

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ESTUDO DE ALTERNATIVAS PARA APLICAÇÃO
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
PARA ELASTICIDADE**

Eng^o. Paulo César Gonçalves

Campinas - SP
2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ESTUDO DE ALTERNATIVAS PARA APLICAÇÃO
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
PARA ELASTICIDADE**

Eng^o. Paulo César Gonçalves

Orientador: Prof. Dr. Leandro Palermo Junior

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão de pós-graduação da faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

Campinas - SP
2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

G589e Gonçalves, Paulo Cesar
 Estudo de alternativas para aplicação do método dos
 elementos de contorno para elasticidade / Paulo César
 Gonçalves.--Campinas, SP: [s.n.], 2006.

 Orientador: Leandro Palermo Junior
 Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e
 Urbanismo.

 1. Métodos de elementos de contornos. 2. Operadores
 diferencias. 3. Elasticidade. I. Palermo Junior, Leandro.
 II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
 Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

 Título em Inglês: Study of alternatives for application of Boundary Elements
 Method for Elasticity

 Palavras-chave em Inglês: Boundary elements method, Indirect regularizations
 technique, Tangential differential operator, Boundary
 elements method dual

 Área de concentração: Engenharia de Estruturas

 Titulação: Mestre em Engenharia Civil

 Banca examinadora: Sérgio Persival Baroncini Proença, Francisco Antônio
 Menezes

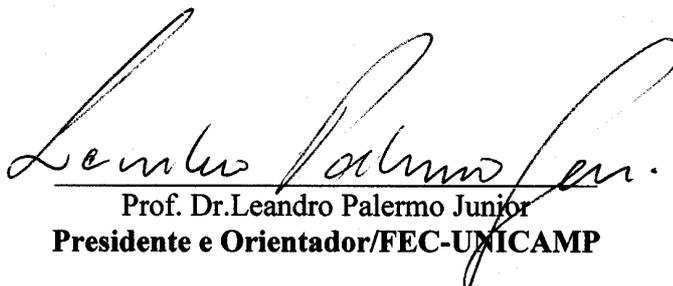
 Data da defesa: 25/08/2006

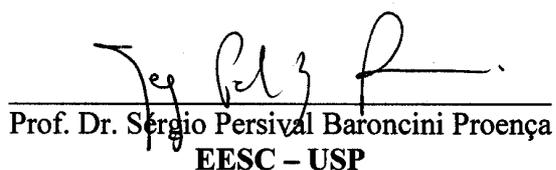
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E
URBANISMO**

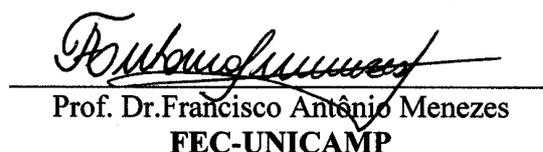
**Estudo de Alternativas para Aplicação do Método dos
Elementos de Contorno para Elasticidade**

Paulo César Gonçalves

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:


Prof. Dr. Leandro Palermo Junior
Presidente e Orientador/FEC-UNICAMP


Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença
EESC – USP


Prof. Dr. Francisco Antônio Menezes
FEC-UNICAMP

Campinas, 25 de Agosto de 2006.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Messias e Dirce

À minha esposa Vera

Aos meus filhos, Paulo e Maria Eduarda.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior, agradeço pelo incentivo e todo apoio dado durante a elaboração deste trabalho, sem ele não o teria realizado.

A meus amigos, em especial a Sandra, Pedro e Rogério e ao meu irmão Marcos, que nunca negaram seu apoio nas horas difíceis.

À Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp pela oportunidade que me foi oferecida.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Símbolos	xv
Resumo	xvii
1. Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	5
3 Elasticidade Linear	11
3.1. Introdução	11
3.2. Equações Básicas da Elastostática Linear-Hipótese básicas	11
3.3. Tensões e equilíbrio do corpo sob forças aplicadas	12
3.4. Deformação	15
3.5. Relações Constitutivas	18
3.6. Estado plano de tensão	22
3.7. Estado plano de deformação	24
3.8. Vetor de Galerkin	25
3.9. Solução fundamental	27
4. Método dos Elementos de Contorno	31
4.1. Introdução	31
4.2. Equações integrais da elastostática e o teorema de Green.	33
4.3. Implementação numérica	41
4.4. Elemento de contorno	43
4.5. Pontos de colocação	46
4.6. Tipos de elementos	47
4.7. Sistema linear – montagem das matrizes H/G	48
4.7.1 Formulação numérica – Integração numérica do núcleo	49
4.7.2 Consideração de corpo rígido.	54
4.7.3 Condições de contorno	54
4.8 Deslocamentos em pontos internos no domínio	56
4.9 Tensões no ponto interno no domínio e no contorno	57
4.9.1 Tensões para pontos internos	57
4.9.2 Tensões no contorno para elementos lineares	62
4.10 Uso do Operador Tangente para determinação de tensões	64
4.10.1 Implementação numérica do Operador Diferencial tangente	68

4.11	Montagem do programa computacional usando a equação integral de contorno para forças de superfície	69
5.	Técnica da regularização indireta	71
5.1.	Introdução	71
5.2.	Regularização indireta para o problema potencial de temperatura	71
5.3.	Regularização indireta para problemas de elasticidade	74
6.	Técnica da integração numérica	77
6.1.	Introdução	77
6.2.	Quadratura Gaussiana ordinária	78
6.3.	Sub elementos	83
6.4.	Programas usados no trabalho	85
7.	Exemplos numéricos	89
7.1.	Introdução	89
7.2.	Definição da posição dos pontos de carregamento em elementos lineares e quadráticos	90
7.3.	Exemplos de problemas em estado plano de tensão	91
7.3.1.	Exemplos de chapas quadradas	92
7.3.2.	Exemplos de chapas retangulares	100
7.4.	Exemplos de problemas em estado plano de deformação	103
7.4.1.	Exemplos de tubos de paredes espessas e chapa retangular	103
7.4.2.	Exemplo de cavidade circular em meio elástico infinito	115
8.	Problemas de fratura pela técnica das duas equações integrais de contorno – Método Dual	119
8.1.	Introdução	119
8.2.	As duas equações integrais de contorno – Método Dual	120
8.3.	Modelagem da trinca usada no trabalho	120
8.4.	Fatores de intensidade de tensão	121
8.5.	Exemplo numérico	123
9	Conclusões	125
10	Bibliografia	129

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 -	Elemento infinitesimal sob ação de forças de superfície	13
Figura 3.2 -	Elemento infinitesimal sob ação de forças de volume	13
Figura 3.3 -	Componentes da força superficial na face de um elemento infinitesimal.	15
Figura 3.4 -	Representação do comportamento de um objeto sólido na sua forma original e deformada	15
Figura 3.5 -	Deformação da linha infinitesimal do elemento sólido.	16
Figura 3.6 -	Chapa fina sob ação de forças de tração t paralelas a seu plano.	22
Figura 3.7 -	Função delta de Dirac	28
Figura 4.1 -	Representação dos pontos fonte x_0 e campo X .	35
Figura 4.2 -	Acréscimo de um contorno infinitesimal Γ_ε ao contorno Γ de domínio Ω	36
Figura 4.3 -	Domínio arbitrário Ω de contorno Γ .	41
Figura 4.4 -	Discretização do contorno.	42
Figura 4.5 -	Elemento quadrático	44
Figura 4.6 -	Função de forma de um elemento quadrático	45
Figura 4.7 -	Função de forma de um elemento linear	46
Figura 4.8 -	Elemento linear contínuo.	47
Figura 4.9 -	Elemento quadrático contínuo.	47
Figura 4.10 -	Elemento com presença de nós duplos.	47
Figura 4.11 -	Elemento descontínuo.	48
Figura 4.12 -	Direções dos eixos nos três nós do elemento quadrático.	51
Figura 4.13 -	Relação entre coordenadas N e S.	63
Figura 4.14 -	Sistema de coordenadas em função de uma posição arbitrária distante 'a' de uma extremidade.	63
Figura 6.1 -	Função integral com quatro pontos de Gauss.	79
Figura 6.2 -	Elemento quadrático	81

Figura 6.3 -	Elemento quadrático dividido em sub-elementos.	84
Figura 6.4 -	Sub-elementos	84
Figura 6.5 -	Fluxograma do programa de elasticidade que usa elementos quadráticos	86
Figura 7.1 -	Elemento linear com nó duplo inicial	91
Figura 7.2 -	Elemento linear com nó duplo final	91
Figura 7.3 -	Ilustração da chapa com a posição dos pontos internos e no contorno para o calculo das tensões e deslocamentos	93
Figura 7.4-	Discretização da chapa com a posição dos nós de contorno, inclusive os nós duplos.	94
Figura 7.5	Ilustração do carregamento e apoios da chapa	95
Figura 7.6 -	Chapa com carregamento no eixo x nos dois sentidos e restrição no eixo y.	98
Figura 7.7 -	Chapa retangular com carregamento linear variado nos cantos	101
Figura 7.8 -	Discretização da chapa retangular com os pontos no contorno	102
Figura 7.9 -	Definição do problema do tubo de paredes espessas	103
Figura 7.10 -	Condições de contorno do tubo, com as posições dos oitos pontos internos.	104
Figura 7.11 -	Discretização do problema do tubo, com pontos internos e no contorno e presença de nós duplos.	105
Figura 7.12 -	Condições de contorno do cilindro	109
Figura 7.13 -	Discretização do contorno do cilindro	110
Figura 7.14 -	Discretização do contorno do meio tubo	111
Figura 7.15 -	Discretização do contorno com ponto interno tendendo ao contorno	113
Figura 7.16 -	Definição do problema da cavidade	115
Figura 7.17 -	Localização dos quatros primeiros pontos onde são calculados os deslocamentos e tensões.	116
Figura 8.1 -	Modos de deformação da trinca	121
Figura 8.2 -	Elemento linear da ponta da trinca.	122
Figura 8.3 -	Esquema da placa com trinca de canto.	123

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1 -	Deslocamentos nos pontos internos para elementos quadráticos (m).	95
Tabela 7.2 -	Deslocamentos nos pontos no contorno para elementos quadráticos (m).	96
Tabela 7.3 -	Deslocamentos, obtidos a partir da equação de deslocamentos, nos pontos internos para elementos lineares (m).	96
Tabela 7.4 -	Deslocamentos, obtidos a partir da equação de deslocamentos, nos pontos no contorno para elementos lineares (m).	96
Tabela 7.5 -	Tensões nos pontos internos, onde para elem. lineares foi usada a formulação da equação de deslocamentos regularizada (kN/m ²).	97
Tabela 7.6 -	Tensões nos pontos no contorno para elem. Lineares, onde foi usada a formulação da equação de deslocamentos regularizada (kN/m ²).	97
Tabela 7.7 -	Deslocamentos na direção do carregamento nos pontos internos (m).	99
Tabela 7.8 -	Deslocamentos na direção do carregamento nos pontos no contorno (m).	99
Tabela 7.9 -	Tensões nos pontos internos, onde para elem. lineares foi usada a formulação da equação de forças de superfície (kN/m ²).	99
Tabela 7.10 -	Tensões nos pontos no contorno para elem. Lineares, onde foi usada a formulação da equação de forças de superfície (kN/m ²).	99
Tabela 7.11 -	Comparação de tensões calculadas nos pontos internos pelas equações (4.75) e (4.107) (kN/m ²).	100
Tabela 7.12 -	Deslocamentos no ponto A (m).	102
Tabela 7.13 -	Coordenadas X, Y dos pontos internos do tubo.	105
Tabela 7.14 -	Deslocamentos nos pontos internos para elementos quadráticos (m).	106
Tabela 7.15 -	Deslocamentos nos pontos internos, a partir da equação de deslocamentos, para elementos lineares (m).	106

Tabela 7.16 -	Deslocamentos nos pontos internos, a partir da formulação de forças de superfície, para elementos lineares (m).	107
Tabela 7.17 -	Deslocamentos nos pontos internos usando uma malha com 48 elementos isoparamétricos lineares, (m).	108
Tabela 7.18 -	Deslocamentos nos pontos internos usando uma malha com 96 elementos isoparamétricos lineares, (m).	108
Tabela 7.19 -	Deslocamentos nos pontos de contorno 1, 2, e 3 do tubo sob pressão interna (10^{-3} mm).	110
Tabela 7.20 -	Comparação dos deslocamentos nos pontos 1, 2, e 3, obtidos pelas duas formulações (10^{-3} mm).	111
Tabela 7.21	Deslocamentos nos pontos de contorno 1 e 3 e no ponto interno 2 do tubo (10^{-3} mm).	112
Tabela 7.22	Módulo das tensões radiais calculadas no ponto interno do tubo, pelas equações (4.75) e (4.107) (N/mm ²)	112
Tabela 7.23	Módulo das tensões radiais calculadas no ponto interno do tubo tendendo ao contorno (N/mm ²)	114
Tabela 7.24	Deslocamentos nos quatro primeiros pontos internos da cavidade em domínio infinito (mm)	116
Tabela 7.25	Tensões radiais nos quatro primeiros pontos internos da cavidade em domínio infinito (Pa)	117
Tabela 8.1	Resultados do fator de intensidade no modo I: $K_I / \sqrt{\pi a}$	124

LISTA DE SÍMBOLOS

σ_{ij}	Tensor de Tensões.
ε_{ij}	Tensor de deformações
b_i	Forças de volume.
t_k	Forças de superfície.
U_i	Vetor de deslocamentos.
n_i	Componente normal à superfície de contorno.
S_i	Componente tangencial à superfície de contorno.
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
C_{ij}	Tensor das constantes elásticas, de quarta ordem.
μ, λ	Constantes de Lamé
E	Módulo de elasticidade longitudinal.
μ	Coefficiente de Poisson
G	Módulo de elasticidade transversal
G_i	Vetor de Galerkin
∇^2	Operador diferencial escalar (Laplace), $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$
$\Delta(x, \xi)$	Delta de Dirac
r	Distancia entre o ponto campo e o ponto de carregamento (fonte)
U_{ij}	Solução fundamental de deslocamentos
P_{ij}	Solução fundamental das forças superficiais
Ω	Coordenada de domínio
ϕ, ψ	Variáveis de domínio

X, x_0	Coordenadas dos pontos campo e fonte
Γ	Variável de contorno.
Γ_ε	Variável do acréscimo de contorno infinitesimal
$\bar{\Gamma}$	Parcela restante da diferenças de $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$
ε	Raio do acréscimo de domínio.
π	3,14159265358979
c_{ij}	Tensor de Correção para deslocamentos no contorno ou fora do contorno.
ξ	Variável intrínseca local.
φ_i	Funções de forma
J	Jacobiano.
$[H_{ij}]$	Matriz na formulação do MEC, cujos componentes multiplicam o vetor de deslocamentos.
$[G_{ij}]$	Matriz na formulação do MEC, cujos componentes multiplicam o vetor de forças superficiais.
$[B]$	Matriz com os valores conhecidos pelo produto com os coeficientes da matriz $[G]$.
W_g	Função peso da quadratura de Gauss
ξ_g	Coordenada Gaussiana.
S_{ikj}	Núcleo de terceira ordem da equação integral de tensões
D_{ikj}	Núcleo de terceira ordem da equação integral de tensões
D_{pk}	Operador diferencial tangente
KI	Fator de intensidade de tensão para o modo I
θ	Coordenada polar

RESUMO

GONÇALVES, P. C. **Estudo de alternativas para aplicação do Método dos Elementos de Contorno para Elasticidade.** Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, 2006. 125 p. Dissertação (Mestrado).

O método dos elementos de contorno foi usado no estudo de problemas de estados planos. O objetivo deste trabalho é a introdução do operador diferencial tangente no núcleo das equações integrais de forças de superfície, como uma alternativa para a aplicação do método dos elementos de contorno. A singularidade forte do tipo $1/r^2$, presente no núcleo da equação integral de contorno, foi reduzida a uma singularidade de ordem $1/r$ com o uso do operador diferencial tangente. A formulação trabalhou com elementos de contorno contínuos e descontínuos. Na determinação de deslocamentos e tensões para pontos próximos do contorno, trabalhou-se apenas com núcleos com uma singularidade de ordem $1/r$. A técnica da regularização indireta, quando se evitam expressões analíticas, foi aplicada na equação integral de deslocamentos. Quando o ponto de colocação foi levado ao contorno, a singularidade, presente nas equações integrais de contorno, foi tratada pelo valor principal de Cauchy para elementos lineares na obtenção de tensões internas e no contorno. A formulação do método dos elementos de contorno dual usou a equação integral de forças de superfície, com a aplicação do operador diferencial tangente, no tratamento de problemas com trinca em análises da mecânica da fratura elástico-linear. Os fatores de intensidade de tensão são obtidos através do método da extrapolação de deslocamentos.

Palavras Chave: Método dos elementos de contorno; técnica da regularização, operador diferencial tangente, métodos dos elementos de contorno dual.

ABSTRACT

GONÇALVES, P. C. Study of alternatives for application of Boundary Elements Method for Elasticity. Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, 2006. 125 p. Dissertação (Mestrado).

The Boundary Element Method was used to study plane state problem. The aim of this study is an application of the tangential differential operator in the kernels of boundary integrals equations for tractions, as an alternative for the applications of Boundary Element Method. Strong singularity of order $1/r^2$, present in the kernels of boundary integrals equations was reduced to a weakly singularity of order $1/r$ when the tangential differential operator was used. The formulation worked with continuous and discontinuous boundary elements. On determination of displacements and stresses for boundary near points, the equation worked only with kernels contained singularity of order $1/r$. The indirect regularization technique, with avoided analytic expressions, was applied on the boundary integral equations for displacements. When the collocation points was led to boundary, the singularity, present on the boundary integrals equations, was treated by the Cauchy principal value sense for linear boundary elements. The formulation of the dual boundary elements methods used a boundary integral equation for traction, with the application of the tangential differential operator, to treat plane problems with cracks of the linear elastic fracture mechanics. The stress intensity factors are obtained with the displacement extrapolation method.

Key Words: Boundary elements method, indirect regularizations technique, tangential differential operator, Boundary elements method dual.

1 – INTRODUÇÃO

Muitos modelos estudados na engenharia são derivados de problemas que envolvem a teoria da elasticidade. Estão relacionados com a mecânica dos sólidos, que traduz como conceito principal o deslocamento que um objeto está submetido como resposta a um carregamento aplicado.

Estes problemas são na sua maioria tratados por métodos numéricos devido a sua complexidade, pois seria praticamente impossível resolvê-los analiticamente. Os métodos numéricos partem do princípio ser possível dividir um corpo em estudo, em várias pequenas partes e, em seguida, “conectar” estas pequenas partes por meio de equações diferenciais. É possível obter respostas com razoável precisão para variáveis como tensões e deslocamentos do corpo. Com mais divisões do corpo em pequenas partes, mais precisas serão as respostas, porém, serão de difícil obtenção sem o emprego computacional.

Muitas destas técnicas são utilizadas na mecânica dos sólidos, como por exemplo, método dos elementos finitos, método das diferenças finitas e o método dos elementos de contorno. Neste trabalho é apresentado o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para solução de problemas da elasticidade.

O MEC basicamente se resume em transformar as equações diferenciais em equações integrais aplicadas ao contorno. Estas equações são integradas sobre o contorno, o qual é dividido em pequenos segmentos denominados: elementos de contorno. Como em qualquer método numérico, as condições de contorno devem ser satisfeitas. Um sistema linear de equações é montado e desta forma é obtida uma resposta única.

O método dos elementos de contorno tem emergido como uma das mais importantes técnicas computacionais de simulação, justamente por apresentar soluções aproximadas de boa precisão para muitos problemas da engenharia.

O estudo do MEC vem sendo atualizado por muitos cientistas ao longo dos anos e tópicos contemporâneos importantes têm sido apresentados, como, por exemplo, a técnica da regularização indireta, apresentada neste trabalho, como forma de tratar as equações integrais que possuem hipersingularidade. A hipersingularidade (ou singularidade forte) presente nos núcleos das equações integrais de contorno vem sendo alvo de muitas pesquisas com o objetivo de reduzi-la, pois o desenvolvimento das expressões analíticas envolvendo-a é muitas vezes complexo. A aplicação da técnica da regularização indireta, proposta neste trabalho, permite a redução da ordem da singularidade forte para uma singularidade fraca do tipo $1/r$, sendo possível, assim, o tratamento numérico dos núcleos das integrais de contorno.

Este trabalho está dividido em 9 capítulos. A revisão bibliográfica sobre a aplicação de problemas de elasticidade pelo método de elemento de contorno está no capítulo dois.

No terceiro capítulo, está contido um breve resumo da teoria da elasticidade, que apresenta as relações constitutivas empregadas na evolução das equações dos estados planos de tensão e deformação necessárias para a formulação das soluções fundamentais para deslocamentos e de forças de superfície, aplicadas ao MEC.

O método dos elementos de contorno aplicado a problemas elastostáticos é apresentado no quarto capítulo, em que se desenvolve toda a estratégia usada na formulação das equações singulares e hipersingulares. São desenvolvidos, ainda, os núcleos das integrais de contorno para tensões em pontos internos e no contorno, bem como a formulação aplicada na obtenção da equação integral de contorno para forças de superfície.

No quinto capítulo será demonstrada a técnica da regularização. Nesta técnica, evita-se a aplicação das equações integrais hipersingulares. Inicialmente, com esta técnica, foi estudado o problema potencial e, posteriormente, foi extrapolada para o problema de elasticidade, sendo este estudo o objetivo deste trabalho.

No sexto capítulo, estão descritas as técnicas da integração numérica.

O sétimo capítulo é dedicado à aplicação da alternativa proposta para exemplos de problemas planos de elasticidade.

No oitavo capítulo é apresentado um breve resumo da mecânica da fratura elástico-linear aplicada no método de elementos de contorno dual.

Após o desenvolvimento das equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície, foi possível analisar problemas com trinca, comuns na engenharia.

As conclusões sobre os exemplos analisados no sétimo e oitavo capítulo são apresentadas no nono capítulo, onde todas as observações sobre a utilização do método numérico são expostas.

2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo da aplicação de técnicas de equações integrais como alternativa à resolução de equações diferenciais data desde do século XIX.

O ponto de partida do estudo da teoria da elasticidade com equações integrais pode ser atribuído a Betti (1872 apud BREBBIA and DOMINGUEZ [1], 1992, p. 148). Betti formulou o teorema do trabalho, no qual demonstrou que o trabalho das tensões de um primeiro estado auto-equilibrado nas deformações de um segundo estado auto-equilibrado é igual ao trabalho das tensões do segundo estado nas deformações do primeiro estado auto-equilibrado.

A equação integral que relacionou valores de contorno de deslocamentos e tensão foi estabelecida por Somigliana (1886 apud KANE [2], 1994, p. 143), a qual recebeu o nome de Identidade de Somigliana.

Em 1903, com o trabalho de FREDHOLM [3], deu-se o início da aplicação das equações integrais para valores de problemas no contorno. Fredholm usou equações integrais discretizadas em problemas de potencial harmônico, as quais fundamentaram as bases do método dos elementos de contorno por aproximação indireta.

A aproximação é definida como indireta por ter sido usadas funções de densidades fictícias, isto é, que não tinham sentido físico, mas puderam ser utilizadas para calcular quantidades físicas, como por exemplo, deslocamentos e tensões.

Devido às dificuldades de encontrar a solução analítica, o uso das equações integrais, até então, era limitado na investigação teórica da existência de uma solução única para os problemas físicos.

Na formulação direta, as quantidades físicas reais do material são usadas como variáveis do problema, como deslocamentos e tensões, ou seja, seus valores reais são usados desde o início, sem aproximações. Foi a identidade de Somigliana o suporte principal para a formulação direta das equações de contorno do método dos elementos de contorno.

Os trabalhos de Somigliana e FREDHOLM [3], já citados, formam a base para o atual Método dos Elementos de Contorno.

Vários estudos em equações integrais para o Potencial e Elasticidade começaram a surgir desde então através de livros e artigos de escritores russos, dos quais destacaram-se: em 1929 KELLOG [4], em 1953 MUSKHELISVILI [5], em 1957 MIKHLIN [6], em 1964 SMIRNOV [7] e em 1965 KUPRADZE [8]. Análogo às equações integrais de FREDHOLM [3], já citado, para a teoria do potencial, KUPRADZE [8], já citado, introduziu equações integrais vetoriais para a teoria da elasticidade. Todos estes autores utilizaram formulações indiretas.

Até o início dos anos sessenta, a formulação das integrais era solucionada apenas analiticamente para problemas simples, portanto, não havia grandes trabalhos que pudessem alcançar a larga escala de problemas que poderiam ser resolvidos por equações integrais. Nos primeiros anos da década de sessenta, com o surgimento de computadores, a técnica numérica se desenvolveu e iniciou seu caminho voltado para aplicações na engenharia. Particularmente, com a técnica dos elementos finitos demonstrou ser possível solucionar, utilizando o computador, uma grande variedade de complexos problemas de engenharia com razoável precisão.

Um dos trabalhos mais notórios foi publicado em 1963, por JASWON [9] e SYMM [10]. A técnica de aproximação desenvolvida por eles solucionava as equações integrais de contorno de FREDHOLM [3], já citado e consistia em discretizar o contorno em uma série de pequenos segmentos (elementos) lineares e as equações integrais de contorno de um problema potencial bi-dimensional governado pela equação de Laplace são aplicadas a um número particular de pontos (nós). A função potencial foi assumida constante sobre cada elemento. A técnica de integração usada foi a regra de Simpson, exceto para algumas integrais singulares, as quais foram tratadas analiticamente. Um sistema de equações lineares foi obtido e, assim, as incógnitas do problema foram determinadas. Os referidos autores propuseram uma formulação mais geral, através da aplicação da terceira identidade de Green, com potenciais e suas derivadas desconhecidas de contorno. O resultado desta formulação foi demonstrado em JASWON [8], já citado e em JASWON e PONTER [11], em 1963.

