UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

RODRIGO DE ALVARENGA FREIRE

OS FUNDAMENTOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO NO SÉCULO XX E A RELEVÂNCIA FUNDACIONAL DA TEORIA DE MODELOS

Doutorado

Orientador: Professor Doutor Walter Alexandre Carnielli

Campinas, 2009.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFCH - UNICAMP

F883f

Freire, Rodrigo de Alvarenga
Os fundamentos do pensamento matemático no século XX e a relevância fundacional da teoria de modelos / Rodrigo de Alvarenga Freire . - Campinas, SP : [s. n.], 2009.

Orientador: Walter Alexandre Carnielli.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Matemática - Fundamentos. 2. Matemática - Filosofia. 3. Lógica simbólica e matemática. 4. Teoria de modelos. 5. Galois, teoria de. I. Carnielli, Walter Alexandre. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.

msh/ifch

Título em inglês: **The foundations of mathematical thought in the twentieth century and the foundational relevance of model theory.**

Palavras chaves em inglês (keywords) :
Mathematics – Foundations
Mathematics – Philosophy
Logic, symbolic and mathematical
Model theory
Galois theory

Área de Concentração: Lógica

Titulação: Doutor em Filosofia

Banca examinadora: **Walter Alexandre Carnielli, Luiz Carlos Pereira, Frank Thomas Sautter, Daniel Victor Tausk, Hugo Luiz Mariano.**

Data da defesa: 26/02/2009

Programa de Pós-Graduação: Filosofia

RODRIGO DE ALVARENGA FREIRE[1]

OS FUNDAMENTOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO NO SÉCULO XX E A RELEVÂNCIA FUNDACIONAL DA TEORIA DE MODELOS

Tese de Doutorado apresentada no Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas sob a orientação do Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida e aprovada pela Comissão Julgadora em 26/02/2009.

BANCA

Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli (orientador)

Prof. Dr. Frank Thomas Sautter Frank T. Sautter.

Prof. Dr. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira

Prof. Dr. Hugo Luiz Mariano Hugo Luiz Mariano

Prof. Dr. Daniel Victor Tausk

Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa (suplente)

Prof. Dr. Jairo José da Silva (suplente)

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio (suplente)

MARÇO/2009

[1] *O autor recebeu apoio financeiro da FAPESP durante a elaboração desta tese de doutorado.*

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Roberto e Maria Luiza, aos meus irmãos Raphael e Raquel, à minha esposa Carolinne e à minha filha Ana Luiza pelo suporte que me propiciaram em todos esses anos, sem o qual a realização do presente trabalho não seria possível.

Aos professores do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp, Walter Carnielli, Jairo da Silva, Ítala D'Ottaviano e Marcelo Coniglio por sustentarem, com muito trabalho, um ambiente de pesquisa em Lógica de tão alto nível. Aos professores do Instituto de Matemática e Estatística da USP, Hugo Mariano, Daniel Tausk e Odilon Luciano pelas inúmeras discussões que ajudaram a moldar o perfil deste trabalho. Agradeço, ainda, ao professor Newton da Costa pela generosidade e solicitude, demonstrada através de várias sugestões para a realização do trabalho.

Ao meu orientador, Walter Carnielli, pelo trabalho de orientação, que envolveu muito mais do que a elaboração da presente Tese.

Aos colegas e amigos do Centro de Lógica, que são muitos para nomear. Gostaria apenas de mencionar os nomes de Rodrigo Podiacki, Anderson Araújo, Pietro Carolino, Rafael Testa e Teófilo Reis pela interação produtiva nos anos de convivência no CLE e pelos comentários diretamente ligados a esta Tese. Rodrigo Podiacki realizou uma revisão heróica do texto. A todas essas pessoas o meu muito obrigado.

RESUMO

Esta Tese tem como objetivo elucidar, ao menos parcialmente, a questão do significado da Teoria de Modelos para uma reflexão sobre o conhecimento matemático no século XX. Para isso, vamos buscar, primeiramente, alcançar uma compreensão da própria reflexão sobre o conhecimento matemático, que será denominada de Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX, e da própria relevância fundacional. Em seguida, analisaremos, dentro do contexto fundacional estabelecido, o papel da Teoria de Modelos e da sua interação com a Álgebra, em geral, e, finalmente, empreenderemos um estudo de caso específico. Nesse estudo de caso mostraremos que a Teoria de Galois pode ser vista como um conteúdo lógico, e buscaremos compreender o significado fundacional desse enquadramento modelo-teórico para uma parte da Álgebra clássica.

ABSTRACT

The aim of the present Thesis is to bring some light to the question about the status and relevance of Model Theory to a reflection about the mathematical knowledge in the twentieth century. To pursue this target, we will, first of all, try to reach a comprehension of the reflection about the mathematical knowledge, itself, what will be designated as Foundations of Mathematical Thought in the twentieth century, and of the foundational relevance, itself. In the sequel, we will provide an analysis, of the role of Model Theory and its interaction with Algebra, in general, within the established foundational setting and, finally, we will discuss a specific study case. In this study case we will show that Galois Theory can be seen as a logical content, and we will try to understand the foundational meaning of this model-theoretic framework for some part of classical Algebra.

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

A apresentação de um trabalho não faz, propriamente, parte do trabalho; coloca-se de uma perspectiva que se pode dizer como externa para apresentar a proposta de um autor com seu trabalho. No caso do presente estudo, minha proposta está baseada em um diagnóstico sobre as áreas de Filosofia da Matemática e de Fundamentos da Matemática, que pode ser resumido na afirmação que essas áreas adotam, em larga escala, uma forte orientação à categoria do objeto e que, por isso, a verdadeira dimensão dos resultados da Teoria de Modelos e sua importância para uma reflexão sobre a Matemática tem sido subestimada e negligenciada, já que a Teoria de Modelos é um estudo da semântica e não lida propriamente com objetos. A proposta é mostrar que se pode avançar na direção de uma reflexão sobre o conhecimento matemático, através de uma orientação por categorias semânticas como, por exemplo, a noção de significado, com uma conseqüente consideração mais cuidadosa da Teoria de Modelos. A Apresentação poderia terminar aqui, contudo, como essas formulações estão ainda um tanto elípticas, é prudente continuar a explicação.

Com relação ao diagnóstico, essa orientação pode ser constatada na Filosofia da Matemática, ou ao menos em parte sua, na figura da questão ontológica como questão fundamental e, também, nos Fundamentos da Matemática, no programa de redução conjuntista, que considera a formalização da Matemática na Teoria de Conjuntos como o aspecto mais importante da área. Essas duas visões estão intimamente relacionadas entre si, e apontam para a direção da orientação já indicada: o primeiro aspecto mostra a ligação da Filosofia da Matemática com a tradição platônica, e o segundo aspecto envolve uma redução efetiva de todos os objetos matemáticos a conjuntos. Para adiantar a discussão, eu não estou, em nenhum momento, propondo que se abandone a formalização da Matemática, ou qualquer outro resultado de programas de fundamentos, mesmo porque tal propositura não teria qualquer efeito. A proposta é de ampliação do horizonte fundacional.

Especificamente com relação à proposta, é preciso, de início, tematizar a *compreensão da compreensão* que se tem da Matemática atual. Essa tematização será designada por Fundamentos do Pensamento Matemático no Século XX, e sua abrangência se estenderá sobre a Filosofia da Matemática e os Fundamentos da Matemática. Então, o ponto de partida é dado; a compreensão da Matemática é um fato, pois os matemáticos (pelo menos alguns) são testemunhas disso.[1] A partir daí, segue a tematização da compreensão dessa compreensão, ou seja, de uma reflexão de segundo grau em relação à Matemática, uma reflexão sobre o conhecimento matemático. E a perspectiva que vai guiar o trabalho, tomando a linguagem matemática como fixada, é a perspectiva semântica sobre a seguinte questão epistemológica fundamental: "o que significa compreender uma noção matemática?". Uma primeira tentativa de resposta para essa questão, segundo essa perspectiva, seria: "compreender uma noção matemática significa conhecer as condições que devem ser satisfeitas para que alguma coisa pertença à extensão da noção". Para que essa resposta não seja completamente vazia é preciso uma análise mais fina do predicado de verdade. No entanto, o objetivo do trabalho não é responder, de forma definitiva, a essa questão, que, em parte, enquanto questão filosófica, não deve ter uma resposta única e exaustiva. Ter uma resposta também não esgota, de modo algum, a problemática envolvida, já que, por exemplo, a questão e uma eventual resposta devem tomar como estática a linguagem matemática onde as noções matemáticas estão expressas; mas tal linguagem é, na verdade, absolutamente dinâmica. De outro modo, o trabalho vai apenas tomar essa perspectiva semântica como guia, como baliza. É preciso ter clareza também de que em nenhum momento este trabalho está colocando em questão que as noções da Matemática têm um significado. Pelo contrário, isso é tomado como fato empírico e a questão diz respeito a condições de possibilidade, ou a pressupostos que fornecem uma base para esse fato. Mais ainda, a tese de que as noções da Matemática possuem um significado independente de uma sistematização de toda a Matemática em sistema formal de um domínio universal (como a Teoria de Conjuntos) é um pressuposto fundamental aqui. É a essa tese realista que se faz referência quando, no trabalho, aparecer a expressão "realidade matemática" (por exemplo, no §2 da Introdução e no §8 da Parte A). Portanto, neste trabalho, sempre que a expressão "realidade matemática" for usada, trata-se de uma realidade semântica pressuposta, e não, necessariamente, de uma ontologia.

Por esse ponto de vista, a relação da Matemática atual com Fundamentos do Pensamento Matemático no Século XX é uma relação de pressuposição formal: o último tem como objetivo, antes, nessa perspectiva, estabelecer condições de significação, pressupostos que fornecem uma base para a compreensão das noções matemáticas, e não tem a finalidade de derivar os axiomas da primeira. Na minha visão, essa perspectiva aparece como promissora também em outros domínios da Razão Pura, como a própria Matemática. Dessa forma a Matemática ela mesma pode ser vista como pressuposto formal, como condição de significação para as ciências que se utilizam dela na apreensão de seus próprios conteúdos e que são, assim, semanticamente condicionadas. A Matemática não tem como objetivo derivar as leis fundamentais dessas ciências.

A perspectiva semântica na Filosofia tem suas origens com os trabalhos em Lógica e Fundamentos da Matemática de Frege, Russel e Wittgenstein, no que se constituiu a chamada Filosofia Analítica da Linguagem. Essa é uma perspectiva ampla e possui uma abrangência que vai além da Filosofia da Matemática, mas que não me parece ser igualmente frutífera em todos os campos da Filosofia. Por exemplo, para o campo da moral e da ética, na Razão Prática, a situação parece bem diferente, pois o problema nesse campo é a questão do agir, e talvez essa perspectiva não ajude em nada nessa questão. A questão prática (como devemos agir?) não é uma questão semântica, certamente. E, mesmo naqueles domínios onde a perspectiva semântica é apropriada, o autor não está adotando, de forma alguma, a tese que os problemas filosóficos são dissolvidos em meras análises da linguagem. O autor está, sim, adotando uma ***orientação*** por categorias semânticas. Em particular, não é afirmado em nenhum momento que a Matemática se reduz a uma semântica para certas ciências, o que é falso, mas apenas que há ***um aspecto*** da Matemática que pode ser caracterizado como semântica formal. Essa perspectiva será explicada em detalhes ao longo do trabalho. Por ora, é melhor interromper essa digressão e parar com essas considerações, pois isso poderia nos levar longe demais. A finalidade desta Apresentação é apenas a de apresentar a perspectiva geral do trabalho, e não a de explicar exatamente no que ela consiste ou de explorar conseqüências dessa perspectiva. Isso é tarefa do trabalho ele mesmo.

O ponto de vista geral do trabalho está satisfatoriamente exposto nesta Apresentação. A partir de agora é preciso entrar no trabalho e desenvolver o tema em detalhes. Na Introdução, que já é parte constitutiva do trabalho, a elaboração de algumas críticas do autor sobre, entre outras coisas, a ausência de consciência histórica que tem dominado certos trabalhos em Filosofia e Fundamentos da Matemática será levada a cabo e um pequeno mapa de relevo do texto será estabelecido. Esse segundo aspecto da introdução é essencial em um estudo como este que, com o texto forrado por uma camada espessa de citações de resultados técnicos e referências bibliográficas, pode parecer que é tudo igual e igualmente obscuro. Pela própria natureza do estudo, é possível identificar no texto uma argumentação continuada dos pontos principais sobre os quais o trabalho se apóia. O objetivo é atingir, ao final do texto, um grau elevado de plausibilidade para as principais teses que estão na base da concepção geral do trabalho.

Nota

1- Poderia parecer, a princípio, absurda a possibilidade mesma de uma Filosofia da Matemática, por exemplo, com base na seguinte observação. Hipoteticamente, seriam os matemáticos as pessoas que mais sabem Matemática. Como é possível uma investigação de natureza filosófica, feita por um lógico, ter a pretensão de esclarecer aspectos incompreendidos da Matemática? Acontece que a compreensão que os matemáticos, em geral, possuem da Matemática é uma compreensão imediata, de primeira ordem em relação ao conteúdo. A compreensão que a Filosofia da Matemática busca é uma compreensão de segunda ordem, mediada pela análise lógica e crítica com relação à compreensão de primeira ordem. Em outras palavras, um bom matemático deve apresentar compreensão matemática, mas não necessariamente compreensão sobre a Matemática, já que essa última forma de compreensão não é necessária para desenvolver a Matemática e só pode ser alcançada por mediação lógico-filosófica.

À GUISA DE INTRODUÇÃO

§1- Filosofia e Matemática

O final do período moderno marca a separação da Filosofia e das ciências, em particular, da Matemática, coincidindo com o fim do projeto sistemático na Filosofia. Antes disso, Descartes, por exemplo, considerava a sua geometria uma aplicação do seu método filosófico, mas depois de Hegel não mais se cogitou construir grandes sistemas filosóficos. Há agora uma suspeita, com base inclusive em questões de ordem prática, de que, por um lado, esses grandes sistemas colapsaram pela "ação da gravidade", pelo seu próprio "peso", e, principalmente, de que as teses e os pressupostos da ciência são autônomos e não subordinados a uma Metafísica especulativa. Por outro lado, há a suspeita de que não é possível alcançar avanço significativo em termos de novos princípios sistemáticos, ou alcançar algo que represente melhora sistemática substancial em relação a todos os grandes sistemas construídos. O colapso do projeto sistemático catapultou a própria Filosofia para um patamar que está mesmo para além da possibilidade de unidade sistemática das disciplinas filosóficas. A carga metafísica que, no contexto dos grandes sistemas, as teses filosóficas (aparentemente) trazem consigo dificulta a consideração dessas mesmas teses no correspondente debate contemporâneo (e muitas dessas teses, sem dúvida, poderiam ser consideradas de modo independente). Além disso, não é fácil, e parece mesmo impossível, encontrar uma pessoa com disponibilidade de recursos o suficiente para ser capaz de realizar uma análise abrangente da tragédia grega em detalhe minucioso e, ao mesmo tempo, estar a par do desenvolvimento da Matemática e ter presente a história da Filosofia da Moral, alguns dos atributos outrora encontrados nos grandes sistematizadores. De fato, a própria Filosofia se especializou, e algumas disciplinas filosóficas já exibem tendências de autonomização. É o caso da Lógica, já há algum tempo.

Desde Platão, autores importantes como Descartes, Leibniz, Berkeley, Kant e Hegel dedicaram várias páginas de seus escritos a investigações a respeito do conhecimento matemático, investigações que influenciaram decisivamente certos desenvolvimentos matemáticos, ora realizados pelo próprio autor, ora realizados por outrem. Do lado da Filosofia, não raro essas páginas constituíam uma peça em um sistema, onde a simples retirada de qualquer elemento provocaria o seu desmoronamento. Do ponto de vista atual, as investigações sobre o conhecimento matemático não têm qualquer pretensão ou preocupação sistemática com relação à totalidade da Filosofia. Esse traço marcante da fase contemporânea das investigações dessa natureza está presente nos textos que a inauguram - textos da lavra de Frege, do final do século XIX. Desde então essa marca apenas se acentuou, em um claro processo de autonomização acentuada, coincidente com o processo de tecnicalidade crescente nesse segmento filosófico. Tal processo traz consigo o inegável mérito de constituir uma base comum para a discussão, já que o conteúdo de resultados técnicos raramente está sob disputa e, desse modo, esse substrato técnico serve de ponto de partida para as clivagens conceituais da atividade filosófica. Contudo, essa especialização também cobrou seu preço. Tem ocorrido um estreitamento pouco recomendável para uma investigação que se pretende filosófica e, mesmo relativamente aos aspectos técnicos, predomina um ponto de vista muito estreito sobre a técnica relevante. Conseqüência disso é que, em parte, alguns aspectos importantes para a compreensão do desenvolvimento atual do conhecimento matemático têm sido negligenciados e, em parte, a visada unilateral produz o efeito de cisão com a história, de compreensão muito deficiente dos processos históricos, dos progressos incorporados, na contramão do pensamento filosófico. Sem uma compreensão histórica adequada, sem compreender os progressos incorporados, não é possível entender as propostas sobre o tema, bem como apreciar os progressos e, conseqüentemente, não é possível fazer valer o privilégio da nossa posição cronológica em relação aos filósofos e lógicos do passado. É como no caso da música, em que, para se formar um juízo estético sobre uma obra de um compositor, é preciso conhecer a história musical, a teoria musical e a obra completa do compositor, de outra forma não sendo possível entender minimamente a proposta, restando apenas um eventual sentimento de prazer que não contém nada senão a contingência. Despojar-se de visadas unilaterais é pré-requisito ao bom exercício da Filosofia.

Sem grandes preocupações sistemáticas, as investigações na área conhecida como Filosofia da Matemática se tornaram mais rentes à Matemática, o que é consistente com o fato de que sistemas filosóficos constituem uma investigação filosófica de segunda ordem, portanto mais afastada da prática científica. Por um lado, sem preocupações sistemáticas ficou mais difícil se perder em eventuais extrapolações da razão especulativa, mas, por outro lado, perdeu-se certa exigência de profundidade filosófica, praticamente imposta pelo projeto sistemático, o que abriu caminho para a superficialidade e para a profusão de propostas e escolas de Filosofia da Matemática, em que questões filosóficas profundas são tratadas como nada além de quimeras. A Filosofia da Matemática ficou imersa na oposição entre escolas de pensamento matemático, onde cada uma delas está em uma relação de exclusão com todas as outras. São inúmeras formas de estruturalismo, nominalismo, naturalismo, construtivismo, etc. Cada filósofo da Matemática tem a sua própria versão da escola a que adere. É preciso superar essa forma de filosofar por oposição entre escolas, que coloca problemas insolúveis que não possuem relação significativa com a Matemática, mas apenas com a demarcação das posições e que, muitas vezes, tenta, erroneamente, legislar sobre o que deve ser a Matemática, sobre que tipo de axiomas a Matemática deve adotar. Contudo, também é preciso considerar que cada uma dessas escolas, potencialmente, caracteriza algum aspecto da Matemática e que elas não precisam se excluir.

Infelizmente, é tão raro encontrar um filósofo com boa formação matemática quanto um matemático com boa formação filosófica. É verdade que as disciplinas cresceram vertiginosamente, mas não a ponto de justificar a indolência e a ignorância em um núcleo básico da Filosofia por parte de um matemático, ou da Matemática por parte de um filósofo, ignorância mútua que impossibilita uma interação produtiva entre filósofos e matemáticos. Sem os elementos mínimos para sequer formular questões de natureza filosófica, o cientista não pode ir além da prática de uma filosofia espontânea, da pior qualidade possível, e, sem conhecimento matemático básico, o filósofo fica impedido de falar inteligentemente sobre as questões da Filosofia da Matemática que apresentam uma relação direta ao conteúdo da Matemática, como a questão da unidade da Matemática, por exemplo. Para contribuir com essas questões é preciso, no mínimo, saber do que se está falando. Não bastasse isso, as relações entre filósofos e matemáticos são tudo, menos homogêneas, um elemento a mais para contribuir negativamente para a Filosofia da Matemática.

A Matemática experimentou grandes transformações no século XX. Um fato extraordinário desse século é que toda a Matemática passou a se expressar em um sistema formal da Teoria de Conjuntos e todo o patrimônio clássico se encontra adaptado e preservado nessa nova maneira de fazer Matemática. Os conjuntos constituem uma categoria matemática maximalmente integradora, que fornece uniformidade e unidade a toda Matemática, através da formalização da Matemática em um sistema formal da Teoria de Conjuntos. Mas como seria possível "formalizar" algo que não fosse formal? Parece que há aqui um contra-senso, ou então o milagre de que o patrimônio clássico, por sorte, fosse, por acidente, formal. Para não cair no absurdo ou não atribuir a milagres os progressos alcançados, é preciso mostrar em que sentido a Matemática é formal. Esse sentido não pode ser aquele que só foi esclarecido no século XX, sobretudo com a escola de Hilbert. Toda a investigação moderna sobre o conhecimento matemático se insere no sulco do trabalho dessa escola, e é mesmo difícil superestimar a influência de Hilbert na área conhecida como Fundamentos da Matemática. Pode-se chamar de Tese de Hilbert a afirmação de que o raciocínio matemático é formalizável em Lógica de Primeira Ordem (por exemplo, ver [Boolos, Burgess & Jefrey, 1]). A Tese de Hilbert constitui um elemento expositivo muito útil, pode desempenhar um papel similar ao papel expositivo da Tese de Church, mas, também, tal como a Tese de Church, constitui o fulcro do significado de muitos resultados técnicos de Lógica Matemática para as investigações sobre o conhecimento matemático. Não obstante, de um ponto de vista filosófico, o formal precisa ser compreendido em um sentido mais amplo, de outro modo o formalismo é uma proposta que apresenta toda a história da Matemática até o final do século XIX como pré-história da Matemática, pois só há Matemática formal (no sentido da sintaxe da Lógica de Primeira Ordem) no século XX.

A Filosofia, que tem as questões ligadas ao conhecimento e ao agir como motivação fundamental, estuda o Pensamento, ou a Razão, e, portanto, seu objeto não é dado; apresenta uma dinâmica interna que lhe é própria e deve ser constituído pela própria Filosofia. Tal como a Filosofia, a Matemática não possui objeto dado de antemão. A Matemática é um conhecimento formal, o desenvolvimento de noções que podem funcionar, ***em geral***, como formas ou pressupostos formais de certo modo de cognição de objetos, ***em geral***. Por exemplo, o conhecimento pela Física Teórica moderna, ***em geral***, pressupõe formalmente noções matemáticas, ***em geral***.

O aspecto semântico da Matemática, mencionado na Apresentação, será aqui caracterizado como uma teoria da forma lógica da linguagem das partes das ciências que apreendem seus conteúdos matematicamente, o que inclui a própria Matemática. Uma teoria da forma lógica, também, como o Pensamento e ligada ao Pensamento, não é um objeto dado e nem estático. É preciso entender aqui que não se trata de uma teoria da mente. O Pensamento não é para ser entendido como aquilo que está na cabeça do sujeito empírico, pura contingência, mas sim como o aparato conceitual envolvido na estruturação da realidade (para fazer essa distinção pode-se lançar mão desse expediente gráfico da letra inicial maiúscula). A Lógica corresponde ao aspecto formal dessa estruturação e tem como objeto o Pensamento, mas apenas segundo uma forma específica, enquanto a Matemática estuda as noções matemáticas que, em princípio, correspondem a domínios logicamente possíveis, enquanto possíveis objetos do conhecimento.

A Filosofia, além de objeto, também não possui método dado, portanto cabe a ela mesma constituir seu método e seu objeto. Já a Matemática possui um método dado, é o método axiomático-dedutivo, que permite proceder por dedução a partir de axiomas e definições. Portanto, a relação da Filosofia com a História da Filosofia é de constituição recíproca, o método e o objeto da Filosofia se constituem através da História da Filosofia. No caso da Matemática, a constituição recíproca é parcial. Apenas o objeto se constitui através da História da Matemática, já que as noções matemáticas, enquanto formas do Pensamento, não são dadas e nem são estáticas. Isso não quer dizer que não ocorrem variações no método da Matemática, que de fato ocorrem, mas sim que as variações que ocorreram historicamente são da ordem do grau de explicitação e de uniformidade de pressupostos. Isso pode ser constatado pelo fato de que os Elementos de Euclides foram utilizados como livro texto e considerados como *organon* da disciplina, referência obrigatória (mas, obviamente, não exaustiva) para a Matemática, pelo menos até o século XVIII, e podem ser utilizados com proveito até hoje. Isso só é possível graças à estabilidade e maturidade que o método matemático alcançou desde o começo da Matemática. E a Matemática se caracteriza parcialmente pelo seu método.[1] Mas esse método só começou a se tornar objeto de investigação matemática com a matematização da Lógica, que teve início no final do século XIX.

§2- A Abordagem Central do Trabalho

O estudo de noções segundo o método axiomático-dedutivo é um princípio que, na minha visão, exibe um aspecto do campo matemático, mas não o determina, pois não determina quais são as noções matemáticas. O presente trabalho não se ocupará da elaboração desse ponto e permanecerá em um corte histórico no século XX e em uma análise mais próxima de alguns aspectos da Matemática. Portanto, a História da Matemática não entrará nesse trabalho de modo essencial, mas apenas do ponto de vista de registros históricos em alguns momentos. O presente trabalho seguirá uma trilha em um aspecto que tem sido negligenciado nas pesquisas tanto da área de Fundamentos da Matemática quanto da área de Filosofia da Matemática. Trata-se da questão acerca da importância de alguns desenvolvimentos da Teoria de Modelos para a análise lógica e filosófica do conhecimento matemático. Para compreender essa questão é preciso, antes, compreender a importância do problema da unidade do conhecimento matemático para a Filosofia da Matemática.

O problema da unidade surge, no caso da Matemática, principalmente, da impossibilidade de se definir a Matemática como o estudo (segundo o método axiomático-dedutivo) de algo, já que não há esse algo dado. O objeto da matemática é constituído no interior da própria Matemática, e portanto é um fenômeno histórico. Como já foi colocado, a Matemática é um conhecimento formal de noções, mas nada foi dito sobre a questão de quais são as noções que devem interessar aos matemáticos e por que, em meio a um oceano de possibilidades - questão que se refere à constituição recíproca da Matemática e da História da Matemática. Como não há definição de Matemática, o problema da identidade se coloca de forma mais dramática para esse conhecimento: como é que se pode pensar, por exemplo, a Matemática do século XVII e a Matemática do século XX como uma e a mesma coisa, que se trata apenas de uma “diferença de idade”, mas não de duas coisas completamente distintas? Apesar de considerar essa questão central para a Filosofia da Matemática e que não se trata de uma questão histórica apenas, eu não tenho encontrado muitos trabalhos nessa direção, situação já aludida no primeiro parágrafo do §1. Esse tópico será retomado mais adiante em alguns comentários na Parte A, mas não será objeto central do trabalho.

A importância do problema da unidade reside, basicamente, na tese de que um aglomerado de conhecimento rapsódico não constitui um assunto, um discurso coerente, mas sim um amontoado informe. Apenas um todo que, ao longo do seu desenvolvimento, permanece coeso em cada momento pode permanecer idêntico a si mesmo através do seu processo de diferenciação interna. Em resumo, o problema da unidade é condição do problema da identidade: sem unidade sequer faz sentido considerar a identidade. No caso da unidade da Matemática, a situação não é exatamente alarmante. O trabalho em Fundamentos da Matemática na primeira metade do século XX mostrou que o patrimônio matemático pode ser recuperado e preservado em um sistema formal da Teoria de Conjuntos. Portanto ficou provada a possibilidade de apreender todo aquele material, aparentemente disperso, sob uma forma específica, o que tem como conseqüência uma primeira aproximação para as fronteiras da Matemática, pois, nessa sistematização, o oceano de noções matemáticas é delimitado: são consideradas apenas aquelas noções que são interpretáveis em ZFC. Mas isso também não basta, pois esses sistemas formais apresentam um coeficiente de imanência à coisa muito baixo, no sentido de que a sistematização da Matemática em um domínio universal como a Teoria de Conjuntos, por um lado, é insuficiente como descrição da realidade matemática (realidade semântica, conforme a tese do realismo semântico, segundo a qual as noções matemáticas possuem significado independente da sistematização em um domínio universal), e consequentemente trata-se ainda uma caracterização vaga da Matemática. Por outro lado, não há nenhuma garantia de que essa fronteira vai continuar onde está, e pode ocorrer tanto um movimento de expansão quanto de retração, ou, até mesmo, a fronteira pode se mover através de uma combinação de retração e expansão. É preciso conceber a Matemática como um todo coeso independente das especificidades das formas de sistematização do conhecimento matemático, pois só desse modo pode-se falar filosoficamente em Matemática.

Há, portanto, bastante espaço para reforçar a unidade da Matemática, tanto em termos de uma análise lógica mais fina que revele uma estrutura conceitual mais precisamente delimitada, quanto em termos de estabelecer nexos internos entre tópicos matemáticos, que em alguns casos parecem apenas relacionados de modo vago por analogias e, em outros, nem mesmo assim. Neste trabalho, o autor mobilizará as suas magras forças na direção de tentar fornecer uma pequena contribuição, segundo esses caminhos, para a unidade da Matemática, imanente à coisa mesma, e no seu significado fundacional, concentrando-se na seguinte questão: em que sentido há um padrão de raciocínio matemático, que poderia ser chamado “Abordagem de Galois-Klein”, capaz de subsumir práticas específicas em situações diversas da Matemática, como a Teoria de Galois clássica (para equações polinomiais) na Álgebra, e que seja relevante do ponto de vista fundacional?

Contudo, é muito importante observar que a unidade da Matemática é uma idéia reguladora e que buscar a unidade da Matemática é um princípio metodológico, ***não é*** uma busca que visa efetivamente completar uma série infinita em uma ***unidade incondicionada***. Não é possível alcançar algo como a unidade fechada, incondicionada, da Matemática, isso está fora dos limites do cognoscível. Quando o autor defende a importância de estabelecer a unidade da Matemática, trata-se de uma orientação metodológica do presente trabalho por um ideal da Razão. Nesse sentido, sempre que o texto mencionar algo como a busca pela unidade da Matemática, a afirmação deve ser compreendida, estritamente, em termos de metodologia, nunca como uma busca pelo incondicionado.

§3- Percurso e Objetivo

A finalidade central do texto é constituir um argumento a favor da relevância da Teoria de Modelos para a reflexão sobre o conhecimento matemático. Ao final, o texto deve mostrar como a Teoria de Modelos pode ajudar a esclarecer aspectos do Pensamento Matemático no século XX, ou qual é a relevância fundacional da Teoria de Modelos. Para isso será preciso discutir o que é a Matemática no século XX, o que é Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX, o que é relevância fundacional segundo Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX e como a Teoria de Modelos se relaciona com a Matemática do século XX. A questão mais ampla sobre a relevância fundacional da própria Lógica Matemática, como um todo, também será analisada, antes de fixar-se o foco na Teoria de Modelos.

O corpo principal do texto será organizado em uma divisão tripartite. À primeira parte caberá a exposição razoavelmente detalhada e completa da visão do autor sobre a temática geral das investigações acerca do conhecimento matemático, que o autor chama de Fundamentos do Pensamento Matemático no Século XX, apresentando muitos exemplos e alguns desenvolvimentos preliminares. Essa primeira parte constituirá o contexto geral da proposta, sob o qual o presente trabalho supostamente tem sentido, e o próprio vocabulário básico do trabalho será explicado nessa parte. Portanto, o papel que a Parte A deve desempenhar no texto é o de contextualização, dentro da concepção geral do trabalho, das investigações sobre o conhecimento matemático. Não seria possível realizar essa contextualização, que é bastante ampla, explicitando detalhes técnicos, pois, por um lado, a Parte A ficaria, dessa forma, desproporcionalmente extensa e, por outro lado, não ajudaria no objetivo do trabalho, já que os detalhes técnicos relevantes para o argumento serão expostos nas Partes B e C. Com isso, o texto pode apresentar uma falta de uniformidade, com a Parte A demandando mais conhecimento (ou imaginação delirante) do leitor, mas talvez seja esse o preço a pagar pela própria estrutura do argumento. Já a segunda parte será dedicada a retomar e aprofundar os pontos mais importantes da primeira, que apenas apresentou um desenvolvimento bastante preliminar desses pontos, e desenvolver uma análise, mais voltada a aspectos técnicos, da relação de satisfação e da teoria da verdade de Tarski, ou seja, da temática geral da Teoria de Modelos. A segunda parte é central para trabalho, tanto em termos da sua posição na organização do texto quanto em termos de importância para a proposta. A essa parte caberá fornecer um contexto mais preciso em que a proposta do autor de direcionar a atenção para a semântica deve adquirir um sentido claro e distinto. Por fim, a ultima parte corresponderá a um estudo de caso paradigmático, à análise da importância para Fundamentos de alguns resultados específicos da Teoria de Modelos, no contexto fornecido pelas duas partes anteriores.

O texto da primeira parte tem como finalidade estabelecer um primeiro contato com algumas teses que serão defendidas e com a argumentação que será progressivamente desenvolvida no percurso do texto. Desse modo, a argumentação contida na Parte A será, em termos lógicos e filosóficos, substancialmente menos densa quando comparada àquela contida nas Partes B e C. Com isso, parte do material que aparecerá já no início do texto será mais bem compreendido apenas ao término do percurso. Também, a Parte A conterá teses que não encontrarão pleno desenvolvimento neste texto, que não serão retomadas na seqüência do texto, mas que são consideradas devido ao caráter expositivo dessa parte. Contudo, a transição entre a primeira parte do texto e a segunda não será completamente abrupta, ao contrário, o texto será organizado de modo que as transições sejam suavizadas. Nesse sentido, pontos importantes da argumentação serão freqüentemente retomados com o objetivo ambivalente de aprofundamento da argumentação e de ligação do texto consigo mesmo, de coesão do texto.

A proposta do texto assumirá contornos mais claros apenas na Parte B que, portanto, será fundamental para o trabalho. A argumentação preliminar da Parte A, que terá um propósito expositivo e introdutório à temática do texto, será retomada, em seus pontos principais, e aprofundada desde a primeira seção da Parte B. Isso terá, também, o efeito de preparação para o estudo de caso que será realizado na Parte C. Esse estudo de caso servirá a um propósito duplo: primeiro, ilustrará pontos específicos e importantes da argumentação, de modo que terá um efeito esclarecedor sobre esses pontos, e, em segundo lugar e ao mesmo tempo, será um instrumento de avaliação da plausibilidade da proposta geral do texto.

É importante deixar claro, desde já, que o trabalho ***não*** irá proceder através de uma redução da Matemática a uma definição qualquer. Ao contrário, o procedimento será o de buscar iluminar certos aspectos da Matemática e extrair conseqüências da afirmação de que a Matemática possui esses aspectos para uma compreensão de segunda ordem da Matemática. Esse procedimento deverá ficar claro na seqüência do desenvolvimento do texto.[2]

§4-Notas

1-A primeira oração da introdução do primeiro livro, *Théorie des Ensembles*, dos *Éléments de Mathématique* de N. Bourbaki, considerado o *organon* contemporâneo, uma sistemática dos elementos da Matemática, expressa esse fato: *“Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit demonstration;”*.

