Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática

Propriedades Homológicas de Álgebras de Hopf

Cristiane Alexandra Lázaro

Tese de Doutorado

Orientadora: **Prof[a]. Dr[a]. Dessislava Hristova Kochloukova**

Março - 2008

Campinas - SP

[1]Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP - processo n^o 04/14178 − 7

PROPRIEDADES HOMOLÓGICAS DE ÁLGEBRAS DE HOPF

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Cristiane Alexandra Lázaro
e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de março de 2008

Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova

Banca Examinadora:

1 Dessislava Hristova Kochloukova
2 Lucia Satie Ikemoto Murakami
3 Vitor de Oliveira Ferreira
4 Vyacheslav Futorny
5 Antonio José Engler

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTORA em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves

Lázaro, Cristiane Alexandra

L456p Propriedades Homológicas de Álgebras de Hopf / Cristiane Alexandra Lázaro – Campinas, [S.P.:s.n.], 2008.

Orientadora: Dessislava Hristova Kochloukova

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Hopf, Álgebra de 2. Teoria homológica 3. Teoria de valorização. I. Kochloukova, Dessislava Hristova. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Homological Properties of Hopf Algebras

Palavras-chave em inglês (keywords): 1.Hopf Algebras. 2. Homological Theory. 3. Valuation's theory.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Doutora em matemática

Banca examinadora: Prof^a. Dr^a. Dessislava Hristova Kochloukova (IMECC-UNICAMP)
Prof^a. Dr^a. Lucia Satie Ikemoto Murakami (IME-USP)
Prof. Dr. Vitor de Oliveira Ferreira (IME-USP)
Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (IME-USP)
Prof. Dr. Antonio José Engler (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 14/03/2008

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 14 de março de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Prof(a). Dr(a). LUCIA SATIE IKEMOTO MURAKAMI

Prof(a). Dr(a). VITOR DE OLIVEIRA FERREIRA

Prof(a). Dr(a). VYACHESLAV FUTORNY

Antonio José Engler

Prof(a). Dr(a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

“Existe algo que é mais forte do que o talento:
chama-se determinação.”

Ory Rodrigues

Krishnamurti

Aos meus pais

Cleuza

e

Alcides

dedico.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço a todos que de alguma forma contribuiram para esta realização. Em especial agradeço:

A Deus, por tudo.

Aos meus pais, minha eterna gratidão, pelo apoio incondicional, pela confiança, por todo incentivo que sempre me deram em tudo que busquei realizar.

À minha irmã Camila, por todo incentivo, pelos momentos de alegria e descontração.

À minha orientadora, Profª. Drª. Dessislava Hristova Kochloukova, que projetou este trabalho, por toda dedicação dispensada durante sua valiosa orientação, pelos conhecimentos transmitidos, pela paciência e disponibilidade que sempre teve para solucionar todas as minhas dúvidas.

Aos membros da banca, pela leitura cuidadosa, pelas sugestões e melhorias ao texto.

Aos professores do Departamento de Matemática do IMECC-UNICAMP, pela formação acadêmica durante o doutorado.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP-São José do Rio Preto, pela aprendizagem durante a graduação e o mestrado. Em especial à Profª. Drª. Maria Gorete Carreira Andrade, pela valiosa orientação durante graduação e mestrado, pelo apoio, amizade e incentivo a fazer o doutorado, e às Profª Drª Aparecida Francisco da Silva e Erminia de L. C. Fanti, muita gratidão pela formação, com incentivo e conselhos que tanto me ajudaram a conseguir mais esta realização.

À minha querida amiga Rosane, que sempre compartilhou comigo as alegrias e dificuldades, dando apoio a encarar novos desafios e vivendo comigo fases importantíssimas da minha vida.

À amiga Flávia pelo incentivo a fazer o doutorado, por toda ajuda durante o curso, principalmente durante o cursar de disciplinas.

À amiga Luci Any, pela amizade e companheirismo, por compartilhar grandes momentos, agradáveis conversas durante nossas viagens juntas.

À amiga Carina, pelo apoio, amizade e convívio durante toda esta caminhada que agora se completa.

À amiga Tatiana Bertoldi, pelo agradável convívio durante parte desta caminhada, pela amizade e carinho demonstrados.

A todos os amigos que conquistei durante este período, pelo agradável convívio, companheirismo, ajuda nos estudos, por compartilharmos momentos importantes. Especialmente, agradeço à Ana Cristina, Ademir, Fábio Bertoloto, Fabiano, Evandro, Uberlândio, Juan, Clair, Mariana, Sebastian, Allan, Cristiano, João e Fernando.

Aos amigos Sabrina, Paulo, Danilo, Claudia e Márcio, pela valiosa amizade desde os tempos de graduação.

A toda minha família, pelo estímulo e torcida dispensados em todos os momentos.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que de algum modo ou outro me apoiaram e acreditaram em mim.

Resumo

Sejam L uma álgebra de Lie metabeliana sobre um corpo k, sendo L uma extensão cindida de A por B, onde A e B são álgebras de Lie abelianas, ou seja, temos $A \rightarrowtail L \twoheadrightarrow B$ extensão cindida de álgebras de Lie. Denotemos por $U(L)$ a álgebra universal envelopante de L. E consideremos Q um grupo abeliano finitamente gerado agindo sobre A e B tal que a ação sobre B é trivial tal que temos a seguinte extensão cindida de álgebras de Hopf

$$U(A) \xrightarrow{\alpha} U(L)\#kQ \xrightarrow{\beta} U(B) \otimes kQ$$

Denotemos $H = U(L)\#kQ$ e $R = U(B) \otimes kQ$, onde B é abeliana e comuta com Q, isto é, R é anel comutativo.

Suponhamos também que A seja um R-módulo finitamente gerado à direita e $dim_k B < \infty$, com

(1) Ação de $U(B)$ sobre A: $a \circ b = [a, b]$, $\forall b \in B$ e $a \in A$.

(2) Ação de kQ sobre A: $a \circ q = q^{-1}aq$, $\forall q \in Q$ e $a \in A$.

Nosso objetivo principal nesta tese foi o de demonstrarmos o seguinte:

Teorema: *As seguintes condições são equivalentes:*

(1) *k tem tipo homológico FP_m como H-módulo;*

(2) *$\bigotimes^m A$ é finitamente gerado como R-módulo via ação diagonal de R;*

(3) *$\bigwedge^m A$ é finitamente gerado como R-módulo via ação diagonal de R.*

Para demonstração deste teorema estudamos as propriedades homológicas FP_m de módulos, definições e algumas propriedades sobre as álgebras de Hopf, fizemos uma generalização do invariante definido em [13], através do qual generalizamos os resultados de [13] e [21].

Palavras-chave: Tipo homológico FP_m, Álgebras de Hopf, Invariante $\widetilde{\Delta}$.

Abstract

Suppose L is a metabelian Lie algebra over a field k such that L is a split extension of A by B, where A and B are abelian Lie algebras, ie, there is a split extension $A \rightarrowtail L \twoheadrightarrow B$ of Lie algebras. We denote by $U(L)$ the universal enveloping algebra of the Lie algebra L. Furthermore we suppose Q is a finitely generated abelian group that acts on A and B and the action on B is trivial. Consider the split extension of Hopf algebras:

$$U(A) \xrightarrow{\alpha} U(L)\#kQ \xrightarrow{\beta} U(B) \otimes kQ$$

Denote $H = U(L)\#kQ$ and $R = U(B) \otimes kQ$, where the abelian Lie algebras B comutes with Q, ie, for all b in B, q in Q, we have $bq = qb$. We further suppose that A is a finitely generated (right) module over R and $dim_k B < \infty$, with

(1) Action of $U(B)$ on A: $a \circ b = [a, b]$, $\forall b \in B$ and $a \in A$.

(2) Action of kQ on A: $a \circ q = q^{-1}aq$, $\forall q \in Q$ and $a \in A$.

The main purpose of this thesis is the proof of the following:

Theorem: *Under the assumptions above, the following conditions are equivalent:*

(1) *k is of homological type FP_m as a module over H;*

(2) *$\bigotimes^m A$ is finitely generated as a module over R via the diagonal R-action;*

(3) *$\bigwedge^m A$ is finitely generated as a module over R via the diagonal R-action.*

In order to prove this theorem we study the homological property FP_m for modules and some properties of Hopf algebras. We generalise the Bryant-Groves invariant defined in [13] and obtain generalisations of the main results of [13] and [21].

Keywords: Homological type FP_m, Hopf algebras, Bryant-Groves invariant.

CONTEÚDO

Introdução

0.1 Introdução Histórica

Nesta tese estudamos propriedades homológicas de álgebras de Hopf do tipo

$$H = U(L)\#kQ,$$

onde L é álgebra de Lie sobre um corpo k e Q é grupo agindo sobre L via conjugação. Estamos interessados na propriedade homológica FP_m da álgebra de Hopf H.

Historicamente, o tipo homológico FP_m de grupos foi estudado primeiro, com motivação que vem da Topologia Algébrica. Esta propriedade surgiu como uma versão homológica de uma propriedade homotópica chamada F_m, definida por C. T. C. Wall, em [29]. Mais tarde o tipo homológico FP_m de grupos foi definido por R. Bieri e B. Eckman, em [5]:

“ Um grupo G é dito ser de tipo FP_m se $\mathbb{Z}$ visto como um $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial admite uma resolução projetiva $\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, com P_i finitamente gerado para todo $i \leq m$. Se os módulos P_i são finitamente gerados para todo i, então dizemos que G é de tipo FP_∞ ”.

Uma explicação básica sobre tipo homológico FP_m está feita no Capítulo 3 desta tese, seguindo o livro de R. Bieri ([5]).

R. Bieri também foi um dos criadores da Σ-teoria, que estuda propriedades homológicas de submonóides $G_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) \geq 0\}$ de grupos G, onde $\chi : G \to \mathbb{R}$ é homomorfismo não nulo. Esta teoria surgiu durante as tentativas de classificar grupos metabelianos (ie, grupos que têm um subgrupo normal abeliano A com quociente $Q = G/A$ também abeliano) de tipo FP_m. A classificação foi sugerida em [6], mas, embora muitos casos sejam conhecidos, a FP_m-conjectura, que sugere a classificação de grupos metabelianos, ainda está em aberto. Em todos os casos em que a conjectura foi resolvida foram usadas idéias que misturam técnicas de topologia algébrica (grupos que agem sobre CW-complexos) e idéias de álgebra comutativa.

Nos fins dos anos 90, R. Bryant e J. Groves estudaram os mesmos problemas, porém mudando da categoria de grupos para a de álgebras de Lie. Numa seqüência de dois artigos, [12] e [13], eles classificaram álgebras de Lie metabelianas de tipo FP_2, usando técnicas completamente algébricas (bem diferente do caso de grupos, pois para estes existem técnicas muito úteis de topologia algébrica; por exemplo, ação de grupos sobre CW-complexos, o que não existe no caso de álgebras de Lie). Os métodos usados por Bryant-Groves são da teoria de valorizações e tais métodos já foram usados no caso de grupos em [7]. A idéia nova de Bryant-Groves é a da existência de um invariante Δ, o qual tem o mesmo papel do invariante Σ de Bieri-Strebel da teoria de grupos, mas tem definição bastante diferente. Apresentamos os resultados de Bryant-Groves no Capítulo 5. Embora este invariante Δ seja difícil de calcular, este tem um importante papel teórico, sendo muito útil em demonstrações. Alguns exemplos de álgebras de Lie de tipo FP_2 e outros que não têm tipo FP_2 foram considerados na Seção 5.3.

Os resultados de Bryant-Groves foram generalizados em [21], onde todas as álgebras de Lie metabelianas cindidas (ie, extensões cindidas de álgebras de Lie abelianas) de tipo FP_m foram classificadas, através de propriedades do invariante Δ. O caso de extensões não cindidas de álgebras de Lie abelianas ainda está em aberto. Vale a pena observarmos que, para o caso de grupos, o caso cindido da Conjectura FP_m, que classifica os grupos metabelianos de tipo FP_m, ainda não está resolvido para dimensões maiores que 3.

Mais resultados sobre propriedades homológicas de álgebras de Lie podem ser encontrados em [14] e [19]. Em [14] foi demonstrado que, se L for uma álgebra de Lie de tipo FP_2 tal que $[L,[[L,L],[L,L]]] = 0$, então $[[L,L],[L,L]]$ tem dimensão finita. Os resultados de [19] tratam álgebras de Lie nilpotentes-por-abelianas de tipo FP_m tais que a parte nilpotente é também livre (sobre uma base provavelmente infinita) como álgebra de Lie.

O motivo inicial dos estudos de R. Bryant e J. Groves (conforme o segundo) sobre propriedades homológicas de álgebras de Lie metabelianas foi a esperança de que, resolvendo o caso mais simples (álgebras de Lie são mais fáceis de trabalhar do que grupos), daria para voltar e resolver o mesmo problema para grupos, mas isto não funcionou.

Ainda existem problemas interessantes que são resolvidos para grupos, mas cuja versão para álgebras de Lie fica em aberto (pois o caso de grupo usa ações de grupos sobre CW-complexos), como os seguintes: Seja L uma álgebra de Lie finitamente apresentável (no sentido de geradores e relações) que não contém subálgebra de Lie livre não abeliana, então cada quociente metabeliano de L é uma álgebra de Lie metabeliana finitamente apresentável? Esperamos que a resposta dessa pergunta seja positiva e que a propriedade finitamente apresentável possa ser trocada por tipo homológico FP_2. Outro problema interessante é mostrar a existência ou a inexistência de uma álgebra de Lie L que tem tipo homológico FP_2 mas não é finitamente apresentável. No caso de grupos esse problema foi resolvido apenas recentemente, de forma espetacular, usando métodos homotópicos ([4]). Também ainda não existem invariantes Δ para álgebras de Lie não metabelianas, embora a teoria Σ funcione para qualquer grupo finitamente gerado (mas a primeira versão do invariante Σ funcionava somente para grupos metabelianos ([7])).

0.2 Resultados sobre Álgebras de Hopf

Álgebras de Hopf generalizam propriedades de álgebras de Lie e de álgebras de grupo. O nosso objetivo é o de tentar unir a Σ-teoria de Bieri-Strebel e a teoria Δ de Bryant-Groves no caso de álgebras de Hopf. Estudamos álgebras de Hopf específicas, $H = U(L)\#kQ$, onde L é álgebra de Lie e Q é grupo abeliano agindo sobre L, com $A \to L \to B$ uma sequência exata curta cindida de álgebras de Lie, com A, B abelianas, Q agindo sobre A e B, sendo a ação sobre B trivial, ie, $R = U(B) \otimes kQ$ é anel comutativo, onde kQ é a álgebra do grupo Q com coeficientes em k, e $U(B), U(L)$ são as álgebras universais de B e L, respectivamente.

O nosso resultado principal (Teorema 6.1) mostra quando H tem tipo FP_m.

Teorema Principal *As seguintes condições são equivalentes:*

(1) *k tem tipo homológico FP_m como H-módulo;*

(2) *$\bigotimes^m A$ é finitamente gerado como R-módulo via ação diagonal de R;*

(3) *$\bigwedge^m A$ é finitamente gerado como R-módulo via ação diagonal de R.*

Este resultado generaliza os resultados já existentes ([21]) e faz uso dos mesmos métodos de álgebra comutativa (Teoria de Valorizações). Assim, os métodos são algébricos e não homotópicos como no caso de grupos metabelianos. Seria bastante interessante termos um resultado onde $H = U(L)\#kQ$, com Q grupo metabeliano mas não abeliano e H álgebra de Hopf metabeliana, no sentido de extensões de Hopf. Isso parece bastante difícil pois é necessário misturar métodos algébricos com métodos topológicos e, por enquanto, está em aberto.

Nesta tese estendemos de maneira natural a definição clássica do invariante de Bryant-Groves, na seção 6.1, e usamos ([22], Corolário 3), o qual liga ações sobre grupos homológicos com comultiplicação em álgebras de Lie. Tratamos somente o caso cindido (ie, L é extensão cindida de ideal de Lie abeliano por subálgebra abeliana), pois o caso não cindido ainda não está resolvido nem mesmo para o caso de álgebra de Lie (os resultados de [21] tratam somente o caso cindido de $m \geq 3$).

O caso $m = 2$ para álgebras de Hopf não necessariamente cindidas (ie, $H = U(L)\#kQ$, com $U(L/[L, L]) \otimes kQ$ anel comutativo e $[L, L]$ ideal abeliano de L) foi tratado em [23], onde é apresentada uma conta bem extensa, generalizando a demonstração do mesmo resultado para $Q = 1$ em [12].

Esperamos que a nossa pesquisa possa ter continuação. Em [18] foi mostrado que uma álgebra de Lie metabeliana L sobre corpo k de característica $car(k)$ mergulha em uma álgebra de Lie metabeliana de tipo homológico FP_m, se $car(k) \leq m$. O mesmo tipo de problema no caso de grupos é bem mais complicado e foi recentemente resolvido em [24]. Um problema interessante para uma futura pesquisa é resolver o mesmo problema na categoria de álgebras de Hopf específicas tratadas nesta tese. Para álgebras de Lie e grupos o caso específico de dimensão baixa $m = 2$ foi primeiro tratado por G. Baumslag, em [2] e [3]. Vale a pena observarmos que os resultados de Baumslag não usavam Σ ou Δ-teoria alguma, pois as duas ainda não existiam e sem estas teorias não foi possível resolver nem o caso $m = 3$, embora G. Baumslag tenha resolvido o caso $m = 2$.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Álgebras de Lie

Nesta seção apresentamos uma teoria básica sobre Álgebras de Lie e alguns resultados importantes. Também são apresentadas as definições de álgebra universal envelopante de uma álgebra de Lie, álgebras de Lie livres e finitamente presentadas, conceitos de grande importância no decorrer de nosso trabalho.

Iniciamos definindo uma álgebra, não necessariamente comutativa ou associativa, e a partir disto, definimos a álgebra de Lie.

Definição 1.1. (Álgebra) *Uma* **álgebra** *é um espaço vetorial $\mathcal{A}$ sobre um corpo k, no qual é definida uma operação bilinear denominada "produto":*

$$\begin{aligned} * : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (x, y) &\longmapsto x * y \end{aligned}$$

Definição 1.2. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita* **associativa** *se seu produto respeita a Lei da Associatividade, ie, $(x * y) * z = x * (y * z)$, para todos $x, y, z \in \mathcal{A}$.*

Definição 1.3. (Álgebra de Lie) *Uma* **álgebra de Lie** L *é uma álgebra não associativa, cujo produto satisfaz:*

(1) $x * x = 0, \ \forall x \in L$;

(2) *(Identidade de Jacobi)* $(x * y) * z + (y * z) * x + (z * x) * y = 0, \ \forall x, y, z \in L$

Notação: Se L é uma álgebra de Lie, denotamos seu produto por $[-,-]$, ou seja, teremos:

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] : L \times L &\longrightarrow L \\ (x, y) &\longmapsto [x, y] \end{aligned}$$

(1) $[x, x] = 0, \ \forall x \in L$;

(2) (Identidade de Jacobi) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \ \forall x, y, z \in L$

Definição 1.4. (Subálgebra) *Uma* **subálgebra** L' *de* L *é um subespaço vetorial de* L *fechado para a operação produto.*

Tomemos uma álgebra associativa $\mathcal{A}$ sobre k e definimos o *Produto de Lie ou Comutador* como:

$$[x, y] = x * y - y * x, \ \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Lema 1.1. $\mathcal{A}$ *munida com tal produto é uma álgebra de Lie e será denotada por* $\mathcal{A}^{(-)}$.

Definição 1.5. *Sejam* L_1 *e* L_2 *duas álgebras de Lie. Um* **homomorfismo de álgebras de Lie** *é uma aplicação* k*-linear* $\varphi : L_1 \to L_2$ *tal que, para todos* $x, y \in L_1$*, temos*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Dada uma álgebra de Lie L, podemos construir uma álgebra associativa $U(L)$ que "contém" L (no sentido de que L está mergulhada), de forma que toda representação de L se estende a uma representação de $U(L)$ e L é subálgebra de Lie de $U(L)^{(-)}$.

