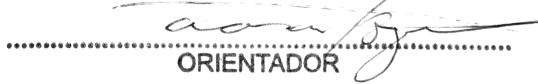


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR LEONARDO BARTALINI  
BARUFFALDI ..... E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 05/07/2010  
  
.....  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Leonardo Bartalini Baruffaldi

**Aplicação do método da complementaridade  
linear para a modelagem de cunhas de atrito de  
vagões ferroviários**

Campinas, 2010

91/2010

Leonardo Bartalini Baruffaldi

# **Aplicação do método da complementaridade linear para a modelagem de cunhas de atrito de vagões ferroviários**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Júnior

Campinas  
2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA – BAE – UNICAMP

B288a

Baruffaldi, Leonardo Bartalini

Aplicação do método da complementaridade linear para  
a modelagem de cunhas de atrito de vagões ferroviários /  
Leonardo Bartalini Baruffaldi. --Campinas, SP: [s.n.],  
2010.

Orientador: Auteliano Antunes dos Santos Junior.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Engenharia ferroviária. 2. Complementaridade. 3.  
Dinâmica de corpos rígidos. 4. Mecânica do contato. I.  
Santos Junior, Auteliano Antunes. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia  
Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Modeling of friction wedges for railroad vehicles usin the  
linear complementarity method

Palavras-chave em Inglês: Railway engineering, Complementarity, Rigid body  
dynamics, Mechanical contact

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Paulo Roberto Gardel Kurka, Roberto Spinola Barbosa

Data da defesa: 05/07/2010

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO**

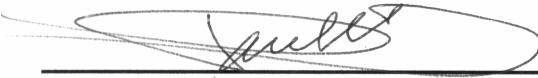
**Aplicação do método da complementaridade linear para a modelagem de cunhas de atrito de vagões ferroviários**

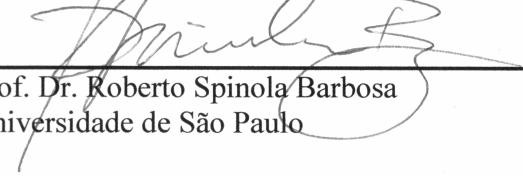
Autor: Leonardo Bartalini Baruffaldi

Orientador: Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Júnior

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

  
Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Júnior, Presidente  
Universidade Estadual de Campinas

  
Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka  
Universidade Estadual de Campinas

  
Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa  
Universidade de São Paulo

Campinas, 05 de julho de 2010

À Tathi.

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer ao professor Auteliano Antunes dos Santos Júnior por ter confiado no desenvolvimento deste trabalho e por ter me dado liberdade o suficiente para seguir os caminhos teóricos que julguei corretos.

Agradeço, também, a todos meu colegas de pós-graduação, Alexandre, Aliandro, Cleudiane e Paulo, pela companhia e pelo suporte ao desenvolvimento do trabalho.

Finalmente, agradeço sinceramente a minha família, especialmente aos meus pais, Vanda e Walter, e aos meus padrinhos, Célia e Vladimir, pelo exemplo que me deram durante toda a minha formação acadêmica.

*Il n'y a rien qui soit entièrement en notre pouvoir,  
que nos pensées.*  
- Renè Descartes

## Resumo

Por 150 anos, os truques de três peças têm sido a estrutura padrão para o suporte de eixos e suspensões de trens de carga em diversos países. Embora sua robustez e facilidade de manutenção tenham conservado, em linhas gerais, a disposição e projeto dos componentes, novos requerimentos de carga e velocidade dos trens vêm mudando a forma como os projetistas enxergam o truque. Especial atenção tem sido dada ao modelo matemático da cunha de atrito, a peça fundida que é responsável pelo amortecimento dos vagões. A cunha de atrito promove a dissipação da energia mecânica por meio de contato de atrito seco com outros componentes do vagão. Devido às altas forças normais desenvolvidas nas superfícies de contato com características não suaves e, em geral, não lineares de atrito, as equações que regem o movimento da suspensão tornam-se de resolução difícil e surgem fenômenos como o de adesão-escorregamento e o comportamento caótico típico de osciladores autoexcitados. O presente trabalho tem como objetivo propor o uso de algoritmos de solução de problemas de complementaridade linear para resolver as forças de contato entre os corpos, visando a aprofundar a discussão sobre os modelos adotados para a cunha de atrito. Os resultados obtidos mostram que é possível modelar as forças de contato desse sistema utilizando um problema de complementaridade linear e que essa abordagem é, sob certas condições, mais eficiente do que o método das penalidades, normalmente aplicado para a resolução de problemas de contato.

### *Palavras Chave*

- Dinâmica de veículos ferroviários, problema de complementaridade linear, sistemas multicorpos, contato entre corpos rígidos

## Abstract

For about 150 years now, three-piece trucks have been the standard axis' and suspensions' subframe used in freight railroad cars. The toughness and low maintenance costs of this system worked to maintain its basic design almost unchanged, but new requirements for loads and speed for freight cars are changing the way designers see the three-piece truck. Among the many interesting components of the three-piece truck, the friction wedge is getting some attention. The friction wedge is the main damping element in three-piece trucks and acts to dissipate mechanical energy via highly stiff contacts with friction. Due to the non-smooth and non-linear nature of frictional efforts, the equations of motion of the three-piece trucks become very awkward to deal with. Interesting phenomena of stick-slip, bifurcations, and limit cycle, typical of friction oscillators appear to some extent under normal operation. This work's main objective is to propose a new approach based on complementarity problems, used to solve for contact forces, to further extend the discussion on wedge dampers models. Results show that it is possible to model the problem using the linear complementarity problem and that, in some situations, this can be even more computationally efficient than the usual approach to solve contact problems: the penalty method.

### *Key Words*

- Railway vehicle dynamics, linear complementarity problems, multibody systems, contact between rigid bodies

## **Lista de Ilustrações**

Figura 1.1. Fragmento de gravura do livro <i>De re metallica</i> (Agrícola, 1912) que ilustra um método de transporte de minério empregado na Europa durante o séc. XVI.	1
Figura 1.2 Modelo simplificado da suspensão secundária.	8
Figura 2.1. (a) Truque com suspensão a ar (Continental AG, Alemanha) e (b) truque de três peças com cunha de atrito (Standard Car Truck Co., EUA)	10
Figura 2.2. Vagão de carga típico e sistemas de coordenadas adotados no estudo da dinâmica veicular.	10
Figura 2.3. Vista lateral do truque evidenciando a suspensão secundária.	11
Figura 2.4. Suspensões secundárias tipo (a) Barber e (b) <i>ride control</i> .	12
Figura 2.5. Alguns tipos de cunhas de atrito tipo Barber (Standard Car Truck Co.). O primeiro modelo, de ferro fundido, é o mais tradicional. Os outros três são resultado de desenvolvimentos mais recentes.	13
Figura 2.6. Vista lateral do truque, mostrando os componentes da suspensão secundária tipo Barber.	14
Figura 2.7. Esquema da sequência de rotações de Cardan.	17
Figura 2.8. Posição de um ponto pertencente a um corpo rígido.	21
Figura 2.9. Ciclo limite para vibração autoexcitada com um grau de liberdade.	25
Figura 2.10. Equivalência entre (a) forças de contato e (b) pressões de contato em uma interface aresta-aresta.	32

Figura 2.11. Programa para solução de problemas de contato. Adapatado com modificações de Sharf e Zhang (2006)	33
Figura 2.12. Contato vértice-face (a), contato vértice-vértice (b), contato vértice-aresta (c).	34
Figura 2.13. Representação do sistema de coordenadas do ponto de contato.	41
Figura 2.14. Ângulo de rotação dos sistemas de coordenadas dos pontos de contato $I_{i,j}$ em relação ao sistema do corpo $I_j$ .	42
Figura 2.15. Ciclo de histerese da força de atrito em função da velocidade de escorregamento (McMillan, 1997)	52
Figura 2.16. Caracterização das forças de atrito como resultado da rugosidade das superfícies de contato.	53
Figura 2.17. Cone de atrito e pirâmide de atrito.	54
Figura 3.1. Modelo da suspensão secundária desenvolvido em ADAMS/View.	58
Figura 3.2. Possíveis configurações do sistema para uma posição fixa da cunha esquerda.	59
Figura 3.3. Comparaçao da região de adesão permanente para os três modelos ensaiados. A curva azul indica o limite teórico calculado em Kaiser et al. (2002).	61
Figura 3.4. Desenvolvimento do fenômeno de adesão-escorregamento ( $\beta = 0,2$ , equivalente a 2,7 Hz).	62
Figura 3.5. Modelo da suspensão secundária.	64
Figura 3.6. Conjuntos de molas.	65
Figura 3.7. Característica de cada conjunto de molas da travessa.	65
Figura 3.8. Característica de cada conjunto de molas das cunhas.	66

Figura 3.9. Possíveis pontos de contato dos corpos envolvidos (índices locais).	67
Figura 3.10. Dimensões dos componentes	69
Figura 4.1. Modelo plano da suspensão secundária em Adams.	73
Figura 4.2. Função de atrito utilizada pelo Adams.	74
Figura 4.3. Resultados para excitação com amplitude de 3000 N.	78
Figura 4.4. Resultados para excitação com amplitude de 1800 N.	79
Figura 4.5. Resultados para excitação com amplitude de 500 N.	80
Figura 4.6. Deslocamento vertical da travessa	82
Figura 4.7. Trajetórias de fase	83
Figura 4.8. Energia cinética da travessa.	84
Figura 4.9. Forças verticais de contato na travessa.	85
Figura 4.10. Forças verticais em função do tempo para Adams (a) e MATLAB (b).	85

## **Lista de Tabelas**

Tabela 1.1. Dados das privatizações das principais estradas de ferro pertencentes à RFFSA (Fonte: Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes).	4
Tabela 2.1. Análise das possíveis relações entre velocidade e aceleração relativas e as consequências esperadas.	36
Tabela 2.2. Exemplo de matriz de conectividade de contatos.	40
Tabela 3.1. Parâmetros físicos do modelo proposto	70
Tabela 4.1. Parâmetros de ajuste do modelo de contato em Adams.	74
Tabela 4.2. Configurações dos programas de simulação.	76
Tabela 4.3. Tempo de processamento, em segundos, dos modelos em Adams e MATLAB	81

## Lista de Símbolos e Abreviaturas

### ***Símbolos***

$S_j$	Centro de massa de um corpo $j$
$K_j$	Corpo $j$
$g$	Distância de penetração
$m_{ij}$	Elemento de matriz
$r$	Expoente de penalização
$f^n$	Força normal (intensidade)
$f^n$	Força normal (vetor)
$f^t$	Força tangencial (intensidade)
$f$	Frequência
$f^t$	Força tangencial (vetor)
$x^i$	$i$ -ésimo componente de um vetor
$m_j$	Massa de um corpo $j$
$\tilde{a}$	Matriz antissimétrica
$Um$	Matriz de atrito
$C^n$	Matriz de conectividade normal
$C^t$	Matriz de conectividade tangencial
$\hat{L}$	Matriz de esforços inerciais
$\hat{M}$	Matriz de massa
$\hat{N}$	Matriz de projeção normal
$\hat{D}$	Matriz de projeção tangencial
$T$	Matriz de rotação
$\hat{V}$	Matriz de rotação de sistemas de pontos de contato
$\bar{I}$	Matriz identidade
$\bar{0}$	Matriz nula

N	Número de corpos de um sistema
p	Número de pontos de contato de um corpo
m	Número de pontos de contato de um sistema
n	Ordem de um PCL
$P_k$	Ponto global de contato
$P_{i,j}$	Ponto local de contato
${}^A r_i$	Posição de um ponto $i$ no referencial $A$
k	Rigidez
t	Tempo
$v_{\text{rel}}$	Velocidade relativa
$\hat{\mathbf{A}}$	Vetor de acelerações não lineares
$\hat{\mathbf{f}}$	Vetor de forças de contato de um corpo
$\hat{\mathbf{F}}$	Vetor de forças externas generalizadas
$f_{i,j}$	Vetor força de contato em um ponto $P_i$ de um corpo $K_j$
$\mathbf{F}_{\text{ext}}$	Vetor força externa
M	Vetor momento de uma força
H	Vetor quantidade de movimento angular
$\hat{\mathbf{n}}$	Vetor unitário normal a uma superfície
$\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2$	Vetores unitários tangenciais a uma superfície
$\alpha$	Componente angular do vetor posição
	Ângulo de inclinação cunha/lateral
$\beta$	Componente angular do vetor posição
	Fator adimensional de frequência angular
$\gamma$	Componente angular do vetor posição
	Ângulo de inclinação da cunha/travessa
$\mu$	Coeficiente de atrito
$\nu$	Função característica normal de contato
$\tau$	Função característica tangencial de contato

$\phi$	Função de atrito de Coulomb
$\Gamma_i$	Sistema de coordenadas associado a um corpo $K_i$
$\Gamma_{i,\phi}$	Sistema de coordenadas associado a um ponto $P_{i,j}$ pertencente ao corpo $K_j$
$\Gamma_0$	Sistema de coordenadas associado a um referencial inercial
$\rho$	Vetor posição relativa
$\omega$	Vetor velocidade angular

### *Abreviaturas*

ANTT	Agência Nacional de Transportes Terrestres
DNIT	Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes
FEUPASA	Ferrovias Paulistas S.A.
RFFSA	Rede Ferroviária Federal S.A.
PCL	Problema de complementaridade linear

# SUMÁRIO

1. Introdução	1
1.1. Situação das estradas de ferro no Brasil	2
1.2. Tecnologia de transporte de cargas	4
1.3. Definição do problema	6
1.4. Objetivo	8
2. Conceitos Básicos e Revisão da Literatura	9
2.1. O truque de três peças	9
2.2. Cunhas de atrito	13
2.3. Dinâmica de sistemas de corpos rígidos	15
2.4. Oscilações autoexcitadas, diagramas de fase e ciclos-limite	24
2.5. Problemas de complementaridade linear	26
2.6. Contato	29
3. Modelos matemáticos	57
3.1. Modelo da suspensão secundária com juntas de translação em Adams/View	57
3.2. Modelo da suspensão com contatos modelados como PCLs em MATLAB	63
4. Resultados e discussão	71
4.1. Considerações sobre a frequência de vibração	71
4.2. Comparação com o modelo em Adams	72

4.3. Comparação das respostas a condições iniciais com carga	81
5. Conclusões e trabalhos futuros	86
Referências Bibliográficas	88
Outras referências	92
APÊNDICE A – Listagem do programa	93
APÊNDICE B - Equação de Gruebler	109

# 1. INTRODUÇÃO

As ferrovias foram o primeiro meio de transporte de massas de alta velocidade que a humanidade desenvolveu. Em todo mundo, a estrada de ferro virou um marco iconográfico do imaginário popular que ainda hoje é associado, pelo menos de maneira subjetiva, ao vanguardismo do progresso e ao desbravamento de novas fronteiras territoriais. Essa imagem formada é mais do que justificada pelo papel que as ferrovias representaram na integração nacional e, de maneira particularmente relevante nas Américas, na expansão territorial de uma série de países.

As primeiras manifestações de transporte por meio de veículos guiados por trilhos, por estranho que possa parecer, datam das antigas estradas romanas e gregas (Lewis, 2001) que eram sulcadas para facilitar a rodagem das carroças e que transportavam tanto produtos como pessoas por trechos das estradas em que a estabilidade longitudinal era dificultada pelas condições do terreno. Durante a Idade Média, com a retração do comércio, o conceito de transporte por meio de veículos guiados caiu em desuso e, estima-se, só foi retomado na região da Alemanha no início da Idade Moderna (Figura 1.1).



**Figura 1.1.** Fragmento de gravura do livro *De re metallica* (Agrícola, 1912) que ilustra um método de transporte de minério empregado na Europa durante o séc. XVI.

Datam do início do início do séc. XVII as primeiras vias funiculares, que foram muito populares antes da invenção da máquina a vapor. Esses equipamentos eram utilizados para executar a subida e descida de montanhas e morros e funcionavam da seguinte maneira: dois vagonetes eram montados em trilhos paralelos e presos um ao outro por uma corda ou corrente; os dois moviam-se em sentidos opostos, de maneira que, quando um estava descendo, o outro estava subindo. Dessa forma, havia um aproveitamento da energia potencial dos vagões, reduzindo a necessidade de uma fonte externa que, em muitos casos, era fluvial ou animal. O estado de São Paulo possui um dos mais bem preservados sistemas funiculares do mundo, que foi operado pela São Paulo Railway e funcionou até meados da 1980. Atualmente o sistema encontra-se aberto para visitação turística no município de Paranapiacaba.

Durante o séc. XVIII, inovações tecnológicas prepararam o cenário para a explosão das ferrovias que ocorreria durante o século seguinte. De acordo com Lessa (1993), a expansão ferroviária explosiva que ocorreu no séc. XIX foi uma necessidade imposta ao recém nascido sistema capitalista: a revolução industrial criou uma grande oferta de produtos, mas a infraestrutura de distribuição desses bens não atendia aos anseios do mercado consumidor. As estradas de ferro, na época o meio de transporte mais veloz e com maior capacidade de carga, foram a resposta para o problema da distribuição e, além disso, ajudaram a espalhar por regiões pouco habitadas o modo de vida que começava a surgir nas cidades maiores.

### **1.1. Situação das estradas de ferro no Brasil**

No Brasil, a implantação das estradas de ferro deu-se, segundo dados da Associação Brasileira de Preservação Ferroviária, a partir de 1854, quando o Barão de Mauá criou a Estrada de Ferro de Petrópolis. Enquanto no Estado do Rio de Janeiro a expansão ferroviária ocorreu por iniciativa do governo imperial, principalmente com o intuito de transportar passageiros, em São Paulo a economia cafeeira impulsionou a criação da São Paulo Railway (SPR), que ligava Jundiaí ao porto de Santos. Para escoar a produção desde os produtores residentes no interior de São Paulo até o terminal da SPR em Jundiaí, diversas estradas férreas secundárias foram criadas com

capital privado e, normalmente, com assistência técnica britânica. Por meio de compras e fusões, as pequenas companhias que administravam os ramais da SPR deram origem à Estrada de Ferro Sorocabana e à Estrada de Ferro Mogiana, entre outras. A malha ferroviária nacional estendeu-se, então, a partir do eixo Rio-São Paulo.

O desenvolvimento das companhias férreas no Brasil durante o século passado foi marcado pelo auge e pela decadência desse meio de transporte no país. No começo do séc. XX as ferrovias eram o símbolo do crescimento econômico nacional e, em particular, da ascensão de São Paulo e Minas Gerais como pólos de riqueza. A partir da década de 1950 os incentivos estatais à criação de rodovias e instalação de montadoras de veículos rodoviários fizeram com que o sistema ferroviário fosse pouco a pouco sendo abandonado, como bem relata Stefani (2007). Durante o período de ocaso da malha ferroviária nacional (entre 1950 e 2000), a Companhia Vale do Rio Doce (CVRD) aparece como uma das principais mantenedoras de sistemas de estradas de ferro, também pela sua necessidade de transportar grandes quantidades de minérios por regiões pouco habitadas do país. Dados do Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes (DNIT) revelam que houve, apenas na década de 1980, uma queda de 80% nos investimentos na Rede Ferroviária Federal S.A. (RFFSA). A Ferrovias Paulistas S.A. (FEPASA), companhia que unificou as cinco principais ferrovias paulistas, não passava por situação melhor.

A opção brasileira de privilegiar o transporte rodoviário em detrimento do ferroviário e hidroviário mostrava-se, já no início da década de 1990, como um entrave ao desenvolvimento econômico do país. Os problemas identificados nessa época tornaram-se cada vez mais graves e evidentes durante o crescimento experimentado nos anos pós Plano Real (1994). Em 2007, a precariedade dos modais de transporte no país contribuiu para que os custos com logística no Brasil representassem 20% do PIB, um dos maiores índices do mundo.

Buscando reativar a malha férrea, a RFFSA foi incluída no Plano Nacional de Desestatização. A Tabela 1.1 resume o processo de privatização das componentes da RFFSA. Por ocasião da privatização da CVRD, em 1997, o governo federal cedeu a essa empresa os direitos de uso e as obrigações de manutenção da Estrada de Ferro Vitória a Minas e da Estrada de Ferro Carajás.

**Tabela 1.1. Dados das privatizações das principais estradas de ferro pertencentes à RFFSA (Fonte: Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes).**

Malha regional	Data do leilão	Concessionária	Início da operação	Extensão (km)
Oeste	05/03/1996	Ferrovia Novoeste S.A.	01/07/1996	1621
Centro-Leste	14/06/1996	Ferrovia Centro-Atlântica S.A.	01/09/1996	7080
Sudeste	20/09/1996	MRS Logística S.A.	02/12/1996	1674
Nordeste	18/07/1997	Cia. Ferroviária do Nordeste	01/01/1998	4534
Sul	13/12/1998	América Latina Logística S/A	01/03/1997	6586
Paulista	10/11/1998	FERROBAN S.A.	01/01/1999	4236

O decênio 1997-2007 viu a retomada dos investimentos na malha ferroviária, que passaram de R\$ 35 milhões em 1997 para R\$ 2,69 bilhões em 2007 (ANTT, 2007) sendo que, desse montante, cerca de 40% foi investido em material rodante, ou, em outras palavras, em equipamentos móveis, como locomotivas e vagões. No mesmo período, a produção de transportes de carga nacional cresceu aproximadamente 85%, de  $138 \times 10^9$  ton-km para  $257 \times 10^9$  ton-km<sup>1</sup>.

O Plano Nacional de Logística e Transportes (PNLT), elaborado pelo Ministério dos Transportes em 2007, recomendou que deveriam ser investidos, até 2023, mais de R\$ 50 bilhões de reais na malha ferroviária como uma forma de diversificar e flexibilizar a matriz de transportes brasileira, o que inclui a criação de novas estradas de ferro e a interligação de troncos já existentes.

## 1.2. Tecnologia de transporte de cargas

O grande salto tecnológico das vias férreas, no entanto, ocorreu da metade para o final do séc. XVIII. Por volta de 1760, companhias férreas inglesas começaram a substituir os trilhos de

---

<sup>1</sup> ton-km = tonelada quilômetro útil. É um índice de desempenho de estradas de ferro que consiste da multiplicação da massa de produtos transportados pela quantidade de quilômetros rodados durante um ano.

madeira, utilizados até então, por peças fabricadas em aço forjado. Isso reduziu o desgaste dos trilhos e permitiu aumentar a carga líquida transportada. Em 1784, James Watt patenteou o primeiro esboço de uma locomotiva a vapor, idealizada a partir de aperfeiçoamentos do motor a vapor. Cerca de uma década mais tarde, as rodas ferroviárias, que tinham formatos variados, mas, em geral eram cilíndricas ou levemente cônicas, começaram a ser substituídas pelas rodas flangeadas, que apresentam indiscutíveis vantagens para a dinâmica lateral dos vagões, pois permitem forças laterais muito maiores. O estudo da interação entre roda e trilho é, ainda hoje, objeto de muita pesquisa devido à natureza não linear e transitória das forças de contato. Além disso, sabe-se que o desgaste das peças causa alterações importantes nas superfícies de atrito que acabam por modificar as especificações de projeto.

No início do séc. XIX, Richard Trevithick construiu o primeiro protótipo do que viria a ser a locomotiva a vapor e, alguns anos mais tarde, em 1825, foi fundada na Inglaterra a primeira fábrica de locomotivas do mundo, a Robert Stephenson & Co. Ao final do séc. XIX já existiam diversas locomotivas elétricas e, em pouco tempo, o padrão Diesel seria adotado.

Apesar da expansão ferroviária ter ocorrido de maneira quase concomitante nas diversas regiões do globo, as particularidades econômicas de cada país fizeram com que o tipo de suspensão ferroviária para cargas variasse, de modo que se estabeleceu uma separação clara entre os vagões de carga europeus e americanos.

O projeto específico depende das necessidades de cada tipo de produto transportado, mas nos EUA, China, Rússia, Austrália, Brasil e boa parte da América Latina, os vagões de carga em geral são sustentados por dois conjuntos mecânicos de suspensões chamados de truque de três partes (TTP). Essa denominação deve-se aos três componentes (duas laterais e a travessa) que formam a moldura responsável pela posição dos eixos e sustentação de uma metade do vagão.

Conforme salienta Hawthorne (1996), chamar o truque de três peças por esse nome pode levar a conclusões indevidas, pois ele é composto por muito mais de três partes. Componentes de suspensão, freios, eixos, rolamentos, placas de desgaste e sistemas de esterçamento auxiliar são também montados no truque de três partes. Todos esses subsistemas citados apresentam variações que acompanham as necessidades dos vagões e das vias em que eles estão instalados. Ainda

assim, a configuração básica dos TTPs foi estabelecida há mais de 150 anos e sofreu poucas modificações desde então.

Esta dissertação tem como foco principal uma das modificações mais importantes que foram incorporadas ao truque de três peças no séc. XX: a cunha de atrito. Essa peça, de uma simplicidade mecânica surpreendente, foi introduzida em 1935 pela Standard Car Truck Company em resposta à necessidade cada vez maior de promover a dissipação da energia de vibrações induzidas pelas irregularidades dos trilhos, pois as velocidades de tráfego ferroviário estavam aumentando, junto com a carga transportada por eixo.

### **1.3. Definição do problema**

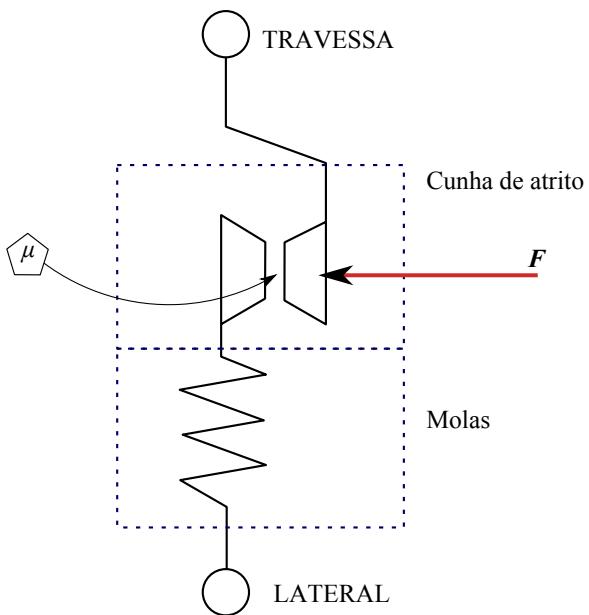
As cunhas de atrito estão, portanto, há cerca de 80 anos sendo utilizadas no amortecimento de trens de carga de diversas partes do mundo. Ainda hoje, seus efeitos sobre o comportamento dinâmico do veículo não são totalmente compreendidos. O mecanismo de dissipação de energia empregado nesse tipo de suspensão deve-se ao desenvolvimento de forças de contato de grande intensidade nas superfícies dos componentes. Essa dependência de esforços de contato - atrito e normal - introduz descontinuidades e não linearidades que escapam aos tratamentos de linearização e que, portanto, só podem ser estudados por meio de soluções numéricas aproximadas, geralmente resultantes da solução de um problema de valores iniciais de um sistema rígido de equações diferenciais ordinárias.

Até pouco tempo atrás, a utilização de técnicas de projeto baseadas em análises computacionais estruturais (elementos finitos e similares) e dinâmicas (multicorpos) era quase que restrita às indústrias automobilística e aeroespacial, nas quais o volume de produção, os requerimentos de seguranças, os altos custos de fabricação ou uma combinação desses três fatores tornaram obrigatório o desenvolvimento de técnicas mais avançadas. Segundo Evans e Berg (2009), o início das pesquisas em técnicas computacionais no ramo ferroviário deu-se por volta de 1960, ainda como uma forma de procurar validar as hipóteses utilizadas até então no projeto de veículos desse modal. À medida que a confiabilidade dos resultados cresceu e eles

tornaram-se mais próximos dos dados experimentais, as empresas começaram a adotar técnicas de sistemas multicorpos. Inicialmente foram utilizadas para o projeto de trens de passageiros, nos quais questões ligadas às vibrações afetam muito diretamente a percepção que o mercado tem sobre a qualidade de um determinado produto.

O transporte de cargas, em particular na América, demorou um pouco mais para entrar na era do VPD ("virtual product development"). O aumento gradual da velocidade das ferrovias, o crescimento da carga transportada e as pressões econômicas fizeram com que os fabricantes de sistemas de suspensão ferroviárias voltassem sua atenção para métodos mais eficientes e baratos de desenvolver seus produtos. O uso de ferramentas de simulação trouxe uma série de vantagens, não só no sentido de redução de custos como também no de melhorias na qualidade do produto. Note-se, por exemplo, a quantidade de novos tipos de cunha de atrito que vêm sendo propostas ao longo das últimas duas décadas, sem falar nos trabalhos relacionados ao desgaste de material rodante, novos desenhos de ampara balanços, adaptadores e componentes estruturais do truque (Hawthorne, 1996).

Como o desenvolvimento de *softwares* dedicados ao transporte de cargas seguiu-se ao de passageiros, boa parte da tecnologia acabou sendo herdada e diversos componentes específicos para vagões cargueiros não possuem ainda uma modelagem adequada. Entre esses componentes, encontra-se a cunha de atrito e, pensando de uma maneira mais geral, a suspensão secundária como um todo. Os algoritmos dedicados à solução de problemas da dinâmica dos veículos ferroviários de carga em geral adotam modelos simplificados como o exibido pela Figura 1.2, em que a suspensão secundária é reduzida a uma mola linear em série com um amortecedor de atrito, ao qual é aplicada uma força  $F$  variável (Xia et al., 2006). Esses modelos podem variar em complexidade, mas em geral têm como objetivo simplificar ao máximo o sistema como uma forma de reduzir custos de computação, visto que os métodos de cálculo de forças de contato envolvem processos computacionais mais dispendiosos. Os efeitos dessas simplificações no comportamento geral do trem não é tão notado, o que as justifica em alguns casos. No entanto, estudos mais profundos sobre o desenvolvimento das suspensões ficam limitados e, por isso, é necessário desenvolver modelos mais complexos.



**Figura 1.2** Modelo simplificado da suspensão secundária.

#### 1.4. Objetivo

O objetivo desta dissertação é desenvolver um modelo para a suspensão secundária que permita o cálculo das forças de contato entre as superfícies dos componentes da suspensão. O algoritmo de cálculo é baseado na formulação de contato como um problema de complementaridade linear (PCL), que pode ser resolvido por rotinas de pivotamento. O modelo aproxima o comportamento dinâmico da suspensão secundária sem incorrer em custos computacionais elevados, o que permite sua incorporação em um ambiente de simulação multicorpos, como os que usualmente são empregados nas análises de veículos ferroviários.

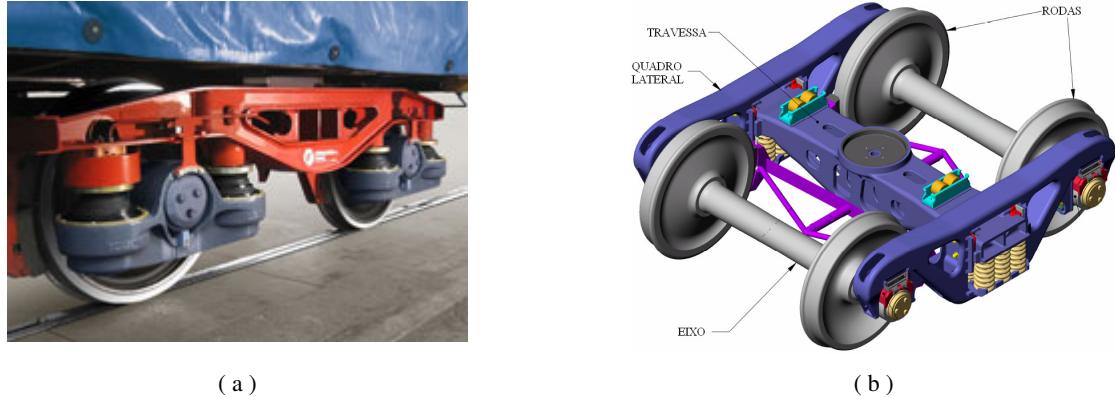
## 2. CONCEITOS BÁSICOS E REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo apresenta uma revisão concisa dos aspectos teóricos necessários ao desenvolvimento do trabalho. As Seções 2.1 e 2.2 apresentam a descrição do sistema físico que é o centro de atenções desta dissertação: o truque de três peças. Atenção especial é dada à cunha de atrito, principal responsável pela dissipação de energia mecânica na suspensão de veículos ferroviários de carga. Na Seção 2.3, são retomados conceitos básicos da dinâmica dos corpos rígidos: sistemas de coordenadas e referenciais, matrizes de rotação, equações de movimento de Newton-Euler. Esse assunto é estendido à Seção 2.4, na qual são dadas explicações sobre o aparecimento e análise de uma categoria bem específica de vibrações: as oscilações autoexcitadas. Problemas de complementaridade linear, um importante ramo de estudo da matemática computacional, são brevemente abordados na Seção 2.5. As Seções seguintes, 2.6 e 2.6.2, mostram como é possível descrever uma restrição de contato mecânico por meio de um problema de complementaridade linear.

