

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Formulações Gerais e Exatas para a Probabilidade de Outage e para o Desempenho de um Método Híbrido de Combinação em Sistemas Sem Fio

Autor: Flávio du Pin Calmon

Orientador: Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Telecomunicações e Telemática**.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub DECOM/FEEC/Unicamp
Prof. Dr. Paulo Cardieri DECOM/FEEC/Unicamp
Prof. Dr. Álvaro Augusto Machado de Medeiros Fundação CPqD

Campinas, SP

Março/2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C137f Calmon, Flávio du Pin
Formulações gerais e exatas para a probabilidade de
outage e para o desempenho de um método híbrido de
combinação em sistemas sem fio
Flávio du Pin Calmon. – Campinas, SP: [s.n.], 2009.

Orientador: Miched Daoud Yacoub.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Sistemas de comunicação sem fio. 2. Probabilidades.
3. Rádio - Transmissores e Transmissão - Desvanecimento.
4. Variáveis aleatórias. 5. Telecomunicações. I. Yacoub,
Michel Daoud. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
III. Título

Título em Inglês: General exact formulations for the outage probability and for
the performance of a hybrid combining method in wireless
communication systems
Palavras-chave em Inglês: Wireless communication systems, Probability, Fading (Radio),
Stochastic variables, Telecommunication
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática
Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora: Álvaro Augusto Machado de Medeiros, Paulo Cardieri
Data da defesa: 30/03/2009
Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Flávio Du Pin Calmon

Data da Defesa: 30 de março de 2009

Título da Tese: "Formulações Gerais e Exatas para a Probabilidade de Outage e para o Desempenho de um Método Híbrido de Combinação em Sistemas Sem Fio"

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub (Presidente): _____ 

Dr. Álvaro Augusto Machado de Medeiros: _____ 

Prof. Dr. Paulo Cardieri: _____ 

Resumo

Este trabalho propõe uma formulação nova e prática para a probabilidade de *outage* em sistemas de comunicação sem fio, denominada Probabilidade de *Outage* Conjunta (JOP, do inglês *Joint Outage Probability*). Dado um conjunto de restrições para as razões sinal-interferência-mais-ruído de sinais mutuamente interferentes, a JOP corresponde à probabilidade de que pelo menos uma dessas restrições não seja atendida. Uma solução exata e geral para a JOP é demonstrada, junto com uma condição necessária e suficiente para que ela seja não-trivial. Ademais, uma expressão fechada para a JOP em um ambiente Rayleigh onde os sinais são independentes é apresentada. As formulações obtidas são ilustradas através de um exemplo em alocação de potência.

Além disso, este trabalho introduz e investiga um esquema geral de combinação de diversidade, denominado MRCS, baseado na seleção de sinais combinados por razão máxima. Este método de combinação possui uma implementação simples e uma formulação analítica matematicamente tratável, podendo ser diretamente aplicada a situações onde existe seleção de sítio. Uma análise geral da distribuição de probabilidade (confiabilidade), taxa de cruzamento de nível e duração média de desvanecimento na saída do combinador é apresentada, além de exemplos para um ambiente de desvanecimento Nakagami- m . No entanto, o principal resultado da análise do MRCS é a demonstração de uma expressão fechada, exata e simples de implementar computacionalmente para a razão sinal-ruído média da saída do combinador. Esta expressão pode ser utilizada quando o produto entre o número de ramos combinados por razão máxima e o parâmetro de Nakagami- m é inteiro, generalizando um resultado já apresentado na literatura. As formulações introduzidas aqui podem ser diretamente aplicadas ao dimensionamento de redes sem fio.

Palavras-chave: Probabilidade de *Outage*, Razão Sinal-Interferência-Mais-Ruído, Rayleigh, Controle de Potência, Combinação de Diversidade, Combinação por Razão Máxima, Combinação por Seleção, Nakagami- m , Soft Handoff.

Abstract

This work presents a useful, novel formulation for the outage probability in wireless communication systems, here named Joint Outage Probability (JOP). Given a set of signal-to-interference-plus-noise ratio restrictions for mutually interfering signals, the JOP corresponds to the probability that at least one of the restrictions is not satisfied. A general exact solution for the JOP is derived, along with a necessary and sufficient condition for a non-trivial solution. In addition, a closed-form expression for the JOP in an independent non-identically distributed Rayleigh scenario is obtained. An application example of the formulations is presented by a power allocation problem.

In addition, this work also introduces and investigates a general diversity combining scheme, here named MRCS, in which maximal-ratio combined signals are chosen on a selection combining basis. This combining method has a simple implementation and a tractable analytical formulation that can be directly applied to situations in which site selection exists. A general analysis of the probability distribution (reliability), level crossing rate, and average fade duration at the output of the combiner is provided, along with examples for a Nakagami- m fading environment. The main result of the MRCS analysis, however, is the derivation of an exact, easy-to-evaluate closed-form expression for the mean signal-to-noise ratio at the output of the combiner. Such an expression is applicable for conditions in which the product of the number of maximal ratio combining branches and the Nakagami- m parameter is an integer and it generalizes a result presented elsewhere in the literature. The formulations derived here find a direct applicability in the dimensioning of practical wireless networks.

Keywords: Outage Probability, Signal-to-Interference-Plus-Noise Ratio, Rayleigh, Power Control, Diversity Combining, Maximal Ratio Combining, Selection Combining, Nakagami- m , Soft Handoff.

Ao Criador.

*Aos meus pais, Katya e Paulo,
e ao meu irmão, André.*

Agradecimentos

Ao Senhor, que em sua infinita sabedoria me fez perder os óculos, atrasou o vôo, mostrou o erro, parou o elevador e fez chover, entre incontáveis outras coisas. Obrigado, Senhor.

Ao meu irmão André, a pessoa mais maravilhosa que eu conheço, por ter tornado esse sonho possível.

Ao meu pai, Paulo, por ser o meu professor, mentor e amigo em todos os momentos do meu Mestrado e da vida. À minha mãe, Katya, por seu amor, apoio e carinho incondicional.

Ao Prof. Michel, pelo estímulo, confiança, paciência e amizade durante este trabalho. Agradeço especialmente por ter me dado o privilégio de ser seu orientando.

A todos os amigos e colegas do WissTek. Em especial, agradeço ao Álvaro por ter me apoiado ao longo dos primeiros passos deste trabalho, à Renata por sua amizade, sabedoria e paciência, ao Ugo por ter me ajudado sem hesitar nas inúmeras vezes que precisei, ao Cândido por seus conselhos e inspiração, ao Yusef pelas inúmeras discussões interessantes, ao Luís Gustavo (Maguilão) por sua amizade, à Maice e ao Ednei. Agradeço, também, a todos aqueles que passaram pelo WissTek enquanto estive aqui, em especial ao Daniel, ao Pedro (Pedrão) e à Renata Rampim.

A todos os Professores que me apoiaram ao longo desse período, em especial ao Prof. Max Costa, Prof. Paulo Cardieri e Prof. Adson Rocha.

Aos amigos que fiz na Unicamp, André Pasqual, Raquel, Alan, Darli, Divanílson, Renato, Gustavo, entre muitos outros.

Finalmente, à FAPESP e à CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
Glossário	xii
Lista de Símbolos	xiii
Trabalhos Publicados e Submetidos	xv
1 Introdução	1
1.1 Interferência e <i>Outage</i> em redes sem fio	2
1.2 Combinação de diversidade	2
1.3 Estrutura e contribuições da dissertação	3
2 Probabilidade de Outage Conjunta: Formulações Gerais	5
2.1 Descrição formal da JOP para sistemas limitados por interferência	6
2.2 A solução exata para a Probabilidade de <i>Outage</i> Conjunta	7
2.2.1 Dividindo \mathcal{S}^N em $N - 1$ regiões	8
2.2.2 Demonstração que $\bigcup_{j=1}^{N-1} \mathcal{S}_j^N = \mathcal{S}^N$	10
2.2.3 Demonstração que \mathcal{S}_j^N e \mathcal{S}_k^N formam regiões de integração distintas	11
2.2.4 Resultado Principal	11
2.3 A condição para \mathcal{S}^N ser não-trivial	12
2.4 Probabilidade de <i>Outage</i> Conjunta considerando ruído aditivo	13
2.4.1 Uma solução exata para a JOP com ruído aditivo	14
2.5 Uma formulação para condições de <i>outage</i> específicas	15
2.6 Conclusões	16
3 Probabilidade de Outage Conjunta: Aplicações	17
3.1 A formulação para a JOP em um ambiente Rayleigh limitado por interferência	17
3.1.1 Cálculo da JOP para um ambiente Rayleigh	18
3.1.2 Resultado principal	20
3.1.3 Validação e resultados numéricos	21
3.2 A formulação para a JOP em um ambiente Rayleigh com ruído aditivo	22
3.3 Um Exemplo de Aplicação: Controle de Potência	23

3.3.1	Minimizando a Probabilidade de <i>Outage</i> Conjunta máxima	24
3.3.2	Minimizando a potência total transmitida com restrições para a JOP	24
3.3.3	Exemplos numéricos	25
3.4	Conclusões	27
4	MRCS: Introdução e Estatísticas	28
4.1	Descrição geral do MRCS	29
4.2	Taxa de cruzamento de nível e duração média de desvanecimento	30
4.3	Resultados numéricos	32
4.4	Conclusões	35
5	MRCS: Análise da Razão Sinal-Ruído na Saída do Combinador	36
5.1	A expressão fechada para a SNR média na saída do combinador MRCS	36
5.2	Resultados Numéricos	39
5.3	Conclusões	39
6	Considerações Finais	41
6.1	Resultados Principais – Probabilidade de <i>Outage</i> Conjunta	42
6.2	Resultados Principais – MRCS	43
6.3	Trabalhos Futuros	44
6.3.1	Probabilidade de <i>Outage</i> Conjunta	44
6.3.2	MRCS	44
	Referências bibliográficas	46
A	Demonstração Auxiliar	50
B	Um Breve Histórico do Trabalho Desenvolvido	53

Lista de Figuras

3.1	P_I para o ambiente Rayleigh i.i.d. com restrições idênticas e iguais a β	21
3.2	Alocação ótima de potências para uma rede aleatória.	26
3.3	Alocação ótima de potências para uma rede em grade.	27
4.1	LCR e AFD na saída do combinador MRCS para um ambiente Nakagami.	33
4.2	Comparação da LCR e AFD na saída do combinador MRCS considerando diferentes cenários.	34
5.1	SNR média normalizada na saída do combinador MRCS	40

Lista de Tabelas

3.1	Valores teóricos e simulados para a Probabilidade de <i>Outage</i> Conjunta	22
-----	---	----

Glossário

JOP	–	Probabilidade de <i>Outage</i> Conjunta
SINR	–	Razão sinal-interferência-mais-ruído
SNR	–	Razão sinal-ruído
i.i.d.	–	Independentes e identicamente distribuídos
pdf	–	Função densidade probabilidade
PDF	–	Função distribuição acumulada
MRC	–	Combinação por razão máxima
EGC	–	Combinação por ganho igual
SC	–	Combinação por seleção
MRCS	–	Combinação por seleção de sinais combinados por razão máxima
ERB	–	Estação rádio-base
MSC	–	<i>Mobile switching center</i>
LCR	–	Taxa de cruzamento de nível
AFD	–	Duração média de desvanecimento
TAS	–	Seleção da antena de transmissão

Lista de Símbolos

P_I	– Probabilidade de <i>Outage</i> Conjunta
$P_{\bar{I}}$	– Complemento da Probabilidade de <i>Outage</i> Conjunta ($1 - P_I$), também referido como Probabilidade de <i>Outage</i> Conjunta
\mathcal{S}^N	– Região no espaço N -dimensional onde todas as restrições SINR de sinais mutuamente interferentes são satisfeitas desconsiderando o ruído aditivo
\mathcal{S}_j^N	– sub-região j de \mathcal{S}^N
\mathcal{S}_σ^N	– Região no espaço N -dimensional onde todas as restrições SINR de sinais mutuamente interferentes são satisfeitas considerando o ruído aditivo
β_i	– Restrição SINR para o sinal i
W_i	– Potência instantânea do sinal i
$f_{\mathbf{W}}(\cdot)$	– Função densidade probabilidade conjunta dos sinais W_1, \dots, W_N
$\mathbb{K}_{j,k}$	– Constante dada em termos de β_j e β_k
$\mathbb{C}_{j,N}$	– Constante dada em termos de β_j e β_N
n_i	– Ruído aditivo no sinal W_i
a_i	– Constante definida em termos de β_i
U_j	– Variável resultante da transformação de W_i
$\boldsymbol{\beta}$	– Corresponde ao vetor $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$
\mathbf{n}	– Corresponde ao vetor (n_1, n_2, \dots, n_N)
$g_j(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{n})$	– Função utilizada na transformação da variável W_j para U_j
$P_{\bar{I}}(\cdot; \cdot)_N$	– Probabilidade de <i>Outage</i> Específica
$f_{W_i}(\cdot)$	– Função densidade probabilidade dos sinal W_i
Ω_i	– Potência média do sinal W_i
$\boldsymbol{\Omega}$	– Corresponde ao vetor $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$
$P_{\bar{I}0}$	– Complemento da Probabilidade de <i>Outage</i> Conjunta desconsiderando o ruído aditivo
$M_X[\cdot]$	– Função geradora de momento de X
$\mathbb{E}[\cdot]$	– Valor esperado
$\text{Var}(\cdot)$	– Variância
P_i	– Potência de transmissão de um nó i
P_i^{\min}	– Potência mínima de transmissão de um nó i
P_i^{\max}	– Potência máxima de transmissão de um nó i
d_{ij}	– Distância entre os nós i e j
α_{ij}	– Perda de percurso entre os nós i e j
β_{ij}	– Limiar SINR para a recepção com sucesso de uma transmissão do nó j para o nó i
JOP_i	– Probabilidade que ocorra um <i>outage</i> no nó i

K_i	–	Constante definida em termos de dos valores de β_{ij}
ϵ_i	–	Restrição para a probabilidade de <i>outage</i> conjunta de um nó i
M_i	–	Número de ramos do receptor MRC i
γ	–	Razão sinal-ruído na saída do combinador MRCS
$\bar{\gamma}$	–	Razão sinal-ruído média na saída do combinador MRCS
γ_{ij}	–	SNR do sinal recebido pelo j -ésimo ramo do i -ésimo receptor MRC
$F_{\text{mrc}_i}(\cdot)$	–	Função distribuição acumulada da SNR na saída do receptor MRC i
$f_{\text{mrc}_i}(\cdot)$	–	Função densidade probabilidade da SNR na saída do receptor MRC i
$F_{\text{sel}}(\cdot)$	–	Função distribuição acumulada da SNR na saída do combinador por seleção
$f_{\text{sel}}(\cdot)$	–	Função densidade probabilidade da SNR na saída do combinador por seleção
m_i	–	Parâmetro de desvanecimento de Nakagami em cada ramo do receptor MRC i , supondo que os ramos são i.i.d.
γ_{0i}	–	SNR média em cada ramo do receptor MRC i , considerando que os ramos são i.i.d.
Υ_i	–	SNR normalizada na saída do receptor MRC i
R	–	Envoltória do sinal na saída do combinador MRCS
R_i	–	Envoltória do sinal na saída do receptor MRC i
$N_R(\cdot)$	–	Taxa de cruzamento de nível do sinal na saída do combinador MRCS
$N_{R_i}(\cdot)$	–	Taxa de cruzamento de nível do sinal na saída do receptor MRC i
$F_{R_i}(\cdot)$	–	Função distribuição acumulada da envoltória na saída do receptor MRC i
$T_R(\cdot)$	–	Duração média de desvanecimento na saída do combinador MRCS
$T_{R_i}(\cdot)$	–	Duração média de desvanecimento na saída do receptor MRC i
f_m	–	Desvio de Doppler máximo
ρ_i	–	envoltória normalizada
α_i	–	Razão entre o parâmetro m_i e o SNR médio γ_{0i} em cada ramo de um receptor MRC i , considerando que os ramos são i.i.d.
\mathbf{M}_i	–	Produto entre o número de ramos M_i e o parâmetro de desvanecimento m_i em um receptor MRC i , considerando os ramos i.i.d.
$b_j(i)$	–	j -ésimo bit da representação binária de i
$w(i)$	–	Peso de Hamming (número de bits ‘1’) de i
$\mathbf{1}$	–	vetor linha composto por ‘1s’
$(\cdot)^T$	–	Transposto de um vetor ou matriz

Trabalhos Publicados e Submetidos

1. F. P. Calmon e M. D. Yacoub, “Joint outage probability: An exact formulation for the outage problem in wireless systems”. *XXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT’08)*, Rio de Janeiro, Brasil, setembro, 2008.
2. F. P. Calmon e M. D. Yacoub, “A practical diversity combining scheme based on the selection of maximal ratio combined signals”. *XXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT’08)*, Rio de Janeiro, Brasil, setembro, 2008.
3. F. P. Calmon e M. D. Yacoub, “A General Exact Formulation for the Outage Probability in Interference-Limited Systems”. *2008 IEEE Global Communications Conference (Globecom’08)*, New Orleans, EUA, dezembro, 2008.
4. F. P. Calmon e M. D. Yacoub, “MRCS: Selecting Maximal Ratio Combined Signals – A Practical Hybrid Diversity Combining Scheme”. *IEEE Transactions on Wireless Communications*. Aceito, fevereiro, 2009.
5. F. P. Calmon e M. D. Yacoub, “Outage probability analysis in interference-limited systems: a general exact formulation and practical applications”. *IEEE Transactions on Wireless Communications*. Submetido, julho, 2008.

Capítulo 1

Introdução

Ao longo dos últimos anos, observou-se uma rápida expansão no mercado de comunicações sem fio, elevando a demanda por tecnologias de acesso à informação cada vez mais velozes, ubíquas e de alto desempenho. Esta demanda desafia os pesquisadores da área a criarem sistemas *wireless* complexos e que lidem com uma alta densidade de nós transmissores e receptores, operando nos mais diversos ambientes de propagação. As novas tecnologias desenvolvidas resultam em impactos sociais e econômicos profundos, como pode ser visto, por exemplo, pela ampla adoção do sistema celular e a popularização do padrão Wi-Fi (IEEE 802.11) [1].