Definição 1.6. (Álgebra Universal) *Seja L uma álgebra de Lie. Um par $(U(L), i)$, onde $U(L)$ é uma álgebra associativa e $i : L \to U(L)^{(-)}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, é dito* **álgebra universal envelopante** *de L se, dada qualquer álgebra associativa $\mathcal{A}$ e um homomorfismo de álgebra de Lie $\theta : L \to \mathcal{A}^{(-)}$, existe um único homomorfismo (de álgebras associativas) $\theta' : U(L) \to \mathcal{A}$ tal que $\theta = \theta' \circ i$, ie, o diagrama seguinte é comutativo*

$$\begin{tikzcd} U(L) \arrow[dr, "\theta'"] & \\ L \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\theta"] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Vamos escrever simplesmente álgebra universal para a álgebra universal envelopante.

Teorema 1.1. (Propriedades da Álgebra Universal) *Sejam L uma álgebra de Lie e $(U(L), i)$ uma álgebra universal de L. Então:*

(1) *Cada duas álgebras universais $(U(L), i)$ e $(B(L), \theta)$ de L são isomorfas (existe um isomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : U(L) \to B(L)$ tal que $\varphi \circ i = \theta$).*

(2) *$U(L)$ é gerada por $i(L)$ como álgebra associativa.*

(3) *Se L e L_1 são duas álgebras de Lie tais que existe $\alpha : L \to L_1$ um homomorfismo de álgebras de Lie, então existe único $\alpha' : U(L) \to U(L_1)$ homomorfismo de álgebras associativas entre suas álgebras universais, o qual estende α.*

(4) *Sejam I um ideal em L e R o ideal em $U(L)$ gerado por $i(I)$. Então, $j : L/I \to (U(L)/R)^{(-)}$, tal que $l + I \mapsto i(L) + R$, $\forall l \in L$, é homomorfismo de álgebras de Lie e $U(L)/R$ é a álgebra universal de L/I.*

(5) *Existe um único homomorfismo de álgebras associativas:*

$$\delta : U(L) \to U(L) \otimes_k U(L)$$
$$i(a) \mapsto i(a) \otimes 1 + 1 \otimes i(a), \forall a \in L$$

Demonstração : [20].

■

De agora em diante, a menos que seja dito o contrário, todos os produtos tensoriais são considerados sobre o corpo k.

Podemos mostrar que, dada uma álgebra de Lie L, sua álgebra universal envelopante é dada por

$$U(L) = \mathcal{T}/R,$$

onde $\mathcal{T}$ é a álgebra tensorial definida como $\mathcal{T} = k \oplus L \oplus L^2 \oplus L^3 \oplus \ldots \oplus L^i \oplus \ldots$, sendo $L^i = L \otimes L \otimes \ldots \otimes L$, i vezes (ou seja, seus elementos são combinações lineares finitas de monômios da forma $X_1 \ldots X_k$, com o produto indicando o produto tensorial dos elementos $X_i \in L$, $i = 1, \ldots, k$) e R é o ideal em $\mathcal{T}$ gerado pelos elementos da forma $[a, b] - a \otimes b + b \otimes a$, $a, b \in L$. Ou seja, podemos ver $U(L)$ como combinações lineares finitas de monômios nos elementos de L em que se identifica $a \otimes b - b \otimes a$ com $[a, b]$.

Exemplo 1.1. *Seja L uma álgebra de Lie abeliana (ou seja, $[a, b] = 0, \forall a, b \in L$). Desta forma, a identificação que se faz em $\mathcal{T}$ para obter $U(L)$ é dada por $a \otimes b = b \otimes a$ e, portanto, $U(L)$ é abeliana. Neste caso, a álgebra universal $U(L)$ de L é chamada de* **álgebra simétrica** *e é denotada por $S(L)$.*

Podemos definir $S(L)$ como o maior quociente comutativo de $\mathcal{T}$, ie, $S(L) = \sum_{n=0}^{\infty} S^n L$, onde $S^n L = (\bigotimes^n L)/I$, sendo I gerado pelos elementos da forma $a - \sigma(a)$, para todas as permutações σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $a \in \bigotimes^n L$

Consideraremos o caso em que L é uma álgebra de Lie abeliana e finitamente gerada. Se $\beta = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ é uma base ordenada de L, os elementos de $U(L)$ são combinações lineares de monômios do tipo $X_{i_1} \ldots X_{i_k}$, com $X_{i_j} \in \beta$. Como dois elementos quaisquer de L comutam, é possível reescrever os monômios como $X_1^{s_1} \ldots X_n^{s_n}$. O produto de dois desses monômios é dado como o produto de dois monômios comutativos nas variáveis $X_1, \ldots, X_n$. Portanto, neste caso $U(L)$ é, nada mais nada menos, que uma álgebra de polinômios.

O Teorema 1.1 nos dá a existência do homomorfismo de álgebras associativas:

$$\delta : U(L) \to U(L) \otimes U(L)$$

$$i(a) \mapsto i(a) \otimes 1 + 1 \otimes i(a), \forall a \in L$$

Pode-se mostrar que δ é injetivo e, desta forma, a imagem $\delta(U(L)) \subseteq U(L) \otimes U(L)$ é isomorfa à $U(L)$.

Definição 1.7. *Chamamos $\delta(U(L))$ de* **subálgebra diagonal** *de $U(L) \otimes U(L)$.*

Vamos considerar C um $U(L)$-módulo à direita. Então, seu quadrado tensorial $C \otimes C$ é um $U(L) \otimes U(L)$-módulo à direita via:

$$(c_1 \otimes c_2)(f \otimes g) = (c_1 f) \otimes (c_2 g), \ \forall c_1, c_2 \in C, \ \forall f, g \in U(L).$$

Restringindo esta ação a $\delta(U(L))$, temos $C \otimes C$ como um $\delta(U(L))$-módulo e, como $U(L) \simeq \delta(U(L))$, $C \otimes C$ é também um $U(L)$-módulo e

$$(c_1 \otimes c_2)l = (c_1 l) \otimes c_2 + c_1 \otimes (c_2 l), \ \forall c_1, c_2 \in C, \ \forall l \in L.$$

Definição 1.8. (Ação Diagonal) *Esta ação de $\delta(U(L)) \simeq U(L)$ sobre $C \otimes C$ é chamada de* **ação diagonal**.

Definição 1.9. (Álgebra de Lie Livre) *Seja (F_0, i) um par, onde F_0 é uma álgebra de Lie e $i : X \to F_0$ é uma aplicação tal que, se existe $\theta : X \to L_0$, com L_0 uma álgebra de Lie, então existe um único homomorfismo de álgebras de Lie θ' tal que o diagrama abaixo é comutativo, ou seja, existe único homomorfismo θ' de álgebras de Lie tal que $\theta = \theta' \circ i$.*

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[dr, dashed, "\theta'"] & \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\theta"'] & L_0 \end{tikzcd}$$

Dizemos que F_0 é **livre** *com base X e a denotamos por $F(X)$.*

Definição 1.10. (Álgebra de Lie finitamente presentada) *Uma álgebra de Lie L é dita* **finitamente presentada** *se existe álgebra de Lie livre $F(X)$ e epimorfismo de álgebra de Lie $\pi : F(X) \to L$ tal que $F(X)$ é livre com base um conjunto finito X e $Ker(\pi) = Y^{id}$ é o ideal de $F(X)$ gerado por Y, onde Y é um subconjunto finito.*

1.2 Séries Formais sobre um anel comutativo

Sejam A um anel comutativo. Denotamos por $A[[t]]$ o conjunto de todas as somas formais

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad \text{com } a_n \in A.$$

Dados dois elementos de $A[[t]]$, digamos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, definimos sua soma e produto da seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \ onde\ c_n \ = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

E, deste modo, $A[[t]]$ torna-se um anel, o qual chamados de **anel de séries de potências formais** em uma variável sobre A.

Seja $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ um elemento não nulo de $A[[t]]$. Então, o menor inteiro n para o qual $a_n \neq 0$ é chamado **ordem de** f e será denotado por $o(f)$. Por convenção, $o(0) = \infty$.

As seguintes propriedades são conseqüências das definições:

(1) $o(f+g) \geq min\{o(f), o(g)\}$, $o(f.g) \geq o(f) + o(g)$;

(2) $o(f.g) = o(f) + o(g)$, se A é um domínio integral;

(3) f é uma unidade de $A[[t]]$ se, e somente se, a_0 é uma unidade de A,

para todos $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \in A[[t]]$.

Lema 1.2. *Se A é um corpo, $A[[t]]$ é anel local.*

Demonstração : Por (3) acima, um elemento $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_i t^i$ é invertível em $A[[t]]$ se, e somente se, $a_0 \neq 0$ ([1], pg.11). Logo, o único ideal maximal é $tA[[t]]$.

■

Corolário 1.1. *Se A é um corpo, os únicos ideais de $A[[t]]$ são da forma (t^j), para $j \in \mathbb{N}$.*

Corolário 1.2. *Se A é corpo, $A[[t]]$ é domínio de ideais principais, logo integralmente fechado no seu corpo de frações.*

Portanto, se A é corpo, $A[[t]]$ é um anel de valorização discreta com corpo de resíduos igual a A.

Denotamos por $A((t))$ o corpo de frações de $A[[t]]$. Este consiste de séries de potências formais de Laurent em t. Assim, cada elemento f de $A((t))$ pode ser escrito na forma $f = t^{-n}g$, com $n \geq 0$ e $g \in A[[t]]$. A ordem de uma série de potências de Laurent não nula é, como usual, o menor inteiro n tal que t^n aparece com coeficiente não nulo. Denotamos a ordem de f por $o(f)$, com a convenção que $o(0) = \infty$.

CAPÍTULO 2

Uma introdução à teoria de Álgebras de Hopf

Neste capítulo introdutório apresentamos os conceitos de álgebra, coálgebra, biálgebra, álgebra de Hopf e noções associadas a eles, visando construir um alicerce teórico suficiente para que a idéia de ação de uma álgebra de Hopf em uma álgebra pudesse ser explorada.

Seja k um corpo. Estamos interessados em k-álgebras de Hopf H e k-álgebras nas quais elas atuam. Salvo menção ao contrário, espaços vetoriais, produtos tensoriais e aplicações lineares aqui serão tomados sobre o corpo k.

2.1 Álgebras e coálgebras

Nesta seção a idéia de coálgebra é introduzida como sendo o conceito categoricamente dual ao conceito de álgebra. A propriedade associativa da multiplicação e a existência de unidade em uma álgebra podem ser expressas através de diagramas, como podemos ver nesta outra forma de definir uma álgebra.

Definição 2.1. (Álgebra) *Uma k-**álgebra** A com unidade é um espaço vetorial A munido de duas aplicações lineares, a multiplicação $\mu : A \otimes_k A \to A$ e a unidade $i : k \to A$, tais que μ é associativa, ie, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes \mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd}$$

é comutativo, a aplicação $\mu \circ (1 \otimes i) : A \otimes_k k \to A \otimes_k A \to A$ é a mesma que a aplicação multiplicação de k-espaços $A \otimes_k k \to A$, e também $\mu \circ (i \otimes 1)$ é a mesma que a multiplicação $k \otimes_k A \to A$, ou seja, temos os seguintes diagramas comutativos:

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} A \otimes_k k \arrow[r, "1 \otimes i"] \arrow[d, equal] & A \otimes_k A \arrow[d, "\mu"'] \\ A \otimes_k k \arrow[r, "\text{mult. escalar}"] & A \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} k \otimes_k A \arrow[r, "i \otimes 1"] \arrow[d, equal] & A \otimes_k A \arrow[d, "\mu"'] \\ k \otimes_k A \arrow[r, "\text{mult. escalar}"] & A \end{tikzcd}$$

A definição dada acima pode ser naturalmente dualizada, obtendo assim a noção de coálgebra.

Definição 2.2. (Coálgebra) *Uma k-**coálgebra** (com counidade) é um espaço vetorial C munido de duas aplicações lineares:*

$$\Delta : C \to C \otimes C \ \textit{(comultiplicação)}$$

$$\epsilon : C \to k \ \textit{(counidade)}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

Coassociatividade: O diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes 1"] \\ C \otimes C \arrow[r, "1 \otimes \Delta"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

é comutativo (este é o diagrama "dual" ao para a associatividade da aplicação multiplicação μ);

Counidade: os diagramas

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes C \arrow[d, "1 \otimes \epsilon"] \\ C & C \otimes k \arrow[l, "m"'] \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes C \arrow[d, "\epsilon \otimes 1"] \\ C & k \otimes C \arrow[l, "m"'] \end{tikzcd}$$

comutam, onde m é o isomorfismo natural (multiplicação por escalares).

Definição 2.3. *Sejam C e D coálgebras, com comultiplicações Δ_C e Δ_D e counidades ϵ_C e ϵ_D, respectivamente.*

(i) Uma aplicação $f : C \to D$ é um **morfismo de coálgebras** *se $\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$ e $\epsilon_C = \epsilon_D \circ f$;*

(ii) Um subespaço $I \subseteq C$ é um **coideal** *se $\Delta_C(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\epsilon_C(I) = 0$;*

(iii) Um subespaço $I \subseteq C$ é um **coideal à direita** *se $\Delta_C(I) \subseteq I \otimes C$;*

(iv) Um subespaço $E \subseteq C$ é uma **subcoálgebra** *se $\Delta_C(E) \subseteq E \otimes E$.*

2.2 Biálgebras

Nesta seção, olharemos para espaços que têm estrutura de álgebra e coálgebra simultaneamente e de modo a haver uma compatibilidade entre elas. Tais objetos serão denominados biálgebras.

Dados C e D espaços vetoriais, definimos $\tau : C \otimes D \to D \otimes C$ como sendo a aplicação de mudança,

$$\tau(c \otimes d) = d \otimes c.$$

Se C e D são coálgebras, o espaço vetorial $C \otimes D$ tem estrutura de coálgebra, onde $\Delta_{C\otimes D}$ é a composta

$$C \otimes D \overset{\Delta_C\otimes\Delta_D}{\longrightarrow} C \otimes C \otimes D \otimes D \overset{1\otimes\tau\otimes 1}{\longrightarrow} C \otimes D \otimes C \otimes D \quad \text{e} \quad \epsilon_{C\otimes D}(c \otimes d) = \epsilon_C(c)\epsilon_D(d).$$

Definição 2.4. (Biálgebra) *Seja B um espaço vetorial dado com aplicações lineares $\mu : B \otimes B \to B, i : k \to B, \Delta : B \to B \otimes B$ e $\epsilon : B \to k$, tais que (B, μ, i) seja uma álgebra e (B, Δ, ϵ) seja uma coálgebra. O sistema $(B, \mu, i, \Delta, \epsilon)$ é chamado* **biálgebra**, *se Δ e ϵ forem morfismos de álgebras (ou, equivalentemente, μ e i forem morfismos de coálgebras).*

Definição 2.5. *Uma aplicação $f : B \to B'$ de biálgebras é chamada de* **morfismo de biálgebras** *se f for morfismo de álgebras e de coálgebras. Um subespaço $I \subseteq B$ é dito* **bi-ideal** *se I for um ideal e um coideal.*

Exemplo 2.1. *Sejam G um grupo e kG sua álgebra de grupo. Então, $B = kG$ é uma biálgebra, onde $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\epsilon(g) = 1$, para todo $g \in G$.*

Exemplo 2.2. *Sejam L uma álgebra de Lie e $B = U(L)$ sua álgebra universal envelopante. Então, B é uma biálgebra, definindo $\Delta(l) = l \otimes 1 + 1 \otimes l$ e $\epsilon(l) = 0$, para todo $l \in L$.*

Definição 2.6. *Sejam C uma coálgebra e $c \in C$.*
(a) c é chamado **elemento de tipo grupo** *se $\Delta(c) = c \otimes c$ e $\epsilon(c) = 1$. O conjunto de elementos de tipo grupo é denotado por $G(C)$.*
*(b) Para $g, h \in G(C)$, c é chamado g, h-***primitivo** *se $\Delta(c) = c \otimes g + h \otimes c$. O conjunto de todos os elementos g, h-primitivos é denotado por $P_{g,h}(C)$. Se C é uma biálgebra e $g = h = 1$, então os elementos de $P(C) = P_{1,1}(C)$ são simplesmente chamados de elementos primitivos de C.*

2.3 Álgebras de Hopf

Álgebras de Hopf são biálgebras com uma estrutura adicional, a chamada antípoda. Veremos nesta seção que nossos exemplos mais familiares, as álgebras de grupos e envelopantes de álgebras de Lie, são álgebras de Hopf.

Definição 2.7. (Álgebra de Hopf) *Uma k-biálgebra H é uma k-***álgebra de Hopf** *se existe um homomorfismo de k-módulos*

$$\lambda : H \to H \text{ (chamado de antípoda)}$$

o qual é tanto um antihomomorfismo de k-álgebras quanto de k-coálgebras, isto é,

$$(i)\ \lambda(h \otimes h') = \lambda(h') \otimes \lambda(h) \text{ e}$$
$$(ii)\ \Delta \circ \lambda = \tau \circ (\lambda \otimes \lambda) \circ \Delta,$$

e satisfaz:

Propriedade Antípoda $\mu(1 \otimes \lambda)\Delta = i\epsilon$ *e* $\mu(\lambda \otimes 1)\Delta = i\epsilon$.

Definição 2.8. *Uma k-álgebra de Hopf H é* **cocomutativa** *se*

$$\tau \circ \Delta = \Delta,$$

e **comutativa** *se H é comutativa como uma álgebra (ie, $m \circ \tau = m$, em $H \otimes H$, para m a aplicação multiplicação de H como álgebra). Uma álgebra de Hopf H é* **abeliana** *se H é comutativa e cocomutativa. ([16], pág.8)*

Usando a notação de Sweedler ([28]),

$$\Delta(h) = \sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} \ \in H \otimes H.$$

Pela coassociatividade, $(\Delta \otimes 1)\Delta(h) = (1 \otimes \Delta)\Delta(h)$, então denotaremos ambos por

$$\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes h_{(3)},$$

etc. A cocomutavidade torna-se a condição:

$$\sum_{(h)} h_{(1)} \otimes h_{(2)} = \sum_{(h)} h_{(2)} \otimes h_{(1)}.$$

E, a condição (ii) da definição de álgebra de Hopf pode ser escrita

$$\sum_{\lambda(h)} (\lambda(h))_{(1)} \otimes (\lambda(h))_{(2)} = \sum_{(h)} \lambda(h_{(2)}) \otimes \lambda(h_{(1)}).$$

A notação de Sweedler é um tanto quanto misteriosa, mas é muito eficiente nas propriedades derivadas de álgebras de Hopf, observando o que acontece com seus elementos.

Exemplo 2.3. (A álgebra de grupo) *O exemplo clássico de uma k-álgebra de Hopf é $H = kG$, a álgebra de um grupo finito G. Como Δ, ϵ e λ são k-homomorfismos lineares, eles são unicamente determinados por seus valores nos elementos de G, os quais são:*

$$\Delta(g) = g \otimes g,$$
$$\epsilon(g) = 1,$$
$$\lambda(g) = g^{-1},$$

para g em G. A álgebra de grupo kG é evidentemente cocomutativa.

Mais geralmente, se H é uma álgebra de Hopf arbitrária, a propriedade antípoda implica que $\lambda(g) = g^{-1}$, para todo g em $G(H)$ (elementos de tipo grupo, Definição 2.6). Em particular, todo elemento de tipo grupo é invertível em H e o conjunto $G(H)$ é um grupo.

Exemplo 2.4. (Álgebra Envelopante) *Seja $H = U(L)$, a álgebra envelopante de L, onde L é uma álgebra de Lie. Temos que H é uma álgebra de Hopf, definindo*

$$\begin{aligned} \Delta : H &\to H \otimes H \\ l &\mapsto l \otimes 1 + 1 \otimes l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon : H &\to k \\ l &\mapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda : H &\to H \\ l &\mapsto -l \end{aligned}$$

para todo l em L.

Mais geralmente, se H é uma álgebra de Hopf arbitrária, a propriedade antípoda implica que $\lambda(l) = -l$, para $l \in P(H)$. Se $l \in P_{g,h}(H)$, prova-se que $\lambda(l) = -h^{-1}lg^{-1}$.

Definição 2.9. *Seja C uma coálgebra.*
(i) C é dita **simples** *se C não possuir subcoálgebras próprias não nulas.*
(ii) C é **pontual** *se todas as subcoálgebras simples de C têm dimensão um.*
(iii) O **co-radical** *C_0 de C é definido como a soma de todas as subcoálgebras simples de C.*
(iv) C é **conexa** *se o co-radical C_0 de C tiver dimensão 1.*
(v) C é **irredutível** *se quaisquer duas subcoálgebras não nulas de C tiverem intersecção não nula.*
(vi) Uma subcoálgebra D de C é uma **componente irredutível** *de C se D for uma subcoálgebra irredutível maximal de C.*

Observemos que uma subcoálgebra de dimensão 1 deve ser da forma kg, para $g \in G(C)$. Portanto, C é pontual se, e somente se, o co-radical C_0 coincidir com $kG(C)$.