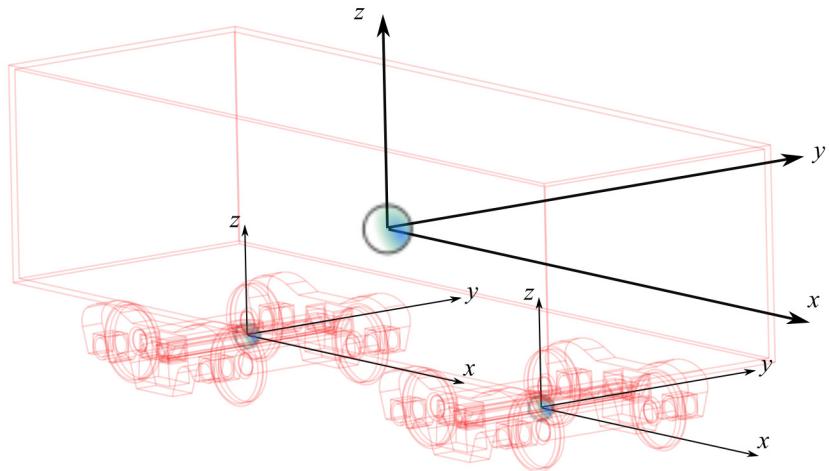
### 2.1. O truque de três peças

Apesar da expansão ferroviária ter ocorrido de maneira quase concomitante nas diversas regiões do globo, as particularidades econômicas de cada país fizeram com que o tipo de suspensão ferroviária para cargas variasse, de modo que se estabeleceu uma distinção clara entre os vagões de carga europeus e americanos. Enquanto na Europa o uso de suspensões mais sofisticadas, com molas a ar e sistemas secundários e primários integrados (Figura 2.1a) é comum, nas Américas, China, países da Federação Russa e Austrália, a configuração tradicional do truque de três peças (Figura 2.1b) continua sendo a mais encontrada. Em geral, cada vagão da composição é suportado por dois truques, responsáveis por toda a interação veículo-via. A Figura 2.2 mostra esse sistema evidenciando, ainda, os sistemas de coordenadas geralmente adotados no estudo da dinâmica do vagão. O eixo  $x$  é chamado longitudinal e os movimentos de rotação ao

seu redor são movimentos de rolagem (*roll*); o eixo *y* é lateral e as rotações ao seu redor são movimentos de arfagem (*pitch*); o eixo *z* é vertical para cima e as respectivas rotações são conhecidas como guinadas (*yaw*). Cada truque também tem seu próprio sistema de coordenadas, que é paralelo ao do vagão na posição de montagem, mas que se move solidário à travessa.



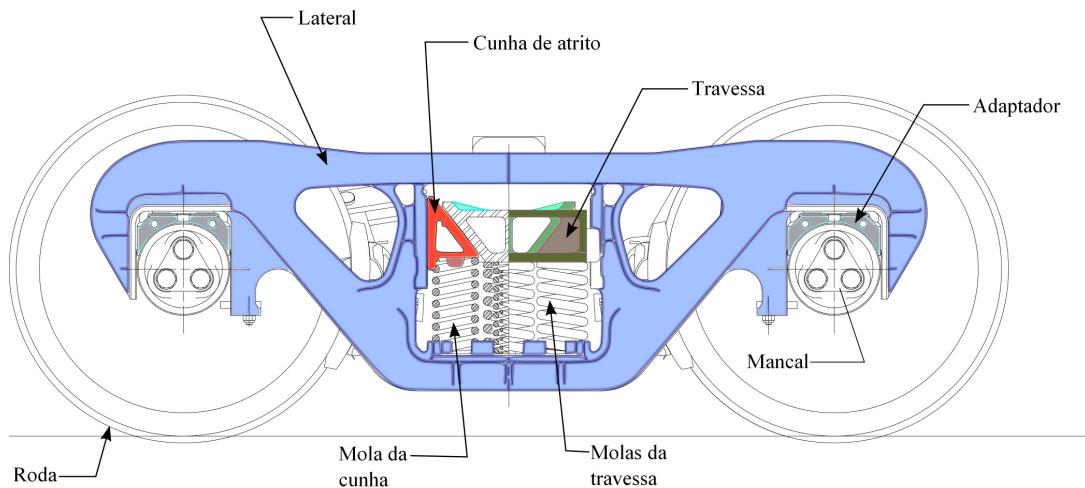
**Figura 2.1. (a) Truque com suspensão a ar (Continental AG, Alemanha) e (b) truque de três peças com cunha de atrito (Standard Car Truck Co., EUA)**



**Figura 2.2. Vagão de carga típico e sistemas de coordenadas adotados no estudo da dinâmica veicular.**

O truque de três peças apresenta basicamente a mesma estrutura há cerca de 150 anos. As três peças a que o nome se refere são: os dois quadros laterais e a travessa, que formam a estrutura em forma de H (também conhecida como *aranha*) ilustrada na Figura 2.1b e que serve

de moldura para a montagem dos outros elementos que formam o truque. Essas três peças básicas são geralmente fabricadas em ferro ou aço fundido e apresentam grande durabilidade. As laterais são conectadas aos mancais dos eixos por meio de peças conhecidas como adaptadores, que também são fabricadas em ferro ou aço fundido, Figura 2.3. Quando o truque entra em uma curva, forças laterais forçam os eixos a deixarem de ser paralelos, garantindo a correta inscrição na manobra. Esse movimento gera grandes forças de contato entre trilhos e rodas que são transmitidas às laterais por meio de placas de desgaste que ficam posicionadas sobre os adaptadores. A transmissão de forças faz com que ocorra o desalinhamento da aranha do truque em um fenômeno conhecido como *wraping*. Os adaptadores também têm um papel na dinâmica vertical, fazendo parte da suspensão primária do truque: sua alta rigidez favorece a resposta a excitações de alta frequência que são filtradas pela suspensão secundária.

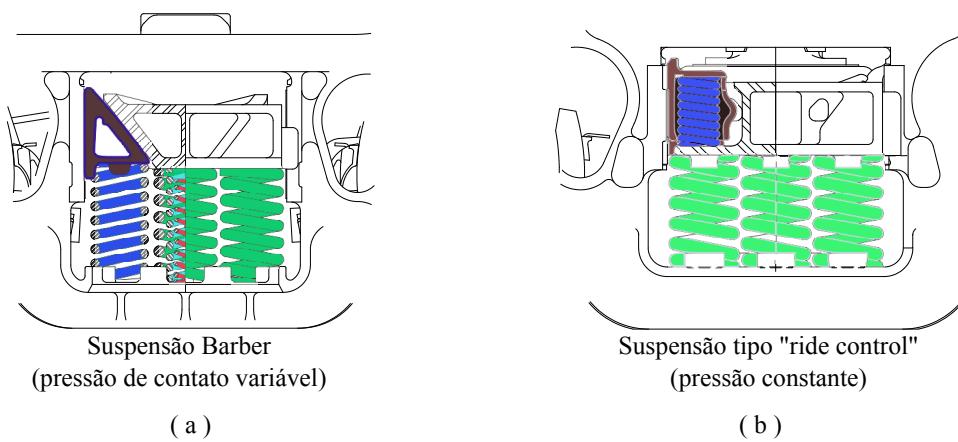


**Figura 2.3. Vista lateral do truque evidenciando a suspensão secundária.**

A suspensão secundária do truque é composta, geralmente, por várias molas e por dois amortecedores (cunhas) de atrito. As molas são montadas diretamente sobre uma plataforma fundida na própria lateral, chamada berço, e suportam a carga da travessa, além de pressionarem as cunhas contra as superfícies da lateral e da travessa. Na interface de contato entre cunha e lateral também é usual montar-se uma placa de desgaste, pois nessa superfície os deslocamentos relativos entre os componentes são maiores (pois o ângulo da cunha é menor). As placas são trocadas periodicamente, assim como as cunhas, para evitar que o sistema perca suas características de amortecimento.

Quanto à disposição física de molas e cunhas, são duas as configurações mais comuns em uso. A suspensão de amortecimento variável, também conhecida como Barber (Figura 2.4a), apresenta nove grupos de molas sendo que sete sustentam a travessa e duas, as cunhas. As molas das cunhas são ligadas diretamente ao berço da lateral e, portanto, nessa configuração a pressão de contato que a cunha exerce sobre as superfícies da travessa e da lateral varia com o carregamento e com o curso da suspensão. Esse fato faz com que cargas maiores sejam mais amortecidas. No arranjo Barber para truques que transportam cargas com massas variadas (grãos ou minérios, por exemplo), geralmente as molas empregadas no suporte da travessa para esse tipo de suspensão são compostas por três espiras em paralelo, com rigidezes e comprimentos livres diferentes. Em trens que transportam cargas especialmente altas, podem ser empregadas molas compostas também no suporte das cunhas.

A outra configuração de suspensão secundária, conhecida por *ride control* (Figura 2.4b) apresenta amortecimento aproximadamente independente da carga do vagão. Nesse caso, a cunha fica posicionada dentro de uma cavidade da travessa, que é totalmente apoiada sobre as molas de suspensão. Cada cunha possui uma pequena mola que fica comprimida entre ela e a travessa e que tem como objetivo principal compensar o desgaste natural do componente, mantendo a pressão de contato e, portanto, o amortecimento.



**Figura 2.4. Supensões secundárias tipo (a) Barber e (b) *ride control*.**

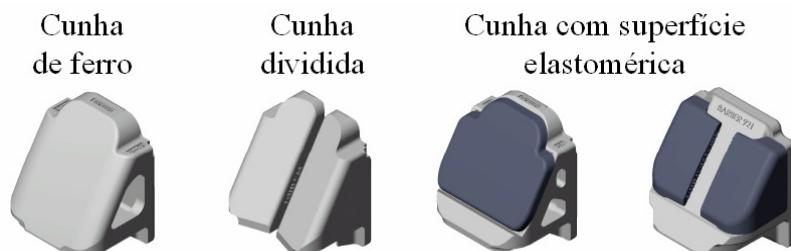
Seja na configuração Barber ou na *ride control*, a suspensão secundária trabalha, ainda, com movimentos limitados de arfagem e de guinada. De fato, a disposição das molas ao longo de

todo o sentido longitudinal da travessa indica alta rigidez ao redor do eixo y, o que contribui para determinar o comportamento de arfagem do vagão como um todo. As rotações da travessa ao longo desse eixo provocam deslizamentos locais nas superfícies de contato das cunhas e, consequentemente, o movimento também é amortecido. O sistema, então, apesar de mecanicamente simples, apresenta uma grande riqueza de possíveis movimentos, todos acoplados e com presença de elementos não lineares.

## 2.2. Cunhas de atrito

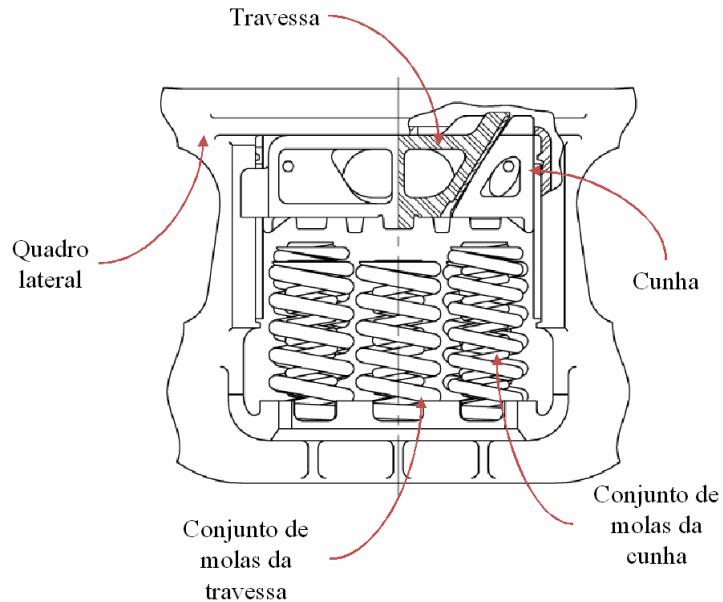
Um dos componentes mais interessantes do truque de três peças também já é utilizado há muito tempo e sua forma geral também pouco mudou durante esse período: trata-se da cunha de atrito. A Figura 2.5 traz quatro exemplares de cunhas de atrito para diferentes aplicações.

Em 1935, a velocidade de deslocamento dos trens de carga evidenciou a necessidade de aumentar o amortecimento na resposta do truque de três peças da época, que até então tinha apenas a histerese das molas e o contato entre partes da travessa e dos membros laterais para impor a dissipação de energia. A Standard Car Truck Company introduziu, então, cunhas de ferro fundido em uma cavidade da travessa para que os movimentos da base do truque fossem amortecidos pelas forças de atrito geradas nas interfaces (Hawthorne, 1996). A Figura 2.6 apresenta a vista lateral do truque mostrando a posição da cunha de atrito.



**Figura 2.5. Alguns tipos de cunhas de atrito tipo Barber (Standard Car Truck Co.). O primeiro modelo, de ferro fundido, é o mais tradicional. Os outros três são resultado de desenvolvimentos mais recentes.**

Apesar de ser um componente de projeto antigo, os efeitos da cunha de atrito na resposta dinâmica da suspensão dos trens de carga ainda não são completamente compreendidos. As forças de contato atuantes nas superfícies de interface cunha-travessa-lateral são de natureza não linear e, como o atrito é do tipo seco, também descontínuas (não suaves). Além disso, o coeficiente de atrito depende de fatores difíceis de serem controlados e simulados, como o desgaste das superfícies, temperatura de operação e das características de deformação superficial dos materiais. Some-se a isso o fato de sistemas não lineares externamente excitados apresentarem, sob certos regimes de operação, características não periódicas de resposta e que, além de tudo, são altamente sensíveis às condições iniciais.



**Figura 2.6. Vista lateral do truque, mostrando os componentes da suspensão secundária tipo Barber.**

O desenvolvimento dos computadores e a adequação das teorias de dinâmica de sistemas mecânicos à solução numérica tornaram possível, nos últimos 20 anos, o estudo detalhado de fenômenos não lineares, como os que ocorrem nos movimentos da suspensão secundária do truque de três peças. As transformações no transporte ferroviário, especialmente no sentido do aumento de cargas por eixo e velocidade de translação - acompanhadas por mudanças no perfil das rodas, que alteraram o comportamento dinâmico em curvas -, têm fomentado o aparecimento de novos trabalhos que buscam aperfeiçoar os modelos existentes para a cunha. As cunhas bipartidas e com superfícies de atrito poliméricas, mostradas na Figura 2.5, são um dos resultados

desses desenvolvimentos recentes e têm características aprimoradas de desempenho em inscrição de curvas (bipartidas) e amortecimento (poliméricas).

### **2.3. Dinâmica de sistemas de corpos rígidos**

A dinâmica dos sistemas mecânicos costuma dividir-se em dois grandes ramos de estudo. A cinemática, o primeiro desses ramos, trata do movimento dos corpos sem levar em consideração as forças que impõem esse movimento ao corpo. A cinética complementa a cinemática ao procurar entender como as forças aplicadas externamente ao corpo e aplicadas pelas restrições geram o movimento do corpo. A análise cinemática das acelerações de um sistema permite a formulação das equações cinemáticas de movimento.

O estudo de sistemas mecânicos simples, como um pêndulo simples ou um sistema massa-mola-amortecedor é bastante intuitivo, pois os movimentos possíveis são bastante restritos. No entanto, quando três, quatro, cinco, ou mais corpos estão interagindo, é necessário mais embasamento matemático do que capacidade de visualização dos movimentos, ainda que essa capacidade seja indispensável na análise dos resultados. É preciso, acima de tudo, compreender as noções de movimento relativo entre os corpos e como representar os vetores segundo diferentes referenciais.

Kane e Levinson (1985) propõem uma diferenciação clara entre os conceitos de referencial e sistema de coordenadas, que normalmente são entendidos como expressões intercambiáveis. Um referencial, como o próprio nome sugere, é alguma entidade física que sirva como referência para o movimento de algum ponto. Um sistema de coordenadas é uma maneira matemática de descrever os movimentos que são vistos por um determinado referencial e usualmente é composto por uma trinca de eixos ortogonais cuja origem coincide com algum ponto de interesse. Fazendo uma analogia, o referencial representaria a interpretação que uma pessoa específica tem de uma informação, enquanto o sistema de coordenadas representaria o meio com que essa pessoa transmite essa informação. Pessoas diferentes podem ter interpretações diferentes de uma

mesma informação assim como referenciais diferentes enxergam posições, velocidades e acelerações de um mesmo ponto de maneiras diferentes.

A escolha de referenciais e sistemas de coordenadas adequados pode facilitar o estudo do problema em questão ao subdividir movimentos complexos em uma série de movimentos mais simples. Na dinâmica de sistemas multicorpos, em que o foco é eminentemente computacional, nem sempre é possível escolher os referenciais mais adequados e costuma-se adotar um referencial fixo - chamado de inercial - e pelo menos um referencial móvel para cada corpo fixo ao centro de massa. Outros referenciais podem ser adotados conforme for conveniente.

No restante deste texto, os *vetores posição absoluta* de pontos em relação à origem do sistema inercial serão indicados por  ${}^k\mathbf{r}_{i,j}$ , em que o subscrito  $\{\bullet\}_{i,j}$  indica o ponto  $P_{i,j}$ , pertencente ao corpo  $K_j$ , e o sobrescrito  ${}^k\{\bullet\}$  mostra que o vetor está escrito como uma combinação linear dos versores de um certo sistema de coordenadas  $\Gamma_k$ . Caso o vetor de interesse seja uma posição relativa, então será indicado por  ${}^k\mathbf{p}_{i,j}$ , com  $i, j$  e  $k$  respeitando as mesmas convenções adotadas para a posição absoluta. A omissão do sobrescrito  ${}^k\{\bullet\}$  indica que o vetor está representado no sistema inercial de coordenadas.

No espaço tridimensional, a posição de um ponto pode ser representada em termos de três coordenadas, sejam elas retangulares (cartesianas), cilíndricas, ou esféricas. Isso equivale a dizer que a *configuração* de um sistema composto por uma única massa pontual pode ser descrita por meio de um vetor  $\mathbf{r}$  em  $\mathfrak{R}^3$ :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{bmatrix}$$

em que  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$  são as projeções do vetor  $\mathbf{r}$  em três eixos arbitrários não paralelos (mas, a princípio, não necessariamente triortogonais, como o sistema cartesiano).

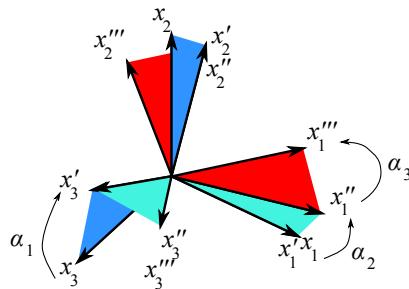
Os corpos rígidos, por sua vez, podem ser vistos como um conjunto de infinitos pontos materiais e sua configuração espacial em um dado instante pode, então, ser dada por infinitos vetores posição  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, \dots$ ). Esse tipo de representação apresenta desvantagens óbvias quando se percebe a enorme quantidade de variáveis envolvidas. O que Euler percebeu é que, do referencial

do próprio corpo rígido, a linha que une dois pontos distintos sempre estará no mesmo lugar, pois a posição relativa entre os pontos é constante (hipótese de corpo rígido). Para um observador externo, no entanto, à medida que o corpo gira no espaço, essa linha mudará de orientação, mas seu comprimento permanecerá alterado. A partir desse raciocínio, pode-se inferir que a posição de um ponto de um corpo rígido depende do vetor posição de outro ponto qualquer do corpo, do vetor posição relativa entre os dois pontos considerados e da orientação do corpo rígido no momento de interesse. Logo, a configuração de todos os pontos do corpo é dada pela posição de um ponto arbitrário e pela orientação, ou posição angular, do corpo no espaço. O vetor posição de um corpo rígido, então, está contido em  $\mathbb{R}^6$  e é do tipo:

$$\mathbf{y} = [x^1 \ x^2 \ x^3 \ \alpha^1 \ \alpha^2 \ \alpha^3]$$

em que  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$  continuam tendo o mesmo significado que têm na análise da massa pontual e  $\alpha^1$ ,  $\alpha^2$  e  $\alpha^3$  são os ângulos segundo os quais o corpo foi rodado para atingir a configuração atual.

Claramente, como são três os ângulos adotados, é preciso estabelecer uma *sequência* de rotações, assim como se estabeleceu uma sequência de medidas lineares (os  $x^i$  estão, afinal, enumerados). Existem alguns sistemas de sequenciamento das rotações regularmente utilizados na dinâmica de corpos rígidos e os mais comuns são os ângulos de Euler e os ângulos de Cardan. A escolha na sequência de rotações de um sistema de coordenadas em relação ao outro determina a forma da matriz de rotação empregada. Na notação de Cardan, por exemplo, supõe-se que houve em primeiro lugar uma rotação ao redor do eixo considerado como  $x_1$ , depois de  $x_2$  e então de  $x_3$ , como mostra o esquema da Figura 2.7.



**Figura 2.7. Esquema da sequência de rotações de Cardan.**

Ao longo do restante do texto, será suposto que as rotações são computadas segundo a sequência de Cardan, pois é a mais natural para problemas gerais de sistemas multicorpos.

Como problemas envolvendo vários corpos rígidos envolvem, também, vários sistemas de coordenadas, é interessante ter alguma ferramenta que converta a informação de um sistema para outro. Dado um vetor  $\mathbf{v}$ , escrito em um sistema de coordenadas qualquer, sua representação  $\mathbf{v}'$  em outro sistema, rotacionado segundo a sequência de Cardan a partir do primeiro é dada por:

$$\mathbf{v}' = T_C \mathbf{v}$$

em que  $T_C$  é a matriz de rotação de Cardan:

$$T_C = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & -s_2 \\ c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 & c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 \\ s_1 s_3 + c_1 s_2 c_3 & s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

com  $c_i = \cos(\alpha^i)$  e  $s_i = \sin(\alpha^i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Expandindo o raciocínio adotado anteriormente, a configuração de um sistema composto por  $m$  corpos pode ser descrita por um ponto em um espaço  $6m$ -dimensional. Se os corpos que compõem esse sistema não apresentarem nenhum tipo de restrição ao seu deslocamento, então se pode dizer que o sistema possui  $6m$  graus de liberdade, pois cada corpo, ao mover-se, provoca a variação de seis coordenadas sem que nenhuma delas afete as outras ou modifique o movimento dos outros corpos. Caso alguma das coordenadas tiver seu movimento impedido, limitado ou prescrito por algum motivo, então o sistema é restrito e o número de graus de liberdade é reduzido.

As restrições podem ser classificadas:

1. quanto à sua dependência com relação ao tempo, em *reconómicas*, quando dependem explicitamente do tempo, ou *escleronómicas*, quando não dependem explicitamente do tempo;

2. quanto ao tipo de restrição: em restrições *de configuração*, quando restringem algum deslocamento do sistema, ou restrições *de movimento*, quando restringem velocidades ou acelerações. As restrições de configuração são também chamadas *holonômicas* e as de movimento são *não-holonômicas*. Para que uma restrição seja realmente não holonômica, é importante que a equação que a restringe não possa ser transformada por integração em uma função holonômica.

Restrições não holonômicas reonômicas obedecem a equações do tipo:

$$\varphi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \geq 0$$

Uma restrição que obedece apenas ao sinal de igualdade é chamada *bilateral*, enquanto que a restrição descrita pelo sinal de desigualdade é *unilateral*.

Um sistema holonômico pode ser caracterizado pelo seu número de graus de liberdade. Então, se um sistema de  $m$  corpos sem restrições possui  $6m$  graus de liberdade, um sistema com o mesmo número de corpos e  $p$  equações de restrição holonômicas possui  $G = 6m - p$  graus de liberdade. Isso significa que basta conhecer  $G$  posições para se determinar a configuração do sistema como um todo. Essa constatação motiva a definição de *coordenadas generalizadas* como sendo um conjunto com o menor número de valores numéricos relacionados à posição dos corpos (ou partículas) de um sistema que possa descrever a posição de todos os elementos desse sistema. A escolha das coordenadas generalizadas não é única e depende de cada tipo de problema.

A definição de coordenadas generalizadas para um sistema holonômico é essencial no desenvolvimento da mecânica analítica desenvolvida por Lagrange e Hamilton<sup>2</sup>. Para problemas gerais, no entanto, a definição original cria algumas barreiras à introdução de restrições não holonômicas, que são muito mais comuns na natureza. Kane e Levinson (1985) propõem o tratamento das restrições não holonômicas definindo *velocidades generalizadas*, que são relações entre as  $G$  derivadas temporais das coordenadas generalizadas. Nesse caso, o número total de

---

<sup>2</sup> A mecânica analítica é uma maneira de escrever as equações de movimento de um sistema. Enquanto a teoria de Newton-Euler é baseada na conservação das quantidades de movimento (linear e angular), a teoria Lagrangeana-Hamiltoniana é fundamentada na conservação de energia.

graus de liberdade é dado por  $J = G - q$ , em que  $q$  representa o número de restrições não holonômicas, ou seja, o número de equações que estabelecem relações matemáticas entre as velocidades generalizadas. Kane e Levinson chamam  $J$  de *graus de liberdade de um sistema não holonômico* do sistema.

Considere-se um corpo rígido  $K$ , cujo centro de gravidade é o ponto  $S$ . Esse corpo está localizado em uma região do espaço que pode ser descrita pelo sistema de coordenadas  $\Gamma_0$ , centrado no ponto  $O$ . Existe um ponto  $P$ , pertencente ao corpo  $K$ , cuja posição em cada instante de tempo é de especial interesse. Esse ponto pode ser, por exemplo, o ponto de aplicação de uma força, o ponto por onde passa o eixo de uma junta de rotação, ou um ponto de contato. Sabe-se que a posição desse ponto  $P$  em relação ao centro de massa do corpo pode ser descrita pelo vetor posição relativa  $\mathbf{p}$ , cujas coordenadas em um referencial  $\Gamma_1$  fixo ao centro de massa  $S$  e solidário ao corpo são conhecidas. A configuração do corpo é dada pelo vetor  $\mathbf{y}$  definido na seção anterior. A Figura 2.8 ilustra o sistema físico descrito. Com essas informações, é possível escrever que:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_S + T_1^{-1} \mathbf{p} \quad (2.2)$$

em que  $T_1$  é a matriz de rotação de Cardan do sistema  $\Gamma_1$  para o sistema  $\Gamma_0$ . Note-se que  $\mathbf{r}_P$  é a posição do ponto  $P$  no referencial inercial, enquanto  $\mathbf{p}$  é a posição do mesmo ponto  $P$  no referencial do corpo  $K$ . Velocidades e acelerações do ponto podem ser obtidas por derivação, mas essas passagens serão deixadas para a seção 2.6.1.

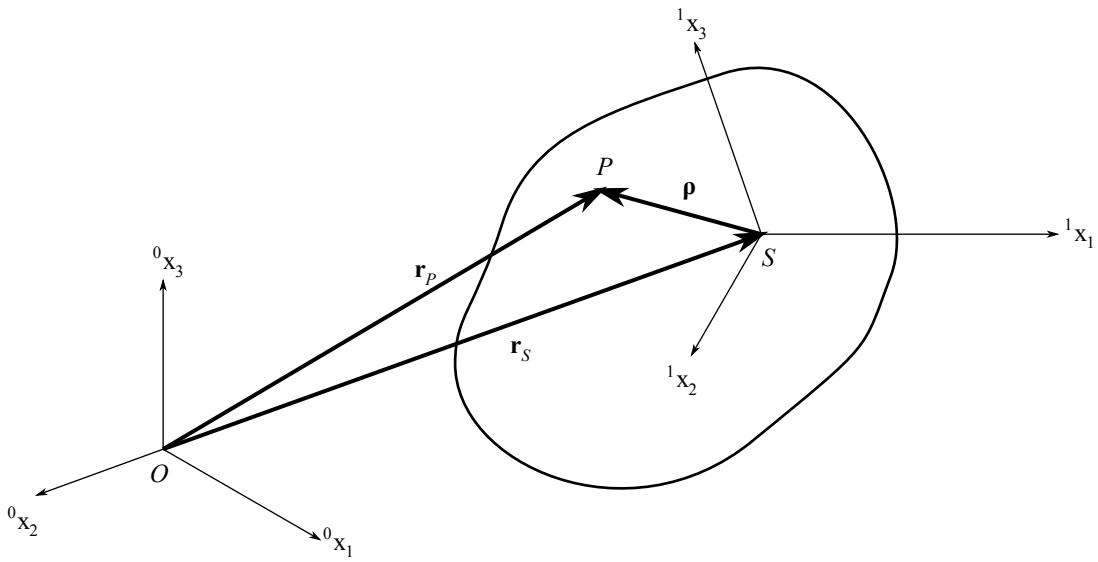


Figura 2.8. Posição de um ponto pertencente a um corpo rígido.

A abordagem clássica para os problemas de dinâmica, conhecida como método de Newton-Euler, baseia-se em uma generalização da teoria newtoniana da cinética de partículas e possui duas equações fundamentais: *equação de Newton*, ou *teorema do movimento do baricentro* (TMB), e a *equação de Euler*, ou *teorema do momento angular* (TMA). Essas duas equações são equivalentes, mas o TMB representa as coordenadas translacionais de movimento enquanto o TMA diz respeito às coordenadas rotacionais. A equação de Newton para um corpo  $K_i$  pode ser enunciada como:

$$\left( \sum \mathbf{F}_{ext} \right)_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (2.3)$$

textualmente: o vetor força resultante é proporcional ao vetor aceleração linear do corpo e a constante de proporcionalidade é a massa  $m_i$  desse corpo. A equação de Euler diz que:

$$\left( \sum \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{F}_{ext} \right)_i = \dot{\mathbf{H}}_{S,i} \quad (2.4)$$

textualmente: a somatória dos momentos externos em relação ao centro de massa é igual à taxa de variação temporal do vetor quantidade de movimento angular do corpo calculado em relação ao centro de massa, definido pela Eq. (2.5):

$$\mathbf{H}_{S,i} = I_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (2.5)$$

na qual  $I_i$  é o tensor de inércia do corpo tomado em algum sistema de coordenadas  $\Gamma_i$  que tenha como origem o centro de massa e  $\boldsymbol{\omega}_i = [\omega^1 \ \omega^2 \ \omega^3]$  é o vetor velocidade angular, que pode ser calculado a partir da matriz de rotação de Cardan do sistema  $\Gamma_i$  em relação ao sistema  $\Gamma_0$  inercial. Essa matriz é dada por:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_i^3 & \omega_i^2 \\ \omega_i^3 & 0 & -\omega_i^1 \\ -\omega_i^2 & \omega_i^1 & 0 \end{bmatrix} = T_{C,i}^T \dot{T}_{C,i} \quad (2.6)$$

A matriz  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$  é a *forma matricial antissimétrica* do vetor  $\boldsymbol{\omega}_i$ .

Então, se  $\Gamma_i$ , sistema no qual foi calculado  $I_i$ , for solidário ao corpo, isto é, mover-se com o corpo tanto em rotação como em translação, a substituição de (2.5) em (2.4) fornece:

$$\left( \sum \mathbf{p} \times \mathbf{F}_{ext} \right)_i = I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i I_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (2.7)$$

Sabe-se que o tensor de inércia é dado por:

$$I_i = \begin{bmatrix} I^1 & -I^{12} & -I^{13} \\ -I^{12} & I^2 & -I^{23} \\ -I^{13} & -I^{23} & I^3 \end{bmatrix}$$

Pode-se definir a matriz de massa do corpo,  $M_i$ , como sendo:

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & & \\ 0 & m_i & 0 & & \bar{0} \\ 0 & 0 & m_i & I^1 & -I^{12} & -I^{13} \\ & & & \bar{0} & -I^{12} & I^2 & -I^{23} \\ & & & & -I^{13} & -I^{23} & I^3 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

em que  $\bar{0}$  é a matriz nula. Pode-se, então escrever as duas equações da teoria de Newton-Euler em uma forma mais compacta:

$$M_i \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_j \\ \ddot{\boldsymbol{\omega}}_j \\ \ddot{\mathbf{y}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{F}_{ext} \\ \sum \mathbf{p} \times \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{F}_{ext,i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{L}_i \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Na Eq. ( 2.9 ),  $\mathbf{y}_i$  é o vetor posição generalizada do corpo,  $\mathbf{F}_{ext,i}$  congrega os esforços externos ao corpo e  $\mathbf{L}_i$  é um vetor de esforços iniciais.

Conhecendo-se as forças que agem externamente a um corpo e as condições iniciais do movimento, é possível determinar a evolução temporal das posições e velocidades lineares e angulares por meio da integração de ( 2.9 ), conhecida como *equação de movimento* do corpo em questão. Se o problema é composto por vários corpos, então é preciso resolver um sistema de equações matriciais.

As forças externas podem ser separadas em forças aplicadas e forças de reação. A primeira categoria diz respeito a esforços que são aplicados por atuadores externos ao sistema e que, normalmente, são funções conhecidas do tempo. As forças de reação são aplicadas pela interação com outros corpos que compõem o sistema e são, em geral, desconhecidas, sendo também incógnitas do problema dinâmico. Essas forças podem ser calculadas com o uso das equações de restrição discutidas anteriormente. Se as equações de restrição forem holonômicas, então o número de graus de liberdade pode ser reduzido imediatamente pela substituição das relações entre as coordenadas generalizadas. Porém, caso as restrições sejam não holonômicas, em geral esse procedimento de substituição não é possível<sup>3</sup>, de modo que as forças de reação devem ser calculadas por meio de sistemas de equações algébricas, resolvidos juntamente com a integração das equações de movimento. Essa particularidade exige o tratamento por métodos numéricos. A exceção a essa regra são alguns casos simples em que soluções de forma fechada existem ou podem ser aproximadas por processos de linearização ou quase linearização. Hagedorn (1984)

---

<sup>3</sup> Uma maneira de considerar o efeito das restrições não holonômicas como acopladoras dos graus de liberdade de um sistema é utilizar a teoria de multiplicadores de Lagrange descrita, por exemplo, em Lanczos (1970).

apresenta uma série de métodos para aplicar tratamentos de linearização a restrições não holonômicas e a outros tipos de não linearidades, que podem aparecer no estudo de vibrações.

