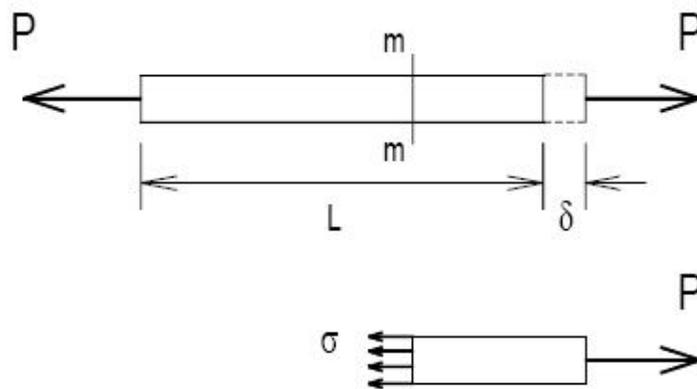


Figura 3.1 Barra prismática em tração

Fonte: GASPAR: 2005.

As tensões internas de uma barra são expostas se fizermos um corte imaginário através da barra em uma determinada seção tomada perpendicularmente ao eixo longitudinal da barra e por isso, chamada de **seção transversal**. Esse corte divide, de forma imaginária, a barra em duas partes. A ação de uma parte sobre a outra consiste de uma força distribuída contínua agindo sobre toda a seção transversal. Dessa forma, a força axial P que age na seção transversal é a resultante das tensões distribuídas continuamente.

Assumindo que as tensões são uniformemente distribuídas sobre a seção transversal, sua resultante deve ser igual à intensidade σ vezes a área A da seção transversal da barra e assim obtemos a seguinte expressão para a magnitude das tensões:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (3.1)$$

Essa equação fornece a intensidade de tensão uniforme ou tensão média em uma barra prismática, carregada axialmente e de seção transversal arbitrária. Quando a barra

é esticada pelas forças P , as tensões são **tensões de tração**; se as forças são reversas em direção, fazendo com que a barra seja comprimida, obtemos **tensões de compressão**. Visto que as tensões agem em uma direção perpendicular à superfície de corte, são chamadas de **tensões normais**. Assim, tensões normais podem ser de tração ou de compressão. Quando uma convenção de sinais é necessária para tensões normais, é comum definir as tensões de tração como positivas e as tensões de compressão como negativas.

A equação (3.1) é válida somente se a tensão é uniformemente distribuída sobre a seção transversal da barra. Essa condição é realizada se a força axial P agir através do centro de gravidade da área da seção transversal. Quando a carga P não age nesse ponto, tem-se flexão da barra.

Considerando a barra prismática da figura 3.1, o alongamento δ dessa barra é resultado cumulativo do estiramento de todos os elementos do material através do volume da barra. Em geral, o alongamento de um segmento é igual ao seu comprimento dividido pelo comprimento total L e multiplicado pelo alongamento total δ . Essa quantia é chamada de alongamento por unidade de comprimento, ou deformação, e é denotada pela letra grega ε (épsilon). Assim, a deformação é dada pela equação

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (3.2)$$

onde,

ε : deformação específica;

δ : alongamento ou encurtamento;

L : comprimento total da barra.

Se a barra está em tração, a deformação é chamada de **deformação de tração**, representando um alongamento ou estiramento do material. Se a barra está em compressão a deformação é chamada **deformação de compressão** e a barra encurta. A deformação de tração é usualmente tomada como positiva e a deformação de compressão é tomada como negativa. A deformação ε é chamada de **deformação normal** porque está associada com tensões normais.

Como a deformação normal é a razão de dois comprimentos, ela é uma **quantidade dimensional**, isto é, não possui unidades. Por isso, a deformação expressa simplesmente como um número independente de qualquer sistema de unidades. Valores numéricos de deformação são usualmente muito pequenos porque barras feitas de materiais estruturais sofrem apenas pequenas mudanças no comprimento quando carregado. A deformação às vezes é expressa também como uma porcentagem especialmente quando as deformações são grandes.

As definições de tensão normal e deformação normal são baseadas puramente em considerações estáticas e geométricas, o que significa que as equações (3.1) e (3.2) podem ser usadas para cargas de qualquer magnitude e para qualquer material. A principal exigência é que a deformação da barra seja uniforme ao longo de seu volume que, por sua vez, exige que a barra seja prismática, que as cargas ajam através do centro de gravidade das seções transversais e que o material seja **homogêneo**. O estado resultante de tensão e deformação é chamado de **deformação e tensão uniaxial**.

A tensão axial σ é calculada pela equação (3.1) e quando a área inicial do corpo é usada nos cálculos, a tensão é chamada de **tensão nominal**. Um valor mais exato da tensão axial chamada de **tensão verdadeira** pode ser calculado usando uma área real da barra na seção transversal onde a falha ocorre.

A deformação axial média ε é calculada pela equação (3.2) e se o comprimento inicial for usado no cálculo, então obtemos a **deformação nominal**. Como a distância entre as marcas de medida aumenta enquanto a carga de tração é aplicada, podemos calcular a **deformação verdadeira** em qualquer valor da carga usando a distância real entre as marcas de medida. Em tração a deformação verdadeira é sempre menor que a deformação nominal.

Após executar um teste de tração ou compressão e determinar a tensão e a deformação em várias magnitudes da carga, podemos colocar em um gráfico de tensão *versus* deformação. Tal **diagrama de tensão-deformação** é uma característica do

material em particular sendo testado e contém informação importante sobre as propriedades mecânicas e o tipo de comportamento⁶.

O diagrama começa com uma linha reta da origem O ao ponto A , o que quer dizer que a relação entre tensão e deformação nessa região inicial não é apenas *linear*, mas também proporcional. Além do ponto A , a proporcionalidade entre tensão e deformação não mais existe; dessa forma a tensão em A é chamada de **limite de proporcionalidade**.

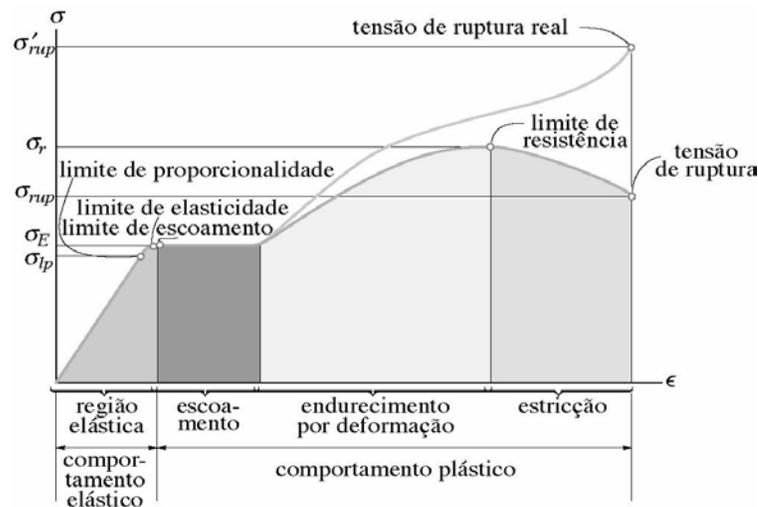


Figura 3.2 Diagrama de tensão-deformação para um aço estrutural típico em tração (sem escala)

Fonte: UFPR: 2006

A inclinação da linha da primeira parte do gráfico é chamada de **módulo de elasticidade**. Com um aumento na tensão além do limite de proporcionalidade, a deformação começa aumentar mais rapidamente para cada incremento de tensão. Conseqüentemente, a curva de tensão-deformação tem uma inclinação cada vez menor até a curva começar a ficar horizontal. Começando neste ponto um alongamento considerável do corpo ocorre sem um aumento notável da força de tração. Esse fenômeno é conhecido como escoamento do material, e ali determinamos o ponto de escoamento. A tensão correspondente é conhecida como **tensão de escoamento** do aço. Nessa região o material fica perfeitamente plástico, o que significa que ele se deforma

⁶ Diagramas de tensão-deformação foram originados por Jacob Bernoulli (1654-1705) e J. V. Poncelet (1788-1867).

sem um aumento na carga aplicada. Essa tensão é também chamada de **resistência de escoamento**. Resistência é um termo genérico que se refere a capacidade de uma estrutura resistir cargas. Por exemplo, a resistência de escoamento de uma viga é a magnitude da carga exigida para causar escoamento na viga. Quando conduzimos um teste de tração de um material particular, definimos a capacidade de suportar cargas pelas tensões num corpo de provas em vez das cargas totais agindo nesse corpo. Como resultado, a resistência de um material é usualmente dada como uma tensão.

Considerando uma viga, podemos observar que cargas atuando a mesma, criam tensões resultantes na forma de cisalhamento e de momentos fletores. As cargas que atuam na viga a fazem flertir (ou curvar) e assim deformar seu eixo em uma curva. O eixo que estava inicialmente reto é então flexionado em uma curva, chamada **curva elástica** da viga.

3.1 Elasticidade Linear, Lei de Hooke e Coeficiente de Poisson

Muitos materiais estruturais, incluindo a maioria dos metais, madeiras, plásticos e cerâmicas, comportam-se elástica e linearmente quando carregados. Quando um material comporta-se elasticamente e também exibe uma relação linear entre tensão e deformação, é chamado de **elástico linear**. Esse tipo de comportamento é extremamente importante em engenharia por uma razão óbvia – ao projetar estruturas e máquinas que funcionem nessa região, evitamos deformações permanentes devido ao escoamento.

Os diagramas tensão-deformação ilustram o comportamento de vários materiais, quando carregados por tração. Quando um corpo de prova do material é descarregado, isto é, quando a carga é gradualmente diminuída até zero, a deformação sofrida durante o carregamento desaparecerá parcial ou completamente. Esta propriedade do material, pela qual ele tende a retornar à forma original é denominada *elasticidade*. Quando a barra volta completamente à forma original, diz-se que o material é *perfeitamente elástico*; mas se o retorno não for total, o material é *parcialmente elástico*. Neste último caso, a deformação que permanece depois da retirada da carga é denominada deformação permanente.

A relação linear entre tensão e deformação para uma barra em tração ou compressão simples foi apresentada por Robert HOOKE em 1678 e é conhecida por *LEI DE HOOKE*, definida como:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.3)$$

onde,

σ : tensão normal;

E : módulo de elasticidade do material;

ε : deformação específica.

O Módulo de Elasticidade representa o coeficiente angular da parte linear do diagrama tensão-deformação e é diferente para cada material. A lei de HOOKE é válida para a fase elástica dos materiais. Por este motivo, quaisquer que sejam os carregamentos ou solicitações sobre o material, vale a superposição de efeitos, ou seja, pode-se avaliar o efeito de cada solicitação sobre o material e depois somá-los.