Técnica similar para equação integral por aproximação foi adotada por JASWON e PONTER [11], já citado, para problemas de torção em barras com diferentes seções.

A primeira publicação sobre a técnica de aproximação direta do método dos elementos de contorno, usando deslocamento e força de superfície em uma equação integral aplicada sobre o contorno, foi de RIZZO [12] em 1967, que explorou a analogia entre a teoria do potencial e a teoria da elasticidade clássica e projetou a aproximação numérica para solucionar o problema. Ele utilizou elementos lineares para discretizar o contorno, onde as funções, agora de deslocamentos e forças de superfície, eram assumidas constantes sobre cada elemento. A regra de Simpson foi utilizada para integrais não singulares.

O trabalho de RIZZO [12], já citado, foi expandido por CRUSE [13], em 1969, para problemas tridimensionais, onde ele discretizou a superfície em elementos triangulares com os valores de deslocamentos e forças de superfície, assumidos constantes sobre cada elemento.

O desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno continuou com estudos e publicações no início dos anos setenta.

Em 1975, LACHAT [14] propõe a utilização de polinômios de grau mais alto com funções de densidade que puderam trazer melhores resultados. Tal proposta foi implementada por LACHAT et al. [15,16]. Mais tarde outros autores, como CRUSE E WILSON [17], em 1978, passaram a usar elementos isoparamétricos quadráticos, onde tanto a geometria do contorno como as funções densidade são aproximadas por funções quadráticas.

Em 1976, HANSEN [18] apresentou a análise de placas infinitas com furos e contorno não carregado através do método direto. Ele utiliza duas equações integrais, uma correspondente à expressão do deslocamento e outra correspondente a sua derivada em relação a uma direção qualquer.

Em 1977, CRUSE [19] apresentou uma representação bidimensional de tensão, semelhante à identidade de Somigliana e a denominou de identidade de Somigliana para tensões.

Diferente dos problemas de Potencial, os problemas planos relacionados a elastostática utilizam quatro variáveis, sendo duas para deslocamentos e duas para forças de superfície, onde ambas possuem componentes nos eixos de coordenadas X e Y.

Durante os anos da década de 60, as soluções apresentadas para as equações integrais de contorno eram quase que exclusividade do domínio dos cientistas matemáticos e físicos. Trabalho pioneiro, como o de HESS e SMITH (1967 apud BREBBIA and DOMINGUEZ [1], 1992, p. 45), foi interpretado como o início de um novo método para soluções de problemas gerais de engenharia. Porém, somente nos anos 70 e início dos anos 80, os nomes das equações integrais de contorno e método das equações integrais passaram a serem chamadas por método dos elementos de contorno a partir de publicações de BREBBIA [20] em 1978 e BANERJEE E BUTTERFIELD [21], em 1981 tornando-se, assim, um método de análise muito popular na comunidade da engenharia.

Em 1978, BREBBIA [20], já citado, fez uma generalização do Método dos Elementos de Contorno, apresentando uma formulação onde as relações de integrais podiam ser obtidas a partir

da técnica dos resíduos ponderados. Desta forma, tornou-se fácil relacionar e combinar o método dos elementos de contorno com outras técnicas numéricas, como o método dos elementos finitos.

Todas estas publicações foram cruciais para fundamentar e demonstrar que o método dos elementos de contorno é uma técnica numérica de aproximação de grande força e precisão. Assim, estabeleceu-se firmemente como uma importante alternativa técnica predominante dos métodos numéricos para análise na mecânica dos sólidos. O método dos elementos de contorno é aplicado para obter soluções para um grande leque de problemas físicos. Como já foram citados nos vários trabalhos neste capítulo, problemas que contém funções de potenciais, tais como propagação de temperatura, movimento de fluxo, eletrostáticos e muitos outros. Também, para problemas elastostáticos.

Elementos estruturais tipo placas tornaram-se cada vez mais utilizados e importantes na engenharia. Estes elementos têm sido tratados pelo método dos elementos de contorno com boa eficiência.

Foi em 1979 que trabalhos de STERN [22] e TOTTENHAN [23] deram início ao estudo intensivo das placas. Eles utilizaram a teoria clássica para seus estudos de placas.

COSTA E BREBBIA (1984 apud SIMÕES [24], 2001, p. 5) empregaram o método direto na formulação desenvolvida para resolver problemas de placas tais como: flexão, flexão em base elástica, vibração e flambagem.

Em 2000, PALERMO JR [25], apresentou trabalho sobre a análise elástica de placas, onde houve uma conexão nas formulações do método dos elementos de contorno entre a teoria clássica e a de Mindlin.

O estudo de placas segundo a teoria clássica, levando em consideração a não linearidade geométrica foi apresentado no trabalho de SIMÕES [24], em 2001. Neste trabalho foram feitas

análises para diferentes condições de contorno, inclusive na obtenção das frequências naturais das placas usando a teoria das vibrações livres.

No campo da mecânica da fratura, vários trabalhos foram apresentados com a aplicação do método dos elementos de contorno.

CRUSE e VAN BUREN (1969, apud FIGUEIREDO E ALMEIDA [26], 2003, p. 6) demonstrou análise de trinca por modelo de trinca elíptica. Porém, esta análise foi considerada pobre porque ocasionou erros.

BLANDFORD *et al* (1981 apud FIGUEIREDO E ALMEIDA [26], 2003, p. 6), apresentou um método aplicável para presença de duas superfícies de trincas coplanares.

Em 1992, o método dos elementos de contorno dual foi desenvolvido por PORTELA, ALIABADI e ROOKE [27] para problemas de corpos com trincas bidimensionais.

No caso de corpos com trinca tridimensionais, podem ser citados os trabalhos de MI e ALIABADI [28], em 1992.

WATSON (1995 apud FIGUEIREDO E ALMEIDA [26], 2003, p.7) apresentou estudo da aplicação direta do método dos elementos de contorno aplicado a problemas de fraturas no estado de deformação.

Recentemente uma alternativa de aplicação do método dos elementos de contorno no tratamento das equações integrais de contorno tem sido difundida e muito estudada por vários pesquisadores, como o já citado trabalho de KANE [2] e o trabalho de BONNET [29], em 1999. Trata-se da regularização indireta das equações integrais de contorno singulares e hipersingulares, onde se evita o desenvolvimento de integrais analíticas no elemento que contém o ponto de colocação, incluindo àquelas no sentido do valor principal de Cauchy.

3 – ELASTICIDADE LINEAR

3.1 - Introdução

Este capítulo trata, de forma resumida, a teoria da elasticidade como suporte para o estudo proposto da técnica dos elementos de contorno.

No início do capítulo serão apresentadas as equações básicas da elastostática linear, usadas na formulação das integrais de contorno, as quais são escritas a partir da teoria da aproximação, apresentada com detalhes em BREBBIA et al.,[30]. Nos tópicos seguintes serão discutidos os estados planos de tensão e de deformação. O capítulo será encerrado com o tópico sobre o estudo da solução fundamental a partir do vetor de Galerkin, conforme BECKER [31].

3.2 - Equações básicas da Elastostática Linear – Hipóteses básicas

A grande maioria dos materiais usados na engenharia possui, até um certo grau, as propriedades da elasticidade. O estudo da mecânica dos sólidos baseia-se na aplicação de forças sobre o corpo e nas deformações resultantes desta aplicação. Se tais deformações não excedem um certo limite, as deformações desaparecem quando as forças cessarem de atuar, assim, pode-se classificar tal comportamento como elástico.

Para o estudo proposto neste trabalho são consideradas as seguintes hipóteses básicas:

- O material que constitui o corpo elástico é homogêneo em todo seu volume e isotrópico, ou seja, as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções;
- É válida a geometria de pequenos deslocamentos;
- O estado deformado do corpo não é levado em consideração. Assim, equação de equilíbrio pode ser escrita em função do estado indeformado.

3.3 – Tensões e equilíbrio do corpo sob forças aplicadas

As forças aplicadas sobre um corpo são classificadas em dois grupos, conforme apresentado em TIMOSHENKO [32]:

- Forças de superfície. São forças distribuídas sobre a superfície do corpo, tais como pressão de um corpo sobre outro ou pressão hidrostática.
- Forças de volume. São forças distribuídas pelo volume de um corpo, como, por exemplo, forças gravitacionais, forças de inércia.

O equilíbrio das forças atuantes em um corpo é ilustrado pelos dois elementos cúbicos infinitesimais representados pelas figuras 3.1 e 3.2. Na figura 3.1 é analisado o equilíbrio das forças de superfície, ou seja, das tensões nas faces do elemento. Para esta análise é utilizada uma equação em série de Taylor, a qual foi representado apenas pelo primeiro termo da série em (3.1) (ver KANE [2]).

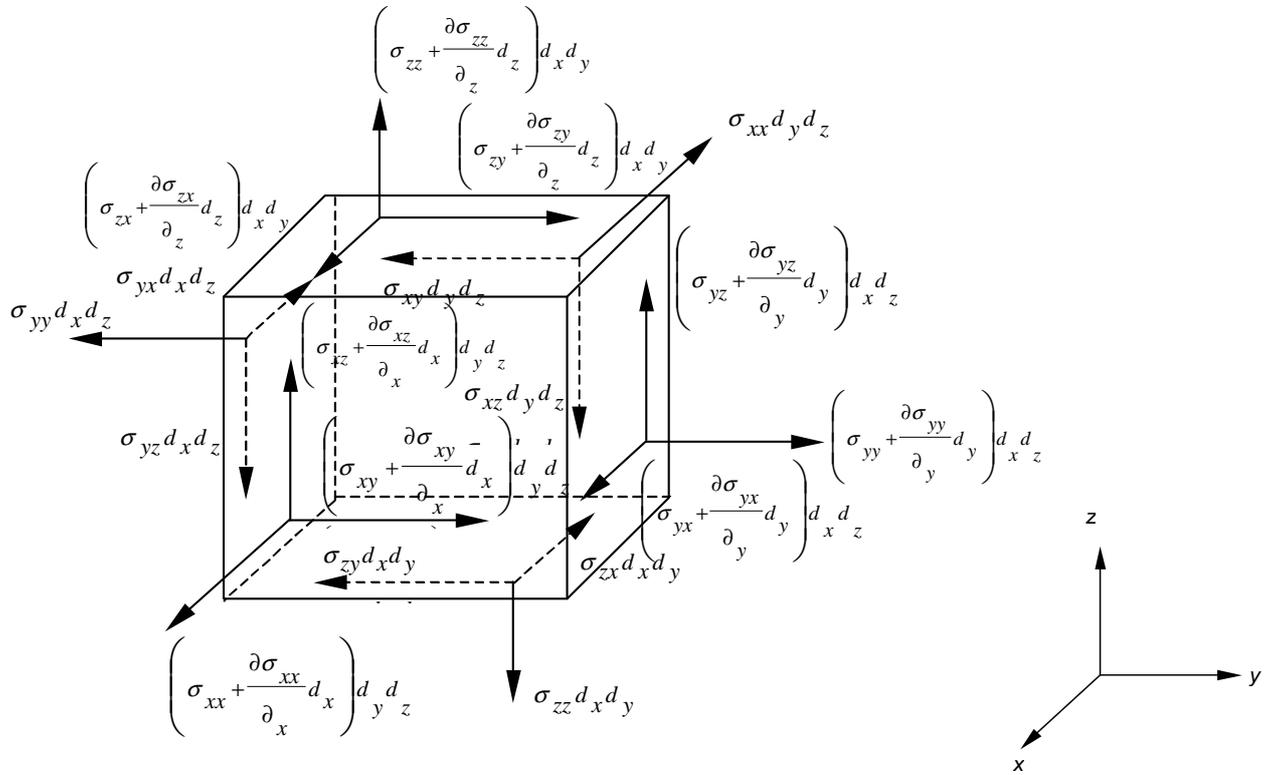


Figura 3.1 – Elemento infinitesimal sob ação de forças de superfície.

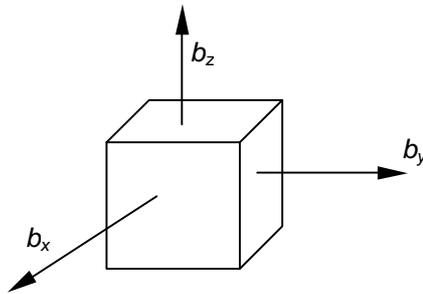


Figura 3.2 – Elemento infinitesimal sob ação de forças de volume.

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_1 = & -\sigma_{xx} dy dz - \sigma_{yx} dx dz - \sigma_{zx} dx dy + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dy dz + \left(\sigma_{yz} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dy\right) dx dz + \\
 & + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy + b_x dx dy dz = 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Partindo do tensor de tensões:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Por equilíbrio de momentos, as componentes de cisalhamento nas faces perpendiculares são iguais:

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} ; \sigma_{zx} = \sigma_{xz} ; \sigma_{zy} = \sigma_{yz}$$

Pode-se escrever, a partir do equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

A equação (3.3) é conhecida como equação de equilíbrio e pode ser escrita de forma indicial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (3.4)$$

onde i e j variam de 1 a 3.

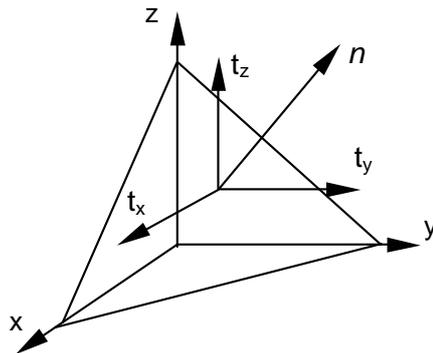
As componentes do tensor de tensões são projetados em um contorno diferencial $d\Gamma$ do elemento da figura (3.3) e produz forças de superfície ou trações t_i , onde são relacionadas por meio dos cossenos diretores da componente normal, n_i , em relação aos eixos x, y e z, da seguinte forma (BREBBIA and DOMINGUES [1]):

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z \\ t_y &= \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z \\ t_z &= \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ou em forma indicial:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.6)$$

Onde i e j variam de 1 a 3.



Figuras 3.3 – Componentes da força superficial na face de um elemento infinitesimal.

3.4 – Deformação

O corpo da figura (3.4), sob ação de carregamento, tem a posição de seus pontos deslocados da forma original, ou seja, pode ser dizer que o corpo deforma-se.

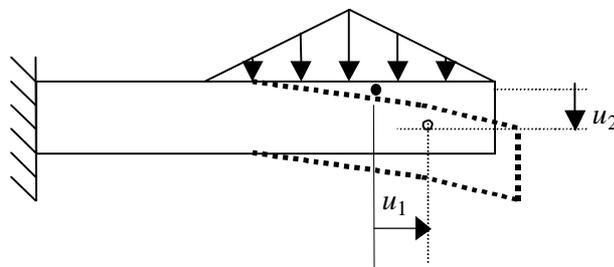


Figura 3.4 – Representação do comportamento de um objeto sólido na sua forma original e deformada.

O deslocamento dos pontos do corpo são representados pelo vetor deslocamento u_i e a distância entre as posição original e a nova posição após a deformação é descrita pela expressão diferencial em relação as coordenadas x_i :

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 = u_{i,j} dx_j \quad (3.7)$$

Dentro do corpo pode-se imaginar uma linha infinitesimal, representada na figura (3.5), que vai, originalmente, do ponto A , de coordenada x_i , ao ponto B , de coordenada $x_i + dx_i$. Após a deformação, o novo comprimento da linha é representado pela distância do ponto A^* , de coordenada $x_i + u_i$, ao ponto B^* , de coordenada $(x_i + dx_i) + (u_i + du_i)$.

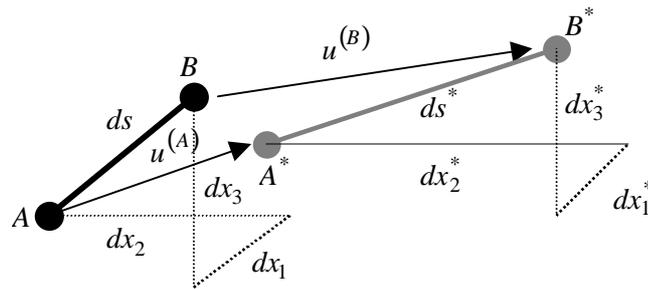


Figura 3.5 – Deformação da linha infinitesimal do elemento sólido.

As componentes e comprimentos da linha infinitesimal, antes e depois da deformação, podem ser escritos pelas seguintes relações:

$$x_i^* = x_i + u_i \quad (3.8)$$

$$dx_i^* = dx_i + du_i = dx_i + u_{i,j} dx_j = \delta_{ij} dx_j + u_{i,j} dx_j = (\delta_{ij} + u_{i,j}) dx_j \quad (3.9)$$

e

$$ds^2 = dx_i dx_i \quad (3.10)$$

$$(ds^*)^2 = dx_i^* dx_i^* = (\delta_{ij} + u_{i,j}) dx_j (\delta_{ik} + u_{i,k}) dx_k \quad (3.11)$$

Sendo δ_{ij} o delta de Kronecker, que possui os seguintes valores:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

A razão do estudo do comprimento da linha infinitesimal, antes e depois da deformação, importante para mecânica dos sólidos, é prover as informações necessárias para computar as deformações do corpo. Para determinar o campo de deformação de um corpo, pode-se considerar a diferença entre quadrados dos comprimentos da linha infinitesimal, demonstrados na figura (3.5). A razão do uso dos quadrados dos comprimentos é livrar-se do incômodo da raiz quadrada. Assim, pode-se escrever (ver KANE [2]):

$$\begin{aligned} (ds^*)^2 - ds^2 &= (\delta_{ij} + u_{i,j})(\delta_{ik} + u_{i,k})dx_j dx_k - dx_i dx_i \\ (ds^*)^2 - ds^2 &= (\delta_{ij} + u_{i,j})(\delta_{ik} + u_{i,k})dx_j dx_k - \delta_{ij} dx_i dx_j \\ (ds^*)^2 - ds^2 &= \delta_{ij} \{ (\delta_{ik} + u_{i,k})(\delta_{jl} + u_{j,l})dx_k dx_l - dx_i dx_j \} \\ (ds^*)^2 - ds^2 &= \delta_{ij} \{ \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ik} u_{j,l} + \delta_{jl} u_{i,k} + u_{i,k} u_{j,l} \} dx_k dx_l - dx_i dx_j \end{aligned} \quad (3.12)$$

Mas

$$\begin{aligned} \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} dx_k dx_l &= \delta_{jk} \delta_{jl} dx_k dx_l = \delta_{kl} dx_k dx_l = dx_A dx_A \\ \delta_{ij} \delta_{ik} u_{j,l} dx_k dx_l &= \delta_{jk} u_{j,l} dx_k dx_l = u_{k,l} dx_k dx_l \\ \delta_{ij} \delta_{jl} u_{i,k} dx_k dx_l &= \delta_{il} u_{i,k} dx_k dx_l = u_{l,k} dx_k dx_l \\ \delta_{ij} u_{i,k} u_{j,l} dx_k dx_l &= u_{j,k} u_{j,l} dx_k dx_l \\ - \delta_{ij} dx_i dx_j &= -dx_A dx_A \end{aligned} \quad (3.13)$$

e

$$(ds^*)^2 - ds^2 = 2 \varepsilon_{ij} dx_i dx_j \quad (3.14)$$

onde

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \{ u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} \} \quad (3.15)$$

A equação (3.15) é conhecida como tensor de deformação.

Com a hipótese anterior, quando considera pequenas deformações, pode-se desprezar o termo do produto presente na equação (3.15), ou seja:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \{ u_{i,j} + u_{j,i} \} \quad (3.16)$$

3.5 – Relações Constitutivas

As tensões e deformações de um corpo podem ser relacionadas pelas equações constitutivas.

As relações tensão-deformação elásticas lineares isotrópicas são uma ótima aproximação para o comportamento da grande maioria dos materiais presentes na engenharia. Um sólido elástico é definido como um corpo que se deforma quando submetido a tensões e, quando estas tensões são removidas, as deformações cessam.

A equação linear que relaciona as componentes de tensão e de deformação para um material elástico de Cauchy é conhecida como Lei de Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (3.17)$$

Onde C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem de 81 constantes, como pode-se ver em CHEN [33]. Sendo σ_{ij} e e_{kl} simétrico, tem-se as seguintes condições:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (3.18)$$

Assim, o número máximo de constantes independentes é reduzido a 36. Para o material elástico de Green, a existência da função densidade energia de deformação permite que sejam considerado os pares $C_{(ij)(kl)}$. Assim, vale a relação:

$$C_{(ij)(kl)} = C_{(kl)(ij)} \quad (3.19)$$

Este fato leva a redução do número de constantes de 36 para 21.

Considerando, agora, um plano de simetria elástica, o número das constantes é reduzido para 13. Se há um segundo plano de simetria elástica ortogonal ao primeiro, então as constantes necessárias serão reduzidas a 9. Para um material transversalmente isotrópico, pode-se reduzir o número de constantes necessárias para 5. Finalmente, ao considerar um sólido cujas propriedades elásticas são independentes da direção, as constantes necessárias serão apenas 2.

O tensor de quarta ordem C_{ijkl} , para materiais elásticos isotrópicos, pode ser escrito como:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.20)$$

Onde λ , μ são constantes escalares independentes.

Das equações (3.17) e (3.20) tem-se:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} e_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) e_{kl} \quad (3.21)$$

Sendo a relação:

$$\delta_{kl} e_{kl} = e_{kk} \quad (3.22)$$

Pode-se, finalmente, escrever a equação tensão-deformação da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (3.23)$$

Onde as duas constantes independentes, λ e μ são conhecidas como constantes de Lamé e podem ser relacionadas com o módulo de elasticidade E , o coeficiente de Poisson ν e o módulo transversal G , valendo para materiais isotrópicos, as seguintes relações (ver KANE [2] e CHEN [33]):

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (3.24)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (3.25)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad (3.26)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.27)$$

A partir das relações (3.24) a (3.27) pode-se substituir na equação (3.23), ficando:

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E \delta_{ij} e_{kk}}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E e_{ij}}{(1+\nu)} \quad (3.28)$$

Sabendo que:

$$\sigma_{kk} = \lambda \delta_{kk} e_{mm} + 2\mu e_{kk} \quad (3.29)$$

onde $\delta_{kk} = 3$, vem:

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu) e_{mm} \quad (3.30)$$

e

$$e_{mm} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \quad (3.31)$$

Substituindo a expressão (3.31) na equação (3.23), vem:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \left\{ \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \right\} + 2\mu e_{ij} \quad (3.32)$$

Ou, escrevendo as componentes da deformação em relação à tensão:

$$e_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda \delta_{ij} \sigma_{kk}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (3.33)$$

Sabendo que a relação deformação – deslocamento, definida na equação (3.16), é:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.34)$$

Substituindo a equação (3.34) na equação tensão-deformação (3.23), pode-se escrever a equação tensão – deslocamento como:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_{ij}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.35)$$

Substituindo a equação tensão – deformação (3.23) na equação de equilíbrio (3.4), tem-se:

$$\left(\lambda \delta_{ij} e_{mm} + 2\mu e_{ij} \right)_{,j} + b_i = 0 \quad (3.36)$$

E substituindo a equação deformação – deslocamento (3.34) na equação (3.36), vem:

$$\lambda \frac{1}{2}(u_{k,k} + u_{k,k})_{,j} + 2\mu \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + b_i = 0 \quad (3.37)$$

Reorganizando a equação (3.37), vem:

$$\lambda(u_{j,j})_{,i} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + b_i = 0 \quad (3.38)$$

Separando os termos:

$$\lambda(u_{j,j})_{,i} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (3.39)$$

Da equação (3.39), vem:

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda)u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (3.40)$$

Como vale a expressão $E = 2\mu(1 + \nu)$, e substituindo na equação (3.26), tem-se:

$$\lambda = \frac{\nu 2\mu(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad (3.41)$$

Reorganizando a expressão (3.41)

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{(1 - 2\nu)} \quad (3.42)$$

Sendo:

$$\mu + \lambda = \frac{2\nu\mu}{1 - 2\nu} + \mu \quad (3.43)$$

Vem:

$$\mu + \lambda = \frac{2\nu\mu + \mu(1 - 2\nu)}{(1 - 2\nu)} = \frac{2\nu\mu + \mu - 2\nu\mu}{(1 - 2\nu)} = \frac{\mu}{1 - 2\nu} \quad (3.44)$$

Substituindo a expressão (3.44) em (3.40), vem:

$$\mu u_{i,jj} + \frac{\mu}{(1 - 2\nu)} u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (3.45)$$

Isolando μ e passando o termo b_i para o lado direito da equação (3.45), pode-se escrever, em notação indicial:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left(\frac{1}{1-2\nu} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{b_i}{\mu} \quad (3.46)$$

A equação diferencial de deslocamento acima (3.46) é chamada de equação de Navier.

3.6 – Estado Plano de Tensão

Seja, por exemplo, uma chapa fina carregada por forças de tração t , paralelas ao plano da chapa e distribuídas uniformemente ao longo da espessura.