## 2.4. Oscilações autoexcitadas, diagramas de fase e ciclos-limite

Segundo Hagedorn (1984), sistemas dinâmicos autoexcitados seguem equações do tipo

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x} + f(x) = 0 \quad (2.10)$$

tais que a função de amortecimento  $h(x)$  possa assumir valores negativos. Nesse caso, a taxa de variação da energia mecânica associada à coordenada generalizada  $x$ , que é dada por

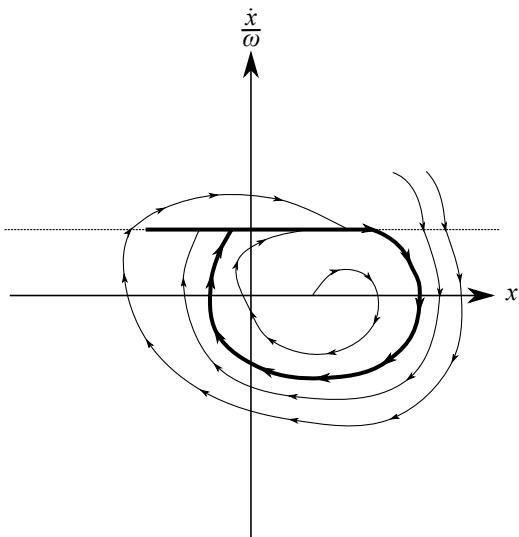
$$\frac{dE_m}{dt} = -h(x)\dot{x}^2,$$

pode crescer, retirando energia do meio para alimentar a própria resposta. Quando o sistema é excitado senoidalmente, dependendo do balanço energético do sistema e das condições iniciais, a família de soluções da Eq. (2.10) pode tender, em regime permanente, para uma mesma solução periódica. Essa solução comum é chamada de *ciclo-limite*.

Enquanto no estudo de sistemas lineares é comum realizar análises de desempenho baseadas na resposta no tempo ou na frequência, os sistemas autoexcitados são mais convenientemente representados por um diagrama de fase. Esse, em sua forma clássica, é um gráfico cujo eixo das abscissas representa a coordenada  $x$  enquanto o eixo das ordenadas representa o comprimento de onda da resposta, ou  $\dot{x}/\omega$ , com  $\omega$  sendo a freqüência angular da excitação externa. Se um oscilador linear for representado no plano de fase, o gráfico será equivalente a uma circunferência com centro  $(x_e, 0)$ , em que  $x_e$  é a posição de equilíbrio, e raio igual ao ganho do sistema. Os sistemas não lineares, por sua vez, provocam distorção nessa circunferência e a forma dessas distorções pode ser utilizada para caracterizar a resposta.

No caso de osciladores autoexcitados, os caminhos de fase - trajetórias da solução da equação diferencial no plano de fase - podem ser atraídos por um ciclo limite com uma forte

distorção próxima a uma velocidade crítica, como mostra a Figura 2.9. A linha mais grossa indica o ciclo limite e as setas apontam na direção da passagem do tempo. No caso mostrado, para qualquer condição inicial que esteja contida em uma das trajetórias de fase indicadas o sistema evolui na direção do ciclo limite, que nesse caso é chamado *estável*. Note-se que o ciclo é composto por duas regiões distintas. A inferior corresponde a um movimento quase senoidal semelhante às vibrações lineares, enquanto a porção superior é uma reta de aceleração nula (velocidade constante). Caso o platô de velocidade se encontre sobre o eixo  $x$ , então o sistema está em *adesão*. A evolução da resposta leva, depois de um tempo, ao descolamento da trajetória dessa plataforma constante e o sistema entra em *escorregamento*. O ciclo se repete enquanto houver excitação externa e essa alternância entre movimento e repouso recebe o nome de adesão-escorregamento (*stick-slip*).



**Figura 2.9. Ciclo limite para vibração autoexcitada com um grau de liberdade.**

Note-se que o diagrama da Figura 2.9 não representa apenas oscilações autoexcitadas. Se as condições iniciais estiverem fora do ciclo limite, então a amplitude das vibrações reduz-se com o tempo. A autoexcitação ocorre quando as condições iniciais são representadas por um ponto interior ao ciclo-limite: nesse caso a amplitude aumenta até que a solução periódica seja atingida.

## 2.5. Problemas de complementaridade linear

O problema de complementaridade linear (PCL), segundo Cottle et al. (1992), surgiu como uma solução unificada para problemas de programação quadrática e programação linear, recorrentes em estudos de equilíbrio dinâmico com restrições. Outro campo de aplicação dos problemas de complementaridade linear é que, de fato, contribuiu para o desenvolvimento de algoritmos eficientes de solução, é a teoria dos jogos, em especial o problema dos jogos bimatrixiais, que encontra grande aplicação nas áreas econômicas e de tomadas de decisão. Em seu artigo, que formula a questão do ponto de equilíbrio de Nash de um jogo bimatrixial como um PCL, Lemke e Howson (1964) estabeleceram as bases do que viria a ser conhecido como o algoritmo de Lemke, ainda hoje muito utilizado na resolução de problemas de complementaridade linear.

A teoria descrita a seguir pode ser encontrada em detalhes e com exemplos diversos de aplicações em Cottle et al. (1992). De maneira geral, o problema de complementaridade linear consiste em encontrar um vetor  $\mathbf{z} \in R^n$  que satisfaça as seguintes condições:

$$\mathbf{z} \geq 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{q} + M\mathbf{z} \geq 0 \quad (2.12)$$

$$\mathbf{z}^T(\mathbf{q} + M\mathbf{z}) = 0 \quad (2.13)$$

com  $\mathbf{q} \in R^n$  e  $M \in R^{n \times n}$ . Como é caracterizado pelo vetor  $\mathbf{q}$  e pela matriz  $M$ , o problema de complementaridade linear é comumente abreviado por  $PCL(\mathbf{q}, M)$  e a ordem desse problema é  $n$ .

As condições ( 2.11 ), ( 2.12 ) e ( 2.13 ) não são suficientes para garantir a existência ou a unicidade de uma solução para  $PCL(\mathbf{q}, M)$ . Caso  $M$  pertença a certas classes de matrizes específicas, então é possível aplicar teoremas que garantam existência e unicidade (ou não) de solução. Em geral, no entanto, a análise pura e simples de  $M$  não fornece informações completas

sobre a possibilidade de solução do problema. Se o vetor  $\mathbf{z}$  satisfizer as Eq. ( 2.11 ) e ( 2.12 ), então ele é chamado *factível*.

Seja

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + M\mathbf{z} \quad ( 2.14 )$$

Um vetor factível que resolve  $\text{PCL}(\mathbf{q}, M)$  somente satisfaz a condição ( 2.13 ) se:

$$z_i w_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n \quad ( 2.15 )$$

com  $z_i$  e  $w_i$  representando cada elemento correspondente dos vetores. Um vetor  $\mathbf{z}$  que satisfaz a Eq. ( 2.15 ) é chamado *complementar*. Conforme definem Cottle et al. (1992), a solução do PCL dado pelas Eq. ( 2.11 ), ( 2.12 ) e ( 2.13 ) consiste em encontrar um vetor  $\mathbf{z}$  que seja tanto factível quanto complementar.

Utilizando o vetor  $\mathbf{w}$ , definido em ( 2.14 ), é possível reescrever as condições do PCL de uma forma equivalente e mais interessante para a programação de algoritmos de solução:

$$\mathbf{w} \geq 0, \mathbf{z} \geq 0 \quad ( 2.16 )$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + M\mathbf{z} \quad ( 2.17 )$$

$$\mathbf{z}^T \mathbf{w} = 0 \quad ( 2.18 )$$

Na terminologia usualmente adotada, o vetor  $\mathbf{w}$  contém as variáveis *básicas*, enquanto o vetor  $\mathbf{z}$  contém as variáveis *não básicas*.

Das relações ( 2.16 ) e ( 2.17 ), se o vetor  $\mathbf{q}$  for estritamente positivo, então é possível afirmar que o  $\text{PCL}(\mathbf{q}, M)$  possui uma solução trivial  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . A classe mais popular e amplamente testada de algoritmos de processamento de PCLs, os métodos pivotais, é fundamentada nessa constatação. O princípio de funcionamento é bastante simples e baseia-se em promover pivotamentos do sistema de equações ( 2.17 ), permutando-se variáveis básicas e não básicas até que, após  $\nu$  iterações, seja obtido um vetor  $\mathbf{q}^\nu$  positivo. Claramente, quando essa condição é

atingida, o vetor de variáveis não básicas  $\mathbf{z}^V = \mathbf{0}$  resolve o problema. As variáveis originais podem, então, ser recuperadas desde que seja mantido um histórico dos pivotamentos executados.

Um dos objetivos de um algoritmo pivotal é, então, encontrar um vetor  $\mathbf{z}$  que resolva o PCL. Mas não existe, *a priori*, conhecimento sobre a existência ou factibilidade de uma solução, pois, se para um dado índice  $r$

$$q_j < 0 \text{ e } m_{rj} \leq 0 \text{ para todo } j,$$

então não existe nenhum vetor  $\mathbf{z}$  não negativo que resolva  $\text{PCL}(\mathbf{q}, M)$ . Se o algoritmo chegar, após algumas iterações, a uma situação desse tipo, então o sistema é infactível.

Os métodos pivotais apresentam como desvantagem a necessidade de armazenar as operações na ordem em que ocorreram e são bastante sensíveis a erros de arredondamento. Por outro lado, se as condições de convergência são respeitadas e são tomados cuidados para evitar cálculos cílicos, o número de iterações para que o problema seja resolvido é bastante pequeno, o que reduz consideravelmente o tempo de processamento.

A teoria de operações pivotais é um tema amplamente estudado em álgebra linear e seus fundamentos serão retomados nas próximas linhas. Considere-se um sistema linear do tipo ( 2.17 ) com a matriz  $M$  dividida da seguinte maneira:

$$M = \begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\bar{\alpha}} \\ M_{\bar{\alpha}\alpha} & M_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} \end{bmatrix}$$

tal que  $M_{\alpha\alpha}$  indica uma submatriz principal de  $M$  com tamanho  $\alpha \times \alpha$  com  $\alpha$  sendo um subconjunto de  $\{1, \dots, n\}$ . Dessa maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\alpha &= \mathbf{q}_\alpha + M_{\alpha\alpha}\mathbf{z}_\alpha + M_{\alpha\bar{\alpha}}\mathbf{z}_{\bar{\alpha}} \\ \mathbf{w}_{\bar{\alpha}} &= \mathbf{q}_{\bar{\alpha}} + M_{\bar{\alpha}\alpha}\mathbf{z}_\alpha + M_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}\mathbf{z}_{\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

e, admitindo-se que a matriz  $M_{\alpha\alpha}$  seja invertível, os papéis de  $\mathbf{w}_\alpha$  e  $\mathbf{z}_\alpha$  podem ser trocados:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_\alpha &= -M_{\alpha\alpha}^{-1}\mathbf{q}_\alpha + M_{\alpha\alpha}^{-1}\mathbf{w}_\alpha - M_{\alpha\alpha}^{-1}M_{\alpha\bar{\alpha}}\mathbf{z}_{\bar{\alpha}} \\ \mathbf{w}_{\bar{\alpha}} &= \mathbf{q}_{\bar{\alpha}} - M_{\bar{\alpha}\alpha}M_{\alpha\alpha}^{-1}\mathbf{q}_\alpha + M_{\bar{\alpha}\alpha}M_{\alpha\alpha}^{-1}\mathbf{w}_\alpha + (-M_{\bar{\alpha}\alpha}M_{\alpha\alpha}^{-1}M_{\alpha\bar{\alpha}} + M_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})\mathbf{z}_{\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

o que configura um novo PCL:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_\alpha \\ \mathbf{w}_\bar{\alpha} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -M_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{q}_\alpha \\ \mathbf{q}_\bar{\alpha} - M_{\bar{\alpha}\alpha} M_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{q}_\alpha \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}'} + \underbrace{\begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha}^{-1} & -M_{\alpha\alpha}^{-1} M_{\alpha\bar{\alpha}} \\ M_{\bar{\alpha}\alpha} M_{\alpha\alpha}^{-1} & -M_{\bar{\alpha}\alpha} M_{\alpha\alpha}^{-1} M_{\alpha\bar{\alpha}} + M_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} \end{bmatrix}}_{M'} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\alpha \\ \mathbf{z}_\bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

Nas passagens acima, diz-se que  $\mathbf{w}_\alpha$  é o *pivô* da operação e, como  $M$  é dividida por submatrizes principais, ou seja, submatrizes que têm o primeiro e o último elemento contidos na diagonal principal de  $M$ , a matriz  $M'$  é chamada de *transformação pivotal principal de  $M$* .

Dentre todos os algoritmos de processamento dos PCLs por pivotamento, os mais populares e amplamente testados são os algoritmos de Lemke (Lemke e Howson, 1964), desenvolvidos a princípio para resolver rapidamente problemas de equilíbrio em jogos bimatríciais. Esses algoritmos foram empregados, por exemplo, por Cline e Pai (2003) e Lloyd (2005) para implementar programas de cálculo de forças de contato. Anitescu e Potra (1997) e Stewart e Trinkle (1995) mostraram que, para certas formulações do problema de contato, o método de Lemke sempre irá convergir para um resultado<sup>4</sup> desde que sejam tomadas certas precauções quanto à ciclagem do algoritmo.

Enquanto a maior parte dos algoritmos pivotais é fundamentada nos teoremas de invariância, que garantem que o pivotamento preserve algumas propriedades fundamentais das matrizes, os algoritmos de Lemke dispensam essas premissas e são, portanto, mais versáteis (Cottle et al., 1992).

## 2.6. Contato

O problema de contato consiste em encontrar forças normais e de atrito que aparecem entre dois corpos, rígidos ou não. Normalmente, as forças normais podem ser encontradas analisando-

---

<sup>4</sup> O resultado pode ser a não existência de soluções ou uma das soluções factíveis. O algoritmo não garante unicidade de soluções.

se a configuração do sistema e as forças externas atuantes sobre um certo corpo: pode-se enxergar as normais como as forças que levam a aceleração do corpo a zero em uma determinada direção, garantindo, por exemplo, a impenetrabilidade. Sabe-se que a força de atrito depende, dentre outros fatores, da intensidade da força normal associada e, portanto, encontrar o atrito necessariamente passa pelo cálculo das normais.

Esses cálculos são sempre aproximados, visto que o fenômeno de contato tem suas características fortemente ligadas ao acabamento superficial das superfícies, especialmente no que diz respeito às forças de atrito.

Restrições de contato são *unilaterais* e, portanto, definidas por desigualdades do tipo

$$\varphi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \geq 0$$

Essas inequações são, em geral, não holonômicas escleronômicas e, portanto, não podem ser transformadas em funções apenas das coordenadas generalizadas. Mais especificamente, as restrições de contato sem atrito podem ser descritas por um sistema do tipo:

$$g \geq 0 \quad (2.19)$$

$$f^n > 0 \quad (2.20)$$

$$f^n \cdot g = 0 \quad (2.21)$$

$$f^n \cdot \frac{dg}{dt} = 0 \quad (2.22)$$

em que  $g$  é a distância entre dois pontos de corpos distintos que estejam envolvidos na restrição de contato. A primeira equação estabelece que os corpos não podem interpenetrar-se; a segunda fixa a direção da força normal como estritamente positiva; a terceira estabelece que a força normal só existe, ou seja, é diferente de zero, quando houver contato; a quarta é a *equação de persistência* que determina que a força de contato só existe quando a taxa de separação entre superfícies de contato é nula.

O fenômeno de contato pode ser dividido em duas categorias distintas: ou tem-se impacto ou contato continuado. No caso de contato continuado, o método mais amplamente adotado para calcular as forças normais consiste em substituir as Eq. ( 2.19 ), ( 2.20 ) e ( 2.21 ) por uma relação do tipo:

$$f^n = k \cdot g^r$$

em que  $k$  é a rigidez de contato e  $r$  é um expoente ajustável. Em termos práticos, essa manobra equivale a considerar que em cada ponto de contato existe uma mola não linear que se opõe à penetração. Essa abordagem, conhecida como método das penalidades ou método da regularização promove, em termos matemáticos, uma suavização das condições de contato ao permitir a interferência entre os corpos. Anitescu (2003) mostra que, conforme  $k$  tende ao infinito, essa suposição aproxima-se da restrição unilateral pura.

Esse método possui a vantagem de ser facilmente implementado computacionalmente, pois transforma as restrições unilaterais de contato em equações bilaterais. O ajuste dos valores  $k$  e  $r$ , porém, deve ser feito por tentativa e erro, usualmente com respaldo de dados experimentais, o que depõe contra seu uso em algoritmos de simulação dinâmica para verificação de projeto, por exemplo. Contatos com rigidez alta ou com expoentes muito elevados (que penalizam mais a penetração) levam a sistemas de equações diferenciais bastante rígidos e, portanto, difíceis de serem resolvidos. Finalmente, o método das penalidades pode apresentar instabilidades numéricas quando o sistema está próximo à condição de equilíbrio.

Uma alternativa à teoria de contato por penalidades é a formulação do problema como um problema de complementaridade linear. Esse método, conhecido por restrição dura (*hard constraint*) efetivamente impede a interpenetração e, apesar de mais difícil de ser implementado, apresenta melhor convergência e, desde que sejam tomados cuidados quanto a problemas de iteração cíclica, também é mais estável.

### 2.6.1 Contato entre dois corpos perfeitamente rígidos

O contato contínuo ocorre entre dois corpos de tal maneira que não há separação das superfícies de interface em nenhum instante dentro de um período finito de tempo. A colisão

ocorre quando há o impacto entre os dois corpos e, portanto, incorre em uma descontinuidade do contato.

Para calcular corretamente as forças de contato e os momentos que eles geram sobre um dado corpo, é preciso levar em consideração a geometria desse corpo e, ainda, como essa geometria se relaciona com o meio ao seu redor.

Lembrando que sólidos poliédricos convexos são formados, basicamente, por três tipos de elementos geométricos – vértice, aresta e face -, pode-se estabelecer seis tipos de contato entre dois sólidos desse tipo: vértice-vértice, vértice-aresta, vértice-face, aresta-aresta, aresta-face, face-face. Sabe-se que uma força é um elemento vetorial associado a um ponto (vértice), mas não a uma linha (aresta), ou a um plano (face). Logo, para o estudo das possíveis geometrias de contato, apenas três dos casos anteriormente citados têm relevância prática: vértice-vértice, vértice-aresta e vértice-face. Seria possível, também, fazer o tratamento de contatos bi- ou tridimensionais utilizando-se uma pressão média de contato ao invés de uma força. Isso envolveria, além do cálculo das forças de contato nas extremidades das linhas ou superfícies, alguma hipótese sobre a distribuição das pressões ao longo da interface de modo que tanto o sistema de forças como o de pressão fossem equivalentes, Figura 2.10.

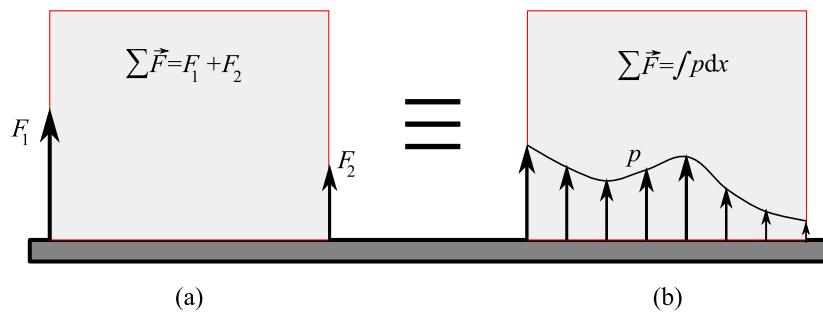
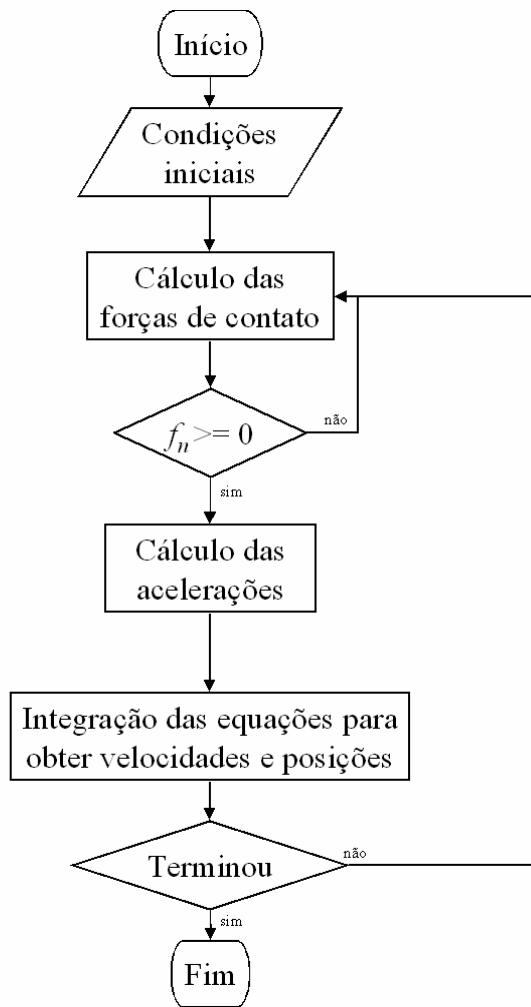


Figura 2.10. Equivalência entre (a) forças de contato e (b) pressões de contato em uma interface aresta-aresta.

As forças de contato, por sua vez, podem ser convenientemente desmembradas em seus componentes tangencial,  $f^t$ , e normal,  $f^n$ , tal que a parte tangencial equivilha às forças de atrito que, em geral, são função da componente normal.

Problemas de contato, com exceção de casos bem específicos em que a força normal é constante, devem ser resolvidos em duas etapas iterativas. A primeira envolve o cálculo das

variáveis cinemáticas do sistema (acelerações, velocidades e posições) para um dado conjunto de condições iniciais. Com esses dados, é possível estabelecer um sistema de equações algébricas cujas incógnitas são as componentes das forças de contato. Quando esse sistema é resolvido, encontra-se um conjunto de esforços que podem ser entendidos como o elemento equivalente à excitação externa do próximo passo de integração. As novas variáveis cinemáticas são calculadas, e o algoritmo se repete até o fim do tempo de simulação, como mostra a Figura 2.11.



**Figura 2.11. Programa para solução de problemas de contato. Adapatado com modificações de Sharf e Zhang (2006)**

Fica evidente, então, a importância de conhecer de modo preciso a direção normal de contato. No caso de contato vértice-face, essa direção é facilmente determinada pelo vetor normal

ao plano no ponto de contato, que pode ser computacionalmente obtido conhecendo-se a equação que descreve o plano. De fato, a superfície não precisa nem ser plana para que essa observação seja válida: basta que ela seja contínua e conhecida nas proximidades do ponto de contato estudado. O problema de determinação unívoca da normal fica mais complicado quando ocorrem contatos vértice-vértice ou vértice-aresta. Nesses casos, um (contato vértice-aresta) ou dois (contato vértice-vértice) componentes do vetor normal não podem ser calculados com base nas restrições geométricas dadas. A Figura 2.12 ilustra com mais clareza esse fato. A esses pontos em que a determinação da normal não pode ser feita com precisão, dá-se o nome de *pontos degenerados de contato*.

Baraff (1989) sugere a solução do impasse para a determinação da normal de contato para pontos degenerados, utilizando a média das normais das superfícies adjacentes. Para situações em que os pontos degenerados são temporários, isto é, ocorrem durante um intervalo de tempo infinitesimal, essa aproximação não deve causar grandes impactos sobre o resultado da simulação como um todo.

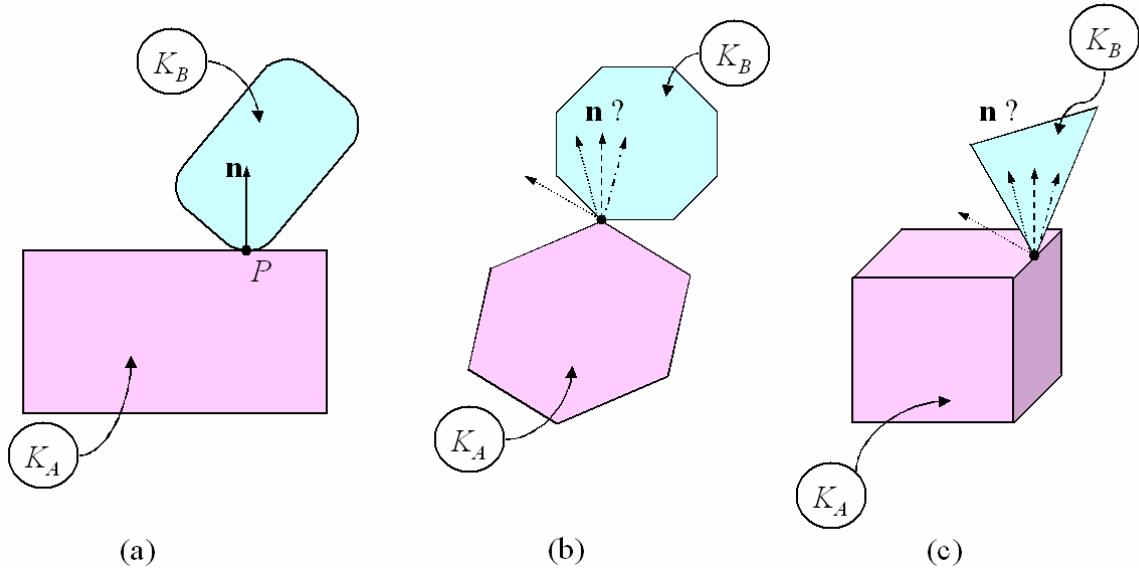


Figura 2.12. Contato vértice-face (a), contato vértice-vértice (b), contato vértice-aresta (c).

Admita-se, agora, a existência, no espaço, de dois corpos perfeitamente rígidos,  $K_A$  e  $K_B$ , que podem ou não estar em contato, e esse possível contato é tal que não se conhece, *a priori*, quais pontos dos dois corpos coincidem. Suponha-se, então, que durante um instante de tempo  $t_0$

os dois corpos entrem em contato em um ponto  $P$ , cujo vetor posição em relação a um sistema de coordenadas fixo qualquer é  $\mathbf{r}_P$ . Ora, se  $P$  é ponto de contato, então existem dois outros pontos,  $A$  e  $B$ , pertencentes, respectivamente, a  $K_A$  e  $K_B$  tais que, em  $t_0$ ,  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_P$ . Então, a diferença entre as velocidades desses vetores  $\dot{\mathbf{r}}_A - \dot{\mathbf{r}}_B$  fornece informações sobre a tendência de afastamento e aproximação desses pontos nos próximos instantes. É igualmente importante estudar a diferença de acelerações dos pontos,  $\ddot{\mathbf{r}}_A - \ddot{\mathbf{r}}_B$ , pois com isso é possível compreender o comportamento de pontos que estejam momentaneamente em repouso, um em relação ao outro.

Estendendo o raciocínio desenvolvido por Baraff (1989), definem-se duas *funções características* do ponto de contato como:

$$v(t) = \hat{\mathbf{n}}(t) \cdot (\mathbf{r}_A(t) - \mathbf{r}_B(t)) \quad (2.23)$$

$$\tau(t) = \hat{\mathbf{t}}(t) \cdot (\mathbf{r}_A(t) - \mathbf{r}_B(t)) \quad (2.24)$$

em que  $\hat{\mathbf{n}}$  e  $\hat{\mathbf{t}}$  representam, respectivamente, os versores normal e tangencial ao plano de contato. Da definição de produto escalar entre dois vetores, então, vem que as Eq. (2.23) e (2.24) representam, respectivamente, as componentes normal e tangencial do vetor posição relativa.

Uma pergunta que pode surgir, analisando a forma como o contato foi definido, é: se  $A$  e  $B$  só existem quando coincidem com o ponto de contato  $P$  que, por sua vez, só existe se houver contato, faz sentido definir um vetor posição relativa sabendo que a existência de tal vetor obriga-o a ser nulo?

Não faria sentido se o estudo da posição relativa fosse importante, mas o que interessa para a discussão presente é, na verdade, o estudo das velocidades e acelerações relativas, ou seja, o estudo das primeiras e segundas derivadas das funções  $v$  e  $\tau$ :

$$\dot{v}(t) = \hat{\mathbf{n}}(t) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_A(t) - \dot{\mathbf{r}}_B(t)) \quad (2.25)$$

$$\dot{\tau}(t) = \hat{\mathbf{t}}(t) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_A(t) - \dot{\mathbf{r}}_B(t)) \quad (2.26)$$

$$\ddot{v}(t) = 2\dot{\hat{\mathbf{n}}}(t) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_A(t) - \dot{\mathbf{r}}_B(t)) + \hat{\mathbf{n}}(t) \cdot (\ddot{\mathbf{r}}_A(t) - \ddot{\mathbf{r}}_B(t)) \quad (2.27)$$

$$\ddot{\tau}(t) = 2\dot{\hat{\mathbf{t}}}(t) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_A(t) - \dot{\mathbf{r}}_B(t)) + \hat{\mathbf{t}}(t) \cdot (\ddot{\mathbf{r}}_A(t) - \ddot{\mathbf{r}}_B(t)) \quad (2.28)$$

Nas Eq. ( 2.25 ) a ( 2.28 ) foi utilizado o fato de  $\mathbf{r}_A(t) - \mathbf{r}_B(t) = 0$  durante todo o período de tempo em que ocorre o contato.

Da análise das possíveis relações entre as derivadas da função  $v$  sai a primeira das condições de complementaridade que deve ser satisfeita para que o sistema seja resolvido sem interpenetração de corpos. A Tabela 2.1 resume as possibilidades.

**Tabela 2.1.** Análise das possíveis relações entre velocidade e aceleração relativas e as consequências esperadas.

Situação	Se...	, então...
I	$\dot{v}(t) < 0$	os pontos $A$ e $B$ estão se aproximando. Como a solução das forças de contato, que ocorre antes do cálculo das velocidades, impede a interpenetração de corpos, a única interpretação possível para essa condição é a iminência de choque entre os pontos.
II	$\dot{v}(t) > 0$	os pontos $A$ e $B$ estão se separando e no instante seguinte não existirão mais, pois o contato será desfeito.
III	$\dot{v}(t) = 0$ e $\ddot{v}(t) \geq 0$	os pontos $A$ e $B$ iniciarão o processo de separação no próximo instante de tempo.
IV	$\dot{v}(t) = 0$ e $\ddot{v}(t) < 0$	os pontos $A$ e $B$ estão em contato e a interpenetração é inevitável, pois no instante seguinte a velocidade relativa e a posição relativa serão negativas.

Conclui-se, dessa forma, que a velocidade relativa normal  $\dot{v}$  pode assumir qualquer valor real (positivo, negativo ou nulo). Caso  $\dot{v} = 0$ , então é preciso também verificar o que acontece com  $\ddot{v}$ . A situação IV descrita na Tabela 2.1 é de especial interesse. Suas condições indicam o seguinte cenário: o contato existe e  $A$  e  $B$  estão instantaneamente parados, um em relação ao outro; sabe-se, porém, que, por causa da aceleração negativa, tanto velocidade quanto posição relativa aumentarão em módulo, mas no sentido oposto ao de  $\hat{\mathbf{n}}$ , o que indica penetração entre os corpos. Esse cenário é impossível, pois, por hipótese, os corpos  $K_A$  e  $K_B$  são perfeitamente rígidos

e, então, a aceleração relativa normal *não pode ser negativa*. Esse resultado é perfeitamente intuitivo, entretanto, matematicamente não existe nenhum razão explícita para as equações de movimento resultarem em acelerações estritamente não negativas. Por isso, a inequação

$$\ddot{v}(t) \geq 0 \quad (2.29)$$

deve ser imposta como uma relação complementar às equações que calculam as acelerações dos pontos de contato em função das forças impostas ao sistema.

Além disso, a formulação direta de problemas de dinâmica impõe que as acelerações sejam função da configuração do sistema e das forças aplicadas. Assim, em um sistema no qual estejam aplicados apenas esforços normais, é matematicamente possível que uma combinação de forças negativas e positivas<sup>5</sup> resulte em acelerações normais positivas. Sabe-se, no entanto, que a natureza das forças normais é sempre repulsiva, ou seja, tende a “afastar” os corpos nos quais age. Esse fato leva a uma segunda imposição de complementaridade na forma:

$$f^n \geq 0 \quad (2.30)$$

A resolução dos problemas de contato é, essencialmente, encontrar as forças normais  $f^n$  em função de parâmetros cinemáticos conhecidos, inclusive acelerações. No sistema considerado nessa seção, portanto,  $f^n$  são as variáveis dependentes, ou *básicas*, e as acelerações  $\ddot{v}$  são as variáveis independentes, ou *não básicas*. Assim, as inequações (2.29) e (2.30) relacionam-se com as condições de complementaridade descritas pelas relações (2.12) e (2.11), respectivamente. Dessa maneira, o problema de contato entre dois sólidos vai se configurando como um PCL na sua formulação clássica.

Falta, ainda, encontrar uma relação de ortogonalidade entre  $f^n$  e  $\ddot{v}$ , que terminaria por definir o PCL e tornaria possível sua resolução por métodos pivotais.

Desde que as forças de contato possam ser separadas em componentes normais e tangenciais e que essas componentes tangenciais sejam funções lineares das componentes

---

<sup>5</sup> Positivas e negativas em relação aos respectivos versores normais de contato.

normais, como é o caso do modelo de atrito de Coulomb, então, como será provado mais adiante, as acelerações relativas normais são funções lineares das forças normais de contato. Assim, é possível escrever:

$$\ddot{v}(f^n) = mf^n + q$$

ou, generalizando para um corpo com  $p$  pontos de contato, a aceleração relativa normal de cada ponto  $P_i$  é:

$$\ddot{v}_i(\mathbf{f}^n) = \sum_j m_{ij} f_j^n + q_i, \quad i \in \{1, \dots, p\} \quad (2.31)$$

em que  $\mathbf{f}^n = [f_1^n, f_2^n, \dots, f_{(k-1)}^n, f_p^n]^T$  é o vetor coluna que concatena as intensidades das forças normais.

