UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

Newton Marques Peron

LÓGICAS DA INCONSISTÊNCIA DEÔNTICA

Dissertação de Mestrado

Orientador: Marcelo Esteban Coniglio

Campinas, Março de 2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

	Peron, Newton Marques
P424L	**Lógicas da Inconsistência Deôntica / Newton Marques Peron. - - Campinas, SP : [s. n.], 2009.**
	Orientador: Marcelo Esteban Coniglio.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.
	1. Lógica matemática não-clássica. 2. Lógica deôntica. I. Coniglio, Marcelo Esteban. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.
	(msh\ifch)

Título em inglês: Logics of Deontic Inconsistency.

Palavras chaves em inglês (keywords) : **Mathematical logic, non classical**
Deontic logic

Área de Concentração: Filosofia

Titulação: Mestre em Filosofia

Banca examinadora: **Marcelo Esteban Coniglio, Walter Alexandre Carnielli, Frank Thomas Sautter.**

Data da defesa: 26-02-2009

Programa de Pós-Graduação: Filosofia

NEWTON MARQUES PERON

"LÓGICAS DA INCONSISTÊNCIA DEÔNTICA"

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação do Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 26/02/2009

BANCA

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (orientador)

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli (membro interno)

Prof. Dr. Frank Thomas Sautter (membro externo)

Frank T. Sautter.

02/2009

Resumo

Esse trabalho expõe brevemente o que são as *Lógicas da Inconsistência Formal*. Essas lógicas não trivializam a relação de conseqüência na presença de contradições, pois a partir de α e $\neg\alpha$ temos simplesmente que $\bullet\alpha$, ou seja, α não é consistente, ou não é seguro.

De maneira análoga, as *Lógicas da Inconsistência Deôntica* são lógicas que não trivializam a relação de conseqüência na presença de obrigações conflitantes, como $\bigcirc\alpha$ e $\bigcirc\neg\alpha$. Nesse caso teríamos apenas $\boxtimes\alpha$, ou seja, α é deonticamente inconsistente, ou deonticamente inseguro.

Essa abordagem parece interessante sobretudo na análise de paradoxos deônticos, em que a partir de um conjunto Γ de premissas intuitivamente consistentes, temos $\bigcirc\alpha$ e $\bigcirc\neg\alpha$. Trataremos como exemplo um único paradoxo, a saber, o Paradoxo de Chisholm.

Abstract

This work expose briefly what are the *Logics of Formal Inconsistency*. Those logics do not trivialize the consequence relation in the presence of contradictions, since from α and $\neg\alpha$ we just derive $\bullet\alpha$, that is, α is not consistent, or not safe.

Analogously, the *Logics of Deontic Inconsistency* are logics that do not trivialize the consequence relation in the presence of conflicting obligations, since from $\bigcirc\alpha$ and $\bigcirc\neg\alpha$ we would just obtain $\boxtimes\alpha$, that is, α is not deontically consistent, or not deontically safe.

That approach seems interesting mainly for analyzing deontic paradoxes, in which from a set Γ of intuitively consistent premises, we derive $\bigcirc\alpha$ and $\bigcirc\neg\alpha$. In order to exemplify we will regard just one paradox, namely Chisholm's Paradox.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Marcelo Esteban Coniglio pelo minucioso acompanhamento desse trabalho, aos professores do CLE Walter Alexandre Carnieli e Itala M. D'Otataviano que muito me contribuíram no estudo de lógica clássica e lógica modal e, por fim, aos amigos que me apoiaram.

Agradeço ainda ao projeto temático ConsRel da FAPESP e ao CNPq pelo financiamento desta pesquisa.

Este trabalho foi financiado por uma bolsa do CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Sumário

Capítulo 1

LÓGICAS DA INCONSISTÊNCIA FORMAL

1.1 Paraconsistência, Trivialidade e Explosão

As **LFI**'s - Lógicas da Inconsistência Formal (*Logics of Formal Inconsistency*) - são uma classe ampla de lógicas paraconsistentes que internalizam as noções básicas de consistência e inconsistência em nível meta-lógico. As **LFI**'s foram introduzidas por W. Carnielli e J. Marcos em [7] e posteriormente analisadas em detalhe (em particular, seus aspectos semânticos) no artigo [8], que adotamos aqui como principal referência bibliográfica. Referências adicionais a demais artigos serão explicitamente citadas.

Uma das principais diferenças entre as lógicas do tipo clássico e as **LFI**s é que, nas primeiras, não há distinção entre contradição e outras formas de inconsistência. A partir de uma contradição, tudo pode ser demonstrado e obtemos, assim, trivialização. Já nas **LFI**'s, não-trivialidade não pode ser definida apenas como ausência de contradição, pois nessa relação está pressuposto o conceito de consistência. O que esperamos dessas lógicas é permitir inconsistência em certas circunstâncias e garantir que o sistema ainda possa manter sua capacidade de realizar inferências razoáveis na presença de contradições.

Daqui em diante, trataremos essas noções em nível meta-lógico para, em seguida, internalizar algumas delas no estudo das **LFI**'s.

Tomemos For como o conjunto de fórmulas de uma dada linguagem. Aqui, α e β denotam fórmulas quaisquer, enquanto Γ e Δ são subconjuntos de For. Assim, uma lógica $\mathbf{L}$ é definida simplesmente como uma estrutura da forma $\langle\ For,\ \Vdash\ \rangle$, que contém um conjunto de fórmulas e uma relação de conseqüência definida nesse conjunto.

Assumiremos que a linguagem de qualquer lógica $\mathbf{L}$ é definida por uma assinatura proposicional $\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, em que Σ_n é o conjunto de conectivos de cardinalidade n. Assumiremos ainda que $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto de variáveis proposicionais (ou fórmulas atômicas) tal que as fórmulas são geradas livremente a partir de P usando Σ.

Acrescentemos a essa lógica $\mathbf{L}$ as seguintes condições:

(Con1) $\alpha \in \Gamma$ implica $\Gamma \Vdash \alpha$
(Con2) ($\Delta \Vdash \alpha$ e $\Delta \subseteq \Gamma$) implica $\Gamma \Vdash \alpha$
(Con3) ($\Delta \Vdash \alpha$ e $\Gamma, \alpha \Vdash \beta$) implica $\Delta, \Gamma \Vdash \beta$
(Con4) $\Gamma \Vdash \alpha$ implica $\varepsilon(\Gamma) \Vdash \varepsilon(\alpha)$
(Con5) $\Gamma \Vdash \alpha$ implica $\Gamma^{\mathsf{fin}} \Vdash \alpha$, para algum $\Gamma^{\mathsf{fin}} \subseteq \Gamma$

A primeira condição é denominada *reflexividade*, a segunda é *monotonicidade* e a terceira é chamada condição de *corte*. A quarta é denominada *estruturalidade* em que o símbolo ε denota um endomorfismo da linguagem. A última denominamos *compacidade* e interpretamos Γ^{fin} como um conjunto[1] Γ qualquer finito.

Qualquer conjunto $\Gamma \subseteq For$ é chamado de *teoria* de $\mathbf{L}$. Se $\Gamma \Vdash \alpha$ para todo Γ, dizemos que α é uma *tese* dessa lógica.

A partir de agora lidaremos com uma lógica arbitrária $\mathbf{L} = \langle For, \Vdash\rangle$ em que se gera For a partir de uma assinatura que contém o conectivo $\neg$ (negação) e $\Vdash$ satisfaz (Con1) - (Con5).

Seja Γ uma teoria de $\mathbf{L}$. Dizemos que uma teoria Γ é *contraditória em relação a* $\neg$, ou simplesmente *contraditória* sse:

$$\exists\alpha(\Gamma \Vdash \alpha \text{ e } \Gamma \Vdash \neg\alpha)$$

Para cada fórmula α acima, podemos dizer que Γ é *α-contraditório*. Já uma teoria é *trivial* sse:

$$\forall\alpha(\Gamma \Vdash \alpha)$$

Evidentemente, a teoria For é trivial, uma vez que, para todo α, $\alpha \in For$ e, por (Con1), temos que $For \Vdash \alpha$. Além disso, como em uma teoria trivial vale $\Gamma \Vdash \alpha$ para todo α, então, em particular vale para $\neg\alpha$. Assim, toda teoria trivial é contraditória. Entretanto, veremos adiante que a recíproca não é verdadeira.

[1] Observe que, para esta condição fazer sentido, deve ser assumido, adicionalmente, que o conjunto For é uma álgebra livremente gerada a partir de uma assinatura.

Outro conceito importante é o de *explosão*. Uma teoria é *explosiva* sse:

$$\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta)$$

Podemos demonstrar de acordo com noção definição de lógica trivial que se uma teoria é trivial, então explode. Ora, se Γ é trival, temos $\forall\beta(\Gamma \Vdash \beta)$, substituindo α por β. Tomemos $\Gamma' = \Gamma \cup \{\alpha, \neg\alpha\}$. Como $\Gamma \subseteq \Gamma'$, por (Con2), temos que $\Gamma' \Vdash \beta$ para todo β, ou seja, $\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta)$.

Também é possível demonstrar que se uma teoria é contraditória e explosiva, então é trivial. Se Γ é contraditório, temos $\exists\alpha(\Gamma \Vdash \alpha$ e $\Gamma \Vdash \neg\alpha)$. Ainda, se Γ é explosivo, temos $\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta)$. Como temos $\Gamma \Vdash \alpha$ e $\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta$, temos, por (Con3) que $\Gamma, \neg\alpha \Vdash \beta$, para todo α e para todo β. Do mesmo modo, de $\Gamma, \neg\alpha \Vdash \beta$ e $\Gamma \Vdash \neg\alpha$, por (Con3), temos $\Gamma \Vdash \beta$, para todo β, ou seja, Γ é trivial.

Não podemos esquecer que definimos $\mathbf{L}$ como $\langle For, \Vdash\rangle$. Ora, como $\Gamma \subseteq For$, por (Con2), podemos estender todas as definições acima para uma lógica $\mathbf{L}$. Dessa forma, já nos é possivel formalizar alguns *princípios lógicos* aplicados a uma lógica qualquer $\mathbf{L}$:

Princípio de Não-Contradição (PNC)

$$\exists\Gamma\forall\alpha(\Gamma \nVdash \alpha \text{ ou } \Gamma \nVdash \neg\alpha)(\mathbf{L} \text{ é não-contraditório}) \tag{1.1}$$

Princípio de Não-Trivialidade (PNT)

$$\exists\Gamma\exists\alpha(\Gamma \nVdash \alpha)(\mathbf{L} \text{ é não-trivial}) \tag{1.2}$$

Princípio de Explosão (PPE)

$$\forall\Gamma\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta)(\mathbf{L} \text{ é explosivo}) \tag{1.3}$$

O último princípio é também denominado de Princípio *ex Contraditione Sequitor Quodlibet*.

De acordo com as definições (1.1), (1.2) e (1.3) acrescidas as demonstrações anteriores, podemos formular o seguinte teorema:

TEOREMA 1
(i) Numa lógica há trivialização se e somente se houver contradição e explosão.
(ii) Numa lógica não valem simultaneamente o Princípio de Explosão e o Princípio de Não-Trivialidade se, e somente se, não vale o Princípio de Não-Contradição. □

DEFINIÇÃO 1 Uma lógica **L** é denominada *consistente* se for explosiva e não-trivial, ou seja, se respeita (1.3) e (1.2).Caso contrário, dizemos que **L** é *inconsistente.* □

Lógicas paraconsistentes são inconsistentes porque há o controle da explosão de diversas formas. Lógicas triviais também são inconsistentes, conforme a definição acima. A diferença entre lógicas paraconsistentes e triviais é que as últimas aceitam todo tipo de inferência, não separando as proposições entre deriváveis e não deriváveis. Assim, podemos formular uma nova definição de lógica paraconsistente:

$$\text{Uma lógica é paraconsistente sse for inconsistente e não-trivial} \tag{1.4}$$

Essa definição explica a diferença entre lógicas paraconsistentes e lógicas do tipo clássico, como citado no inicío dessa subseção. Lógicas do tipo clássico são consistentes, isso é, aceitam o Princípio de Explosão (1.3). Disso decorre que de uma contradição do tipo α e $\neg\alpha$, tudo se segue, trivializando o sistema. Já lógicas paraconsistentes, por não aceitar (1.3), mas somente (1.1) e (1.2), podem aceitar certas inconsistências sem trivializar o sistema.

Um importante conceito que será tratado nas subseções seguintes é o de equivalência entre conjunto de fórmulas. Dizemos que Γ e Δ são equivalentes sse:

$$\forall\alpha \in \Delta(\Gamma \Vdash \alpha) \text{ e } \forall\alpha \in \Gamma(\Delta \Vdash \alpha)$$

Em particular, as fórmulas α e β são *equivalentes* sse:

$$(\alpha \Vdash \beta) \text{ e } (\beta \Vdash \alpha)$$

Essas propriedades serão denotadas por $\Gamma \dashv\Vdash \Delta$ e $\alpha \dashv\Vdash \beta$, respectivamente.

Uma fórmula ξ em **L** é uma *partícula falsum* se pode, por si só, trivializar a lógica, isto é:

$$\forall\Gamma\forall\beta(\Gamma, \xi \Vdash \beta)$$

Uma partícula *falsum*, quando existir, será denotada por $\perp$. A notação não é ambígüa porque duas partículas *falsum* quaisquer são equivalentes. Se numa lógica a partícula *falsum* é teorema, então a lógica é trivial.

A existência de partículas *falsum* numa lógica **L** é regulada pelo seguinte princípio:

Princípio de *Ex Falso Sequitur Quodlibet*

$$\exists\xi\forall\Gamma\forall\beta(\Gamma, \xi \Vdash \beta)(\mathbf{L} \text{ tem uma partícula } \mathit{falsum}) \tag{1.5}$$

Analogamente à particula *falsum*, dizemos que uma fórmula ξ é uma *partícula verum* quando se segue de toda teoria, ou seja:

$$\forall\Gamma(\Gamma \Vdash \xi)$$

Denotaremos tal partícula, quando existir, por $\top$, que também não é ambíguo. Em uma lógica qualquer, todas as suas teses são equivalentes. Isso porque, como dissemos anteriormente, α é uma tese se e somente se $\Gamma \Vdash \alpha$ para todo $\Gamma \in For$. Assim, em particular, $\beta \Vdash \alpha$. Pelas mesmas razões, se β é uma tese, então $\alpha \Vdash \beta$, ou seja, α e β são equivalentes.

Assim, $\top$ representa todas as teses de uma lógica. É interessante notar que, como $\Gamma \Vdash \top$, então, por (Con3): $\Gamma, \top \Vdash \alpha$ se e somente se $\Gamma \Vdash \alpha$.

Daqui em diante, uma fórmula φ de **L** construída usando estritamente as variáveis $p_0 \ldots p_n$ será denotada por $\varphi(p_0 \ldots p_n)$. Essa fórmula *depende apenas* das variáveis que ocorrem nela. Essa notação pode ser generalizada por conjuntos; como resultado, teremos $\Gamma(p_0 \ldots p_n)$. Se $\gamma_0 \ldots \gamma_n$ são fórmulas, então $\varphi(\gamma_0 \ldots \gamma_n)$ significa a substituição (simultânea) de p_i por γ_i em $\varphi(p_0 \ldots p_n)$ (para i = 0 ... n). Analogamente, dado um conjunto de fórmulas $\Gamma(p_0 \ldots p_n)$, escreveremos $\Gamma(\varphi_0 \ldots \varphi_n)$.

DEFINIÇÃO 2 Uma lógica **L** tem uma *negação suplementar* se há uma fórmula $\varphi(p_0)$ tal que:
(i) $\varphi(\alpha)$ não é uma partícula *falsum*, para algum α;
(ii) $\forall\Gamma\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \alpha, \varphi(\alpha) \Vdash \beta)$. □

Considere uma lógica com uma negação suplementar, denotada por $\wr$. Podemos então definir uma teoria Γ como sendo *contraditória em relação a* $\wr$ desde que:

$$\exists\alpha(\Gamma \Vdash \alpha \text{ e } \Gamma \Vdash \wr\alpha)$$

Desse modo, uma lógica **L** é contraditória em relação à $\wr$ se todas suas teorias são também. Assim, uma lógica que tem uma negação suplementar deve satisfazer o Princípio de Não-Contradição em relação a essa negação.

Uma vez definida a noção de negação suplementar, podemos enunciar uma variação de (3):

Princípio de Explosão Suplementar:

$$\textbf{L} \text{ tem uma negação suplementar} \tag{1.6}$$

A disponibilidade de um tipo específico de negação suplementar faz com que algumas lógicas paraconsistentes possam recuperar a negação clássica.

Pode-se ainda considerar o correlato da definição de negação complementar:

DEFINIÇÃO 3 Uma lógica **L** tem uma *negação complementar* se há uma fórmula $\varphi(p_0)$ tal que:
(a) $\varphi(\alpha)$ não é uma partícula *verum*, para algum α;
(b) $\forall\Gamma\forall\alpha(\Gamma, \alpha, \Vdash \varphi(\alpha)$ implica $\Gamma \Vdash \varphi(\alpha))$. □

Uma negação que é ao mesmo tempo suplementar e complementar será denominada negação clássica e simbolizada por $\sim$.

Quanto à implicação, procuramemos manter algumas propriedades desejáveis da lógica clássica. Para tanto, tomemos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 4 Dizemos que uma lógica **L** tem uma *implicação dedutiva* se existe uma fórmula $\varphi(p_0, p_1)$ tal que:
(i) $\varphi(\alpha, \beta)$ não é uma particula *falsum*;
(ii)$\forall\alpha\forall\beta\forall\Gamma(\Gamma \Vdash \varphi(\alpha, \beta)$ implica $\Gamma, \alpha \Vdash \beta)$;
(iii) $\varphi(\alpha, \beta)$ não é uma particula *verum*;
(iv) $\forall\alpha, \forall\beta, \forall\Gamma(\Gamma, \alpha \Vdash \beta$ implica $\Gamma \Vdash \varphi(\alpha, \beta))$. □

Usaremos $\rightarrow$ como símbolo de implicação dedutiva. Assim, podemos verificar que:

TEOREMA 2 em **L** vale:
(DM): $\Gamma \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ se e somente se $\Gamma, \alpha \Vdash \beta$

Prova. Consequência imediata das cláusulas (ii) e (iv) da Definição 4 ■

Daqui em diante, Σ será o conjunto dos conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow$ e o conectivo unário $\neg$, enquanto $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto de fórmulas atômicas. *For* é o conjunto de fórmulas geradas a partir de P em Σ.

Analogamente, Σ° será o conjunto obtido adicionando a Σ o conectivo unário $\circ$, e For° será o conjunto de fórmulas geradas a partir de Σ°.

De acordo com (1) podemos afirmar que lógicas paraconsistentes são lógicas que em certas condições não pressupõem consistência. Se entendermos consistência como aquilo que pode explodir na presença de uma contradição, as considerações anteriores sugerem que lógicas paraconsistentes podem de algum modo expressar consistência de uma fórmula em nível metalógico.