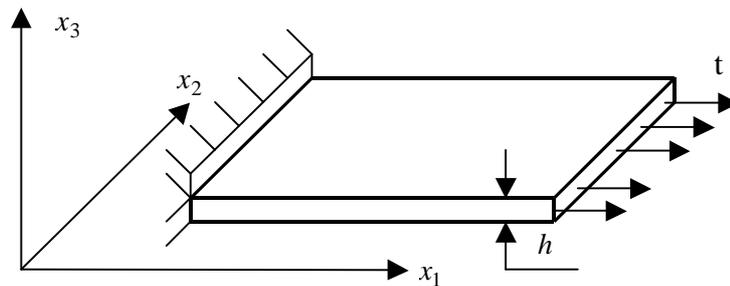


Figura 3.6 – Chapa fina sob ação de forças de tração t paralelas a seu plano

As componentes de tensão σ_{13} , σ_{23} e σ_{33} são nulas em ambas as faces da chapa e pode-se admitir, em princípio, que são nulas também no interior da chapa. O estado de tensão é então especificado somente por σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} , sendo que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Este estado é denominado estado plano de tensão. Pode-se admitir que, por aproximação, as três componentes são independentes do eixo 3, ou seja, elas não variam ao longo da espessura h .

As componentes que definem o estado plano de tensão são funções apenas dos eixos x_1 e x_2 , conforme figura 3.6, (TIMOSHENKO [32]).

No estado plano de tensão o objeto é livre para contrair ou expandir na direção de x_3 . Como todos os componentes do tensor de tensão na direção x_3 são zero, pode-se escrever (KANE [2]):

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{kk} \quad (3.47)$$

Sendo $\sigma_{33} = 0$, vem:

$$0 = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{33} \quad (3.48)$$

$$0 = \lambda(e_{11} + e_{22}) + (\lambda + 2\mu)e_{33} \quad (3.49)$$

ou

$$e_{33} = \frac{-\lambda}{(\lambda + 2\mu)}(e_{11} + e_{22}) \quad (3.50)$$

Substituindo a equação acima (3.50) na equação (3.47), vem:

$$\sigma_{11} = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{11} = \lambda(e_{11} + e_{22}) + \lambda \frac{-\lambda}{(\lambda + 2\mu)}(e_{11} + e_{22}) + 2\mu e_{11} \quad (3.51)$$

Reorganizando a equação (3.51), tem-se:

$$\sigma_{11} = \lambda \left(1 + \frac{-\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \right) e_{kk} + 2\mu e_{11} = \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} (\lambda + 2\mu - \lambda) e_{kk} + 2\mu e_{11} \quad (3.52)$$

Finalmente pode-se escrever:

$$\sigma_{11} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} e_{kk} + 2\mu e_{11} \quad (3.53)$$

Repetindo o processo para $i = j = 2$, tem-se:

$$\sigma_{22} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} e_{kk} + 2\mu e_{22} \quad (3.54)$$

e

$$\sigma_{12} = 2\mu e_{12} \quad (3.55)$$

Assim, pode-se finalmente escrever:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (3.56)$$

Onde $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$.

3.7 – Estado Plano de Deformação.

Considera-se agora uma situação onde a dimensão de um corpo na direção x_3 seja muito grande. Se um corpo longo cilíndrico ou prismático é solicitado por forças que são perpendiculares aos elementos longitudinais e não variam ao longo do comprimento, pode-se admitir que todas as seções transversais estão nas mesmas condições. Pode-se, também, supor que as seções extremas são confinadas entre planos rígidos fixos sem atrito, de tal forma que o deslocamento na direção axial é impedido. Assim, levando em conta que não exista deslocamento axial nas extremidades e, por simetria, na seção central, pode-se admitir que o mesmo ocorre em todas as seções transversais. Muitos problemas deste tipo são encontrados na engenharia, como por exemplo, muros de arrimos com pressão lateral, túneis, etc. Considerando que os carregamentos nestes casos não variam e, assim, levando em conta que as condições são as mesmas para todas as seções transversais, pode-se considerar que apenas uma fatia entre as duas seções que distam uma unidade entre si será o suficiente para estudar o caso. As componente de deslocamento u_1 e u_2 são funções dos eixos x_1 e x_2 , mas são independentes da coordenada longitudinal x_3 . Se a componente de deslocamento longitudinal u_3 for nula, tem-se (TIMOSHENKO [32]):

$$\begin{aligned}e_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \\e_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \\e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0\end{aligned}\tag{3.57}$$

Partindo da equação (3.48), a tensão normal σ_{33} terá o seguinte valor:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\tag{3.58}$$

ou

$$\sigma_{33} = \lambda(e_{11} + e_{22})\tag{3.59}$$

As relações do estado plano de tensão podem ser obtidas a partir das relações do estado plano de deformação quando é considerada a seguinte relação:

$$\nu' = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (3.60)$$

3.8 – Vetor de Galerkin

As equações de Navier são de difícil solução analítica devido ao acoplamento dos termos das equações. Existem muitos métodos por aproximações para desacoplar as equações de Navier. Geralmente o desacoplamento é acompanhado por substituições estratégicas de algumas funções por componentes de deslocamento ou tensão, a componente do deslocamento u_i é substituída na equação (3.46) por uma expressão envolvendo um outro vetor g de derivadas de segunda ordem chamado de vetor Galerkin (KANE [2] e BECKER [31]). Seja a relação:

$$2\mu u_i = c \cdot g_{i,jj} - g_{j,ji} \quad (3.61)$$

Substituindo na equação (3.46):

$$\left(\frac{c}{2} g_{i,kk} - \frac{1}{2} g_{k,ki} \right)_{,jj} + \frac{1}{(1-2\nu)} \left(\frac{c}{2} g_{j,kk} - \frac{1}{2} g_{k,kj} \right)_{,ji} + b_i = 0 \quad (3.62)$$

Organizando a equação (3.62), vem:

$$\frac{c}{2} g_{i,kkjj} + g_{k,kjji} \left(-\frac{1}{2} + \frac{c}{2(1-2\nu)} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \right) + b_i = 0 \quad (3.63)$$

Sabendo-se que $g_{k,kijj} = g_{j,kkji} = g_{k,kjji}$, a constante c pode ser agora determinada fazendo a quantidade dentro do parênteses na equação (3.63) se igualar a zero.

$$-\frac{1}{2} + \frac{c}{2(1-2\nu)} - \frac{1}{2(1-2\nu)} = 0 \quad (3.64)$$

ou

$$\frac{1}{2} \left(\frac{c-1}{1-2\nu} - 1 \right) = 0 \quad (3.65)$$

Da equação (3.65), pode-se escrever, após deduções matemáticas:

$$c - 1 = 1 - 2\nu$$

$$c = 2(1 - \nu)$$

Logo:

$$2u_i = 2(1 - \nu)g_{i,jj} - g_{j,ji} \quad (3.66)$$

Organizando os termos da equação, chega-se:

$$u_i = g_{i,jj} - \frac{g_{j,ji}}{2(1 - \nu)} \quad (3.67)$$

Com este valor particular usado para a constante c , as equações de Navier (3.46) em termos do vetor Galerkin vêm a ser (KANE [2]):

$$g_{i,kkji} + \frac{b_i}{\mu} = 0 \quad (3.68)$$

Na forma vetorial:

$$\nabla^2(\nabla^2 g) + \frac{b}{\mu} = 0 \quad (3.69)$$

O operador mostrado nesta equação é chamado de operador biharmônico, quando as forças de corpo são iguais a zero na equação (3.69) é chamada de equação biharmônica (KANE [2]).

3.9 – Solução Fundamental

Solução fundamental é a solução que satisfaz as equações de Navier (3.46). Como demonstrado no item 3.8, nas equações de Navier, o vetor de deslocamentos u_i pode ser expresso em termos de um outro vetor (Galerkin).

$$u_i = \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.70)$$

onde o vetor G_i é o vetor de Galerkin.

A substituição dos valores dos deslocamentos por suas relações com o vetor de Galerkin na equação de Navier (3.46) transforma as equações diferenciais para àquelas do tipo biharmônica, que podem ser solucionadas analiticamente com maior facilidade, assim:

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 G - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla(\nabla G) \right) + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \left\{ \nabla \left(\nabla^2 G - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla(\nabla G) \right) \right\} = -\frac{b_i}{\mu} \quad (3.71)$$

Organizando a equação (3.71), tem-se:

$$\nabla^4 G - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla^4 G + \frac{1}{1-2\nu} \nabla^2 \left(\nabla^2 G - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla^2 G \right) = -\frac{b_i}{\mu}$$

$$\nabla^4 G - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla^4 G + \frac{1}{1-2\nu} \nabla^4 G - \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla^4 G = -\frac{b_i}{\mu}$$

$$\nabla^4 G \left(1 - \frac{1}{2(1-\nu)} + \frac{1}{(1-2\nu)} - \frac{1}{(1-2\nu)2(1-\nu)} \right) = -\frac{b_i}{\mu}$$

$$\nabla^4 G(1) = -\frac{b_i}{\mu} \quad (3.72)$$

Finamente:

$$\nabla^2 (\nabla^2 G_i) = -\frac{b_i}{\mu} \quad (3.73)$$

A solução fundamental para a equação diferencial (3.73) é baseada na clássica solução tridimensional de uma força concentrada aplicada no interior de um domínio infinito, chamada solução de Kelvin. Assumindo uma força unitária aplicada em um ponto interno p , o objetivo é estudar o efeito desta força em um outro ponto Q , em qualquer local do domínio. Esta solução deve satisfazer as seguintes condições:

1 – As tensões devem desaparecer quando a distância entre os pontos p e Q tendem ao infinito.

2 – As tensões devem ser “singulares” no próprio ponto p , isto é, tendem ao infinito quando a distância entre p e Q tendem a zero.

Assim, pode-se obter a solução de Kelvin para a equação (3.73) da seguinte forma (BREBBIA et al., [30] e BANERJEE [34]):

$$b_i = \Delta^p f \quad (3.74)$$

Com $f = 1$

Onde Δ representa a função delta de Dirac, que pode ser definida como sendo uma forma matemática de representar o efeito no ponto Q , de coordenada x , devido a carga concentrada unitária aplicada no ponto interior p , de coordenada ξ . Assim, pode-se escrever que:

$$\Delta(x, \xi) = \begin{cases} \infty & \text{Quando } x = \xi \\ 0 & \text{Quando } x \neq \xi \end{cases} \quad (3.75)$$

O que pode ser representado graficamente pela figura (3.7):

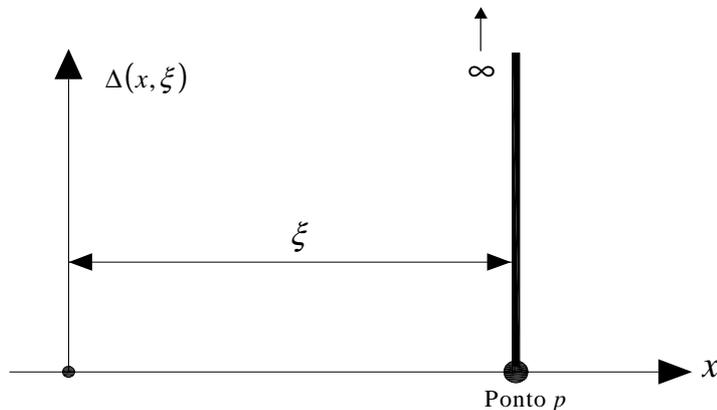


Figura 3.7 – Função delta de Dirac

A função delta de Dirac assume valor zero em todos os pontos em x , exceto quando é feito $x = \xi$, quando ocorre a singularidade. Assim, a função apresenta as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x, \xi) dx = 1 \quad (3.76)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Delta(x, \xi) dx = f(\xi) \quad (3.77)$$

Assim, a equação (3.73) pode ser escrita em termos da função delta de Dirac:

$$\nabla^2 (\nabla^2 G_i) = -\frac{1}{\mu} \Delta^p f \quad (3.78)$$

A solução para G_i é dada por:

$$G_i = G f \quad (3.79)$$

Pode-se verificar que o vetor de Galerkin, dado na equação a seguir (3.80), é a solução da equação (3.73) e satisfaz as condições 1 e 2 (BECKER [31]):

$$G = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} r(p, Q) \quad (3.80)$$

A função $r(p, Q)$ é a distância física entre os pontos p e Q .

Assim, substituindo a equação (3.80) na equação (3.70), pode-se obter a solução fundamental para o problema plano de tensão bi-dimensional em termos de deslocamentos, demonstrada com detalhes no trabalho de KANE [2]:

$$U_{ij}^*(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right] \quad (3.81)$$

Onde o índice i representa a direção de aplicação da carga concentrada unitária em um ponto qualquer no domínio e, o índice j representa a direção da resposta, devido à aplicação da carga unitária, em um outro ponto no domínio.

A partir das relações tensões – deformações (lei de Hooke):

$$e_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]$$

$$e_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})]$$

$$e_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})]$$

$$e_{12} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{12} \tag{3.82}$$

e derivando o vetor de deslocamento (3.81), pode-se obter a equação das forças de superfície:

$$P_{ij}^*(p, Q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left(\frac{\partial r(p, Q)}{\partial n} \right)_x \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right] + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left[\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} n_j \right] \tag{3.83}$$

Onde os índices i e j representam as direções já definidas na equação (3.81).

4 - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 - Introdução

Em um problema físico, cuja condição de vinculação e carregamento seja generalizada, muitas vezes devido a sua complexidade, a obtenção da solução analítica para as equações de Navier pode ser muito trabalhosa ou até mesmo impossível (KANE [2]).

A maioria dos métodos numéricos aplicados em problemas elastostáticos da engenharia tem por base algumas equações da mecânica e as relações constitutivas do material para descrever o comportamento de um corpo.

Os métodos numéricos podem ser divididos em técnicas de domínio e técnicas de contorno. As técnicas mais conhecidas são apresentadas, a seguir, de maneira bastante sucinta (BECKER [31]). Nas técnicas de domínio, o método das diferenças finitas (MDF) é o mais antigo e simples e consiste em escrever as derivadas que governam as equações diferenciais em termos de equações de diferenças. Assim, para um domínio bi-dimensional, é introduzida uma grade de “células” internas ao domínio e as derivadas da função procurada são substituídas por diferenças de valores dessa função nos pontos internos. Isto resulta em um sistema linear de equações o qual fornece uma solução única desde que as condições do problema em estudo sejam satisfeitas.

Um das principais desvantagens deste método nos problemas de engenharia é não ser adequado para problemas de geometria irregular.

O método dos elementos finitos (MEF) é outra técnica de domínio, onde o domínio é dividido em pequenos segmentos finitos, o que justifica o nome “Elementos Finitos”. Sobre cada elemento, o seu comportamento é descrito por equações diferenciais. Todos estes pequenos elementos estão ligados entre si e todos os requisitos de continuidade e equilíbrio estão satisfeitos entre as ligações de um elemento com seu vizinho. Da mesma maneira que ocorre no método MDF, desde que as condições de contorno do elemento estejam satisfeitas, uma única solução será obtida de um sistema linear de equações.

Praticamente todos os problemas de engenharia com geometria complexa podem ser resolvidos pelo método MEF. Para obter uma boa precisão nos resultados é necessário o uso de um grande número de elementos finitos.

Na técnica de contorno tem-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e será apresentado neste capítulo.

As equações diferenciais que governam o comportamento do problema são transformadas em equações integrais, as quais são numericamente integradas sobre o contorno de um elemento (BREBBIA et al., [30]).

O MEC pode ser facilmente aplicado em contornos de complexa geometria, onde o contorno do corpo em estudo é dividido em pequenos segmentos chamado elementos de contorno.

A formulação do MEC pode ser tratada por meio de técnicas, tais como resíduos ponderados, apresentado com detalhes em BREBBIA [20]:

$$\int_{\Omega} R \psi_i d\Omega = 0 \quad (4.1)$$

Onde R é o erro distribuído no domínio Ω multiplicado por uma função peso ψ .

Neste trabalho, porém, será apresentado o teorema da reciprocidade de Betti, além de ter notações semelhantes às aquelas usadas em problemas de engenharia, este teorema consiste, principalmente, em transformar equações diferenciais de domínio em equações integrais de superfície. Como nos outros métodos de aproximação numérica, desde que sejam satisfeitas as condições de contorno, uma solução única é obtida de um sistema linear de equações.

4.2 - Equações Integrais da Elastostática e o Teorema de Green

O teorema de Green, também conhecido como teorema da divergência, permite transformar uma integral de volume em uma integral de superfície (ou contorno).

$$\int_{\Omega} \nabla f \, d\Omega = \oint_{\Gamma} f \, n \, d\Gamma \quad (4.2)$$

Onde f é uma função qualquer, que tem derivadas de primeira ordem com relação às coordenadas cartesianas x , y , e z . “ n ” é o vetor unitário normal a superfície de contorno.

Usualmente aplica-se a segunda identidade de Green, que relaciona duas variáveis de domínio, ϕ e ψ , com derivadas de primeira e segunda ordem em relação ao contorno denominado Γ .

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \, d\Gamma \quad (4.3)$$

Onde $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada das funções em direção do vetor normal. A segunda identidade de Green é geralmente aplicada para formulação do problema potencial.

A equação de equilíbrio de tensões, na forma indicial, pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} + F_i = 0 \quad (4.4)$$

A equação (4.4) é aplicada na solução de problemas de engenharia relacionados a elastostática e é tratada aplicando-se o teorema de Betti ou teorema da reciprocidade. Este teorema estabelece que, para um corpo em equilíbrio sujeito a dois estados (sejam 1 e 2) de tensão e deformação diferentes, onde podem ser representados por $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\varepsilon^{(1)}$ e $\varepsilon^{(2)}$, o trabalho realizado pelas tensões do estado 1 nos deslocamentos do estado 2 é igual ao trabalho realizado pelas tensões do estado 2 nos deslocamentos do estado 1, assim:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (4.5)$$

Para efeito de notação, o estado 1 foi representado pelo símbolo * e o estado 2 foi suprimido o índice.

Escrevendo o teorema de Betti em termos dos deslocamentos:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega \quad (4.6)$$

Aplicando a regra da cadeia no primeiro elemento:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i^*) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i^* \right] d\Omega \quad (4.7)$$

Separando o segundo termo em duas integrais:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i^*) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i^* d\Omega \quad (4.8)$$

Utilizando a equação de equilíbrio em termos da força de domínio e aplicando-a no último termo do lado direito da expressão:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i^*) d\Omega + \int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega \quad (4.9)$$

Aplicando o teorema da divergência no primeiro termo do lado direito chega-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i^*) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega \quad (4.10)$$

A relação (3.6) dada no capítulo 3 pode ser substituída na equação (4.10), ou seja:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Gamma} P_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega \quad (4.11)$$

Adotando o mesmo procedimento para o segundo termo da equação (4.6) chega-se a:

$$\int_{\Gamma} P_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} F_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} P_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} F_i^* u_i d\Omega \quad (4.12)$$

Se tomar o segundo termo do lado direito da equação (4.10) e considerar que F^* é uma perturbação singular, ou seja, utilizando o conceito do delta de Dirac, conforme foi exposto em capítulo 3, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} F_1^* u_1 d\Omega = u_1 \quad (4.13)$$

Chega-se a:

$$U_{ij}(x_0) = -\int_{\Gamma} P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} p_j(X) U_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X) + \int_{\Omega} F_j(X) U_{ij}^*(X, x_0) d\Omega \quad (4.14)$$

A equação (4.14) é conhecida como identidade de Somigliana, onde x_0 é o ponto origem onde se está calculando o deslocamento. Este ponto é conhecido como ponto fonte e X , na equação, representa o ponto no contorno, conhecido como ponto campo, conforme demonstrados na figura (4.1), sendo r a distância entre os pontos fonte e campo.

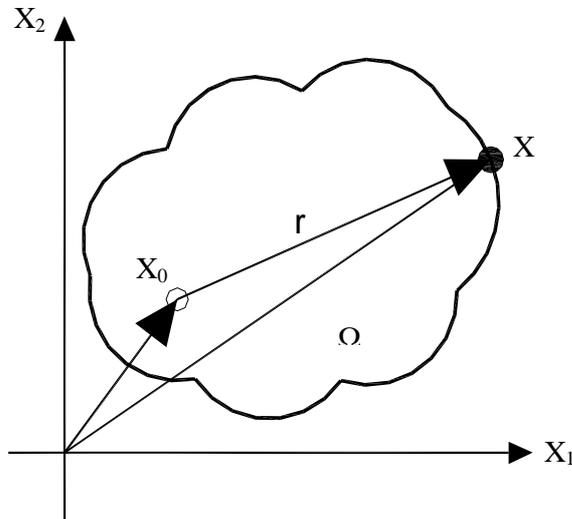


Figura 4.1 – Representação dos pontos fonte x_0 e campo X .

Com a equação de Somigliana, pode-se escrever o deslocamento de um ponto interno no domínio, em função dos deslocamentos e forças do contorno.

Se acrescentar ao contorno uma pequena região circular de raio ε , com seu centro em x_0 , pode-se escrever a equação integral para deslocamentos em pontos de contorno, ou seja, é um artifício onde a equação integral passa a relacionar apenas pontos de contorno:

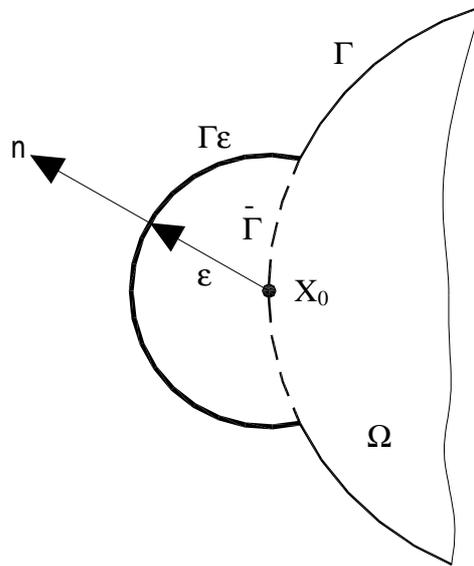


Figura 4.2 – Acréscimo de um contorno infinitesimal Γ_ε ao contorno Γ de domínio Ω .

Considerando que o acréscimo no domínio é de contorno suave, o raio arbitrário ε é feito tender a zero ($\varepsilon \rightarrow 0$), então pode-se reescrever a equação (4.14), levando em conta a subtração do contorno original a parcela $\bar{\Gamma}$ e adicionando o contorno Γ_ε , chega-se:

$$\begin{aligned}
 u_i(x_0) = & - \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X) + \\
 & \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} P_j(X) u_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma_\varepsilon} P_j(X) u_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X) + \\
 & \int_{\Omega} F_j(X) u_{ij}^*(X, x_0) d\Omega + \int_{\Omega_\varepsilon} F_j(X) u_{ij}^*(X, x_0) d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Os termos da equação (4.15) em função de Γ_ε representam a integração da superfície da região acrescida no contorno. A divisão da equação em duas integrais de superfície, fazendo a

superfície ao redor da singularidade tendendo a zero, resulta em uma equação integral regular e outra singular, chamada de integral no sentido do valor principal de Cauchy (KANE [2] e BANERJEE [34]).