As Eq. ( 2.31 ) podem ser escritas matricialmente na forma:

$$M\mathbf{f}^n + \mathbf{q} = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} & \dots & m_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^n \\ \vdots \\ f_p^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \ddot{\mathbf{v}} \quad (2.32)$$

Então, de ( 2.32 ) e ( 2.29 ), vem que:

$$M\mathbf{f}^n + \mathbf{q} \geq 0 \quad (2.33)$$

que corresponde à Eq. ( 2.14 ) no contexto do problema de complementaridade linear.

Dividam-se, agora, os  $p$  pontos de contato em dois subconjuntos  $p_q$  e  $p_{nq}$  tais que, se o ponto  $i$  for tal que  $\ddot{v}_i = 0$ , então ele é um ponto *quiescente* e  $i \in p_q$ <sup>6</sup>. Se, por outro lado,  $\ddot{v}_i > 0$ , o ponto de contato  $i$  vai desaparecer no próximo instante de tempo e é *não quiescente* e  $i \in p_{nq}$ .

Note-se que, se um ponto  $i$  é quiescente, ou seja, manterá contato no próximo instante,  $f_i^n \geq 0$  e,

---

<sup>6</sup> Note-se que essas definições cobrem todo o conjunto de ponto  $\{1, \dots, p\}$ , pois a aceleração relativa normal não pode ser nula pela condição ( 2.29 ).

se  $i$  é não quiescente e está perdendo o contato, então  $f_i^n = 0$ . Assim, para cada ponto de contato (que só pode ser quiescente ou não quiescente), faz-se necessário que:

$$f_i^n \ddot{v}_i = 0$$

o que, vetorialmente, corresponde a:

$$(\mathbf{f}^n)^T \cdot \ddot{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.34)$$

Esse resultado é encontrado também nos trabalhos de Baraff (1989) e Trinkle et al. (1997). A Eq. (2.34) corresponde a (2.18) na formulação alternativa do PCL( $\mathbf{q}, M$ ) desde que  $\mathbf{f}_n \equiv \mathbf{z}$  e  $\ddot{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{w}$ .

Resumindo, o problema de encontrar os valores das forças de contato cujas componentes normais e tangenciais são linearmente dependentes consiste em processar o PCL( $\mathbf{q}, M$ ) definido por:

$$\ddot{\mathbf{v}} \geq 0, \mathbf{f}^n \geq 0 \quad (2.29), (2.30)$$

$$\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{q} + M \mathbf{f}^n \quad (2.32)$$

$$(\mathbf{f}^n)^T \cdot \ddot{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.34)$$

### 2.6.2 Contato em sistemas multicorpos com atrito de Coulomb

Na seção 2.6, foram encontradas as relações que permitem desenvolver as equações de contato entre dois corpos perfeitamente rígidos e escrevê-las na forma de um problema de complementaridade linear, com solução conhecida.

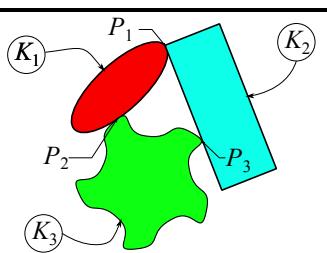
Nesta seção, o conceito de contato entre dois corpos será estendido para  $N$  componentes de um mesmo sistema. O objetivo principal é escrever, para esse sistema multicorpos, relações lineares entre as forças normais de contato  $\mathbf{f}^n$  e as acelerações relativas normais  $\ddot{\mathbf{v}}$ , de maneira a explicitar os termos do PCL definidos por (2.29), (2.30), (2.32) e (2.34). O desenvolvimento

que segue deve-se, em grande parte, ao trabalho de Sharf e Zhang (2006) e é elaborado com vistas à implementação computacional.

Admite-se um sistema fixo de coordenadas,  $\Gamma_0$ , relacionado com o referencial inercial. Suponha-se que o sistema é composto por  $N$  corpos rígidos  $K_1, \dots, K_n$ . A cada corpo  $K_j$  está associado um referencial ao qual corresponde um sistema ortogonal de coordenadas  $\Gamma_j$  com origem no respectivo centro de massa  $S_j$ . Os corpos podem estar conectados por juntas idealizadas (restrições holonômicas) e fazem contato uns com os outros em  $m$  pontos  $P_1, \dots, P_m$  chamados *pontos de contato globais*.

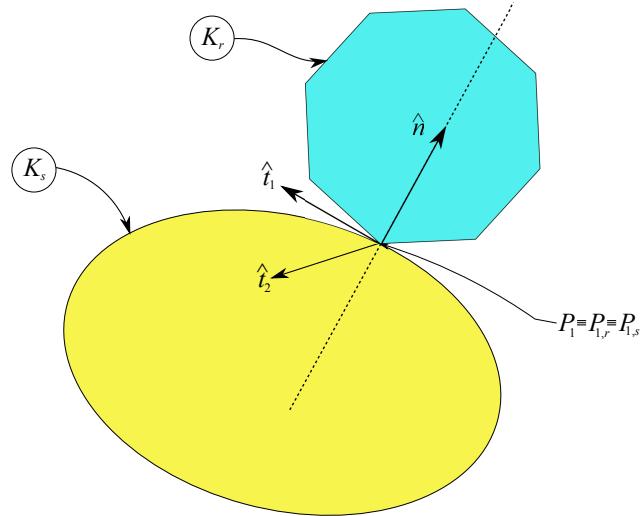
São definidos os *pontos de contato local* como os pontos pertencentes (solidários) aos corpos constituintes do sistema e que se encontram instantaneamente coincidentes com os pontos globais. Assim, para cada ponto global existem dois pontos locais, um para cada corpo do par de contato. Os pontos locais são identificados por  $P_{i,j}$  em que  $i$  denota seu índice local – um rótulo numérico sequencial que varia de corpo para corpo – e  $j$  indica o corpo ao qual pertence. A relação entre a numeração local e global de um dado ponto de contato é feita por meio de uma matriz de conectividade, que é uma forma interessante de representação, pois permite também visualizar como os corpos do sistema estão conectados. A Tabela 2.2 mostra um exemplo de matriz de conectividade para um caso típico de contato entre três corpos.

**Tabela 2.2. Exemplo de matriz de conectividade de contatos.**

		Pontos locais			
		$K_1$	$K_2$	$K_3$	
Pontos globais	$P_1$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	-	
	$P_2$	$P_{1,2}$	-	$P_{1,3}$	
	$P_3$	-	$P_{2,2}$	$P_{2,3}$	

Em cada ponto local  $P_{i,j}$  está fixado um sistema de coordenadas locais  $\Gamma_{i,j}$  cujo eixo  $x_{i,j}$  é alinhado com a normal de contato externa ao corpo, como aponta a Figura 2.13. Como foi observado anteriormente, a cada ponto global de contato correspondem dois pontos locais. Note-se, então, que para cada um dos elementos desse par de pontos locais de contato corresponde um

sistema de coordenadas local e que, segundo a definição dada acima, esses sistemas de coordenadas são opostos.



**Figura 2.13. Representação do sistema de coordenadas do ponto de contato.**

Para cada corpo  $K_j$  do sistema, a segunda lei de Newton diz que:

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_{\text{ext},j} + \mathbf{f}_{i,j} \quad (2.35)$$

em que  $\mathbf{f}_{i,j}$  é a resultante das forças internas;  $\mathbf{F}_{\text{ext},j}$  é a força externa resultante;  $m_j$  é a massa e  $\mathbf{r}_j$  é a posição do centro massa  $S_j$  em relação ao sistema inercial  $\Gamma_0$ .

Ainda para cada corpo isoladamente, a lei de Euler do movimento angular toma a forma:

$$\dot{\mathbf{H}}_{S_j} = \mathbf{M}_{\text{ext},j} + \mathbf{p}_{i,j} \times \mathbf{f}_{i,j} \quad (2.36)$$

em que  $\mathbf{H}_{S_j}$  é o vetor quantidade de movimento angular em relação ao centro de massa,  $\mathbf{M}_{\text{ext},j}$  é o momento externo resultante e  $\mathbf{p}_{i,j}$  é o vetor posição de cada ponto de contato  $P_{i,j}$  em relação ao sistema de coordenadas  $\Gamma_j$ .

O produto vetorial do lado direito da Eq. (2.36) pode ser escrito mais convenientemente na forma de um produto matricial,  $\tilde{\rho}_{i,j} \mathbf{f}_{i,j}$ .

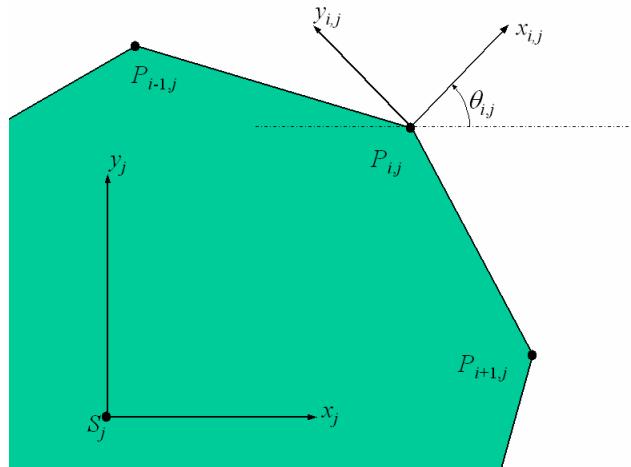
Seja  $\omega_j$  a velocidade angular e  $I_j$  o tensor de inércia do corpo em questão. Então, o lado esquerdo da Eq. ( 2.36 ) pode ser expandido da seguinte maneira:

$$\dot{\mathbf{H}}_{S_j} = I_j \dot{\omega}_j + \tilde{\omega}_j I_j \omega_j \quad (2.37)$$

pois a quantidade de momento angular acima é calculada com relação ao centro de massa.

As forças de contato são mais convenientemente escritas nos sistemas  $\Gamma_{i,j}$  pois já saem decompostas em parcelas normal e tangencial. No entanto, elas devem entrar nas Eq. ( 2.35 ) e ( 2.36 ) escritas no sistema  $\Gamma_j$ , para que seja mantida a coerência. Restringindo a análise ao caso planar, é possível obter um sistema  $\Gamma_{i,j}$  qualquer por meio da rotação do sistema  $\Gamma_j$  de um ângulo  $\theta_{i,j}$ , positivo no sentido anti-horário, como indica a Figura 2.14. Define-se, então, a matriz de rotação de Cardan  $T_{i,j}$  entre esses dois sistemas como sendo:

$$T_{i,j} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{i,j} & -\sin \theta_{i,j} & 0 \\ \sin \theta_{i,j} & \cos \theta_{i,j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$



**Figura 2.14.** Ângulo de rotação dos sistemas de coordenadas dos pontos de contato  $\Gamma_{i,j}$  em relação ao sistema do corpo  $\Gamma_j$ .

Então, utilizando o conceito de matriz de rotação e a expansão do vetor quantidade de movimento angular dada em ( 2.37 ), as equações de Newton-Euler, ( 2.35 ) e ( 2.36 ), podem ser reescritas como um sistema de equações:

$$\begin{cases} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \mathbf{F}_{\text{ext}} + T_j (T_{1,j}^{1,j} \mathbf{f}_{1,j} + T_{2,j}^{2,j} \mathbf{f}_{2,j} + \dots + T_{p-1,j}^{p-1,j} \mathbf{f}_{p-1,j} + T_{p,j}^{p,j} \mathbf{f}_{p,j}) \\ I_j \ddot{\boldsymbol{\omega}}_j = \mathbf{M}_{\text{ext}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j I_j \boldsymbol{\omega}_j + \tilde{\rho}_{1,j} T_j T_{1,j}^{1,j} \mathbf{f}_{1,j} + \tilde{\rho}_{2,j} T_j T_{2,j}^{2,j} \mathbf{f}_{2,j} + \dots + \\ \quad + \tilde{\rho}_{p-1,j} T_j T_{p-1,j}^{p-1,j} \mathbf{f}_{p-1,j} + \tilde{\rho}_{p,j} T_j T_{p,j}^{p,j} \mathbf{f}_{p,j} \end{cases}$$

Ou, matricialmente:

$$\begin{bmatrix} m_j & 0 \\ 0 & I_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_j \\ \boldsymbol{\omega}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext},j} \\ \mathbf{M}_{\text{ext},j} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j I_j \boldsymbol{\omega}_j \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} T_j T_{1,j} & T_j T_{2,j} & \dots & T_j T_{p-1,j} & T_j T_{p,j} \\ \tilde{\rho}_{1,j} T_j T_{1,j} & \tilde{\rho}_{2,j} T_j T_{2,j} & \dots & \tilde{\rho}_{p-1,j} T_j T_{p-1,j} & \tilde{\rho}_{p,j} T_j T_{p,j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,j \mathbf{f}_{1,j} \\ 2,j \mathbf{f}_{2,j} \\ \vdots \\ p-1,j \mathbf{f}_{p-1,j} \\ p,j \mathbf{f}_{p,j} \end{Bmatrix}$$

que pode, ainda, ser resumido por:

$$\hat{M}_j \ddot{\mathbf{y}}_j = \hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j} - \hat{\mathbf{L}}_j(\dot{\mathbf{y}}_j) + \hat{V}_j \cdot^{i,j} \hat{\mathbf{f}}_j(\dot{\mathbf{y}}_j, \mathbf{y}_j) \quad ( 2.39 )$$

em que  $\hat{M}_j$  é a matriz de massa,  $\ddot{\mathbf{y}}_j$  são as acelerações generalizadas,  $\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j}$  é o vetor de forças externas generalizadas,  $\hat{\mathbf{L}}_j$  representa esforços provenientes da rotação do corpo (também chamadas por alguns autores de forças de inércia),  $\hat{V}_j$  é matriz de rotação de contatos e  $\hat{\mathbf{f}}_j$  são as forças de contato generalizadas.

### Topologia e cinemática dos pontos de contato

O estudo da cinemática dos pontos de contato tem dois objetivos principais para o estudo da mecânica de atrito que ocorre nas interfaces cunha-travessa e cunha-lateral:

1. Determinar as *posições relativas*. O estudo das posições dos corpos do sistema permite calcular possíveis interações de contato;
2. Determinar as *velocidades relativas* entre pontos de contato correspondentes em pontos equivalentes. Essas velocidades entram na formulação da maioria dos modelos de atrito existentes;
3. Determinar as *acelerações relativas* entre os pontos de contato. As acelerações são equivalentes ao vetor  $(\mathbf{q} + M\mathbf{z})$  do PCL( $\mathbf{q}, M$ ).

### Velocidade dos pontos de contato

Como foi visto na Seção 2.3, a posição absoluta de um ponto qualquer de um corpo em movimento ao qual está associado um sistema de coordenadas  $\Gamma_j$  é:

$$\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_j + T_j^{-j} \mathbf{p}_{i,j} \quad (2.40)$$

em que  $T_j$  é matriz que gira o sistema  $\Gamma_j$  para alinhá-lo ao sistema inercial  $\Gamma_0$ .

O vetor velocidade do ponto  $P_{i,j}$  é definido como a variação temporal do vetor posição e, portanto,

$$\dot{\mathbf{r}}_{i,j} = \mathbf{r}_j + \frac{d}{dt} [T_j^{-j} \mathbf{p}_{i,j}]$$

em que  $\dot{\mathbf{r}}_j$  é a velocidade do centro de massa do corpo medida em relação ao sistema inercial de coordenadas. Note-se que esse valor, da velocidade do corpo, é um dos resultados considerados conhecidos e, portanto, deve ser calculado em um passo anterior à determinação das forças, que é o objeto dessa seção. O vetor  $\dot{\mathbf{r}}_{i,j}$ , por sua vez, entra como parâmetro essencial para o elemento de excitação externa de (2.39) e essa característica, de coeficientes da equação dependerem do próprio vetor de estados do sistema, é um dos fatores não lineares que torna a solução de problemas de atrito especialmente desafiadora.

Desenvolvendo a derivada do lado esquerdo da expressão encontrada acima, chega-se a expressão desejada para a velocidade:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{i,j} = \ddot{\mathbf{r}}_j + \dot{T}_j^{-j} \mathbf{p}_{i,j} + T_j^{-j} \dot{\mathbf{p}}_{i,j} \quad (2.41)$$

Fazendo um paralelo com a formulação clássica para a velocidade de uma partícula em movimento relativo, o segundo termo do lado direito da Eq. ( 2.39 ) representa a velocidade de rotação ao redor de  $S_j$ , enquanto que o terceiro termo representa a velocidade relativa,  $\mathbf{v}_{rel}$ .

Na dinâmica dos corpos rígidos, quando o ponto de interesse pertence ao corpo  $K_j$ , a velocidade relativa calculada no referencial do corpo pode ser considerada nula, pois diz respeito ao afastamento do ponto com relação ao centro de massa, liberdade que lhe é negada pela hipótese de corpo rígido. Como foi suposto que os pontos locais de contato são pertencentes aos corpos em questão, a observação acima vale e a velocidade relativa é nula.

### Aceleração dos pontos de contato

De maneira análoga ao que foi feito com a velocidade, para encontrar a aceleração do ponto, deve-se derivar o vetor  $\mathbf{r}_{i,j}$  duas vezes com relação ao tempo. Assim, utilizando o resultado para a velocidade em ( 2.41 ):

$$\ddot{\mathbf{r}}_{i,j} = \ddot{\mathbf{r}}_j + \frac{d}{dt} [\dot{T}_j^{-j} \mathbf{p}_{i,j}] + \frac{d}{dt} [T_j^{-j} \dot{\mathbf{p}}_{i,j}]$$

que, desenvolvido, fica:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{i,j} = \ddot{\mathbf{r}}_j + \ddot{T}_j^{-j} \mathbf{p}_{i,j} + 2\dot{T}_j^{-j} \dot{\mathbf{p}}_{i,j} + T_j^{-j} \ddot{\mathbf{p}}_{i,j} \quad (2.42)$$

Fazendo novamente o paralelo com a equação clássica para a aceleração de um ponto em movimento relativo, o segundo termo do lado direito de ( 2.42 ) engloba as acelerações tangencial e centrípeta resultantes do movimento de rotação, o terceiro termo é a aceleração de Coriolis,  $\mathbf{a}_{Cor}$ , e o quarto termo é a aceleração relativa,  $\mathbf{a}_{rel}$ , que é a derivada temporal direta de  $\mathbf{v}_{rel}$  definida na seção anterior.

A Eq. ( 2.42 ) pode, ainda, ser escrita de maneira mais adequada se for notado que:

$$\ddot{T}_j T_j^T = \dot{\tilde{\omega}}_j + \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j$$

e, assim:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{i,j} = \ddot{\mathbf{r}}_j + \dot{\tilde{\omega}}_j \tilde{\mathbf{p}}_{i,j} + \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \tilde{\mathbf{p}}_{i,j} + 2\dot{T}_j \cdot \dot{\mathbf{p}}_{i,j} + T_j \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{i,j}$$

mas  $\dot{\tilde{\omega}}_j \tilde{\mathbf{p}}_{i,j} = -\tilde{\rho}_{i,j} \dot{\tilde{\omega}}_j$ . Logo, se  $\bar{I}$  é a matriz identidade:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{i,j} = [\bar{I} \quad -\tilde{\rho}_{i,j}] \ddot{\mathbf{y}}_j + \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \tilde{\mathbf{p}}_{i,j} + 2\dot{T}_j \cdot \dot{\mathbf{p}}_{i,j} + T_j \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{i,j} \quad (2.43)$$

Isolando  $\ddot{\mathbf{y}}_j$  em ( 2.39 ) e substituindo em ( 2.43 ), chega-se a:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{i,j} = & [\bar{I} \quad -\tilde{\rho}_{i,j}] \hat{M}_j^{-1} [\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j} - \hat{\mathbf{L}}_j + \hat{V}_j \cdot \hat{\mathbf{f}}_j] + \\ & + \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \tilde{\mathbf{p}}_{i,j} + 2\dot{T}_j \cdot \dot{\mathbf{p}}_{i,j} + T_j \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{i,j} \end{aligned} \quad (2.44)$$

As acelerações dadas no lado esquerdo da Eq. ( 2.44 ) são representadas no referencial inercial, mas a componente que realmente interessa é a normal ao plano de contato, pois entra diretamente nas relações ( 2.29 ), ( 2.32 ) e ( 2.34 ) que definem o PCL de contato. Assim, é mais interessante representar a aceleração  $\ddot{\mathbf{r}}_{i,j}$  no sistema de coordenadas associado ao ponto de contato em questão.

A transformação de  $\ddot{\mathbf{r}}_{i,j}$  em  $\ddot{\mathbf{r}}_{i,j}^{i,j}$  é obtida por duas rotações sucessivas de sistemas de coordenadas: a primeira para converter  $\Gamma_0$  em  $\Gamma_j$  e a segunda para converter  $\Gamma_j$  em  $\Gamma_{i,j}$ . Matematicamente, é preciso pré-multiplicar toda a Eq. ( 2.44 ) por  $T_{i,j}^T T_j^T$  para obter:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{i,j}^{i,j} = & T_{i,j}^T T_j^T [\bar{I} \quad -\tilde{\rho}_{i,j}] \hat{M}_j^{-1} [\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j} - \hat{\mathbf{L}}_j + \hat{V}_j \cdot \hat{\mathbf{f}}_j] + \\ & + T_{i,j}^T T_j^T \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \tilde{\mathbf{p}}_{i,j} + 2T_{i,j}^T T_j^T \dot{T}_j \cdot \dot{\mathbf{p}}_{i,j} + T_{i,j}^T T_j^T T_j \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{i,j} \end{aligned}$$

mas, como as matrizes de rotação são ortonormais, então  $T_j^T T_j = T_j^{-1} T_j = \bar{I}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{i,j}^{i,j} = & [T_{i,j}^T T_j^T \quad -T_{i,j}^T T_j^T \tilde{\rho}_{i,j}] \hat{M}_j^{-1} [\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j} - \hat{\mathbf{L}}_j + \hat{V}_j \cdot \hat{\mathbf{f}}_j] + \\ & + T_{i,j}^T T_j^T \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \tilde{\mathbf{p}}_{i,j} + 2T_{i,j}^T T_j^T \dot{T}_j \tilde{\omega}_j \cdot \dot{\mathbf{p}}_{i,j} + T_{i,j}^T \cdot \ddot{\mathbf{p}}_{i,j} \end{aligned}$$

Notando-se, também, que o produto de uma matriz de rotação  $T$  por uma matriz antissimétrica  $\tilde{A}$  tem a seguinte propriedade,  $T\tilde{A} = -\tilde{A}^T$  e que  $T_{i,j}^T \cdot {}^j\ddot{\mathbf{p}}_{i,j} = {}^{i,j}\ddot{\mathbf{p}}_{i,j}$ , chega-se a:

$$\begin{aligned} {}^{i,j}\ddot{\mathbf{r}}_{i,j} &= \begin{bmatrix} T_{i,j}^T T_j^T & T_{i,j}^T T_j^T \tilde{\rho}_{i,j}^T \end{bmatrix} \hat{M}_j^{-1} [\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j} - \hat{\mathbf{L}}_j + \hat{V}_j \cdot {}^{i,j}\hat{\mathbf{f}}_j] + \\ &+ T_{i,j}^T T_j^T \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \mathbf{p}_{i,j} + 2 T_{i,j}^T T_j^T \dot{T}_j \tilde{\omega}_j \cdot {}^j\dot{\mathbf{p}}_{i,j} + {}^{i,j}\ddot{\mathbf{p}}_{i,j} \end{aligned} \quad (2.45)$$

A Eq. ( 2.45 ) fornece o vetor aceleração de um ponto de contato  $P_{i,j}$  pertencente a um corpo  $K_j$ . O primeiro elemento desse vetor representa a aceleração na direção normal de contato, enquanto os outros dois elementos dizem respeito aos componentes tangenciais. Logo, é interessante separar esses componentes, pois a restrição de complementaridade ( 2.27 ) diz respeito somente à projeção normal do vetor.

Note-se, então, que tanto as acelerações dos pontos de contato quanto as forças de contato podem ser decompostos da seguinte maneira:

$${}^{i,j}\ddot{\mathbf{r}}_j^{\Sigma i} = \hat{N}_j \mathbf{r}_j^{\Sigma n} + \hat{D}_j \mathbf{r}_j^{\Sigma t} \quad (2.46)$$

$${}^{i,j}\hat{\mathbf{f}}_j^{\Sigma i} = \hat{N}_j \hat{\mathbf{f}}_j^{\Sigma n} + \hat{D}_j \hat{\mathbf{f}}_j^{\Sigma t}$$

em que os subscritos  $\Sigma n$  e  $\Sigma t$  remetem, respectivamente, às componentes normal e tangencial das forças de contato que agem sobre o corpo  $K_j$  em questão. As matrizes de projeção  $\hat{N}$  e  $\hat{D}$  contém os versores normais e tangenciais, respectivamente, e são tais que  $\hat{N}$  é  $3p \times p$  e  $\hat{D}$  é  $3p \times 2p$ , com:

$$\hat{N}_j = (\hat{n}_{ij})_j = \begin{cases} 1, \text{ se } i = 1 + 3(j-1) \\ 0, \text{ se } i \neq 1 + 3(j-1) \end{cases}, \quad \hat{D}_j = (\hat{d}_{ij})_j = \begin{cases} 1, \text{ se } i = 2 + 1,5(j-1) \text{ e } j \text{ ímpar} \\ 1, \text{ se } i = 3 + 1,5(j-1) \text{ e } j \text{ par} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{e } \hat{\mathbf{f}}_j^{\Sigma n} = [f_1^n \quad \dots \quad f_p^n]^T, \quad \hat{\mathbf{f}}_j^{\Sigma t} = [f_1^{t_1} \quad f_1^{t_2} \quad \dots \quad f_p^{t_1} \quad f_p^{t_2}]^T$$

Desse modo, com o emprego de ( 2.46 ) a Eq. ( 2.45 ) pode ser reescrita de uma forma compacta para o corpo como um todo:

$$\begin{aligned}\hat{N} \ddot{\mathbf{r}}_j^{\Sigma n} + \hat{D} \ddot{\mathbf{r}}_j^{\Sigma t} &= \hat{V}_j^T \hat{M}_j^{-1} [\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j} - \hat{\mathbf{L}}_j + \hat{V}_j (\hat{N}_j \hat{\mathbf{f}}_j^{\Sigma n} + \hat{D}_j \hat{\mathbf{f}}_j^{\Sigma t})] + \\ &+ \hat{\mathbf{A}}_j + \hat{N}_j^{T,i,j} \ddot{\mathbf{p}}_j^{\Sigma i}\end{aligned}\quad (2.47)$$

em que:

$$\hat{\mathbf{A}}_j = \begin{bmatrix} T_{1,j}^T T_j^T (\tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \mathbf{p}_{1,j} + 2\dot{T}_j \tilde{\omega}_j^j \dot{\mathbf{p}}_{1,j}) \\ \vdots \\ T_{p,j}^T T_j^T (\tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j \mathbf{p}_{p,j} + 2\dot{T}_j \tilde{\omega}_j^j \dot{\mathbf{p}}_{p,j}) \end{bmatrix}$$

Lembrando que  $\dot{\mathbf{p}}_{i,j} = T_j^j \dot{\mathbf{p}}_{i,j}$ , os termos relativos às acelerações de Coriolis ficam  $2\dot{T}_j \tilde{\omega}_j T_j^T \dot{\mathbf{p}}_{p,j}$ . A derivada da matriz de rotação pode ser reescrita como  $\tilde{\omega}_j T_j$

Da definição das matrizes  $\hat{N}$  e  $\hat{D}$ , é possível notar que são ortonormais entre si e, portanto,  $\hat{N}_j^T \hat{N}_j = \hat{D}_j^T \hat{D}_j = \bar{I}$  e  $\hat{N}_j^T \hat{D}_j = \hat{D}_j^T \hat{N}_j = \bar{0}$ , em que  $\bar{0}$  é a matriz nula. Então, as acelerações normais podem ser isoladas pela pré-multiplicação da Eq. ( 2.47 ) pela matriz  $\hat{N}_j^T$ :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_j^{\Sigma n} &= \hat{N}_j^T \hat{V}_j^T \hat{M}_j^{-1} [\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j} - \hat{\mathbf{L}}_j + \hat{V}_j (\hat{N}_j \hat{\mathbf{f}}_j^{\Sigma n} + \hat{D}_j \hat{\mathbf{f}}_j^{\Sigma t})] + \\ &+ \hat{N}_j^T \hat{\mathbf{A}}_j + \hat{N}_j^{T,i,j} \ddot{\mathbf{p}}_j^{\Sigma i}\end{aligned}\quad (2.48)$$

O último termo do lado direito da Eq. ( 2.48 ) representa a aceleração relativa do ponto de contato no referencial do corpo. Pela hipótese de corpo rígido, essa contribuição relativa deve ser nula.

Isolando os termos relativos às forças de contato em ( 2.48 ) chega-se a:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_j^{\Sigma n} &= [\hat{N}_j^T \hat{V}_j^T \hat{M}_j^{-1} (\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j} - \hat{\mathbf{L}}_j) + \hat{N}_j^T \hat{\mathbf{A}}_j] + \\ &+ \hat{N}_j^T \hat{V}_j^T \hat{M}_j^{-1} \hat{V}_j (\hat{N}_j \hat{\mathbf{f}}_j^{\Sigma n} + \hat{D}_j \hat{\mathbf{f}}_j^{\Sigma t})\end{aligned}\quad (2.49)$$

Claramente, em se tratando de um sistema de corpos rígidos com  $N$  componentes, a Eq. ( 2.49 ) é apenas a  $j$ -ésima igualdade de um sistema. Supondo que dois corpos,  $K_q$  e  $K_r$ , estejam em contato, a terceira lei de Newton estabelece que  $\hat{\mathbf{f}}_q^{\Sigma n} = -\hat{\mathbf{f}}_r^{\Sigma n}$  e que  $\hat{\mathbf{f}}_q^{\Sigma t} = -\hat{\mathbf{f}}_r^{\Sigma t}$ . Isso faz surgirem forças incógnitas redundantes que podem ser eliminadas pela introdução de matrizes de conectividade normais e tangenciais.

As matrizes de conectividade relacionam os pontos de contato globais às suas contrapartidas locais. A matriz de conectividade normal é:

$$C_j^n = (c_{rs})_j^n = \begin{cases} 1, & \text{se o contato local } r \text{ corresponde ao contato global } s \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

analogamente, a matriz de conectividade tangencial é uma matriz cujos blocos são dados por:

$$C_j^t = (c_{rs})_j^t = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{se o contato local } r \text{ corresponde ao contato global } s \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Lembrando que o sistema possui  $m$  pontos de contato, definem-se, então, os vetores globais de forças normais e tangenciais como

$$\hat{\mathbf{f}}^n = \begin{bmatrix} f_1^n & \dots & f_P^n \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\mathbf{f}}^t = \begin{bmatrix} f_1^{t_1} & f_1^{t_2} & \dots & f_P^{t_1} & f_P^{t_2} \end{bmatrix}$$

Com isso, pode-se escrever a Eq. ( 2.49 ) de uma forma mais conveniente:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_j^{\Sigma n} &= [\hat{N}_j^T \hat{V}_j^T \hat{M}_j^{-1} (\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j} - \hat{\mathbf{L}}_j) + \hat{N}_j^T \hat{\mathbf{A}}_j] + \\ &+ \hat{N}_j^T \hat{V}_j^T \hat{M}_j^{-1} \hat{V}_j (\hat{N}_j C_j^n \hat{\mathbf{f}}^n + \hat{D}_j C_j^t \hat{\mathbf{f}}^t) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Resumindo, a Eq. ( 2.50 ) dá as acelerações dos pontos do corpo  $K_j$  que são, instantaneamente, coincidentes com os pontos de contato globais.

Sejam, então, dois pontos,  $P_A$  e  $P_B$ , tal que  $P_A$  pertence a  $K_r$  e  $P_B$  pertence a  $K_s$  e que esses dois pontos são, em um dado instante de tempo, pontos locais de contato coincidentes. Nesse

caso, a função aceleração relativa no sistema de coordenadas associado a  $P_A$ , imprescindível para a formulação do PCL descrito pelas Eq. ( 2.29 ) a ( 2.32 ), é:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}_A^n - \ddot{\mathbf{r}}_B^n \quad (2.51)$$

Note-se, no entanto, que o vetor de acelerações normais dado por ( 2.50 ) concatena todas as acelerações dos pontos de contato de um certo corpo e que esse vetor pode variar de dimensão de corpo para corpo. Essa característica leva à necessidade de escolher, a cada par de vetores  $\ddot{\mathbf{r}}_j^{\Sigma n}$ , as linhas adequadas que representam os pontos de contato locais respectivos. Essa última tarefa pode ser executada utilizando-se, novamente, a matriz de conectividade normal  $C_j^n$ . Pré-multiplicando todas as  $N$  Eq. ( 2.50 ) por suas respectivas matrizes de conectividade normal, obtém-se  $N$  vetores com  $m$  linhas que podem ser somados por possuírem a mesma dimensão.