Em termos formais, considere um conjunto $\overline{\bigcirc}(p)$ de fórmulas que dependam apenas da variável proposicional p. Esse conjunto satisfaz a exigência de haver fórmulas α e β tais que:

(a) $\overline{\bigcirc}(\alpha), \alpha \nVdash \beta$
(b) $\overline{\bigcirc}(\alpha), \neg\alpha \nVdash \beta$

Dizemos que uma teoria Γ é *fracamente explosiva* em relação a $\overline{\bigcirc}(p)$ se:

$$\forall\Gamma\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \overline{\bigcirc}(\alpha), \alpha, \neg\alpha \Vdash \beta)$$

Uma lógica **L** será considerada *fracamente explosiva* quando houver um conjunto $\overline{\bigcirc}(p)$ tal que todas as teorias de **L** são fracamente explosivas em relação a $\overline{\bigcirc}(p)$.

Podemos, desse modo, considerar uma variação "fraca" do Princípio de Explosão:

Princípio de Explosão Fraco (PEF)

$$\textbf{L} \text{ satisfaz (PEF) sse é fracamente explosiva para algum conjunto } \overline{\bigcirc}(p) \tag{1.7}$$

Para cada fórmula α, o conjunto $\overline{\bigcirc}(\alpha)$ expressará precisamente a consistência de α relativa à lógica **L**. Quando o conjunto for unitário, consideremos $\circ\alpha$ o único elemento de $\overline{\bigcirc}(\alpha)$, nesse caso $\circ$ define um *operador de consistência.*

Desta maneira, estamos em condições de definir as *Lógicas da Inconsistência Formal* (**LFI**'s) do seguinte modo:

DEFINIÇÃO 5 Uma *Lógica da Inconsistência Formal* (**LFI**) é qualquer lógica na qual não vale o Princípio de Explosão (1.3) mas vale o Princípio de Explosão Fraco (1.7) □

1.2 mbC e C_1

Historicamente, o primeiro sistema paraconsistente proposicional que usa um operador de consistência $\circ$ foi proposto por da Costa em 1963 (cf. [15])

denominado $\mathbf{C}_1$. Esse sistema era o mais simples de uma hierarquia de sistemas $\mathbf{C}_n$. O operador de consistência $\circ$ não era primitivo mas definido como:

$$\circ\alpha \equiv_{df} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Além disso, esperava-se que esse novo operador tivesse as propriedades mínimas que o interrelacionasse com os conectivos antigos. Portanto, $\mathbf{C}_1$ forçava com que essas relações existissem apenas numa única ocorrência do conectivo, $\mathbf{C}_2$ para duas ocorrências, e assim por diante.

Todavia, no caso geral das **LFI**'s não há necessidade que ocorra uma relação entre $\circ$ e os demais operadores e tampouco que o operador $\circ$ seja definido por meio de outros operadores. Assim, em [7], propõe-se um sistema paraconsistente minimal, com as características mínimas que se exige para que um sistema possa ser classificado como paraconsistente. Esse sistema foi denominado **mbC** (*minimal bold C-system*). Aqui, o operador de consistência é primitivo e não há relação alguma entre esse operador e os demais.

Assim, ainda que $\mathbf{C}_1$ seja historicamente o sistema paraconsistente mais simples, **mbC** é logicamente mais simples e por isso trataremos primeiramento de **mbC** para, em seguida, apresentarmos $\mathbf{C}_1$ e a hierarquia $\mathbf{C}_n$.

DEFINIÇÃO 6 A Lógica **mbC** é definida a partir de For° por meio dos axiomas e regras de inferência abaixo:

Esquema de axiomas:

(Ax$_1$) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

(Ax$_2$) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(Ax$_3$) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$

(Ax$_4$) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$

(Ax$_5$) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$

(Ax$_6$) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

(Ax$_7$) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

(Ax$_8$) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$

(Ax$_9$) $\alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta)$

($\mathbf{Ax}_{10}$) $\alpha \vee \neg\alpha$

(bc1) $\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$

Regra de inferência:

(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

$\square$

NOTA 1 Suponhamos um conjunto de conectivos Σ_+ que denota o conjunto Σ sem o conectivo $\neg$; For_+ é o fragmento de For correspondente. A *Lógica Clássica Positiva* será denotada por $\mathbf{CP}^+$ e pode ser axiomatizada por **(Ax1)** - **(Ax9)** e **(MP)**. A *Lógica Clássica Proposicional*, **CP**, é uma extensão de $\mathbf{CP}^+$ a partir de Σ, acrescentando **(Ax10)** mais a seguinte "lei de explosão":

(exp) $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

Essa axiomatização é esperada se tomarmos a definição de negação clássica dada na subseção anterior. É evidente, pois, que numa lógica **L**, que estende $\mathbf{CP}^+$, um conectivo unário $\div$ de **L** é uma negação clássica sse valem $(\alpha \vee \div\alpha)$ e $(\alpha \to (\div\alpha \to \beta))$.

CP também é uma extensão minimal consistente de **mbC**. Um modo alternativo de axiomatizar **CP** é acrescentando $\circ\alpha$ como axioma. Assim, de **(bc)**, **(MP)** e esse novo axioma, obteríamos **(exp)**.[2] $\square$

NOTA 2 Embora usemos a expressão "Lógicas da *In*consistência Formal", mencionamos até então o conectivo de *consistência* $\circ$. Todavia, **mbC** pode ter ainda um conectivo análogodo de *inconsistência* $\bullet$. Em geral, usamos a negação clássica $\sim$ para definir esse conectivo, escrevendo $\bullet\alpha \equiv_{def} {\sim}\circ\alpha$ $\square$

Abaixo, enumeramos alguns teoremas importantes válidos em **mbC**:

TEOREMA 3 Em **mbC** vale o *Metateorema da Dedução*
(DM): $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha \to \beta$ $\square$

[2] Observe que esta apresentação de **CP** é dada na linguagem usual estendida pelo conectivo inócuo $\circ$. É nese sentido que **CP** pode ser visto como uma extensão dedutiva de mbC.

TEOREMA 4 Em **mbC** vale *Prova por Casos*
(PBC): $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta$ e $\Delta, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta$ implica $\Gamma, \Delta \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta$

TEOREMA 5 Em **mbC** valem:
(i) (CNJ) $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha \wedge \beta$ se e somente se $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta$
(ii) (TRN) $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha \rightarrow \beta$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta \rightarrow \gamma$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha \rightarrow \beta$

Prova. A cláusula (i) se segue, num sentido, como conseqüência direta de **(Ax**$_4$**)**, **(Ax**$_5$**)** e **(MP)**. O outro sentido é conseqüência de **(Ax**$_3$**)** e **(MP)**. Já a cláusula (ii) é aplicação imediata de (DM). ■

Vimos até agora axiomas, regras e importantes teoremas de **mbC**, mas ainda não oferecemos uma possível semântica a essa lógica. É digno de nota que em **mbC** não vale a regra de *Substituição para Equivalentes Demonstráveis*. Isso significa que sua semântica não será vero-funcional. Considere, pois, a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 7 Seja $\mathbf{2} \equiv_{def} \{0, 1\}$ um conjunto de valores-verdade, em que 1 denota o valor "verdade" e 0 denota "falso". Uma valoração [3] de **mbC** é uma função $v : For^{\circ} \longrightarrow \mathbf{2}$ de acordo com as seguintes cláusulas:

($v1$) $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$
($v2$) $v(\alpha \vee \beta) = 0$ sse $v(\alpha) = v(\beta) = 0$
($v3$) $v(\alpha \rightarrow \beta) = 0$ sse $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 0$
($v4$) $v(\neg\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 0$
($v5$) $v(\circ\alpha) = 1$ implica $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$ □

Dado $\Gamma \cup \{\alpha\}$ em **mbC**, a partir daqui $\Gamma \vDash_{\mathbf{mbC}} \alpha$ significa que α recebe valor 1 para toda valoração de **mbC** em que os elementos de Γ também recebem valor 1.

Podemos verificar que a semântica de **mbC** é claramente correta.

TEOREMA 6 (Corretude de mbC) Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For°. Assim, $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha$ implica $\Gamma \vDash_{\mathbf{mbC}} \alpha$

[3] A semântica para **mbC** apresentada em [8] é inspirada na semântica de *quasi-matrizes* para o sistema $\mathbf{C}_1$ de da Costa. Conferir [16]

Prova. Basta verificarmos que os axiomas de **mbC** assumem sempre valor 1 em qualquer valoração em **mbC** e que (MP) preserva a validade. Como exemplo, nos restringiremos à demonstração de **(bc1)**. Suponhamos por absurdo que $v(\circ\alpha) = v(\alpha) = v(\neg\alpha) = 1$ enquanto $v(\beta) = 0$; pela cláusula *(v5)* temos $v(\circ\alpha) = 0$, o que nos força por *(v3)* inferir que **(bc1)** é sempre o caso para toda valoração da Definição 7. ∎

TEOREMA 7 **mbC** é uma **LFI**.

Prova. Observe que (1.7) segue-se imediatamente de **(bc1)** e (DM). Para a não validade de (1.3), considere $\overline{\bigcirc}p = \{\circ p\}$ e suponha $v(p) = v(\neg p) = 1$ enquanto $v(q) = 0$, em que p e q são variáveis proposicionais distintas. Desse modo $p, \neg p \nVdash_{\mathbf{mbC}} q$; o restante se segue por (Con2) e Teorema 6. ∎

Para provarmos a completude de **mbC** precisaremos de alguns lemas e definições adicionais.

DEFINIÇÃO 8 Seja **L** uma lógica como definida anteriormente e $\Delta \cup \{\alpha\} \subseteq For_{\mathbf{L}}$ um conjunto de fórmulas. Dizemos que Δ *é α-saturado em* **L** sse:

(i) $\Delta \nvdash_{\mathbf{L}} \alpha$;

(ii) se $\beta \notin \Delta$ então $\Delta, \beta \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$. □

O Lema abaixo denominado Lema de Lindenbaum-Asser garante a existência desse conjunto.

LEMA 1 Dado algum conjunto de fórmulas Γ tal que $\Gamma \nVdash_{\mathbf{L}} \alpha$, existe um conjunto α-saturado Δ em **L** tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

Prova. Considere uma enumeração $\{\varphi_n\}n \in \mathbb{N}$ de fórmulas em $For_{\mathbf{L}}$ e uma série $\Delta_n, n \in \mathbb{N}$ de teorias construída do seguinte modo:

$\Delta_0 = \Gamma$

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{se } \Delta_n, \varphi_n \nVdash_{\mathbf{L}} \alpha \\ \Delta_n & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\Delta_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}$. Mostraremos que Δ é α-saturado em **L**. Em primeiro lugar, notemos que $\Delta_n \nVdash_{\mathbf{L}} \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se $\Delta \Vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ então por (Con5) haveria um $\Delta^{\mathsf{fin}} \subseteq \Delta$ tal que $\Delta^{\mathsf{fin}} \Vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ e por (Con3), dado $\Delta^{\mathsf{fin}} \subseteq \Delta_m$ para algum $m \in \mathbf{N}$, temos $\Delta_m \Vdash_{\mathbf{L}} \alpha$, contrariando a construção.

Assim, $\Delta \nVdash_{\mathbf{L}} \alpha$. Além disso, se $\beta \notin \Delta$, então $\beta = \varphi_n$ para algum n. Assim, $\beta \notin \Delta_{n+1}$ (pois $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta$). Logo, por construção obtemos $\Delta_{n+1} = \Delta_n$ e $\Delta_n, \beta \Vdash_{\mathbf{L}} \alpha$. Como $\Delta_n \subseteq \Delta$, por (Con2) temos $\Delta, \beta \Vdash_{\mathbf{L}} \alpha$. ■

LEMA 2 Qualquer conjunto α-saturado é uma teoria fechada em **L**, ou seja: $\Delta \Vdash_{\mathbf{L}} \ \beta$ sse $\beta \in \Delta$.

Prova. A primeira parte se segue imediatamente de (Con1). Para a recíproca, basta percebermos que, como Δ é α-saturado, então $\Delta \nvdash_{\mathbf{L}} \alpha$ e $\Delta, \alpha \vdash_{\mathbf{L}} \beta$; por (Con3) temos $\Delta \nvdash_{\mathbf{L}} \beta$. ■

LEMA 3 Seja $\Delta \cup \alpha$ um conjunto de fórmulas em For° tal que Δ é α-saturado em **mbC**. Assim:

(i) $\beta \wedge \gamma \in \Delta$ sse $\beta \in \Delta$ e $\gamma \in \Delta$;

(ii) $\beta \vee \gamma \in \Delta$ see $\beta \in \Delta$ ou $\gamma \in \Delta$;

(iii) $\beta \rightarrow \gamma \in \Delta$ sse $\beta \notin \Delta$ ou $\gamma \in \Delta$;

(iv) $\beta \notin \Delta$ implica $\neg\beta \in \Delta$;

(v) $\beta, \neg\beta \in \Delta$ implica $\circ\beta \notin \Delta$.

Prova. Para todas as provas usaremos Lema 2, que denominaremos *fechamento.*

(i) Suponha $(\beta \wedge \gamma) \in \Delta$. De $(\mathbf{Ax_3})$ e **(MP)** temos $\Delta \vdash_{\mathbf{mbC}} \beta$; logo, por fechamento $\beta \in \Delta$. Para Γ, basta substituirmos $(\mathbf{Ax_3})$ por $(\mathbf{Ax_4})$. A recíproca sai de $(\mathbf{Ax_5})$, duas instâncias de **(MP)** e fechamento.

(ii) Seja $(\beta \vee \gamma) \in \Delta$. De fechamento, $(\mathbf{Ax_6})$ e **(MP)** temos $\beta \in \Delta$, e evidentemente $\beta \in \Delta$ ou $\gamma \in \Delta$.

(iii) Por $(\mathbf{Ax_9})$ e (ii) sabemos que $\beta \in \Delta$ ou $\beta \rightarrow \gamma \in \Delta$. Suponhamos que $\gamma \in \Delta$ ou $\beta \notin \Delta$; a única possibilidade é $\beta \rightarrow \gamma \in \Delta$. Para a recíproca, basta supor $\gamma \in \Delta$ que provamos por fechamento, **(MP)** e $(\mathbf{Ax_1})$.

(iv) Tomemos $\beta \notin \Delta$. De $(\mathbf{Ax_{10}})$ e (ii) temos $\beta \in \Delta$ ou $\neg\beta \in \Delta$; por fechamento concluimos $\Delta \vdash_{\mathbf{mbC}} \neg\beta$.

(v) Suponhamos $\beta, \neg\beta, \circ\beta \in \Delta$. Por fechamento, **(bc1)** e **(MP)**, temos α, absurdo. Logo, $\beta, \neg\beta \in \Delta$ implica $\circ\beta \notin \Delta$. ■

COROLÁRIO 1 A função característica de um conjunto α-saturado de fórmulas em **mbC** define uma valoração de **mbC**.

Prova. Seja Δ um conjunto de fórmulas α-consistente e seja v uma função definida como $v : For^{\circ} \longrightarrow \mathbf{2}$ tal que para toda fórmula β em For°, temos $v(\beta) = 1$ sse $\beta \in \Delta$. É fácil observar pelo Lema 3 que v satisfaz as cláusulas (v1)-(v5) da Definição 7. ■

TEOREMA 8 (Completude de mbC) Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For°. Assim, $\Gamma \vDash_{\mathbf{mbC}} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha$

Prova. Tomemos $\alpha \in For^{\circ}$ tal que $\Gamma \nvdash_{\mathbf{mbC}} \alpha$. Assim, pelo Lema 1 existe um conjunto α-saturado Δ, tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ além de $\Gamma, \beta \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha$ para todo $\beta \notin \Gamma$ e $\Gamma \nvdash_{\mathbf{mbC}} \alpha$, logo ,por (Con1), $\alpha \notin \Delta$. Oras, pelo Corolário 1, a função característica v de Δ define uma valoração de **mbC**; assim, para todo $\beta \in \Delta$, $v_{\Delta}(\beta) = 1$ mas $v_{\Delta}(\alpha) = 0$. Portanto, $\Delta \nvDash_{\mathbf{mbC}} \alpha$ e por (Con2) $\Gamma \nvDash_{\mathbf{mbC}} \alpha$. ■

Até agora vimos a completude para o sistema mínimo paraconsistente **mbC**. Veremos, a seguir, a sintaxe e um modelo para a hierarquia C_n de da Costa, sem nos determos nos pormenores da completude dessa hierarquia que *mutatis mutandis* se obtém a partir da completude acima para **mbC**[4]. O texto aqui utilizado é [15].

Para a axiomática de $\mathbf{C}_1$ tomamos o operador de consistência como definido por meio de $\wedge$ e $\neg$ e alguns axiomas adicionais que tratam da distributividade do operador de consistência, como podemos verificar a seguir.

DEFINIÇÃO 9 A Lógica $\mathbf{C}_1$ é definida a partir de For por meio dos axiomas e regras de inferência abaixo:

Esquema de axiomas:

esquemas de axiomas **(Ax1)-(Ax10)** de **mbC**

(Ax$_{11}$) $\circ\beta \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha))$

(Ax$_{12}$) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

(Ax$_{13}$) $\circ\alpha \rightarrow \circ\neg\alpha$ [5]

[4]Observe que os Lemas 1 e 2 vale para quaisquer lógicas **L** como definimos no início dessa seção. As únicas mudanças significativas ocorrem no Lema 3.

[5]Esse axioma aparece em [15], mas não o encontramos mais em [16]. Em [17], o mesmo axioma aparece como teorema derivável dos demais axiomas de C_1.

($\mathbf{Ax}_{14}$) $\circ\alpha \wedge \circ\beta \to \circ(\alpha \wedge \beta)$

($\mathbf{Ax}_{15}$) $\circ\alpha \wedge \circ\beta \to \circ(\alpha \vee \beta)$

($\mathbf{Ax}_{16}$) $\circ\alpha \wedge \circ\beta \to \circ(\alpha \to \beta)$

Regra de inferência:

(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

$\square$

Note que **($\mathbf{Ax}_{11}$)** é equivalente a **(bc1)**, tal que podemos encarar $\mathbf{C}_1$ como **mbC** + **($\mathbf{Ax}_{12}$)**-**($\mathbf{Ax}_{16}$)**, com a diferença que enquanto em **mbC** temos $\overline{\bigcirc}\alpha = \{\circ\alpha\}$, em $\mathbf{C}_1$ temos $\overline{\bigcirc}\alpha = \{\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)\}$.

Um modelo para C_1 é dada por meio das tabelas abaixo, em que 1 e 2 são valores distinguidos.

$\wedge$	1	2	3
1	1	1	3
2	1	1	3
3	3	3	3

$\vee$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	3

$\to$	1	2	3
1	1	1	3
2	1	1	3
3	1	1	1

	$\neg$
1	3
2	1
3	1

Observe que nenhum operador preserva o valor de verdade 2. Interpretando 1 e 3 como os valores clássicos, respectivamente, verdadeiro e falso, podemos inferir que a consequência da característica sintática da distribuição do operador $\circ$ por meio dos operador clásicos - **($\mathbf{Ax}_{13}$)** a **($\mathbf{Ax}_{16}$)** - acrescido à eliminação da dupla negação - **($\mathbf{Ax}_{12}$)** - acarreta na eliminação do novo valor de verdade 2 por meio de qualquer combinação dos operadores clássicos. Mais ainda, conforme a definição do operador $\circ$ para $\mathbf{C}_1$, podemos construir a tabela abaixo:

	$\circ$
1	1
2	3
3	1

O que nos mostra claramente que 2 é interpretado como valor de verdade paraconsistente. Em outras palavras, quando a fórmula α tiver valor 2, dizemos que a consistência de α é falsa, ou seja $\circ\alpha$ recebe valor 3.