Os obstáculos presentes no desenvolvimento de novas tecnologias sem fio não são meramente práticos, no sentido que não estão limitados à questões de implementação. Para criar tecnologias eficientes que atendam à crescente necessidade por velocidade e ubiquidade no acesso à informação, é necessário analisar diversos aspectos teóricos e fundamentais dos sistemas sem fio. Um firme embasamento teórico é a força motora por trás das mais importantes inovações práticas na área. É apenas através de um entendimento profundo das limitações fundamentais dos sistemas sem fio e da formulação de ferramentas analíticas que caracterizam esses sistemas que podemos caminhar em direção às tecnologias do futuro.

Nesse sentido, este trabalho apresenta resultados teóricos novos que podem ser aplicados na análise e dimensionamento de sistemas sem fio. Dois tópicos principais são abordados: (i) um modelo analítico para o dimensionamento do efeito conjunto da interferência entre múltiplas comunicações simultâneas e (ii) um esquema de combinação de diversidade no qual sinais combinados por razão máxima são selecionados através de um combinador por seleção. A seguir, será apresentado a motivação dos dois tópicos abordados neste trabalho.

1.1 Interferência e *Outage* em redes sem fio

As redes sem fio modernas estão se tornando gradativamente mais densas e abrangendo mais nós, levando a um maior compartilhamento do canal sem fio. Redes de sensores e redes ad hoc, por exemplo, podem conter dezenas, ou até mesmo centenas de nós que compartilham o mesmo meio de transmissão. Como consequência, a análise do efeito da interferência gerada pelas múltiplas comunicações simultâneas se torna fundamental para o dimensionamento desses sistemas.

Tradicionalmente, analisa-se o efeito da interferência considerando apenas uma comunicação, ou seja, dimensionando seu efeito para um sinal transmitido em particular e generalizando o resultado para o sistema como um todo. Contudo, na prática, esta abordagem pode ser insuficiente, sendo necessário considerar conjuntamente o efeito da interferência em diversas comunicações simultâneas, i.e., em um conjunto de sinais mutuamente interferentes. O equacionamento do impacto da interferência no desempenho do sistema nesse caso é consideravelmente mais complexo, envolvendo a análise de eventos conjuntos e intrincados.

O efeito da interferência pode ser dimensionado através da Probabilidade de *Outage*, definida como a probabilidade que a razão sinal-interferência-mais-ruído de uma comunicação esteja abaixo de um valor tolerável. No entanto, como será discutido em mais detalhes nos próximos capítulos, o valor da Probabilidade de *Outage* de apenas uma comunicação não caracteriza o efeito da interferência mútua entre diversas comunicações simultâneas, i.e., a probabilidade de mais de um sinal estar em *outage* ao mesmo tempo. Para responder a esta questão, será introduzida uma formulação mais geral para a interferência em redes sem fio, batizada de *Probabilidade de Outage Conjunta*.

1.2 Combinação de diversidade

O efeito do desvanecimento em comunicações sem fio pode ser mitigado através de métodos de diversidade, nos quais explora-se o fato de o desvanecimento em canais independentes constituírem eventos independentes. Assim, se a mesma informação estiver disponível em dois ou mais canais (chamados de ramos de diversidade), a probabilidade de todos os canais estarem sujeitos a um desvanecimento profundo simultaneamente é pequena. Consequentemente, utilizando um algoritmo apropriado que combina a informação recebida nos diversos ramos (conhecido como combinação de diversidade), é possível obter um sinal resultante onde o efeito prejudicial do desvanecimento é significativamente reduzido [2, 3].

Neste trabalho, serão consideradas apenas as técnicas de diversidade *microscópicas*, i.e., técnicas que buscam combater o desvanecimento rápido (e.g., Rayleigh). Vários métodos de combinação de diversidade que buscam mitigar o desvanecimento rápido podem ser encontrados na literatura. Os

mais comuns são:

- **Combinação por seleção** – Os ramos de diversidade são continuamente monitorados de forma que o sinal com a maior razão sinal-ruído é selecionado como o sinal de saída do combinador.
- **Combinação por ganho igual** – Consiste em somar coerentemente os sinais recebidos, aplicando o mesmo ganho em cada ramo. A combinação por ganho igual é mais complexa que a combinação por seleção por exigir o uso de circuitos que alinhem a fase do sinal recebido.
- **Combinação por razão máxima** – O sinal detectado em cada ramo recebe um ganho proporcional a sua razão sinal-ruído. Os sinais resultantes são, então, somados coerentemente. Este esquema maximiza a SNR média na saída do combinador. No entanto, é mais intrincado que o combinador por ganho igual, visto que exige um conhecimento dos ganhos do canal.

Mais recentemente, técnicas híbridas de combinação de diversidade, compostas por mais de um dos método citados anteriormente, têm sido estudadas na literatura. Neste trabalho, realiza-se a análise de uma nova técnica de combinação híbrida que já é utilizada na prática, porém ainda não havia sido identificada como tal. Este método se baseia na seleção de sinais combinados por razão máxima, e encontra aplicações em sistemas celular 2G e 3G.

1.3 Estrutura e contribuições da dissertação

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

Capítulo 2 Apresenta uma formulação geral, exata e nova para a *Probabilidade de Outage Conjunta*, dependente apenas da distribuição conjunta dos sinais mutuamente interferentes e das respectivas restrições para a razão sinal-interferência-mais-ruído. Este capítulo também apresenta a definição formal da *Probabilidade de Outage Conjunta*, uma breve revisão bibliográfica sobre o tema e a condição necessária e suficiente para que a *Probabilidade de Outage Conjunta* seja não-trivial.

Capítulo 3 Introduce uma formulação exata e fechada para a *Probabilidade de Outage Conjunta* em um ambiente Rayleigh onde os sinais mutuamente interferentes são independentes. As expressões obtidas são ilustradas através de um exemplo em alocação ótima de potência.

Capítulo 4 Descreve o método híbrido de combinação de diversidade analisado neste trabalho, batizado de MRCS (do inglês *MRC Selection*). As estatísticas de confiabilidade, taxa de cruzamento de nível e duração média de desvanecimento são formuladas para o sinal na saída do combinador.

Capítulo 5 Deduz uma expressão fechada e exata para a razão sinal-ruído média na saída do combinador MRCS.

Capítulo 6 Apresenta as conclusões do trabalho, junto com um resumo dos resultados principais e uma lista de trabalhos futuros.

Apêndice A Descreve uma demonstração de um resultado auxiliar utilizado no Capítulo 3.

Apêndice B Discute a história deste trabalho, apresentando a origem dos problemas abordados nesta dissertação, a ordem cronológica dos resultados obtidos e alguns comentários gerais.

Capítulo 2

Probabilidade de Outage Conjunta: Formulações Gerais

A *Probabilidade de Outage*, ou *Probabilidade de Indisponibilidade*, é uma métrica fundamental para sistemas de comunicação sem fio. A probabilidade de *outage* é definida como a probabilidade que a razão sinal-interferência-ruído (SINR, do inglês *signal-to-interference-plus-noise ratio*) de um sinal recebido esteja abaixo de um determinado limiar [2, 4]. A SINR está diretamente relacionada à capacidade de sistemas que usam esquemas de espalhamento espectral, como sistemas CDMA [5]. Além disso, redes sem fio com muitos nós, como redes de sensores ou redes ad hoc, são intrinsicamente limitadas por interferência, possuindo a probabilidade de *outage* como um parâmetro fundamental para sua análise, projeto e implementação [6, 7, 8].

A dificuldade de análise de uma condição de *outage* pode variar drasticamente. Em algumas situações, o cálculo da probabilidade de um único evento simples pode ser suficiente. Esse é o caso, por exemplo, da análise do *outage* de um único sinal em um dado receptor, na qual consideramos a interferência como a soma de variáveis independentes [9, 10, 11]. No entanto, em outros cenários, a análise da indisponibilidade pode envolver o cálculo da probabilidade conjunta de eventos intrincados. Por exemplo, considere um problema de controle de admissão de chamadas, em que admite-se uma nova chamada no sistema apenas se a interferência sofrida por todas as chamadas (i.e., aquelas em andamento e a nova chamada admitida) permanecer abaixo de um determinado limiar aceitável [12, 13]. Caso as chamadas sejam independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) e o limiar sinal-interferência é o mesmo para todas as chamadas, pode-se aproximar a solução considerando a condição de *outage* de uma chamada arbitrária individual como a probabilidade de *outage* do sistema. Contudo, conforme mencionado, essa abordagem é apenas uma aproximação. Além disso, em situações práticas e em redes com múltiplas classes de tráfego, cada chamada do sistema é afetada diferentemente com a nova chamada admitida, visto que o limiar de interferência tolerado pode variar

para cada comunicação.

Um segundo exemplo no qual o cálculo da probabilidade de *outage* de um único evento pode não ser suficiente são as redes multi-conectadas, i.e., cujos nós estão conectados com múltiplos pares, como uma rede ad hoc. Neste caso, pode ser necessário dimensionar a probabilidade que ocorra uma falha em pelo menos uma comunicação (a probabilidade de pelo menos um nó estar em *outage*). Esse valor é especialmente importante no dimensionamento de redes que têm como principal objetivo a confiabilidade de conexão. Somado a isso, dado um conjunto de restrições de *outage*, parâmetros do sistema podem ser ajustados para que a confiabilidade máxima seja atingida. Por exemplo, esquemas de controle de potência podem ser criados buscando minimizar a potência total de transmissão ou a maior probabilidade de erro da rede.

À luz da discussão anterior, este capítulo apresenta uma formulação nova e exata para sistemas de comunicações sem fio, denominada *Probabilidade de Outage Conjunta* (JOP, do inglês *Joint Outage Probability*). Dado um conjunto de restrições para a razão sinal-interferência-mais-ruído de N sinais mutuamente interferentes, a JOP corresponde à probabilidade que ao menos uma restrição não seja satisfeita, ou, dualmente, que todas as N restrições sejam cumpridas. Inicialmente, apresenta-se uma formulação para a JOP em um sistema limitado por interferência. Em seguida, os resultados obtidos serão estendidos de forma a incluir o ruído aditivo no sistema. Finalmente, a formulação para a JOP será generalizada para englobar eventos de *outage* específicos, i.e., dado um conjunto de sinais mutuamente interferentes, a probabilidade de um grupo de sinais estar em *outage* enquanto outro grupo satisfaz as suas respectivas restrições para a SINR.

Apesar dos resultados obtidos aqui serem de natureza teórica, eles podem ser diretamente aplicados a uma gama de situações práticas, como controle de potência [14, 15, 16], detecção multi-usuário [17], posicionamento de sensores em uma rede, dimensionamento de redes sem fio (*multihop* ou não) [13, 18] e, conforme citado anteriormente, controle de admissão [19]. Os resultados introduzidos neste capítulo são inéditos na literatura sobre o tema.

2.1 Descrição formal da JOP para sistemas limitados por interferência

Sejam W_i , $i = 1, \dots, N$, as potências instantâneas de sinais mutuamente interferentes sujeitos a desvanecimento. Para que o sistema opere adequadamente, considerando que o mesmo é limitado por interferência, requer-se que a razão sinal-interferência no receptor para qualquer sinal W_i esteja acima de um limiar tolerável β_i , $i = 1, \dots, N$, especificado individualmente para cada comunicação.

Assim, os N sinais recebidos devem satisfazer o conjunto de desigualdades (2.1)¹, que, por sua vez, descreve uma região no espaço N -dimensional \mathcal{S}^N :

$$\mathcal{S}^N = \left\{ \frac{W_j}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N W_i} \geq \beta_j, \quad j = 1, \dots, N \right. \quad (2.1)$$

Define-se a *Probabilidade de Outage Conjunta* (P_I) como a probabilidade que pelo menos uma desigualdade em (2.1) não seja satisfeita. O valor de P_I pode ser calculado como

$$P_I = \int_{\mathcal{S}^N} f_{\mathbf{W}}(w_1, \dots, w_N) dw_1 \dots dw_N, \quad (2.2)$$

onde $f_{\mathbf{W}}(w_1, \dots, w_N)$ é a função densidade probabilidade (pdf) conjunta de W_1, \dots, W_N . Obviamente, $P_{\bar{I}} = 1 - P_I$ é a probabilidade que todas as desigualdades em (2.1) sejam atendidas.

2.2 A solução exata para a Probabilidade de *Outage* Conjunta

O principal desafio para calcular (2.2) é determinar os limites de integração sobre a região \mathcal{S}^N . Para tanto, \mathcal{S}^N será reformulada a partir dos seguintes passos:

1. \mathcal{S}^N será dividida em $N - 1$ regiões, representadas por \mathcal{S}_j^N , $j = 1, \dots, N - 1$, cada uma com limites de integração bem definidos;
2. Mostrar-se-á que a região formada pela união $\bigcup_{j=1}^{N-1} \mathcal{S}_j^N$ é equivalente a \mathcal{S}^N ;
3. Será demonstrado que \mathcal{S}_i^N e \mathcal{S}_j^N ($i \neq j$) formam regiões de integração distintas;
4. Como consequência dos passos anteriores, o lado direito de (2.2) será reescrito como a soma de $N - 1$ integrais.

A partir da reformulação de \mathcal{S}^N também é possível obter uma condição necessária e suficiente para que o hipervolume² de \mathcal{S}^N seja não-trivial. A demonstração desta condição será apresentada na próxima seção.

¹Em sistemas limitados por interferência, pode-se desconsiderar o ruído aditivo, visto que seu efeito é desprezível frente à interferência de outras transmissões.

²O termo hipervolume refere-se à integral N -dimensional sobre a região dada no contexto.

2.2.1 Dividindo \mathcal{S}^N em $N - 1$ regiões

As restrições em (2.1) podem ser rearranjadas em termos de W_N como

$$\begin{cases} W_N \leq \frac{W_j}{\beta_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} W_i, & j = 1, \dots, N-1 \\ W_N \geq \beta_N \sum_{i=1}^{N-1} W_i \end{cases} \quad (2.3)$$

Notando que as primeiras $N - 1$ desigualdades e a última desigualdade em (2.3) determinam, respectivamente, limites superiores e inferiores para W_N , (2.3) pode ser reescrita como

$$\beta_N \sum_{i=1}^{N-1} W_i \leq W_N \leq \min_{1 \leq k \leq N-1} \left(\frac{W_k}{\beta_k} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} W_i \right). \quad (2.4)$$

Claramente, de (2.3) e (2.4), valores nulos de β_k não impõe um limite superior a W_N . Com essa observação em mente, e sem perda de generalidade, considere $\beta_k \neq 0$ para todo k .

Analisando o limite superior de W_N em (2.4), verifica-se que o índice que minimiza a expressão será $k = j$, $1 \leq j \leq N - 1$, quando

$$W_j \leq \frac{\beta_j(1 + \beta_i)}{\beta_i(1 + \beta_j)} W_i \quad \forall i < N. \quad (2.5)$$

Considere uma região na qual (2.5) é válido. Neste caso, (2.4) pode ser reescrita como

$$\beta_N \sum_{i=1}^{N-1} W_i \leq W_N \leq \frac{W_j}{\beta_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} W_i. \quad (2.6)$$

Como o limite superior para W_N precisa ser maior ou igual que o inferior para que a região de integração não seja vazia, uma condição necessária para que (2.6) seja não-trivial é

$$\frac{(1 - \beta_j \beta_N)}{\beta_j(1 + \beta_N)} W_j \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} W_i. \quad (2.7)$$

A desigualdade anterior é obtida impondo que o limite inferior em (2.6) seja menor ou igual que o limite superior e rearranjando a expressão.

Por conveniência, definem-se as constantes

$$\mathbb{K}_{j,k} = \frac{\beta_j(1 + \beta_k)}{\beta_k(1 + \beta_j)}, \quad \mathbb{C}_{j,N} = \frac{(1 - \beta_j\beta_N)}{\beta_j(1 + \beta_N)}. \quad (2.8)$$

Combinando (2.5) a (2.7), a seguinte restrição para W_{N-1} é encontrada:

$$\mathbb{K}_{N-1,j}W_j \leq W_{N-1} \leq \mathbb{C}_{j,N}W_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-2} W_i. \quad (2.9)$$

Analogamente, para W_{N-2} ,

$$\mathbb{K}_{N-2,j}W_j \leq W_{N-2} \leq \mathbb{C}_{j,N}W_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-3} W_i - W_{N-1}. \quad (2.10)$$

Utilizando o limite inferior para W_{N-1} em (2.9), (2.10) é reescrita como

$$\mathbb{K}_{N-2,j}W_j \leq W_{N-2} \leq (\mathbb{C}_{j,N} - \mathbb{K}_{N-1,j})W_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-3} W_i. \quad (2.11)$$

Prosseguindo da mesma forma para $W_{N-3}, W_{N-4}, \dots, W_1$, encontra-se o seguinte conjunto de desi-

gualdades que descreve uma região definida como \mathcal{S}_j^N

$$\mathcal{S}_j^N = \left\{ \begin{array}{l} \beta_N \sum_{i=1}^{N-1} W_i \leq W_N \leq \frac{W_j}{\beta_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} W_i \\ \mathbb{K}_{N-1,j} W_j \leq W_{N-1} \leq \mathbb{C}_{j,N} W_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-2} W_i \\ \vdots \\ \mathbb{K}_{k,j} W_j \leq W_k \leq (\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \neq j}}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) W_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k-1} W_i \\ \vdots \\ \mathbb{K}_{1,j} W_j \leq W_1 \leq (\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) W_j \\ 0 \leq W_j < \infty \end{array} \right. \quad (2.12)$$

2.2.2 Demonstração que $\bigcup_{j=1}^{N-1} \mathcal{S}_j^N = \mathcal{S}^N$

A seguir, será apresentada a demonstração que a região formada pela união $\bigcup_{j=1}^{N-1} \mathcal{S}_j^N$ é igual a \mathcal{S}^N . A partir do desenvolvimento realizado para obter \mathcal{S}_j^N , fica claro que uma N -upla (W_1, W_2, \dots, W_N) pertencente a \mathcal{S}^N , com o j -ésimo elemento ($1 \leq j \leq N-1$) satisfazendo (2.5), também estará contida em \mathcal{S}_j^N . Note que, caso $(W_1, W_2, \dots, W_N) \in \mathcal{S}^N$, haverá ao menos um elemento que satisfaz (2.5), visto que o limite superior em (2.4) necessariamente possui um mínimo. Caso m elementos satisfaçam (2.5), é fácil perceber que a N -upla pertencerá a m regiões da forma \mathcal{S}_j^N . Segue, portanto, que qualquer ponto pertencente a \mathcal{S}^N também estará contido em $\bigcup_{j=1}^{N-1} \mathcal{S}_j^N$.