Agora a escolha dos sistemas de coordenadas de contato locais como sendo opostos toma um papel muito importante. A Eq. ( 2.51 ) é o resultado de uma subtração, o que significa que a aceleração de  $P_B$  em relação a  $P_A$  tem sentido oposto à aceleração de  $P_A$  em relação a  $P_B$  se todas as grandezas forem escritas no mesmo sistema de coordenadas. Matematicamente:

$${}^A \ddot{\mathbf{v}}_{B/A} = {}^A \ddot{\mathbf{r}}_A^n - {}^A \ddot{\mathbf{r}}_B^n \neq {}^A \ddot{\mathbf{r}}_B^n - {}^A \ddot{\mathbf{r}}_A^n = {}^A \ddot{\mathbf{v}}_{A/B}$$

Como os eixos normais dos sistemas locais de coordenadas dos pontos  $P_A$  e  $P_B$  são opostos, conclui-se que  ${}^A \ddot{\mathbf{r}}_B^n = -{}^B \ddot{\mathbf{r}}_B^n$  e, portanto:

$${}^A \ddot{\mathbf{v}}_{B/A} = {}^B \ddot{\mathbf{r}}_B^n + {}^A \ddot{\mathbf{r}}_A^n$$

ao passo que

$${}^B \ddot{\mathbf{v}}_{A/B} = {}^A \ddot{\mathbf{r}}_A^n + {}^B \ddot{\mathbf{r}}_B^n$$

e, assim, o efeito de calcular as acelerações em relação a  $P_A$  ou  $P_B$  é o mesmo.

Para facilitar a leitura e a compreensão das equações a seguir, sejam:

$$\mathbf{q}_j = \hat{N}_j^T \hat{V}_j^T \hat{M}_j^{-1} (\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j} - \hat{\mathbf{L}}_j) + \hat{N}_j^T \hat{\mathbf{A}}_j$$

$$U_j^n = \hat{N}_j^T \hat{V}_j^T \hat{M}_j^{-1} \hat{V}_j \hat{N}_j C_j^n$$

$$U_j^t = \hat{N}_j^T \hat{V}_j^T \hat{M}_j^{-1} \hat{V}_j \hat{D}_j C_j^t$$

de modo que ( 2.50 ) torna-se:

$$\ddot{\mathbf{r}}_j^{\Sigma n} = \mathbf{q}_j + U_j^n \hat{\mathbf{f}}^n + U_j^t \hat{\mathbf{f}}^t \quad (2.52)$$

As acelerações relativas nos pontos de contato globais podem ser encontradas somando-se todos os vetores  $\ddot{\mathbf{r}}_j^{\Sigma n}$  e multiplicando-se o resultado por -1:

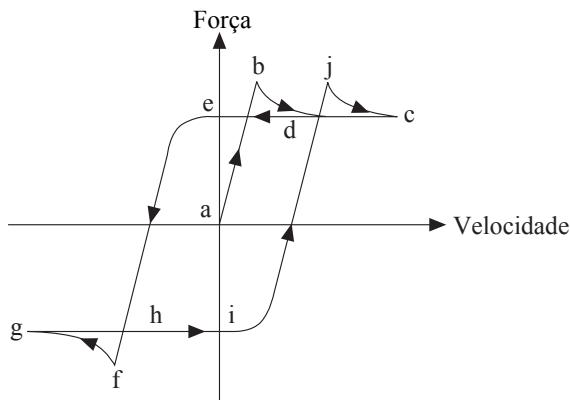
$$-\ddot{\mathbf{v}} = -\sum_j \ddot{\mathbf{r}}_j^{\Sigma n} = -\sum_j \mathbf{q}_j + \left( \sum_j U_j^n \right) (-\hat{\mathbf{f}}^n) + \left( \sum_j U_j^t \right) (-\hat{\mathbf{f}}^t) \quad (2.53)$$

### Atrito de Coulomb

A Eq. ( 2.53 ) é a base para o desenvolvimento dos dois ramos de algoritmos de solução para problemas de contato baseados em complementaridade. Se a relação entre as forças tangenciais (de atrito) e normais for não linear, então o desenvolvimento recai em um PCNL (*problema de complementaridade não linear*), se a relação for de primeira ordem, linear, então o contato vira um PCL.

No caso das superfícies de contato da suspensão secundária, as forças de atrito que surgem são do tipo seco, geradas por uma série de mecanismos de microdeformação elastoplástica das rugosidades superficiais dos corpos em contato. Macroscopicamente, observa-se que o desenvolvimento das forças de atrito depende das forças externas aplicadas no corpo e que podem ser mapeadas em função da velocidade de escorregamento, deslocamento relativo e mesmo aceleração relativa (McMillan, 1997) entre as superfícies de contato. Uma revisão bastante completa de diferentes modelos para forças de atrito é dada por Olsson et al. (1998) incluindo considerações sobre as diferenças entre modelos estáticos e dinâmicos, atrito de Dahl - muito utilizado para controle de sistemas autoexcitados - e o modelo de escovas - que modela as rugosidades como pequenas cerdas engastadas.

Sabe-se que as forças de atrito costumam apresentar ciclos de histerese, tanto para deslocamentos cíclicos como para velocidades alternadas, como mostra a Figura 2.15. A região interna ao ciclo, no entanto, diminui com o aumento da rigidez tangencial do contato e, no limite, tende para uma função descontínua em que há um valor constante para velocidades positivas e outro valor constante para velocidades negativas; para velocidade zero, a força assume qualquer valor entre esses dois extremos. Esse caso limite, com alta rigidez tangencial, descreve razoavelmente bem o modelo de Coulomb.

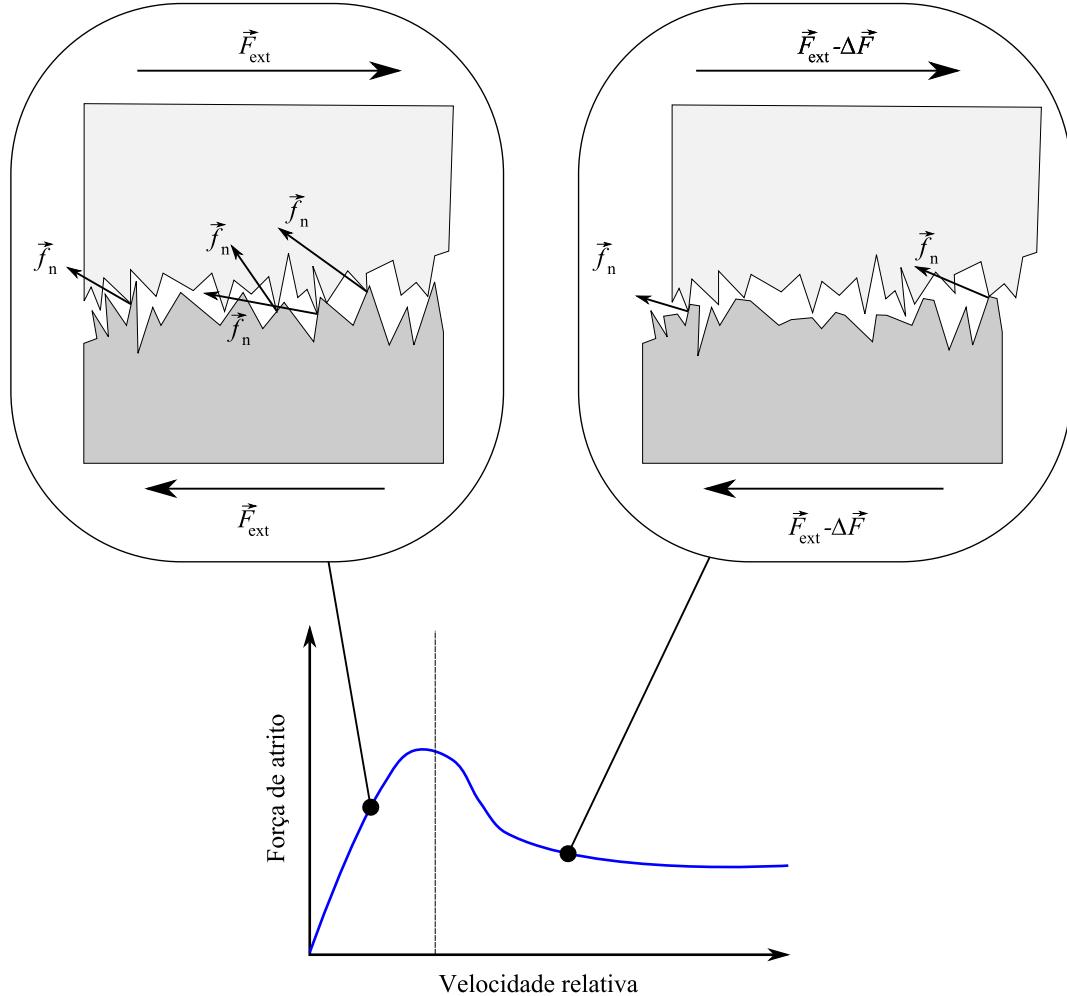


**Figura 2.15. Ciclo de histerese da força de atrito em função da velocidade de escorregamento (McMillan, 1997)**

Fenomenologicamente, admite-se que as forças de atrito seco de Coulomb desenvolvem-se em duas fases distintas (Figura 2.16):

1. Adesão ou regime estático: nessa etapa o movimento relativo entre as superfícies é desprezível e a força de atrito é de mesma magnitude e sentido oposto à componente tangencial da resultante das forças externas. Do ponto de vista microscópico, corresponde à fase de deformação elástica das imperfeições superficiais;
2. Escorregamento ou regime cinético: à medida que as componentes tangenciais das forças externas aumentam, as forças de atrito as equilibram até que seja atingido um limite que depende, *grosso modo*, da rugosidade dos materiais em contato. Nesse limite, define-se o coeficiente de atrito estático entre as duas superfícies,  $\mu$ , como sendo a razão entre a força de atrito e a força normal. A partir desse ponto, as irregularidades superficiais passam a sofrer deformação plástica e ruptura, a força de atrito sofre uma queda e mantém-se

aproximadamente constante e contrária ao vetor velocidade relativa. É comum denominar coeficiente de atrito dinâmico  $\mu_d$  a razão força de atrito/força normal quando a velocidade de escorregamento tende a infinito. Para superfícies duras, que em geral apresentam fratura com características frágeis, pode-se admitir  $\mu_d = \mu$ .



**Figura 2.16. Caracterização das forças de atrito como resultado da rugosidade das superfícies de contato.**

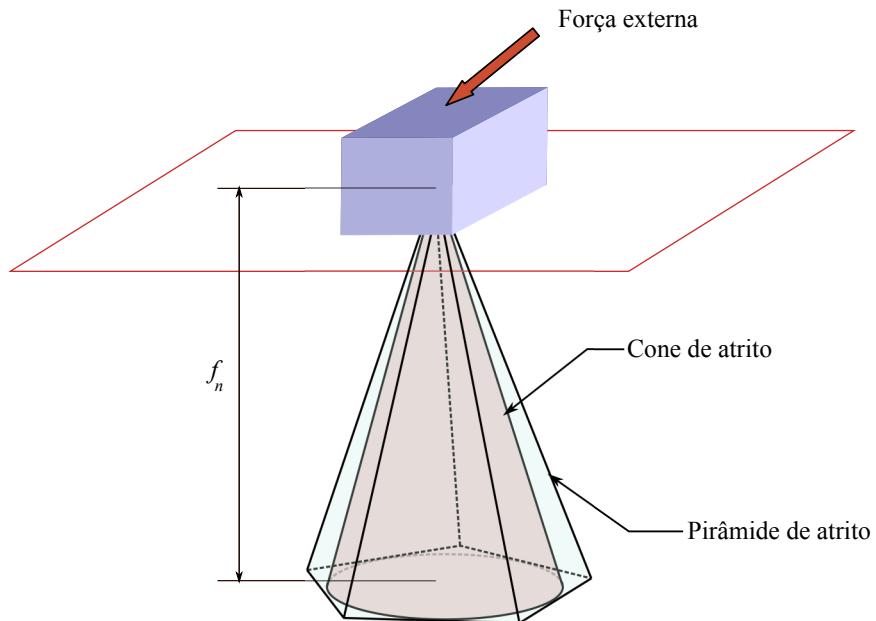
Assim, a força de atrito pode assumir qualquer valor até um máximo  $\mu \cdot f^n$ , dependendo das forças externas. Matematicamente, pode-se escrever que:

$$f^t - \mu \cdot f^n \leq 0$$

Como as forças de contato são dadas por  $\mathbf{f}^t + \mathbf{f}^n$ , a inequação acima descreve um cone de altura  $\mathbf{f}^n$  e raio da base  $\mu \cdot f^n$  dentro do qual o vetor força de contato deve estar contido. Trinkle

et al. (1997) mostraram que modelar as forças de contato segundo o conceito de cone de atrito leva à versão não-linear do problema de complementaridade, que é de resolução mais complexa. Os mesmos pesquisadores também demonstraram que é possível aproximar o cone de atrito por uma pirâmide de atrito e que essa aproximação lineariza o problema de complementaridade.

No caso plano, que é de especial interesse para o desenvolvimento do modelo simplificado da suspensão secundária, o cone (ou a pirâmide) de atrito fica restrita a um triângulo. Portanto, considerando-se apenas movimento bidimensional, a formulação é sempre linear. Ainda assim, o modelo proposto por Trinkle et al. requer que sejam identificados os pontos de escorregamento e que o espaço de acelerações para esses pontos seja separado em positivo e negativo. Para cada subespaço, existe uma relação de complementaridade a ser resolvida, o que duplica o tamanho do problema caso todos os pontos estejam deslizando.



**Figura 2.17. Cone de atrito e pirâmide de atrito.**

Propõe-se, então, uma simplificação baseada no conceito de força de atrito como função da velocidade de deslizamento. Nessa aproximação, aplica-se o seguinte modelo descontínuo para o caso plano:

$$\begin{cases} \mathbf{f}^t = -\text{sign}(v_{\text{rel}})\mu f^n \hat{\mathbf{t}}_1 & , \text{caso } |v_{\text{rel}}| > v_t \\ \mathbf{f}^t = -\frac{v_{\text{rel}}}{v_t} \mu f^n \hat{\mathbf{t}}_1 & , \text{caso } |v_{\text{rel}}| \leq v_t \end{cases} \quad (2.54)$$

em que  $v_t$  é uma velocidade de transição do regime estático para o regime cinético,  $\text{sign}()$  é uma função que retorna o sinal do argumento e  $v_{\text{rel}}$  é a velocidade tangencial de escorregamento entre as superfícies, definida por:

$$v_{\text{rel}} = \hat{\mathbf{t}}_1 \cdot (\dot{\mathbf{r}}_{\alpha,r}^{(\alpha,r)} + \dot{\mathbf{r}}_{\beta,s}^{(\beta,s)})$$

em que  $P_{\alpha,r}$  e  $P_{\beta,s}$  são pontos de contato locais correspondentes. Note-se que aqui foi novamente empregado o fato dos sistemas de coordenadas  $\Gamma_{\alpha,r}$  e  $\Gamma_{\beta,s}$  serem opostos. Na Eq. ( 2.54 ), é possível escrever descrever as forças tangenciais como o produto de um coeficiente de atrito - que é função da velocidade de escorregamento - pela normal, ou

$$\mathbf{f}^t = \phi(v_{\text{rel}}) f^n \hat{\mathbf{t}}_1 \quad , \text{com } \phi(v_{\text{rel}}) = \begin{cases} -\text{sign}(v_{\text{rel}})\mu f^n \hat{\mathbf{t}}_1 & , \text{caso } |v_{\text{rel}}| > v_t \\ -\frac{v_{\text{rel}}}{v_t} \mu f^n \hat{\mathbf{t}}_1 & , \text{caso } |v_{\text{rel}}| \leq v_t \end{cases} \quad (2.55)$$

Para incluir os efeitos de atrito na relação ( 2.53 ) entre acelerações normais e forças de contato, define-se a matriz de atrito  $Mu$ , cujos blocos são dados por:

$$Mu_{\sigma} = \begin{bmatrix} \phi_{\sigma}(v_{\text{rel}}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

em que o subscrito  $\sigma$  indica o índice do ponto de contato. Assim, a relação entre as forças globais de contato é:

$$\hat{\mathbf{f}}^t = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \hat{\mathbf{f}}^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \phi_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Com isso, o problema de encontrar as forças de contato de um determinado sistema mecânico de corpos rígidos consiste em processar o seguinte PCL:

$$-\hat{\mathbf{f}}^n \leq 0 \quad (2.58)$$

$$-\ddot{\mathbf{v}} = -\sum_j \mathbf{q}_j + \left( \sum_j \mathbf{U}_j^n + \sum_j \mathbf{U}_j^t \mathbf{M} \mathbf{u} \right) (-\hat{\mathbf{f}}^n) \geq \mathbf{0} \quad (2.59)$$

$$\ddot{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{f}}^n = 0 \quad (2.60)$$

### 3. MODELOS MATEMÁTICOS

Para poder realizar a simulação numérica do comportamento da suspensão secundária, bem como para qualquer sistema dinâmico, é preciso antes obter as equações diferenciais que regem o movimento do sistema.

Este capítulo apresenta dois modelos para a dinâmica da suspensão secundária do truque de três peças: um com apenas um grau de liberdade e um com 9 graus de liberdade. Apresenta, também, um modelo para a dinâmica do truque de três peças como um todo que incorpora a suspensão de 9 graus de liberdade.

#### 3.1. Modelo da suspensão secundária com juntas de translação em Adams/View

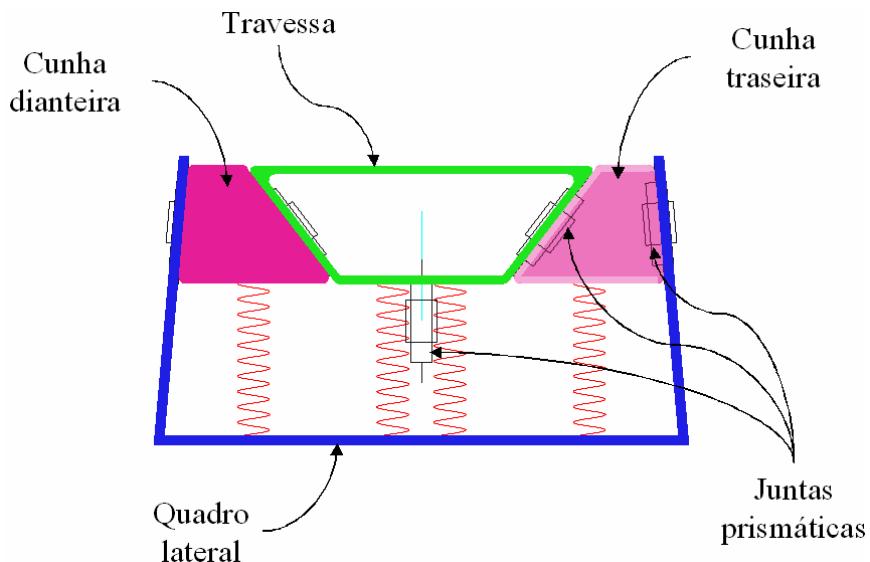
Inicialmente, foi desenvolvido um modelo multicorpos utilizando-se o programa comercial ADAMS/View. O modelo representa meia suspensão de truque de três peças e é composto por quatro corpos considerados perfeitamente rígidos: um membro lateral, duas cunhas de atrito e uma travessa. Os movimentos permitidos são restritos ao plano delimitado pelos eixos longitudinal e vertical do vagão e as restrições de configurações adotadas remetem ao modelo de Kaiser et al. (2002), ou seja, é permitido que as superfícies de contato deslizem tangencialmente entre si, mas tanto a penetração quanto o afastamento normal são impedidos por juntas prismáticas ideais (Figura 3.1). As forças normais impostas pelas juntas foram utilizadas para calcular as forças tangenciais de atrito segundo três leis diferentes:

$$f_I^t(v_{rel}) = f^n \mu \frac{v_{rel}}{|v_{rel}|} \quad (3.1)$$

$$f_I^t(v_{rel}) = \begin{cases} f^n \mu_s \frac{v_{rel}}{v_t} & , \text{ se } |v_{rel}| \leq v_t \\ f^n \mu_d \frac{v_{rel}}{|v_{rel}|} & , \text{ se } |v_{rel}| > v_t \end{cases} \quad (3.2)$$

$$f_{II}^t(v_{rel}) = \begin{cases} f^n \mu_s \frac{v_{rel}}{v_t} & , \text{ se } |v_{rel}| \leq v_t \\ f^n \mu_d \frac{v_{rel}^{0,9}}{|v_{rel}|} & , \text{ se } |v_{rel}| > v_t \end{cases} \quad (3.3)$$

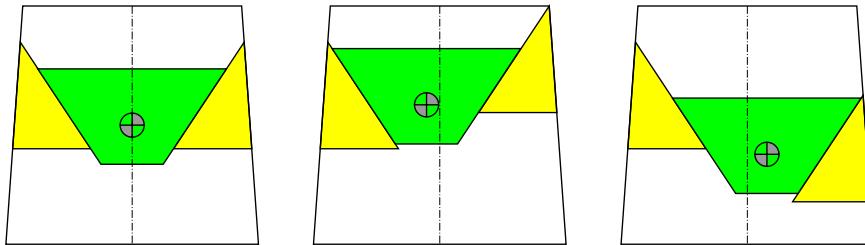
sendo  $v_{rel}$  a velocidade relativa de deslizamento das superfícies,  $v_t$  uma velocidade arbitrária de transição,  $\mu$  o coeficiente de atrito. Os subscritos  $s$  e  $d$  do coeficiente de atrito indicam, respectivamente, as fases estática (de adesão) e dinâmica (de escorregamento) do sistema, segundo a nomenclatura clássica. Os subscritos da força de atrito  $f^t$  dizem respeito aos três diferentes modelos: (I) Coulomb, (II) estático-dinâmico, (III) exponencial.



**Figura 3.1. Modelo da suspensão secundária desenvolvido em ADAMS/View.**

Note-se que, pela equação de Gruebler (Apêndice B) para mecanismos planos, o número de graus de liberdade da montagem mostrada na Figura 3.1 deveria ser apenas um, o que significaria

que dada a posição de um dos corpos, a configuração do sistema seria definida. A Figura 3.2, no entanto, mostra que para uma dada posição de uma das cunhas, existem infinitas configurações possíveis do sistema. É necessário, portanto, conhecer a posição vertical das duas cunhas ou então as posições vertical e horizontal da travessa para determinar a configuração da montagem e, portanto, o sistema possui, na realidade, dois graus de liberdade.



**Figura 3.2. Possíveis configurações do sistema para uma posição fixa da cunha esquerda.**

Uma restrição fundamental desse modelo, relacionada diretamente ao uso de juntas prismáticas, é que os resultados têm significado físico se, e somente se, as forças de restrição entre os corpos forem de natureza compressiva, o que simularia, de fato, um contato. A partir do momento em que os corpos começam a se afastar (caso isso ocorra), as juntas aplicam forças trativas, que impedem a separação e o sistema, então, não representa a suspensão secundária de um truque de três peças, mas apenas três blocos encaixados.

Esse primeiro modelo utilizou os mesmos parâmetros físicos (massas, rigidezes, amortecimentos e coeficientes de atrito) indicados no trabalho de Chandiramani. O objetivo era responder às seguintes questões:

3. O comportamento do protótipo de Chandiramani mostrou adesão-escorregamento em freqüências maiores do que os modelos teóricos existentes. Pergunta-se: será a evolução das equações de movimento tão sensível aos parâmetros do sistema que a mera redução da escala física poderia causar uma mudança nos fenômenos de bifurcação observados por Kaiser et al.?
4. O *solver* do ADAMS é suficientemente adaptável para resolver problemas com sistemas que sofrem degeneração das equações de movimento?
5. A hipótese de juntas prismáticas é razoável?

Para simular os trilhos, o sinal de entrada foi dado como um deslocamento vertical do centro de massa do quadro lateral com forma:

$$y_1(t) = a \operatorname{sen}(\beta\Omega t)$$

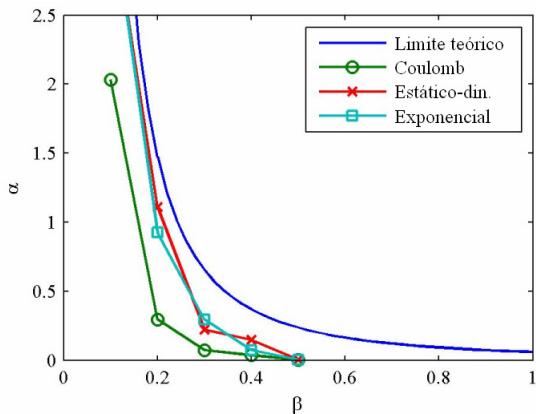
em que  $a$  indica a amplitude do movimento, que foi variada de 0,75 mm a 1,50 mm,  $\Omega$  é a freqüência natural da travessa (massa da travessa dividida pela rigidez equivalente de seu conjunto de molas) e  $\beta$  é um adimensional que foi variado de 0,1 a 2,5, o que, em termos de frequência, equivale à faixa entre cerca de 1,4 Hz a 26 Hz.. Essa faixa de parâmetros foi escolhida com base no trabalho de Kaiser et al. (2002) com o objetivo de se obter respostas tanto em regime de adesão-escorregamento como de escorregamento puro.

Os três modelos de atrito foram introduzidos no modelo como nuvens de pontos que foram interpolados utilizando-se curvas de Akima (1970), que consiste de uma interpolação por polinômios de terceiro grau. A curva de Akima foi utilizada por ser diferenciável e amenizar o efeito de “rugas” das interpolações cúbicas simples. Em outras palavras, o que se fez foi suavizar as funções não lineares dadas por ( 3.1 ), ( 3.2 ) e ( 3.3 ) de modo a melhorar as condições de convergência da solução.

As simulações foram realizadas com o algoritmo de fórmulas de diferenças regressivas de Gear (GSTIFF) em duas etapas: uma preanálise estática e uma análise dinâmica com maior resolução. O integrador de Gear é um algoritmo com passo variável estável para sistemas de equações diferenciais rígidos. A utilização de algoritmos de passo variável para problemas que envolvem relações descontínuas ou pouco suaves é praticamente mandatória. Se for utilizado um integrador com passo de tempo constante razoavelmente grande, o algoritmo pode passar por regiões de descontinuidades sem notá-las, perdendo precisão de resultados. Se, por outro lado, o integrador de passo constante for ajustado para passos muito pequenos, a simulação torna-se demasiadamente lenta e pode acumular erros em regiões suaves.

A partir desse primeiro modelo, algumas conclusões puderam ser levantadas a respeito do aparecimento de adesão-escorregamento no sistema ensaiado por Chandiramani.

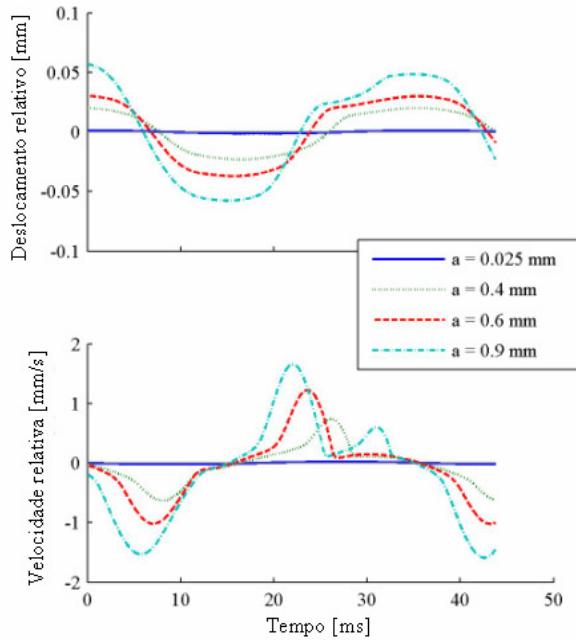
Em primeiro lugar, nossas análises numéricas mostraram boa concordância com as conclusões dos trabalhos de Kaiser et al. (2002), Berghuvud e Stensson (2001) e Hinrichs et al. (1998), exibindo adesão-escorregamento apenas para freqüências abaixo da primeira freqüência natural. Além disso, foi constatada, também, uma região de parâmetros de excitação em que o sistema não recebe energia o bastante para iniciar o movimento e permanece travado. Kaiser et al. chamaram esse subespaço de variáveis de região de adesão permanente. A Figura 3.3 mostra os limites da região de adesão permanente das análise do modelo em ADAMS e os compara com a curva dos limites teóricos traçados segundo o trabalho de Kaiser et al.. Note-se que a curva teórica foi calculada com base no modelo de Coulomb, Eq. ( 3.1 ), o que mostra alguma divergência com os resultados de nossas simulações com a mesma lei de atrito, apesar de o formato exponencial decrescente das curvas ser semelhante. Não foi encontrada uma explicação clara para essa diferença, mas provavelmente ela se desenvolve por causa das abordagens diversas na formulação das equações de movimento.



**Figura 3.3. Comparação da região de adesão permanente para os três modelos ensaiados. A curva azul indica o limite teórico calculado em Kaiser et al. (2002).**

A sequência de desenvolvimento dos padrões de adesão-escorregamento também concorda com os encontrados em Kaiser et al. e Hinrichs et al.: a princípio, para valores dos parâmetros de excitação próximos - mas acima - da curva de adesão, aparece um patamar por ciclo, na mudança de direção das curvas de deslocamento relativo entre quadro lateral e travessa. Com o distanciamento da curva de adesão, ocorre a bifurcação dos patamares e começam a aparecer

duas adesões por ciclo e, em certas ocasiões extremas, até três por ciclo. A Figura 3.4 mostra esse desenvolvimento para uma freqüência de excitação de 2,7 Hz.



**Figura 3.4. Desenvolvimento do fenômeno de adesão-escorregamento ( $\beta=0,2$ , equivalente a 2,7 Hz).**

Com os resultados obtidos para o modelo inicial em ADAMS, foi possível concluir que a suavização das curvas de atrito por uma função de Akima fornece resultados satisfatórios e que o algoritmo de integração GSTIFF é suficientemente adaptável para lidar com modelos de atrito pouco suaves.

O truque de três peças tem ação sobre todos os graus de liberdade do vagão ferroviário, não só o vertical. Analisando apenas fenômenos que ocorrem no plano de simetria longitudinal do trem, ou seja, sem levar em consideração efeitos de *wraping* ou *hunting*, a mobilidade da travessa ao redor do eixo lateral é essencial para amortecer vibrações provenientes de ondulações dos trilhos, que apesar de serem de pequena amplitude e grande comprimento de onda, provocam movimentos de arfagem que são transmitidos ao vagão por meio do truque, da mesma maneira que as vibrações verticais. Como o amortecimento da suspensão secundária provém essencialmente das forças de atrito, é importante, também, conhecer o comportamento do sistema de suspensão em arfagem. O grande problema com esse primeiro modelo foi justamente a falta de

mobilidade rotacional da travessa, que é um requisito importante para a manutenção da dinâmica do truque de três peças.

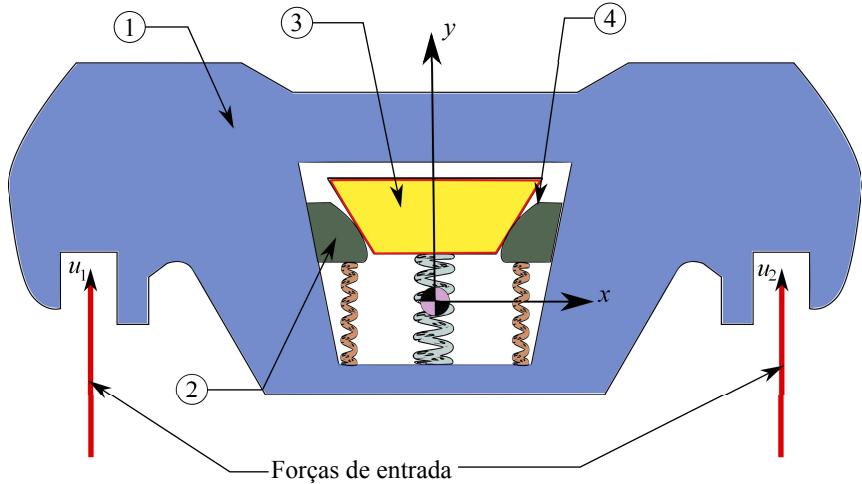
Uma possível solução seria incluir a curvatura das faces de contato da cunha com a travessa e modelar as forças de contato utilizando-se, ao invés de juntas, elementos de contato nativos do ADAMS. Esses elementos de contato baseiam-se no método das penalidades que, como já comentado anteriormente, têm a desvantagem de ser muito sensível aos coeficientes de calibração do modelo. Para evitar interferência excessiva das peças no caso do truque - em que as massas envolvidas são muito grandes quando comparadas as possíveis áreas de penetração – seria necessário aplicar um coeficiente exponencial de restituição  $r$  muito grande, o que poderia causar instabilidades numéricas e até fornecer soluções irreais.

O modelo descrito a seguir foi uma alternativa mais interessante para evitar o inconveniente dos métodos de penalidade e seguir com o desenvolvimento do projeto na direção da simulação do truque completo.

### **3.2. Modelo da suspensão com contatos modelados como PCLs em MATLAB**

Um ponto de fundamental importância para o estudo de um sistema como a suspensão secundária de um trem de carga típico das ferrovias brasileiras, equipado com amortecimento por atrito seco, é o cálculo correto das forças de contato entre as superfícies. O aparecimento de forças normais e de atrito com intensidades e direções variáveis no tempo apresenta um problema numérico, pois, a cada instante de tempo, essas forças são consideradas como incógnitas adicionais que se somam às posições e velocidades, incógnitas tradicionais de um problema de dinâmica de sistemas mecânicos.

O modelo considerado representa meio truque de três peças e é constituído por quatro corpos rígidos: (1) lateral, (2) cunha dianteira, (3) travessa e (4) cunha traseira. A Figura 3.5 mostra um esquema da distribuição desses componentes.