Considerando que não há forças de volume e passando os dois primeiros termos do lado direito para o lado esquerdo na equação (4.15), pode-se escrever:

$$u_i(x_0) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} P_j(X) u_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma_\varepsilon} P_j(X) u_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X) \quad (4.16)$$

Sabendo que a solução fundamental (3.73) e sua derivada (3.75), demonstradas no capítulo 3 são:

$$U_{ij}^*(X, x_0) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(X, x_0)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_j} \right\}$$

$$P_{ij}^*(X, x_0) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(X, x_0)} \left(\frac{\partial r(X, x_0)}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_i} \frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_j} \right] + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(X, x_0)} \left[\frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_j} n_i \frac{\partial r(X, x_0)}{\partial x_i} n_j \right]$$

A solução das integrais da equação (4.16) sobre o contorno Γ_ε é obtida da derivada da solução fundamental (3.75). Assim, resolvendo cada integral isoladamente, tem-se, para o segundo termo do lado esquerdo da equação (4.16):

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_0^\pi \left[\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left((1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) - \frac{\partial r}{\partial n} ((1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j) \right) \right] u_j d\Gamma \quad (4.17)$$

Devido o domínio adicional ser circular $dr(x) = r.d\theta$, a direção do raio ε coincide com a normal, portanto tem-se as seguintes condições:

a) $r_i n_j = r_j n_i = 0$

b) $\frac{\partial r}{\partial n} = 1$

Reescrevendo a equação (4.17):

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} P_{ij}^* u_j d\Gamma = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \int_0^{\pi} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] u_j r d\theta \quad (4.18)$$

Onde se pode cancelar a variável r, assim:

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} P_{ij}^* u_j d\Gamma = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^{\pi} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] u_j d\theta \quad (4.19)$$

Para tratar o lado direito da expressão acima, primeiro fazem-se os índices do lado direito iguais, assim:

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} P_{ij}^* u_j d\Gamma = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^{\pi} [(1-2\nu) + 2r_i r_i] u_i d\theta \quad (4.20)$$

Em seguida, separa-se o lado direito em duas integrais, da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} P_{ij}^* u_j d\Gamma = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^{\pi} [(1-2\nu) u_i d\theta] + \int_0^{\pi} [2r_i (r_i u_i) d\theta] \quad (4.21)$$

Agora, fazendo o índice i variar de 1 a 2 na expressão $r_i u_i$ da equação (4.21), tem-se:

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} P_{ij}^* u_j d\Gamma = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^{\pi} [(1-2\nu) u_i d\theta] + \int_0^{\pi} [2r_i (r_1 u_1 + r_2 u_2) d\theta] \quad (4.22)$$

Em seguida é feito, primeiramente, $i = 1$:

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} P_{ij}^* u_j d\Gamma = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^{\pi} [(1-2\nu) u_1 d\theta] + \int_0^{\pi} [2r_1^2 u_1 + 2r_1 r_2 u_2) d\theta] \quad (4.23)$$

sendo:

$$2u_1 \int_0^{\pi} r_1^2 d\theta = 2u_1 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \text{sen } 2\theta \right]_0^{\pi} = u_1 \pi \quad (4.24)$$

e

$$2u_2 \int_0^{\pi} r_1 r_2 d\theta = 2u_2 \int_0^{\pi} \sin \theta \cos 2\theta d\theta = 2u_2 \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 0 \quad (4.25)$$

Substituindo estas definições (4.24) e (4.25) no lado direito da equação (4.23), pode-se escrever:

$$-\frac{1}{4\pi(1-\nu)} [(1-2\nu)\pi u_1 + u_1 \pi] = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} (\pi u_1(1-2\nu)+1) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} 2(1-\nu)u_1 = -\frac{1}{2}u_1 \quad (4.26)$$

Portanto, para $i=1$, tem-se:

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{E}}} P_{ij}^* u_j d\Gamma = -\frac{1}{2} u_1 \quad (4.27)$$

Para o caso de $i=2$, tem-se:

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{E}}} P_{ij}^* u_j d\Gamma = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^{\pi} [(1-2\nu) u_2 d\theta] + \int_0^{\pi} (2r_2 r_1 u_1 + 2r_2^2 u_2) d\theta \quad (4.28)$$

Lembrando que:

$$2u_2 \int_0^{\pi} r_1 r_2 d\theta = 0 \quad (4.29)$$

E que:

$$2u_2 \int_0^{\pi} r_2^2 d\theta = 2u_2 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = 0 \quad (4.30)$$

Substituindo as duas definições (4.29) e (4.30) na equação (4.28), chega-se a:

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{E}}} P_{ij}^* u_j d\Gamma = -\frac{1}{2} u_2 \quad (4.31)$$

Portanto, pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma_{\mathcal{E}}} P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma = -\frac{1}{2} u_i(x_0) \quad (4.32)$$

Aplicando a solução fundamental ao quarto termo da equação (4.16), tem-se:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_j u_{ij}^* d\Gamma = \left\{ \int_0^\pi \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [-(3-4\nu)\ln r \delta_{ij} + r_i r_j] \right\} P_j r d\theta \quad (4.33)$$

Fazendo i e j variar de 1 a 2 na equação (4.33) e separando a integral em duas partes, pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_j u_{ij}^* d\Gamma = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[\int_0^\pi -(3-4\nu)\ln r P_j r d\theta + \int_0^\pi r_i (r_1 P_1 + r_2 P_2) r d\theta \right] \quad (4.34)$$

Ao fazer “ r ” tender a zero na equação (4.34), a segunda integral do lado direito desta equação será zero, portanto:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} P_j u_{ij}^* d\Gamma = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[\int_0^\pi -(3-4\nu)\ln r P_j r d\theta \right] \quad (4.35)$$

Voltando a equação (4.16) e substituído os valores encontrados (4.32) e (4.35), pode-se escrever:

$$u_i(x_0) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X)] - \frac{1}{2} u(x_0) = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [P_j(X) u_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X)] + 0 \quad (4.36)$$

Fazendo as operações na equação (4.36), tem-se:

$$u_i(x_0) \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X)] = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} [P_j(X) u_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X)] \quad (4.37)$$

Levando para o contorno, ou seja, fazendo $r \rightarrow 0$, as integrais $\Gamma - \bar{\Gamma}$ são obtidas no sentido do valor principal de Cauchy, tem-se (KANE [2]):

$$\frac{1}{2} u_i(x_0) + \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X)] = \int_{\Gamma} [P_j(X) u_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X)] \quad (4.38)$$

Generalizando a equação, pode-se reescrever a identidade de Somigliana (4.14) da seguinte forma:

$$C_{ij} u_i(x_0) + \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X)] = \int_{\Gamma} [P_j(X) u_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X)] \quad (4.39)$$

Onde constante C_{ij} vale 1 quando o ponto fonte esta no domínio, quando o ponto fonte esta fora do domínio, vale 0 e quando o ponto esta no contorno e tem tangente contínua, ou seja, o contorno é suave, a constante C vale 1/2.

4.3 - Implementação Numérica

Para aplicação das equações integrais, que solucionam os problemas físicos, em um determinado contorno, faz-se necessário a divisão deste contorno em elementos (BECKER [31]).

Considerando um domínio arbitrário Ω de contorno Γ , conforme indicado na figura (4.3):

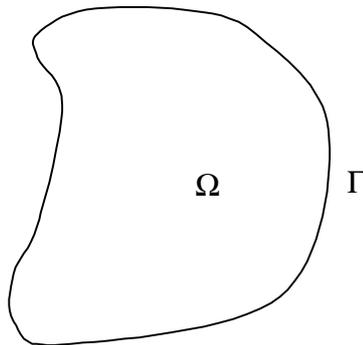


Figura 4.3 – Domínio arbitrário Ω de contorno Γ .

Dividindo o contorno em elementos:

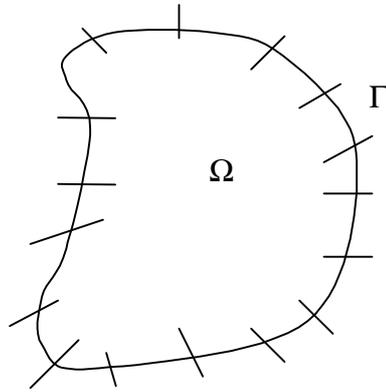


Figura 4.4 –Discretização do contorno.

A solução numérica do MEC consiste em dividir o contorno Γ em N trechos, aproximados por funções de interpolação. Estes trechos recebem o nome de elementos de contorno. A união dos pontos que ligam os trechos entre si é dada o nome nós.

Assumindo que se tem M (n° arbitrário) pontos nodais no contorno da figura (4.4), cada nó terão quatro variáveis: u_1 e u_2 para deslocamentos e p_1 e p_2 para forças de superfície, somando um total de $4M$ variáveis.

Para qualquer problema de solução única deve ter metade das variáveis prescritas em todos os pontos nodais, ou seja, em um nó particular, ou se deve ter ambos deslocamentos, ou ambas forças de superfície ou, ainda, uma componente de deslocamento e uma de força prescrita, isto é, valores conhecidos.

A estas condições de valores prescritos dá-se o nome de condições de contorno. Das $4M$ variáveis, $2M$ são incógnitas e, portanto, há necessidade de se ter $2M$ equações para solução do problema.

Para cada nó no contorno, associam-se 2 equações integrais, onde a carga unitária utilizada na solução fundamental é aplicada na direção 1 para primeira equação e na direção 2

para segunda equação em cada nó. Uma forma de se exemplificar seria considerar uma força devida a carga unitária, aplicada no nó 1. Usando a solução fundamental, pode-se determinar o deslocamento em todos os nós, desde do nó 1 até último nó N. Com isto, forma-se a primeira equação do sistema linear. Quando a força é colocada no nó 2, repete-se o processo, obtendo-se a segunda equação do sistema linear. A carga percorre todo contorno até o nó N, completado-se, assim, o sistema linear de equações. Assim, a equação (4.39) pode ser escrita em forma de somatório:

$$C_{ij} U_{ij}(x_0) + \sum_{K=1}^N \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X)] = \sum_{K=1}^N \int_{\Gamma} [p_j(X) U_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X)] \quad (4.40)$$

4.4 - Elemento de Contorno

Como já foi mencionado, para solução do domínio é necessária a divisão do contorno em trechos aproximados por funções interpoladoras denominadas funções de forma. Cada trecho, resultado da divisão do contorno, recebe o nome de elemento de contorno. Neste trabalho o elemento de contorno é isoparamétrico, ou seja, tanto sua geometria quanto os deslocamentos e forças do problema da elastostática, são descritas pela mesma função de forma.

A variação descrita para cada elemento pode ser: constante, linear, quadrática, cúbica ou de ordem superior.

Neste trabalho são apresentados exemplos com elementos isoparamétricos lineares e quadráticos. As formulações e as equações que definem os elementos lineares e os elementos quadráticos serão apresentadas paralelamente ao longo deste capítulo.

$$S = \varphi_i(\xi) S_i \quad (4.41)$$

A equação acima (4.41) é uma forma generalizada para qualquer elemento, onde S representa uma de suas variáveis, como por exemplo, deslocamento, força em um ponto ou mesmo as coordenadas de um ponto interno e φ representa as funções de forma.

Como forma de exemplificar pode-se considerar a geometria de um elemento qualquer, por exemplo, um elemento isoparamétrico quadrático, conforme figura abaixo.

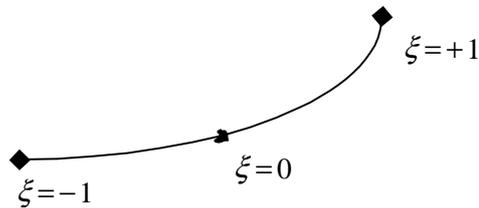


Figura 4.5 – Elemento quadrático

O elemento tem sua geometria definida pelas coordenadas de seus três nós, escritas em função das coordenadas locais ξ [31]:

$$X(\xi) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) X_i = \varphi_1(\xi) X_1 + \varphi_2(\xi) X_2 + \varphi_3(\xi) X_3 \quad (4.42)$$

$$Y(\xi) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) Y_i = \varphi_1(\xi) Y_1 + \varphi_2(\xi) Y_2 + \varphi_3(\xi) Y_3 \quad (4.43)$$

A variável intrínseca local ξ tem sua origem no nó médio do elemento e assume valores de -1 para o nó inicial e $+1$ para o nó final do elemento, ou seja, tem valores diferente de zero quando está nas extremidades do elemento. Como o elemento em estudo é isoparamétrico, podem-se escrever as equações, por exemplo, dos deslocamentos u para os eixos de coordenadas x e y :

$$u_x(\xi) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) u_{x_i} = \varphi_1(\xi) u_{x1} + \varphi_2(\xi) u_{x2} + \varphi_3(\xi) u_{x3} \quad (4.44)$$

$$u_y(\xi) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) u_{y_i} = \varphi_1(\xi) u_{y1} + \varphi_2(\xi) u_{y2} + \varphi_3(\xi) u_{y3} \quad (4.45)$$

As funções de forma φ_i para os elementos quadráticos são dadas a seguir [31]:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \xi \left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ \varphi_2 &= (1 + \xi)(1 - \xi) \\ \varphi_3 &= \xi \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}\tag{4.46}$$

As funções de forma (4.46) podem ser representadas de forma gráfica:

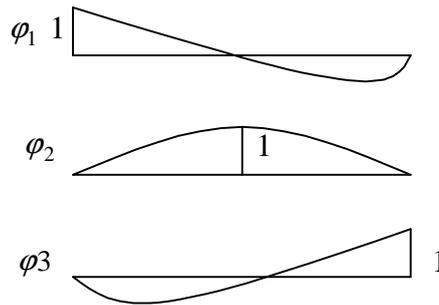


Figura 4.6 – Função de forma de um elemento quadrático.

Para o caso de elementos lineares, que são delimitados por dois nós em suas extremidades, as expressões que definem sua geometria são as seguintes:

$$X(\xi) = \sum_{i=1}^2 \varphi_i(\xi) X_i = \varphi_1(\xi) X_1 + \varphi_2(\xi) X_2\tag{4.47}$$

$$Y(\xi) = \sum_{i=1}^2 \varphi_i(\xi) Y_i = \varphi_1(\xi) Y_1 + \varphi_2(\xi) Y_2\tag{4.48}$$

E as expressões dos deslocamentos são:

$$u_x(\xi) = \sum_{i=1}^2 \varphi_i(\xi) u_{x_i} = \varphi_1(\xi) u_{x1} + \varphi_2(\xi) u_{x2}\tag{4.49}$$

$$u_y(\xi) = \sum_{i=1}^2 \varphi_i(\xi) u_{y_i} = \varphi_1(\xi) u_{y1} + \varphi_2(\xi) u_{y2}\tag{4.50}$$

As funções de forma são definidas, para o caso de elementos lineares, como:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.51)$$

Estas funções interpoladoras (4.51) podem ser representadas de forma gráfica:

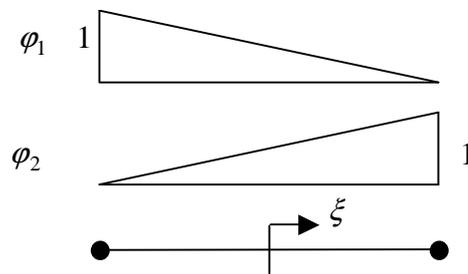


Figura 4.7 – Função de forma de um elemento linear

4.5 - Pontos de Colocação

Também chamados pontos fonte. São os pontos onde são escritas as equações integrais.

Estudos têm demonstrado que resultados melhores têm sido alcançados quanto mais próximos do contorno, ou sobre ele, os pontos fonte for posicionado, se comparados àqueles locados distantes do contorno.

Freqüentemente, na literatura, os nós de contorno são utilizados como pontos de colocação. Neste trabalho os pontos de colocação coincidem com os nós de contorno.

Como foi permitida neste trabalho a descontinuidade dos parâmetros nodais em elementos descontínuos, pontos internos ao elemento foram usados como ponto de colocação.

Também foram usados pontos internos ao domínio como pontos de colocação.

4.6 - Tipos de Elementos

Os tipos de elementos dependem da forma geométrica descritas pelo contorno. Para trechos que não possuem angulosidade e não há variação de carregamento e/ou vinculações, são comumente usados elementos lineares ou quadráticos contínuos. Os nós são comuns entre os elementos adjacentes.

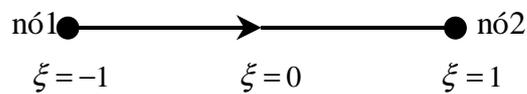


Figura 4.8 – Elemento linear contínuo.

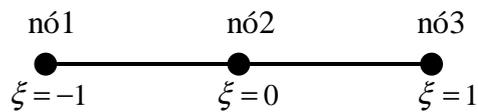


Figura 4.9 – Elemento quadrático contínuo.

Quando há presença de angulosidade no contorno e/ou variação de vinculação, lança-se mão dos elementos lineares ou quadráticos descontínuos. Os pontos nodais são definidos nos extremos do elemento e coincidem com os pontos geométricos. No caso de haver, por exemplo, uma angulosidade, ou seja, mudança de direção do contorno geométrico, aplica-se a técnica dos nós duplos, que consiste em adotar dois nós com as mesmas coordenadas geométricas.

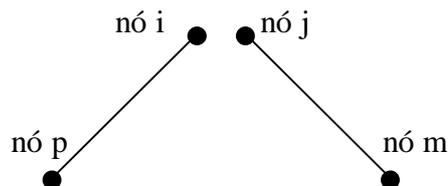


Figura 4.10 – Elementos com presença de nós duplos

A figura 4.10 pode representar, por exemplo, um canto de uma placa com adoção de dois nós no mesmo ponto geométrico, o que define o termo nó duplo. Devido a presença do nó duplo, pode-se perceber que são gerados dois tipos de elementos, chamados elementos descontínuos ou mistos.

Os pontos nodais são adotados como referência para escrever as equações integrais, porém, quando ocorrer a presença de nós duplos, os quais possuem as mesmas coordenadas geométricas e, portanto, levando a uma mesma equação integral, uma estratégia usualmente empregada para resolver este problema é deslocar os pontos de colocação para o interior dos elementos concorrentes ao nó duplo na proporção de $1/6$ do comprimento do elemento.

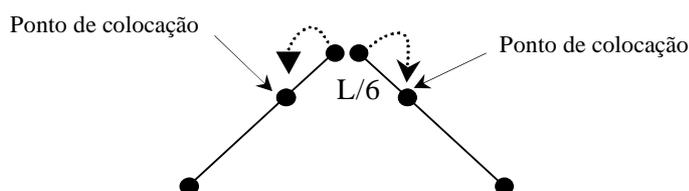


Figura 4.11 – Elemento descontínuo

4.7 - Sistema linear – Montagem das matrizes H/G

Como já foi discutido no item (4.2), as equações integrais de contorno derivaram da identidade de Somigliana (4.39).

Ao assumir o ponto de colocação percorrendo do nó 1 até o nó N, ter-se-á um sistema linear de $2N$ equações.

Tradicionalmente, quando o ponto de colocação não está localizado sobre o elemento que está sendo integrado, as equações integrais podem ser resolvidas por meio de técnicas de

integração numérica. Quando o ponto de colocação pertence ao elemento que está sendo integrado, ocorre presença de singularidade neste ponto e é necessário o desenvolvimento de expressões analíticas. Neste trabalho é desenvolvida a integração numérica relacionada com a quadratura de Gauss, e, onde ocorre singularidade, esta será tratada pela aplicação da técnica da regularização, exceto para determinação de tensões no contorno e no uso da formulação das equações integrais de contorno para forças de superfície, onde serão tratadas analiticamente.

4.7.1 - Formulação Numérica – Integração Numérica dos Núcleos

Para a aplicação da quadratura de Gauss é necessário a mudança de variáveis, do sistema global X, Y , referentes ao contorno global Γ , para um sistema linear ξ .

O intervalo de variação do sistema de coordenadas escolhidas, de -1 a $+1$ para as funções de forma, não é arbitrário e sim coincidente com o limite usado na técnica de integração da quadratura de Gauss (BECKER [31]).

Ao dividir o contorno em elementos, é feita a integração numérica sobre cada elemento, usando a coordenada local ξ e a coordenada de contorno Γ .

A partir das funções de interpolação φ (4.46) e (4.51) e da solução fundamental, pode-se definir as sub-matrizes H e G no sistema local da seguinte forma:

$$H_{ij} = \int_{-1}^{+1} P_{ij}^*(X, x_0) \varphi J(\xi) d\xi \quad (4.52)$$

$$G_{ij} = \int_{-1}^{+1} U_{ij}^*(X, x_0) \varphi J(\xi) d\xi \quad (4.53)$$

O termo $J(\xi)$ nas equações acima (4.52) e (4.53) é denominado Jacobiano de transformação da variável de contorno Γ para a coordenada intrínseca ξ .

Para os elementos quadráticos, o Jacobiano de transformação pode ser definido como:

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \quad (4.54)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \frac{dx(\xi)}{d\xi} &= \frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi} x_i \\ \frac{dy(\xi)}{d\xi} &= \frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi} y_i \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde as componentes das derivadas são escritas como funções de φ_i , sendo que i varia de 1 até 3 e valem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1(\xi)}{\partial \xi} &= \xi - \frac{1}{2} \\ \frac{\partial \varphi_2(\xi)}{\partial \xi} &= -2\xi \\ \frac{\partial \varphi_3(\xi)}{\partial \xi} &= \xi + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Para o caso do elemento linear, o jacobiano vale $J(\xi) = L/2$, onde L é o comprimento do elemento.

A equação dos deslocamentos (4.39), agora, pode ser escrita em termos de coordenadas locais ξ :

$$C_{ij} U_{ij}(x_0) + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{-1}^{+1} [P_{ij}^*(X, x_0)] \varphi(\xi) J(\xi) d\xi \right\} u_j(X) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{-1}^{+1} [U_{ij}^*(X, x_0)] \varphi(\xi) J(\xi) d\xi \right\} p_j(X) \quad (4.57)$$

onde X é o ponto campo, x_0 é o ponto fonte, M é o nº de elementos e N varia, para elementos lineares de 1 a 2 e para elementos quadráticos, varia de 1 a 3. O índice i representa a direção de aplicação da carga concentrada unitária no ponto fonte e, o índice j representa a direção da resposta, devido à aplicação da carga unitária, no ponto campo.

Pode-se atribuir as matrizes H e G na equação (4.57) da seguinte forma:

$$C_{ij} U_{ij}(x_0) + \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N [H_{ij}] u_j(X) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N [G_{ij}] p_j(X) \quad (4.58)$$

Para exemplificar a aplicação da formulação da equação (4.58) pode-se considerar o elemento quadrático de três nós, mostrado na figura (4.12), pertencente a um problema com três elementos, conforme apresentado em KANE [2]:

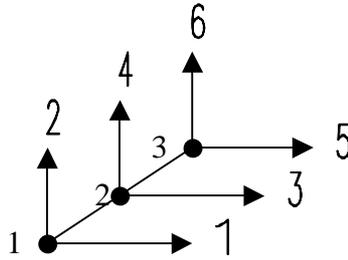


Figura 4.12 – Direções dos eixos nos três nós do elemento quadrático.

Para a formulação singular do Método de Contorno, pode-se aplicar, inicialmente, o ponto de colocação da solução fundamental diretamente no nó 1 e escrever a equação (4.58). A equação matricial produz as duas primeiras linhas do sistema de equações. A razão de resultar duas linhas é devido à aplicação do ponto de colocação, primeiro na direção 1, depois na direção 2. Assim, para o primeiro nó, a equação (4.58) fica escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} C_{11}(x_0) & C_{12}(x_0) \\ C_{21}(x_0) & C_{22}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(x_0) \\ U_2(x_0) \end{bmatrix} + \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(X) \\ u_2(X) \end{bmatrix} = \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(X) \\ p_2(X) \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Como já foi mencionado, a constante C_{ij} assume os seguintes valores:

$C_{ij} = 0$, para o ponto de colocação fora do contorno;

$C_{ij} = \delta_{ij}$, para ponto de colocação no domínio;

$C_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$, para ponto de colocação sobre o contorno.

Sendo que ij variam de 1 a 2.

Substituindo os valores de C_{ij} na equação (4.59), fica:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(x_0) \\ U_2(x_0) \end{bmatrix} + \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(X) \\ u_2(X) \end{bmatrix} = \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(X) \\ p_2(X) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Pode-se notar que o parâmetro C_{ij} contribui apenas na diagonal da matriz H.

Repetindo este processo, agora com o ponto de colocação da solução fundamental no nó dois, duas novas equações são produzidas, ocupando, por sua vez, as linhas 3 e 4 das matrizes G e H. Assim, pode-se verificar que cada linha das matrizes correspondem as direções do ponto de colocação. As colunas das matrizes, por sua vez, correspondem aos nós dos elementos. De uma forma resumida, cada elemento quadrático contribui em seis colunas das matrizes e cada posição do ponto de colocação contribui em duas linhas.

Vale lembrar que as matrizes [G] e [H] contém os valores dos núcleos das integrais das soluções fundamentais de forças de superfície e de deslocamentos, P_{ij} e U_{ij} , respectivamente. Os vetores [U] e [P] representam os deslocamentos e forças nas direções i, j , nos pontos nodais.

O processo de aplicação do ponto de colocação é repetido até que se alcance o último nó, produzindo assim as duas últimas equações do sistema. No final deste processo são obtidas duas matrizes $2N \times 2N$, onde N é o número total de nós. Assim, pode-se escrever:

$$[H][U] = [G][P] \quad (4.61)$$

Como já foi visto, a solução fundamental é singular. Esta singularidade significa que os núcleos contém termos de ordem $1/r$ ou $\ln(1/r)$, onde r é a distância entre o ponto fonte x_0 e o ponto campo X e tende a zero quando ocorre aproximação destes dois pontos.

Desta forma, pode-se examinar três possibilidades de posição dos pontos x_0 e X :

1) x_0 e X estão em elementos diferentes. Neste caso não ocorre a singularidade nos núcleos P_{ij} e U_{ij} , e pode-se aplicar a quadratura de Gauss-Legendre definida pela expressão.

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{g=1}^G f(\xi_g) W_g \quad (4.62)$$

onde G é o número total dos pontos da integração Gaussiana e ξ_g é a coordenada Gaussiana associado a função peso W_g .

2) x_0 e X estão no mesmo elemento, mas $x_0 \neq X$. Neste caso os núcleos P_{ij} e U_{ij} são singulares, mas a função de forma $\varphi(\xi)$ na vizinhança de x_0 é de ordem $r(x_0, X)$. Portanto, os produtos dos núcleos com as funções de forma não são singulares e a integral pode ser resolvida usando a quadratura Gaussiana.

3) x_0 e X estão no mesmo elemento e $x_0 = X$. Neste caso a quadratura de Gauss não pode ser usada devido à presença de singularidade dos núcleos. Para tratar deste caso são desenvolvidas expressões analíticas ou, pode ser utilizado o conceito de regularização, descrito no capítulo 5.

4.7.2 - Consideração de corpo rígido

As matrizes dos elementos de contorno devem ser aplicadas em problemas físicos com solução única. Qualquer problema físico pode ser escolhido, independentemente da geometria. Em problemas elastostáticos escolhe-se uma condição física chamada movimento de corpo rígido, com deslocamentos constantes em todos seus nós em qualquer direção. Esta condição resulta em forças de superfície iguais a zero, fazendo o lado direito da equação (4.61) ser nulo, ou seja:

$$[H][U]=0 \quad (4.63)$$

Assim, a soma de todos os coeficientes em qualquer linha da matriz [H] deve ser zero.

4.7.3 - Condições de Contorno

Em qualquer problema da mecânica dos sólidos, haverão locais onde as componentes de deslocamentos serão prescritas (conhecidas) e outros pontos onde forças serão prescritas, ou seja, em um dado problema de mecânica, tem-se $2N$ equações, o que resulta em quatro variáveis (u_1, u_2, p_1, p_2) por nó, onde há a necessidade de duas variáveis terem valores prescritos, ou seja, $2N$ valores prescritos.