Quando a barra é carregada por tração simples, a tensão axial é $\sigma = \frac{P}{A}$ e a deformação específica é $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$. Combinando estes resultados com a Lei de HOOKE, tem-se a seguinte expressão para o alongamento da barra:

$$\delta = \frac{PL}{EA} \quad (3.4)$$

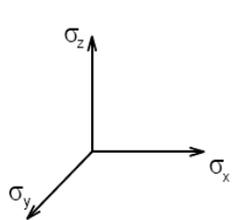
Esta equação mostra que o alongamento de uma barra linearmente elástica é diretamente proporcional à carga e ao comprimento e inversamente proporcional ao módulo de elasticidade e à área da seção transversal. O produto EA é conhecido como rigidez axial da barra.

Se forem consideradas as deformações longitudinal (ε_l) e transversal (ε_t), tem-se, respectivamente:

$$\varepsilon_l = \frac{\sigma}{E} \quad \varepsilon_t = \frac{\nu\sigma}{E} \quad (3.5),$$

onde ν é o coeficiente de Poisson¹, obtido pela relação $\nu = \frac{\text{deformação lateral}}{\text{deformação longitudinal}}$.

No caso mais geral, no qual um elemento do material é solicitado por três tensões normais σ_x , σ_y e σ_z , perpendiculares entre si, às quais correspondem respectivamente às deformações ε_x , ε_y e ε_z , a Lei de HOOKE se escreve:



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Figura 3.3 Lei de Hooke para três tensões normais

Fonte: GASPAR: 2005.

EXEMPLO 1 - Determinar a tensão de tração e a deformação específica de uma barra prismática de comprimento $L=5,0\text{m}$, seção transversal circular com diâmetro $\phi=5\text{cm}$ e Módulo de Elasticidade $E=20.000\text{ kN/cm}^2$, submetida a uma força axial de tração $P=30\text{ kN}$.

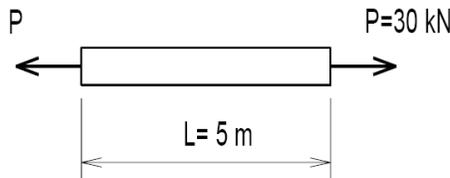


Figura 3.4 Representação Gráfica para o Exemplo 1

Fonte: GASPAR: 2005.

SOLUÇÃO:

- Cálculo da área da seção transversal circular:

$$A = \frac{\pi\phi^2}{4} \rightarrow A = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} \rightarrow A \cong 19,6\text{ cm}^2$$

- Cálculo da tensão normal

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow \sigma = \frac{30}{19,6} \rightarrow \sigma = 1,53\text{ kN/cm}^2 \text{ ou } 15,3\text{ MPa}$$

- Cálculo do alongamento da barra

$$\delta = \frac{PL}{EA} \rightarrow \delta = \frac{30.500}{20000.19,6} \rightarrow \delta = 0,0382 \text{ cm}$$

- Cálculo da deformação específica

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \rightarrow \varepsilon = \frac{0,0382}{500} \rightarrow \varepsilon = 0,0000764 \times 100 = 0,00764\%$$

3.2 Tensão e Deformação de Cisalhamento

Agora iremos considerar outro tipo de tensão, chamada tensão de cisalhamento, que age tangencialmente à superfície do material.

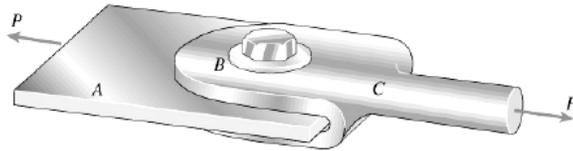


Figura 3.5 Ilustração da tensão de cisalhamento duplo em uma conexão parafusada

Fonte: GERE: 2003.

Como ilustração da ação de tensões de cisalhamento, considere a conexão parafusada mostrada na Figura 3.6. Essa conexão consiste de uma barra achatada A, uma junta C e um parafuso B que passa através dos buracos na barra e na junta. Sob a ação de forças de tração P, a barra e a junta irão exercer uma pressão cortante contra o parafuso, e as tensões de contato, chamadas de **tensões cortantes**, serão criadas. Além disso a barra e a junta tendem a cisalhar o parafuso, isto é, cortá-lo, e essa tendência é resistida por tensões de cisalhamento no parafuso

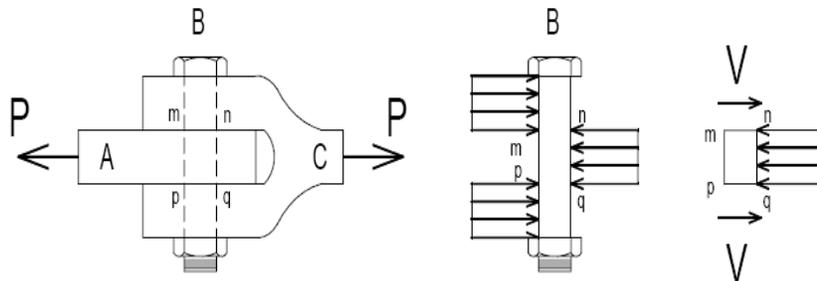


Figura 3.6 Conexão parafusada em que o parafuso é carregado por cisalhamento duplo

Fonte: GASPAR: 2005.

A distribuição das tensões cortantes é difícil de se determinar, por isso é comum assumi que as tensões são uniformemente distribuídas. Baseado na suposição de distribuição uniforme, podemos calcular **uma tensão cortante média** dividindo a força cortante total pela área cortante.

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_b} \quad (3.6)$$

A área cortante é definida como a área projetada da superfície cortante curva. O diagrama de corpo livre da figura 3.4 mostra que existe uma tendência de cisalhar o parafuso ao longo das seções transversais *mn* e *pq*. A partir de um diagrama de corpo livre da porção *mnpq* do parafuso vemos que força do cisalhamento *V* agem sobre as superfícies cortantes do parafuso. Nesse exemplo da figura, há dois planos de cisalhamento (*Mn* e *pq*), e dizemos que o parafuso está sob **cisalhamento duplo** e nesse caso, cada uma das forças é igual à metade da carga total transmitida pelo parafuso, isto é, $V = \frac{P}{2}$. As forças de cisalhamento são as resultantes das tensões de cisalhamentos distribuídas sobre a área da seção transversal do parafuso. Essas tensões agem paralelamente à superfície cortante. A distribuição exata das tensões não é conhecida, mas elas são maiores perto do centro e nulas em certas regiões das bordas. As tensões de cisalhamento são usualmente denotadas pela letra grega τ (*tau*).

4. LINHA ELÁSTICA DE VIGAS

Vigas são elementos de barras, submetidas a cargas transversais em relação a seu eixo e destinadas a vencer vão. As cargas podem ser classificadas em relação à área em que são aplicadas em concentradas e distribuídas. As cargas concentradas são aquelas cuja superfície de contato com o corpo que lhe resiste é desprezível comparada com a área do corpo. As cargas distribuídas são aquelas aplicadas ao longo de um comprimento ou sobre uma superfície, podendo ser uniforme ou não uniforme.

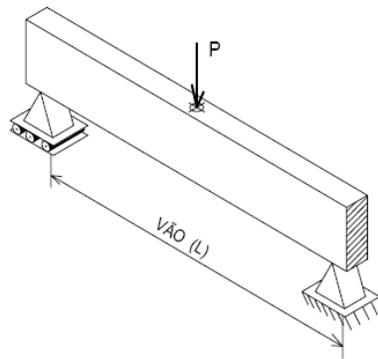


Figura 4.1 Representação de uma Viga em 3D

Fonte: GASPAR: 2005.

Antes de entrarmos no assunto sobre flexão vigas propriamente dito, se faz necessário apresentarmos alguns conceitos que facilitarão o entendimento do conceito apresentado. Vamos começar com a Estática, que é a parte da física que estuda sistemas sob a ação de forças que se equilibram.

4.1 Elementos da Estática

4.1.1 Forças no Plano

A força representa a ação de um corpo sobre outro e é caracterizada pelo seu ponto de aplicação, sua intensidade, direção e sentido, sendo assim considerada uma grandeza vetorial. Sua intensidade é expressa em Newton (N) no Sistema Internacional de Unidades (SI). A direção é definida por sua linha de ação, ou seja, é determinada pela reta ao longo da qual a força atua e é caracterizada pelo ângulo

que forma com algum eixo fixo. Já o sentido da força é indicado por uma seta (vetor).

Denomina-se grupo de forças, o conjunto de forças aplicadas em um único ponto de um corpo e sistema de forças é o conjunto de forças aplicadas em pontos diversos de um mesmo corpo.

4.1.2 Equilíbrio de um Ponto Material

Ponto material é todo objeto com dimensões desprezíveis, mas que ocupa lugar no espaço. Quando a resultante de todas as forças que atuam sobre um ponto material é nula, este ponto está em equilíbrio. Isto é uma consequência da **Primeira Lei de Newton**: "*se a força resultante que atua sobre um ponto material é zero, este ponto permanece em repouso (se estava originalmente em repouso) ou move-se ao longo de uma reta com velocidade constante (se originalmente estava em movimento)*".

Matematicamente as condições de equilíbrio de um ponto material pode ser expressa por:

$$\sum F = R = 0 \quad (4.1)$$

onde:

F = força

R = Resultante das forças

4.1.3 Resultante de uma força

A resultante de um grupo de forças é a força que, atuando sozinha, produz ação idêntica à produzida pelo grupo ou sistema de forças. Essa resultante pode ser obtida por soluções gráficas ou analíticas. A resultante pode ser obtida por soluções gráficas ou analíticas.

a) **Soluções Gráficas**: quando um ponto material está em equilíbrio sob a ação de duas ou mais forças, utiliza-se regras como a regra do paralelogramo, regra do

polígono, composição de forças ou decomposição de forças.

b) **Soluções Analíticas:** utilizam a trigonometria e as equações de equilíbrio.

4.2 Tipos de Apoios

Para o estudo do equilíbrio dos corpos rígidos, além das forças externas que agem sobre ele, precisamos também conhecer como este corpo está apoiado. Apoios ou vínculos são elementos que restringem os movimentos das estruturas e recebem as seguintes classificações:

1. Apoio Móvel:

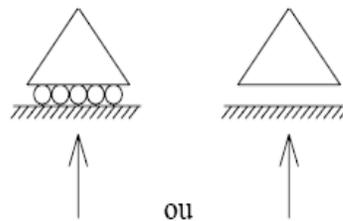


Figura 4.2 Apoio Móvel

Fonte: GASPAR: 2005.