O converso será mostrado por contradição. Considere que exista uma N -upla (W_1, W_2, \dots, W_N) pertencente a $\bigcup_{j=1}^{N-1} \mathcal{S}_j^N$ que não satisfaz pelo menos uma das desigualdades em (2.3). Portanto, para algum $k \neq N$,

$$W_N > \frac{W_k}{\beta_k} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} W_i. \quad (2.13)$$

Quando W_k satisfaz (2.5), (2.13) contradiz a primeira desigualdade em (2.12), contradizendo também a suposição inicial. Caso contrário, suponha, sem perda de generalidade, que a condição (2.5) é

satisfeita por $W_j, j \neq k$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{W_k}{\beta_k} &< W_N + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} W_i \\ &\leq \frac{W_j}{\beta_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} W_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} W_i \\ \Rightarrow W_k &< \mathbb{K}_{k,j} W_j, \end{aligned}$$

contradizendo o fato de W_j satisfazer (2.5).

Quando $k = N$, então

$$W_N < \beta_N \sum_{i=1}^{N-1} W_i,$$

contradizendo a primeira desigualdade em (2.12). Portanto, um elemento pertencente à região $\bigcup_{j=1}^{N-1} \mathcal{S}_j^N$ também estará contido em \mathcal{S}^N .

2.2.3 Demonstração que \mathcal{S}_j^N e \mathcal{S}_k^N formam regiões de integração distintas

A seguir, será demonstrado que o hipervolume N -dimensional de $\mathcal{S}_j^N \cap \mathcal{S}_k^N$ ($j \neq k$) é zero, e, conseqüentemente, \mathcal{S}_j^N e \mathcal{S}_k^N são regiões de integração distintas. Caso um elemento (W_1, W_2, \dots, W_N) pertença tanto a \mathcal{S}_j^N quanto a \mathcal{S}_k^N , então, a partir da restrição (2.5),

$$W_j = \mathbb{K}_{j,k} W_k. \quad (2.14)$$

Como existe uma dependência linear entre os elementos, o fato do hipervolume N -dimensional ser nulo segue diretamente. Intuitivamente, isso significa que as regiões \mathcal{S}_j^N e \mathcal{S}_k^N possuem apenas pontos “de borda” em comum, com interiores disjuntos. Conseqüentemente, a região de integração definida por \mathcal{S}_j^N não se sobrepõe àquela definida por \mathcal{S}_k^N .

2.2.4 Resultado Principal

A partir do desenvolvimento anterior, (2.2) pode ser reescrita como

$$P_{\bar{I}} = \sum_{j=1}^{N-1} \int_{\mathcal{S}_j^N} f_{\mathbf{w}}(w_1, \dots, w_N) dw_1 \dots dw_N, \quad (2.15)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}
 P_{\bar{I}} &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{K}_{1,j} w_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) w_j} \dots \int_{\mathbb{K}_{j-1,j} w_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{i=j+1}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) w_j - \sum_{i=1}^{j-2} w_i} \int_{\mathbb{K}_{j+1,j} w_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{i=j+2}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) w_j - \sum_{i=1}^{j-1} w_i} \dots \\
 &\times \int_{\mathbb{K}_{N-1,j} w_j}^{\mathbb{C}_{j,N} w_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-2} w_i} \int_{\beta_N \sum_{i=1}^{N-1} w_i}^{\frac{w_j}{\beta_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} w_i} f_{\mathbf{w}}(w_1, w_2, \dots, w_N) dw_N dw_{N-1} \dots dw_{j+1} dw_{j-1} \dots dw_1 dw_j. \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Cabe notar que o índice j do somatório em (2.15) e (2.16) assumirá apenas os valores para os quais $\beta_j \neq 0$.

2.3 A condição para \mathcal{S}^N ser não-trivial

A partir de (2.16), a condição necessária e suficiente para a região de integração definida em (2.1) ser não trivial é

$$\sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{1 + \beta_i} < 1. \quad (2.17)$$

A seguir, será demonstrada a condição (2.17). Para (2.12) definir uma região não-trivial de integração, necessariamente nenhuma das inequações pode ter o limite superior menor ou igual ao inferior. Assim, a partir da restrição para W_1 em (2.12) (ou, equivalentemente, W_2 caso \mathcal{S}_1^N seja considerado), é necessário que

$$\mathbb{C}_{j,N} > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}. \quad (2.18)$$

Utilizando um argumento indutivo, é possível demonstrar que (2.18) também é uma condição suficiente para que a região de integração \mathcal{S}_j^N seja não-trivial. Considere que a condição (2.18) seja satisfeita (a base do argumento indutivo). Suponha, também, que o limite superior da desigualdade correspondente a W_k em (2.12) é estritamente maior que o limite inferior. Considera-se, sem perda de generalidade, que $k \neq j - 1$ e W_k é menor que seu limite superior. Portanto

$$\begin{aligned}
 W_k &< (\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \neq j}}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) W_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k-1} W_i \\
 \Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k W_i &< (\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \neq j}}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) W_j. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Analisando o limite superior para $k + 1$:

$$(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{\substack{i=k+2 \\ i \neq j}}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j})W_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k W_i > \mathbb{K}_{k+1,j}W_j . \quad (2.20)$$

A desigualdade segue diretamente de (2.19), provando o passo da indução. Portanto, caso a condição para W_1 seja satisfeita em (2.12), W_2, W_3, \dots, W_{N-1} também possuirão restrições não-triviais.

Finalmente, para demonstrar que W_N também possuirá restrições não-triviais quando (2.18) é satisfeita, nota-se que seus limites em (2.12) dependem das demais $N - 1$ variáveis. Consequentemente, deve ser mostrado que W_1, W_2, \dots, W_{N-1} podem assumir valores tais que

$$\mathbb{C}_{j,N}W_j > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} W_i , \quad (2.21)$$

onde a desigualdade segue de (2.7). No entanto, dado (2.18), fica claro que (2.21) será satisfeita quando W_1, W_2, \dots, W_{N-1} assumem seus respectivos valores mínimos em (2.12), concluindo a demonstração. A restrição (2.17) segue diretamente ao somarmos $1 + \mathbb{K}_{N,j}$ aos dois lados de (2.18).

É interessante ressaltar que, apesar de uma região específica ter sido considerada na demonstração, (2.17) independe de \mathcal{S}_j^N . Além disso, (2.17) depende apenas das restrições para as relações sinal-interferência, e não das distribuições dos sinais. Esse fato explicita que, apesar das desigualdades em (2.1) poderem ter probabilidades não-nulas de serem satisfeitas individualmente, sempre haverá pelo menos um sinal em *outage* caso (2.17) não seja satisfeita.

2.4 Probabilidade de *Outage* Conjunta considerando ruído aditivo

Nesta seção, as formulações obtidas para a JOP em sistemas limitados por interferência serão estendidas de forma a considerar o ruído aditivo. Neste caso, o conjunto de restrições para as SINR dos sinais individuais pode ser escrito como

$$\mathcal{S}_\sigma^N = \left\{ \frac{W_j}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N W_i + n_j} \geq \beta_j, \quad j = 1, \dots, N, \right. \quad (2.22)$$

onde n_i representa a potência do ruído aditivo para o sinal i .

Analogamente a (2.1), as desigualdades em (2.22) descrevem um hipervolume no espaço N -

dimensional, representado por \mathcal{S}_σ^N . A probabilidade de *outage* conjunta pode ser calculada através da seguinte integração:

$$P_{\bar{I}} = \int_{\mathcal{S}_\sigma^N} f_{\mathbf{w}}(w_1, \dots, w_N) dw_1 \dots dw_N. \quad (2.23)$$

Caso o ruído aditivo n_i seja uma variável aleatória, N integrações adicionais devem ser realizadas para obter o valor exato de $P_{\bar{I}}$.

2.4.1 Uma solução exata para a JOP com ruído aditivo

Uma solução em forma integral para a probabilidade de *outage* conjunta quando $n_i = 0$ para todo i em (2.22) foi apresentada em (2.16). Com este resultado em mãos, a região definida pelo sistema de desigualdades (2.22) será reescrita de forma que ela seja expressa como a região \mathcal{S}^N definida em (2.1). Como consequência, os resultados anteriores, e em particular (2.16), poderão ser diretamente aplicados.

Para facilitar a notação, define-se:

$$a_i = \frac{\beta_i}{1 + \beta_i}. \quad (2.24)$$

Realizando a transformação de variáveis

$$W_j = U_j + g_j(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{n}) \quad (2.25)$$

onde

$$g_j(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{n}) \triangleq a_j \left(\frac{\sum_{i=1}^N a_i n_i}{1 - \sum_{i=1}^N a_i} + n_j \right), \quad (2.26)$$

$\boldsymbol{\beta} \triangleq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ e $\mathbf{n} \triangleq (n_1, n_2, \dots, n_N)$, e substituindo (2.25) em (2.22), o conjunto de restrições para as razões sinal-interferência-mais-ruído pode ser reescrito como

$$\left\{ \frac{U_j}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N U_i} \geq \beta_j, \quad j = 1, \dots, N. \right. \quad (2.27)$$

Note que o sistema de desigualdades (2.27) é equivalente à região \mathcal{S}^N definida em (2.1). Portanto,

(2.23) pode ser reformulada como

$$\begin{aligned}
P_{\bar{I}} &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{K}_{1,j} u_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) u_j} \dots \int_{\mathbb{K}_{j-1,j} u_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{i=j+1}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) u_j - \sum_{i=1}^{j-2} u_i} \int_{\mathbb{K}_{j+1,j} u_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{i=j+2}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) u_j - \sum_{i=1}^{j-1} u_i} \dots \\
&\times \int_{\mathbb{K}_{N-1,j} u_j}^{\mathbb{C}_{j,N} u_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-2} u_i} \int_{\beta_N \sum_{i=1}^{N-1} u_i}^{\frac{u_j}{\beta_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} u_i} f_{\mathbf{w}}(u_1 + g_1, \dots, u_N + g_N) du_N du_{N-1} \dots du_{j+1} du_{j-1} \dots du_1 du_j,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

onde $g_i = g_i(\mathbf{a}, \mathbf{n})$. A expressão (2.28) é a formulação exata da JOP em um ambiente com ruído aditivo. Novamente, destaca-se que, caso o ruído aditivo n_i seja uma variável aleatória, N integrações adicionais serão necessárias.

2.5 Uma formulação para condições de *outage* específicas

Esta seção estende as expressões obtidas anteriormente de forma a incluir a probabilidade de, dado dois subconjuntos de restrições em (2.22), um ser satisfeito e o outro não. Seja $P_{\bar{I}}(W_1, W_2, \dots, W_m)_N$ a probabilidade de um subconjunto W_1, W_2, \dots, W_m escolhido a partir N sinais mutuamente interferentes satisfazerem as restrições SINR correspondentes. Uma expressão para $P_{\bar{I}}(W_1, W_2, \dots, W_m)_N$ pode ser encontrada na forma integral fazendo $\beta_i = 0$, $m < i \leq N$, em (2.28).

Denota-se por $P_{\bar{I}}(W_1, \dots, W_m; \bar{W}_{m+1}, \dots, \bar{W}_k)_N$, $m \leq k$, a probabilidade que o subconjunto $\{W_1, W_2, \dots, W_m\}$ e $\{W_{m+1}, \dots, W_k\}$ satisfaça e não satisfaça, respectivamente, às restrições SINR correspondentes. Note que

$$\begin{aligned}
P_{\bar{I}}(W_1, \dots, W_m; \bar{W}_{m+1}, \dots, \bar{W}_k)_N &= P_{\bar{I}}(W_1, \dots, W_m; \bar{W}_{m+2}, \dots, \bar{W}_k)_N \\
&\quad - P_{\bar{I}}(W_1, \dots, W_m, W_{m+1}; \bar{W}_{m+2}, \dots, \bar{W}_k)_N.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

O lado direito da igualdade em (2.29) pode ser expandido iterativamente. Após a última iteração, $P_{\bar{I}}(W_1, \dots, W_m; \bar{W}_{m+1}, \dots, \bar{W}_k)_N$ será definida como uma soma e subtração de integrais da forma (2.28), dada por

$$P_{\bar{I}}(W_1, \dots, W_m; \bar{W}_{m+1}, \dots, \bar{W}_k)_N = \sum_{i=0}^{k-m} \sum_{m < j_1 < \dots < j_i \leq k} (-1)^i P_{\bar{I}}(W_1, \dots, W_m, W_{j_1}, \dots, W_{j_i})_N \tag{2.30}$$

O número de termos em (2.30) pode se tornar intratável a medida que k cresce. No entanto, (2.29) pode ser implementada recursivamente, dado que uma fórmula fechada para a integral (2.16) seja

conhecida. Esse é o caso, por exemplo, do ambiente de desvanecimento Rayleigh onde os sinais mutuamente interferentes são independentes, que será apresentado no próximo capítulo.

2.6 Conclusões

Neste capítulo, introduziu-se o conceito de *Probabilidade de Outage Conjunta*, definida como a probabilidade que dado um grupo de sinais mutuamente interferentes, pelo menos um deles esteja em *outage*. Uma expressão exata e geral para a JOP foi apresentada para um sistema limitado por interferência, i.e., um sistema no qual o ruído aditivo pode ser desprezado. Essa formulação depende apenas da distribuição conjunta dos sinais interferentes e das restrição SINR correspondentes. Partindo desse resultado, foi possível generalizar as expressões obtidas de forma a incluir o ruído aditivo. Surpreendentemente, isso foi realizado através de uma simples transformação de variáveis, com a formulação final (em forma integral) sendo idêntica para os dois casos.

Demonstrou-se, também, uma condição necessária e suficiente para uma JOP não-trivial que independe da distribuição conjunta dos sinais mutuamente interferentes. Essa condição tem um significado prático relevante: mesmo os sinais individualmente tendo uma probabilidade de *outage* menor que 1, pelo menos um sinal estará em *outage* em qualquer dado instante caso a condição apresentada não seja satisfeita. Além disso, aplicando as expressões obtidas recursivamente, foi possível generalizar a formulação da JOP de forma a considerar eventos de *outage* específicos.

Apesar das formulações introduzidas neste capítulo serem gerais e novas, a expressão para a JOP é em forma integral, sendo matematicamente pouco tratável. Nesse sentido, o próximo capítulo apresentará uma aplicação prática dos resultados demonstrados aqui para a JOP. Uma expressão exata e fechada para a probabilidade de *outage* conjunta em um ambiente de desvanecimento Rayleigh será obtida a partir da formulação integral para a JOP (2.16). Essa expressão é simples e compacta, podendo ser facilmente aplicada na análise de condições de *outage* em sistemas sem fio. Os resultados obtidos serão ilustrados através de um exemplo de controle de potência.

Capítulo 3

Probabilidade de Outage Conjunta: Aplicações

As formulações gerais introduzidas no capítulo anterior para a probabilidade de *outage* conjunta são, à primeira vista, matematicamente intrincadas. Apesar de ter sido possível encontrar uma forma exata para a JOP em termos das integrais (2.16) e (2.28), os resultados anteriores não deixam claro se uma expressão simplificada, ou até mesma fechada, para a probabilidade de *outage* conjunta pode ser obtida para algum cenário prático.

Este capítulo responde esta questão, demonstrando uma expressão fechada e simples para a JOP em um ambiente de desvanecimento Rayleigh [2, 20], considerando que os sinais interferentes são independentes. Além disso, será apresentada uma aplicação prática em alocação ótima de potência. Para o ambiente Rayleigh independente, a função densidade probabilidade (pdf) para cada sinal em (2.1) e (2.22) é dada por

$$f_{W_i}(w_i) = \frac{1}{\Omega_i} \exp\left(-\frac{w_i}{\Omega_i}\right), \quad (3.1)$$

onde Ω_i é a potência média do sinal W_i . A função densidade probabilidade conjunta dos sinais W_1, W_2, \dots, W_N é

$$f_{\mathbf{W}}(w_1, w_2, \dots, w_N) = \prod_{i=1}^N f_{W_i}(w_i). \quad (3.2)$$

3.1 A formulação para a JOP em um ambiente Rayleigh limitado por interferência

Nesta seção, a integral (2.16) será resolvida para um ambiente Rayleigh onde os sinais mutuamente interferentes são independentes. A Seção 3.1.1 descreverá os passos seguidos para calcular a

integral (2.16) no cenário considerado e as decorrentes simplificações do resultado da integração. A expressão final e simplificada da Probabilidade de *Outage* Conjunta em um ambiente Rayleigh independente será apresentada na Seção 3.1.2, sendo o resultado principal deste capítulo. Finalmente, a formulação obtida será validada através de simulações numéricas na Seção 3.1.3.

3.1.1 Cálculo da JOP para um ambiente Rayleigh

A integração (2.16) da pdf conjunta (3.2) apresenta uma regularidade, visto que é feita sobre um produto de funções exponenciais. Assim, para um j fixo no somatório, o resultado das integrações mais internas de (2.16) possui um padrão, denotado por $\varphi_j(\cdot)$. Portanto, $\varphi_j(\cdot)$ satisfaz as duas seguintes condições, expressadas em termos de $j = 1$ em (2.16):

$$\varphi_1(r, s, \mathbf{\Omega}, \mathbf{\beta}, 1) = \int_{\mathbb{K}_{N-1,1}r}^{\mathbb{C}_{1,N}r-s} \frac{e^{-\frac{t}{\Omega_{N-1}}}}{\Omega_{N-1}} \int_{\beta_N(r+s+t)}^{\frac{r}{\beta_1}-s-t} \frac{e^{-\frac{u}{\Omega_N}}}{\Omega_N} du dt \quad (3.3)$$

e, para $1 < k < N - 1$,

$$\varphi_1(r, s, \mathbf{\Omega}, \mathbf{\beta}, k) = \int_{\mathbb{K}_{N-k,1}r}^{(\mathbb{C}_{1,N} - \sum_{i=N-k+1}^{N-1} \mathbb{K}_{i,1})r-s} \frac{e^{-\frac{t}{\Omega_{N-k}}}}{\Omega_{N-k}} \varphi(r, s+t, \mathbf{\Omega}, \mathbf{\beta}, k-1) dt, \quad (3.4)$$

onde r e s são variáveis auxiliares denotando, respectivamente, w_j e a soma das variáveis w_i que serão posteriormente integradas, $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$ e $\mathbf{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$.