Para ser possível a resolução de um sistema, as matrizes [H] e [G] devem ser organizadas de forma que todas as variáveis prescritas (conhecidas) fiquem do lado direito da equação e as que não são conhecidas fiquem do lado esquerdo do sistema de equações, ou seja:

$$[H^*][x]=[G^*][y] \quad (4.64)$$

Onde a matriz [y] contém todos os valores das variáveis prescritas (deslocamentos e/ou forças prescritas) e a matriz [x] contém todas as variáveis a serem determinadas. As matrizes

$[H^*]$ e $[G^*]$ são as formas modificadas das matrizes $[H]$ e $[G]$, ou seja, ao passar os valores prescritos de um lado para outro, os coeficientes das matrizes, referentes as linhas dos valores prescritos, também trocam de lado. Desta forma, o sistema linear final pode ser escrito da seguinte forma:

$$[H^*][x] = [B] \quad (4.65)$$

Onde a matriz $[B]$ é o vetor que contém o produto da matriz $[G]^*$ pelos valores conhecidos.

Se, por exemplo, um nó de um determinado elemento tem um deslocamento prescrito, então o seu coeficiente da matriz $[H]$ é multiplicado pelo valor do deslocamento conhecido e movido para o lado direito da equação após a troca do seu sinal. Em seguida, o coeficiente relativo à mesma posição da matriz $[G]$ é movido para o lado esquerdo, também, após troca de sinal.

Para ilustrar esta manipulação das matrizes, pode-se considerar, por exemplo, que em um dado problema, os nós 2 e 4 tem deslocamentos conhecidos $[u]_2$ e $[u]_4$, enquanto os nós 1 e 3 têm forças conhecidas $[p]_1$ e $[p]_3$, respectivamente. As matrizes $[H]$ e $[G]$ podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [H]_{11} & [H]_{12} & [H]_{13} & [H]_{14} & \dots \\ [H]_{21} & [H]_{22} & [H]_{23} & [H]_{24} & \dots \\ [H]_{31} & [H]_{32} & [H]_{33} & [H]_{34} & \dots \\ [H]_{41} & [H]_{42} & [H]_{43} & [H]_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [u]_1 \\ [u]_2 \\ [u]_3 \\ [u]_4 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{11} & [G]_{12} & [G]_{13} & [G]_{14} & \dots \\ [G]_{21} & [G]_{22} & [G]_{23} & [G]_{24} & \dots \\ [G]_{31} & [G]_{32} & [G]_{33} & [G]_{34} & \dots \\ [G]_{41} & [G]_{42} & [G]_{43} & [G]_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [p]_1 \\ [p]_2 \\ [p]_3 \\ [p]_4 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Os coeficientes da matriz $[H]$ multiplicados pelos deslocamentos prescritos $[u]_2$ e $[u]_4$ são transferidos para o lado direito com seus sinais trocados e, em suas posições, são colocados os coeficientes correspondentes da matriz $[G]$ multiplicados pelas variáveis $[p]_2$ e $[p]_4$ após a troca de seus sinais.

$$\begin{bmatrix} [H]_{11} - [G]_{12} [H]_{13} - [G]_{14} \dots \\ [H]_{21} - [G]_{22} [H]_{23} - [G]_{24} \dots \\ [H]_{31} - [G]_{32} [H]_{33} - [G]_{34} \dots \\ [H]_{41} - [G]_{42} [H]_{43} - [G]_{44} \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} [u]_1 \\ [p]_2 \\ [u]_3 \\ [p]_4 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{11} - [H]_{12} [G]_{13} - [H]_{14} \dots \\ [G]_{21} - [H]_{22} [G]_{23} - [H]_{24} \dots \\ [G]_{31} - [H]_{32} [G]_{33} - [H]_{34} \dots \\ [G]_{41} - [H]_{42} [G]_{43} - [H]_{44} \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} [p]_1 \\ [u]_2 \\ [p]_3 \\ [u]_4 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

O sistema (4.67) pode, agora, ser resolvido, pois todos os coeficientes do lado direito são conhecidos.

Após a resolução do sistema linear, o vetor $[x]$ da equação (4.65) de variáveis, até então desconhecidas, possui agora valores de deslocamentos e de forças de superfícies, que devem ser separados em seus respectivos vetores.

4.8 - Deslocamentos em pontos internos no domínio

Com a resolução do sistema linear para todos os pontos nodais no contorno, os valores de deslocamentos e forças de superfície são determinados. A determinação de deslocamentos em qualquer ponto no domínio é de forma direta, a partir dos valores encontrados no contorno pela equação linear (4.65) (KANE [2]).

Pelo fato do ponto de colocação ser interno, nunca haverá a possibilidade dos pontos x_0 e X coincidirem, ou seja, não há a possibilidade de singularidade. Portanto, pode-se aplicar a quadratura de Gauss nos núcleos das integrais.

Para a equação de deslocamentos (4.39) a constante C vale 1, pois o ponto de colocação está dentro do domínio. Sendo x_0 o ponto de colocação no domínio e considerando a ausência de forças de volume, pode-se escrever:

$$U_{ij}(x_0) = -\int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X)] + \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(X, x_0) p_j(X) d\Gamma(X)] \quad (4.68)$$

Na forma matricial:

$$u^* = -[H^*]u + [G^*]p \quad (4.69)$$

Onde u^* é o vetor dos deslocamentos internos.

4.9 - Tensões nos pontos internos no domínio e no contorno

4.9.1 - Tensões para pontos internos

Para encontrar a deformação em pontos no domínio, deve-se encontrar a variação de deslocamentos nas partes internas para um conjunto fixo de valores de deslocamentos e forças superficiais no contorno. Parte-se do princípio que ao considerar o deslocamento entre dois pontos, a variação deste deslocamento pode ser entendida como uma derivada.

Assim, sejam dois pontos x_0 e x_1 distantes Δ_x e Δ_y no domínio, pode-se escrever:

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x} \right|_{x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{u_i(x_1) - u_i(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (4.70)$$

Pode-se escrever, a partir da equação de deslocamento (4.39) e considerando nulas as forças de volume:

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x} \right|_{x_0} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial X} [P_{ij}^*(X, x_0)] u_j(X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial X} [U_{ij}^*(X, x_0)] p_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.71)$$

Lembre-se que as derivadas em relação ao ponto fonte correspondem às derivadas em relação ao ponto campo, com sinal trocado. Organizando a equação (4.71), tem-se:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial X} [U_{ij}^*(X, x_0)] p_j(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial X} [P_{ij}^*(X, x_0)] u_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.72)$$

A equação integral para tensões em um ponto interno no domínio pode ser obtida pela aplicação da equação diferencial (4.72) substituindo-a na equação da lei de Hooke. Assim:

$$\sigma_{ik}(x_0) = 2\mu \left(\varepsilon_{ik}(x_0) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ik} \varepsilon_{mm}(x_0) \right) \quad (4.73)$$

onde σ_{ik} é a tensão em um ponto interno e ε_{ik} é a deformação no ponto interno e vale:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (4.74)$$

Substituindo a solução fundamental e sua derivada, chega-se, assim, na equação integral para tensões em pontos internos, que é escrita em termos de núcleos de terceira ordem S_{ikj} e D_{ikj} , da seguinte forma:

$$\sigma_{ik}(x_0) = - \int_{\Gamma} S_{ikj}(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} D_{ikj}(X, x_0) p_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.75)$$

sendo o núcleo S_{ikj} o resultado da aplicação da derivada de P_{ij}^* em relação ao ponto campo x_k com o sinal trocado e após o uso do tensor de tensões σ_{ik} definido na equação (4.73).

O núcleo D_{ikj} resulta da aplicação da derivada de U_{ij}^* em relação ao ponto campo x_k com o sinal trocado e após o uso do tensor de tensões σ_{ik} definido na equação (4.73).

Pode-se deduzir o núcleo de terceira ordem D_{ikj} da seguinte forma:

Partindo da derivada da solução fundamental U_{ij}^* em relação ao ponto campo x na direção k , tem-se:

$$\frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k} = \frac{1}{8\pi\mu(1-2\nu)} \left[-(3-4\nu)\delta_{ij} \frac{1}{r} r_k + \frac{1}{r} (\delta_{ik} - r_i r_k) r_j + \frac{1}{r} (\delta_{jk} - r_j r_k) r_i \right]$$

$$\frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k} = \frac{1}{8\pi\mu(1-2\nu)r} \left[-(3-4\nu)\delta_{ij} r_k + \delta_{ik} r_j + \delta_{jk} r_i - 2r_i r_j r_k \right] \quad (4.76)$$

e

$$\frac{\partial u_{kj}^*}{\partial x_i} = \frac{1}{8\pi\mu(1-2\nu)r} \left[-(3-4\nu)\delta_{jk} r_i + \delta_{ik} r_j + \delta_{ij} r_k - 2r_i r_j r_k \right] \quad (4.77)$$

Substituindo as expressões (4.76) e (4.77) na definição de ε_{ik} , equação (4.74), tem-se:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[-(2-4\nu)(\delta_{jk} r_i + \delta_{ij} r_k) + 2\delta_{ik} r_j - 4r_i r_j r_k \right] \quad (4.78)$$

Dividindo por dois todos os termos do lado direito da equação acima (4.78):

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left[-(1-2\nu)(\delta_{jk} r_i + \delta_{ij} r_k) + \delta_{ik} r_j - 2r_i r_j r_k \right] \quad (4.79)$$

Para obter o termo ε_{mm} do tensor de tensões (4.73), basta substituir as variáveis $i = k = m$ na equação (4.79):

$$\varepsilon_{mm} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left[-(1-2\nu)(\delta_{jm} r_m + \delta_{jm} r_m) + \delta_{mm} r_j - 2r_j r_m r_m \right] \quad (4.80)$$

Sendo, por definição, que:

$$\begin{aligned} \delta_{jm} r_m &= r_j \\ r_m r_m &= 1 \\ \delta_{mm} &= 2 \end{aligned} \quad (4.81)$$

Tem-se:

$$\varepsilon_{mm} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left[-(1-2\nu)(r_j + r_j) + 2r_j - 2r_j \right] \quad (4.82)$$

Organizando a equação (4.82), chega-se a:

$$\varepsilon_{mm} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left[-(1-2\nu)2r_j \right] \quad (4.83)$$

Substituindo as equações (4.80) e (4.83) na equação (4.73), chega-se a:

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[-(1-2\nu)(\delta_{jk} r_i + \delta_{ij} r_k) + (1-2\nu)\delta_{ik} r_j - 2r_i r_j r_k \right] \quad (4.84)$$

Como a derivada é em relação ao ponto campo, deve-se trocar o sinal da equação (4.84) para definir o tensor de terceira ordem D_{ikj} . Assim, pode-se escrever:

$$D_{ikj} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{jk} r_i + \delta_{ij} r_k - \delta_{ik} r_j) + 2r_i r_j r_k \right] \quad (4.85)$$

Para chegar ao outro tensor de terceira ordem, S_{ikj} , é necessário, inicialmente, encontrar a derivada da equação da solução fundamental P_{ij}^* em relação ao ponto campo na direção k :

Sabendo que vale a propriedade:

$$\frac{\partial(r_i)}{\partial x_k} = \frac{1}{r} (\delta_{ik} - r_i r_k) \quad (4.86)$$

e aplicando a propriedade da derivada do produto na solução fundamental P_{ij}^* em relação a k , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ij}^*}{\partial x_k} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r^2} r_k \left\{ (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) - r_n n_n [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \frac{1}{r} (1-2\nu) \left[\frac{1}{r} n_j (\delta_{ik} - r_i r_k) - \frac{1}{r} n_i (\delta_{jk} - r_j r_k) \right] + \\ &- \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} n_n (\delta_{nk} - r_n r_k) [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] \right] + \\ &- \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \frac{1}{r} \left[r_n n_n \frac{1}{r} (0 + 2[(\delta_{ik} - r_i r_k)r_j + (\delta_{jk} - r_j r_k)r_i]) \right] \end{aligned} \quad (4.87)$$

Organizando os termos da equação (4.87) pode-se chegar a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ij}^*}{\partial x_k} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2r_n n_n [(1-2\nu)\delta_{ij} r_k + 4r_i r_j r_k - \delta_{ik} r_j - \delta_{jk} r_i] \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2(1-2\nu)[r_k r_j n_i - r_k r_i n_j] - 2r_i r_j n_k \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik} n_j - \delta_{ij} n_k - \delta_{jk} n_i) \right] \end{aligned} \quad (4.88)$$

Análogo, pode-se escrever a derivada em relação a i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{kj}^*}{\partial x_i} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{2r_n n_n [(1-2\nu)\delta_{kj}r_i + 4r_i r_j r_k - \delta_{ik}r_j - \delta_{ij}r_k]\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{2(1-2\nu)[r_i r_j n_k - r_i r_k n_j] - 2r_k r_j n_i\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} [(1-2\nu)(\delta_{ik}n_j - \delta_{kj}n_i - \delta_{ij}n_k)] \end{aligned} \quad (4.89)$$

A equação (4.74) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_k} + \frac{\partial P_k}{\partial x_i} \right) \quad (4.90)$$

Desta forma a equação (4.73) pode ser escrita como:

$$\sigma_{ik}(x_0) = \mu \left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial P_{kj}}{\partial x_i} \right) + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ik} \varepsilon_{mm} \quad (4.91)$$

Substituindo as equações (4.88) e (4.89) na equação (4.91), tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}(x_0) &= \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^2} \{2r_n n_n [(1-2\nu)\delta_{ij}r_k + 4r_i r_j r_k - \delta_{ik}r_j - \delta_{jk}r_i]\} + \\ &+ 2(1-2\nu)[r_k r_j n_i - r_k r_i n_j] - 2r_i r_j n_k + (1-2\nu)(\delta_{ik}n_j - \delta_{ij}n_k - \delta_{jk}n_i) \} + \\ &+ \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^2} \{2r_n n_n [(1-2\nu)\delta_{kj}r_i + 4r_i r_j r_k - \delta_{ik}r_j - \delta_{ij}r_k]\} + \\ &+ 2(1-2\nu)[r_i r_j n_k - r_i r_k n_j] - 2r_k r_j n_i + (1-2\nu)(\delta_{ik}n_j - \delta_{kj}n_i - \delta_{ij}n_k) \} + \\ &+ \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ik} \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{2r_n n_n [(1-2\nu)\delta_{mj}r_j + 4r_m r_j r_m - \delta_{mm}r_j - \delta_{mj}r_m]\} + \\ &+ 2(1-2\nu)[r_m r_j n_m - r_m r_m n_j] - 2r_m r_j n_m + (1-2\nu)(\delta_{mm}n_j - \delta_{mj}n_m - \delta_{mj}n_m) \} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Fazendo as operações e organizando os termos da equação (4.92), após a troca do sinal, pode-se definir o tensor de terceira ordem S_{ikj} :

$$\begin{aligned} S_{ikj} &= \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \{2r_n n_n [-(1-2\nu)\delta_{ik}r_j + 4r_i r_j r_k - \nu(\delta_{ij}r_k - \delta_{kj}r_i)]\} + \\ &- 2\nu[r_k r_j n_i + r_i r_j n_k] - (1-2\nu)(2r_i r_k n_j + \delta_{jk}n_k + \delta_{jk}n_i) + (1-4\nu)n_j \delta_{ik} \} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Pode-se observar que o núcleo de tensão S_{ikj} é hipersingular (ou singularidade forte) devido a presença do termo $1/r^2$. A hipersingularidade pode ser entendida quando o raio r , ou seja, a distância entre os pontos fonte e campo, tende a zero, assim $1/r^2$ tende mais rapidamente ao infinito do que $1/r$.

As tensões em pontos internos, obtidas pela equação (4.75), para elementos lineares e elementos quadráticos, tem seus núcleos resolvidos numericamente, usando a técnica da regularização quando ocorre a singularidade, dada no capítulo 5.

4.9.2 - Tensões no contorno para elementos lineares

Partindo da aplicação da derivada da equação de deslocamentos (4.39), em relação ao ponto fonte. Aplicando o processo limitante do ponto de colocação tender ao contorno, ou seja, $x_0 \rightarrow \Gamma$, pode-se escrever a equação integral de contorno para o tensor de tensões:

$$\frac{1}{2}\sigma_{ik}(x_0) = - \int_{\Gamma} S_{ikj}(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} D_{ikj}(X, x_0) p_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.94)$$

A equação (4.94) é válida para contorno com tangente contínua e o ponto de aplicação da carga deve estar localizado em região onde existe continuidade da função derivada dos deslocamentos. Neste trabalho, os pontos de colocação são posicionados internos ao elemento, satisfazendo, assim, a condição de continuidade.

Quando o ponto de colocação não pertence ao elementos que está sendo integrado, ou seja, quando $x_0 \neq X$, os núcleos das integrais de contorno podem ser resolvidos por técnica numérica. No caso do ponto de colocação pertencer ao elemento que está sendo integrado, ocorre a presença de singularidade, devido ao termo $1/r$ e hipersingularidade, devido ao termo $1/r^2$. Portanto, os núcleos das integrais de contorno da equação de tensões, para pontos no contorno, são resolvidos por equações analíticas.

Neste trabalho, os núcleos das equações analíticas estão escritos em função da coordenada tangencial do elemento, que coincide com a coordenada global Γ . A relação entre coordenada normal e tangencial do elemento é representada pela figura 4.13.

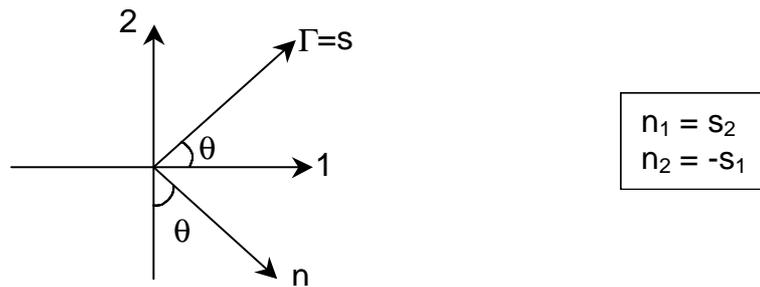


Figura 4.13 – Relação entre coordenadas N e S.

Para os elementos lineares, no caso do uso de equações analíticas, tem o sistema local ξ , substituído por um sistema 'r', o qual tem origem no ponto médio do elemento. Os valores neste sistema partem do centro e evoluem para os extremos dos elementos e os limites de integração do elemento são relacionados pela distância 'a', conforme figura 4.14, onde é mostrado o novo sistema local de coordenadas e o sistema global de coordenadas Γ .

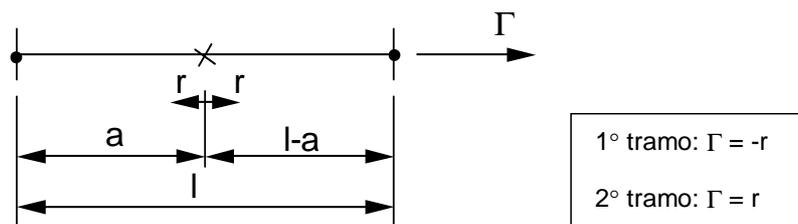


Figura 4.14 – Sistema de coordenadas em função de uma posição arbitrária distante 'a' de uma extremidade.

A formulação analítica para o núcleo singular D_{ikj} :

$$D_{ikj}^1 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{jk} s_i + \delta_{ij} s_k - \delta_{ik} s_j) + 2s_i s_j s_k \right] \left\{ \frac{l-a}{l} \cdot \ln \frac{l-a}{a} - 1 \right\} \quad (4.95)$$

$$D_{ikj}^2 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{jk} s_i + \delta_{ij} s_k - \delta_{ik} s_j) + 2s_i s_j s_k \right] \left\{ \frac{a}{l} \cdot \ln \frac{l-a}{a} + 1 \right\} \quad (4.96)$$

A formulação analítica para o núcleo hipersingular S_{ikj} :

$$S_{ikj}^1 = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left\{ 2\nu [s_k s_j n_i + s_i s_j n_k] + \right. \\ \left. - (1-2\nu)(2s_i s_k n_j + \delta_{jk} n_k + \delta_{jk} n_i) + (1-4\nu)n_j \delta_{ik} \right\} \left\{ \frac{1}{l} \left[-\frac{l-a}{a} - 1 - \ln \frac{l-a}{a} \right] \right\} \quad (4.97)$$

$$S_{ikj}^2 = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left\{ 2\nu [s_k s_j n_i + s_i s_j n_k] + \right. \\ \left. - (1-2\nu)(2s_i s_k n_j + \delta_{jk} n_k + \delta_{jk} n_i) + (1-4\nu)n_j \delta_{ik} \right\} \left\{ \frac{1}{l} \left[-\frac{a}{l-a} - 1 + \ln \frac{l-a}{a} \right] \right\} \quad (4.98)$$

Os índices 1 e 2 presentes na formulação dos núcleos D_{ikj} e S_{ikj} , nas equações (4.95) a (4.98), referem-se aos nós inicial e final do elemento.

4.10 - Uso do Operador Tangente para determinação de Tensões

Outra forma de determinar tensão em pontos internos e no contorno é usando o operador tangente, que possui a vantagem de trabalhar apenas com termo de ordem $\frac{1}{r}$, ou seja, elimina-se a forte singularidade presente em S_{ikj} .

A derivada da equação dos deslocamentos em relação ao ponto fonte corresponde à derivada em relação ao ponto campo com sinal trocado, conforme dada na equação (4.71), é escrita novamente:

$$U_{i,k}(x_0) = \int_{\Gamma} P_{ij,k}^*(x_0, X) u_j(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} U_{ij,k}^*(x_0, X) p_j(X) d\Gamma(X)$$

onde $P_{ij}^*(x_0, X)$ e $U_{ij}^*(x_0, X)$ são combinações lineares da solução fundamental de forças de superfície e de deslocamentos, respectivamente. $u_j(X)$ e $p_j(X)$ são os vetores de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

A primeira e a segunda integral na equação (4.71) são regulares para pontos de colocação internos. Para pontos de colocação que aproximam-se do contorno, a primeira integral da equação (4.71) exhibe singularidade forte do tipo $1/r^2$ e a segunda integral exhibe uma singularidade de ordem $1/r$.

O objetivo da aplicação do operador diferencial tangente na primeira integral da equação (4.71) é eliminar a hipersingularidade (ou singularidade forte) presente na equação, ou seja, as duas integrais da equação (4.71) passam a ter termos apenas de ordem $1/r$.

Aplicando a expressão (3.6) na primeira integral da equação (4.71), pode-se escrever a seguinte relação:

$$\int_{\Gamma} P_{ij,k}^*(x_0, X) u_j(X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_k} [(\sigma_{ipj})(x_0, X) n_p(X)] u_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.99)$$

Trabalhando apenas com o termo do lado direito da equação (4.99), pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_k} [(\sigma_{ipj})(x_0, X) n_p(X)] u_j(X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} \{D_{pk} [\sigma_{ipj}(x_0, X)] + n_k(X) \sigma_{ipj,p}(x_0, X)\} u_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.100)$$

Na equação (4.100) o termo D_{pk} é chamado Operador Diferencial Tangente, o qual tem a seguinte definição matemática:

$$D_{kp} [f(X)] = n_k(X) f_{,p}(X) - n_p(X) f_{,k}(X) \quad (4.101)$$

Os produtos do lado direito da equação (4.101) podem ser escritos da seguinte forma:

$$n_k(X) \frac{\partial f(X)}{\partial x_p} - n_p(X) \frac{\partial f(X)}{\partial x_k} = n_k \left[\frac{\partial f(X)}{\partial n} n_p + \frac{\partial f(X)}{\partial s} s_p \right] - n_p \left[\frac{\partial f(X)}{\partial n} n_k + \frac{\partial f(X)}{\partial s} s_k \right] \quad (4.102)$$

Fazendo as operações algébricas na equação (4.102), tem-se:

$$n_k(X) \frac{\partial f(X)}{\partial x_p} - n_p(X) \frac{\partial f(X)}{\partial x_k} = n_k s_p \frac{\partial f(X)}{\partial s} - n_p s_k \frac{\partial f(X)}{\partial s} \quad (4.103)$$

Percebe-se que a equação (4.103) é uma equação diferencial usando a derivada em relação à tangente. Daí vem o nome operador diferencial tangente.

O segundo termo da integral do lado direito da equação (4.100) se torna nulo para o caso dos pontos x_0 e X não coincidirem quando é usada a solução de Kelvin, dada na equação (3.74) no capítulo 3.

Aplicando a integração por partes no termo restante da integral do lado direito da equação (4.100), quando a linha de contorno é fechada, têm-se:

$$\int_{\Gamma} D_{pk} [\sigma_{ipj}(x_0, X)] u_j(X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} \sigma_{ipj}(x_0, X) D_{kp} [u_j(X)] d\Gamma(X) \quad (4.104)$$

A equação integral de contorno usando o operador diferencial tangente é, portanto, dada por:

$$u_{i,k}(x_0) = \int_{\Gamma} \sigma_{ipj}(x_0, X) D_{kp} [u_j(X)] d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} U_{ij,k}^*(x_0, X) p_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.105)$$

As integrais da equação (4.105) são regulares em pontos internos e exibem apenas singularidade de ordem $1/r$ quando o ponto campo aproxima-se do ponto de colocação.