No que diz respeito aos demais sistemas da hierarquia $\mathbf{C}_n$, considere a seguinte notação:

$$a^1 \text{ abrevia a fórmula } (\neg(\alpha \wedge \neg\alpha))$$

$$a^{n+1} \text{ abrevia a fórmula } (\neg(\alpha^n \wedge \neg\alpha^n)^1)$$

Desse modo, podemos propor a segunte definnição para o cálculo $\mathbf{C}_n$:

DEFINIÇÃO 10 As Lógicas $\mathbf{C}_n$, $0 < n < \omega$ é definida a partir de For por meio dos axiomas e regras de inferência abaixo:

Esquema de axiomas:

esquemas de axiomas **(Ax1)-(Ax10)** de **mbC**

$(\mathbf{Ax}_{11n})$ $\beta^n \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha))$

$(\mathbf{Ax}_{12})$ $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

$(\mathbf{Ax}_{13n})$ $\alpha^n \rightarrow \neg\alpha^n$

$(\mathbf{Ax}_{14n})$ $\alpha^n \wedge \beta^n \rightarrow (\alpha \wedge \beta)^n$

$(\mathbf{Ax}_{15n})$ $\alpha^n \wedge \beta^n \rightarrow (\alpha \vee \beta)^n$

$(\mathbf{Ax}_{16n})$ $\alpha^n \wedge \beta^n \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)^n$

Regra de inferência:

(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$

$\square$

Seguindo o mesmo modelo de $\mathbf{C}_1$, cada cálculo $\mathbf{C}_n$ terá n+2 valores de verdade, sendo $1, 2, \ldots, n+1$ valores distinguidos e $n+2$ o único valor não distinguido. As quase-matrizes respeitarão as cláusulas abaixo:

1. conjunção: se os componentes tiverem valores diferentes, a conjunção terá o maior dos valores dos componentes; se os valores forem iguais, será esse o valor da conjunção.

2. disjunção: se os valores dos componentes forem distintos, a disjunção terá o menor dos valores dos componentes; se forem todos iguais, terá esse valor.

3. implicação: se os valores dos componentes forem diversos, a implicação terá o valor do consequente; se forem iguais, terá como valor 1.

Já o esquema da tabela da negação segue-se abaixo:

	$\neg$
1	$n+2$
2	1
3	2
$\vdots$	$\vdots$
n	$n-1$
$n+1$	n
$n+2$	1

Do que vimos até agora, podemos inferir o seguinte teorema:

TEOREMA 9 Cada cálculo $\mathbf{C}_n$ é estritamente mais forte que $\mathbf{C}_{n+1}$. O cálculo $\mathbf{C}_w$ é o mais fraco de todos os cálculos $\mathbf{C}_n$.

Prova. Uma vez que a demonstração exigiria um processo demasiado trabalhoso de dedução que extrapola nossos objetivos, nos limitaremos a apresentar um esboço da demonstração. Observe primeiramente que $\mathbf{C}_0$[6] contém estritamente $\mathbf{C}_1$, pois, por exemplo, $(\mathbf{Ax}_{11})$ não vale em $\mathbf{C}_0$, como podemos verificar pela tabela de $\circ$ e $\neg$. Construindo-se de modo indutivo uma tabela de α^n para cada $\mathbf{C}_n$, obeservaremos que $(\mathbf{Ax}_{11n-1})$ não vale em $\mathbf{C}_n$. ■

Por fim, provamos de modo simples o teorema abaixo.

TEOREMA 10 Cada um dos cálculos $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, … $\mathbf{C}_{n-1}$ $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{C}_{n+1}$, …, $\mathbf{C}_\omega$ é uma **LFI**.

Prova. Basta considerar na Definição 5 o conjunto $\overline{\bigcirc}(p) \equiv_{def} \{\alpha^n\}$ para cada $\mathbf{C}_n$. A conclusão segue imediata por (DM) e $(\mathbf{Ax}_{11n})$. ■

[6] $\mathbf{C}_0$ é definido por da Costa como o Cálculo proposicional Positivo. Conferir Nota 1.

Capítulo 2

LÓGICAS DA INCONSISTÊNCIA DEÔNTICA

2.1 Lógica Deôntica Clássica e Paraconsistência

As lógicas deônticas foram fortemente influenciadas por noções de lógicas modais. Ainda que a analogia entre conceitos modais e deônticos datem do século XIV, (cf. [20]) podemos dizer que o seu tratamento simbólico e matemático foi inaugurado por von Wright em [28]. Nesse artigo, von Wright distingue três tipos de modalidades: aléticas, epistêmicas e deônticas. As primeiras tratam das noções de necessário e possível, as segundas de verificável ou falsificável, e as terceiras estão relacionadas com as noções de obrigatório e permitido.

Existem vários sistemas que procuram formalizar essas noções (vide [25]). O sistema básico dessa família de lógicas é denominado **SDL** - *Standard Deontic Logic*. A idéia aqui é acrescentar a um sistema mínimo modal a noção de que não pode haver obrigações conflitantes, que é aqui convenientemente formulada por meio do axioma **(O-E)**.

NOTA 3 Daqui em diante $\Sigma = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \bigcirc\}$ e For é o conjunto de fórmulas geradas a partir de Σ.

De modo correlato, $\Sigma^{\circ} = \Sigma \cup \{\circ\}$, $\Sigma^{\circ\boxminus} = \Sigma^{\circ} \cup \{\boxminus\}$ e $\Sigma^{\circ\boxdot} = \Sigma^{\circ} \cup \{\boxdot\}$. Os conjuntos For°, $Form^{\circ\boxminus}$ e $Form^{\circ\boxdot}$ são os conjuntos de fórmulas geradas a partir de Σ°, $\Sigma^{\circ\boxminus}$ e $\Sigma^{\circ\boxdot}$, respectivamente. $\square$

DEFINIÇÃO 11 A Lógica **SDL** é definida em For do seguinte modo[1]:

Esquemas de axiomas:

esquemas de axiomas **(Ax1)**-**(Ax10)** de **mbC**,

(exp) $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

(O-K) $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$

(O-E) $\bigcirc\mathbf{f}_\alpha \to \mathbf{f}_\alpha$ em que $\mathbf{f}_\alpha =_{def} (\alpha \wedge \neg\alpha)$, para $\alpha \in For$

Regras de inferência

(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

(O-Nec) $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \bigcirc\alpha}$ □

NOTA 4 A axiomática acima originalmente apresentada em [12] não é o modo tradicional de axiomatizar **SDL**. Em geral, o axioma acrescentando em vez de **(O-E)** é:

(D): $\bigcirc\alpha \to \neg \bigcirc \neg\alpha$

Considerando o operador $\mathcal{P}\alpha \equiv_{df} \neg \bigcirc \neg\alpha$ (leia-se "α é permitido" ou "α é concedido"), a interpretação original de **(D)** seria de que aquilo que é obrigatório implica ser permitido. Outro modo de encarar o axioma **(D)** é que obrigações conflitantes são sempre falsas. Desse modo, reformularíamos o axioma como:

(D*): $\neg(\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\neg\alpha)$

Todavia, é facilmente demonstrável que **(O-E)**, **(D)** e **(D*)** são equivalentes tendo por base o Cálculo Proposional Clássico e as definições de $\bigcirc$ e $\mathcal{P}$, o que demonstra que os três sistemas são equivalentes.

[1] A axiomática de **SDL** é baseada em [12], que, por sua vez, pode ser interpretado como adaptação de [10].

Uma axiomática interessante e alternativa à **SDL** é a proposta por Chellas em [10] que, em vez de **(O-K)** e **(O-Nec)**, teríamos a regra de inferência **(ROM)** e mais três axiomas para reger o operador deôntico:

(ROM) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta}$

(OC) $(\bigcirc\alpha \land \bigcirc\beta) \to \bigcirc(\alpha \land \beta)$

(ON) $\bigcirc\top$

(OD) $\neg\bigcirc\bot$

Na verdade, **(OD)** é outro modo de ver **(D*)**, enquanto **(ON)** e (**O-Nec)** são correlatos. Já **(O-K)** é obtido por **(ROM)** e **(OC)**. $\square$

Dizemos ainda que um sistema deôntico é *normal* se existe uma *Estrutura de Kripke* que caracteriza seus axiomas.

DEFINIÇÃO 12 Uma *estrutura de Kripke* generalizada é uma tripla

$$\langle W, R, \{v_w\}_{w\in W}\rangle$$

em que:

1. W é um conjunto não vazio (de *mundos-possíveis*);
2. $R \subseteq W \times W$ é uma relação (de *accessibilidade*) entre mundos-possíveis que pode ser vazia;
3. $\{v_w\}_{w\in W}$ é uma família de funções $v_w : For \to \mathbf{2}$ que satisfaz para cada $w \in W$:

   (v1) $v_w(\alpha \land \beta) = 1$ sse $v_w(\alpha) = v_w(\beta) = 1$

   (v2) $v_w(\alpha \lor \beta) = 0$ sse $v_w(\alpha) = v_w(\beta) = 0$

   (v3) $v_w(\alpha \to \beta) = 0$ sse $v_w(\alpha) = 1$ e $v_w(\beta) = 0$

   (v4) $v_w(\alpha) = 0$ sse $v_w(\neg\alpha) = 1$

   (v5) $v_w(\bigcirc\alpha) = 1$ sse $v_{w'}(\alpha) = 1$ para todo ω' em W, desde que $\omega R \omega'$

TEOREMA 11 Caso na estrutura acima a relação R seja serial (ou seja, para todo $w \in W$, existe um w' tal que wRw') então as valorações ($v1$)-($v5$) satisfarão os axiomas de **SDL**; em outras palavras, $\Gamma \vdash_{\mathbf{SDL}} \alpha$ sse $\Gamma \vDash_{\mathbf{SDL}} \alpha$ $\square$

NOTA 5 Na Definição 12 acima falamos em estrutura porque de acordo com as característica da relação de acessibilidade R teremos uma semântica de valorações para um sistema modal (ou deôntico) em particular. Por exemplo, caso forçemos que a relação R seja vazia, teremos uma valoração para $\mathbf{K}^{\bigcirc}$. $\square$

Devido às considerações da Nota 4 acima, podemos fazer um parelelo entre a lógica deôntica padrão e o cálculo proposicional clássico. Como vimos na seção anterior, no cálculo proposional clássico não há a distinção entre trivialidade e inconsistência: uma teoria é trivial se e somente se for inconsistente[2]. Em contrapartida, lógicas paraconsistentes são justamente aqueles sistemas que podem ser inconsistentes sem serem triviais.

De modo análogo, em [17] é notado que numa lógica deôntica padrão os conceitos de trivialidade deôntica e inconsistência deôntica são inseparáveis. Considerando uma teoria Γ como sendo deonticamente inconsistente como aquela em que há fórmulas do tipo $\bigcirc\alpha$ e $\bigcirc\neg\alpha$, então de fato numa lógica deôntica padrão, Γ é inconsistente se e somente se $\Gamma \Vdash \bigcirc\beta$ para todo β, em outras palavras, Γ é deonticamente trivial[3]. Observe como essa característica é conseqüência direta da axiomática da nota acima, em que **(ON)** juntamente com **(OD)** forçam com que a indistinção dos conceitos de trivialidade de inconsistência no âmbito proposicional seja transposta para o âmbito deôntico.

Vimos na seção anterior como noções metalógicas (contradição, consistência e trivialidade) podem ser incorporadas na linguagem-objeto. Essa perspectiva nos incentiva, no caso das lógicas deônticas, realizar o caminho inverso: tratar axiomas (no caso **(ON)** e **(OD)**) como noções metalógicas com o intuito de produzir novos conceitos.

Desse modo, daqui em diante lidaremos com uma lógica $\mathbf{L} = \langle For, \Vdash \rangle$ (lembrando que as fórmulas de For são geradas pela nossa nova assinatura Σ que contém o operador $\bigcirc$) em que $\Vdash$ satisfaz (Con1) - (Con5).

---

[2] Tal diferenciação foi primeiramente proposta por da Costa em [15], mas formalizada rigorosamente posteriormente em [7].

[3] Cabe aqui fazer a distinção entre trivialidade *simpliciter* - $\Gamma \Vdash \beta$ - e trivialidade *deôntica* - $\Gamma \Vdash \bigcirc\beta$, ou seja, o colapso do operador deôntico $\bigcirc$. Evidentemente o segundo tipo é um caso particular do primeiro, de modo que a trivialização *simpliciter* implica a *deôntica*.

Novamente seja Γ uma teoria de **L** . Dizemos que uma teoria Γ é *deonticamente inconsistente em relação a* $\bigcirc$, ou simplesmente *deonticamente inconsistente* sse:

$$\exists\alpha(\Gamma \Vdash \bigcirc\alpha \text{ e } \Gamma \Vdash \bigcirc\neg\alpha)$$

Uma teoria é *deonticamente trivial* sse:

$$\forall\alpha(\Gamma \Vdash \bigcirc\alpha)$$

O terceiro conceito deôntico importante é o de *deonticamente explosivo.* Uma teoria é *deonticamente explosiva* sse:

$$\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \bigcirc\alpha, \bigcirc\neg\alpha \Vdash \bigcirc\beta)$$

Estendendo as noções acima a uma lógica qualquer **L**, temos:

Princípio de Obrigações Não-Conflitantes (O-PNC)

$$\exists\Gamma\forall\alpha(\Gamma \nVdash \bigcirc\alpha \text{ ou } \Gamma \nVdash \bigcirc\neg\alpha)(\mathbf{L} \text{ é deonticamente não-conflitante}) \tag{2.1}$$

Princípio de Não-Trivialidade Deôntica (O-PNT)

$$\exists\Gamma\exists\alpha(\Gamma \nVdash \bigcirc\alpha)(\mathbf{L} \text{ é deonticamente não-trivial}) \tag{2.2}$$

Princípio de Explosão Deôntica (O-PPE)

$$\forall\Gamma\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \bigcirc\alpha, \bigcirc\neg\alpha \Vdash \bigcirc\beta)(\mathbf{L} \text{ é deonticamente explosiva}) \tag{2.3}$$

NOTA 6 Considere o fragmento de **SDL** excluindo-se axioma **(O-E)** denominado $\mathbf{K}^O$. Na verdade $\mathbf{K}^O$ é a versão deôntica do sistema **K**. Evidentemente (2.1) não vale em $\mathbf{K}^O$. Por outro lado, por **(O-Nec)**, **(exp)**, **(O-K)** e (DM), temos que (2.3) é o caso. Isso significa que $\mathbf{K}^O$ é um sistema modal baseado no Cálculo Proposicional **CP** que é deonticamente explosivo mas não é deonticamente inconsistente.

Outro modo de axiomatizar $\mathbf{K}^O$ seria excluir o axioma **(OD)**. Observe ainda que caso excluíssemos **(OD)** e **(ON)** teríamos um fragmento *não-normal* de **SDL**, na verdade, a versão deôntica do sistema **S3** proposto por Lewis. Assim, outro modo de encarar alguns sistemas modais *não-normais* é dizer que são sistemas baseados no cálculo proposicional clássico em que não valem (2.1) tampouco (2.3).

Considere, por fim, os sistemas não-normais deônticos **OVer**, **OTriv** e **OBan** em que cada um é composto por um único axioma deôntico, respectivamente:

(OVer) $\bigcirc\alpha$

(OTriv) $\bigcirc\alpha \leftrightarrow \alpha$

(OBan) $\alpha \rightarrow \bigcirc\alpha$

Sabemos por [9] que os três sistemas são independentes e consistentes.[4] Evidentemente em **OVer** não vale (2.2). Mais ainda, como nesses sistemas vale o Teorema da Dedução (DM), temos em **OBan** que para qualquer conjunto Γ não-vazio, $\Gamma \Vdash_{\mathbf{OBan}} \bigcirc\alpha$ para todo α e pelas mesmas razões temos $\Gamma \Vdash_{\mathbf{OTriv}} \bigcirc\alpha$. Ou seja, nesses três sistemas valem (2.2) e (2.3) mas não vale (2.1). □

Feitas as ressalvas acima, podemos verificar a validade do seguinte teorema:

TEOREMA 12
(1) Um sistema normal[5] é deonticamente trivial se e somente se for deonticamente inconsistente e explosivo.
(2) Numa sistema normal não valem simultaneamente o Princípio de Explosão Deôntica e o Princípio de Não-Trivialidade Deôntica se, e somente se, não vale o Princípio de Obrigações Não-Conflitantes.

Prova.
Para (1), por um lado, temos que se **L** é deonticamente trivial, então $\Gamma \Vdash \bigcirc\alpha$ e $\Gamma \Vdash \bigcirc\neg\alpha$, logo **L** é deonticamente explosiva e inconsistente. Para a recíproca, note que dado um mundo w, se $v_w(\bigcirc\alpha)$=$v_w(\bigcirc\neg\alpha) = 1$, então w não está relacionado com nenhum w' e, portanto, w é um ponto terminal, ou seja, para todo α, $v_w(\bigcirc\alpha)$=1.

Para (2), basta notar que a única possibilidade de falhar (O-PNT) ou (O-PPE) num sistema normal é o fato de que para todo $w \in W$, temos forçosamente que w não é ponto terminal, em outras palavras, que a relaçao de acessibilidade R é serial. ■

Assim, parece-nos bastante natural propor a seguinte definição:

[4] Em [9] há uma breve referência a sistemas não-normais. Para uma abordagem um pouco mais detalhada sobre o tema, consultar [14].

[5] Ainda que a Nota 6 acima parece mostrar que nossa distinção valeria para também para sistemas não-normais, o tratamento formal de sistemas deônticos não-normais estrapola os objetivos de nosso trabalho.

$$\text{Uma lógica é deonticamente paraconsistente sse for um sistema normal deonticamente inconsistente e não-trivial} \tag{2.4}$$

O que exclui sistemas como $K^{\bigcirc}$, **OBan**, **OTriv** e **OVer**, além da versão deôntica da hierarquia de Lewis **S1-S3**. Isso porque $K^{\bigcirc}$ só pode ser deonticamente trivial se for deonticamente inconsistente. **OBan**, **OTriv** e **OVer** são deonticamente triviais, enquanto a hierarquia **S1-S3** são sistemas não-normais.

Como fizemos para as **LFI's**, considere um conjunto $\overline{\boxminus}(p)$ de fórmulas que dependam apenas da variável proposicional p. Esse conjunto satisfaz a exigência de haver fórmulas α e β tais que:

(a) $\overline{\boxminus}(\alpha), \bigcirc\alpha \nVdash \bigcirc\beta$
(b) $\overline{\boxminus}(\alpha), \bigcirc\neg\alpha \nVdash \bigcirc\beta$

Dizemos que uma teoria Γ é *deonticamente fracamente explosiva* em relação a $\overline{\boxminus}(\alpha)$ se:

$$\forall\alpha\forall\beta(\Gamma, \overline{\boxminus}(\alpha), \bigcirc\alpha, \bigcirc\neg\alpha \Vdash \bigcirc\beta)$$

Uma lógica **L** será considerada *deonticamente fracamente explosiva* quando houver um conjunto $\overline{\boxminus}(p)$ tal que todas as teorias de **L** são deonticamente fracamente explosivas em relação a $\overline{\boxminus}(p)$.