**Figura 3.5. Modelo da suspensão secundária.**

As entradas do modelo,  $u_1$  e  $u_2$ , são as forças e torques aplicados ao corpo dos adaptadores pelos mancais dos eixos e as saídas de desempenho consideradas são deslocamentos e velocidades da travessa (massa suspensa) em relação à lateral (massa não suspensa). A cada corpo está associado um vetor de coordenadas do centro de massa:

$$\mathbf{y}_j = [x_j \ y_j \ z_j \ \alpha_j \ \beta_j \ \gamma_j]^T$$

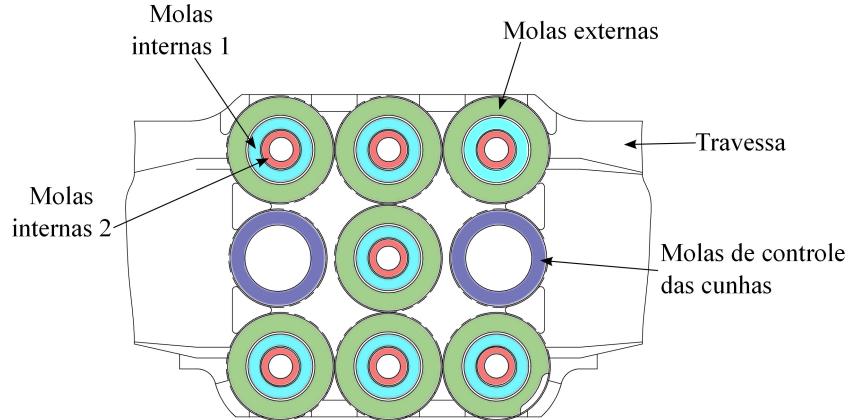
tal que, dada a restrição do movimento no plano, tem-se que

$$z_j = 0, \ \alpha_j = 0 \ \text{e} \ \beta_j = 0 \quad (3.4)$$

para  $j = 1, 2, 3, 4$ . As restrições dadas em (3.4) são as únicas que delimitam o espaço de possíveis posições do sistema. Todas as outras relações entre corpos são dadas por forças de contato e molas, da mesma maneira que em um truque convencional.

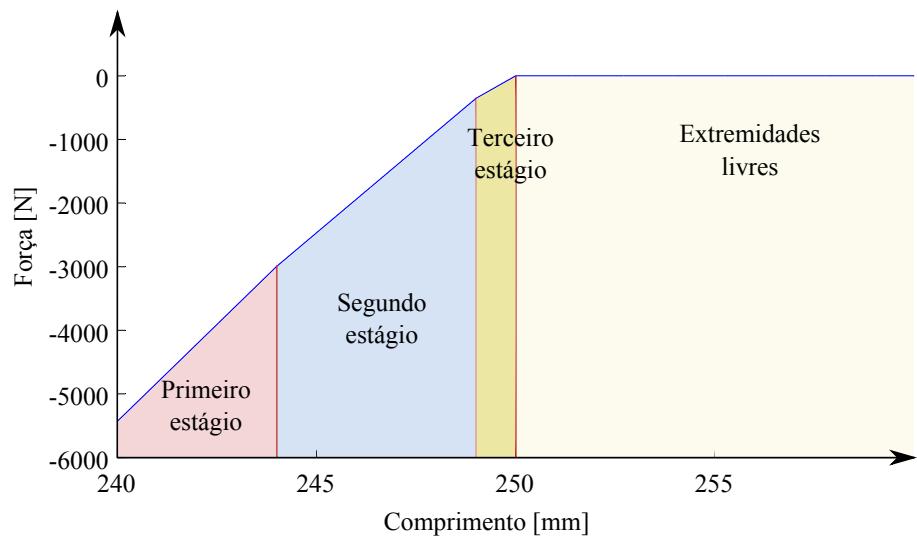
Foram considerados nove grupos de molas em configuração tipo Barber, isto é, sete grupos suportam a travessa e outros dois grupos suportam as cunhas (Figura 3.6). Os grupos referentes à travessa são compostos por três molas helicoidais concêntricas supostas ideais, enquanto os grupos das cunhas possuem duas molas helicoidais, também ideais, em paralelo. Cada uma das molas apresenta rigidez constante de modo que os grupos têm relações força-deformação lineares por partes. A mola mais rígida de cada conjunto é também a mais comprida e, portanto, a que primeiro entra em ação no suporte da carga. As extremidades desses grupos são apenas apoiadas

nas superfícies de atuação, de modo que se a distância entre os planos de apoio superar o comprimento livre da mola maior, a força de restituição é nula. A Figura 3.7 e Figura 3.8 respectivamente mostram como varia a força nos grupos de molas da travessa e das cunhas com o comprimento.

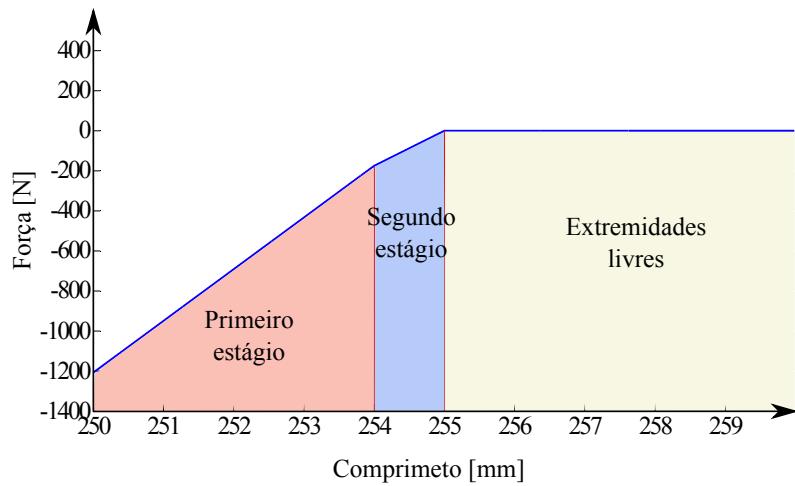


**Figura 3.6. Conjuntos de molas.**

Como o modelo é plano, foram considerados apenas três grupos para as molas da travessa: dois nas extremidades, quase alinhados com os grupos das cunhas e com rigidezes duas vezes maiores do que as mostradas na Figura 3.7 e um grupo no centro com rigidez três vezes maior.



**Figura 3.7. Característica de cada conjunto de molas da travessa.**



**Figura 3.8. Característica de cada conjunto de molas das cunhas.**

As equações de movimento são dadas pelas relações Newton-Euler conforme foram descritas no Capítulo 2:

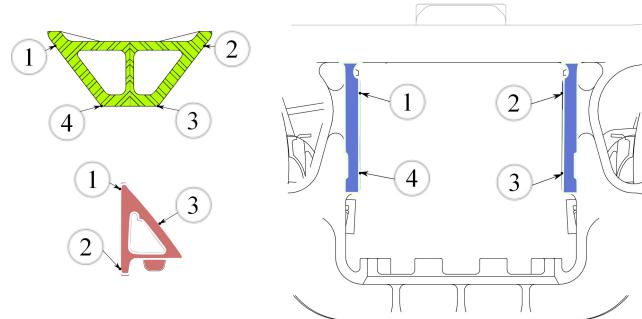
$$\hat{M}_j \ddot{\mathbf{y}}_j = \hat{\mathbf{F}}_{\text{ext},j} - \hat{\mathbf{L}}_j(\dot{\mathbf{y}}_j) + \hat{V}_j \cdot^{i,j} \hat{\mathbf{f}}_j(\dot{\mathbf{y}}_j, \mathbf{y}_j) \quad (3.5)$$

A definição dos esforços iniciais é inerente a cada corpo, pois depende apenas de sua distribuição de massa e velocidade angular. As forças de contato são calculadas em bloco por um algoritmo de Lemke. Já as forças externas possuem algumas particularidades.

A lateral recebe os esforços provenientes das rodas, que são prescritos como entradas do sistema; além disso, recebe as forças de todos os conjuntos de molas e o seu próprio peso. A travessa e as cunhas recebem esforços externos das respectivas molas e do campo gravitacional.

O algoritmo para cálculo das forças de contato é executado uma vez a cada iteração do integrador. Como desenvolvido na Seção 2.6.2, existem duas numerações de índices para pontos de contato: uma global e uma local. A cada instante de tempo, o algoritmo deve determinar para cada corpo quais são os pontos de contato e numerá-los localmente e, a cada par de contato detectado, deve associar um índice global. Como se tratam de polígonos convexos, uma das maneiras de se encontrar os pontos de contato, é possível mapear os perímetros de cada corpo do sistema e buscar os locais em que o contato é atingido. Esse método é bastante geral, mas, no

caso estudado, como a interpenetração dos corpos não é admitida, não é necessário testar a ocorrência de contato ao longo de todo uma aresta, por exemplo, da cunha: basta verificar os pontos extremos da face plana que encosta na lateral e o ponto da face curva mais próximo da travessa. Para cada cunha, então, pode-se ter três pontos de contato; para a lateral, até quatro; para a travessa, dois. O que o algoritmo procura, então, é testar os contatos nesses pontos específicos para cada um dos corpos na ordem indicada pela Figura 3.9.



**Figura 3.9. Possíveis pontos de contato dos corpos envolvidos (índices locais).**

As forças de atrito foram introduzidas no sistema por meio da matriz de coeficientes de atrito,  $Mu$ , introduzida pela Eq. ( 2.56 ). De maneira a diferenciar os estágios estático e dinâmico, considerou-se uma característica de atrito linear por partes, sendo que a região de adesão é caracterizada por uma velocidade de transição,  $v_t$ . Desse modo, para cada ponto de contato o coeficiente de atrito é definido de maneira semelhante ao descrito pela Eq. ( 2.54 ).

Os itens a seguir descrevem como se comporta a rotina para cálculo das forças de contato. Observando-se a listagem do programa desenvolvido, apresentada no Anexo A, nota-se que esses passos não são consecutivos e outras operações ocorrem entre eles. E ideia, então, é dar uma noção geral de como foi processado o problema de contato sem levar em conta todos os outros procedimentos que são realizados durante a análise:

1. *Verificação dos pontos de contato:* o programa faz uma análise geométrica do sistema e testa os candidatos a pontos locais de contato (Figura 3.9) para verificar se satisfazem

uma distância mínima de proximidade, estabelecida como  $5,0 \times 10^{-3}$  mm<sup>7</sup>. Se dois pontos estão em contato segundo esse critério de proximidade, então eles são incluídos em uma matriz de pontos locais que será transmitida para o próximo passo;

2. *Cinemática de contato*: com as posições dos pontos locais de contato e sabendo-se a qual corpo cada ponto pertence, é possível calcular velocidades e acelerações desses pontos a partir de dados de saída do integrador, ou seja, a partir do estado do sistema;
3. *Determinação da matriz de atrito*: com as velocidades dos pontos locais de contato em mãos, é possível determinar se o regime de atrito é estático ou dinâmico e aplicar o modelo adequado, formando a matriz  $Mu$ ;
4. *Montagem da relação de complementaridade*: os cálculos cinemáticos e a matriz  $Mu$  são incluídos no modelo desenvolvido no Capítulo 2 de modo a formar a equação de complementaridade entre acelerações normais e forças normais;
5. *Processamento do PCL*: a relação de complementaridade é processada por um algoritmo de Lemke que retorna um vetor com o valor das forças normais de contato do modelo;
6. *Montagem dos vetores de forças*: utilizando as matrizes de conectividade e de decomposição definidas no Capítulo 2, é possível transformar as magnitudes das forças normais obtidas em vetores contendo componentes tangenciais e normais.

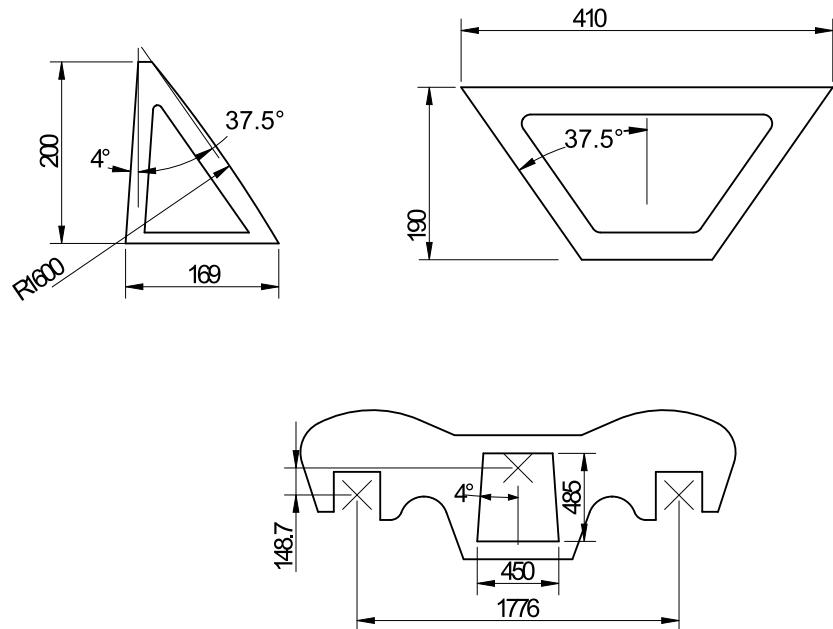
Os valores das forças de contato obtidas com esse algoritmo são passados para as equações diferenciais ( 3.5 ) que são integradas. Notou-se que, em alguns casos, o sistema de equações pode ficar rígido, então, para que todas as análises pudessem ser comparadas, adotou-se um integrador próprio para esse tipo de sistema.

Os algoritmos de contato, montagem das equações diferenciais e pós processamento foram programados em MATLAB, versão R14, e a listagem de todas as rotinas encontra-se no Anexo A. Os PCLs foram resolvidos por meio de um algoritmo, também escrito em MATLAB, disponível na rede mundial de computadores ([http://people.sc.fsu.edu/~burkardt/m\\_src/lemke/lemke.html](http://people.sc.fsu.edu/~burkardt/m_src/lemke/lemke.html)).

---

<sup>7</sup> O valor de 0,000005 m foi escolhido por representar uma distância desprezível face às dimensões gerais dos componentes e de modo a ser superior à tolerância de convergência do algoritmo integrador, procurando evitar, assim, que erros numéricos afetassem o cálculo dos contatos.

As análises foram feitas utilizando-se um microcomputador com processador Intel Core 2 Quad com 2,38 GHz de frequência e 4 GBytes de memória RAM, pertencente ao Laboratório Ferroviário da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp. A Figura 3.10 mostra as dimensões mais relevantes dos componentes do modelo desenvolvido e a Tabela 3.1 enumera os parâmetros físicos para o modelo simulado.



**Figura 3.10. Dimensões dos componentes**

**Tabela 3.1. Parâmetros físicos do modelo proposto**

Parâmetro		Valor	
Altura inicial do berço em relação ao sistema $I_0$		- 225	mm
Campo gravitacional	$g$	9,85	m/s
Massa da lateral	$m_1$	578	kg
Massa da travessa	$m_3$	8240	kg
Massa das cunhas (referência)	$m_2$ e $m_4$	12	kg
Momento de inércia de arfagem da lateral	$I_1$	$244,6 \times 10^6$	kg-mm
Momento de inércia de arfagem da travessa	$I_3$	$230 \times 10^6$	kg-mm
Momento de inércia de arfagem das cunhas (ref.)	$I_2$ e $I_4$	84,1	kg-mm
Posição horizontal das molas das cunhas		179	mm
Posição horizontal das molas laterais das travessas		150	mm

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta alguns resultados obtidos agrupados em duas seções. A primeira seção trata de uma comparação de desempenho entre o modelo desenvolvido em MATLAB com o uso do PCL e outro, similar, em Adams. A segunda parte mostra as análises feitas utilizando-se o modelo apresentado no capítulo anterior.

Para todas as análises, os deslocamentos e velocidades foram tomados com relação ao movimento da lateral.

### 4.1. Considerações sobre a frequência de vibração

Pode-se entender a suspensão secundária como um sistema massa-mola-amortecedor, em que a massa principal corresponde à travessa e a rigidez principal corresponde às molas associadas à travessa.

Os dados utilizados nas simulações correspondem a um truque para 35 ton. Suponha-se, então, que além do peso próprio, sobre a travessa existe aplicada uma carga de nove vezes sua massa, de modo que a massa equivalente do conjunto travessa-carga seja 8240 kg. Nessa situação e utilizando-se os parâmetros geométricos descritos no capítulo anterior, todas as molas da suspensão estão comprimidas, de modo que a rigidez equivalente dos conjuntos de mola da travessa é igual a:

$$k_{eq,3} = 7 \cdot (356 + 172 + 81) = 4263 \text{ N/mm}$$

logo, a frequência natural é:

$$f_{eq} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4263 \times 10^3}{8,24 \times 10^3}} = 3,62 \text{ Hz} \quad (4.1)$$

enquanto que para o truque descarregado, a frequência sobe para cerca de 11,8 Hz.

#### 4.2. Comparação com o modelo em Adams

Para verificar a resposta e o desempenho do modelo proposto, foi elaborado um modelo similar no *software* de simulação multicorpos MSC.Adams/View 2008 r1, conforme apresenta a Figura 4.1. Esse modelo tem as mesmas características daquele elaborado em MATLAB, inclusive na consideração do arredondamento das faces das cunhas. A diferença essencial está no modelo de contato adotado que, nesse caso, segue a formulação do método das penalidades.

No Adams estão disponíveis dois tipos de formulação de contato: de restituição e de impacto. O modelo de restituição segue a teoria de choques de Poisson, na qual após cada evento de impacto uma parcela da energia é dissipada. A força de contato é calculada por:

$$f^n = p(1-\varepsilon) \frac{dg}{dt} \quad (4.2)$$

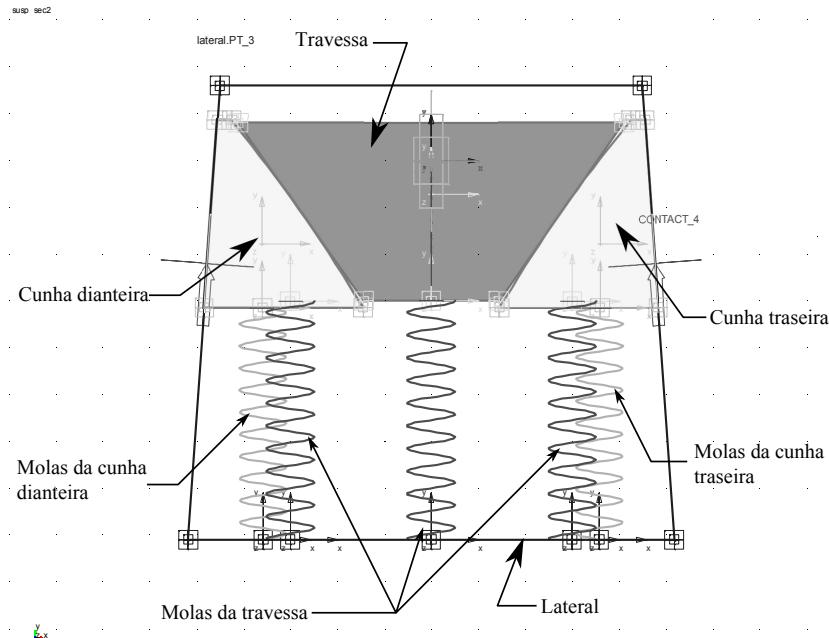
em que  $g$  é a distância de penetração entre os corpos e  $p$  é um coeficiente de penalização e  $\varepsilon$  é o coeficiente de restituição. A dependência com relação à velocidade de penetração torna esse modelo bastante instável, como reconhece a própria documentação do Adams.

O outro modelo, de impacto, é equivalente à abordagem de regularização apresentada no Capítulo 2. A equação que determina a força normal de contato é dada por:

$$f^n = k \cdot g^r + c \frac{< g - g_t >}{g} \frac{dg}{dt}$$

na qual os significados de  $k$ ,  $g$ , e  $r$  foram explicados anteriormente. O coeficiente  $c$  representa um amortecimento,  $g_t$  é uma penetração limite e os operadores  $< >$  indicam uma função de singularidade. Na prática, essa definição trata as superfícies como molas não lineares e adiciona

um amortecimento a partir do momento em que a penetração limite é atingida, de maneira a forçar a estabilização do contato.

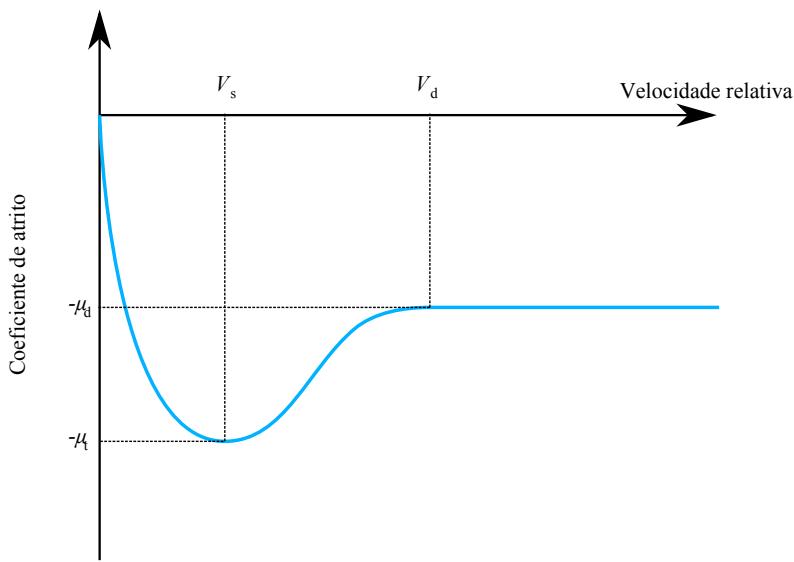


**Figura 4.1. Modelo plano da suspensão secundária em Adams.**

As forças de atrito são calculadas a partir do resultado das forças normais e da velocidade de escorregamento das geometrias em contato. O Adams aplica uma suavização da curva de atrito de Coulomb definindo uma função a partir de três pontos particulares (Figura 4.2): a origem, o ponto de força máxima e o ponto de estabilização do valor da força. Quando a velocidade é nula, o coeficiente de atrito  $\mu$  também é considerado nulo. O coeficiente cresce de maneira suave até um valor de pico -  $\mu_t$ , que corresponde ao máximo valor "estático". A função, então, decresce e vai a um valor constante -  $\mu_d$ . O gráfico é simétrico para velocidades negativas. A força de atrito, então, é calculada por:

$$f^t = \mu(V) \cdot f^n$$

e aplicada paralelamente ao vetor velocidade relativa na direção tangencial adequada, de maneira similar ao modelo em MATLAB.



**Figura 4.2. Função de atrito utilizada pelo Adams.**

Para as análises comparativas, os coeficientes foram ajustados segundo a Tabela 4.1. A rigidez de contato seguiu o recomendado pelo programa para contato aço/aço. O expoente de penalização e o coeficiente de amortecimento foram ajustados de maneira a facilitar a convergência do algoritmo de integração, a penetração limite e os parâmetros da força de atrito foram estabelecidos como sendo os mesmos do modelo em MATLAB. A escolha mais adequada desses valores, logicamente, dependeria de resultados de experimentos.

**Tabela 4.1. Parâmetros de ajuste do modelo de contato em Adams.**

Parâmetro	Valor
Coeficiente de amortecimento	$c = 50 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{mm}$
Coeficiente de atrito dinâmico	$\mu_d = 0,29$
Coeficiente de atrito estático	$\mu_s = 0,30$
Expoente de penalização	$r = 1,2$
Penetração limite	$g_t = 0,005 \text{ mm}$
Rigidez de contato	$k = 1,0 \times 10^6 \text{ N}/\text{mm}$
Velocidade de transição dinâmica	$V_d = 10 \text{ mm/s}$
Velocidade de transição estática	$V_s = 0,001 \text{ mm/s}$

A comparação entre os resultados apresentados pelos dois modelos baseou-se na resposta dos sistemas a uma excitação senoidal. Veículos ferroviários, de modo geral, são submetidos a oscilações de baixa frequência, associadas em especial ao comprimento do trilho, que gira em torno de 11,5 metros. Segundo propõem Kaiser et al. (2002), pode-se relacionar a velocidade do trem com a frequência de excitação por:

$$\Omega = \frac{\pi V}{L_t} \quad (4.3)$$

em que  $V$  é a velocidade longitudinal de translação em metros por segundo e  $L_t$  é o comprimento do trilho. Admite-se, aqui, que cada elemento de trilho representa meio comprimento de onda, isto é, se um trecho que trilho tem abaulamento para cima, o próximo apresentará abaulamento para baixo, de modo a garantir um deslocamento senoidal.

Portanto, tanto nas análises conduzidas com o Adams quanto com o MATLAB, as duas entradas de forças externas (adaptadores) foram excitadas com esforços verticais de mesmo valor:

$$u_1^y = u_2^y = a \cdot \operatorname{sen}(\Omega t) + C \quad (4.4)$$

A frequência  $\Omega$  é dada pela Eq. (4.3) e o fator de amplitude  $a$  varia entre as análises. A constante  $C$  indica uma carregamento que mantém o sistema em posição de equilíbrio. Diferentemente do que ocorre com sistemas lineares, nos quais o princípio da superposição vale, na suspensão secundária, devido à alta influência do atrito sobre o movimento, excitações de magnitudes diferentes não causam alterações proporcionais na resposta do sistema. De fato, como demonstraram Feeny e Moon (1993), Hinrichs et al. (1998) e Kaiser et al. (2002), a amplitude da entrada pode motivar a bifurcação de respostas e, em alguns casos, para oscilações muito pequenas, o sistema pode travar, ou seja, entrar em um estado permanente de adesão. Tem-se, então, claramente dois tipos de regime em que a suspensão pode vibrar: ou a travessa não se move em relação à lateral, ou se move. As dificuldades encontradas pelos algoritmos nos dois

casos são diferentes porque, entre outros motivos, as forças de atrito estático e de atrito dinâmico possuem comportamentos diversos e a transição de uma fase para a outra é descontínua.

Nas análises comparativas que se seguem, a velocidade do vagão foi suposta constante e igual a 50 km/h. As amplitudes foram variadas, tomando-se cuidado para que seu valor pico a pico não fosse inferior a 5% do peso total do truque. A Tabela 1.2 resume as configurações utilizadas nas análises comparativas.

**Tabela 4.2. Configurações dos programas de simulação.**

	Adams	MATLAB
Versão	2008 r1	R14 SP3
Processador	Intel Core 2Quad 2.83 GHz	
Integrador	GSTIFF I3, C++, corretor modificado, 2000 iterações no máximo, modo interativo (interface gráfica ativada, mas sem atualizações)	ode15s, refinamento 3
Tolerância de convergência	$1 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$
Intervalo entre pontos de saída	0,0001	0,0001
Término da simulação	2 s	2 s

A seguir são apresentados alguns resultados da mesma análise simulada com o modelo em Adams e com o modelo em MATLAB. Como foi observado no Capítulo 3, o comportamento dinâmico do truque está intimamente ligado ao desenvolvimento do fenômeno de adesão-escorregamento, que é um dos motivadores das características de bifurcação que aparecem em osciladores com atrito. Kaiser et al. (2002), Hinrichs et al. (1998) e Feeny e Moon (1993) mostraram, por meio de experimentação e simulação, que é plausível dividir os modos de oscilação de um sistema como esse em duas categorias de características distintas. Para valores de amplitude e frequência de excitação abaixo de certo valor, o sistema apresenta estados intermitentes de adesão e escorregamento que afetam a resposta com oscilações de frequências parasitas. Se os valores críticos forem ultrapassados, então o sistema se comporta de maneira muito semelhante a um oscilador sem atrito. Isso ocorre porque amplitude e frequência afetam

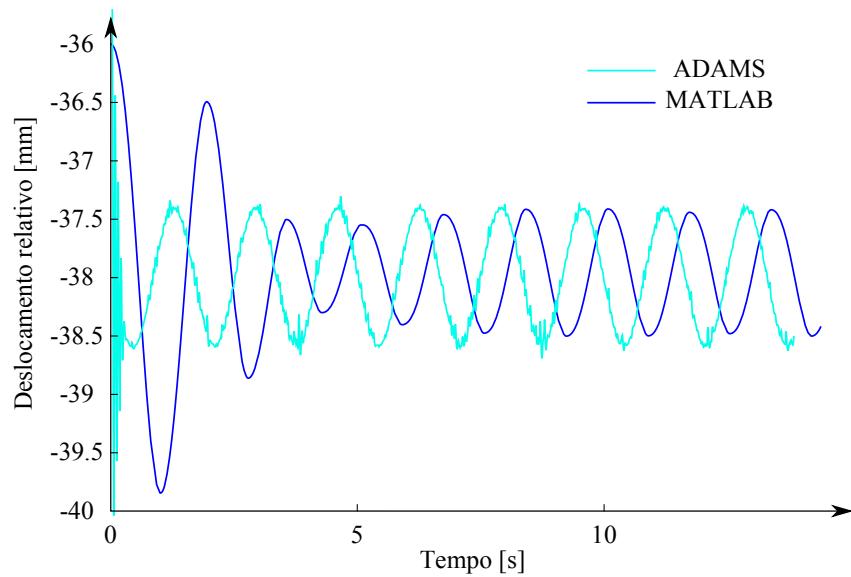
diretamente as velocidades relativas de escorregamento entre as superfícies e, portanto, determinam o estado das forças de atrito.

Para mostrar como cada modelo lida com os diferentes estágios de adesão e escorregamento os gráficos a seguir são apresentados em ordem decrescente de amplitude de excitação. Assim, é possível observar como ocorre a transição de um estado de escorregamento, praticamente linear, para o estado de adesão total, passando por uma região intermediária de oscilações incompletas (adesão e escorregamento ocorrendo juntos).

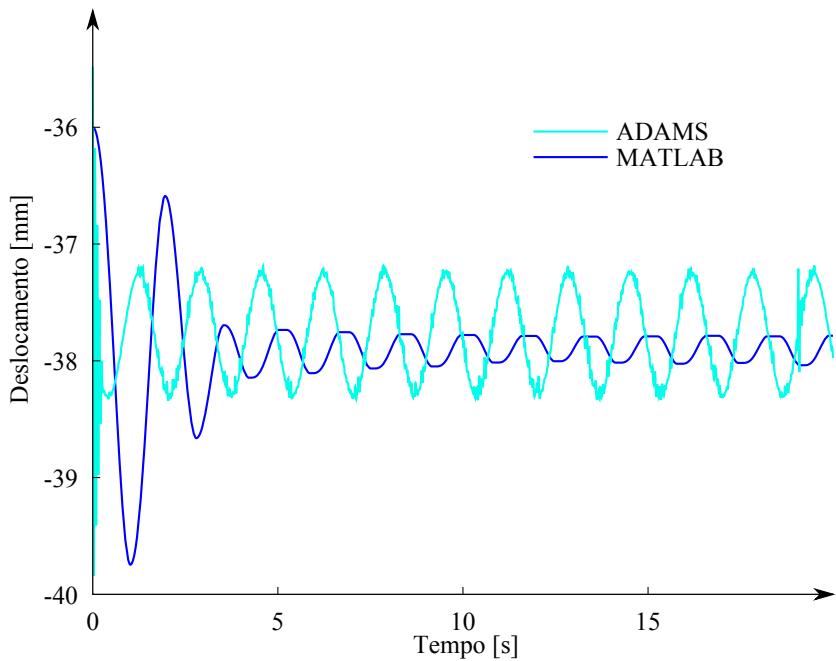
A Figura 4.3 apresenta os resultados para uma amplitude de excitação igual a 3000 N, fora do regime não linear. Esse valor corresponde a cerca de 40% do peso total do conjunto. O gráfico mostra que, para esse caso específico, as respostas em regime transitório dos dois modelos apresentam uma defasagem de aproximadamente  $45^\circ$ , mas são bastante semelhantes quando o regime permanente é atingido, como seria esperado. Durante o regime transitório, nota-se que o modelo que utiliza o método das penalidades para calcular as forças de contato apresenta uma oscilação de alta frequência antes de chegar a uma vibração quase senoidal. Essas oscilações intensas são de frequência próxima à natural do sistema (cerca de 11,8 Hz) e não são reveladas na análise com o modelo em MATLAB, sugerindo uma inconsistência. O algoritmo PCL mostra uma resposta transitória muito suave. Observando-se mais de perto os resultados encontrados no modelo em MATLAB, nota-se que o regime permanente, apesar de muito mais regular do que o obtido em Adams - por causa da aparente ausência dos modos de alta frequência -, não é perfeitamente senoidal: possui pequenas distorções de frequência próxima à da excitação de entrada.

Na Figura 4.4 estão exibidos os resultados para amplitude igual a 1800 N, valor para o qual o modelo em MATLAB utilizando restrições duras prevê o aparecimento de adesão-escorregamento, caracterizado pelos patamares que surgem na mudança de direção do movimento. É interessante ressaltar, aqui, que esse fenômeno não linear provoca picos de aceleração local entre as superfícies de contato, o que garante que as forças de atrito e normais são capazes de retardar o movimento a ponto de pará-lo. Esses saltos de aceleração - e as forças que os provocam - são responsáveis por deformações locais que podem até mesmo ser plásticas,

um fenômeno normalmente conhecido por *fretting*, que acentua o desgaste das peças e atrapalha o correto funcionamento do sistema, pois adiciona rugosidades macroscópicas às superfícies de contato. Sabe-se, também, que o fenômeno de adesão-escorregamento ocorre em suspensões secundárias de truques de três peças, pois já foi observado tanto numericamente (Sun e Cole, 2008; Kaiser et al., 2002; Baruffaldi et al., 2009) quanto experimentalmente (Chandiramani et al., 2006). Interessa, portanto, utilizar um modelo que possa captar adequadamente essas condições de aparecimento de adesão para se ter uma idéia do tipo de aceleração a que os corpos estão submetidos.