2 -A caracterização da Matemática como o estudo, segundo o método axiomático-dedutivo, de noções matemáticas não é uma definição que diz qual é essência da Matemática, apenas aponta para a extensão (trivialmente) correta. Cabe aqui a distinção medieval entre definição real e nominal. Nesse sentido, essa caracterização pode ser vista como uma definição nominal.

PARTE A
FUNDAMENTOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO NO SÉCULO XX

§1- "Abstract Nonsense"

A primeira parte desse trabalho é destinada à formulação e elaboração do que eu entendo por Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX. Como ficará claro mais adiante, Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX não é o mesmo que Fundamentos da Matemática. Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX é estritamente mais abrangente que Fundamentos da Matemática.[1] Essa exposição dos Fundamentos (do Pensamento Matemático no século XX) é essencial para tornar claro o significado da questão, com a qual o presente trabalho pretende lidar, acerca da relevância fundacional de determinados procedimentos. Antes de qualquer coisa, convém reunir alguns dos pressupostos básicos desse trabalho, que já foram parcialmente discutidos nas partes introdutórias do texto, em algumas observações:

-Os Fundamentos não se reduzem a um museu de figuras históricas como Frege, Russell, Hilbert e Gödel. A retomada histórica dos grandes pensadores da área e os correspondentes registros históricos são indispensáveis, e são partes constituintes da boa prática e da educação nessa disciplina, mas não são um fim em si. Este trabalho não se dirige àqueles que pensam que Filosofia é apenas História da Filosofia e que tudo o que há para ser dito em Filosofia já foi dito por alguém.

-Pensadas como duas disciplinas da reflexão humana no século XX, Fundamentos e Matemática não estão em uma relação de exterioridade, uma em oposição à outra. Essas disciplinas se constituem mutuamente, interpenetram-se uma e outra em seus movimentos.

-Enquanto disciplina filosófica, Fundamentos assume um caráter mais normativo que descritivo, no que concerne às condições de significação das noções matemáticas. A atividade do matemático particular está sujeita a todo tipo de contingência, inclusive sujeita aos caprichos da particularidade idiossincrática. Fundamentos não pode dizer muito sobre a prática do matemático particular. Não se pode exigir de uma disciplina mais precisão do que a que ela pode fornecer.

-Fundamentos é o processo de determinação progressiva do que é o conhecimento matemático. A prática de Fundamentos contém a atividade de estabelecer condições racionais, ou pressupostos, de significação e de unidade efetiva da Matemática contemporânea. Uma das finalidades dos Fundamentos é mostrar que a Matemática não é um amontoado de resultados vagamente relacionados, é estabelecer a coesão da Matemática, sempre em estrita observância à ressalva feita na introdução (§2) sobre a unidade incondicionada.

O conteúdo dessa primeira parte pode ser entendido como uma espécie de demonstração da plausibilidade dos pressupostos reunidos nas observações acima. Contudo, o presente trabalho possui a finalidade de alcançar metas específicas, como a de estabelecer a relevância fundacional de conteúdos da Teoria de Modelos. O texto irá explicitar quais serão essas metas e como o trabalho pretende alcançá-las, tarefa que já começa a ser desenvolvida a partir da próxima seção, e que será aprofundada nas Partes B e C. Se a presente abordagem constitui alguma coisa no mundo, então ela é uma abordagem não-reducionista, no sentido de que a Matemática não será reduzida a algo estático como um sistema formal da Teoria de Conjuntos e não será proposta nenhuma outra definição real, intensional da Matemática como o estudo de algum tipo especial de objeto abstrato. Por exemplo, não adotaremos uma definição de Matemática como o estudo de conjuntos, estruturas matemáticas ou categorias. A Matemática é muito mais abrangente e não será reduzida a nenhuma definição estática, orientada à categoria do objeto como essas acima. Ao contrário, adotamos a caracterização da Matemática como o estudo, segundo o método axiomático dedutivo, das noções matemáticas. Essa caracterização é, em primeiro lugar, verdadeira, pois apenas aponta para a extensão correta; não é intensional. Em segundo lugar, não é orientada à categoria do objeto, pois não é uma definição em termos de tipos de objetos abstratos, e, conseqüentemente, as questões relevantes para uma reflexão sobre o conhecimento matemático não são questões ontológicas, mas sim questões semânticas, como a questão a respeito da predicação das noções matemáticas. Por último, essa é uma caracterização dinâmica, pois a compreensão e a própria formulação das noções matemáticas sofrem modificações ao longo da história, e, portanto, essa caracterização não congela a Matemática em uma definição estática que pode apenas, no melhor caso, contemplar o período presente. Para evitar mal entendidos, enfatizo que é extremamente importante poder expressar toda a Matemática em um domínio universal como a Teoria de Conjuntos, indispensável para as análises que faremos do conhecimento matemático. Contudo, definir a Matemática como o estudo de algum tipo de objeto abstrato, como conjuntos ou categorias, é um erro metodológico e histórico, do meu ponto de vista.

§2- Fundamentos

A descrição do trabalho de Fundamentos consiste em apontar determinadas atividades intelectuais, às quais são atribuídas conteúdo fundacional, atividades que são relevantes em termos de uma reflexão sobre o conhecimento matemático. Essas atividades serão denominadas atividades fundacionais. A primeira categoria de atividade fundacional claramente discernível, no contexto das reflexões sobre o conhecimento matemático, é a atividade de determinação e explicitação de pressupostos de partes da Matemática por meio de análise lógica. Os chamados Programas Logicista e de Hilbert de fundamentos podem ser vistos, sobretudo, como atividades dessa natureza, assim como o trabalho do grupo Bourbaki de formalização da Matemática na Teoria de Conjuntos. Como exemplos contemporâneos desse tipo de atividade tem-se a Matemática Reversa de Harvey Friedman e Stephen Simpson e o Projeto Mizar (ver http://www.mizar.org/) de formalização da Matemática na Teoria de Conjuntos, mas nesse projeto a formalização se dá em um ambiente computacional.

Sobre essa atividade de explicitação de pressupostos, observa-se, em primeiro lugar, que não se trata necessariamente de uma crítica do conhecimento matemático e, em segundo lugar, que os programas de fundamentos são, sobretudo, programas de pesquisa de natureza técnica. De fato, para realizar uma atividade de explicitação de pressupostos, o grupo que levará adiante essa atividade pode, de início, considerar a Matemática como um aglomerado de resultados individuais, e, então, separa-se uma parte que, espera-se, caia no escopo dos pressupostos e, a seguir, submete-se essa parte a uma análise lógica específica para cada tipo de pressupostos. Dessa forma o Programa de Hilbert, bem como as propostas pós-Gödel de resgate desse programa, são, sobretudo, a atividade de explicitação de pressupostos finitistas e nesse caso a base para realizar a análise lógica é formada por certos fragmentos da aritmética. Do mesmo modo, retomadas do Programa Logicista consistem em explicitação de pressupostos de natureza lógica, tomando por base para a análise lógica variantes do Cálculo de Predicados ou da Lógica de Segunda Ordem, conforme o caso. Analogamente para programas de explicitação de pressupostos de natureza construtiva, predicativa, etc.

A propositura de um programa desse tipo consiste basicamente em conclamar seus adeptos ao ingresso em uma campanha de força: cada um deve ficar responsável pela análise lógica de alguns teoremas da parte delimitada da Matemática. Delimitar uma parte da Matemática é um trabalho essencial para a sobrevivência de um programa desse tipo, já que hoje ninguém (?) espera desenvolver de modo pleno a Topologia Conjuntista ou a Teoria Abstrata da Medida apenas com pressupostos finitistas, por exemplo. Mas resultados negativos também fazem parte dessa atividade extremamente dura. Além disso, para que o programa tenha algum impacto, deve-se lidar com a explicitação de pressupostos de teoremas que a comunidade matemática valoriza, com a explicitação de pressupostos dos cânones dos currículos de pós-graduação mais respeitados, em resultados positivos ou negativos.

O segundo aspecto identificável dos Fundamentos é a atividade de compreensão e crítica do conhecimento matemático no todo do conhecimento humano e, dessa forma, lidar de modo coerente e com profundidade com as questões da aplicabilidade da Matemática nas Ciências naturais, da objetividade do conhecimento matemático e da possibilidade da comunicação da Matemática, o que envolve inevitavelmente uma estruturação conceitual da realidade. Não se trata de escolher arbitrariamente um sistema filosófico como o de Aristóteles ou Kant, e, sim, de não ignorar toda a tradição de investigação filosófica, todo o progresso na forma de distinções filosóficas penetrantes que os filósofos fizeram desde os antigos. Trata-se, no mínimo, de saber reconhecer estatura intelectual quando se está diante dela, e de saber que até mesmo divergir de um grande pensador significa um enorme ganho conceitual, já que apenas para conseguir discordar seriamente de um conjunto bem articulado e coerente de teses de um grande sistematizador é preciso uma atividade filosófica substancial de formulação das próprias posições.

Esse aspecto dos Fundamentos se identifica com a atividade chamada Filosofia da Matemática. É claro que os programas de fundamentos e a Filosofia da Matemática se relacionam: programas de fundamentos são motivados por posições filosóficas e as abordagens da Filosofia da Matemática são balizadas, analisadas criticamente e eventuais insuficiências suas são apontadas à luz de resultados ligados aos programas de fundamentos. A eventual efetivação ou a derrocada parcial de um programa bem formulado como o Programa de Hilbert tem, claramente, enorme impacto em questões interpretativas, mas, mesmo assim, tais questões ainda só podem ser elaboradas com distinções filosóficas cuidadosas e não sob um ponto de vista técnico, em um sentido estrito. O ponto de vista estritamente técnico pode, no máximo, servir como baliza para a abordagem de questões clássicas de natureza interpretativa, já que sequer diz respeito, de modo direto, a algumas dessas questões.

Portanto, o primeiro aspecto dos Fundamentos é diferente do segundo: aquele é, sobretudo, de natureza técnica e este, filosófico. Mas há ainda uma outra dimensão dos Fundamentos: é a atividade que consiste em desenvolvimento e análise crítica de resultados lógico-matemáticos sobre teorias de natureza verdadeiramente interdisciplinar dentro da Matemática que, quando estabelecidos, tais resultados sobre teorias desse tipo enriquecem e aprofundam a compreensão a respeito de áreas distintas da Matemática e desempenham um papel unificador de determinados conteúdos matemáticos. Um exemplo esclarecedor de uma teoria de natureza interdisciplinar é a teoria das álgebras de Boole, com a já clássica dualidade de Stone, estabelecida entre álgebras booleanas e espaços topológicos de Hausdorff, compactos e zero dimensionais, por meio da noção matematicamente bi-fronte de filtro. Não se trata de uma mera aplicação da Topologia a um problema de Álgebra, ou vice-versa. Esse resultado é ao mesmo tempo um resultado da Álgebra e da Topologia, um resultado unificador chave das áreas às quais ele diz respeito. Parece que é possível colocar uma teoria desse tipo em uma perspectiva lógica, mediante uma teoria universal de dualidades e espaços de Stone que apresente conteúdo fundacional legítimo. A Geometria Algébrica é um outro exemplo de teoria matemática de natureza interdisciplinar. Parece, pelas incursões que a Teoria de Modelos tem feito em Geometria Algébrica, que também é possível incorporar uma parte dessa teoria no enquadramento lógico universal da Teoria de Modelos, de modo que esse enquadramento possa desempenhar um papel unificador de noções matemáticas fundamentais como Geometria e Aritmética. Um desenvolvimento desse tipo, bem como a análise de alguns de seus desdobramentos, deve constituir uma atividade fundacional legítima.

Esse terceiro aspecto dos Fundamentos é diferente dos outros dois e, de fato, ele surge na necessidade de reforçar internamente a unidade do conhecimento matemático, uma insuficiência dos outros dois aspectos. Os programas de fundamentos e a Filosofia da Matemática são, em grande medida, exteriores à Matemática e, assim, no melhor caso, constituem apenas uma espécie de unidade formal, sem conteúdo matemático substancial, que é necessária, mas não basta, pois, isoladamente, seria uma unidade artificial.[2] Para suprimir essa artificialidade é preciso estabelecer, também, internamente, a coesão do tecido matemático, em oposição a uma unidade contingente, e é sobretudo nesse nível que ocorre a interpenetração dos Fundamentos e da Matemática. O terceiro aspecto dos Fundamentos é, em certa medida, a tentativa de ir além de uma unidade contingente, de estabelecer uma unidade em relação direta com o conteúdo. Ao mesmo tempo essa dimensão dos Fundamentos se relaciona positivamente com as outras duas, na medida em que aquela contém resultados da Lógica Matemática, que é o veículo dos programas de fundamentos e que não pode ser ignorada em uma atividade filosófica sobre o conhecimento matemático, racional por natureza. Essa discussão é muito importante para o presente trabalho e será retomada e consideravelmente aprofundada na Parte B. Por enquanto, na Parte A, a principal preocupação é a de expor a concepção geral e os elementos básicos constitutivos da argumentação geral, que pretende mostrar que certas atividades são relevantes do ponto de vista de uma reflexão sobre o conhecimento matemático.

§3- Lógica Matemática

A Lógica Matemática viu a luz do dia pelas mãos de Frege, no alvorecer do Programa Logicista. Seu desenvolvimento inicial se deu completamente no contexto dos programas de fundamentos. Desde então, a Lógica Matemática se desenvolveu enormemente em variadas direções, não se restringindo ao papel de veículo dos programas de fundamentos. Tampouco é a Lógica Matemática contemporânea uma subárea da Filosofia da Matemática e a maior parte dela não é de especial importância para uma análise filosófica geral. Assim, se algum conteúdo fundacional pode ser atribuído a certos resultados e teorias mais recentes da Lógica Matemática, então esse possível conteúdo deve vir do papel unificador desempenhado pelo resultado ou teoria em questão.

Lógica Matemática é aqui entendida em um sentido amplo como uma coleção de determinadas disciplinas, e não deve ser confundida com Lógica de Primeira Ordem ou de qualquer outro tipo. A coleção de disciplinas e resultados da Lógica Matemática constituem agora, acima de tudo, um método eficiente para atacar problemas com os quais os matemáticos se deparam com bastante freqüência. Problemas de universalização de determinadas partes de disciplinas matemáticas, muitas das vezes, só encontram uma solução precisa e certeira na Lógica, bem como problemas de legitimidade de métodos clássicos e princípios heurísticos no contexto atual. Há muitos exemplos de candidatos a solução para problemas desses dois tipos (problemas de universalização e problemas de legitimidade) na Lógica. Mas para estabelecer que, de fato, um desses exemplos não é apenas um candidato, é preciso tornar claro o que se quer dizer com soluções para problemas de universalização ou legitimidade e desenvolver uma análise específica. Isso é um dos objetivos do presente trabalho, mas não é conveniente sobrecarregar prematuramente a exposição com as análises mais densas, que serão postergadas para as Partes B e C.

O Princípio de Lefschetz da Geometria Algébrica, cuja formulação e demonstração, para linguagem de primeira ordem, são devidas a Alfred Tarski, é um exemplo de candidato a solução (lógica) de um problema de legitimidade, e a Teoria de Galois desenvolvida na Lógica por Bruno Poizat parece constituir um exemplo de solução de um problema de universalização. Na verdade, o presente trabalho irá mostrar que esse é o caso, na Parte C. Também a conservatividade parcial de resultados da Teoria Analítica dos Números com relação à Aritmética de Peano (cf.:[41]) e as generalizações da dualidade de Stone são exemplos de candidatos a soluções desses dois tipos de problemas. A retomada no interior da Lógica dos métodos infinitesimais, agora estabelecidos inequivocamente, conhecida como Análise não-Standard, é outro caso exemplar de candidato a solução de um problema de legitimidade de métodos clássicos no contexto atual. Não obstante, o alcance da Lógica Matemática não se restringe a esses dois tipos de problemas. Os problemas da Computação Teórica e os problemas de decidibilidade e consistência de teorias matemáticas são outros tipos de problemas da Matemática que encontram tratamento inteligente apenas no contexto da Lógica. As aplicações da Teoria de Modelos à Teoria dos Corpos e a indispensabilidade da Teoria das Categorias em importantes áreas da Matemática contemporânea como a Geometria Algébrica e a Topologia Algébrica são outros exemplos do alcance e eficiência desse método chamado Lógica Matemática.

A diversidade de situações matemáticas a que os métodos da Lógica se aplicam, por necessidade racional, é a manifestação do caráter universal da Lógica na Matemática, mostrando que a Lógica está presente na Matemática não apenas como um elemento de organização externo, mas está também de maneira imanente nos problemas mesmos da Matemática, e, possivelmente, reforçando a unidade da Matemática em uma relação direta ao conteúdo. Isso já poderia garantir conteúdo fundacional geral para a Lógica Matemática por meio do terceiro aspecto dos Fundamentos. Contudo, isso ainda não foi devidamente analisado, como também ainda não está claro se há algum estatuto mais específico de Fundamentos em termos de conseqüências epistemológicas de resultados e teorias lógicas particulares. Entre os casos citados acima, é de especial interesse uma análise mais cuidadosa da Teoria de Galois, a fim de mostrar que de fato há conteúdo fundacional, mas estabelecer este conteúdo requer uma elaboração ulterior.

§4- Formalismo

No §2, algo foi dito sobre programas de fundamentos que envolvem o processo de formalização da Matemática e sobre o Programa de Hilbert, fazendo-se referência indireta ao Formalismo. Formalismo é um termo que sofre com a poluição gerada por diversas formulações e muitos mal-entendidos. Por enquanto, é suficiente entender um aspecto da posição formalista geral, que pode ser expresso do seguinte modo: para fins de uma investigação matemática de segunda ordem (Metamatemática), é possível entender as demonstrações matemáticas como um processo mecânico de manipulação simbólica segundo regras em um sistema formal. Essa formulação não contém a afirmação, e também não segue dela, de que demonstrações matemáticas são apenas um processo mecânico e que a Matemática se reduz a um jogo formal de seguir regras de manipulação simbólica sem significado. O aspecto formulado acima e outros da posição formalista geral são expressos de certa forma no Programa de Hilbert e essa posição é diretamente associada ao matemático alemão David Hilbert e à sua escola. O Formalismo é analisado e exposto de maneira ampla por Detlefsen (cf.:[15]).

§5-Organização da Matemática (parte I)

A organização da Matemática na Teoria de Conjuntos é uma atividade de Fundamentos, sobretudo uma atividade de explicitação de pressupostos comuns à Matemática toda como, por exemplo, o Axioma da Escolha. Essa atividade é importante para Fundamentos, pois, entre outras coisas, permite concentrar a análise de certos problemas em um núcleo reduzido de axiomas. Por exemplo, o problema da consistência da Matemática fica dessa forma localizado na consistência de um sistema delimitado. A Teoria de Conjuntos é uma espécie de domínio universal onde a Matemática se expressa. Teoria de Conjuntos é tomada aqui em um sentido amplo e não deve ser confundida com um sistema formal da Teoria de Conjuntos. (Esse sentido de Teoria é usual em Matemática. Por exemplo, Teoria de Grupos trata de subgrupos, isomorfismos e outras coisas externas a qualquer sistema formal da Teoria de Grupos).

Esse grande feito dos Fundamentos, sem dúvida, fornece unidade para a Matemática e a própria Teoria de Conjuntos, cujo desenvolvimento fornece o contexto semântico de toda a Matemática de hoje, abrange uma análise lógica e filosófica penetrantes, e resultados extremamente profundos sobre sistemas formais da Teoria de Conjuntos foram obtidos. Desse modo, o conhecimento sobre o alcance e limitações dos sistemas formais da Teoria de Conjuntos é, de certa forma, satisfatório para uma prática relativamente segura da Matemática no seu interior e há uma suspeita de que será difícil fazer algo que represente melhora substancial nessa direção. Então, para que mais resultados e mais reflexão em Fundamentos? A área não se dá por encerrada?

Na verdade, nenhum aspecto dos Fundamentos chega ao fim da linha aqui. Em termos de explicitação de pressupostos, a organização da Matemática em um sistema formal da Teoria de Conjuntos é muito mais do que se precisa em áreas inteiras da Matemática, portanto é uma explicitação grosseira quando olhada sob o ponto de vista particular de determinadas áreas. Com relação à Filosofia da Matemática, as limitações dos sistemas formais da Teoria de Conjuntos deixam o flanco aberto para a atividade interpretativa do próprio sistema formal, além das atividades filosóficas gerais que sequer são arranhadas pela organização da Matemática. Por último, a unidade através da Teoria de Conjuntos é, sobretudo, uma unidade formal, no sentido de que é unidade proveniente da forma de sistematização do conhecimento matemático, portanto, em certa medida, exterior e contingente, porque há certo grau de arbitrariedade em qualquer organização da Matemática sobre uma base uniforme.

O primeiro estágio na organização canônica da Matemática é a Lógica (de Primeira Ordem) Finitária, que se refere àquela parte da Lógica Matemática desenvolvida com uma meta-teoria formalizável em certo sistema da Aritmética (como o sistema PRA da Aritmética Primitiva Recursiva de Skolem), seguindo a terminologia de Nelson (cf.:[Nelson, 32]).[3] A Lógica Finitária fornece o material lógico básico necessário para desenvolver e analisar um sistema formal finitário. O segundo estágio é o de desenvolvimento e análise de um sistema formal finitário como ZFC com as técnicas da Lógica Finitária. O terceiro estágio da organização canônica da Matemática é a definição de suas noções básicas dentro do sistema formal ZFC. Todos os estágios dessa organização encerram uma arbitrariedade, em maior ou menor grau.

No primeiro estágio há uma escolha da formulação da Lógica Finitária. Normalmente a Lógica é formulada com quantificadores, mas as formulações podem variar ligeiramente de acordo com a interpretação das variáveis livres. Há duas interpretações possíveis: a interpretação condicional das variáveis e a interpretação da generalidade. Na interpretação da generalidade vale a Regra de Generalização. Nessa interpretação as variáveis são entendidas como elementos sintáticos que podem representar qualquer indivíduo do domínio do discurso, mas nenhuma atribuição de valores é fixada em princípio. Portanto, a interpretação da generalidade distingue variáveis de constantes, já que constantes são sempre entendidas como elementos sintáticos que podem representar qualquer indivíduo do domínio do discurso, mas alguma atribuição de valores é fixada em princípio. A interpretação condicional colapsa a distinção entre variáveis livres e constantes. Nessa interpretação fórmulas com variáveis livres são entendidas como hipóteses sobre as suas variáveis livres. Consequentemente, a Regra de Generalização com relação a uma variável só pode ser aplicada quando não há hipóteses adicionais sobre essa variável. Por outro lado, o Teorema de Dedução passa a valer mais geralmente nessa interpretação. É possível formular a sintaxe de acordo com uma interpretação e a semântica com a outra. Isso implica em condições técnicas adicionais no Teorema da Completude, que relaciona a sintaxe e a semântica. Se a sintaxe, ou semântica, for formulada de acordo com a interpretação da generalidade, é possível simular aquilo que é feito na outra interpretação acrescentando constantes na linguagem. Do mesmo modo, se a sintaxe, ou semântica, for formulada segundo a interpretação condicional, é só quantificar universalmente as fórmulas para simular aquilo que é feito na outra interpretação.

Mas essas não são as únicas variantes possíveis, há varias outras. Bourbaki escolhe a formulação de Hilbert para a Lógica, com o operador ε, e não a formulação canônica com quantificadores. Pode-se argumentar que essa escolha é feita com base no fato de que esse operador, ao contrário dos quantificadores, faz referência à totalidade apenas de modo indireto, exatamente ao definir os quantificadores. Por outro lado essa escolha baniria da Matemática de Bourbaki (ou dos Fundamentos da Matemática de Bourbaki) o resultado de Cohen sobre a independência do Axioma da Escolha, ao permitir no Axioma Esquema da Compreensão certo uso liberal do operador ε de Hilbert, já que, desse modo, o Axioma da Escolha é conseqüência lógica dos outros axiomas. Aliás, isso não seria problema para Bourbaki, que praticamente desconsiderou arbitrariamente todo o desenvolvimento da Lógica Matemática posterior a 1928, data da publicação do livro **Grundzüge der theoretischen Logik** de David Hilbert e Wilhelm Ackermann. Além disso, Mathias (cf.:[Mathias, 30]) mostrou como certas escolhas de Bourbaki levaram a situação grotesca em que o termo para o número 1 naquele sistema formal não pode ser escrito com os recursos disponíveis no universo. Ainda, como apontou Corry (cf.:[Corry, 12]), Bourbaki rapidamente abandonou a linguagem formal, estabelecida nos capítulos de Teoria dos Conjuntos, nos volumes de Álgebra, Análise e Topologia, e o próprio grupo possuía dúvidas quanto à pertinência da publicação de um volume de Teoria de Conjuntos. Portanto, a própria formulação da Lógica envolve muitas escolhas e intenções que não são diretamente motivadas por necessidades internas da Matemática, e, dessa forma, encerra arbitrariedade.

No segundo estágio a arbitrariedade é ainda mais dramática porque, além de uma escolha de um sistema formal da Teoria de Conjuntos que é similar ao que ocorre no primeiro estágio, há também uma escolha que é a própria escolha da Teoria de Conjuntos para desempenhar o papel de domínio universal. Essa situação não aparece no primeiro estágio, já que não há, e é mesmo difícil imaginar, alguma outra coisa que possa desempenhar o papel da Lógica Finitária, e que não seja dependente dela. Mas, com relação ao segundo estágio, existe alternativa. É uma outra disciplina da Lógica Matemática conhecida como Teoria das Categorias, e argumentos em favor de uma ou outra alternativa já foram elaborados. Além disso, uma vez estabelecida a Teoria de Conjuntos como escolha canônica, a escolha do sistema formal é arbitrária. Isso se deve em grande parte porque esses sistemas formais são incompletos. Os axiomas de ZFC são verdadeiros com relação à hierarquia iterativa cumulativa (correspondem a determinações da análise desse conceito preliminar de hierarquia de conjuntos), mas, se consistentes, não expressam de modo completo um conceito construído correspondente, situação que é irremediável. Então, por que só esses axiomas e não mais?

O grau de arbitrariedade que o terceiro estágio encerra é devido ao fato de que há definições alternativas para objetos matemáticos e para as próprias noções da Lógica Matemática, em particular. Uma noção fundamental como a de Estrutura Matemática de Primeira Ordem admite várias definições conjuntistas, apenas submetidas a condições gerais como a de ser hereditariamente finita sobre o domínio, etc. Por outro lado, esse já é um problema menor a essa altura. É apenas o reflexo de certa exterioridade dessa atividade fundacional que é a organização canônica da Matemática, exterioridade vulgarmente expressada naquela zombaria sobre o ridículo teorema a respeito da "interseção de e e π". Esse teorema, que afirma que a interseção de e e π é igual a e, é completamente desprovido de interesse matemático, é o tipo de resultado que surge apenas na formalização da Matemática na Teoria de Conjuntos e não em um contexto matemático relevante, o que é, as vezes, usado para mostrar como a formalização introduz elementos externos que não tem nada a ver com a Matemática (ver, por exemplo, nos arquivos da lista de discussão FOM, em janeiro de 1998, a mensagem: *e intersect pi*: http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/1998-January/000956.html).

O lugar privilegiado que a Lógica Finitária ocupa na organização da Matemática não é por acaso. Não há candidato a altura para uma eventual substituição naquele papel. Não há nada conhecido que seja mais básico e ao mesmo tempo capaz de realizar a função da Lógica Finitária na organização. Sua coleção de resultados profundos é impressionante: Teoremas da Incompletude de Gödel, Teorema da Completude de Hilbert-Bernays, Teorema de Herbrand, Hauptsatz de Gentzen, Teorema da Consistência de Hilbert-Ackerman, Teorema de Skolem (Skolemização), Teorema de Extensões por Definição, Teorema de Post das Tautologias, Teorema da Interpretação, etc. É uma lista intimidadora. Ao mesmo tempo, a Lógica Finitária estabelece outras propriedades meta-teóricas da Lógica de Primeira Ordem como, por exemplo, que não há sobreposições problemáticas entre a parte lógica e a parte não lógica de um sistema formal como ZFC, o que ocorre com a Lógica de Segunda Ordem. Essa propriedade é essencial para a organização: é importante separar a parte lógica da parte não lógica da Matemática para que se possam realizar análises ligadas a problemas de absolutidade e vagueza.

Além disso, vale a pena mencionar ainda que há uma caracterização elegante da Lógica de Primeira Ordem obtida por Lindström. O (Primeiro) Teorema de Lindström da Teoria de Modelos Abstrata estabelece, em certos sistemas lógicos, uma relação de compensação entre expressividade e riqueza de métodos modelo-teóricos. Esse resultado caracteriza a Lógica de Primeira Ordem, sabidamente “cega” para a distinção infinito potencial/infinito atual e para os diferentes níveis de infinito devido à compacidade e ao Löwenheim-Skolem para baixo. A caracterização é obtida em termos de maximalidade de poder expressivo relativamente a certa categoria de sistemas lógicos, uma caracterização de natureza modelo-teórica. Não há dúvida de que o Teorema de Lindström é importante para a Filosofia da Matemática e obter qualquer resultado sobre uma possível caracterização da Lógica de Primeira Ordem no contexto da Teoria da Prova, ou seja, uma contraparte sintática do Lindström, seria um feito extraordinário da Lógica.[4]

Voltando à Lógica Finitária, seus conceitos e resultados são essenciais para que o desenvolvimento da Matemática no interior do sistema formal ZFC faça algum sentido. Assim, objetos como provas em ZFC não são apenas uma referência a mais um sistema formal. As afirmações da Lógica Finitária sobre esses conceitos são tomadas como significativas, a menos que se adote um niilismo matemático. O Teorema de Extensões por Definição, por exemplo, estabelece a conservatividade de certo procedimento de introdução de símbolos na linguagem, que é usado já nos primeiros passos dentro do sistema formal ZFC. Abrir mão do significado objetivo desse procedimento não é menos que abrir mão do significado da expressão “formalizar a Matemática em ZFC”: não faria sentido dizer que se está formalizando a Matemática em ZFC quando na verdade se está trabalhando em uma extensão desse sistema. Aqui aparece o elemento ideal da organização canônica da Matemática. A Matemática, mesmo enquanto coleção de resultados apenas, não pode ser toda ela formal, no sentido mais estrito de admitir um processo de formalização completo e auto-suficiente em ZFC. Há um âmbito matemático, constituído por certos resultados da Lógica, que desempenha o papel de garantir que o processo de formalização, de fato, formaliza em ZFC. As noções matemáticas, ainda não formalizadas em ZFC, com as quais esse âmbito opera, funcionam, nessa etapa pré-formalização em ZFC, como noções operatórias que serão, posteriormente, tematizadas dentro do próprio sistema formal. Portanto, a afirmação de que há um processo de formalização (potencialmente) completo dos resultados matemáticos em ZFC faz referência a um conteúdo matemático – parte da Lógica Finitária - que deve, então, ser tomado como significativo independentemente da formalização desse mesmo conteúdo.

Do processo conhecido como numeração de Gödel (aritmetização da metateoria ou tradução estrutural da Lógica na Aritmética) resulta que as demonstrações dos (meta)teoremas citados acima são de natureza aritmética. Alguns desses teoremas (Post, Incompletude, Extensões por Definição, Interpretação) admitem formalização em sistemas interpretáveis na Aritmética de Robinson. Outros (Herbrand, Hauptsatz, Skolem, Hilbert-Ackermann, Hilbert-Bernays) são formalizáveis em sistemas mais fortes. A Lógica Finitária é então, em certo sentido, um conhecimento aritmético (esse esclarecimento deve-se a Gödel, através da numeração que leva seu nome) e não há opção não-niilista de não aceitar como significativa parte desse conhecimento, independente de se atribuir ou não significado objetivo ao restante do conhecimento matemático. Se for possível falar em preenchimento de intenções, então o conhecimento aritmético tem o grau mais elevado de preenchimento de intenções matemáticas de toda a Matemática. A famosa frase de Kronecker de certa forma expressa a situação: Deus criou os números. Ao restante do conhecimento matemático pode-se, em alguns casos, atribuir significado externo a partir do mundo físico, mas, nesse caso, apenas na medida em que se pensa a Matemática e a Física Teórica unidas.

Considerando tudo isso, a Teoria de Conjuntos forneceu o contexto semântico e a uniformidade que a Matemática precisava para se desenvolver no século XX. Áreas como a Teoria Abstrata da Medida simplesmente não existiriam sem a Teoria de Conjuntos. A Lógica Matemática também se beneficiou do ambiente conjuntista e a Teoria de Modelos se desenvolveu completamente nesse meio. Portanto, a Teoria de Conjuntos não apenas fornece organização e uniformidade para a Matemática, mas, acima de tudo, possibilitou o desenvolvimento mesmo dessa área do conhecimento no século XX. Não há duvida da importância da Teoria de Conjuntos para os Fundamentos. Esses aspectos da organização da Matemática serão retomados na Parte B.

§6- Matemática e Lógica

A Lógica Finitária, sendo o veículo apropriado, mas não o único a ser considerado, para a organização da Matemática, ocupa uma posição de destaque nos Fundamentos; contudo, isso não exclui o restante da Lógica Matemática de conteúdo fundacional. Há muitos outros resultados sobre a Lógica de Primeira Ordem, além dos desenvolvimentos da Lógica Finitária sobre aspectos sintáticos da Lógica de Primeira Ordem, como o já citado Teorema de Lindström. Seguindo Hintikka (cf.:[Hintikka, 20]), a Lógica tem duas funções gerais. A primeira função da Lógica é a função dedutiva. Essa função é desempenhada a contento pela Lógica de Primeira Ordem, pois ela admite axiomatização completa. A segunda função da Lógica é a função descritiva, a função de expressar as noções matemáticas. Essa segunda função será objeto de análise no presente trabalho.

A organização canônica da Matemática mostra que as demonstrações matemáticas podem ser entendidas como aplicações de regras de inferência da Lógica de Primeira Ordem aos axiomas da Lógica de Primeira Ordem e axiomas não lógicos de ZFC. Isso porque toda a informação matemática pode ser codificada em axiomas de uma teoria recursivamente axiomatizada, e os teoremas matemáticos podem ser obtidos pela aplicação de regras de inferência lógicas. Pelo Teorema de Herbrand, o fato de que uma determinada fórmula (na forma prenexa) é ou não um teorema lógico não é influenciado por impurezas externas (variáveis escondidas?), mas depende apenas de propriedades intrinsecamente lógicas das subfórmulas da fórmula em questão. Não é necessário considerar artefatos alienígenas para obter uma caracterização, ou mesmo uma prova dos teoremas em uma Teoria de Primeira Ordem. O método da Lógica de Primeira Ordem é então puro, pelo Teorema de Herbrand (o Haupsatz de Gentzen segue na mesma direção). Portanto, não é nenhum disparate dizer que a demonstração matemática é de natureza lógica. Para fazer essa afirmação, é essencial a pureza do método e a conseqüente separação precisa da parte lógica da Matemática. De fato, se não fosse esse o caso, então que sentido teria falar em uma natureza lógica impura?