- Impede movimento na direção normal (perpendicular) ao plano de apoio;
- Permite movimento na direção paralela ao plano de apoio;
- Permite rotação.

2. Apoio Fixo

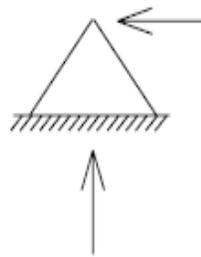


Figura 4.3 Apoio Fixo

Fonte: GASPAR: 2005.

- Impede o movimento na direção normal ao plano de apoio;
- Impede o movimento na direção paralela ao plano de apoio;
- Permite rotação.

3. Engastamentos

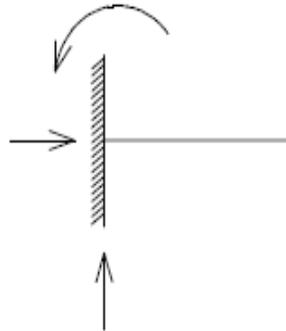


Figura 4.4 Engastamento

Fonte: GASPAR: 2005.

- Impede movimento na direção normal ao plano de apoio;
- Impede movimento na direção paralela ao plano de apoio;
- Impede rotação.

4.3 Tipos de Estruturas

Classificamos as estruturas em função do número de reações de apoio ou vínculos que possuem. Cada reação constitui uma incógnita a ser determinada. Para as estruturas planas a Estática fornece as equações (4.4) que são conhecidas como as três equações fundamentais da Estática.

Estruturas Hipostáticas

São aquelas cujo número de reações de apoio ou vínculo é menor que o número de equações fornecidas pelas condições de equilíbrio da Estática.

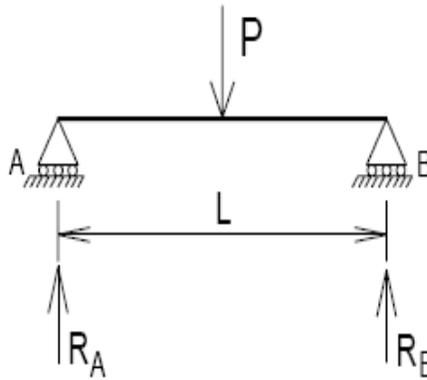


Figura 4.5 Modelo de Estrutura Hipostática

Fonte: GASPAR: 2005.

A figura (4.5) é um tipo de estrutura hipostática, onde as incógnitas são duas (R_A e R_B). Ela não possui restrição a movimentos horizontais.

Estruturas Isostáticas

São aquelas cujo número de reações de apoio ou vínculo é igual ao número de equações fornecidas pelas condições de equilíbrio da Estática.

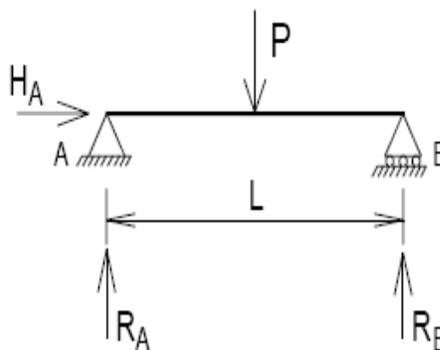


Figura 4.6 Modelo de Estrutura Isostática

Fonte: GASPAR: 2005.

A figura (4.6) é um tipo de estrutura Isostática, onde as incógnitas são três (R_A , R_B e H_A). Esta estrutura está fixa e suas incógnitas só podem ser encontradas pelas equações fundamentais da Estática.

Estruturas Hiperestáticas

São aquelas cujo número de reações de apoio ou vínculo é maior que o número de equações fornecidas pelas condições de equilíbrio da Estática.

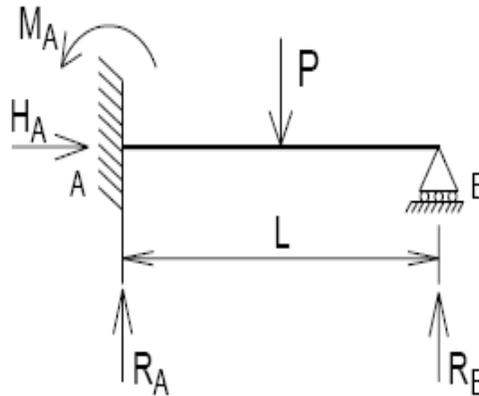


Figura 4.7 Modelo de Estrutura Hiperestática

Fonte: GASPAR: 2005.

A figura acima é um tipo de estrutura Hiperestática, onde as incógnitas são quatro (R_A , R_B , H_A e M_A). As equações fundamentais da Estática não são suficientes para resolver as equações de equilíbrio. São necessárias outras condições relativas ao comportamento da estrutura.

Peças estruturais são usualmente classificadas de acordo com o tipo de carga que suportam. Por exemplo, uma barra carregada axialmente suporta forças cujos vetores são direcionados ao longo de seu eixo, e uma barra em torção suporta torques que têm seus momentos direcionados ao longo do eixo.

Uma viga é classificada como estrutura plana quando se situa em um único plano. Se todas as cargas agem no mesmo plano e se todos os deslocamentos ocorrem nesse plano, então nos referimos a ele como **plano de flexão**. Encontrar as forças de cisalhamento e os momentos fletores são um passo essencial para o dimensionamento de qualquer viga. Uma vez que as forças de cisalhamento e os momentos fletores são conhecidos, podemos encontrar tensões, deformações e deslocamentos.

4.4 Tipos de Vigas e Cargas

Vigas são usualmente classificadas pela maneira como estão apoiadas. Por exemplo, uma viga com apoio fixo em uma extremidade e um apoio móvel na outra (figura 4.9) é chamada de **viga simplesmente apoiada** ou **viga simples**.

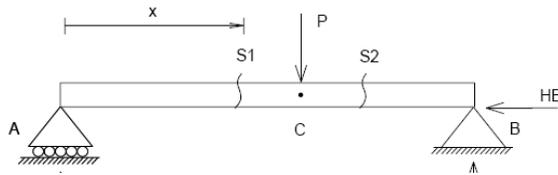


Figura 4.8 Viga simplesmente apoiada submetida à uma carga concentrada transversal ao seu eixo longitudinal

Fonte: Gere: 2003

A viga mostrada na figura 4.9, que tem uma das extremidades fixa e a outra livre, é chamada viga engastada ou em balanço. No engastamento a viga não translada nem tem rotação, ao passo que na extremidade livre ela pode ter ambos os movimentos. Conseqüentemente, ambas as reações de força e de momento podem ocorrer na extremidade engastada.

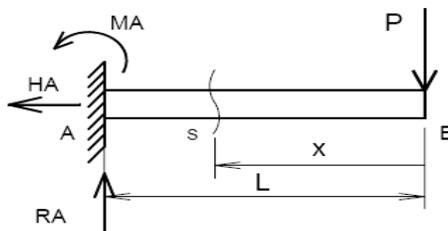


Figura 4.9 Viga em balanço submetida à carga concentrada na extremidade livre

Fonte: Gere, 2003

Já na figura 4.10 apresentamos uma viga simples em balanço. Essa é uma viga com apoio simples nos pontos A e B, ou seja, a viga tem um apoio fixo no ponto A e um apoio móvel no ponto B, mas ela se estende além do apoio no ponto B. O segmento prolongado após o ponto B é similar à viga em balanço, exceto que o eixo pode girar em B.

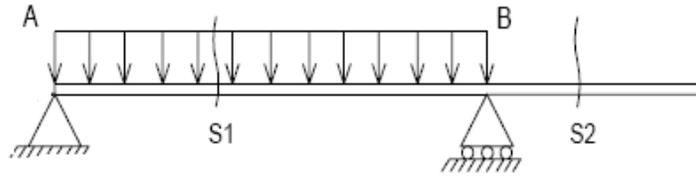


Figura 4.10 Viga Simples em Balanço

Fonte: GASPAR: 2005.

Quando um carregamento é aplicado sobre uma área muito pequena, pode ser idealizado como uma **carga concentrada**, que é uma força simples. Quando um carregamento está distribuído pelo eixo da viga, é representado como um **carregamento distribuído**. Um outro tipo de carregamento é o **binário**, caracterizado pelo momento que atua sobre o balanço da viga.

As cargas distribuídas sobre vigas são cargas por unidade de comprimento. Estas cargas, uniformes ou variáveis, podem ser representadas por uma carga concentrada equivalente (R), cujo valor corresponde à área (A) formada pela figura que representa a carga distribuída e é aplicada em seu centro de gravidade (CG).

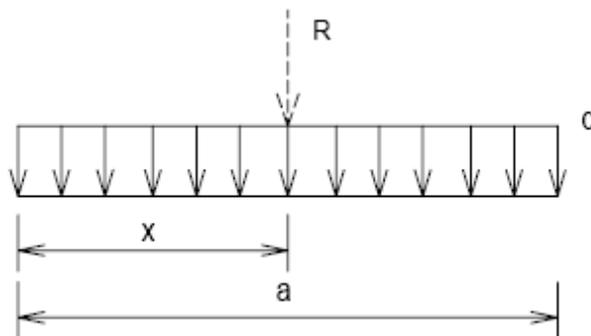


Figura 4.11 Carga Uniformemente Distribuída

- R : carga equivalente, definida como $R = q \cdot a$ (área do retângulo);
- O ponto de aplicação da carga equivalente é o centro de gravidade do retângulo.

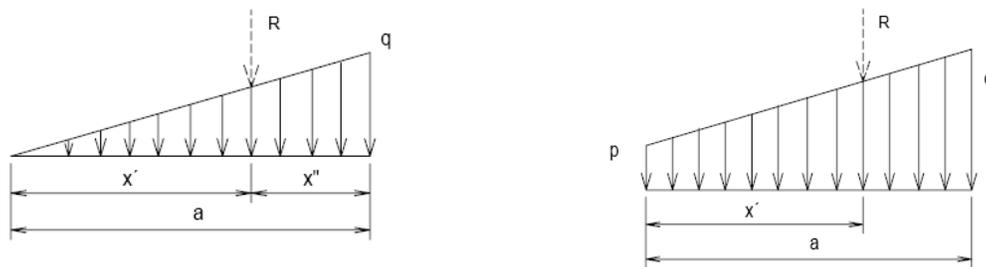


Figura 4.12 Carga Distribuída Variável

Fonte: GASPAR: 2005.

a. Triangular

- O valor da carga é a área do triângulo, ou seja, $R = \frac{q \cdot a}{2}$;
- O ponto de aplicação da carga equivalente é no centro de gravidade do triângulo.

b. Trapezoidal

- O valor da carga equivalente é a área do trapézio, ou seja, $R = \frac{(p + q) \cdot a}{2}$;
- O ponto de aplicação da carga equivalente é no centro de gravidade do trapézio.