A equação integral de contorno para tensões pode ser obtida da equação (4.105) usando o tensor de Hooke e a propriedade simétrica do vetor $U_{ij,k}^*(x_0, X)$:

$$\sigma_{lm}(x_0) = C_{lmik} \int_{\Gamma} \sigma_{ipj}(x_0, X) D_{kp} [u_j(X)] d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \sigma_{jlm}(x_0, X) p_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.106)$$

Sendo C_{lmik} um tensor de quarta ordem definido na equação (3.20), no capítulo 3

Escrevendo a equação (4.106) em função de D_{ikj} e S_{ikj} , têm-se:

$$\sigma_{ik}(x_0) = C_{ikjm} \int_{\Gamma} S_{ikj}(x_0, X) u_j(X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} D_{ikj}(x_0, X) p_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.107)$$

Para pontos sobre o contorno, a equação de tensão (4.107), escrita em termos de D_{ikj} e S_{ikj} , vale:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ik}(x_0) = C_{ikjm} \int_{\Gamma} S_{ikj}(x_0, X) u_j(X) d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} D_{ikj}(x_0, X) p_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.108)$$

Usando o mesmo tratamento aplicado para a formulação da equação integral do item 4.9.2, onde para elementos lineares, quando o ponto de colocação não pertence ao elemento que está sendo integrado os núcleos das integrais de contorno podem ser resolvidos numericamente. No caso do ponto de colocação pertencer ao elemento que está sendo integrado, ocorrendo presença de singularidade, os núcleos das integrais são resolvidos por expressões analíticas.

Da mesma maneira, os núcleos usados nas equações analíticas estão em função da coordenada tangencial do elemento, que coincide com a coordenada global Γ , cuja demonstração está representada na figura 4.13.

Assim, os limites de integração do elemento são relacionados pela distância 'a', conforme mostrado na figura 4.14.

A formulação analítica para o núcleo singular D_{ikj} é a mesma definida no item 4.9.2 e novamente aqui apresentada:

$$D_{ikj}^1 = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{jk} s_i + \delta_{ij} s_k - \delta_{ik} s_j) + 2s_i s_j s_k \right] \left\{ \frac{l-a}{l} \cdot \ln \frac{l-a}{a} - 1 \right\}$$

$$D_{ikj}^2 = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{jk} s_i + \delta_{ij} s_k - \delta_{ik} s_j) + 2s_i s_j s_k \right] \left\{ \frac{a}{l} \cdot \ln \frac{l-a}{a} + 1 \right\}$$

Para a formulação analítica para o núcleo S_{ikj} , que neste caso é singular, tem-se:

$$S_{ikj}^1 = -C_{ikjm} \sigma_{ijl}(x_0, X) \left[u_{il,j}(X) n_m(X) - u_{il,m}(X) n_j(X) \right] \left\{ -\frac{1}{l} \cdot \ln \frac{l-a}{a} \right\} \quad (4.109)$$

$$S_{ikj}^2 = -C_{ikjm} \sigma_{ijl}(x_0, X) \left[u_{il,j}(X) n_m(X) - u_{il,m}(X) n_j(X) \right] \left\{ \frac{1}{l} \cdot \ln \frac{l-a}{a} \right\} \quad (4.110)$$

Observou-se neste trabalho que para os elementos lineares descontínuos, com presença de nós duplos, há a necessidade de correção das componentes do núcleo S_{ikj} que usa o operador tangente, de modo a incluir o efeito dos extremos.

Para definir a técnica da correção dos componentes do núcleo S_{ikj} , para elementos lineares descontínuos, pode-se partir do termo do lado esquerdo da equação (4.99), o qual pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} D_{pk} [\sigma_{ipj}(x_0, X)] u_j(X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} (n_k s_p - n_p s_k) \frac{\partial}{\partial s} [\sigma_{ipj}(x_0, X)] u_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.111)$$

Aplicando a integração por partes no termo do lado direito da equação (4.111), têm-se:

$$\int_{\Gamma} (n_k s_p - n_p s_k) \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [\sigma_{ipj}(x_0, X) u_j(X)] - \sigma_{ipj}(x_0, X) \frac{\partial}{\partial s} u_j(X) \right\} d\Gamma(X) \quad (4.112)$$

Se considerar que Γ é uma linha aberta e usando o teorema fundamental do cálculo, pode-se escrever:

$$(n_k s_p - n_p s_k) [\sigma_{ipj}(x_0, X) u_j(X)]_{inicial}^{final} - \int_{\Gamma} (n_k s_p - n_p s_k) \sigma_{ipj}(x_0, X) \frac{\partial}{\partial s} u_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.113)$$

4.10.1 - Implementação numérica do Operador Diferencial Tangente

A implementação numérica do operador tangente no programa é definida da seguinte forma:

Tomando o termo da derivada do deslocamento pelo cosseno diretor da normal em relação às coordenadas locais ξ , tem-se:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_p} n_k = \frac{\partial u_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_p} n_k \quad (4.114)$$

Sendo que:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial s} = 1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} = \frac{1}{J(\xi)}$$

onde J é o Jacobiano de transformação definido no item 4.7.1.

Considerando a relação:

$$\frac{\partial s}{\partial x_p} = s_p$$

pode-se escrever, para o primeiro termo do lado direito da equação (4.106) em termos da coordenada local ξ :

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ipj}(x_0, X) D_{kp} [u_j(X)] d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} \sigma_{ipj}(x_0, X(\xi)) \frac{1}{J} (s_p n_k - s_k n_p) \frac{\partial u_i}{\partial \xi} J d\xi \quad (4.115)$$

4.11 - Montagem do programa computacional usando a Equação Integral de Contorno para forças de Superfície.

Uma alternativa de se obter deslocamentos, para elementos lineares, é usando a formulação da equação integral de contorno para forças de superfície.

O objetivo da aplicação da formulação das forças de superfície é permitir escrever duas equações para um mesmo ponto de colocação. Esta característica é fundamental em casos de problemas de fratura, cujas faces da trinca coincidem.

Em um contorno suave, a equação integral de contorno para forças de superfície pode ser obtida diretamente a partir dos núcleos das equações integrais analíticas de tensões S_{ikj} e D_{ikj} , multiplicado pelo cosseno diretor da normal em um ponto de colocação x' no contorno suave.

Assim, tem-se:

$$\frac{1}{2} t_k(x') = -n_i(x') \int_{\Gamma} S_{ikj}(x', X) u_j(X) d\Gamma(X) + n_i(x') \int_{\Gamma} D_{ikj}(x', X) p_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.116)$$

onde n_i é o cosseno diretor da normal no ponto fonte.

Da mesma forma como foi aplicada na formulação das integrais de tensões, a estratégia do uso das integrais analíticas é usada quando o ponto de colocação coincide com o elemento que está sendo integrado, caso não coincida, é usada a técnica de integração numérica.

Também, pode-se escrever a equação integral de contorno para forças de superfície a partir da formulação do operador tangente da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} t_k(x') = n_i(x') C_{ikjm} \int_{\Gamma} \sigma_{jl}^i(x', X) D_{kp} [u_j(X)] d\Gamma(X) - n_i(x') \int_{\Gamma} D_{ikj}(x', X) p_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.117)$$

ou

$$\frac{1}{2} t_k(x') = n_i(x') C_{ikjm} \int_{\Gamma} S_{ikj}(x', X) u_j(X) d\Gamma(X) - n_i(x') \int_{\Gamma} D_{ikj}(x', X) p_j(X) d\Gamma(X) \quad (4.118)$$

5 - TÉCNICA DA REGULARIZAÇÃO INDIRETA

5.1 - Introdução

Recentemente vêm sendo estudadas várias maneiras de tratar a singularidade presente no núcleo das equações integrais de contorno. Existem vários processos para atingir tal objetivo. Neste trabalho é apresentado o conceito da regularização indireta, demonstrado no trabalho de KANE [2].

Inicialmente a técnica da regularização indireta foi estudada, neste trabalho, para a aplicação na equação integral para o problema potencial de temperatura, onde se trabalha com um número menor de variáveis. Em seguida, usando os conhecimentos adquiridos no problema do potencial e tendo como objetivo principal de estudo deste trabalho, a técnica foi extrapolada na aplicação em equações integrais envolvendo problemas de elasticidade.

5.2 - Regularização indireta para o problema potencial de temperatura

A equação integral de contorno, a partir da segunda identidade de Green, para problema potencial de temperatura é:

$$C\psi(x_0) = \int_{\Gamma} \phi(X, x_0) \frac{\partial \psi}{\partial n}(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \psi(X) \frac{\partial \phi}{\partial n}(X, x_0) d\Gamma(X) \quad (5.1)$$

onde a função $\phi(X, x_0)$ é a solução fundamental dada por:

$$\phi(X, x_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{r(X, x_0)} \right] \quad (5.2)$$

Sendo X e x_0 os pontos campo e fonte, respectivamente, $r(X, x_0)$ o raio (distância) entre os pontos X e x_0

Considerando o ponto fonte x_0 fora do domínio, a constante C vale 1. Movendo o ponto x_0 até um ponto localizado no contorno, d_0 , a singularidade presente no núcleo da equação (5.1) pode ser tratada apenas com o artifício de somar e subtrair o termo $\psi(d_0)$ na segunda integral do lado direito da equação (5.1) da seguinte forma (ver KANE [2]):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \psi(X) \frac{\partial \phi}{\partial n}(X, x_0) d\Gamma(X) &= \int_{\Gamma} [\psi(X) - \psi(d_0)] \frac{\partial \phi}{\partial n}(X, x_0) d\Gamma(X) + \\ &+ \psi(d_0) \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n}(X, x_0) d\Gamma(X) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Considerando a condição de Holdes, ou seja, se a função ψ tem aproximação contínua no ponto d_0 , então o termo $[\psi(X) - \psi(d_0)]$ tem aproximação para zero semelhante a $(X - d_0)$. Assim, o último termo do lado direito da equação (5.3) permanece singular, porém agora de forma simplificada. Este processo é conhecido como o isolamento da singularidade da equação integral de contorno. Substituindo o resultado desta aplicação (5.3) na equação (5.1), tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(x_0) &= \int_{\Gamma} \phi(X, x_0) \frac{\partial \psi}{\partial n}(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} [\psi(X) - \psi(d_0)] \frac{\partial \phi}{\partial n}(X, x_0) d\Gamma(X) + \\ &- \psi(d_0) \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n}(X, x_0) d\Gamma(X) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Desde que a equação (5.4) produza uma resposta constante para qualquer objeto, então esta resposta pode ser caracterizada como uma solução simples do tipo $\psi = Ct$, onde Ct é uma constante qualquer, como temperatura por exemplo. Deve-se notar que esta temperatura Ct satisfaz a equação diferencial de Laplace, ou seja, $\nabla^2 \phi = 0$. Substituindo a relação $\psi = Ct$ na equação (5.4), tem-se:

$$Ct = \int_{\Gamma} \phi(X, x_0) 0 d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} (0) \frac{\partial \phi}{\partial n}(X, x_0) d\Gamma(X) - Ct \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n}(X, x_0) d\Gamma(X) \quad (5.5)$$

Realizando as operações algébricas na equação acima (5.5), tem-se:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n}(X, x_0) d\Gamma(X) = -\frac{Ct}{Ct} = -1 \quad (5.6)$$

Substituindo a relação (5.6) na equação (5.4), pode-se, agora, escrever a equação integral de contorno para o problema potencial da seguinte forma:

$$\psi(x_0) - \psi(d_0) = \int_{\Gamma} \phi(X, x_0) \frac{\partial \psi}{\partial n}(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} [\psi(X) - \psi(d_0)] \frac{\partial \phi}{\partial n}(X, x_0) d\Gamma(X) \quad (5.7)$$

O limite das integrais da expressão (5.7) pode agora ser tomado como o ponto x_0 aproximando do ponto no contorno d_0 . Nota-se que a nova equação integral de contorno (5.7) contém integrandos que são, no máximo, fracamente singulares e, portanto, podem ser integrados numericamente. Assim, pode-se dizer que a equação intergral de contorno acima foi regularizada.

A implementação desta técnica na rotina dos programas se dá de uma forma prática, ou seja, ao fixar o ponto de colocação e percorrer todos os pontos do contorno, basta apenas subtrair as contribuições destes pontos na diagonal da matriz H. Esta característica define o termo regularização indireta.

5.3 - Regularização Indireta para problemas de Elasticidade

Da mesma forma do tratamento do potencial, a técnica da regularização indireta é aplicada a problemas planos de elasticidade (deslocamentos e trações).

A técnica consiste em reduzir a forte singularidade presente na solução fundamental para o núcleo P_{ij}^* devido a relação $\frac{1}{r^2}$, quando o limite da equação integral de contorno (4.39), demonstrada no capítulo 4 é feito $x_0 \rightarrow X$, ou seja, a distância dos dois pontos tende a zero $r \rightarrow 0$.

Análogo ao comportamento do problema potencial, inicialmente pode-se considerar o ponto fonte x_0 no interior do domínio, então, da equação (4.39), tem-se $C=1$, assim, reescrevendo a equação (4.39) do capítulo 4, tem-se:

$$u_i(x_0) + \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X)] = \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(X, x_0) p_j(X) d\Gamma(X)]$$

É observado o comportamento singular à medida que o ponto fonte x_0 se aproxima de um ponto no contorno d_0 . Da mesma forma como no problema potencial, é feito o procedimento em que se faz a soma e a subtração de $u_i(d_0)$ na integral da solução fundamental P_{ij}^* da equação de deslocamentos (4.39).

$$\int_{\Gamma} U_{ij}^*(X, x_0) p_j(X) d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} P_{ij}^*(X, x_0) [u_j(X) - u_j(d_0)] d\Gamma(X) + u_j(d_0) \int_{\Gamma} P_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X) + u_i(x_0) \quad (5.8)$$

Substituindo-se a solução associada com o movimento de corpo rígido $u_i = a_i$ na equação anterior (5.8) chega a.

$$0 = a_j \int_{\Gamma} P_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X) + a_i \quad (5.9)$$

$$\int_{\Gamma} P_{ij}^*(X, x_0) d\Gamma(X) = -\frac{a_i}{a_j} = -\delta_{ij} \quad (5.10)$$

Substituindo a relação dada por (5.10) na equação (5.8), obtém-se a regularização da equação integral de contorno para deslocamentos:

$$u_j(x_0) - u_j(d_0) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(X, x_0) [u_j(X) - u_j(d_0)] d\Gamma(X) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(X, x_0) P_j(X) d\Gamma(X) \quad (5.11)$$

É importante observar que quando o ponto x_0 aproxima-se do ponto d_0 , o primeiro termo do lado direito da equação (5.11) anula-se.

6 - TÉCNICA DA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

6.1 - Introdução

Como já foi apresentado no capítulo 4, quando o ponto de colocação não pertence ao elemento que está sendo integrado, ou seja, quando ponto fonte x_0 e o ponto campo X não coincidem, as integrais de contorno podem ser tratadas por técnicas numéricas.

Por outro lado, quando o ponto de colocação pertence ao elemento que está sendo integrado, ou seja, ponto fonte x_0 e o ponto campo X coincidem, os núcleos das integrais podem ser solucionados por equações analíticas ou pela técnica de regularização. Neste trabalho foi adotada a técnica da regularização para a equação de deslocamentos.

Uma particularidade observada neste trabalho é em relação aos elementos descontínuos, com a presença de nós duplos. Neste caso, o ponto de colocação é deslocado para dentro do elemento que está sendo integrado e o elemento é dividido em elementos menores, os quais se convencionou chamar de sub-elementos. Observou-se com aplicação desta técnica uma melhora nos resultados obtidos.

6.2 - Quadratura Gaussiana Ordinária

Para elementos constantes ou lineares, quando usados na discretização do contorno, é possível utilizar equações analíticas na formulação das equações integrais de contorno, obtendo respostas precisas.

Por outro lado, no caso de elementos de ordem superior, torna-se muito complexo a aplicação destas integrais analíticas. Para este caso, a técnica da integração numérica é utilizada.

Uma técnica muito utilizada é a regra de Simpson para integrar funções com uma variável singular independente e pode ser adaptada para duas variáveis independentes, isto é, integrais bidimensionais. A desvantagem deste método é que a função a ser integrada é aplicada somente a intervalos fixos e torna-se mais trabalhosa para equações integrais de ordem superior.

Outra técnica numérica muito difundida, utilizada neste trabalho, é a quadratura de Gauss. Esta técnica proporciona resoluções de mesma precisão que a regra de Simpson, porém, as funções são resolvidas para intervalos não necessariamente fixos, ou seja, tem-se maior controle na localização dos pontos que definem o intervalo a ser integrado, o que é uma vantagem quando os pontos, por exemplo, são colocados diretamente sobre os nós de um elemento de contorno. Como foi demonstrada em KANE [2] e BECKER [31], a quadratura de Gauss é uma das técnicas mais eficientes para integração numérica de funções polinomiais.

A quadratura de Gauss consiste em solucionar o valor de uma dada equação integral por aproximação através da integração de uma função polinomial em um intervalo padronizado de -1 até $+1$.

A função polinomial, descrita dentro do limite de integral padronizado, é calculada para um certo número de pontos Gaussianos, conhecidos como coordenadas Gaussianas. Nestes pontos a função é multiplicada por uma função ponderadora denominada peso. Após cada

operação de multiplicação da função pelo peso, o resultado é somado sucessivamente a fim de calcular a integral.

Os pontos de Gauss e as funções peso são otimizados de tal forma a dar a melhor precisão possível, ou seja, quanto maior o número de pontos de Gauss utilizados, melhor será a precisão nas respostas.

A equação (6.1) representa o método da quadratura Gaussiana para uma função com uma variável independente singular:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{g=1}^G f(\xi_g) W_g \quad (6.1)$$

Onde G é o número total dos pontos de Gauss, ξ_g as coordenadas dos pontos de Gauss e W_g está associado a função peso.

A função 6.1 para quatro pontos de Gauss pode ser representada graficamente:

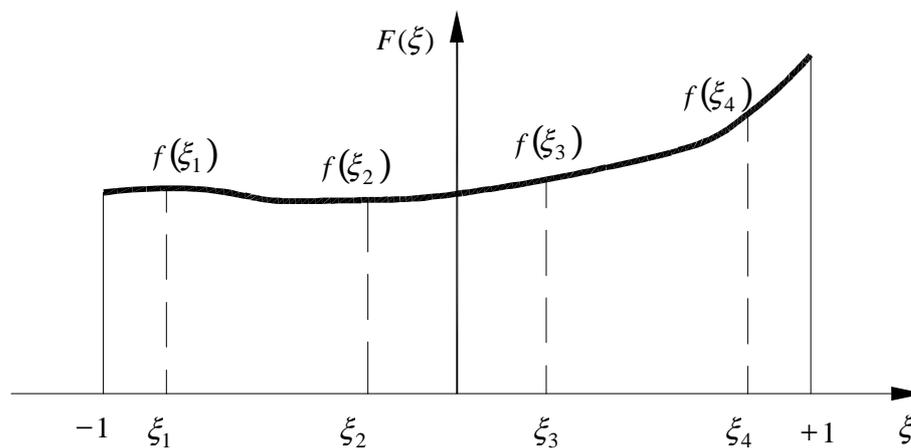


Figura 6.1 – Função integral com quatro pontos de Gauss.

Para função com duas variáveis independentes, a equação (6.1) é facilmente adaptada:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{m=1}^{G_m} \sum_{n=1}^{G_n} f(\xi_m, \xi_n) W_n W_m \quad (6.2)$$

Como já foi mencionada, a técnica da quadratura de Gauss apresenta resultados com precisão quando o ponto de colocação não pertence ao elemento que está sendo integrado.

Quando o ponto de colocação pertencer ao elemento, a singularidade presente nos núcleos das integrais, para valores de deslocamentos e tensões em pontos internos, é tratada pela técnica da regularização, vista no capítulo 5, permitindo, assim, o uso da quadratura de Gauss. Entretanto, observou-se neste trabalho a necessidade de adotar algumas particularidades expostas a seguir.

As equações que definem as sub-matrizes H e G dadas em (4.52) e (4.53), respectivamente e repetidas abaixo são:

$$H_{ij}^k = \int_{-1}^{+1} P_{ij}^*(X, x_0) \varphi_k J(\xi) d\xi$$

$$G_{ij}^k = \int_{-1}^{+1} U_{ij}^*(X, x_0) \varphi_k J(\xi) d\xi$$

Para o caso de elemento linear, que é definido por nó inicial i e nó final j , tomando as equações acima e considerando, por exemplo, que o ponto de colocação está no nó inicial i , a variável k vale 2 na primeira equação (4.52), então os coeficientes da matriz H existem apenas para o nó final j , ou seja, há contribuições apenas para o nó final. Já para a segunda equação (4.53), a variável k varia de 1 até 2, ou seja, todos os coeficientes da matriz G são diferentes de zero.

Já no caso do ponto de colocação coincidir com o nó final j , as contribuições calculadas na sub-matriz H serão apenas para o nó inicial i .

Para o caso de elementos quadráticos contínuos, delimitados por nó inicial i , nó médio m e nó final j , todos coeficientes das matrizes H e G são calculados. Neste caso, para os coeficientes da matriz G , os parâmetros utilizados para cálculo da integral são os mesmos definidos no capítulo 4, porém, para os coeficientes da matriz H , os parâmetros, demonstrados em BONNET [29], são definidos da seguinte forma:

Considerando o elemento quadrático da figura 6.2:

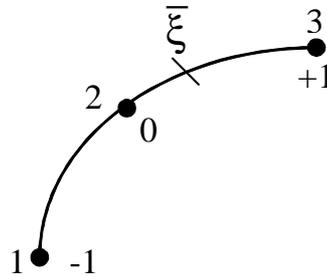


Figura 6.2 – Elemento quadrático

Onde 1, 2, 3 são os nós inicial, médio e final do elemento e $\bar{\xi}$ é a coordenada do ponto de colocação no interior do elemento quadrático que está sendo integrado, com origem no nó central 2.

Partindo das equações (4.42) e (4.43) que definem as coordenadas dos pontos locais ξ , demonstradas no capítulo 4:

$$X(\xi) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) X_i = \varphi_1(\xi) X_1 + \varphi_2(\xi) X_2 + \varphi_3(\xi) X_3$$

$$Y(\xi) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) Y_i = \varphi_1(\xi) Y_1 + \varphi_2(\xi) Y_2 + \varphi_3(\xi) Y_3$$

e das equações que definem as coordenadas o ponto de colocação $\bar{\xi}$:

$$X(\bar{\xi}) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\bar{\xi}) X_i = \varphi_1(\bar{\xi}) X_1 + \varphi_2(\bar{\xi}) X_2 + \varphi_3(\bar{\xi}) X_3 \quad (6.3)$$

$$Y(\bar{\xi}) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\bar{\xi}) Y_i = \varphi_1(\bar{\xi}) Y_1 + \varphi_2(\bar{\xi}) Y_2 + \varphi_3(\bar{\xi}) Y_3 \quad (6.4)$$

Fazendo a subtração das equações (4.42) e (4.43) pelas equações (6.3) e (6.4), tem-se:

$$X(\xi) - X(\bar{\xi}) = (\varphi_1(\xi) - \varphi_1(\bar{\xi}))X_1 + (\varphi_2(\xi) - \varphi_2(\bar{\xi}))X_2 + (\varphi_3(\xi) - \varphi_3(\bar{\xi}))X_3 \quad (6.5)$$

$$Y(\xi) - Y(\bar{\xi}) = (\varphi_1(\xi) - \varphi_1(\bar{\xi}))Y_1 + (\varphi_2(\xi) - \varphi_2(\bar{\xi}))Y_2 + (\varphi_3(\xi) - \varphi_3(\bar{\xi}))Y_3 \quad (6.6)$$

Sendo as funções de forma φ_i (4.46) para os elementos quadráticos, apresentadas no capítulo 4, como:

$$\varphi_1(\xi) = \xi \left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\varphi_2(\xi) = (1 + \xi)(1 - \xi)$$

$$\varphi_3(\xi) = \xi \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

Para encontrar as novas funções de forma aplicadas para o elemento quadrático, deve-se, primeiro, substituir nas equações acima ξ por $\bar{\xi}$ formando, assim novas equações:

$$\varphi_1(\bar{\xi}) = \bar{\xi} \left(\frac{\bar{\xi}}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\varphi_2(\bar{\xi}) = (1 + \bar{\xi})(1 - \bar{\xi})$$

$$\varphi_3(\bar{\xi}) = \bar{\xi} \left(\frac{\bar{\xi}}{2} + \frac{1}{2} \right) \quad (6.7)$$

Em seguida faz-se a subtração das equações (4.46) pelas novas equações (6.7), finalmente tem-se:

$$\varphi\varphi_1(\xi - \bar{\xi}) = (\xi - \bar{\xi}) \cdot \frac{1}{2} [(\xi + \bar{\xi}) - 1]$$

$$\varphi\varphi_2(\xi - \bar{\xi}) = -(\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi})$$

$$\varphi\varphi_3(\xi - \bar{\xi}) = (\xi - \bar{\xi}) \cdot \frac{1}{2} [(\xi + \bar{\xi}) + 1] \quad (6.8)$$

sendo $\varphi\varphi_i$ as função de forma modificadas aplicada ao elemento quadrático contínuo.

As coordenadas dos pontos de Gauss, agora, são definidas pelas novas funções de forma $\varphi\varphi_i$, ficando:

$$X(\xi - \bar{\xi}) = \varphi\varphi_1(\xi - \bar{\xi})X_1 + \varphi\varphi_2(\xi - \bar{\xi})X_2 + \varphi\varphi_3(\xi - \bar{\xi})X_3 \quad (6.9)$$

$$Y(\xi - \bar{\xi}) = \varphi\varphi_1(\xi - \bar{\xi})Y_1 + \varphi\varphi_2(\xi - \bar{\xi})Y_2 + \varphi\varphi_3(\xi - \bar{\xi})Y_3 \quad (6.10)$$

Todos os demais parâmetros para a integração do núcleo são em função das equações (6.9) e (6.10).

A técnica descrita anteriormente contém a regularização indireta quando se faz $\xi - \bar{\xi}$ e permite tratar, assim, a singularidade presente no núcleo.