A função $\varphi_1(\cdot)$ é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, s, \mathbf{\Omega}, \mathbf{\beta}, c) = & \sum_{i=N-c}^N \frac{(1 + \beta_N)\Omega_N\Omega_i^c}{(\beta_N\Omega_i + \Omega_N) \prod_{\substack{j=N-c \\ j \neq i}}^N (\Omega_i - \Omega_j)} \\ & \times \left(\exp \left(-\frac{(r+s)\beta_N}{\Omega_N} - r \sum_{j=N-c}^{N-1} \frac{(\Omega_N + \beta_N\Omega_j)}{\Omega_j\Omega_N} \mathbb{K}_{j,1} \right) \right. \\ & \left. - \exp \left(\frac{\beta_i s - r}{\beta_i \Omega_i} + r \sum_{\substack{j=N-c \\ j \neq i}}^N \frac{(\Omega_j - \Omega_i)}{\Omega_j\Omega_i} \mathbb{K}_{j,1} \right) \right), \quad (3.5) \end{aligned}$$

onde $1 \leq c < N - 1$. É direto mostrar que (3.5) satisfaz (3.3) e (3.4).

O valor de $\varphi_i(\cdot)$ para $i \neq 1$ assim como as propriedades (3.3) e (3.4) correspondentes podem ser obtidas diretamente com uma mudança de índices em (3.5). Quando dois sinais W_m e W_n possuírem a mesma potência média, a expressão correspondente para $\varphi_1(\cdot)$ pode ser encontrada calculando o

limite $\Omega_m \rightarrow \Omega_n$ em (3.5).

Utilizando (2.16) e a propriedade (3.4) de $\varphi_i(\cdot)$, o valor de $P_{\bar{I}}$ para o ambiente Rayleigh investigado é

$$P_{\bar{I}} = \sum_{m=1}^{N-1} P_{\bar{I},m}, \quad (3.6)$$

onde

$$P_{\bar{I},m} = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{r}{\Omega_m}}}{\Omega_m} \varphi_m(r, 0, \mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\beta}, N-2) dr. \quad (3.7)$$

Resolvendo a integral em (3.7) para $m = 1$, encontra-se a seguinte expressão para $P_{\bar{I},1}$

$$P_{\bar{I},1} = \frac{(1 + \beta_N) \left(1 - \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{1 + \beta_j} \right)}{\left(\prod_{l=1}^N \Omega_l \right) \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\beta_j (\beta_N \Omega_j + \Omega_N)}{(1 + \beta_j) \Omega_j \Omega_N} \right)} \times \sum_{i=2}^N \left(\prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^N \frac{\Omega_i \Omega_j}{\Omega_i - \Omega_j} \right) \left(\frac{1}{\Omega_i} \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) + \sum_{j=1}^N \frac{\mathbb{K}_{j,1}(\Omega_i - \Omega_j)}{\Omega_i \Omega_j} \right)^{-1}, \quad (3.8)$$

que pode ser simplificada para¹

$$P_{\bar{I},1} = \frac{\left(\frac{(1 + \beta_N) \beta_1}{1 + \beta_1} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{1 + \beta_j} \right)^{N-1}}{\left(\prod_{l=1}^N \Omega_l \right) \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\beta_j}{1 + \beta_j} \left(\frac{\beta_N \Omega_j + \Omega_N}{\Omega_j \Omega_N} \right) \right) \prod_{i=2}^N \left(\frac{1}{\Omega_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j (\Omega_i - \Omega_j)}{(1 + \beta_j) \Omega_i \Omega_j} \right)}. \quad (3.9)$$

A expressão correspondente para $P_{\bar{I},m}$ pode ser encontrada através de uma simples mudança de índice em (3.9), resultando em

$$P_{\bar{I},m} = \frac{\left(\frac{(1 + \beta_N) \beta_m}{1 + \beta_m} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{1 + \beta_j} \right)^{N-1}}{\left(\prod_{l=1}^N \Omega_l \right) \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\beta_j}{1 + \beta_j} \left(\frac{\beta_N \Omega_j + \Omega_N}{\Omega_j \Omega_N} \right) \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^N \left(\frac{1}{\Omega_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j (\Omega_i - \Omega_j)}{(1 + \beta_j) \Omega_i \Omega_j} \right)}. \quad (3.10)$$

¹Os passos da simplificação estão demonstrados no Apêndice A.

Substituindo (3.10) em (3.6) e reduzindo a soma em (3.6) para o mesmo denominador, encontra-se

$$P_{\bar{I}} = \frac{(1 + \beta_N) \left(1 - \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{1 + \beta_j}\right)^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\beta_m}{1 + \beta_m} \left(\frac{1}{\Omega_m} + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j (\Omega_m - \Omega_j)}{(1 + \beta_j) \Omega_m \Omega_j}\right)}{\left(\prod_{l=1}^N \Omega_l\right) \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\beta_j}{1 + \beta_j} \left(\frac{\beta_N \Omega_j + \Omega_N}{\Omega_j \Omega_N}\right)\right) \prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{\Omega_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j (\Omega_i - \Omega_j)}{(1 + \beta_j) \Omega_i \Omega_j}\right)}. \quad (3.11)$$

Note que

$$(1 + \beta_N) \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\beta_m}{1 + \beta_m} \left(\frac{1}{\Omega_m} + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j (\Omega_m - \Omega_j)}{(1 + \beta_j) \Omega_m \Omega_j}\right) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\beta_j (\beta_N \Omega_j + \Omega_N)}{(1 + \beta_j) \Omega_j \Omega_N}. \quad (3.12)$$

A prova de (3.12) é direta e pode ser feita por indução.

3.1.2 Resultado principal

Substituindo (3.12) em (3.11) e realizando mais algumas simplificações, obtém-se a fórmula final, exata e fechada para $P_{\bar{I}}$ em um ambiente de desvanecimento Rayleigh com sinais interferentes independentes:

$$P_{\bar{I}} = \frac{\left(1 - \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{1 + \beta_j}\right)^{N-1}}{\prod_{i=1}^N \left(1 - \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{1 + \beta_j} \left(1 - \frac{\Omega_i}{\Omega_j}\right)\right)}. \quad (3.13)$$

Essa expressão é geral, e pode ser aplicada inclusive quando um ou mais sinais possuem a mesma potência média ou limiar SIR nulo, i.e., $\beta_j = 0$. Quando apenas um sinal possui um limiar SIR não-nulo β , (3.13) pode ser reduzida para outras expressões encontradas na literatura (e.g. [15, 21]). É interessante destacar que (2.17) aparece explicitamente no numerador de (3.13).

Quando $\beta_j = \beta$ e $\Omega_j = \Omega$ para todo j , (3.13) simplifica para

$$P_{\bar{I}} = \left(\frac{1 - (N-1)\beta}{1 + \beta}\right)^{N-1}. \quad (3.14)$$

A Figura 3.1 ilustra a probabilidade de *outage* conjunta P_I para o ambiente Rayleigh i.i.d. com restrições β iguais para todos os sinais, onde $P_I = 1 - P_{\bar{I}}$ e $P_{\bar{I}}$ é dada por (3.14). Aqui, P_I é apresentada como uma função de β para diferentes números de sinais mutuamente interferentes N . Nota-se que, a medida que N aumenta, a probabilidade de *outage* conjunta tende mais rapidamente

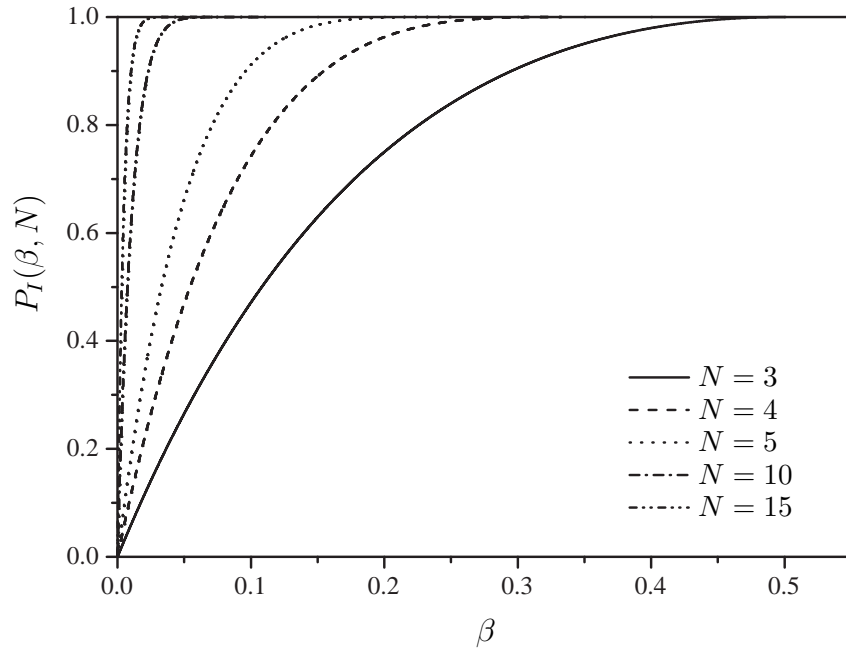


Fig. 3.1: P_T para o ambiente Rayleigh i.i.d. com restrições idênticas e iguais a β .

para 1.

3.1.3 Validação e resultados numéricos

Para verificar (3.13), a seguinte metodologia foi adotada. Considerou-se um grupo de N sinais Rayleigh independentes e mutuamente interferentes. A potência média e o limiar SIR de cada sinal foram escolhidos uniformemente no intervalo $[0, 1]$ e $[0, (10 \times N)^{-1}]$, respectivamente. O valor estimado de $P_{\bar{T}}$ foi encontrado a partir de uma simulação de Monte Carlo; mais especificamente, $P_{\bar{T}}$ foi calculada considerando a frequência relativa que todas as desigualdades em (2.1) sejam satisfeitas por 1.5×10^6 grupos de N variáveis aleatórias Rayleigh, geradas com os parâmetros sorteados anteriormente. Cada simulação foi repetida 50 vezes, e um simples teste de hipótese com um nível de significância igual a 5% foi aplicado considerando os resultados simulados e os valores teóricos correspondentes de $P_{\bar{T}}$. Os valores teóricos, por sua vez, foram encontrados substituindo os parâmetros escolhidos aleatoriamente em (3.13).

Os resultados do teste de hipótese para diferentes números de sinais mutuamente interferentes estão apresentados na Tabela 3.1. Aqui, h representa a falha em rejeitar ($h = 0$) ou a rejeição ($h = 1$) da hipótese nula, C.I. indica o intervalo de confiança do teste e $P_{\bar{T}}$ é o valor teórico correspondente. Como pode ser observado, para cada valor de N , o valor teórico está dentro do intervalo de confiança

Tab. 3.1: Resultados das Simulações

N	h	C.I.	\bar{P}_I
3	0	[0.89974,0.89987]	0.89982
5	0	[0.86097,0.86111]	0.86101
10	0	[0.70052,0.70074]	0.70063
15	0	[0.61927,0.61950]	0.61931

estimado e $h = 0$. Este procedimento foi repetido *exaustivamente*, e um excelente acordo entre valores simulados e teóricos sempre foi verificado.

3.2 A formulação para a JOP em um ambiente Rayleigh com ruído aditivo

A expressão fechada para a probabilidade de *outage* conjunta em um ambiente onde os sinais mutuamente interferentes estão sujeitos a desvanecimento Rayleigh e ruído aditivo pode ser encontrada substituindo (3.2) em (2.23) e resolvendo a integração. A partir de (3.13), é direto verificar que a solução da integração no cenário considerado será

$$P_I = P_{I0}(\Omega, \beta) \exp \left(- \sum_{i=1}^N \frac{g_i(\beta, \mathbf{n})}{\Omega_i} \right), \quad (3.15)$$

onde $\Omega \triangleq (\Omega_1, \dots, \Omega_N)$, $\beta \triangleq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ e $\mathbf{n} \triangleq (n_1, n_2, \dots, n_N)$, e $g_i(\beta, \mathbf{n})$ são definidas em (2.26). A função $P_{I0}(\Omega, \beta)$ corresponde à probabilidade que todas as restrições SINR sejam satisfeitas na ausência do ruído aditivo, sendo dada por (3.13).

Caso os ruídos aditivos n_1, \dots, n_N sejam variáveis aleatórias independentes, a JOP para o ambiente Rayleigh independente será dada por

$$P_I = P_{I0}(\Omega, \beta) \prod_{i=1}^N M_{n_i}[-g_i(\beta, \Omega^{-1})], \quad (3.16)$$

onde $M_{n_i}[\cdot]$ é a função geradora de momento de n_i , definida como $M_{n_i}[s] = \mathbb{E}[e^{sn_i}]$.

Quando o ruído aditivo é Gaussiano com variância $\text{Var}(n_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, \dots, N$, e média nula, (3.16) se torna

$$P_I = P_{I0}(\Omega, \beta) \prod_{i=1}^N (1 + \sigma_i^2 g_i(\beta, \Omega^{-1}))^{-1/2}. \quad (3.17)$$

Considerando um ambiente simétrico, i.e., $\beta_i = \beta$, $\Omega_i = \Omega$ e $\sigma_i^2 = \sigma^2$ para todo i , (3.17) simplifica

para

$$P_{\bar{I}}(\beta, \Omega, \sigma^2, N) = \frac{\left(1 - \frac{N\beta}{1 + \beta}\right)^{3N/2 - 1}}{\left(1 + \frac{\beta}{1 + \beta} \left(\frac{\sigma^2}{\Omega} - N\right)\right)^{N/2}}. \quad (3.18)$$

Note que, para $\sigma = 0$, (3.18) é equivalente a (3.14).

3.3 Um Exemplo de Aplicação: Controle de Potência²

Conforme discutido no Capítulo 2, as formulações apresentadas neste trabalho possuem diversas aplicações práticas, como, por exemplo, controle de admissão e dimensionamento de redes *multihop*. A fim de ilustrar a relevância prática das expressões obtidas, apresentar-se-á nesta seção dois problemas distintos de alocação de potência nos quais a probabilidade de *outage* conjunta é considerada como uma medida de qualidade de enlace em algoritmos de controle de potência para uma rede sem fio. Essa análise estende outras encontradas na literatura (e.g., [14, 15, 16]), permitindo que cada nó utilize detecção multi-usuário. A abordagem adotada aqui é particularmente útil, por exemplo, quando um ou mais nós da rede são pontos de acesso ou estações rádio-base.

Ambos os problemas serão formulados no seguinte cenário:

- Uma rede sem fio composta por N nós mutuamente interferentes, com potências de transmissão dadas por P_i , $i = 1, \dots, N$;
- As potências de transmissão podem variar entre um valor máximo e mínimo, dado por P_i^{max} e P_i^{min} , respectivamente;
- A potência média recebida por um nó receptor i de um nó transmissor j é denotada por $P_j d_{ij}^{-\alpha_{ij}}$, onde d_{ij} é a distância entre os nós e α_{ij} é o coeficiente de perda de percurso;
- O ruído aditivo pode ser desprezado (o sistema é limitado por interferência);
- β_{ij} é o limiar sinal-interferência para a recepção com sucesso de uma transmissão do nó j para o nó i , considerando que a SIR é medida no nó receptor;
- Todas as transmissões estão sujeitas a desvanecimento Rayleigh (independente entre transmissões);
- A probabilidade que um *outage* ocorra em cada nó é representada por JOP_i .

²O autor gostaria de agradecer ao Dr. Yusef R. C. Zúñiga por ter sugerido e motivado este exemplo, assim como por ter identificado que (3.13) pode ser utilizada em problemas de Programação Geométrica.

3.3.1 Minimizando a Probabilidade de *Outage* Conjunta máxima

Inicialmente, analisar-se-á o problema de encontrar a alocação ótima de potências de transmissão P_i de forma que a JOP máxima da rede seja minimizada. Nesse caso, a probabilidade de *outage* conjunta máxima é utilizada como uma métrica para a eficiência do sistema como um todo, e o pior caso é considerado, i.e., todos os nós estão transmitindo e recebendo simultaneamente. Note que, ao minimizar a JOP máxima, busca-se atingir a menor taxa de erro e, com isso, otimizar a confiabilidade da rede. Este problema pode ser formulado como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \max_{i=1, \dots, N} \text{JOP}_i \\ & \text{sujeito a} \quad P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo (3.13) em (3.19) e rearranjando os termos, o problema de otimização pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \max_{i=1, \dots, N} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(K_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{\beta_{ik} P_j P_k^{-1} d_{ik}^{\alpha_{ik}}}{(1 + \beta_{ik}) d_{ij}^{\alpha_{ij}}} \right) \right\} \\ & \text{sujeito a} \quad P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde K_i é uma constante dada por

$$K_i = 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{\beta_{ik}}{1 + \beta_{ik}}. \quad (3.21)$$

A minimização em (3.20) é reconhecida como um problema de programação geométrica generalizada em termos das potências P_i [22, 23]. Consequentemente, métodos eficientes existem para calcular um ótimo global e algoritmos numéricos robustos estão amplamente disponíveis [22, 24].

3.3.2 Minimizando a potência total transmitida com restrições para a JOP

Como um segundo exemplo de aplicação em controle de potência, considere o problema de minimizar a soma da potência total transmitida dado um conjunto de restrições ϵ_i para a probabilidade de *outage* conjunta, i.e., $\text{JOP}_i < \epsilon_i, i = 1, \dots, N$. Este problema de otimização é encontrado, por exemplo, em redes de sensores, onde eficiência energética (como prolongar a vida da bateria) é um

objetivo central para o projeto da rede. É possível formular este problema como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^N P_i \\ & \text{sujeito a} \quad P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max}, \\ & \quad \text{JOP}_i \leq \epsilon_i \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Procedendo de forma análoga a (3.20), (3.22) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^N P_i \\ & \text{sujeito a} \quad P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, N, \\ & \quad \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(K_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{\beta_{ik} P_j P_k^{-1} d_{ik}^{\alpha_{ik}}}{(1 + \beta_{ik}) d_{ij}^{\alpha_{ij}}} \right) \leq \frac{K_i}{1 - \epsilon_i}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

A minimização apresentada em (3.23) é um problema de programação geométrica em termos das potências P_i [22, 24]. Como no caso anterior, um ótimo global pode ser computado de forma eficiente, e algoritmos numéricos robustos estão amplamente disponíveis. Talvez mais importante seja o fato de que métodos numéricos eficientes existem para análise de sensibilidade e factibilidade de (3.10), o que pode ser essencial na definição das restrições ϵ_i para a probabilidade de *outage* conjunta [22, 23].