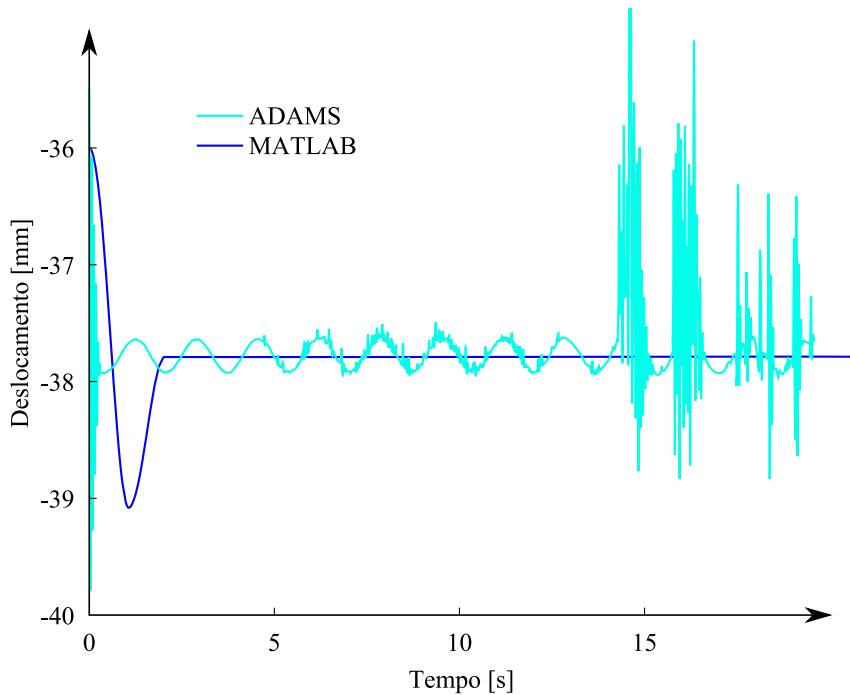


**Figura 4.3. Resultados para excitação com amplitude de 3000 N.**



**Figura 4.4. Resultados para excitação com amplitude de 1800 N.**

Nota-se, porém, que a formulação de contato pelo método da regularização (Adams) não acusa o desenvolvimento de regiões estacionárias no gráfico de posição. A princípio, essa ausência de informação pode apenas querer dizer que a adesão no modelo de Adams aparece apenas para amplitudes inferiores a essa. Reduzindo-se gradativamente a amplitude de excitação, no entanto, o que é revelado é que mesmo para distúrbios muito pequenos, da ordem de 6% do peso do conjunto, ainda é possível observar um caráter eminentemente senoidal. Já no modelo em MATLAB, oscilações abaixo de cerca de 1600 N (Figura 4.5) já não provocam oscilação apreciável. Além disso, pode-se perceber o que modelo desenvolvido em Adams com contato por penalidades começa a sofrer de instabilidades numéricas a partir do terceiro ciclo e que essas instabilidades são amplificadas a ponto de provocar novamente oscilações de alta frequência e grande amplitude a partir de 13 segundos. Essa amplificação de ruídos é um problema conhecido dos métodos de regularização, que sabidamente não satisfazem a conservação de energia mecânica (e esse é mais um dos motivos pelos quais o Adams aplica um termo de amortecimento). O uso de forças como entrada, ao invés de um deslocamento prescrito, possivelmente colabora para o aparecimento dessas instabilidades, pois o algoritmo tem mais dificuldade para encontrar um ponto de convergência estável.



**Figura 4.5. Resultados para excitação com amplitude de 500 N.**

É possível, também, comparar os dois algoritmos em termos de tempo de processamento. Nesse quesito, nota-se uma deficiência do método da complementaridade. A Tabela 4.3 mostra os tempos de processamento em cada um dos *softwares* adotados para algumas amplitudes selecionadas. Percebe-se que o método da restrição dura é mais eficiente na maior parte das análises, mas que os tempos de simulação não são constantes e podem, eventualmente, ultrapassar os tempos do modelo de penalidades, como ocorre para a análise de 1600 N. Isso acontece porque o algoritmo de processamento dos problemas de complementaridade, se conseguir convergir, devolve a primeira resposta factível. Essa solução, no entanto, pode não satisfazer as condições de continuidade exigidas pela rotina de integração que, então, recalcula o passo de tempo até encontrar uma resposta condizente com a evolução dos estados do sistema. Esse é um problema ainda em aberto e é possível que algumas abordagens relacionadas à pós-estabilização de restrições (Cline e Pai, 2003) sejam capazes de resolvê-lo.

Note-se que a comparação sugerida pela Tabela 4.3 não permite uma comparação direta de desempenho, pois as tolerâncias e métodos de integração aplicados nos dois casos não são equivalentes. Em outras palavras, a partir da análise dos tempos de processamento não é possível

distinguir qual é o impacto do método de cálculo das forças normais sobre a dificuldade do algoritmo convergir para uma resposta. Isso não invalida a análise do parágrafo anterior, visto que os tempos do método PCL são irregulares.

**Tabela 4.3. Tempo de processamento, em segundos, dos modelos em Adams e MATLAB**

<i>a</i>	Adams	MATLAB
500 N	2159	590
1600 N	2187	3331
1800 N	2124	360
3000 N	2560	138

#### 4.3. Comparação das respostas a condições iniciais com carga

Com a análise comparativa desenvolvida na seção anterior, pode-se constatar que:

1. O modelo elaborado em MATLAB apresenta comportamento fisicamente plausível sob certos aspectos relacionados a continuidade e estabilidade da resposta, mas
2. não modela corretamente os modos de vibrar do sistema, mascarando a resposta transitória.

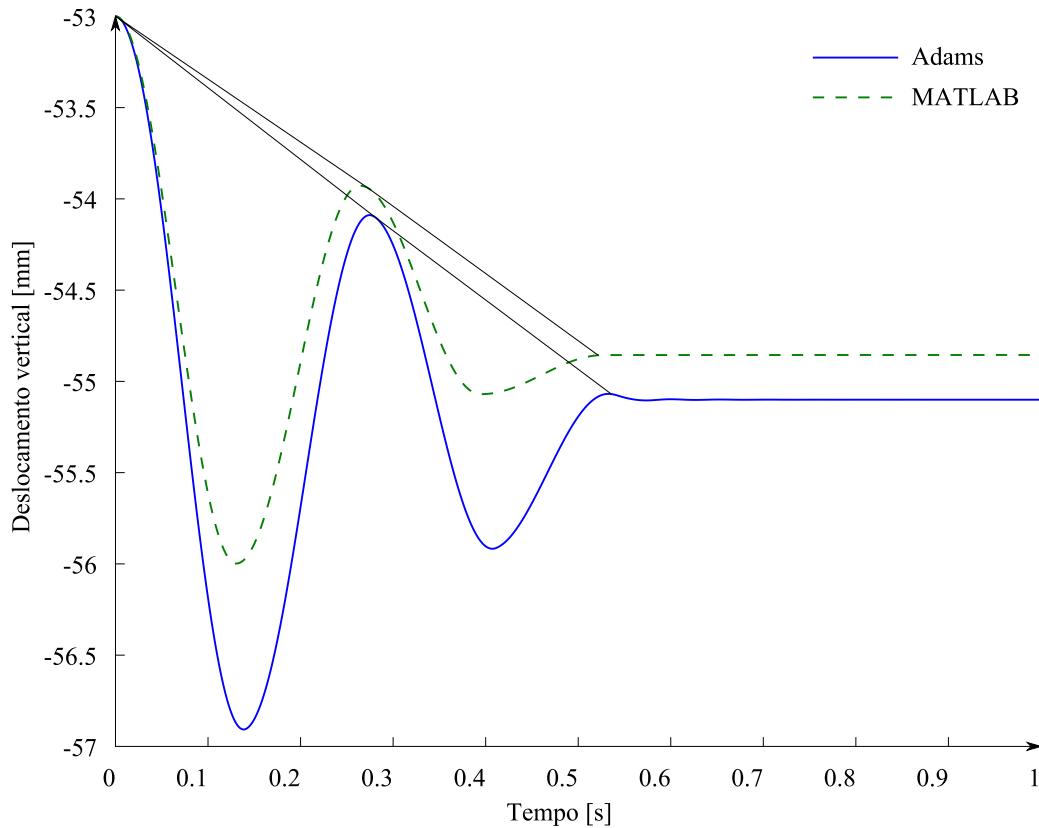
Com o intuito de verificar a possível fonte de erro do modelo, foram feitas algumas alterações tanto no modelo em MATLAB quanto no modelo em Adams para permitir que recebessem entradas na forma de deslocamento prescrito da lateral, ao invés de forças. Admitiu-se, também, que a massa total da travessa (bem como os momentos de inércia) seria 10 vezes maior do que a original, simulando um carregamento de cerca de 15 ton sobre o truque<sup>8</sup>. Nesse caso, a frequência natural é dada pela ( 4.1 ) e espera-se que o período das respostas a condições iniciais seja cerca de 0,27 segundos.

---

<sup>8</sup> Apesar de 15 toneladas serem aplicadas sobre o truque, o modelo lida somente com metade dessa carga, ou seja, cerca de 7,5 ton.

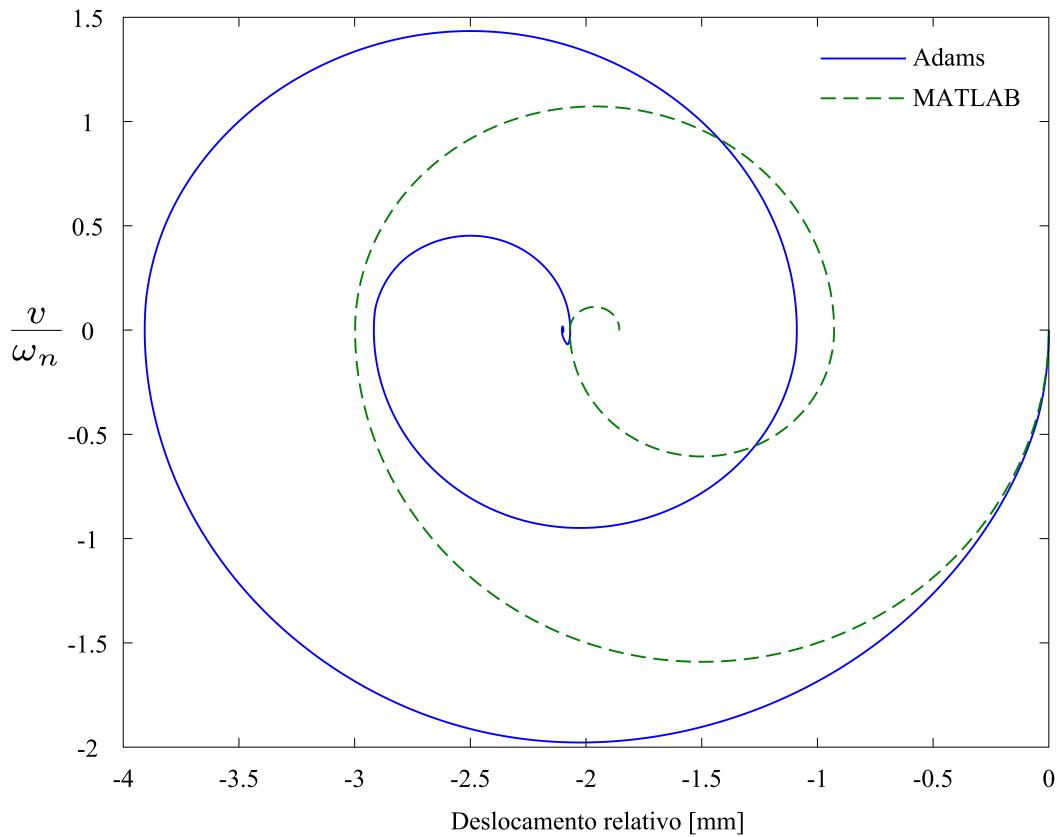
Os coeficientes de atrito foram alterados para 0,2 dinâmico e 0,21 estático e as condições iniciais são velocidades nulas e posição da travessa 53 mm abaixo do centro de massa da lateral. A lateral foi mantida fixa e o sistema ficou livre para oscilar até atingir uma posição de equilíbrio.

A Figura 4.6 mostra o deslocamento vertical da travessa para as condições iniciais indicadas. Nota-se, agora, que as respostas são mais semelhantes entre si e que os períodos de oscilação coincidem com o esperado, sendo cerca de 0,270 para o Adams e 0,273 para o modelo em MATLAB. O amortecimento provoca um decremento linear da resposta, como indicam as linhas que ligam as cristas das respostas, concordando que o se espera de um amortecedor de atrito. A intensidade de oscilação encontrada no modelo do MATLAB foi cerca de 23% menor do que a encontrada em Adams, e a resposta estacionária, isto é, a posição de equilíbrio do sistema, também foi menor (aproximadamente 10%).



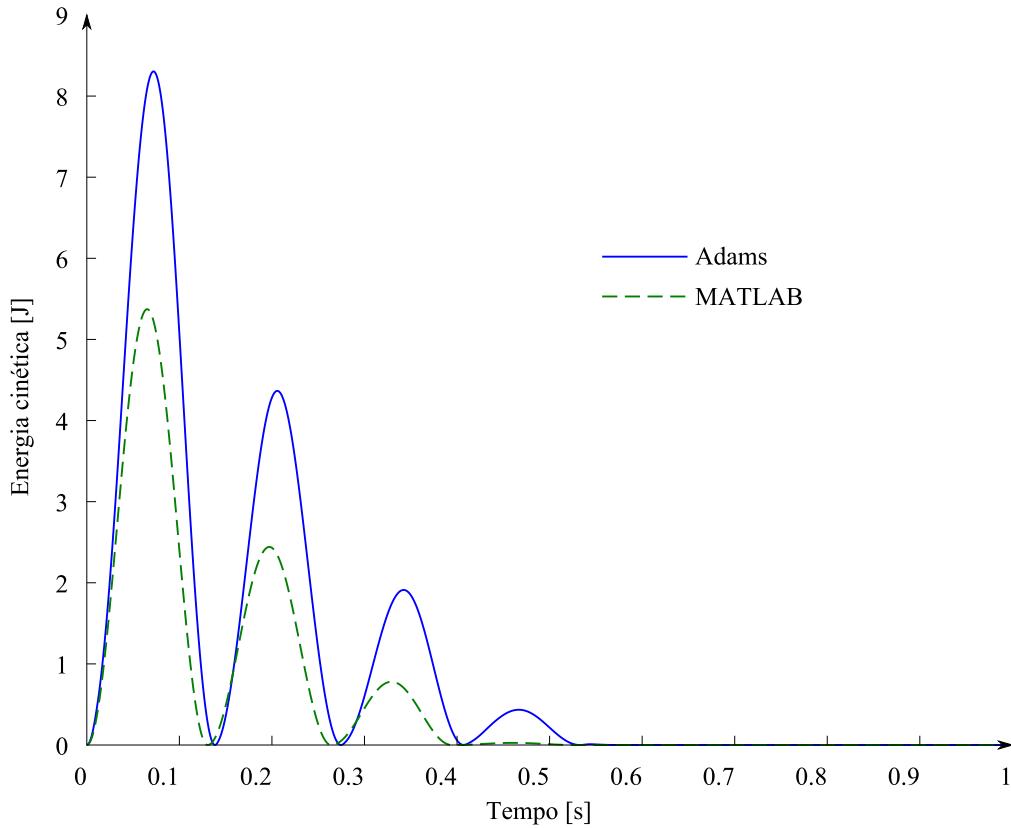
**Figura 4.6. Deslocamento vertical da travessa**

As diferenças nas respostas ficam mais acentuadas na análise do gráfico de fases, Figura 4.7, no qual nota-se claramente que a resposta do modelo em MATLAB estabiliza mais rapidamente, pois o raio total da trajetória de fase é menor. Nota-se, porém, que em nenhum dos dois casos o sistema aproximou-se do regime de adesão, o que é denunciado pela forma quase circular dos ramos superiores das trajetórias de fase. Assim, ainda que as respostas tenham sido ligeiramente diferentes em termos absolutos, é possível afirmar, pelo menos para os parâmetros simulados, que os dois modelos comportam-se de maneira dinamicamente semelhante.



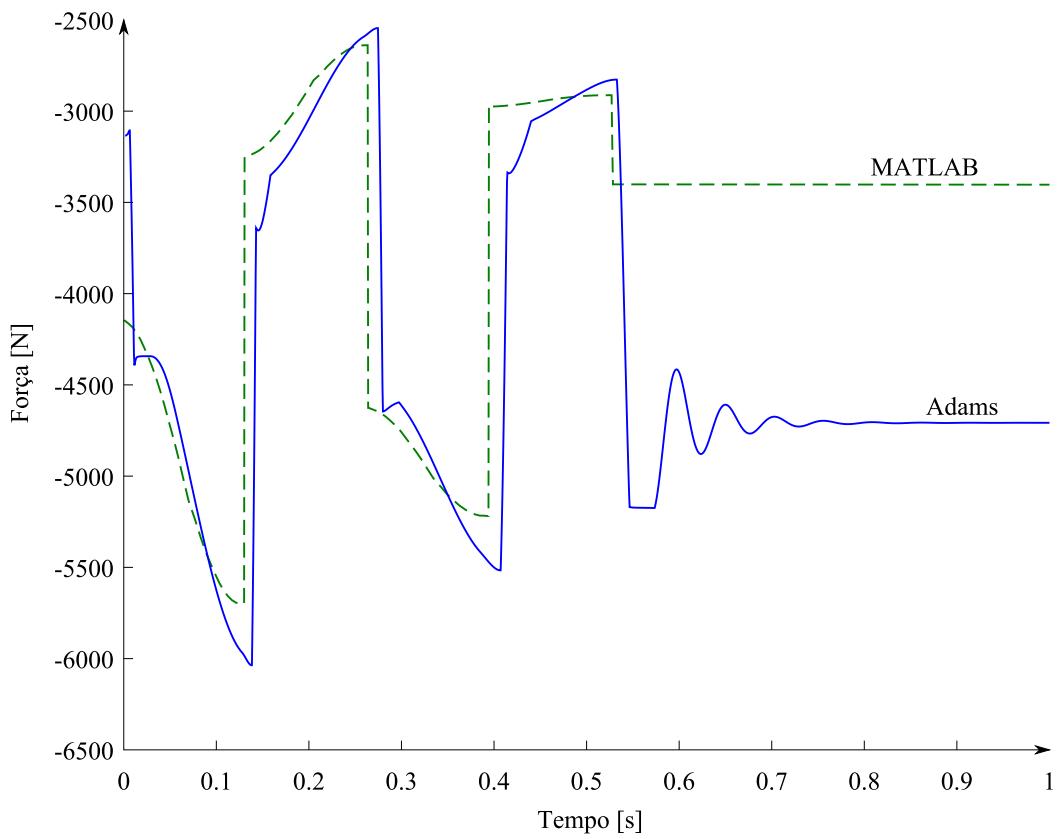
**Figura 4.7. Trajetórias de fase**

A análise da Figura 4.8 ajuda a esclarecer as diferenças, mostrando que no modelo com contatos por restrição dura a perda de energia é maior, levando o sistema ao equilíbrio mais rapidamente e também reduzindo a amplitude das oscilações transientes.

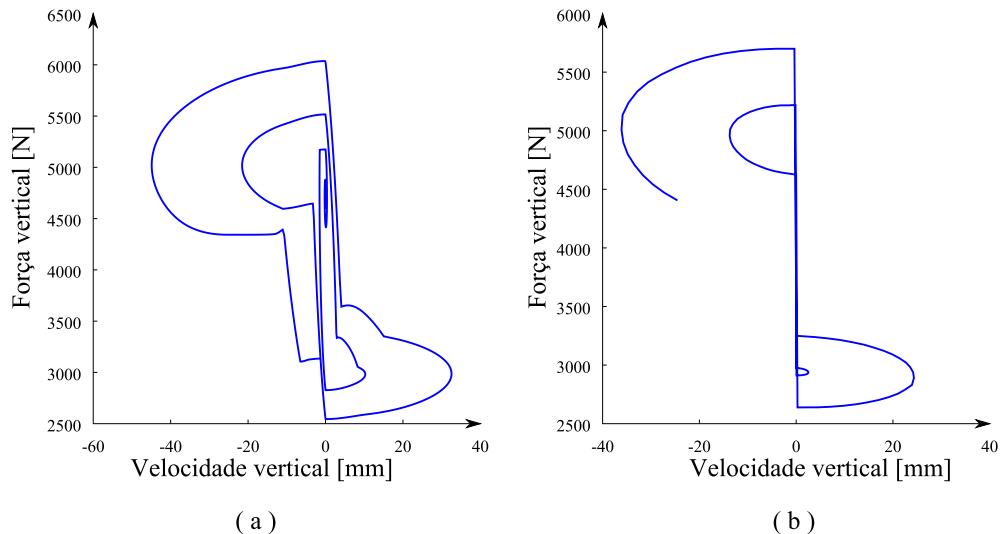


**Figura 4.8. Energia cinética da travessa.**

As Figura 4.9 e Figura 4.10 mostram as forças desenvolvidas nas superfícies de contato da travessa com a cunha. Essas podem, de fato, ser consideradas as forças de amortecimento do sistema, visto que as forças de rigidez são eminentemente geradas pelas molas. Nota-se que a evolução temporal nos dois casos é bastante semelhante, sugerindo que as diferenças observadas nas análises anteriores talvez não tenham origem no cálculo das forças de contato. Os diagramas de amortecimento, no entanto, mostram claramente que o modelo de restituição promove a histerese, enquanto que o modelo de PCL, não.



**Figura 4.9. Forças verticais de contato na travessa.**



**Figura 4.10. Forças verticais em função do tempo para Adams (a) e MATLAB (b).**

## 5. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A proposta deste trabalho foi o desenvolvimento de um modelo multicorpos do sistema de suspensão secundária de um veículo ferroviário de carga. Essa proposta vem de encontro com os recentes desenvolvimentos voltados para o aperfeiçoamento de um sistema de projeto básico antigo, mas que ainda se mostra muito popular devido ao baixo custo de manutenção e alta confiabilidade.

Os esforços foram voltados para a compreensão dos fenômenos de contato gerados pela presença de um amortecedor não linear, a cunha de atrito, e para a forma como esses esforços de contato podem ser calculados computacionalmente, no menor tempo possível, sem perder resolução ou recorrer a linearizações irrealistas.

Contrariando a tendência normal de modelar os contatos como molas muito rígidas, empregou-se a abordagem das restrições duras, que formulam o contato como uma restrição não holonômica unilateral e utilizam a teoria de processamento de problemas de complementaridade linear para encontrar as forças normais. Essa abordagem garante a não penetração dos corpos de contato e, em geral, reduz o custo computacional total. Por outro lado, sua implementação numérica é mais complexa e não se pode garantir *a priori* quantas iterações serão necessárias para resolver o problema.

Todo o desenvolvimento teórico para a implementação matemática dos contatos vistos como problemas de complementaridade linear foi apresentado. Existe margem para que, com algumas alterações, sejam incluídos modelos mais complexos de atrito, inclusive modelos dependentes de outras variáveis além da velocidade. Adaptar o problema para o uso do conceito de pirâmide de atrito seria mais trabalhoso, mas ainda sim, possível.

Um estudo comparando as respostas entre o modelo desenvolvido e outro modelo equivalente formulado utilizando técnicas tradicionais foi apresentado, revelando que a técnica de cálculo de contato por PCL precisa ainda de um maior desenvolvimento para ser totalmente útil. Ainda assim, a técnica é promissora, pois mostrou-se eficaz no cálculo das forças de contato sem elevar o custo computacional e ainda preservando a precisão cinemática.

Como sugestão para trabalhos futuros propõe-se:

- o aprofundamento sobre técnicas de solução de PCLs voltados para simulação multicorpos. Uma possibilidade viável é voltar-se aos algoritmos iterativos, em detrimento dos pivotais, como os de Lemke. Essa abordagem pode elevar o custo computacional para modelos pequenos, mas possivelmente tornaria o tempo de processamento mais previsível;
- a inclusão de cones ou pirâmides de atrito no PCL, eliminando a necessidade de um modelo de atrito dependente da velocidade relativa;
- a programação da solução de contato por restrições duras em uma linguagem compatível com o Adams (C++ ou Fortran);
- o desenvolvimento do modelo de um truque tridimensional completo e, posteriormente, de um vagão completo. Esse modelo pode incluir modelos tridimensionais para contato, de modo a levar em consideração fenômenos importantes para a dinâmica ferroviária como a sobrelevação e o *wrapping* decorrentes dos esforços de curva;
- a integração do modelo apresentado neste texto com contatos roda/trilho para simulação de inscrição em curvas e frenagens;
- aplicação do método da complementaridade linear para problemas de contato mais simples, com o intuito de validação;
- estudo da influência da variação do coeficiente de atrito sobre a resposta dinâmica do sistema.

## Referências Bibliográficas

AGRICOLA, G. **De re metallica**. Tradução de Herbert Clark Hoover e Lou Henry Hoover. Londres: The Mining Magazine, 1912. Disponível em: <<http://www.archive.org/stream/georgiusagricola00agririch#page/18/mode/2up>>. Acesso em: 03 de abril de 2010.

ANITESCU, M. A fixed time-stepping approach for multibody dynamics with contact and friction. **Proc. of the 2003 IEEE Int. Conf. Intell. Robots and Syst.**, Nevada, EUA.

ANITESCU, M.; POTRA, F.A. Formulating dynamic multi-rigid-body contact problems with friction as solvable linear complementarity problems. **Nonlinear Dynamics**, v. 14, p. 231-247, 1997.

BARAFF, D. Analytical methods for dynamic simulation of non-penetrating rigid bodies. **Comput. Graph.**, v. 23, n. 3, p. 223-232, 1989.

BARUFFALDI, L.B.; ARAÚJO, H.B.; SANTOS, A.A. A multibody dynamics approach to the wedge damper friction formulation. In: **Proc. of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition IMECE 2009**, Lake Buena Vista, EUA, 8 p.

CHANDIRAMANI, N.K.; SRINIVASAN, K.; NAGENDRA, J. Experimental study of stick-slip dynamics in a friction wedge damper. **J. Sound Vib.**, v. 291, p. 1-18, 2006.

CLINE, M.B.; PAI, D.K. Post-stabilization for rigid body simulation with contact and constraints. In: **Proc. of 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation**, p. 3744-3751, 2003.

COTTLE, R.W.; PANG, J. S.; STONE, R.E. **The linear complementarity problem**. San Diego: Academic Press, 1992. 762 p.

EVANS, J.; BERG, M. Challenges in simulation of rail vehicle dynamics. **Veh. Syst. Dyn.**, v. 47, n. 8, p. 1023-1048, 2009

FEENY, B.F.; MOON,F.C. Bifurcation sequences of a Coulomb friction oscillator. **Nonlinear Dynamics**, v. 4, p. 25-37, 1993.

GARDNER, J.F.; CUSUMANO, J.P. Dynamic models of friction wedge dampers. **Proc. of the 1997 ASME/IEEE Joint Railroad Conference**, Boston, EUA, p. 65-69.

GEAR, C.W. The automatic integration of ordinary differential equations. **Comm. of ACM**, v. 14, n. 3, p. 176-179, 1971.

HAGEDORN, P. **Oscilações não lineares**. São Paulo: Edgard Blücher, 1984. 320 p.

HAWTHORNE, V.T. Recent improvements to three-piece trucks. In: **Proc. of the 1996 ASME/IEEE Joint Railroad Conference**, Oakbrook, EUA, p. 155-161.

HINRICH, N.; OESTREICH, M.; POPP, K. On the modeling of friction oscillators. **Journal of Sound and Vibration**, v. 216, n. 3, p. 435-459, 1998.

KAISER, A.B.; CUSUMANO, J.P.; GARDNER, J.F. Modeling and dynamics of friction wedge dampers in railroad freight trucks. **Vehicle Syst. Dyn.**, v. 38, n. 1, p. 55-82, 2002.

KANE, T. R.; LEVINSON, D. A. **Dynamics: theory and applications**. Nova York: McGraw-Hill, 1985. 379 p.

LANCZOS, C. **The variational principles of Mechanics**. 4 ed. Nova York: Dover, 1970. 418 p.

LEMKE, C.E.; HOWSON, J.T. Equilibrium points of bimatrix games. **J. Soc. Indust. Appl. Math.**, v. 12, n. 2, p. 413-423, 1964.

LESSA, S.N. **Trem-de-ferro: do cosmopolitismo ao sertão**. 1993. 252 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

LEWIS, M.J.T. Railways in the Greek and Roman world. In: GUY, A.; REES, J. **Early Railways. A selection of papers from the First International Early Railways Conference**. Doncaster: Railway and Canal Historical Society, 2001. 11 p.

LLOYD, J. E. Fast implementation of Lemke's algorithm for rigid body contact simulation. **Proc. of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation**, Barcelona, p. 4538~4543, 2005.

LÖTSTEDT, P. Mechanical system of rigid bodies subject to unilateral constrains. **SIAM J. Appl. Math.**, v. 42, n. 2, 1982.

MCMILLAN, A.J. A non-linear friction model for self-excited vibrations. **J. S. and Vib.**, v. 205, n. 3, p. 323-335, 1997.

MINISTÉRIO DOS TRANSPORTES. **Plano Nacional de Logística e Transportes**: relatório executivo. Brasília: MT, 2007.

MSC SOFTWARE. **Adams 2008 r1 Help**. Documentação distribuída junto com o pacote Adams 2008 r1. 2008

OLSSON, H.; ASTRÖM, K.J.; CANUDAS DE WIT, C.; GÄFVERT, M.; LISCHINSKY, P. Friction models and friction compensation. **European J. of Control**, 4, p. 176-195, 1998.

PISSARRA, C.M.A. **Problemas de complementaridade linear**: aspectos teóricos, computacionais e aplicações. 1997. 143 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SHARF, I.; ZHANG, Y. A contact force solution for non-colliding contact dynamics simulation. **Multibody Syst. Dyn.**, v. 16, p. 263-290, 2006.

STEFANI, C.R.B. **O sistema ferroviário paulista**: um estudo sobre a evolução do transporte de passageiros sobre trilhos. 2007. 307p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SUN, Y.; COLE, C. Finite element modeling and analysis of friction-wedge dampers during suspension pitch modes. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 130, 2008.

TRINKLE, J.C.; PANG, J.-S.; SUDARSKY, S.; LO, G. On dynamic multi-rigid-body contact problems with Coulomb friction. **Z. angew. Math. Mech.**, v. 77, n. 4, p. 267-279, 1997.

USHLAKOV, V.F.; ZHECHEV, M.M. Dynamic analysis of the bolster-wedge-sideframes subsystems of a truck. **Int. App. Mech.**, v. 38, n. 11, p. 1407-1413, 2002.

XIA, F.; COLE, C.; WOLFS, P. The effects of friction between frames and adapters on the performance of three-piece trucks. In: **Proc. of the 2006 Joint Rail Conference**, Atlanta, p. 161-168, 2006.

## **Outras referências**

AGÊNCIA NACIONAL DE TRANSPORTES TERRESTRES. Apresenta informações sobre meios de transporte terrestres em território brasileiro. Disponível em: <<http://www.antt.gov.br>>. Acesso em: 22 de março de 2010.

AMERICAN ASSOCIATION OF RAILROADS. Sítio de uma das mais tradicionais associações de ferrovias do mundo, apresenta diversas informações sobre normas técnicas e estatísticas de ferrovias norte americanas. Disponível em: <<http://www.aar.org/Homepage.aspx>>. Acesso em: 29 de março de 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE PRESERVAÇÃO FERROVIÁRIA. Apresenta informações históricas sobre as ferrovias brasileiras, em especial as paulistas. Disponível em: <<http://www.abpfsp.com.br/ferrovias.htm>>. Acesso em: 07 de abril de 2010.

DEPARTAMENTO NACIONAL DE INFRAESTRUTURA DE TRANSPORTES. Apresenta informações e dados sobre a infraestrutura de transportes no Brasil. Disponível em: <<http://www.dnit.gov.br>>. Acesso em: 22 de março de 2010.

RAILWAY TECHNICAL. Sítio com informações técnicas sobre sistemas ferroviários. Disponível em: <<http://www.railway-technical.com>>. Acesso em: 06 de abril de 2010.