6.3 - Sub-Elementos

No caso de elementos quadráticos contínuos, para os coeficientes da matriz H, basta aplicar a técnica tratada no item 6.2, porém, quando o elemento que está sendo integrado é quadrático descontínuo, verificou-se a necessidade de dividi-lo em sub-elementos.

Seja, por exemplo, o elemento quadrático definido no intervalo de -1 até $+1$, indicado na figura 6.3, usando agora a coordenada intrínseca ξ . O elemento é dividido em três sub-elementos da seguinte forma:

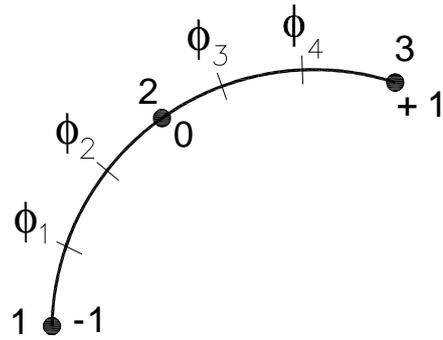


Figura 6.3 – Elemento quadrático dividido em sub-elementos

Onde os três novos elementos são:

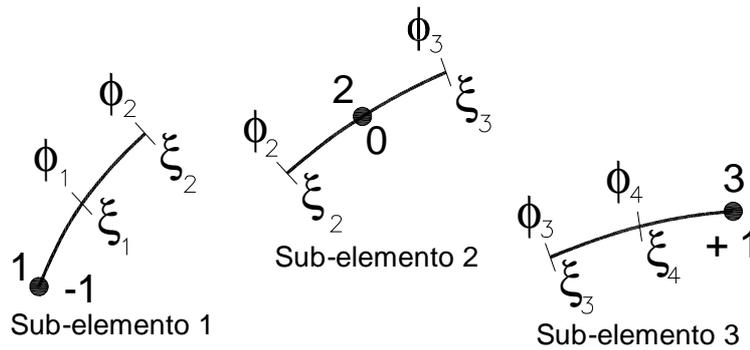


Figura 6.4 – Sub-elementos.

As posições dos pontos de colocação ϕ_i são definidas pelas funções de forma dada em (4.46) no capítulo 4 e pelas variáveis intrínsecas ξ_i , que valem, neste caso:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= -1 \\
 \xi_2 &= -2/3 \\
 \xi_3 &= -1/3 \\
 \xi_4 &= 0 \\
 \xi_5 &= +1/3 \\
 \xi_6 &= +2/3 \\
 \xi_7 &= +1
 \end{aligned}
 \tag{6.11}$$

Aplicando os valores da variável ξ_i nas equações (4.42) e (4.43) demonstradas no capítulo 4, pode-se determinar as coordenadas $X(\xi)$ e $Y(\xi)$ dos pontos dos sub-elementos e com isso, definir os parâmetros necessários para o cálculo dos núcleos das integrais.

Cada sub-elemento é resolvido independentemente, onde sempre o ponto de colocação coincide com o nó central do sub-elemento. Para este nó, é usada a técnica de integração utilizando o conceito demonstrado no item 6.2, ou seja, com as funções de forma modificadas $\varphi\varphi_i$. Neste caso variável intrínseca $\bar{\xi}$ tem valor zero.

Para os outros dois nós do sub-elemento que está sendo integrado, é utilizado a integração numérica pelo método da quadratura de Gauss.

Para cada sub-elemento integrado, as contribuições calculadas são espalhadas para os demais nós do elemento original através das funções de forma definidas em (4.46).

6.4 - Programas usados no trabalho

No trabalho foram desenvolvidos três programas aplicados nos problemas de elasticidade.

O primeiro programa usa elementos isoparamétricos quadráticos na análise de deslocamentos e tensões. Neste programa são obtidos valores de deslocamentos para pontos internos ao domínio e para pontos sobre o contorno. Os valores de tensões, neste programa, são obtidos apenas para pontos internos ao domínio.

O segundo programa usa elementos isoparamétricos lineares, na análise de deslocamentos e tensões em pontos internos ao domínio e em pontos no contorno. Este programa segue a mesma estratégia do programa para elementos quadráticos, apenas algumas sub-rotinas são diferentes daquelas apresentadas no primeiro programa.

No terceiro programa são usadas as duas equações integrais, uma para deslocamento e outra para forças de superfície. O programa é usado para estudo da mecânica da fratura elástico linear e podem ser determinados os fatores de intensidade de tensão e de deslocamentos em pontos internos.

Para efeito de ilustração é apresentado na figura 6.5 o fluxograma da montagem do primeiro programa, que parte de um arquivo de dados montado previamente. Na seqüência, as sub-rotinas do primeiro programa e as diferentes sub-rotinas usadas nos outros dois programas serão explicadas de maneira bastante sucinta.

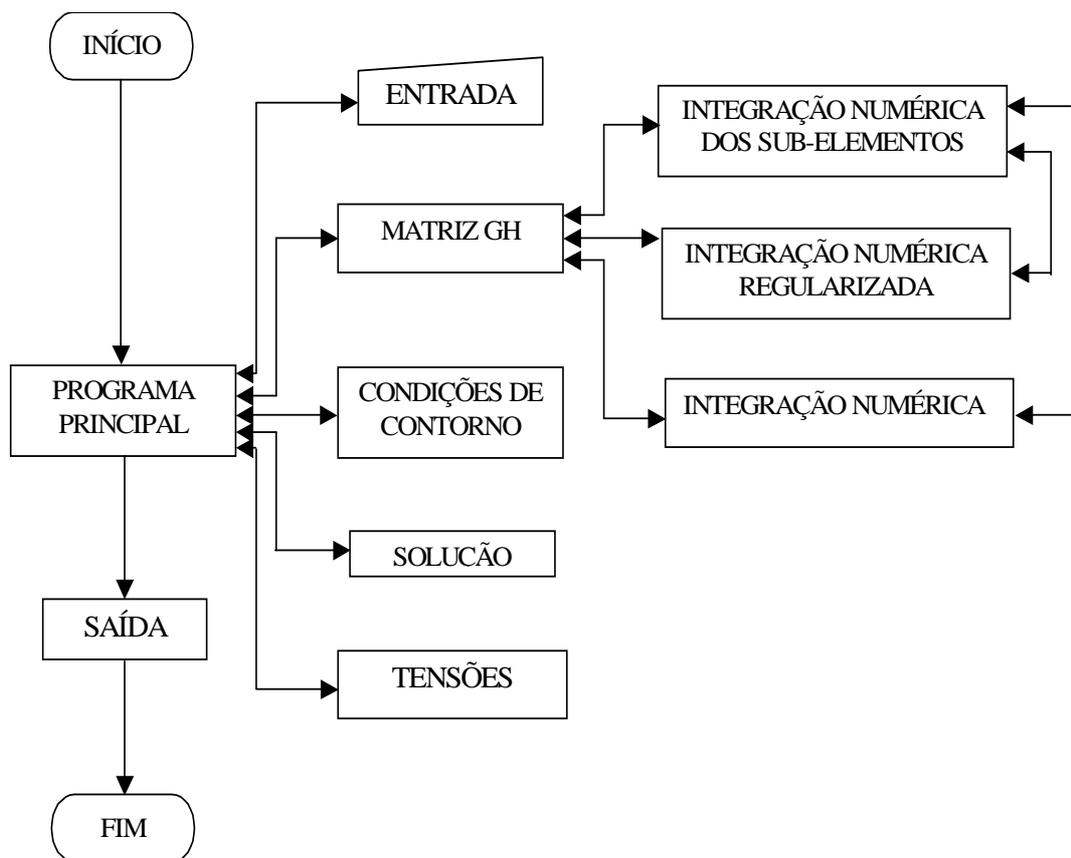


Figura 6.5 – Fluxograma do programa de elasticidade que usa elementos quadráticos.

A sub-rotina PROGRAMA administra todas as sub-rotinas usadas no programa e ao final monta o arquivo de saída, que contém os dados de entrada e os resultados de deslocamentos e tensões obtidos pelo programa.

A sub-rotina ENTRADA faz a leitura de todos os dados, relacionados com o problema, necessários para a execução do programa. A leitura é feita a partir de um arquivo montado previamente por um editor de texto. Os dados lidos são, entre outros, o número de nós de contorno, número de nós internos ao domínio, leitura dos elementos de contorno com seus nós inicial, central e final e, também, a leitura das propriedades do material.

A sub-rotina MATRIZ GH monta as matrizes globais G e H da estrutura. Nesta sub-rotina, os pontos de colocação têm suas coordenadas armazenadas em vetores para a integração. Quando há presença de nós duplos, estes são deslocados de $1/6$ do comprimento do elemento concorrente ao nó duplo. Ainda nesta sub-rotina é efetuado o teste se o elemento que está sendo integrado possui o ponto de colocação. Caso afirmativo, a sub-rotina usa outra sub-rotina auxiliar, a sub-rotina INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DOS SUB-ELEMENTOS, que trata os elementos descontínuos, ou seja, que possuem nós duplos. Esta sub-rotina está ligada diretamente com as outras duas sub-rotinas que auxiliam a sub-rotina Matriz GH e usa a técnica dos sub-elementos, mostrada no item 6.3 do capítulo 6. A sub-rotina INTEGRAÇÃO NUMÉRICA REGULARIZADA é usada para elementos contínuos, onde é aplicada a equação integral de deslocamentos regularizada escrita em termos das funções de forma modificadas, conforme mostradas no item 6.2 do capítulo 6.

A sub-rotina INTEGRAÇÃO NUMÉRICA, que emprega a técnica da quadratura de Gauss-Legendre, é usada quando o ponto de colocação não pertence ao elemento que está sendo integrado.

Para o programa que usa elementos isoparamétricos lineares, a sub-rotina MATRIZ GH tem praticamente as mesmas características da sub-rotina usada no primeiro programa. Neste segundo programa, a sub-rotina identifica em que nó, inicial ou final do elemento que está sendo

integrado, o ponto de colocação se encontra. Em seguida usa-se a sub-rotina auxiliar INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NÓS DUPLOS, quando há a presença de nós duplos. Nesta sub-rotina, após o ponto de colocação ser deslocado para dentro do elemento, conforme demonstrado no item 4.6 do capítulo 4, o elemento é dividido em dois sub-elementos e ao final deste processo o programa usa a sub-rotina INTEGRAÇÃO NUMÉRICA que emprega a técnica da quadratura de Gauss-Legendre. Em ambas sub-rotinas de integração é usada a técnica da regularização, conforme descrito no item 6.2 do capítulo 6. No caso do programa tratar problemas que usam apenas elementos contínuos, a sub-rotina MATRIZ GH usa diretamente a sub-rotina INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.

No terceiro programa, a sub-rotina MATRIZ GH difere das outras usadas nos dois programas, quando usa a equação integral de deslocamento e a equação integral de forças de superfície para tratar problemas com trinca. Nesta sub-rotina é realizado o teste se o ponto de colocação pertence ao elemento que está sendo integrado. Caso afirmativo, as equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície empregam a formulação das integrais analíticas. Caso o elemento que está sendo integrado não contenha o ponto de colocação, as equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície são tratadas numericamente. Neste programa a técnica da regularização indireta não foi desenvolvida.

A sub-rotina CONDIÇÕES DE CONTORNO impõe as condições de contorno do problema, ou seja, organiza o sistema de equações conforme os valores prescritos e as incógnitas.

A sub-rotina SOLUÇÃO resolve o sistema de equações montado anteriormente.

A sub-rotina TENSÕES calcula os valores de tensões em pontos internos, a partir dos valores de deslocamentos encontrados anteriormente e com o uso das duas equações integrais de tensões, a hipersingular e a que usa o operador diferencial tangente.

7 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

7.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos de problemas do estado plano de tensão e deformação para demonstrar a aplicação do método dos elementos de contorno à elasticidade.

Os problemas envolvem elementos contínuos e descontínuos lineares e quadráticos na discretização do contorno.

Nos problemas que se usou a equação de deslocamentos como base para montagem do sistema de equações as singularidades foram tratadas através do processo de regularização indireta mostrada no capítulo 5. Na modelagem numérica as equações integrais de deslocamentos fizeram uso de elementos isoparamétricos lineares ou quadráticos.

Quando se usou o método das duas equações integrais, a equação integral de deslocamentos e a equação integral de forças de superfície, as singularidades foram tratadas pelo valor principal de Cauchy quando a equação integral de superfície empregou o operador diferencial tangente. Para a equação integral de deslocamentos foram usadas expressões analíticas.

Quando o elemento que está sendo integrado não contém o ponto de colocação, a equação integral de forças de superfície não empregou o operador diferencial tangente mas usou a singularidade forte do tipo $1/r^2$, a integral analítica foi feita com base no valor principal de Hadamard. A equação integral de deslocamentos, neste caso, foi tratada numericamente.

Para resultados de tensões em pontos no contorno, o sistema foi montado empregando o operador diferencial tangente na equação integral de tensões. Quando ocorre singularidade são empregadas expressões analíticas.

Por outro lado, para fins de comparação são apresentados resultados de tensões para pontos no contorno usando a equação integral de tensão que emprega a singularidade forte do tipo $1/r^2$. Da mesma forma, para tratar as singularidades são empregadas expressões analíticas.

Cada exemplo estudado tem suas respostas comparadas com as soluções analíticas apresentadas na bibliografia utilizada. Isso torna a comparação confiável para os resultados apresentados.

Na integração numérica dos exemplos foram utilizados 8 pontos de Gauss.

7.2 - Definição da posição dos Pontos de Colocação em Elementos Lineares e Quadráticos

Como exposto nos capítulos anteriores, a posição dos pontos de colocação nos elementos lineares e quadráticos é determinada com a seguinte estratégia:

Os pontos de colocação coincidem com os nós de contorno dos elementos contínuos do tipo linear ou quadrático.

No caso de elementos lineares descontínuos, os pontos de colocação são deslocados para dentro dos elementos a uma distancia de $\frac{1}{6}$ do comprimento (L) do elemento, ilustrado pelas figuras 7.1 e 7.2 abaixo:

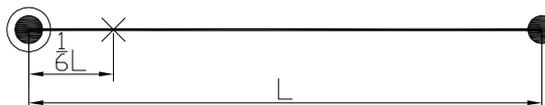


Figura 7.1 – Elemento linear com nó duplo inicial.



Figura 7.2 – Elemento linear com nó duplo final.

No caso de elementos quadráticos descontínuos, os pontos de colocação são deslocados para dentro do elemento a uma distancia de $\frac{1}{6}$ do comprimento (L) do elemento. Quando se usa a técnica da regularização indireta, o ponto de colocação é posicionado no nó central do elemento.

7.3 - Exemplos de problemas em Estado Plano de Tensão

Neste item são mostrados alguns exemplos de chapas solicitadas nas bordas e com restrição ao deslocamento. As condições de contorno necessárias para a montagem das matrizes [H] e [G], descritas no item 4.7.3 do capítulo 4, podem ser ilustradas, tomando como base o primeiro exemplo de chapas, das figuras 7.3 a 7.5, onde os dois lados paralelos ao eixo X e o lado

paralelo ao eixo Y, correspondente ao intervalo dos nós 10 ao 18, possuem forças superficiais prescritas, nulas e não nulas. Portanto as incógnitas a serem determinadas são de deslocamentos. O lado paralelo ao eixo Y, delimitado do nó 28 ao nó 36, possui deslocamentos prescritos em uma direção e forças nulas prescritas na outra direção. Neste exemplo apenas um nó tem deslocamentos prescritos em ambas direções, neste caso impedido de deslocar.

O mesmo raciocínio é aplicado aos demais exemplos de chapas, conforme cada ilustração. A simbologia dos apoios ilustrada nos exemplos determina que todos os nós daquele lado da chapa possuem, ao menos, uma direção impedida de deslocar.

7.3.1 - Exemplos de Chapas quadradas

Os exemplos de chapas quadradas são extraídos dos trabalhos de FIGUEIREDO E ALMEIDA [26] e BREBBIA *et al* [30]. A chapa usada nos dois exemplos, ilustrada na figura 7.3, é solicitada em estado plano de tensão, onde as propriedades do material adotadas nestes exemplos são as mesmas usadas nas fontes literárias para efeito de comparação de resultados:

$$E = 5 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

As forças aplicadas no contorno são $p=2 \text{ kN/m}^2$ e o lado da chapa tem 4,00m. Para os exemplos de chapas analisados foram usadas as mesmas discretizações de malhas dos exemplos apresentados na referência bibliográfica. Foram usados 32 elementos de contorno para elementos lineares e 16 elementos de contorno quadráticos. Nos dois casos foram usados 36 nós de contorno e considerados elementos contínuos e descontínuos, com presença de nós duplos concorrentes aos cantos da chapa, conforme ilustra a figura 7.4. Foram utilizados quatro pontos internos ao domínio para cálculos dos deslocamentos e tensões, dispostos de forma equidistante.

Com o objetivo de demonstrar a eficiência das equações de tensão (4.107) e (4.108), que é obtida a partir do operador tangente, os valores de tensões para pontos internos e no contorno para elementos lineares são comparados àqueles obtidos pela outra equação de tensão (4.75) e (4.94), de formulação hipersingular.

A figura 7.3 ilustra as posições dos pontos internos da chapa utilizada nos dois exemplos demonstrados neste item. Da mesma forma, a figura 7.4 ilustra a discretização da chapa nos dois exemplos.

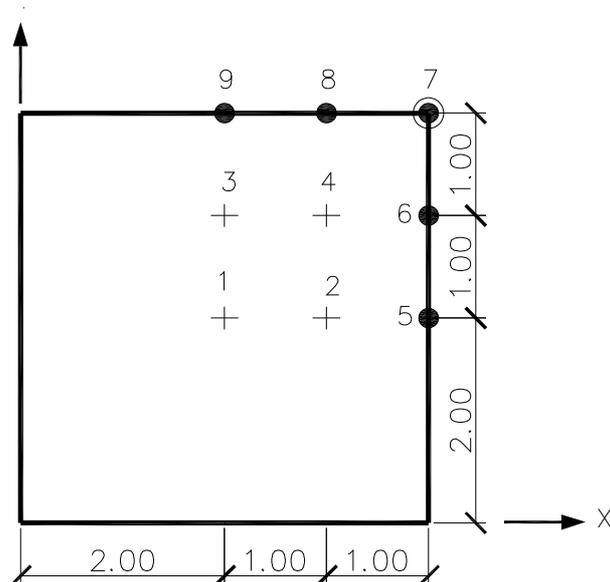


Figura 7.3 – Ilustração da chapa com a posição dos pontos internos e no contorno para o cálculo das tensões e deslocamentos.

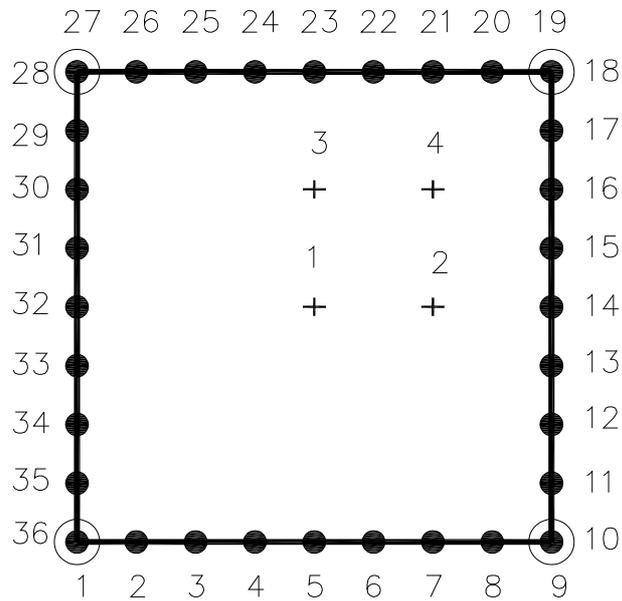


Figura 7.4 – Discretização da chapa com a posição dos nós de contorno, inclusive os nós duplos.

No primeiro exemplo tem-se o carregamento na chapa no sentido do eixo x, conforme ilustra a figura 7.5. Todos os nós do lado oposto ao carregamento têm deslocamentos impedidos no eixo x, exceto o nó central, que possui deslocamento impedido em ambas direções. Os resultados obtidos do primeiro exemplo são comparados com aqueles demonstrados no trabalho de FIGUEIREDO E ALMEIDA [26] cujas soluções analíticas são obtidas do trabalho de TIMOSHENKO [32].

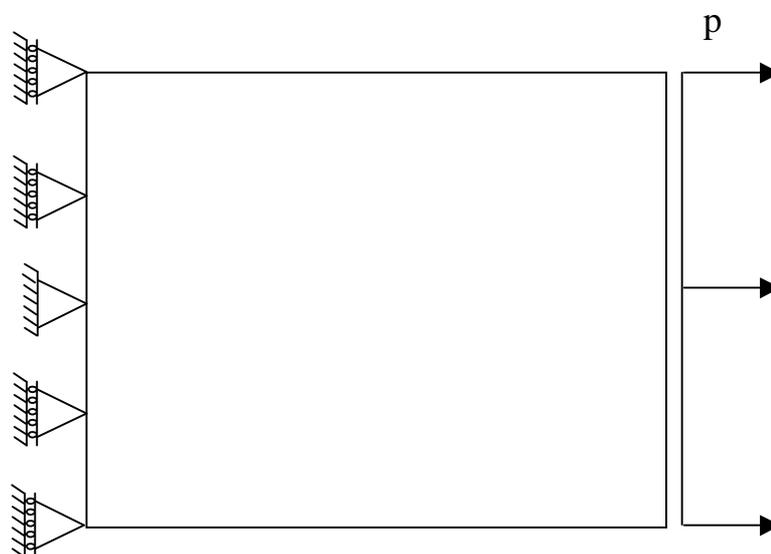


Figura 7.5 – Ilustração do carregamento e apoios da chapa.

Na tabela 7.1 são apresentados os valores de deslocamentos nos pontos internos para elementos quadráticos. Na tabela 7.2 são apresentados os valores de deslocamentos para nós no contorno. Os deslocamentos obtidos em pontos internos e no contorno para elementos lineares a partir da equação de deslocamentos, estão apresentados nas tabelas 7.3 e 7.4. Todos os valores de deslocamentos foram obtidos a partir da equação integral de deslocamentos regularizada.

Tabela 7.1 – Deslocamentos nos pontos internos para elementos quadráticos (m).

Pontos internos	solução analítica apresentada em [26]		elementos quadráticos		Diferença (%)	
	U _x	U _y	U _x	U _y	U _x	U _y
1	0,8000	0,0000	0,7983	0,0000	0,2115	0,0000
2	1,2000	0,0000	1,1987	0,0000	0,1045	0,0000
3	0,8000	-0,1200	0,7983	-0,1199	0,2115	0,0659
4	1,2000	-0,1200	1,1987	-0,1199	0,1045	0,0659

Tabela 7.2 – Deslocamentos nos pontos no contorno para elementos quadráticos (m).

Pontos no contorno	solução analítica apresentada em [26]		elementos quadráticos		Diferença (%)	
	Ux	Uy	Ux	Uy	Ux	Uy
5	1,6000	0,0000	1,5999	0,0000	0,0053	0,0000
6	1,6000	-0,1200	1,5999	-0,1207	0,0053	0,6034
7	1,6000	-0,2400	1,6032	-0,2405	0,2041	0,1988
8	1,2000	-0,2400	1,1987	-0,2398	0,1061	0,0878
9	0,8000	-0,2400	0,7983	-0,2398	0,2118	0,0869

Tabela 7.3 – Deslocamentos, obtidos a partir da equação de deslocamentos, nos pontos internos para elementos lineares (m).

Pontos internos	solução analítica apresentada em [26]		elementos lineares - Eq. deslocamentos		Diferença (%)	
	Ux	Uy	Ux	Uy	Ux	Uy
1	0,8000	0,0000	0,8000	0,0000	0,0000	0,0000
2	1,2000	0,0000	1,2000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,8000	-0,1200	0,8000	-0,1200	0,0000	0,0000
4	1,2000	-0,1200	1,2000	-0,1200	0,0000	0,0000

Tabela 7.4 – Deslocamentos, obtidos a partir da equação de deslocamentos, nos pontos no contorno para elementos lineares (m).

Pontos no contorno	solução analítica apresentada em [26]		elementos lineares - Eq. deslocamentos		Diferença (%)	
	Ux	Uy	Ux	Uy	Ux	Uy
5	1,6000	0,0000	1,5999	0,0000	0,0052	0,0000
6	1,6000	-0,1200	1,5999	-0,1200	0,0052	0,0000
7	1,6000	-0,2400	1,6000	-0,2400	0,0000	0,0000
8	1,2000	-0,2400	1,2000	-0,2400	0,0000	0,0000
9	0,8000	-0,2400	0,8000	-0,2400	0,0000	0,0000

Na tabela 7.5 são apresentados os valores de tensões nos pontos internos, para elementos quadráticos e lineares, no sentido do carregamento. Para os elementos lineares foi usada a formulação da equação integral de deslocamentos regularizada. Na tabela 7.6 são apresentados os valores de tensões para pontos no contorno usando a mesma formulação.

Tabela 7.5 – Tensões nos pontos internos, onde para elem. lineares foi usada a formulação da equação de deslocamentos regularizada (kN/m²).