3.3.3 Exemplos numéricos

Um exemplo numérico será dado para ilustrar os problemas de otimização descritos anteriormente. Considere uma rede ad hoc composta por 20 nós mutuamente interferentes, posicionados em um plano unitário. Qualquer transmissão entre nós está sujeita a desvanecimento Rayleigh (independente entre transmissões), sendo recebida com sucesso caso a razão sinal-interferência seja maior que -16 dB. Considere, também, um coeficiente de perda de percurso $\alpha = 4$ para todos os nós da rede, e a potência máxima e mínima de transmissão por nó igual a 1 e 2, respectivamente (a unidade de potência é irrelevante, visto que (3.13) depende somente da razão entre potências). Os problemas de otimização (3.20) e (3.23) serão resolvidos considerando duas configurações distintas de rede para este cenário.³

Inicialmente, considere que cada nó esteja posicionado aleatoriamente no plano unitário e detecta

³Os resultados apresentados aqui foram obtidos utilizando o CVX, um pacote para especificação e solução de programas convexos, como problemas de programação geométrica [25, 26].

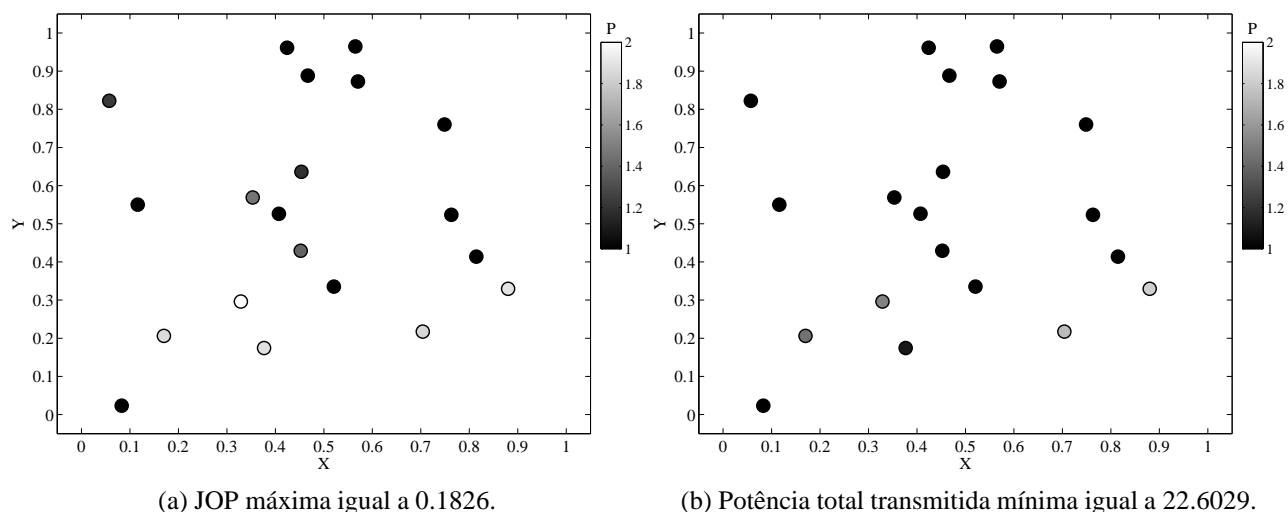


Fig. 3.2: Alocação ótima de potências para uma rede aleatória: (a) minimização da JOP máxima e (b) minimização da soma das potências de transmissão.

os sinais transmitidos por seus dois vizinhos mais próximos. A alocação de potência ótima que minimiza a JOP máxima (3.20) e minimiza a soma da potência total transmitida (3.23) para uma dada configuração aleatória de nós nesse cenário está apresentada nas Figuras 3.2a e 3.2b, respectivamente. Neste último caso, as restrições ϵ_i foram escolhidas uniformemente do intervalo $[0.1, 0.3]$. Foram utilizadas restrições arbitrárias ao invés de valores ϵ_i pré-determinados em cada nó com o fim de ilustrar a flexibilidade da formulação considerada. Como pode ser observado, esse problema envolve interações complicadas entre nós, com diferentes potências médias de recepção e restrições para o erro em cada nó da rede. No entanto, utilizando métodos de programação geométrica, a solução ótima foi prontamente encontrada.

Como um segundo exemplo, considere que os nós formam uma grade retangular no plano unitário. Um dado nó detecta as transmissões de seus vizinhos adjacentes (um nó central possui quatro vizinhos, e um nó na borda da grade possui dois ou três vizinhos). Valendo-se da mesma metodologia adotada anteriormente, os esquemas ótimos de alocação de potência encontrados resolvendo (3.20) e (3.23) nesse cenário estão apresentados nas Figuras 3.3a e 3.3b, respectivamente. As restrições para a JOP em (3.23) foram escolhidas aleatoriamente do intervalo $[0.2, 0.4]$ para os nós mais externos e $[0.35, 0.55]$ para os nós mais internos. Novamente, foi feita uma escolha arbitrária dos valores de ϵ_i para ilustrar a flexibilidade do formulação considerada. Mais uma vez, a solução ótima foi prontamente obtida utilizando programação geométrica.

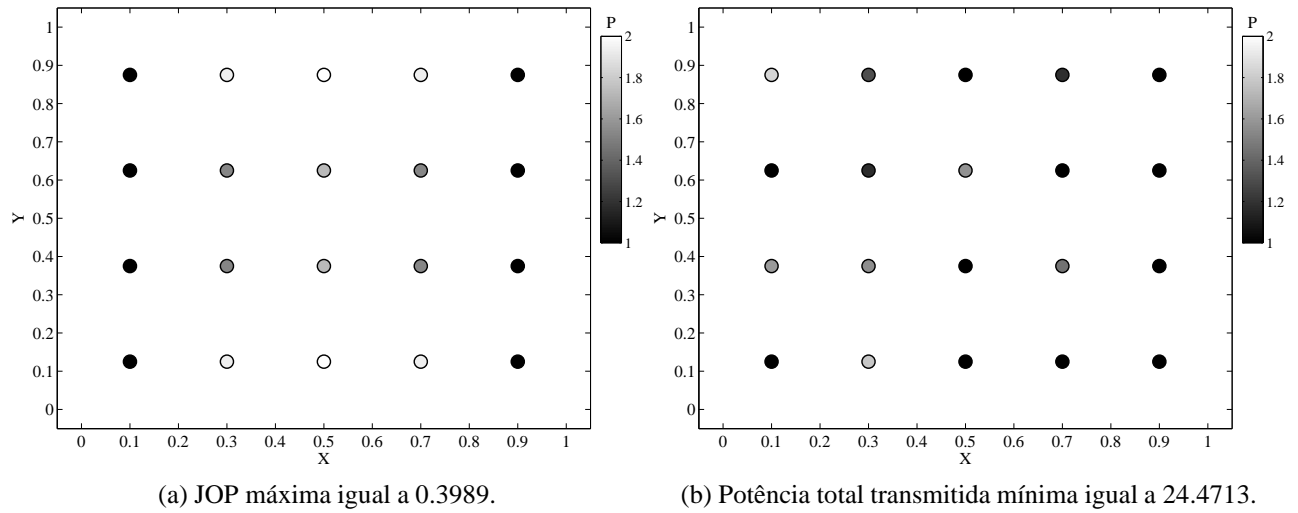


Fig. 3.3: Alocação ótima de potências para uma rede em grade: (a) minimização da JOP máxima e (b) minimização da soma das potências de transmissão.

3.4 Conclusões

Foi proposta neste capítulo uma formulação nova, exata e fechada para a probabilidade de *outage* conjunta em um ambiente Rayleigh onde os sinais mutuamente interferentes são independentes. Foram obtidas expressões para um cenário limitado por interferência e para o caso em que o ruído aditivo não pode ser desprezado, apresentadas nas equações (3.13) e (3.16), respectivamente. Além disso, os resultados encontrados foram ilustrados através de uma aplicação prática em controle ótimo de potência.

Este capítulo junto com o Capítulo 2 constituem a primeira parte deste trabalho, lidando com o conceito de probabilidade de *outage* conjunta e suas diversas formulações. O próximo capítulo introduz o segundo tema abordado neste trabalho: um método híbrido de combinação de diversidade baseado na seleção de sinais combinados por razão máxima.

Capítulo 4

MRCs: Introdução e Estatísticas

Técnicas de combinação de diversidade são amplamente utilizadas em sistemas de comunicação como forma de melhorar o desempenho em ambientes com desvanecimento. Os três métodos de combinação clássicos são combinação por seleção (*selection combining* - SC), combinação por ganho igual (*equal gain combining* - EGC) e combinação por razão máxima (*maximal-ratio combining* - MRC), sendo exhaustivamente investigados na literatura [2, 27, 3]. Mais recentemente, no entanto, uma técnica híbrida de combinação de diversidade foi proposta, introduzida como um “esquema de combinação geral” [28]. Neste método, um grupo de sinais é selecionado a partir do total disponível, sendo posteriormente combinado utilizando um MRC. Esta técnica, assim como suas variações, foram exploradas em diversos trabalhos da área (e.g., [29, 30, 31, 32]). Ao contrário dos métodos individuais que a compõem (i.e., o MRC e o SC), o esquema híbrido de combinação possui um tratamento matemático intrincado, lidando com estatística de ordem [33].

Neste capítulo e no próximo, investiga-se um outro esquema geral de combinação de diversidade que é “dual” ao descrito acima. Nesta técnica, batizada de seleção MRC (MRC *Selection* - MRCS), as saídas de N combinadores MRC, cada um com M_i ramos, $i = 1, \dots, N$, são combinados por um SC com N ramos de entrada. O esquema MRCS possui duas características que o torna atraente: (i) o método pode ser prontamente aplicado a situações onde existe seleção de sítio, como em [34]; e (ii) ele é matematicamente simples. Em processos de *soft-handoff*, como utilizado no sistema UMTS (*Universal Mobile Telecommunications System*), a técnica MRCS já é adotada. Aqui, cada estação rádio-base (ERB) envolvida no processo de *soft-handoff* realiza a combinação por razão máxima do sinal enviado pelo terminal móvel. A saída do combinador MRC de cada ERB é então repassada ao MSC (*Mobile Switching Center*) que, por sua vez, utiliza o método de combinação por seleção para apresentar o melhor sinal como sua saída [35, 36].

Apesar do MRCS possuir diversas aplicações práticas e já ser empregado há algum tempo em redes 2G e 3G, o autor desconhece trabalhos da área que avaliem o desempenho deste método. Um

possível motivo para isso é o fato do MRCS nunca ter sido identificado como um método híbrido de combinação de diversidade, visto que os dois esquemas de combinação que o compõe se encontram em entidades físicas distintas (a estação rádio-base e a MSC), tornando a sua visão no sistema menos evidente.

No restante deste capítulo, serão apresentadas expressões gerais que caracterizam o desempenho do MRCS. Mais especificamente, serão introduzidas formulações para: (i) a distribuição da razão sinal-ruído na saída do combinador (confiabilidade), (ii) a taxa de cruzamento de nível (LCR) e (iii) a duração média de desvanecimento (AFD). Os resultados obtidos serão particularizados para alguns casos de interesse, mas podem ser aplicados a diferentes ambientes de desvanecimento.

4.1 Descrição geral do MRCS

O MRCS é um esquema de combinação de diversidade híbrido no qual a saída de N receptores MRC com M_i ramos cada ($i = 1, \dots, N$) constituem a entrada de um combinador por seleção. Assumindo um conhecimento perfeito dos ganhos do canal, cada receptor MRC coloca em fase e pondera os sinais recebidos de forma que a razão sinal-ruído na sua saída seja ótima. O combinador por seleção, por sua vez, apresenta como saída o sinal combinado por razão máxima com a maior SNR. Denotando a SNR do sinal recebido pelo j -ésimo ramo do i -ésimo receptor MRC como γ_{ij} ($j = 1, \dots, M_i$ e $i = 1, \dots, N$), a SNR γ na saída do combinador MRCS é dada por:

$$\gamma = \max \left\{ \sum_{j=1}^{M_1} \gamma_{1j}, \sum_{j=1}^{M_2} \gamma_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{M_N} \gamma_{Nj} \right\}. \quad (4.1)$$

Seja $F_{\text{mrc}_i}(\gamma_i)$ a função distribuição acumulada (PDF) da SNR γ_i na saída do i -ésimo combinador MRC. Assumindo que a saída dos combinadores por razão máxima são independentes entre si, a distribuição $F_{\text{sel}}(\gamma)$ da SNR na saída do combinador por seleção é [2]

$$F_{\text{sel}}(\gamma) = \prod_{i=1}^N F_{\text{mrc}_i}(\gamma). \quad (4.2)$$

É importante ressaltar que os ramos de cada receptor MRC podem não ser independentes entre si. Este fato deve ser contemplado na formulação de $F_{\text{mrc}_i}(\gamma_i)$ em (4.2). A função densidade probabilidade $f_{\text{sel}}(\gamma)$ na saída do MRCS pode ser obtida diferenciando (4.2), resultando em

$$f_{\text{sel}}(\gamma) = \sum_{i=1}^N f_{\text{mrc}_i}(\gamma) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N F_{\text{mrc}_j}(\gamma). \quad (4.3)$$

Note que, nas formulações anteriores, assumiram-se ambientes de desvanecimento arbitrários para os quais as estatísticas na saída de cada combinador por razão máxima são conhecidas. Como ilustração, considere um ambiente Nakagami- m [37] onde cada receptor MRC i possui M_i ramos i.i.d. com parâmetros m_i e $\Upsilon_i = \gamma_i/\gamma_{0i}$, onde $\gamma_{0i} = \mathbb{E}[\gamma_i]$. Para este cenário [30]

$$F_{\text{mrc}_i}(\Upsilon_i) = \frac{\Gamma(m_i M_i, m_i \Upsilon_i)}{\Gamma(m_i M_i)} \quad (4.4)$$

e

$$f_{\text{mrc}_i}(\Upsilon_i) = \frac{m_i^{m_i M_i} \Upsilon_i^{m_i M_i - 1}}{\Gamma(m_i M_i) \exp(m_i \Upsilon_i)} . \quad (4.5)$$

onde $\Gamma(a, b) = \int_0^b x^{a-1} \exp(-x) dx$ é a função Gamma incompleta. Substituindo estas expressões em (4.2) e (4.3), as estatísticas desejadas são encontradas. A confiabilidade do sistema pode ser obtida diretamente através do complemento da PDF.

4.2 Taxa de cruzamento de nível e duração média de desvanecimento

Várias estatísticas do MRCS podem ser encontradas em forma fechada utilizando resultados disponíveis na literatura sobre o tema. Duas dessas estatísticas – a taxa de cruzamento de nível (*level crossing rate* - LCR) e a duração média de desvanecimento (*average fade duration* - AFD) – serão apresentadas nesta seção. As formulações obtidas aqui assumem ramos independentes e desbalanceados em cada combinador MRC, operando em um ambiente de desvanecimento arbitrário.

A envoltória R do sinal na saída do combinador MRCS pode ser expressada como

$$R = \max_{i=1, \dots, N} \{R_i\}, \quad (4.6)$$

onde R_i denota a envoltória na saída do i -ésimo combinador por razão máxima. A LCR é definida como o número médio de cruzamentos do sinal em um dado nível na direção positiva ou negativa. Considerando os sinais recebidos pelo combinador por seleção independentes, a taxa de cruzamento do nível r na saída do MRCS, denotada por $N_R(r)$, é [38]

$$N_R(r) = \sum_{i=1}^N N_{R_i}(r) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N F_{R_j}(r) . \quad (4.7)$$

A expressão (4.7) pode ser diretamente aplicada a ambientes de desvanecimento cuja a LCR $N_{R_i}(\cdot)$

e a PDF $F_{R_i}(\cdot)$ da envoltória na saída de cada receptor MRC são conhecidas.

A duração média de desvanecimento é definida como o tempo médio que a envoltória de um sinal permanece abaixo de um dado nível r após cruzar este nível no sentido negativo. Considerando ramos independentes, a AFD $T_R(r)$ na saída do combinador MRCS é [39]

$$T_R^{-1}(r) = \sum_{i=1}^N T_{R_i}^{-1}(r). \quad (4.8)$$

Analisando a expressão anterior, notamos que, analogamente à LCR, a duração média de desvanecimento pode ser diretamente obtida caso seja conhecida a AFD $T_{R_i}(\cdot)$ do sinal na saída de cada combinador por razão máxima.

A fim de ilustrar o uso das expressões (4.7) e (4.8), será considerado, mais uma vez, um cenário onde os ramos de cada receptor MRC são independentes e identicamente distribuídos, com os sinais recebidos estando sujeitos a desvanecimento Nakagami- m com potência média e parâmetro m arbitrários. A LCR na saída do i -ésimo receptor MRC será dada por [40]

$$N_{R_i}(r) = \frac{\sqrt{2\pi} f_m (m_i \rho_i^2)^{m_i M_i - 0.5}}{\Gamma(m_i M_i) \exp(m_i \rho_i^2)}, \quad (4.9)$$

onde f_m é o desvio de Doppler máximo, $\rho_i = r/\sqrt{\omega_i}$ e $\omega_i = \mathbb{E}[R_i^2]$. A PDF na saída do i -ésimo receptor MRC será

$$F_i(r) = \frac{\Gamma(m_i M_i, m_i \rho_i^2)}{\Gamma(m_i M_i)}. \quad (4.10)$$

Substituindo (4.9) e (4.10) em (4.7), uma solução exata para a LCR na saída do MRCS é prontamente obtida.

A AFD na saída do i -ésimo receptor MRC em um ambiente Nakagami- m é [40]

$$T_{R_i}(r) = \frac{\Gamma(m_i M_i, m_i \rho_i^2) \exp(m_i \rho_i^2)}{f_m \sqrt{2\pi} (m_i \rho_i^2)^{m_i M_i - 0.5}}. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.8), encontra-se uma formulação exata para a duração média de desvanecimento do sinal na saída do MRCS. Note que as formulações apresentadas são gerais, podendo ser aplicadas em cenários onde o desvanecimento não é identicamente distribuído em cada receptor MRC e com as estações rádio base podendo possuir diferentes números de antenas.