## APÊNDICE A – Listagem do programa

```
% ROTINAPRINCIPAL estabelece os parâmetros essenciais de simulação e chama
% as funções para a solução do problema da cunha de atrito com
% amortecimento constante
%
% A solução das forças normais e de atrito é feita por meio da formulação
% do sistema na forma de um problema de complementaridade linear.
%
% c2010 FEM UNICAMP - Laboratório Ferroviário
% Leonardo Bartalini Baruffaldi

close all
clear all
clc
tic
% Chama arquivo com as configurações da suspensão
BARBER_4_37
%% CONDIÇÕES INICIAIS
% Vetor de posições iniciais
r0 = [0 0 0 0 0 0,...                                % posição inicial da
quadro lateral
      -179.5684 -88.1647 0 0 0 0,...                % posição inicial da
travessa
      0 -36 0 0 0 0,...                                % posição inicial da cunha
danteira
      179.5684 -88.1647 0 0 0 0];                   % posição inicial da
cunha traseira

% Vetor de velocidades iniciais
dr0_dt = [0 0 0 0 0 0,...                            % velocidade inicial da
quadro lateral
          0 0 0 0 0 0,...                            % velocidade inicial da
travessa
          0 0 0 0 0 0,...                            % velocidade inicial da
cunha danteira
          0 0 0 0 0 0];                            % velocidade inicial da
cunha traseira

vel = 60/3.6;
mu = 0.29;
[t,y,saida] = resolve_susp2(rho_pontos,[r0 dr0_dt]',M,d9,...[0:1e-4:25*11.5/vel],vel,mu);
toc

% BARBER_4_37 Parâmetros físicos
% BARBER_4_37 Retorna os valores de parâmetros inerciais e geométricos %
de uma suspensão secundária para trem de carga com truque de três peças
%
% Referência dos corpos:
% 1 - lateral (sideframe)
```

```

% 2 - cunha dianteira (front wedge)
% 3 - travessa (bolster)
% 4 - cunha traseira (rear wedge)

%% PARÂMETROS FÍSICOS
FE = 1;
m(1) = 578; % massa da lateral
m(2) = 12/FE; % massa da cunha dianteira
m(3) = 824; % massa da travessa
m(4) = m(2); % massa da cunha traseira

I(1,1:3,1:3) = 1e9*[0.0992 0 0; 0 0.2013 0; 0 0 0.2446]; % matriz de inércia da lateral
I(2,1:3,1:3) = [11.8 0 0; 0 10.3 0; 0 0 84.1]/FE;% matriz de inércia da cunha
% dianteira
I(3,1:3,1:3) = 1e9*[0.3204 0 0; 0 0.3204 0; 0 0 0.023]; % matriz de inércia da
% travessa
I(4,1:3,1:3) = [11.8 0 0; 0 10.3 0; 0 0 84.1]/FE;% matriz de inércia da cunha
% traseira

% Montagem das matrizes de massas do sistema
for i = 1:4;
    M{i} = [diag(m(i)*[1 1 1]) zeros(3,3)
             zeros(3,3) squeeze(I(i,:,:))];
end

*****
%% PARÂMETROS GEOMÉTRICOS
% Dados da geometria da suspensão
d1 = 1778; % entre-eixos
d2 = 450; % base do berço
d3 = 485; % altura do berço
d4 = 4*pi/180; % ângulo da lateral
d5 = 149.5; % altura dos adaptadores
d6 = 169; % base da cunha
d7 = 200; % altura da cunha
d8 = 35*pi/180; % ângulo da travessa
d9 = 1600; % raio de curv. cunhna
d10 = 410; % base maior travessa
d11 = 190; % altura travessa

% Posições relativas de pontos importantes (escritas nos sistemas de
% coordenadas associados aos respectivos corpos
% 1. Quadro lateral
rhol = [-d1/2 -d5 0
         d1/2 -d5 0
         -d2/2 80.5 0
         d2/2 80.5 0
         (d2/2+d3*tan(d4)) 80.5-d3 0
         -(d2/2+d3*tan(d4)) 80.5-d3 0
         0 80.5-d3 0
         -150 80.5-d3 0
         150 80.5-d3 0
         ] %fixação das molas de controle

```

```

-179 80.5-d3 0
179 80.5-d3 0]';

% 2. Cunha dianteira
rho2 = [-62 -68.3 0
-62+d6 -68.3 0
-62+d6-d7*tan(d8) -68.3+d7 0
-62+d7*tan(d4) -68.3+d7 0
0 0 0
0 -68.3 0]';

% Centro de curvatura da face curva
rM = 1/2*[rho2(:,2)+rho2(:,3)]; % posição do ponto médio da
corda
rD = [rho2(:,2)-rho2(:,3)]; % vetor diferença
h = sqrt(d9^2-(norm(rD)/2)^2); % distância do centro à corda
nhat = 1/norm(rD)*[rho2(2,2)-rho2(2,3); rho2(1,3)-rho2(1,2); 0]; % direção do raio que passa
% pelo ponto médio da corda
ro = rM+h*nhat; % vetor posição do centro da
circunferência
rho2(:,5) = ro;

% 3. Travessa
rho3 = [-d10/2 76.3 0
d10/2 76.3 0
d10/2-d11*tan(d8) 76.3-d11 0
-d10/2+d11*tan(d8) 76.3-d11 0
0 76.3-d11 0
-150 76.3-d11 0 %fixação das molas de controle
150 76.3-d11 0]';

% 4. Cunha traseira
rho4 = [62 -68.3 0
62-d6 -68.3 0
62-d6+d7*tan(d8) -68.3+d7 0
62-d7*tan(d4) -68.3+d7 0
0 0 0
0 -68.3 0]';

% Centro de curvatura da face curva
rM = 1/2*[rho4(:,2)+rho4(:,3)];
rD = [rho4(:,2)-rho4(:,3)];
h = sqrt(d9^2-(norm(rD)/2)^2);
nhat = 1/norm(rD)*[rho4(2,3)-rho4(2,2); rho4(1,2)-rho4(1,3); 0];
ro = rM+h*nhat;
rho4(:,5) = ro;
rho_pontos = {rho1 rho2 rho3 rho4};
*****RESOLVE_SUSP2*****RESOLVE_SUSP2 Resolve as equações de movimento da suspensão secundária
% [T,Y] = RESOLVE_SUSP2(RHO,Y0,MTIL) integra as
% equações de movimento do sistema de suspensão secundária
%
% y(1...6) - coordenadas de posição do quadro lateral
% y(7...12) - coordenadas de posição da cunha dianteira

```

```

% y(13...18) - coordenadas de posição da travessa
% y(19...24) - coordenadas de posição da cunha traseira
% y(25...30) - coordenadas de velocidade do quadro lateral
% y(31...36) - coordenadas de velocidade da cunha dianteira
% y(37...42) - coordenadas de velocidade da travessa
% y(43...48) - coordenadas de velocidade da cunha traseira
%
% Parâmetros:
% Mhat - Matriz de massa generalizada (6x24)
% Fhat - Forças externas generalizadas
% Vhat - Arranjo cujas células são as matrizes de rotação de contato
% Ahat - Vetor de acelerações centrípetas e de Coriolis dos pontos
% de contato (px1)
% conecta - arranjo cujas células são as matrizes de conectividade dos
% corpos
% rhocG - Vetor coluna com as posições dos centros de gravidade
% (posições lineares e angulares) (24x1)
% rho - Arranjo de células com os pontos relevantes
% Pc - Matriz de pontos de contato (3xp)
% u - Entrada do sistema (forças/momentos nos adaptadores) (6x1)
function [t,y,saida] = resolve_susp2(rho,y0,Mhat,d9,tspan,vel,mu)

D = {};
p = [];
saida = struct('flateral',[],'fcunhaD',[],'ftravessa',[],'fcunhaT',[],...
    'fentrada',[],'Y',[]);
tempo = [];
Fhat = {};
Lhat = {};
Vhat = {};
fcont = {};
u = [];

fre = vel*pi/11.5;
defa = 1.778/vel;

close all
t0 = tspan(1);
tf = tspan(end);
opts = odeset('OutputFcn',@mostra,'InitialStep',5e-6,'RelTol',5e-3,'Refine',3);
[t,y] = ode15s(@susp2,tspan,y0,opts);
function dydt = susp2(t,y,y0)
    T{1} = cardan(y(4:6));
    T{2} = cardan(y(10:12));
    T{3} = cardan(y(16:18));
    T{4} = cardan(y(22:24));
    rho_abs{1} = posabs(rho{1},y(1:3),T{1});
    rho_abs{2} = posabs(rho{2},y(7:9),T{2});
    rho_abs{3} = posabs(rho{3},y(13:15),T{3});
    rho_abs{4} = posabs(rho{4},y(19:21),T{4});

[D,Vhat,Cn,Ct] = PontosDeContato(rho_abs,y,d9);

```

```

g = 9.850;                                % gravidade
kc = [175 83];                            % rigidez das molas das
cunhas
kt = [356 172 81];                         % rigidez das molas da
travessa
lc = [255 254];                            % comprimento livre das
molas cunhas
lt = [255 254 251];                         % comprimento livre das
molas travessa

P = size(Cn{1},2);
for j=1:4
    p(j) = size(Cn{j},1);
    [Nhat{j},Dhat{j}]=NDhat(p(j));
end

dydt = zeros(48,1);

u=0.5*(13700*[0 0;1 1;0 0])+...
    1500*entrada(t,'sinsin',fre,defa);

% Forças das molas
% Grupo da travessa, dianteiro
fmola_travessa{1} = mola(rho_abs{3}(:,6),rho_abs{1}(:,8),2*kt,lt);
% Grupo da travessa, traseiro
fmola_travessa{2} = mola(rho_abs{3}(:,7),rho_abs{1}(:,9),2*kt,lt);
% Grupo da travessa, central
fmola_travessa{3} = mola(rho_abs{3}(:,5),rho_abs{1}(:,7),3*kt,lt);
% Grupo da cunha, dianteira
fmola_cunha{1} = mola(rho_abs{2}(:,6),rho_abs{1}(:,10),kc,lc);
% Grupo da cunha, traseira
fmola_cunha{2} = mola(rho_abs{4}(:,6),rho_abs{1}(:,11),kc,lc);

% Equações, corpo a corpo
% Quadro lateral
Fhat{1} = zeros(6,1);
Fhat{1}(1:3) = u(:,1)+u(:,2)+Mhat{1}(1,1)*g*[0 -1 0]'-...
    -fmola_travessa{1}-fmola_travessa{2}-...
    fmola_travessa{3}-fmola_cunha{1}-fmola_cunha{2}; % forças externas
Fhat{1}(4:6) = vetortil(rho{1}(:,1)-y(1:3))*u(:,1) +...
    vetortil(rho_abs{1}(:,2)-y(1:3))*u(:,2)+...
    vetortil(rho_abs{1}(:,7)-y(1:3))*(-fmola_travessa{3})+...
    vetortil(rho_abs{1}(:,8)-y(1:3))*(-fmola_travessa{1})+...
    vetortil(rho_abs{1}(:,9)-y(1:3))*(-fmola_travessa{2})+...
    vetortil(rho_abs{1}(:,10)-y(1:3))*(-fmola_cunha{1})+...
    vetortil(rho_abs{1}(:,11)-y(1:3))*(-fmola_cunha{2}); % momentos
externos

Lhat{1} = zeros(6,1);
Lhat{1}(4:6) = vetortil(y(28:30))*Mhat{1}(4:6,4:6)*y(28:30);

% Cunha dianteira
Fhat{2} = zeros(6,1);

```

```

Fhat{2}(1:3) = Mhat{2}(1,1)*g*[0 -1 0]'+fmola_cunha{1};
Fhat{2}(4:6) = vetortil(rho_abs{2}(:,6)-y(7:9))*fmola_cunha{1};

Lhat{2} = zeros(6,1);
Lhat{2}(4:6) = vetortil(y([34:36]))*Mhat{2}(4:6,4:6)*y(34:36);

% Travessa
Fhat{3} = zeros(6,1);
Fhat{3}(1:3) = Mhat{3}(1,1)*g*[0 -1 0]'+fmola_travessa{1}+...
    fmola_travessa{2}+fmola_travessa{3};
Fhat{3}(4:6) = vetortil(rho_abs{3}(:,5)-
y(13:15))*fmola_travessa{3}+...
    vetortil(rho_abs{3}(:,7)-y(13:15))*fmola_travessa{2}+...
    vetortil(rho_abs{3}(:,6)-y(13:15))*fmola_travessa{1};

Lhat{3} = zeros(6,1);
Lhat{3}(4:6) = vetortil(y(40:42))*Mhat{3}(4:6,4:6)*y(40:42);

% Cunha traseira
Fhat{4} = zeros(6,1);
Fhat{4}(1:3) = Mhat{4}(1,1)*g*[0 -1 0]'+fmola_cunha{2};
Fhat{4}(4:6) = vetortil(rho_abs{4}(:,6)-y(19:21))*fmola_cunha{2};

Lhat{4} = zeros(6,1);
Lhat{4}(4:6) = vetortil(y([46:48]))*Mhat{4}(4:6,4:6)*y(46:48);

% Forças normais
rhoCG{1} = y(1:6);
rhoCG{2} = y(7:12);
rhoCG{3} = y(13:18);
rhoCG{4} = y(19:24);
velCG{1} = y(25:30);
velCG{2} = y(31:36);
velCG{3} = y(37:42);
velCG{4} = y(43:48);
[fnor,ftan,an] = normais(mu,D,rhoCG,velCG,Mhat,Fhat,Lhat,Vhat,Cn,Ct,p,P);
for j = 1:4
    fcont{j} = [fnor{j} ftan{j}];
end
% EQUAÇÕES DE MOVIMENTO
dydt(1:6) = y(25:30);
dydt(25:30) = inv(Mhat{1})*(Fhat{1}-Lhat{1}+sum(fcont{1},2));

dydt(7:12) = y(31:36);
dydt(31:36) = inv(Mhat{2})*(Fhat{2}-Lhat{2}+sum(fcont{2},2));

dydt(13:18) = y(37:42);
dydt(37:42) = inv(Mhat{3})*(Fhat{3}-Lhat{3}+sum(fcont{3},2));

dydt(19:24) = y(43:48);
dydt(43:48) = inv(Mhat{4})*(Fhat{4}-Lhat{4}+sum(fcont{4},2));

end

```

```

function status = mostra(t,y,flag)
    switch flag
        case 'init'      % output de inicialização
            status = 0;
            saida.flateral = [saida.flateral;
                (Fhat{1}-Lhat{1}+sum(fcont{1},2))'];
            saida.fculhaD = [saida.fculhaD;
                (Fhat{2}-Lhat{2}+sum(fcont{2},2))'];
            saida.ftravessa = [saida.ftravessa;
                (Fhat{3}-Lhat{3}+sum(fcont{3},2))'];
            saida.fculhaT = [saida.fculhaT;
                (Fhat{4}-Lhat{4}+sum(fcont{4},2))'];
            saida.fentrada = [saida.fentrada;u(:,1)'];
            tempo = [tempo;t(1)];
            saida.Y = [saida.Y;y'];
            fprintf('Iniciando solução\n')

        case []
            % output normal
            status = 0;
            saida.flateral = [saida.flateral;
                (sum(fcont{1},2))'];
            saida.fculhaD = [saida.fculhaD;
                (sum(fcont{2},2))'];
            saida.ftravessa = [saida.ftravessa;
                (sum(fcont{3},2))'];
            saida.fculhaT = [saida.fculhaT;
                (sum(fcont{4},2))'];
            saida.fentrada = [saida.fentrada;u(:,1)'];
            tempo = [tempo;t(1)];
            saida.Y = [saida.Y;y'];
            fprintf('%3.2f %% concluído\n',t/tf*100);
    end
end

[t ia ib] = intersect(t,tempo);
y = y(ia,:);

end
*****
% RESOLVE_SUSP2_ALT Resolve as equações de movimento da suspensão
% secundária tendo como entrada o deslocamento da lateral
% [T,Y] = RESOLVE_SUSP2_ALT(RHO,Y0,MTIL) integra as
% equações de movimento do sistema de suspensão secundária
%
% y(1...6)      -  coordenadas de posição da cunha dianteira
% y(7...12)     -  coordenadas de posição da travessa
% y(13...18)    -  coordenadas de posição da cunha traseira
% y(19...24)    -  coordenadas de velocidade da cunha dianteira
% y(25...30)    -  coordenadas de velocidade da travessa
% y(31...36)    -  coordenadas de velocidade da cunha traseira
%
% Parâmetros:

```

```

% Mhat      - Matriz de massa generalizada (6x24)
% Fhat      - Forças externas generalizadas
% Vhat      - Arranjo cujas células são as matrizes de rotação de contato
% Ahat      - Vetor de acelerações centrípetas e de Coriolis dos pontos
% de contato (px1)
% conecta - arranjo cujas células são as matrizes de conectividade dos
% corpos
% rhocG     - Vetor coluna com as posições dos centros de gravidade
% (posições lineares e angulares) (24x1)
% rho       - Arranjo de células com os pontos relevantes
% Pc        - Matriz de pontos de contato (3xp)
% u         - Entrada do sistema (deslocamento dos adaptadores) (6x1)
function [t,y,saida] = resolve_susp2_alt(rho,y0,Mhat,d9,tspan,vel,mu)

D = {};
p = [];
saida = struct('flateral',[],'fcunhaD',[],'ftravessa',[],'fcunhaT',[],...
    'fentrada',[],'Y',[],'U',[]);
tempo = [];
Fhat = {};
Lhat = {};
Vhat = {};
fcont = {};
u = [];
tipo = [];
Ti = [];

fre = vel*pi/11.5;
defa = 1.778/vel;

close all
t0 = tspan(1);
tf = tspan(end);
opts = odeset('OutputFcn',@mostra,'InitialStep',1e-6,'RelTol',1e-8);
[t,y] = ode45(@susp2,tspan,y0,opts);
    function dydt = susp2(t,y,y0)
        % fprintf('\n tempo = %f',t)

        % Entrada do sistema
        Ti = .25;
        tipo = 'seno';
        u = .5*entrades(t,Ti,tipo);

        % Matrizes de rotação
        T{1} = cardan(u(4:6));
        T{2} = cardan(y(4:6));
        T{3} = cardan(y(10:12));
        T{4} = cardan(y(16:18));
        rho_abs{1} = posabs(rho{1},u(1:3),T{1});
        rho_abs{2} = posabs(rho{2},y(1:3),T{2});
        rho_abs{3} = posabs(rho{3},y(7:9),T{3});
        rho_abs{4} = posabs(rho{4},y(13:15),T{4});

        posicoes = [u(1:6); y(1:18)];

```

```

[D,Vhat,Cn,Ct] = PontosDeContato(rho_abs,posicoes,d9);

g = 9.850;                                     % gravidade
kc = [175 83];                                % rigidez das molas das cunhas
kt = [356 172 81];                            % rigidez das molas da travessa
lc = [255 254];                                % comprimento livre das molas
cunhas
lt = [255 254 251];                            % comprimento livre das molas
travessa

P = size(Cn{1},2);
for j=1:4
    p(j) = size(Cn{j},1);
    [Nhat{j},Dhat{j}]=NDhat(p(j));
end

% Forças das molas
% Grupo da travessa, dianteiro
fmola_travessa{1} = mola(rho_abs{3}(:,6),rho_abs{1}(:,8),2*kt,lt);
% Grupo da travessa, traseiro
fmola_travessa{2} = mola(rho_abs{3}(:,7),rho_abs{1}(:,9),2*kt,lt);
% Grupo da travessa, central
fmola_travessa{3} = mola(rho_abs{3}(:,5),rho_abs{1}(:,7),3*kt,lt);
% Grupo da cunha, dianteira
fmola_cunha{1} = mola(rho_abs{2}(:,6),rho_abs{1}(:,10),kc,lc);
% Grupo da cunha, traseira
fmola_cunha{2} = mola(rho_abs{4}(:,6),rho_abs{1}(:,11),kc,lc);

% Equações, corpo a corpo
% Quadro lateral
Fhat{1} = zeros(6,1);
%           Fhat{1}(1:3) = Mhat{1}(1,1)*g*[0 -1 0]'-...
%           -fmola_travessa{1}-fmola_travessa{2}-...
%           fmola_travessa{3}-fmola_cunha{1}-fmola_cunha{2}; %
forças externas
%           Fhat{1}(4:6) = ...                                vetortil(rho_abs{1}(:,7)-u(1:3))*(-
%           %                                              fmola_travessa{3})+...
%           %                                              fmola_travessa{1})+...
%           %                                              fmola_travessa{2})+...
%           %                                              fmola_cunha{1})+...
%           %                                              fmola_cunha{2}); %
momentos externos

Lhat{1} = zeros(6,1);
%           Lhat{1}(4:6) = vetortil(u(10:12))*Mhat{1}(4:6,4:6)*u(10:12);

% Cunha dianteira
Fhat{2} = zeros(6,1);
Fhat{2}(1:3) = Mhat{2}(1,1)*g*[0 -1 0]'+fmola_cunha{1};

```

```

Fhat{2}(4:6) = vetortil(rho_abs{2}(:,6)-y(1:3))*fmola_cunha{1};

Lhat{2} = zeros(6,1);
Lhat{2}(4:6) = vetortil(y([22:24]))*Mhat{2}(4:6,4:6)*y(22:24);

% Travessa
Fhat{3} = zeros(6,1);
Fhat{3}(1:3) = (Mhat{3}(1,1))*g*[0 -1 0]'+fmola_travessa{1}+...
    fmola_travessa{2}+fmola_travessa{3};
Fhat{3}(4:6) = vetortil(rho_abs{3}(:,5)-y(7:9))*fmola_travessa{3}+...
    vetortil(rho_abs{3}(:,7)-y(7:9))*fmola_travessa{2}+...
    vetortil(rho_abs{3}(:,6)-y(7:9))*fmola_travessa{1};

Lhat{3} = zeros(6,1);
Lhat{3}(4:6) = vetortil(y(28:30))*Mhat{3}(4:6,4:6)*y(28:30);

% Cunha traseira
Fhat{4} = zeros(6,1);
Fhat{4}(1:3) = Mhat{4}(1,1)*g*[0 -1 0]'+fmola_cunha{2};
Fhat{4}(4:6) = vetortil(rho_abs{4}(:,6)-y(13:15))*fmola_cunha{2};

Lhat{4} = zeros(6,1);
Lhat{4}(4:6) = vetortil(y([34:36]))*Mhat{4}(4:6,4:6)*y(34:36);

% Forças normais
rhoCG{1} = u(1:6);
rhoCG{2} = y(1:6);
rhoCG{3} = y(7:12);
rhoCG{4} = y(13:18);
velCG{1} = u(7:12);
velCG{2} = y(19:24);
velCG{3} = y(25:30);
velCG{4} = y(31:36);
[fnor,ftan,an] = normais(mu,D,rhoCG,velCG,Mhat,Lhat,Vhat,Cn,Ct,...);
for j = 1:4
    fcont{j} = [fnor{j} ftan{j}];
end

% EQUAÇÕES DE MOVIMENTO
dydt(1:6,1) = y(19:24);
dydt(19:24,1) = 1000*inv(Mhat{2})*(Fhat{2}-Lhat{2}+sum(fcont{2},2));

dydt(7:12,1) = y(25:30);
dydt(25:30,1) = 1000*inv(Mhat{3})*(Fhat{3}-Lhat{3}+sum(fcont{3},2));

dydt(13:18,1) = y(31:36);
dydt(31:36,1) = 1000*inv(Mhat{4})*(Fhat{4}-Lhat{4}+sum(fcont{4},2));
end

function status = mostra(t,y,flag)
    for n = 1:numel(t)

```

```

        inp(:,n) = entrades(t(n),Ti, tipo);
    end
    switch flag
        case 'init'      % output de inicialização
            status = 0;
            saida.flateral = [saida.flateral;
                (Fhat{1}-Lhat{1}+sum(fcont{1},2))'];
            saida.fculhaD = [saida.fculhaD;
                (Fhat{2}-Lhat{2}+sum(fcont{2},2))'];
            saida.ftravessa = [saida.ftravessa;
                (Fhat{3}-Lhat{3}+sum(fcont{3},2))'];
            saida.fculhaT = [saida.fculhaT;
                (Fhat{4}-Lhat{4}+sum(fcont{4},2))'];
            tempo = [tempo;t(1)];
            saida.Y = [saida.Y;[y;inp(:,1)']];
            fprintf('Iniciando solução\n')

        case []
            % output normal
            status = 0;
            saida.flateral = [saida.flateral;
                (sum(fcont{1},2))'];
            saida.fculhaD = [saida.fculhaD;
                (sum(fcont{2},2))'];
            saida.ftravessa = [saida.ftravessa;
                (sum(fcont{3},2))'];
            saida.fculhaT = [saida.fculhaT;
                (sum(fcont{4},2))'];
            tempo = [tempo;t(1)];
            saida.Y = [saida.Y;[y;inp']];
            fprintf('%3.2f %% concluído\n',t/tf*100);
    end
end

[t ia ib] = intersect(t,tempo);
y = y(ia,:);

function [u] = entrades(t,Ti, tipo)
if t < Ti
    u = zeros(18,1);
else
    direc = [1 0 0 0 0 0];
    switch tipo
        case 'IC'
            u = zeros(18,1);
        case 'degrau'
            u = -1*([(1-exp(-10*(t-Ti)))*direc ...
deslocamento
                10*exp(-10*(t-Ti))*direc ...
velocidade
                -100*exp(-10*(t-Ti))*direc]'); %
aceleração
        case 'seno'
            u = -1*([0 sin(62.8*(t-Ti)) 0 0 0 0 ...
                0 62.8*cos(62.8*(t-Ti)) 0 0 0 0 ...

```

```

        0 -62.8^2*sin(62.8*(t-Ti)) 0 0 0 0]');

    end
end
end

end
*****
% ENTRADA sinal de entrada para a suspensão secundária
% U = ENTRADA(t, tipo, varargin) dá o valor da força de entrada para a
% simulação da suspensão secundária.
%
% U = ENTRADA(t, 'sinsin', omega) retorna o valor das entradas em fase com
% frequência fre(1)
%
% U = ENTRADA(t, 'sincos', omega) retorna o valor das entradas defasadas de
% pi/2 com frequência fre(1)
%
% U = ENTRADA(t, 'sindif', omega, defa) retorna o valor da entradas
% defasadas do tempo defa

function [u] = entrada(t, tipo, varargin)
u = zeros(3,1);

switch tipo
    case 'sinsin'
        omega = varargin{1};
        u = (sin(omega*t))*[0 0;1 1;0 0];
    case 'sincos'
        omega = varargin{1};
        u = [0 0;
              sin(omega*t) cos(omega*t);
              0 0];
    case 'sindif'
        omega = varargin{1};
        defa = varargin{2};
        u = [0 0;
              sin(omega*t) sin(omega*(t-defa));
              0 0];
    case 'imp'
        ti = varargin{1};
        delay = varargin{2};
        if abs(t-tmod) < 0.005
            tmod = ti;
        else tmod = t;
        u = [0 0;
              dirac(ti-tmod) dirac(ti-tmod+delay);
              0 0];
    end
end
*****
% NORMAIS Cálculo de normais de contato.

```

```

% NORMAIS recebe parâmetros de configuração e movimento do sistema e
% resolve as normais de contato por meio do processamento de um problema
% de complementaridade linear
%
% an = q + U*fn;      q <= 0 para que haja solução não trivial
function [fnor,ftan,an] = normais(coef_at,pts,rhoCG,velCG,Mhat,Lhat, ...
Vhat,Cn,Ct,p,P)

% Coeficiente de atrito cinético
vt = 0.001;
% Inicialização das variáveis
Ahat = {};
q = [];
U = [];

bandeira = 0;

gt = zeros(2*P,P);
for k = 1:P;
    gt(2*k-1:2*k,k) = [1;1];
end
% Montagem do PCL
for j=1:4
    if p(j) > 0
        [Nhat{j},Dhat{j}] = NDhat(p(j));
        for n=1:p(j)
            T = cardan(rhoCG{j}(4:6)); % Matriz de rotação do corpo
            omega = vetortil(velCG{j}(4:6)); % Velocidade angular
            outro = pts{j}(4,n);

            % Velocidade relativa de deslizamento
            vrel_abs = (velCG{outro}(1:3)+...
            vetortil(velCG{outro}(4:6))*...
            (pts{j}(1:3,n)-rhoCG{outro}(1:3)))-...
            (velCG{j}(1:3)+omega*(pts{j}(1:3,n)-rhoCG{j}(1:3)));
            vrel_local = Vhat{j}(1:3,3*n-1)'*vrel_abs;
            Ahat{j}(3*n-2:3*n,1) = Vhat{j}(1:3,3*n-2:3*n)'*...
            omega*omega*(pts{j}(1:3,n)-rhoCG{j}(1:3));

            % Definição da força de atrito
            if abs(vrel_local) <= vt
                Mu{j}(2*n-1:2*n,2*n-1:2*n) = -vrel_local/vt*...
                1.05*coef_at*[1 0;0 0];
            else
                Mu{j}(2*n-1:2*n,2*n-1:2*n) = -sign(vrel_local)*...
                coef_at*[1 0;0 0];
            end
        end
        q(:,j) = Cn{j}'*Nhat{j}'*(Vhat{j}'*inv(Mhat{j}))*...
        (Fhat{j}-Lhat{j})+Ahat{j});
    end
end

```

```

U(:,:,j) = Cn{j}'*Nhat{j}'*Vhat{j}'*inv(Mhat{j})*Vhat{j}*...
(Nhat{j}*Cn{j}+Dhat{j}*Mu{j}*Ct{j}*gt);
else bandeira=1;
end
end

if bandeira~=1
% for j=1:4
%     q_temp = q(:,:,j);
%     U_temp = U(:,:,j);
%     for k=1:4
%         if k~=j
%             q_temp = q_temp+q(:,:,k);
%             U_temp = U_temp+U(:,:,k);
%         end
%     end
%     q_cont(:,:,j) = E{j}*q_temp;
%     U_cont(:,:,j) = E{j}*U_temp;
% end
qsoma = sum(q,2);
Usoma = sum(U,3);

fn = -lemke(Usoma,-qsoma);
an = qsoma+Usoma*fn;
else
fn = [];
an = [];
end

for j=1:4
if ~isempty(fn)
for n = 1:p(j)
fnor{j}(:,:,n) = Vhat{j}(:,:,3*n-2:3*n)*...
(Nhat{j}(3*n-2:3*n,:)*Cn{j})*fn;
ftan{j}(:,:,n) = Vhat{j}(:,:,3*n-2:3*n)*...
(Dhat{j}(3*n-2:3*n,:)*Mu{j}*Ct{j}*gt)*fn;
end
else
fnor{j}=zeros(6,1);
ftan{j}=zeros(6,1);
end
end
*****

```

```

function [z,err] = lemke(M,q,z0)
% syntax: [z,err] = lemke(M,q,z0)
% LEMKE Solves linear complementarity problems (LCPs).
% An LCP solves
% Mz+q >=0, z>=0, z'*(Mz+q)=0.
% The input z0 defines a starting basis; it can be either
% an initial guess of the solution or a vector of zeros and ones
% with ones representing those z(i) thought to be non-zero in the
% solution. For example, passing z=[1.5;0;2.2] has the same
% effect as passing z=[1;0;1].

```

```

% If z0 is omitted the origin is used as a starting basis.
% ERR returns an error condition:
% 0: Solution found
% 1: Maximum iterations exceeded
% 2: Unbounded ray termination
% If NARGOUT==1, a warning message is displayed instead.
%
% ALGORITHM
% Uses a modified Lemke's algorithm (complementary pivoting)
% with a covering ray of ones. The algorithm is modified to
% allow a user defined initial basis.

n = length(q);
zer_tol = 1e-5;
piv_tol = 1e-10;
maxiter = min([1000 25*n]);
err=0;

% Trivial solution exists
if all(q >= 0.)
z=zeros(n,1); return;
end
z = zeros(2*n,1);
j = zeros(n,1);

% Determine initial basis
if nargin<3
bas=(n+1:2*n)';
B = -speye(n);
else
bas=[find(z0>0);n+find(z0<=0)];
B = [sparse(M) -speye(n)];
B = B(:,bas);
end

% Determine initial values
x=-(B\q);

% Check if initial basis provides solution
if all(x>=0)
z(bas)=x; z=z(1:n);
return
end

t = 2*n+1; % Artificial variable
entering=t; % is the first entering variable

% Determine initial leaving variable
[tval,lvindex]=max(-x);
leaving=bas(lvindex);

bas(lvindex)=t; % pivot in the artificial variable
x=x+tval;
x(lvindex)=tval;

```

```

B(:,lvindex)=-B*ones(n,1);

% Main iterations begin here
for iter=1:maxiter
% Check if done; if not, get new entering variable
if (leaving == t) break
elseif (leaving <= n)
entering = n+leaving;
Be = sparse(leaving,1,-1.0,n,1);
else
entering = leaving-n;
Be = M(:,entering);
end
d = B\Be;

% Find new leaving variable
j=find(d>piv_tol); % indices of d>0
if isempty(j) % no new pivots - ray termination
err=2;
break
end
theta=min((x(j)+zer_tol)./d(j)); % minimal ratios, d>0
j=j(find((x(j)./d(j))<=theta)); % indices of minimal ratios, d>0
lvindex=find(bas(j)==t); % check if artificial among these
if ~isempty(lvindex) % Always use artificial if possible
lvindex=j(lvindex);
else % otherwise pick among set of max d
theta=max(d(j));
lvindex=find(d(j)==theta);
lvindex=j(ceil(length(lvindex)*rand)); % if multiple choose randomly
end
leaving=bas(lvindex);

% Perform pivot
ratio=x(lvindex)./d(lvindex);
x = x - ratio*d;
x(lvindex) = ratio;
B(:,lvindex) = Be;
bas(lvindex) = entering;
end % end of iterations
if iter>=maxiter & leaving~=t err=1; end

z(bas) = x; z = z(1:n);

% Display warning messages if no error code is returned
if nargin<2 & err(1)~=0
s='Warning: solution not found - ';
if err(1)==2
disp([s 'Unbounded ray']);
elseif err(1)==1
disp([f 'Iterations exceeded limit']);
end
end

```

## APÊNDICE B - Equação de Gruebler

As equações de Gruebler são relações muito conhecidas e aplicadas na análise de mecanismos planos e espaciais. Essa equação relaciona o número total de graus de liberdade de um sistema à quantidade de corpos e restrições holonômicas entre esse corpos. Para mecanismos planos, essa equação é dada por:

$$G = 3(n - 1) - 2g_2 - g_1 \quad (\text{A.1})$$

em que  $G$  é o número de graus de liberdade,  $n$  é a quantidade de corpos interconectados,  $g_1$  é a quantidade de pares cinemáticos que restringem um único grau de liberdade e  $g_2$  é a quantidade de pares cinemáticos que restringem dois graus de liberdade.

Analizando a Eq. ( A.1 ), nota-se que essa igualdade, então, toma o número total de graus de liberdade do sistema - três para cada corpo menos três graus relacionados à peça fixa (ou à peça que tenha seu movimento prescrito) - e subtrai deste total o número de graus de liberdade sujeitos a restrições cinemáticas. Claramente, restrições não-holonômicas não são consideradas.