Exemplo 2.5. *Se G é um grupo, então $C = kG$ é pontual e $C_0 = C$.*

Exemplo 2.6. *Toda álgebra de Hopf cocomutativa H sobre um corpo k algebricamente fechado é pontual.*

De fato, seja C uma subcoálgebra simples de H, então $C^* = Hom(C, k)$ (a álgebra dual) é uma álgebra comutativa simples, de dimensão finita sobre k e, portanto, $C^* \simeq k$. Assim, $C \simeq k$ tem dimensão 1 e, consequentemente, H é pontual.

Teorema 2.1. *Toda coálgebra cocomutativa é soma direta de suas componentes irredutíveis.*

Demonstração : [25], Teorema 5.6.3.

■

Agora, para descrever a estrutura das álgebras de Hopf cocomutativas e pontuais, precisaremos da noção de ação de uma álgebra de Hopf em uma álgebra e da construção do produto smash. Ambos os conceitos serão definidos a seguir.

Definição 2.10. (Ação) *Sejam H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra. Dizemos que H* **age em** *A à esquerda ou que A é uma H*-**módulo álgebra** *à esquerda se forem satisfeitas:*
(1) A é um H-módulo à esquerda (com ação de $h \in H$ em $a \in A$ denotada por $h \cdot a$),
(2) $h \cdot (ab) = \sum_{(h)} (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b)$, para todos $h \in H$; $a, b \in A$,
(3)$h \cdot 1_A = \epsilon(h) 1_A$, para todo $h \in H$.

Definição 2.11. (Produto Smash) *Seja A uma H-módulo álgebra à esquerda. Então, o* **produto smash** *de álgebras $A \# H$ é definido como segue, para $a, b \in A$; $h, h' \in H$:*
(1) como k-espaços, $A \# H = A \otimes H$. Escrevemos $a \# h$ para o elemento $a \otimes h$.
(2) a multiplicação é dada por

$$(a\#h)(b\#h') = \sum_{(h)} a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}h'$$

Exemplo 2.7. *Nesta tese vamos considerar o caso específico em que $A = U(L)$, $H = kQ$, onde k é um corpo, L é uma álgebra de Lie e Q um grupo agindo sobre L. Desta forma, usando o produto em $U(L)\#kQ$, temos $qLq^{-1} = L$.*

O produto smash $H = U(L)\#kQ$ é exemplo de álgebra de Hopf, com

$$\begin{aligned} \Delta : H &\to H \otimes H \\ l &\mapsto l \otimes 1 + 1 \otimes l, \quad para\ l \in L \\ g &\mapsto g \otimes g, \quad para\ g \in G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon : H &\to k \\ l &\mapsto 0, \ para\ l \in L \\ g &\mapsto 1, \ para\ g \in G \end{aligned}$$

E, podemos definir através de Δ, a m-ésima comultiplicação, da seguinte forma:

$$\Delta^m : H \to \bigotimes^m H$$

$$l \mapsto \sum_{0 \leq j \leq m} \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1}_{j-1} \otimes l \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{m-j}, \quad para\ l \in L$$

$$g \mapsto \underbrace{g \otimes g \otimes \cdots \otimes g}_{m\ vezes}, \quad para\ g \in G$$

A primeira parte do teorema de classificação de álgebras de Hopf cocomutativas pontuais vem a seguir.

Seja H uma álgebra de Hopf arbitrária. Para cada $x \in G = G(H)$, no restante desta seção, H_x denotará a componente irredutível (conexa) de H contendo x.

Proposição 2.1. *Com a notação acima, temos*

(i) $H_xH_y \subseteq H_{xy}$ *e* $\lambda(H_x) \subseteq H_{x^{-1}}$*, para todos* $x, y \in G$*. Em particular,* H_1 *é uma subálgebra de Hopf de* H*.*

(ii) H_1 *é uma* kG*-módulo álgebra, via* $x \cdot h = xhx^{-1}$*, para todos* $x \in G$ *e* $h \in H_1$*.*

(iii) Se H *é cocomutativa e pontual, então* $H_1 \# kG \simeq H$*, via* $h\#x \mapsto hx$*.*

Demonstração : [25], Corolário 5.6.4.

■

A decomposição obtida na Proposição 2.1 reduz o estudo da estrutura de uma álgebra de Hopf cocomutativa e pontual ao estudo de sua componente irredutível contendo 1. Como as componentes irredutíveis são conexas, é suficiente estudar a estrutura de álgebras de Hopf conexas cocomutativas. Para corpos de característica zero, a estrutura de tais álgebras foi descrita, independentemente, por Cartier e Kostant.

Teorema 2.2. (Cartier-Kostant) *([25], Teorema 5.6.5) Seja* H *uma álgebra de Hopf conexa e cocomutativa sobre um corpo* k *de característica zero. Então,* $H \simeq U(L)$*, para* $L = P(H)$*.*

Como conseqüência imediata da Proposição 2.1 e do Teorema 2.2, temos

Corolário 2.1. *Se* H *é uma álgebra de Hopf cocomutativa e pontual sobre um corpo* k *de característica 0, então*

$$H \simeq U(L) \# kG,$$

onde $L = P(H)$ *e* $G = G(H)$*.*

Como vimos acima, toda álgebra de Hopf cocomutativa H sobre um corpo k algebricamente fechado é pontual. Logo, o corolário acima pode ser aplicado para álgebras de Hopf cocomutativas sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Em particular, se além dessas hipóteses, a álgebra de Hopf tiver dimensão finita, ela será isomorfa a uma álgebra de grupo. Obtemos, assim, um dos primeiros resultados sobre a classificação de álgebras de Hopf, conhecido como Teorema de Cartier-Kostant-Milnor-Moore.

Teorema 2.3. *([17], Teorema 4.4.3) Uma álgebra de Hopf cocomutativa sobre um corpo algebricamente fechado k de característica zero é um produto smash de uma álgebra de grupo por uma álgebra universal envelopante de uma álgebra de Lie.*

Em particular, uma álgebra de Hopf cocomutativa de dimensão finita sobre k é uma álgebra de grupo.

■

CAPÍTULO 3

Critérios Homológicos de Finitude

3.1 Propriedades Homológicas FP_m de módulos

Sejam Λ um anel com unidade e A um Λ-módulo.

Todo módulo A tem resoluções projetivas, mas não necessariamente finitamente geradas.

Nesta seção, veremos condições homológicas em A que são equivalentes com a existência de resoluções livres finitamente geradas.

Todos os resultados das Seções 3.1-3.3 são conhecidos e a maioria deles pode serem encontrados no livro de R. Bieri ([5]).

Definição 3.1. (Módulo de Tipo FP_m) *O Λ-módulo A é dito ser de* **tipo** FP_m *se existe uma resolução projetiva $\mathcal{P} \twoheadrightarrow A$, com P_i finitamente gerado, para todo $i \leq m$. Se os módulos P_i são finitamente gerados para todo i, então dizemos que A é de tipo FP_∞.*

Observações 3.1.

- *A é de tipo FP_0 se, e somente se, A é finitamente gerado.*
- *A é de tipo FP_1 se, e somente se, A é de finitamente presentado.*
- *Se A é de tipo $(FP)_m$, $0 \leq m \leq \infty$, então podemos construir uma resolução livre que é finitamente gerada em dimensões menores ou iguais a m.*

De fato, seja $\ldots \to P_2 \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \twoheadrightarrow A$ uma resolução projetiva, com P_0 finitamente gerado. Então, existe um módulo projetivo finitamente gerado Q tal que $P_0 \oplus Q$ é um módulo livre. Deste modo, substituindo P_0 por $P_0 \oplus Q$ e P_1 por $P_1 \oplus Q$ e estendendo d_1 por Id_Q construimos uma nova resolução que é finitamente gerada e livre na dimensão 0. Continuando este processo teremos o resultado.

3.2 Limites Diretos e Limites Inversos

Apresentamos nesta seção os conceitos de limite direto e limite inverso e alguns resultados utilizando tais conceitos, sendo um deles de grande importância na classificação de módulos de tipo FP_m.

Sejam I um conjunto quase-ordenado (ie, I tem uma relação binária $\leq$ reflexiva e transitiva) e $\mathcal{C}$ uma categoria. Temos que I pode ser considerado uma categoria, com objetos os elementos de I e exatamente um morfismo $\varphi : i \to j$ se, e somente se, $i \leq j$.

Definição 3.2. (Sistema Direto) *Um* **sistema direto** *em $\mathcal{C}$, com conjunto de índices I, é um funtor $F : I \to \mathcal{C}$ tal que, para cada $i \in I$, existe um objeto F_i e, se $i, j \in I$ satisfazem $i \leq j$, existe um morfismo $\varphi^i_j : F_i \to F_j$ tal que:*

(i) *$\varphi^i_i : F_i \to F_i$ é a identidade, $\forall i \in I$;*

(ii) *Se $i \leq j \leq k$, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, "\varphi^i_k"] \arrow[dr, "\varphi^i_j"'] & & F_k \\ & F_j \arrow[ur, "\varphi^j_k"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Definição 3.3. (Limite Direto) *Seja $F = \{F_i, \varphi^i_j\}$ um sistema direto em $\mathcal{C}$. O* **limite direto** *deste sistema, denotado por $\varinjlim F_i$, é um objeto e uma família de morfismos $\alpha_i : F_i \to (\varinjlim F_i)$, com $\alpha_i = \alpha_j \circ \varphi^i_j$, sempre que $i \leq j$, satisfazendo o seguinte problema universal de aplicações:*

$$\begin{tikzcd} \varinjlim F_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & X \\ & F_i \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[ur, "f_i"'] \arrow[d, "\varphi^i_j"] & \\ & F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

para todo objeto X e toda família de morfismos $f_i : F_i \to X$, com $f_i = f_j \circ \varphi^i_j$, com $i \leq j$, existe um único morfismo $\beta : (\varinjlim F_i) \to X$ fazendo o diagrama acima comutativo.

Definição 3.4. (Sistema Inverso) *Sejam I um conjunto quase-ordenado e $\mathcal{C}$ uma categoria. Um* **sistema inverso** *em $\mathcal{C}$, com conjunto de índices I, é um funtor contravariante $F : I \to \mathcal{C}$ tal que, para cada $i \in I$, existe um objeto F_i e, se $i, j \in I$ satisfazem $i \leq j$, existe um morfismo $\psi_i^j : F_j \to F_i$ tal que:*

(i) *$\psi_i^i : F_i \to F_i$ é a identidade, $\forall i \in I$;*

(ii) *Se $i \leq j \leq k$, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} F_k \arrow[rr, "\psi_i^k"] \arrow[dr, "\psi_j^k"'] & & F_i \\ & F_j \arrow[ur, "\psi_i^j"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Definição 3.5. (Limite Inverso) *Seja $F = \{F_i, \psi_i^j\}$ um sistema inverso em $\mathcal{C}$. O* **limite inverso** *deste sistema, denotado por $\varprojlim F_i$, é um objeto e uma família de morfismos $\alpha_i : (\varprojlim F_i) \to F_i$, com $\alpha_i = \psi_i^j \circ \alpha_j$, sempre que $i \leq j$, satisfazendo o seguinte problema universal de aplicações:*

$$\begin{tikzcd} \varprojlim F_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\ & F_i & \\ & F_j \arrow[u, "\psi_i^j"'] & \end{tikzcd}$$

para todo objeto X e toda família de morfismos $f_i : X \to F_i$, com $f_i = \psi_i^j \circ f_j$, com $i \leq j$, existe um único morfismo $\beta : X \to (\varprojlim F_i)$ fazendo o diagrama acima comutativo.

Seja F um funtor covariante da categoria de Λ-módulos na categoria de grupos abelianos.

As aplicações $F_i \to (\varinjlim F_*)$ e $(\varprojlim F_*) \to F_i$ induzem um sistema compatível de aplicações

$$F(F_i) \to F(\varinjlim F_*)$$

e

$$F(\varprojlim F_*) \to F(F_i)$$

respectivamente e, temos os homomorfismos

$$\varinjlim F(F_*) \to F(\varinjlim F_*),$$

$$F(\varprojlim F_*) \to (\varprojlim F(F_*)),$$

respectivamente.

Definição 3.6. *Dizemos que F* **comuta** *com limite direto ou limite inverso se o homomorfismo correspondente é um isomorfismo.*

Os funtores $\varinjlim$ e $\varprojlim$ não são exatos em geral, mas existem casos especiais interessantes em que esta propriedade é válida. Neste caso, chamamos de **limites diretos exatos** e **limites inversos exatos**, respectivamente.

Exemplo 3.1. *Produto direto é um exemplo de limite inverso exato. Limite direto sobre um conjunto de índices direcionado I(ie, para todos $\alpha, \beta \in I$, existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \leqslant \gamma$ e $\beta \leqslant \gamma$) é exato ([5], pg. 08).*

Proposição 3.1. *Para todo Λ-módulo A e todo $k \geq 0$, temos:*
(a) *O funtor $Tor_k^{\Lambda}(A, -)$ comuta com limites diretos exatos;*
(b) *O funtor $Ext_{\Lambda}^k(A, -)$ comuta com limites inversos exatos.*

<u>Demonstração</u> : [5], Prop.1.1.

■

Proposição 3.2. *(***Resultado importante:)** *As seguintes condições são equivalentes, para um Λ-módulo A:*
(i) *A é de tipo FP_m;*
(ii a) *Para todo limite inverso exato, a aplicação natural $Tor_k^{\Lambda}(A, \varprojlim M_*) \longrightarrow \varprojlim Tor_k^{\Lambda}(A, M_*)$ é um isomorfismo, para todo $k < m$, e um epimorfismo para $k = m$;*
(ii b) *Para todo limite direto exato, a aplicação natural $\varinjlim Ext_{\Lambda}^k(A, M_*) \longrightarrow Ext_{\Lambda}^k(A, \varinjlim M_*)$ é um isomorfismo, para todo $k < m$, e um monomorfismo para $k = m$;*
(iii a) *Para um produto direto $\prod \Lambda$ de cópias arbitrárias de Λ, a aplicação natural $Tor_k^{\Lambda}(A, \prod \Lambda) \longrightarrow \prod Tor_k^{\Lambda}(A, \Lambda)$ é um isomorfismo, para todo $k < m$, e um epimorfismo para $k = m$;*

(iii b) *Para o limite direto de um sistema direcionado de Λ-módulos $\{M_*\}$, com $\varinjlim M_* = 0$, temos $\varinjlim Ext^k_\Lambda(A, M_*) = 0$, para todo $k \leq m$.*

Demonstração : [5], Teorema 1.3.

■

Observação 3.1. (Sobre a condição (iiia))

(01) *Observemos que $Tor^\Lambda_k(A, \Lambda) = 0$, para $k \neq 0$. Então, para $m \geq 1$, a afirmação de $(iiia)$ pode ser escrita:*

$(iiia)'$ $\mu : A \otimes_\Lambda (\prod \Lambda) \to \prod A$ *é um isomorfismo e* $Tor^\Lambda_k(A, \prod \Lambda) = 0$, *para* $1 \leq k \leq m-1$;

(02) *A condição $\mu : A \otimes_\Lambda (\prod \Lambda) \xrightarrow{\simeq} \prod A$, para todos produtos diretos, é equivalente com "A é de tipo FP_1". Logo, $(iiia)'$ é também equivalente a*

$(iiia)''$ *A é finitamente presentado e $Tor^\Lambda_k(A, \prod \Lambda) = 0$, para todo $1 \leq k \leq m-1$.*

(03) *A prova de $(iiia) \Rightarrow (i)$ nos dá um resultado ligeiramente importante. É suficiente, na condição $(iiia)$, considerarmos produtos diretos $\prod\limits_\chi \Lambda$ sobre um conjunto de índices de cardinalidade $\chi \leq max(|\Lambda|, |A|)$. Assim, se A é finitamente gerado (por exemplo, na condição $(iiia)''$), somente precisamos considerar produtos diretos $\prod\limits_\chi \Lambda$, com $\chi \leq |\Lambda|$.*

Como uma aplicação desta proposição, podemos provar a seguinte:

Proposição 3.3. *Seja $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ uma seqüência exata curta de Λ-módulos. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *Se A' é de tipo FP_{m-1} e A é de tipo FP_m, então A'' é de tipo FP_m;*

(b) *Se A é de tipo FP_{m-1} e A'' é de tipo FP_m, então A' é de tipo FP_{m-1};*

(c) *Se A' e A'' são de tipo FP_m, então A também é de tipo FP_m.*

Demonstração : (a) Por hipótese e $(iiib)$ da Proposição 3.2 temos, para cada sistema direcionado $\{M_*\}$ de Λ-módulos,

$$\varinjlim Ext^k(A, M_*) = 0, \text{ se } k \leq m \quad \text{e} \quad \varinjlim M_* = 0,$$

$$\varinjlim Ext^k(A', M_*) = 0, \text{ se } k \leq m-1 \quad \text{e} \quad \varinjlim M_* = 0.$$

Sendo $\varinjlim$ funtor exato para um sistema direcionado, temos a seqüência exata longa

$$\cdots \to \varinjlim Ext^{k-1}(A^{'}, M_*) \to \varinjlim Ext^{k}(A^{''}, M_*) \to \varinjlim Ext^{k}(A, M_*) \to$$

$$\to \varinjlim Ext^{k}(A^{'}, M_*) \to \varinjlim Ext^{k+1}(A^{''}, M_*) \to \varinjlim Ext^{k+1}(A, M_*) \to \cdots$$

Agora, com as condições acima, ou seja, $\varinjlim Ext^{k}(A^{'}, M_*) = 0$, se $k \leq m-1$ e $\varinjlim Ext^{k+1}(A, M_*) = 0$, se $k+1 \leq m$ $(k \leq m-1)$, devemos ter $\varinjlim Ext^{j}(A^{''}, M_*) = 0$, se $k+1 = j \leq m$. Assim, por $(iiib)$ da Proposição 3.2, temos que $A^{''}$ é de tipo FP_m.

(b) Como acima, por $(iiib)$ da Proposição 3.2, temos

$$\varinjlim Ext^{k}(A, M_*) = 0, \text{ se } k \leq m-1 \text{ e } \varinjlim Ext^{k}(A^{''}, M_*) = 0, \text{ se } k \leq m,$$

para $\{M_*\}$ um sistema direcionado de Λ-módulos, com $\varinjlim M_* = 0$.

Assim, na seqüência exata longa de (a), se $k \leq m-1$, teremos $\varinjlim Ext^{k}(A^{'}, M_*) = 0$.

Logo, $A^{'}$ é de tipo FP_{m-1}.

(c) Novamente, por hipótese e por $(iiib)$ da Proposição 3.2, temos

$$\varinjlim Ext^{k}(A^{'}, M_*) = 0 \text{ e } \varinjlim Ext^{k}(A^{''}, M_*) = 0, \text{ se } k \leq m.$$

Na seqüência exata longa de (a), teremos então $\varinjlim Ext^{k}(A, M_*) = 0$, se $k \leq m$.

Portanto, A é de tipo FP_m.

■

Lema 3.1. *Todo módulo A finitamente gerado sobre um anel Λ noetheriano e comutativo tem tipo FP_∞ sobre Λ.*

<u>Demonstração</u> : Consideremos a seqüência

$$\operatorname{Ker} \partial_1 \to \Lambda^{s_0} \overset{\partial_0}{\twoheadrightarrow} A.$$

Sendo Λ^{s_0} finitamente gerado sobre Λ, o qual é noetheriano, temos que Λ^{s_0} é Λ-módulo noetheriano.

Logo, $\operatorname{Ker}(\partial_1)$ é finitamente gerado sobre Λ, conseguindo $\Lambda^{s_1} \twoheadrightarrow \operatorname{Ker} \partial_1$ e, assim por diante, teremos

$$\mathcal{S} : \cdots \xrightarrow{\partial_2} \Lambda^{s_1} \xrightarrow{\partial_1} \Lambda^{s_0} \xrightarrow{\partial_0} A \longrightarrow 0$$

resolução livre de A sobre Λ, onde cada módulo é finitamente gerado. Logo, A é de tipo FP_∞ sobre Λ.