EXEMPLO 1 Viga simplesmente apoiada, submetida a uma carga concentrada.

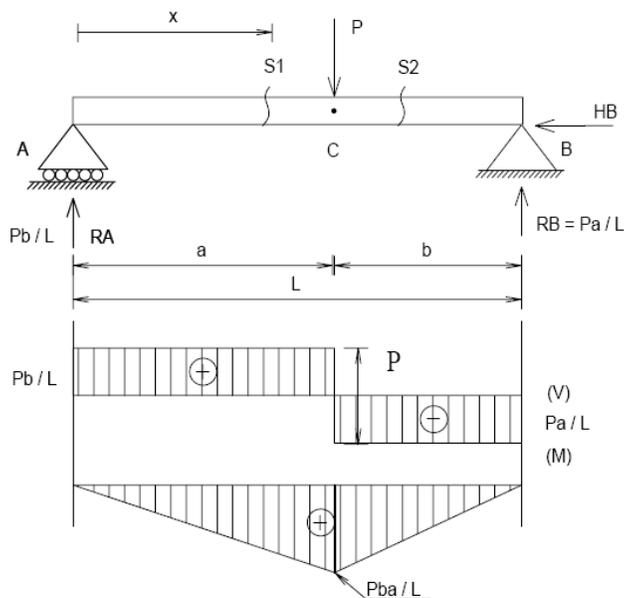


Figura 4.13 Representação Gráfica para o Exemplo 1

Fonte: GASPAR: 2005.

a) Cálculo das reações:

$$\sum F_H = 0 \rightarrow HB = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow RA + RB - P = 0 \rightarrow RA + RB = P \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow RB.L - Pa = 0 \rightarrow RB = \frac{Pa}{L} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), obtemos:

$$RA + \frac{Pa}{L} = P \Rightarrow RA = P - \frac{Pa}{L} \Rightarrow RA = \frac{PL - Pa}{L} \Rightarrow RA = \frac{P(L - a)}{L}$$

Mas como $L = a + b$, logo $b = L - a$ e daí, $RA = \frac{Pb}{L}$

b) Cálculo dos esforços solicitantes internos

- Seção S1 entre A e C, com $0 \leq x \leq a$

Força Cortante: $V = +RA$

Momento Fletor: $M_1 = +RA.x = \frac{Pb}{L}.x$

- Seção S2 entre C e B, com $a \leq x \leq L$

Força Cortante:

$$V_2 = +RA - P = \frac{Pb}{L} - P$$
$$V_2 = \frac{Pb - PL}{L} = \frac{P(b - L)}{L} = -\frac{Pa}{L}$$

Momento Fletor:

$$M_2 = +RA.x - P(x - a)$$
$$M_2 = \frac{Pb}{L}.x - Px + pa \Rightarrow \frac{P}{x} = L$$

Tem-se $\frac{Pb.L}{L} - PL + pa$, como $(b + a + L) \Rightarrow p(b - L + a)$

Obs.: o sinal $+RA.x$ é positivo porque traciona a face inferior da viga e o sinal de $-P(x - a)$ é negativo porque traciona a face superior da viga em relação à seção S.

Quando $a = b = \frac{L}{2}$ tem-se $RA = RB = \frac{P}{2}$ $M_{\max} = \frac{PL}{4}$.

4.5 Forças de Cisalhamento e Momentos Fletores

Quando uma viga sofre a ação de forças ou momentos, são criadas tensões e deformações em seu interior. Para determinar essas tensões e deformações, primeiro devemos encontrar as forças e os momentos internos que atuam nas seções transversais das vigas

A estática nos ensina que a resultante das tensões agindo na seção transversal pode ser reduzida a uma **força de cisalhamento** e um **momento fletor**. Tanto a força de cisalhamento quanto o momento fletor atuam no plano da viga, ou seja, o vetor da força de cisalhamento está no plano da figura e o vetor do momento fletor é perpendicular ao plano da figura.

Forças de cisalhamento e momentos fletores, assim como forças axiais em barras e torques internos em eixos, são resultantes de tensões distribuídas sobre a seção transversal. Portanto, esses valores são conhecidos genericamente por **resultantes de tensões**.

As resultantes de tensões em uma viga estaticamente determinada podem ser calculadas a partir das equações de equilíbrio.

Quando a força de cisalhamento tende a girar o material em sentido horário e o momento fletor tende a comprimir a parte superior da viga e alongar a parte inferior, é usual assumir que a força de cisalhamento e o momento fletor são positivos. Nesse caso, a força de cisalhamento age para baixo e o momento fletor atua no sentido anti-horário.

No caso de uma viga, uma força de cisalhamento positiva tende a girar o material no sentido horário e uma força de cisalhamento negativa tende a girar o material no sentido anti-horário. Além disso, um momento fletor positivo comprime a parte superior da viga e o momento negativo comprime a parte inferior. Todavia, quando escrevemos as equações de equilíbrio usamos a convenção de sinais da estática, segundo a qual as forças são positivas ou negativas de acordo com sua direção em relação aos eixos de coordenadas.

Sabemos que cargas atuando sobre uma viga criam ações internas na forma de forças de cisalhamento e de momentos fletores. Vamos relatar as tensões e deformações associadas a essas ações. Conhecendo as tensões e as deformações, poderemos analisar vigas submetidas a uma gama de condições de carga.

As cargas que atuam na viga a fazem fletir e assim deformar seu eixo em uma curva. Como por exemplo, vamos considerar uma viga engastada submetida a uma carga P em sua extremidade livre (figura 4.14). O eixo que aparece inicialmente reto é então flexionado em uma curva, chamada **linha elástica** da viga.

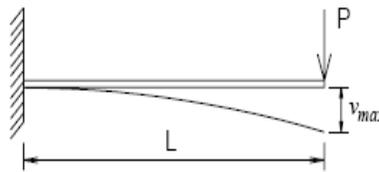


Figura 4.14: Flexão em uma viga engastada

Fonte: SCHIEL, 1984

A **elástica** da viga em qualquer ponto ao longo do seu eixo é o deslocamento desse ponto em relação a sua posição original, medida na direção de y . A deflexão é denotada pela letra v para distingui-la da própria coordenada y .

4.6 – Equações Diferenciais da Linha Elástica

A maioria dos procedimentos para encontrar as linhas elásticas de vigas está baseada em equações diferenciais da curva de deflexão e nas suas relações associadas. Conseqüentemente, iremos iniciar derivando as equações básicas para a curva de deflexão de uma viga.

Para fins de discussão consideraremos uma viga engastada com um carregamento concentrado atuando para cima na extremidade livre. Sob a ação desse carregamento, o eixo da viga deforma-se em uma curva. Os eixos de referencia têm sua origem na extremidade fixa da viga, com o *eixo x* direcionado para a direita e o *eixo y* direcionado para cima. Assumiremos que o plano xy é um plano de simetria da viga e que todos os carregamentos atuam nesse plano.

Para obter a equação da curva de deflexão, precisamos expressar a deflexão v como uma função da coordenada x . A deflexão v em qualquer ponto m_1 na curva de deflexão é mostrada na figura 4.16a. O ponto m_1 está localizado à distância x a partir da origem medida ao longo do eixo x . Um segundo m_2 , localizado à distância $x + dx$ a partir da origem, é também mostrado. A deflexão nesse segundo ponto é $v + dv$, em que dv é o incremento na deflexão conforme nos movemos ao longo da curva desde m_1 até m_2 .

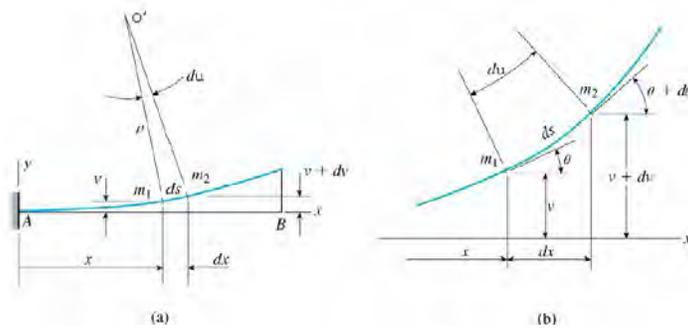


Figura 4.15 Curva de deflexão de uma viga.

Fonte: UFPR, 2006

Quando a viga é flexionada, não há somente uma flecha em cada ponto ao longo do eixo, mas também uma rotação. O **ângulo de rotação** (θ) do eixo da viga é o ângulo entre o eixo x e a tangente à curva deformada, como mostrado para o ponto m_1 na figura 4.16b.

O ângulo de rotação no ponto m_2 é $\theta + d\theta$, em que $d\theta$ é o aumento no ângulo conforme andamos do ponto m_1 para o ponto m_2 . Construindo-se linhas normais às tangentes, o ângulo entre essas normais é $d\theta$ e o ponto de interseção dessas normais é o centro de curvatura O' (Figura 4.15a). A distância do centro de curvatura à curva é chamado de **raio de curvatura** ρ . Da Figura 4.15a, vemos que:

$$\rho d\theta = ds \quad (4.5)$$

Em que ds é a distância ao longo da curva deformada entre os pontos m_1 e m_2 .

A **curvatura** κ é dada pela equação:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (4.6)$$

Pela convenção de sinal, a curvatura é positiva quando o ângulo de rotação aumenta conforme nos movemos ao longo da viga na direção positiva de x .

A **inclinação da curva deformada** é a primeira derivada $\frac{dv}{dx}$ da expressão para a flecha v . Em termos geométricos, a inclinação é o incremento dv na flecha, dividido pelo incremento dx na distância ao longo do eixo x . Uma vez que dv e dx são infinitesimalmente pequenos, a inclinação $\frac{dv}{dx}$ é igual à tangente do ângulo de rotação θ .

Assim,

$$\frac{dv}{dx} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \arctan \frac{dv}{dx} \quad (4.7)$$

De modo similar, obtemos também as seguintes relações:

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{dv}{ds} \quad (4.8)$$

As estruturas encontradas na prática sofrem variações relativamente pequenas na forma enquanto estão em serviço. As mudanças são tão pequenas que não são percebidas por um observador casual. Conseqüentemente, as curvas dos eixos deformados da maioria das vigas e das colunas têm ângulos de rotação muito pequenos, flechas muito pequenas e curvaturas muito pequenas. Sob essas condições podemos fazer algumas aproximações matemáticas que simplificam a análise. Se o ângulo de rotação θ é um valor muito pequeno (e por isso a curva de deflexão é praticamente horizontal), vemos imediatamente que a diferença ds ao longo da curva é praticamente a mesma que o incremento dx ao longo do eixo x . Essa mesma conclusão pode ser diretamente obtida da equação (4.8). Uma vez que $\cos \approx 1$ quando o ângulo θ é pequeno, a equação (4.8) resulta em:

$$ds \approx dx \quad (4.9)$$

e com isso, a equação (4.6) torna-se

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (4.10)$$

Uma vez que $\tan \theta \approx \theta$ quando θ é pequeno, podemos fazer a seguinte aproximação para a equação (9.7)

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx} \quad (4.11)$$

Assim, se as rotações de uma viga são pequenas, podemos assumir que o ângulo de rotação θ e a inclinação $\frac{dv}{dx}$ são iguais.

