



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL,  
ARQUITETURA E URBANISMO

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Descrição Matemática de Geometrias Curvas por  
Interpolação Transfinita

Autor: Paulo Cesar de Alvarenga Lucci

Orientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

Campinas

2009



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL,  
ARQUITETURA E URBANISMO

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

## Descrição Matemática de Geometrias Curvas por Interpolação Transfinita

Autor: Paulo Cesar de Alvarenga Lucci

Orientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

Dissertação apresentada à Comissão de Pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

Campinas

2009



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

L961d	<p>Lucci, Paulo Cesar de Alvarenga Descrição matemática de geometrias curvas por interpolação transfinita / Paulo Cesar de Alvarenga Lucci. --Campinas, SP: [s.n.], 2009.</p> <p>Orientador: Philippe Remy Bernard Devloo. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.</p> <p>1. Métodos de dicretização. 2. Mapeamento (Matemático). 3. Geração numérica de malhas. I. Devloo, Philippe Remy Bernard. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.</p>
-------	---

Título em Inglês: Mathematical description of curved domains via transfinite  
interpolation

Palavras-chave em Inglês: Discretization Methods, Mapping (Mathematical), Numerical  
Generation of Meshes

Área de concentração: Estruturas

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora: Mario Conrado Cavichia, Jorge Stolfi

Data da defesa: 27/03/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Civil



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL,  
ARQUITETURA E URBANISMO

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Descrição Matemática de Geometrias Curvas por  
Interpolação Transfinita

Autor: Paulo Cesar de Alvarenga Lucci

Orientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Philippe Remy Bernard Devloo".

---

Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo  
DES/FEC/UNICAMP

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Mario Conrado Cavichia".

---

Prof. Dr. Mario Conrado Cavichia  
DES/FEC/UNICAMP

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Jorge Stolfi".

---

Prof. Dr. Jorge Stolfi  
DTC/IC/UNICAMP

Campinas, 27 de março de 2009

*Dedico este trabalho às pessoas que mais amo neste mundo: minha família.*

- *pais Claudio Roberto Tavares Lucci e Lucy Ferraz de Alvarenga Lucci;*
- *irmãos Fabio Augusto de Alvarenga Lucci e Vivian de Alvarenga Lucci;*
- *sobrinho Caio Lucci Schnor;*
- *companheira Catia Marcelo.*

*Agradeço a Deus por ter-me mostrado o caminho de volta à vida acadêmica após oito anos e meio da conclusão de minha graduação, possibilitando aumentar (e aprofundar) meus conhecimentos no LabMeC (DES - FEC - UNICAMP), um ambiente de muita descontração e amizade, cujos integrantes também agradeço por seus imensos talentos morais e intelectuais que inspiraram-me e deram-me suporte nesta jornada, que são:*

- *meu brilhante orientador Philippe Remy Bernard Devloo, que presenteou-me com esta dissertação;*
- *amigos de estudo e trabalho:*
  - ▷ *Tiago Forti, por apadrinhar-me em meus aprendizados iniciais, intermediários e finais;*
  - ▷ *Edimar Rylo, por suas orientações e suporte;*
  - ▷ *Gustavo Longhin, por sua postura e profissionalismo;*
  - ▷ *Alaor Rosa, por sua inspiração e encorajamento;*
  - ▷ *Maurício Souza, por seu fornecimento de materiais e grande senso de humor;*
  - ▷ *Agnaldo Farias, Denise Siqueira e João Gonçalves pela amizade e por serem os matemáticos que nos mostram outras visões dos mesmos assuntos;*
  - ▷ *e Diogo Cecílio e Thiago Santos, pela amizade e por estarem no início desta jornada, permitindo que eu reveja muito do que aprendi, além de trazerem-me novos conhecimentos.*

# Resumo

Este trabalho é dedicado ao desenvolvimento de uma metodologia específica de mapeamento curvo aplicável a qualquer tipo de elemento geométrico regular. Trata-se de uma generalização do modelo matemático de representação geométrica apresentado em 1967 por *Steven Anson Coons*, denominado "*Bilinearly Blended Coons Patches*", o qual ajusta uma superfície retangular em um contorno delimitado por quatro curvas arbitrárias. A generalização proposta permitirá a utilização deste tipo de interpolação geométrica em elementos de qualquer topologia, através de uma sistemática única e consistente.

**Palavras chave:** *Coons Patches*, CAGD, interpolação transfinita, mapeamento de domínios curvos.

# Abstract

*In this work a methodology is developed for mathematical representation of curved domains, applicable to any type of finite element geometry. This methodology is a generalization of the mathematical model of a geometric representation presented in 1967 by Steven Anson Coons, called “Bilinearly Blended Coons Patches”, which patch a rectangular surface in four arbitrary boundary curves. The proposed methodology is a kind of geometric transfinite interpolation applicable to elements of any topology, using a single and consistent systematic.*

**Keywords:** *Coons Patches, CAGD, transfinite interpolation, curved domains mapping.*



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>4</b>
3.1	Interpolação Polinomial de Lagrange . . . . .	4
3.2	Curvas Bézier . . . . .	6
3.3	Interpolação de Hermite . . . . .	8
3.3.1	Interpolação Cúbica de Hermite . . . . .	8
3.4	Superfícies de Produto Tensorial . . . . .	10
3.4.1	Bilinearly Blended Coons Patches . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Metodologia</b>	<b>18</b>
4.1	Topologias e Transformações . . . . .	19
4.1.1	Topologias . . . . .	21
4.1.2	Transformações . . . . .	24
4.1.2.1	Triângulo . . . . .	24
4.1.2.2	Quadrilátero . . . . .	25
4.1.2.3	Tetraedro . . . . .	26
4.1.2.4	Pirâmide . . . . .	27
4.1.2.5	Prisma Triangular . . . . .	28
4.1.2.6	Hexaedro . . . . .	29
4.2	Blending Functions . . . . .	31
4.3	Contribuições dos Lados . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Generalização da Interpolação Transfinita</b>	<b>40</b>
<b>6</b>	<b>Testes e Validações</b>	<b>49</b>
6.1	Testes . . . . .	50

6.1.1	Mapeamento dos Vértices . . . . .	50
6.1.2	Mapeamento das Arestas Lineares . . . . .	50
6.1.3	Mapeamento das Arestas em Arco . . . . .	51
6.1.4	Ordem de Convergência . . . . .	51
6.2	Validações . . . . .	52
6.2.1	Mapeamento dos Vértices . . . . .	52
6.2.2	Mapeamento das Arestas Lineares . . . . .	52
6.2.3	Mapeamento das Arestas em Arco . . . . .	53
6.2.4	Ordem de Convergência . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Aplicação Prática</b>	<b>55</b>
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>61</b>

# Lista de Figuras

3.1	Interpolação de <i>Lagrange</i> . . . . .	5
3.2	Curva <i>Bézier</i> . . . . .	7
3.3	Interpolação cúbica de <i>Hermite</i> . . . . .	9
3.4	Superfície de produto tensorial . . . . .	12
3.5	Curvas do contorno da superfície . . . . .	15
3.6	Superfície <i>Bilinearly Coons Patches</i> . . . . .	17
4.1	Elemento particionado em lados . . . . .	19
4.2	Transformação $T_j(\xi) : \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}_j$ . . . . .	20
4.3	Elementos mais utilizados nos métodos de discretização . . . . .	21
4.4	Projeções para os lados $\Omega_j$ (arestas) do triângulo . . . . .	24
4.5	Projeções para os lados $\Omega_j$ (arestas) do quadrilátero . . . . .	25
4.6	Projeções para os lados $\Omega_j$ (arestas e faces) do tetraedro . . . . .	26
4.7	Projeções para os lados $\Omega_j$ (arestas e faces) da pirâmide . . . . .	27
4.8	Projeções para os lados $\Omega_j$ (arestas e faces) do prisma triangular . . . . .	28
4.9	Projeções para os lados $\Omega_j$ (arestas e faces) do hexaedro . . . . .	29
4.10	<i>Blending functions</i> associadas aos nós do elemento linha . . . . .	32
4.11	<i>Blending functions</i> associadas aos nós do elemento triângulo . . . . .	32
4.12	<i>Blending functions</i> associadas aos nós do elemento quadrilátero . . . . .	32
4.13	Coefficientes das contribuições das faces do hexaedro . . . . .	38
4.14	Coefficientes das contribuições das arestas do hexaedro . . . . .	38
4.15	Coefficientes das contribuições dos nós do hexaedro . . . . .	38
5.1	Elemento curvo obtido por interpolação transfinita . . . . .	43
5.2	Hexaedro sendo mapeado para uma esfera por interpolação transfinita . . . . .	48
7.1	Malha mínima: representação exata do domínio estudado com poucos elementos . . . . .	56
7.2	<i>Wireframe</i> das malhas . . . . .	57
7.3	Perfil de distribuição de vazão . . . . .	59

7.4 Perfil de distribuição de fluxo . . . . . 60

# Lista de Tabelas

4.1	Domínios de referência - $\hat{\Omega}$ ou $\hat{\Omega}_j$ . . . . .	21
4.2	Classificação dos lados . . . . .	22
4.3	Identificações dos lados $\Omega_j$ e suas partições . . . . .	22
4.4	Quantidade de lados - $Q$ . . . . .	23
4.5	Transformações para os domínios $\hat{\Omega}_j$ do triângulo . . . . .	24
4.6	Transformações para os domínios $\hat{\Omega}_j$ do quadrilátero . . . . .	25
4.7	Transformações para os domínios $\hat{\Omega}_j$ do tetraedro . . . . .	26
4.8	Transformações para os domínios $\hat{\Omega}_j$ da pirâmide . . . . .	27
4.9	Transformações para os domínios $\hat{\Omega}_j$ do prisma triangular . . . . .	28
4.10	Transformações para os domínios $\hat{\Omega}_j$ do hexaedro . . . . .	29
4.11	<i>Blending function</i> associada ao nó $i$ . . . . .	31
6.1	Resultados do teste de convergência . . . . .	54
7.1	Dados do campo de Troll . . . . .	58

# Lista de Símbolos

$\hat{\Omega}$	(def. pág. 4)	domínio de referência do elemento
$\Omega$	(def. pág. 4)	domínio curvo do elemento
$\Omega_j$	(def. pág. 19)	domínio do lado de índice $j$ do elemento $\hat{\Omega}$
$\hat{\Omega}_j$	(def. pág. 20)	domínio de referência do lado $\Omega_j$
$\xi$	(def. pág. 20)	ponto pertencente ao domínio $\hat{\Omega}$
$T_j(\xi)$	(def. pág. 20)	transformação de um ponto $\xi$ para o domínio $\hat{\Omega}_j$
$\xi_j$	(def. pág. 24)	ponto $\xi$ transformado por $T_j(\xi)$ para o domínio $\hat{\Omega}_j$
$B_j(\xi_j)$	(def. pág. 24)	função geométrica associada ao domínio $\hat{\Omega}_j$
$\phi_i(\xi)$	(def. pág. 31)	<i>blending function</i> do nó de índice $i$ do elemento $\hat{\Omega}$
$n_k$	(def. pág. 31)	coordenada do nó $k$ definidas pela topologia do domínio $\hat{\Omega}$
$\varphi_j(\xi)$	(def. pág. 33)	<i>blending function</i> do lado de índice $j$ do elemento $\hat{\Omega}$
$C_j(\xi)$	(def. pág. 35)	contribuição do lado de índice $j$ na modelagem do elemento $\hat{\Omega}$
$\lambda_j$	(def. pág. 35)	coeficiente de contribuição do lado $j$ do elemento $\hat{\Omega}$
$\chi(\xi)$	(def. pág. 40)	função mapeamento por interpolação transfinita

# Capítulo 1

## Introdução

A descrição de formas geométricas pode ser feita por meio de modelos reais ou matemáticos. Uma vantagem deste último é a possibilidade de processar dados e analisar resultados através do uso de um computador. Os primeiros *softwares* destinados a este tipo de aplicação surgiram em meados de 1950, com o advento das máquinas de fresa industrial operadas por controle numérico, mas somente após 1960 é que tornou-se possível utilizar o computador como ferramenta de modelagem de formas detalhadas [25]. Desde então o desenho geométrico auxiliado por computador foi intensamente utilizado pela indústria, ocasionando o desenvolvimento de vários métodos matemáticos que atendessem às suas demandas de simulação.

Segundo [13], o termo CAGD (*Computer Aided Geometric Design*) surgiu em 1974 ao ser o título de uma conferência organizada por *R. Barnhill* e *R. Riesenfeld* na Universidade de *Utah*. A partir de então este termo é associado à construção e representação matemática de formas livres. Esta conferência reuniu pesquisadores dos Estados Unidos e Europa e é considerada como a precursora deste assunto, resultando em uma ampla e influente coletânea [2]. Sua repercussão deu início a vários trabalhos como o livro texto "*Computational Geometry for Design and Manufacture*" [10], o jornal "*Computer Aided Geometric Design*"<sup>1</sup> e muitos outros.

As características de desempenho e performance buscadas pelas técnicas de CAGD são a facilidade de modelagem e qualidade de representação geométrica. Isso é justificado pelo fato de que geometrias complexas dificilmente são bem representadas matematicamente por um único domínio, implicando na necessidade de discretizações em subdomínios regulares, denominados elementos, e o conjunto destes elementos é denominado malha. Estas características, quando presentes no método utilizado, proporcionariam malhas de fácil geração e com menores quantidades de elementos, consumindo menos memória de *hardware* e tempo de processamento.

---

<sup>1</sup>O jornal "*Computer Aided Geometric Design*" foi fundado em 1984 por *R. Barnhill* e *W. Bohem*.

Por esta razão as técnicas de CAGD rapidamente adotaram os elementos paramétricos estudados por *Gauss* e *Euler*, dando início ao desenvolvimento de várias técnicas de interpolação, como por exemplo as dos autores: *J. Lagrange*, *P. Bézier*, *C. Hermite*, *P. Casteljau*, *C. Boor*, *J. Ferguson* e *A. Forrest*; e suas aplicações nas Splines, B-Splines e NURBS<sup>2</sup>. Pelo fato destes métodos permitirem o ajuste exato da geometria em apenas um número finito de pontos, domínios de contorno definido por funções analíticas (círculos e cônicas, por exemplo) não seriam representados exatamente, implicando na existência de algum erro de representação geométrica. Estudos a este respeito são realizados em [1, 15, 19, 23].

Esta limitação motivou *Steven Anson Coons* a desenvolver, em 1967, uma metodologia simples que ajusta uma superfície retangular em um contorno delimitado por quatro curvas arbitrárias, conhecida como "*Bilinearly Blended Coons Patches*" [4]. Alguns estudos baseados neste mesmo conceito foram realizados por outros autores, dando origem ao termo "interpolação transfinita" (de autoria do matemático *W. J. Gordon* [14]), designado à interpolação que garante conformidade de representação geométrica a um número infinito de pontos no contorno do elemento. Sua sistemática utiliza um conceito muito popularizado nesta época que consiste na obtenção de superfícies por produto tensorial.

Sob o ponto de vista teórico, uma superfície de produto tensorial pode ser compreendida como o lugar geométrico obtido por uma curva que se move através do espaço, alterando (ou não) sua forma de maneira contínua. Este recurso representou um grande avanço nas técnicas de CAGD, mas por terem focalizado seu desenvolvimento a superfícies quadrilaterais, surge uma nova motivação: sua aplicação a outros tipos de topologia.

Neste trabalho será apresentado o desenvolvimento de um método generalizado de interpolação transfinita, capaz de modelar elementos de qualquer topologia regular através de curvas ou superfícies associadas aos seus contornos, as quais serão estendidas para o interior de seus domínios com a garantia de continuidade e suavidade.

---

<sup>2</sup>Maiores detalhes são apresentados respectivamente em [18, 3, 16, 6, 5, 11, 12, 24, 21, 20, 9].



# Capítulo 2

## Objetivos

A descrição de formas geométricas por modelos matemáticos desencadeou uma revolução tecnológica ao possibilitar sua utilização em procedimentos computacionais. Com isso, várias técnicas de CAGD surgiram na busca pela facilidade de modelagem e qualidade de representação geométrica, implicando em malhas com menores quantidades de elementos (economia computacional).

Neste contexto, *Steven Anson Coons* apresentou em 1967 um método matemático de representação geométrica que utiliza o produto tensorial de superfícies. Sua dedução limitou-se ao elemento quadrilateral, possibilitando a representação exata do contorno de domínios bidimensionais. Para sua utilização em domínios tridimensionais, seriam necessárias deduções a outros tipos de topologia, instante onde uma generalização seria muito mais interessante, através de um algoritmo que se adaptasse a qualquer tipo de elemento. Neste trabalho será apresentado um modelo matemático de representação geométrica, cujos objetivos são:

- Ser aplicável a qualquer tipo de elemento geométrico regular, com a garantia de modelar exatamente seu contorno a partir de funções associadas;
- Permitir a flexibilidade de associar funções a uma parte do contorno do elemento, e não em sua totalidade.

# Capítulo 3

## Revisão Bibliográfica

Neste capítulo serão apresentados os métodos de CAGD mais significativos para o desenvolvimento deste trabalho. São modelos matemáticos que envolvem variáveis de parametrização pertencentes a um domínio de referência  $\hat{\Omega}$ . A transformação deste domínio resultará no domínio curvo  $\Omega$ .

### 3.1 Interpolação Polinomial de Lagrange

O matemático e astrônomo *Joseph Louis Lagrange* nasceu na Itália em 1736, mas viveu a maior parte de sua vida na antiga Prússia e França. Durante este período *Lagrange* contribuiu substancialmente em vários campos científicos, tanto que em 1766, sob recomendações de *Euler* e *D'Alembert*, tornou-se sucessor de *Euler* como diretor de matemática da Academia de Ciências da Prússia. Um de seus trabalhos, conhecido como "interpolação polinomial de *Lagrange*", destacou-se no ramo da CAGD pelo fato de obter uma curva polinomial que interpola uma coleção de pontos através de um algoritmo simples. Sua forma parametrizada é definida como:

$$L(t) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) \mathbf{P}_i; \quad t \in \hat{\Omega} = [t_0, t_n] \quad (3.1)$$

sendo:

- $t_i$  um ponto discreto do domínio de referência  $\hat{\Omega}$ ;
- $L_i^n(t)$  o polinômio de *Lagrange* de grau  $n$  associado ao ponto  $t_i$ , definido por:

$$L_i^n(t) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j)} \quad (3.2)$$

- $\mathbf{P}_i$  um ponto da coleção a ser interpolado;
- $L(t)$  o polinômio interpolante de *Lagrange* de grau  $n$ , tal que  $L(t_i) = \mathbf{P}_i$ .

**Exemplo 3.1** *Interpolação de Lagrange:*

- Pontos discretos do domínio de referência  $\hat{\Omega} = [2, 8]$ :

$$t_0 = 2 \quad , \quad t_1 = 3 \quad , \quad t_2 = 5 \quad , \quad t_3 = 8 \quad \therefore \quad n = 3$$

- Coleção de pontos a serem interpolados:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \{1, 2\}^t = L(t_0) \quad , \quad \mathbf{P}_1 = \{2, 3.5\}^t = L(t_1) \\ \mathbf{P}_2 &= \{4, 3\}^t = L(t_2) \quad , \quad \mathbf{P}_3 = \{7, 2.5\}^t = L(t_3) \end{aligned}$$

- Polinômios de Lagrange (ver equação 3.2):

$$L_0^3(t) = \frac{(t-3)(t-5)(t-8)}{(2-3)(2-5)(2-8)} \quad , \quad L_1^3(t) = \frac{(t-2)(t-5)(t-8)}{(3-2)(3-5)(3-8)}$$

$$L_2^3(t) = \frac{(t-2)(t-3)(t-8)}{(5-2)(5-3)(5-8)} \quad , \quad L_3^3(t) = \frac{(t-2)(t-3)(t-5)}{(8-2)(8-3)(8-5)}$$

- Polinômio interpolante de Lagrange (ver equação 3.1):

$$L(t) = L_0^3(t)\mathbf{P}_0 + L_1^3(t)\mathbf{P}_1 + L_2^3(t)\mathbf{P}_2 + L_3^3(t)\mathbf{P}_3$$

↓

$$L(t) = \left\{ \begin{array}{l} t-1 \\ 0.1t^3 - 1.58333t^2 + 7.51667t - 7.5 \end{array} \right\}$$

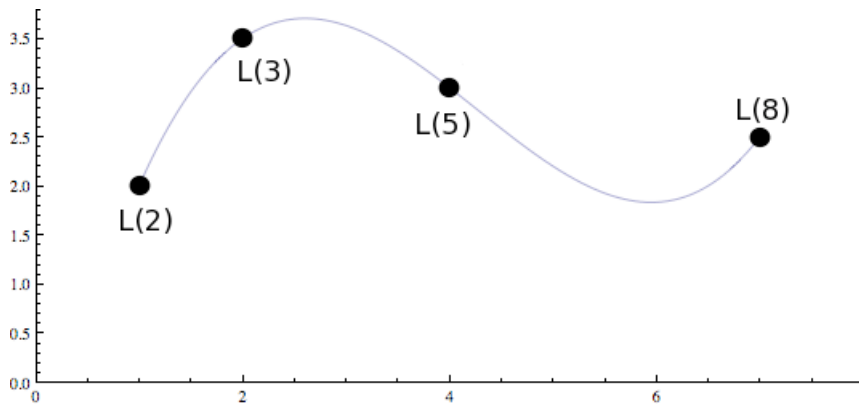


Figura 3.1: Interpolação de Lagrange.

## 3.2 Curvas Bézier

Em meados de 1960, *Pierre Bézier* comandava o departamento de *design* da indústria automobilística *Renault* em Paris. Sua necessidade de representação computacional das partes mecânicas dos automóveis deu início ao desenvolvimento de um modelo matemático, hoje conhecido como "curvas *Bézier*". Seu modelo incorporou um algoritmo desenvolvido poucos anos antes pelo matemático *Paul de Faget de Casteljau*, pela concorrente *Citroën*, conhecido como o "algoritmo de *Casteljau*". Este conferiu às curvas *Bézier* várias propriedades importantes como a invariância ao refinamento do polígono de controle, invariância ao refinamento da variável de parametrização, invariância sobre a combinação baricêntrica, casca convexa, interpolação dos pontos extremos, simetria, precisão linear e controle pseudolocal (estas propriedades encontram-se detalhadas no livro [9], capítulo 5, seção 5.2).

Uma curva *Bézier* é definida como:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i; \quad t \in \hat{\Omega} = [0, 1] \quad (3.3)$$

sendo:

- $B_i^n(t)$  o polinômio de *Bernstein* associado ao ponto  $\mathbf{b}_i$  da coleção, definido por:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad (3.4)$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (\text{coeficiente binomial}) \quad (3.5)$$

- $\mathbf{b}_i$  um ponto de controle da curva *Bézier*. A propriedade de interpolação dos pontos extremos diz que  $B(0) = \mathbf{b}_0$  e  $B(1) = \mathbf{b}_n$ ;
- $B(t)$  o polinômio da curva *Bézier* de grau  $n$ .

Nos modelos matemáticos de *Bézier*, o polígono obtido pela conexão sequencial dos pontos de controle é denominado "polígono de controle".