Quando todos os sítios selecionados possuírem o mesmo parâmetro de desvanecimento m , a mesma potência Ω (cenário balanceado) e um número idêntico de ramos M , a expressão da taxa

de cruzamento de nível se reduz a

$$N_R(r) = \frac{N\sqrt{2\pi}f_m(m\rho^2)^{mM-0.5}}{\Gamma(mM)\exp(m\rho^2)} \left(\frac{\Gamma(mM, m\rho^2)}{\Gamma(mM)} \right)^{N-1}. \quad (4.12)$$

Da mesma forma, a formulação para a AFD simplifica para

$$T_R(r) = \frac{\exp(m\rho^2)\Gamma(mM, m\rho^2)}{N\sqrt{2\pi}f_m(m\rho^2)^{mM-0.5}}. \quad (4.13)$$

4.3 Resultados numéricos

A seguir, as formulações obtidas na Seção 4.2 serão ilustradas através de alguns exemplos numéricos. Em um ambiente Nakagami- m onde todos os ramos dos receptores MRC são i.i.d., (4.12) e (4.13) podem ser utilizadas diretamente para calcular a LCR e a AFD do sinal na saída do combinador MRCS. Alguns gráficos para este cenário são apresentados na Fig. 4.1 para $m = 1.5$ e diferentes valores de N e M .

Comparando Fig. 4.1a com a Fig. 4.1b, verifica-se que, para o caso i.i.d., a variação do número de ramos combinados por MRC (M) resulta em um maior impacto no desempenho do sistema quando comparado à variação do número de receptores MRC selecionados (N). Isto é, uma alteração mais perceptível nas curvas ocorre com o aumento de M em relação a N para o caso i.i.d.. Esta é uma consequência direta de um resultado amplamente conhecido, segundo o qual a combinação por razão máxima sempre apresenta um melhor desempenho em relação à combinação por seleção. Em outras palavras, para um cenário balanceado, é preferível aumentar o número de ramos por receptor MRC do que aumentar o número de ramos no combinador SC.

Esta conclusão, no entanto, pode não ser válida caso um cenário desbalanceado seja considerado, onde a potência média varia de um receptor MRC para o outro. Neste caso, o aumento do número de ramos combinados por razão máxima em cada sítio selecionado não irá necessariamente resultar em um maior ganho de desempenho quando comparado à adição de um novo sítio como entrada do combinador por seleção. Para ilustrar este fato, considere as seguintes configurações para o MRCS onde todos os receptores MRC possuem o mesmo número de ramos: (i) $N = 2$, $M = 2$ e potências balanceadas; (ii) $N = 2$, $M = 3$ e potências balanceadas; (iii) $N = 3$, $M = 2$ e potências balanceadas; (iv) $N = 3$, $M = 2$ e desbalanceamento de potência, com dois receptores MRC possuindo potências médias idênticas e um terceiro MRC possuindo uma potência média 6 dB maior. Estas configurações foram investigadas considerando $m = 0.5$ e $m = 1.5$. Para o caso simétrico, os resultados foram obtidos seguindo o mesmo procedimento do exemplo anterior. Já para o caso desbalanceado, (4.7) e (4.8) foram as expressões utilizadas para obter os resultados.

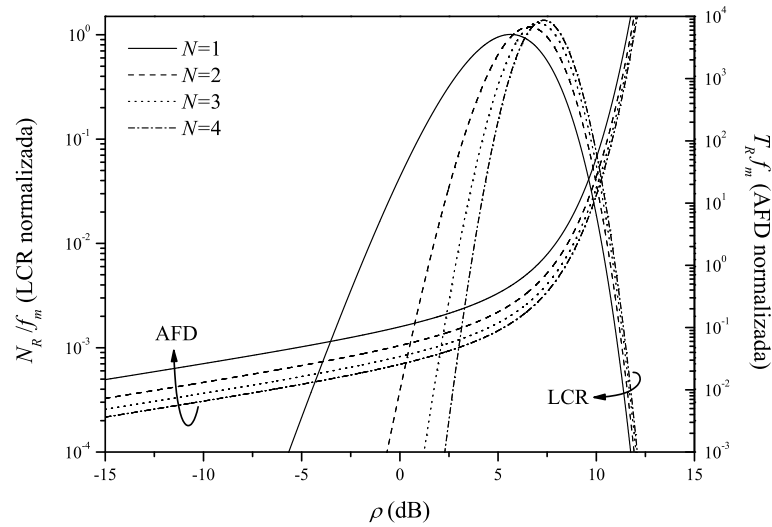
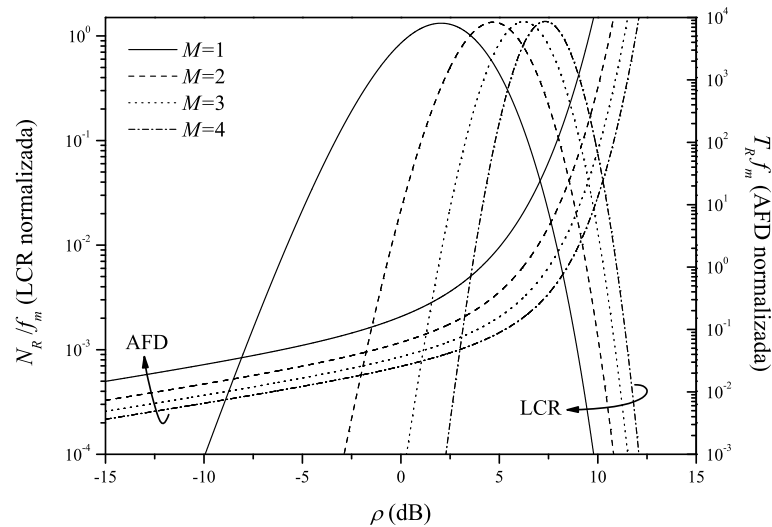
(a) $m = 1.5, M = 4$ (b) $m = 1.5, N = 4$

Fig. 4.1: LCR e AFD na saída do combinador MRCS para um ambiente Nakagami- m , considerando um cenário simétrico. Em (a) o número de ramos selecionados em cada MRC é mantido constante e em (b) o número de sítios selecionados é mantido constante.

As curvas resultantes para a LCR e a AFD neste cenário estão elencadas na Fig. 4.2. Os gráficos são apresentados como uma função do parâmetro ρ dos receptores MRC balanceados. Assim, para os casos (i)-(iii), $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$ em (4.7) a (4.11), e, para o caso (iv), $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ e $\rho_3 = \rho - 6$ dB em (4.7) a (4.11). Como pode ser observado, ao considerar a variação do desempenho para o caso com balanceamento de potência, i.e., das configuração (i) para (ii) e (iii), um aumento no número de sítios selecionados (i-iii) resulta em um ganho inferior ao obtido quando o número de ramos em cada receptor MRC aumenta (i-ii). Por outro lado, analisando a variação do desempenho das configurações

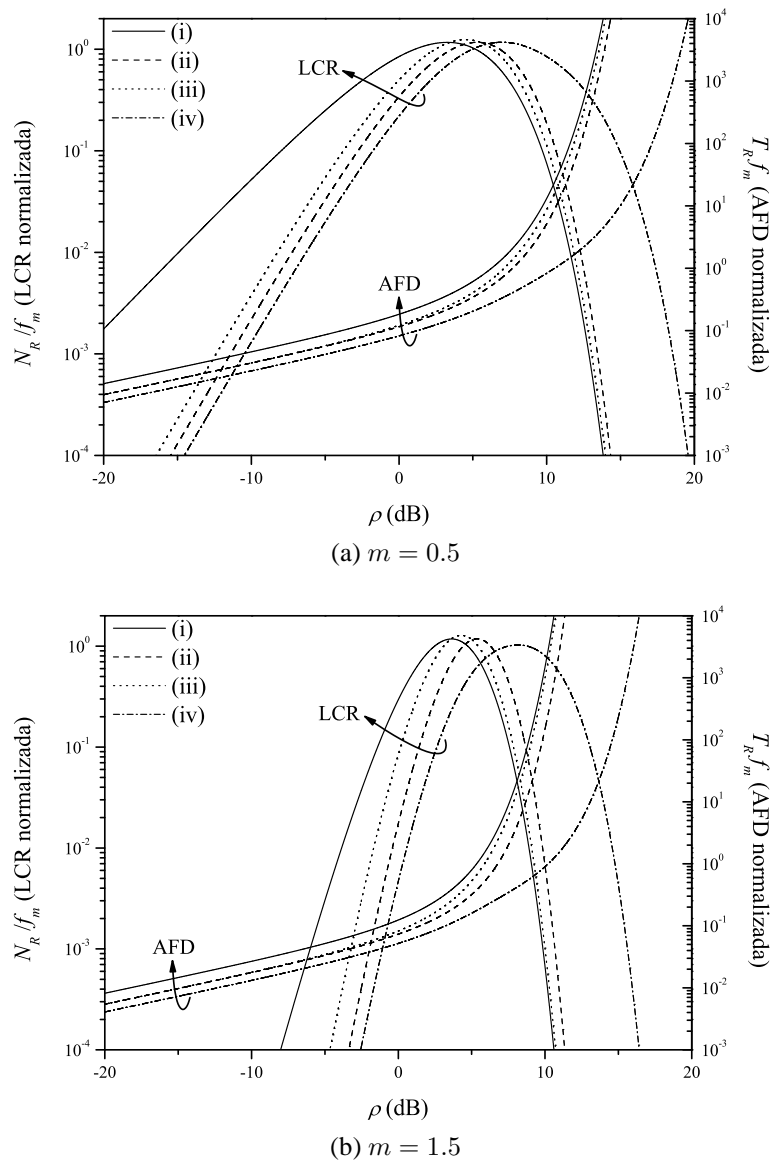


Fig. 4.2: Comparação da LCR e AFD na saída do combinador MRCS considerando os seguintes cenários: (i) $N = 2$, $M = 2$ e potências balanceadas; (ii) $N = 2$, $M = 3$ e potências balanceadas; (iii) $N = 3$, $M = 2$ e potências balanceadas; (iv) $N = 3$, $M = 2$ e desbalanceamento de potência, com dois receptores MRC possuindo potências médias idênticas e um terceiro MRC possuindo uma potência média 6 dB maior.

(i) para (iv), fica claro que o ganho neste caso é substancialmente maior que nos anteriores. Este exemplo ilustra a importância das formulações obtidas em projetos práticos que envolvem o MRCS.

4.4 Conclusões

Este capítulo introduziu o método de combinação MRCS, apresentando diversas formulações para as estatísticas do sinal na saída do combinador. O MRCS já é utilizado na prática em redes de celular 2G e 3G e pode ser aplicado em cenários onde existe seleção de sítio. Foram introduzidas expressões gerais e fechadas para a função densidade probabilidade (pdf), confiabilidade, taxa de cruzamento de nível e duração média de desvanecimento. Estas formulações, apesar de serem matematicamente simples, são fundamentais para o dimensionamento de projetos que utilizam o MRCS, conforme ilustrado através de um exemplo numérico. O próximo capítulo dá continuidade ao estudo das estatísticas do sinal na saída do combinador MRCS, apresentando o resultado principal obtido ao longo da análise deste método híbrido de combinação de diversidade: uma expressão exata para o valor médio da razão sinal-ruído na saída do combinador.

Capítulo 5

MRCs: Análise da Razão Sinal-Ruído na Saída do Combinador

Este capítulo introduz uma fórmula fechada para a razão sinal-ruído média na saída do combinador MRCs para um ambiente Nakagami- m , assumindo que os M_i sinais de entrada do receptor MRC i são i.i.d. com SNR média igual a γ_{0i} . Note, portanto, que o nível médio do sinal pode variar de um receptor MRC para o outro. Além disso, restringem-se os valores dos parâmetros de desvanecimento m_i para cada receptor MRC de forma que $M_i m_i$ seja inteiro. A expressão final obtida para a SNR média é geral, nova e simples de implementar computacionalmente. Ao final do capítulo, as formulações apresentadas serão ilustradas com um exemplo numérico e validadas através de simulações.

5.1 A expressão fechada para a SNR média na saída do combinador MRCs

Para facilitar a notação, define-se $\alpha_i \triangleq m_i/\gamma_{0i}$ e $M_i \triangleq M_i m_i$, sendo que M_i assume apenas valores inteiros. Neste cenário, a PDF do sinal combinado por razão máxima na saída do i -ésimo receptor será dada por

$$F_{\text{mrc}_i}(\gamma) = 1 - \exp(-\alpha_i \gamma) \sum_{k=1}^{M_i} \frac{(\alpha_i \gamma)^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (5.1)$$

A SNR média na saída do MRCs pode ser calculada como

$$\bar{\gamma} = \int_0^{\infty} [1 - F_{\text{sel}}(\gamma)] d\gamma. \quad (5.2)$$

onde $F_{\text{sel}}(\gamma)$ é dada em (4.2).

Define-se

$$q_j(\gamma) \triangleq -\exp(-\alpha_j\gamma) \sum_{i=1}^{M_j} \frac{(\alpha_j\gamma)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Portanto, a partir de (4.2),

$$F_{\text{sel}}(\gamma) = \prod_{i=1}^N [1 + q_i(\gamma)] \quad (5.3)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \int_0^\infty [1 - \prod_{i=1}^N (1 + q_i(\gamma))] d\gamma \\ &= - \int_0^\infty \sum_{i=1}^{2^N-1} \left(\prod_{j=1}^N [q_j(\gamma)]^{b_j(i)} \right) d\gamma, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde $b_j(i)$ é o j -ésimo bit da representação binária de N bits de i . Expandindo o produtório em (5.4), obtém-se

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^N [q_j(\gamma)]^{b_j(i)} &= \prod_{j=1}^N \left(-\exp(-\alpha_j\gamma) \sum_{k=1}^{M_j} \frac{(\alpha_j\gamma)^{k-1}}{(k-1)!} \right)^{b_j(i)} \\ &= \exp \left(-\gamma \sum_{l=1}^N \alpha_l b_l(i) \right) \times \prod_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^{M_j} -\frac{(\alpha_j\gamma)^{k-1}}{(k-1)!} \right)^{b_j(i)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

O produtório em (5.5) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^{M_j} -\frac{(\alpha_j\gamma)^{i-1}}{(i-1)!} \right)^{b_j(i)} &= \sum_{k_1=0}^{(M_1-1)b_1(i)} \sum_{k_2=0}^{(M_2-1)b_2(i)} \cdots \sum_{k_N=0}^{(M_N-1)b_N(i)} \left(-\frac{(\alpha_1\gamma)^{k_1}}{k_1!} \right)^{b_1(i)} \\ &\quad \times \left(-\frac{(\alpha_2\gamma)^{k_2}}{k_2!} \right)^{b_2(i)} \cdots \left(-\frac{(\alpha_N\gamma)^{k_N}}{k_N!} \right)^{b_N(i)} \\ &= \sum_{k_1=0}^{(M_1-1)b_1(i)} \cdots \sum_{k_N=0}^{(M_N-1)b_N(i)} \gamma^{\sum_{l=1}^N k_l} \prod_{j=1}^N \left(-\frac{\alpha_j^{k_j}}{k_j!} \right)^{b_j(i)}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Substituindo (5.6) em (5.4), encontra-se

$$\bar{\gamma} = - \sum_{i=1}^{2^N-1} \sum_{k_1=0}^{(M_1-1)b_1(i)} \cdots \sum_{k_N=0}^{(M_N-1)b_N(i)} \int_0^\infty \gamma^{\sum_{l=1}^N k_l} \exp \left(-\gamma \sum_{l=1}^N \alpha_l b_l(i) \right) \prod_{j=1}^N \left(-\frac{\alpha_j^{k_j}}{k_j!} \right)^{b_j(i)} d\gamma. \quad (5.7)$$

O resultado da integração anterior é

$$\bar{\gamma} = - \sum_{i=1}^{2^N-1} \sum_{k_1=0}^{(M_1-1)b_1(i)} \cdots \sum_{k_N=0}^{(M_N-1)b_N(i)} (-1)^{w(i)} (\mathbb{K})! \left(\sum_{l=1}^N \alpha_l b_l(i) \right)^{-1-\mathbb{K}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{\alpha_j^{k_j}}{k_j!} \right), \quad (5.8)$$

onde $w(i)$ é o peso de Hamming (número de bits ‘1’) de i e $\mathbb{K} = \sum_{l=1}^N k_l$.

A equação (5.8) apresenta uma expressão fechada para a SNR média na saída do combinador MRCS em um ambiente Nakagami- m com $m_i M_i$ inteiro. Esta formulação é geral e nova. No entanto, (5.8) não possui uma implementação algorítmica simples, visto que o número de somatórios varia de acordo com a quantidade de receptores MRC (cujas saídas constituem as entradas do combinador por seleção). Portanto, com o objetivo de facilitar o seu cálculo, (5.8) pode ser reescrita como

$$\bar{\gamma} = - \sum_{i=1}^{2^N-1} \sum_{\mathbf{K} \in A(i)} (-1)^{w(i)} (\mathbf{1} \cdot \mathbf{K}^T)! (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}_i^T)^{(-1-\mathbf{1} \cdot \mathbf{K}^T)} \prod_{j=1}^N \left(\frac{\alpha_j^{k_j}}{k_j!} \right) \quad (5.9)$$

onde \mathbf{B}_i , \mathbf{K} e $\boldsymbol{\alpha}$ são vetores linha N -dimensionais cujos elementos são denotados por b_{ij} , k_j e α_j , respectivamente. O símbolo $\mathbf{1}$ representa um vetor linha N -dimensional composto por ‘1s’ e $(\cdot)^T$ indica a operação de transposição de um vetor. \mathbf{B}_i é composto pelos bits resultantes da representação binária de N bits de i e $\boldsymbol{\alpha}$ é formado por todos os N α_i ’s definidos previamente. Em cada iteração i , o vetor \mathbf{K} assume todos os valores do conjunto $A(i)$, definido como

$$A(i) = \{\mathbf{K} | b_{ij} = 0 \rightarrow k_j = 0, 0 \leq k_j \leq M_j - 1, 1 \leq j \leq N\} \quad (5.10)$$

Assim como (5.8), (5.9) é uma expressão fechada para a SNR média na saída do combinador MRCS em um ambiente Nakagami- m com $m_i M_i$ inteiro, sendo geral, nova e simples de implementar computacionalmente. É importante destacar que, quando $M_i = 1$ para todo i , (5.9) corresponde à SNR média na saída de um combinador por seleção em um ambiente Nakagami- m com ramos independentes e m inteiro. Este caso especial da formulação geral apresentada é inédita na literatura. Quando $M_i = M$ e $\alpha_i = \alpha$ para todos os receptores MRC, (5.8) simplifica para

$$\alpha \bar{\gamma} = - \sum_{i=1}^N \frac{(-1)^i}{i} \binom{N}{i} \sum_{k_1=0}^{M-1} \cdots \sum_{k_i=0}^{M-1} \binom{\mathbb{K}}{k_1, \dots, k_i} i^{-\mathbb{K}}, \quad (5.11)$$

onde $\mathbb{K} = \sum_{j=1}^i k_j$. Quando $M = 1$ e utilizando [41, Equação 0.155.4], (5.11) se reduz a

$$\alpha \bar{\gamma} = \sum_{i=1}^N \binom{N}{i} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \quad (5.12)$$

Ademais, quando $m_i = 1$ para todos os receptores, (5.12) corresponde à expressão amplamente conhecida para a SNR média na saída de um combinador por seleção em um ambiente Rayleigh. Analogamente, quando $N = 1$ e $m = 1$, é direto verificar que (5.11) simplifica para a SNR média na saída de um combinador por razão máxima em um ambiente Rayleigh.