■

Observação 3.2. *Se A for módulo à direita, no Lema 3.1, é suficiente Λ ser anel noetheriano à direita, não necessariamente comutativo.*

Exemplo 3.2. *Seja $\mathcal{X}$ uma classe de grupos. Um grupo G é dito* **poli-$\mathcal{X}$** *se G contém uma série subnormal (ie, $G_i \lhd G_{i+1}$, com G_i não necessariamente normal em G)*

$$\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$$

tal que cada fator $G_i/G_{i-1}, 1 \leq i \leq n$, pertence à classe $\mathcal{X}$.

Em ([26], Cap.10, Teorema 2.7), temos: Sejam S um anel com 1_S, R um subanel noetheriano à esquerda (respectivamente à direita) com $1_R = 1_S$ e G um grupo de unidades de S, sendo poli-{cíclico, finito}. Se $R = R^G = \{grg^{-1} | g \in G, r \in G\}$ e $S = \langle R, G\rangle$ (ie, S como anel é gerado por R e G), então S é noetheriano à esquerda (respectivamente à direita).

Lema 3.2. *Sejam A um módulo de tipo FP_m sobre um anel Λ, S um anel, com $\bigotimes_\Lambda S$ funtor exato. Então, $A \otimes_\Lambda S$ tem tipo FP_m sobre S.*

Demonstração : Sendo A um módulo de tipo FP_m sobre Λ, temos que existe uma resolução projetiva

$$\ldots \to P_j \to \ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow A,$$

com P_i finitamente gerado, para todo $i \leq m$. Agora, como $\otimes_\Lambda S$ é funtor exato, temos

$$\ldots \to P_j \otimes_\Lambda S \to \ldots \to P_2 \otimes_\Lambda S \to P_1 \otimes_\Lambda S \to P_0 \otimes_\Lambda S \twoheadrightarrow A \otimes_\Lambda S,$$

resolução projetiva de S-módulos, com $P_i \otimes_\Lambda S$ finitamente gerado, para cada $i \leq m$. Logo, $A \otimes_\Lambda S$ tem tipo FP_m sobre S.

■

3.3 Grupos de tipo FP_m

Seja R um anel comutativo com unidade $1 \neq 0$.

Todas as demonstrações dos resultados desta seção podem ser encontradas no livro de R. Bieri ([5]).

Definição 3.7. (Grupo de Tipo FP_m) *Um* **grupo** *G é dito ser de* **tipo** *FP_m sobre R, $m = \infty$ ou um inteiro ≥ 0, se o G-módulo trivial R (ie, G age como 1) é de tipo FP_m como um RG-módulo.*

Se G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}$, então dizemos que G é de tipo FP_m.

Observação 3.3. *R é finitamente gerado como um RG-módulo. Assim, todo grupo é de tipo FP_0 sobre R.*

Proposição 3.4. *Um grupo G é de tipo FP_1 sobre R se, e somente se, G é finitamente gerado.*

Definição 3.8. *Um grupo G é dito ser* **quase finitamente presentado** *sobre R se existe uma seqüência exata curta de grupos $K \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$, com F um grupo livre finitamente gerado e $R \otimes_{\mathbb{Z}} K/[K,K]$ finitamente gerado como RG-módulo, onde a ação de G é por conjugação.*

Grupos finitamente presentados são, claramente, quase finitamente presentados sobre algum anel R. A recíproca deste fato é falsa ([4]).

Proposição 3.5. *Um grupo G é de tipo FP_2 sobre R se, e somente se, G é quase finitamente presentado sobre R.*

3.4 Álgebras de Tipo FP_m

Sejam L uma álgebra de Lie sobre um corpo k, Q um grupo que age sobre L via conjugação e $H = U(L)\#kQ$ uma álgebra de Hopf.

Observação 3.4. *O $U(L)$-módulo k é dito* **trivial** *se L age como multiplicação com 0.*

Definição 3.9. (Álgebra de Tipo FP_m) *Uma álgebra de Lie L sobre um corpo k tem tipo FP_m se o $U(L)$-módulo trivial k tem tipo FP_m.*

Observação 3.5. *O H-módulo k é dito* **trivial** *se L age como 0 e G age como 1.*

Definição 3.10. (Álgebra de Hopf de Tipo FP_m) *Uma álgebra de Hopf $H = U(L)\#kQ$ tem tipo FP_m se o H-módulo trivial k (ie, via counidade $U(L)\#kG \xrightarrow{\epsilon} k$) tem tipo FP_m.*

Lema 3.3. *Seja $H = U(L)\#kQ$ álgebra de Hopf e $I\!K$ um corpo extensão de k. Então,*

$$H \text{ tem tipo } FP_m \text{ se, e somente se, } H \otimes_k I\!K = U(L \otimes_k I\!K)\#I\!KQ \text{ tem tipo } FP_m.$$

Demonstração : ($\Rightarrow$) Sendo H de tipo FP_m, por definição, existe uma resolução projetiva de H-módulos

$$\mathcal{P} : \cdots \to P_i \to \cdots \to P_0 \to k \to 0,$$

do H-módulo trivial k, com P_i finitamente gerado, para todo $i \leq m$.

Agora, como $- \otimes_k -$ é funtor exato, temos que

$$\mathcal{P} \otimes_k I\!K : \cdots \to P_i \otimes_k I\!K \to \cdots \to P_0 \otimes_k I\!K \to k \otimes_k I\!K = I\!K \to 0$$

é uma resolução do $H \otimes_k I\!K$-módulo trivial $I\!K$, onde cada $\widetilde{P_i} = P_i \otimes_k I\!K$ é $H \otimes_k I\!K$-módulo projetivo e finitamente gerado para $i \leq m$.

Logo, $H \otimes_k I\!K$ tem tipo FP_m.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $H \otimes_k I\!K$ tenha tipo FP_m. Logo, $H \otimes_k I\!K$ tem tipo FP_{m-1}. Provaremos por indução. Assim, vamos supor que

$$H \otimes_k I\!K \text{ de tipo } FP_{m-1} \Rightarrow H \text{ de tipo } FP_{m-1}.$$

Deste modo, existe uma resolução projetiva de H-módulos

$$\mathcal{P} : \cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{\partial_m} P_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \longrightarrow k \twoheadrightarrow 0,$$

onde cada P_i é finitamente gerado, para cada $i \leqslant m-1$.

Agora, como $- \otimes_k I\!K$ é funtor exato, temos que

$$\mathcal{P} \otimes_k I\!K : \cdots \longrightarrow P_m \otimes_k I\!K \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \otimes_k I\!K \xrightarrow{d_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_k I\!K \xrightarrow{d_1} P_0 \otimes_k I\!K \longrightarrow I\!K \twoheadrightarrow 0,$$

é uma resolução projetiva, onde cada $\widetilde{P_i} = P_i \otimes_k I\!K$ é $H \otimes_k I\!K$-módulo finitamente gerado, $\forall i \leqslant m-1$.

Assim, temos

$$0 \longrightarrow ker(d_{m-1}) \rightarrow P_{m-1} \otimes_k I\!\!K \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_k I\!\!K \longrightarrow P_0 \otimes_k I\!\!K \longrightarrow I\!\!K \twoheadrightarrow 0,$$

seqüência exata, onde $P_i \otimes_k I\!\!K$ tem tipo FP_∞ sobre $H \otimes_k I\!\!K$, para todo $0 \leqslant i \leqslant m-1$, pois são projetivos e finitamente gerados, e $I\!\!K$ tem tipo FP_m sobre $H \otimes_k I\!\!K$. Logo, por ([11], Proposição VIII. 4.3), $ker(d_{m-1})$ é finitamente gerado sobre $H \otimes_k I\!\!K$.

Sendo $\mathcal{P}$ um complexo exato e $\otimes_k I\!\!K$ funtor exato, temos que $\mathcal{P} \otimes_k I\!\!K$ é complexo exato. Logo,

$$Ker(d_{m-1}) = Im(d_m) = Im(P_m \otimes_k I\!\!K \rightarrow P_{m-1} \otimes_k I\!\!K) \simeq Im(P_m \rightarrow P_{m-1}) \otimes_k I\!\!K = Im(\partial_m) \otimes_k I\!\!K,$$

de onde temos $Im(\partial_m) \otimes_k I\!\!K$ finitamente gerado sobre $H \otimes_k I\!\!K$.

Afirmação: Seja M um H-módulo tal que $M \otimes_k I\!\!K$ é finitamente gerado como $H \otimes_k I\!\!K$-módulo. Então, M é finitamente gerado como H-módulo.

De fato, se $M \otimes_k I\!\!K = \sum_{m_i \in M, f_i \in I\!\!K} (m_i \otimes_k f_i).(H \otimes_k I\!\!K) = \sum_{m_i \in M} m_i(H) \otimes_k I\!\!K$, temos que $M = \sum_{m_i \in M} m_i(H)$

Assim, aplicando esta afirmação para $M = Im(\partial_m) = Ker(\partial_{m-1})$, temos que $Im(\partial_m)$ é finitamente gerado sobre H. Deste modo, existe $\widetilde{P_m} \twoheadrightarrow Im(\partial_m) = Ker(\partial_{m-1})$ projetivo e finitamente gerado sobre H. Portanto, H é de tipo FP_m.

■

CAPÍTULO 4

Teoria de Valorizações

Neste capítulo veremos algumas definições e resultados interessantes de [13] sobre a teoria de valorizações, os quais são muito importantes nas demonstrações dos resultados obtidos.

Seja Γ um grupo comutativo totalmente ordenado escrito aditivamente. Denotaremos Γ_∞ o conjunto obtido de Γ adjuntando um elemento denotado por $+\infty$ tal que:

(1) $\alpha < +\infty$, para todo $\alpha \in \Gamma$;

(2)$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad \alpha + (+\infty) = +\infty$, para todo $\alpha \in \Gamma$.

Pode-se verificar que esta operação é associativa e comutativa e, que a relação $\alpha \leq \beta \in \Gamma_\infty$ implica $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma_\infty$.

Definição 4.1. (Valorização de um anel) *Seja C um anel com unidade 1 e Γ um grupo comutativo totalmente ordenado escrito aditivamente. Uma* **valorização** *de C com valores em Γ é uma aplicação $v : C \to \Gamma_\infty$ que satisfaz as seguintes condições:*

(VL_I) *$v(xy) = v(x) + v(y)$, para $x, y \in C$;*

(VL_{II}) *$v(x + y) \geq inf\{v(x), v(y)\}$, para $x, y \in C$;*

(VL_{III})*$v(1) = 0$ e $v(0) = +\infty$.*

Proposição 4.1. (Valorização de um corpo) *Sejam k um corpo e v uma valorização de k com valores em Γ. Então,*

(i) $x \neq 0 \Rightarrow v(x) \neq +\infty$;

(ii) $A = \{x \in k : v(x) \geq 0\}$ *é um subanel de k;*

(iii) *Para todo $\alpha \in \Gamma$, os conjuntos $V_\alpha = \{x \in A : v(x) > \alpha\}$ e ${V_\alpha}' = \{x \in A : v(x) \geq \alpha\}$ são ideais de A e todo ideal diferente de (0) de A contém um dos ${V_\alpha}'$;*

(iv) *O conjunto $m(A) = \{x \in A : v(x) > 0\}$ é o único ideal maximal de A (ie, A é um anel local), $U(A) = A \setminus m(A)$(elementos de A que não pertencem a m(A)) é o conjunto de elementos invertíveis de A e o anel quociente $k(A) = A/m(A)$ é um corpo.*

(v) *Para todo $x \in k \setminus A$, $x^{-1} \in m(A)$.*

Demonstração : [8], VI.3.2, pág 387.

■

Definição 4.2.

- *O subanel A da proposição anterior é chamado* **anel da valorização** *v em k;*
- *$m(A)$ é chamado* **ideal da valorização** *v em k;*
- *$k(A)$ é chamado* **corpo de resíduos da valorização** *v em k.*
- *$U(A)$ é o kernel do homomorfismo $v : k^* \to \Gamma$ e a imagem $v(k^*)$ é um subgrupo do grupo aditivo Γ, chamado* **grupo ordem** *ou* **grupo de valores** *de v, o qual é, portanto, isomorfo a $k^*/U(A)$.*
- *Para $x \in k$, o elemento $v(x)$ de Γ_∞ é chamado a* **valorização** *ou* **ordem** *de x em v.*
- *Duas valorizações v, v' em k são ditas* **equivalentes** *se elas têm o mesmo anel.*

Definição 4.3. (Valorização Discreta) *Sejam k um corpo, v uma valorização de k e Γ o grupo ordem de v. A valorização v é chamada* **discreta** *se existe um isomorfismo do grupo ordenado Γ em $\mathbb{Z}$.*

Definição 4.4. (Valorização boa) *Uma valorização de uma k-álgebra comutativa R é dita ser* **boa** *se esta é discreta, trivial em k, e tem corpo de resíduos igual a (a imagem de) k.*

Se v é uma valorização de R então, para $a \in R$, escrevemos $v(a)$ para o valor de v em a.

Observemos que a valorização ordem no anel de séries de potências de Laurent $k((t))$ é boa.

Os resultados apresentados a seguir sobre valorizações boas são muito importantes para a demonstração da Proposição 5.1, apresentada no próximo capítulo, a qual é suficiente ser provada no caso em que k é algebricamente fechado. Logo, vamos assumir, no decorrer desta seção, $k = \overline{k}$.

Lema 4.1. *Se v é uma valorização boa de uma k-álgebra comutativa R, onde v tem grupo de valor $\mathbb{Z}$, então existe um k-homomorfismo de álgebras $\sigma : R \to k((t))$ tal que v coincide com a restrição da valorização ordem, ie, $v(a) = o(\sigma(a)), \forall a \in R$.*

<u>Demonstração</u> : [13], Lema 3.5.

$\blacksquare$

Lema 4.2. **(01)** *Uma valorização equivalente a uma valorização boa é boa;*
(02) *A restrição de uma valorização boa a uma subálgebra com grupo de valores não nulo é boa;*
(03) *Se v é uma valorização boa de um corpo F_1 contendo k e se F_2 é uma extensão finita do corpo F_1, então toda extensão de v à F_2 é também boa.*

<u>Demonstração</u> : [13], Lema 3.6.

$\blacksquare$

Valorizações boas estão em conexão com homomorfismos de anéis de séries de potências e, então, veremos algumas observações nos anéis de séries de potências.

Lema 4.3. **(01)** *O grau de transcendência de $k((t))$ sobre k é infinito;*
(02) *Para inteiros dados $n_1, \ldots, n_l$, existe um subconjunto $\{f_1, \ldots, f_l\}$ de $k((t))$ que é algebricamente independente sobre k e tal que f_i tem ordem n_i, para todo $i = 1, \ldots, l$;*
(03) *Para elementos dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in k$, existe um subconjunto $\{f_1, \ldots, f_l\}$ de $k[[t]]$ que é algebricamente independente sobre k e tal que f_i tem termo constante α_i, para todo $i = 1, \ldots, l$*

Demonstração : [13], Lema 3.7.

■

Agora, traduziremos estes resultados para resultados de existência de boas valorizações.

Lema 4.4. *Seja $k(X_1, \ldots, X_l)$ o corpo de frações do anel de polinômios $k[X_1, \ldots, X_l]$.*
(01) *Para inteiros dados $n_1, \ldots, n_l$, existe uma valorização boa v de $k(X_1, \ldots, X_l)$ tal que $v(X_i) = n_i$, para $i = 1, \ldots, l$;*
(02) *Sejam a e b elementos não nulos de $k[X_1, \ldots, X_l]$ e suponhamos que $b \nmid a$. Então, existe uma valorização boa v de $k(X_1, \ldots, X_l)$ tal que v é não-negativa em $k[X_1, \ldots, X_l]$ e $v(a) < v(b)$.*

Demonstração : [13], Lema 3.8.

■

Os Lemas 4.1 a 4.4 são usados na demonstração da Proposição 4.2 e serão utilizados no último capítulo.

Proposição 4.2. *Seja T uma k-subálgebra finitamente gerada de uma k-álgebra finitamente gerada comutativa S. Então, S é integral sobre T se, e somente se, toda valorização boa que é não-negativa em T é também não-negativa em S.*

Demonstração : [13], Lema 3.9.

■

Lema 4.5. *Sejam M um k-espaço, S uma k-subálgebra de $Hom_k(M, M)$ e T uma subálgebra central finitamente gerada de S. Suponhamos que M seja finitamente gerado como um S-módulo. Então,*

M é finitamente gerado como um T-módulo $\Leftrightarrow$ S é finitamente gerado como um T-módulo.

Demonstração : [13], Lema 3.10.

■

CAPÍTULO 5

O Invariante de Bryant-Groves - Resultados Existentes

5.1 A definição do invariante $\triangle$ de Bryant-Groves

Para o objetivo desta seção, Q é uma álgebra de Lie abeliana de dimensão finita sobre um corpo k e M é um Q-módulo (ie, M é um $U(Q)$-módulo). Denotaremos o fecho algébrico de k por $\overline{k}$. O anel de séries de potências formais sobre $\overline{k}$ na indeterminada t será denotado por $\overline{k}[[t]]$ e $\overline{k}((t))$ será o corpo de frações de $\overline{k}[[t]]$. Este consiste de séries de potências formais de Laurent em t. Assim, cada elemento f de $\overline{k}((t))$ pode ser escrito na forma $f = t^{-n}g$, com $n \geq 0$ e $g \in \overline{k}[[t]]$. A ordem de uma série de potências de Laurent não nula é, como usual, o menor inteiro n tal que t^n aparece com coeficiente não nulo. Denotamos a ordem de f por $o(f)$, com a convenção que $o(0) = \infty$.

Seja $\Gamma_1(Q)$ o k-espaço consistindo de todas k-aplicações lineares de Q em $\overline{k}((t))$, ie,

$$\boxed{\Gamma_1(Q) = Hom_k(Q, \overline{k}((t)))}$$

e consideremos $\Gamma_0(Q)$ o subespaço consistindo das aplicações com imagem contida em $\overline{k}[[t]]$, ie,

$$\boxed{\Gamma_0(Q) = Hom_k(Q, \overline{k}[[t]]).}$$

A propriedade universal de álgebras envelopantes garante que cada elemento χ de $\Gamma_1(Q)$ estende, unicamente, a um k-homomorfismo de álgebras $\widehat{\chi}$ de $U(Q)$ em $\overline{k}((t))$. Para $\chi \in \Gamma_1(Q)$, escrevemos $[\chi]$ para o elemento $\chi+\Gamma_0(Q)$ do espaço quociente $\Gamma_1(Q)/\Gamma_0(Q)$. Denotamos por $\Delta_1(Q,M)$ o conjunto de elementos χ de $\Gamma_1(Q)$ que satisfazem $\widehat{\chi}(Ann_{U(Q)}(M)) = \{0\}$ e, o invariante de Bryant-Groves é definido como:

Definição 5.1.

$$\boxed{\Delta(Q,M) = \{[\chi] \mid \chi \in \Delta_1(Q,M)\} \subseteq \Gamma_1(Q)/\Gamma_0(Q).}$$

Na seção 5.3 deste capítulo, vamos discutir alguns exemplos básicos deste invariante.

5.2 Alguns resultados sobre o invariante Δ

Através deste invariante R.Bryant e J.Groves demonstraram um importante resultado sobre classificação de álgebras de Lie finitamente presentadas, o qual é apresentado a seguir. A implicação (3) $\Rightarrow$ (1) do seguinte teorema está feita em [12] e as demais são apresentadas em [13].

Teorema 5.1. *Seja L uma álgebra de Lie finitamente gerada sobre um corpo k. Suponhamos que L tenha um ideal abeliano A tal que L/A tem dimensão finita. Consideremos R a álgebra envelopante de L/A. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *L é finitamente presentada;*

(2) *O quadrado exterior $A \wedge A$ é finitamente gerado como um R-módulo via ação diagonal;*

(3) *O quadrado tensorial $A \otimes A$ é finitamente gerado como R-módulo via ação diagonal.*

Observação 5.1. *A definição de ação diagonal foi apresentada no primeiro capítulo, na Definição 1.8.*

Suponhamos agora que Q_1 seja uma álgebra de Lie abeliana de dimensão finita sobre k e que $\theta : Q_1 \to Q$ seja um homomorfismo de k-álgebras de Lie. Como M é um Q-módulo, devemos ter M também Q_1-módulo via θ.