Conseqüentemente, a organização da Matemática contribui bastante para a questão filosófica da demonstração matemática, sobretudo devido às propriedades meta-teóricas da Lógica de Primeira Ordem. Contudo, a organização em si, que reduz todas as definições da Matemática a definições em ZFC, não contribui da mesma forma para a questão de classificar a complexidade lógica de noções matemáticas, sendo necessária, mas insuficiente. Isso será explicitado na seqüência, mas seria artificial mostrar essa insuficiência da organização sem antes explicar e justificar a importância da própria questão da análise lógica das noções matemáticas para os Fundamentos.

É através de noções matemáticas que o conhecimento matemático, sempre no âmbito da linguagem matemática, se refere aos supostos domínios possíveis de elementos matemáticos e aos supostos possíveis estados matemáticos de coisas nesses domínios. Nesse sentido são as noções matemáticas que dão objetividade à Matemática, que reúnem as condições para que a Matemática seja aplicável a objetos. Os domínios de elementos ou estados de coisas nesses domínios, referidos por uma noção, constituem a esfera ou extensão da noção. Mas a cognição matemática não é uma relação estática a alguma coisa através de um conceito, não é um abrigo indiferente a uma coisa abrigada e separada dela. Nesse sentido, expressar noções é condição necessária da possibilidade da cognição matemática.

Do mesmo modo que a função dedutiva da Lógica é ela mesma objeto de estudo sistemático no interior da própria Lógica Matemática, a função descritiva da Lógica também é internalizada e estudada. Essa matematização das funções da Lógica constitui duas disciplinas da Lógica Matemática: a Teoria da Demonstração no primeiro caso e a Teoria de Modelos no último. No presente trabalho, apenas a função descritiva da Lógica será analisada e utilizada, e apenas a Teoria de Modelos será considerada. É claro que isso não significa que somente vale a pena considerar a Teoria de Modelos, trata-se apenas de um esclarecimento metodológico do trabalho.

A Teoria de Modelos internaliza a função descritiva da Lógica por meio da definição da relação de satisfação em uma linguagem formal. Noções matemáticas, em um sentido amplo, são formas e referem-se a domínios possíveis de elementos, ou a possíveis estados matemáticos de coisas nesses domínios, encontram-se expressadas por teorias (conjuntos de fórmulas) de uma linguagem formal, ou por fórmulas individuais de uma teoria. Domínios são representados por estruturas matemáticas e estados matemáticos de coisas são representados por relações matemáticas em uma determinada estrutura. Os termos "conceito matemático" e "propriedade matemática" serão reservados para noções matemáticas expressadas, respectivamente, por teorias e fórmulas em Linguagem de Primeira Ordem, que é a linguagem formal da Teoria de Modelos.[5]

Um conceito matemático, ou uma propriedade, pode perfeitamente ser vazio, ter extensão vazia, se for contraditório. O que não pode ocorrer são conceitos e propriedades imprecisas, que não definem precisamente uma extensão, pois nesse caso não se constituiriam princípios de classificação. Os conceitos expressos por uma teoria e os domínios de elementos se relacionam pela relação de satisfação da linguagem formal correspondente, bem como as propriedades expressas por fórmulas de uma teoria e os estados de coisas. A extensão de um conceito expresso por uma teoria na linguagem formal é a classe de estruturas (para uma mesma linguagem) associadas à teoria correspondente através da relação de satisfação. Para a extensão de uma propriedade expressa por uma fórmula de uma teoria fixada há duas possibilidades: é possível considerar como extensão da propriedade a subclasse dos modelos da teoria que validam a propriedade. De outro modo, é possível considerar a extensão relativa a um determinado modelo da teoria (estrutura ligada à teoria pela relação de satisfação), como sendo a relação definida pela fórmula nesse modelo, a relação definível no modelo pela fórmula que expressa a propriedade. Essas extensões de uma propriedade expressa por uma fórmula da teoria, relativas a um determinado modelo, constituem a extensão da propriedade (a extensão é constituída pelas extensões relativas percorrendo os modelos). Dois conceitos são co-extensivos (ou recíprocos) quando as respectivas classes de modelos coincidem, e duas relações são co-extensivas quando as respectivas fórmulas definem a mesma relação no(s) modelo(s) considerado(s).

Surgem imediatamente diversas questões: Quais classes de estruturas (para uma mesma linguagem) são axiomatizáveis (extensões de algum conceito expressado por teoria)? Quais são finitamente axiomatizáveis? Para uma dada teoria, quais relações em um modelo qualquer são definíveis (extensões de propriedades expressadas por fórmulas)? Conceitos co-extensivos são logicamente equivalentes? Que tipo de relação há entre as estruturas pertencentes à extensão de um conceito expressado por uma teoria? Quando ocorre que o conceito é determinado pela sua extensão? Essas questões e outras serão tratadas em contexto e momento oportunos, nas partes B e C. Por enquanto convém apenas concluir a centralidade da função descritiva da Lógica e de seu estudo sistemático para a Filosofia da Matemática. Expressar noções matemáticas é condição necessária da possibilidade da cognição matemática, já que não há cognição sem noções e não há noção não expressa. Portanto é indispensável para uma boa Filosofia da Matemática o conhecimento das eventuais complexidades envolvidas na expressão das noções matemáticas em certa linguagem.

§7- Lógica de Primeira Ordem e Teoria de Modelos

A consideração de resultados matemáticos, como os resultados da Teoria de Modelos, para esclarecer aspectos do pensamento matemático, costuma ser imputada, por alguns, de irrelevância fundacional, com um argumento de circularidade. Por isso convém deixar claro que circularidade só aparece quando se está pensando em redução.

Não é circular usar a Matemática para analisar o conhecimento matemático. Para entender como é possível essa auto-análise (pelo menos de uma parte substancial da Matemática) é preciso olhar mais de perto certos aspectos da organização da Matemática na Teoria de Conjuntos.

Em primeiro lugar, essa tese da irrelevância na consideração de resultados da Teoria de Modelos deve ser colocada de forma mais específica, pois colocada de modo geral é trivialmente refutada. De fato, há aplicações importantes de técnicas da Teoria de Modelos na Teoria de Conjuntos, em particular em Construtibilidade, Forcing e Grandes Cardinais. Isso é possível, *grosso modo*, através da internalização da relação de satisfatibilidade combinada com argumentos de absolutidade (introduzidos por Gödel em seu já clássico trabalho sobre a consistência do Axioma da Escolha e da Hipótese do Contínuo). É claro que é preciso muito cuidado para fazer isso, em vista dos resultados limitativos de Gödel e Tarski. Na verdade trata-se de desenvolver análogos formais de estruturas, isomorfismos, do Teorema da Correção e de algumas técnicas modelo-teóricas como a construção de ultrapotências, Teorema de Łos e Löwenheim-Skolem.

Os resultados de Gödel e Cohen sobre o Axioma da Escolha e a Hipótese do Contínuo, e o resultado de Scott, obtidos com as técnicas mencionadas, são resultados sobre a demonstrabilidade em sistemas formais para a Teoria de Conjuntos, estabelecidos em uma metateoria finitária. Desnecessário explicar a importância desses resultados para Fundamentos. Mas aqui não há nenhuma circularidade, já que as provas são finitárias, e, portanto, o estatuto fundacional desses resultados não está sob suspeita. A questão da relevância fundacional, ou não, torna-se dramática apenas com relação aos resultados não finitários da Lógica Matemática.

Os exemplos expostos nos parágrafos acima mostram que é necessário ser mais preciso com relação ao finitário e ao seu estatuto epistemológico. Porém isso já foi amplamente discutido na literatura desde Hilbert, e não há nada a acrescentar aqui nesse aspecto. Pelas conveniências de se fixar uma referência, pode-se tomar como base a análise de Tait (cf.:[Tait, 40]). Com isso as provas da consistência da Aritmética de Peano (de Primeira Ordem) não são finitárias. Em particular a prova de Gödel, que é, em certo sentido, interpretativa, diferente da prova de Gentzen, que é estrutural, é uma prova não finitária (como também é a de Gentzen). Uma variante da prova de Gödel devida a

Shoenfield (cf.:[Shoenfield, 38]) apresenta certa interpretação da Aritmética de Peano diretamente em uma teoria de funcionais recursivos de tipo finito. A linguagem da teoria não tem quantificadores, mas tem uma quantidade enumerável de tipos (sortes). A definição dos termos apresenta esquemas para a introdução de constantes (funcionais) a partir das constantes 0 e S (intencionalmente “zero” e “sucessor”) e da descrição dos tipos. Além de esquemas puramente combinatórios, há um esquema de introdução de funcionais por recursão. As fórmulas atômicas são equações apenas entre objetos de tipo 0, que intencionalmente se referem a números. A interpretação é então definida associando para cada fórmula da Aritmética de Peano uma fórmula da teoria descrita acima, e um teorema é demonstrado relacionando a provabilidade de uma fórmula da Aritmética de Peano com a respectiva fórmula associada na teoria dos funcionais. A demonstração desse teorema é finitária e dele segue um resultado de consistência relativa. A noção de funcional recursivo de tipo finito é suficientemente determinada a ponto de tornar bastante plausível a afirmação da consistência dessa teoria simples que a expressa. Esse elemento semântico (a consistência da teoria dos funcionais recursivos de tipo finito) fornece suporte para consistência da Aritmética de Peano.

As provas construtivas de consistência, além do seu conteúdo fundacional ligado à questão da consistência dos sistemas formais da Matemática, enriquecem a Lógica Matemática enquanto método para atacar problemas matemáticos. De fato, como corolário das provas de consistência (e da prova do Teorema de Herbrand) tem-se a *No Counterexample Interpretation* de Kreisel. Esse resultado estabelece que para bloquear contra-exemplos para uma fórmula fechada na forma normal prenexa, que é teorema da Aritmética de Peano, é suficiente considerar os funcionais recursivos. Esse resultado foi usado por Kreisel e outros (cf.:[Kohlenbach, 26]) para extrair informação construtiva de certas provas matemáticas não construtivas, na forma de cotas recursivas (informação numérica). Alguns resultados mostram que certos usos de argumentos de maximalidade, por exemplo certos usos do Lema de Zorn, não são tão “ofensivos” à construtividade quanto podem parecer, e representam certo refinamento na explicitação de pressupostos construtivos da Matemática.

As provas de consistência, e os resultados relacionados mencionados acima, mostram que não é possível descartar de imediato o não finitário, mas esse exemplo apresenta uma particularidade importante, a construtividade. No caso da Teoria de Modelos, as técnicas mais básicas, em Primeira Ordem, compacidade e Löwenheim-Skolem, são não construtivas. Descartando os análogos formais de partes da Teoria de Modelos, que são usados em resultados importantes da Teoria de Conjuntos, o que resta é um material que é não-construtivo, não-finitário e bastante técnico na aparência. Retomando a questão colocada no início da presente seção, como esse material não-construtivo da Teoria de Modelos pode ajudar a esclarecer aspectos do Pensamento matemático?

O primeiro resultado técnico importante para essa questão é a absolutidade da relação de satisfação. Na organização canônica da Matemática na Teoria de Conjuntos, o primeiro passo para formalizar a Teoria de Modelos é definir a relação de satisfação com uma fórmula da linguagem de ZFC. Isso pode ser feito e, no caso da Lógica de Primeira Ordem, se consegue isso com uma fórmula de complexidade lógica Δ_1 em ZF, medida pela Hierarquia de Levy de fórmulas em ZF (análoga à Hierarquia Aritmética) e, por isso, absoluta. Isso não pode ser feito para Linguagens de Ordem Superior de uma maneira geral, o que mostra uma sobreposição problemática, pelo menos no que se refere à Teoria de Modelos de Ordem Superior, dessas Linguagens com a Teoria de Conjuntos. Nesse caso, a relação de satisfação entre uma fórmula da linguagem, uma atribuição de valores para as variáveis e uma estrutura para a linguagem pode mudar conforme a $\in$-interpretação transitiva de ZF. Isso não ocorre com a Linguagem de Primeira Ordem, e esse é um ponto muito importante porque, dessa forma, os resultados e definições da Teoria de Modelos de Primeira Ordem não são necessariamente sensíveis a esse tipo de relativização. Isso possibilita as aplicações já mencionadas de técnicas da Teoria de Modelos da Lógica de Primeira Ordem na Teoria de Conjuntos e é também condição necessária da possibilidade da referida análise, ligada à Teoria de Modelos, das complexidades envolvidas na expressão, em uma determinada linguagem, das noções matemáticas.[6]

Alguns resultados sobre a expressão de noções matemáticas relativamente à Lógica de Primeira Ordem já se tornaram folclore da Teoria de Modelos. Um desses resultados se refere à cardinalidade. A Lógica de Primeira Ordem não é suficiente para distinguir os cardinais infinitos. A "cegueira" da Lógica de Primeira Ordem para os cardinais infinitos é tão dramática que mesmo acrescentando um elemento de distinção externo como a κ-categoricidade, no contexto das Teorias (de Primeira Ordem) completas e enumeráveis, ela ainda consegue apenas distinguir enumerável de não-enumerável. Pelo Teorema de Morley não há uma teoria enumerável que seja categórica em apenas um cardinal não enumerável. Em outras palavras, acrescentar os "óculos" externos da k-categoricidade para a Lógica de Primeira Ordem (no contexto das teorias enumeráveis completas) não é suficiente para que ela passe a distinguir os infinitos não-enumeráveis. De fato, o máximo de distinção que a Lógica de Primeira Ordem pode fazer (no contexto do teorema) é apontar uma teoria que seja categórica somente no nível enumerável e uma teoria categórica em todos os níveis não-enumeráveis, mas não no nível enumerável. Ser categórica em um nível não enumerável é o mesmo que ser categórica em todos os níveis não enumeráveis. A hipótese de completude é equivalente, pelo Teste de Łos-Vaught, à hipótese de que a teoria tem somente modelos infinitos. A restrição do teorema às Teorias (de Primeira Ordem) enumeráveis completas não mitiga então sua repercussão filosófica, já que abrange (todos os) exemplos relevantes, e é especialmente interessante expressar conceitos com teorias completas. Além disso, esse resultado admite extensões, devidas a Shelah, para linguagens não enumeráveis.

O trabalho de Morley é também um exemplo, devido a sua centralidade na Teoria de Modelos contemporânea, da interpenetração entre Matemática e Fundamentos. É interessante fazer agora algumas observações sobre isso, mesmo que, de modo bastante vago e impreciso, sirva apenas para delimitar um possível campo de exploração fundacional. A tese de Fundamentos segundo a qual as noções matemáticas "naturais" apresentam a forma da categoricidade em potência, colocada de maneira programática por Zilber na décima quarta *Gödel Lecture*, em 2003, é investigada com métodos desenvolvidos a partir desse trabalho. A teoria desenvolvida por Morley é paralela ao trabalho de Cantor-Bendixon (que tem como corolário direto a Hipótese do Continuo para os subconjuntos fechados da reta) de investigação da construção do conjunto derivado iterada nos ordinais. Essa construção fornece para os pontos de um espaço topológico, nos termos da Teoria de Modelos, o posto de Cantor-Bendixon de um ponto. O fato, conhecido como Teorema de Cantor-Bendixon, de que todo subconjunto fechado não enumerável de um espaço topológico com base enumerável é a reunião disjunta de um conjunto perfeito com um conjunto enumerável de pontos isolados acaba por provar a Hipótese do Continuo para todos os conjuntos boreleanos. Um resultado análogo à Hipótese do Contínuo é obtido na Teoria de Modelos com relação ao número de tipos em uma teoria enumerável e completa, no contexto do estudo dos espaços de tipos e do posto de Cantor-Bendixon associado aos tipos. Essa não é apenas uma aplicação da Topologia na Lógica, mas mostra que a Lógica de certa forma pode aprender com a Topologia métodos para encontrar invariantes adequados para estabelecer uma classificação como, por exemplo, a teoria da dimensão topológica e a classificação topológica dos espaços euclidianos. A Lógica também aprende com a Álgebra essa garimpagem de invariantes interessantes como, por exemplo, grau de transcendência. A Lógica Matemática que é, sobretudo, um método para atacar os problemas da Matemática que estão entre os mais interessantes, encontra sua fonte de vida no seio da própria Matemática e ao mesmo tempo participa de maneira crucial na organização e unificação da Matemática, na constituição da Matemática em toda sua integridade. E não poderia ser de outra forma.

§8- A Questão Ontológica

Um dos temas mais desconcertantes, quando se trata de Filosofia da Matemática, é a questão ontológica. Sobre objetos matemáticos, objetos no sentido de referentes de noções matemáticas, sujeitos de predicações matematicamente significativas, é comum dizer que só importam as relações estruturais, que esses objetos são marcas de posição em uma estrutura. Nesse caso, falta dizer então o que são estruturas. Aqui surgem várias vertentes do estruturalismo, de acordo com a resposta que se dá para essa questão. Uma corrente representada por Stewart Shapiro (cf.:[Hellman, 18]) afirma que estruturas são universais *sui generis*. Tudo isso é muito interessante, mas acontece que há (entre outros) um problema aqui com a identidade dos objetos, conforme foi apontado por Burgess (cf.:[Burgess, 5]). Se apenas as relações estruturais importam e se as estruturas são anteriores aos objetos, então a identidade dos objetos deve ser dada pelo princípio de Leibniz da identidade dos indiscerníveis estruturais. Como distinguir uma marca de posição de outra se elas correspondem (em uma estrutura que admite mais de um automorfismo) por um automorfismo não trivial? Essa argumentação parece ser suficientemente poderosa para sustentar que a possibilidade de predicação da identidade não é uma determinação estrutural e que é, antes, pressuposta pelas relações estruturais, como também são as propriedades lógicas. Uma outra questão surge do fato de que as estruturas matemáticas podem ser indivíduos de outras estruturas mais amplas. Então se as estruturas são anteriores aos objetos, então as categorias de estruturas são anteriores às estruturas, as categorias de categorias são anteriores às categorias de estruturas, etc. Onde parar?

A questão ontológica é historicamente estendida. As noções matemáticas apresentam um processo histórico de gênese e desenvolvimento. As formulações são refinadas na medida em que a experiência matemática acumulada aumenta. E a experiência matemática só pode ser entendida historicamente. Por exemplo, a formulação atual da noção matemática mais conhecida de número, através da Aritmética de Peano, é bastante recente e deve-se a Grassmann, Dedekind e Peano. Os supostos objetos matemáticos são dependentes das noções, que constituem as condições formais de apreensão e constituição desses objetos. A extensão de uma noção sem a noção é, antes, um amontoado, um aglomerado de coisas dispersas na experiência matemática acumulada, não um objeto: um aglomerado de coisas constitui um objeto somente enquanto essas coisas estão contidas sob uma noção. Uma noção matemática fornece unidade e objetividade para um material disperso na experiência matemática acumulada, que fica assim contido sob a noção. O que dizer sobre supostas entidades referidas por noções que são geradas e refinadas historicamente? Aqui objetos matemáticos serão apenas isso, sujeitos de predicações matematicamente significativas (significativas conforme a tese do realismo semântico delineado na Apresentação), termos de relações matemáticas; não são objetos espaciais e nem mentais e não será adotada aqui uma orientação à categoria do objeto. São as noções matemáticas a fonte de objetividade e o objeto do conhecimento matemático e essas são anteriores aos termos de relações matemáticas, cuja possibilidade mesma pressupõe, como condição, a participação na noção.[7]

A atividade matemática é então o estudo das noções matemáticas (como noções matemáticas não são dadas, essa atividade inclui a sua gênese) e a Matemática - a formulação e o desenvolvimento, do ponto de vista formal, dessas noções e das relações entre noções – é, nesse sentido, um conhecimento formal. Não é incomum encontrar em um texto matemático, ao se referir aos possíveis objetos, algo como “não importa a natureza dos objetos”, o que reflete esse aspecto formal. Fundamentos deve se concentrar nas noções matemáticas, em particular, nas complexidades envolvidas nas formas de expressão dessas noções. Para os Fundamentos é preciso ter também uma compreensão mais profunda, do ponto de vista da Filosofia da Matemática, do desenvolvimento histórico de noções matemáticas por necessidade racional, nas relações recíprocas que essas noções mantêm entre si e nas relações do conhecimento matemático com outras áreas do conhecimento. Trata-se de uma espécie de história lógica dessas noções, mostrando a herança comum e os nexos históricos. A história lógica deve mostrar o desenvolvimento por necessidade racional, do ponto de vista das noções, não importando, portanto, a consideração de contingências como figuras históricas, lugares e datas. Não se trata de cronologia histórica, mas sim do que se poderia chamar a História do Pensamento Matemático.

O presente trabalho apresenta uma abrangência histórica limitada, referindo-se, sobretudo, à atividade matemática no século XX, e não estabelece relações entre noções matemáticas em tempos históricos diferentes. Somente nexos entre certas teorias matemáticas do século XX, através de desenvolvimentos específicos da Lógica Matemática, constituem objeto de estudo. Esse cuidado com a demarcação do conteúdo histórico, não obstante parecer fundamental para mim, dificilmente está presente nos trabalhos daquilo que normalmente se chama Fundamentos da Matemática ou até mesmo na Filosofia da Matemática. A falta de consciência histórica freqüentemente é patente em tais trabalhos que, em alguns casos mais extremos, dão definições de “Matemática” de modo a transformar tudo aquilo que veio antes do século XX (e que de alguma forma diz respeito à Matemática) em pré-história da “Matemática” assim definida. É o que acontece no trabalho de alguns formalistas como Haskell Curry que definem a “Matemática” como o estudo de sistemas formais:

“We are now in position to turn to problems of the definition of mathematics. The definitions I advocate is briefly this: ***Mathematics is the science of formal systems****.”*
(cf.:[Curry, 14], p. 56)

Na definição mencionada acima, sistemas formais são explicitamente tomados em um sentido contemporâneo, com regras de formação de termos e fórmulas e regras de inferência, e a recursividade da geração de teoremas é mencionada. Nas palavras do próprio Curry:

“Having seen the detailed definition of a formal system (from the present viewpoint) together with some illustrations, we shall now inquire in what sense the primitive frame of a formal system is a definition, and what is the fundamental nature of that system and its constituents.”
(cf.:[Curry, 14], p. 28)

Mais abaixo, na mesma página Curry escreve:

“For in III we have a recursive method of generating all the elementary theorems, and this gives a recursive definition of all the true instances of all the elementary predicates.”
(cf.:[Curry, 14], p. 28)

Isso é um exemplo do que chamamos uma proposta de definição intensional e reducionista da Matemática. Não é apenas a linguagem usada por Curry que é moderna, mas também a própria compreensão do formal, de um modo que a Matemática como praticada antes do século XX não se encaixa. Qualquer outra definição de “Matemática” que, por exemplo, se comprometa com um sistema particular da Teoria de Conjuntos sofre com problemas análogos, excluindo de seu âmbito, entre outros, os trabalhos do Zermelo sobre o desenvolvimento de um sistema formal da Teoria de Conjuntos da

Matemática. Já foi visto (§5) que, mesmo enquanto coleção de resultados apenas, a Matemática não é toda ela formalizável de modo completo e auto-suficiente no sistema formal ZFC, por exemplo. Além disso, sistemas formais para a Matemática, por serem incompletáveis (pelos Teoremas de Gödel), são veículos com um alcance, em certa medida, limitado e podem ser sempre substituídos por outros mais satisfatórios, mesmo que não se encontre inconsistência. O objeto de estudo da Matemática são as noções matemáticas e não os sistemas formais. Os matemáticos, em geral, sequer sabem o que é um sistema formal, seu raciocínio é mais bem descrito, em termos semânticos, segundo uma espécie de teoria de formas fregeana-platônica, e é razoável que seja assim. Não é realista esperar que o matemático *crie* Matemática profunda pensando em termos da sintaxe lógica. A Lógica, de um modo geral, não é um convite à imaginação; é, antes, uma *disciplina* da Razão. Os sistemas formais funcionam como veículo para esse raciocínio semântico dos matemáticos - a sintaxe funciona como veículo para o significado - e servem para auxiliar os trabalhos de análise fundacional, não para colocar a Matemática em uma camisa de força: não inventamos ZFC para depois ficarmos presos às peculiaridades sintáticas desse sistema formal. Os matemáticos são livres para criar segundo critérios racionais e, para isso, é até melhor que não pensem em termos de uma sintaxe rígida.

A caracterização da atividade matemática como o estudo das noções matemáticas e suas relações, relativamente à forma lógica, implica uma concepção histórica da Matemática. De fato, como o objeto de estudo da Matemática, as noções matemáticas, não é dado, como ocorre nas ciências naturais, então a História da Matemática constitui a Matemática e, inversamente, a Matemática claramente constitui a sua própria História. Isso também implica, na minha visão, uma compreensão da Matemática que envolve um aspecto de semântica formal: a estruturação conceitual de uma realidade possível (logicamente) de objetos matemáticos, no sentido de referentes de noções matemáticas, no âmbito da linguagem matemática. A linguagem matemática não é um mero meio entre as noções e uma realidade matemática. As noções matemáticas são princípios que organizam e constituem os campos de atividade matemática, tudo isso imerso na linguagem matemática. No caso de Fundamentos, a questão epistemológica fundamental “o que significa compreender uma noção matemática?”, de certa forma, generaliza a questão ontológica, já que envolve a compreensão da predicação sobre objetos matemáticos, e assume, neste trabalho, o posto de questão fundamental que deve ser investigada no contexto de Fundamentos. Portanto, será adotada por mim a concepção de Fundamentos, e também da própria Matemática, como envolvendo um aspecto de semântica formal. Essa concepção é, em certo sentido, mais abrangente que a concepção da Matemática como envolvendo uma ontologia formal, e, aqui, a questão fundamental é a respeito do significado da compreensão das noções matemáticas, não a respeito de entidades. Convém observar que não há aqui uma definição real nem de Fundamentos, nem de Matemática, pois a semântica formal é uma temática muito geral e abrangente e que, por um lado, é apenas um aspecto e não é exaustiva e, por outro lado, não se esgota, de maneira alguma, com esses assuntos. Trata-se apenas de um ponto de vista geral, um enquadramento, em que os objetos matemáticos são considerados apenas na relação semântica, como sujeitos de predicações significativas. As especificidades e outros aspectos dessas disciplinas não são determinados por uma formulação desse tipo, que funciona mesmo apenas como uma orientação geral para o desenvolvimento do trabalho. Essa posição está alinhada com o giro lingüístico da Filosofia Analítica e a mudança de foco, da questão ontológica para a questão do significado, ou da questão dos objetos para a questão da objetividade dos enunciados, é uma proposta atribuída a Kreisel (cf.:[Dummett, 17]).

Fica claro como a Lógica se encaixa, nessa perspectiva, como instrumento essencial para desenvolver os Fundamentos. As formulações aparentemente simples da Lógica condensam uma quantidade extraordinária de análises lingüísticas. Mas é interessante retomar a discussão do status especial da Lógica Clássica de Primeira Ordem nesse enquadramento semântico. O fato curioso é que em Filosofia da Matemática outros tipos de Lógica, como Lógica Modal, são utilizadas para analisar questões específicas, enquanto que em Fundamentos da Matemática, se há algum consenso então é que o sistema lógico em termos do qual domínios universais para expressar toda a Matemática devem ser formulados é o sistema da Lógica Clássica de Primeira Ordem, sem excluir outros sistemas dos programas de fundamentos como o programa de Frege e programas construtivistas. Na verdade não há nenhum mistério nisso. O ponto é que a Lógica Clássica de Primeira Ordem, como também a Lógica Intuicionista de Primeira Ordem, abstrai de conteúdos particulares e é, em certo sentido, pura. Essa propriedade de pureza é essencial quando se trata de explicitar pressupostos, como já foi discutido anteriormente (§5 e §6 principalmente). Já as outras Lógicas incorporam conteúdos particulares adicionais ***na linguagem objeto***, que não dizem respeito diretamente à Matemática, como, por exemplo, as categorias semânticas de necessidade e possibilidade, no caso da Lógica Modal, de dependência/independência, no caso da Lógica de Dependência (cf.:[Hintikka, 20]) e de consistência/inconsistência, no caso da Lógica de Inconsistência Formal (cf.:[Podiacki, 33]). Por isso, essas Lógicas podem ser muito úteis em análises de questões particulares, mas não é de se esperar que consigam desempenhar o papel de veículo para a análise geral e para a explicitação de pressupostos da Matemática tão bem quanto a Lógica Clássica de Primeira Ordem.

Um caso a parte é a Lógica de Ordem Superior. Essa incorpora um conteúdo particular na linguagem objeto que é relevante para a Matemática, a saber, a categoria de conjunto. A Lógica de Ordem Superior introduz uma estratificação do universo de discurso *na sintaxe*, o que deve ser comparado à Teoria de Conjuntos em Primeira Ordem, que não introduz essa estratificação no plano sintático. A Lógica de Ordem Superior e a Teoria de Conjuntos apresentam problemas análogos com relação à vagueza, e a comparação da expressabilidade desses sistemas é esclarecedora. O principal problema da Lógica de Ordem Superior como um possível veículo principal para Fundamentos e para expressar a Matemática é a sua incompletude, o que, de certo modo, impossibilita que a Lógica de Ordem Superior forneça maiores esclarecimentos sobre a questão da demonstração e da conseqüência lógica. O conjunto de fórmulas válidas na semântica plena da Lógica de Ordem Superior não é recursivamente enumerável. Portanto, as próprias noções de validade e de natureza lógica fornecidas por esse sistema apresentam um grau elevado de vagueza quando comparadas às correspondentes noções fornecidas pela Lógica de Primeira Ordem. Contudo, mesmo que a Lógica de Ordem Superior não seja a opção mais adequada para veículo principal de Fundamentos, seu lugar em Fundamentos está garantido, tanto por seu valor intrínseco para uma análise da questão da expressabilidade e no estudo de sistemas de Segunda Ordem para a Aritmética ou Teoria de Conjuntos, quanto por seu valor em uma análise comparativa com a Teoria de Conjuntos em Primeira Ordem.

Não está afirmado aqui que, em alguma Lógica, se abstrai de todo e qualquer conteúdo, mas apenas de conteúdos particulares. Desse modo essa Lógica seria vazia, o que é absurdo. Mesmo a Lógica Clássica Proposicional tem um conteúdo, a saber, parte da estrutura do nosso aparato conceitual. Já no caso da Lógica Clássica de Primeira Ordem, pode-se até mesmo defender que essa Lógica incorpora, através dos quantificadores, as categorias de universalidade e particularidade, portanto conteúdo particular. Mas isso não afeta em nada a relação com Fundamentos, pois esse conteúdo está diretamente ligado a Matemática e, por isso, a alternativa disponível sem conteúdo particular (Lógica Clássica Proposicional), não é suficiente para a Matemática, e a Lógica de Primeira Ordem incorpora exatamente o que é essencial para a Matemática, como igualdade, relações, funções e quantificadores. Falta aqui um resultado técnico que poderia ser invocado, talvez a possível contraparte sintática do Teorema de Lindström, aludida na §5. Isso poderia apontar na direção de uma caracterização da Lógica Clássica de Primeira Ordem como única alternativa que dá conta do papel que essa Lógica desempenha nos programas de fundamentos. Na próxima seção serão elaborados, em caráter meramente informativo e por uma questão de completude, alguns comentários sobre o Intuicionismo.

§9- Intuicionismo

Essa concepção da atividade matemática, explicitada na §8, não exclui as práticas intuicionistas e, mais geralmente, construtivistas, pelo menos as vertentes mais moderadas, pelo contrário. A Matemática Intuicionista também pode ser compreendida como uma estruturação conceitual de uma realidade possível de entidades matemáticas, no âmbito da linguagem matemática, mas, nesse caso, uma estruturação com ênfase em aspectos construtivos. Aqui as possíveis respostas para a questão semântica fundamental devem considerar o aspecto da construtividade como componente fundamental do significado. Os conceitos matemáticos devem ser construídos, apresentados na intuição pura kantiana. Mesmo relativamente à organização (§5), onde se foi mais explícito com relação à Lógica, destacando-se o papel da Lógica Clássica Finitária de Primeira Ordem, há espaço para práticas intuicionistas. Na verdade é assim mesmo que ocorre: a maior parte dos trabalhos sobre o intuicionismo está imersa em uma meta-teoria clássica (por exemplo, a semântica de Kripke para a Lógica Intuicionista). Além disso, a Lógica Finitária é aritmetizável em um fragmento da Aritmética de Peano, que tem uma tradução construtiva na Aritmética Intuicionista de Heyting, o que de certa forma expressa uma redução dedutiva daquela teoria nesta (Gödel 1932-3, Gentzen 1936, cf.:[Kleene, 25], p. 495). Em particular, são eqüiconsistentes, e o elemento propriamente finitário (PRA) é independente da distinção clássico/intuicionista. Contudo, é claro que a posição original de Brouwer não era nada generosa com relação à Lógica, e concebia essa disciplina como estritamente subordinada à Matemática, não o contrário (cf.:[Brouwer, 3], p. 23).

Em termos filosóficos o Intuicionismo é uma retomada em um sentido mais psicológico da Filosofia da Matemática de Kant que afirmava ser a Matemática “conhecimento racional pela construção de conceitos” (**aus der Construction der Begriffe**; cf.:[Kant, 24], pp. 48-9), e que, aparentemente, manteve uma correspondência estrita entre a Matemática e a Estética Transcendental. Desse modo, Kant teve que associar o método matemático à construção na intuição pura. Contudo, a construção, em Kant, assumia um sentido provavelmente ligado às construções com régua e compasso; já no caso da doutrina de Brouwer, muitos elementos psicológicos aparentemente desempenham um papel. Apesar da linguagem psico-fisiológica que Kant utiliza, de faculdades da mente, linguagem herdada de Baumgarten através do manual de metafísica, não há nesse autor uma teoria da experiência interna, privada, ou coisa parecida, já que Kant não possui uma teoria da origem do conhecimento matemático; a consciência transcendental é apenas uma função lógica, e o foco do interesse na Crítica da Razão Pura, relativamente à Matemática, são apenas as condições formais da possibilidade do conhecimento matemático, ou seja, é a questão de como é possível esse conhecimento dado que é possível. Nesse sentido, a mente em Kant assume um sentido público, como o nosso aparato conceitual. Desse modo, talvez, Brouwer tenha mais semelhança com a fenomenologia de Husserl, que retoma elementos do cartesianismo na relação com o kantismo, mistura filosofia primeira com filosofia transcendental, e que busca, até certo ponto, fundamentar a experiência externa na interna, na vivência da consciência, como Descartes. O ponto é que Husserl, ao fazer filosofia primeira, do ponto de partida auto-evidente, faz filosofia da consciência - o ponto de partida auto-evidente - através da estrutura da intencionalidade, o que parece aproximá-lo de Brouwer. A tese da relação de aproximação entre Husserl e Brouwer, e também Weyl, já foi elaborada na literatura (cf.:[Tieszen, 42]) e aqui não serão tratadas apropriadamente questões da ordem da exegese filológica. O ponto importante é que Fundamentos, sem dúvida, ainda está no horizonte da oposição entre a concepção intuicionista da Matemática e a concepção associada à escola de Hilbert, oposição que ficou marcada com o intenso debate que teve lugar na década de 1920 (cf.:[Mancosu, 29]).