**Exemplo 3.2** *Curva Bézier:*

- *Pontos de controle:*

$$\mathbf{b}_0 = \{1, 1\}^t = B(0) \quad , \quad \mathbf{b}_1 = \{2, 5\}^t \quad , \quad \mathbf{b}_2 = \{7, 3\}^t \quad , \quad \mathbf{b}_3 = \{5, 6\}^t = B(1) \quad \therefore \quad n = 3$$

- *Polinômios de Bernstein (ver equação 3.4):*

$$B_0^3(t) = \frac{3!}{0! \cdot 3!} (1-t)^3 t^0 \quad , \quad B_1^3(t) = \frac{3!}{1! \cdot 2!} (1-t)^2 t^1$$

$$B_2^3(t) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} (1-t)^1 t^2 \quad , \quad B_3^3(t) = \frac{3!}{3! \cdot 0!} (1-t)^0 t^3$$

- *Curva Bézier (ver equação 3.3):*

$$B(t) = B_0^3(t) \mathbf{b}_0 + B_1^3(t) \mathbf{b}_1 + B_2^3(t) \mathbf{b}_2 + B_3^3(t) \mathbf{b}_3$$

↓

$$B(t) = \left\{ \begin{array}{l} -11t^3 + 12t^2 + 3t + 1 \\ 11t^3 - 18t^2 + 12t + 1 \end{array} \right\} , \quad t \in \hat{\Omega} = [0, 1]$$

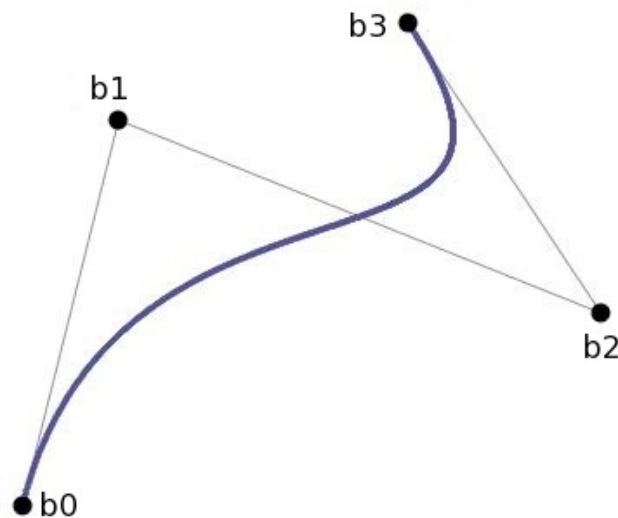


Figura 3.2: Curva Bézier.

### 3.3 Interpolação de Hermite

Nem sempre deseja-se interpolar somente uma coleção de pontos. Podem ocorrer situações em que será necessário interpolar uma coleção de pontos e suas derivadas. Foi esta necessidade que motivou o matemático francês *Charles Hermite*, nascido em 1822, a desenvolver um método conhecido por "interpolação de *Hermite*".

#### 3.3.1 Interpolação Cúbica de Hermite

Um caso clássico do método de *Hermite* é a interpolação cúbica. Para sua definição são necessários dois pontos ( $\mathbf{P}_0$  e  $\mathbf{P}_1$ ) e respectivas derivadas ( $\mathbf{P}'_0$  e  $\mathbf{P}'_1$ ). Neste caso, pretende-se encontrar um polinômio que atenda às seguintes exigências:

$$H = H(t); \quad \text{tal que: } \begin{cases} t \in \hat{\Omega} = [0, 1] \\ H(0) = \mathbf{P}_0 & , \quad H'(0) = \mathbf{P}'_0 \\ H(1) = \mathbf{P}_1 & , \quad H'(1) = \mathbf{P}'_1 \end{cases}$$

Para sua obtenção, será utilizada uma curva *Bézier*, a qual necessitará de quatro pontos de controle ( $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  e  $\mathbf{b}_3$ ) para sua definição. Destes, dois são facilmente determinados (seus extremos):

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{P}_0 \quad , \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{P}_1 \quad (3.6)$$

Os pontos  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$  serão obtidos pela forma derivada das curvas *Bézier*, a qual é detalhada no livro [9], capítulo 5, seção 5.3.

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{P}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{P}'_0 \quad , \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{P}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{P}'_1 \quad (3.7)$$

Substituindo as equações 3.6 e 3.7 na equação 3.3 e rearranjando os termos, chega-se à expressão do polinômio interpolante cúbico de *Hermite*:

$$H(t) = H_0^3(t)\mathbf{P}_0 + H_1^3(t)\mathbf{P}'_0 + H_2^3(t)\mathbf{P}'_1 + H_3^3(t)\mathbf{P}_1 \quad (3.8)$$

sendo:

- $H_i^3(t)$  o polinômio cúbico de *Hermite* em função dos polinômios de *Bernstein*, definido por:

$$H_0^3(t) = B_0^3(t) + B_1^3(t) \quad , \quad H_1^3(t) = \frac{1}{3}B_1^3(t) \quad , \quad H_2^3(t) = -\frac{1}{3}B_2^3(t) \quad , \quad H_3^3(t) = B_2^3(t) + B_3^3(t) \quad (3.9)$$

- $H(t)$  o polinômio interpolante cúbico de *Hermite*.

**Exemplo 3.3** *Interpolação de Hermite:*

- *Coleção de pontos:*

$$\mathbf{P}_0 = \{1, 2\}^t = H(0), \quad \mathbf{P}'_0 = \{5, 15\}^t = H'(0), \quad \mathbf{P}_1 = \{2.5, 6\}^t = H(1), \quad \mathbf{P}'_1 = \{17, 5\}^t = H'(1)$$

- *Polinômios de Bernstein (ver equação 3.4):*

$$B_0^3(t) = \frac{3!}{0! \cdot (3-0)!} (1-t)^{3-0} t^0, \quad B_1^3(t) = \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} (1-t)^{3-1} t^1$$

$$B_2^3(t) = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} (1-t)^{3-2} t^2, \quad B_3^3(t) = \frac{3!}{3! \cdot (3-3)!} (1-t)^{3-3} t^3$$

- *Polinômios de Hermite (ver equação 3.9):*

$$H_0^3(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad H_1^3(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_2^3(t) = t^3 - t^2, \quad H_3^3(t) = 3t^2 - 2t^3$$

- *Polinômio interpolante cúbico de Hermite (ver equação 3.8):*

$$H(t) = H_0^3(t)\mathbf{P}_0 + H_1^3(t)\mathbf{P}'_0 + H_2^3(t)\mathbf{P}'_1 + H_3^3(t)\mathbf{P}_1$$

↓

$$H(t) = \left\{ \begin{array}{l} -24.5t^3 + 35.5t^2 + 5t + 1 \\ 15t^3 - 27t^2 + 15t + 2 \end{array} \right\}, \quad t \in \hat{\Omega} = [0, 1]$$

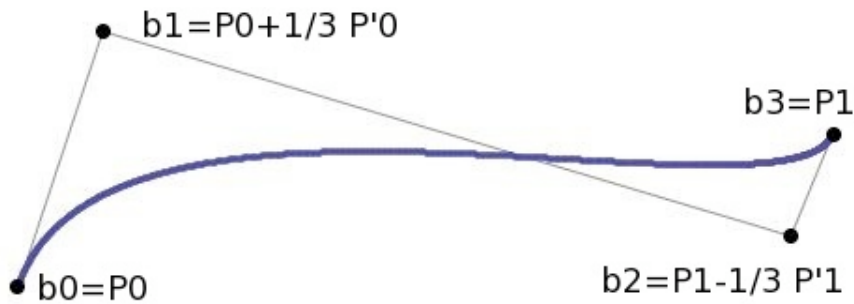


Figura 3.3: Interpolação cúbica de *Hermite*.

### 3.4 Superfícies de Produto Tensorial

Segundo [9], a primeira pessoa a considerar superfícies de produto tensorial como alternativa de modelagem geométrica foi provavelmente *Casteljau*, durante estudos realizados entre 1959 e 1963. Sua popularidade, entretanto, deve-se ao trabalho de *Bézier*, realizado pouco tempo após. Para demonstrar o princípio envolvido em sua construção, será necessário primeiramente formalizar uma generalização das curvas apresentadas nas seções 3.1, 3.2 e 3.3. Basicamente, estes modelos matemáticos podem ser descritos pela equação:

$$c(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i^n(t) \mathbf{p}_i; \quad t \in \hat{\Omega} = [t_0, t_n] \quad (3.10)$$

sendo:

- $c(t)$  a equação da curva;
- $t_i$  um ponto discreto do domínio  $\hat{\Omega}$ , tal que  $c(t_i) = \mathbf{p}_i$ ;
- $\varphi_i^n(t)$  a *blending function* associada ao ponto  $\mathbf{p}_i$ ;
- $\mathbf{p}_i$  um ponto a ser interpolado ou um ponto de controle.

Sob o ponto de vista teórico, uma superfície de produto tensorial pode ser compreendida como o lugar geométrico obtido por uma curva que se move através do espaço, alterando (ou não) sua forma de maneira contínua<sup>1</sup>. Portanto, sua descrição matemática pode ser relacionada a uma curva  $c_1(u)$  de grau  $n$  que se move de forma que seus pontos  $\mathbf{p}_i$  sejam regidos pela equação de uma outra curva  $c_2(v)$  de grau  $m$ :

$$c_1(u) = \sum_{i=0}^n \varphi_i^n(u) c_2; \quad u \in \hat{\Omega}_u = [u_0, u_n] \quad (3.11)$$

$$c_2 = c_2(v) = \sum_{j=0}^m \varphi_j^m(v) \mathbf{p}_{i,j}; \quad v \in \hat{\Omega}_v = [v_0, v_m] \quad (3.12)$$

Ao substituir (3.12) em (3.11), chega-se à expressão da superfície de produto tensorial:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \varphi_i^n(u) \varphi_j^m(v) \mathbf{p}_{i,j} \quad (3.13)$$

que pode ser expressa na forma matricial:

$$S(u, v) = [\varphi_i(u)]_{1 \times n} [\mathbf{p}_{i,j}]_{n \times m} [\varphi_j(v)]_{m \times 1} \quad (3.14)$$

<sup>1</sup>Por esta razão as superfícies de produto tensorial são retangulares, justificando a popularização desta topologia.



**Exemplo 3.4** *Superfície de produto tensorial:*

- *Pontos discretos dos domínios de referência*  $\hat{\Omega}_u = [-1, 1]$  e  $\hat{\Omega}_v = [-1, 1]$ :

$$u_0 = -1 \quad , \quad u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = 1 \quad \therefore \quad n = 2$$

$$v_0 = -1 \quad , \quad v_1 = -0.5 \quad , \quad v_2 = 0.5 \quad , \quad v_3 = 1 \quad \therefore \quad m = 3$$

- *Coleção de pontos a serem interpolados:*

$$\mathbf{p}_{0,0} = \{-1, -1, 0\}^t = S(u_0, v_0) \quad \mathbf{p}_{1,0} = \{0, -1, \frac{3}{10}\}^t = S(u_1, v_0) \quad \mathbf{p}_{2,0} = \{1, -1, 0\}^t = S(u_2, v_0)$$

$$\mathbf{p}_{0,1} = \{-\frac{12}{10}, -\frac{1}{2}, 0\}^t = S(u_0, v_1) \quad \mathbf{p}_{1,1} = \{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}^t = S(u_1, v_1) \quad \mathbf{p}_{2,1} = \{\frac{13}{10}, -\frac{1}{2}, 0\}^t = S(u_2, v_1)$$

$$\mathbf{p}_{0,2} = \{-1, \frac{1}{2}, 0\}^t = S(u_0, v_2) \quad \mathbf{p}_{1,2} = \{0, \frac{1}{2}, 0\}^t = S(u_1, v_2) \quad \mathbf{p}_{2,2} = \{1, \frac{1}{2}, 0\}^t = S(u_2, v_2)$$

$$\mathbf{p}_{0,3} = \{-1, 1, \frac{1}{10}\}^t = S(u_0, v_3) \quad \mathbf{p}_{1,3} = \{0, 1, 0\}^t = S(u_1, v_3) \quad \mathbf{p}_{2,3} = \{1, 1, \frac{2}{10}\}^t = S(u_2, v_3)$$

- *Blending functions.* Neste exemplo serão utilizados polinômios de Lagrange (ver equação 3.2):

$$\varphi_0^2(u) = \frac{(u-0)(u-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{u^2 - u}{2}$$

$$\varphi_1^2(u) = \frac{(u-(-1))(u-1)}{(0-(-1))(0-1)} = 1 - u^2$$

$$\varphi_2^2(u) = \frac{(u-(-1))(u-0)}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{u^2 + u}{2}$$

$$\varphi_0^3(v) = \frac{(v-(-0.5))(v-0.5)(v-1)}{(-1-(-0.5))(-1-0.5)(-1-1)} = -\frac{2}{3}v^3 + \frac{2}{3}v^2 + \frac{1}{6}v - \frac{1}{6}$$

$$\varphi_1^3(v) = \frac{(v-(-1))(v-0.5)(v-1)}{(-0.5-(-1))(-0.5-0.5)(-0.5-1)} = \frac{4}{3}v^3 - \frac{2}{3}v^2 - \frac{4}{3}v + \frac{2}{3}$$

$$\varphi_2^3(v) = \frac{(v-(-1))(v-(-0.5))(v-1)}{(0.5-(-1))(0.5-(-0.5))(0.5-1)} = \frac{4}{3}v^3 - \frac{2}{3}v^2 - \frac{4}{3}v + \frac{2}{3}$$

$$\varphi_3^3(v) = \frac{(v-(-1))(v-(-0.5))(v-0.5)}{(1-(-1))(1-(-0.5))(1-0.5)} = -\frac{2}{3}v^3 - \frac{2}{3}v^2 + \frac{1}{6}v + \frac{1}{6}$$

- Superfície de produto tensorial (ver equação 3.14):

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} \varphi_0^2(u) & \varphi_1^2(u) & \varphi_2^2(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,1} & \mathbf{P}_{0,2} & \mathbf{P}_{0,3} \\ \mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_{1,1} & \mathbf{P}_{1,2} & \mathbf{P}_{1,3} \\ \mathbf{P}_{2,0} & \mathbf{P}_{2,1} & \mathbf{P}_{2,2} & \mathbf{P}_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0^3(v) \\ \varphi_1^3(v) \\ \varphi_2^3(v) \\ \varphi_3^3(v) \end{bmatrix}$$

↓

$$S(u, v) = \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} 0.2u^2v^3 + uv^3 - 0.1u^2v^2 - 0.5uv^2 - 0.2u^2v - uv + 0.1u^2 + 3.5u \\ 3v \\ 0.85 - 0.025u - 0.025uv - 1.85v - 0.925u^2 + 0.7u^2v^2 - 1.1u^2v^3 + 0.1uv^3 + 1.4v^3 + 0.1uv^2 + 1.775u^2v \end{array} \right\}$$

$$u \in \hat{\Omega}_u = [-1, 1] \quad e \quad v \in \hat{\Omega}_v = [-1, 1]$$

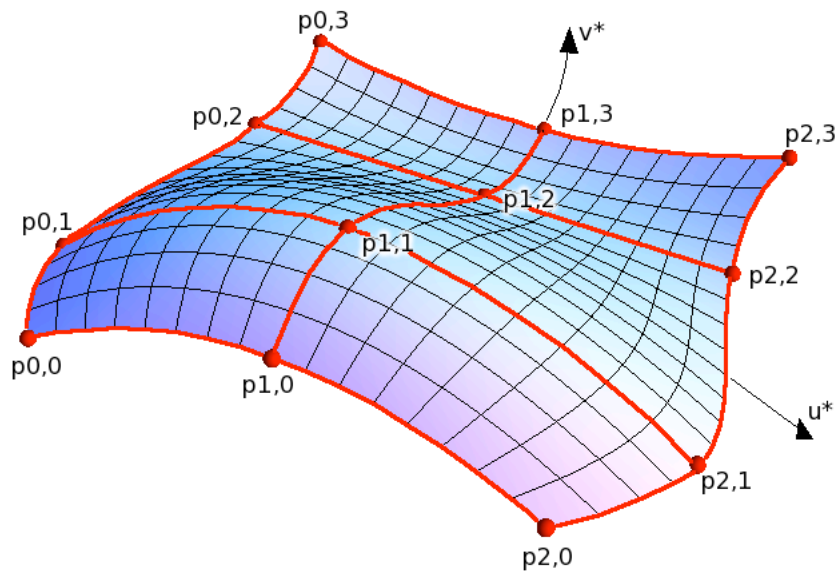


Figura 3.4: Superfície de produto tensorial

### 3.4.1 Bilinearly Blended Coons Patches

Steven Anson Coons lecionou no departamento de engenharia mecânica da universidade MIT<sup>2</sup> em Cambridge e, durante o período em que prestava consultoria à automobilística Ford, desenvolveu um dos mais famosos métodos de representação geométrica, denominado "*Bilinearly Blended Coons Patches*", o qual foi publicado no "*The Little Red Book*" [4], em 1967.

Este método apresenta um diferencial importante em relação à superfície de produto tensorial modelada pelas curvas apresentadas nas seções 3.1, 3.2 e 3.3, pois não utiliza uma rede de pontos em sua construção geométrica (como no exemplo 3.4), mas sim uma rede de curvas arbitrárias que definirão o contorno da superfície quadrilateral. Com esta característica, a geração de uma malha se resume à geração de curvas, uma vez que o processo de preenchimento do espaço entre elas ocorre naturalmente.

Alguns estudos baseados neste mesmo conceito foram realizados por outros autores, dando origem ao termo "interpolação transfinita" (de autoria do matemático *W. J. Gordon* [14]), designado à interpolação que garante conformidade de representação geométrica a um número infinito de pontos no contorno do elemento.

Sua dedução é iniciada pela declaração de quatro curvas arbitrárias  $c_1(u)$ ,  $c_2(u)$ ,  $d_1(v)$  e  $d_2(v)$ ,  $u \in \hat{\Omega}_u = [0, 1]$  e  $v \in \hat{\Omega}_v = [0, 1]$ . A superfície  $S(u, v)$  pretendida deverá atender às seguintes exigências:

$$S(u, 0) = c_1(u) \quad , \quad S(u, 1) = c_2(u) \quad (3.15)$$

$$S(0, v) = d_1(v) \quad , \quad S(1, v) = d_2(v) \quad (3.16)$$

Para isso, primeiramente serão construídas duas superfícies governadas pelas curvas fornecidas:

$$s_c(u, v) = \varphi_{c_1}(v) c_1(u) + \varphi_{c_2}(v) c_2(u) \quad (3.17)$$

$$s_d(u, v) = \varphi_{d_1}(u) d_1(v) + \varphi_{d_2}(u) d_2(v) \quad (3.18)$$

em que  $\varphi_{c_1}(v)$ ,  $\varphi_{c_2}(v)$  e  $\varphi_{d_1}(u)$ ,  $\varphi_{d_2}(u)$  são *blending functions* lineares que misturam as curvas  $c_1(u)$ ,  $c_2(u)$  e  $d_1(v)$ ,  $d_2(v)$  respectivamente:

$$\varphi_{c_1}(v) = (1 - v) \quad , \quad \varphi_{c_2}(v) = v \quad (3.19)$$

$$\varphi_{d_1}(u) = (1 - u) \quad , \quad \varphi_{d_2}(u) = u \quad (3.20)$$

---

<sup>2</sup>MIT - Massachusetts Institute of Technology.

Substituindo (3.19) em (3.17) e (3.20) em (3.18), obtém-se a primeira parte desta dedução:

$$s_c(u, v) = (1 - v) c_1(u) + v c_2(u) \quad (3.21)$$

$$s_d(u, v) = (1 - u) d_1(v) + u d_2(v) \quad (3.22)$$

Através do exemplo 3.5, figura 3.6a, nota-se que  $s_c$  interpola as curvas  $c_1$  e  $c_2$  (contorno vermelho), mas mantém-se linear nas curvas  $d_1$  e  $d_2$  (contorno azul). O oposto ocorre para  $s_d$ , observado na figura 3.6b, que interpola as curvas  $d_1$  e  $d_2$  (contorno vermelho) e mantém-se linear nas curvas  $c_1$  e  $c_2$  (contorno azul). Estes contornos lineares são reproduzidos pelas interpolações dos quatro vértices do quadrilátero através da superfície  $s_{cd}$ :

$$s_{cd}(u, v) = \varphi_{c_1(0)}(u, v) c_1(0) + \varphi_{c_1(1)}(u, v) c_1(1) + \varphi_{c_2(0)}(u, v) c_2(0) + \varphi_{c_2(1)}(u, v) c_2(1) \quad (3.23)$$

em que  $\varphi_{c_1(0)}(u, v)$ ,  $\varphi_{c_1(1)}(u, v)$ ,  $\varphi_{c_2(0)}(u, v)$  e  $\varphi_{c_2(1)}(u, v)$  são *blending functions* bilineares que misturam os vértices  $c_1(0) = d_1(0)$ ,  $c_1(1) = d_2(0)$ ,  $c_2(0) = d_1(1)$  e  $c_2(1) = d_2(1)$  respectivamente, fato que originou o nome deste método. São polinômios obtidos pelo produto tensorial das equações 3.19 e 3.20:

$$\varphi_{c_1(0)}(u, v) = (1 - u)(1 - v) \quad , \quad \varphi_{c_1(1)}(u, v) = u(1 - v) \quad (3.24)$$

$$\varphi_{c_2(0)}(u, v) = (1 - u)v \quad , \quad \varphi_{c_2(1)}(u, v) = uv \quad (3.25)$$

Desta forma, uma superfície do tipo *Bilinearly Blended Coons Patches* é definida como:

$$S(u, v) = s_c(u, v) + s_d(u, v) - s_{cd}(u, v) \quad (3.26)$$

↓

$$S(u, v) = \begin{aligned} & [(1 - \mathbf{v}) c_1(u) + \mathbf{v} c_2(u)] \\ & + \\ & [(1 - \mathbf{u}) d_1(v) + \mathbf{u} d_2(v)] \\ & - \\ & [(1 - \mathbf{u})(1 - \mathbf{v}) c_1(0) + \mathbf{u}(1 - \mathbf{v}) c_1(1) + (1 - \mathbf{u}) \mathbf{v} c_2(0) + \mathbf{u} \mathbf{v} c_2(1)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

**Exemplo 3.5** *Superfície Coons Patches:*

- *Curvas do contorno da superfície:*

$$u \in [0, 1] \begin{cases} c_1(u) = \{15 \text{Cos}(u), 10 \text{Sen}(0.1u), 0.8 \text{Sen}(6u + 2.5)\}^t \\ c_2(u) = \{15 \text{Cos}(u + 0.2), 10 \text{Sen}(0.1u + 1), -0.332917 \text{Sen}(6u + 2.5)\}^t \end{cases}$$

$$v \in [0, 1] \begin{cases} d_1(v) = \{15 \text{Cos}(0.2v), 10 \text{Sen}(v), 0.478778 \text{Cos}(2v)\}^t \\ d_2(v) = \{15 \text{Cos}(0.2v + 1), 10 \text{Sen}(v + 0.1), 2(1 - v)v + 0.63879 \text{Cos}(2v)\}^t \end{cases}$$