Se $\chi \in \Delta_1(Q, M)$, temos $\chi : Q \rightarrow k((t))$ homomorfismo de k-álgebras, com $\widehat{\chi}(Ann_{U(Q)}M) = 0$. Denotemos $\chi_1 = \chi \circ \theta : Q_1 \rightarrow k((t))$ homomorfismo de k-álgebras. Se $q_1 \in Ann_{U(Q_1)}M$, temos

$$M.q_1 = 0 \Leftrightarrow M.\theta(q_1) = 0 \Leftrightarrow \theta(q_1) \in Ann_{U(Q)}(M) \subseteq \operatorname{Ker} \chi \Leftrightarrow \chi(\theta(q_1)) = 0 \Leftrightarrow \chi_1(q_1) = 0.$$

Logo, $\chi_1(Ann_{U(Q_1)}M) = 0$. Portanto, $\chi_1 = \chi \circ \theta \in \Delta_1(Q_1, M)$ e, deste modo, θ induz uma função

$$\theta^* : \Delta(Q, M) \rightarrow \Delta(Q_1, M),$$

na qual $\theta^*([\chi]) = [\chi \circ \theta]$, para todo $\chi \in \Delta_1(Q, M)$.

Proposição 5.1. *Com a notação acima, suponhamos que M seja um Q-módulo finitamente gerado. Então,*

M é finitamente gerado como Q_1-módulo se, e somente se, $(\theta^*)^{-1}([0]) = \{[0]\}$.

Demonstração : A demonstração pode ser encontrada em ([13], Proposição 3.1).

Observamos que para esta demonstração são usados os seguintes resultados: Lema 4.5, Proposição 4.2 e Lema 4.1, pois é suficiente trabalharmos no caso em que k é algebricamente fechado, ou seja, $k = \overline{k}$.

■

Suponhamos que M_1 e M_2 sejam módulos finitamente gerados sobre as álgebras de Lie abeliana de dimensão finita Q_1 e Q_2.

Lema 5.1. $Ann_{U(Q_1)\otimes U(Q_2)}(M_1 \otimes M_2) = Ann_{U(Q_1)}(M_1) \otimes U(Q_2) + U(Q_1) \otimes Ann_{U(Q_2)}(M_2)$.

Demonstração : [13], Lema 3.2.

■

Os mergulhos $\sigma_i : Q_i \rightarrow Q_1 \oplus Q_2$, para $i = 1, 2$, definidos por

$$\sigma_1(q_1) = (q_1, 0) \ \text{ e } \ \sigma_2(q_2) = (0, q_2), \text{ para todos } q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2,$$

induzem aplicações

$$\Gamma_1(Q_1 \oplus Q_2) \to \Gamma_1(Q_i)$$

e, então, induz uma aplicação

$$\nu : \Gamma_1(Q_1 \oplus Q_2) \to \Gamma_1(Q_1) \times \Gamma_1(Q_2)$$

para o produto cartesiano, dada por

$$\nu(\phi) = (\phi \circ \sigma_1, \phi \circ \sigma_2),$$

para todo $\phi \in \Gamma_1(Q_1 \oplus Q_2)$.

Proposição 5.2. *Com a notação acima, ν induz uma bijeção*

$$\nu^* : \Delta(Q_1 \oplus Q_2, M_1 \otimes M_2) \to \Delta(Q_1, M_1) \times \Delta(Q_2, M_2).$$

Demonstração : [13], Proposição 3.3.

■

Como uma consequência das proposições 5.1 e 5.2 temos o seguinte resultado:

Proposição 5.3. *Sejam Q uma k-álgebra de Lie abeliana de dimensão finita e M um Q-módulo finitamente gerado. Então,*

$M \otimes M$ é finitamente gerado sobre Q via ação diagonal $\Leftrightarrow$ se $\Delta(Q, M)$ não contém dois pontos não-nulos cuja soma é zero.

Demonstração : [13], Proposição 3.4.

■

Agora, diretamente do Teorema 5.1 e da Proposição 5.3, temos o seguinte Teorema.

Teorema 5.2. *Seja L uma álgebra de Lie metabeliana finitamente gerada sobre um corpo k e consideremos A o ideal abeliano de L tal que L/A é abeliano. Então,*

L é finitamente presentada se, e somente se, sempre que $[\chi_1], [\chi_2] \in \Delta(L/A, A)$ satisfazem $[\chi_1] + [\chi_2] = [0]$, temos $[\chi_1] = [\chi_2] = [0]$.

<u>Demonstração</u> : [[13], Teorema B] Pelo Teorema 5.1, L é finitamente presentado se, e somente se, $A \otimes A$ é finitamente gerado via ação diagonal de L/A. Então, o resultado segue aplicando a Proposição 5.3 com $Q = L/A$ e $M = A$. ■

Lema 5.2. *Sejam Q uma álgebra de Lie abeliana de dimensão finita sobre k e A um Q-módulo, então*

$$\Delta(Q, A) = [0] \Leftrightarrow dim_k A < \infty.$$

<u>Demonstração</u> : Primeiramente, observemos o seguinte

Afirmação: Sendo $\Delta(Q, A) = [0]$, temos que cada valorização boa de $\frac{U(Q)}{Ann(A)} \to \mathbb{Z} \cup \infty$ tem valores em $\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \infty$. De fato, se $v : \frac{U(Q)}{Ann(A)} \to \mathbb{Z} \cup \infty$ é uma valorização boa, pelo Lema 4.1, existe um k- homomorfismo de álgebras $\sigma : \frac{U(Q)}{Ann(A)} \to k((t))$ tal que $v(q) = o(\sigma(q))$, $\forall q \in \frac{U(Q)}{Ann(A)}$.

Agora, por definição, $\Delta(Q, A) = \{[\chi] \mid \chi : Q \to \overline{k}((t))\}$, sendo χ estendível a um homomorfismo de anéis $\widehat{\chi} : \frac{U(Q)}{Ann(A)} \to \overline{k}((t))$. Assim, $\sigma|_Q = \chi$ e $[\chi] \in \Delta(Q, A) = [0]$. Logo,

$$Im(\chi) \subseteq \overline{k}[[t]] \Rightarrow Im(\sigma) \subseteq \overline{k}[[t]].$$

Como $o \circ \sigma = v$, devemos ter então $Im(v) \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \infty$.

Deste modo, pela Proposição 4.2, $\frac{U(Q)}{Ann(A)}$ é integral sobre k. Logo, $dim_k \frac{U(Q)}{Ann(A)} < \infty$.

Agora, como A é finitamente gerado como $U(Q)$-módulo, temos

$$A = a_1 U(Q) + a_2 U(Q) + \cdots + a_s U(Q) = a_1 \frac{U(Q)}{Ann(A)} + a_2 \frac{U(Q)}{Ann(A)} + \cdots + a_s \frac{U(Q)}{Ann(A)}.$$

Portanto, $dim_k A \leq s.dim_k \frac{U(Q)}{Ann(A)} < \infty$.

Reciprocamente, se $dim_k A < \infty$, então $dim_k \frac{U(Q)}{Ann(A)} < \infty$ e cada homomorfismo de k-álgebras $\widehat{\chi} : \frac{U(Q)}{Ann(A)} \to \overline{k}((t))$ deve ter imagem em $\overline{k}[[t]]$ (observamos que $\overline{k}[[t]]$ é integralmente fechado em $\overline{k}((t))$ e, como $\frac{U(Q)}{Ann(A)}$ é integral sobre k, $Im(\widehat{\chi})$ é integral sobre $\overline{k}$).

Logo, $\Delta(Q, A) = [0]$.

■

5.3 Exemplos

Vamos discutir nesta seção alguns exemplos que são versões cindidas dos exemplos de [[13],Seção 5].

Consideremos uma álgebra de Lie L, com $A \to L \to Q$ sequência exata curta cindida de álgebras de Lie abelianas. Vamos supor que $dim_k Q = 2$, com $\{x, y\}$ base de Q sobre k (ou seja, $Q = kx \oplus ky$), e definimos $A = k[x]$ um kQ-módulo, onde x age via produto e y age via multiplicação por x^n. Por definição,

$$\Delta(Q, A) = \{[\chi] \mid \chi \in \Delta_1(Q, A)\} \subseteq \Gamma_1(Q)/\Gamma_0(Q).$$

Temos $Ann_{U(Q)}A = (y - x^n) \triangleleft U(Q) = k[x, y]$, onde $k[x, y]$ é o anel de polinômios nas variáveis comutativas x e y com coeficientes em k. Assim, $\widehat{\chi}(Ann_{U(Q)}(A)) = 0$ se, e somente se, $\widehat{\chi}(y - x^n) = 0$, o que equivale a $\widehat{\chi}(y) = \widehat{\chi}(x)^n$, ie, $\chi(y) = \chi(x)^n$.

Agora, queremos saber se existem $[\chi_1], [\chi_2] \in \Delta(Q, A)$ tais que $[\chi_1] + [\chi_2] = [0]$.

- 1º caso: n ímpar;

  Neste caso, se tomarmos

  $\chi_1(x) = t^{-1}$ e $\chi_2(x) = -t^{-1}$, teremos

  $\chi_1(y) = \chi_1(x)^n = t^{-n}$ e

  $\chi_2(y) = \chi_2(x)^n = (-t^{-1})^n \overset{n:impar}{=} -t^{-n}$.

  Assim, $\chi_1 + \chi_2 = 0$, de onde temos $[\chi_1] + [\chi_2] = [0]$, com $[\chi_1], [\chi_2] \in \Delta(Q, A) \setminus [0]$.

  Logo, pelo Teorema 5.2, L não é finitamente presentada.

- 2º caso: $n = 2$; $car(k) \neq 2$.

  Temos:

  $\chi_1(x) + \chi_2(x) \in \overline{k}[[t]]$;

  $\chi_1(x)^2 + \chi_2(x)^2 = \chi_1(y) + \chi_2(y) \in \overline{k}[[t]]$.

  Para $\chi_1(x) = \alpha$, $\chi_2(x) = \beta$, temos então

  $\alpha + \beta \in \overline{k}[[t]]$,
  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \in \overline{k}[[t]]$.

Devemos ter, então, que $2\alpha\beta \in \overline{k}[[t]]$.

Assim, se $car(k) \neq 2$, devemos ter $\alpha\beta \in \overline{k}[[t]]$. Logo,

$\alpha\beta \in \overline{k}[[t]]$, $\alpha + \beta \in \overline{k}[[t]]$ e, deste modo, $\alpha^2 - (\alpha+\beta)\alpha + \alpha\beta = 0$, com $\alpha\beta \in \overline{k}[[t]]$, $\alpha + \beta \in \overline{k}[[t]]$, ou seja, α é raiz de $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$, isto é, α é integral sobre $\overline{k}[[t]]$.

Agora, como $\overline{k}[[t]]$ é integralmente fechado em $\overline{k}((t))$, devemos ter $\alpha \in \overline{k}[[t]]$.

Analogamente, $\beta \in \overline{k}[[t]]$.

Logo, $Im\ \chi_1 \subseteq \overline{k}[[t]]$ e $Im\ \chi_2 \subseteq \overline{k}[[t]]$, ou seja, $[\chi_1] = [0]$ e $[\chi_2] = [0]$.

Portanto, pelo Teorema 5.2, temos que L é finitamente presentada, se $car(k) \neq 2$.

- 3º caso: $n > 2$, com $n : par$ e $car(k) \neq 2$;

Devemos ter

$\chi_1(x) + \chi_2(x) \in \overline{k}[[t]]$,

$\chi_1(y) + \chi_2(y) \in \overline{k}[[t]]$,

$\chi(x)^n = \chi(y)$, para $\chi \in \{\chi_1, \chi_2\}$

Para $\chi_1(x) = \alpha$, $\chi_2(x) = \beta$, teremos então

$\gamma = \alpha + \beta \in \overline{k}[[t]]$,

$\alpha^n + \beta^n \in \overline{k}[[t]] \Rightarrow \alpha^n + (\gamma - \alpha)^n \in \overline{k}[[t]] \Rightarrow \alpha^n + \sum_{0 \leq i \leq n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (-1)^{n-i}\gamma^i\alpha^{n-i} \in \overline{k}[[t]]$.

Se $car(k) \neq 2$, teremos $2\alpha^n \neq 0$, então $f(x) = 2x^n - \sum_{1 \leq i \leq n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} (-1)^{n-i}\gamma^i x^{n-i}$ é um polinômio de grau n com coeficientes em $\overline{k}[[t]]$ e $f(\alpha) \in \overline{k}[[t]]$. Agora, sendo $\overline{k}[[t]]$ integralmente fechado, devemos ter $\alpha \in \overline{k}[[t]]$.

Analogamente, $\beta \in \overline{k}[[t]]$.

Logo, $Im\ \chi_1 \subseteq \overline{k}[[t]]$ e $Im\ \chi_2 \subseteq \overline{k}[[t]]$, ou seja, $[\chi_1] = [0]$ e $[\chi_2] = [0]$.

Portanto, pelo Teorema 5.2, temos que L é finitamente presentada.

- 4^o caso: Analisemos agora para $car(k) = 2$.

  Pelo Lema 5.2, temos que $\Delta(Q, A) = [0]$ se, e somente se, $dim_k A < \infty$, então, como $dim_k A = dim_k k[x] = \infty$, devemos ter $\Delta(Q, A) \neq 0$. Logo, existe $[\chi] \in \Delta(Q, A)$, com $[\chi] \neq 0$. E, como $car(k) = 2$,

$$[\chi] + [\chi] = 2[\chi] = 0.$$

  Portanto, pelo teorema 5.2, L não é finitamente presentada neste caso.

5.4 A Conjectura FP_m para Álgebras de Lie: o caso cindido

Se L é uma álgebra de Lie finitamente gerada sobre um corpo k, A um ideal abeliano em L, com $Q = L/A$ abeliano e, além disso, L é uma extensão cindida de A por Q, então, em [21], foi mostrado o seguinte:

Teorema 5.3. *São equivalentes as seguintes afirmações:*

(1) *k tem tipo homológico FP_m sobre L (ie, L tem tipo homológico FP_m);*

(2) *$\bigotimes^m A$ é finitamente gerado sobre $U(Q)$ via ação diagonal;*

(3) *Se $[v_1], \ldots, [v_m] \in \Delta(Q, A)$ e $[v_1] + \ldots + [v_m] = [0]$, então $[v_i] = [0]$, para todo i.*

Assim, temos que

k tem tipo homológico FP_2 sobre L (ie, L tem tipo homológico FP_2) se, e somente se, $A \otimes A$ é finitamente gerado sobre $U(Q)$. Logo, podemos colocar no Teorema 5.1 mais uma condição: a de L ter tipo homológico FP_2, conseguindo que

$$L \text{ tem tipo homológico } FP_2 \Leftrightarrow L \text{ é finitamente presentada.}$$

A demonstração do Teorema 5.3 segue dos seguintes resultados de [21], no caso específico em que $B = k$.

Lema 5.3. *Se L é uma extensão cindida de A por Q e B é um $U(Q)$-módulo de tipo homológico FP_m sobre $U(L)$, então $B \otimes (\bigwedge^m A)$ é finitamente gerado sobre $U(Q)$, onde $U(Q)$ atua via o homomorfismo diagonal*

$$U(Q) \to \bigotimes^{m+1} U(Q)$$

levando $q \in Q$ à $\sum_{0 \leq i \leq m} \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \ldots 1}_{i\ vezes} \otimes q \otimes \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{m-i\ vezes}$

Teorema 5.4. *Suponhamos que A e B sejam $U(Q)$-módulos finitamente gerados.*
(1) *$B \otimes (\bigotimes^m A)$ é finitamente gerado sobre $U(Q)$ via ação diagonal $\Leftrightarrow$ sempre que $[v_2], \ldots, [v_{m+1}] \in \Delta(Q, A)$, $[v_1] \in \Delta(Q, B)$, e $[0] = [v_1] + \ldots + [v_{m+1}]$, temos $[v_i] = 0$, $\forall i$.*
(2) *$B \otimes (\bigwedge^m A)$ finitamente gerado sobre $U(Q)$ via ação diagonal $\Rightarrow$ $B \otimes (\bigotimes^m A)$ finitamente gerado sobre $U(Q)$ via ação diagonal.*

Teorema 5.5. *Se A e B são $U(Q)$-módulos finitamente gerados e $B \otimes (\bigotimes^m A)$ é finitamente gerado sobre $U(Q)$ via ação diagonal, então B é de tipo FP_m sobre $U(L)$, onde a álgebra de Lie L é extensão cindida de A por Q.*

CAPÍTULO 6

A generalização do invariante de Bryant-Groves

6.1 A definição do invariante

Para o objetivo deste capítulo, k é um corpo, $Q = \mathbb{Z}^m = \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ é um grupo abeliano finitamente gerado e livre de torção, e M é um R-módulo, onde R é a álgebra de Hopf

$$\boxed{R = U(L) \otimes kQ,}$$

sendo $L = kx_1 \oplus \ldots \oplus kx_n$ uma álgebra de Lie abeliana e finitamente gerada.

O fecho algébrico de k será denotado por $\overline{k}$, $\overline{k}[[t]]$ será o anel de séries de potências formais sobre $\overline{k}$ na indeterminada t e denotaremos $\overline{k}((t))$ o corpo de frações de $\overline{k}[[t]]$.

Seja $\widetilde{\Gamma}_1(R)$ o conjunto consistindo de todos homomorfismos de k-álgebras de R em $\overline{k}((t))$, isto é,

$$\boxed{\widetilde{\Gamma}_1(R) = Hom_k(R, \overline{k}((t)))}$$

e consideremos sobre este espaço a seguinte relação de equivalência:

$$\chi_1 \sim \chi_2 \Leftrightarrow \chi_1(q_i^{\epsilon}) - \chi_2(q_i^{\epsilon}) \in \overline{k}[[t]], \text{ para cada } \epsilon = \pm 1, \ e$$

$$\chi_1(x_i) - \chi_2(x_i) \in \overline{k}[[t]].$$

Para $\chi \in \widetilde{\Gamma}_1(R)$, escrevemos $[\chi]$ para a classe de equivalência de χ e denotamos por $\widetilde{\Gamma}_1(R)/\sim$ o conjunto de todas as classes de equivalência. Denotamos por 0 o homomorfismo de R em $\overline{k}((t))$ que envia L para 0 e Q para 1 e o chamamos de **homomorfismo trivial**.

Denotamos por $\widetilde{\Delta}_1(R, M)$ o conjunto de elementos χ de $\widetilde{\Gamma}_1(R)$ que satisfazem $\chi(Ann_R(M)) = \{0\}$ e, generalizamos de forma natural a definição do invariante de Bryant-Groves na seguinte definição:

Definição 6.1. (Generalização do Invariante de Bryant-Groves)

$$\widetilde{\Delta}(R, M) = \{[\chi] \mid \chi \in \widetilde{\Delta}_1(R, M)\} \subseteq \widetilde{\Gamma}_1(R)/\sim, \ \textit{ie,}$$

$$\boxed{\widetilde{\Delta}(R, M) = \{[\chi] \mid \chi : R \to \overline{k}((t)) \text{ é homomorfismo de } k\text{-álgebras tal que } \chi(Ann_R M) = 0\}.}$$

Exemplo 6.1. *Sejam* $R = k[x, y, z, z^{-1}] = k[x, y] \otimes k[z, z^{-1}]$, $L = kx \oplus ky$ *e* $Q = \langle z \rangle \simeq \mathbb{Z}$. *Então,* $R = U(L) \otimes kQ$.

Tomemos $M = \frac{k[z,\ z^{-1},\ y,\ x]}{(y-x^n)}$. *Temos que* M *é um* R*-módulo, onde* x, y, z *agem como produto em* M*. Por definição,*

$\widetilde{\Delta}(R, M) = \{[\chi] \mid \chi : R \to \overline{k}((t))$ *é homomorfismo de* k*-álgebras tal que* $\chi(Ann_R(M)) = 0\}$.

Temos que $Ann_R(M) = (y - x^n)$. *Assim,* $\chi(Ann_R(M)) = 0$ *se, e somente se,* $\chi(y - x^n) = 0$, *o que equivale a* $\chi(y) = \chi(x)^n$.

Portanto,

$$[\chi] \in \widetilde{\Delta}(R, M) \Leftrightarrow \chi(y) = \chi(x)^n.$$

6.2 Resultados Auxiliares

Agora, suponhamos $R_1 = U(L_1) \otimes kQ_1$, onde L_1, Q_1 são outras álgebras com as mesmas condições de L e Q da Seção 6.1, e que

$$\theta : R_1 \to R$$

seja um homomorfismo de álgebras de Hopf. Então, $\theta(L_1) \subseteq L$ e $\theta(Q_1) \subseteq Q$.

Como M é um R-módulo, devemos ter M também R_1-módulo via θ.

Se $\chi \in \widetilde{\Delta}_1(R,M)$, temos $\chi : R \to \overline{k}((t))$ homomorfismo de k-álgebras, com $\chi(Ann_R M) = 0$.