§10- A Hipótese do Contínuo

A presente seção tem um caráter expositivo, e não é decisiva para a continuidade do trabalho. Portanto, não serão expostos detalhes técnicos do assunto em uma discussão mais aprofundada, o que, certamente, exigiria uma tese inteira. Essa exposição é necessária porque a Parte A desempenha o papel de contextualizar as investigações sobre o conhecimento matemático, dentro da concepção do trabalho, e qualquer proposta de contextualização desse tipo deve lidar com a Hipótese do Continuo. Na verdade, se há uma questão técnica específica que é central para Fundamentos e que não pode ficar sem menção, então essa questão é o Problema do Contínuo de Cantor. Trata-se basicamente do problema de classificar o infinito do conjunto dos números reais. A tentativa original de Cantor para essa classificação ficou conhecida como Hipótese do Contínuo. Em uma de suas várias formulações, a Hipótese do Contínuo (CH, de “continuum hypothesis”, para usar a sigla que é conhecida internacionalmente) afirma que não há um subconjunto S do conjunto dos números reais com a propriedade de que exista uma função injetora do conjunto ω, dos números naturais, em S, mas não exista uma função bijetora de ω em S, e nem uma função bijetora de S no conjunto dos números reais. A Hipótese do Contínuo tira o sono dos lógicos há mais de um século. Grande parte dos mais importantes desenvolvimentos da Teoria de Conjuntos está diretamente ligada ao problema de determinar se a CH vale ou não. Os resultados de Gödel e Cohen, que estabelecem a independência de CH com relação ao sistema ZFC, já se tornaram folclore da Lógica Matemática. Até agora, todas as propostas de novos axiomas para ZFC, considerando princípios remotamente plausíveis e que não impõem restrições completamente artificiais ao conceito de conjunto como o Axioma da Determinação, Axiomas de Grandes Cardinais e Axiomas de Forcing, até agora falharam miseravelmente no tocante a apresentar uma solução satisfatória para o problema.

A Teoria de Conjuntos é uma teoria matemática que apresenta uma dimensão a mais em relação a outras teorias. Trata-se do aspecto de domínio universal que interpreta todas as teorias matemáticas e exemplifica as estruturas matemáticas - pois essa Teoria incorpora os pressupostos comuns a toda a Matemática - ou seja, o aspecto de fundamento (em minúsculo, no sentido de programa de explicitação de pressupostos). Quando a Teoria de Conjuntos é posta como fundamento da Matemática surge imediatamente o problema de interpretar, nesse contexto, uma teoria dos números reais. Os números reais são agora definidos como um conjunto infinito e, como um ponto central da Teoria de Conjuntos é justamente a estratificação e classificação do infinito, aparece como decisiva para essa teoria do infinito, enquanto proposta de fundamento para a Matemática, a questão de saber quantos números reais há. Essa questão está diretamente relacionada com a formulação acima da Hipótese do Contínuo. Os sistemas formais da Teoria de Conjuntos se mostraram impotentes diante de tal desafio e meios aceitáveis de fortalecê-los, a ponto de alterar esse quadro, permanecem desconhecidos. A situação é extremamente incômoda, pois a própria plausibilidade da Teoria de Conjuntos como fundamentação está em jogo: enquanto uma proposta de domínio universal para expressar a Matemática, a Teoria de Conjuntos, como uma teoria de classificação do infinito, precisaria estabelecer quantos números reais há, caso contrário, não faz muito sentido essa determinação dos reais enquanto conjunto.

Parece que a Teoria de Conjuntos, enquanto teoria matemática do infinito, e a Teoria de Conjuntos, enquanto fundamento, não se misturam de forma homogênea; que há, internamente à Teoria de Conjuntos, um sério problema de comunicação entre a classificação dos infinitos e a Matemática. Esse estranhamento entre essas partes talvez explique a situação, aparentemente paradoxal, de que praticamente toda a Matemática no século XX tenha se desenvolvido no interior da Teoria de Conjuntos e que, ao mesmo tempo, não seja difícil encontrar um matemático competente que mal sabe o que é um cardinal ou um ordinal. Na mesma linha, também não é raro encontrar um programa de doutorado em Matemática cujo grau de exigência em relação à teoria de ordinais e cardinais é igual a zero. Isso, sem dúvida, reforça a tese da exterioridade da Teoria de Conjuntos em relação à Matemática.

Considerando que a Hipótese do Contínuo é um enunciado que afirma a inexistência de certos conjuntos, é de se esperar que uma solução positiva para esse problema só pode ser alcançada por meio de uma restrição da noção de conjunto. Como restringir a noção de conjunto artificialmente não parece ser uma opção, a menos que ZFC seja demonstrada inconsistente, resta continuar a busca por um princípio que estabeleça a negação da Hipótese do Contínuo, ou determinar a vagueza intrínseca do problema. Atualmente, a abordagem mais promissora para estabelecer a negação de CH parece ser constituída pelas pesquisas recentes de Woodin (cf.:[Woodin, 46]) que tentam apontar caminhos razoáveis na direção da negação da Hipótese do Contínuo e da classificação do cardinal do contínuo como $\aleph_2$. Por outro lado, através de uma argumentação mais geral, mas não menos convincente, Feferman pretende defender a vagueza inerente da questão (conforme a exposição disponível no endereço seguinte: http://math.stanford.edu/~feferman/papers/Conceptual_Structuralism.pdf). Essa vagueza inerente significa que, não só a Hipótese do Contínuo é vaga, como não há meio de precisá-la de modo que não destrua a noção inicial de conjunto. Dizer "os subconjuntos de um conjunto" é tão ambíguo, segundo essa tese, quanto dizer "os conjuntos" simplesmente e a determinação precisa da cardinalidade do conjunto das partes equivale a determinar precisamente o que é conjunto e, para isso, é preciso destruir a noção de conjunto. A plausibilidade desses argumentos em favor da tese da vagueza inerente está ancorada nos desenvolvimentos técnicos da Teoria de Conjuntos, mas não é nada definitivo. A concepção geral do presente estudo é consistente com a vagueza do Problema do Contínuo, pois, segundo a nossa concepção, um princípio matemático sobre conjuntos pode ser um axioma da Matemática se, e somente se, esse princípio está impregnado na prática da Matemática, não pode ser uma imposição externa baseada em concepções de alguma escola de Filosofia da Matemática, e os fatos que estão impregnados na prática da Matemática contemporânea são insuficientes para decidir CH.

Em resumo, o estatuto lógico-matemático da Hipótese do Contínuo é a independência em relação a ZFC, situação que é extremamente insatisfatória. O Axioma da Construtibilidade e o Axioma da Determinação implicam em uma resposta afirmativa para a Hipótese, mas o primeiro é considerado uma restrição completamente artificial ao conceito de conjunto e o último implica também a negação do Axioma da Escolha, que é necessário em todas as partes da Matemática. Além disso, esse resultado parece ir à direção de aumentar o problema de comunicação interno na Teoria de Conjuntos, já que o Axioma da Escolha é uma ponte fundamental entre os *Alephs* e os conjuntos que aparecem na Matemática como o próprio contínuo (conjunto das seqüências formadas por 0 e 1). Portanto não é muito razoável simplesmente acrescentar um desses axiomas a ZF. Contudo, tanto a Construtibilidade quanto a Determinação constituem uma componente importante para qualquer análise atual da questão. A situação da Hipótese do Contínuo ainda está completamente aberta, apesar do fato de que, pelos trabalhos de Woodin, uma direção aparece agora como mais razoável para abordar o problema. Em qualquer caso, não parece estar próximo o fim da angústia dos lógicos.

Com essa exposição do problema do contínuo, está completa a primeira etapa do trabalho, a saber, a tarefa de expor de modo amplo e preliminar, mas não superficial, a concepção geral de Fundamentos adotada. Além da exigência prática da realização dessa tarefa para que o trabalho seja bem sucedido na sua proposta, há também uma outra utilidade na exposição razoavelmente detalhada de Fundamentos e das suas relações com a Matemática: de um ponto de vista sociológico, é importante deixar claro qual é o papel de Fundamentos nesta proposta. O ponto importante é que as relações entre matemáticos e lógicos não são nada homogêneas, e a desconfiança por parte dos matemáticos com relação a um trabalho desse tipo pode ser agravada por uma incompreensão do papel de Fundamentos, dentro desta proposta. A discussão acerca das relações entre Matemática e Fundamentos será retomada na Parte B, onde esperamos que fontes potenciais de mal-entendido sejam, definitivamente, dissipadas.

§11- Enunciados de Teoremas Citados

Esta seção apresenta um caráter meramente utilitário. Para que o texto seja razoavelmente auto contido, alguns teoremas de Lógica Matemática serão enunciados. Não serão fornecidas definições, mas um pequeno comentário após o enunciado de cada teorema será feito. A referência geral de Lógica Matemática é o livro de Shoenfield, Mathematical Logic. Os livros de Drake, Set Theory - an Introduction to Large Cardinals, e Chang & Keisler, Model Theory são as referências básicas de Teoria de Conjuntos e Teoria de Modelos, respectivamente.

1- Primeiro Teorema de Lindström ([Chang & Keisler, 8], p. 132): A Lógica de Primeira Ordem é, a menos de equivalência, a única lógica abstrata que é enumeravelmente compacta e possui número de Löwenheim ω.

Comentário: Uma lógica abstrata é um par, conjunto de sentenças e relação de satisfação $\models$, tal que valem algumas propriedades. Além da Lógica de Primeira Ordem, a Lógica de Segunda Ordem, as Lógicas Infinitárias e as Lógicas com quantificadores generalizados, são todas exemplos de lógica abstrata. Conseqüência desse resultado é que não é possível uma lógica abstrata, no sentido específico do Teorema, com maior poder expressivo que a Lógica de Primeira Ordem e que mantenha as principais técnicas modelo-teóricas da Lógica de Primeira Ordem. Mas isso não é suficiente para explicar o status privilegiado que a Lógica de Primeira Ordem tem como veículo mais importante de Fundamentos, já que as técnicas modelo-teóricas não são consideradas como constituindo uma propriedade crucial de um eventual candidato a esse posto.

2- Teorema de Morley ([Chang & Keisler, 8], p. 494): Suponha que T é uma teoria completa em uma linguagem enumerável. Se T é categórica em alguma cardinalidade não-enumerável, então T é categórica em toda cardinalidade não-enumerável.

Comentário: Uma teoria é categórica em algum cardinal se todos os modelos da teoria naquele cardinal são isomorfos. Por causa dos Teoremas de Löwenheim-Skolem, o caso que todos os modelos de uma teoria sejam isomorfos só pode ocorrer em teorias que admitem apenas modelos finitos, por exemplo, a teoria dos conjuntos com dois elementos. A teoria dos corpos algebricamente fechados de característica 0 é categórica em todos os níveis não-enumeráveis, mas não no nível enumerável. A teoria das ordens lineares densas sem pontos extremos é categórica no nível enumerável, mas não é em nenhum nível não enumerável. Uma teoria pode ser categórica em todas as potências, como é o caso da teoria sem axiomas ou símbolos não-lógicos. Também pode ocorrer que uma teoria não seja categórica em nenhuma potência, por exemplo, a teoria que tem um único símbolo não-lógico, um símbolo de predicado unário, e nenhum axioma não-lógico. No caso de teorias enumeráveis, só há essas possibilidades, pelo Teorema de Morley.

3- Teorema de Herbrand ([Shoenfield, 38], p. 54): Suponha que T é uma teoria sem axiomas não lógicos, e que φ é uma sentença na forma prenexa em T. Então φ é um teorema de T se, e somente se, existe uma quase-tautologia que é uma disjunção de instâncias da matriz de φ_H.

Comentário: Uma fórmula é uma quase-tautologia se é conseqüência tautológica de instâncias dos axiomas de identidade e igualdade. φ_H é uma fórmula associada a φ através de certas operações sintáticas. Uma conseqüência interessante do Teorema de Herbrand é: se em uma teoria qualquer de primeira ordem T há uma prova de uma fórmula qualquer φ, então há uma prova em que não ocorrem símbolos não-lógicos que não ocorrem em φ ou nos axiomas não-lógicos de T. Não teria sentido afirmar que as demonstrações matemáticas são de natureza lógica se, ao acrescentar apenas símbolos não-lógicos a uma teoria, o poder dedutivo da teoria, com relação à linguagem original, aumentasse. De fato, é essencial, para a inteligibilidade de tal afirmação, que a natureza lógica seja algo bem determinado, que não seja influenciada por "variáveis escondidas".

4- Teorema de Scott ([Drake, 16], p. 184): Se existe algum cardinal mensurável então $V \neq L$.

Comentário: Nas definições usuais de cardinais mensuráveis, em termos de filtro, ideal ou medida, não ocorre explicitamente uma condição de tamanho, exceto a exclusão da possibilidade de ω. No entanto, esses cardinais são fortemente inacessíveis e Hanf e Tarski provaram que são, em certo sentido, pontos fixos da hierarquia dos cardinais inacessíveis. O Teorema afirma que se existe um cardinal mensurável então existe um conjunto não construtível. É razoável imaginar que esse conjunto não construtível deve também ser bem grande, já que o que se adicionou foi algo dessa natureza. Contudo, é conseqüência de um resultado de Rowbottom publicado em 1964 que se existe um cardinal mensurável então existem subconjuntos de ω não-construtíveis. Esse resultado poderia dar uma esperança para a refutação da Hipótese do Contínuo usando o axioma da mensurabilidade, no entanto isso não é possível e foi provado por Levy e Solovay em uma publicação de 1967: Levy, A., Solovay, R., *Measurable Cardinals and the Continuum Hypothesis*, Israel Journal of Mathematics, 5, 1967, pp. 234-248.

§12-Notas

1- Desse ponto em diante será adotada a seguinte convenção: qualquer referência a “Fundamentos” e a “relevância fundacional” deve ser compreendida como uma referência aos Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX. Portanto, no texto, “Fundamentos” e “fundacional” se referem a Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX e “Fundamentos da Matemática” se refere aos programas de fundamentos (assim com letra inicial minúscula), ou programas de explicitação de pressupostos. Nesse sentido, Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX é uma temática mais abrangente que Fundamentos na Matemática, corresponde a uma reflexão mais ampla sobre o Pensamento Matemático no século XX.

2- É preciso fazer uma distinção sobre o sentido de “formal”. Em primeiro lugar, “formal” pode ser usado para qualificar algo em referência à oposição forma/matéria. É assim que usamos quando dizemos que a Matemática é formal, por exemplo, já que é um conhecimento sem parte empírica, totalmente *a priori*, portanto um conhecimento da forma, não da matéria. Por outro lado, o segundo sentido de “formal” refere-se à oposição forma/conteúdo. É nesse sentido que a unidade da Matemática proveniente do modo de sistematizar os conteúdos matemáticos (com um sistema de Teoria de Conjuntos, por exemplo) e não dos conteúdos eles mesmos é formal. A Matemática não é formal nesse sentido já que essa disciplina, obviamente, possui conteúdo.

3- PRA é o fragmento de tipo zero da teoria de funcionais recursivos tipados que Gödel utilizou em sua prova de consistência da Aritmética de Peano. Essas teorias (PRA e a teoria dos funcionais recursivos de tipo finito) são abordadas em mais de uma seção do texto. Sobre PRA, essa teoria expressa, na minha visão, a noção de preservação da unidade, conforme a elaboração na §4 da Parte B.

4- Uma dificuldade para a obtenção de uma contraparte sintática do Teorema de Lindström é que não há uma versão sintática correspondente ao Teorema de Löwenheim-Skolem disponível. O candidato canônico para esse papel seria o Teorema de Lindembaum que é equivalente ao fato de qua a Lógica de Primeira Ordem possui numero de Löwenheim ω, mas extrapola a sintaxe da Lógica de Primeira Ordem.

5- Conceitos e propriedades devem ser entendidos como princípios de classificação, no sentido que classificam domínios e relações conjuntistas segundo o critério de pertinência na extensão. A importância da Linguagem de Primeira Ordem reside, nesse caso, no fato que a relação de satisfação para essa lingugem é absoluta. Essa absolutidade corresponde a um grau elevado de independência da extensão de noções expressáveis nesse tipo de linguagem, em relação aos problemas de vagueza na Teoria de Conjuntos. É isso que sustenta a afirmação que noções expressáveis em Linguagem de Primeira Ordem constituem princípios de classificação, pois, com isso, a extensão de um conceito ou propriedade fica determinada de modo razoavelmente preciso. Esse ponto é importante e será retomado na Parte B. Quase sempre as palavras "conceito" e "propriedade" são utilizadas no texto nesse sentido técnico, mas pode ocorrer algum uso em um sentido mais amplo, que seja permutável com a palavra "noção". Isso não significa uso inconseqüente da terminologia, o contexto sempre deve ser suficiente para distinguir os usos.

6- Convém lembrar que Teorema de Tarski da indefinibilidade da verdade impõe a necessidade de uma análise mais explícita e cuidadosa das complexidades envolvidas na internalização da relação de satisfação em ZF e esta será realizada em momento oportuno.

7- A palavra "objeto" é usada em dois sentidos nesse parágrafo: primeiro como sujeitos de predicações significativas e depois no sentido de objeto do conhecimento. Essa distinção, as vezes, não está explícita, mas o contexto deve ser suficiente para uma compreensão adequada. Com relação ao primeiro sentido de objeto, a formulação de uma posição em Filosofia da Matemática, relativamente à questão ontológica, em termos modais não é incomum nas escolas. Há por exemplo o estruturalismo modal de Hellman (cf.:[Hellman, 18]) e o nominalismo modal de Chihara (cf.:[Chihara, 11]). Essas posições se comprometem com uma modalidade primitiva e são normalmente especificadas com um sistema modal como lógica subjacente.

PARTE B
A RELAÇÃO DE SATISFAÇÃO

§1-Retomada

Estas primeiras seções da segunda parte constituem um bom momento para se fazer uma pausa para resumir o que já foi percorrido, para defender as principais teses do texto de forma mais aguda e para apontar o caminho a ser seguido a partir das próximas seções. Algumas teses, já expostas anteriormente no texto, serão retomadas nos parágrafos seguintes. Isso se faz necessário, pois este é um texto filosófico, e na Filosofia os argumentos raramente são localizados em algumas linhas, diferentemente da Matemática, em que os textos são estruturados em provas que estão contidas entre marcos de início e final, que independem do que está adiante no texto e que podem ser compreendidas sem referência ao seu papel no todo. Na verdade, um livro ou uma obra inteira de Filosofia pode constituir um argumento unitário e o sentido de uma parte pode vir da plausibilidade do programa como um todo. Esse caráter "contínuo" da argumentação filosófica, em oposição ao caráter "discreto" da argumentação matemática, está bem refletido nos grandes sistemas filosóficos, onde é fundamental ter uma apreensão unitária do sistema, mesmo que seja sempre provisória, para compreender cada parte. Cada parte é compreendida quase exclusivamente na sua relação com o todo. Portanto, em um texto filosófico, a questão da perspectiva do todo é muito mais dramática que em um texto matemático, e perder essa perspectiva pode significar perder tudo.

A continuidade da argumentação, que já foi iniciada, passa aqui por uma retomada dos pontos principais. A primeira tese, e talvez a mais importante, que é defendida neste texto, é referente à importância de se explorar o aspecto semântico da Matemática e dos Fundamentos. A Matemática constitui uma parte da semântica das ciências (incluindo a própria Matemática), portanto de uma possível teoria geral das significações. Fundamentos (conforme tematização na Parte A) constitui a semântica da Matemática. Isso quer dizer que a Matemática fornece parte de uma resposta à questão epistemológica acerca do significado da compreensão de noções das ciências e Fundamentos deve fornecer uma resposta à questão do significado da compreensão de noções da Matemática, é uma reflexão sobre a compreensão da Matemática. É claro que qualquer resposta a essas questões nunca está acabada e é sempre provisória. Portanto, essa tese não afirma que Fundamentos e Matemática estão acabados. É claro também que Fundamentos e Matemática se intersectam. Isso é um fato, facilmente reconhecível por quem tem algum contato com a Lógica Matemática. Mas é um fato extraordinário: como é possível uma investigação que tem como objetivo a determinação do conhecimento matemático intersectar a própria Matemática? Essa é uma questão muito importante para este trabalho e será analisada em maior detalhe a partir de agora. Antes disso é preciso explicar melhor essa tese segundo a qual a Matemática e os Fundamentos possuem um aspecto semântico, que será referida como tese semântica.

§2- Tese Semântica

A Matemática parece não ter nenhuma relevância, como semântica, para uma ciência como a História, e, portanto, não tem nada a ver com a Filosofia da História. Mas isso não torna falsa a tese semântica. De fato, conforme está formulada, a afirmação "A Matemática constitui uma parte da semântica das ciências (incluindo a própria Matemática), portanto de uma possível teoria geral das significações", é muito indeterminada, pois diz exatamente que a Matemática constitui uma ***parte*** da semântica das ciências, sem determinar qual parte é essa. É claro que isso só pode ser determinado em investigações específicas sobre os fundamentos das ciências, já que diz respeito à forma de apreensão do conteúdo delas. Contudo, já na introdução, o aspecto semântico da Matemática foi apresentado como uma teoria da forma lógica da linguagem das ciências com as quais ela mantém relações relevantes, mas sem uma argumentação que sustentasse a plausibilidade dessa tese adequadamente. Essa caracterização do aspecto semântico da Matemática já diz algo a respeito da parte da semântica das ciências que cabe à Matemática: é a parte formal, no elemento *a priori*. Para que essa caracterização não seja vazia, é preciso que existam ciências, além da própria Matemática, em que esta, de fato, desempenhe um papel decisivo na respectiva apreensão do conteúdo. E isso é um fato: a Física Teórica, por exemplo, é uma ciência desse tipo. Portanto, essa afirmação está em acordo com a tese folclórica dos físicos: “a Matemática é uma linguagem”.

Contra essa perspectiva, uma objeção que pode ser levantada é que boa parte da Matemática não parece ter relação com a Física Teórica. Mas, segundo a tese semântica, a Matemática não é uma linguagem exclusiva para a Física Teórica, mas inclui, sim, o desenvolvimento de noções que funcionam como formas, ou condições, segundo as quais objetos de ciências teóricas devem se conformar para que constituam objetos do conhecimento, um conhecimento formal presente e pressuposto nas formulações de outras ciências teóricas e da própria Matemática, que constitui, assim, parte do plano da Razão para a organização do material da experiência: o aspecto semântico da Matemática está no registro do plano da Razão e da condição de significação do discurso científico. Essas afirmações estão baseadas na tese de que a Razão, antes, impõe ao material da experiência suas próprias formas de cognição, que a Razão é ativa no processo de conhecimento, e não que a Razão simplesmente se conforma ao material da experiência. Obviamente, essa tese não implica nenhum idealismo empírico: não é o caso que, segundo essa tese, a atividade da Razão sai criando coisas do nada; a Razão, segundo essa tese, apenas submete o material da experiência ao seu próprio plano. A realidade empírica continua sendo o que é, não importa se a Razão é passiva, apenas se conformando ao material da experiência, ou ativa, submetendo o material da experiência às suas próprias condições de cognição; a distinção é de natureza epistemológica e não ontológica. Isso, de certo modo, é um resumo da “Revolução Copernicana” de Kant.

O que Kant não pôde notar é que o plano da Razão, ele mesmo, não estava (e não está) pronto e acabado nem mesmo em relação à Lógica, muito menos em relação à Matemática, e que esse plano poderia sofrer variações, e sofreu. Além disso, Kant ficou preso em um construtivismo muito estrito ao associar, mais ou menos rigidamente, a Matemática à Estética Transcendental, e, como conseqüência, o método matemático de formulação de noções (a definição matemática) às construções na intuição pura. A Matemática tem liberdade para formular noções, desde que sejam consistentes. Em geral as noções matemáticas são sempre interpretáveis em ZFC, mas isso não é uma exigência prévia. A Lógica e a Matemática incluem parte do processo de estruturação conceitual da realidade, o método de ambas é o método axiomático-dedutivo e não é possível compreender, atualmente, essas duas disciplinas como desvinculadas, uma marca de algumas visões construtivistas da Matemática. Na minha visão, parece claro que qualquer tentativa de atualização da Crítica da Razão Pura deve, necessariamente, passar por uma reavaliação das concepções de Matemática e Lógica presentes nessa obra, levando-se em conta que a Matemática não pode ficar restrita à Estética Transcendental, já que a intuição kantiana é muito restritiva e a Matemática, mesmo sendo distinta da Lógica, possui uma dimensão lógica que deve ser caracterizada na Analítica do Entendimento.[1]

Segundo o que foi colocado até aqui, a própria natureza da Matemática está nas relações que essa disciplina mantém com outras disciplinas e com ela mesma. E mesmo que, considerando isso, uma boa parte da Matemática não apresente relação direta com outras ciências, nem com a própria Matemática, ainda constitui uma reserva de formas expressas em uma linguagem abstrata, mas que pode ser interpretada e pode ser útil em uma eventual relação com alguma ciência. Além disso, se as disciplinas matemáticas, de fato, apresentam uma unidade interna, então todas essas disciplinas, direta ou indiretamente, estão em uma relação com as ciências. Contudo, a concepção de Matemática apresentada, de fato, vê como degenerados trabalhos de Matemática que não dialogam com a Matemática como um todo ou com as ciências teóricas. Isso também está de acordo com o fato empírico de que alguns desenvolvimentos são gradualmente abandonados quando, ao longo do tempo, não apresentam relações convincentes com outros desenvolvimentos.

§3-Matemática e Fundamentos

Portanto, a tese semântica implica uma visão da Matemática em relação com outras ciências e em auto-relação consigo mesma, e está em concordância com o fato empírico de que as partes mais importantes da Matemática, mais valorizadas pela comunidade dos matemáticos, são aquelas que apresentam uma relação mais direta com outras ciências e com a própria Matemática, sem excluir as partes que não têm a mesma propriedade. Também, a tese semântica implica que, quando um cientista realiza um experimento, a Matemática envolvida não está sendo testada, pois essa parte da Matemática constitui, nessa perspectiva, parte das condições de significação do experimento: as coisas da realidade empírica são entidades cuja apreensão segundo as ciências teóricas é possível apenas na medida em que necessariamente participam na forma dada por alguma noção matemática (possibilidade aqui é possibilidade lógica, não possibilidade tecnológica, metafísica de existência em mundos possíveis, ou de outra natureza).

É importante que fique claro que não é qualquer uso da Matemática que conta como uma relação semanticamente relevante, mas apenas quando certo conteúdo é apreendido através da Matemática, quando suas regularidades são capturadas de modo adequado por uma teoria matemática, portanto, quando o conteúdo é semanticamente condicionado: para que uma relação da Física Teórica seja significativa é preciso, antes, que seja matematicamente significativa e, quando isso não ocorre, a relação da Física Teórica, no máximo, pode fornecer uma técnica e não um conhecimento. Uma ciência que usa a Matemática apenas para capturar alguns aspectos quantitativos e não na própria apreensão dos seus objetos não é semanticamente condicionada; tal ciência é apenas superficialmente matematizada e não é como a Física Teórica moderna, onde a Matemática desempenha um papel constitutivo. Como um último comentário geral a respeito da tese semântica sobre a Matemática e Fundamentos, considere a questão do comprometimento ontológico. Essa questão, do ponto de vista da tese semântica, tem uma importância consideravelmente atenuada, em comparação com a importância central que essa questão adquire em uma concepção ontológica da Matemática. Aqui a Matemática é constituída de descrições de noções expressas em uma linguagem não interpretada, e qualquer interpretação externa dessa linguagem vem da sua relação com as ciências teóricas matematizadas. Se as disciplinas matemáticas apresentam uma unidade interna, então a Matemática adquire um sentido externo em bloco, a partir da relação com as outras ciências e da auto-relação consigo mesma. Essas últimas considerações são importantes, pois se torna ainda mais evidente, dentro da concepção geral deste trabalho, a centralidade de se estabelecer a unidade da Matemática internamente.

Voltando à questão colocada mais acima: como é possível uma investigação que tem como objetivo a determinação do conhecimento matemático intersectar a própria Matemática? Um início de encaminhamento de resposta, partindo da tese semântica, conforme explicada acima, é agora claro: a Matemática constitui parte da semântica formal das ciências, incluindo ela mesma, onde ocorre a interseção com Fundamentos. De fato, o estudo de caso que será realizado na Parte C e que é relativo à interação entre a Matemática e os Fundamentos se mostrará consistente com a tese semântica. É conveniente notar que apenas um conhecimento formal pode ter essa propriedade de interseção com as reflexões fundacionais sobre esse mesmo conhecimento e uma concepção de Matemática como ontologia não parece dar conta, de modo imediato, desse fato, que Matemática e Fundamentos se sobrepõem, sem transformar a Lógica em uma ontologia, o que constituiu um dos principais alvos de ataque por parte do projeto crítico kantiano, como pode ser constatado na seguinte passagem da Crítica da Razão Pura [A61, B85], que é bastante clara, apesar da linguagem obsoleta:

"Contudo há algo de tão tentador na posse de uma arte tão especiosa que consiste em dar a todos os conhecimentos a forma do entendimento, por muito vazio e pobre que se possa estar quanto ao seu conteúdo, que essa lógica geral, que é apenas um ***cânone*** *para julgar, tem sido usada como um* ***organon*** *para realmente produzir afirmações objectivas ou, pelo menos, dar essa ilusão, o que de fato constitui um abuso. À lógica geral, considerada como pretenso organon, chama-se* ***dialética****."*
[Kant, I., Crítica da Razão Pura, Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão, Fundação Calouste Gullbenkian, 2008]

Uma parte da Lógica Matemática está claramente contida nessa sobreposição entre Matemática e Fundamentos, que, por sua vez, está contida na totalidade da Lógica Matemática. Para compreender esse fato basta notar que, segundo a caracterização acima, o aspecto semântico da Matemática é a teoria da forma lógica da linguagem das ciências que mantêm relações relevantes com a Matemática, e a Lógica Matemática possui uma dimensão que pode, claramente, ser caracterizada em geral como a teoria da forma lógica da linguagem da Matemática. A novidade aqui é a tese de que essa sobreposição é maior do que poderia parecer, contendo mais resultados de Lógica Matemática, que normalmente não são considerados relevantes para Fundamentos. Essa tese se baseia em uma outra tese, a saber, que a determinação desse vínculo essencial entre Matemática e

Fundamentos, que é constitutiva da natureza dos Fundamentos, ocorre por meio da determinação de Fundamentos como princípio organizador e unificador da Matemática.

Sob essa perspectiva, o presente trabalho constituirá, caso logre ter sucesso, uma contribuição na direção da determinação desse vínculo. A tese mencionada acima, sobre o tamanho da interseção entre Matemática e Fundamentos, já foi sugerida desde a Apresentação, onde foi afirmado que resultados da Teoria de Modelos têm sido negligenciados nas investigações de Fundamentos e foi colocada de forma explícita na Parte A, na tematização de Fundamentos, onde foi formulada a tese de que há uma terceira dimensão em Fundamentos, além da coleção de resultados técnicos ligados a programas de explicitação de pressupostos e das escolas de Filosofia da Matemática. Contudo, em nenhum momento foi afirmado que não há desenvolvimentos da Lógica Matemática que degeneraram em conteúdos tecnicamente muito rebuscados, mas pouco criativos e que, de fato, parecem não ter relevância alguma para Fundamentos, para uma reflexão sistemática sobre o conhecimento matemático. Apenas afirmou-se que há desenvolvimentos que são negligenciados e este trabalho pretende mostrar que são relevantes, e essa possibilidade é conseqüência de uma perspectiva bastante ampla acerca de Fundamentos, implicada pela tese semântica. Alguns poderiam se opor dizendo que a perspectiva é ampla demais. Mas a perspectiva não é ampla demais, já que se mantém nos limites estreitos da Matemática, de modo que não há nessa reclamação nada além do reflexo de um gosto pessoal, e a Filosofia, definitivamente, não deve se ocupar desse tipo de coisa.

Fundamentos deve conter, portanto, uma teoria geral da significação da Matemática, uma compreensão de segunda ordem da Matemática, que está ligada originariamente à Matemática. Esse aspecto de Fundamentos implica que um objetivo dessa disciplina é a determinação progressiva da Matemática e que isso tem como ponto de partida estabelecer a unidade da Matemática. De fato, o problema da unidade se coloca para a Matemática de um modo muito mais dramático que para outras ciências. O ponto é que a Matemática não tem objeto de investigação dado, precisa constituir seu próprio objeto. Então, para poder falar, filosoficamente, em uma Matemática unitária, é preciso mostrar que aquilo que se denomina, pré-filosoficamente, Matemática, constitui um todo coeso, e não um aglomerado informe de resultados, e essa deve ser uma finalidade da determinação da Matemática em Fundamentos. A determinação fundacional da Matemática é a compreensão sistemática das disciplinas matemáticas. Essa apreensão segundo a perspectiva sistemática envolve resultados técnicos de explicitação de pressupostos em programas de fundamentos, resultados de conservatividade e de pureza de métodos, resultados de universalização de conteúdos matemáticos[2] e de legitimidade de princípios heurísticos, de expressabilidade de noções matemáticas, entre outros, já que esses tipos de resultados constituem parte da reflexão acerca das peças que compõem o mecanismo da atividade matemática. Não é um objetivo de Fundamentos decidir quais devem ser os princípios acrescentados à Matemática, já que Fundamentos não tem o poder de derivar a partir da Metafísica, ou de qualquer outra fonte, quais devem ser os pressupostos da Matemática. A natureza da relação de pressuposição entre Fundamentos e Matemática é formal: Fundamentos deve reunir as condições de significação da Matemática. Portanto, não é o papel de Fundamentos decidir se o Axioma da Construtibilidade deve ser acrescentado ou não à atividade matemática. Decidir acerca da adição ou não de um novo princípio é um problema estritamente interno à prática da Matemática: um novo princípio deve ser acrescentado como pressuposto a toda Matemática se, e somente se, esse princípio estiver, de algum modo, efetivamente incorporado, na prática da Matemática, impregnado na atividade matemática. Portanto, não há, em certo sentido, propriamente, uma tomada de decisão envolvida no problema dos axiomas da Matemática. Diante desse problema, cabe à disciplina de Fundamentos, antes, o papel de explicitar axiomas para a Matemática, o papel de sistematizar e analisar o conhecimento matemático, mas não o papel de escolher axiomas para a Matemática, já que isso, de certa forma, não é possível. Fundamentos deve sim investigar se um determinado princípio atende e unifica demandas reais da prática matemática, bem como analisar a plausibilidade de incorporação de novos princípios, tanto em termos de relações lógicas entre formulações diversas quanto em termos de preservação, ou não, de configurações importantes presentes na ausência do princípio, mas não com a finalidade de tomar decisões no que concerne à incorporação de novos princípios relativamente à atividade matemática. É preciso ter clareza desse papel de Fundamentos, entre outras coisas, pelos motivos levantados no final da §10 na Parte A.