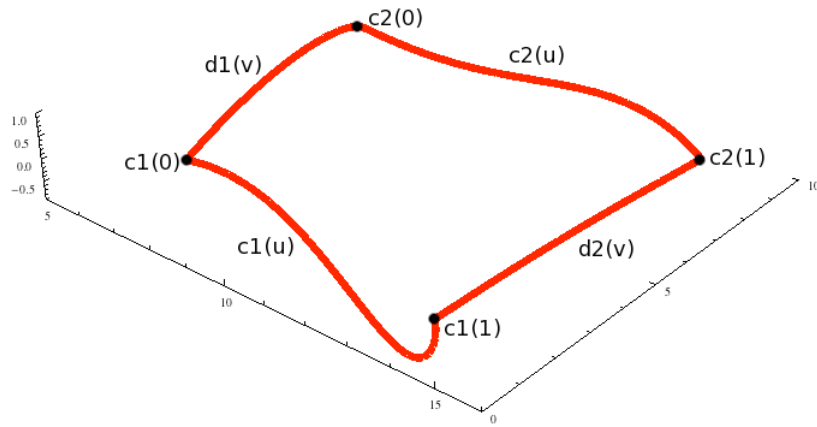


Figura 3.5: Curvas do contorno da superfície

- *Valor das curvas nos vértices da superfície (os quais serão utilizados na equação 3.23):*

$$c_1(0) = d_1(0) = \{15, 0, 0.478778\}^t$$

$$c_1(1) = d_2(0) = \{8.10453, 0.998334, 0.63879\}^t$$

$$c_2(1) = d_2(1) = \{5.43537, 8.91207, -0.26583\}^t$$

$$c_2(0) = d_1(1) = \{14.701, 8.41471, -0.199242\}^t$$

- *Blending functions lineares, equações 3.19 e 3.20:*

$$\begin{aligned}\varphi_{c_1}(v) &= (1-v) \quad , \quad \varphi_{c_2}(v) = v \\ \varphi_{d_1}(u) &= (1-u) \quad , \quad \varphi_{d_2}(u) = u\end{aligned}$$

- *Blending functions bilineares, equações 3.24 e 3.25:*

$$\begin{aligned}\varphi_{c_1(0)}(u,v) &= (1-u)(1-v) \quad , \quad \varphi_{c_1(1)}(u,v) = u(1-v) \\ \varphi_{c_2(0)}(u,v) &= (1-u)v \quad , \quad \varphi_{c_2(1)}(u,v) = uv\end{aligned}$$

- *Superfícies  $s_c(u,v)$ ,  $s_d(u,v)$  e  $s_{cd}(u,v)$ , equações 3.21, 3.22 e 3.23:*

$$s_c(u,v) = \left\{ \begin{array}{l} 15 [(1-v)\text{Cos}(u) + v\text{Cos}(u+0.2)] \\ 10 [v\text{Sen}(0.1u+1) - (v-1)\text{Sen}(0.1u)] \\ (0.8 - 1.1329v)\text{Sen}(6u+2.5) \end{array} \right\}$$

$$s_d(u,v) = \left\{ \begin{array}{l} 15 [u\text{Cos}(0.2v+1) - (u-1)\text{Cos}(0.2v)] \\ 10 [\text{Sen}(v)(1-u) + u\text{Sen}(v+0.1)] \\ 2u(v-v^2) + (0.16u+0.4788)\text{Cos}(2v) \end{array} \right\}$$

$$s_{cd}(u,v) = \left\{ \begin{array}{l} u(-2.37v - 6.896) - 0.3v + 15 \\ u(1 - 0.5v) + 8.41471v \\ u(0.16 - 0.227v) - 0.678v + 0.4788 \end{array} \right\}$$

- *Superfície Bilinearly Blended Coons Patches, equação 3.26:*

$$S(u,v) = s_c(u,v) + s_d(u,v) - s_{cd}(u,v)$$

↓

$$S(u,v) = \left\{ \begin{array}{l} 2.37vu + 15\text{Cos}(0.2v+1)u + 6.896u + 0.3v + 15(1-v)\text{Cos}(u) + 15v\text{Cos}(u+0.2) + 15\text{Cos}(0.2v)(1-u) - 15 \\ 0.5vu - 10\text{Sen}(v)u + 10\text{Sen}(v+0.1)(u+1) - u - 8.415v + 10v\text{Sen}(0.1u+1) + 10(1-v)\text{Sen}(0.1u) \\ 2.227uv + 0.678v - 0.16u + (0.16u + 0.4788)\text{Cos}(2v) + (0.8 - 1.133v)\text{Sen}(6u+2.5) - 0.4788 - 2uv^2 \end{array} \right\}$$

$$u \in \hat{\Omega}_u = [0, 1] \quad e \quad v \in \hat{\Omega}_v = [0, 1]$$

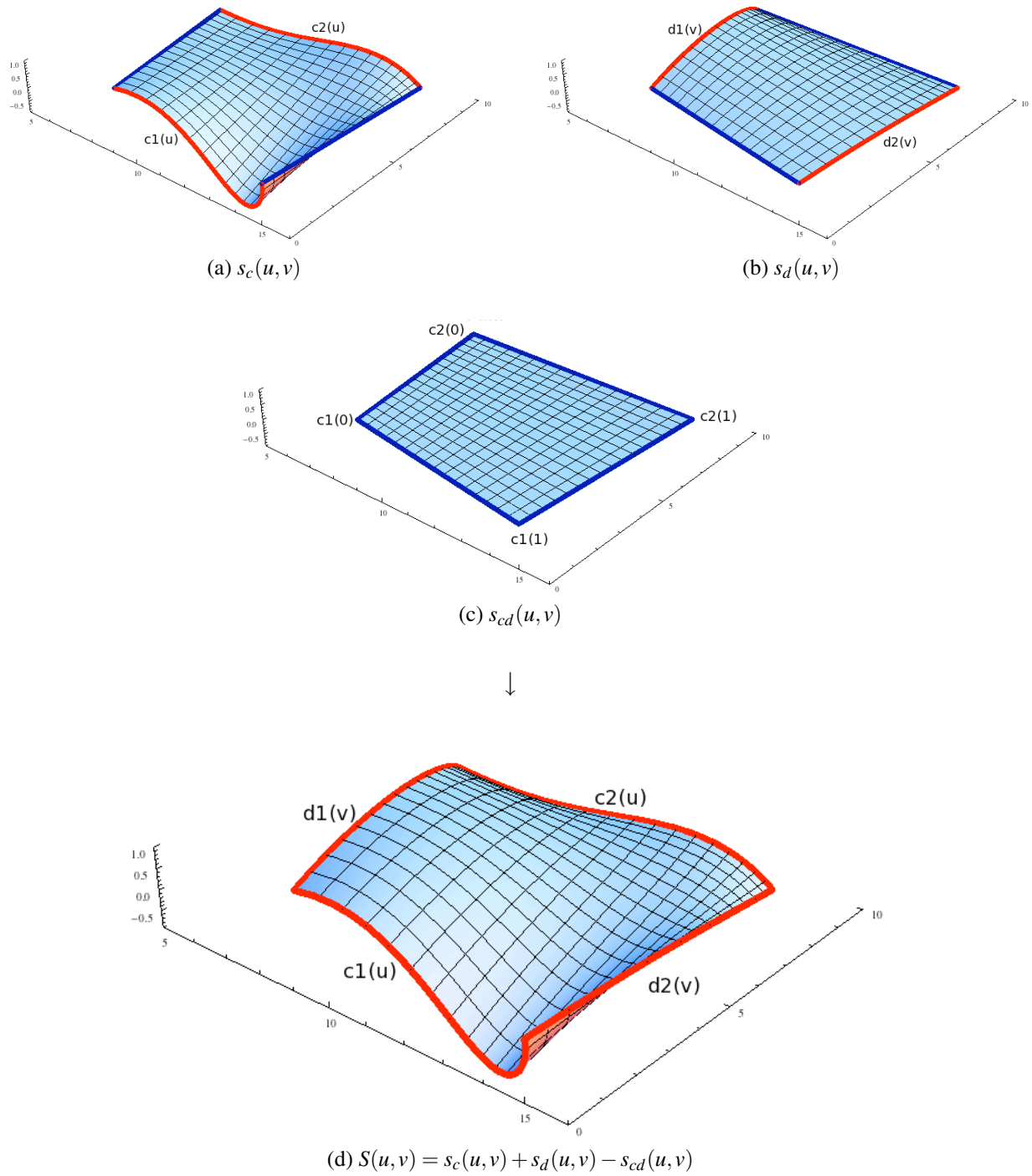


Figura 3.6: Superfície *Bilinearly Coons Patches*

# Capítulo 4

## Metodologia

Neste capítulo serão apresentados os conceitos e definições que permitirão a generalização do método de representação geométrica por interpolação transfinita. Sua metodologia baseou-se na observação da essência matemática envolvida no método de *Coons* (seção 3.4.1), aliada à possibilidade de implementação computacional por meio de um algoritmo único, consistente e robusto. Sua descrição será dividida em três seções:

1. Topologias e Transformações;
2. Blending Functions e;
3. Contribuições dos Lados.

A primeira seção consiste na padronização topológica dos domínios de referência dos elementos que utilizarão este tipo de modelagem geométrica. Esta padronização prevê o particionamento do elemento em lados, aos quais serão associadas funções geométricas de contorno através de seus respectivos domínios de referência. Por consequência, será necessário definir transformações de um ponto do domínio de referência do elemento para os domínios de referência de seus lados.

A segunda seção estabelece uma analogia às funções 3.19 e 3.20 do método de *Coons* que misturam duas arestas opostas do quadrilátero através de *blending functions* específicas. Será apresentada uma sistemática que permite generalizar a obtenção da *blending function* que estenderá um lado de qualquer elemento para seu interior.

A terceira seção refere-se à contribuição que cada lado do elemento dará na modelagem geométrica do elemento. Em analogia ao método de *Coons*, as contribuições das arestas do quadrilátero resultam na superfície  $S_c(u, v) + S_d(u, v)$ , implicando em dupla contribuição em suas intersecções, ou seja, nos vértices. A padronização topológica da primeira seção, juntamente com as *blending functions* da segunda seção, permitirão subtrair as contribuições destes vértices. Este artifício corresponde, ainda em analogia ao método de *Coons*, à subtração da superfície  $S_{cd}(u, v)$ .



## 4.1 Topologias e Transformações

Um fato notável verificado no método de *Coons* é a simplicidade com que se associam curvas ao contorno do elemento quadrilateral uma vez que apresenta variáveis de parametrização de intervalos entre 0 e 1, tanto para  $u$  quanto para  $v$ , as quais são utilizadas pelo quadrilátero e seu contorno, ou seja, pelas curvas  $c_1(u)$ ,  $c_2(u)$ ,  $d_1(v)$  e  $d_2(v)$ , conforme equação 3.27. Elementos como o triângulo, tetraedro, prisma, pirâmide e hexaedro apresentam contornos de domínios variados (arestas e faces triangulares ou quadrilaterais), aumentando a complexidade de adaptação deste método.

Por esta razão, a topologia utilizada neste trabalho considera que o domínio de referência de um elemento ( $\hat{\Omega}$ ) é o resultado da união de uma quantidade  $Q$  de subdomínios de identificação  $j$  denominados lados ou partições ( $\Omega_j$ ), podendo ser nós, arestas, faces e volume.

$$\Omega_j \subset \hat{\Omega} \quad ; \quad \hat{\Omega} = \bigcup_{j=0}^{Q-1} \Omega_j \quad (4.1)$$

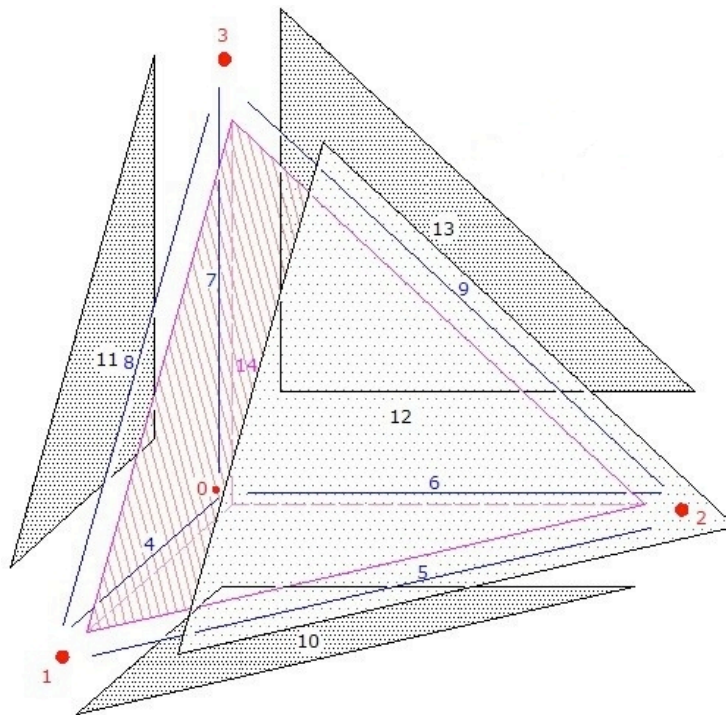


Figura 4.1: Elemento particionado em lados  
(Tetraedro = 4 nós + 6 arestas + 4 faces + 1 volume)

Com o objetivo de manter a simplicidade de associação de funções ao contorno dos elementos, será definido que estes lados serão modelados a partir de funções associadas aos seus respectivos domínios de referência ( $\hat{\Omega}_j$ ). Sendo assim, será necessário estabelecer a correspondência de um ponto  $\xi$ , pertencente a  $\hat{\Omega}$ , para os domínios  $\hat{\Omega}_j$  através de uma transformação  $T_j(\xi)$ .

$$T_j(\xi) : \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}_j \quad (4.2)$$

Será utilizado o símbolo  $\xi$  em **negrito** para designar a(s) coordenada(s) de um ponto conforme sua dimensão, ou seja, um ponto em um elemento:

- unidimensional:  $(\xi) = (\xi)$ ;
- bidimensional:  $(\xi) = (\xi, \eta)$ ;
- tridimensional:  $(\xi) = (\xi, \eta, \zeta)$ .

A transformação  $T_j(\xi)$  é composta por duas etapas: a *projeção* do ponto  $\xi$  para o domínio  $\Omega_j$ , seguido da *parametrização* para o respectivo domínio de referência  $\hat{\Omega}_j$ .

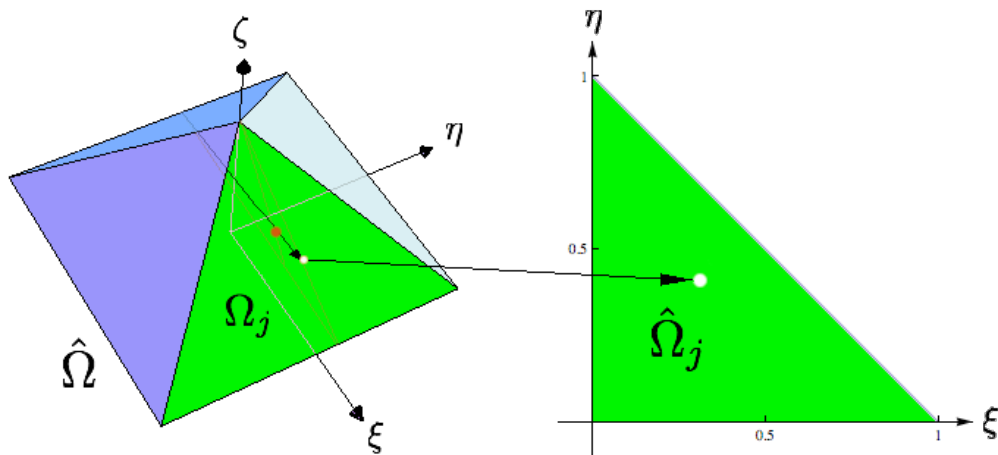


Figura 4.2: Transformação  $T_j(\xi) : \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}_j$

As topologias de alguns elementos e as transformações para o domínio de referência de seus lados são detalhadas a seguir.

### 4.1.1 Topologias

Serão apresentadas topologias que seguem o padrão estabelecido pela definição 4.1, referentes aos elementos mais utilizadas nos métodos de discretização (figura 4.3). Tanto  $\hat{\Omega}$  quanto  $\hat{\Omega}_j$  serão descritos pelos domínios definidos na tabela 4.1, implicando no fato que um lado também será composto por partições (ver tabela 4.3 e exemplo 4.1).

Os lados  $\Omega_j$  são classificados conforme suas dimensões (tabela 4.2) e identificados pelo índice  $j$ , iniciando pelos lados adimensionais, finalizando no lado de maior dimensão (tabela 4.3).

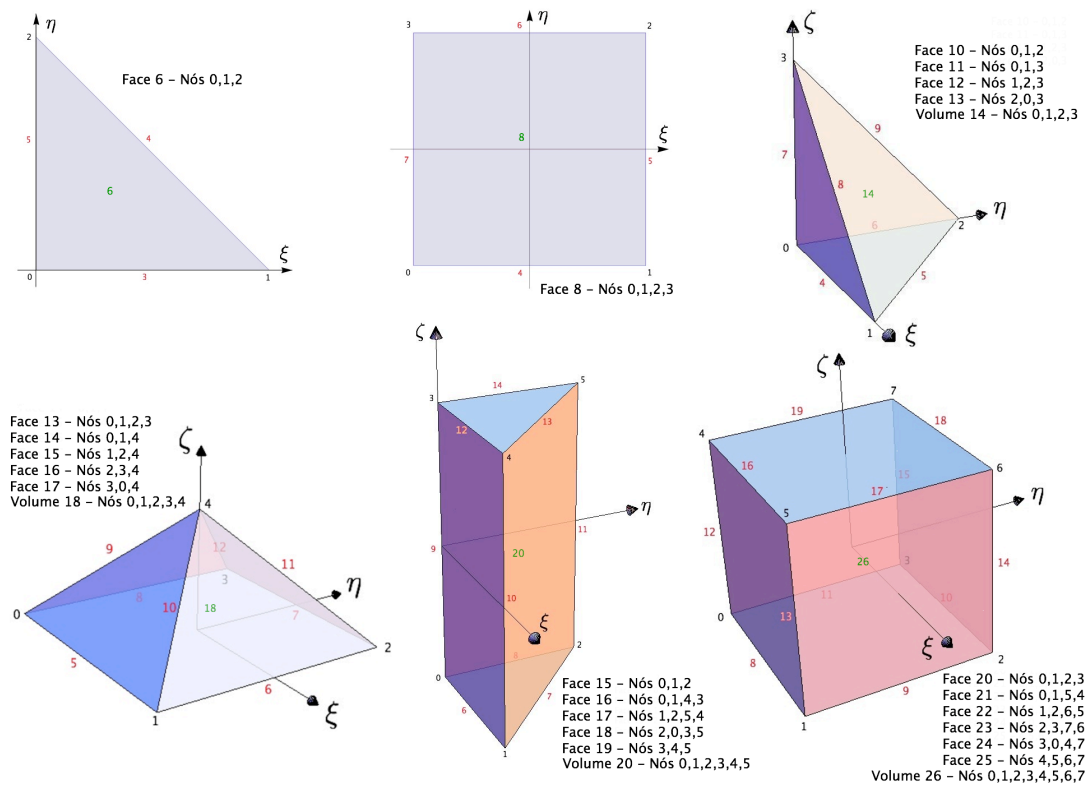


Figura 4.3: Elementos mais utilizados nos métodos de discretização (triângulo, quadrilátero, tetraedro, pirâmide, prisma triangular, hexaedro)

Tabela 4.1: Domínios de referência -  $\hat{\Omega}$  ou  $\hat{\Omega}_j$

Elemento	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
Linha	$[-1, 1]$	-	
Triângulo	$[0, 1]$	$[0, 1 - \xi]$	
Quadrilátero	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	
Tetraedro	$[0, 1]$	$[0, 1 - \xi]$	$[0, 1 - \xi - \eta]$
Pirâmide	$[\zeta - 1, 1 - \zeta]$	$[\zeta - 1, 1 - \zeta]$	$[0, 1]$
Prisma	$[0, 1]$	$[0, 1 - \xi]$	$[-1, 1]$
Hexaedro	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$

Tabela 4.2: Classificação dos lados

Dimensão:	Adimensional	Unidimensional	Bidimensional	Tridimensional
Nomenclatura:	Nó	Aresta	Face	Volume

Tabela 4.3: Identificações dos lados  $\Omega_j$  e suas partições

Elemento	Lado		Partições			Elemento	Lado		Partições			Elemento	Lado		Partições				
	j	Nós	Arestas	Faces	Volume		j	Nós	Arestas	Faces	Volume		j	Nós	Arestas	Faces	Volume		
Linha	0	0				Prisma	0	0				Hexaedro	0	0					
	1	1					1	1					1	1					
	2	0-1	2				2	2					2	2					
Triângulo	0	0					3	3					3	3					
	1	1					4	4					4	4					
	2	2					5	5					5	5					
	3	0-1	3				6	0-1	6				6	0-1-2	6-7-8	15			
	4	1-2	4				7	1-2	7				7	1-2-3	6-10-12-9	16			
	5	2-0	5				8	2-0	8				8	1-2-5-4	7-11-13-10	17			
6	0-1-2	3-4-5	6		9		0-3	9			9		2-0-3-5	8-9-14-11	18				
Quadrilátero	0	0					10	1-4	10				10	3-4-5	12-13-14	19			
	1	1					11	2-5	11				11	0-1-2-3-4-5	6-7-8-9-10-11-12-13-14	15-16-17-18-19	20		
	2	2					12	3-4	12				12	0-1-4-3	6-10-12-9	16			
	3	3					13	4-5	13				13	1-2-5-4	7-11-13-10	17			
	4	0-1	4				14	5-3	14				14	2-0-3-5	8-9-14-11	18			
	5	1-2	5				15	0-1-2	6-7-8	15			15	3-4-5	12-13-14	19			
	6	2-3	6				16	0-1-4-3	6-10-12-9	16			16	0-1-2-3-4-5	6-7-8-9-10-11-12-13-14	15-16-17-18-19	20		
	7	3-0	7				17	1-2-5-4	7-11-13-10	17			17	0-1-4-3	6-10-12-9	16			
8	0-1-2-3	4-5-6-7	8		18		2-0-3-5	8-9-14-11	18		18		1-2-5-4	7-11-13-10	17				
Tetraedro	0	0					19	3-4-5	12-13-14	19			19	2-0-3-5	8-9-14-11	18			
	1	1				20	0-1-2-3-4-5	6-7-8-9-10-11-12-13-14	15-16-17-18-19	20	20		0-1-2-3-4-5	6-7-8-9-10-11-12-13-14	15-16-17-18-19	20			
	2	2				0	0				0		0						
	3	3				1	1				1		1						
	4	0-1	4			2	2				2		2						
	5	1-2	5			3	3				3		3						
	6	2-0	6			4	4				4		4						
	7	0-3	7			5	5				5	5							
	8	1-3	8			6	6				6	6							
	9	2-3	9			7	7				7	7							
	10	0-1-2	4-5-6	10		8	0-1	8			8	0-1	8						
	11	0-1-3	4-8-7	11		9	1-2	9			9	1-2	9						
	12	1-2-3	5-9-8	12		10	2-3	10			10	2-3	10						
	13	2-0-3	6-7-9	13		11	3-0	11			11	3-0	11						
14	0-1-2-3	4-5-6-7-8-9	10-11-12-13	14	12	0-4	12			12	0-4	12							
Pirâmide	0	0				13	1-5	13			13	1-5	13						
	1	1				14	2-6	14			14	2-6	14						
	2	2				15	3-7	15			15	3-7	15						
	3	3				16	4-5	16			16	4-5	16						
	4	4				17	5-6	17			17	5-6	17						
	5	0-1	5			18	6-7	18			18	6-7	18						
	6	1-2	6			19	7-4	19			19	7-4	19						
	7	2-3	7			20	0-1-2-3	8-9-10-11	20		20	0-1-2-3	8-9-10-11	20					
	8	3-0	8			21	0-1-5-4	8-13-16-12	21		21	0-1-5-4	8-13-16-12	21					
	9	0-4	9			22	1-2-6-5	9-14-17-13	22		22	1-2-6-5	9-14-17-13	22					
	10	1-4	10			23	2-3-7-6	10-15-18-14	23		23	2-3-7-6	10-15-18-14	23					
	11	2-4	11			24	3-0-4-7	11-12-19-15	24		24	3-0-4-7	11-12-19-15	24					
	12	3-4	12			25	4-5-6-7	16-17-18-19	25		25	4-5-6-7	16-17-18-19	25					
	13	0-1-2-3	5-6-7-8	13		26	0-1-2-3-4-5-6-7	8-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19	20-21-22-23-24-25	26	26	0-1-2-3-4-5-6-7	8-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19	20-21-22-23-24-25	26				
	14	0-1-4	5-10-9	14															
	15	1-2-4	6-11-10	15															
	16	2-3-4	7-12-11	16															
	17	3-0-4	8-9-12	17															
18	0-1-2-3-4	5-6-7-8-9-10-11-12	13-14-15-16-17	18															

A seqüência das identificações dos lados apresentados na tabela 4.3 definem suas orientações topológicas

Tabela 4.4: Quantidade de lados -  $Q$

Elemento	$Q_0$ (nós)	$Q_1$ (arestas)	$Q_2$ (faces)	$Q_3$ (volume)	$Q = \sum_{dim=0}^3 Q_{dim}$
Linha	2	1	0	0	3
Triângulo	3	3	1	0	7
Quadrilátero	4	4	1	0	9
Tetraedro	4	6	4	1	15
Pirâmide	5	8	5	1	19
Prisma	6	9	5	1	21
Hexaedro	8	12	6	1	27

**Exemplo 4.1** Topologia do tetraedro:

(ilustrado na figura 4.1 e 4.3).