Denotemos $\chi_1 = \chi \circ \theta : R_1 \to \overline{k}((t))$ homomorfismo de k-álgebras. Se $r_1 \in Ann_{R_1} M$, temos

$$M.r_1 = 0 \Leftrightarrow M.\theta(r_1) = 0 \Leftrightarrow \theta(r_1) \in Ann_R(M) \subseteq \operatorname{Ker}\chi \Leftrightarrow \chi(\theta(r_1)) = 0 \Leftrightarrow \chi_1(r_1) = 0.$$

Logo, $\chi_1(Ann_{R_1} M) = 0$. Portanto, $\chi_1 = \chi \circ \theta \in \widetilde{\Delta}_1(R_1, M)$ e, deste modo, θ induz uma função

$$\theta^* : \widetilde{\Delta}(R,M) \to \widetilde{\Delta}(R_1,M),$$

na qual $\theta^*([\chi]) = [\chi \circ \theta]$, para todo $\chi \in \widetilde{\Delta}_1(R,M)$.

Proposição 6.1. *Com a notação acima, suponhamos que M seja um R-módulo finitamente gerado. Então, M é finitamente gerado como R_1-módulo se, e somente se,*

$$(\theta^*)^{-1}([0]) = \{[0]\},$$

onde 0 é o homomorfismo trivial definido antes da Definição 6.1.

Observação 6.1. *Primeiramente, observemos que é suficiente provarmos esta Proposição no caso em que k é algebricamente fechado.*

De fato, pelo Lema 3.3,

M é finitamente gerado sobre R_1 se, e somente se, $M \otimes \overline{k}$ é finitamente gerado sobre $R_1 \otimes \overline{k}$.

Seja $\widetilde{\theta} : R_1 \otimes \overline{k} \to R \otimes \overline{k}$ o único homomorfismo de $\overline{k}$-álgebras que estende θ.

Precisamos mostrar que

$$(\theta^*)^{-1}([0]) = \{[0]\} \Leftrightarrow (\widetilde{\theta}^*)^{-1}([0]) = \{[0]\} \qquad (*)$$

Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} R_1 & \xrightarrow{\theta} & R & \xrightarrow{\chi} & \overline{k}((t)) \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle ident.} \\ R_1 \otimes \overline{k} & \xrightarrow{\widetilde{\theta}} & R \otimes \overline{k} & \xrightarrow{\widetilde{\chi}} & \overline{k}((t)) \end{array}$$

onde $i_1(r_1) = r_1 \otimes 1$, $i_2(r) = r \otimes 1$, χ é homomorfismo de k-álgebras e $\widetilde{\chi}$ é homomorfismo de $\overline{k}$-álgebras. Então, $\widetilde{\chi}$ é o único homomorfismo de $\overline{k}$-álgebras que estende χ e $\chi = \widetilde{\chi}|_R$.

Agora, observamos que

$$\theta^*([\chi]) = [0] \Leftrightarrow [\chi \circ \theta] = [0] \Leftrightarrow [\widetilde{\chi} \circ \widetilde{\theta}] = [0] \Leftrightarrow \widetilde{\theta}^*([\widetilde{\chi}]) = [0].$$

Portanto, $(*)$ é verdadeira.

Logo, vamos supor em todo restante desta seção que $k = \overline{k}$.

Demonstração da Proposição 6.1: [Demonstração análoga a de [13], Proposição 3.1]

Consideremos π o epimorfismo natural

$$\pi : R \to R/Ann_R(M)$$

e vamos denotar $S := \pi(R)$ e $T := \pi(\theta(R_1))$ as k-álgebras finitamente geradas e comutativas, com T subálgebra de S. Pelo Lema 4.5, temos que M é finitamente gerado sobre R_1 se, e somente se, S é finitamente gerado sobre T. Agora, como $\pi(R) = S$ é k-álgebra finitamente gerada, isto acontece se, e somente se, S é integral sobre T.

Mostremos então que

$$S \text{ é integral sobre } T \text{ se, e somente se, } (\theta^*)^{-1}([0]) = \{[0]\}.$$

Suponhamos primeiramente que S seja integral sobre T.

Seja χ um elemento de $\widetilde{\Delta}_1(R, M)$ tal que $\theta^*([\chi]) = [0]$. Então, $\chi(\theta(R_1)) \subseteq k[[t]]$.

Como $\chi(Ann_R(M)) = \{0\}$, segue que χ se fatora através de π .

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi"] & k((t)) \\ R/Ann(M) \arrow[ur, dotted, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Então, sendo $S = \pi(R)$ integral sobre $T = \pi(\theta(R_1))$, devemos ter também que $\chi(R)$ é integral sobre $\chi(\theta(R_1)) \subseteq k[[t]]$ e, então, $\chi(R)$ é integral sobre $k[[t]]$.

Mas, $k[[t]]$ é integralmente fechado no seu corpo de frações (pois cada domínio de ideais principais é domínio de fatoração única, logo é integralmente fechado) e, deste modo, $\chi(R) \subseteq k[[t]]$.

Logo, $[\chi] = [0]$ e, portanto, $(\theta^*)^{-1}\{[0]\} = \{[0]\}$.

Suponhamos agora que $S = \pi(R)$ não seja integral sobre $T = \pi(\theta(R_1))$. Então, pela Proposição 4.2, existe uma valorização boa de $S = \pi(R)$ que é não-negativa em T mas isto não acontece em S. Pelo Lema 4.1, existe um homomorfismo ϕ de S em $k((t))$ tal que $\phi \circ \pi \circ \theta(R_1) \subseteq k[[t]]$, mas $\phi \circ \pi(R) \nsubseteq k[[t]]$.

Seja $\widehat{\phi} = \phi \circ \pi : R \to k((t))$. Então,

$$\widehat{\phi} \in \widetilde{\Delta}_1(R, M), \;\; \theta^*([\widehat{\phi}]) = \{[0]\}, \text{ mas } [\widehat{\phi}] \neq [0].$$

Logo, $(\theta^*)^{-1}\{[0]\} \neq \{[0]\}$, completando a demonstração da Proposição 6.1.

■

Suponhamos que M_1 e M_2 sejam módulos finitamente gerados sobre as álgebras $R_1 = U(L_1) \otimes kQ_1$ e $R_2 = U(L_2) \otimes kQ_2$, respectivamente, onde L_1, L_2 são álgebras de Lie abelianas finitamente geradas sobre o corpo k e Q_1, Q_2 são grupos abelianos finitamente gerados.

Lema 6.1. *$Ann_{R_1 \otimes R_2}(M_1 \otimes M_2) = Ann_{R_1}(M_1) \otimes R_2 + R_1 \otimes Ann_{R_2}(M_2)$.*

Demonstração : [Análoga à demonstração do Lema 3.2 de [13]]

O anulador de $M_1 \otimes M_2$ é o kernel do homomorfismo de k-álgebras

$$\xi : R_1 \otimes R_2 \longrightarrow Hom_k(M_1 \otimes M_2, M_1 \otimes M_2),$$

associado com a ação de módulos de $R_1 \otimes R_2$ em $M_1 \otimes M_2$. Mas, pela definição desta ação de módulos,

$$\xi = \tau \circ (\rho_1 \otimes \rho_2),$$

onde ρ_1 e ρ_2 são os homomorfismos

$$\rho_1 : R_1 \to Hom_k(M_1, M_1), \quad \rho_2 : R_2 \to Hom_k(M_2, M_2)$$

dados pelas ações de módulos de R_1 e R_2 em M_1 e M_2, respectivamente, e onde

$$\tau : Hom_k(M_1, M_1) \otimes Hom_k(M_2, M_2) \longrightarrow Hom_k(M_1 \otimes M_2, M_1 \otimes M_2)$$

é o homomorfismo natural associado com o produto tensorial.

Como ρ_i tem kernel $Ann_{R_i}(M_i)$, para $i = 1, 2$, segue facilmente que $\rho_1 \otimes \rho_2$ tem kernel $Ann_{R_1}(M_1) \otimes R_2 + R_1 \otimes Ann_{R_2}(M_2)$.

Mas, pela parte (ii) da Proposição 16 de ([9], II.7.7), τ é um mergulho. Assim, ξ e $\rho_1 \otimes \rho_2$ têm o mesmo kernel. Logo,

$$Ann_{R_1 \otimes R_2}(M_1 \otimes M_2) = ker(\xi) = ker(\rho_1 \otimes \rho_2) = Ann_{R_1}(M_1) \otimes R_2 + R_1 \otimes Ann_{R_2}(M_2).$$

■

Consideremos os mergulhos $\sigma_i : R \to R \otimes R$, para $i = 1, 2$, definidos por

$$\sigma_1(r) = r \otimes 1_R \ \text{ e } \ \sigma_2(r) = 1_R \otimes r, \text{ para todo } r \in R.$$

Estes induzem aplicações

$$\widetilde{\Gamma}_1(R \otimes R) \to \widetilde{\Gamma}_1(R)$$

e, então, induz uma aplicação

$$\nu : \widetilde{\Gamma}_1(R \otimes R) \to \widetilde{\Gamma}_1(R) \times \widetilde{\Gamma}_1(R)$$

para o produto cartesiano, dada por

$$\nu(f) = (f|_{R \otimes k.1_R}, f|_{k.1_R \otimes R}),$$

para todo $f \in \widetilde{\Gamma}_1(R \otimes R)$.

Proposição 6.2. *Com a notação acima, ν induz uma bijeção*

$$\nu^* : \widetilde{\Delta}(R \otimes R, M_1 \otimes M_2) \to \widetilde{\Delta}(R, M_1) \times \widetilde{\Delta}(R, M_2).$$

<u>Demonstração</u> : [Análoga à demonstração de [13], Proposição 3.3]

Primeiramente, mostremos que ν induz uma aplicação

$$\nu_1 : \widetilde{\Delta}_1(R \otimes R, M_1 \otimes M_2) \to \widetilde{\Delta}_1(R, M_1) \times \widetilde{\Delta}_1(R, M_2),$$

dada por $\nu_1(\phi) = (\phi \circ \sigma_1, \phi \circ \sigma_2)$.

Suponhamos $\phi \in \widetilde{\Delta}_1(R \otimes R, M_1 \otimes M_2)$. É suficiente mostrarmos que $\phi \circ \sigma_i \in \widetilde{\Delta}_1(R, M_i)$, para $i = 1, 2$, ou seja, devemos mostrar que

$$\phi \circ \sigma_i(Ann_R(M_i)) = \{0\}.$$

Agora, $\sigma_1(Ann_R(M_1)) = Ann_R(M_1) \otimes k.1_R \subseteq Ann_{R\otimes R}(M_1 \otimes M_2)$, pelo Lema 6.1. Assim, $\phi \circ \sigma_1(Ann_R(M_1)) = \{0\}$, de onde temos $\phi \circ \sigma_1 \in \widetilde{\Delta}_1(R, M_1)$. Analogamente, $\phi \circ \sigma_2 \in \in \widetilde{\Delta}_1(R, M_2)$.

Logo, ν_1 está bem definida.

É fácil verificar agora que ν_1 induz uma aplicação

$$\nu^* : \widetilde{\Delta}(R \otimes R, M_1 \otimes M_2) \to \widetilde{\Delta}(R, M_1) \times \widetilde{\Delta}(R, M_2)$$

tal que $\nu^*([\phi]) = ([\phi \circ \sigma_1], [\phi \circ \sigma_2]), \forall \phi \in \widetilde{\Delta}_1(R \otimes R, M_1 \otimes M_2)$

Mostremos que ν^* é injetiva. Suponhamos $[\phi] \in \mathrm{Ker}\,(\nu^*)$, ou seja, temos $\phi : R \otimes R \to k((t))$ homomorfismo de k-álgebras tal que $\phi(Ann(M_1 \otimes M_2)) = \{0\}$ e $\nu^*([\phi]) = ([0], [0])$. Assim, devemos ter

$$[\phi \circ \sigma_i] = [0],\ para\ i = 1, 2 \Rightarrow Im(\phi \circ \sigma_i) \subseteq \overline{k}[[t]],\ para\ i = 1, 2.$$

Logo, como ϕ é homomorfismo de k-álgebras,

$Im(\phi) = \phi(R \otimes R) = \phi(R \otimes 1).\phi(1 \otimes R) = \phi \circ \sigma_1(R).\phi \circ \sigma_2(R) \subseteq \overline{k}[[t]]$, ie, $[\phi] = [0]$. Portanto, ν^* é injetiva.

Provemos agora que ν^* é sobrejetora. Seja $([\phi_1], [\phi_2]) \in \widetilde{\Delta}(R, M_1) \times \widetilde{\Delta}(R, M_2)$, onde $\phi_i \in \widetilde{\Delta}_1(R, M_i)$, para $i = 1, 2$.

Definamos $\phi \in \widetilde{\Gamma}_1(R \otimes R)$ por $\phi(r_1 \otimes r_2) = \phi_1(r_1).\phi_2(r_2)$, para $r_1, r_2 \in R$. Então,

$$\phi \circ \sigma_1(r) = \phi(r \otimes 1_R) = \phi_1(r).\phi_2(1_R) = \phi_1(r).1_R = \phi_1(r)$$

$$\phi \circ \sigma_2(r) = \phi(1_R \otimes r) = \phi_1(1_R).\phi_2(r) = 1_R.\phi_2(r) = \phi_2(r),$$

ou seja, $\phi \circ \sigma_1 = \phi_1$ e $\phi \circ \sigma_2 = \phi_2$.

Afirmação: $\phi \in \widetilde{\Delta}_1(R \otimes R, M_1 \otimes M_2)$, ou seja, $\phi(J) = \{0\}$, onde $J = Ann_{R\otimes R}(M_1 \otimes M_2)$.

De fato, pelo Lema 6.1,

$\phi(J) = \phi(Ann_R(M_1) \otimes R + R \otimes Ann_R(M_2)) \subseteq k((t))\phi(Ann_R(M_1)) + \phi(Ann_R(M_2))k((t)) \subseteq$
$\subseteq k((t))\phi \circ \sigma_1(Ann_R(M_1)) + \phi \circ \sigma_2(Ann_R(M_2))k((t))$.

Mas, para $i = 1, 2$, $\phi \circ \sigma_i(Ann_R(M_i)) = \phi_i(Ann_R(M_i)) = \{0\}$. Logo, $\phi(J) = \{0\}$.

Agora, temos

$$\nu^*([\phi]) = ([\phi \circ \sigma_1], [\phi \circ \sigma_2]) = ([\phi_1], [\phi_2]),$$

concluindo que ν^* é sobrejetora.

Portanto, ν^* é bijetora, como queríamos.

■

Definição 6.2. *Para $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k : R \to \overline{k}((t))$ homomorfismos de k-álgebras, definimos*

$$\varphi(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k)$$

o único homomorfismo de k-álgebras $R \to \overline{k}((t))$ cuja restrição sobre L é

$$\phi_1|_L + \phi_2|_L + \ldots + \phi_k|_L$$

e cuja restrição sobre Q é dada por

$$\phi_1|_Q.\phi_2|_Q. \ldots .\phi_k|_Q.$$

O seguinte resultado é agora uma consequência das Proposições 6.1 e 6.2.

Proposição 6.3. *Seja $R = U(L) \otimes kQ$, onde L é uma k-álgebra de Lie abeliana de dimensão finita e Q é grupo abeliano finitamente gerado, livre de torção. Se M_1 e M_2 são dois R-módulos finitamente gerados, então*

$M_1 \otimes M_2$ é finitamente gerado sobre R via ação diagonal $\Leftrightarrow$ se, para todos $[\phi_i] \in \widetilde{\Delta}(R, M_i)$, $i = 1, 2$, tais que $[\varphi(\phi_1, \phi_2)] = [0]$, então $[\phi_1] = [\phi_2] = [0]$.

<u>Demonstração</u> : Seja $\delta : R \to R \otimes R$ a aplicação diagonal, ie,

$$\delta(l) = l \otimes 1 + 1 \otimes l, \ \forall l \in L, \qquad \delta(q) = q \otimes q, \ \forall q \in Q.$$

A ação diagonal de R em $M_1 \otimes M_2$ é definida via δ e, então, como já vimos ao enunciar a Proposição 6.1, existe homomorfismo induzido

$$\delta^* : \widetilde{\Delta}(R \otimes R, M_1 \otimes M_2) \to \widetilde{\Delta}(R, M_1 \otimes M_2)$$

tal que $\delta^*([\phi]) = [\phi \circ \delta]$, $\forall \phi \in \widetilde{\Delta}_1(R \otimes R, M_1 \otimes M_2)$.

Lembremos que, na Proposição 6.1, $M_1 \otimes M_2$ é finitamente gerado como R-módulo via δ se, e somente se,

$$(\delta^*)^{-1}([0]) = \{[0]\} \ (*).$$

E, na Proposição 6.2, temos o isomorfismo

$$\nu^* : \widetilde{\Delta}(R \otimes R, M_1 \otimes M_2) \to \widetilde{\Delta}(R, M_1) \times \widetilde{\Delta}(R, M_2),$$

com $\nu^*([\phi]) = ([\phi_1], [\phi_2]) = ([\phi|_{R \otimes k.1_R}], [\phi|_{k.1_R \otimes R}])$ e $(\nu^*)^{-1}([\phi_1], [\phi_2]) = [\phi]$, onde ϕ satisfaz $\phi(r_1 \otimes r_2) = \phi_1(r_1).\phi_2(r_2), \forall r_1, r_2 \in R$.

Definamos $\chi = \delta^* \circ (\nu^*)^{-1}$, como no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Delta}(R \otimes R, M_1 \otimes M_2) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\nu^*"] & \widetilde{\Delta}(R, M_1 \otimes M_2) \\
\widetilde{\Delta}(R, M_1) \times \widetilde{\Delta}(R, M_2) \arrow[ur, dotted, "\chi=\delta^* \circ (\nu^*)^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Logo,

$$\chi : \widetilde{\Delta}(R, M_1) \times \widetilde{\Delta}(R, M_2) \to \widetilde{\Delta}(R, M_1 \otimes M_2).$$

Sendo ν^* bijetora, temos que

$$(\delta^*)^{-1}([0]) = \{[0]\} \Leftrightarrow \chi^{-1}([0]) = \{([0], [0])\}. \quad (**)$$

Agora, como $\phi(r_1 \otimes r_2) = \phi_1(r_1).\phi_2(r_2)$, temos:

- $\forall l \in L,\ \phi \circ \delta(l) = \phi(l \otimes 1 + 1 \otimes l) \overset{\phi:hom.}{=} \phi(l \otimes 1) + \phi(1 \otimes l) = \phi_1(l).\phi_2(1) + \phi_1(1).\phi_2(l) =$
$= \phi_1(l) + \phi_2(l)$.

- $\forall q \in Q,\ \phi \circ \delta(q) = \phi(q \otimes q) = \phi_1(q).\phi_2(q)$.

Logo, $\phi \circ \delta(L) = \phi_1|_L + \phi_2|_L$ e $\phi \circ \delta(Q) = \phi_1|_Q.\phi_2|_Q$ e, então,

$$\chi([\phi_1], [\phi_2]) = [\varphi(\phi_1, \phi_2)],$$

onde $\varphi(\phi_1, \phi_2)$ é como na Definição 6.2.

Logo,

$$([\phi_1], [\phi_2]) \in \chi^{-1}([0]) \Leftrightarrow [\varphi(\phi_1, \phi_2)] = [0].$$

Portanto, por (*) e (**), concluímos o resultado.

■

Esta proposição pode ser generalizada para um número finito de módulos, como apresentamos a seguir.

Proposição 6.4. *Seja $R = U(L) \otimes kQ$, onde L é uma k-álgebra de Lie abeliana de dimensão finita e Q é grupo abeliano finitamente gerado, livre de torção. Se $M_1, M_2, \ldots, M_n$ são R-módulos finitamente gerados, então*

$M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_n$ é finitamente gerado sobre R via ação diagonal $\Leftrightarrow$ se, para todos $[\phi_i] \in \widetilde{\Delta}(R, M_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, tais que $[\varphi(\phi_1, \ldots, \phi_m)] = [0]$, então $[\phi_1] = \ldots = [\phi_m] = [0]$.