Podemos, novamente de modo análogo às **LFI**'s, considerar uma variação "fraca" do Princípio de Explosão Deôntico:
Princípio de Explosão Deôntico Fraco (O-PEF)

$$\textbf{L} \text{ satisfaz (O-PEF) sse é deonticamente fracamente explosiva para algum conjunto } \overline{\boxminus}(p) \tag{2.5}$$

Para cada fórmula α, o conjunto $\overline{\boxminus}(\alpha)$ expressará a *consistência deôntica* de α relativa à lógica **L**. Quando o conjunto for unitário, consideremos $\boxminus\alpha$ o único elemento de $\overline{\boxminus}(\alpha)$, nesse caso $\boxminus$ define um *operador de consistência deôntica.*

Podemos, assim, formular a definição a seguir em que fica evidente o caráter análogo das **LDI**'s em relação às **LFI**'s:

DEFINIÇÃO 13 Uma lógica **L** é uma **LDI** - *Lógica da Inconsistência Deôntica* - em relação a $\bigcirc$, se em **L** vale (2.5) mas não vale (2.3). Caso contrário, dizemos que **L** é $\bigcirc$-consistente ou é um sistema deôntico não-normal. $\square$

2.2 Lógicas Deônticas Paraconsistentes

O primeiro sistema paraconsistente proposto na literatura foi apresentado em [17], e denominado $\mathbf{C}_1^D$. Além de ser uma extensão deôntica de $\mathbf{C}_1$ - em que, como vimos, o operador de consistência $\circ$ é definido em vez de primitivo - o sistema apresenta relações interessantes entre os operadores $\circ$ e $\bigcirc$, mas que não são estritamente necessárias para um sistema deôntico paraconsistente. Assim, analogamente como ocorreu com o sistema **mbC**, em [12] propõe-se um sistema deôntico paraconsistente minimal - **DmbC** - em que $\circ$ é primitivo e que nenhuma interação entre $\circ$ e $\bigcirc$ é exigida. Novamente, por ser um sitema mais simples apresentamos primeiramente **DmbC** e sua completude para, em seguida, apresentarmos $\mathbf{C}_1^D$ e seu esboço de completude.

Assim, considere o seguinte sistema deôntico baseado em **mbC**:

DEFINIÇÃO 14 A Lógica **DmbC**[6] é definida em For° do seguinte modo:

Esquemas de axiomas:

esquemas de axiomas **(Ax1)**-**(Ax10)** e **(bC1)** de **mbC**,

(O-K) $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$

(O-E)$^\circ$ $\bigcirc\bot_\alpha \to \bot_\alpha$ em que $\bot_\alpha =_{def} (\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \circ\alpha$, para $\alpha \in For^\circ$

Regras de inferência

(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

(O-Nec) $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \bigcirc\alpha}$

$\square$

[6]A axiomática, semântica e completude de **DmbC** está baseada em [12].

TEOREMA 13 Em **DmbC** vale *Metateorema da Dedução*:
(DM): $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$ sse $\Gamma \vdash_{\mathbf{DmbC}} \alpha \rightarrow \beta$ □

TEOREMA 14 Em **DmbC** vale *Prova por Casos*
(PBC): $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$ e $\Delta, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$ implica $\Gamma, \Delta \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$

Prova. Idêntica à de **mbC**. ■

TEOREMA 15 Em **DmbC** valem:
(CNJ) $\Gamma \vdash_{\mathbf{DmbC}} \alpha \wedge \beta$ se e somente se $\Gamma \vdash_{\mathbf{mbC}} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$
(TRN) $\Gamma \vdash_{\mathbf{DmbC}} \alpha \rightarrow \beta$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta \rightarrow \gamma$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{DmbC}} \alpha \rightarrow \beta$

Prova. Idêntica a do Teorema 5. ■

TEOREMA 16 em **DmbC** vale :
$\bigcirc(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta$

Prova.

[1]	$\bigcirc((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha)$	**(Ax$_4$)** e **(O-Nec)**
[2]	$\bigcirc(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \bigcirc\alpha$	**(O-K)** e **(MP)** em [1]
[3]	$\bigcirc(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \bigcirc\beta$	**(Ax$_4$)**, **(O-Nec),** **(O-K)** e **(MP)**
[4]	$\bigcirc(\alpha \wedge \beta) \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta$	(CNJ) em [2] e [4]
[5]	$\bigcirc\alpha \rightarrow \bigcirc(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$	**(Ax$_3$)**, **(O-Nec)**, **(O-K)** e **(MP)**
[6]	$\bigcirc(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (\bigcirc\beta \rightarrow (\bigcirc\alpha \wedge \beta))$	**(O-K)**$[\beta \ / \ \alpha, \ \alpha \wedge \beta \ / \ \beta]$
[7]	$\bigcirc\alpha \rightarrow (\bigcirc\beta \rightarrow \bigcirc(\alpha \wedge \beta))$	(TRN) em [5] e [6]
[8]	$\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc(\alpha \wedge \beta)$	(CNJ) e (DM) em [6] e [7]
[9]	$\bigcirc(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta$	[4] e [8]

■

A semântica de **DmbC** é obtida alterando-se algumas cláusulas da semântica de Kripke, do seguinte modo:

DEFINIÇÃO 15 Uma *estrutura de Kripke* para **SDmbC** é uma tripla $\langle W, R, \{v_w\}_{w \in W} \rangle$, em que:

1. W é um conjunto não vazio (de *mundos-possíveis*);

2. $R \subseteq W \times W$ é uma relação (de *accessibilidade*) entre mundos-possíveis que é *serial*, ou seja: para todo $w \in W$ existe $w' \in W$ tal que wRw';

3. $\{v_w\}_{w \in W}$ é uma família de funções $v_w : For^\circ \rightarrow \mathbf{2}$ que satisfaz para cada $w \in W$:

   $(v1)$ $v_w(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v_w(\alpha) = v_w(\beta) = 1$

   $(v2)$ $v_w(\alpha \vee \beta) = 0$ sse $v_w(\alpha) = v_w(\beta) = 0$

   $(v3)$ $v_w(\alpha \rightarrow \beta) = 0$ sse $v_w(\alpha) = 1$ e $v_w(\beta) = 0$

   $(v4)$ $v_w(\alpha) = 0$ implica $v_w(\neg\alpha) = 1$

   $(v5)$ $v_w(\alpha) = v(\neg\alpha)$ implica $v_w(\circ\alpha) = 0$

   $(v6)$ $v_w(\bigcirc\alpha) = 1$ sse $v_{w'}(\alpha) = 1$ para todo ω' em W, desde que $\omega R \omega'$ ■

TEOREMA 17 Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ o conjunto de fórmulas em For°. Então $\Gamma \vdash_{\mathbf{DmbC}} \alpha$ implica $\Gamma \vDash_{\mathbf{DmbC}} \alpha$.

Prova: Vamos nos restringir a **(O-E)°**. Suponhamos $v_w(\bigcirc\bot_\alpha) = 1$. Assim, por (v6) e serialidade de R, existe wRw' tal que $v_{w'}(\alpha) = v_{w'}(\neg\alpha) = v_{w'}(\circ\alpha) = 1$. Mas por $(v5)$, temos $v_{w'}(\circ\alpha) = 0$, o que nos força concluir que $v_{w'}(\bot_\alpha) = 0$ e por $(v3)$ temos $v_w(\bigcirc\bot_\alpha \rightarrow \bot_\alpha) = 1$. ■

Dada a corretude de **DmbC**, podemos demonstrar os seguintes teoremas:

TEOREMA 18 **DmbC** é uma **LDI**

Prova. Para a validade de (2.5), basta aplicar **(O-Nec)** em **(bc1)** para, em seguida, aplicar **(O-K)** e (DM). Além disso, dado o modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, v\rangle$ em que $W = \{w\}$, $R = \{(w, w)\}$ e $v_w(p) = v_w(\neg p) = 1$ é facil observar que $\mathcal{M}$ é um modelo para **DmbC** que invalida 2.5 ■

TEOREMA 19 **DmbC** é uma **LFI**.

Prova. Note que (GPPE) é consequência direta de **(bC1)** e (DM). Já para a invalidade de (PPE) utiliza-se o mesmo modelo da demonstração anterior. ■

NOTA 7 Podemos denominar **DmbC** como o sistema mínimo classificado como **LDI**. Com efeito, suponhamos que acrescentamos $\circ\alpha$ como axioma. Pela Nota 1 sabemos que obtemos **(exp)**. Além disso, por **(O-Nec)** teríamos $\bigcirc\circ\alpha$, que pelo Teorema 16, obteríamos **(O-E)**, ou seja, **DmbC**$+\circ\alpha =$ **SDL**. $\square$

É possível em **DmbC** definir um operador de **inconsistência** deôntica - vide Nota 2 - do seguinte modo:

$$\boxtimes\alpha \equiv_{def} \bigcirc\bullet\alpha$$

Dado que o axioma **(O-E)**$^{\circ}$ define um operador de consistência por meio de $\bigcirc\circ$ e que em **DmbC** não há um axioma que estipule alguma relação entre $\bigcirc\circ$ e $\circ\bigcirc$, a analogia com o operador $\bullet$ de inconsistencia de **mbC** não é imediata, pois:

$$\bullet\alpha \equiv\sim \circ\alpha \text{ mas } \boxtimes\, \alpha \not\equiv\sim \boxminus\alpha$$

O que veremos não ser o caso em $\mathbf{C}_1^D$. Até aqui, vimos a corretude de **DmbC**. Para a completude[7] de **Dmbc** precisaremos de algumas noções e lemas adicionais.

DEFINIÇÃO 16 Seja Δ um conjunto α-saturado em **DmbC**. A *denecessitação* de Δ é um conjunto $Den(\Delta) =_{def} \{\beta \in For^{\circ} : \bigcirc\beta \in \Delta\}$. $\square$

LEMA 4 Seja Δ um conjunto α-saturado em **DmbC**.
(i) O conjunto $Den(\Delta)$ é uma teoria fechada em **DmbC**, ou seja:
$Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$ implica $\beta \in Den(\Delta)$.
(ii) $\bigcirc\beta \notin \Delta$ implica $Den(\Delta), \neg\beta \nvdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$.

Prova. (i) Tomemos $Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$. Assim, existe $\beta_1, \ldots, \beta_n \in Den(\Delta)$ tal que $\beta_1, \ldots, \beta_n \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$ e então, por n aplicações de (DM), segue-se que

$$\vdash_{\mathbf{DmbC}} (\beta_1 \to (\cdots \to (\beta_n \to \beta) \cdots)).$$

[7]Na verdade, tanto a completude de **DmbC** quanto **SDmbC** podem ser derivadas a partir de um caso particular de um sistema deôntico mais genérico, conforme [5]. Para tanto, considere o esquema de axioma $\mathcal{P}^k \bigcirc^l \alpha \to \bigcirc^m \mathcal{P}^n \alpha$ - em que $\mathcal{P}\alpha \equiv_{def} \sim \bigcirc \sim \alpha$ - que abreviamos por $G^{k,l,m,n}$, com $k, l, m, n \in \mathbb{N}$. O sistema $G^{1,0,0,0}$ + $\mathrm{G}^{0,1,0,1}$ + **mbC** tem como teoremas os axiomas de **DmbC** e **SDmbC**. Portanto, a completude do primeiro implica na completude dos outros dois.

Por **(O-Nec)**, temos que $\vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc(\beta_1 \to (\cdots \to (\beta_n \to \beta)\cdots))$ e então, por **(O-K)**, **(MP)** e (DM), temos

$$\vdash_{\mathbf{DmbC}} (\bigcirc\beta_1 \to (\cdots \to (\bigcirc\beta_n \to \bigcirc\beta)\cdots)).$$

Mas $\bigcirc\beta_1, \ldots, \bigcirc\beta_n \in \Delta$, pela definição de $Den(\Delta)$, Portanto $\Delta \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc\beta$, por (MP). Assim $\bigcirc\beta \in \Delta$, pelo Lema 2, e então $\beta \in Den(\Delta)$.

(ii) Suponhamos que $Den(\Delta), \neg\beta \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$. Dado que $Den(\Delta), \beta \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$ então, por (PBC), segue-se que $Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$. Assim, pelo item (i), $\beta \in Den(\Delta)$, ou equivalentemente, $\bigcirc\beta \in \Delta$. ■

LEMA 5 Seja $\Delta \cup \alpha$ um conjunto de fórmulas em For° tal que Δ é α-saturado em **DmbC**. Assim:

(i) $\beta \wedge \gamma \in \Delta$ sse $\beta \in \Delta$ e $\gamma \in \Delta$;

(ii) $\beta \vee \gamma \in \Delta$ see $\beta \in \Delta$ ou $\gamma \in \Delta$;

(iii) $\beta \to \gamma \in \Delta$ sse $\beta \notin \Delta$ ou $\gamma \in \Delta$;

(iv) $\beta \notin \Delta$ implica $\neg\beta \in \Delta$;

(v) $\beta, \neg\beta \in \Delta$ implica $\circ\beta \notin \Delta$.

Prova. Idêntica à do Lema 3 ■

DEFINIÇÃO 17 O *modelo canônico* para **DmbC** é uma tripla

$$M_c = \langle \mathcal{W}, R, \{v_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{W}} \rangle$$

tal que:

1. $\mathcal{W} = \{\Delta \subseteq For^{\circ} \ : \ \Delta$ é um conjunto α-saturado em **DmbC** para algum $\alpha\}$;

2. $R = \{\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} \ : \ Den(\Delta) \subseteq \Delta'\}$;

3. v_Δ é a função característica em Δ, isto é: $v_\Delta(\beta) = 1$ sse $\beta \in \Delta$. □

PROPOSIÇÃO 1 O modelo canônico M_c é uma estrutura de Kripke para **DmbC**.

Prova: Provaremos, primeiramente, que R é serial. Assim, seja Δ um conjunto α-saturado em **DmbC**. Então, há uma fórmula β tal que $Den(\Delta) \nvdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$. Caso contrário, em particular, $Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bot_\gamma$ e assim $\bot_\gamma \in Den(\Delta)$, pelo Lema 4 (i). Logo $\bigcirc\bot_\gamma \in \Delta$ e então $\Delta \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bot_\gamma$, por **(O-E)**$^\circ$ e **(MP)**. Daqui e (bC1) segue-se que $\Delta \vdash_{\mathbf{DmbC}} \alpha$, uma contradição. Logo $Den(\Delta) \nvdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$, para alguma fórmula β. Assim, pelo Lema 1 existe um conjunto β-saturado em **DmbC** tal que $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$. Em outras palavras, existe $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $\Delta R \Delta'$, ou seja, R é serial.

Seja $\Delta \in \mathcal{W}$. Pelo Lema 5 (i)-(v) segue-se que v_Δ satisfaz as cláusulas (vi)-(v5) da Definição 15. Resta-nos provar que, para toda fórmula $\beta \in For^\circ$:

$$v_\Delta(\bigcirc\beta) = 1 \text{ sse } v_{\Delta'}(\beta) = 1 \text{ para todo } \Delta' \text{ tal que } Den(\Delta) \subseteq \Delta'.$$

Suponhamos que $v_\Delta(\bigcirc\beta) = 1$ e seja $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$. Assim $\bigcirc\beta \in \Delta$ e então $\beta \in Den(\Delta)$, pela definição de $Den(\Delta)$. Logo $\beta \in \Delta'$ e assim $v_{\Delta'}(\beta) = 1$. Por outro lado, se $v_\Delta(\bigcirc\beta) = 0$ então $\bigcirc\beta \notin \Delta$. Assim $Den(\Delta), \neg\beta \nvdash_{\mathbf{DmbC}} \beta$, pelo Lema 4 (ii). Oras, pelo Lema 1, existe um conjunto β-saturado Δ' em **DmbC** tal que $Den(\Delta) \cup \{\neg\beta\} \subseteq \Delta'$. Portanto $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ e $v_{\Delta'}(\beta) = 0$. ■

TEOREMA 20 (Completude para DmbC) Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For°. Então $\Gamma \vDash_{\mathbf{DmbC}} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{DmbC}} \alpha$.

Prova. Suponha que $\Gamma \nvdash_{\mathbf{DmbC}} \alpha$. Pelo Lema 1, podemos estender Γ a um conjunto α-saturado Δ em **DmbC**. Uma vez que $\Delta \nvdash_{\mathbf{DmbC}} \alpha$ então $\alpha \notin \Delta$ (por 2). Seja M_c o modelo canônico para **DmbC** (cf. 17). Assim, pela Proposição 1, M_c é uma estrutura de Kripke para **DmbC** e Δ é um mundo possível de M_c tal que $M_c, \Delta \vDash_{\mathbf{DmbC}} \Gamma$ (dado que $\Gamma \subseteq \Delta$) e $M_c, \Delta \nvDash \alpha$ (dado que $\alpha \notin \Delta$). Isso mostra que $\Gamma \nvDash_{\mathbf{DmbC}} \alpha$. □

Evidentemente em $\mathbf{C}_1^D$ - por ser uma extensão de $\mathbf{C}_1$ - o operador de consistência também é definido por meio de $\wedge$ e $\neg$. Além disso, temos um axioma adicional que trata da distributividade da interação de $\bigcirc$ e $\circ$, como podemos verificar a seguir.

DEFINIÇÃO 18 A Lógica $\mathbf{C}_1^D$ é definida a partir de For por meio dos axiomas e regras de inferência abaixo:

Esquema de axiomas:

esquemas de axiomas de $\mathbf{C}_1$

(O-K) $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$

(O-D) $\bigcirc\alpha \to {\sim}\bigcirc{\sim}\alpha$

(C^D) $\circ\alpha \to \circ\bigcirc\alpha$

Regra de inferência:

(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

(O-Nec) $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \bigcirc\alpha}$

□

Por hora, detenhamo-nos nos axiomas **(O-D)** e **(C^D)**. Como já observamos na Nota 4, o axioma **(O-D)** está mais próximo do axioma **(D)** de **SDL** do que **(O-E)**$^\circ$, preservando a idéia de que se algo é obrigatório, então deve ser permitido - ao menos para a negação clássica $\sim$. O axioma **(O-D)**, por sua vez, nos chama atenção que pode haver um caso em que α seja deonticamente consistente - $\bigcirc\circ\alpha$ - mas não consistente - $\circ\alpha$. Ainda que esse axioma pareça arbitrário, juntamente com $\mathbf{C}^D$ oferece-nos resultados interessantes, pois:

$$\bigcirc\alpha, \bigcirc{\sim}\alpha \Vdash_{\mathbf{C_1^D}} \bigcirc\beta \text{ mas } \bigcirc\alpha, \bigcirc\neg\alpha \nVdash_{\mathbf{C_1^D}} \bigcirc\beta$$

e ainda

$$\circ\alpha \Vdash_{\mathbf{C_1^D}} \neg(\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\neg\alpha)$$

Isso significa que a negação paraconsistente $\neg$ respeita o *Princípio de Explosão Deôntico*, enquanto $\sim$ respeita o *Princípio de Explosão Deôntico Fraco.*

Mais ainda, devido à eliminação da dupla negação e do axioma **(C^D)**, podemos como em **DmbC** definir um operador de *inconsistência* deôntica, com a vantagem de ter uma interação mais natural entre os operadores, tal que:

$$\boxtimes\alpha \equiv_{def} \neg\boxminus\alpha \equiv (\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\neg\alpha) \equiv \bullet\bigcirc\alpha$$

E evidentemente temos o teorema a seguir como esperávamos.