A concepção geral de Fundamentos aqui exposta está em conformidade com a tese sistemática de que um processo de determinação progressiva da Matemática e da unidade dessa disciplina é, ao mesmo tempo, um retroceder ao fundamento, e essa compreensão sistemática através de uma relação direta com o conteúdo matemático constitui o método de Fundamentos. Esse método não tem como finalidade apreciar as nuances de resultados matemáticos, tarefa que pode ser mais bem executada pela própria prática da Matemática. O fático não é objeto da Filosofia, apenas o possível. Esse método, baseado em estabelecer explicitação de pressupostos, pureza de métodos, universalização e legitimidade, expressabilidade de noções, decidibilidade de teorias, é, de fato, bastante rente ao conteúdo matemático, mas ainda como método de reflexão a respeito da atividade matemática. Além disso, essa proximidade com o conteúdo matemático não está em oposição com uma concepção de Fundamentos como um âmbito ideal. Apenas está em oposição com uma concepção de Fundamentos como um âmbito ideal construído em um vazio. Fundamentos é uma disciplina predominantemente normativa com respeito ás condições de significação, como já foi colocado na primeira seção da Parte A. Contudo, deve procurar ser, também, em parte, descritiva, pois, caso contrário, tornar-se-ia uma disciplina vazia. Não há nenhuma contradição nisso, já que o caráter descritivo de Fundamentos diz respeito à relação direta que essa disciplina deve ter com o conteúdo da Matemática, enquanto o seu caráter normativo não diz respeito, de modo imediato, à prática da Matemática, mas sim às condições de significação da linguagem dessa disciplina, e para estabelecer essas condições é preciso interagir diretamente com esse conteúdo, não há outra possibilidade.

Os parágrafos anteriores retomam várias teses que aparecem já na Apresentação e também nas primeiras três seções da Parte A. É importante analisar aqui, de modo mais específico, a tese de que estabelecer universalização de conteúdos matemáticos e legitimidade de princípios heurísticos constitui parte do método de Fundamentos. A universalização de um conteúdo matemático é para ser entendida como a incorporação de tal conteúdo em um enquadramento lógico-matemático, e não como uma simples generalização. Nesse sentido, mesmo que essa caracterização da universalização seja ainda um tanto vaga, está claro que a universalização é um expediente muito usado na Lógica Matemática, que freqüentemente vai buscar seus resultados em análises cuidadosas de conteúdos matemáticos. Do mesmo modo, a legitimidade de princípios heurísticos deve ser entendida como a formulação e demonstração, no interior da Lógica, desses procedimentos, às vezes usados na Matemática. Por exemplo, já foram mencionados, na Parte A, o princípio de Lefschetz e os métodos infinitesimais. Nos dois casos, há mais de uma legitimação possível. O princípio de Lefschetz foi formulado e demonstrado por Tarski, para linguagens de primeira ordem, mas há também versões para linguagens mais flexíveis. Os métodos infinitesimais foram recuperados de maneiras distintas nas várias versões da Análise não-Standard. Também está claro que esse tipo de procedimento é um expediente freqüentemente usado em Lógica Matemática. Nesse caso da legitimação, não há dúvida de que substituir uma heurística, baseada em uma experiência particular de casos, por enunciados precisos e demonstrações lógicas representa um enorme ganho em termos de compreensão sistemática das disciplinas matemáticas, portanto um ganho em termos fundacionais. Por outro lado, esse tipo de procedimento heurístico ocorre em número reduzido na Matemática. Portanto, o caso mais complexo, e também de maior relevância, é o da universalização de conteúdos, e é preciso concentrar a análise, no próximo parágrafo, na relevância fundacional desse tipo de procedimento. As conclusões dessa análise serão relevantes e servirão de base para toda a seqüência do texto.

Como já foi colocado no início do parágrafo anterior, a operação de universalização não é simplesmente generalização. Tampouco é, a universalização, apenas formalização. É necessário caracterizar de forma mais precisa a universalização. Universalizar um conteúdo matemático significa apreender esse conteúdo sob um enquadramento lógico-matemático, segundo uma regularidade de natureza lógico-matemática, como um conteúdo que diz respeito apenas à relação de conseqüência lógica e a propriedades puramente conjuntistas ou categoriais das estruturas matemáticas, ou seja, como um conteúdo de Lógica Matemática. A questão aqui é, então, que tipo de relevância fundacional isso pode apresentar? Para dizer de algo que há ou não há relevância fundacional, é necessário ter uma compreensão operacional de Fundamentos, e é exatamente isso que este texto procurou alcançar até agora. Portanto, de acordo com o que foi exposto, para que uma universalização de um conteúdo matemático apresente relevância fundacional, é preciso mostrar que tal universalização representa um avanço em termos de uma compreensão de segunda ordem e em termos da unidade das disciplinas matemáticas. Na prática, entre outras coisas, é preciso mostrar que tal universalização reforça a unidade da Matemática, já que reforçar a unidade da Matemática deve ser uma conseqüência de um avanço na direção de uma compreensão de segunda ordem das disciplinas matemáticas, por tudo aquilo que foi exposto até aqui. Mostrar que isso é possível é uma tarefa importante deste trabalho, por isso é preciso que fique claro o que se pretende alcançar e em que está baseada tal pretensão. O que se pretende alcançar está claro, é a relevância fundacional de certos procedimentos de universalização que serão apresentados na seqüência do texto. Mas que razões há, se é que há alguma, para crer, desde já, que isso será possível? Há sim uma razão para crer que isso será possível, de modo que a pretensão não é desmedida, não é extravagante. O argumento fundamental é o seguinte: ao apresentar um quadro lógico-matemático que rege um conteúdo matemático, que normalmente é estabelecido a partir de um trabalho de habilidade artesanal em cima de detalhes miúdos, se adquire uma compreensão mais profunda sobre aquilo que já foi compreendido. De fato, o conteúdo que já foi compreendido é agora apreendido segundo uma regularidade lógico-matemática completamente nova que fornece um significado novo para aquela compreensão original: o novo significado da compreensão original do conteúdo, fornecido pelo enquadramento lógico-matemático, é o conhecimento das condições gerais desse enquadramento que são verificadas na situação particular desse conteúdo. Apresentar um quadro lógico-matemático segundo o qual uma determinada situação matemática é apreendida configura, então, um estágio preliminar de uma reflexão de segunda ordem acerca da situação em questão, que não poderia ser extraído do mar de detalhes em que está imerso aquele conteúdo matemático específico. Essa é, também, a diferença entre mera generalização e universalização: no caso da universalização, a situação é apreendida segundo uma regularidade de natureza lógico-matemática completamente nova, que não pode ser obtida, simplesmente, através de uma operação, de acréscimo e retirada de hipóteses, extraída de uma análise cuidadosa de demonstrações. A universalização é uma regularidade, em certo sentido, livremente criada e não desvelada. Uma mera generalização, onde não necessariamente há um componente livremente criativo envolvido e que pode proceder desse modo ao infinito, não configura, de modo algum, parte de uma reflexão de segunda ordem.

§4-Organização da Matemática (parte II)

Após os esclarecimentos de ordem metodológica realizados nos parágrafos acima, é conveniente retomar aqui a questão da organização da Matemática, dentro do propósito de tornar progressivamente mais clara a concepção geral do trabalho, através da explicitação gradual da visão que eu tenho da natureza da Matemática. Com essa finalidade, a tematização da organização da Matemática servirá como meio para expor o meu ponto de vista.

Conforme explicitado no parágrafo correspondente da Parte A, a possibilidade mesma de organização da Matemática repousa sobre o significado de resultados da Lógica Finitária. No referido parágrafo ocorre uma citação da famosa frase de Kronecker a respeito dos números, que, de certa forma, resume uma situação de crença irredutível no significado desse âmbito finitário e ainda apresenta muita atualidade na discussão em Fundamentos. O objetivo agora é realizar uma análise mais radical desse âmbito finitário ou, mais especificamente, dos pressupostos da metateoria da formalização da Matemática.

Conforme já foi observado na Parte A, pela numeração de Gödel, a Lógica Finitária é coextensiva com uma teoria aritmética. Os resultados essenciais para um desenvolvimento mínimo da Matemática em um sistema formal podem ser provados com um uso bastante controlado, em termos de complexidade quantificacional, da indução. A investigação metamatemática, conforme concebida por Hilbert, é empreendida nesse contexto e tomada como um discurso significativo, independente de posições filosóficas. Como é possível sustentar que uma sentença desse discurso finitário é significativa? Como seria possível justificar de modo radical esse conhecimento finitário? Vamos fazer uma tentativa, sem, é claro, procurar ser absolutamente precisos em todos os aspectos ou procurar fornecer apenas distinções exaustivas, pois nesses termos já sabemos que os problemas filosóficos não são apenas insolúveis, são intratáveis.

É preciso, em primeiro lugar, fazer uma distinção importante no que se refere ao modo de conceber sistemas lógicos. Em um sentido bastante amplo, um sistema lógico pode ser concebido de dois modos: como sendo o estudo de relações estruturais entre portadores de valor de verdade (fórmulas ou proposições), ou como sendo um instrumento de raciocínio real. É claro que relações formais entre fórmulas estão apenas remotamente ligadas à questão de como se deve raciocinar na prática para chegar a conclusões verdadeiras partindo de hipóteses verdadeiras, ou seja, para, empiricamente, produzir conhecimento. Para chegar a essa constatação basta pensar em certas relações estruturais da implicação material clássica. Por exemplo, considere a inferência: se φ é falsa conclua $\varphi \rightarrow \psi$. Essa inferência tem pouca relação com raciocínio real, porque, entre outras coisas, não é possível saber, em geral, se φ é falsa. Do mesmo modo, a inferência: "se ZF é consistente então ZF é incompleta" também tem pouca relação com raciocínio real, porque pode ser o caso que não haja como saber se ZF é consistente. Essas relações estruturais apenas podem fornecer condições formais da predicação da verdade, ou da significação e é um pressuposto fundamental da Lógica Clássica que as sentenças portam valor de verdade bem determinado. É extremamente importante ter em perspectiva essa distinção. Através dela é possível mostrar, por exemplo, que uma proposta em Lógicas não-Clássicas, realizada como um trabalho de Matemática - ou, como é costume dizer, utilizando a Lógica Clássica como metalógica - não é necessariamente incoerente e, muito menos, está propondo uma mudança na Lógica.[3] O ponto é que a metalógica deve, nesse caso, ser concebida, predominantemente, como um estudo de relações estruturais entre fórmulas e os sistemas de Lógicas não-Clássicas, que são o objeto de investigação, podem ser concebidos tanto como instrumentos de raciocínio real para determinados contextos, quanto como um estudo de relações estruturais entre fórmulas em um determinado contexto, ou, ainda, como algo intermediário entre as duas coisas. Na minha visão, a distinção acima reflete, em parte, a distinção entre uma concepção não-empirista e uma concepção empirista da Lógica, respectivamente.

A parte da Lógica Finitária que corresponde à metateoria da formalização da Matemática será concebida no presente trabalho, predominantemente, como um estudo de relações estruturais entre fórmulas e será chamada de Metamatemática. Com isso, esse elemento lógico-finitário, que estabelece condições mínimas de formalização da Matemática, pode ser caracterizado como um discurso significativo, em termos de relações estruturais entre fórmulas, que pressupõe apenas condições formais da conservação da unidade. De fato, como não há uso essencial de quantificadores nesses desenvolvimentos da Lógica Finitária, esse discurso não pressupõe outra coisa além de condições formais da preservação da unidade. Os números metateóricos são os termos dessas condições. Desse modo, a indução em relações entre termos (em propriedades que não envolvem quantificadores) é justificada como uma condição formal da conservação da unidade.

Dentro dessa concepção, as proposições desse discurso lógico-finitário são verdadeiras se correspondem a determinações da preservação da unidade. Nesse sentido, assume-se que a preservação da unidade constitui mesmo um princípio de classificação exaustivo e, conseqüentemente, que faz sentido falar em condições formais da preservação da unidade e que as afirmações da Metamatemática *possuem* valor de verdade determinado. Portanto, mesmo aceitando que alguns números metamatemáticos admitem, de algum modo, uma realização empírica, os pressupostos dessa parte da Lógica Finitária não devem ser confundidos com um conhecimento de números que admitem realização empírica. Essa seria uma concepção finitista muito restritiva da metateoria da formalização da Matemática. Essa metateoria é concebida aqui como um discurso significativo que pressupõe apenas condições formais da conservação da unidade, concepção que envolve um infinito potencial - que é uma condição formal da conservação da unidade. Os números metamatemáticos são os termos dessas condições formais de preservação da unidade, portanto só possuem significado nesse contexto. Nesse sentido, se a sentença da consistência de ZF for pensada como uma sentença da Metamatemática, então ela possui um valor de verdade determinado, mas, por outro lado, se essa sentença for pensada como uma sentença de um discurso baseado em um conhecimento de números que admitem realização empírica, então a consistência de ZF só teria valor de verdade determinado caso alguma inconsistência seja realizável empiricamente. Em uma concepção finitista, a consistência deve ser tratada como um predicado vago, já que, por exemplo, há muitas razões para acreditar que, por um lado, nenhuma inconsistência da Aritmética de Peano seja realizável empiricamente e, por outro lado, que a consistência da mesma seja indemonstrável por métodos finitistas.

Retomando a distinção realizada mais acima, uma possível concepção da metateoria da formalização da Matemática como, predominantemente, instrumento de raciocínio real também implica que a consistência deve ser tratada como um predicado vago. De fato, a Lógica Finitária como um todo parece ser impotente diante da questão da consistência de ZF, por exemplo. Portanto, afirmações que envolvem a consistência de ZF devem ser compreendidas em termos das relações estruturais entre fórmulas (portadores de valor de verdade) e não em termos de instrumento de raciocínio real. É conveniente analisar, como exemplo, uma versão do Primeiro Teorema de Gödel para ZF (cf.:[Hinman, 19], p. 483): para toda teoria consistente T, recursivamente axiomatizável e que estende ZF, T é incompleta. Como é possível compreender essa formulação como um resultado da Lógica Finitária? Predominantemente, como uma relação entre relações estruturais entre fórmulas, já que a consistência de T figura entre as hipóteses. Esse importante teorema, uma pedra angular da Lógica Finitária, não significa grande coisa em termos de instrumento de raciocínio real, já que, nessa concepção, a consistência deveria ser tratada como um predicado vago.

Em resumo, a metateoria da formalização da Matemática é caracterizada aqui como um discurso significativo acerca de relações estruturais entre portadores de valor de verdade (fórmulas). Essa metateoria é a parte da Lógica Finitária que é essencial a uma formalização mínima da Matemática e seus pressupostos se restringem a condições formais da preservação da unidade. Essa parte indispensável da Lógica Finitária é constituída por resultados que se encontram nos quatro primeiros capítulos do livro de Shoenfield (cf.:[Shoenfield, 38]) e que já foram aritmetizados em sistemas bem fracos, com indução limitada e eqüiconsistentes com a Aritmética de Robinson (cf.[Nelson, 32]). Os pressupostos dessa parte da Lógica Finitária são os pressupostos mesmos de uma formalização mínima da Matemática e constituem o que vamos chamar de âmbito finitário.

Onde está fundado o âmbito finitário? Na Razão: o âmbito finitário, enquanto condições formais da preservação da unidade, engloba pressupostos não apenas da Lógica Finitária e da formalização da Matemática, mas de praticamente qualquer conhecimento científico sistemático, como a Física. Portanto, seu fundamento está na Razão, como condição da possibilidade de um conhecimento científico sistemático. Desse modo, a formalização da Matemática é condicionada pelo âmbito finitário e, enquanto meio de formalização da Matemática, é a Metamatemática que estipula o que será uma teoria formal como ZF. Assim, a Metamatemática não é uma teoria formal no sentido dado por ela mesma, mas poderia ser considerada uma prototeoria formal, pois é possível formalizar toda a Lógica Finitária em fragmentos de uma teoria formal como a Aritmética de Heyting, por exemplo. Nesse sentido, argumentação apresentada por van Heijenoort (cf.:[van Heijenoort, 45], pp. 480-482) que identifica a indução metamatemática e a indução no sistema formal PRA e que mostra que a negação da afirmação da consistência, pensada como uma sentença universal, deve ser compreendida em termos intuicionistas, portanto não como uma sentença existencial, está integralmente em sintonia com a concepção de Metamatemática exposta aqui. É claro que a formalização da Metamatemática não substitui, mas apenas empurra a metateoria da formalização da Matemática para cima, e de modo algum dispensa a necessidade de qualquer pressuposto da possibilidade de formalização da Matemática. Esses pressupostos (o âmbito finitário) são aceitos aqui de uma vez e de forma absoluta, independente dos desdobramentos posteriores da Lógica e da Matemática. As bases dessa aceitação, parcialmente expostas nos parágrafos acima, podem ser resumidas nas seguintes observações:

- Em primeiro lugar, que a preservação da unidade constitui um princípio de classificação, um conceito, independente da capacidade de agentes humanos acessarem empiricamente essa classificação.

- Que, pela observação acima, faz sentido falar em condições formais da preservação da unidade, e que a distinção entre infinito atual e potencial é significativa.

- Que as afirmações da Metamatemática portam valor de verdade determinado e que isso se fundamenta apenas sobre o pressuposto de que a preservação da unidade constitui um principio de classificação exaustivo, lembrando que uma afirmação da Metamatemática é verdadeira se corresponde a uma determinação da preservação da unidade.

- Que a Metamatemática, enquanto metateoria da formalização da Matemática, é concebida, predominantemente, como o estudo de relações estruturais entre fórmulas, e que esse estudo envolve apenas um infinito potencial.

- Que qualquer sistematização de um conhecimento científico pressupõe o âmbito finitário, uma vez que assume como significativo um discurso mínimo sobre a preservação da unidade.

Assim como a Lógica, a Matemática também pode ser pensada em termos da distinção entre instrumento de raciocínio real e estudo de relações estruturais entre termos, e a Matemática apresenta os dois aspectos. De fato, a Matemática pode, em parte, servir como um instrumento de raciocínio real para auxiliar um cientista em um processo de inferência construtivo e, em parte, pode operar como uma condição de significação de teorias da Física, por exemplo, como um estudo de relações estruturais entre termos que são interpretados na Física. Nesse sentido, por um lado, uma concepção de Matemática com ênfase no aspecto de instrumento de raciocínio real tende a uma concepção construtivista da Matemática e, por outro lado, uma concepção com ênfase no aspecto de condição de significação tende a uma concepção semântica da natureza da Matemática. Na verdade, a Matemática apresenta os dois aspectos, mas o presente trabalho busca explorar, de modo sistemático, algumas conseqüências, em termos de Fundamentos, do aspecto da Matemática como condição de significação de ciências como a Física Teórica. Essa observação leva ao próximo tópico do trabalho.

§5- A Questão Capital

Nas seções anteriores as principais teses defendidas neste texto foram retomadas e elaboradas. Desse modo, a proposta geral do trabalho está se tornando progressivamente mais clara, e esse é mesmo um objetivo desta Parte B. A partir de agora, detalhes técnicos passam a figurar com maior intensidade na argumentação, a fim de explorar as conseqüências da concepção geral do trabalho para além do que foi feito até aqui. Pelas concepções de Fundamentos e de Matemática expostas e elaboradas nas seções anteriores, cabe a Fundamentos realizar uma análise semântica da atividade matemática e não é um encargo de Fundamentos derivar os axiomas da Matemática ou reduzir a

Matemática a alguma realidade esotérica. Mas, o que exatamente deve-se entender por atividade matemática? Em matemática, “fazer” pode significar apenas duas coisas, em conformidade com as duas funções da Lógica: “definir” ou “demonstrar”; dizer de duas teorias matemáticas que elas “fazem” as mesmas coisas significa dizer que há certa relação de correspondência entre as definições e os teoremas que essas teorias produzem. Portanto, Fundamentos inclui uma análise do que significa “definir” em Matemática e do que significa “demonstrar” em Matemática, e o estudo matemático desse significado do “fazer” em Matemática é a Lógica Matemática. Isso pode parecer pouco, mas é só uma aparência enganadora: a análise de “definir” e de “demonstrar” é bastante complexa. A disciplina da Lógica Matemática que está mais concentrada na análise do significado de “demonstrar” é a Teoria da Demonstração, e a disciplina que se concentra mais na análise do significado de “definir” é a Teoria de Modelos. Contudo, cada uma dessas disciplinas se ocupa, de acordo com seus métodos próprios, com as duas coisas, havendo uma diferença de ênfase. Neste trabalho vamos nos ocupar apenas do significado de “definir”, ou “expressar”, em relação a uma pequena parte da Teoria de Modelos; não obstante, isso já será suficiente para exemplificar e esclarecer muito do que foi dito sobre Fundamentos.

O presente trabalho tem uma razão objetiva para existir: a busca de uma resposta para um problema real. Esse problema pode agora ser colocado, de forma clara, na seguinte Questão Capital: o que pode haver de relevância fundacional nos desenvolvimentos técnicos específicos que dominam os trabalhos em Lógica Matemática atualmente? Não é o caso que as disciplinas da Lógica Matemática degeneraram-se completamente em desenvolvimentos tecnicamente rebuscados, mas com pouca criação livre e nenhuma relevância filosófica? De certa forma, tudo que foi feito até aqui constitui um esclarecimento a respeito desse problema: para compreender o que é perguntado pela Questão Capital e por qual caminho deve-se procurar uma resposta foi preciso tornar claro o que se entende por Fundamentos, Matemática e Lógica Matemática, já que essa questão pergunta pela relevância fundacional de desenvolvimentos da Lógica Matemática. É claro que o presente trabalho não é uma busca por uma resposta exaustiva para a Questão Capital, o que não seria realizável. O que se pretende mostrar aqui é que há algum conteúdo fundacional em algum tópico específico da Lógica Matemática, e não serão analisados todos os desenvolvimentos dessa disciplina, obviamente. Desse modo, o presente trabalho não é um apanhado acrítico de conteúdos da Lógica Matemática que supostamente possuem relevância fundacional. Ao contrário, o trabalho se apresenta como uma reflexão crítica sobre o caráter fundacional da Lógica Matemática, com foco em desenvolvimentos da Teoria de Modelos.

A partir de agora, para prosseguir na investigação, é necessário considerar, de modo mais próximo, a relação semântica entre teorias e estruturas matemáticas, em um contexto específico. Conforme a exposição no §6 da Parte A, noções matemáticas são expressas, ou se expressam, por teorias (conjuntos de sentenças em uma determinada linguagem). Mas uma teoria matemática não é para ser entendida da mesma forma que uma teoria física, por exemplo. Em uma teoria matemática, apenas são consideradas aquelas propriedades da noção que estão expressas explícita ou implicitamente na teoria. Não há algo como os importes existenciais ou as hipóteses simplificadoras de cálculo da Física Teórica, que são, propriamente, exteriores às teorias. Nesse sentido, as teorias matemáticas não descrevem ou analisam uma noção que é exterior à teoria; essas teorias, antes, constroem a noção, constituem a noção internamente. Contudo, noções matemáticas podem possuir uma dimensão exterior à teoria que as axiomatiza, e, em geral, antes de formular uma teoria matemática temos já uma compreensão preliminar da noção que agora será tratada axiomaticamente. Em alguns casos essa compreensão preliminar pode ser bastante forte, e em outros casos pode ser bem fraca ou inexistente. Em qualquer caso, as noções matemáticas constituem-se de modo pleno apenas quando estão formuladas através de uma definição matemática e são desenvolvidas de modo estritamente interno, com relação à Matemática, e não é possível apelar para elementos externos em uma demonstração matemática.

§6- Estruturas e Teorias de Primeira Ordem

Uma teoria matemática pode, como uma primeira aproximação, ser caracterizada como um estudo de certas relações formais, ou lógico-estruturais. De um modo geral, essas relações lógico-estruturais podem ser conseqüência lógica de um conjunto de axiomas que determinam um objeto de estudo (por exemplo, proposições a partir dos axiomas de grupo), ou podem ser construções estruturais na Teoria de Conjuntos (subgrupo, produto direto de grupos, homomorfismo de grupo, etc.). Uma teoria matemática explora tanto o aspecto de conseqüência a partir de axiomas, quanto o aspecto de construções estruturais, e, ainda, a interação desses dois aspectos. Contudo, as teorias matemáticas, em geral, operam ainda de modo ingênuo com relação a esses aspectos e à sua interação, no sentido de que essas teorias não são, propriamente, críticas, seja em termos da conseqüência lógica a partir de axiomas, seja em termos das construções estruturais na Teoria de Conjuntos, seja em termos da relação semântica entre esses dois aspectos, e operam baseadas em uma compreensão implícita, mais ou menos vaga, sobre essas componentes de natureza lógico-matemática.

A Teoria de Modelos é parcialmente co-responsável pela análise crítica dessas componentes de natureza lógico-matemática das teorias matemáticas, e essa análise só é possível quando há um tratamento matemático adequado da relação entre conjuntos de sentenças e estruturas matemáticas. Que esse tratamento adequado, de fato, existe no contexto da Lógica de Primeira Ordem será objeto da argumentação do presente trabalho, a partir de agora. O primeiro passo para isso é a exposição de alguns detalhes técnicos das definições básicas da Teoria de Modelos, em Primeira Ordem. Esta seção é destinada à exposição de duas definições básicas: Estruturas de Primeira Ordem e Teorias de Primeira Ordem.

Uma Assinatura de Primeira Ordem Σ consiste de um conjunto C de símbolos de constantes, um conjunto F de símbolos de funções, um conjunto R de símbolos de relações e de uma função $ar\colon F \cup R \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sobre cada Assinatura Σ é construída uma Linguagem de Primeira Ordem $L[\Sigma]$ e, inversamente, a cada Linguagem L corresponde uma Assinatura $\Sigma[L]$. A Linguagem de Primeira Ordem é constituída a partir das definições recursivas usuais de termos e fórmulas de primeira ordem. Outros elementos importantes são a definição, também recursiva, de variável livre e a definição de sentença como fórmula sem variável livre. Estruturas de Primeira Ordem são constituídas por um domínio de elementos, o domínio da Estrutura; por elementos distinguidos do domínio, as constantes da Estrutura; por funções de aridade finita no domínio, as operações da Estrutura e por relações de aridade finita no domínio. Uma Estrutura de Primeira Ordem está sempre associada a uma Assinatura Σ, que é interpretada pela estrutura. Como no caso das Linguagens de Primeira Ordem, a relação entre assinaturas e estruturas pode ser explicitada na terminologia através da expressão Σ-Estruturas. Em uma Σ-Estrutura toda a Linguagem $L[\Sigma]$ encontra interpretação, não apenas a Assinatura Σ. Pela correspondência biunívoca entre Linguagens e Assinaturas, pode-se usar indiferentemente as expressões Σ-Estrutura e L-Estrutura. No caso de uma Assinatura ou Linguagem sem símbolos de constantes ($C = \emptyset$), a Estrutura vazia, onde o domínio é o conjunto $\emptyset$ e todos os símbolos de funções e relações de todas as aridades são interpretadas como o conjunto $\emptyset$, **é possível** entre as Σ-Estruturas ou L-Estruturas. Uma Teoria de Primeira Ordem é um sistema formal constituído por uma Linguagem de Primeira Ordem, axiomas lógicos e não-lógicos, que são fórmulas da correspondente Linguagem, e regras de inferência. Como uma Linguagem de Primeira Ordem é especificada pela sua Assinatura e como os axiomas lógicos e as regras de inferência são, após as escolhas iniciais na formulação da Lógica de Primeira Ordem, invariantes para uma determinada Linguagem, então, para especificar uma Teoria de Primeira Ordem, basta fornecer uma Assinatura e axiomas não-lógicos. Desse modo, também podemos definir Teoria de Primeira Ordem como conjunto de sentenças (em uma determinada assinatura) dedutivamente fechado (segundo as regras de inferência da Lógica), já que um conjunto de sentenças dedutivamente fechado determina um conjunto de axiomas de uma Teoria de Primeira Ordem, definida como sistema formal. Reciprocamente, um sistema formal determina um conjunto de sentenças dedutivamente fechado: basta tomar as sentenças que são teoremas do sistema formal. Desse modo, o conjunto de sentenças que são teoremas de um sistema formal pode ser concebido como um conjunto de sentenças dedutivamente fechado e um conjunto de sentenças dedutivamente fechado pode ser concebido como constituindo as sentenças que são teoremas de um sistema formal. Fornecemos as duas formulações porque pode ser conveniente utilizar as duas, bem como passar de uma para a outra.

Os exemplos, em Matemática, de Estruturas de Primeira Ordem, no sentido do parágrafo acima, estão, basicamente, na disciplina conhecida como Álgebra. Assim, grupos e corpos são Estruturas de Primeira Ordem; espaços topológicos e σ-álgebras não são. Da mesma forma, os axiomas de grupos são axiomas não-lógicos de uma Teoria de

Primeira Ordem, tal como os axiomas de corpos, e os axiomas de espaço topológico não são. Para essa disciplina é possível fornecer uma teoria formal da predicação da verdade, materialmente adequada, no sentido de Tarski, esse é o tema da próxima seção. Portanto, parte da análise que o presente trabalho pretende efetivar apresenta uma especificidade própria, e não é extensível a todas as partes da Matemática. Não obstante, não é claro que, em algum sentido, essa seletividade da análise pode ser considerada uma deficiência, já que a proposta é de realização de um objetivo específico. Não é possível desqualificar um trabalho com a crítica de que ele não realiza algo que, na verdade, não faz parte da sua proposta.

§7- Modelos e Teorias

Consideremos a uma L-Estrutura. Para cada elemento α do conjunto $|\mathsf{a}|$, escolhemos um nome novo (que não ocorre entre os símbolos de L). Vamos designar o conjunto de nomes assim obtidos por N. Se o conjunto de símbolos de constantes de L é C, então consideremos a Linguagem de Primeira Ordem designada por $\mathsf{L}(\mathsf{a})$ e obtida a partir de L acrescentando N ao conjunto de símbolos de constantes C, ou seja, trocando o conjunto C por $\mathsf{C} \cup \mathsf{N}$ (é conveniente notar que a união é disjunta). Se c, f e r são, respectivamente, símbolos de constante, função e relação de L, então c^{a}, f^{a} e r^{a} irão designar, respectivamente, a interpretação em a de c, f e r, e a interpretação em a de um nome para um elemento $\alpha \in |\mathsf{a}|$ será o próprio α. Pode-se, baseado no lema de leitura única para termos, definir indutivamente o elemento $\mathsf{a}(\mathsf{t})$ do conjunto $|\mathsf{a}|$, para t termo fechado de $\mathsf{L}(\mathsf{a})$, da seguinte forma: se t é um símbolo de constante c ou um nome v de α, então se define $\mathsf{a}(\mathsf{t}) = \mathsf{c}^{\mathsf{a}}$ ou $\mathsf{a}(\mathsf{t}) = \alpha$, respectivamente, e se t é o termo fechado $\mathsf{f}\mathsf{t}_1...\mathsf{t}_n$ de $\mathsf{L}(\mathsf{a})$, então se define $\mathsf{a}(\mathsf{t}) = \mathsf{f}^{\mathsf{a}}(\mathsf{a}(\mathsf{t}_1),...,\mathsf{a}(\mathsf{t}_n))$.

Consideremos as tabelas de verdade proposicionais para negação e disjunção: $H_\neg$: $\{\top,\bot\} \to \{\top,\bot\}$ e $H_\vee$: $\{\top,\bot\} \times \{\top,\bot\} \to \{\top,\bot\}$. O valor de verdade de uma sentença φ

de $L(a)$ pode ser definido indutivamente, baseado no lema de leitura única para fórmulas, da seguinte forma: se φ é $t_1 \equiv t_2$, então $a(\varphi) = \top$ se, e somente se, $a(t_1) = a(t_2)$; se φ é $rt_1...t_n$, então $a(\varphi) = \top$ se, e somente se, $r^a(a(t_1),...,a(t_n))$; se φ é $\neg\psi$, então, por definição, $a(\varphi) = H_\neg\ (a(\psi))$; se φ é $\psi_1 \vee \psi_2$, então, por definição, $a(\varphi) = H_\vee\ (a(\psi_1),\ a(\psi_2))$; se φ é $\exists_x\psi$, então $a(\varphi) = \top$ se, e somente se, $a(\psi_x[v]) = \top$, para algum nome v em $L(a)$. Se φ é uma fórmula de L, então uma a-instância de φ é uma fórmula fechada da forma $\varphi[v_1...v_n]$, onde $v_1,...,v_n$ são nomes em $L(a)$. Finalmente, uma fórmula φ de L é válida em uma L-Estrutura a se, e somente se, $a(\varphi') = \top$ para toda a-instância φ' de φ. Não há conflito entre nomes e termos fechados nessas definições: se um termo fechado e um nome se referem ao mesmo elemento então eles não produzem diferenças nas interpretações de termos e fórmulas.

A definição de semântica, ou de fórmula válida, do parágrafo acima é, essencialmente aquela que aparece pela primeira vez no livro clássico de Shoenfield (cf.:[Shoenfield, 38]). Essa definição difere, sutilmente, da definição original de Tarski que utiliza seqüências de elementos do domínio da estrutura. A definição acima é, por vezes, chamada de semântica substitucional, em oposição à semântica objetual que corresponde à definição original de Tarski. A semântica substitucional me parece a definição mais satisfatória já que não faz referência direta a objetos[4], mas apenas a termos da linguagem, e está em sintonia com o pensamento de alguns autores mais modernos da Teoria de Modelos (cf.:[Buechler, 4], p. 2) que apreciam o ponto de vista segundo o qual os elementos da estrutura podem ser entendidos como ***parâmetros*** que aparecem nas fórmulas, o que está claramente refletido nessa formulação de Shoenfield.

Uma Estrutura de Primeira Ordem é modelo de uma Teoria de Primeira Ordem, satisfeita a condição de compatibilidade de linguagem, se é *não vazia* e se os axiomas não-lógicos são válidos.[5] Essa relação entre Teorias e Estruturas de Primeira Ordem determina, para cada Teoria, uma classe de Estruturas associada à Teoria e, respectivamente, para cada classe de Estruturas, uma Teoria que corresponde à classe.