- O tetraedro, conforme tabela 4.3, é composto pelos lados: nós  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$  e  $\Omega_3$ ; arestas  $\Omega_4, \Omega_5, \Omega_6, \Omega_7, \Omega_8$  e  $\Omega_9$ ; faces  $\Omega_{10}, \Omega_{11}, \Omega_{12}$  e  $\Omega_{13}$  e volume  $\Omega_{14}$ ;
- O lado  $\Omega_{12}$  do tetraedro é uma face triangular, composta pelos lados:

$$\left\{ \underbrace{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3}_{\text{nós}}, \underbrace{\Omega_5, \Omega_9, \Omega_8}_{\text{arestas}}, \underbrace{\Omega_{12}}_{\text{face}} \right\} \quad (4.3)$$

Seu domínio de referência  $\hat{\Omega}_{12}$  é definido no intervalo  $\xi[0, 1]$  e  $\eta[0, 1 - \xi]$ , de topologia idêntica ao elemento triangular da tabela 4.1.

- O lado  $\Omega_{13}$  também é uma face triangular, composta pelos lados:

$$\left\{ \underbrace{\Omega_2, \Omega_0, \Omega_3}_{\text{nós}}, \underbrace{\Omega_6, \Omega_7, \Omega_9}_{\text{arestas}}, \underbrace{\Omega_{13}}_{\text{face}} \right\} \quad (4.4)$$

Seu domínio de referência  $\hat{\Omega}_{13}$  também é idêntico ao domínio do elemento triangular de topologia definida na tabela 4.1.

- Pelo fato dos lados também serem compostos por partições, observa-se neste exemplo que os lados  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  (nós) e o lado  $\Omega_9$  (aresta) são compartilhados pelo tetraedro e pelos seus lados  $\Omega_{12}$  e  $\Omega_{13}$ , ou seja:

$$\hat{\Omega} \cap \Omega_{12} \cap \Omega_{13} = \{\Omega_2, \Omega_3, \Omega_9\} \quad (4.5)$$

### 4.1.2 Transformações

Serão apresentadas as transformações  $T_j : \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}_j$  de cada elemento, as quais foram obtidas através da *projeção* de um ponto  $\xi \in \hat{\Omega}$  para o domínio  $\Omega_j \subset \hat{\Omega}$ , seguido da *parametrização* para o respectivo domínio de referência  $\hat{\Omega}_j$ .

$$\xi \in \hat{\Omega} \quad ; \quad \xi_j \in \hat{\Omega}_j \quad (4.6)$$

$$\xi_j = \xi_j(\xi) = T_j(\xi) \quad (4.7)$$

Suas deduções matemáticas foram suprimidas por não apresentarem nenhuma relevância na compreensão deste trabalho.

#### 4.1.2.1 Triângulo

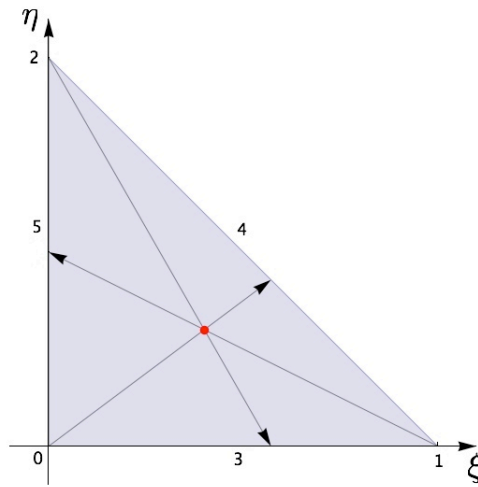


Figura 4.4: Projeções para os lados  $\Omega_j$  (arestas) do triângulo

Tabela 4.5: Transformações para os domínios  $\hat{\Omega}_j$  do triângulo

$j$	$\xi_j = T_j(\xi, \eta)$
3	$\left\{ \frac{2\xi}{1-\eta} - 1 \right\}$
4	$\left\{ 1 - \frac{2\xi}{\xi+\eta} \right\}$
5	$\left\{ 1 - \frac{2\eta}{1-\xi} \right\}$

4.1.2.2 Quadrilátero

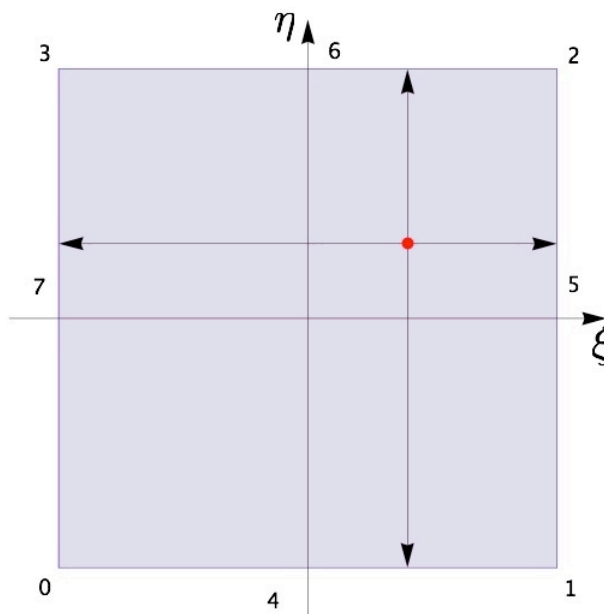


Figura 4.5: Projeções para os lados  $\Omega_j$  (arestas) do quadrilátero

Tabela 4.6: Transformações para os domínios  $\hat{\Omega}_j$  do quadrilátero

$j$	$\hat{\xi}_j = T_j(\xi, \eta)$
4	$\{\xi\}$
5	$\{\eta\}$
6	$\{-\xi\}$
7	$\{-\eta\}$

4.1.2.3 Tetraedro

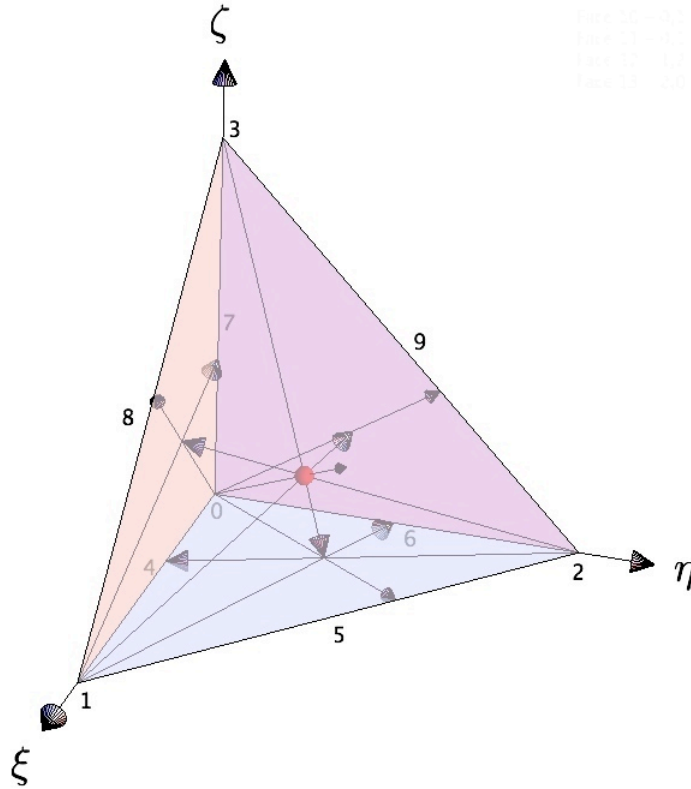


Figura 4.6: Projeções para os lados  $\Omega_j$  (arestas e faces) do tetraedro

Tabela 4.7: Transformações para os domínios  $\hat{\Omega}_j$  do tetraedro

$j$	$\xi_j = T_j(\xi, \eta, \zeta)$	$j$	$\xi_j = T_j(\xi, \eta, \zeta)$
4	$\left\{ \frac{1-2\xi-\eta-\zeta}{\eta+\zeta-1} \right\}$	9	$\left\{ \frac{\zeta-\eta}{\zeta+\eta} \right\}$
5	$\left\{ \frac{\eta-\xi}{\eta+\xi} \right\}$	10	$\left\{ \frac{\xi}{1-\zeta}, \frac{\eta}{1-\zeta} \right\}^t$
6	$\left\{ \frac{\xi+2\eta+\zeta-1}{\xi+\zeta-1} \right\}$	11	$\left\{ \frac{\xi}{1-\eta}, \frac{\zeta}{1-\eta} \right\}^t$
7	$\left\{ \frac{1-\xi-\eta-2\zeta}{\xi+\eta-1} \right\}$	12	$\left\{ \frac{\eta}{\xi+\eta+\zeta}, \frac{\zeta}{\xi+\eta+\zeta} \right\}^t$
8	$\left\{ \frac{\zeta-\xi}{\zeta+\xi} \right\}$	13	$\left\{ \frac{1-\xi-\eta-\zeta}{1-\xi}, \frac{\zeta}{1-\xi} \right\}^t$



4.1.2.4 Pirâmide

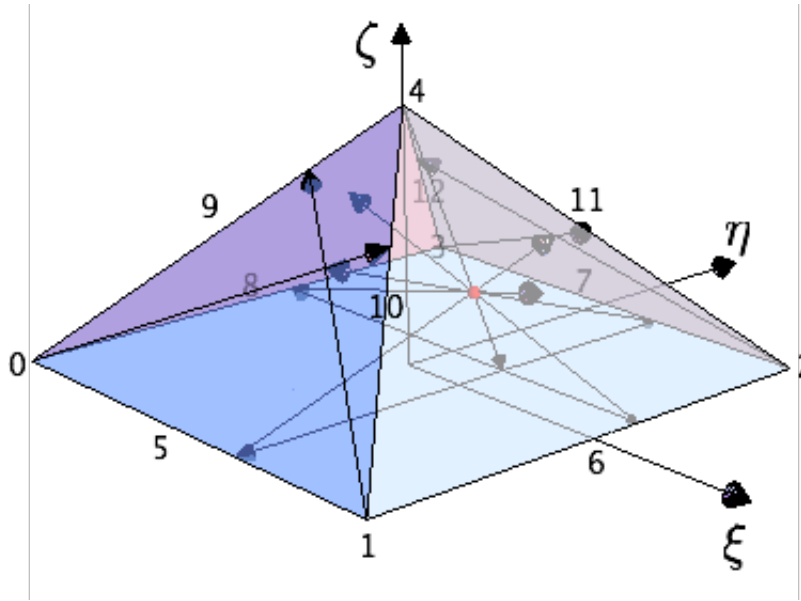


Figura 4.7: Projeções para os lados  $\Omega_j$  (arestas e faces) da pirâmide

Tabela 4.8: Transformações para os domínios  $\hat{\Omega}_j$  da pirâmide

$j$	$\xi_j = T_j(\xi, \eta, \zeta)$	$j$	$\xi_j = T_j(\xi, \eta, \zeta)$
5	$\left\{ \frac{\xi}{1-\zeta} \right\}$	11	$\left\{ \frac{8(\zeta-1)\zeta}{\eta(\zeta-\xi-1)+(\zeta-1)(\xi+3\zeta+1)} - 1 \right\}$
6	$\left\{ \frac{\eta}{1-\zeta} \right\}$	12	$\left\{ \frac{(\zeta-1)(\xi+5\zeta-1)-\eta(\xi+\zeta-1)}{\eta(\xi+\zeta-1)-(\xi-3\zeta-1)(\zeta-1)} \right\}$
7	$\left\{ \frac{\xi}{\zeta-1} \right\}$	13	$\left\{ \frac{\xi}{1-\zeta}, \frac{\eta}{1-\zeta} \right\}^t$
8	$\left\{ \frac{\eta}{\zeta-1} \right\}$	14	$\left\{ \frac{(\eta+\zeta-1)(\zeta-\xi-1)}{2(\eta-\zeta-1)(\zeta-1)}, \frac{2\zeta}{\zeta-\eta+1} \right\}^t$
9	$\left\{ \frac{\eta(\xi+\zeta-1)+(\zeta-1)(\xi+5\zeta-1)}{(\xi-3\zeta-1)(\zeta-1)+\eta(\xi+\zeta-1)} \right\}$	15	$\left\{ \frac{(\eta-\zeta+1)(\zeta-\xi-1)}{2(\zeta-1)(\zeta+\xi+1)}, \frac{2\zeta}{\xi+\zeta+1} \right\}^t$
10	$\left\{ \frac{\eta(\zeta-\xi-1)-(\xi-5\zeta+1)(\zeta-1)}{\eta(\xi-\zeta+1)+(\zeta-1)(\xi+3\zeta+1)} \right\}$	16	$\left\{ \frac{(\eta-\zeta+1)(\xi+\zeta-1)}{2(\zeta-1)(\eta+\zeta+1)}, \frac{2\zeta}{\eta+\zeta+1} \right\}^t$
		17	$\left\{ \frac{(\eta+\zeta-1)(\xi+\zeta-1)}{2(\xi-\zeta-1)(\zeta-1)}, \frac{2\zeta}{\zeta-\xi+1} \right\}^t$

4.1.2.5 Prisma Triangular

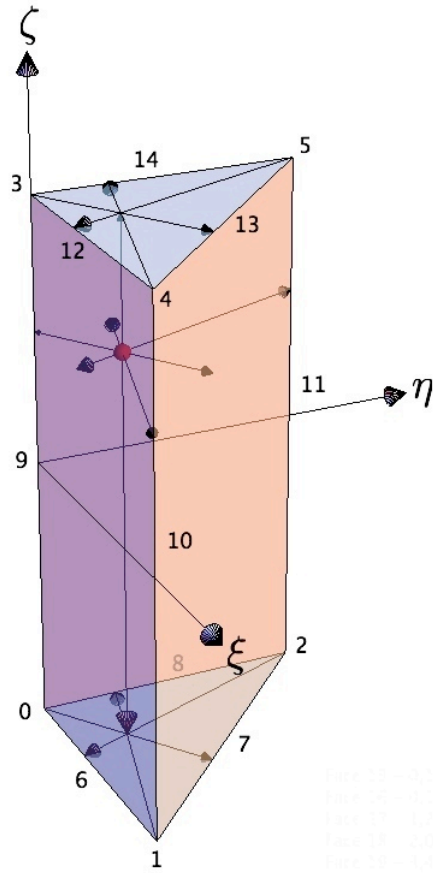


Figura 4.8: Projeções para os lados  $\Omega_j$  (arestas e faces) do prisma triangular

Tabela 4.9: Transformações para os domínios  $\hat{\Omega}_j$  do prisma triangular

$j$	$\xi_j = T_j(\xi, \eta, \zeta)$	$j$	$\xi_j = T_j(\xi, \eta, \zeta)^t$
6	$\left\{ \frac{2\xi}{1-\eta} - 1 \right\}$	13	$\left\{ 1 - \frac{2\xi}{\xi+\eta} \right\}$
7	$\left\{ 1 - \frac{2\xi}{\xi+\eta} \right\}$	14	$\left\{ 1 - \frac{2\eta}{1-\xi} \right\}$
8	$\left\{ 1 - \frac{2\eta}{1-\xi} \right\}$	15	$\{\xi, \eta\}^t$
9	$\{\zeta\}$	16	$\left\{ \frac{2\xi}{1-\eta} - 1, \zeta \right\}^t$
10	$\{\zeta\}$	17	$\left\{ 1 - \frac{2\xi}{\xi+\eta}, \zeta \right\}^t$
11	$\{\zeta\}$	18	$\left\{ 1 - \frac{2\eta}{1-\xi}, \zeta \right\}^t$
12	$\left\{ \frac{2\xi}{1-\eta} - 1 \right\}$	19	$\{\xi, \eta\}^t$

4.1.2.6 Hexaedro

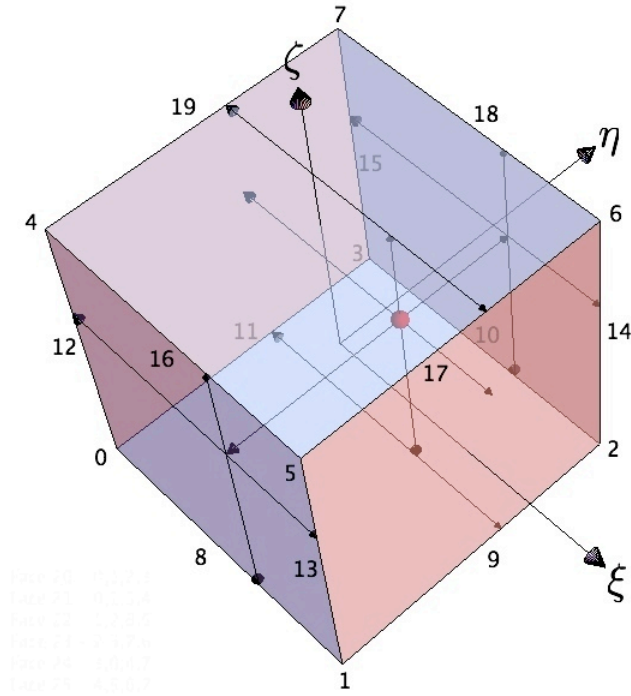


Figura 4.9: Projeções para os lados  $\Omega_j$  (arestas e faces) do hexaedro

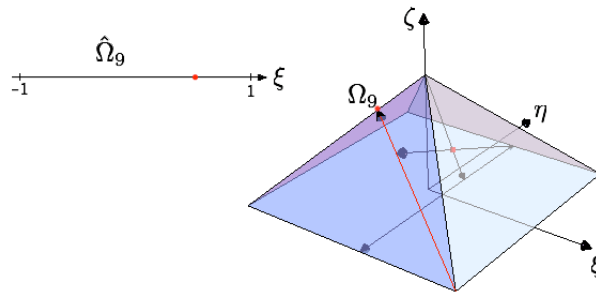
Tabela 4.10: Transformações para os domínios  $\hat{\Omega}_j$  do hexaedro

$j$	$\xi_j = T_j(\xi, \eta, \zeta)$	$j$	$\xi_j = T_j(\xi, \eta, \zeta)$
8	$\{\xi\}$	17	$\{\eta\}$
9	$\{\eta\}$	18	$\{-\xi\}$
10	$\{-\xi\}$	19	$\{-\eta\}$
11	$\{-\eta\}$	20	$\{\xi, \eta\}^t$
12	$\{\zeta\}$	21	$\{\xi, \zeta\}^t$
13	$\{\zeta\}$	22	$\{\eta, \zeta\}^t$
14	$\{\zeta\}$	23	$\{-\xi, \zeta\}^t$
15	$\{\zeta\}$	24	$\{-\eta, \zeta\}^t$
16	$\{\xi\}$	25	$\{\xi, \eta\}^t$

**Exemplo 4.2** Transformações para os lados da pirâmide:

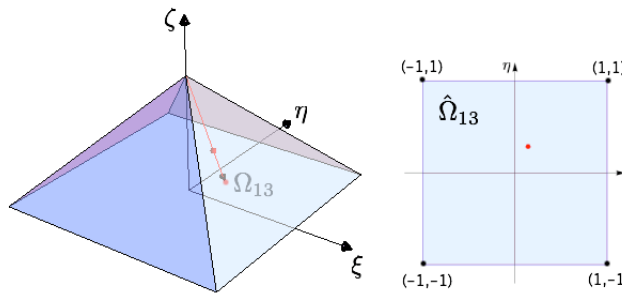
- Ponto considerado:  $\{0.1, 0.2, 0.3\}^t \in \hat{\Omega}$  (pirâmide)
- Transformação para o domínio de referência  $\hat{\Omega}_9$  (aresta):

$$\{\xi\}_9 = T_9(0.1, 0.2, 0.3) = \left\{ -\frac{0.2(0.1+0.3-1) + (0.3-1)(0.1+50.3-1)}{(0.1-30.3-1)(0.3-1) + 0.2(0.1+0.3-1)} \right\} = \{0.474\}$$



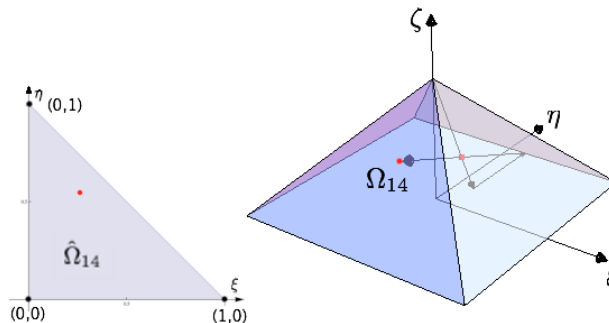
- Transformação para o domínio de referência  $\hat{\Omega}_{13}$  (face quadrilateral):

$$\{\xi, \eta\}_{13} = T_{13}(0.1, 0.2, 0.3) = \left\{ \frac{0.1}{0.7}, \frac{0.2}{0.7} \right\}^t = \left\{ \begin{array}{l} 0.143 \\ 0.286 \end{array} \right\}$$



- Transformação para o domínio de referência  $\hat{\Omega}_{14}$  (face triangular):

$$\{\xi, \eta\}_{14} = T_{14}(0.1, 0.2, 0.3) = \left\{ \frac{(0.2+0.3-1)(0.3-0.1-1)}{2(0.2-0.3-1)(0.3-1)}, \frac{2 \cdot 0.3}{0.3-0.2+1} \right\}^t = \left\{ \begin{array}{l} 0.260 \\ 0.546 \end{array} \right\}$$



## 4.2 Blending Functions

De acordo com a seção 4.1, a modelagem geométrica por interpolação transfinita dar-se-á pela associação de funções aos domínios de referência dos lados do elemento. As *blending functions* ( $\phi_j(\xi)$ ) serão responsáveis pela extensão destes lados para o interior do elemento de forma contínua e suave, análoga ao método de *Coons*, equações 3.19 e 3.20.