5.2 Resultados Numéricos

Nesta seção, as formulações obtidas na Seção 5.1 para a razão sinal-ruído média na saída do combinador MRCS serão ilustradas através de exemplos numéricos. A Fig. 5.1 apresenta os resultados para $m = 0.5, 1, 1.5$ e 2 junto com valores simulados, considerando $m_i = m, M_i = M$ e $\gamma_{0i} = \gamma_0$ para cada receptor. A SNR média na saída do MRCS normalizada em relação a γ_0 é representada em função do número de receptores MRC selecionados (N) e do número de ramos por receptor (M) para cada parâmetro de desvanecimento considerado. É interessante destacar a excelente concordância entre os resultados simulados e os valores teóricos.

Como pode ser observado, para um dado número de ramos combinados por razão máxima (M), o ganho diferencial da SNR média decresce com o aumento do número de receptores MRC (N). Por exemplo, considerando $m = 1.5$ e $M = 2$, o ganho em termos da SNR média de $N = 5$ para $N = 6$ é 0.4 dB menor do que o ganho quando aumentamos $N = 2$ para $N = 3$. De maneira similar, para um dado número de receptores MRC selecionados (N), o ganho diferencial também diminui com o aumento de M . Além disso, o ganho obtido com o aumento do número de ramos combinados por razão máxima (M) é aproximadamente independente do número de receptores MRC (N). Para ilustrar esta observação, considere $m = 2$ e $N = 3$. Neste cenário, o ganho diferencial obtido ao incrementar $M = 2$ para $M = 3$ é 1.5 dB. Caso o número de receptores selecionados aumente para $N = 6$, o ganho de $M = 2$ para $M = 3$ se torna 1.4 dB, sendo apenas ≈ 0.1 dB menor do que o ganho obtido quando $N = 3$.

5.3 Conclusões

Neste capítulo, foi proposta uma formulação geral e fechada para a SNR média na saída de um combinador MRCS, apresentada em (5.8), considerando um ambiente Nakagami- m onde o produto $m_i M_i$ em cada receptor MRC i é inteiro. Esta formulação foi estendida em (5.9) de forma a permitir uma implementação computacional simples. As expressões obtidas são novas e generalizam outras encontradas na literatura.

Este capítulo conclui o estudo do combinador MRCS realizado neste trabalho. As expressões obtidas permitem a análise de diversas estatísticas do sinal na saída do combinador, podendo ser

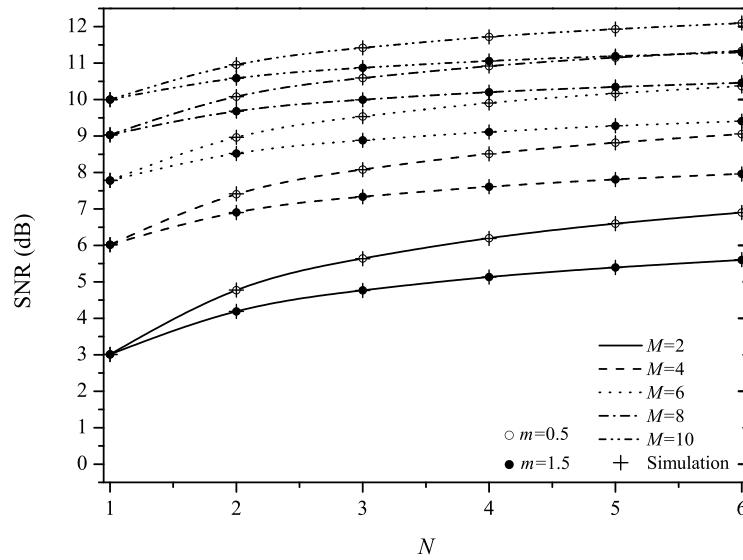
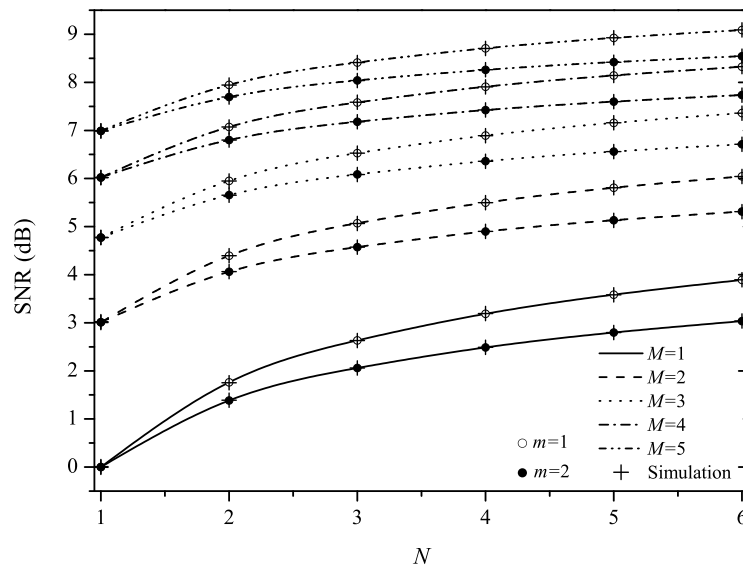
(a) $m = 0.5$ and $m = 1.5$ (b) $m = 1$ and $m = 2$

Fig. 5.1: SNR média normalizada na saída do combinador MRCS em função do número de sítios selecionados N , considerando que cada receptor MRC possui o mesmo número de ramos M , parâmetro de desvanecimento m e potência média do sinal recebido.

aplicadas a diversos cenários práticos.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho, foram abordados dois tópicos da área de comunicações sem fio: a Probabilidade de *Outage* em sistemas com sinais mutuamente interferentes e um método híbrido de combinação de diversidade baseada na seleção de sinais combinados por razão máxima. Em ambos os casos, foram introduzidas formulações gerais e inéditas na literatura. As expressões obtidas para cada tópico foram validadas através de simulações numéricas e podem ser utilizadas em diversas aplicações práticas.

Inicialmente, uma expressão geral e exata para a Probabilidade de *Outage* Conjunta (JOP) em sistemas sem fio foi proposta. A Probabilidade de *Outage* Conjunta corresponde à probabilidade de que, dado um conjunto de sinais mutuamente interferentes, pelo menos um sinal possua uma razão sinal-interferência-ruído abaixo de um determinado limiar tolerável. A JOP é uma formulação mais abrangente para o cálculo de eventos de *outage* do que a tradicionalmente encontrada na literatura, que consiste em calcular a probabilidade de um único evento simples, i.e., o *outage* de apenas um sinal.

A partir da formulação geral para a Probabilidade de *Outage* Conjunta, encontrou-se uma condição necessária e suficiente para que a JOP seja não-trivial, dependente apenas das restrições SINR de cada sinal. Além disso, a expressão geral foi estendida de forma a contemplar eventos de *outage* específicos. Finalmente, obteve-se uma formulação fechada e simples para a JOP em um ambiente Rayleigh onde os sinais mutuamente interferentes são independentes.

O segundo tópico abordado neste trabalho foi um método híbrido de combinação de diversidade baseado na seleção de sinais combinados por razão máxima, denominado MRCS. Este método de combinação, apesar de já ser utilizado em redes de celular 2G e 3G, ainda não havia sido analisado na literatura sobre o tema. Neste sentido, foram propostas formulações para a taxa de cruzamento de nível, duração média de desvanecimento e confiabilidade do sinal na saída do combinador MRCS. O resultado mais relevante, no entanto, foi uma expressão fechada e simples de implementar computacionalmente para a razão sinal-ruído média na saída do combinador.

A seguir, os resultados principais obtidos neste trabalho serão listados. Espera-se que as próximas seções sirvam como uma referência rápida de forma a facilitar o emprego das formulações obtidas.

6.1 Resultados Principais – Probabilidade de *Outage* Conjunta

A formulação geral para a Probabilidade de *Outage* Conjunta em um sistema limitado por interferência, i.e., onde o ruído aditivo pode ser desprezado, é dada por:

$$\begin{aligned}
P_{\bar{I}} &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{K}_{1,j} w_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) w_j} \dots \int_{\mathbb{K}_{j-1,j} w_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{i=j+1}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) w_j - \sum_{i=1}^{j-2} w_i} \int_{\mathbb{K}_{j+1,j} w_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{i=j+2}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) w_j - \sum_{i=1}^{j-1} w_i} \dots \\
&\times \int_{\mathbb{K}_{N-1,j} w_j}^{\mathbb{C}_{j,N} w_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-2} w_i} \int_{\beta_N \sum_{i=1}^{N-1} w_i}^{\frac{w_j}{\beta_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} w_i} f_{\mathbf{W}}(w_1, w_2, \dots, w_N) dw_N dw_{N-1} \dots dw_{j+1} dw_{j-1} \dots dw_1 dw_j, \quad (2.16)
\end{aligned}$$

onde β_i é a restrição para a razão sinal-interferência-mais-ruído do sinal W_i , $i = 1, \dots, N$, as constantes $\mathbb{K}_{i,j}$ e $\mathbb{C}_{i,j}$ estão definidas em (2.8) e $f_{\mathbf{W}}(\cdot)$ é a pdf conjunta dos sinais W_1, \dots, W_N . A condição necessária e suficiente para que a integral em (2.16) seja não-trivial é:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{1 + \beta_i} < 1. \quad (2.17)$$

A formulação geral (2.16) pode ser estendida de forma a incluir o ruído aditivo através de uma simples transformação de variáveis $W_j = U_j + g_j(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{n})$, onde $g_j(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{n})$ é definida em (2.26). Assim, a expressão em forma integral para a JOP considerando o ruído aditivo é:

$$\begin{aligned}
P_{\bar{I}} &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{K}_{1,j} u_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) u_j} \dots \int_{\mathbb{K}_{j-1,j} u_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{i=j+1}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) u_j - \sum_{i=1}^{j-2} u_i} \int_{\mathbb{K}_{j+1,j} u_j}^{(\mathbb{C}_{j,N} - \sum_{i=j+2}^{N-1} \mathbb{K}_{i,j}) u_j - \sum_{i=1}^{j-1} u_i} \dots \\
&\times \int_{\mathbb{K}_{N-1,j} u_j}^{\mathbb{C}_{j,N} u_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-2} u_i} \int_{\beta_N \sum_{i=1}^{N-1} u_i}^{\frac{u_j}{\beta_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N-1} u_i} f_{\mathbf{W}}(u_1 + g_1, \dots, u_N + g_N) du_N du_{N-1} \dots du_{j+1} du_{j-1} \dots du_1 du_j, \quad (2.28)
\end{aligned}$$

onde $g_i = g_i(\mathbf{a}, \mathbf{n})$.

A integral em (2.16) foi resolvida para um ambiente onde os sinais mutuamente interferentes são independentes e estão sujeitos a desvanecimento Rayleigh. A expressão fechada para a JOP nesse

cenário é:

$$P_{\bar{I}} = \frac{\left(1 - \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{1 + \beta_j}\right)^{N-1}}{\prod_{i=1}^N \left(1 - \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j}{1 + \beta_j} \left(1 - \frac{\Omega_i}{\Omega_j}\right)\right)}, \quad (3.13)$$

onde Ω_i é a potência média do sinal i , $i = 1, \dots, N$.

Caso o ruído aditivo seja considerado, a expressão para a Probabilidade de *Outage* Conjunta no ambiente Rayleigh independente é dada por

$$P_{\bar{I}} = P_{\bar{I}0}(\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\beta}) \prod_{i=1}^N (1 + \sigma_i^2 g_i(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{\Omega}^{-1}))^{-1/2}, \quad (3.17)$$

onde $M_{n_i}[\cdot]$ é a função geradora de momento de n_i , definida como $M_{n_i}[s] = \mathbb{E}[e^{sn_i}]$, e a função $P_{\bar{I}0}(\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\beta})$ corresponde à probabilidade que todas as restrições SINR sejam satisfeitas na ausência do ruído aditivo, sendo dada por (3.13).

6.2 Resultados Principais – MRCS

O MRCS é um esquema de combinação de diversidade no qual a saída de N combinadores por razão máxima, cada um com M_i ramos, $i = 1, \dots, N$, compõe as entradas de um combinador por seleção. Considerando as saídas de cada receptor MRC independentes entre si, a taxa de cruzamento do nível r no sentido positivo ou negativo do sinal na saída do combinador MRCS é dada por:

$$N_R(r) = \sum_{i=1}^N N_{R_i}(r) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N F_{R_j}(r), \quad (4.7)$$

onde N_{R_i} e $F_{R_j}(r)$ são, respectivamente, a taxa de cruzamento de nível e a função distribuição acumulada do sinal na saída do receptor MRC i .

A duração média de desvanecimento do sinal na saída do combinador MRCS, dada a AFD de cada receptor MRC $T_{R_i}(\cdot)$, é

$$T_R^{-1}(r) = \sum_{i=1}^N T_{R_i}^{-1}(r). \quad (4.8)$$

(4.7) e (4.8) são expressões já apresentadas na literatura ([38] e [39], respectivamente), mas que podem ser aplicadas diretamente para obter as estatísticas de segunda ordem na saída do combinador MRCS.

A razão sinal-ruído média na saída do combinador MRCS em um ambiente Nakagami- m onde os M_i sinais de entrada do receptor MRC i ($i = 1, \dots, N$) são i.i.d. com SNR média igual a γ_{0i} , parâmetro de desvanecimento m_i e satisfazem $M_i m_i$ inteiro é:

$$\bar{\gamma} = - \sum_{i=1}^{2^N-1} \sum_{k_1=0}^{(M_1-1)b_1(i)} \dots \sum_{k_N=0}^{(M_N-1)b_N(i)} (-1)^{w(i)} (\mathbb{K})! \left(\sum_{l=1}^N \alpha_l b_l(i) \right)^{-1-\mathbb{K}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{\alpha_j^{k_j}}{k_j!} \right). \quad (5.8)$$

6.3 Trabalhos Futuros

Ao longo deste trabalho, foram identificados diversos problemas interessantes cujas soluções seriam contribuições relevantes para a área. Algumas destas questões são listadas a seguir.

6.3.1 Probabilidade de *Outage* Conjunta

- A formulação apresentada para a JOP considera um receptor simples, em que todos os sinais interferentes são detectados simultaneamente. Seria interessante encontrar uma expressão geral para a Probabilidade de *Outage* Conjunta para um receptor que realiza cancelamento sucessivo de interferência [42]. Investigações preliminares mostraram que, conforme esperado, esta arquitetura de receptor apresenta um desempenho significativamente melhor em termos da probabilidade de *outage* conjunta do que a arquitetura analisada neste trabalho.
- A integral para a JOP (2.16) foi calculada para um ambiente Rayleigh. Uma extensão do trabalho de grande relevância prática seria encontrar uma expressão aproximada, ou até mesmo fechada, para a JOP em um ambiente de desvanecimento mais geral, como Nakagami- m .
- Aplicar as expressões obtidas em problemas de dimensionamento de redes *multihop*. Esse trabalho já vem sendo desenvolvido pelo grupo de pesquisa do qual o autor faz parte (Wiss-Tek/Unicamp) e tem apresentado resultados promissores.
- Analisar as possíveis aplicações da formulação para a Probabilidade de *Outage* Conjunta em rádio cognitivo. É interessante, por exemplo, verificar como as restrições β podem ser ajustadas de forma a definir a prioridade entre usuários primários e secundários.

6.3.2 MRCS

- Encontrar expressões para outras estatísticas na saída do combinador MRCS, como probabilidade de erro de bit e a função geradora de momento.

- Formular a SNR média na saída do combinador para um parâmetro de desvanecimento m qualquer. Investigações preliminares mostraram que isso pode ser feito em termos da Função de Lauricella [43].
- Recentemente, um novo esquema de diversidade espacial para sistemas com múltiplas antenas de transmissão denominado *Seleção da Antena Transmissora* (TAS, do inglês *Transmist Antenna Selection*) foi apresentado na literatura. Neste método, seleciona-se como antena transmissora aquela que resultará na maior SNR na saída do receptor, considerando que o receptor combina por razão máxima os sinais recebidos [44, 45]. Surpeendentemente, as formulações obtidas para a MRCS englobam o TAS como um caso particular, reduzindo-se a ele quando considera-se que todos os receptores MRC possuem o mesmo número de antenas. É de grande interesse, portanto, investigar a relação entre ambas as aplicações e verificar se as formulações obtidas neste trabalho introduzem, como caso especial, resultados novos para a análise do método TAS.