Essa correspondência nos dois sentidos determina uma *conexão de Galois* entre a classe de estruturas para uma determinada linguagem e o conjunto de sentenças dessa linguagem. De fato, considere as definições seguintes de Teoria (no sentido de conjunto de sentenças dedutivamente fechado) de uma classe de estruturas e de classe de modelos de uma Teoria, respectivamente:

$$\mathsf{Th}(\mathsf{K}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ é uma sentença de } \mathsf{L} \text{ e } \mathsf{a}(\varphi) = \top, \text{ para toda } \mathsf{a} \in \mathsf{K} \textit{ não vazia}\}$$

$$\mathsf{Mod}(\mathsf{T}) = \{\mathsf{a} \mid \mathsf{a} \text{ é uma } \mathsf{L}\text{-Estrutura e } \mathsf{a} \text{ é modelo de } \mathsf{T}\}.$$

É conveniente notar que as seguintes relações seguem das definições:

$$\mathsf{Th}(\mathsf{K}) = \mathsf{Th}(\mathsf{K}\backslash\{\emptyset\}),$$

$$\mathsf{Th}(\mathsf{K}) \subseteq \mathsf{Th}(\mathsf{K}'), \text{ se } \mathsf{K} \supseteq \mathsf{K}' \text{ e}$$

$$\mathsf{Mod}(\mathsf{T}) \subseteq \mathsf{Mod}(\mathsf{T}') \text{ se } \mathsf{T} \supseteq \mathsf{T}'.$$

Portanto, considerando K como sendo igual a $\mathsf{Mod}(\mathsf{T}')$ e considerando K' como sendo igual a $\mathsf{Mod}(\mathsf{T})$, segue que, pela segunda relação acima,

$$\mathsf{Th}(\mathsf{Mod}(\mathsf{T})) \supseteq \mathsf{Th}(\mathsf{Mod}(\mathsf{T}')) \text{ se } \mathsf{T} \supseteq \mathsf{T}'.$$

Analogamente, considerando T como sendo igual a $\mathsf{Th}(\mathsf{K}')$ e considerando T' como sendo igual a $\mathsf{Th}(\mathsf{K})$, segue que, pela terceira relação acima,

$$\mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(\mathsf{K})) \supseteq \mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(\mathsf{K}')) \text{ se } \mathsf{K} \supseteq \mathsf{K}'.$$

Por definição,

$$\mathsf{Th}(\mathsf{Mod}(\mathsf{T})) \supseteq \mathsf{T}.$$

Considerando a classe de modelos das duas partes dessa relação e considerando T como sendo $\mathsf{Th}(\mathsf{K})$ nessa mesma relação, segue, respectivamente, que

$$\mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(\mathsf{Mod}(\mathsf{T}))) \subseteq \mathsf{Mod}(\mathsf{T}) \text{ e}$$

$$\mathsf{Th}(\mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(\mathsf{K}))) \supseteq \mathsf{Th}(\mathsf{K}).$$

De modo análogo, por definição,

$$\mathsf{Mod}(\mathsf{Th}(\mathsf{K})) \supseteq \mathsf{K}\backslash\{\emptyset\}.$$

Portanto, considerando a teoria das duas partes da relação e considerando, em seguida, K como sendo $\mathsf{Mod}(\mathsf{T})$ nessa relação,

$$\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(K))) \subseteq \mathrm{Th}(K\backslash\{\emptyset\}) = \mathrm{Th}(K) \text{ e}$$

$$\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T))) \supseteq \mathrm{Mod}(T).$$

Finalmente, das inclusões nos dois sentidos, segue que,

$$\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(K))) = \mathrm{Th}(K) \text{ e}$$

$$\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T))) = \mathrm{Mod}(T).$$

Esse par de relações fundamentais entre os funtores Th e Mod mostra, juntamente com as inclusões estabelecidas mais acima, que as composições desses funtores constituem operadores de fecho, que os subconjuntos fechados do conjunto de sentenças, para o operador $\mathrm{Th}\circ\mathrm{Mod}$, são exatamente os subconjuntos da forma $\mathrm{Th}(K)$ e que as subclasses fechadas de estruturas, para o operador $\mathrm{Mod}\circ\mathrm{Th}$ são exatamente as subclasses da forma $\mathrm{Mod}(T)$, ou seja, as classes axiomatizáveis, ou elementares.

Dois conjuntos de sentenças são chamados logicamente equivalentes se possuem as mesmas conseqüências lógicas. Pelo Teorema da Completude, T e T' são logicamente equivalentes se, e somente se, $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T)) = \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T'))$. Pelas relações estabelecidas acima, essa condição necessária e suficiente da equivalência lógica é, por sua vez, equivalente à condição $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T')$. De fato, por um lado,

$$\text{se } \mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T'),$$

$$\text{então, claramente, } \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T)) = \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T')).$$

Por outro lado,

$$\text{se } \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T)) = \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T')),$$

$$\text{então, claramente, tem-se que } \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T))) = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T'))).$$

Como $\mathrm{Mod}(T)$ e $\mathrm{Mod}(T')$ são fechadas para o operador $\mathrm{Mod}\circ\mathrm{Th}$, segue dessa igualdade que $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T')$. Portanto, duas teorias, para uma mesma linguagem, são logicamente equivalentes se, e somente se, são co-extensivas.

As Linguagens de Primeira Ordem são suficientemente expressivas, de modo que noções da Álgebra correspondem a Teorias de Primeira Ordem, ou podem ser expressas por fórmulas individuais em uma Teoria de Primeira Ordem. Desse modo, as definições acima fornecem uma teoria formal da predicação da verdade para a Álgebra. Mas isso não basta para justificar a afirmação de que a Teoria de Modelos fornece um enquadramento para a Álgebra clássica, apenas mostra que essas disciplinas estão vagamente relacionadas. De fato, em princípio, não é problema de uma teoria formal da predicação da verdade fornecer meios de acesso ao conteúdo da verdade, o que, nesse caso, corresponde à Álgebra. No entanto, de forma aparentemente surpreendente, a Álgebra e a Teoria de Modelos apresentam relações muito próximas. Para mostrar isso seria preciso mostrar que as construções algébricas clássicas podem ser compreendidas como construções modelo-teóricas, e isso, de fato, pode ser realizado, até certo ponto. É possível compreender boa parte das construções algébricas como instâncias de construções modelo-teóricas, e isso é bastante interessante justamente porque é surpreendente: não é razoável esperar que construções algébricas específicas possam ser apreendidas como resultados sobre a relação de conseqüência lógica. O que há de mais interessante quando a Teoria de Modelos é usada para provar um resultado da Álgebra é que isso é bastante implausível! Por trás de um fato surpreendente, como essas relações estreitas entre Teoria de Modelos e Álgebra, podemos encontrar aspectos reveladores sobre a natureza das disciplinas envolvidas. Essa questão será retomada na Parte C, onde, com a finalidade de responder a essa e outras questões, a análise ficará concentrada em um estudo de caso. A realização de estudo de caso é bastante pertinente, já que eu acredito que para responder uma questão que diz respeito a determinado conteúdo matemático é preciso ***olhar efetivamente*** para esse conteúdo, não apenas imaginar à distância, e isso está de pleno acordo com a concepção geral do trabalho, conforme exposta até aqui.

§8- Formalização em ZFC

A Matemática, ou a maior parte dela, tal como foi praticada no século XX, pode ser formalizada em um sistema formal como ZFC. Em particular, a Lógica Matemática pode ser formalizada em ZFC e a relação de satisfação entre estruturas e fórmulas pode ser definida nesse sistema formal. As definições fornecidas de acima de $a(t)$ e de $a(\varphi)$

são formalizáveis tal como estão formuladas. É preciso apenas provar em ZFC uma versão suficientemente flexível do teorema da recursão, baseado na propriedade de leitura única para termos e fórmulas.[6] A relação de satisfação fica assim definida por uma fórmula que é absoluta para as $\in$-interpretações transitivas de ZF. Não é possível alterar a validade de fórmulas absolutas passando de uma $\in$-interpretação transitiva para outra com técnicas que operam com esse tipo de interpretação, como o forcing, por exemplo.[7] Desse modo, a equivalência elementar é uma relação que não depende da consideração de uma $\in$-interpretação transitiva de ZF, enquanto a relação de isomorfia entre estruturas *depende* da interpretação, no sentido da absolutidade, dado que é possível colapsar cardinais (Paradoxo de Skolem). De acordo com isso, algumas noções matemáticas são mais precisas que outras, no sentido de que sua extensão não pode ser alterada com as técnicas padrão de construção de interpretações da Teoria de Conjuntos. Por exemplo, as noções de cardinalidade enumerável e de cardinalidade do contínuo são vagas, suas extensões não são bem determinadas, ao menos do ponto de vista da compreensão atual da noção de conjunto. Já as noções matemáticas expressas em Linguagem de Primeira Ordem não sofrem com uma vagueza tão dramática quanto algumas dessas noções expressáveis em Linguagem de Segunda Ordem. Noções expressáveis em Linguagem de Primeira Ordem determinam suas extensões de modo razoavelmente preciso.[8]

É interessante notar, por outro lado, que há caracterizações puramente estruturais da equivalência elementar, como o Teorema de Keisler-Shelah. Consequentemente, possuir ultrapotências isomorfas é uma relação intrínseca entre duas estruturas, no sentido da absolutidade. Isso já é, por si, surpreendente: não é de se esperar que seja possível caracterizar a equivalência elementar em termos de relações estruturais que não têm nada a ver com os aspectos sintáticos de fórmulas envolvidas nas definições que acompanham essa relação de equivalência. Essa observação está diretamente ligada àquela feita no final da seção anterior, sobre as relações mais estreitas entre Teoria de Modelos e Álgebra. É conveniente, também, notar que, tal como a completude, a absolutidade das propriedades de primeira ordem é uma característica importante da Lógica de Primeira Ordem, que garante um descolamento da Teoria de Modelos em relação aos problemas de vagueza na Teoria de Conjuntos: afirmar que um conjunto possui certas Propriedades de

Primeira Ordem não é uma afirmação vaga. Essa propriedade não é compartilhada pela Lógica de Ordem Superior.

A definição acima da relação de satisfação, formalizada em ZFC, não pode ser utilizada para definir a predicação da verdade em ZFC, tomando-se o universo de conjuntos como estrutura.[9] Portanto, não há conflito com o Teorema de Tarski da Indefinibilidade da Verdade. O problema é que, nesse caso, as $\mathfrak{a}$-instâncias de uma fórmula com uma variável livre formariam uma classe própria. Desse modo, a estipulação de $\mathfrak{a}(\exists_x\psi)$ dependeria, em geral, da estipulação do valor de $\mathfrak{a}(\psi_x[v])$ para uma classe própria de estágios anteriores constituída pelas $\mathfrak{a}$-instâncias de ψ, e isso é exatamente a negação de uma das hipóteses do Teorema da Recursão.

Formalizada em ZFC, a relação de satisfação para a Lógica de Primeira Ordem desempenha o papel que se espera: é possível provar em ZFC o Teorema da Completude. Mas não é só nesse sentido não construtivo e infinitário que a Lógica de Primeira Ordem é Completa. Na verdade, há várias possíveis noções de completude segundo as quais a Lógica de Primeira Ordem é, de fato, completa. Entre essas noções de completude, uma das mais importantes é aquela fornecida pelo Teorema de Herbrand. Esse teorema pode ser demonstrado no fragmento da aritmética $I\Sigma_1$, que permite indução em fórmulas com um quantificador existencial não limitado. Portanto, não chega a ser um resultado apenas apoiado em condições formais da preservação da unidade, conforme a discussão acima, mas, por outro lado, está bem longe de ser um resultado infinitário, não construtivo como o Teorema da Completude em ZFC. Essas propriedades de completude e absolutidade fazem com que a Lógica de Primeira Ordem seja um veículo apropriado para uma análise semântica da Matemática.

§9- Estruturas Matemáticas

Nas seções anteriores uma definição precisa de estrutura foi fornecida. O que exatamente são estruturas é uma questão vaga, claro, mas isso não quer dizer que não há critério para dizer o que é uma estrutura. Há objetos de estudo na Matemática que certamente são estruturas, como espaços topológicos, e que não são capturados pela definição de Estrutura de Primeira Ordem. Espaços topológicos são estruturas segundo alguma definição precisa de estrutura? Certamente. O lendário grupo Bourbaki forneceu, no capítulo IV do livro *Théorie des Ensembles*, uma definição precisa de Estrutura Matemática que engloba de modo uniforme todos os casos conhecidos. A menos de certos cuidados com a "limitação de tamanho", até mesmo as categorias são Estruturas Matemáticas no sentido de Bourbaki. Também é possível enriquecer a Teoria de Conjuntos com um Axioma de Universos de Grothendieck-Sonner-Tarski. As Estruturas Matemáticas de Bourbaki constituíram uma sistematização pioneira da Matemática em um sistema formal da Teoria de Conjuntos, que era basicamente uma versão de ZFC.

Na verdade, o Axioma da Regularidade não desempenha nenhum papel na sistematização da Matemática em termos de Estruturas Matemáticas, no sentido que é possível provar em ZFC^- (ZFC menos o Axioma da Regularidade) que toda Estrutura Matemática é isomorfa a uma Estrutura Matemática construída usando apenas conjuntos bem fundados. Isso se deve ao fato de que os conjuntos bem fundados são estáveis sob as operações de construção de Estruturas Matemáticas (operações de partes, produtos cartesianos, reuniões e subconjuntos), que um conjunto é bem fundado se, e somente se, todos seus elementos são bem fundados, que os ordinais são bem fundados (cf.:[Levy, 27], p. 68) e que o *axioma de espécie de estrutura é uma relação transportável pela caracterização típica da espécie de estrutura*, pela definição de Bourbaki. Dessa forma fica claro por que o Axioma da Regularidade nunca é usado na Matemática padrão, e tem relação apenas com a organização dos conjuntos em uma hierarquia.

Após esse breve comentário, no caso do presente trabalho, desse ponto em diante a proposta específica estará restrita ao contexto das Estruturas de Primeira Ordem, e não ao de todas as Estruturas Matemáticas. Contudo, é claro que a maior parte das análises gerais feitas até agora não estavam comprometidas explicitamente com um contexto específico, e essas análises têm uma validade mais ampla. Dentro da finalidade do trabalho de investigar a relevância fundacional da Teoria de Modelos, o foco estará, a partir de agora, voltado para questões ligadas às relações entre a Álgebra e a Teoria de Modelos, onde, orientados pelas linhas gerais estabelecidas, buscaremos exibir alguns pontos importantes para a compreensão da Matemática e de Fundamentos, segundo a concepção exposta até aqui.

§10- Notas

1- Kant sabia perfeitamente bem que as inferências matemáticas procedem por dedução lógica (de acordo com o princípio da não-contradição, na linguagem dele), como está bem claro na seguinte passagem do preâmbulo dos *Prolegómena*:

"Porque se constatou que os raciocínios dos matemáticos procedem todos segundo o princípio de contradição (o que exige a natureza de toda certeza apodíctica), também se persuadiram que os axiomas eram conhecidos a partir do princípio de contradição; mas era um grande erro, porque uma proposição sintética pode, naturalmente, ser apreendida segundo o princípio de contradição, mas só enquanto se pressupõe outra proposição sintética, a partir da qual ela pode ser deduzida, mas nunca em si mesma. "
[Kant, I., Prolegómenos a toda a Metafísica Futura, Tradução de Artur Morão, edições 70, página 27]

Contudo, as definições matemáticas devem ser construções ostensivas para esse filósofo. Tudo isso constituía parte da argumentação de que a Matemática era formada por juízos sintéticos *a priori*. Juízos dessa natureza podem ser obtidos a partir de dedução lógica, mas apenas a partir de outros juízos sintéticos *a priori*. Contudo, como ainda não há um sentido claro de ***analítico*** na Filosofia, não é possível afirmar que a liberdade de definição matemática implica que a Matemática é um conhecimento formado por juízos analíticos. O que está claro é que as definições matemáticas em ZFC, por exemplo, vão efetivamente além da expressividade da pura Lógica.

2- Por conteúdo matemático entende-se qualquer parte de uma disciplina matemática

3- Alguns físicos experimentais ligados a "assuntos quânticos" parecem acreditar que seus experimentos podem "refutar" a Lógica, ou que talvez devêssemos "abandonar a Lógica aristotélica", seja lá o que isso quer dizer. Uma confusão análoga a essa, que consiste em não distinguir as condições formais pelas quais um resultado de um arranjo experimental possui significado das afirmações materiais que são realmente testadas no experimento em questão, surge no contexto da Lógica Quântica: é claro que um sistema lógico desse tipo deve ser pensado como um instrumento de raciocínio real para auxiliar o físico, e não que agora devemos entender qualquer afirmação em termos de Lógica Quântica. Convenções que podem auxiliar o físico quando ele deve raciocinar em determinadas situações na sua disciplina não representam mudança na Lógica, em nenhum sentido filosoficamente relevante.

4- Há uma análise sobre o comprometimento ontológico das definições na literatura de Fundamentos que sustenta a tese de diluição da questão ontológica no caso da semântica substitucional. Recomendamos ao leitor interessado a consulta da primeira seção do primeiro capítulo da dissertação de Podiacki, e das referências fornecidas lá (cf.:[Podiacki, 33]).

5- A exigência de que um modelo seja não vazio reside no fato de que, pela definição de satisfação, em uma estrutura vazia, as fórmulas com variáveis livres seriam todas válidas. Por outro lado, permitimos a estrutura vazia para uma linguagem. Um motivo para isso é que evita certas confusões, principalmente ligadas a um teorema sobre subestruturas geradas.

6- Para ver os detalhes, recomendamos ao leitor interessado a consulta das páginas 495, para a versão apropriada do teorema da recursão, e 552, para a definição das funções $a(t)$ e $a(\varphi)$, do livro de Hinman [Hinman, 19]. É preciso fazer apenas uma pequena adaptação no que se refere à atribuição de variáveis para que as definições desse livro se encaixem perfeitamente na formulação presente formulação da semântica substitucional (devida a Shoenfield): basta tomar uma função de atribuição a valores no conjunto de nomes e compor essa função com a interpretação dos nomes.

7- A existência de um $\in$-modelo transitivo de ZFC não é demonstrável no sistema $\mathsf{ZFC} + \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC})$, a não ser que $\mathsf{ZFC} + \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC})$ seja inconsistente. De fato, suponha que:

$$\mathsf{ZFC} + \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC}) \vdash \text{(existe um } \in\text{-modelo transitivo de } \mathsf{ZFC}).$$

Considere M uma testemunha para essa afirmação existencial. Como $\mathsf{ZFC} + \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC}) \vdash \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC})$, então, pela absolutidade de $\mathsf{Con}(\mathsf{ZFC})$ (é uma fórmula aritmética),

$$\mathsf{ZFC} + \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC}) \vdash (\mathsf{M} \models \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC})),$$

ou seja,

$$\mathsf{ZFC} + \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC}) \vdash (\mathsf{M} \models \mathsf{ZFC} + \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC})).$$

Disso segue, pelo Segundo Teorema de Gödel, que $\mathsf{ZFC} + \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC})$ é inconsistente. Portanto, se $\mathsf{ZFC} + \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC})$ é consistente, então $\mathsf{ZFC} + \mathsf{Con}(\mathsf{ZFC})$ não prova a existência de um $\in$-modelo transitivo de ZFC, e nem mesmo a existência de um modelo bem fundado de ZFC, pelo Teorema de Mostowski.

8- O Teorema da Absolutidade de Shoenfield (cf.:[Drake, 16], página 163) mostra que algumas fórmulas da Linguagem de Segunda Ordem sobre os números naturais (os primeiros dois níveis da Hierarquia Analítica) são absolutas para todas as $\in$-interpretações transitivas de ZFC que contêm os ordinais enumeráveis. Conseqüentemente, não é possível mostrar a independência, relativamente a ZFC, de propriedades que podem ser expressas por esse tipo de fórmula (como Hipótese de Riemann ou $\mathsf{P{=}NP}$) utilizando forcing.

9- É preciso, primeiro, flexibilizar as definições de estrutura e linguagem para admitir classes próprias (pois a seria a classe dos conjuntos nesse caso), mas isso não é problema. Depois, para a classe dos nomes é possível estipular, por exemplo, que, para cada conjunto c, o nome desse conjunto é o conjunto unitário {c}, que tem o conjunto c como único elemento.

PARTE C
TEORIA DE GALOIS E TEORIA DE MODELOS

§1- Preâmbulo

Dentro do esquema de organização do trabalho, à Parte C cabe a consideração de um caso que deve exemplificar aspectos da argumentação geral. É conveniente, portanto, retomar os aspectos principais da argumentação com a finalidade dupla de, em parte, tornar mais clara a proposta e os principais pontos levantados e, em parte, resumir a discussão realizada até aqui com a finalidade de preparação ao estudo de caso que se seguirá. Nesse sentido, antes de tudo, é preciso retomar a caracterização dos Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX e elucidar possíveis mal entendidos com relação a essa caracterização.

Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX é uma reflexão de segunda ordem sobre a Matemática no século XX e qualquer referência ao Pensamento Matemático deve ser sempre compreendida como uma referência ao aparato conceitual da Matemática do século XX, que é público, e ***nunca*** como atividade psicológica. A referência ao século XX é uma questão de rigor, do ponto de vista histórico: as considerações dessa reflexão de segunda ordem sobre a Matemática do século XX não são aqui extrapoladas para a Matemática em outros tempos históricos. Todas essas observações aparecem já na introdução do trabalho e são reforçadas aqui.

O exercício de Fundamentos busca alcançar certos objetivos e possui métodos próprios. Um dos objetivos de Fundamentos, no sentido e na orientação adotada no presente trabalho, é o de realizar uma análise semântica da Matemática do século XX, o que envolve muitos aspectos. Em primeiro lugar, é absolutamente essencial para o trabalho compreender que quando se faz referência à semântica não se trata aqui de uma função de interpretação que associa coisas aos termos da linguagem. Se assim fosse não teria sentido falar em análise semântica da Matemática, pois termos matemáticos não denotam coisas. A tese de que Fundamentos constitui uma semântica formal da Matemática significa que Fundamentos deve analisar condições formais da significação das relações matemáticas e adotar uma orientação às categorias semânticas de significado, verdade, explicação, unificação e objetividade. Algo análogo ocorre com relação à tese de que a Matemática constitui uma semântica formal para a Física. Análise semântica significa aqui análise das condições formais, dos pressupostos da significação. Nesse sentido, análise semântica claramente envolve sintaxe, já que sintaxe é uma condição formal da significação. De fato, divergência completa em relação à sintaxe implica ausência de significado. O ponto aqui é que a análise semântica, ou a semântica formal, não se esgota em considerações sintáticas. Como essas observações são centrais para o trabalho vamos desenvolver uma análise mais detalhada desses pontos nos próximos parágrafos.

Tradicionalmente, as reflexões de segunda ordem sobre a Matemática lidam com problemas filosóficos que apresentam uma componente semântica, tais como: a verdade matemática é objetiva? Qual é o fundamento e qual é a natureza da verdade matemática? O que significa compreender uma noção matemática? Essas são questões semânticas e o presente trabalho adota, com relação a Fundamentos, uma orientação na direção desse tipo de questão, o que não se reduz a fazer considerações sintáticas sobre elas. É claro que a sintaxe é tomada aqui como parte essencial do tratamento desses problemas filosóficos. Com efeito, Fundamentos possui métodos e, no século XX, a reflexão sobre o conhecimento matemático é fortemente marcada pelos desenvolvimentos da Lógica Matemática e, desse modo, de sistemas sintáticos. Contudo, nenhuma sintaxe complexa foi desenvolvida sem que uma semântica fornecesse a orientação, mais ainda, a organização das sintaxes criadas é tal que, deseja-se, a estrutura desses sistemas sintáticos reflete a semântica intencionada. Além disso, é uma observação trivial que os matemáticos raciocinam semanticamente e não se orientam por operações sintáticas sobre expressões simbólicas, já que a maioria sequer sabe o que é um sistema formal. Nesse contexto pode surgir a seguinte questão: para que então considerar a sintaxe já que, obviamente, é o significado que interessa e que o único objetivo de uma sentença é veicular o significado? Parte da resposta já foi dada acima, que a estrutura da sintaxe reflete a semântica, portanto é possível estudar os conceitos através da estrutura das sentenças que expressam os axiomas. Por outro lado, e mais importante, é que o significado de uma noção, expressa em um domínio universal para a Matemática, é algo complexo, enquanto sentenças são objetos sintáticos simples que são estudados com métodos matemáticos. Além disso, o significado é sempre constituído na própria estrutura de alguma sintaxe, no sentido de que não há significado fora de um sistema sintático, apesar do significado ir além de considerações combinatórias e, conforme já explicitado na Parte A, os sistemas sintáticos serem um veículo para o significado.[1] Portanto, a consideração da sintaxe apresenta um potencial de enriquecer a freqüentemente fraca compreensão preliminar de noções matemáticas, que, em alguns casos, é forte suficiente apenas para compreender a formulação de axiomas para essa noção. Nesses casos, estudar os axiomas sintaticamente pode mesmo acrescentar algo, e não apenas constitui uma reformulação estéril do que já estava colocado desde o início.

Nesse sentido, formal ***não*** deve ser confundido aqui com uma sintaxe particular. Formas são compreendidas em um sentido mais amplo como condições de apreensão ou de significação sem referência à matéria ou ao conteúdo. Relações formais são compreendidas desse modo, como condições formais de apreensão ou de significação de relações com possível conteúdo material. A afirmação de que a Matemática é formal não é uma afirmação sobre um sistema sintático específico qualquer. Nesse sentido, que a Física apreenda seus objetos através da Matemática significa que a Matemática é formalmente pressuposta pela Física. Esse significado de forma como condição de significação está diretamente relacionado com a caracterização da Matemática como uma teoria da forma lógica das ciências ou, em outras palavras, como uma semântica formal, e com o papel regulador e constitutivo que a Matemática desempenha em ciências como a Física Teórica Moderna.

Outro objetivo de Fundamentos é reforçar a unidade da Matemática, mostrar que a Matemática não é um amontoado informe de resultados, conceber a Matemática como um todo coeso. A unidade da Matemática é uma idéia reguladora e funciona como princípio metodológico, como hipótese de trabalho. O problema da unidade está diretamente relacionado com os objetivos fundacionais, já que até mesmo para se referir à Matemática como um assunto, um campo do conhecimento que é objeto de reflexão filosófica, é preciso concebê-la como um todo unitário. Nesse sentido, reforçar internamente a unidade da Matemática constitui uma determinação progressiva e intrínseca do que é o conhecimento Matemático. O método para lidar com esse problema também envolve considerações sintáticas. De fato, uma primeira aproximação para o problema pode ser obtida através da formalização de toda a Matemática em um sistema formal único. Também aqui a Lógica Matemática desempenha um papel importante e, conforme observado acima, reflexões ligadas ao problema da unidade foram, no século XX, acompanhadas por desenvolvimentos nessa disciplina, como o próprio desenvolvimento da Teoria de Conjuntos. Novamente há questões que vão além da mera sintaxe específica, como a própria questão do significado da formalização, e a questão sobre o grau de arbitrariedade dessas formalizações. Seria a Lógica Matemática relevante também para as questões fundacionais que estão em um patamar além do alcance de um estudo puramente sintático-combinatório? Essa questão é um dos principais motivos da presente investigação, e foi colocada explicitamente na Parte B como Questão Capital do trabalho.

A expressão Lógica Matemática pode ser compreendida de dois modos: como Lógica matematizada ou como Lógica da Matemática. O primeiro reflete o método da Lógica Matemática e o segundo o papel fundacional. Duas apresentações da Lógica Matemática podem diferir drasticamente de acordo com a distinção acima: é possível enfatizar qualquer um dos dois significados da expressão Lógica Matemática, tanto na atribuição de importância dos resultados quanto na forma de apresentação desses resultados. Por isso, dois livros com o mesmo título "Lógica Matemática" podem ser muito diferentes tanto na escolha de tópicos quanto na forma de apresentação. É possível dar como exemplo de texto que coloca ênfase em "Lógica da Matemática" o texto de Shoenfield (cf.:[Shoenfield, 38]), e como exemplo de texto de "Lógica matematizada" o texto de Monk (cf.:[Monk, 31]). Os dois têm o mesmo título e os dois são do mesmo nível (pós-graduação), não obstante, são textos radicalmente distintos. O primeiro é fundacional na escolha de tópicos e nas demonstrações finitárias que fornece, onde isso é possível. O último é matematizado desde o início, desenvolve a Lógica Matemática inteiramente em um contexto conjuntista infinitário e escolhe tópicos com acento mais matemático que fundacional. É claro que se trata de uma questão de ênfase: a "Logica da Matemática" não deixa de ser "Lógica matematizada", e vice versa. Contudo, a distinção é bastante clara.

A Lógica Matemática, mesmo no sentido fundacional, vai muito além de uma sintaxe. Porém, não é claro como certos resultados que estão além da sintaxe e que têm uma orientação mais matemática podem ser relevantes para Fundamentos. Conforme observado no início deste trabalho, nas primeiras seções da Parte A, existem resultados e raciocínios matemáticos que parecem dizer algo não trivial sobre a natureza da Matemática, que parecem fornecer alguma informação relevante para uma reflexão de segunda ordem sobre a Matemática. Em que, exatamente, consiste essa possível informação de segunda ordem? Será que os resultados de Lógica que dizem algo não trivial sobre a natureza da Matemática são apenas aqueles circunscritos nos limites da sintaxe (Lógica Finitária) como os Teoremas de Gödel da Incompletude? Uma das finalidades desta investigação é fornecer respostas para perguntas dessa natureza. O autor considera que, no mínimo, a presente investigação já estabeleceu como resultados positivos o fato de que essas questões constituem um problema real e o esclarecimento sobre quais direções se pode seguir em busca de respostas.

Nesta Parte C eu pretendo mostrar que, de algum modo, certos resultados, que não são exatamente clássicos, de Teoria de Modelos contêm informação de segunda ordem específica sobre o conhecimento Matemático contemporâneo, e podem, portanto, ampliar a parte da Lógica Matemática relevante para Fundamentos. Desse modo, a Parte C deve unificar as Partes A e B, e fornecer um fechamento para a construção como um todo. Não se trata apenas de tomar um resultado já clássico da parte infinitária da Lógica Matemática e mostrar seu conteúdo fundacional. Isso não seria problema, bastaria considerar o Teorema da Completude, ou os Teoremas de Lindström ou de Löwenheim-Skolem, ou ainda as provas de consistência da Aritmética de Peano. Todos esses resultados apresentam conteúdo fundacional e isso já foi discutido nas Partes A e B. O objetivo é considerar resultados que não foram, até agora, levados em conta em termos de Fundamentos.

A estratégia que o autor adota, a partir da próxima seção, para analisar essa questão da relevância fundacional da Lógica Matemática, em particular da Teoria de Modelos, é a de considerar mais de perto certos conteúdos matemáticos. Conforme colocado no início da Parte A, Fundamentos apresenta um terceiro aspecto relativo a conteúdos matemáticos que, de fato, fornecem alguma informação não trivial em termos de reflexão de segunda ordem sobre a Matemática. Portanto, de forma mais específica, minha estratégia consiste em realizar uma investigação, utilizando a Teoria de Modelos, sobre como isso ocorre, ou seja, como exatamente o raciocínio envolvido na correspondência de Galois pode dizer algo relevante e geral sobre a natureza da Matemática, de acordo com o quadro conceitual das Partes A e B. Trata-se de uma estratégia geral para investigar a relevância fundacional de disciplinas da Lógica Matemática através de conteúdos matemáticos. Por exemplo, a mesma estratégia, com as devidas adaptações, poderia ser utilizada para tentar mostrar, através de conteúdos como a dualidade de Stone, desenvolvimentos da Geometria Algébrica, ou a própria correspondência de Galois, que partes da Teoria de Categorias, ou que outras partes da própria Teoria de Modelos, possuem relevância fundacional. Qualquer conteúdo matemático que desempenha um papel unificador dentro da Matemática e que, aparentemente, constitui um padrão geral de raciocínio matemático é potencial candidato à função de guiar uma investigação análoga. Talvez a relevância fundacional da Teoria de Categorias esteja mais nas relações com conteúdos matemáticos interdisciplinares do que no papel que essa disciplina pode desempenhar como domínio universal para a Matemática. Na próxima seção será feita uma breve menção das relações que a Teoria de Categorias mantém com a própria correspondência de Galois, sem a preocupação de atingir grande profundidade nesse aspecto.

A partir da próxima seção, análises mais específicas serão realizadas, introduzindo novas noções e utilizando o quadro conceitual já explicitado. A última observação preliminar, que o autor considera relevante, é que, como deve estar evidente, a presente construção se insere no sulco dos grandes trabalhos fundacionistas do século XX, que consideraram tanto a relevância filosófica de resultados técnicos, quanto a Lógica Matemática como o instrumento essencial para as investigações sobre a natureza da Matemática. Na minha visão, esse papel da Lógica Matemática não é acidental ou puramente arbitrário. Ao contrário, essa disciplina, em grande medida, foi desenvolvida para investigar problemas de consistência da Matemática, de decidibilidade de teorias, de complexidade de definições, entre tantos outros problemas já mencionados na Parte A. Portanto, a Lógica Matemática desempenha um papel nas investigações de Fundamentos ***por necessidade racional***, por ser o único modo sistemático de investigar uma série de problemas fundacionais, e não por uma contingência qualquer. Além disso, a Lógica Matemática pode ser usada como método para estabelecer vínculos na Matemática que vão além de meras analogias, através da identificação de padrões gerais de raciocínio matemático.

§2- Uma Pletora de Teorias de Galois

Os trabalhos do matemático francês Evariste Galois exerceram enorme influência na Matemática do século XX, sendo uma das fontes do surgimento do conceito de Estrutura Matemática, que é central para essa disciplina atualmente. Há inúmeras menções ao nome “Galois”, espalhadas por toda a Matemática, algumas delas em contextos bastante afastados do contexto original dos trabalhos de Galois. Essas observações apontam reflexos da originalidade, fertilidade e generalidade das idéias de Galois. Na verdade, é possível afirmar que a Teoria de Galois marca a transição histórica da Álgebra como estudo de polinômios para a chamada Álgebra Moderna, ou seja, o estudo de estruturas algébricas. Esta seção será dedicada a uma exposição resumida de Teoria de Galois modelo-teórica, com detalhes suficientes para a seqüência das análises. É conveniente começar pelo:

TEOREMA FUNDAMENTAL DA TEORIA DE GALOIS: Considere E um corpo que estende o corpo F, tal que E é de dimensão finita, normal e separável sobre F. Considere G o grupo de Galois de E sobre F. Considere Γ o conjunto de subgrupos de G e Σ o conjunto de corpos intermediários entre E e F. As aplicações $H \mapsto \mathrm{Fix}\ H$ e $K \mapsto \mathrm{Gal}\ E/K$, onde $H \in \Gamma$ e $K \in \Sigma$, são inversas e, portanto, bijeções de Γ sobre Σ e de Σ sobre Γ. Além disso, essa correspondência entre grupos e corpos apresenta as seguintes propriedades:

(α) $H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow \mathrm{Fix}\ H_2 \subseteq \mathrm{Fix} H_1$.

(β) $|H| = [E:\mathrm{Fix} H]$; $[G:H] = [\mathrm{Fix} H:F]$.

(γ) H é normal em $G \Leftrightarrow \mathrm{Fix} H$ é normal sobre F. Nesse caso $\mathrm{Gal}\ (\mathrm{Fix}\ H)/F \cong G/H$.