Para a obtenção destas *blending functions*, serão primeiramente definidas *blending functions* lineares associadas aos nós do elemento ( $\phi_i(\xi)$ ), as quais deverão atender à seguinte imposição:

$$\phi_i(\mathbf{n}_k) = \delta_{ik} \quad (4.8)$$

sendo:

- $\phi_i(\xi)$  a *blending functions* associada ao nó  $i$ ;
- $\mathbf{n}_k$  a coordenada do nó  $k$  determinada pela topologia do domínio  $\hat{\Omega}$ ;
- $\delta_{ik}$  o delta de *Kronecker*, ou seja:  $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}$

Para os elementos da tabela 4.1, foram definidas as seguintes *blending functions* dos nós:

Tabela 4.11: *Blending function* associada ao nó  $i$

Elemento	$\phi_i(\xi)$	
<b>Linha</b>	$\phi_0(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$	$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$
<b>Triângulo</b>	$\phi_0(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$ $\phi_2(\xi, \eta) = \eta$	$\phi_1(\xi, \eta) = \xi$
<b>Quadrilátero</b>	$\phi_0(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$ $\phi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$\phi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$ $\phi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$
<b>Tetraedro</b>	$\phi_0(\xi, \eta, \zeta) = 1 - \xi - \eta - \zeta$ $\phi_2(\xi, \eta, \zeta) = \eta$	$\phi_1(\xi, \eta, \zeta) = \xi$ $\phi_3(\xi, \eta, \zeta) = \zeta$
<b>Pirâmide</b>	$\phi_0(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} \frac{(1-\xi-\zeta)(1-\eta-\zeta)}{(1-\zeta)}$ $\phi_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} \frac{(1+\xi-\zeta)(1+\eta-\zeta)}{(1-\zeta)}$ $\phi_4(\xi, \eta, \zeta) = \zeta$	$\phi_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} \frac{(1+\xi-\zeta)(1-\eta-\zeta)}{(1-\zeta)}$ $\phi_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4} \frac{(1-\xi-\zeta)(1+\eta-\zeta)}{(1-\zeta)}$
<b>Prisma</b>	$\phi_0(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1-\xi-\eta)(1-\zeta)$ $\phi_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}\eta(1-\zeta)$ $\phi_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}\xi(1+\zeta)$	$\phi_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}\xi(1-\zeta)$ $\phi_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1-\xi-\eta)(1+\zeta)$ $\phi_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}\eta(1+\zeta)$
<b>Hexaedro</b>	$\phi_0(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$ $\phi_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$ $\phi_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$ $\phi_6(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$	$\phi_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$ $\phi_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$ $\phi_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$ $\phi_7(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$

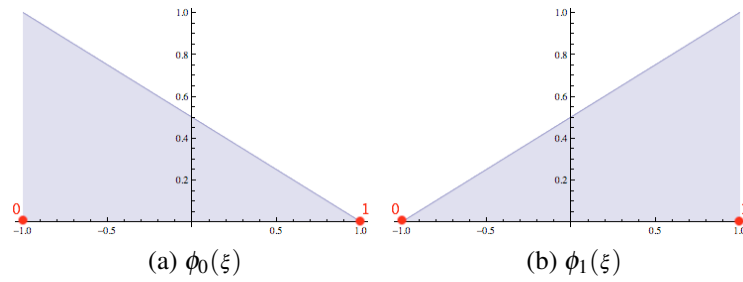


Figura 4.10: *Blending functions* associadas aos nós do elemento linha

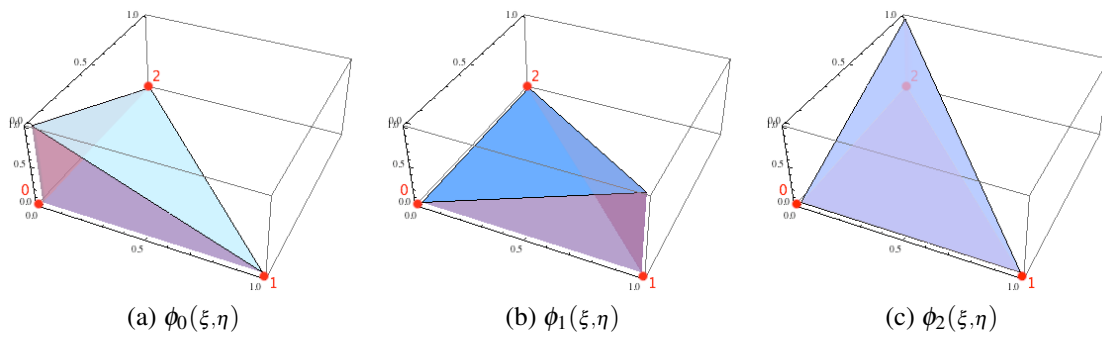


Figura 4.11: *Blending functions* associadas aos nós do elemento triângulo

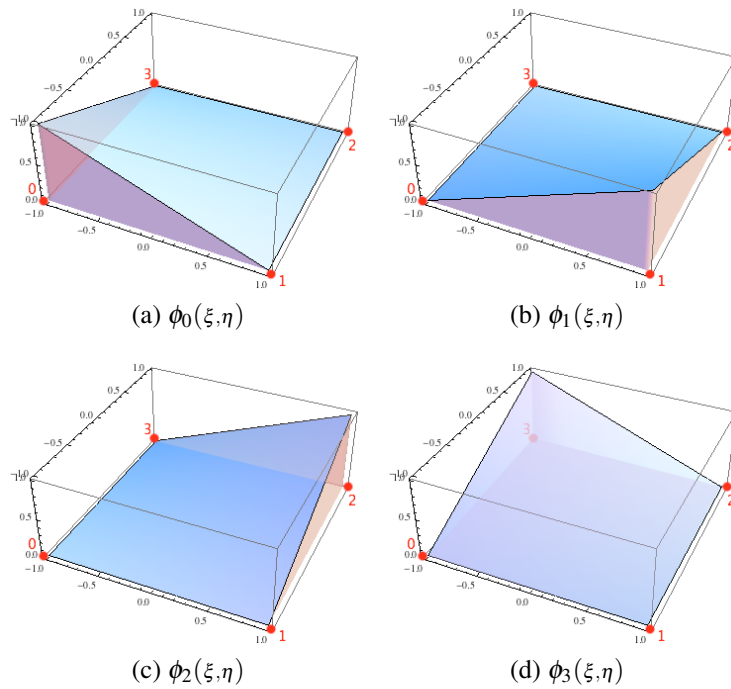


Figura 4.12: *Blending functions* associadas aos nós do elemento quadrilátero

Será definido também um conjunto  $\mathfrak{K}_j$ , cujos elementos correspondem aos índices dos nós que compõem o respectivo lado  $\Omega_j$ , os quais encontram-se disponíveis na coluna "Nós" da tabela 4.3. Pelo fato das  $\phi_i(\xi)$  serem lineares, pode-se facilmente verificar que a somatória das *blending functions* dos nós pertencentes ao conjunto  $\mathfrak{K}_j$  resultam na *blending function* que estenderá o lado  $\Omega_j$  para o interior do domínio do elemento  $\hat{\Omega}$ , ou seja:

$$\varphi_j(\xi) = \sum_{s=1}^{|\mathfrak{K}_j|} \phi_{\mathfrak{K}_j[s]}(\xi) \quad (4.9)$$

**Exemplo 4.3** *Blending functions dos lados do elemento triângulo:*

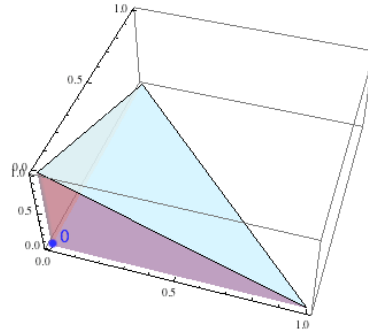
- Lado  $\Omega_0$  (nó):

$$\mathfrak{K}_0 = \{0\} \therefore |\mathfrak{K}_0| = 1$$

$$\varphi_0(\xi, \eta) = \sum_{s=1}^1 \phi_{\mathfrak{K}_0[s]}(\xi, \eta) = \phi_0(\xi, \eta)$$

↓

$$\varphi_0(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$



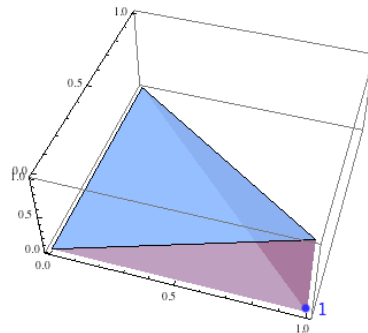
- Lado  $\Omega_1$  (nó):

$$\mathfrak{K}_1 = \{1\} \therefore |\mathfrak{K}_1| = 1$$

$$\varphi_1(\xi, \eta) = \sum_{s=1}^1 \phi_{\mathfrak{K}_1[s]}(\xi, \eta) = \phi_1(\xi, \eta)$$

↓

$$\varphi_1(\xi, \eta) = \xi$$



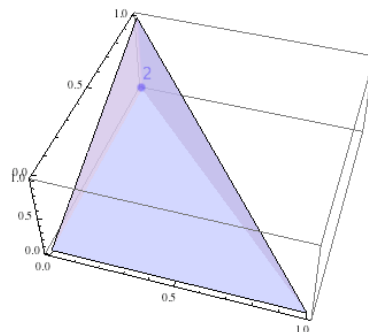
- Lado  $\Omega_2$  (nó):

$$\mathfrak{K}_2 = \{2\} \therefore |\mathfrak{K}_2| = 1$$

$$\varphi_2(\xi, \eta) = \sum_{s=1}^1 \phi_{\mathfrak{K}_2[s]}(\xi, \eta) = \phi_2(\xi, \eta)$$

↓

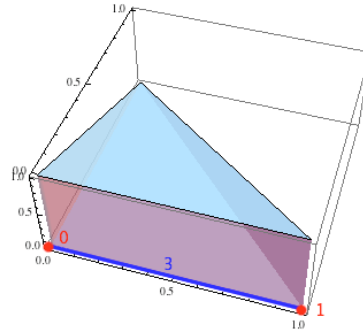
$$\varphi_2(\xi, \eta) = \eta$$



- Lado  $\Omega_3$  (aresta):

$$\mathfrak{K}_3 = \{0, 1\} \therefore |\mathfrak{K}_3| = 2$$

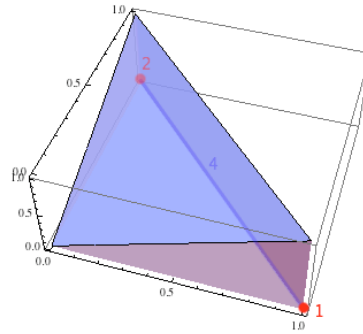
$$\begin{aligned} \varphi_3(\xi, \eta) &= \sum_{s=1}^2 \phi_{\mathfrak{K}_3[s]}(\xi, \eta) = \phi_0(\xi, \eta) + \phi_1(\xi, \eta) \\ &\downarrow \\ \varphi_3(\xi, \eta) &= 1 - \eta \end{aligned}$$



- Lado  $\Omega_4$  (aresta):

$$\mathfrak{K}_4 = \{1, 2\} \therefore |\mathfrak{K}_4| = 2$$

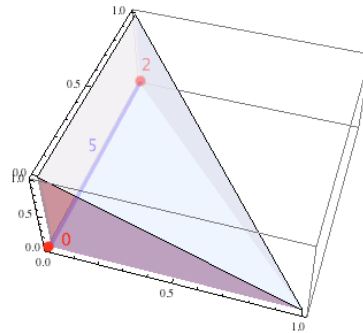
$$\begin{aligned} \varphi_4(\xi, \eta) &= \sum_{s=1}^2 \phi_{\mathfrak{K}_4[s]}(\xi, \eta) = \phi_1(\xi, \eta) + \phi_2(\xi, \eta) \\ &\downarrow \\ \varphi_4(\xi, \eta) &= \xi + \eta \end{aligned}$$



- Lado  $\Omega_5$  (aresta):

$$\mathfrak{K}_5 = \{2, 0\} \therefore |\mathfrak{K}_5| = 2$$

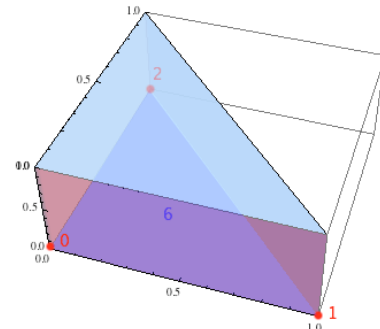
$$\begin{aligned} \varphi_5(\xi, \eta) &= \sum_{s=1}^2 \phi_{\mathfrak{K}_5[s]}(\xi, \eta) = \phi_2(\xi, \eta) + \phi_0(\xi, \eta) \\ &\downarrow \\ \varphi_5(\xi, \eta) &= 1 - \xi \end{aligned}$$



- Lado  $\Omega_6$  (face):

$$\mathfrak{K}_6 = \{0, 1, 2\} \therefore |\mathfrak{K}_6| = 3$$

$$\begin{aligned} \varphi_6(\xi, \eta) &= \sum_{s=1}^3 \phi_{\mathfrak{K}_6[s]}(\xi, \eta) = \phi_0(\xi, \eta) + \phi_1(\xi, \eta) + \phi_2(\xi, \eta) \\ &\downarrow \\ \varphi_6(\xi, \eta) &= 1 \end{aligned}$$





### 4.3 Contribuições dos Lados

Neste trabalho, a contribuição de um lado  $\Omega_j$  ( $C_j(\xi)$ ) na modelagem geométrica de um elemento corresponde ao produto da função geométrica ( $B_j(\xi_j)$ ), associada ao seu domínio de referência  $\hat{\Omega}_j$ , pela respectiva *blending function*  $\varphi_j(\xi)$ .

$$C_j(\xi) = B_j(\xi_j) \varphi_j(\xi) \quad (4.10)$$

Ocorre que a sobreposição das contribuições de dois ou mais lados *adjacentes* ocasionam acúmulos em suas *intersecções*<sup>1</sup>, comprometendo a consistência da formulação deste método. Por esta razão, a contribuição final de todos os lados de um elemento nem sempre é obtida somente por adição, uma vez que os acúmulos em intersecções devem ser subtraídos.

Em analogia ao método de *Coons*, apresentado na subseção 3.4.1, a contribuição das arestas do quadrilátero equivale à superfície  $S_c(u, v) + S_d(u, v)$ :

$$\sum C_{arestas}(u,v) \equiv S_c(u, v) + S_d(u, v) \quad (4.11)$$

Nas intersecções das arestas (vértices) houve contribuição dupla. Esta inconsistência será corrigida pela subtração das contribuições dos nós, ou seja, a superfície  $S_{cd}(u, v)$ :

$$\sum C_{nós}(u,v) \equiv S_{cd}(u, v) \quad (4.12)$$

Resultando em uma superfície análoga à equação 3.26:

$$S(u, v) \equiv \sum C_{arestas}(u,v) - \sum C_{nós}(u,v) \quad (4.13)$$

Assim sendo, para que as contribuições sejam realizadas de forma consistente, será definido um coeficiente associado ao lado  $\Omega_j$  ( $\lambda_j$ ) que contemplará a soma, anulação ou subtração de sua contribuição. Estes coeficientes correspondem a um número inteiro, obtidos pelo seguinte algoritmo:

---

**Algoritmo 4.1** Obtenção dos coeficientes de contribuição  $\lambda_j$

---

- Inicializam-se todos os coeficientes  $\lambda_j$  com o valor 0 (zero);
- Percorrem-se todos os lados do elemento, em ordem decrescente de dimensão;
  - ▷ Para cada um que apresentar função geométrica associada, calcula-se:
    - ▷  $\lambda_j = (1 - \lambda_j)$  para o lado  $j$ ;
    - ▷  $\lambda_i = (\lambda_i + \lambda_j)$  para suas partições  $i$  (disponíveis na tabela 4.3).

---

<sup>1</sup>Estas intersecções são apresentadas no exemplo 4.1, página 23.

**Exemplo 4.4** *Coeficientes de contribuição dos lados de um hexaedro:*• *Funções geométricas consideradas:*

- ▷  $B_3$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_3$  (função constante).
- ▷  $B_{21}(\xi_{21}, \eta_{21})$  associada à face  $\hat{\Omega}_{21}$ , a qual se aplica às partições:
  - ▷  $B_8(\xi_8) = B_{21}(\xi_{21}, -1)$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_8$ ;
  - ▷  $B_{13}(\xi_{13}) = B_{21}(1, \eta_{21})$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_{13}$ ;
  - ▷  $B_{16}(\xi_{16}) = B_{21}(\xi_{21}, 1)$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_{16}$ ;
  - ▷  $B_{12}(\xi_{12}) = B_{21}(-1, \eta_{21})$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_{12}$ ;
  - ▷  $B_0 = B_{21}(-1, -1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_0$  (função constante);
  - ▷  $B_1 = B_{21}(1, -1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_1$  (função constante);
  - ▷  $B_5 = B_{21}(1, 1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_5$  (função constante);
  - ▷  $B_4 = B_{21}(-1, 1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_4$  (função constante).
- ▷  $B_{22}(\xi_{22}, \eta_{22})$  associada à face  $\hat{\Omega}_{22}$ , a qual se aplica às partições:
  - ▷  $B_9(\xi_9) = B_{22}(\xi_{22}, -1)$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_9$ ;
  - ▷  $B_{14}(\xi_{14}) = B_{22}(1, \eta_{22})$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_{14}$ ;
  - ▷  $B_{17}(\xi_{17}) = B_{22}(\xi_{22}, 1)$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_{17}$ ;
  - ▷  $B_{13}(\xi_{13}) = B_{22}(-1, \eta_{22}) = B_{21}(1, \eta_{21})$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_{13}$ ;
  - ▷  $B_1 = B_{22}(-1, -1) = B_{21}(1, -1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_1$  (função constante);
  - ▷  $B_2 = B_{22}(1, -1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_2$  (função constante);
  - ▷  $B_6 = B_{22}(1, 1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_6$  (função constante);
  - ▷  $B_5 = B_{22}(-1, 1) = B_{21}(1, 1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_5$  (função constante).
- ▷  $B_{25}(\xi_{25}, \eta_{25})$  associada à face  $\hat{\Omega}_{25}$ , a qual se aplica às partições:
  - ▷  $B_{16}(\xi_{16}) = B_{25}(\xi_{25}, -1) = B_{21}(\xi_{21}, 1)$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_{16}$ ;
  - ▷  $B_{17}(\xi_{17}) = B_{25}(1, \eta_{25}) = B_{22}(\xi_{22}, 1)$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_{17}$ ;
  - ▷  $B_{18}(\xi_{18}) = B_{25}(\xi_{25}, 1)$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_{18}$ ;
  - ▷  $B_{19}(\xi_{19}) = B_{25}(-1, \eta_{25})$  associada à aresta  $\hat{\Omega}_{19}$ ;
  - ▷  $B_4 = B_{25}(-1, -1) = B_{21}(-1, 1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_4$  (função constante);
  - ▷  $B_5 = B_{25}(1, -1) = B_{22}(-1, 1) = B_{21}(1, 1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_5$  (função constante);
  - ▷  $B_6 = B_{25}(1, 1) = B_{22}(1, 1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_6$  (função constante);
  - ▷  $B_7 = B_{25}(-1, 1)$  associada ao nó  $\hat{\Omega}_7$  (função constante).

- Conjunto  $J$  das identificações  $j$  dos lados que possuem função geométrica associada, dispostos em ordem decrescente:

$$J = \{25, 22, 21, 19, 18, 17, 16, 14, 13, 12, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\} \therefore |J| = 20$$

- Algoritmo (aplicado ao conjunto  $J$ ):

<b>Dim=2</b>			
<b><math>j</math></b>	<b>25</b>	<b>22</b>	<b>21</b>
<b><math>\lambda_j</math></b>	$\lambda_{25}=1-0=1$	$\lambda_{22}=1-0=1$	$\lambda_{21}=1-0=1$
<b><math>\lambda_i</math></b>	$\lambda_{16}=0+\lambda_{25}=1$	$\lambda_9=0+\lambda_{22}=1$	$\lambda_8=0+\lambda_{21}=1$
	$\lambda_{17}=0+\lambda_{25}=1$	$\lambda_{14}=0+\lambda_{22}=1$	$\lambda_{13}=1+\lambda_{21}=2$
	$\lambda_{18}=0+\lambda_{25}=1$	$\lambda_{17}=1+\lambda_{22}=2$	$\lambda_{16}=1+\lambda_{21}=2$
	$\lambda_{19}=0+\lambda_{25}=1$	$\lambda_{13}=0+\lambda_{22}=1$	$\lambda_{12}=0+\lambda_{21}=1$
	$\lambda_4=0+\lambda_{25}=1$	$\lambda_1=0+\lambda_{22}=1$	$\lambda_0=0+\lambda_{21}=1$
	$\lambda_5=0+\lambda_{25}=1$	$\lambda_2=0+\lambda_{22}=1$	$\lambda_1=1+\lambda_{21}=2$
	$\lambda_6=0+\lambda_{25}=1$	$\lambda_6=1+\lambda_{22}=2$	$\lambda_5=2+\lambda_{21}=3$
	$\lambda_7=0+\lambda_{25}=1$	$\lambda_5=1+\lambda_{22}=2$	$\lambda_4=1+\lambda_{21}=2$

<b>Dim=1</b>				
<b><math>j</math></b>	<b>19</b>	<b>18</b>	<b>17</b>	<b>16</b>
<b><math>\lambda_j</math></b>	$\lambda_{19}=1-1=0$	$\lambda_{18}=1-1=0$	$\lambda_{17}=1-2=-1$	$\lambda_{16}=1-2=-1$
<b><math>\lambda_i</math></b>	$\lambda_7=1+\lambda_{19}=1$	$\lambda_6=2+\lambda_{18}=2$	$\lambda_5=3+\lambda_{17}=2$	$\lambda_4=2+\lambda_{16}=1$
	$\lambda_4=2+\lambda_{19}=2$	$\lambda_7=1+\lambda_{18}=1$	$\lambda_6=2+\lambda_{17}=1$	$\lambda_5=2+\lambda_{16}=1$

<b>Dim=1</b>					
<b><math>j</math></b>	<b>14</b>	<b>13</b>	<b>12</b>	<b>9</b>	<b>8</b>
<b><math>\lambda_j</math></b>	$\lambda_{14}=1-1=0$	$\lambda_{13}=1-2=-1$	$\lambda_{12}=1-1=0$	$\lambda_9=1-1=0$	$\lambda_8=1-1=0$
<b><math>\lambda_i</math></b>	$\lambda_2=1+\lambda_{14}=1$	$\lambda_1=2+\lambda_{13}=1$	$\lambda_0=1+\lambda_{12}=1$	$\lambda_1=1+\lambda_9=1$	$\lambda_0=1+\lambda_8=1$
	$\lambda_6=1+\lambda_{14}=1$	$\lambda_5=1+\lambda_{13}=0$	$\lambda_4=1+\lambda_{12}=1$	$\lambda_2=1+\lambda_9=1$	$\lambda_1=1+\lambda_8=1$