Tomando a derivada de θ em relação a x na equação (4.11), obtemos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (4.12)$$

Combinando as equações (4.12) e (4.10), obtemos uma relação a curvatura da viga e sua deflexão:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (4.13)$$

Essa equação é válida para uma viga de qualquer material, com a condição de que as rotações sejam pequenas.

Se o material de uma viga é elástico linear e segue da Lei de Hooke, a curvatura é:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (4.14)$$

em que M é o momento fletor e EI é a rigidez de flexão da viga.

Das equações (4.13) e (4.14) produz-se a **equação diferencial da linha elástica** básica de uma viga:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (4.15)$$

Equações adicionais podem ser obtidas a partir das relações entre o momento fletor M , a força de cisalhamento V e a intensidade q da carga distribuída. Para cada tipo de carregamento podemos escrever duas equações de equilíbrio para o elemento – uma equação para equilíbrio de forças na direção vertical e uma para equilíbrio de momentos. Analisando a relação de carregamento distribuído de intensidade q com a força de cisalhamento temos:

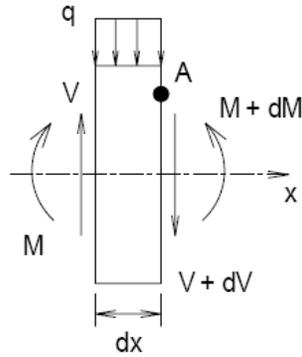


Figura 4.16 Esforços atuantes em um elemento infinitesimal

Fonte: GASPAR, 2005

1 – O equilíbrio de forças na direção vertical fornece:

$$\sum F_{vert} = 0 \Rightarrow V - qdx - (V + dV) = 0 \Rightarrow dV = -qdx$$

e daí,

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (4.16)$$

A partir dessa equação podemos observar que a taxa de variação da força de cisalhamento em qualquer ponto do eixo da viga é igual à intensidade da carga distribuída, mas com sinal negativo, no mesmo ponto.

Algumas relações úteis são óbvias observando-se a equação (4.16). Por exemplo, caso não haja carga distribuída no segmento da viga, então $\frac{dV}{dx} = 0$ e a força de cisalhamento é constante nesse pedaço da viga. Também, no caso em que o carregamento seja uniforme em uma parte da viga ($q = \text{constante}$), então $\frac{dV}{dx}$ também é constante e a força de cisalhamento varia linearmente nessa parte da viga.

2 – Equilíbrio de momento no elemento de viga mostrado na figura 4.....

Somando os momentos atuando sobre um eixo do lado esquerdo do elemento e assumindo momentos no sentido anti-horário como positivos, temos

$$\sum M = 0 \Rightarrow -M - qdx\left(\frac{dx}{2}\right) - (V + dV)dx + M + dM = 0$$

Desconsiderando os produtos de diferenciais, por serem desprezíveis quando comparados aos demais, obtemos a seguinte relação

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (4.17)$$

Essa equação mostra que a taxa de variação do momento fletor em qualquer ponto do eixo de uma viga é igual à força de cisalhamento nesse mesmo ponto. Por exemplo, caso a força de cisalhamento seja zero em uma região da viga, então o momento fletor será constante nessa mesma região.

No caso de uma viga não prismática, a rigidez de flexão EI é variável e, em consequência, escrevemos a equação (4.15) na forma

$$EI_x \frac{d^2v}{dx^2} = M \quad (4.18)$$

em que o subscrito x é inserido como um lembrete de que a rigidez de flexão pode variar com x . Diferenciando ambos os lados dessa equação e usando as equações (4.16) e (4.17), obtemos:

$$\frac{d}{dx} \left(EI_x \frac{d^2v}{dx^2} \right) = \frac{dM}{dx} = V \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_x \frac{d^2v}{dx^2} \right) = \frac{dV}{dx} = -q \quad (4.19a, b)$$

A deflexão de uma viga não-prismática pode ser encontrada resolvendo-se qualquer uma das equações (4.18) ou (4.19a) ou (4.19b). A escolha depende usualmente de qual equação fornece a solução mais eficiente.

No caso de uma viga prismática (EI constante), as equações diferenciais tornam-se:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M \quad EI \frac{d^3v}{dx^3} = V \quad EI \frac{d^4v}{dx^4} = -q \quad (4.20a, b, c)$$

A essas equações nos referimos como **equação do momento fletor** (4.20a), **equação da força de cisalhamento** (4.20b) e **equação do carregamento** (4.20c).

Independentemente do número de equações de momento fletor para a viga, o procedimento geral para resolver equações diferenciais é como segue:

a) Para cada região da viga, substituímos as expressões para M na equação diferencial e integramos para obter a inclinação v' . Cada uma das integrações produz uma constante de integração;

b) Integra-se cada equação da inclinação para obter a flecha v . Novamente, cada integração produz uma nova constante. Assim, há duas constantes de integração para cada região da viga. As constantes são avaliadas a partir de condições conhecidas relativas às inclinações e flechas:

c) Condições de contorno são relacionadas às flechas e inclinações nos apoios da viga. Em um apoio simples, a flecha é nula e, em um apoio engastado, tanto a flecha como a inclinação são nulas.

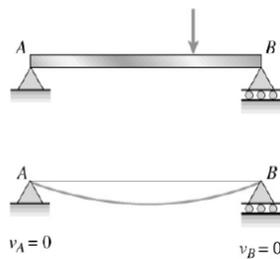


Figura 4.17 Condições de contorno em apoio simples

Fonte: UFPR, 2006

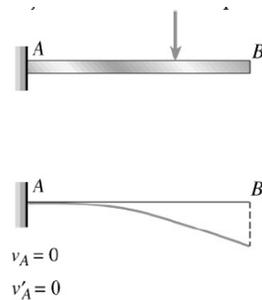


Figura 4.18 Condições de contorno no engaste

Fonte: UFPR, 2006

d) Condições de continuidade ocorrem em pontos em que as regiões de integração encontram-se, como no ponto C da Figura 4.19. A curva do eixo deformado dessa viga é fisicamente contínua no ponto C, e em consequência a flecha no ponto C,

determinada pela parte esquerda da viga, precisa ser igual à flecha determinada pela parte direita. De forma similar, as inclinações encontradas para cada parte da viga precisam ser iguais no ponto C.

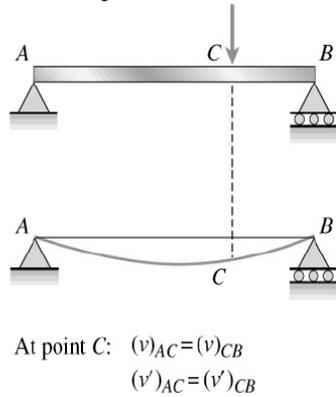


Figura 4.19 Condições de continuidade no ponto C

Fonte: UFPR, 2006

e) Condições de simetria podem também ser avaliadas. Por exemplo, se uma viga suporta uma carga uniforme em todo o seu comprimento, sabemos antecipadamente que a inclinação da curva do eixo deformado no ponto médio precisa ser zero.

Assim, no próximo capítulo apresentaremos exemplos como estudo de casos de aplicações de equações diferenciais para o estudo de vigas.

5. ESTUDO DE CASOS

O objetivo deste capítulo é apresentar a teoria até aqui estudada de maneira aplicada em exemplos ligados às aplicações das equações diferenciais no estudo de flexão de vigas.

EXEMPLO 1 Determine a equação da linha elástica de uma viga simples AB suportando um carregamento uniforme de intensidade q atuando por toda a extensão da viga. Determine também a flecha máxima δ_{\max} no ponto médio da viga. (*Nota:* A viga tem comprimento L e rigidez à flexão EI constante)

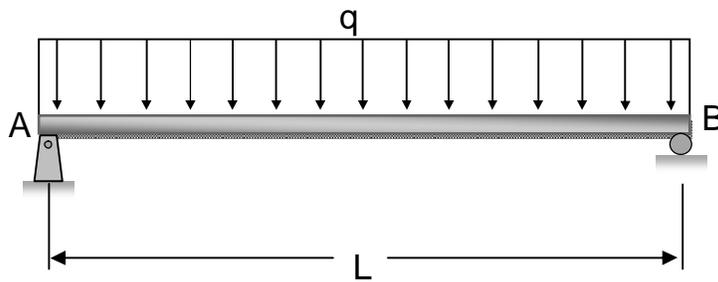


Figura 5.1 Viga biapoiada com uma carga uniformemente distribuída (com o apoio da direita móvel)

Fonte: GERE, 2003.

SOLUÇÃO

Momento fletor na viga. O momento fletor em uma seção transversal distante x de um dos apoios fixo é obtido considerando a reação no mesmo que é igual a $\frac{qL}{2}$.

Conseqüentemente, a expressão para o momento fletor M é:

$$M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad (5.1.1)$$

Equação da linha elástica: Considerando a equação diferencial do momento fletor para uma viga prismática $EIv'' = M$ e substituindo em (5.1.1), obtemos:

$$EIv'' = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad (5.1.2)$$

Essa equação pode ser utilizada para se obter a inclinação e a elástica da viga.