Referências Bibliográficas

- [1] Theodore S. Rappaport. *Wireless Communications: Principles and Practice (2nd Edition)*. Prentice Hall PTR, 2 edition, 2002.
- [2] Michel Daoud Yacoub. *Fundamentals of Mobile Radio Engineering*. CRC-Press, 1 edition, April 1993.
- [3] Andrea Goldsmith. *Wireless Communications*. Cambridge University Press, August 2005.
- [4] Andrew J. Viterbi. *CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication*. Prentice Hall PTR, April 1995.
- [5] K.S. Gilhousen, I.M. Jacobs, R. Padovani, A.J. Viterbi, L.A. Weaver, and C.E. Wheatley. On the capacity of a cellular CDMA system. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 40(2):303–312, May 1991.
- [6] S.P. Weber, X. Yang, J.G. Andrews, and G. de Veciana. Transmission capacity of wireless ad hoc networks with outage constraints. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 51(12):4091–4102, December 2005.
- [7] J.G. Andrews, S. Weber, and M. Haenggi. Ad hoc networks: To spread or not to spread? *IEEE Commun. Mag.*, 45(12):84–91, December 2007.
- [8] P. Gupta and P.R. Kumar. The capacity of wireless networks. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 46(2):388–404, March 2000.
- [9] Y.-D. Yao and A.U.H. Sheikh. Investigations into cochannel interference in microcellular mobile radio systems. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 41:114–123, 1992.
- [10] K.W. Sowerby and A.G. Williamson. Outage probability calculations for a mobile radio system having multiple rayleigh interferers. *Electron. Lett.*, 23:600–601, 1987.
- [11] K.W. Sowerby and A.G. Williamson. Outage probability calculations for multiple cochannel interferers in cellular mobile radio systems. *IEE. Proc., pt. F*, 135:208–215, 1988.

- [12] Alvaro Augusto Machado de Medeiros. *Dimensionamento em Redes Ad Hoc: Tráfego e Interferência Combinados*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brazil, 2007.
- [13] Alvaro Augusto Machado de Medeiros and Michel Daoud Yacoub. An analytical approach for dimensioning wireless multihop networks. In *IEEE Global Telecommun. Conf.*, pages 4687–4691, November 2007.
- [14] R.D. Yates. A framework for uplink power control in cellular radio systems. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 13(7):1341–1347, September 1995.
- [15] S. Kandukuri and S. Boyd. Optimal power control in interference-limited fading wireless channels with outage-probability specifications. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 1:46–55, 2002.
- [16] M. Chiang, Chee Wei Tan, D.P. Palomar, D. O’Neill, and D. Julian. Power control by geometric programming. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 6:2640–2651, 2007.
- [17] J.G. Andrews. Interference cancellation for cellular systems: a contemporary overview. *IEEE Wireless Commun. Mag.*, 12(2):19–29, April 2005.
- [18] Zhao Liu and M. El Zarki. SIR-based call admission control for DS-CDMA cellular systems. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 12:638–644, 1994.
- [19] S. Singh, V. Krishnamurthy, and H.V. Poor. Integrated voice/data call admission control for wireless DS-CDMA systems. *IEEE Trans. Signal Process.*, 50(6):1483–1495, June 2002.
- [20] Robert G. Gallager. *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press, March 2008.
- [21] Y.-D. Yao and A.U.H. Sheikh. Outage probability analysis for microcell mobile radio systems with cochannel interferers in Rician/Rayleigh fading environment. *IEE Electron. Lett.*, 26:864–866, 1990.
- [22] Mung Chiang. *Geometric Programming for Communication Systems*. Now Publishers Inc, June 2005.
- [23] Stephen Boyd, Seung-Jean Kim, Lieven Vandenberghe, and Arash Hassibi. A tutorial on geometric programming. *Optimization and Eng.*, 8:67–127, March 2007.
- [24] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, March 2004.

- [25] Michael Grant, Stephen Boyd, and Yinyu Ye. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, June 2008.
- [26] Michael Grant and Stephen Boyd. Graph implementations for nonsmooth convex programs. In *Recent Advances in Learning and Control*, volume 371 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 95–110. Springer, 2008.
- [27] D.G. Brennan. Linear diversity combining techniques. *Proc. IEEE*, 91(2):331–356, Feb 2003.
- [28] Thomas Eng, Ning Kong, and Laurence B. Milstein. Comparison of diversity combining techniques for Rayleigh-fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 44(9):1117–1129, September 1996.
- [29] Ning Kong and Laurence B. Milstein. Average SNR of a generalized diversity combining scheme. *IEEE Commun. Lett.*, 3(3):57–59, March 1999.
- [30] Claudio R. C. M. da Silva and Michel Daoud Yacoub. A generalized solution for diversity combining techniques in fading channels. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, 50(1):46–50, January 2002.
- [31] Seyeong Choi, M.-S. Alouini, K.A. Qaraqe, and Hong-Chuan Yang. Finger assignment schemes for rake receivers with multiple-way soft handover. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 7(2):495–499, February 2008.
- [32] Seyeong Choi, M.-S. Alouini, K.A. Qaraqe, and Hong-Chuan Yang. Finger replacement schemes for rake receivers in the soft handover region with multiple base stations. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 57(4):2114–2122, July 2008.
- [33] Herbert A. David and H. N. Nagaraja. *Order Statistics*. Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 3 edition, August 2003.
- [34] Athanasios D. Panagopoulos, Evangelia M. Georgiadou, and John D. Kanellopoulos. Selection combining site diversity performance. *IEEE Commun. Lett.*, 11(10):787–789, October 2007.
- [35] Harri Holma and Antti Toskala. *WCDMA for UMTS*. Wiley, New York, NY, 2 edition, September 2002.
- [36] Jaana Laiho, Achim Wacker, and T. Novosad. *Radio Network Planning and Optimisation for UMTS*. Wiley, New York, NY, 2 edition, February 2006.

- [37] Marvin K. Simon and Mohamed-Slim Alouini. *Digital Communication over Fading Channels*. Wiley-IEEE Press, 2 edition, December 2004.
- [38] Lin Yang and Mohamed-Slim Alouini. Level crossing rate over multiple independent random processes - an extension of the applicability of the rice formula. In *Proc. IEEE Global Telecommun. Conf.*, volume 3, pages 1644–1648, December 2003.
- [39] Daniel Benevides da Costa, José Cândido Silveira Santos Filho, Michel Daoud Yacoub, and Gustavo Fraidenraich. Crossing rates and fade durations for diversity-combining schemes over α - μ fading channels. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 6(11), November 2007.
- [40] Michel Daoud Yacoub, Cláudio Rafael Cunha Monteiro da Silva, and Jose Edson Vargas Bautista. Second-order statistics for diversity-combining techniques in Nakagami-fading channels. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 50(6):1464–1470, November 2001.
- [41] L. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, San Diego, CA, 6 edition, 2000.
- [42] David Tse and Pramod Viswanath. *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge University Press, June 2005.
- [43] Harold Exton. *Multiple Hypergeometric Functions and Applications*. Ellis Horwood Ltd, June 1976.
- [44] S. Thoen, L. Van der Perre, B. Gyselinckx, and M. Engels. Performance analysis of combined transmit-SC/receive-MRC. *IEEE Trans. Commun.*, 49(1):5–8, 2001.
- [45] Juan M. Romero-Jerez and Andrea J. Goldsmith. Exact error rates of MRC with transmit antenna selection in Non-Identically distributed nakagami fading channels. In *IEEE Global Commun. Conf. (Globecom'08)*, pages 1–5, New Orleans, USA, November 2008.

Apêndice A

Demonstração Auxiliar

Neste Apêndice, a demonstração que (3.8) simplifica para (3.9) será apresentada. Inicialmente, o seguinte resultado será provado, válido para qualquer constante A , considerando $\Omega_i > 0$, $i = 1, \dots, N$:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\Omega_i + A} \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\Omega_i}{\Omega_i - \Omega_j} = \frac{A^{N-1}}{\prod_{i=1}^N (A + \Omega_i)}. \quad (\text{A.1})$$

Um argumento indutivo será utilizado para demonstrar (A.1). Quando $N = 2$, é fácil verificar que (A.1) é satisfeita, provando, assim, a base da indução. Assumindo que (A.1) é válido para $N = k$, então, para $N = k + 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{\Omega_i + A} \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} \frac{\Omega_i}{\Omega_i - \Omega_j} &= \frac{1}{\Omega_{k+1} + A} \left(\prod_{j=1}^k \frac{\Omega_{k+1}}{\Omega_{k+1} - \Omega_j} \right) + \sum_{i=1}^k \left(\left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{\Omega_i}{\Omega_i - \Omega_j} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{A}{(\Omega_{k+1} + A)(\Omega_i + A)} + \frac{\Omega_{k+1}}{(\Omega_{k+1} + A)(\Omega_i - \Omega_{k+1})} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\Omega_{k+1} + A} \left(\prod_{j=1}^k \frac{\Omega_{k+1}}{\Omega_{k+1} - \Omega_j} + \frac{\Omega_{k+1}(-\Omega_{k+1})^{k-1}}{\prod_{j=1}^k (\Omega_i - \Omega_{k+1})} \right) + \frac{A^k}{\prod_{i=1}^{k+1} (A + \Omega_i)} \\ &= \frac{A^k}{\prod_{i=1}^{k+1} (A + \Omega_i)}, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue ao aplicarmos duas vezes a hipótese da indução, concluindo a demonstração. A equação (A.1) também é válida quando $\Omega_i = \Omega_j$ para $i \neq j$, e o resultado correspondente pode ser encontrado resolvendo-se o limite $\Omega_i \rightarrow \Omega_j$. Rearranjando (A.1), chega-se ao seguinte resultado:

$$\sum_{i=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\Omega_i(1 + A\Omega_j)}{\Omega_i - \Omega_j} = 1. \quad (\text{A.2})$$

Com base em (A.2), pode-se analisar o termo correspondente ao somatório em (3.8), aqui definido como S :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=2}^N \left(\prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^N \frac{\Omega_i \Omega_j}{\Omega_i - \Omega_j} \right) \left(\frac{1}{\Omega_i} \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) + \sum_{j=1}^N \frac{\mathbb{K}_{j,1}(\Omega_i - \Omega_j)}{\Omega_i \Omega_j} \right)^{-1} \\ &= \frac{\sum_{i=2}^N \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^N \left(\left(\frac{\Omega_i}{\Omega_i - \Omega_j} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k(\Omega_j - \Omega_k)}{(1 + \beta_k)\Omega_k} \right) \right)}{\frac{\beta_1 + 1}{\beta_1} \prod_{i=2}^N \left(\frac{1}{\Omega_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j(\Omega_i - \Omega_j)}{(1 + \beta_j)\Omega_i \Omega_j} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Expandindo o numerador de (A.3), encontra-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^N \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^N \left(\left(\frac{\Omega_i}{\Omega_i - \Omega_j} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k(\Omega_j - \Omega_k)}{(1 + \beta_k)\Omega_k} \right) \right) &= D^{N-2} \sum_{i=2}^N \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^N \left(\left(\frac{\Omega_i}{\Omega_i - \Omega_j} \right) \left(1 + \frac{\Omega_j C}{D} \right) \right) \\ &= D^{N-2}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde a última igualdade segue de (A.2) e as constantes C e D são dadas por:

$$C = \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{(1 + \beta_k)\Omega_k}, \quad (\text{A.5})$$

$$D = 1 - \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 + \beta_k}. \quad (\text{A.6})$$

Portanto, (A.3) pode ser reescrita como

$$S = \frac{\frac{\beta_1}{1 + \beta_1} \left(1 - \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 + \beta_k} \right)}{\prod_{i=2}^N \left(\frac{1}{\Omega_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j (\Omega_i - \Omega_j)}{(1 + \beta_j) \Omega_i \Omega_j} \right)}. \quad (\text{A.7})$$

Finalmente (3.9) segue diretamente ao substituir (A.7) no termo correspondente ao somatório em (3.8).

Apêndice B

Um Breve Histórico do Trabalho Desenvolvido

O objetivo desse apêndice é apresentar a trajetória subjacente à elaboração deste trabalho, de forma que outros alunos que lerem possam se familiarizar com o processo de elaboração de um trabalho teórico na área de comunicações sem fio e as origens desta pesquisa. O autor tomará a liberdade de, apenas neste apêndice, recorrer ao uso da narrativa informal em primeira pessoa.

Este trabalho não foi realizado na ordem que está apresentado aqui. Apesar dos resultados estarem dispostos de forma direta, ou seja, uma demonstração do caso geral, seguido por casos particulares, a direção que o trabalho caminhou foi consideravelmente diferente. Um leitor desavisado pode até vir a acreditar que inicialmente eu abordei as formas mais gerais dos problemas, visualizando prontamente cada passo das demonstrações e partindo, então, para os casos particulares. A verdade é que este trabalho foi fruto de longas horas de tentativa e erro, experimentação e, por vezes, adivinhação. Apesar dos resultados finais serem justificados através de um sólido embasamento matemático, foram várias tentativas até que esta forma final fosse obtida. De fato, muitas vezes alguns dos resultados que, da maneira que estão apresentados aqui, aparentam ser os mais triviais, ou as simplificações que pareçam ser as mais óbvias, foram frutos de dias, ou até semanas, de esforço e validação.

A formulação para a Probabilidade de *Outage* Conjunta surgiu a partir de uma pesquisa de Doutorado [12] onde propõe-se uma formulação analítica para o dimensionamento de redes *multihop*. Uma das questões não respondidas em [12] foi como calcular o efeito da interferência de uma chamada admitida no sistema em todas as chamadas em andamento e, reciprocamente, o efeito da interferência gerada pelas chamadas em andamento na chamada admitida. A formulação desse problema correspondia à probabilidade que o sistema de desigualdades (2.1) fosse satisfeito, o que levou à definição da Probabilidade de *Outage* Conjunta. O objetivo principal era equacionar o efeito do controle de admissão de chamadas nas formulações propostas em [12] e aplicar o resultado no dimensionamento

de redes *multihop*.

Ao “atacar” este problema, inicialmente encontrei uma expressão para a probabilidade de (2.1) ser satisfeito na média. Este resultado baseava-se na soma de todas as desigualdades para as razões sinal-interferência-mais-ruído, dando origem a uma condição menos restritiva. Apesar da formulação resultante não ser exata, ela propiciou uma intuição fundamental para a resolução do problema: seria necessário combinar as restrições SINR de forma a reescrever o sistema de desigualdades para as SINR.

A partir disso, e seguindo os conselhos do meu orientador, comecei a estudar a JOP para o caso mais simplificado possível, onde todas as restrições SINR são idênticas, os sinais são i.i.d. e possuem uma distribuição Rayleigh e o sistema é limitado por interferência. Adotei várias abordagens para formular a região de integração para este cenário, sempre utilizando o software *Mathematica* para resolver as integrações para o ambiente Rayleigh e verificando os resultados com simulações realizadas através do software *Matlab*.

Após diversas tentativas, foi possível formular uma expressão em forma integral considerando três sinais mutuamente interferentes, cujo cálculo para um ambiente Rayleigh condizia com os resultados das simulações. Utilizando esta formulação como ponto de partida, encontrei a região de integração para quatro, cinco e, uma vez identificado um padrão, para um número qualquer de sinais mutuamente interferentes. Apesar de ser apresentado apenas no final do Capítulo 3, de fato o primeiro resultado relevante obtido foi a equação (3.14).

Com este resultado em mãos, e novamente seguindo os conselhos do Prof. Michel, fui adiante e encontrei formulações para o caso onde as restrições SINR são distintas para cada sinal, mas ainda considerando que os sinais são i.i.d. e Rayleigh. Isso levou à formulação geral apresentada em (2.16). Ressalto, novamente, que cada passo foi verificado resolvendo-se a integral para o ambiente Rayleigh e comparando com os resultados das simulações. Em seguida, encontrei expressões para a JOP considerando o cenário onde os sinais mutuamente interferentes possuem potências distintas mas as mesmas restrições SINR e, finalmente, para o caso geral apresentado em (3.13). Assim, ao invés de estudar diretamente o caso mais geral, o problema foi abordado analisando inicialmente diversos cenários simples e, a partir disso, generalizando as expressões obtidas para cenários mais complexos. Os demais resultados, como as formulações considerando o ruído aditivo e a condição necessária e suficiente para uma JOP não-trivial, seguiram diretamente.

A idéia do MRCS, por sua vez, surgiu a partir de uma questão da segunda prova da matéria “Comunicações Móveis” (a prova era para casa) que cursei no primeiro semestre de 2007. Naquela ocasião, o Prof. Michel propôs o problema de encontrar a SNR média na saída de uma MSC em um cenário de *soft-handoff* considerando um ambiente de desvanecimento Rayleigh. Felizmente, eu consegui resolver a questão e depois generalizar o resultado para o ambiente Nakagami. Reconheço

que as outras estatísticas (a LCR, AFD e confiabilidade) foram mais simples de obter mas, mesmo assim, constituem uma análise inédita para um método de combinação de diversidade nunca antes apresentado na literatura. A história da “questão de prova que virou artigo” assusta, desde então, os alunos recém-matriculados no curso de Comunicações Móveis.

Resumindo, a grande lição deste trabalho foi: a melhor abordagem para um problema matematicamente intrincado em engenharia é tentar resolver o caso mais simples, buscar compreender a *intuição* por trás desse resultado e tentar gradativamente generalizá-lo para cenários mais complexos. Essa afirmação pode parecer óbvia, mas creio que é um método que alunos iniciantes em pesquisa muitas vezes falham em adotar (o que teria sido o meu caso se não fosse a orientação que recebi). Creio também que um resultado é interessante apenas no limite que o problema que ele resolve é relevante. Neste sentido, a ajuda do Prof. Michel foi absolutamente fundamental para identificar e formular os problemas abordados, assim como para encontrar suas respectivas soluções.

Finalmente, este trabalho pode parecer, à primeira vista, intimidador. Não quero dizer com isso que a matemática envolvida é muito avançada – muito pelo contrário, com exceção de alguns poucos momentos, um conhecimento avançado de cálculo e probabilidade básica é o suficiente para entender os resultados apresentados aqui. O que pode intimidar nesta dissertação, conforme descrito por outros que leram o texto ou os artigos que surgiram do trabalho, é o excesso do uso de expressões algébricas intrincadas e uma grande quantidade de demonstrações complexas. Admito que também não acho as demonstrações apresentadas aqui ótimas – certamente existem outras mais compactas e mais elegantes que levam às mesmas conclusões. No entanto, elas cumprem, no melhor do meu entendimento, o seu papel: demonstrar os resultados principais. Espero, sinceramente, que algum dia um futuro aluno de pós-graduação olhe este trabalho e exclame: “Mas isso é trivial! Basta fazer uma transformação de variáveis nesta equação!” ou algo do tipo.

Paul Erdős, o famoso matemático húngaro, costumava dizer que Deus possui um livro onde todas as demonstrações estão escritas. Assim, quando ele via uma demonstração excepcionalmente elegante, ele exclamava: "Esta é igual ao que está no livro!". Acredito, sinceramente, que um dia poderei verificar a forma ótima das demonstrações apresentadas aqui.