TEOREMA 21
(i) $\mathbf{C}_1^D$ é uma **LDI**
(ii) $\mathbf{C}_1^D$ é uma **LFI**

Prova. Basta considerar $\overline{\bigcirc}\alpha \equiv \{\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)\}$ e $\overline{\boxminus}\alpha \equiv \{\circ \bigcirc \alpha\}$. ■

A semântica para $\mathbf{C}_1^D$ será similar à **DmbC**, com algumas cláusulas adicionais.

DEFINIÇÃO 19 Uma *estrutura de Kripke* para $\mathbf{C}_1^D$ é uma tripla

$$\langle W, R, \{v_w\}_{w \in W} \rangle$$

em que:

1. W é um conjunto não vazio (de *mundos-possíveis*);

2. $R \subseteq W \times W$ é uma relação (de *accessibilidade*) entre mundos-possíveis que é *serial*;

3. $\{v_w\}_{w\in W}$ é uma família de funções $v_w : For^{\circ} \rightarrow \mathbf{2}$ que satisfaz para cada $w \in W$:

   ($v1$) $v_w(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v_w(\alpha) = v_w(\beta) = 1$

   ($v2$) $v_w(\alpha \vee \beta) = 0$ sse $v_w(\alpha) = v_w(\beta) = 0$

   ($v3$) $v_w(\alpha \rightarrow \beta) = 0$ sse $v_w(\alpha) = 1$ e $v_w(\beta) = 0$

   ($v4$) se $v_w(\circ\beta) = 1$, $v_w(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ e $v_w(\alpha \rightarrow \neg\beta) = 1$, então $v_w(\alpha) = 0$

   ($v5$) se $v_w(\circ\alpha \wedge \circ\beta) = 1$ então $v_w(\circ(\alpha \rightarrow \beta)) = 1$, $v_w(\circ(\alpha \vee \beta)) = 1$ e $v_w(\circ(\alpha \wedge \beta)) = 1$

   ($v6$) $v_w(\alpha) = 0$ implica $v_w(\neg\alpha) = 1$

   ($v7$) $v_w(\neg\neg\alpha) = 1$ implica $v_w(\alpha) = 1$

   ($v8$) $v_w(\bigcirc\alpha) = 1$ sse $v_{w'}(\alpha) = 1$ para todo ω' em W, desde que $\omega R \omega'$

   ($v9$) $v_w(\circ\alpha) = 1$ implica $v_{w'}(\circ\alpha) = 1$ para todo ω' em W, desde que $\omega R \omega'$ □

TEOREMA 22 Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ o conjunto de fórmulas em For$^{\circ}$. Então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha$ implica $\Gamma \vDash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha$.

Prova. Nos restringiremos a **(O-D)**. Note que se $v_w(\bigcirc\alpha) = 1$ então por $(v8)$ temos wRw' e $v_{w'}(\alpha) = 1$, ou seja $v_{w'}(\sim \alpha) = 0$ e $v_{w'}(\sim \bigcirc \sim \alpha) = 1$. ■

Esboçamos, a seguir, a prova do Teorema de Completude para $\mathbf{C}_1^D$.

LEMA 6 Se $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ é um conjunto de fórmulas de $\mathbf{C}_1^D$, então valem as seguintes regras derivadas:
(i) $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \beta$ sse $\Gamma \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha \rightarrow \beta$;
(ii) Se $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \beta$ e $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \sim \beta$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \sim \alpha$;
(iii) Se $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \delta$ e $\Gamma, \beta \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \delta$ então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \sim \alpha$;
(iv) $\Gamma, \alpha, \beta \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha \wedge \beta$;
(v) $\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha$;
(vi) $\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \beta$;
(vii) $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha \vee \beta$;
(viii) $\Gamma, \beta \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha \vee \beta$;
(ix) $\Gamma, \alpha, \sim \alpha \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \beta$;
(x) $\Gamma, \sim\sim \alpha \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha$;
(xi) $\Gamma, \neg\neg\alpha \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha$.

Prova. Para (i), basta notar que em $\mathbf{C}_1^D$ vale (DM). Para (ii), note que $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C_1^D}} \sim \alpha$ sse $\Gamma \nVdash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha$. (iii) é consequência imediata de $(\mathbf{Ax}_8)$ e (DM), enquanto para (iv), (v) e (vi), note que em $\mathbf{C}_1^D$ vale (CNJ). Já (vii) e (viii) são consequências de $(\mathbf{Ax}_6)$ e $(\mathbf{Ax}_7)$, respectivamente. Para (ix), o argumento é similar a (ii), enquanto (x) e (xi) prova-se por $(\mathbf{Ax}_{12})$ e definição de negação clássica. ■

Cabe aqui notar que Lema 1 e Lema 2 - válidos para **mbC** - também vale para $\mathbf{C}_1^D$, pois foram provadas para uma lógica **L** qualquer, como definida na seção 1. Além disso, a partir da Definição 16 do conjunto de *denecessitação*, provamos de modo idêntico que o Lema 4 de **DmbC** também vale para $\mathbf{C}_1^D$. Por fim, usando a Definição 17 de *modelo canônico* M_c para a nova valoração $(v1) - v(9)$, temos:

PROPOSIÇÃO 2 O modelo canônico M_c é uma estrutura de Kripke para $\mathbf{C}_1^D$.

Prova: Para provarmos que em M_c a relaçÃo R é serial, considere o conjunto Δ como α-saturado. Se $\Delta \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \beta$ para todo β, então $Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \bigcirc\beta$ e também $Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \bigcirc \sim \beta$, que por **(O-D)** e cláusula (ix) do Lema 6 nos força $Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \bigcirc\alpha$ e $\Delta \vdash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha$, um absurdo. Logo $\Delta \nvdash_{\mathbf{C_1^D}} \beta$.Assim, pelo Lema 1 existe um conjunto β-saturado em $\mathbf{C}_1^D$ tal que $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$, ou seja, existe $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $\Delta R \Delta'$, satisfazendo em M_c a cláusula para R ser serial. O restante segue-se idêntico a **DmbC**. ■

TEOREMA 23 (Completude para $\mathbf{C}_1^D$) Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For. Então $\Gamma \vDash_{\mathbf{C_1^D}} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{C_1^D} \alpha$.

Prova: Idêntica à de **Dmbc**. ■

COROLÁRIO 2 (Completude para $\mathbf{C}_1$) $\Gamma \vDash_{\mathbf{C_1}} \alpha$ sse $\Gamma \vdash_{\mathbf{C_1}} \alpha$ □

Não parece interessante, entretanto, a distinção entre **LFI** e **LDI** se não apresentarmos sistemas que são **LFI**'s sem serem **LDI**'s[8]. Esse é o caso de **SDmbC** e **BDmbC**. O primeiro, como veremos, é um sistema paraconsistente no âmbito proposicional mas, em âmbito deôntico, não tolera obrigações inconsistentes. Já **BDmbC** é um sistema deôntico bi-modal em que cada operador se comporta de modo distinto: um operador não tolera inconsistência e o outro é paraconsistente, não trivializando na presença de obrigações conflitantes.

Vejamos a axiomática para **SDmbC**:

DEFINIÇÃO 20 A Lógica **SDmbC** é definida em For° do seguinte modo:

Esquemas de axiomas:

esquemas de axiomas **(Ax1)**-**(Ax10)** e **(bC1)** de **mbC**,

(O-K) $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$

(O-E)* $\bigcirc\mathbf{f}_\alpha \to \bot_\alpha$

[8]Outro exemplo interessante de uma **LDI** está em [5]. Considerando novamente a versão deôntica do esquema $\mathcal{P}^k \bigcirc^l \alpha \to \bigcirc^m \mathcal{P}^n \alpha$, temos em particular o sistema $\mathrm{G}^{0,1,0,1} +$ **mbC**, que também é uma **LDI**. Na verdade, a princípio acrescentando qualquer instância do esquema $\mathrm{G}^{k,l,m,n}$ a $\mathrm{G}^{0,1,0,1} +$ **mbC**, teríamos uma LDI. Não demonstraremos essa propriedade, entretanto, por estar fora do escopo de nosso trabalho.

Regras de inferência

(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

(O-Nec) $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \bigcirc\alpha}$ $\square$

NOTA 8 A lógica **SDL** é uma extensão de **SDmbC**. Observe que se acrescentarmos $\circ\alpha$ como axioma, teríamos **(O-E)** e **(exp)** como teorema, ou seja, teríamos **SDL** com uma outra axiomática e assinatura. Esse fenômeno é muito semelhante ao que ocorre a **mbC** em relação à **CP** (vide Nota 1 e Nota 7). $\square$

TEOREMA 24
(DM): $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha \to \beta$ $\square$

TEOREMA 25 Em **DmbC** vale *Prova por Casos*
(PBC): $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta$ e $\Delta, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta$ implica $\Gamma, \Delta \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta$ $\square$

TEOREMA 26 Em **SDmbC** vale:
(i) $\Gamma \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha \wedge \beta$ se e somente se $\Gamma \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta$
(ii) $\Gamma \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha \to \beta$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta \to \gamma$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha \to \beta$

Prova. Idêntica a de Teorema 5. $\blacksquare$

TEOREMA 27 em **SDmbC** vale:
$\bigcirc(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash_{\mathbf{SDmbC}} \bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta$

Prova. Idêntica à de **DmbC** $\blacksquare$

A semântica de **SDmbC** é obtida acrescentando uma nova cláusula à semântica de **DmbC**:

DEFINIÇÃO 21 Uma *estrutura de Kripke* para **SDmbC** é uma tripla

$$\langle W, R, \{v_w\}_{w \in W} \rangle$$

em que:

1. W é um conjunto não vazio (de *mundos-possíveis*);

2. $R \subseteq W \times W$ é uma relação (de *accessibilidade*) entre mundos-possíveis que é *serial*, ou seja: para todo $w \in W$ existe $w' \in W$ tal que wRw';

3. $\{v_w\}_{w \in W}$ é uma família de funções $v_w : For^{\circ} \rightarrow \mathbf{2}$ que satisfaz para cada $w \in W$:

   ($v1$) $v_w(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v_w(\alpha) = v_w(\beta) = 1$

   ($v2$) $v_w(\alpha \vee \beta) = 0$ sse $v_w(\alpha) = v_w(\beta) = 0$

   ($v3$) $v_w(\alpha \rightarrow \beta) = 0$ sse $v_w(\alpha) = 1$ e $v_w(\beta) = 0$

   ($v4$) $v_w(\alpha) = 0$ implica $v_w(\neg\alpha) = 1$

   ($v5$) $v_w(\alpha) = v(\neg\alpha)$ implica $v_w(\circ\alpha) = 0$

   ($v6$) $v_w(\bigcirc\alpha) = 1$ sse $v_{w'}(\alpha) = 1$ para todo ω' em W, desde que $\omega R \omega'$

   ($v7$) $v_w(\bigcirc\neg\alpha) = 1$ implica $v_{w'}(\alpha) = 0$ para todo ω' em W, desde que $\omega R \omega'$ □

A cláusula ($v7$) exprime a noção de que num mundo w acessível a w', caso tenhamos $\bigcirc\alpha$ e $\bigcirc\neg\alpha$ concluiremos que $v_{w'}(\alpha) = 1$ e $v_{w'}(\alpha) = 0$, trivializando. A recíproca, todavia, não pode ser verdadeira, pois contradizeria a cláusula ($v4$).

TEOREMA 28 Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ o conjunto de fórmulas em For$^{\circ}$. Então $\Gamma \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha$ implica $\Gamma \vDash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha$.

Prova: Nos restringiremos a **(O-E)***. Se $v_w(\bigcirc\mathbf{f}_\alpha) = 1$, por ($v6$) e serialidade de R, existe wRw' tal que $v_{w'}(\alpha) = 1$ e $v_{w'}(\neg\alpha) = 1$. Pela mesma cláusula, teríamos $v_w(\bigcirc\alpha) = 1$ e $v_w(\bigcirc\neg\alpha) = 1$ que, pela cláusula ($v7$) nos fornece $v_{w'}(\alpha) = 0$, absurdo. Assim, por ($v3$) temos $v_w(\bigcirc\mathbf{f}_\alpha \rightarrow \bot_\alpha) = 1$ ■

Podemos, então, demonstrar a afirmação do início da subseção:

TEOREMA 29
(i) **SDmbC** é uma **LFI**.
(ii) **SDmbC** não é uma **LDI**.

Prova. Para (i), o argumento é idêntico ao de **DmbC**. Para (ii), basta mostrar que vale (O-PPE), que é conseqüência imediata de **(O-E)***, Teorema 27, **(bC1)** e (DM). ■

COROLÁRIO 3 **SDmbC** é um sistema $\bigcirc$-consistente.

Prova. Conseqüência imediata da validade de (2.3). Para validade de (2.2), basta tomar o modelo M em que $W = \{w\}$, $R = \{w, w\}$ e $v_p = 0$ ■

NOTA 9 Considere o fragmento de **SDmbc** em que não vale **(O-E)*** denominado **OKmbC**. Observe que em **OKmbC** vale (O-PPE) mas não vale (O-PNC). Mais ainda: **OKmbC** é uma **LFI**, não é uma **LDI** e também é $\bigcirc$-consistente. □

LEMA 7 Seja $\Delta \cup \alpha$ um conjunto de fórmulas em For° tal que Δ é α-saturado em **SDmbC**. Assim:

(i) $\beta \wedge \gamma \in \Delta$ sse $\beta \in \Delta$ e $\gamma \in \Delta$;

(ii) $\beta \vee \gamma \in \Delta$ see $\beta \in \Delta$ ou $\gamma \in \Delta$;

(iii) $\beta \Rightarrow \gamma \in \Delta$ sse $\beta \notin \Delta$ ou $\gamma \in \Delta$;

(iv) $\beta \notin \Delta$ implica $\neg\beta \in \Delta$;

(v) $\beta, \neg\beta \in \Delta$ implica $\circ\beta \notin \Delta$

(vi) $\bigcirc\beta \notin \Delta$ ou $\bigcirc\neg\beta \notin \Delta$

Prova: Nos restringiremos à prova de (vi), pois as demais são idênticas ao Lema 3. Suponhamos $\bigcirc\beta \in \Delta$ e $\bigcirc\neg\beta \in \Delta$. Assim, por (ii), temos que $\bigcirc\beta \wedge \bigcirc\neg\beta \in \Delta$. Logo, por (i) do Lema 2, temos $\Delta \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \bigcirc\beta \wedge \bigcirc\neg\beta$. Mas de (DM), (O-exp) e Teorema 27 obtemos que $\Delta \vdash_{\mathbf{SDmbC}} (\bigcirc\beta \wedge \bigcirc\neg\beta) \to \alpha$, e por (MP), temos que $\Delta \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha$, contrariando a definição de Δ. Portanto $\bigcirc\beta \notin \Delta$ ou $\bigcirc\neg\beta \notin \Delta$. ■

LEMA 8 Seja Δ um conjunto α-saturado em **SDmbC**.
(i) O conjunto $Den(\Delta)$ é uma teoria fechada em **SDmbC**, ou seja:
$Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta$ implica $\beta \in Den(\Delta)$.
(ii) $\bigcirc\beta \notin \Delta$ implica $Den(\Delta), \neg\beta \nvdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta$.

Prova. Idêntica a **Dmbc** ■

DEFINIÇÃO 22 O *modelo canônico* para **SDmbC** é uma tripla

$$M_c = \langle \mathcal{W}, R, \{v_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{W}} \rangle$$

tal que:

1. $\mathcal{W} = \{\Delta \subseteq For^\circ \ : \ \Delta$ é um conjunto α-saturado em **SDmbC** para algum $\alpha\}$;

2. $R = \{\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} \ : \ Den(\Delta) \subseteq \Delta'\}$;

3. v_Δ é a função característica em Δ, isto é: $v_\Delta(\beta) = 1$ sse $\beta \in \Delta$. □

PROPOSIÇÃO 3 O modelo canônico $\mathcal{M}_c$ é uma estrutura de Kripke para **SDmbC**.

Prova: Provaremos, primeiramente, que R é serial. Assim, seja Δ um conjunto α-saturado em **SDmbC**. Então, há uma fórmula β tal que

$$Den(\Delta) \nvdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta.$$

Caso contrário, em particular, $Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \mathbf{f}_\gamma$ e assim $\mathbf{f}_\gamma \in Den(\Delta)$, pelo Lema 8 (i). Logo $\bigcirc \mathbf{f}_\gamma \in \Delta$ e então $\Delta \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \bot_\gamma$, por **(O-E)**$^\circ$ e **(MP)**. Daqui e (bC1) segue-se que $\Delta \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha$, uma contradição. Logo $Den(\Delta) \nvdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta$, para alguma fórmula β. Assim, pelo Lema 1 existe um conjunto α-saturado em **SDmbC** tal que $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$. Em outras palavras, existe $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $\Delta R \Delta'$, ou seja, R é serial.

Seja $\Delta \in \mathcal{W}$. Pelo Lema 7 (i)-(v) segue-se que v_Δ satisfaz as cláusulas (vi)-(v5) da Definição 21. Resta-nos provar que, para toda fórmula $\beta \in For^\circ$:

$$(1)\ v_\Delta(\bigcirc\beta) = 1 \text{ sse } v_{\Delta'}(\beta) = 1 \text{ para todo } \Delta' \text{ tal que } Den(\Delta) \subseteq \Delta'.$$

$$(2)\ v_\Delta(\bigcirc\neg\beta) = 1 \text{ implica } v_{\Delta'}(\beta) = 0 \text{ para todo } \Delta'$$
$$\text{tal que } Den(\Delta) \subseteq \Delta'.$$

Para (1), suponhamos que $v_\Delta(\bigcirc\beta) = 1$ e seja $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$. Assim $\bigcirc\beta \in \Delta$ e então $\beta \in Den(\Delta)$, pela definição de $Den(\Delta)$. Logo $\beta \in \Delta'$ e assim $v_{\Delta'}(\beta) = 1$. Por outro lado, se $v_\Delta(\bigcirc\beta) = 0$ então $\bigcirc\beta \notin \Delta$. Assim $Den(\Delta), \neg\beta \nvdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta$, pelo Lema 8 (ii). Oras, pelo Lema 1, existe um conjunto β-saturado Δ' em **SDmbC** tal que $Den(\Delta) \cup \{\neg\beta\} \subseteq \Delta'$. Portanto $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ e $v_{\Delta'}(\beta) = 0$.

Para (2), seja $v_\Delta(\bigcirc\neg\beta) = 1$ e seja $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$, assim $\bigcirc\neg\beta \in \Delta$. Ora pelo Lema 7 (vi) $\bigcirc\beta \notin \Delta$, logo $Den(\Delta), \neg\beta \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \beta$, pelo Lema 8 (ii). Pelo Lema 1, existe um conjunto β-saturado Δ' em **SDmbC** tal que $Den(\Delta) \cup \{\neg\beta\} \subseteq \Delta'$. Portanto $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ e $v_{\Delta'}(\beta) = 0$. ■

TEOREMA 30 (Completude para SDmbC) Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um conjunto de fórmulas em For°. Então $\Gamma \vDash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha$ implica $\Gamma \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha$.