<b>Dim=0</b>								
<b><math>j</math></b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
<b><math>\lambda_j</math></b>	$\lambda_7=1-1=0$	$\lambda_6=1-1=0$	$\lambda_5=1-0=1$	$\lambda_4=1-1=0$	$\lambda_3=1-0=1$	$\lambda_2=1-1=0$	$\lambda_1=1-1=0$	$\lambda_0=1-1=0$

- Ao final:

$$\underbrace{\lambda_{25} = 1, \lambda_{22} = 1, \lambda_{21} = 1}_{\text{faces}}, \underbrace{\lambda_{17} = -1, \lambda_{16} = -1, \lambda_{13} = -1}_{\text{arestas}}, \underbrace{\lambda_5 = 1, \lambda_3 = 1}_{\text{nós}}$$

- Interpretação gráfica para os coeficientes obtidos:

Legenda:  0 contribuição     1 contribuição     2 contribuições     3 contribuições

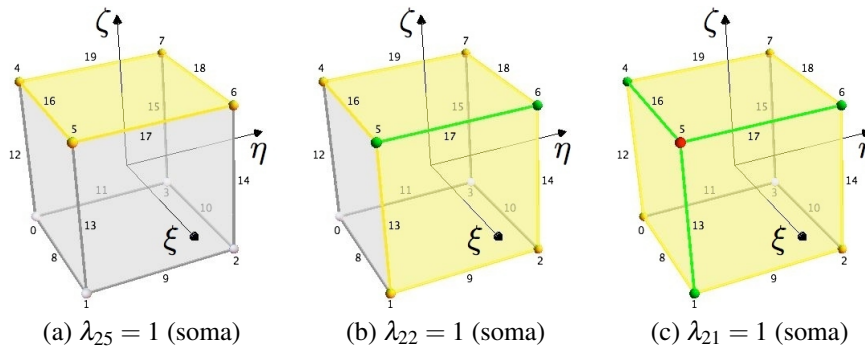


Figura 4.13: Coeficientes das contribuições das faces do hexaedro

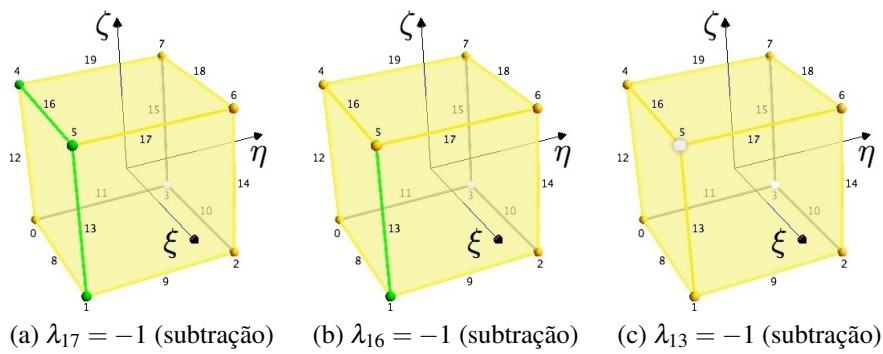


Figura 4.14: Coeficientes das contribuições das arestas do hexaedro

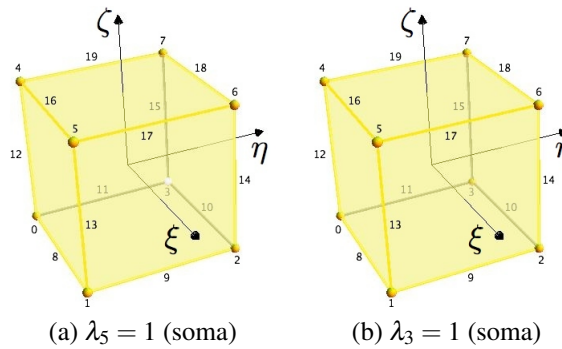


Figura 4.15: Coeficientes das contribuições dos nós do hexaedro

# Capítulo 5

## Generalização da Interpolação Transfinita

No início do capítulo 4 foi definida a padronização topológica a ser seguida pelos elementos  $\hat{\Omega}$  que utilizarão o método de representação geométrica proposto neste trabalho. Esta padronização permite determinar para um lado  $\Omega_j \subset \hat{\Omega}$ :

- Sua função  $T_j(\xi)$ ;
- Sua *blendig function*  $\varphi_j(\xi)$ ;
- Seu coeficiente de contribuição  $\lambda_j$ .

O produto destes três itens corresponde à contribuição  $C_j(\xi)$  deste lado com garantia da consistência da formulação do método proposto. Desta forma, a generalização do método de representação geométrica por interpolação transfinita será expressa pela função  $\chi$ :

$$\xi \in \hat{\Omega} \quad ; \quad \chi(\xi) \in \Omega \quad ; \quad \chi(\xi) : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega \quad (5.1)$$

$$\chi(\xi) = \sum_{j=0}^{Q-1} \lambda_j C_j(\xi) \quad (5.2)$$

sendo  $Q$  a quantidade total de lados do elemento (tabela 4.4, página 23).

Substituindo a equação 4.10 em 5.2:

$$\chi(\xi) = \sum_{j=0}^{Q-1} \lambda_j B_j(\xi_j) \varphi_j(\xi) \quad (5.3)$$

Substituindo a equação 4.7 em 5.3, obtém-se a expressão final:

$$\chi(\xi) = \sum_{j=0}^{Q-1} \lambda_j B_j(T_j(\xi)) \varphi_j(\xi) \quad (5.4)$$

Este método permite, inclusive, que sejam associadas funções geométricas a uma parte do contorno, e não em sua totalidade. **Para isso, basta que todos os nós apresentem funções geométricas associadas.** Esta imposição é necessária para que os lados sem função associada sejam modelados linearmente por seus vértices. A associação das funções geométricas aos nós pode ocorrer através de duas maneiras:

- Por "herança": um lado que possui função associada compartilha esta função a todas as suas partições, inclusive aos seus nós;
- Por "declaração explícita": quando um nó **não** tiver função associada por herança, sua função geométrica deve ser explícita (função constante).

Através do exemplo 4.4, pode-se observar que os nós  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_4$ ,  $\Omega_5$ ,  $\Omega_6$  e  $\Omega_7$  herdaram as funções das faces  $\Omega_{21}$ ,  $\Omega_{22}$  e  $\Omega_{25}$ . Já o nó  $\Omega_3$  necessitou de uma declaração explícita da função constante por não ser partição destas faces.

**Exemplo 5.1** Modelagem geométrica de hexaedro por interpolação transfinita (figura 5.1):

- Funções geométricas explícitas<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \triangleright B_0 &= \{-1, -1, -1\}^t \\ \triangleright B_1 &= \{1, -1, -1\}^t \\ \triangleright B_2 &= \{1, 1, -1\}^t \\ \triangleright B_3 &= \{-1, 1, -1\}^t \\ \triangleright B_{16}(\xi) &= \left\{ 0.424 \text{Sen}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), -0.424 \text{Cos}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), 1 \right\}^t \\ \triangleright B_{17}(\xi) &= \left\{ 0.424 \text{Cos}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), 0.424 \text{Sen}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), 1 \right\}^t \\ \triangleright B_{18}(\xi) &= \left\{ 0.424 \text{Sen}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), 0.424 \text{Cos}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), 1 \right\}^t \\ \triangleright B_{19}(\xi) &= \left\{ -0.424 \text{Cos}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), 0.424 \text{Sen}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), 1 \right\}^t \end{aligned}$$

<sup>1</sup>As funções associadas às arestas  $\hat{\Omega}_{16}$ ,  $\hat{\Omega}_{17}$ ,  $\hat{\Omega}_{18}$  e  $\hat{\Omega}_{19}$  correspondem a arcos de circunferência, de forma a ajustar a face  $\Omega_{25}$  em um círculo.

- *Funções geométricas herdadas:*

$$\triangleright B_4 = B_{16}(-1) = \{-0.3, -0.3, 1\}^t$$

$$\triangleright B_5 = B_{16}(1) = \{0.3, -0.3, 1\}^t$$

$$\triangleright B_6 = B_{18}(-1) = \{0.3, 0.3, 1\}^t$$

$$\triangleright B_7 = B_{18}(1) = \{-0.3, 0.3, 1\}^t$$

- *Transformações para os domínios de referência das arestas (ver tabela 4.10):*

$$\xi_{16} = T_{16}(\xi, \eta, \zeta) = \{\xi\} \quad , \quad \xi_{17} = T_{17}(\xi, \eta, \zeta) = \{\eta\}$$

$$\xi_{18} = T_{18}(\xi, \eta, \zeta) = \{-\xi\} \quad , \quad \xi_{19} = T_{19}(\xi, \eta, \zeta) = \{-\eta\}$$

- *Blending functions (ver equação 4.9 e tabela 4.11):*

$$\varphi_0(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \quad , \quad \varphi_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(\xi + 1)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta + 1)(1 - \zeta) \quad , \quad \varphi_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(\eta + 1)(1 - \zeta)$$

$$\varphi_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(\zeta + 1) \quad , \quad \varphi_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(\xi + 1)(1 - \eta)(\zeta + 1)$$

$$\varphi_6(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta + 1)(\zeta + 1) \quad , \quad \varphi_7(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(\eta + 1)(\zeta + 1)$$

$$\varphi_{16}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4}(\eta - 1)(\zeta + 1) \quad , \quad \varphi_{17}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(\xi + 1)(\zeta + 1)$$

$$\varphi_{18}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(\eta + 1)(\zeta + 1) \quad , \quad \varphi_{19}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4}(\xi - 1)(\zeta + 1)$$

- *Coefficientes de contribuição (ver algoritmo 4.1):*

$$\lambda_{19} = 1 \quad , \quad \lambda_{18} = 1 \quad , \quad \lambda_{17} = 1 \quad , \quad \lambda_{16} = 1$$

$$\lambda_7 = -1 \quad , \quad \lambda_6 = -1 \quad , \quad \lambda_5 = -1 \quad , \quad \lambda_4 = -1$$

$$\lambda_3 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 1 \quad , \quad \lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_0 = 1$$

- Função  $\chi(\xi, \eta, \zeta)$  (ver equação 5.4):

$$\begin{aligned} & \lambda_0 B_0 \varphi_0(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_1 B_1 \varphi_1(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_2 B_2 \varphi_2(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_3 B_3 \varphi_3(\xi, \eta, \zeta) \\ & \quad + \\ & \lambda_4 B_4 \varphi_4(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_5 B_5 \varphi_5(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_6 B_6 \varphi_6(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_7 B_7 \varphi_7(\xi, \eta, \zeta) \\ \chi(\xi, \eta, \zeta) = & \quad + \\ & \lambda_{16} B_{16}(T_{16}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{16}(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_{17} B_{17}(T_{17}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{17}(\xi, \eta, \zeta) \\ & \quad + \\ & \lambda_{18} B_{18}(T_{18}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{18}(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_{19} B_{19}(T_{19}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{19}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

Após a substituição de todos os termos e simplificações, a equação anterior resulta em:

$$\chi(\xi, \eta, \zeta) = \left\{ \begin{array}{l} 0.125[-5.2\xi\zeta+2.8\xi+(1.697\xi\zeta+1.697\xi)\text{Cos}(0.785\eta)+1.697\zeta\text{Sen}(0.785\xi)+1.697\text{Sen}(0.785\xi)] \\ 0.125[-5.2\eta\zeta+2.8\eta+(1.697\eta\zeta+1.697\eta)\text{Cos}(0.785\xi)+1.697\zeta\text{Sen}(0.785\eta)+1.697\text{Sen}(0.785\eta)] \end{array} \right\} \zeta \quad (5.5)$$

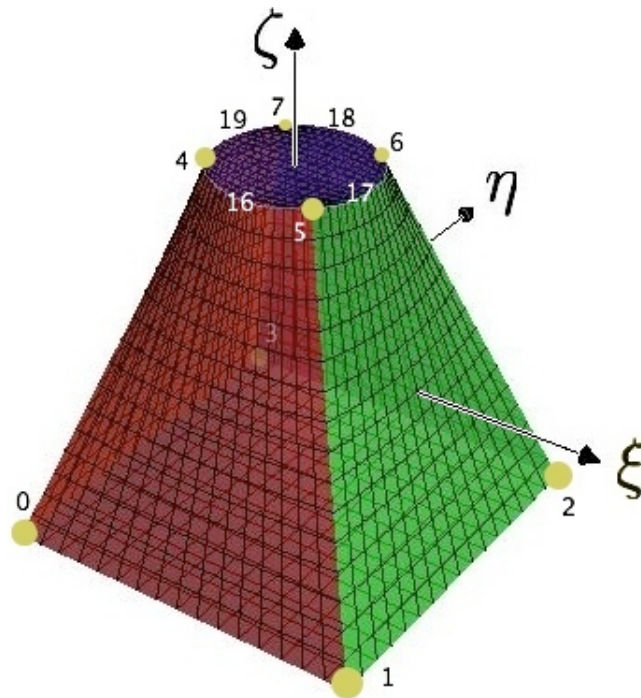


Figura 5.1: Elemento curvo obtido por interpolação transfinita



**Exemplo 5.2** Modelagem geométrica de hexaedro por interpolação transfinita (figura 5.2):

- Funções geométricas explícitas<sup>2</sup>:

$$\triangleright B_{20}(\xi) = \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}} \right\}^t$$

$$\triangleright B_{21}(\xi) = \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}} \right\}^t$$

$$\triangleright B_{22}(\xi) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}} \right\}^t$$

$$\triangleright B_{23}(\xi) = \left\{ -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}} \right\}^t$$

$$\triangleright B_{24}(\xi) = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}} \right\}^t$$

$$\triangleright B_{25}(\xi) = \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}} \right\}^t$$

- Funções geométricas herdadas:

$$\triangleright B_0 = B_{20}(-1, -1) = \{-0.57735, -0.57735, -0.57735\}^t$$

$$\triangleright B_1 = B_{20}(1, -1) = \{0.57735, -0.57735, -0.57735\}^t$$

$$\triangleright B_2 = B_{20}(1, 1) = \{0.57735, 0.57735, -0.57735\}^t$$

$$\triangleright B_3 = B_{25}(-1, 1) = \{-0.57735, 0.57735, -0.57735\}^t$$

$$\triangleright B_4 = B_{25}(-1, -1) = \{-0.57735, -0.57735, 0.57735\}^t$$

$$\triangleright B_5 = B_{25}(1, -1) = \{0.57735, -0.57735, 0.57735\}^t$$

$$\triangleright B_6 = B_{25}(1, 1) = \{0.57735, 0.57735, 0.57735\}^t$$

$$\triangleright B_7 = B_{25}(-1, 1) = \{-0.57735, 0.57735, 0.57735\}^t$$

$$\triangleright B_8(\xi) = B_{20}(\xi, -1) = \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 2}}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}} \right\}^t$$

$$\triangleright B_9(\xi) = B_{20}(1, \xi) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}}, \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 2}}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}} \right\}^t$$

$$\triangleright B_{10}(\xi) = B_{20}(-\xi, 1) = \left\{ -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 2}}, \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}} \right\}^t$$

$$\triangleright B_{11}(\xi) = B_{20}(-1, -\xi) = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}}, -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 2}}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}} \right\}^t$$

$$\triangleright B_{12}(\xi) = B_{21}(-1, \xi) = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}}, \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 2}} \right\}^t$$

<sup>2</sup>As funções associadas às faces  $\hat{\Omega}_{20}$ ,  $\hat{\Omega}_{21}$ ,  $\hat{\Omega}_{22}$ ,  $\hat{\Omega}_{23}$ ,  $\hat{\Omega}_{24}$  e  $\hat{\Omega}_{25}$  correspondem a cascas esféricas, de forma a ajustar o hexaedro em uma esfera.

$$\begin{aligned}
 \triangleright B_{13}(\xi) &= B_{21}(1, \xi) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}}, \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+2}} \right\}^t \\
 \triangleright B_{14}(\xi) &= B_{23}(-1, \xi) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}}, \frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}}, \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+2}} \right\}^t \\
 \triangleright B_{15}(\xi) &= B_{23}(1, \xi) = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}}, \frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}}, \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+2}} \right\}^t \\
 \triangleright B_{16}(\xi) &= B_{25}(\xi, -1) = \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+2}}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}}, \frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}} \right\}^t \\
 \triangleright B_{17}(\xi) &= B_{25}(1, \xi) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}}, \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+2}}, \frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}} \right\}^t \\
 \triangleright B_{18}(\xi) &= B_{25}(-\xi, 1) = \left\{ -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+2}}, \frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}}, \frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}} \right\}^t \\
 \triangleright B_{19}(\xi) &= B_{25}(-1, -\xi) = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}}, -\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+2}}, \frac{1}{\sqrt{\xi^2+2}} \right\}^t
 \end{aligned}$$

- Transformações para os domínios de referência das arestas e faces (ver tabela 4.10):

$$\xi_8 = T_8(\xi, \eta, \zeta) = \{\xi\} \quad , \quad \xi_9 = T_9(\xi, \eta, \zeta) = \{\eta\}$$

$$\xi_{10} = T_{10}(\xi, \eta, \zeta) = \{-\xi\} \quad , \quad \xi_{11} = T_{11}(\xi, \eta, \zeta) = \{-\eta\}$$

$$\xi_{12} = T_{12}(\xi, \eta, \zeta) = \{\zeta\} \quad , \quad \xi_{131} = T_{13}(\xi, \eta, \zeta) = \{\zeta\}$$

$$\xi_{14} = T_{14}(\xi, \eta, \zeta) = \{\zeta\} \quad , \quad \xi_{15} = T_{15}(\xi, \eta, \zeta) = \{\zeta\}$$

$$\xi_{16} = T_{16}(\xi, \eta, \zeta) = \{\xi\} \quad , \quad \xi_{17} = T_{17}(\xi, \eta, \zeta) = \{-\eta\}$$

$$\xi_{18} = T_{18}(\xi, \eta, \zeta) = \{-\xi\} \quad , \quad \xi_{19} = T_{19}(\xi, \eta, \zeta) = \{-\eta\}$$

$$\xi_{20} = T_{20}(\xi, \eta, \zeta) = \{\xi, \eta\}^t \quad , \quad \xi_{21} = T_{21}(\xi, \eta, \zeta) = \{\xi, \zeta\}^t$$

$$\xi_{22} = T_{22}(\xi, \eta, \zeta) = \{\eta, \zeta\}^t \quad , \quad \xi_{23} = T_{23}(\xi, \eta, \zeta) = \{\xi, \zeta\}^t$$

$$\xi_{24} = T_{24}(\xi, \eta, \zeta) = \{-\eta, \zeta\} \quad , \quad \xi_{25} = T_{25}(\xi, \eta, \zeta) = \{\xi, \eta\}^t$$

- *Blending functions (ver equação 4.9 e tabela 4.11):*

$$\varphi_0(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \quad , \quad \varphi_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(\xi + 1)(1 - \eta)(1 - \zeta)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta + 1)(1 - \zeta) \quad , \quad \varphi_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(\eta + 1)(1 - \zeta)$$

$$\varphi_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(\zeta + 1) \quad , \quad \varphi_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(\xi + 1)(1 - \eta)(\zeta + 1)$$

$$\varphi_6(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta + 1)(\zeta + 1) \quad , \quad \varphi_7(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(\eta + 1)(\zeta + 1)$$

$$\varphi_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(\eta - 1)(\zeta - 1) \quad , \quad \varphi_9(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(\xi + 1)(1 - \zeta)$$

$$\varphi_{10}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(\eta + 1)(1 - \zeta) \quad , \quad \varphi_{11}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(\xi - 1)(\zeta - 1)$$

$$\varphi_{12}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta - 1) \quad , \quad \varphi_{13}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(\eta - 1)$$

$$\varphi_{14}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta + 1) \quad , \quad \varphi_{15}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$\varphi_{16}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4}(\zeta + 1)(\eta - 1) \quad , \quad \varphi_{17}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(\zeta + 1)(\xi + 1)$$

$$\varphi_{18}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(\zeta + 1)(\eta + 1) \quad , \quad \varphi_{19}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4}(\zeta + 1)(\xi - 1)$$

$$\varphi_{20}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1 - \zeta}{2} \quad , \quad \varphi_{21}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1 - \eta}{2}$$

$$\varphi_{22}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi + 1}{2} \quad , \quad \varphi_{23}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\eta + 1}{2}$$

$$\varphi_{24}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1 - \xi}{2} \quad , \quad \varphi_{25}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\zeta + 1}{2}$$

- *Coefficientes de contribuição (ver algoritmo 4.1):*

$$\begin{aligned}
\lambda_{25} = 1 & \quad , \quad \lambda_{24} = 1 & \quad , \quad \lambda_{23} = 1 & \quad , \quad \lambda_{22} = 1 & \quad , \quad \lambda_{21} = 1 & \quad , \quad \lambda_{20} = 1 \\
\lambda_{19} = -1 & \quad , \quad \lambda_{18} = -1 & \quad , \quad \lambda_{17} = -1 & \quad , \quad \lambda_{16} = -1 & \quad , \quad \lambda_{15} = -1 & \quad , \quad \lambda_{14} = -1 \\
\lambda_{13} = -1 & \quad , \quad \lambda_{12} = -1 & \quad , \quad \lambda_{11} = -1 & \quad , \quad \lambda_{10} = -1 & \quad , \quad \lambda_9 = -1 & \quad , \quad \lambda_8 = -1 \\
\lambda_7 = 1 & \quad , \quad \lambda_6 = 1 & \quad , \quad \lambda_5 = 1 & \quad , \quad \lambda_4 = 1 \\
\lambda_3 = 1 & \quad , \quad \lambda_2 = 1 & \quad , \quad \lambda_1 = 1 & \quad , \quad \lambda_0 = 1
\end{aligned}$$

- *Função  $\chi(\xi, \eta, \zeta)$  (ver equação 5.4):*

$$\begin{aligned}
& \lambda_0 B_0 \varphi_0(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_1 B_1 \varphi_1(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_2 B_2 \varphi_2(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_3 B_3 \varphi_3(\xi, \eta, \zeta) \\
& \quad + \\
& \lambda_4 B_4 \varphi_4(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_5 B_5 \varphi_5(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_6 B_6 \varphi_6(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_7 B_7 \varphi_7(\xi, \eta, \zeta) \\
& \quad + \\
& \quad \lambda_8 B_8(T_8(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_8(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_9 B_9(T_9(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_9(\xi, \eta, \zeta) \\
& \quad + \\
& \lambda_{10} B_{10}(T_{10}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{10}(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_{11} B_{11}(T_{11}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{11}(\xi, \eta, \zeta) \\
& \quad + \\
& \lambda_{12} B_{12}(T_{12}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{12}(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_{13} B_{13}(T_{13}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{13}(\xi, \eta, \zeta) \\
& \quad + \\
\chi(\xi, \eta, \zeta) = & \lambda_{14} B_{14}(T_{14}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{14}(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_{15} B_{15}(T_{15}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{15}(\xi, \eta, \zeta) \\
& \quad + \\
& \lambda_{16} B_{16}(T_{16}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{16}(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_{17} B_{17}(T_{17}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{17}(\xi, \eta, \zeta) \\
& \quad + \\
& \lambda_{18} B_{18}(T_{18}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{18}(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_{19} B_{19}(T_{19}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{19}(\xi, \eta, \zeta) \\
& \quad + \\
& \lambda_{20} B_{20}(T_{20}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{20}(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_{21} B_{21}(T_{21}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{21}(\xi, \eta, \zeta) \\
& \quad + \\
& \lambda_{22} B_{22}(T_{22}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{22}(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_{23} B_{23}(T_{23}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{23}(\xi, \eta, \zeta) \\
& \quad + \\
& \lambda_{24} B_{24}(T_{24}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{24}(\xi, \eta, \zeta) + \lambda_{25} B_{25}(T_{25}(\xi, \eta, \zeta)) \varphi_{25}(\xi, \eta, \zeta)
\end{aligned}$$