Uma extensão algébrica de corpos E/F é dita normal se todo polinômio irredutível em $F[x]$ que possui uma raiz em E se fatora como um produto de fatores lineares em $E[x]$, e E/F é dita separável se o polinômio minimal de todo elemento de E sobre F não contém raízes múltiplas em nenhuma extensão de F. Se E/F é de dimensão finita então $[E{:}F]$ denota a dimensão da extensão. O grupo de Galois G de E/F é o conjunto dos automorfismos de E que fixam F ponto a ponto. Se a extensão é de dimensão finita, normal e separável, então o seu grupo de Galois é finito. Se H é um subgrupo de G, então $\mathrm{Fix}\ H$ é o corpo formado pelos elementos de E fixados pelos automorfismos de H. Se K é um corpo intermediário entre E e F, então $\mathrm{Gal}\ E/K$ é o subgrupo de G formado pelos automorfismos que fixam K ponto a ponto. Se G é um grupo finito, então $[G{:}H]$ denota o índice de H, ou seja, o número de classes laterais Hx (ou de xH), onde $x \in G$, determinado pelo Teorema de Lagrange.

Considere T uma Teoria de Primeira Ordem na linguagem L, completa, sem modelos finitos e que admite um modelo suficientemente grande (homogêneo e saturado) $\mathfrak{a}$, que será considerado fixado no que segue.[2] Na Teoria de Galois clássica, T pode ser a teoria dos corpos algebricamente fechados de característica zero e $\mathfrak{a}$ o corpo dos números complexos. O papel que o corpo dos complexos desempenha no contexto da Álgebra clássica está baseado em duas propriedades desse corpo. Primeiro, supostamente, as raízes de polinômios que são consideradas na Teoria de Galois "estão em algum lugar". Portanto uma função que o corpo dos complexos desempenha é a de fornecer raízes para os polinômios, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (clássica). Depois os complexos constituem uma estrutura minimamente assimétrica que possui automorfismos suficientes para desenvolver a Teoria de Galois. Essas propriedades podem ser formuladas e adaptadas para um contexto puramente lógico (modelo-teórico) e uma Teoria de Galois "lógica" pode ser obtida com base em uma estrutura com essas propriedades. Tal como a Teoria de Galois clássica pode ser usada para investigar o problema de (in)solubilidade de equações algébricas, a versão modelo-teórica pode ser usada para investigar problemas nessa direção. A exposição seguirá a versão de Tsuboi (cf.:[Tsuboi, 43]), e, a partir desse ponto, as definições necessárias serão fornecidas, começando pela noção que, no contexto modelo-teórico, desempenha o papel que os polinômios desempenham na Teoria de Galois clássica é dada pela seguinte definição:

DEFINIÇÃO: Se $A \subseteq \mathfrak{a}$ e $a \in \mathfrak{a}$, então o *1-tipo de* a *sobre* A em $\mathfrak{a}$, denotado por $tp^{\mathfrak{a}}(a/A)$, é definido por:

$$tp^{\mathfrak{a}}(a/A) \overset{def}{=} \{\varphi \in S_1(L(A)) \mid \mathfrak{a}(\varphi_x[v]) = \top\},$$

onde $L(A)$ é a linguagem obtida a partir de L que inclui nomes para os elementos de A, $S_1(L(A))$ é o conjunto de fórmulas na linguagem $L(A)$ com apenas uma variável livre x e v é o nome de a em $L(\mathfrak{a})$. Um conjunto de fórmulas $\Phi \subseteq S_1(L(A))$ é um *1-tipo* se Φ é $tp^{\mathfrak{a}}(a/A)$, para algum $A \subseteq \mathfrak{a}$ e $a \in \mathfrak{a}$. Mais geralmente, se $\bar{a}$ é uma seqüência finita de elementos de $\mathfrak{a}$, então o *n-tipo de* a *sobre* A em $\mathfrak{a}$, denotado por $tp^{\mathfrak{a}}(\bar{a}/A)$, é definido por:

$$tp^{\mathfrak{a}}(\bar{a}/A) \overset{def}{=} \{\varphi \in S_n(L(A)) \mid \mathfrak{a}(\varphi_{x_1 \ldots x_n}[v_1 \ldots v_n]) = \top\},$$

onde $S_n(L(A))$ é o conjunto de fórmulas na linguagem $L(A)$ com apenas n variáveis livres $x_1,\ldots,x_n$, e $v_1,\ldots,v_n$ são, respectivamente, os nomes de $a_1,\ldots,a_n$, onde $\bar{a}=(a_1,\ldots,a_n)$, em $L(\mathfrak{a})$. Uma seqüência com apenas um elemento é identificada com o elemento. Um conjunto de fórmulas $\Phi \subseteq S_n(L(A))$ é um *n-tipo* ou, simplesmente, um *tipo* se Φ é $tp^{\mathfrak{a}}(\bar{a}/A)$, para algum $A \subseteq \mathfrak{a}$ e alguma seqüência finita $\bar{a}$ de elementos de $\mathfrak{a}$.

Se a é um número complexo e A é um subcorpo do corpo dos números complexos, tal que a é algébrico sobre A, então o 1-tipo de a sobre A contém o conjunto de equações obtido a partir do ideal gerado pelo polinômio minimal, na variável x, de a sobre A, igualando cada polinômio do ideal a zero. As noções, no contexto dos corpos, de raiz de polinômio e elemento algébrico são substituídas, no contexto modelo-teórico, pelas noções dadas na seguinte definição:

DEFINIÇÃO: Se Φ é um tipo e $\overline{b}=(b_1,...,b_n)$ é uma seqüência finita em $\mathfrak{a}$, então $\overline{b}$ é uma *realização* de Φ se, e somente se, $\mathfrak{a}(\varphi_{\bar{x}}[\overline{\mu}])=\top$ para cada $\varphi\in\Phi$, onde $\varphi_{\bar{x}}[\overline{\mu}]$ é uma abreviação para $\varphi_{x_1...x_n}[\mu_1...\mu_n]$ e $\mu_1,...,\mu_n$ é a seqüência finita dos nomes dos elementos $b_1,...,b_n$ em $L(\mathfrak{a})$. Um tipo Φ é dito *algébrico* se possui apenas uma quantidade finita de realizações. Um elemento $a\in\mathfrak{a}$ é *algébrico sobre* $A\subseteq\mathfrak{a}$ se o tipo de a sobre A é algébrico, e, mais geralmente, uma seqüência $\overline{a}$ é *algébrica sobre* $A\subseteq\mathfrak{a}$ se o tipo de $\overline{a}$ sobre A é algébrico. Um conjunto de seqüências finitas é *algébrico* se todos os seus elementos são algébricos.

DEFINIÇÃO: O subconjunto de $\mathfrak{a}$ formado por todos os elementos algébricos sobre A é chamado de *fecho algébrico modelo-teórico* de A e é denotado por $\mathrm{acl}(A)$. Se a é a única realização do $\mathrm{tp}^{\mathfrak{a}}(a/A)$, então a é dito *definível* sobre A. O subconjunto de $\mathfrak{a}$ formado por todos os elementos definíveis sobre A é chamado de *fecho definível* de A e é denotado por $\mathrm{dcl}(A)$.

Para um subcorpo do corpo dos números complexos o fecho algébrico usual e o fecho algébrico modelo-teórico coincidem. No contexto modelo-teórico, os subconjuntos de $\mathfrak{a}$ que desempenham o papel que os subcorpos dos complexos desempenham na Teoria de Galois clássica são os subconjuntos A de $\mathfrak{a}$ tais que $\mathrm{dcl}(A)=A$.

DEFINIÇÃO: Considere $A\subseteq B\subseteq\mathfrak{a}$. Uma aplicação $f:B\rightarrow B$ é uma *aplicação elementar biunívoca* se f é uma permutação de B e para cada seqüência de elementos $a_1,..,a_n\in B$ e cada fórmula $\varphi\in S_n(L)$, com apenas n variáveis livres $x_1,...,x_n$, $\mathfrak{a}(\varphi_{x_1...x_n}[\nu_1...\nu_n])=\top$ se, e somente se, $\mathfrak{a}(\varphi_{x_1...x_n}[\mu_1...\mu_n])=\top$, onde $\nu_1,...,\nu_n$ são, respectivamente, os nomes de $a_1,...,a_n$ e $\mu_1,...,\mu_n$ são, respectivamente, os nomes de $f(a_1),...,f(a_n)$ em $L(\mathfrak{a})$. $G(B/A)$ denota o grupo das aplicações $f : B\rightarrow B$ elementares biunívocas e que fixam A pontualmente.

Uma aplicação elementar biunívoca $f : B\rightarrow B$ admite uma extensão para uma aplicação elementar biunívoca $g : acl(B)\rightarrow acl(B)$ (cf.:[Hodges, 21], página 167). No contexto original da Teoria de Galois, o grupo de Galois é um grupo de automorfismos. Para obter a definição de automorfismo (parcial) basta modificar a definição acima, e enfraquecer a condição de preservação de fórmulas ao exigir a preservação para fórmulas atômicas apenas. Como, no contexto original da Teoria de Galois, a teoria dos corpos algebricamente fechados de característica zero admite eliminação de quantificadores, é possível estender os automorfismos de subcorpos do corpo dos complexos para o respectivo fecho algébrico. Já no contexto geral, é preciso trabalhar com as aplicações elementares biunívocas para garantir a propriedade de extensão mencionada acima.

Agora, para formular a Teoria de Galois no contexto modelo-teórico é preciso apresentar uma versão, para esse contexto geral, da noção de extensão normal e de dimensão finita da Teoria dos Corpos:

DEFINIÇÃO: Considere $A\subseteq\mathfrak{a}$, tal que $dcl(A)=A$ e que, para $a_1,..,a_n\in\mathfrak{a}$, $A(a_1,..,a_n)$ denota $dcl(A\cup\{a_1,..,a_n\})$. Um conjunto $B\subseteq\mathfrak{a}$, tal que $A\subseteq B$, é dito *finitamente gerado sobre* A se $B\subseteq A(a_1,..,a_n)$, para algum $\{a_1,..,a_n\}\subseteq acl(A)$.

Finalmente, a noção de normalidade de uma extensão, no contexto modelo-teórico, é expressa pela:

DEFINIÇÃO: Considere $A,B \subseteq \mathfrak{a}$, tais que $A \subseteq B \subseteq acl(A)$, $dcl(A)=A$ e $dcl(B)=B$. Nesse caso, B é uma extensão normal de A se, para todo $b \in B$, se $c \in acl(A)$ realiza o mesmo tipo que b, então $c \in B$.

DEFINIÇÃO: Considere um conjunto finito $F=\{\bar{a}_1,...,\bar{a}_n\}$ de seqüências finitas de elementos de $\mathfrak{a}$. Então F é *codificado* por $C=\{b_1,...,b_m\} \subseteq \mathfrak{a}$ sobre A se,

$$\text{para cada } f \in G(\mathfrak{a}/A), f(F)=F \text{ se, e somente se, } f\lceil C=id_C.$$

A teoria T apresenta a *propriedade fraca do conjunto finito* se todo conjunto F que é algébrico sobre A é codificado por algum subconjunto C sobre A. A teoria T apresenta a *propriedade do conjunto finito* se todo conjunto F é codificado por algum subconjunto C sobre $\emptyset$.

No contexto da Teoria de Galois clássica, um conjunto finito de números complexos $F=\{a_1,...,a_n\}$, por exemplo, é codificado pelo conjunto formado pelos coeficientes do polinômio:

$$p(x)=(x-a_1)...(x-a_n),$$

sobre $\emptyset$. Para o caso geral, de um conjunto finito de seqüências finitas de números complexos $F=\{\bar{a}_1,...,\bar{a}_n\}$, onde $\bar{a}_r=(a_{r1},...,a_{rm})$, considere o seguinte polinômio:

$$p(z,x_1,...,x_m)=(z-a_{11}x_1-...-a_{1m}x_m)...(z-a_{n1}x_1-...-a_{nm}x_m).$$

F é codificado pelo conjunto dos coeficientes do polinômio $p(z,x_1,...,x_m)$, sobre $\emptyset$ (cf.:[Holly, 22]). Isso demonstra que a teoria dos corpos algebricamente fechados de característica zero apresenta a propriedade (fraca) do conjunto finito.

As definições dadas acima fornecem os elementos necessários para a formulação do Teorema Fundamental da Teoria de Galois no contexto da Teoria de Modelos.

TEOREMA (Galois-Poizat): As seguintes condições sobre uma teoria T são equivalentes:

(1) T apresenta a propriedade fraca do conjunto finito

(2) Se B é uma extensão normal, finitamente gerada de A, então há uma correspondência de Galois entre $\Sigma = \{C \mid A \subseteq C \subseteq B,\ dcl(C)=C\}$ e o conjunto Γ dos subgrupos de $G(B/A)$. Mais especificamente, a função $\Psi\colon \Sigma \to \Gamma$, definida por:

$$\Psi(C) \stackrel{def}{=} G(B/C),$$

é uma bijeção.

O Teorema acima contém, como caso particular, a correspondência de Galois da Álgebra.[3] Esses desenvolvimentos não constituem a única formulação possível de uma Teoria de Galois Abstrata em um contexto lógico, há outras. As iniciativas pioneiras nessa direção são os trabalhos independentes do matemático francês Marc Krasner e do matemático português José Sebastião e Silva. Há vários resultados de Teoria de Modelos diretamente relacionados com esses trabalhos originais como o Teorema de Kueker-Reyes e o Teorema de Svenonius, e também o clássico Teorema de Beth. São resultados que relacionam invariância com definibilidade em uma linguagem (possivelmente infinitária, no caso do Teorema de Kueker-Reyes (cf.:[Hodges, 21], página 143)). Contudo, tanto os trabalhos de Krasner e Sebastião e Silva quanto os resultados relacionados de Teoria de Modelos não contêm a correspondência de Galois da Álgebra como caso particular, há apenas uma analogia nesses casos. Por exemplo, o Teorema de Svenonius afirma que, para uma Estrutura de Primeira Ordem M, se uma relação r com universo M não é definível na estrutura M então existe uma extensão elementar (M', r') de (M, r) e um automorfismo de M' que não preserva r'. No caso em que a estrutura M é finita, a extensão elementar é, na verdade, isomorfa e, nesse caso, o Teorema afirma que r é definível em M (em Primeira Ordem) se, e somente se, r é preservada por todos os automorfismos de M. Já no Teorema de Galois-Poizat, a propriedade fraca do conjunto finito expressa uma condição de invariância, e o item (2) do Teorema expressa uma relação entre conjuntos definivelmente fechados e conjuntos fixados por grupos de aplicações elementares biunívocas.

Os trabalhos de Sebastião e Silva e Krasner foram pioneiros na Teoria de Modelos das linguagens infinitárias, em uma época em que a própria Teoria de Modelos ainda dava os primeiros passos. Krasner foi o orientador de Poizat, e sua influência é explicitamente exposta no artigo original de Poizat sobre a teoria esboçada acima (cf.:[Poizat, 34]). Há uma proposta de atualização das idéias originais de Sebastião e Silva e de Krasner, relacionando definibilidade e invariância (cf.:[da Costa et. al., 13]). Há ainda as Teorias de Galois em contexto categorial, devidas à Magid, Grothendieck e Joyal-Tierney (cf.:[Borceaux et. al., 2]), que generalizam a correspondência de Galois do ponto de vista categorial. Resultados relacionados, associando, no espírito do Teorema de Beth, definibilidade e invariância, em um contexto categorial, foram obtidos por Makkai (cf.:[Makkai, 28]) e por Butz-Moerdijk (cf.:[Butz, et. al., 6]). Há muitos outros resultados nessa mesma linha. É possível desenvolver também uma análise modelo-teórica da Teoria de Galois Diferencial de Liouville-Picard-Vessiot (cuja versão moderna é devida a Kolchin (cf.:[Poizat, 35])) que segue o padrão acima, com algumas modificações, mas ainda inteiramente em um contexto lógico-universal. Portanto, a construção de Poizat também lança luz, de um modo indireto, na Teoria de Galois Diferencial.

A próxima seção será dedicada à análise, dentro do quadro fundacional estabelecido no presente trabalho, do significado dos aspectos técnicos expostos na presente seção, e da Teoria de Modelos de um modo mais amplo. Desse modo, pretende-se mostrar como a Teoria de Modelos pode ser relevante para uma reflexão sobre o conhecimento matemático, no sentido dos Fundamentos do Pensamento Matemático no Século XX. As análises que serão realizadas na próxima seção têm o objetivo de mostrar qual é o significado desse estudo de caso em Teoria de Galois, em termos de Fundamentos, e que esse significado fundacional é consistente com as principais teses expostas e defendidas neste trabalho.

§3- Teoria de Modelos e Matemática

A temática específica que está presente neste trabalho envolve unificação, generalização e explicação em Matemática e é a temática de uma reflexão fundacional sobre a Matemática mais próxima da Matemática. Isso é reflexo de um posicionamento filosófico adotado por mim, segundo o qual o fundamento da verdade matemática não está em algo externo à Matemática. A Matemática constitui um sistema autônomo, auto-contido, o fundamento da sua verdade não está na cabeça do matemático, nem em uma realidade exterior de objetos, e as noções matemáticas, que são o seu objeto de estudo, são constituídas historicamente, mediante relações externas, da Matemática com outras ciências, e internas, da Matemática consigo mesma. Sobretudo, a fundamentação da Matemática deve ser compreendida em um sentido anti-cartesiano: a Matemática não se funda no privado, na experiência interna, em uma intuição intelectual; ao contrário, o fundamento da verdade matemática está nas próprias regras de exercício dessa disciplina e de compartilhamento da sua linguagem (que são públicas), e é nisso que consiste a objetividade da Matemática. Os últimos parágrafos deste trabalho serão dedicados à explicação resumida das teses defendidas na argumentação desenvolvida ao longo do texto, passando pela retomada desse posicionamento de proximidade de Fundamentos com a Matemática, reconstruindo pontos da argumentação, agora sobre a perspectiva do final do trabalho.

O ponto de partida da presente investigação é o pressuposto de que a Matemática constitui (mas ***não*** se resume a) uma espécie de linguagem abstrata, ou seja, não necessariamente interpretada em termos de objetos físicos, porém significativa. Dentro dessa concepção (semântica), os primeiros problemas que se colocam dizem respeito ao funcionamento desse tipo de linguagem. Conforme afirmado no parágrafo acima, eu defendo que o fundamento da verdade matemática não repousa em uma realidade exterior de objetos (mentais ou não). Portanto, a linguagem matemática não funciona segundo um mecanismo de referência a entidades externas à linguagem. Nossa posição sobre o funcionamento da linguagem matemática pode ser resumida em duas teses: primeiro de que a verdade matemática é de natureza formal, segundo de que a linguagem matemática é significativa e que o significado dos termos matemáticos é constituído na própria estruturação da linguagem matemática. A primeira tese afirma o caráter formal da Matemática, no sentido amplo de formal, conforme extensa discussão na Parte A. A segunda tese é bastante forte e afirma que o significado da linguagem matemática é constituído internamente, tese que apareceu já na §1 acima onde foi afirmado que os sistemas sintáticos particulares devem ser tais que sua estrutura reflete a semântica intencionada. É importante notar que não se trata de um nominalismo e não há aqui qualquer defesa de uma fundamentação sintática-combinatória para a Matemática. Na concepção semântica, os sistemas formais são importantes apenas na medida em que são adequados para expressar as noções matemáticas e que podem servir de veículo para uma investigação lógico-matemática dessas noções. Uma boa parte dos resultados da Lógica Matemática diz respeito à adequação dos sistemas formais. No contexto da Teoria de Modelos, é possível proceder da seguinte forma para analisar a adequação de sistemas formais: primeiro é preciso que as noções matemáticas se encontrem expressas em um domínio universal, papel desempenhado pela Teoria dos Conjuntos. Em seguida, com as técnicas de Teoria de Modelos é possível investigar se algum sistema formal é adequado para expressar uma noção específica, tal como expressa pela Teoria de Conjuntos, ou não, e quais propriedades caracterizam as noções capturáveis por tipos específicos de sistemas formais e os sistemas formais adequados para capturar certas noções. Também é possível investigar a própria adequação da Teoria de Conjuntos.[4]

O funcionamento da linguagem matemática pode ser compreendido em termos de uma semântica intencional, que é constituída na própria estrutura da linguagem matemática. O que há de muito especial com a sintaxe da linguagem matemática é que os termos apresentam estrutura interna, e que essa estrutura reflete a intenção. É importante observar que, ao falar de intenção, não há um apelo ao privado, ao contrário, essa intenção é pública e é compartilhada através da linguagem natural: a intenção é aquilo que a explicação da intenção explica. Na verdade, essa é uma observação bastante simples e apenas afirma que a Matemática não é comunicada ou compartilhada em linguagem de máquina. Não há nenhum subjetivismo, o sujeito aqui é apenas um agente lógico-epistêmico, para o qual são referidos atos lógico-epistêmicos, e que segue regras. A subjetividade privada não desempenha nenhum papel.

Para compreender que os termos da sintaxe da linguagem matemática apresentam estrutura interna, e que essa estrutura reflete a intenção, basta observar alguns signos matemáticos como desenho de um triângulo, uma seqüência de sete barrinhas, que intencionalmente se refere ao número sete, ou qualquer outro sistema de notação em Matemática, do mais complexo ao de menor grau de complexidade. Nesse sentido, a segunda tese funciona como uma caracterização para a Matemática: só há Matemática quando há algum sistema de notação, ou alguma sintaxe estruturada de tal modo que o significado dos termos é constituído pela estrutura da sintaxe. É conveniente notar que a sintaxe deve ser compreendida em um sentido amplo, como um elemento organizador, estruturante, que pode conter desenhos ou diagramas, não há restrição prévia com relação à forma gráfica dos signos. O significado da linguagem matemática, compreendido desse modo, é objeto de estudo da Lógica Matemática, em particular, da Teoria de Modelos, teses que foram já explicadas e amplamente discutidas desde a Parte A.

A linguagem matemática pode ser interpretada através da sua relação com a Física Teórica ou com outra ciência. Na verdade, o papel que a Matemática desempenha na Física Teórica é um papel constitutivo dos objetos de estudo, não apenas uma linguagem entre outras a ser usada pela ciência da natureza. É isso que significa a afirmação que a Física Teórica é semanticamente condicionada pela Matemática, que os objetos da Física Teórica são apreendidos matematicamente e que não se trata de mera aplicação. Este trabalho defende a tese de que essas relações da Matemática com a Física Teórica, que possam eventualmente ser estabelecida com outras ciências teóricas, e, também, da Matemática consigo mesma devem ser caracterizadoras da natureza da Matemática. A Matemática constitui parte do aparato conceitual utilizado na descrição teórica de regularidades segundo as quais se procura apreender o mundo físico. Também a Matemática constitui uma auto-investigação de si mesma. Desse modo, o presente trabalho caracteriza a Matemática como semântica formal. Semântica formal não é entendida aqui como uma função de interpretação que leva termos em coisas, o que nem poderia ser formal. Semântica formal deve ser compreendida como condições formais de significação, referente à forma lógica, observação já realizada e enfatizada *ad nauseam* no texto.

Os trabalhos em Fundamentos passam pela organização da Matemática. É preciso organizar a Matemática para poder realizar algumas análises, como aquelas a respeito dos problemas da consistência da Matemática, da decidibilidade de teorias matemáticas e da expressividade de noções matemáticas. Mas a organização da Matemática também possui um valor intrínseco em termos de unificação da Matemática, e não se reduz a uma formalização da Matemática em um sistema formal da Teoria de Conjuntos, ou em qualquer outro. Organizar a Matemática também significa organizar os padrões de raciocínio em termos de uma economia de argumentação. Portanto a organização pode significar uma redução não apenas de objeto, uma redução do tipo “tudo é conjunto”, por exemplo, mas, também, uma redução dos padrões de raciocínio. Conteúdos matemáticos bem organizados devem apresentar modularidade, ou seja, devem ser organizados de forma econômica em termos de padrões de raciocínio. Quando isso é alcançado torna-se possível uma exposição simplificada do conteúdo, em que não ocorre repetição das “mesmas” demonstrações a cada instante, mas que abrange completamente o conteúdo. Esse segundo aspecto da organização também representa unificação: reduzir os padrões de raciocínio significa explicitar uma relação entre o diverso. E Fundamentos, dentro da concepção apresentada neste trabalho, deve buscar a unidade da Matemática, deve estabelecer vínculos internos na Matemática. A unificação pode ser obtida por uma generalização: um resultado mais geral pode conter vários outros como instâncias particulares. Contudo, há generalizações extremamente artificiais que não unificam instâncias interessantes e não desempenham um papel relevante. Portanto, não é qualquer generalização que representa um reforço na unidade da Matemática.

Na presente investigação o foco de interesse é a questão acerca da relevância fundacional da Teoria de Modelos. Sobre essa questão, a argumentação desenvolvida até aqui aponta para duas funções que a Teoria de Modelos pode desempenhar como base para seu papel fundacional. Em primeiro lugar, um conteúdo de Teoria de Modelos pode constituir de resultados sobre definibilidade, portanto pode ser relevante em termos de uma reflexão sobre as complexidades envolvidas na expressividade de noções matemáticas. Além disso, um conteúdo de Teoria de Modelos pode desempenhar um papel unificador ao explicitar vínculos entre noções que, antes, se encontravam apenas vagamente relacionados por meio de analogias. De fato, frequentemente é possível apreender um resultado ou uma construção matemática, em particular, várias construções da Álgebra clássica, como um conteúdo modelo-teórico, o que foi designado por universalização de conteúdos matemáticos. Essa é a função da Teoria de Modelos como instrumento capaz de alçar uma situação matemática particular a um contexto lógico universal, ao mostrar que os resultados matemáticos envolvidos podem ser apreendidos como resultados sobre a relação de conseqüência lógica, o que pode fornecer modularidade para a Matemática com a redução e identificação de padrões gerais de raciocínio. Se um resultado ou construção matemática é universalizável, então o caráter desse conteúdo matemático é a universalidade da Lógica, o que aponta para uma inseparabilidade da Lógica e da Matemática. Não é possível compreender a natureza da Matemática sem passar pela relação que essa disciplina tem com a Lógica. Do ponto de vista do fundamento da verdade da Matemática, essa disciplina constitui um sistema fechado, não se apóia em nada externo à Matemática, mas a natureza dessa disciplina está justamente nas relações que ela mantêm consigo mesma e com outras disciplinas como a Lógica e a Física Teórica.

No caso da Teoria de Galois, a correspondente versão modelo-teórica exerce as duas funções mencionadas acima. De fato, o Teorema de Galois-Poizat, e outros resultados relacionados de Teoria de Modelos, fornecem uma ligação entre definibilidade de elementos e relações, e invariância por aplicações elementares, e essa ligação é eficiente para resolver problemas em contextos matemáticos específicos. Contudo, identificar um padrão geral de raciocínio e explicitar a estrutura lógica envolvida na Teoria de Galois clássica, através da universalização dos resultados, é a função fundacional mais importante exercida por essa construção modelo-teórica de Poizat. O desenvolvimento da Teoria de Galois modelo-teórica explicita a estrutura lógica dos raciocínios que levam à Teoria de Galois clássica e mostra que esses raciocínios, e a própria correspondência de Galois, constituem um padrão matemático fundamental, que pode ser frutífero em outros contextos: a Teoria de Galois é um método, não tem muito a ver com extensões de corpos e seu lugar natural, enquanto método matemático, é a Lógica Matemática. De fato, Galois desenvolveu seus trabalhos em uma época em que a Álgebra era, basicamente, o estudo de polinômios e sequer havia uma definição de corpo. Essa é uma contribuição para a organização dos padrões fundamentais de raciocínio matemático, que é uma forma de redução fundacional. Apenas não é uma redução orientada à categoria do objeto, como a redução conjuntista da Matemática.

A correspondência de Galois e muitos outros resultados e construções algébricas podem ser obtidos como resultados de Teoria de Modelos. Para mencionar mais um resultado clássico, o Teorema de Steinitz de classificação dos corpos algebricamente fechados pode ser apreendido como um resultado de Teoria de Modelos. Ao delinear mais precisamente, e com mais clareza, a estrutura lógica de padrões de raciocínio da

Álgebra, por meio da eliminação de elementos específicos não essenciais do contexto original desses padrões e da formulação de noções modelo-teóricas apropriadas, a Teoria de Modelos fornece um enquadramento para a Álgebra, no sentido que identifica e organiza padrões gerais de raciocínio e, dessa forma, confere modularidade a essa disciplina. Além disso, a apreensão de conteúdos algébricos segundo a forma específica da Teoria de Modelos, o enquadramento modelo-teórico da Álgebra, revela a natureza universal dos padrões de raciocínio envolvidos e confere unidade a esses conteúdos algébricos. A linha de desenvolvimento da Teoria de Modelos como um enquadramento para a Álgebra inicia com os resultados pioneiros de Mal'cev de aplicação do Teorema da Compacidade na teoria de representações lineares de grupos (os Teoremas Locais), passa pelos trabalhos de Robinson e Tarski (Modelo-Completude, Diagramas, Eliminação de Quantificadores, etc.) e chega aos desenvolvimentos da segunda metade do século XX (Eliminação de Imaginários, Teorias Fortemente Minimais, etc). Todo esse aparato fornece unidade para a Álgebra ao exibir vínculos significativos, em termos de Teoria de Modelos, entre noções algébricas, ao identificar e organizar padrões de raciocínio e, desse modo, conferir a conteúdos algébricos modularidade e universalidade lógica, e ao aplicar, de modo eficiente, métodos da Lógica Matemática a um contexto algébrico específico. Enfim, ao mostrar que boa parte da Álgebra pode ser apreendida segundo um plano lógico coeso, a Teoria de Modelos confere racionalidade a essa disciplina, mostra que as noções dessa disciplina possuem vínculos significativos em termos de um âmbito lógico: boa parte da Álgebra está contida em um estudo geral da relação entre Teorias e Modelos.

É conveniente observar que há outros resultados relevantes de Teoria de Modelos que não estão diretamente ligados a um conteúdo matemático específico, mas que sua relevância fundacional deriva apenas do papel que pode ser desempenhado por esse resultado em uma reflexão sobre a adequação dos sistemas formais. Por exemplo, o Teorema da Completude é um resultado de Teoria de Modelos que é relevante para uma análise da adequação dos sistemas formais para expressar as noções matemáticas, consequentemente, para o status da Lógica de Primeira Ordem como o sistema semântico padrão. Portanto é relevante, do ponto de vista fundacional. Também, é conveniente observar que o presente trabalho não defende a tese de que a Teoria de Modelos é relevante como um todo para Fundamentos. A argumentação desenvolvida não serve para estabelecer relevância fundacional em bloco, ao contrário, a argumentação procede por estudo de caso, e não há como ser de outro modo. Além disso, no presente estudo, não se levantam dúvidas de que algumas partes da Teoria de Modelos se degeneraram em desenvolvimentos tecnicamente rebuscados e irrelevantes do ponto de vista fundacional. A presente investigação procura compreender a questão da relevância fundacional da Teoria de Modelos, e a análise desenvolvida possui uma função positiva, mas, sem dúvida, possui, também, uma função negativa. Contudo, afirmar que a Teoria de Modelos é irrelevante para Fundamentos com base em um argumento de circularidade é um equívoco grosseiro. Não é circular utilizar a Matemática para ***analisar*** o conhecimento matemático. As demonstrações em Teoria de Modelos utilizam os mesmos pressupostos que as demonstrações em Álgebra ou Análise. Procurar realizar algo em Matemática que a Teoria de Modelos afirma ser impossível é o mesmo que buscar uma inconsistência na Matemática.

Portanto, o significado fundacional desse enquadramento modelo-teórico da Teoria de Galois, e de modo mais geral, da Álgebra clássica, está ligado ao terceiro aspecto de Fundamentos, que é o aspecto de Fundamentos que apresenta maior proximidade com conteúdos matemáticos específicos. De fato, essa construção lógica não está diretamente ligada a um programa de explicitação de pressupostos de algum tipo e, também, não está relacionada a uma questão geral da Filosofia da Matemática. Ao contrário, essa construção lógica está em contato direto com um conteúdo matemático específico, mas não para reduzi-lo a algum domínio mais abrangente, mas sim para analisá-lo enquanto padrão de raciocínio matemático. Desse modo, essa construção não introduz elementos externos na Matemática e reforça a unidade dessa disciplina internamente, através da identificação de um padrão fundamental de raciocínio. Além disso, um resultado modelo-teórico, que relaciona definiblidade e invariância e que identifica quando uma Teoria de Primeira Ordem admite uma correspondência de Galois, contribui para uma classificação das noções matemáticas pela análise das complexidades de expressão dessas noções. Na verdade, há uma vasta bibliografia que investiga propriedades definíveis em estruturas com os métodos modelo-teóricos ligados ao Teorema de Galois-Poizat (cf.:[Holly, 22], por exemplo). Esse tipo de contribuição para a classificação das noções matemáticas também representa um reforço para unidade da Matemática, pois constitui uma determinação progressiva do que é uma noção matemática, em relação direta com os conteúdos matemáticos.

§4- Considerações Finais

Conforme a argumentação acima, algumas partes da Teoria de Modelos reforçam internamente, em uma relação direta ao conteúdo, a unidade da Álgebra Moderna, através da apreensão de conteúdos algébricos segundo um princípio lógico unificador, o princípio de relações lógicas entre Teorias e Modelos. Como reforçar a unidade da Matemática internamente é uma das finalidades centrais dos Fundamentos do Pensamento Matemático no Século XX, então essas partes da Teoria de Modelos são relevantes do ponto de vista fundacional. Contudo, o presente estudo não se resume a uma argumentação em favor dessa tese, e mesmo relativamente ao problema da unidade, esse não é o único resultado importante da investigação. Na verdade, as Partes A e B, principalmente, possuem uma abrangência bem mais extensa, e a própria Parte C contém teses gerais sobre a Matemática e sobre Fundamentos. Por exemplo, as teses de que a Fundamentos não cabe o papel de legislar sobre a Matemática e de que os critérios de adoção de princípios e métodos na Matemática são internos e relativos à utilidade e necessidade racional, não são baseados em pré-concepções justificadas por alguma escola de Filosofia da Matemática, são tão importantes quanto a tese de que Fundamentos não é uma teoria da origem psicológica da Matemática e que Fundamentos não se baseia no privado. Outras teses igualmente importantes são: a tese de que a verdade matemática não se apóia em nada externo à Matemática e as teses sobre a organização da Matemática e o conhecimento finitário. Há várias outras no texto. Desse modo, o presente trabalho constitui uma análise geral da questão acerca da relevância da Lógica Matemática para uma reflexão sobre o conhecimento matemático e do significado fundacional de conteúdos matemáticos, com ênfase na relevância da Teoria de Modelos.

Para julgar a relevância ou irrelevância de um conteúdo técnico da Lógica Matemática para uma reflexão sobre o conhecimento matemático atual é preciso, em primeiro lugar, ter presente uma formulação, suficientemente clara, do que é esse conhecimento matemático contemporâneo e no que consiste essa reflexão, que denominamos, neste estudo, de Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX. Essa etapa preliminar da investigação foi desenvolvida nas Partes A e B deste trabalho, onde mostramos que certos problemas de complexidade de expressão de noções matemáticas, de universalização de conteúdos matemáticos, entre outros, devem fazer parte das investigações ligadas aos Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX, e que buscar a unidade da Matemática é uma meta permanente dos Fundamentos. O texto mostrou, nas Partes B e C, que a Teoria de Modelos desempenha um papel de instrumento de análise da expressividade de noções matemáticas e um papel de veículo de universalização de conteúdos matemáticos.