Prova. Suponha que $\Gamma \nvdash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha$. Pelo Lema 1, podemos estender Γ a um conjunto α-saturado Δ em **SDmbC**. Uma vez que $\Delta \nvdash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha$ então $\alpha \notin \Delta$ (por (Con1)). Seja $\mathcal{M}_c$ o modelo canônico para **SDmbC** (cf. Definição 22). Assim, pela Proposição 1, $\mathcal{M}_c$ é uma estrutura de Kripke para **SDmbC** e Δ é um mundo possível de $\mathcal{M}_c$ tal que $\mathcal{M}_c, \Delta \vDash_{\mathbf{SDmbC}} \Gamma$ (dado que $\Gamma \subseteq \Delta$) e $\mathcal{M}_c, \Delta \nvDash \alpha$ (dado que $\alpha \notin \Delta$). Isso mostra que $\Gamma \nvDash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha$. $\square$

Outro ponto interessante em **SDmbC** é que, ainda que consigamos recuperar a negação clássica $\sim$ de modo análogo ao de **mbC**, elas colapsam do ponto de vista deôntico, como podemos observar no teorema a seguir:

TEOREMA 31
$\bigcirc \neg \alpha \dashv\vdash_{\mathbf{SDmbc}} \bigcirc \sim \alpha$

Prova. Em primeiro lugar, é preciso notar que $\vdash_{\mathbf{SDmbC}} \sim \alpha \to \neg \alpha$, e aplicando (**O-Nec**) e (**O-K**) temos um lado da implicação. A recíproca é provada semanticamente: dado $v_w(\bigcirc \neg \alpha) = 1$, então $v_{w'}(\alpha) = 0$, logo $v_{w'}(\alpha \to \bot) = 1$ e $v_{w'}(\sim \alpha) = 1$ para todo w' tal que wRw', e daí $v_w(\bigcirc \sim \alpha) = 1$ $\blacksquare$

Os sistemas **DmbC** e **SDmbC** parecem ser ambos interessantes no estudo de paradoxos deônticos. Todavia, uma lógica que combinasse esses sistemas pode enriquecer ainda mais nossas análises. Com esse intuito que propomos o sistema a seguir.

DEFINIÇÃO 23 A Lógica da Inconsistência Bimodal Deôntica **BDmbC**[9] - *Bimodal Deontic mbC* - é definida a partir de $For^{\circ \boxdot}$ por meio dos axiomas e regras de inferência abaixo:

Esquema de axiomas:

esquemas de axiomas **(Ax1)**-**(Ax10)** e **(bC1)** de **mbC**,

(O-K) $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc \alpha \to \bigcirc \beta)$

[9]A axiomática abaixo é fortemente inspirada no sistema modal $\mathbf{KT}^{\boxdot}$ apresentado em [9]. Usamos, inclusive, o mesmo conectivo $\boxdot$, mas com uma nova interpretação: em vez de ser um operador de necessidade física passa a designar o conceito deôntico de obrigação consistente.

(O-E)° $\bigcirc\bot_\alpha \to \bot_\alpha$ em que $\bot_\alpha \equiv_{def} (\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \circ\alpha$

($\boxdot$-K) $\boxdot(\alpha \to \beta) \to (\boxdot\alpha \to \boxdot\beta)$

($\boxdot$-E) $\boxdot\mathbf{f}_\alpha \to \bot_\alpha$ em que $\mathbf{f}_\alpha \equiv_{def} \alpha \wedge \neg\alpha$

(BA) $\boxdot\alpha \to \bigcirc\alpha$

Regras de inferência:

(MP) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

(O-NEC) $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \bigcirc\alpha}$

($\boxdot$-NEC) $\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \boxdot\alpha}$ $\square$

O operador $\boxdot$ pode ser interpretado como "classicamente deôntico" ou ainda "normalmente deôntico"; essa noção está expressa em **(O-E)***. Por outro lado, $\bigcirc$ é aqui entendido como "fracamente deôntico", como expresso em **($\boxminus$-E)**. Mas almejamos que o novo operador $\boxdot$ tenha alguma relação com $\bigcirc$ e é conveniente que $\boxdot$ seja mais "forte" ou mais "exigente" que $\bigcirc$, daí a opção por **(BA)**.

TEOREMA 32 em **BDmbC** vale:
(i) $\bigcirc(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta$
(ii) $\boxdot(\alpha \wedge \beta) \dashv\vdash_{\mathbf{BDmbC}} \boxdot\alpha \wedge \boxdot\beta$

Prova. A de (i) é idêntica ao Teorema 16. Para (ii), basta adaptar a prova do mesmo teorema, substituindo **(O-K)** por **($\boxdot$-K)** e **(O-Nec)** por **($\boxdot$-Nec)** $\blacksquare$

Antes de prosseguirmos com a corretude e completude de **BDmbC** é interessante notar que existe mais um paralelo entre as **LFI**'s e **LDI**'s. Assim como **mbC** é $\neg$-paraconsistente mas não é $\sim$-paraconsistente, o teorema abaixo mostra como **BDmbC** não é $\bigcirc$-consistente mas é $\boxdot$-consistente.

TEOREMA 33
(i) **BDmbC** é uma **LFI**
(ii) **BDmbC** é uma **LDI** em relação à $\bigcirc$
(iii) **BDmbC** não é uma **LDI** em relação à $\boxdot$

Prova. Para (i), o argumento é idêntico a **DmbC**. Para (ii), o argumento é o de **SDmbC**. Para (iii), basta demonstrar que vale (O-PEF), que é conseqüência imediata de **($\boxdot$-E)**, Teorema 32, **(bC1)** e (DM). ■

COROLÁRIO 4 **BDmbC** é $\boxdot$-consistente mas não é $\bigcirc$-consistente

Prova. Do teorema acima sabemos que **BDmbC** não é $\bigcirc$-consistente. Para provarmos que é $\boxdot$-consistente, basta verificar que de **($\boxdot$-E)** e (DM) temos (O-PPE). A invalidade de (O-PNT) segue o mesmo modelo do Corolário 3, substituindo R por R° ■

DEFINIÇÃO 24 Uma *estrutura de Kripke* para **BDmbC** é uma quádrupla

$$\langle W, R, R^\circ, \{v_w\}_{w\in W}\rangle$$

em que:

1. W é um conjunto não vazio (de *mundos-possíveis*);

2. $R \subseteq W \times W$ e $R^\circ \subseteq W \times W$ são relações (de *accessibilidade*) entre mundos-possíveis *seriais*, ou seja: para todo $w \in W$ existem w' e $w'' \in W$ tal que wRw' e $wR^\circ w''$;

3. $R \subseteq R^\circ$

4. $\{v_w\}_{w\in W}$ é uma família de funções $v_w : For^{\circ\boxdot} \to \mathbf{2}$ que satisfaz para cada $w \in W$:

   (i) $v_w(\alpha \wedge \beta) = 1$ sse $v_w(\alpha) = v_w(\beta) = 1$

   (ii) $v_w(\alpha \vee \beta) = 0$ sse $v_w(\alpha) = v_w(\beta) = 0$

   (iii) $v_w(\alpha \to \beta) = 0$ sse $v_w(\alpha) = 1$ e $v_w(\beta) = 0$

   (iv) $v_w(\alpha) = 0$ implica $v_w(\neg\alpha) = 1$

   (v) $v_w(\alpha) = v(\neg\alpha)$ implica $v_w(\circ\alpha) = 0$

   (vi) $v_w(\bigcirc\alpha) = 1$ sse $v_w(\alpha) = 1$ para todo ω' em W, desde que $\omega R\omega'$

   (vii) $v_w(\boxdot\alpha) = 1$ sse $v_{w'}(\alpha) = 1$ para todo ω' em W, desde que $\omega R^\circ\omega'$

   (viii) $v_w(\boxdot\neg\alpha) = 1$ implica $v_{w'}(\alpha) = 0$ para todo ω' em W, desde que $\omega R^\circ\omega'$ □

TEOREMA 34 Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ o conjunto de fórmulas em $For^{\circ\boxdot}$. Então $\Gamma \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \alpha$ implica $\Gamma \vDash_{\mathbf{BDmbC}} \alpha$.

Prova: Vamos nos restringir a **(O-E)**$^\circ$, **($\boxdot$-E)** e **(BA)**. Suponhamos que $v_w(\bigcirc\bot_\alpha) = 1$. Assim, existe um w' tal que wRw' (pois R é serial) e por (vi) temos que $v_{w'}(\bot_\alpha) = 1$. Mas pela definição de $\bot_\alpha$ e por (i), temos que $v_{w'}(\alpha) = v_{w'}(\neg\alpha) = v_{w'}(\circ\alpha) = 1$. Oras, mas por (v) temos que $v_{w'}(\circ\alpha) = 0$, um absurdo. Logo, $v_w(\bigcirc\bot_\alpha) = 0$ e por (iii) $v_{w'}(\bigcirc\bot_\alpha \to \bot_\alpha) = 1$.

Agora consideremos $v_w(\boxdot\mathbf{f}_\alpha) = 1$. Assim, por (i) e pela definição de $\mathbf{f}_a$ temos que $v_w(\boxdot\alpha) = v_w(\boxdot\neg\alpha) = 1$. Mas R° também é serial então por (vii) temos que $v_{w'}(\alpha) = 1$ enquanto por (viii) $v_{w'}(\alpha) = 0$, um absurdo. Assim, $v_w(\boxdot\mathbf{f}_\alpha) = 0$ e por (iii) $v_w(\boxdot\mathbf{f}_\alpha \to \bot_\alpha) = 1$

Por fim, seja $v_w(\boxdot\alpha \to \bigcirc\alpha) = 0$. Assim, por (iii) $v_w(\boxdot\alpha) = 1$ e $v_w(\bigcirc\alpha)$. seja w' tal que wRw'; dado que $R \subseteq R^\circ$, então $wR^\circ w'$, logo $v'_w(alpha) = 1$. Assim, $v_w(\bigcirc\alpha) = 1$, um absurdo. Logo $v_w(\boxdot\alpha \to \bigcirc\alpha) = 1$. ■

Segue-se a completude para **BDmbC**:

LEMA 9 Seja Δ um conjunto α-saturado em **BDmbC**. Assim:

(i) $\beta \wedge \gamma \in \Delta$ sse $\beta \in \Delta$ e $\gamma \in \Delta$;

(ii) $\beta \vee \gamma \in \Delta$ sse $\beta \in \Delta$ ou $\gamma \in \Delta$;

(iii) $\beta \to \gamma \in \Delta$ sse $\beta \notin \Delta$ ou $\gamma \in \Delta$;

(iv) $\beta \notin \Delta$ implica $\neg\beta \in \Delta$;

(v) $\beta, \neg\beta \in \Delta$ implica $\circ\beta \notin \Delta$.

(vi) $\boxdot\beta \notin \Delta$ ou $\boxdot\neg\beta \notin \Delta$

Prova: Idêntica à do Lema 7, com a pequena alteração na cláusula (vii), substituindo $\bigcirc$ por $\boxdot$ ■

DEFINIÇÃO 25 Seja Δ um conjunto α-saturado em **BDmbC**. A *denecessitação* de Δ em relação a $\bigcirc$ é um conjunto $\bigcirc Den(\Delta) =_{def} \{\beta \in For^{\circ\boxdot} : \bigcirc\beta \in \Delta\}$. □

DEFINIÇÃO 26 Seja Δ um conjunto α-saturado em **BDmbC**. A *denecessitação* de Δ em relação a $\boxdot$ é um conjunto $\boxdot Den(\Delta) =_{def} \{\beta \in For^{\circ\boxdot} : \boxdot\beta \in \Delta\}$. □

LEMA 10 Seja Δ um conjunto α-saturado em **BDmbC**.
(i) O conjunto $\bigcirc Den(\Delta)$ é uma teoria fechada em **BDmbC**, ou seja:
$\bigcirc Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta$ implica $\beta \in \bigcirc Den(\Delta)$.
(ii) $\bigcirc\beta \notin \Delta$ implica $\bigcirc Den(\Delta), \neg\beta \nvdash_{\mathbf{SDmbC}} \beta$.

Prova. Idêntica a de Lema 4, substituindo $Den(\Delta)$ por $\bigcirc Den(\Delta)$. □

LEMA 11 Seja Δ um conjunto α-saturado em **BDmbC**.
(i) O conjunto $\boxdot Den(\Delta)$ é uma teoria fechada em **BDmbC**, ou seja:
$\boxdot Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \beta$ implica $\beta \in \boxdot Den(\Delta)$.
(ii) $\boxdot\beta \notin \Delta$ implica $\boxdot Den(\Delta), \neg\beta \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \beta$.
(iii) $\boxdot Den(\Delta) \subseteq \bigcirc Den(\Delta)$

Prova. Nos restringiremos a (iii), pois para (i) e (ii) a prova é praticamente idêntica a do Lema 4. Assim, seja $\beta \in \boxdot Den(\Delta)$. Assim, por (Con1) $\Delta \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \boxdot\beta$ e, por **(BA)** e **(MP)** temos $\Delta \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc\beta$ e, pelo Lema 10, temos $\beta \in \bigcirc Den(\Delta)$. ■

DEFINIÇÃO 27 O *modelo canônico* para **BDmbC** é uma quádrupla

$$\mathcal{M}_c = \langle \mathcal{W}, R, R^{\circ}\{v_\Delta\}_{\Delta\in\mathcal{W}} \rangle$$

tal que:

1. $\mathcal{W} = \{\Delta \subseteq For^{\circ\boxdot} : \Delta$ é um conjunto α-saturado em **BDmbC** para algum $\alpha\}$;
2. $R = \{\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} : \bigcirc Den(\Delta) \subseteq \Delta'\}$;
3. $R^{\circ} = \{\langle \Delta, \Delta' \rangle \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} : \boxdot Den(\Delta) \subseteq \Delta'\}$;
4. v_Δ é uma função característica em Δ, isto é: $v_\Delta(\beta) = 1$ sse $\beta \in \Delta$. □

PROPOSIÇÃO 4 O modelo canônico $\mathcal{M}_c$ é uma estrutura de Kripke para **BDmbC**

Prova: Provaremos primeiramente que R é serial. Assim, seja Δ um conjunto α-saturado em **BDmbC**. Logo, existe uma fórmula β tal que

$$\bigcirc Den(\Delta) \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \beta$$

Caso contrário, teríamos em particular que $\bigcirc Den(\Delta) \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bot_\alpha$ o que implicaria que $\Delta \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc\bot_\alpha$ e por ($\bigcirc$-E)$^\circ$ e (MP) teríamos $\Delta \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bot_\alpha$. Disso se segue que $\Delta \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \alpha$, absurdo. Assim, $\bigcirc Den(\Delta) \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \beta$ e pelo Lema 1 existe um conjunto Δ' α-saturado tal que $\bigcirc Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ e pela cláusula 2 da Definição 27, temos que $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in R$, ou seja, existe $\Delta' \in W$ tal que $\Delta R \Delta'$, o que siginifica que R é serial.

Agora provaremos que R° também é serial. Seja novamente Δ um conjunto α-saturado em **BDmbC**. Assim, existe uma fórmula β tal que

$$\boxdot Den(\Delta) \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \beta$$

Caso contrário, em particular $\boxdot Den(\Delta) \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \beta \wedge \neg\beta$, ou seja, $\Delta \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \boxdot(\beta \wedge \neg\beta)$ que por Teorema 32 (ii) nos fornece $\Delta \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \boxdot\beta, \boxdot\neg\beta$ e por ($\boxdot$exp) temos $\Delta \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \alpha$, um absurdo. Portanto, $\boxdot Den(\Delta) \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \beta$ e pelo Lema 1 existe um conjunto Δ' α-saturado tal que $\boxdot Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ e pela cláusula 3 da Definição 27 temos que $\langle \Delta, \Delta' \rangle \in R^\circ$, ou seja, existe $\Delta' \in W$ tal que $\Delta R^\circ \Delta'$, o que significa que R° é serial.

Provaremos então que $R \subseteq R^\circ$. Tomemos $\delta \in R$. Assim, δ é do tipo $\langle \Delta, \Delta' \rangle$ tal que $\bigcirc Den(\Delta) \subseteq \Delta'$. Mas pela cláusula (iii) do Lemma 10 temos que $\boxdot Den(\Delta) \subseteq \bigcirc Den(\Delta)$, o que implica que $\boxdot Den(\Delta) \subseteq \Delta'$.

Portanto, temos que δ é do tipo $\langle \Delta, \Delta' \rangle$ tal que $\boxdot Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ que pela cláusula 2 da mesma definição nos garante que $\delta \in R^\circ$.

Seja $\Delta \in W$. Assim, as cláusulas (i)-(v) do Lema 9 satisfazem as condições (i)-(v) da Definição 24. Resta-nos provar:

(1) $v_\Delta(\bigcirc\beta) = 1$ sse $v_{\Delta'}(\beta) = 1$ para todo Δ' tal que $\bigcirc Den(\Delta) \subseteq \Delta'$.

(2) $v_\Delta(\boxdot\beta) = 1$ sse $v_{\Delta'}(\beta) = 1$ para todo Δ' tal que $\boxdot Den(\Delta) \subseteq \Delta'$.

(3) $v_\Delta(\bigcirc\neg\beta) = 1$ implica $v_{\Delta'}(\beta) = 0$ para todo Δ' tal que $Den(\Delta) \subseteq \Delta'$.

Para (1), suponhamos que $v_\Delta(\bigcirc\beta) = 1$ e seja $\Delta' \in W$ tal que $\bigcirc Den(\Delta) \subseteq \Delta'$. Assim, $\bigcirc\beta \in \Delta$ e portanto $\beta \in \bigcirc Den(\Delta)$, pela definição de $\bigcirc Den(\Delta)$. Como $\bigcirc Den(\Delta) \subseteq \Delta'$, então $\beta \in \Delta$, ou seja, $v_{\Delta'}(\beta) = 1$. Agora, se $v_\Delta(\bigcirc\beta) = 0$, então $\bigcirc\beta \notin \Delta$ e por (ii) do Lema 10 temos que

$$\bigcirc Den(\Delta), \neg\beta \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \beta.$$

Assim, pelo Lema 1 existe um conjunto β-saturado Δ' em **BDmbC** tal que $\boxdot Den(\Delta) \cup \{\neg\beta\} \subseteq \Delta'$. Como Δ' é β-saturado, $\beta \notin \Delta'$ e pela cláusula 4 da mesma definição, $v_{\Delta'}(\beta) = 0$

Para (2), suponhamos que $v_\Delta(\boxdot\beta) = 1$ e seja $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $\boxdot Den(\Delta) \subseteq \Delta'$. Assim $\boxdot\beta \in \Delta$ e então $\beta \in \boxdot Den(\Delta)$, pela Definição de $\boxdot Den(\Delta)$. Logo $\beta \in \Delta'$ e assim $v_{\Delta'}(\beta) = 1$. Por outro lado, se $v_\Delta(\boxdot\beta) = 0$ então $\boxdot\beta \notin \Delta$. Assim $\boxdot Den(\Delta), \neg\beta \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \beta$, pelo Lema 11 (ii). Pelo Lema 1, existe um conjunto β-saturado Δ' em **BDmbC** tal que $\boxdot Den(\Delta) \cup \{\neg\beta\} \subseteq \Delta'$. Portanto $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $\boxdot Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ e $v_{\Delta'}(\beta) = 0$.