Após a substituição de todos os termos e simplificações, a equação anterior resulta em:

$$\mathcal{X}(\xi, \eta, \zeta) = \left\{ \begin{array}{l} \xi \left( 0.57735 + \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + 2}} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + 2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}} \right) \\ \eta \left( 0.57735 + \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + 2}} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + 2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}} \right) \\ \zeta \left( 0.57735 + \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + \xi^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + 2}} + \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + 2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 2}} \right) \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

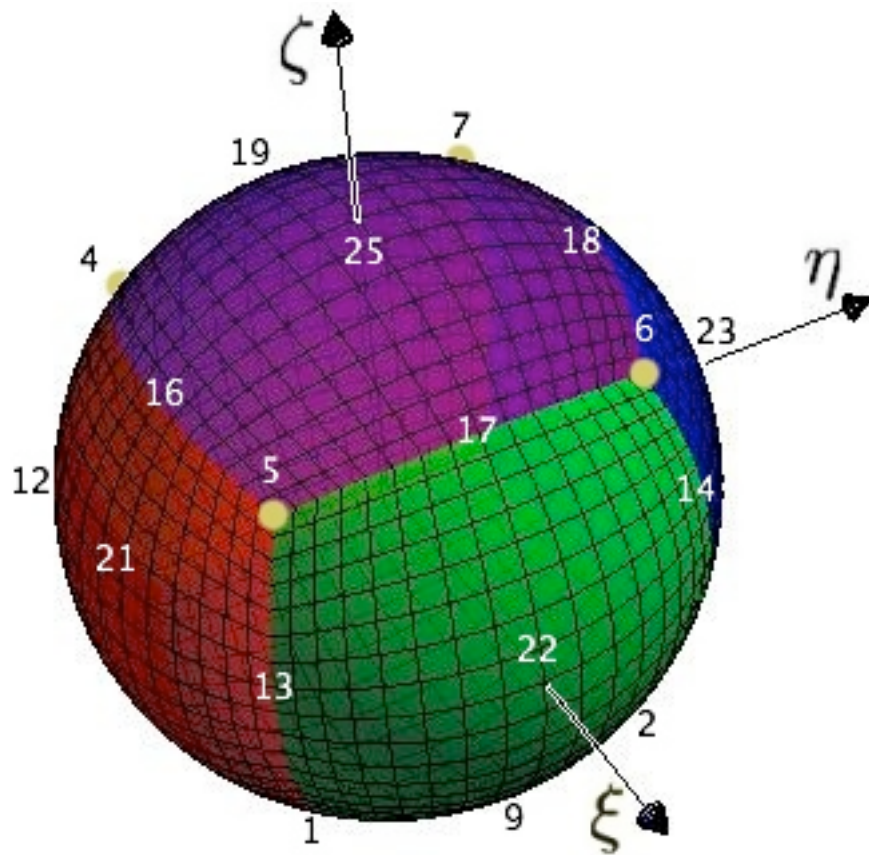


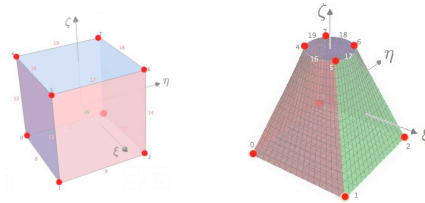
Figura 5.2: Hexaedro sendo mapeado para uma esfera por interpolação transfinita

# Capítulo 6

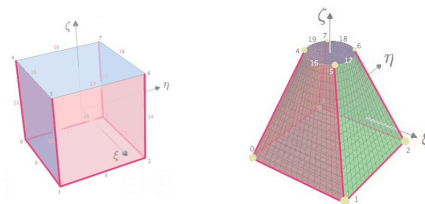
## Testes e Validações

Será utilizado o exemplo 5.1 para a realização de alguns testes e validações. Serão verificadas as seguintes propriedades da equação 5.5:

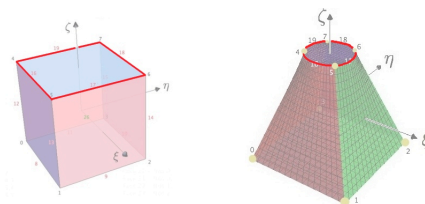
- Os vértices do hexaedro são mapeados para as coordenadas fornecidas ( $B_0, B_1, B_2$  e  $B_3$ ) ou herdadas ( $B_4, B_5, B_6$  e  $B_7$ );



- O mapeamento da região do hexaedro correspondente às arestas  $\Omega_8, \Omega_9, \Omega_{10}, \Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{14}$  e  $\Omega_{15}$  resultam em aplicações lineares por não apresentarem funções associadas;



- O mapeamento da região do hexaedro correspondente às arestas  $\Omega_{16}, \Omega_{17}, \Omega_{18}$  e  $\Omega_{19}$  são mapeadas para os arcos de circunferência definidos pelas funções geométricas  $B_{16}(\xi), B_{17}(\xi), B_{18}(\xi)$  e  $B_{19}(\xi)$ .



Será realizado também um teste da derivada da equação 5.5, através de sua expansão pela Série de *Taylor* de primeira derivada. Pretende-se constatar que a diferença entre a solução exata e a solução aproximada apresenta a ordem de convergência quadrática.

$$\underbrace{\chi(\xi + \alpha \delta \xi)}_{\substack{\text{solução} \\ \text{real}}} = \underbrace{\chi(\xi) + \chi'(\xi) \alpha \delta \xi}_{\substack{\text{solução} \\ \text{aproximada}}} + \underbrace{\mathbb{C} (\alpha \delta \xi)^2}_{\substack{\text{ordem} \\ \text{quadrática}}} \quad (6.1)$$

Sendo  $\alpha$  um número real positivo,  $\delta \xi$  uma direção qualquer e  $\mathbb{C}$  uma constante.

## 6.1 Testes

Serão realizados os quatro testes propostos no início deste capítulo.

### 6.1.1 Mapeamento dos Vértices

$$\chi(n_0) = \chi(-1, -1, -1) = \{-1, -1, -1\}^t \quad ; \quad \chi(n_1) = \chi(1, -1, -1) = \{1, -1, -1\}^t$$

$$\chi(n_2) = \chi(1, 1, -1) = \{1, 1, -1\}^t \quad ; \quad \chi(n_3) = \chi(-1, 1, -1) = \{-1, 1, -1\}^t$$

$$\chi(n_4) = \chi(-1, -1, 1) = \{-0.3, -0.3, 1\}^t \quad ; \quad \chi(n_5) = \chi(1, -1, 1) = \{0.3, -0.3, 1\}^t$$

$$\chi(n_6) = \chi(1, 1, 1) = \{0.3, 0.3, 1\}^t \quad ; \quad \chi(n_7) = \chi(-1, 1, 1) = \{-0.3, 0.3, 1\}^t$$

### 6.1.2 Mapeamento das Arestas Lineares

$$\chi(\Omega_8) = \chi(\xi, -1, -1) = \{\xi, -1, -1\}^t \quad ; \quad \chi(\Omega_9) = \chi(1, \eta, -1) = \{1, \eta, -1\}^t$$

$$\chi(\Omega_{10}) = \chi(\xi, 1, -1) = \{\xi, 1, -1\}^t \quad ; \quad \chi(\Omega_{11}) = \chi(-1, \eta, -1) = \{-1, \eta, -1\}^t$$

$$\chi(\Omega_{12}) = \chi(-1, -1, \zeta) = \{0.35\zeta - 0.65, 0.35\zeta - 0.65, \zeta\}^t \quad ; \quad \chi(\Omega_{13}) = \chi(1, -1, \zeta) = \{0.65 - 0.35\zeta, 0.35\zeta - 0.65, \zeta\}^t$$

$$\chi(\Omega_{14}) = \chi(1, 1, \zeta) = \{0.65 - 0.35\zeta, 0.65 - 0.35\zeta, \zeta\}^t \quad ; \quad \chi(\Omega_{15}) = \chi(-1, 1, \zeta) = \{0.35\zeta - 0.65, 0.65 - 0.35\zeta, \zeta\}^t$$

### 6.1.3 Mapeamento das Arestas em Arco

$$\chi_{(\Omega_{16})} = \chi(\xi, -1, 1) = \left\{ 0.424 \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), -0.424 \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), 1 \right\}^t \quad ; \quad \chi_{(\Omega_{17})} = \chi(1, \eta, 1) = \left\{ 0.424 \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi\eta}{4}\right), 0.424 \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi\eta}{4}\right), 1 \right\}^t$$

$$\chi_{(\Omega_{18})} = \chi(\xi, 1, 1) = \left\{ 0.424 \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), 0.424 \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right), 1 \right\}^t \quad ; \quad \chi_{(\Omega_{19})} = \chi(-1, \eta, 1) = \left\{ -0.424 \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi\eta}{4}\right), 0.424 \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi\eta}{4}\right), 1 \right\}^t$$

### 6.1.4 Ordem de Convergência

Com o objetivo de isolar a variável que representará a ordem de convergência ( $n$ ), serão realizadas as seguintes manipulações algébricas na equação 6.1:

$$\chi(\xi + \alpha \delta \xi) = \chi(\xi) + \chi'(\xi) \alpha \delta \xi + \mathbb{C} (\alpha \delta \xi)^n$$

$$\chi(\xi + \alpha \delta \xi) - [\chi(\xi) + \chi'(\xi) \alpha \delta \xi] = \mathbb{C} \alpha^n \delta \xi^n$$

$$\|\chi(\xi + \alpha \delta \xi) - [\chi(\xi) + \chi'(\xi) \alpha \delta \xi]\| = |\mathbb{C}| \underbrace{|\alpha^n|}_{\alpha^n} \|\delta \xi^n\|$$

$$\log(\|\chi(\xi + \alpha \delta \xi) - [\chi(\xi) + \chi'(\xi) \alpha \delta \xi]\|) = \log(\|\mathbb{C} \delta \xi^n\|) + n \log(\alpha) \quad (6.2)$$

- Para  $\alpha_1$ :

$$\log(\|\chi(\xi + \alpha_1 \delta \xi) - [\chi(\xi) + \chi'(\xi) \alpha_1 \delta \xi]\|) = \log(\|\mathbb{C} \delta \xi^n\|) + n \log(\alpha_1) \quad (6.3)$$

- Para  $\alpha_2$ :

$$\log(\|\chi(\xi + \alpha_2 \delta \xi) - [\chi(\xi) + \chi'(\xi) \alpha_2 \delta \xi]\|) = \log(\|\mathbb{C} \delta \xi^n\|) + n \log(\alpha_2) \quad (6.4)$$

Será subtraída a equação 6.3 da equação 6.4 para eliminar o termo  $\log(\|\mathbb{C} \delta \xi^n\|)$ , seguido do isolamento da variável  $n$ :

$$n = \frac{\log(\|\chi(\xi + \alpha_2 \delta \xi) - [\chi(\xi) + \chi'(\xi) \alpha_2 \delta \xi]\|) - \log(\|\chi(\xi + \alpha_1 \delta \xi) - [\chi(\xi) + \chi'(\xi) \alpha_1 \delta \xi]\|)}{\log(\alpha_2) - \log(\alpha_1)} \quad (6.5)$$

Pretende-se validar a derivada ( $\chi'(\xi)$ ) da equação 5.5 através da constatação de que para diferentes valores de  $\alpha$ , será sempre obtido  $n \cong 2$ , confirmando a ordem de convergência quadrática esperada pela Série de *Taylor* de primeira derivada.



## 6.2 Validações

Serão realizadas as validações das formulações obtidas nos testes da seção 6.1.

### 6.2.1 Mapeamento dos Vértices

Pôde-se constatar que o mapeamento de todos os vértices coincide com as respectivas coordenadas dos nós (fornecidas ou herdadas).

$$\chi(n_0)=B_0 \quad ; \quad \chi(n_1)=B_1 \quad ; \quad \chi(n_2)=B_2 \quad ; \quad \chi(n_3)=B_3$$

$$\chi(n_4)=B_4 \quad ; \quad \chi(n_5)=B_5 \quad ; \quad \chi(n_6)=B_6 \quad ; \quad \chi(n_7)=B_7$$

### 6.2.2 Mapeamento das Arestas Lineares

Pôde-se constatar que o mapeamento da região do hexaedro correspondente às arestas  $\Omega_8, \Omega_9, \Omega_{10}, \Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{14}$  e  $\Omega_{15}$  resultam em aplicações lineares, uma vez que atendem às condições:

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \text{e} \quad f(\alpha a) = \alpha f(a) \quad ; \quad \alpha \in \mathfrak{R}$$

$$\chi(\Omega_8): \quad \{a+b, -1, -1\}^t = \{a, -1, -1\}^t + \{b, -1, -1\}^t \quad ; \quad \{\alpha a, -1, -1\}^t = \alpha \{a, -1, -1\}^t$$

$$\chi(\Omega_9): \quad \{1, a+b, -1\}^t = \{1, a, -1\}^t + \{1, b, -1\}^t \quad ; \quad \{1, \alpha a, -1\}^t = \alpha \{1, a, -1\}^t$$

$$\chi(\Omega_{10}): \quad \{a+b, 1, -1\}^t = \{a, 1, -1\}^t + \{b, 1, -1\}^t \quad ; \quad \{\alpha a, 1, -1\}^t = \alpha \{a, 1, -1\}^t$$

$$\chi(\Omega_{11}): \quad \{-1, a+b, -1\}^t = \{-1, a, -1\}^t + \{-1, b, -1\}^t \quad ; \quad \{-1, \alpha a, -1\}^t = \alpha \{-1, a, -1\}^t$$

$$\chi(\Omega_{12}): \quad \{0.35(a+b)-0.65, 0.35(a+b)-0.65, (a+b)\}^t = \{0.35a-0.65, 0.35a-0.65, a\}^t + \{0.35b-0.65, 0.35b-0.65, b\}^t \\ \{0.35(\alpha a)-0.65, 0.35(\alpha a)-0.65, (\alpha a)\}^t = \alpha \{0.35a-0.65, 0.35a-0.65, a\}^t$$

$$\chi(\Omega_{13}): \quad \{0.65-0.35(a+b), 0.35(a+b)-0.65, (a+b)\}^t = \{0.65-0.35a, 0.35a-0.65, a\}^t + \{0.65-0.35b, 0.35b-0.65, b\}^t \\ \{0.65-0.35(\alpha a), 0.35(\alpha a)-0.65, (\alpha a)\}^t = \alpha \{0.65-0.35a, 0.35a-0.65, a\}^t$$

$$\chi(\Omega_{14}): \quad \{0.65-0.35(a+b), 0.65-0.35(a+b), (a+b)\}^t = \{0.65-0.35a, 0.65-0.35a, a\}^t + \{0.65-0.35b, 0.65-0.35b, b\}^t \\ \{0.65-0.35(\alpha a), 0.65-0.35(\alpha a), (\alpha a)\}^t = \alpha \{0.65-0.35a, 0.65-0.35a, a\}^t$$

$$\chi(\Omega_{15}): \quad \{0.35(a+b)-0.65, 0.65-0.35(a+b), (a+b)\}^t = \{0.35a-0.65, 0.65-0.35a, a\}^t + \{0.35b-0.65, 0.65-0.35b, b\}^t \\ \{0.35(\alpha a)-0.65, 0.65-0.35(\alpha a), (\alpha a)\}^t = \alpha \{0.35a-0.65, 0.65-0.35a, a\}^t$$

### 6.2.3 Mapeamento das Arestas em Arco

Pôde-se constatar que mapeamento da região do hexaedro correspondente às arestas  $\Omega_{16}$ ,  $\Omega_{17}$ ,  $\Omega_{18}$  e  $\Omega_{19}$  resultam nas funções geométricas  $B_{16}(\xi)$ ,  $B_{17}(\xi)$ ,  $B_{18}(\xi)$  e  $B_{19}(\xi)$ , correspondentes a arcos de circunferência contidas no plano horizontal de cota  $\zeta = 1$ , uma vez que apresentam pontos de distância constante em relação ao ponto  $c = \{0, 0, 1\}$  (centro da circunferência).

Seja a função  $d(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2}$ , a qual expressa a distância de um ponto  $(\xi, \eta, \zeta)$  qualquer ao ponto  $c$ .

$$\chi(\Omega_{16})=B_{16}(\xi); \quad d(\chi(\Omega_{16}))=\sqrt{\left[0.424\text{Sen}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right)\right]^2 + \left[-0.424\text{Cos}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right)\right]^2} = \sqrt{0.178 \left[\text{Sen}^2\left(\frac{\pi\eta}{4}\right) + \text{Cos}^2\left(\frac{\pi\eta}{4}\right)\right]} = \sqrt{0.178} = 0.424$$

$$\chi(\Omega_{17})=B_{17}(\eta); \quad d(\chi(\Omega_{17}))=\sqrt{\left[0.424\text{Cos}\left(\frac{\pi\eta}{4}\right)\right]^2 + \left[0.424\text{Sen}\left(\frac{\pi\eta}{4}\right)\right]^2} = \sqrt{0.178 \left[\text{Sen}^2\left(\frac{\pi\eta}{4}\right) + \text{Cos}^2\left(\frac{\pi\eta}{4}\right)\right]} = \sqrt{0.178} = 0.424$$

$$\chi(\Omega_{18})=B_{18}(\xi); \quad d(\chi(\Omega_{18}))=\sqrt{\left[0.424\text{Sen}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right)\right]^2 + \left[0.424\text{Cos}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right)\right]^2} = \sqrt{0.178 \left[\text{Sen}^2\left(\frac{\pi\eta}{4}\right) + \text{Cos}^2\left(\frac{\pi\eta}{4}\right)\right]} = \sqrt{0.178} = 0.424$$

$$\chi(\Omega_{19})=B_{19}(\eta); \quad d(\chi(\Omega_{19}))=\sqrt{\left[-0.424\text{Sen}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right)\right]^2 + \left[0.424\text{Cos}\left(\frac{\pi\xi}{4}\right)\right]^2} = \sqrt{0.178 \left[\text{Sen}^2\left(\frac{\pi\eta}{4}\right) + \text{Cos}^2\left(\frac{\pi\eta}{4}\right)\right]} = \sqrt{0.178} = 0.424$$

### 6.2.4 Ordem de Convergência

Para a validação da ordem de convergência, foram utilizados os seguintes parâmetros:

- $\chi(\xi) =$  (equação 5.5);

$$\bullet \chi'(\xi) = \begin{bmatrix} 0.212(\zeta+1)\text{Cos}(0.785\eta) - 0.65\zeta + & -0.167(\zeta+1)\xi\text{Sen}(0.785\eta) & 0.212\text{Cos}(0.785\eta)\xi - \\ 0.167(\zeta+1)\text{Cos}(0.7854\xi) + 0.35 & & 0.65\xi + 0.212\text{Sen}(0.785\xi) \\ -0.167(\zeta+1)\eta\text{Sen}(0.785\xi) & 0.167(\zeta+1)\text{Cos}(0.785\eta) - 0.65\zeta + & 0.212\text{Cos}(0.785\xi)\eta - \\ & 0.212(\zeta+1)\text{Cos}(0.7854\xi) + 0.35 & 0.65\eta + 0.212\text{Sen}(0.785\eta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

- $\xi = \{0.1, 0.2, 0.3\}^t$ ;
- $\delta\xi = \{0.3, 0.4, 0.5\}^t$ ;
- $\alpha_1 = [0.001, 0.040]$ , passos de 0.001;
- $\alpha_2 = \alpha_1 + 0.001$ .

Os resultados obtidos são reproduzidos na tabela 6.1, os quais confirmaram a ordem de convergência quadrática, validando a derivada ( $\chi'(\xi)$ ) da equação 5.5.

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$n$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$n$
0.001	0.002	2.00027	0.021	0.022	2.00409
0.002	0.003	2.00047	0.022	0.023	2.00428
0.003	0.004	2.00066	0.023	0.024	2.00448
0.004	0.005	2.00085	0.024	0.025	2.00467
0.005	0.006	2.00104	0.025	0.026	2.00486
0.006	0.007	2.00123	0.026	0.027	2.00505
0.007	0.008	2.00142	0.027	0.028	2.00525
0.008	0.009	2.00161	0.028	0.029	2.00544
0.009	0.010	2.00180	0.029	0.030	2.00563
0.010	0.011	2.00199	0.030	0.031	2.00583
0.011	0.012	2.00218	0.031	0.032	2.00602
0.012	0.013	2.00237	0.032	0.033	2.00621
0.013	0.014	2.00256	0.033	0.034	2.00641
0.014	0.015	2.00275	0.034	0.035	2.0066
0.015	0.016	2.00294	0.035	0.036	2.0068
0.016	0.017	2.00313	0.036	0.037	2.00699
0.017	0.018	2.00332	0.037	0.038	2.00719
0.018	0.019	2.00352	0.038	0.039	2.00738
0.019	0.020	2.00371	0.039	0.040	2.00757
0.020	0.021	2.00390	0.040	0.041	2.00777

Tabela 6.1: Resultados do teste de convergência

# Capítulo 7

## Aplicação Prática

O método matemático de representação geométrica por interpolação transfinita apresentado neste trabalho foi implementado em linguagem computacional. Seu código foi incorporado em um ambiente de programação científica denominado PZ, escrito em linguagem C++ orientada a objetos, o qual é voltado para o desenvolvimento de algoritmos de elementos finitos.

O PZ foi idealizado e desenvolvido pelo *Prof. Philippe R. B. Devloo* [7], motivado pelas limitações das ferramentas disponíveis até então em linguagens seqüenciais (Fortran, por exemplo). Seu código continua em expansão através das contribuições de acadêmicos e pesquisadores [22], e encontra-se disponível no endereço <http://labmec.fec.unicamp.br/pz/download>.

Um dos aplicativos desenvolvidos com esta versão do PZ é um *software* denominado IP3D<sup>1</sup>, fruto de uma das parcerias de pesquisa entre a Petrobras e o LabMeC *et al.*[17] da Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Campinas. Sua função principal é calcular o índice de produtividade (IP) de poços de petróleo através de simulação numérica tridimensional.

$$IP = \frac{\text{vazão}}{\text{diferencial de pressão}} = \frac{Q}{\Delta p} \quad (7.1)$$

São contempladas as seguintes configurações:

- Poço vertical, reservatório quadrado ou circular;
- Poço horizontal, reservatório retangular ou elíptico.