Inclinação da viga: Reescrevendo a equação diferencial (5.1.2) com a notação $\frac{dy}{dx}$, obtemos a seguinte equação:

$$EI \frac{d}{dx}(v') = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad \text{ou} \quad EI d(v') = \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right) dx \quad (5.1.3)$$

que é uma equação diferenciável separável. Logo, Integrando a equação (5.1.3) em relação a dx , obtemos

$$EIv' = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + c_1 \quad (5.1.4)$$

que novamente é separável. Agora, integrando a equação (5.1.4) em relação a x , vem

$$EIv = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + c_1x + c_2 \quad (5.1.5)$$

Para determinarmos c_1 na equação (5.1.4) observamos, a partir da simetria da viga e de seu carregamento, que a inclinação da curva de flexão na metade da extensão é igual a zero, e daí, temos a seguinte condição de simetria:

$$v' = 0 \quad \text{quando} \quad x = \frac{L}{2}$$

Essa condição pode ser expressa mais sucintamente como

$$v'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

Aplicando essa condição em (5.1.4) obtemos

$$0 = \frac{qL}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{q}{6} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_1$$

daí,

$$C_1 = -\frac{qL^3}{24}$$

A equação para a inclinação da viga torna-se então

$$v' = -\frac{q}{24EI} (L^3 - 6Lx^2 + 4x^3) \quad (5.1.6)$$

Elástica da viga: A equação (5.1.5) fornece a elástica da viga e substituindo nela o valor encontrado para a constante c_1 , temos

$$EIv = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{24} + C_2 \quad (5.1.7)$$

A constante de integração C_2 pode ser calculada a partir da condição de que a elástica da viga no suporte fixo é igual a zero; isto é, $v = 0$ quando $x = 0$ ou

$$v(0) = 0$$

Aplicando essa condição em (5.1.7) encontramos $C_2 = 0$; por isso a equação para a elástica da viga é

$$EIv = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{24}$$

ou

$$v = -\frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3) \quad (5.1.8)$$

Essa equação dá o deslocamento vertical em qualquer ponto ao longo do eixo da viga. Vale ressaltar que esse deslocamento é zero em ambas as extremidades da viga e negativa em qualquer outra parte, pois flechas para baixo são negativas por convenção.

Flecha Máxima: Da simetria, observamos que a flecha máxima ocorre no ponto médio do comprimento. Assim, fixando x igual a $\frac{L}{2}$ na equação (5.1.8), obtemos

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5qL^4}{384EI}$$

em que o sinal negativo significa que a orientação positiva do sistema de coordenadas adotado é para cima. Uma vez que δ_{\max} representa a magnitude dessa flexão, obtemos:

$$\delta_{\max} = \left|v\left(\frac{L}{2}\right)\right| = \frac{5qL^4}{384EI}$$

EXEMPLO 2 Determine a equação da linha elástica para uma viga engastada AB submetida a um carregamento uniforme de intensidade q (Figura 5.2a). Determine também o ângulo de rotação θ_b e a deflexão δ_b na extremidade livre (Figura 5.2b). (*Nota:* a viga tem comprimento L e rigidez de flexão EI constante).

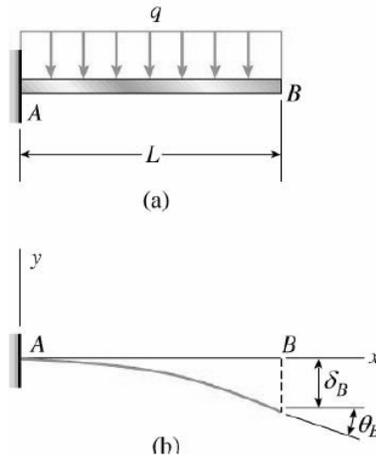


Figura 5.2 Linha elástica de viga engastada com um carregamento uniforme

Fonte: UFPR, 2006

SOLUÇÃO

Momento Fletor na viga. Considerando que a reação vertical no apoio é igual a qL e que a reação do momento é igual a $\frac{qL^2}{2}$, o momento fletor à distância x do suporte fixo é expresso pela equação

$$M = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2} \quad (5.2.1)$$

Equação diferencial da linha elástica: Quando a expressão precedente para o momento fletor é substituída na equação diferencial

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M,$$

obtemos

$$EI \frac{dv^2}{dx^2} = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2} \quad (5.2.2)$$

Agora integramos ambos os lados dessa equação para obter as inclinações e as deflexões

Inclinação da viga: A primeira integração da equação (5.2.2) dá a seguinte equação para a inclinação

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{qL^2x}{2} + \frac{qLx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1 \quad (5.2.3)$$

A constante de integração C_1 pode ser obtida a partir da condição de contorno de que a inclinação da viga é zero no suporte; assim temos a seguinte condição

$$v'(0) = 0$$

Quando essa condição é aplicada à equação (5.2.3), obtemos $C_1 = 0$. Em consequência, a equação (5.2.3) torna-se

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{qL^2x}{2} + \frac{qLx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} \quad (5.2.4)$$

E a inclinação é

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{qx}{6EI} (3L^2 - 3Lx + x^2) \quad (5.2.5)$$

como esperado, a inclinação é zero no suporte ($x=0$) e negativa por todo o comprimento da viga.

Linha elástica da viga: A integração da equação da inclinação (5.2.4) produz

$$EIv = -\frac{qL^2x^2}{4} + \frac{qLx^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + C_2 \quad (5.2.6)$$

A constante C_2 é encontrada a partir da condição de contorno de que a flecha da viga é zero no suporte:

$$v(0) = 0$$

Quando essa condição é aplicada na equação (5.2.6), vemos imediatamente que $C_2 = 0$. Em consequência, a equação para a deflexão v é:

$$v = -\frac{qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) \quad (5.2.7)$$

Como esperado, o deslocamento vertical v é zero no suporte ($x = 0$) e negativa (para baixo) em outras partes.

Ângulo de rotação na extremidade livre da viga: O ângulo de rotação θ_B na extremidade B da viga é igual ao negativo da inclinação naquele ponto. Assim, usando a equação (4.25), obtemos

$$\theta_B = -v'(L) = \frac{qL^3}{6EI} \quad (5.2.8)$$

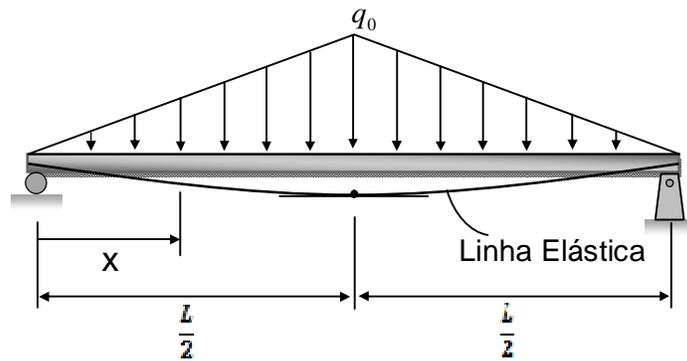
Esse é o ângulo de rotação máxima para a viga.

Flecha na extremidade livre da viga: Uma vez que a deflexão δ_B é para baixo, ela é igual ao negativo da deflexão obtida a partir da equação (5.2.7)

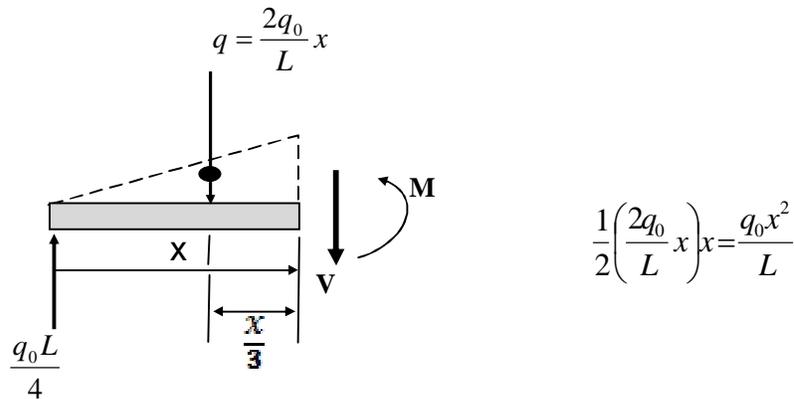
$$\delta_B = -v(L) = \frac{qL^2}{8EI}$$

Essa flecha é o deslocamento vertical máximo da viga.

EXEMPLO 3 A viga simplesmente apoiada da figura 5.3 suporta um carregamento triangular distribuído. Determinar seu maior deslocamento vertical. Considerar EI constante.



(a)



$$\frac{1}{2} \left(\frac{2q_0}{L} x \right) x = \frac{q_0 x^2}{L}$$

(b)

Figura 5.3 Viga simplesmente apoiada com carregamento triangular distribuído

Fonte: HIBBELER, 2000

SOLUÇÃO

Linha Elástica: Devido à simetria, apenas uma coordenada x é necessária para a solução, neste caso, $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$. A viga se desloca como mostra a figura 5.3a. Observe

que o deslocamento vertical máximo ocorre no centro, uma vez que a inclinação nesse ponto é nula.

Momento Fletor na viga: O carregamento distribuído atua para baixo e, portanto, de acordo com nossa convenção de sinais, é positivo. Um diagrama de corpo livre do segmento à direita é mostrado na figura 5.3b. A equação de carregamento distribuído é:

$$q = \frac{2q_0}{L}x \quad (5.3.1)$$

Portanto,

$$M = -\frac{q_0x^3}{3L} + \frac{q_0L}{4}x \quad (5.3.2)$$

Inclinação e Linha Elástica: Usando a equação (4.20a) e integrando duas vezes, temos:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{q_0x^3}{3L} + \frac{q_0L}{4}x \quad (5.3.3)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{q_0}{12L}x^4 + \frac{q_0L}{8}x^2 + C_1$$

$$EIv = -\frac{q_0}{60L}x^5 + \frac{q_0L}{24}x^3 + C_1x + C_2$$

Obtemos as constantes de integração aplicando a condição de contorno, $v = 0$ em $x = 0$

e a condição de simetria $\frac{dv}{dx} = 0$ em $x = \frac{L}{2}$. Isso leva a:

$$C_1 = -\frac{5q_0L^3}{192} \text{ e } C_2 = 0$$

Portanto:

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{q_0}{12L}x^4 + \frac{q_0L}{8}x^2 - \frac{5q_0L^3}{192}$$

$$EIv = -\frac{q_0}{60L}x^5 + \frac{q_0L}{24}x^3 - \frac{5q_0L^3}{192}x$$

Determinando o deslocamento máximo em $x = \frac{L}{2}$, temos:

$$v_{\text{máx}} = -\frac{q_0L^4}{120EI}$$

EXEMPLO 4 A viga simplesmente apoiada mostrada na figura 5.4a está submetida à força concentrada P . Determinar seu deslocamento vertical máximo. Considerar EI constante.