Por fim, para (3), suponhamos $v_\Delta(\boxdot\neg\beta) = 1$ e seja $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $\boxdot Den(\Delta) \subseteq \Delta'$, assim $\boxdot\neg\beta \in \Delta$. Ora pelo Lema 9 (vii) $\boxdot\beta \notin \Delta$, logo $\boxdot Den(\Delta), \neg\beta \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \beta$, pelo Lema 11 (ii). Pelo Lema 1, existe um conjunto β-saturado Δ' em **BDmbC** tal que $\boxminus Den(\Delta) \cup \{\neg\beta\} \subseteq \Delta'$. Portanto $\Delta' \in \mathcal{W}$ tal que $\boxminus Den(\Delta) \subseteq \Delta'$ e $v_{\Delta'}(\beta) = 0$. ■

TEOREMA 35 (Completude para BDmbC) *Seja* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *um conjunto de fórmulas em* $For^{\circ\boxdot}$. *Então* $\Gamma \vDash_{\mathbf{BDmbC}} \alpha$ *implica* $\Gamma \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \alpha$.

Prova Suponha que $\Gamma \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \alpha$. Pelo Lema 1, podemos estender Γ a um conjunto α-saturado Δ em **BDmbC**. Uma vez que $\Delta \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \alpha$ então $\alpha \notin \Delta$. Seja $\mathcal{M}_c$ o modelo canônico para **BDmbC** (cf. Definição 27). Assim, pela Proposição 4, $\mathcal{M}_c$ é uma estrutura de Kripke para **BDmbC** e Δ é um mundo possível de $\mathcal{M}_c$ tal que $\mathcal{M}_c, \Delta \vDash_{\mathbf{BDmbC}} \Gamma$ (dado que $\Gamma \subseteq \Delta$) e $\mathcal{M}_c, \Delta \nvDash_{\mathbf{BDmbC}} \alpha$ (dado que $\alpha \notin \Delta$). Isso mostra que $\Gamma \nvDash_{\mathbf{BDmbC}} \alpha$. ■

Observe que em **BDmbC**, o operador $\bigcirc\alpha$ se comporta exatamente como **DmbC**, enquanto $\boxdot$ é o correlado do operador deôntico de **SDmbC**. Fica, pois, evidente a validade do Teorema abaixo:

TEOREMA 36 em **BDmbC**
vale $\boxdot\neg\alpha \dashv\vdash_{\mathbf{BDmbC}} \boxdot \sim \alpha$
mas não vale $\bigcirc\neg\alpha \dashv\vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc \sim \alpha$

Prova. A demonstração é semântica. Para (i) basta notar que $v_w(\boxdot\neg\alpha) = 1$ sse $v_{w'}(\alpha) = 0$ para todo w' tal que $wR^\circ w$ sse $v_{w'}(\sim \alpha) = 1$ sse $v_w(\boxdot \sim \alpha) = 1$. Para (ii), basta considerar um modelo $\mathcal{M}$ em que R é serial, wRw, $v_w(\neg\alpha) = 1$ mas $v_w(\sim \alpha) = 0$. ■

Capítulo 3

PARADOXOS DEÔNTICOS

Essa nossa nova abordagem pode ser bastante frutífera na análise de alguns problemas de lógica deôntica. Um dos principais problemas está relacionado aos paradoxos deônticos: em geral, tais paradoxos consistem em um conjunto de premissas intuitivamente consistente que, quando formalizadas, levam à trivialide dedutiva em **SDL**. Muitos desses paradoxos surgem quando se deriva em **SDL** ao mesmo tempo fórmulas do tipo $\bigcirc\alpha$ e $\bigcirc\neg\alpha$. A principío, o problema está na dificuldade de **SDL** lidar com obrigações contrárias ao dever (cf. [19]). Todavia, mesmo em $\mathbf{K}^O$ dado o mesmo conjunto de premissas, teríamos a explosão deôntica segundo o *Princípio de Explosão Deôntica* (2.3).

A proposta de uma lógica deôntica paraconsistente ou aplicações de lógicas paraconsistentes na resolução de paradoxos modais não é original. Em [13], por exemplo, propôe-se o sistema modal alético paraconsistente $\mathbf{Ci}^T$ como proposta de dissolução do Paradoxo de Cognoscibilidade. Embora nosso trabalho se assemelhe a essa proposta, nosso intuito é analisar problemas de inconsistência deôntica por meio das *Lógicas da Inconsistência Deôntica*. Veremos de que modo nossa abordagem oferece uma nova perspectiva no estudo do célebre Paradoxo de Chisholm.

3.1 O Paradoxo de Chisholm

Muitos argumentos que são coerentes em linguagem natural, quando mal formalizados podem gerar contradições. Em particular, quando as premissas se referem a normas, leis e princípios morais, as contradições se multiplicam. Nesse caso, a lógica subjacente é em geral a lógica deôntica.

Um dos primeiros paradoxos deônticos foi proposto por Chisholm (cf. [11]). A formulação a seguir está baseada em [12]

(1) É obrigatório João não engravidar Maria
(2) Não engravidar Maria obriga João a não se casar com ela.
(3) Engravidar Maria obriga João a se casar com ela.
(4) João engravidou Maria

Seja A: "João engravidou Maria" e B: "João se casa com ela". As formulações aqui são inúmeras. Para isso, consideremos as definições abaixo[1]:

DEFINIÇÃO 28
(i) $\mathcal{F}_1 \equiv_{df} \bigcirc\neg\alpha$ (proibição *prima-facie*)
(ii) $\mathcal{F}_2 \equiv_{df} \bigcirc \sim \alpha$ (proibição forte) $\square$

Primeiramente sabemos que (1) permite duas formulações em **Dmbc**: $\mathcal{F}_1A$ e $\mathcal{F}_2A$. Mas (2) tem três interpretações: $\neg\alpha \to \mathcal{F}_1B$, $\neg\alpha \to \mathcal{F}_2B$ e $\bigcirc(\neg A \to \neg B)$. De modo semelhante, podemos formalizar (3) como $A \to \bigcirc B$ ou $\bigcirc(A \to B)$. Assim, temos 12 possibilidades, que agruparemos de modo conveniente:

$\Gamma_{1.1} = \{\mathcal{F}_1A, \neg A \to \mathcal{F}_1B, A \to \bigcirc B, A\}$
$\Gamma_{1.2} = \{\mathcal{F}_1A, \neg A \to \mathcal{F}_2B, A \to \bigcirc B, A\}$
$\Gamma_{1.3} = \{\mathcal{F}_2A, \neg A \to \mathcal{F}_1B, A \to \bigcirc B, A\}$
$\Gamma_{1.4} = \{\mathcal{F}_2A, \neg A \to \mathcal{F}_2B, A \to \bigcirc B, A\}$
$\Gamma_{2.1} = \{\mathcal{F}_1A, \bigcirc(\neg A \to \neg B), A \to \bigcirc B, A\}$
$\Gamma_{2.2} = \{\mathcal{F}_2A, \bigcirc(\neg A \to \neg B), A \to \bigcirc B, A\}$
$\Gamma_{3.1} = \{\mathcal{F}_1A, \bigcirc(\neg A \to \neg B), \bigcirc(A \to B), A\}$
$\Gamma_{3.2} = \{\mathcal{F}_2A, \bigcirc(\neg A \to \neg B), \bigcirc(A \to B), A\}$
$\Gamma_{4.1} = \{\mathcal{F}_1A, \neg A \to \mathcal{F}_1B, \bigcirc(A \to B), A\}$
$\Gamma_{4.2} = \{\mathcal{F}_1A, \neg A \to \mathcal{F}_2B, \bigcirc(A \to B), A\}$
$\Gamma_{4.3} = \{\mathcal{F}_2A, \neg A \to \mathcal{F}_1B, \bigcirc(A \to B), A\}$
$\Gamma_{4.4} = \{\mathcal{F}_2A, \neg A \to \mathcal{F}_2B, \bigcirc(A \to B), A\}$

Ainda que tenhamos um leque grande de possibilidades, precisamos primeiramente observar se há interdependência das premissas em $\Gamma_{n,m}$ para alguns valores de n e m. Ora, em linguagem natural essa dependência não

[1] Para a distinção entre obrigações prima-facie e obrigações fortes, conferir [27]

existe e o argumento é consistente. Veremos que em **SDL** ou as premissas são dependentes, ou há obrigações conflitantes. Para tanto, consideremos dois teoremas de **SDL**:

$$\vdash_{\mathbf{SDL}} \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \bigcirc\beta) \text{ e } \vdash_{\mathbf{SDL}} \bigcirc\neg\alpha \rightarrow \bigcirc(\alpha \rightarrow \beta)$$

Notemos que **SDL** admite apenas um operador $\mathcal{F}$, que teriam as mesmas propriedades de $\mathcal{F}_2$. Assim, interpretando $\neg$ como a negação clássica, apenas $\Gamma_{1.4}, \Gamma_{2.2}, \Gamma_{3.2}, \Gamma_{4.4}$ são formalizações na linguagem de **SDL**. Em $\Gamma_{1.4}$ há dependência entre (2) e (4), em $\Gamma_{3.2}$ a dependência se dá entre (1) e (3), enquanto em $\Gamma_{4.4}$ todas as premissas são dependentes. Assim, só nos resta $\Gamma_{1.2}$. Mas temos $\bigcirc B$ por **(MP)** e como $\vdash_{\mathbf{SDL}} \bigcirc(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\bigcirc\neg A \rightarrow \bigcirc\neg B)$, por duas aplicações de **(MP)** temos $\bigcirc\neg B$.

Contudo, nem todos os $\Gamma_{n,m}$ tem premissas dependentes em **DmbC**. Assim, por exemplo, considere um modelo $\mathcal{M}$ em que $\omega R\omega'$ e $\omega' R\omega'$, ou seja, R é serial; seja $v_w(A) = v_{w'}(\neg A) = 1$, enquanto $v_\omega(\neg B) = v_\omega(\sim B) = 0$. Logo, $\mathcal{M} \nvDash_{\mathbf{DmbC}} A \rightarrow (\neg A \rightarrow \bigcirc\neg B)$ e $\mathcal{M} \nvDash_{\mathbf{DmbC}} A \rightarrow (\neg A \rightarrow \bigcirc \sim B)$. Portanto, não há dependência de premissas em $\Gamma_{1.1}, \Gamma_{1.2}, \Gamma_{1.3}$ e $\Gamma_{1.4}$

Observemos que em nenhum desses quatro conjuntos temos obrigações conflitantes, pois a inconsistência surge a partir de um outra formalização de (2). Além disso, por **(MP)**, concluímos sempre $\bigcirc B$, ou seja, que João deve se casar com Maria, o que é esperado pela nossa intuição.

Em $\Gamma_{3.1}$, tomemos um modelo $\mathcal{M}$ em que $\omega R\omega'$ e $\omega' R\omega'$. Considere $v_{\omega'}(A) = v_{\omega'}(\neg A) = 1$, enquanto $v_{\omega'}(\neg B) = 0$. Assim, $\mathcal{M} \nvDash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc\neg A \rightarrow \bigcirc(A \rightarrow \neg B)$. O mesmo não vale para $\Gamma_{3.2}$, pois $\vDash_{\mathbf{DmbC}} \sim A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ e aplicando **(O-Nec)** e **(O-K)** temos a dependência entre (1) e (3). Esse conjunto, portanto, não será relevante para nossa análise. Pelo mesmo motivo descartaremos $\Gamma_{4.3}$ e $\Gamma_{4.4}$. Já a independência das premissas de $\Gamma_{4.1}$ e $\Gamma_{4.2}$ é obtida pelo mesmo argumento que em $\Gamma_{1.1} - \Gamma_{1.4}$.

Desse modo, analisando todas as possibilidade relevantes, temos:

$\Gamma_{1.1} \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{1.2} \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{1.3} \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{1.4} \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{2.1} \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc B, \bigcirc\neg B$
$\Gamma_{2.2} \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bot$
$\Gamma_{3.1} \vdash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc\neg B$

Além disso, tomemos o modelo $\mathcal{M}$ em que $W = \{w, w'\}$, $R = \{(w, w'), (w', w')\}$, $v_w(A) = 1$, $v_w(\neg A) = 0$, $v_{w'}(A) = 0$ e $v_{w'}(\neg B) = 0$. Assim, $v_{w'}(\sim A) = 1$ e $v_{w'}(A \to B) = 1$. Desse modo, $v_w(\bigcirc\neg B) = 0$ e então $v_w(\neg A \to \bigcirc\neg B) = 1$. Além disso, $v_w(\bigcirc(A \to B)) = 1$, $v_{w'}(\bigcirc \sim A) = 1$ e $v_{w'}(\bigcirc\neg A) = 1$. Portanto, $\mathcal{M}$ é um modelo para $\Gamma_{4.1}$ e $\Gamma_{4.2}$. Além disso, temos que para $\mathcal{M}$:

$\Gamma_{4.1} \nvDash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{4.1} \nvDash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc\neg B$
$\Gamma_{4.2} \nvDash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{4.2} \nvDash_{\mathbf{DmbC}} \bigcirc\neg B$

Observe que o único caso em que há trivialização é em $\Gamma_{2.2}$ e esse é o contexto em que o paradoxo é formulado classicamente. Quando admitimos a negação não-clássica, temos mais 9 possibilidades de formalização: o quadro se enriquece e, como vimos acima, com certa regularidade.

Todavia, sabemos que em **SDmbC**, os operadores $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ se colapsam, tal que simbolizaremos apenas por $\mathcal{F}_0$. Portanto, teremos apenas quatro possibilidades, a saber:

$\Gamma_{0.1} = \{\mathcal{F}_0 A, \neg A \to \mathcal{F}_0 B, A \to \bigcirc B, A\}$
$\Gamma_{0.2} = \{\mathcal{F}_0 A, \bigcirc(\neg A \to \neg B), A \to \bigcirc B, A\}$
$\Gamma_{0.3} = \{\mathcal{F}_0 A, \bigcirc(\neg A \to \neg B), \bigcirc(A \to B), A\}$
$\Gamma_{0.4} = \{\mathcal{F}_0 A, \neg A \to \mathcal{F}_0 B, \bigcirc(A \to B), A\}$

Observemos que em **SDmbC**, temos:

$$\nvDash_{\mathbf{SDmbC}} \alpha \to (\neg\alpha \to \bigcirc\beta) \text{ mas } \vDash_{\mathbf{SDmbC}} \bigcirc\neg\alpha \to \bigcirc(\alpha \to \beta)$$

O que faz com que $\Gamma_{0.3}$ e $\Gamma_{0.4}$ não sejam interessantes, por haver dependência entre as premissas. Além disso, $\Gamma_{0.2}$ trivializa em **SDmbC**, pois esse sistema não aceita obrigações conflitantes. Isso significa que teremos apenas:

$$\Gamma_{0.1} \vDash_{\mathbf{SDmbC}} \bigcirc B$$

Ou seja, João deve se casar com Maria, como esperado intuitivamente.

Consideremos então o sistema **BDmbC**. Aqui, as inferências de **DmbC** vale para o operador $\bigcirc$ e as de **SDmbC** se aplicam a $\boxdot$. Consideremos $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ como Definição 28. O operador $\mathcal{F}_0$ será tomado como $\mathcal{F}_0\alpha \equiv_{\mathbf{df}} \boxdot\neg\alpha$.

Excluindo os conjuntos com premissas interdependentes, temos as seguintes inferências:

$\Gamma_{1.1} \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{1.2} \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{1.3} \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{1.4} \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{2.1} \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc B, \bigcirc\neg B$
$\Gamma_{2.2} \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \perp$
$\Gamma_{3.1} \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc\neg B$
$\Gamma_{4.1} \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{4.1} \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc\neg B$
$\Gamma_{4.2} \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc B$
$\Gamma_{4.2} \nvdash_{\mathbf{BDmbC}} \bigcirc\neg B$
$\Gamma_{0.1} \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \boxdot B$
$\Gamma_{0.2} \vdash_{\mathbf{BDmbC}} \perp$

O sistema **BDmbC** parece bastante esclarecedor na análise do Paradoxo de Chisholm. A idéia é que tomando como base uma **LFI** - no caso **mbC** - as relações de interdependência entre as premissas não são as mesmas que em **SDL**. A partir daí temos duas possibilidades: decidir se trata-se de um problema de interdependência de premissas simplesmente ou também envolvendo o *Princípio de Obrigações Não-Conflitantes* (2.1). Na primeira escolha, usamos o operador $\boxdot$, e as combinações são expressas pelos conjuntos $\Gamma_{0.1}$ e $\Gamma_{0.2}$. No segundo caso as combinações estão em $\Gamma_{1.1} - \Gamma_{4.4}$.

Oras, se excluirmos o caso $\perp$, temos que $\Gamma_{1.1}$ - $\Gamma_{4.4}$ nos permite todas as combinações à pergunta: "João deve ser casar com Maria?". No caso de $\Gamma_{1.1} - \Gamma_{1.4}$ a resposta é clara: "sim, João deve ser casar com Maria", exatamente como esperávamos intuitivamente. Para $\Gamma_{3.1}$ temos que João não deve se casar com Maria. Já o quadro de $\Gamma_{2.1}$ é, em certo sentido, paraconsistente: João deve e não deve se casar com Maria. Por fim, as combinações de $\Gamma_{4.1} - \Gamma_{4.2}$ nos força concluir que não podemos dizer nada sobre a obrigação de João se casar com Maria, nem que deve e tampouco que não deve.

Observe que $\Gamma_{0.1} - \Gamma_{0.4}$ mantém as mesmas inferências em **SDmbC**, substituindo $\boxdot$ por $\bigcirc$. Além disso, lembremo-nos que **SDmbC** não é uma **LDI** e **BDmbC** não é uma **LDI** em relação à $\boxdot$. Por outro lados, ambos os sistemas são **LFI**'s.

O ponto crucial aqui parece residir no fato de que o Paradoxo de Chisholm não envolve diretamente a negação do Princípio de Explosão Deôntico (O-PPE), como se costuma apresentar na literatura (posição defendida, por exemplo, em [25] e [26]), mas sim na interdependência das premissas *no âmbito proposicional*. Desse modo, recusando-se apenas (PPE) em vez de (O-PPE) - como ocorre com os sistemas **SDmbC** e **BDmbC** para o operador $\odot$ - podemos manter as propriedades deônticas clássicas, mas restringindo as inferências proposicionais. Desse modo, não só o sistema não colapsa (pois não mais inferimos $\bigcirc A$ e $\bigcirc\neg A$) como, além disso, temos a resposta esperada intuitivamente, a saber, $\bigcirc A$, ou seja, que João deve ser casar com Maria.

Isso não significa que os sistemas **DmbC** e $\mathbf{C}_1^D$ não sejam adequados para formalizar paradoxos deônticos. Entretanto, paradoxos que rejeitam diretamente (O-PPE) parecem estar ligados a *dilemas morais*, como é sugerido em [17]. Ccabe aqui ressaltar que o Paradoxo de Chisholm formalizado nesses sistemas não nos leva a um absurdo, uma vez que de $\bigcirc A$ e $\bigcirc\neg A$ não temos $\bigcirc B$. O único problema é que esses sistemas parecem restringir de tal modo suas inferências que a partir do conjunto de premissas propostos por Chisholm não conseguimos concluir o que esperaríamos intuitivamente.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos aqui de como a abordagem das **LFI**'s em relação ao problema da contradição pode ser estendida para a de obrigações conflitantes. Essa relação já está de algum modo em [12], em que são propostos os sistemas **DmbC** e **DLFI1**. A parte original desse trabalho está na proposta dos sistemas **SDmbC**, **BDmbC** e na transposição dos princípios (PNC) (PPE) e (PNT) para um contexto deôntico.