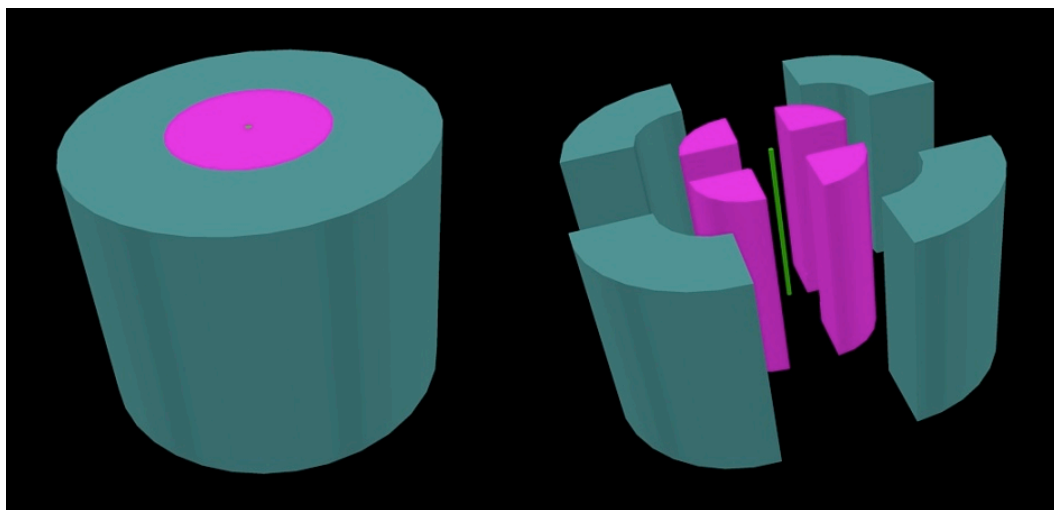
---

<sup>1</sup>O IP3D é de propriedade da Petrobras.

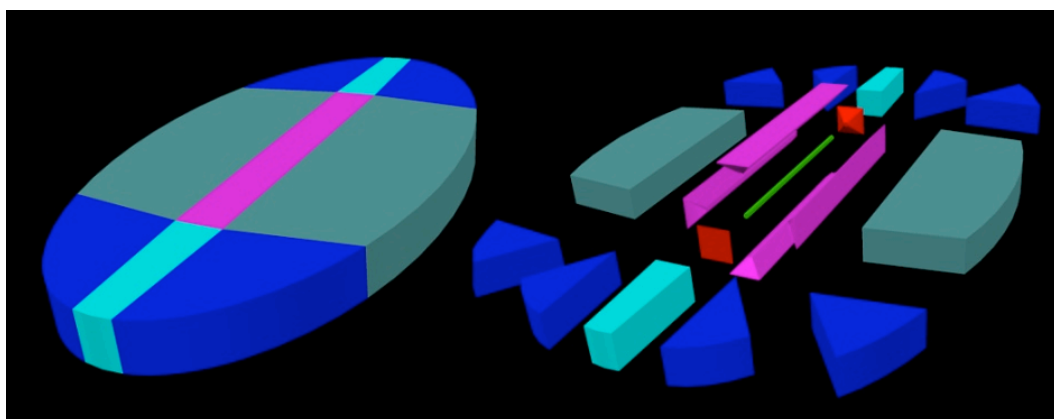
A modelagem geométrica por interpolação transfinita proporcionou ao IP3D a representação exata do domínio estudado por meio de uma malha tridimensional que utiliza poucos elementos (denominada malha mínima):

- 9 elementos tridimensionais para a representação das configurações de poço vertical;
- 19 elementos tridimensionais para a representação das configurações de poço horizontal.

O refinamento aplicado posteriormente à malha mínima diz respeito somente à melhoria da qualidade de aproximação da solução.

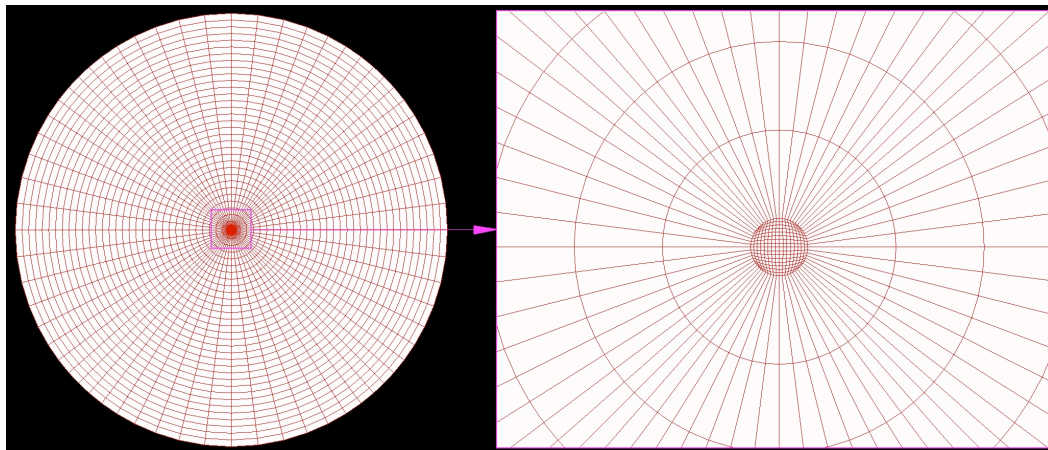


(a) Poço vertical, reservatório circular

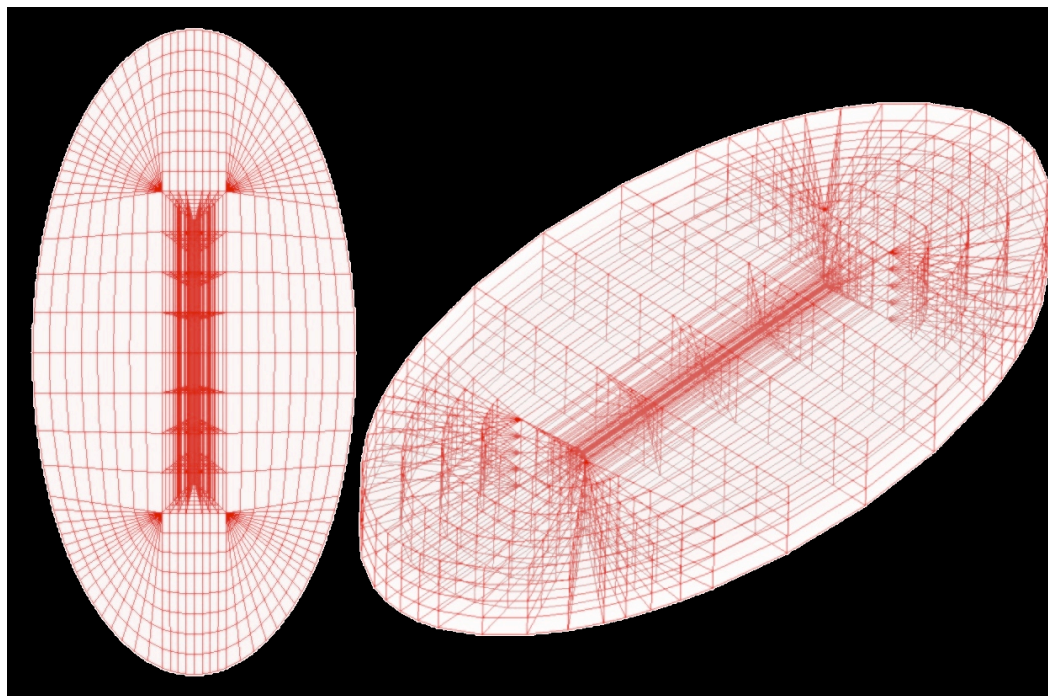


(b) Poço horizontal, reservatório elíptico

Figura 7.1: Malha mínima: representação exata do domínio estudado com poucos elementos



(a) Poço vertical, reservatório circular



(b) Poço horizontal, reservatório elíptico

Figura 7.2: Wireframe das malhas

O problema de valor de contorno resolvido pelo IP3D surge da Lei de Conservação de Massa, considerando o fluido monofásico incompressível de fluxo isotérmico em regime permanente, desprezando-se o efeito da gravidade:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left[ -\frac{1}{\mu} \overleftrightarrow{K} \nabla p \right] = 0 \\ p = p_r \text{ em } \partial\Omega_{res} \\ p = p_w \text{ em } \partial\Omega_{well} \end{cases} \quad (7.2)$$

sendo:

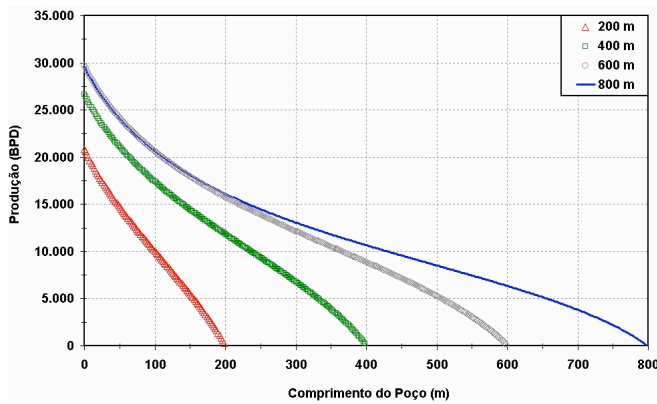
- $\mu$  a viscosidade do fluido;
- $\overleftrightarrow{K}$  o tensor de permeabilidades do meio poroso;
- $\nabla p$  o gradiente de pressões;
- $\partial\Omega_{res}$  e  $\partial\Omega_{well}$  o contorno do domínio do reservatório e do poço, respectivamente.

A equação 7.2 tem como solução a variável pressão ( $p$ ). Como pós-processamento, o IP3D apresenta (dentre outros) o valor obtido para o IP (equação 7.1), o perfil de distribuição do *fluxo* e do *gradiente do fluxo* ao longo do poço. Para validação, foram utilizados os dados de domínio público do campo de *Troll*, localizado a 60 km de *Bergen* (Noruega), operado pela *Norsk Hydro*.

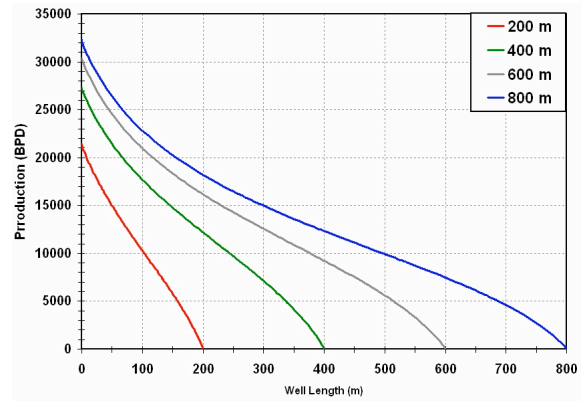
<b>Poço Horizontal, Reservatório Retangular</b>	
Raio de drenagem do reservatório	850 m
Espessura do reservatório	22 m
Permeabilidade horizontal do reservatório	8500 mD
Permeabilidade vertical do reservatório	1500 mD
<i>Drawdown</i> no reservatório	2.2 m
Comprimento do poço	200 a 800 m
Diâmetro do poço	6"
Densidade do óleo	881 kg/m <sup>3</sup>
Viscosidade do óleo	1.43 cP

Tabela 7.1: Dados do campo de Troll

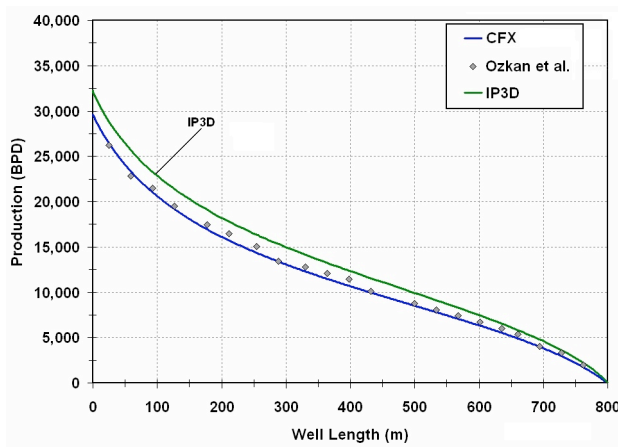
Os resultados obtidos através do IP3D foram comparados com os obtidos pelo *software* comercial ANSYS CFX<sup>©</sup> e com os apresentados pelos estudos dos autores *Ozkan, Sarica e Hazi* no artigo [8]. Foram realizados testes para quatro comprimentos de poço: 200m, 400m, 600m e 800m, os quais são apresentados a seguir:



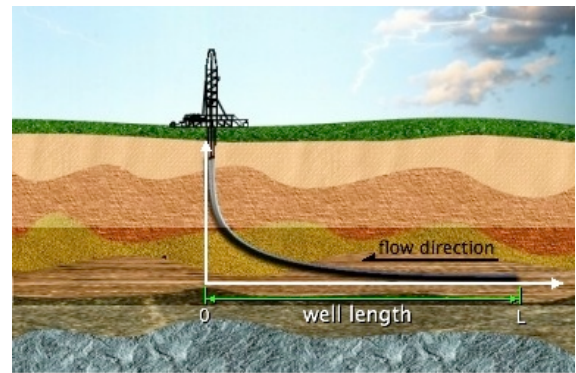
(a) ANSYS CFX<sup>®</sup>



(b) IP3D



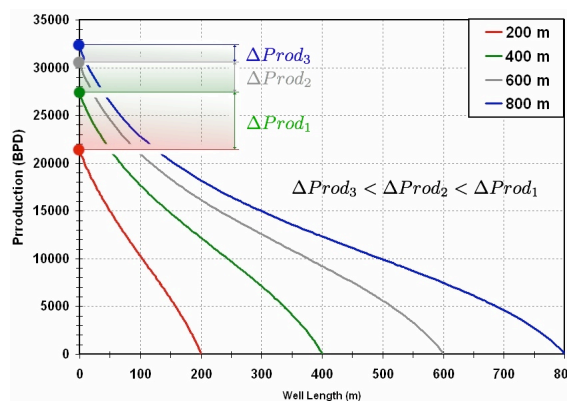
(c) Sobreposição ANSYS CFX<sup>®</sup>, IP3D, Ozkan (800m)



(d) Poço horizontal

Figura 7.3: Perfil de distribuição de vazão

Uma observação interessante a respeito dos gráficos 7.3a e 7.3b é que já era de se esperar que o aumento no comprimento do poço ocasionasse incrementos na produção cada vez menores (comportamento assintótico), uma vez que a influência da perda de carga ao longo do poço se torna cada vez mais significativa. Este comportamento é captado, adequadamente, apenas pelo IP3D.





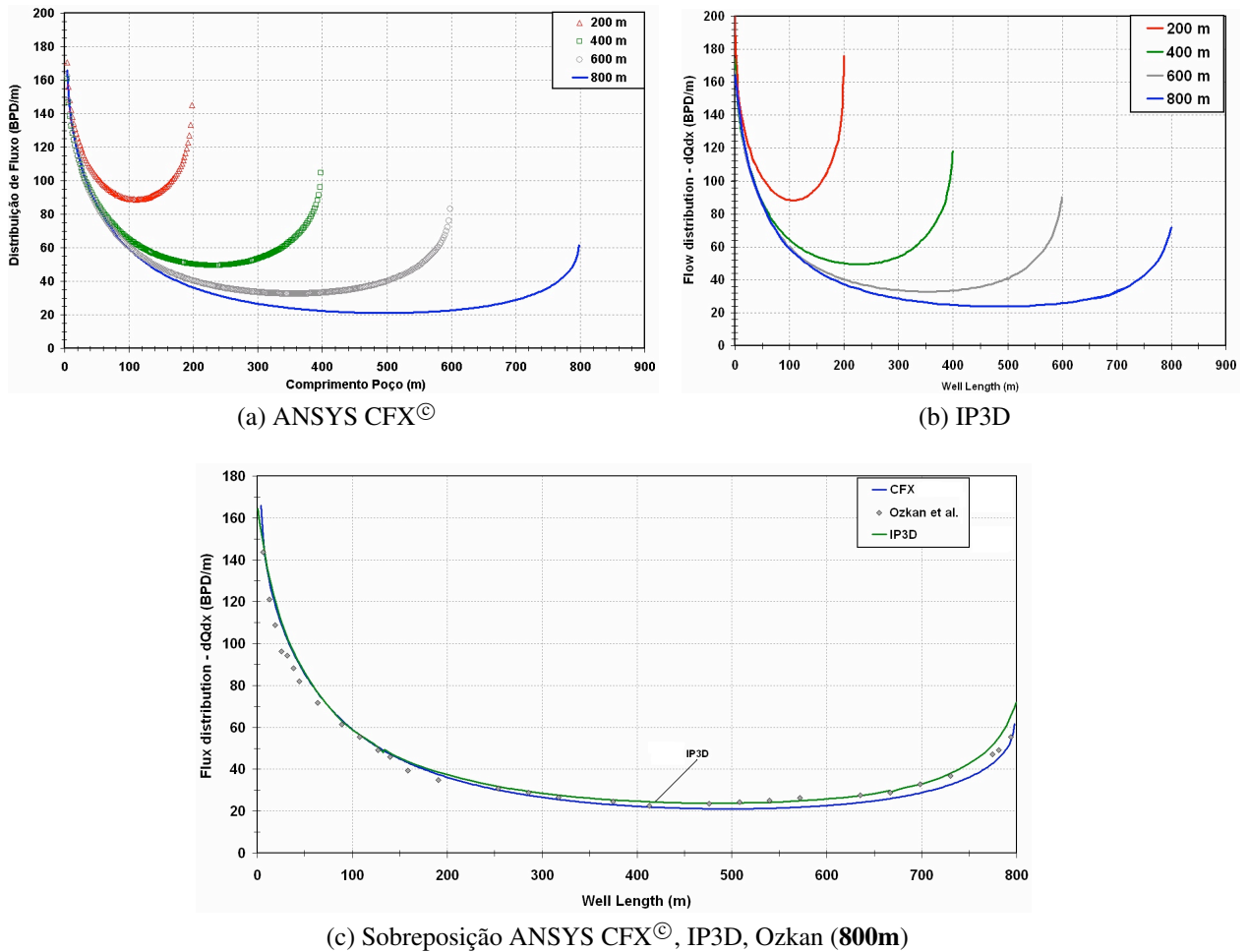


Figura 7.4: Perfil de distribuição de fluxo

Com estes testes (e vários outros aqui não citados), pôde-se comprovar a consistência dos resultados produzidos pelo IP3D, validando inclusive o método de representação geométrica apresentado nesta dissertação. Outro fator muito positivo foi o tempo de processamento: 3 minutos aproximadamente. É importante salientar que ANSYS CFX<sup>©</sup> apresenta tempo de processamento superior a 24 horas, uma vez que apresenta uma gama muito ampla de pós processamentos, gráficos, arquivos de saída etc. Esta característica do IP3D foi alcançada por tratar-se de uma simulação muito específica, em detrimento do que foi solicitado pela Petrobras ao LabMeC sobre a utilização de todos os recursos de otimização e performance disponíveis, inclusive na malha.

# Capítulo 8

## Conclusão

A generalização do método matemático de representação geométrica por interpolação transfinita desenvolvido neste trabalho demonstrou-se eficiente ao representar exatamente domínios de contorno descrito por funções analíticas, reduzindo sensivelmente a quantidade de elementos de uma malha. Como consequência, a economia de recursos computacionais e o tempo de processamento dos métodos de simulação numérica foram beneficiados, atestando a contribuição deste estudo, tanto em caráter teórico quanto prático.

Uma característica importante deste desenvolvimento é que diferentes tipos de topologia aqui não abordados poderão adequar-se naturalmente na metodologia apresentada no capítulo 4, bem como as mesmas topologias (triângulo, quadrilátero, tetraedro, pirâmide, prisma e hexaedro) com domínios de referência diferentes dos apresentados na tabela 4.1, uma vez que as *blending functions* de seus nós ( $\phi_i$ ), *blending functions* de seus lados ( $\varphi_j$ ) e respectivas transformações ( $T_j(\xi)$ ) serão redefinidos para cada tipo de elemento e domínio pelos mesmos conceitos introduzidos.

As aplicações deste método não se restringem somente às simulações numéricas. Indústrias de animação gráfica por computador e de jogos eletrônicos também poderão usufruir de suas potencialidades por proporcionar facilidade e qualidade de modelagem de formas geométricas complexas a custos reduzidos.

# Referências Bibliográficas

- [1] I. Babuska. Stability of a domain of definition with respect to a boundary perturbation, of basic problems of theory of partial differential equations, mainly in accordance with elasticity theory. *Czechoslovak Math. J.*, 11(86):7–105, 165–203, 1961.
- [2] R. E. Barnhill and Riesenfeld R. F. *Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, 1974.
- [3] P. Bézier. Définition numérique des courbes et surfaces I. *Automatisme*, XI:625–632, 1966.
- [4] S. A. Coons. Surfaces for computer aided design of space forms. MIT Project MAC-TR 41, National Technical Information Service, 1967.
- [5] C. de Boor. Bicubic spline interpolation. *J. Math. Phys.*, 41:212–218, 1962.
- [6] P. de Casteljaou. Outillages méthodes calcul. Technical report, A. Citroen, Paris, 1959.
- [7] P. R. B. Devloo. PZ-object oriented finite element software. Technical report, 2005.
- [8] M. Haci E. Ozkan, C. Sarica. Influence of pressure drop along the wellbore on horizontal well productivity. *Society of Petroleum Engineers (SPE)*, 3(SPE 57687), September 1999.
- [9] Gerald Farin. *Curves and Surfaces for CAGD - A Pratical Guide*. Morgan Kaufmann Publishers, 5th edition, 2002.
- [10] I. Faux and M. Pratt. Computational geometry for design and manufacture. Ellis Horwood, 1979.
- [11] J. Ferguson. Multivariable curve interpolation. *J ACM*, 11(2):221–228, 1964.
- [12] A. R. Forrest. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Design*. PhD thesis, Cambridge University CAD Group, July 1968.
- [13] F. Gerald. A history of curves and surfaces in CAGD. Technical report, Arizona State University, Computer Science and Engineering.

- [14] W. J. Gordon and C. A. Hall. Transfinite element methods: Blending function interpolation over arbitrary curved element domains. *Numerische Mathematik*, 21(2):109–129, April 1973.
- [15] A. Jain. Error visualization in comparison of b-spline surfaces. Master's thesis, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, September 1999.
- [16] J. Karup. On a new mechanical method of graduation. *Trans. of the Second International Actuarial Congress*, pages 78–109, 1899.
- [17] LabMeC (Laboratório de Mecânica Computacional):Philippe Remy Bernard Devloo, Edimar Cesar Rylo, Gustavo Camargo Longhin, Tiago Luís Duarte Forti, Paulo Cesar de Alvarenga Lucci, Agnaldo Monteiro Farias. Faculdade de Engenharia Civil - Universidade Estadual de Campinas.
- [18] J. L. Lagrange. Lectures on elementary mathematics. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1898.
- [19] S. A. Nazarov and V. G. Maz'ya. Paradoxes of limit passage in solutions of boundary value problems involving approximations of smooth domains by polygonal domains. *Math USSR IZV*, 29, 1987.
- [20] L. Piegl. On NURBS: A survey. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(1):55–71, 1991.
- [21] R. F. Riesenfeld. *Applications of B-Spline Approximation to Geometric Problems of Computer-Aided Design*. PhD thesis, Syracuse U., 1972.
- [22] E. C. Rylo. *Auto adaptatividade hp utilizando biblioteca de padrões de refinamento com estimativa de erro e avaliação de padrões hp em paralelo*. PhD thesis, FEC-Unicamp, 2007.
- [23] O. M. Sapondzhyan. Bending of thin elastic plates. *Erevan: Ayastan*, 1975.
- [24] A. Sard and S. Weintraub. *A Book of Splines*. Wiley, 1971.
- [25] F. Yamaguchi. Curves and surfaces in computer aided geometric design. *Springer-Verlag*, 1988.