Qual é a importância de desempenhar esses papéis? Em primeiro lugar, uma observação importante é que as noções matemáticas não são todas iguais. Uma noção expressável em primeira ordem, o que foi chamada, na Parte A, de conceito ou propriedade, não é contaminada de forma tão dramática pela vagueza inerente da Teoria de Conjuntos quanto uma noção expressável apenas em segunda ordem. Essa é uma observação muito importante. É comum se pensar que as noções expressáveis em primeira ordem são mais vagas do que aquelas expressáveis em segunda ordem porque as primeiras não podem ser categóricas, exceto em casos triviais em que os modelos são todos finitos. A categoricidade, que algumas noções de segunda ordem podem apresentar, afirma a existência de isomorfismos, o que pode variar segundo a $\in$-interpretação transitiva da Teoria de Conjuntos, como é sabido desde o paradoxo de Skolem. Portanto, a afirmação de existência de isomorfismo é vaga e uma noção de segunda ordem pode deixar de ser satisfeita por um conjunto ao se considerar uma relativização, o que não ocorre com as noções de primeira ordem, pela absolutidade da relação de satisfação, pois a classe de modelos de uma Teoria de Primeira Ordem (a extensão de um conceito) não pode sofrer variação através da relativização por qualquer $\in$-interpretação transitiva da Teoria de Conjuntos. O fato de que as noções expressáveis em primeira ordem não podem ser categóricas mostra, na verdade, que é a noção de categoricidade que é vaga. Desse modo, a compreensão das noções matemáticas não pode ser uniforme; a noção de grupo é completamente diferente, em termos da semântica, da noção de corpo ordenado completo, e a noção de comutatividade no contexto dos grupos é completamente diferente, em termos da semântica, da noção de indução completa no contexto aritmético. Noções matemáticas ligadas à operação de partes (noções de segunda ordem), no contexto de conjuntos infinitos, são mais indeterminadas. Também, entre as próprias noções de primeira ordem há diferenças, do ponto de vista semântico. Alguns conceitos são finitamente axiomatizáveis, outros não, alguns apresentam a categoricidade em potência, outros não. O Teorema de Morley mostra que a categoricidade em potência só pode ocorrer em condições bastante especiais e que, com relação à categoricidade, só há quatro possibilidades para um conceito. Mencionamos, de passagem, na Parte A, na §7, a tese de Zilber de que noções matemáticas "naturais" apresentam a forma da categoricidade em potência. Não obstante, a questão a respeito do significado da categoricidade em potência para as noções matemáticas continua bastante inexplorada na literatura de Fundamentos. Essas considerações mostram que a Teoria de Modelos constitui um instrumento de análise das complexidades envolvidas na expressão de noções matemáticas, por isso é essencial para uma reflexão sobre o significado da compreensão das noções matemáticas, o que é relevante para Fundamentos, tal como compreendemos essa disciplina.

Em segundo lugar, a Teoria de Modelos constitui um instrumento de identificação de padrões de raciocínio matemático, já que universalizar um conteúdo matemático significa identifica-lo como padrão de raciocínio, como um conteúdo sobre a relação de conseqüência lógica, como um conteúdo lógico. Isso fornece modularidade para a Matemática, já que um padrão de raciocínio pode ser usado diretamente em diversas situações, ou de modo indireto, elucidando situações que exigem adaptações. Uma identificação de padrões de raciocínio representa um ganho em termos de unidade da Matemática, que é imanente à Matemática, no sentido de que esses padrões são tirados da prática Matemática, não são regras sintáticas artificiais que os matemáticos mal reconhecem.

É importante ressaltar a centralidade da absolutidade da relação de satisfação para essas considerações sobre a relevância fundacional da Teoria de Modelos. O ponto é que, por um lado, é preciso considerar a Matemática tal como expressa em um domínio universal para que possamos analisá-la com os métodos da Lógica Matemática. Em uma direção oposta, é crucial mostrar que a abordagem do trabalho, e a própria concepção de

Matemática, não está contaminada pelas indeterminações e contingências presentes nos sistemas formais que expressam a Matemática e que não estão diretamente ligadas à Matemática. Por exemplo, a não-absolutidade da relação de isomorfia coloca sérios problemas para uma concepção estruturalista de Matemática, pelo menos como compreendemos as Estruturas Matemáticas. De fato, considerando o sentido usual de Estrutura Matemática, tal como se encontra formulado (de várias maneiras) em um contexto conjuntista, temos que a relação de isomorfia de estruturas, ou seja, de existência de um isomorfismo (a identidade das estruturas), é uma relação vaga, contaminada pelas indeterminações da Teoria de Conjuntos (lembre-se do Paradoxo de Skolem que mostra que um conjunto pode ser enumerável, mas pode existir uma interpretação que contém o conjunto e é tal que nenhuma enumeração do conjunto pode pertencer a essa interpretação). Contudo, para dar conta do caráter formal da Matemática, um estruturalismo deveria ser formulado em termos de classes de isomorfismo, que é uma entidade indeterminada nos casos não-triviais (estruturas infinitas). Desconsiderar a formulação conjuntista pode apenas piorar a situação: não é claro como "estruturas", que nem mesmo estão definidas matematicamente, e os "isomorfismos" entre essas "estruturas", se relacionam com as Estruturas Matemáticas e os isomorfismos entre as mesmas.

Nossa abordagem formalista-semântica não sofre com esse tipo de problema de formulação, pois o objeto de estudo da Matemática no século XX são formas, as noções matemáticas, tal como expressas em um domínio universal como a Teoria de Conjuntos, e noções matemáticas são colocadas em correspondência com objetos lingüísticos (teorias, sentenças), que podem ser analisados com a Lógica Matemática, em particular, com a Teoria de Modelos. É possível mostrar que algumas noções são mais vagas (menos determinadas) comparadas a outras, investigar se duas noções são equivalentes, ou não, na Teoria de Conjuntos, buscar uma classificação para as noções, investigar o seu significado, etc. Não é preciso se comprometer, de antemão, com a identidade de entidades lingüísticas como noções matemáticas, isso é objeto de investigação, não de definição. E o caráter formal da Matemática está contemplado: é um teorema da Teoria de Conjuntos que duas Estruturas Matemáticas isomorfas satisfazem as mesmas propriedades expressas em linguagem lógica (de primeira ou segunda ordem). Também, não é o caso que estamos considerando as noções matemáticas de um modo puramente sintático-combinatório. Ao contrário, é um fato empírico que as noções matemáticas possuem significado independente de particularidades da formulação sintática combinatória, pois, de outro modo, não seria possível a comunicação entre os matemáticos, que, em geral, sequer sabem o que é um sistema formal.

Não é por atribuirmos uma importância exagerada ao papel da Teoria de Conjuntos que enfatizamos a importância de se ter uma concepção de Matemática que não seja contaminada desde o início com indeterminações conjuntistas, ao contrário, é por considerar que a formulação da Matemática na Teoria de Conjuntos envolve elementos estranhos à Matemática que consideramos indispensável mostrar que nossa abordagem não está completamente contaminada por esses elementos e é suficientemente robusta sob as variações usuais no contexto conjuntista. Em resumo, a caracterização da Matemática do século XX como o estudo de Estruturas Matemáticas, definidas formalmente, é claramente reducionista e é contaminada pela indeterminação e pela contingência dos sistemas formais. Alterar essa caracterização através da abolição de uma definição formal de estrutura e isomorfismo produz uma ambigüidade nos termos "estrutura" e "isomorfismo" e uma indeterminação ainda maior. Já a caracterização da Matemática como o estudo de noções matemáticas não sofre com esses problemas: em primeiro lugar, não há ambigüidade porque sistemas formais expressam noções matemáticas, mas essas noções não se reduzem e não são identificadas a sistemas formais (lembre-se que pressupomos um realismo semântico, que as noções matemáticas possuem significado independente de uma sistematização de toda a Matemática em um domínio universal, o que nos parece bastante plausível já que muitos matemáticos sequer sabem o que é ZFC). Em segundo lugar, essa caracterização não é reducionista e não se compromete com um sistema formal particular, e não há contaminação por indeterminações de sistemas formais, já que não é necessário identificar, de antemão, noções matemáticas para dar conta da natureza formal da Matemática. Essas noções são entidades lingüísticas (possuem significado), são estudadas na Matemática e analisadas com a Lógica Matemática. Na verdade, essa caracterização é praticamente tautológica: conhecimento é conhecimento por noções e o conhecimento matemático é o conhecimento por noções matemáticas. Procuramos mostrar neste trabalho que não é preciso mais do que isso, em termos de caracterização geral, para avançar em Fundamentos e refletir sobre o conhecimento matemático. Para isso, basta considerar a Matemática em suas relações com a Física Teórica e com a Lógica, por exemplo.

Nesta última parte do trabalho, mostramos que a Teoria de Modelos é capaz de alçar um conteúdo matemático particular a um contexto lógico-universal. Isso foi feito com a Teoria de Galois clássica. É claro que não é qualquer conteúdo matemático que pode ser alçado ao contexto lógico. Na própria Teoria de Galois, os aspectos mais computacionais não fazem muito sentido no contexto lógico. Contudo, há outros conteúdos matemáticos que, certamente, possuem esse potencial. Isso mostra a generalidade das idéias originais de matemáticos como Galois. Não é sem motivo que seu nome está espalhado por toda a Matemática contemporânea e que sua influência no desenvolvimento dessa disciplina nos últimos dois séculos é difícil de superestimar. Como alguns corolários da reconstrução modelo-teórica da Teoria de Galois temos que, por um lado, considerando outras construções clássicas da Teoria de Modelos, como modelo-completude, a Teoria de Modelos fornece sim um enquadramento para uma parte importante da Álgebra clássica, o que corrobora a tese da Álgebra como semântica formal e, desse modo, reforça a unidade da Álgebra. Por outro lado, a Teoria de Galois pode ser vista como um conteúdo da Lógica Matemática, pois essa Teoria constitui um método matemático geral, ou seja, a universalização da Teoria de Galois é uma operação de identificação de um padrão de raciocínio matemático, o que contribui para uma redução dos padrões de raciocínio e para fornecer modularidade (e unidade) para a Matemática. Esses dois corolários dizem respeito à relação entre Matemática e Lógica Matemática, e, claramente, possuem significado fundacional, segundo nossa compreensão dos Fundamentos. Esses resultados, por si só, justificam a realização da presente investigação.

Nós buscamos desenvolver o presente trabalho de modo que o mesmo constituísse uma discussão refletida sobre o conhecimento matemático, formulada filosoficamente, mas, ao mesmo tempo, que se mantém sempre próxima da Matemática e sempre informada pela Lógica Matemática. Sobretudo, o presente trabalho não foi desenvolvido como uma crítica a uma escola específica de Filosofia da Matemática, e nosso foco sempre esteve voltado para a Matemática ela mesma e para as relações que essa disciplina mantém com outras como a Física Teórica e a Lógica Matemática. Também, o presente trabalho não é um trabalho padrão de Lógica Matemática que consiste em provar resultados técnicos em Teoria de Conjuntos, ou em Lógica Algébrica, ou em alguma outra disciplina da Lógica Matemática, mas que é acrítico com relação à relevância ou não dos resultados. Uma característica desse trabalho é a de ser crítico com relação à relevância fundacional de resultados técnicos, sem, ceticamente, apresentar uma visão estreita daquilo que é relevante e nem, dogmaticamente, aceitar tudo como relevante sem uma análise mais cuidadosa. Procuramos, também, ao longo do trabalho, ser rigorosos do ponto de vista histórico, seja por não extrapolar nossas considerações específicas para outros períodos históricos passados, seja por não considerar a Matemática do século XX como algo definitivo.

Conforme já enfatizado nessas considerações finais, acreditamos que o trabalho alcançou êxito em mostrar que conteúdos modelo-teóricos, até agora desconsiderados na literatura de Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX, são relevantes para uma reflexão sobre o conhecimento matemático. Por outro lado, há bastante espaço para estudos de caso, contextualizados pela concepção geral do trabalho. Na verdade, a forma de proceder para reforçar a unidade da Matemática internamente, segundo a concepção geral aqui exposta, é, unicamente, através de estudos de caso, em outras disciplinas da Lógica Matemática inclusive. Há também bastante espaço para estender as análises sobre os temas expostos na Parte A em várias direções e explorar com maior profundidade as teses gerais expostas no texto. Enfim, para aqueles que estão interessados em pensar filosoficamente sobre o conhecimento matemático, mantendo-se próximo da Matemática e informado pela Lógica Matemática, espero que a consideração do presente trabalho possa ser útil.

§5- Notas

1- É conveniente enfatizar esse ponto, que não é trivial. Uma noção matemática, ou um "significado", sempre deve estar expressa em algum lugar, não há noção que não está expressa. De fato, estudar a expressividade de um sistema semântico como a Lógica de Primeira Ordem é comparar a expressividade desse sistema com a expressividade de ZFC, por exemplo: considera-se uma noção expressa em ZFC, como cardinalidade, e, com técnicas próprias da Lógica é possível avaliar se e como essa noção pode ser expressa pela Lógica de Primeira Ordem, no sentido da relação de satisfação. Portanto, as expressões "noções matemáticas" e "noções matemáticas expressas em algum domínio universal" são intercambiáveis.

2- Considere um cardinal infinito κ. $\mathfrak{a}$ é dita κ-saturada se realiza todos 1-tipos sobre subconjuntos A de $\mathfrak{a}$, de cardinalidade menor que κ. $\mathfrak{a}$ é saturada se é κ-saturada, onde κ é o cardinal de $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}$ é homogênea se duas seqüências finitas $\bar{a}$ e $\bar{b}$ possuem o mesmo tipo sobre um subconjunto finito A se, e somente se, existe um automorfismo de $\mathfrak{a}$, que fixa A, e que leva $\bar{a}$ em $\bar{b}$. Uma Estrutura saturada é homogênea e, se for modelo de uma Teoria completa, então é única. Há vários resultados de existência de Estruturas saturadas, ou apenas κ-saturadas, alguns desses resultados assumem a Hipótese Generalizada do Contínuo. Para a presente construção é preciso apenas que a estrutura seja saturada nas cardinalidades relevantes. Esses detalhes técnicos não serão explorados porque não contribuem para a análise.

3- Os aspectos computacionais mais específicos da correspondência de Galois, resumidos no item (β) do Teorema Fundamental da Teoria de Galois, não possuem contrapartida clara no contexto universal da Teoria de Modelos, o que é esperado.

4- Resultados de indefinibilidade para a Teoria de Conjuntos, em geral, afirmam que o Axioma da Escolha é necessário para provar a existência de alguma relação adicional em uma estrutura. Esses resultados, frequentemente, são demonstrados utilizando essa abordagem modelo-teórica de grupos de automorfismos, sendo muito importante a absolutidade da relação de satisfação para a análise desse tipo de aplicação da Teoria de Modelos. Mas não é sempre assim. O fecho algébrico de um corpo é definido utilizando (necessariamente) alguma forma do Axioma da Escolha, mas esse uso do Axioma da Escolha não tem a ver com acrescentar novas relações na estrutura, já que os automorfismos do corpo se estendem para o fecho. A indefinibilidade, nesse caso, parece estar ligada a uma não-naturalidade do fecho algébrico, no sentido categorial. (cf.:[Hodges, 21], p. 631)

POSFÁCIO

§1- Introdução

A finalidade deste posfácio é a de constituir uma exposição simplificada dos principais pontos de articulação do nosso estudo sobre os Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX e sobre a relevância fundacional da Lógica Matemática. Antes de mencionar e explicar, de modo sucinto, essas componentes principais do trabalho, é conveniente retomar o que eu entendo por Fundamentos do Pensamento Matemático no século XX. Essa disciplina filosófica é uma reflexão sobre o conhecimento matemático contemporâneo que constitui uma compreensão de segunda ordem sobre o mesmo. Entre os grandes temas de Fundamentos podemos mencionar os programas de fundamentos, o construtivismo, a hipótese do contínuo, o âmbito finitário, entre outros. A minha concepção de Fundamentos e o meu entendimento desses temas no contexto de uma compreensão de segunda ordem do conhecimento matemático foram parcialmente expostos na primeira parte deste estudo. Vamos, a partir de agora, retomar as componentes principais do trabalho, começando pelas principais críticas realizadas ao longo do texto. Essa retomada não seguirá, necessariamente, a mesma ordem em que as componentes ocorrem no texto.

§2- Críticas

As principais críticas do trabalho são aquelas que se referem às reflexões orientadas exclusivamente à categoria do objeto, com ênfase na questão ontológica e em definições intensionais de Matemática, e às reflexões por demarcação e oposição de escolas de Filosofia da Matemática. Procuramos mostrar a inadequação das definições intensionais de Matemática como o estudo de algum tipo de objeto abstrato, seja ele conjunto, categoria, sistema formal, etc. Esse tipo de abordagem sofre com a falta de consciência histórica, já que essas definições são rígidas e não se aplicam aos desenvolvimentos da Matemática anteriores ao século XX. Além disso, esse tipo de abordagem envolve reduções (orientadas à categoria do objeto) completamente artificiais da Matemática da deve lidar com o fato de que muitos matemáticos não sabem o que é um sistema formal, ignoram a Teoria de Conjuntos e a Teoria das Categorias, portanto sequer reconheceriam a Matemática nessas definições. O trabalho defende uma concepção de Matemática em que essa disciplina não é definida como o estudo de algum tipo de objeto abstrato e não há tal coisa como comprometimento ontológico. A proposta é de mudar o foco da questão da existência para a questão da predicação.

Observamos também que as demarcações de escolas de Filosofia da Matemática, que com freqüência correspondem a uma posição em relação à questão ontológica, e as reflexões baseadas nessas demarcações, em geral, não têm relações significativas com a Matemática, mas apenas com essas oposições de escolas. O estudo ora realizado seguiu o caminho contrário: se concentrar na análise de conteúdos matemáticos, utilizando a Lógica Matemática. Em síntese, as críticas realizadas procuram mostrar que a orientação à categoria do objeto, que aparece nas definições intensionais de Matemática, e a demarcação e oposição de escolas de Filosofia da Matemática constituem equívocos metodológicos. Não obstante, há vários textos na literatura recente de Filosofia da Matemática que exemplificam tudo aquilo que criticamos aqui (cf.:[Chihara, 11]). Essas considerações apontam para a direção que o trabalho seguiu e introduzem, de modo preliminar, as principais posições defendidas no texto em termos de caracterizações da Matemática. Vamos mencioná-las explicitamente agora.

§3- Caracterizações da Matemática

A Matemática é o estudo, segundo o método axiomático-dedutivo, das noções matemáticas. Essa é a primeira caracterização. É importante notar que as noções matemáticas não são um tipo de objeto abstrato e que essa caracterização não é uma definição intensional da Matemática, mas apenas aponta para a extensão correta. A compreensão de uma noção matemática pode sofrer mudanças históricas, e o método axiomático-dedutivo não está, necessariamente, comprometido com os sistemas formais modernos, portanto essa caracterização não é aplicável apenas à Matemática do século XX. Noções matemáticas são formas em um sentido amplo, que será novamente explicado a seguir. A segunda caracterização afirma que a Matemática constitui uma semântica formal para as ciências teóricas que apreendem seus conteúdos matematicamente. Isso não significa que a Matemática é *apenas* uma semântica formal para essas ciências. Entre as ciências teóricas que apreendem seus conteúdos matematicamente destacamos a Física Teórica e a própria Matemática. A parte da Matemática que constitui uma semântica formal para a própria Matemática é a Lógica Matemática. Para expressar essas relações podemos formular o seguinte mote: "a Lógica Matemática está para a Matemática assim como a Matemática está para a Física". Claro que isso deve ser tomado como um *slogan*, e não deve ser levado muito a sério como uma tese. Em síntese, a Matemática constitui uma teoria da forma lógica da linguagem das ciências teóricas que apreendem seus conteúdos matematicamente.

Dessas caracterizações extraímos o caráter *a priori* da Matemática, já que as mesmas excluem qualquer parte empírica desse conhecimento. A segunda caracterização corresponde a uma concepção de Matemática em relação com outras disciplinas e em auto-relação consigo mesma. Como conhecimento *a priori* e como teoria da forma lógica, a Matemática é um conhecimento formal: noções matemáticas são formas. Esse formal deve ser entendido em termos da oposição forma-matéria, e não da oposição forma-conteúdo, já que a Matemática, obviamente, tem conteúdo. Do mesmo modo, dizer que a Matemática é formal não significa dizer que ela é um sistema formal, ou uma coleção de sistemas formais. Os sistemas formais contemporâneos, baseados na noção de mera manipulação mecânica, são formais no sentido da oposição forma-conteúdo, a Matemática não. Os sistemas formais são veículos para a Matemática, a Matemática se expressa neles, mas não deve ser confundida com os mesmos. A Matemática é um conhecimento formal no sentido que as noções matemáticas são formas; formas de apreensão de matéria e formas de apreensão de outras formas, o que será retomado em mais detalhes no §5 abaixo. Por ora, é importante observar que a proposta de mudar o foco da questão da existência para a questão da predicação faz todo sentido agora, já que existência não é uma categoria que se aplica à forma do mesmo modo que se aplica à matéria, como existência no espaço e no tempo. As noções matemáticas são, de certo modo, aquilo que se predica em predicações matematicamente significativas. Com esses esclarecimentos sobre a Matemática podemos agora formular algumas grandes questões para Fundamentos que foram abordadas na Tese.

§4- Grandes Questões

A Matemática foi caracterizada como o estudo das noções matemáticas, portanto a primeira grande questão é a questão semântica: o significado da compreensão das noções matemáticas. Para analisar as noções matemáticas é preciso considerar os resultados da Teoria de Modelos que exploram diversos enfoques da expressabilidade: em primeira ordem, em segunda ordem, finita, completa, com a forma da categoricidade em potência, etc. As noções matemáticas não são todas iguais, há graus de vagueza, portanto a compreensão dessas noções não pode ser uniforme. Para realizar esse tipo de análise é preciso que a Matemática se encontre expressa em um domínio universal, como a Teoria dos Conjuntos. Contudo, a expressabilidade conjuntista também é investigada, por exemplo, em resultados que mostram a indispensabilidade do axioma da escolha para demonstrar a existência de algum conjunto que não é definível com uma fórmula. Fundamentais para toda essa análise são a noção de absolutidade e as técnicas da Teoria de Conjuntos, como a construtibilidade. A absolutidade da relação de satisfação em primeira ordem é crucial para toda a análise da vagueza ou determinidade de noções matemáticas: a relação de satisfação entre modelos e fórmulas de primeira ordem é absoluta para as $\in$-interpretações transitivas de ZF. Também é a relação entre modelos e teorias de primeira ordem, já que as teorias são limitadas pelo conjunto (definível) dos conjuntos hereditariamente finitos sobre a assinatura. Isso mostra uma determinidade das noções expressáveis em primeira ordem não compartilhada com as noções expressáveis apenas em ordem superior. Na verdade, a Lógica de Ordem Superior e a Teoria de Conjuntos apresentam problemas análogos com relação à vagueza.

A segunda grande questão do trabalho é aquela que diz respeito à unidade da Matemática. Como a Matemática não é definida como o estudo de algum tipo particular de objeto e nada foi dito sobre quais são as noções matemáticas e como elas se relacionam, o problema da unidade se coloca de forma dramática para essa disciplina: um amontoado rapsódico não constitui um assunto, é preciso conceber a Matemática como um todo coeso. A sistematização da Matemática em um domínio universal como a Teoria de Conjuntos fornece unidade para essa disciplina, mas essa unidade proveniente da forma de sistematização da Matemática não basta. Essa unidade formal (no sentido da oposição forma-conteúdo) envolve muitos elementos artificiais e não é baseada em uma relação direta com os conteúdos matemáticos. É preciso buscar uma unidade efetiva da Matemática, em relação direta com os conteúdos matemáticos, e suprimir essa artificialidade. Há ainda uma terceira grande questão no trabalho, que está relacionada com o estudo de caso realizado com a Teoria de Modelos, mas antes de formulá-la é preciso mencionar outros elementos importantes da Tese.

§5- Matemática, Fundamentos e Lógica Matemática

Para investigar certos problemas significativos em termos de uma reflexão sobre o conhecimento matemático é preciso organizar a Matemática. Por exemplo, não é possível investigar problemas de consistência, de decidibilidade, de conservatividade ou de definibilidade sem organizar a Matemática em sistemas formais. Contudo, para que a formalização da Matemática faça sentido é preciso tomar como significativo um conteúdo da própria Matemática: trata-se do âmbito finitário. É preciso tomar como significativos alguns resultados sobre a sintaxe da Lógica e noções sobre sistemas formais tais como as de prova, teorema, definição, consistência, conservatividade, completude, etc. Não obstante, a organização da Matemática, de um ponto de vista fundacional, não se reduz à formalização. De fato, se buscamos uma compreensão do raciocínio matemático, que é uma compreensão de segunda ordem da Matemática, então é preciso buscar identificar e reduzir padrões de raciocínio matemático. É importante notar que essa redução não é orientada à categoria do objeto, diferente de uma redução do tipo “tudo é conjunto”. Estamos buscando mostrar uma modularidade do raciocínio matemático com essa redução, e esse tipo de problema só pode ser tratado de modo sistemático com métodos da Lógica Matemática. Portanto, organizar a Matemática, em sentido amplo, é uma função dos Fundamentos.

Por outro lado, não é função de Fundamentos legislar sobre o que deve ser axioma da Matemática. Algumas escolas de Filosofia da Matemática, baseadas em pré-concepções, muitas das vezes equivocadas, têm o hábito de querer legislar sobre a Matemática. Algumas escolas construtivistas acreditam que sabem a resposta para a questão: quais são os métodos legítimos, para além da mera consistência, para lidar com o infinito? Mesmo considerando que essa questão faz sentido, não há meios de decidi-la. A única exigência possível é a consistência. Fora isso, um método matemático é legitimo se for útil. A utilidade é o critério, e os métodos da Matemática clássica fornecem soluções úteis para a Física Teórica e para outros propósitos. Portanto, estão justificados. Outras escolas de Filosofia da Matemática, como o nominalismo (cf.:[Chihara, 11]), estão convencidas de que só é possível o conhecimento de objetos concretos, que nos afetam de modo causal. Portanto, a o conhecimento matemático deve ser visto como um conhecimento de símbolos e deve se restringir de modo a admitir uma redução nominalista completamente artificial. Chihara chega ao ponto de propor uma reconstrução nominalista da Matemática como uma teoria de sentenças (cf.:[Chihara, 11]), que supostamente daria conta das aplicações da Matemática e que responderia a questão do comprometimento ontológico. Desnecessário dizer que isso concentra tudo aquilo que criticamos aqui. É possível um conhecimento de formas (no sentido da oposição forma-matéria), que podem ser utilizadas em uma descrição física da realidade (formas de apreensão da matéria) ou em uma descrição lógica de outras formas (formas de apreensão de formas), e a Matemática é justamente esse conhecimento. Do mesmo modo, os Fundamentos não têm o papel ou o poder de derivar os axiomas da Matemática de algum lugar (metafísica?). Um princípio é um axioma da Matemática se, e somente se, estiver impregnado na prática dessa disciplina. Aos Fundamentos cabe o papel de analisar o conhecimento matemático, analisar o método axiomático-dedutivo e analisar as noções matemáticas, e não o papel de realizar qualquer tipo de legislação indevida.

§6- Teoria de Modelos e Álgebra

Se pensarmos no contexto lógico da Teoria de Modelos e no caminho histórico do estudo de polinômios que deu origem à Álgebra Moderna, então não é nada claro como a Teoria de Modelos, desde o trabalho dos seus precursores, sempre se relacionou intimamente com a Álgebra. Apesar das origens bastante distintas, Álgebra e Teoria de Modelos possuem relações vigorosas e a análise cuidadosa desse fato certamente revela alguma coisa sobre a natureza das disciplinas envolvidas. De fato, a interpenetração dessas disciplinas nos mostra, por um lado, a Teoria de Modelos, em parte, como uma

Álgebra universalizada e, por outro lado, a Álgebra, em parte, como um estudo de relações lógicas entre teorias e estruturas algébricas. Por exemplo, alguns desenvolvimentos da Teoria de Modelos mostram que noções algébricas, como corpos e corpos algebricamente fechados, apresentam vínculos de natureza lógica, como a noção de modelo-companheiro, e que conteúdos algébricos podem ser universalizados e apreendidos segundo uma regularidade lógica.

A terceira grande questão dos Fundamentos tratada na Tese diz respeito à identificação de padrões de raciocínio, e a nossa abordagem para essa questão pode ser resumida na seguinte formulação: um conteúdo matemático constitui um padrão de raciocínio se ele pode ser apreendido segundo uma regularidade lógica, se ele admite universalização. Conforme mencionado acima, alguns conteúdos algébricos podem ser universalizados pela Teoria de Modelos. É o caso da parte não computacional da Teoria de Galois, e de outros resultados da teoria dos corpos, como o Teorema de Steinitz. Esse tipo de desenvolvimento da Teoria de Modelos fornece mais do que a identificação da Teoria de Galois como um padrão de raciocínio: isso fornece unidade para a Álgebra. De fato, conteúdos algébricos são agora apreendidos segundo uma regularidade lógica, o que mostra que parte da Álgebra é um estudo de relações lógicas entre teorias e estruturas algébricas, além de exibir novos vínculos de natureza lógica entre noções algébricas. Isso é, de fato, surpreendente: não é clara a possibilidade de codificar relações estruturais da Álgebra com fórmulas; é o que ocorre no método dos Diagramas, por exemplo. A conseqüência dessa universalização de conteúdos algébricos para a Teoria de Modelos é um enriquecimento das técnicas modelo-teóricas que lidam com a questão da definibilidade. Portanto, o desenvolvimento da Teoria de Galois-Poizat na Teoria de Modelos constitui, em parte, uma identificação de um padrão de raciocínio e um reforço para a unidade da Álgebra em relação direta com conteúdos dessa disciplina e, em parte, um enriquecimento de técnicas modelo-teóricas para lidar com a questão da definibilidade. Nos dois casos temos relevância fundacional por tudo aquilo que argumentamos ao longo da Tese.

BIBLIOGRAFIA

1. Boolos, G., Burgess, J., Jefrey, R., *Computability and Logic*, Cambridge University Press, 2007.
2. Borceaux, F., Janelidze, G., *Galois Theories*, Cambridge University Press, 2001.
3. Brouwer, L., *Intuitionist Set Theory*, em *From Brouwer to Hilbert: the Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, editado por Mancoso, P., Oxford University Press, 1998, pp. 23-27.
4. Buechler, S., *Essential Stability Theory*, Springer-Verlag, 1996.
5. Burgess, J., *Book Review: Stewart Shapiro, Philosophy of Mathematics, Structure and Ontology.* , Notre Dame Journal of Formal Logic, 40, 1999, pp. 283-291.
6. Butz, C., Moerdijk, I., *An Elementary Definability Theorem for First Order Logic*, The Journal of Symbolic Logic, 64, 1999, pp.1028-1036.
7. Carnielli, W., Epstein, R., *Computabilidade, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática*, Unesp, 2006.
8. Chang, C., Keisler, J., *Model Theory*, North-Holland, 1998.
9. Chateaubriand, O., *Logical Forms. Part I*, Unicamp, 2001.
10. Chateaubriand, O., *Logical Forms. Part II*, Unicamp, 2005.
11. Chihara, C., *Nominalism*, em *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, editado por Shapiro, S., Oxford University Press, 2007, pp. 483-514.
12. Corry, L., *Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure*, Synthese, 92, 1992, pp. 315-348.
13. da Costa, N., Rodrigues, A., *Definability and Invariance*, Studia Logica, 86, 2007, pp.1-30.
14. Curry, H., *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, North-Holland, 1970.
15. Detlefsen, M., *Formalism*, em *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, editado por Shapiro, S., Oxford University Press, 2007, pp. 236-317.
16. Drake, F., *Set Theory: an Introduction to Large Cardinals*, North-Holland, 1974.
17. Dummett, M., *Truth and Other Enigmas*, Harvard University Press, 1978.

18. Hellman, M., *Structuralism*, em *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, editado por Shapiro, S., Oxford University Press, 2007, pp. 536-562.
19. Hinman, P., *Fundamentals of Mathematical Logic*, AK Peters, 2005.
20. Hintikka, J., *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, 1998.
21. Hodges, W., *Model Theory*, Cambridge University Press, 1993.
22. Holly, J., *Definable Operations on Sets and Elimination of Imaginaries*, Proceedings of the American Mathematical Society, 117, 1993, pp.1149-1157.
23. Jacobson, N., *Basic Algebra I*, W. H. Freeman & Co., 1985.
24. Kant, I., *Manual dos Cursos de Lógica Geral*, tradução de Fausto Castilho, Editora Unicamp, 2006.
25. Kleene, S., *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, 1996.
26. Kohlenbach, U., *Applied Proof Theory: Proof Interpretation and their Use in Mathematics*, Springer-Verlag, 2008.
27. Levy, A., *Basic Set Theory*, Dover, 2002.
28. Makkai, M., *Duality and Definability in First Order Logic*, American Mathematical Society, 1993.
29. Mancosu, P., *From Brouwer to Hilbert: the Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford University Press, 1998.
30. Mathias, A., *A Term of Length 4,523,659,424,929*, Synthese, 133, 2002, pp. 75-86.
31. Monk, D., *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1976
32. Nelson, E., *Predicative Arithmetic*, Princeton University Press, 1987.
33. Podiacki, R., *Lógicas da Inconsistência Formal Quantificadas*, dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas, 2008.
34. Poizat, B., *Une Théorie de Galois Imaginaire*, The Journal of Symbolic Logic, 48, 1983, pp.1151-1170.
35. Poizat, B., *A Course in Model Theory*, Springer-Verlag, 2000.
36. Rothmaler, P., *Introduction to Model Theory*, Taylor & Francis Group, 2000.

37. Shapiro, S., *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, 2007.
38. Shoenfield, J., *Mathematical Logic*, Association for Symbolic Logic, 2001.
39. da Silva, J., *Filosofias da Matemática*, Unesp, 2007.
40. Tait, W., *Remarks on Finitism*, em *Reflections on the Foundations of Mathematics: Essays in Honor of Solomon Feferman*, editado por Sieg, W., Sommer, R., Talcott, C., Association for Symbolic Logic, 2002, pp. 407-416.
41. Takeuti, G., *Two Applications of Logic to Mathematics*, Princeton Univeity Press, 1978.
42. Tieszen, R., *Phenomenology, Logic and the Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 2005.
43. Tsuboi, A., *Algebraic Types and Automorphism Groups*, The Journal of Symbolic Logic, 58, 1993, pp.232-239.
44. Tugendhat, E., *Lições Introdutórias à Filosofia Analítica da Linguagem*, Tradução de Ronai Rocha, Unijuí, 2006.
45. van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, 1967.
46. Woodin, H., *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms and the Nonstationary Ideal*, Walter de Gruyter, 1999