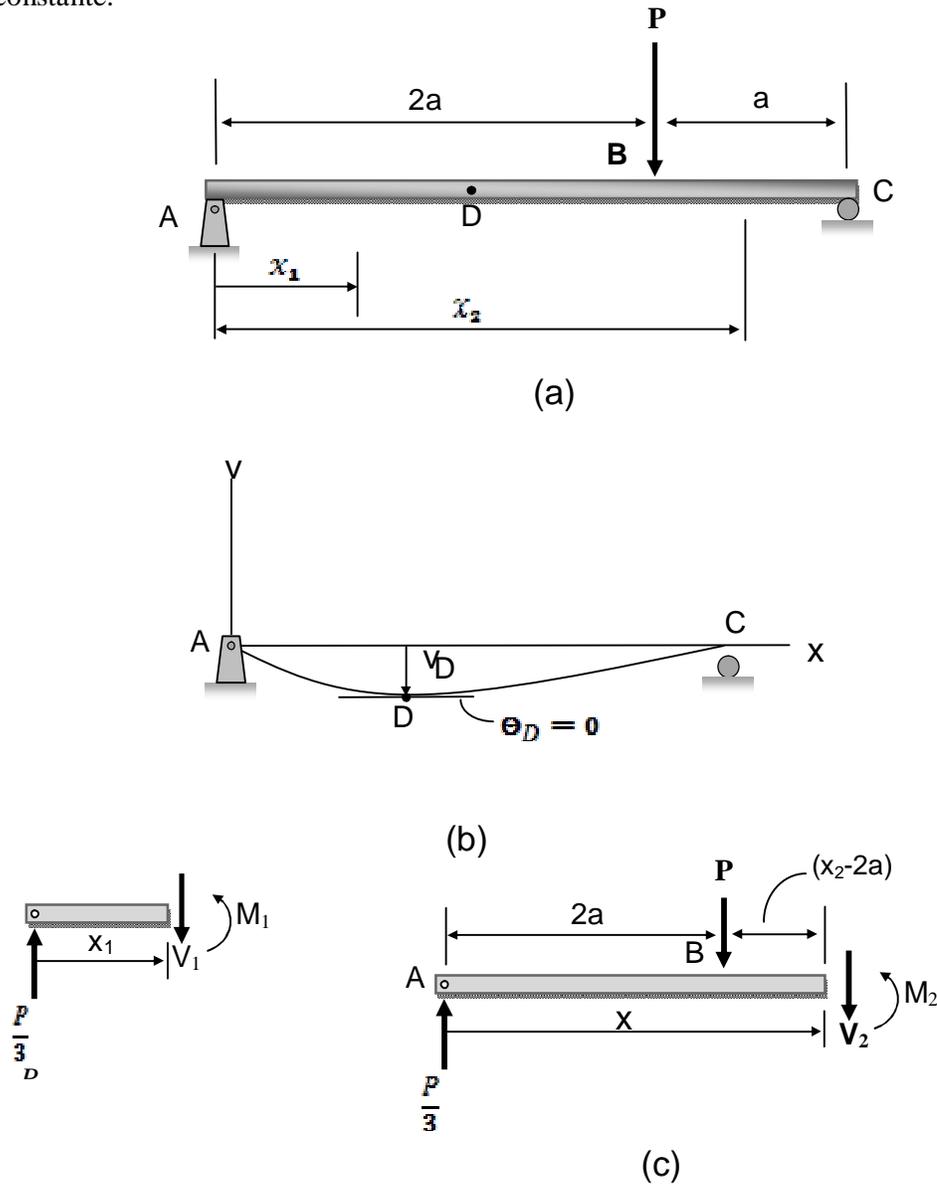


Figura 5.4 Viga simplesmente apoiada submetida à força concentrada em um ponto qualquer da viga

Fonte: HIBBELER, 2000.

SOLUÇÃO

Linha Elástica: A viga se deflete como mostra a figura 5.3b. Devemos usar duas coordenadas, visto que o momento fletor torna-se descontínuo em P . Nesse caso,

admitiremos que x_1 e x_2 tenham a mesma origem em A, de modo que $0 \leq x_1 \leq 2a$ e $2a \leq x_2 \leq 3a$.

Momento Fletor da Viga: Pelos diagramas de corpo livre mostrados na figura 5.3c,

$$M_1 = \frac{P}{3}x_1$$

$$M_2 = \frac{P}{3}x_2 - P(x_2 - 2a) = \frac{2P}{3}(3a - x_2)$$

Inclinação e Linha Elástica: Aplicando a equação (4.20a) para M_1 e integrando duas vezes, temos:

$$EI \frac{d^2v_1}{dx_1^2} = \frac{P}{3}x_1$$

$$EI \frac{dv_1}{dx_1} = \frac{P}{6}x_1^2 + C_1 \quad (5.4.1)$$

$$EIv_1 = \frac{P}{18}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \quad (5.4.2)$$

De maneira semelhante para M_2 :

$$EI \frac{d^2v_2}{dx_2^2} = \frac{2P}{3}(3a - x_2)$$

$$EI \frac{dv_2}{dx_2} = \frac{2P}{3} \left(3ax_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) + C_3 \quad (5.4.3)$$

$$EIv_2 = \frac{2P}{3} \left(\frac{3}{2}ax_2^2 - \frac{x_2^3}{6} \right) + C_3x_2 + C_4 \quad (5.4.4)$$

Calculamos as quatro constantes usando duas condições de contorno, ou seja, $x_1 = 0, v_1 = 0$ e $x_2 = 3a, v_2 = 0$. Além disso, devem ser aplicadas duas condições de continuidade em B, isto é, $\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{dv_2}{dx_2}$ em $x_1 = x_2 = 2a$ e $v_1 = v_2$ em $x_1 = x_2 = 2a$.

Substituindo como especificado, resultam as quatro equações seguintes:

$$v_1 = 0 \text{ em } x_1 = 0; \quad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ em } x_2 = 3a; \quad 0 = \frac{2P}{3} \left(\frac{3}{2}a(3a)^2 - \frac{(3a)^3}{6} \right) + C_3(3a) + C_4$$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = \frac{dv_2(2a)}{dx_2}; \quad \frac{P}{6}(2a)^2 + C_1 = \frac{2P}{3} \left(3a(2a) - \frac{(2a)^2}{2} \right) + C_3$$

$$v_1(2a) = v_2(2a); \quad \frac{P}{18}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2 = \frac{2P}{3} \left(\frac{3}{2}a(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{6} \right) + C_3(2a) + C_4$$

Resolvendo essas equações, obtemos:

$$C_1 = -\frac{4}{9}Pa^2 \quad C_2 = 0 \quad C_3 = -\frac{22}{9}Pa^2 \quad C_4 = \frac{4}{3}Pa^3$$

Desse modo, as equações de (5.4.1) a (5.4.4) tornam-se:

$$\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{P}{6EI}x_1^2 - \frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (5.4.5)$$

$$v_1 = \frac{P}{18EI}x_1^3 - \frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EI}x_1 \quad (5.4.6)$$

$$\frac{dv_2}{dx_2} = \frac{2Pa}{EI}x_2 - \frac{P}{3EI}x_2^2 - \frac{22}{9} \frac{Pa^2}{EI} \quad (5.4.7)$$

$$v_2 = \frac{Pa}{EI}x_2^2 - \frac{P}{9EI}x_2^3 - \frac{22}{9} \frac{Pa^2}{EI}x_2 + \frac{4}{3} \frac{Pa^3}{EI} \quad (5.4.8)$$

Analisando a linha elástica (Figura 5.4b), conclui-se que o deslocamento vertical máximo ocorre em D, em algum lugar da região AB. Nesse ponto a inclinação é nula. Pela equação (5.4.5):

$$\frac{1}{6}x_1^2 - \frac{4}{9}a^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,633a$$

Substituindo na equação (5.4.6):

$$v_{máx} = -0,484 \frac{Pa^3}{EI}$$

O sinal negativo indica que o deslocamento ocorre para baixo.

EXEMPLO 5: A viga da figura 5.5a está submetida a uma força concentrada em P na extremidade. Determinar o deslocamento vertical em C. Considerar EI constante.

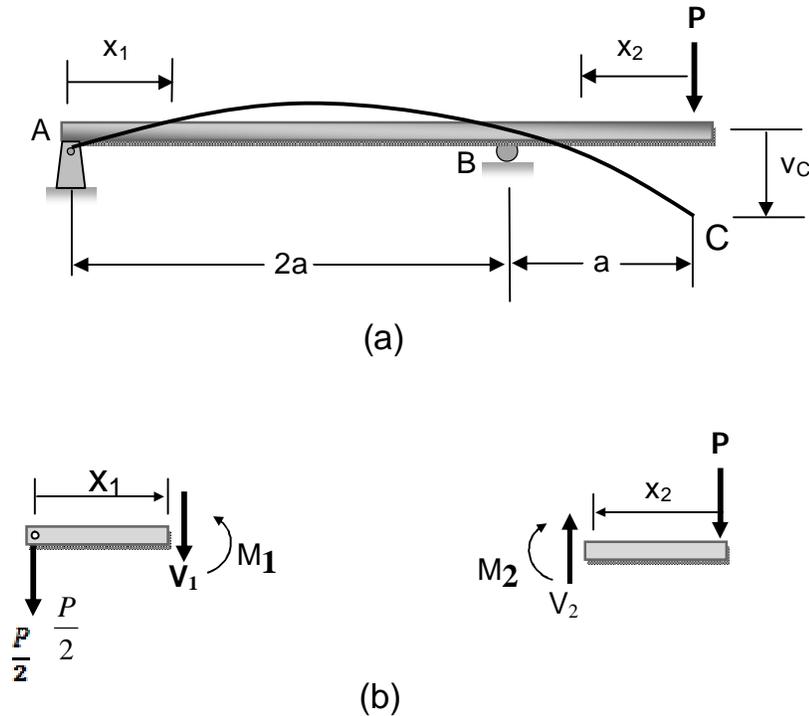


Figura 5.5 Viga simples em balanço submetida à força concentrada em uma das extremidades da viga

Fonte: HIBBELER, 2000.

SOLUÇÃO

Linha Elástica: A viga se deflete até adquirir a forma mostrada na figura 5.5a. Devido ao carregamento, devem ser consideradas duas coordenadas x , ou seja, $0 \leq x_1 \leq 2a$ e $0 \leq x_2 \leq a$, onde x_2 orienta-se para a esquerda a partir de C, uma vez que o momento interno é fácil de expressar.