Outro ponto interessante é que o conceito de *Lógicas da Inconsistência Deôntica* parece englobar todos os sistemas deônticos paraconsistentes propostos até então na literatura, e que pode ser tomado como ponto de partida para uma taxonomia desses sistemas, seguindo em certa medida o trabalho de [7] para lógicas paraconsistentes proposicionais. O próximo paso seria encontrar resultados de completude generalizada para s **LDI**'s monomodais ou multimodais, seguindo em parte os resultados de [5].

É digno de nota que os sistemas **DLFI1** e $\mathbf{C}^1_D$ são muito semelhantes. Os únicos pontos distintos na sintaxe está no fato de que o operador de consistência deôntica em **DLFI1** é definido como $\bigcirc \circ \alpha$ enquanto em $\mathbf{C}^D_1$ temos $\circ \bigcirc \alpha$. Além disso, não há em **DLFI1** o axioma correlato a $(\mathbf{C}^D)$. Isso significa que um estudo comparado desses sistemas nos traria a relação exata desses conectivos e as implicações ao se acrescentar $(\mathbf{C}^D)$.

Outro aspecto original de nosso trabalho está na nova abordagem do Paradoxo de Chisholm por meio de **BDmbC**. Como vimos, esse sistema parece ser capaz de formalizar tanto argumentos em que há de fato um *dilema moral* - ou seja, concluímos $\bigcirc\alpha$ e $\bigcirc\neg\alpha$ - quanto argumentos em que esse dilema é aparente, e o problema está na interdependência de premissas. Essa distinção pode ser muito frutífera na análise de outros paradoxos deônticos, como os apresentados em [25], [26] e [6].

Assim como **mbC** surgiu na proposta do operador $\circ$ como primitivo, o sistema **BDmbC** tem papel fundamental na proposta de um sistema deôntico em que o operador de consistência deôntica $\boxminus$ seja primitivo. A esse sistema, espera-se que se tenha como axiomas:

$$(\boxminus\alpha \wedge \boxminus\neg\alpha) \to \bot \text{ e } (\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\neg\alpha \wedge \boxminus\alpha) \to \bot$$

A cláusula semântica natural que forçasse esse resultado seria:

$$v_w(\boxminus\alpha) = 1 \text{ sse } v_{w'}(\alpha) = 1 \text{ e } v_{w'}(\circ\alpha) = 1 \text{ para todo } w' \text{ tal que } wR^{\circ}w'$$

Outro resultado interessante seria propor uma extensão de **DmbC** que teríamos, como em $(\mathbf{C}^D)$, a equivalência:

$$\bullet \bigcirc \alpha \dashv\vdash \boxtimes\alpha$$

Por fim, nosso trabalho está longe de esgotar as possibilidades de novas lógicas deônticas paraconsistentes e novas abordagens paraconsistentes a paradoxos deônticos. Por outro lado, dados os pontos originais e ao estudo comparado crítico das abordagens já existentes, esperamos que nosso trabalho tenha contribuído na discussão em aberto desses tópicos e seja mais um avanço aos futuros estudos nessas áreas.

Capítulo 5

PERSPECTIVAS

Como já vimos, as **LDI**'s não validam em geral o *Princípio de Explosão Deôntica* (O-PPE). Além disso, uma **LFI** deôntica tem relações distintas entre as premissas caso essas fossem interpretadas em **SDL**. Mais ainda: qualquer **LFI** pode ter duas negações: uma paraconsistente que respeita o *Princípio de Explosão Fraco* (PEF) e outra clássica, definida como $\sim \alpha \equiv_{df} \alpha \rightarrow \bot$.

Isso significa que ao formalizarmos um paradoxo num sistema em que não valem **(O-PDE)** e o Princípio de Explosão **(PPE)** ganhamos expressividade (pois há dois conectivos de negação), diminuimos a interdependência de premissas (pois, em geral, uma **LDI** é mais forte que **SDL**) e se, ainda assim, houver obrigações conflitantes, o sistema não trivializa: a fórmula simplesmente fica "marcada" como deonticamente inconsistente.

Em [12], mostra-se uma aplicação concreta das LDI's na resolução do paradoxo de Chisholm com os sistemas **DmbC** e **DLFI1**. Já em [22], os sistemas **SDmbC** e **BDmbC** contribuem para lançar luz a uma nova perspectiva de análise do paradoxo: o problema, em questão, parece ser a relação entre as premissas do argumento e não a violação de (O-PPE).

Alguns paradoxos deônticos, entretanto, podem ser formalizados em lógica deôntica proposicional ou de de primeira ordem. Considere o seguinte conjunto de sentenças (apresentado em [25]):

1. Não deve haver cercas.

2. Se houver cercas, a cerca deve ser branca.

3. Há cercas.

O paradoxo ocorre em **SDL** devido à relação tácita entre haver cercas e cercas brancas. Tomando p como haver cercas e q como haver cercas brancas, teríamos pela regra **(O-Nec)**[1]: $\bigcirc(\neg p \to \neg q)$ e, por **(O-K)** e **(MP)**, teríamos $\bigcirc\neg p \to \bigcirc\neg q$. Com essa fórmula e (1) temos por um lado $\bigcirc\neg q$ e, por **(MP)** entre (2) e (3) temos $\bigcirc q$, o que nos levaria a trivialização em **SDL**.

Outra possibilidade seria formalizar o conjunto acima em lógica deôntica de primeira ordem. Considerando "C" como predicado de "ser cerca", "B" o predicado ser cerca branca e "a" um objeto que é cerca, teríamos:

1. $\bigcirc\neg\exists x Cx$
2. $\forall x(Cx \to Bx)$
3. Ca

Desse conjunto de sentenças inferiríamos apenas $\bigcirc\neg Ca \wedge \bigcirc Bx$, não violando (O-PPE). Todavia, acrescentando a norma de que se uma cerca não é branca, então deve ser preta, teríamos a relação tácita $\forall x(Bx \to \neg Px)$ - P é o predicado "ser preto" - por instanciação, **(MP)** e **(O-Nec)** teríamos $\bigcirc\neg Pa$. Por outro lado, a partir da nova norma e com a hipotése do objeto a não ser uma cerca branca, teríamos $\bigcirc Pa$, trivializando o sistema.

5.1 LFI's de Primeira Ordem

Vimos que o paradoxo acima pode ser formalizado em linguagem de primeira ordem. A princípio, devido à sofisticação dessa linguagem, o paradoxo parece ser dissolvido. Todavia, dada a característica dessas sentenças serem formalizadas em lógica deôntica clássica de primeira ordem, temos a validade de **(PDE)** o que implica, com pequenas alterações no conjunto de premissas, a trivialização do sistema.

Uma alternativa muito interessante seria a formalização desses paradoxos em LFI's deônticas de primeira ordem. Existem na literatura duas abordagens para LFI's de primeira ordem: uma, devida a [3] e a outra devida a [24].

[1]Observe que até aqui definimos que a regra **(O-Nec)** aplica-se epenas a teoremas. Em muitos sistemas deônticos, todavia, esse não é o caso, o que justifica a escolha em [25] de mostrar paradoxos deônticos gerados ao aplicar **(O-Nec)** para fórmulas que não são teoremas

A proposta [3] esta baseada na *semântica de Nmatrizes* ou *semântica não-determinística* (*Nmatrices semantics* ou *non-deterministic semantics*, no original em inglês). As Nmatrices foram introduzidas em [2] como uma interessante proposta de generalização da semântica de matrizes. Basicamente, as Nmatrizes são matrizes lógicas em que cada entrada consiste num conjunto finito não-vazio de valores de verdade em lugar de um único valor de verdade. Esta técnica oferece um método de decisão para muitas lógicas não verofuncionais, em particular as LFI's introduzidas na literatura. No artigo [3], considera-se uma extensão das Nmatrizes que permite avaliar os quantificadores junto com os conectivos num conjunto de 5 valores de verdade. Estes valores de verdade devem ser pensados como triplas $\langle x, y, z\rangle \in \{0,1\}^3$ em que x, y e z representam o valor de $v(A)$, $v(\neg A)$ e $v(\circ A)$, respectivamente, para uma sentença A e uma bivaloração paraconsistente v. Assim, a partir dos axiomas básicos das LFI's, temos os seguintes valores:

$$\begin{array}{rcl} t & = & \langle 1,0,1\rangle \\ t_I & = & \langle 1,0,0\rangle \\ I & = & \langle 1,1,0\rangle \\ f & = & \langle 0,1,1\rangle \\ f_I & = & \langle 0,1,0\rangle \end{array}$$

Deve ser observado que $\langle 0,0,z\rangle$ é impossível, pois como vimos as bivalorações paraconsistentes satisfazem a propriedade seguinte:

$$v(A) = 0 \ \text{ implica que } \ v(\neg A) = 1$$

enquanto que $\langle 1,1,1\rangle$ também não é possível, pois:

$$v(\circ A) = 1 \ \text{ implica que } \ v(A) = 0 \ \text{ ou } \ v(\neg A) = 0$$

Uma das principais propriedades das Nmatrizes é a sua efetividade, no sentido que para determinar se $\Gamma \models_M A$ (para uma dada Nmatriz M) é suficiente verificar apenas valorações parciais, definidas apenas nas subfórmulas de $\Gamma \cup \{A\}$.

Por outro lado, [24] propôs independentemente uma semântica para LFI's de primeira ordem a partir da extensão das bivalorações para as sentenças da linguagem com quantificadores. A extensão é definida de maneira natural:

$$\begin{array}{lll} v(P(t_1,\ldots,t_n)) = 1 & \text{sse} & \langle t_1^{\mathfrak{A}},\ldots,t_n^{\mathfrak{A}}\rangle \in P^{\mathfrak{A}}, \text{ para toda sentença atômica;} \\ v(\forall x.A) = 1 & \text{sse} & v(A[x/t]) = 1 \text{ para todo termo fechado } t \text{ de } \mathbb{L}_{\mathfrak{A}}; \\ v(\exists x.A) = 1 & \text{sse} & v(A[x/t]) = 1 \text{ para algum termo fechado } t \text{ de } \mathbb{L}_{\mathfrak{A}}. \end{array}$$

Aqui, $\mathbb{L}_{\mathfrak{A}}$ é a linguagem diagrama da estrutura $\mathfrak{A}$ (isto é, a linguagem que estende $\mathbb{L}$ pelo acréscimo de uma nova constante $\bar{a}$ para cada elemento a do domínio de $\mathfrak{A}$).

Um resultado interessante de analisar é a relação exata entre as abordagens de [3] e [24]. O segundo passo natural seria propor uma **LFI** deôntica de primeira ordem que, se por um lado daria uma nova abordagem nos estudos de paradoxos deônticos de primeira ordem, por outro lado poderia iluminar o modo de encararmos a fórmula de Barcan

5.2 A fórmula de Barcan

A princípio não haveria dificuldade alguma em lidar com lógica deôntica de primeira ordem: bastaria assumir as regras e axiomas do cálculo de predicado mais os axiomas e regras de **SDL**. A dificuldade surge, entretanto, na interação entre o operador modal e o quantificador. Uma possível relação seria pensar numa versão deôntica da fórmula de Barcan (proposta primeiramente em [4] para o operador modal alético $\Box$):

$$\text{(DBF) } \forall x \bigcirc A \rightarrow \bigcirc \forall x A$$

As dificuldades apresentadas pela fórmula de Barcan estão relacionadas com o problema das propriedades *de re* e *de dicto*, como podemos observar em [18], [14] e [9]. Essas dificuldades surgem ao interpretarmos o operador modal alético $\Box$ como *necessário*, associando o predicado necessário às propriedades *de re* (vide [23]). Um fato interessante é que em qualquer sistema modal clássico de predicados é possível provar a recíproca da fórmula de Barcan (vide [21]), colapsando os conceitos de propriedades *de re* e *de dicto*. Do ponto de vista deôntico, ainda que a recíproca de **(DBF)** pode ser facilmente demonstrada, a interpretação desse fenômeno seria distinta da abordagem alética. Todavia, o ponto crucial parece estar num fenômeno semelhante à fórmula de Barcan que ocorre com as LFI's de primeira ordem, a saber:

$$\forall x \circ A \rightarrow \circ \forall x A$$

Ainda que essa relação entre o quantificador e o operador de consistência pareça razoável e resolva algumas dificuldades técnicas, do ponto de vista interpretativo poderíamos ter problemas semelhantes aos da fórmula de Barcan. Além disso, essas questões servem como alerta para pensarmos a relação que haveria numa LFI's deôntica de primeira ordem entre os operadores $\forall$, $\bigcirc$ e $\circ$.

5.3 Lógicas Deônticas Diádicas

Alguns autores (por exemplo, [28] e [1]) têm proposto a utilização de um operador primitivo diádico $O(p/q)$ denotando a proposição "p é obrigatório nas circunstâncias q" para solucionar os paradoxos deônticos. Mas esta perspectiva não é isenta de problemas, em razão da perda de uma certa forma de *Modus Ponens* deôntico: de $O(p/q)$ e q não se pode deduzir $O(p)$. Na tentativa de resolver este conflito as lógicas deônticas diádicas dividiram-se em duas correntes: as baseadas no uso de uma implicação estrita (corrente defendida por C. Alchourrón e G. von Wright) e aquelas utilizando na sua semântica uma relação de *preferência* entre mundos possíveis (corrente defendida por S. Hansson e D. Lewis).

Por outro lado, o operador diádico pode iluminar uma questão ainda aberta em **LFI**'s deônticas. Ora, em [12] o operador de consistência deôntica é, como vimos, $\bigcirc\circ$. Todavia, em [17], o operador é $\circ\bigcirc$. Qual seria, pois, a relaçao exata desses dois novos operadores?

Uma possível interrelação poderia existir ao interpretar $\bigcirc\circ p$ como $\bigcirc(\circ p/p)$ enquanto $\circ\bigcirc p$ seria $\bigcirc(p/\circ p)$, fundindo as duas propostas num único sistema ou numa única hierarquia de sistemas.

Sabe-se que os operadores diádicos em geral não respeitam **(MP)** deôntico, todavia, esse tipo de limitação pode ser superada com **LFI**'s deônticas diádicas, devido à propriedade das **LFI**'s modificarem as relações de interdependência de premissas de um argumento. Assim, uma segunda linha de pesquisa seria analisar os sistemas deônticas diádicos que há na literatura e propor uma hierarquia de **LFI**'s deônticas diádicas para, em seguida, aplicá-las aos paradoxos deônticos.

Desse modo, muito trabalho pode ser feito no âmbito de lógicas deônticas paraconsistentes para lançar luz às questões ainda abertas na literatura.

Referências Bibliográficas

[1] C. Alchourrón. Detachment and defeseability in deontic logic. *Studia Logica*, 57(1):5–18, 1994.

[2] A. Avron e I. Lev. Canonical propositional Gentzen-type systems. In *Proceedings of the 1st International Joint Conference on Automated Reasoning (IJCAR 2001)*, volume 2083 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 529–544. Springer-Verlag, 2001.

[3] A. Avron e A. Zamansky. Many-valued non-deterministic semantics for first-order Logics of Formal (In)consistency. In S. Aguzzoli, A. Ciabattoni, B. Gerla, C. Manara, and V. Marra, editors, *Algebraic and Proof-theoretic Aspects of Non-classical Logics*, volume 4460 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 1–24. Springer-Verlag, 2007.

[4] R. Barcan (Marcus). A functional calculus of first order based on strict implication. *Journal of Symbolic Logic*, 11:1–16, 1946.

[5] J. Bueno-Soler. Possible-translations semantics for cathodic modal logics. *CLE e-Prints*, 8(6), 2008.
URL = `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_8,n_6,2008.html`.

[6] J. Carmo e A. Jones. A new approach to contrary-to-duty obligations. In D.N. Nute, editor, *Defeasible Deontic Logic*, volume 263 of *Synthese Library*, pages 317–344. Kluwer Publishing Company, 1997.

[7] W. A. Carnielli e J. Marcos. A taxonomy of C-systems. In W. A. Carnielli, M. E. Coniglio, and I. M. L. D' Ottaviano, editors, *Proceedings of the 2nd World Congress on Paraconsistency 2000*, pages 1–94. Marcel Dekker, 2002. Versão preliminar publicada em *CLE e-Prints*, 1(5), 2001.

[8] W.A. Carnielli, M.E. Coniglio, e J Marcos. Logics of Formal Inconsistency. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic (2nd. edition)*, volume 14, pages 15–107. Springer, 2007.

[9] W.A. Carnielli e C. Pizzi. *Modalities and Multimodalities*, volume 12 of *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*. Springer Verlag, 2008.

[10] B.F. Chellas. *Modal Logic: an introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[11] R.M. Chisholm. Contrary-to-duty imperatives and deontic logic. *Analysis*, 24:33–36, 1963.

[12] M. E. Coniglio. Logics of deontic inconsistency. *CLE e-Prints*, 7(4), 2007.
URL = `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_7,n_4,2007.html`.

[13] A. Costa-Leite. Paraconsistência, modalidade e cognoscibilidade. Dissertação de mestrado, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas (IFCH), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, 2003.

[14] M. J. Creswell e G. E. Hughes. *A New Introduction to Modal Logic*. Houtledge, London, 1996.

[15] N. C. A Da Costa. *Sistemas Formais Inconsistentes*. UFPR, Curitiba, 1963.

[16] N. C. A Da Costa. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XV:497–510, 1974.

[17] N.C. A Da Costa e W. A. Carnielli. Paraconsistent deontic logic. *Philosophia*, 16(3/4):293–305, 1986.

[18] J. Garson. Modal logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2004.
URL = `http://www.plato.stanford.edu/entries/logic-modal/`.

[19] T. McConnell. Moral dilemmas. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2006.
URL = `http://www.plato.stanford.edu/entries/modal-dilemmas/`.

[20] P. McNamara. Deontic logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2006.
URL = `http://www.plato.stanford.edu/entries/logic-deontic/`.

[21] C. Menzel. Poof of Barcan formula equivalent. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2008.
URL = `http://www.plato.stanford.edu/entries/actualism/proofBFD.html`.

[22] N. M. Peron e M.E. Coniglio. Logics of deontic inconsistencies and paradoxes. *CLE e-Prints*, 8(6), 2008.
URL = `http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_8,n_6,2008.html`.

[23] A. Platinga. *The Nature of Necessity.* Oxford University Press, London, 1974.

[24] R. Podiacki. Lógicas da inconsistência formal quantificadas. Dissertação de mestrado, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas (IFCH), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, 2008.

[25] H. Prakken e M.J. Sergot. Contrary-to-duty imperatives, defeasibility and violability. In A.J.I. Jones and M. Sergot, editors, *Proceedings of the 2nd International Workshop on Deontic Logic in Computer Science (DEON94)*, volume 1/94 of *CompLex*, pages 296–318. Tano A.S., Oslo, 1994.

[26] H. Prakken e M.J. Sergot. Dyadic deontic logic and contrary-to-duty obligations. In D.N. Nute, editor, *Defeasible Deontic Logic*, volume 263 of *Synthese Library*, pages 223–262. Kluwer Publishing Company, 1997.

[27] D. Ross. *The Right and the Good.* Oxford University Press, Oxford, 1930.

[28] G.H. von Wright. Deontic logic. *Mind*, 60:1–15, 1951. Reimpresso em: *Logical Studies (by G.H. von Wright)*, Routledge and Kegan Paul, Londres, 1967, pp. 58–74.