Demonstração : Análoga à anterior, para dois módulos, sendo agora a aplicação δ definida da seguinte forma:

$$\delta : R \to \bigotimes^m R$$

$$l \mapsto \sum_{0 \leq j \leq m} \underbrace{1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1}_{j-1} \otimes\, l \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{m-j}, \text{ para } l \in L$$

$$q \mapsto \underbrace{q \otimes q \otimes \cdots \otimes q}_{m \text{ vezes}}, \text{ para } q \in Q$$

■

Corolário 6.1. *Sejam $R = U(L) \otimes kQ$, onde L é uma k-álgebra de Lie abeliana de dimensão finita e Q é grupo abeliano finitamente gerado, livre de torção. Suponhamos M um R-módulo finitamente gerado. Então, $\bigotimes^m M$ é finitamente gerado sobre R via ação diagonal $\Leftrightarrow$ sempre que $[\phi_1], \ldots, [\phi_m] \in \widetilde{\Delta}(R, M)$, tais que $[\varphi(\phi_1, \ldots, \phi_m)] = [0]$, temos $[\phi_i] = [0]$, para todo i.*

■

6.3 O Teorema Principal

Sejam L uma álgebra de Lie metabeliana finitamente gerada sobre um corpo k, sendo L uma extensão cindida de A por B, onde A e B são álgebras de Lie abelianas, ou seja, temos $A \rightarrowtail L \twoheadrightarrow B$ extensão cindida de álgebras de Lie abelianas. E, consideremos Q um grupo abeliano finitamente gerado tal que temos a seguinte extensão cindida de álgebras de Hopf

$$U(A) \xrightarrow{\alpha} U(L)\#kQ \xrightarrow{\beta} U(B) \otimes kQ$$

Sejam

$$\boxed{H = U(L)\#kQ}$$

e

$$\boxed{R = U(B) \otimes kQ,}$$

onde B é abeliana e comuta com Q, isto é, R é anel comutativo.

Suponhamos também que A seja um R-módulo finitamente gerado à direita e $dim_k B < \infty$, com

(1) Ação de $U(B)$ sobre A: $a \circ b = [a, b]$, $\forall b \in B$ e $a \in A$.

(2) Ação de kQ sobre A: $a \circ q = q^{-1}aq$, $\forall q \in Q$ e $a \in A$.

Nosso objetivo principal aqui é demonstrar o seguinte:

Teorema 6.1. (Teorema Principal) *As seguintes condições são equivalentes:*

(1) *k tem tipo homológico FP_m como H-módulo; (ie, H tem tipo homológico FP_m)*

(2) *$\bigotimes^m A$ é finitamente gerado como R-módulo via ação diagonal de R;*

(3) *$\bigwedge^m A$ é finitamente gerado como R-módulo via ação diagonal de R.*

Observamos que para demonstrarmos este Teorema principal é suficiente provarmos para $H = U(L)\#k\widetilde{Q}$, onde $\widetilde{Q}$ é um subgrupo de índice finito em Q. Portanto, podemos supor que Q seja livre de torção.

Para tal demonstração, precisamos dos seguintes resultados:

Lema 6.2. *Suponhamos* $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ *uma seqüência exata curta de* R*-módulos finitamente gerados. Então,*

$$\widetilde{\Delta}(R, M) = \widetilde{\Delta}(R, M_1) \cup \widetilde{\Delta}(R, M_2).$$

Demonstração : $(\supseteq)$ Observemos que $\widetilde{\Delta}(R, M)$ é definido em termos do anulador de M. Mais precisamente, este é definido em termos dos ideais primos contendo o anulador, já que o kernel de χ, para $[\chi] \in \widetilde{\Delta}(R, M)$ é um ideal primo.

Afirmação: Se $Ann(M) \subseteq Ann(N)$, então $\widetilde{\Delta}(R, N) \subset \widetilde{\Delta}(R, M)$.

De fato, se $[\chi] \in \widetilde{\Delta}(R, N)$, por definição, $Ann(N) \subset \operatorname{Ker} \chi$. Assim, $Ann(M) \subseteq Ann(N) \subset$ $\subset \operatorname{Ker} \chi$, ou seja, $\chi : R \to k((t))$ é homomorfismo de k-álgebras tal que $\chi(Ann(M)) = 0$, o que implica $[\chi] \in \widetilde{\Delta}(R, M)$.Logo, $\widetilde{\Delta}(R, N) \subset \widetilde{\Delta}(R, M)$.

Sendo a seqüência $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ exata, temos $M_1 \subseteq M$ e $M_2 \simeq M/M_1$.

Assim, como o anulador de um submódulo próprio ou quociente de M contém o anulador de M, pela afirmação acima, devemos ter $\widetilde{\Delta}(R, M_1) \subseteq \widetilde{\Delta}(R, M)$ e $\widetilde{\Delta}(R, M_2) \subseteq \widetilde{\Delta}(R, M)$. Logo, $\widetilde{\Delta}(R, M_1) \cup \widetilde{\Delta}(R, M_2) \subseteq \widetilde{\Delta}(R, M)$.

$(\subseteq)$ Por outro lado, suponhamos que I_1 e I_2 sejam os anuladores de M_1 e M_2, respectivamente. Então, $I_1.I_2$ anula M.

Suponhamos que $[\chi] \in \widetilde{\Delta}(R, M)$ e que $\operatorname{Ker} \chi = P$. Então, $I_1.I_2 \subseteq Ann(M) \subseteq P$ e, deste modo, como P é ideal primo, $I_1 \subseteq P$ ou $I_2 \subseteq P$. Segue então, como no parágrafo anterior, que $[\chi] \in \widetilde{\Delta}(R, M_1)$ ou $[\chi] \in \widetilde{\Delta}(R, M_2)$. Logo, $\widetilde{\Delta}(R, M) \subset \widetilde{\Delta}(R, M_1) \cup \widetilde{\Delta}(R, M_2)$.

■

Lema 6.3. *Suponhamos que* M *seja um* R*-módulo finitamente gerado. Se* $[\chi] \in \widetilde{\Delta}(R, M)$, *com* $Im(\chi) \neq 0$, *então existe uma aplicação linear não nula*

$$\omega : M \to \overline{k}((t))$$

tal que

$$\omega(mr) = \omega(m).\chi(r), \forall m \in M, r \in R.$$

Demonstração : Análoga a demonstração do Lema 2 de [21], a qual usa propriedades de k-álgebras comutativas, como decomposição primária de módulos sobre anéis comutativos. Neste caso, o anel comutativo é o anel R. ■

Lema 6.4. *Se L é uma álgebra de Lie, a qual é extensão cindida de A por B, onde A e B são álgebras de Lie abelianas, e k é de tipo homológico FP_m sobre $H = U(L)\#kQ$, então $(\bigwedge^i A)$ é finitamente gerado sobre $R = U(B) \otimes kQ$, para cada $i \leq m$, onde R atua via ação diagonal, ie, via m-ésima comultiplicação $R \to \bigotimes^m R$.*

Demonstração : Suponhamos $\mu : \cdots \longrightarrow M_i \xrightarrow{\partial_i} \cdots \xrightarrow{\partial_1} M_0 \xrightarrow{\partial_0} k \longrightarrow 0$ uma resolução livre de k sobre H tal que M_i é finitamente gerado para $i \leq m$ (esta resolução existe pois k é de tipo homológico FP_m sobre H).

Consideremos $\mathcal{N}$ a resolução padrão do módulo trivial k sobre $U(A)$, ie,

$$\mathcal{N} : \cdots \to N_i = \wedge^i A \otimes U(A) \to N_{i-1} = \wedge^{i-1} A \otimes U(A) \to \cdots \to N_0 = U(A) \to k \to 0,$$

com diferencial d_i, tal que

$$d_i((a_1 \wedge \cdots \wedge a_i) \otimes \lambda) = \sum_j (-1)^j (a_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{a_j} \wedge \cdots \wedge a_i) \otimes a_j \lambda$$

(tal complexo é exato, por [[15], Cap.13, Teorema 7.1]).

Construiremos uma aplicação de cadeia

$$\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

sobre $U(A)$.

Primeiramente, como M_i é finitamente gerado sobre H, para $i \leq m$, temos $M_i = H^{m_i}$ e, para algum $U(A)$-submódulo livre L_i de M_i, temos

$$L_i = U(A)^{m_i}.$$

Assim, $L_i \otimes_{U(A)} H = U(A)^{m_i} \otimes_{U(A)} H = (\bigoplus_{m_i \ vezes} U(A)) \otimes_{U(A)} H =$
$= \bigoplus_{m_i \ vezes} (U(A)) \otimes_{U(A)} H = \bigoplus_{m_i \ vezes} H = H^{m_i} = M_i$, ou seja,

$$M_i = L_i \otimes_{U(A)} H \simeq L_i \otimes_k R,$$

para algum $U(A)$-submódulo livre L_i de M_i.

Queremos definir α tal que $\alpha_i(lf) = \alpha_i(l)^f$, para todo $l \in L_i$, f um monômio em $U(B)$, onde o índice superior f denota a imagem sobre a ação diagonal de f.

Provemos por indução em i.

Suponhamos que temos construido $\alpha_{i-1} : M_{i-1} \to N_{i-1}$. Então, por [[27], Teo.6.9], existe um homomorfismo de $U(A)$-módulos $\beta_i : L_i \to N_i$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} L_i \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, dotted, "\beta_i"'] & M_{i-1} \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] \\ N_i \arrow[r, "d_i"] & N_{i-1} \end{tikzcd}$$

ou seja, $d_i\beta_i = \alpha_{i-1}\partial_i$.

Tomemos $\alpha_i(lf) = \beta_i(l)^f$, para $l \in L_i$, f um monômio em $U(B)$.

Temos que α_i é um homomorfismo de $U(A)$-módulos e $d_i\alpha_i = \alpha_{i-1}\partial_i$. De fato,

- $\alpha_i(tfa) = \alpha_i(tf)a$;

  Vamos provar por indução em $n = |f|$. Para $n = 0 (\Rightarrow f = 1)$, temos

  $$\alpha_i(tfa) = \alpha_i(ta) = \beta_i(ta) = \beta_i(t).a = \alpha_i(t).a = \alpha_i(tf)a.$$

  Suponhamos $n \geq 1$ e o resultado verdadeiro para $|f| = n - 1$.

  Se $|f| = n$, $f = f_1.q$, onde $|f_1| = n - 1$. Temos:

  $fa = f_1.q.a = f_1(aq-(a\circ q)) \Rightarrow \alpha_i(tfa) = \alpha_i(tf_1aq-tf_1(a\circ q)) = \alpha_i(tf_1aq)-\alpha_i(tf_1(a\circ q)) =_{def.}$

  $= \alpha_i(tf_1a)^q-\alpha_i(tf_1(a\circ q)) =_{H.I.} [\alpha_i(tf_1)a]^q-\alpha_i(tf_1)(a\circ q) =_{diagonal} (\alpha_i(tf_1)^q)a+\alpha_i(tf_1)(a^q)-$

  $$-\alpha_i(tf_1)(a \circ q) = (\alpha_i(tf_1)^q)a = (\beta_i(t)^{f_1q})a = \beta_i(t)^f.a = \alpha_i(tf)a.$$

- $d_i\alpha_i = \alpha_{i-1}.\partial_i$;

  De fato,

  $$d_i\alpha_i(tf) = d_i(\beta_i(t)^f) = d_i((\beta_i(t)))^f = (d_i\beta_i(t))^f = (\alpha_{i-1}\partial_i(t))^f = (\alpha_{i-1}(\partial_i(t)))^f =$$

  $$= \alpha_{i-1}(\partial_i(t)f) = \alpha_{i-1}\partial_i(tf).$$

Agora, $\mathcal{M} \otimes_{U(A)} k$ é um complexo de $R = U(L) \otimes_{U(A)} k$-módulos e,

$$M_i \otimes_{U(A)} k = U(L)^{m_i} \otimes_{U(A)} k = (\bigoplus_{m_i \ vezes} U(L)) \otimes_{U(A)} k = \bigoplus_{m_i \ vezes} (U(L) \otimes_{U(A)} k) = \bigoplus_{m_i \ vezes} R = R^{m_i},$$

o qual é R-anel noetheriano.

Assim, $H_i(\mathcal{M}_{del} \otimes_{U(A)} k) = \frac{\text{Ker}\,(M_i \otimes_{U(A)} k \to M_{i-1} \otimes_{U(A)} k)}{Im(M_{i+1} \otimes_{U(A)} k \to M_i \otimes_{U(A)} k)}$ é finitamente gerado sobre R.

A aplicação α_i induz um isomorfismo entre os grupos de homologia $H_i(\mathcal{N}_{del} \otimes_{U(A)} k)$ e $H_i(\mathcal{M}_{del} \otimes_{U(A)} k)$, ie, $H_i(\mathcal{N}_{del} \otimes_{U(A)} k) \simeq H_i(\mathcal{M}_{del} \otimes_{U(A)} k)$, o qual é finitamente gerado sobre R. (*)

Agora,

$$H_i(\mathcal{N}_{del} \otimes_{U(A)} k) = \frac{\text{Ker}\,((\wedge^i A \otimes_k U(A)) \otimes_{U(A)} k \to (\wedge^{i-1} A \otimes_k U(A))) \otimes_{U(A)} k}{Im((\wedge^{i+1} A) \otimes_k U(A)) \otimes_{U(A)} k \to (\wedge^i A \otimes_k U(A)) \otimes_{U(A)} k)} =$$

$$= \frac{\text{Ker}\,(\wedge^i A \to \wedge^{i-1} A)}{Im(\wedge^{i+1} A \to \wedge^i A)} \quad (**)$$

Vamos mostrar que $d_i \otimes id_k = 0$, $i \geq 1$.

De fato, temos que existe um isomorfismo $\sigma_i : \wedge^i A \otimes U(A) \otimes_{U(A)} k \longrightarrow \wedge^i A$ tal que

$$\sigma_i(a_1 \wedge \cdots \wedge a_i \otimes \lambda \otimes k_1) = a_1 \wedge \cdots \wedge (a_i \epsilon(\lambda) k_1).$$

Observamos que

$(d_i \otimes id_k)(a_1 \wedge \cdots \wedge a_i \otimes \lambda \otimes k_1) = \sum_j (-1)^j (a_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{a_j} \wedge \cdots \wedge a_i) \otimes a_j \lambda \otimes k_1$

Seja $\widetilde{d_i} : \wedge^i A \longrightarrow \wedge^{i-1} A$, onde $\widetilde{d_i} = \sigma_i (d_i \otimes id_k) \sigma_i^{-1}$. Então,

$\widetilde{d_i}(a_1 \wedge \cdots \wedge a_i) = \sigma_i(d_i \otimes id_k)(a_1 \wedge \cdots \wedge a_i \otimes 1 \otimes 1) = \sigma_i(\sum_j (-1)^j (a_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{a_j} \cdots \wedge a_i) \otimes a_j \otimes 1) =$
$= \sigma_i(\sum_j (-1)^j (a_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{a_j} \cdots \wedge a_i \epsilon(a_j))) = \sigma_i(0) = 0$, pois $\epsilon(a_j) = 0$

Logo, $d_i \otimes id_k = 0$.

Deste modo, voltando em $(**)$, teremos que $H_i(\mathcal{N} \otimes_{U(A)} k) = \bigwedge^i A$. E, em $(*)$, teremos então $H_i(\mathcal{N} \otimes_{U(A)} k) \simeq H_i(\mathcal{M} \otimes_{U(A)} k)$, o qual é finitamente gerado sobre R.

Logo, $\bigwedge^i A$ é finitamente gerado sobre R, para cada $i \leq m$. O fato que ação de R sobre $\bigwedge^i A$ é dada pela comultiplicação foi estabelecido em [22].

∎

Teorema 6.2. *Seja $R = U(B) \otimes kQ$, onde B é álgebra de Lie abeliana e Q um grupo abeliano finitamente gerado. Suponhamos que A seja R-módulo finitamente gerado.*

(1) *$\bigotimes^m A$ é finitamente gerado sobre R via ação diagonal $\Leftrightarrow$ sempre que $[v_1], \ldots, [v_m] \in \widetilde{\Delta}(R, A)$, $[\varphi(v_1, \ldots, v_m)] = [0]$, temos $[v_i] = [0]$, para todo i.*

(2) *$\bigwedge^i A$ finitamente gerado sobre R via ação diagonal, para cada $i \leq m \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \bigotimes^m A$ finitamente gerado sobre R via ação diagonal.*

Demonstração : (1) Corolário 6.1.

(2) Suponhamos que esta afirmação não seja verdadeira, ie, que $\bigwedge^i A$ seja finitamente gerado, mas $\bigotimes^i A$ não seja finitamente gerado. Então, pela 1ª parte deste teorema, existem $[v_1], \ldots, [v_m] \in \widetilde{\Delta}(R, A)$ não todos nulos, tais que $[v_1|_B + \cdots + v_m|_B] = [0]$ e $[v_1|_Q. \ \ldots \ .v_m|_Q] =$ $= [0]$.

Seja $\mu_i : \overline{k}((t)) \to \overline{k}((t_i))$ o isomorfismo de $\overline{k}$-álgebras, levando t à t_i.

Aplicando o Lema 6.3, existem aplicações lineares não nulas $\widetilde{\omega_i} : A \longrightarrow \overline{k}((t))$ tais que

$$\widetilde{\omega_i}(ar) = \widetilde{\omega_i}(a).v_i(r), \forall r \in R, a \in A, 1 \leq i \leq m.$$

Então, para $\omega_i = \mu_i \circ \widetilde{\omega_i} : A \to \overline{k}((t_i))$, temos

$$\omega_i(ar) = \omega_i(a).\alpha_i(r), \forall r \in R, a \in A, 1 \leq i \leq m,$$

onde $\alpha_i = \mu_i \circ v_i$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "v_i"] \arrow[dr, dotted, "\alpha_i"'] & \overline{k}((t)) \arrow[d, "\mu_i"] \\ & \overline{k}((t_i)) \end{tikzcd}$$

Usando as aplicações ω_i construiremos outra aplicação linear

$$\widetilde{\omega} = \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \omega_m : \otimes^m A \to C := \overline{k}((t_1)) \otimes \cdots \otimes \overline{k}((t_m)),$$

que será importante para a conclusão da prova deste teorema.

Sejam

$$\alpha : \otimes^m A \longrightarrow \otimes^m A$$
$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_m \mapsto \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(m)}$$

e $\gamma : \otimes^m A \to \wedge^m A$ a projeção canônica.

$$\begin{tikzcd}
\otimes^m A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & \otimes^m A \\
\wedge^m A \arrow[ur, dotted, "aplic.linear"'] &
\end{tikzcd}$$

Como todas as aplicações comutam com ação diagonal de R, temos que $Im(\alpha)$ é R-módulo finitamente gerado ($Im(\alpha)$ se fatora através de $\wedge^m A$).

Consideremos $S = \{\lambda \in \otimes^m R \mid \sigma(\lambda) = \lambda, \forall \sigma \in S_m\}$ subanel de $\otimes^m R$ e o grupo simétrico S_m atuando sobre $\otimes^m R$ permutando os fatores do produto tensorial, ie, σ leva $\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_m$ à $\lambda_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \lambda_{\sigma(m)}$.

Notemos que $Im(\alpha)$ é um módulo sobre S e α é um homomorfismo de S-módulos (mas não de $\otimes^m R$-módulos).

Afirmação: $\otimes^m R \supseteq S$ é extensão integral de anéis.

Vamos mostrar que cada elemento de $\otimes^m R$ é integral sobre S, ie, um elemento $t \in \otimes^m R$ satisfaz um polinômio mônico com coeficientes em S. De fato, um elemento arbitrário $t \in \otimes^m R$ é uma raiz do polinômio

$$\prod_{\sigma \in S_m} (x - \sigma(t)) \in S[x].$$

Logo, t é integral sobre S. Além disso, como R é finitamente gerado como $\overline{k}$-álgebra, $\otimes^m R$ é uma álgebra abeliana finitamente gerada sobre $k = \overline{k}$. Portanto, $\otimes^m R \supseteq S$ é extensão integral, ie, $\otimes^m R$ é finitamente gerado como S-módulo via produto.

Mostremos agora que $V = Im(\alpha)(\otimes^m R)$ é finitamente gerado sobre R.

Como $\otimes^m R$ é finitamente gerado como S-módulo, podemos escrever

$$\otimes^m R = St_1 + St_2 + \cdots + St_j, \ para\ alguns\ t_1, \cdots, t_j \in \otimes^m R$$

e, assim,

$V = Im(\alpha)(\otimes^m R) = Im(\alpha)St_1 + Im(\alpha)St_2 + \cdots + Im(\alpha)St_j \overset{Im(\alpha)S=Im(\alpha)}{=}$ $= Im(\alpha)t_1 + Im(\alpha)t_2 + \cdots + Im(\alpha)t_j$.