Momento Fletor: Usando os diagramas de corpo livre mostrados na figura 5.5b temos:

$$M_1 = -\frac{P}{2}x_1 \text{ e } M_2 = -Px_2$$

Inclinação e Linha Elástica: Aplicando a equação (4.20a), temos:

- Para $0 \leq x_1 \leq 2a$

$$\circ \quad EI \frac{d^2 v}{dx_1^2} = -\frac{P}{2} x_1$$

$$\circ \quad EI \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{P}{4} x_1^2 + C_1 \quad (5.5.1)$$

$$\circ \quad EI v_1 = -\frac{P}{12} x_1^3 + C_1 x_1 + C_2 \quad (5.5.2)$$

- Para $0 \leq x_2 \leq a$

$$\circ \quad EI \frac{d^2 v}{dx_2^2} = -P x_2$$

$$\circ \quad EI \frac{dv_2}{dx_2} = -\frac{P}{2} x_2^2 + C_3 \quad (5.5.3)$$

$$\circ \quad EI v_2 = -\frac{P}{6} x_2^3 + C_3 x_2 + C_4 \quad (5.5.4)$$

Determinam-se as quatro constantes de integração usando três condições de contorno, ou seja, $v_1 = 0$ em $x_1 = 0$; $v_1 = 0$ em $x_1 = 2a$ e $v_2 = 0$ em $x_2 = a$ e uma equação de continuidade. Nesse caso, a continuidade da inclinação no rolete requer $\frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{dv_2}{dx_2}$ em $x_1 = 2a$ e $x_2 = a$. Aplicando essas condições, temos:

$$v_1 = 0 \text{ em } x_1 = 0; \quad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ em } x_2 = 2a; \quad 0 = -\frac{P}{12}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ em } x_2 = a \quad 0 = -\frac{P}{6}a^3 + C_3 a + C_4$$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = -\frac{dv_2(a)}{dx_2} \quad -\frac{P}{4}(2a)^2 + C_1 = -\left(-\frac{P}{2}(a)^2 + C_3\right)$$

Resolvendo, obtemos:

$$C_1 = \frac{Pa^2}{3} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{7}{6}Pa^2 \quad C_4 = -Pa^3$$

Substituindo C_3 e C_4 na equação (5.5.4), temos:

$$v_2 = -\frac{P}{6EI}x_2^3 + \frac{7Pa^2}{6EI}x_2 - \frac{Pa^3}{EI}$$

O deslocamento vertical em C é determinado fazendo-se $x_2 = 0$ e daí, obtemos:

$$v_C = -\frac{Pa^3}{EI}$$

EXEMPLO 6: Determinar, para viga e o carregamento indicado:

- a equação da linha elástica;
- a declividade de viga no apoio A;
- a flecha máxima

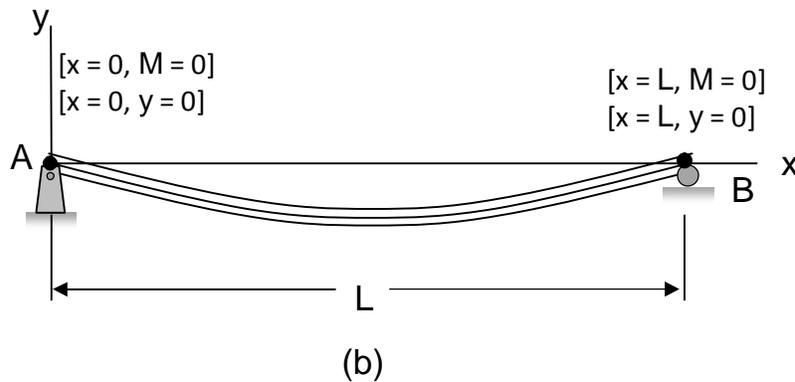
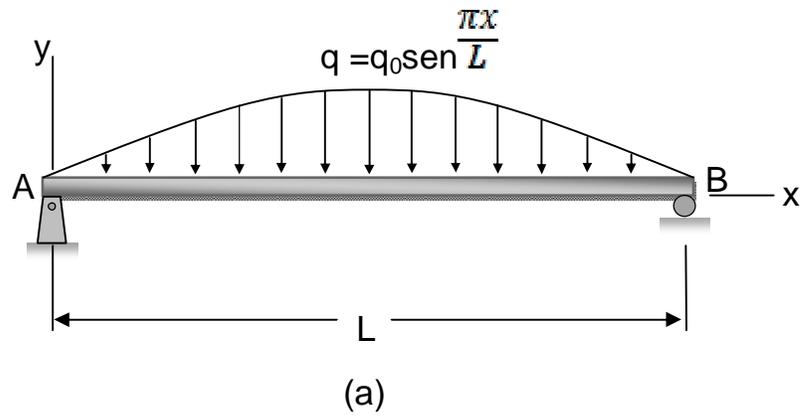


Figura 5.6 Viga biapoiada com uma carga uniformemente distribuída

Fonte: BEER, 1995

SOLUÇÃO

Equação diferencial da linha elástica: Da equação (4.20c),

$$EI \frac{d^2 y}{dx^4} = -q = -q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (5.6.1)$$

Integrando essa equação duas vezes:

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V = +q_0 \frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} + C_1 \quad (5.6.2)$$

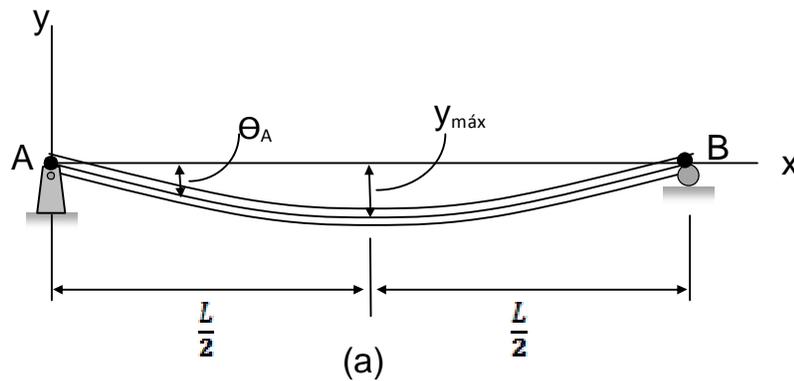
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = +q_0 \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + C_1 x + C_2 \quad (5.6.3)$$

Condições de Contorno:

$|x = 0; M = 0|$: Da equação (5.6.3), determinamos $C_2 = 0$

$|x = L; M = 0|$: Novamente da equação (5.6.3), temos

$$0 = q_0 \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \pi + C_1 L \quad C_1 = 0$$



Desse modo:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = +q_0 \frac{L^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (5.6.4)$$

Integrando a equação (5.6.4) duas vezes:

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = -q_0 \frac{L^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{L} + C_3 \quad (5.6.5)$$

$$EIy = -q_0 \frac{L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + C_3 x + C_4 \quad (5.6.6)$$

Condições de Contorno:

$|x = 0, y = 0|$: Da equação (5.6.6), determinamos $C_4 = 0$

$|x = L, y = 0|$: Novamente, da equação (5.6.6), temos $C_3 = 0$

Assim,

a) *Equação da linha elástica:*

$$EIy = -q_0 \frac{L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

b) *Declividade da linha elástica no apoio A:* Para $x = 0$, temos

$$EI\theta_A = -q_0 \frac{L^3}{\pi^3} \cos(0) \quad \theta_A = \frac{q_0 L^3}{\pi^3 EI}$$

c) *Flecha Máxima:* Para $x = \frac{L}{2}$

$$EIy_{m\acute{a}x} = -q_0 \frac{L^4}{\pi^4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \quad y_{m\acute{a}x} = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI}$$

CONCLUSÃO

Quando se propõe a estudar o comportamento de corpos sólidos, tem-se em mente a determinação de tensões, deformações e deslocamentos em suas estruturas devido a ação de cargas sobre eles. Podendo encontrar essas quantidades para todos os valores das cargas, até as que causam falhas, teremos uma noção completa do comportamento mecânico dessas estruturas.

Um entendimento do comportamento mecânico é essencial para o projeto seguro de todos os tipos de estruturas, como aviões e antenas, prédios e pontes, máquinas e motores ou navios e espaçonaves. A estática e a dinâmica são essenciais por lidarem, principalmente, com as forças em movimento associadas com partículas e corpos rígidos. Com equações diferenciais damos um passo além, ao examinar tensões e deformações dentro de corpos reais, isto é, corpos de dimensões finitas que deformam sob cargas.

Vimos assim a importância do entendimento de equações diferenciais enquanto ferramenta matemática disponível para diversos ramos da ciência, e em específico, para a engenharia, na necessidade de determinar as tensões e as deformações usando as propriedades físicas dos materiais, bem como as leis que regem o comportamento desses estruturas.

As análises teóricas e os resultados experimentais têm igual importância no estudo do comportamento de estruturas. Usa-se a teoria matemática para derivar fórmulas e equações prevendo o comportamento mecânico, mas as mesmas não podem ser utilizadas em projetos práticos, a menos que as propriedades físicas dos materiais sejam conhecidas. Tais propriedades estão disponíveis somente após experimentos terem sido cuidadosamente conduzidos em laboratórios. Além disso, nem todos os problemas práticos são contornáveis apenas com análise teórica e, em tais casos, testes físicos são necessários.

Portanto, o estudo apresentado tem sua importância descrita na relação matemática-engenharia, fornecendo ferramentas úteis e indispensáveis para o

entendimento de fenômenos que estão à nossa volta cotidianamente, mas que passam despercebidos por serem estruturas prontas e acabadas.

Ao estudarmos o comportamento dos elementos de vigas, observamos uma gama muito grande de aplicações de equações diferenciais e um estímulo a continuar nesse campo de pesquisa, descobrindo assim a infinidade de aplicações que a matemática possibilita para explicar fenômenos naturais e reais.

Neste trabalho, nos preocupamos com a determinação da linha elástica da viga submetidas a um dado carregamento. O interesse particular da determinação do máximo deslocamento vertical em uma viga está no fato de que, geralmente, as especificações do projeto de uma viga incluem um valor máximo admissível para esse deslocamento.

Com esse estudo, observamos a gama de aplicações de equações diferenciais e para os cursos de engenharia e arquitetura, que tenham um material conciso em mãos que visa apresentar uma maneira concreta para que os profissionais desses cursos, possam facilitar o entendimento de uma de suas principais matérias prima de estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEER, F. P.; JOHNSTON JR, E. R. **Resistência dos Materiais**. São Paulo: Makron Books, 1995.
- BOYCE, Willian.; DiPRIMA, Richard; **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. Ed. Tradução Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 1996
- GASPAR, Ricardo; **Mecânica dos Materiais**. São Paulo: [S.I.], 2005
- GERE, James. **Mecânica dos Materiais**. Tradução Luiz Fernando de Castro Paiva. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- HIBBELER, R.C.. **Resistência dos Materiais**. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
- SCHIEL, Frederico. **Introdução à Resistência de Materiais**. São Paulo: HARBA, 1984
- TIMOSHENKO. GERE. **Mecânica dos Sólidos – Vol. 01**. Tradução José Rodrigues de Carvalho. Rio de Janeiro: LTC, 1992
- UFPR. Biblioteca Central. **Estruturas Metálicas**. Curitiba, 2006. Disponível em <<http://www.cesec.ufpr.br/~metalica/04/04.htm>>. Acesso em: 18 de set. 2010.