Agora, sendo $Im(\alpha)$ é finitamente gerado sobre R,

$$Im(\alpha) = \widetilde{a_1}\delta(R) + \cdots + \widetilde{a_s}\delta(R),$$

onde $\delta : R \to \otimes^m R$ é a aplicação diagonal, ie, m-ésima comultiplicação.

Deste modo,

$$V = Im(\alpha)(\otimes^m R) = \sum_{1\leq i\leq s, 1\leq k\leq j} \widetilde{a_i}\delta(R)t_k = \sum_{1\leq i\leq s, 1\leq k\leq j} \widetilde{a_i}t_k\delta(R),$$

o que implica que V é finitamente gerado como R-módulo via ação diagonal.

Vamos supor que $\widetilde{\omega}(V) \neq 0$ (no caso em que isto não acontece, $v_1, \ldots, v_m$ podem ser trocados com outros para os quais o novo $\widetilde{\omega}(V) \neq 0$, como foi demonstrado em [19]) e seja s o inteiro não-negativo com as propriedades

$$\widetilde{\omega}(V) \subseteq J^s \quad e \quad \widetilde{\omega}(V) \nsubseteq J^{s+1},$$

onde J é o ideal de C gerado por $t_1 - t_2, t_2 - t_3, \cdots, t_{m-1} - t_m$ e, por definição, $J^0 = C$ (recordamos que C foi definido na página 55). Podemos tomar s com tal propriedade pois $\bigcap J^s = 0$. De fato, C mergulha em $S = \bigcup_{z_i \in \mathbb{Z}} t_1^{z_1} \ldots t_m^{z_m}\overline{k}[[t_1, \ldots, t_m]]$, o qual é localização de $\overline{k}[[t_1, \ldots, t_m]]$ com respeito a $\{t_1^{\mathbb{N}} \ldots t_m^{\mathbb{N}}\}$. Agora, sendo $\overline{k}[[t_1, \ldots, t_m]]$ um anel noetheriano (ver [1]), temos que S é localização de anel noetheriano. Portanto, S é anel noetheriano.

Seja T ideal de S gerado por $t_1 - t_2, \ldots, t_{m-1} - t_m$. Por definição, $J \subseteq T$. Logo, $\bigcap J^i \subseteq \bigcap T^j$. Mostremos que $\bigcap T^j = 0$.

Sabemos que $S/T \simeq \overline{k}((t_1))$, pois existe

$$S \twoheadrightarrow \overline{k}((t_1))$$

$$t_i \mapsto t_1$$

com núcleo T. Logo, podemos aplicar o resultado de [1](10.18)("Se A é domínio noetheriano, I é ideal de A tal que $A \neq I \lhd A$, então $\bigcap I^s = 0$"), para $A = S$ e $I = T$, conseguindo então que $\bigcap T^j = 0$. Portanto, $\bigcap J^s = 0$.

Para $v = a_1 \otimes \ldots \otimes a_m \in V$, calculemos a imagem da ação diagonal de $b \in B$ em $\widetilde{\omega}(v)$. Temos:

$\widetilde{\omega}(v \circ b) = \widetilde{\omega}((a_1 \otimes \ldots \otimes a_m) \circ b) = \widetilde{\omega}((a_1 \circ b) \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_m + a_1 \otimes (a_2 \circ b) \otimes \ldots \otimes a_m + \ldots + a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes (a_m \circ b)) = \omega_1(a_1 \circ b) \otimes \omega_2(a_2) \otimes \ldots \otimes \omega_m(a_m) + \omega_1(a_1) \otimes \otimes \omega_2(a_2 \circ b) \otimes \ldots \otimes \omega_m(a_m) + \ldots + \omega_1(a_1) \otimes \omega_2(a_2) \otimes \ldots \otimes \omega_m(a_m \circ b) = \omega_1(a_1)\alpha_1(b) \otimes \omega_2(a_2) \otimes \ldots \otimes$

$\otimes\omega_m(a_m)+\omega_1(a_1)\otimes\omega_2(a_2)\alpha_2(b)\otimes\ldots\otimes\omega_m(a_m)+\ldots+\omega_1(a_1)\otimes\omega_2(a_2)\otimes\ldots\otimes\omega_m(a_m)\alpha_m(b) =$
$= \widetilde{\omega}(a_1\otimes a_2\otimes\ldots\otimes a_m)(\alpha_1(b)+\ldots+\alpha_m(b))$ então, $\delta(b)$ age via produto com $\sum_{0\leq i\leq m-1}\alpha_{i+1}(b)$.

Calculemos agora a ação de $q\in Q$. Temos:

$\widetilde{\omega}(v\circ q) = \widetilde{\omega}((a_1\otimes\ldots\otimes a_m)\circ q) = \widetilde{\omega}(a_1\circ q\otimes\ldots\otimes a_m\circ q) = \omega_1(a_1\circ q)\otimes\ldots\otimes\omega_m(a_m\circ q) =$
$= \omega_1(a_1)\alpha_1(q)\otimes\ldots\otimes\omega_m(a_m)\alpha_m(q) = \widetilde{\omega}(a_1\otimes\ldots\otimes a_m)(\alpha_1(q)\otimes\ldots\otimes\alpha_m(q))$, então $\delta(q)$ age via produto com $\alpha_1(q)\otimes\ldots\otimes\alpha_m(q)$.

Agora,

$$\widetilde{\omega}(v)\sum\alpha_i(b) \equiv \widetilde{\omega}(v)\sum\pi_i\alpha_i(b)(mod\ J^{s+1})$$

e

$$\widetilde{\omega}(v)\prod\alpha_i(q) \equiv \widetilde{\omega}(v)\prod\pi_i\alpha_i(q)(mod\ J^{s+1}),$$

onde $\pi_i : \overline{k}((t_i)) \to \overline{k}((t_1))$ é o isomorfismo de $\overline{k}$-álgebras levando t_i à t_1 e s como definido anteriormente, ie, s é o inteiro não-negativo com as propriedades $\widetilde{\omega}(V)\subseteq J^s$ e $\widetilde{\omega}(V)\nsubseteq J^{s+1}$.

Como $\sum_i[v_i|_B] = 0$ e $\prod_i[v_i|_Q] = [0]$, temos que $\sum_i\pi_i\circ\alpha_i(b)\in\overline{k}[[t_1]]$ e $\prod_i\pi_i\circ\alpha_i(q)\in\overline{k}[[t_1]]$, ie, a ação diagonal sobre

$$D := (\widetilde{\omega}(V)+J^{s+1})/J^{s+1}\neq 0$$

corresponde a produto com elementos de $\overline{k}[[t_1]]$. Agora, sendo J^s um C-módulo via produto, temos que J^s/J^{s+1} é C/J-módulo. Consideremos

$$f : C \longrightarrow k((t_1))$$

$$t_i \longmapsto t_1.$$

Como $Ker(f) = J$, temos $C/J \simeq k((t_1))$. Logo, J^s/J^{s+1} é $k((t_1))$-módulo, com a imagem de t_i agindo como t_1.

Como $k((t_1))$ é corpo, J^s/J^{s+1} é $k((t_1))$-módulo livre e finitamente gerado, com base $(t_1-t_2)^{s_1}(t_2-t_3)^{s_2}\ldots(t_{m-1}-t_m)^{s_{m-1}}$, com $\sum_i s_i = s$, ie,

$$J^s/J^{s+1} = \bigoplus_{e\in E} e.k((t_1)),$$

sendo E uma base de J^s/J^{s+1} como $k((t_1))$-módulo.

Temos que $D \subseteq \sum_{f \in F} f.k[[t_1]]$, sendo F um subconjunto finito de J^s/J^{s+1}. Seja $k > 0$ tal que $F \subseteq \bigoplus_{e \in E} e.{t_1}^{-k}k[[t_1]]$. Deste modo,

$$D \subseteq \bigoplus_{e \in E} e.{t_1}^{-k}k[[t_1]].$$

Finalmente, tomemos v_i tal que $[v_i] \neq [0]$, ie, $Im(\alpha_i)$ não é um subconjunto de $\overline{k}[[t_i]]$, e $r \in R$ tal que $\alpha_i(r) \notin \overline{k}[[t_i]]$ e definamos

$$h = (\otimes^{i-1}1) \otimes r \otimes (\otimes^{m-i}1) \in \otimes^m R.$$

Para $v \in V$, temos

$D \ni \widetilde{\omega}(v.h) = \widetilde{\omega}(v).\alpha_i(r) \equiv \widetilde{\omega}(v).\pi_i(\alpha_i(r))(mod\ J^{s+1})$ e, assim, $(\widetilde{\omega}(V) + J^{s+1})/J^{s+1}$ é invariante sobre multiplicação com f^j, para todo $j \geq 1$, onde $f = \pi_i(\alpha_i(r)) \in \overline{k}((t_1)) \setminus \overline{k}[[t_1]]$, ou seja, D é fechado via produto com $\{f^j\}_{j \geq 1}$, onde $f \in k((t_1)) \setminus k[[t_1]]$, ie, se $d \in D$, $d = \sum_{e \in E} e.t_1^{-k}\lambda_e$, com $\lambda_e \in k[[t_1]]$, temos $df^j = \sum_{e \in E} e.t_1^{-k}f^j\lambda_e \in D \subseteq \bigoplus_{e \in E} e.t_1^{-k}k[[t_1]]$ e, $o : k((t_1)) \to \mathbb{Z} \cup \infty$ é valorização principal, $o(t_1^{-k}f^j\lambda_e) = -k + j.o(f) + o(\lambda_e) < -k$, para j suficiente grande, pois $o(f) < 0$, então $t_1^{-k}f^j\lambda_e \notin t_1^{-k}k[[t_1]]$, chegando a uma contradição.

■

Teorema 6.3. *Se A é R-módulo finitamente gerado e $\bigwedge^i A$ é finitamente gerado sobre R, para cada $i \leq m$, via ação diagonal, então k é de tipo FP_m sobre H.*

A demonstração deste teorema é baseada na existência de algumas seqüências exatas longas especiais dadas no lema a seguir.

Lema 6.5. *Para todo $k \geq 1$, o complexo*

$$0 \longrightarrow \wedge^k A \xrightarrow{\partial_{k,k}} \ldots \xrightarrow{\partial_{i+1,k}} \wedge^i A \otimes S^{k-i}A \xrightarrow{\partial_{i,k}} \ldots \xrightarrow{\partial_{1,k}} S^k A \longrightarrow 0,$$

com diferenciais

$$\partial_{i,k}((a_1 \wedge \ldots \wedge a_i) \otimes (b_1 \otimes \ldots \otimes b_{k-i})) = \sum_{1 \leq j \leq i} (-1)^{i-j}(a_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{a_j} \wedge \ldots \wedge a_i) \otimes (a_j \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_{k-i}),$$

para todos $a_1, \ldots, a_i, b_1, \ldots, b_{k-i} \in A$, é exato, sendo S^jA definido como no exemplo 1.1.

Demonstração : [21], Lema 7.1.

■

Agora, definimos V_i, para $i \geq 1$, o subespaço de $\bigotimes^i A$ gerado pelos elementos $\sum_{\sigma \in S_i} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(i)}$, para todos $a_1, \ldots, a_i \in A$. E, seja W_i o $U(A)$-submódulo de $\bigotimes^{i-1} A \otimes U(A)$ gerado por

$$V_i \subseteq (\bigotimes^{i-1} A) \otimes A \subset (\bigotimes^{i-1} A) \otimes U(A).$$

Lema 6.6. *A aplicação $\varphi_i : V_i \otimes U(A) \to W_i$, levando $\sum_{\sigma \in S_i} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(i)} \otimes \lambda$ à $\sum_{\sigma \in S_i} (-1)^\sigma a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(i-1)} \otimes a_{\sigma(i)} \lambda$, tem kernel W_{i+1}.*

Demonstração : [21], Lema 7.2.

■

Observamos que $U(A) \simeq \bigoplus_{m \geq 0} S^m A$, então $\bigotimes^j A \otimes U(A) \simeq \bigoplus_{m \geq 0} (\bigotimes^j A) \otimes (S^m A)$ e $R = U(B) \otimes U(Q)$ age sobre $\bigotimes^{j+m} A$ via ação diagonal. Esta ação induz ação de R sobre $(\bigotimes^j A) \otimes (S^m A)$ e, portanto, R age sobre $\bigotimes^j A \otimes U(A)$. Assim, $\bigotimes^j A \otimes U(A)$ é um H-módulo com $U(A)$ atuando via multiplicação na coordenada de $U(A)$ e R atua como já explicamos.

Lema 6.7. *Seja A um R-módulo finitamente gerado e $\bigwedge^i A$ finitamente gerado sobre R, para todo $i \leq m$. Então, o módulo W_i é de tipo FP_k sobre H se, e somente se, W_{i+1} é de tipo FP_{k-1} sobre H.*

Demonstração : Pelo Lema 6.6 e definição de W_i, temos a seqüência exata curta de $U(A)$-módulos

$$0 \to W_{i+1} = \ker \varphi_i \to V_i \otimes U(A) \xrightarrow{\varphi_i} W_i \to 0 \quad (*)$$

Observamos que $V_i \simeq \bigwedge^i A$. Assim, o submódulo V_i é finitamente gerado sobre R, para $i \leq m$ e,

$$V_i \otimes_R H \simeq V_i \otimes_R R \otimes U(A) \simeq V_i \otimes_k U(A),$$

pois $H = U(L)\#kQ \simeq U(A) \otimes U(B) \otimes kQ = U(A) \otimes R \simeq R \otimes U(A)$.

Agora, sendo V_i finitamente gerado sobre R, o qual é anel noetheriano, pelo Lema 3.1 temos que V_i tem tipo FP_∞ sobre R.

Sendo $L = A \oplus B$, temos que $U(L)$ é $U(B)$-módulo livre, então $H = U(L)\#kQ$ é $U(B) \otimes kQ = R$-módulo livre. Deste modo, H é um R-módulo plano (todo módulo livre é projetivo, logo plano), de onde temos $\otimes_R H$ funtor exato.

Logo, pelo Lema 3.2, $V_i \otimes_R H$ é de tipo FP_∞ sobre H.

Portanto, $V_i \otimes_k U(A) \simeq V_i \otimes_R H$ é induzido de um módulo de tipo FP_∞ sobre R e é de tipo FP_∞ sobre H.

Aplicando a Proposição 3.3 à seqüência $(*)$, temos

$$0 \to W_{i+1} = \ker \varphi_i \to V_i \otimes U(A) \xrightarrow{\varphi_i} W_i \to 0,$$

com $V_i \otimes U(A)$ de tipo FP_∞ sobre H (ou seja, FP_n, $\forall n$), portanto, W_i tem tipo FP_k sobre H se, e somente se, W_{i+1} tem tipo FP_{k-1} sobre H, para $k \geq 1$.

$\blacksquare$

Finalmente, estamos prontos para completar a demonstração do Teorema 6.3.

Aplicando o Lema 6.7 várias vezes, obtemos que:

W_1 é de tipo FP_{m-1} sobre $H \Leftrightarrow W_m$ é de tipo FP_0 sobre H (ie, finitamente gerado).

Notemos que V_m é um conjunto gerador de W_m sobre $U(A)$. Por hipótese, $\bigwedge^m A$ é finitamente gerado sobre R e, então, V_m é finitamente gerado sobre R, de onde devemos ter W_m finitamente gerado sobre H, ie, W_m é de tipo FP_0 sobre H. Logo, W_1 é de tipo FP_{m-1} sobre H.

Assim, falta mostrarmos que

$$W_1 \text{ tem tipo } FP_{m-1} \text{ sobre } H \Leftrightarrow k \text{ tem tipo } FP_m \text{ sobre } H.$$

De fato, temos $V_1 = A$, W_1 é o $U(A)$-submódulo de $U(A)$ gerado por $A \subset U(A)$, ou seja, W_1 é o ideal aumentado dado em

$$W_1 = Ker(\pi) \longrightarrow U(A) \xrightarrow{\pi} k \quad (\textit{counidade}),$$

isto é, $\pi(A) = 0$.

Agora, como R é anel noetheriano e k é finitamente gerado sobre R, pelo Lema 3.1, k tem tipo FP_∞ sobre R. Assim, pelo Lema 3.2, $k \otimes_R H$ tem tipo FP_∞ sobre H. E, $U(A) \simeq k \otimes_k U(A) \simeq k \otimes_R H$. Logo, $U(A)$ é de tipo FP_∞ sobre H.

Portanto, usando a Proposição 3.3,

$$W_1 \text{ é de tipo } FP_{m-1} \text{ sobre } H \Leftrightarrow k \text{ é de tipo } FP_m \text{ sobre } H,$$

concluindo a prova do Teorema 6.3. ■

Prova do Teorema 6.1:

Pelo Lema 6.4, temos que (1) $\Rightarrow \bigwedge^i A$ finitamente gerado sobre R, para cada $i \leq m$. Logo, (1) $\Rightarrow$ (3).

No Teorema 6.3, provamos que (3) $\Rightarrow$ (1).

Pelo Teorema 6.2, temos (2) $\Leftrightarrow$ (3).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] M. Atiyah, I.G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[2] G. Baumslag, *On the subalgebras of certain finitely presented algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), no. 1, 95-98.

[3] G. Baumslag, *Subgroups of finitely presented metabelian groups*, Collection of articles dedicated to the memory of Hanna Neumann, I. J. Austral. Math. Soc. 16 (1973), 98–110

[4] M. Bestvina and N. Brady, *Morse theory and finiteness properties of groups*, Invent. Math. 129, nº03, p.445-470, 1997.

[5] R. Bieri, *Homological dimension of discrete groups*, Queen Mary College Math Notes, 1981.

[6] R. Bieri, J. Groves, *Metabelian groups of type FP_∞ are virtually of type FP*, Proc. London Math. Soc. (3) 45, 1982, no.2, 365-384.

[7] R. Bieri, R. Strebel, *Valutions and finitely presented metabelian groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 41, 1980, 439-464.

[8] N. Bourbaki, *Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.

[9] N. Bourbaki, *Algebra I: Chapters 1-3*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[10] N. Bourbaki, *Algebra II: Chapters 4-7*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[11] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, G.T.M.87, Springer Verlag, New York, 1982.

[12] R. M. Bryant, J. R. J. Groves, *Finite presentation of abelian-by-finite dimensional Lie Algebras*, Journal of the London Mathematical Society (2) **60** (1999), 45-57.

[13] R. M. Bryant, J. R. J. Groves, *Finitely presented Lie Algebras*, Journal of Algebra **218** (1999),01-25.

[14] R. M. Bryant, J. R. J. Groves, *Finitely presented centre-by-metabelian Lie algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. 60 (1999), no. 2, 221–226

[15] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[16] L. N. Childs, *Taming Wild Extensions: Hopf Algebras and Local Galois Module Theory,* American Mathematical Society, 2000.

[17] V. O. Ferreira, L. S. I. Murakami, *Álgebras de Hopf*, Notas de apoio ao mini-curso "Álgebras de Hopf", ministrado na XVIII Escola de Álgebra, Campinas-SP, 2004.

[18] J. R. J. Groves, D. H. Kochloukova, *Embedding properties of metabelian Lie algebras and metabelian discrete groups*, J. London Math. Soc. (2) 73 (2006), no. 2, 475–492

[19] J. R. J. Groves, D. H. Kochloukova, *Nilpotent-by-abelian Lie algebras of type* FP_m, preprint

[20] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Interscience Publishers (a division of John Wiley Sons), New York-London, 1962.

[21] D. H. Kochloukova, *On the homological finiteness properties of some modules over metabelian Lie algebras*, Israel Journal of Mathematics **129**, 2002, 221-239.

[22] D. H. Kochloukova, *Finite presentability and the homological type* FP_m *for a class of Hopf Algebras*, Comm. Algebra 34 (2006), no. 3, 785–796

[23] D. H. Kochloukova, *Finite Presentabibity of some metabelian Hopf Algebras*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol 72, 2005, 109-127.

[24] D. H. Kochloukova, F. S. M. da Silva, *Embedding homological properties of metabelian discrete groups: the general case*, J. Group Theory 10 (2007), no. 4, 505–529

[25] S. Montgomery, *Hopf Algebras and their actions on rings*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[26] D. S. Passman, *The Algebraic Structure of Group Rings*, Robert E. Krieger Publishing Company, 1985.

[27] J. J. Rotman, *An introduction to Homological Algebra*, Academic Press, 1979.

[28] M. Sweedler, *Hopf Algebras*, W. A. Benjamin, New York, 1969.

[29] C. T. C. Wall, *Finiteness conditions for CW-complexes*, Ann. of Math. (2) 81, 1965.