Pontos internos	solução analítica [26]	elementos quadráticos - Equação (4.75)	elementos lineares, usando equação (4.75)	Diferença (%) para elem. Quad.	Diferença (%) para elem. lineares.
	sigma xx	sigma xx	sigma xx	sigma xx	sigma xx
1	2,0000	1,9989	1,9999	0,0550	0,0050
2	2,0000	1,9989	1,9999	0,0550	0,0050
3	2,0000	1,9989	1,9999	0,0550	0,0050
4	2,0000	1,9989	1,9999	0,0550	0,0050

Tabela 7.6 – Tensões nos pontos no contorno para elem. Lineares, onde foi usada a formulação da equação de deslocamentos regularizada (kN/m²).

Pontos no contorno	solução analítica [26]	elementos lineares, usando equação (4.94)
	sigma xx	sigma xx
5	2,0000	2,0000
6	2,0000	2,0000
7	2,0000	2,0000
8	2,0000	2,0000
9	2,0000	2,0000

Pode-se perceber que os resultados obtidos de deslocamentos e tensões são muito próximos aos resultados apresentados no trabalho de FIGUEIREDO E ALMEIDA [26], com diferenças inferiores a 0,5%. É importante observar que os resultados de deslocamentos obtidos pela formulação usando elementos lineares e quadráticos empregou a equação integral de deslocamentos regularizada ao passo que os resultados obtidos no trabalho FIGUEIREDO E ALMEIDA [26], as singularidades foram tratadas com expressões analíticas.

Percebe-se, ainda, que os resultados foram melhores quando se usou a formulação com elementos lineares comparados com aqueles que usou elementos quadráticos, devido à geometria do modelo estudado.

No segundo exemplo, extraído do trabalho de BREBBIA *et al* [30], tem-se carregamento nos dois sentidos do eixo X. Nos nós dos lados paralelos ao eixo x tem-se restrição ao deslocamento no sentido do eixo Y, conforme ilustrados na figura 7.6.

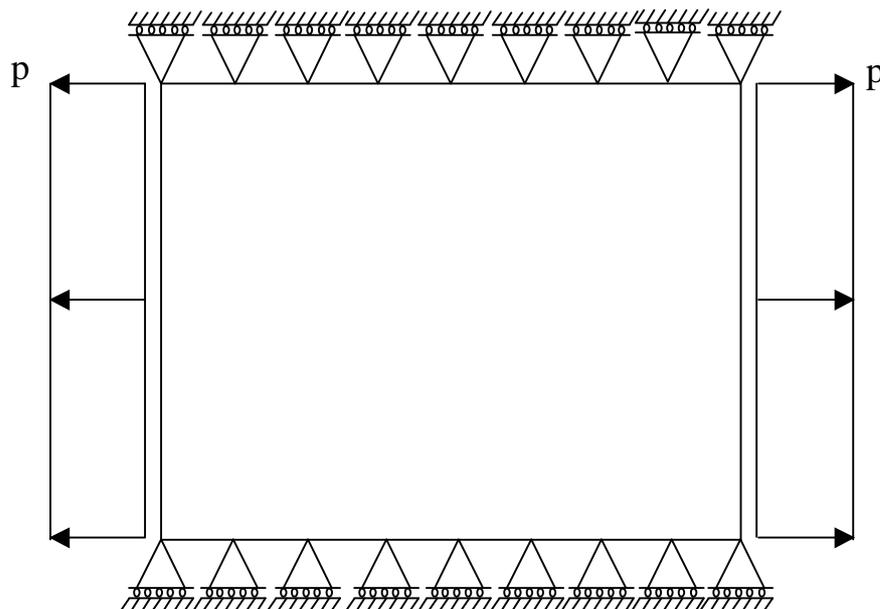


Figura 7.6 – Chapa com carregamento no eixo x nos dois sentidos e restrição no eixo y.

Neste exemplo, são apresentados os resultados dos deslocamentos na direção do carregamento para elementos quadráticos, onde se usou a equação integral de deslocamentos regularizada e para elementos lineares, onde foram usadas as duas formulações, a da equação integral de deslocamento regularizada e a da equação integral de forças de superfície. Também são apresentados os valores de tensões, na direção X e Y, nos pontos internos e no contorno obtidas pela equação de tensão hipersingular (4.75) e (4.94). São apresentados, ainda, os resultados das tensões obtidas pela equação que contém o operador tangente (4.107) e os valores são comparados com aqueles obtidos pela equação (4.75). Os resultados obtidos são comparados com os resultados previstos pela solução analítica, apresentados no trabalho de referência.

Tabela 7.7 – Deslocamentos na direção do carregamento nos pontos internos (m).

Pontos internos	solução analítica [30]	elementos quadráticos	elementos lineares-eq. desloc.	elementos lineares-eq. forças sup.	Diferença elem. Quad.(%)	Diferença elem.lineares-eq. desloc.(%)	Diferença elem.lineares-eq. forças sup.(%)
1	0,7280	0,7278	0,7279	0,7280	0,0227	0,0137	0,0000
2	1,0920	1,0922	1,0920	1,0920	0,0224	0,0000	0,0000
3	0,7280	0,7278	0,7279	0,7280	0,0227	0,0137	0,0000
4	1,0920	1,0922	1,0920	1,0920	0,0224	0,0000	0,0000

Tabela 7.8 – Deslocamentos na direção do carregamento nos pontos no contorno (m).

Pontos no contorno	solução analítica [30]	elementos quadráticos	elementos lineares-eq. desloc.	elementos lineares-eq. forças sup.	Diferença elem. Quad.(%)	Diferença elem.lineares-eq. desloc.(%)
5	1,4560	1,4571	1,4561	1,4560	0,0779	0,0069
6	1,4560	1,4571	1,4561	1,4560	0,0779	0,0069
7	1,4560	1,4571	1,4561	1,4560	0,0779	0,0069
8	1,0920	1,0922	1,0920	1,0920	0,0224	0,0000
9	0,7280	0,7278	0,7279	0,7280	0,0227	0,0137

Tabela 7.9 – Tensões nos pontos internos, onde para elem. lineares foi usada a formulação da equação de forças de superfície (kN/m²).

Pontos internos	solução analítica [30]		elementos quadráticos - Equação (4.75)		elementos lineares, usando equação (4.75)		Diferença (%) para elem. Quad.	
	sigma xx	sigma yy	sigma xx	sigma yy	sigma xx	sigma yy	sigma xx	sigma yy
1	2,0000	0,6000	1,9987	0,6005	2,0000	0,6000	0,06283	0,08342
2	2,0000	0,6000	1,9987	0,6005	2,0000	0,6000	0,06283	0,08342
3	2,0000	0,6000	1,9987	0,6005	2,0000	0,6000	0,06283	0,08342
4	2,0000	0,6000	1,9987	0,6005	2,0000	0,6000	0,06283	0,08342

Tabela 7.10 – Tensões nos pontos no contorno para elem. Lineares, onde foi usada a formulação da equação de forças de superfície (kN/m²).

Pontos no contorno	solução analítica [30]		elementos lineares, usando equação (4.94)	
	sigma xx	sigma yy	sigma xx	sigma yy
5	2,0000	0,6000	2,0000	0,6000
6	2,0000	0,6000	2,0000	0,6000
7	2,0000	0,6000	2,0000	0,6000
8	2,0000	0,6000	2,0000	0,6000
9	2,0000	0,6000	2,0000	0,6000

Com o objetivo de comparar as duas formulações das equações integrais de tensões, são apresentados os resultados das tensões nos pontos internos obtidos pela equação integral de tensões hipersingular (4.75) e a equação integral de tensões definida a partir do operador tangente (4.107). A tabela 7.11 apresenta os resultados das tensões obtidos pelas duas formulações.

Tabela 7.11 – Comparação de tensões calculadas nos pontos internos pelas equações (4.75) e (4.107) (kN/m²).

Pontos internos	elementos lineares, equação hipersingular (4.75)		elementos lineares, equação usando Operador Tangente (4.107)	
	sigma xx	sigma yy	sigma xx	sigma yy
1	2,0000	0,6000	2,0000	0,6000
2	2,0000	0,6000	2,0000	0,6000
3	2,0000	0,6000	2,0000	0,6000
4	2,0000	0,6000	2,0000	0,6000

Neste exemplo é importante observar que os resultados de deslocamentos obtidos pela formulação que usa a equação integral de forças de superfície convergiram quando comparados com aqueles apresentados em BREBBIA *et al* [30]. Por outro lado, os resultados obtidos pela formulação que usa a equação integral regularizada foram muito satisfatórios, apresentando diferenças inferiores a 0,1%. Também é importante observar que os resultados de tensões obtidos quando se empregou a equação que usa o operador diferencial tangente convergiram quando comparados com os resultados obtidos pela equação integral hipersingular.

7.3.2 Exemplo de Chapa retangular

O terceiro exemplo, extraído do trabalho de BREBBIA [1], é um problema simples de uma chapa solicitada no eixo X, de tal forma que provoca na chapa o efeito de flexão, conforme demonstrado nas figura 7.7. O carregamento nas bordas da chapa é distribuído linearmente,

variando nos cantos da placa, de valor $p=1000$ MPa, e as dimensões da chapa são de 8,00m x 4,00m.

Para o material foram usadas as seguintes constantes:

Módulo transversal $\mu = 80000$ MPa ;

Coefficiente Poisson $\nu = 0,25$

No exemplo são considerados 12 elementos lineares isoparamétricos e 6 elementos quadráticos isoparamétricos, onde para ambos, são usados 16 nós de contorno.

Todos os dados do problema, como dimensões, as constantes, carregamentos e a discretização da malha, foram extraídos do trabalho de BREBBIA [1].

Os resultados são para o ponto A, mostrado na figura 7.7, onde são calculados os deslocamentos em X e Y pela equação integral de deslocamentos regularizada para elementos quadráticos e pelas duas equações integrais, a equação integral de forças de superfície e a equação integral de deslocamentos regularizada, para elementos lineares. Os resultados são comparados com os resultados da solução analítica obtidos do trabalho de BREBBIA [1].

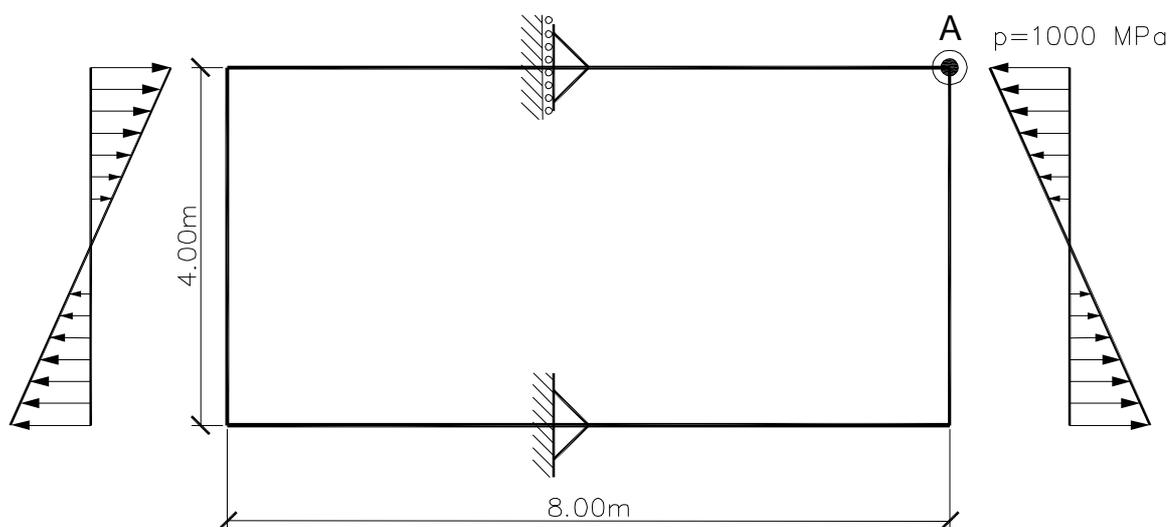


Figura 7.7 – Chapa retangular com carregamento linear variado nos cantos.

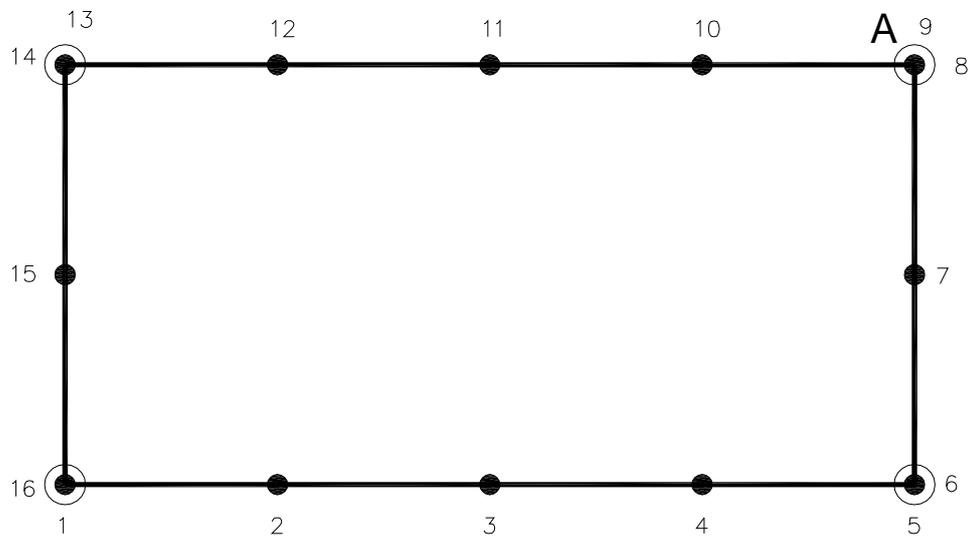


Figura 7.8 – Discretização da chapa retangular com os pontos no contorno.

Tabela 7.12 – Deslocamentos no ponto A (m).

Ponto A	solução analítica apresentada em [1]	elementos quadráticos	elementos lineares - Eq. deslocamentos	elementos lineares - Form. forças superfície	Diferença quadrático (%)	Diferença linear - Eq.Desl.(%)	Diferença Linear-F.Superf. (%)
Ux	-0,0200	-0,0199	-0,0187	-0,0202	0,3908	6,3958	0,9850
Uy	0,0200	0,0199	0,0166	0,0203	0,3165	16,9197	1,3554

No terceiro exemplo pode-se observar que os resultados de deslocamentos no ponto A foram melhores quando foram usados elementos quadráticos devido ao uso de uma malha pobre.

7.4. – Exemplos de corpos em Estado Plano de Deformação

Neste item são estudados alguns exemplos de problemas do estado plano de deformação. São exemplos de tubos de paredes espessas e cavidade circular em domínio infinito, extraídos do trabalho de FOLTRAN [35], cujas soluções analíticas apresentadas no trabalho de BREBBIA [1], são comparadas com as soluções obtidas pelo programa. Há, também, problemas extraídos do trabalho de BECKER [31] e estudo do comportamento para um ponto interno que tende ao contorno na discretização de um tubo apresentado no trabalho de FOLTRAN [35].

7.4.1 - Exemplos de tubos de paredes espessas e chapa quadrada

A figura 7.9 mostra a definição do problema dos exemplos de tubos de paredes espessas apresentados neste item.

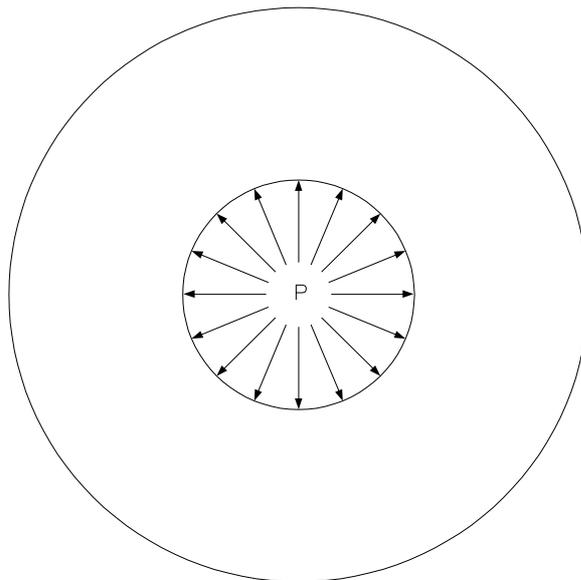


Figura 7.9 – Definição do problema do tubo de paredes espessas.

No primeiro exemplo, extraído do trabalho de BECKER [31], o cilindro tem raio interno de 3m e externo de 6m. Está solicitado por uma pressão interna de 1.0 kN/m² e foi considerado como propriedade do material Módulo de elasticidade $E = 1.0 \text{ kN/m}^2$ e Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

A figura 7.10 demonstra as condições de contorno do problema, onde os lados que estão representados pelos apoios possuem deslocamentos prescritos em uma direção e força nula na outra direção. Um lado do tubo possui forças prescritas em ambas direções e no lado que não possui restrição ao deslocamento, são consideradas forças nulas. Desta forma, em todos os nós, existem quatro variáveis, sendo duas conhecidas e duas incógnitas, satisfazendo as condições de contorno do problema.

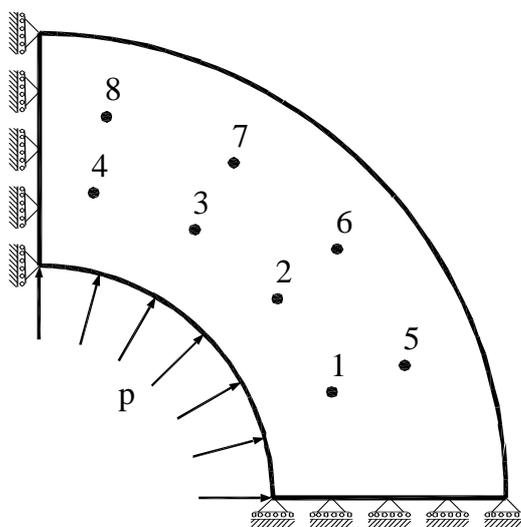


Figura 7.10 – Condições de contorno do tubo, com as posições dos oito pontos internos.

Na discretização do problema foram usados 28 nós de contorno, sendo 4 duplos. O primeiro caso é analisado para 24 elementos lineares isoparamétricos e a seguir tem-se o segundo caso para 12 elementos quadráticos isoparamétricos. Devido à simetria, são apresentados resultados para um quarto do tubo. Para ambos casos são analisados os deslocamentos e tensões dos oito pontos internos e comparados com os resultados apresentados no trabalho de BECKER [31].

Na figura 7.11 é demonstrada a discretização do problema, extraída do trabalho de BECKER [31].

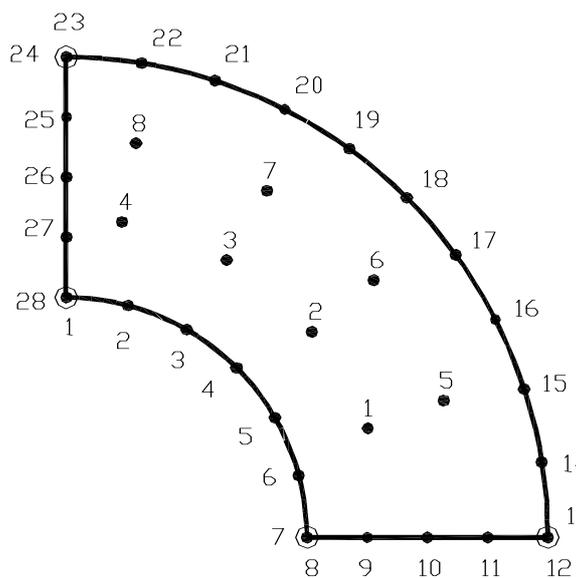


Figura 7.11 – Discretização do problema do tubo, com pontos internos e no contorno e presença de nós duplos.

As coordenadas X, Y dos pontos internos estão na tabela 7.13, conforme apresentadas em BECKER [31]. Estas coordenadas estão em relação com o centro do tubo, que está na origem dos eixos coordenados X, Y.

Tabela 7.13 – Coordenadas X, Y dos pontos internos do tubo.

Pontos internos	Coordenadas X	Coordenadas Y
1	3,75000000	1,36808000
2	3,06418000	2,57115000
3	2,00000000	3,46410000
4	0,69460000	3,93923000
5	4,69846000	1,71010000
6	3,83022000	3,21393000
7	2,50000000	4,33013000
8	0,86824000	4,92404000

Na tabela 7.14 têm-se os resultados dos deslocamentos em pontos internos para elementos quadráticos. Os resultados de deslocamentos para elementos lineares a partir das duas equações, a de deslocamentos e a de forças de superfície, estão apresentados nas tabelas 7.15 e 7.16.

Tabela 7.14 – Deslocamentos nos pontos internos para elementos quadráticos (m).

Pontos internos	solução analítica apresentada em [31]		elementos quadráticos		Diferença (%)	
	Ux	Uy	Ux	Uy	Ux	Uy
1	4,3176	1,5687	4,3045	1,5628	0,3044	0,3752
2	3,5172	2,9546	3,5074	2,9424	0,2775	0,4130
3	2,2940	3,9734	2,2878	3,9668	0,2711	0,1654
4	0,7900	4,5225	0,7908	4,5120	0,1038	0,2322
5	3,7434	1,3635	3,7353	1,3565	0,2158	0,5126
6	3,0529	2,5626	3,0437	2,5532	0,3023	0,3682
7	1,9940	3,4508	1,9851	3,4418	0,4487	0,2602
8	0,6931	3,9199	0,6866	3,9157	0,9317	0,1068

Tabela 7.15 – Deslocamentos nos pontos internos, a partir da equação de deslocamentos, para elementos lineares (m).

Pontos internos	solução analítica apresentada em [31]		elementos lineares - Eq. deslocamentos		Diferença (%)	
	Ux	Uy	Ux	Uy	Ux	Uy
1	4,3176	1,5687	4,2637	1,5472	1,2493	1,3718
2	3,5172	2,9546	3,4593	2,9002	1,6451	1,8406
3	2,2940	3,9734	2,2565	3,9176	1,6364	1,4043
4	0,7900	4,5225	0,7890	4,4895	0,1253	0,7297
5	3,7434	1,3635	3,7020	1,3461	1,1059	1,2758
6	3,0529	2,5626	3,0025	2,5188	1,6509	1,7076
7	1,9940	3,4508	1,9621	3,4006	1,6005	1,4545
8	0,6931	3,9199	0,6854	3,8964	1,1175	0,6007

Tabela 7.16 – Deslocamentos nos pontos internos, a partir da formulação de forças de superfície, para elementos lineares (m).

Pontos internos	solução analítica apresentada em [31]		elementos lineares - Formulação forças de superfície		Diferença (%)	
	Ux	Uy	Ux	Uy	Ux	Uy
1	4,3176	1,5687	5,3259	1,4023	23,3535	10,6062
2	3,5172	2,9546	4,1390	2,4501	17,6787	17,0751
3	2,2940	3,9734	2,5492	3,0402	11,1253	23,4861
4	0,7900	4,5225	0,8527	3,2813	7,9434	27,4443
5	3,7434	1,3635	4,7083	1,3047	25,7753	4,3095
6	3,0529	2,5626	3,5432	2,2286	16,0587	13,0326
7	1,9940	3,4508	2,0990	2,6229	5,2645	23,9901
8	0,6931	3,9199	0,7127	2,7281	2,8240	30,4034

Devido à geometria curva do tubo, pode-se perceber que os resultados de deslocamentos obtidos quando se usaram elementos quadráticos foram mais próximos da solução analítica do que quando se usaram elementos lineares. O que objetivou apresentar este exemplo foi comparar resultados, usando elementos lineares, obtidos pelas duas equações, a equação integral de deslocamentos regularizada e a equação integral de forças de superfície, que usa expressões analíticas para tratar as singularidades. Pode-se perceber que os resultados obtidos quando se usou a equação integral regularizada foi muito satisfatório, com diferenças em torno de 1%, ao passo que, para os resultados usando uma formulação com equações integrais analíticas, as diferenças foram muito grandes.

Com o objetivo de estudar uma convergência de resultados de deslocamentos, obtidos a partir da equação integral de deslocamentos para elementos isoparamétricos lineares, neste primeiro exemplo de tubo as malhas foram discretizadas com o dobro do número de elementos usados inicialmente, ou seja, a malha usou 48 elementos isoparamétricos lineares com 52 nós de contorno, sendo 4 nós duplos. Em seguida foi novamente dobrado o número de elementos na malha passando para 96 elementos isoparamétricos lineares com 100 nós de contorno, sendo 4 nós duplos.

Na tabela 7.17 estão apresentados os resultados de deslocamentos obtidos usando a malha com 48 elementos isoparamétricos lineares.

Tabela 7.17 – Deslocamentos nos pontos internos usando uma malha com 48 elementos isoparamétricos lineares, (m).

Pontos internos	solução analítica apresentada em [31]		elementos lineares - Eq. deslocamentos		Diferença (%)	
	Ux	Uy	Ux	Uy	Ux	Uy
1	4,3176	1,5687	4,2990	1,5635	0,4315	0,3334
2	3,5172	2,9546	3,5021	2,9381	0,4303	0,5586
3	2,2940	3,9734	2,2853	3,9602	0,3789	0,3311
4	0,7900	4,5225	0,7942	4,5083	0,5403	0,3138
5	3,7434	1,3635	3,7315	1,3579	0,3171	0,4099
6	3,0529	2,5626	3,0396	2,5504	0,4363	0,4755
7	1,9940	3,4508	1,9843	3,4372	0,4883	0,3928
8	0,6931	3,9199	0,6898	3,9134	0,4813	0,1665

Na tabela 7.18 estão apresentados os resultados de deslocamentos obtidos usando a malha com 96 elementos isoparamétricos lineares.

Tabela 7.18 – Deslocamentos nos pontos internos usando uma malha com 96 elementos isoparamétricos lineares, (m).

Pontos internos	solução analítica apresentada em [31]		elementos lineares - Eq. deslocamentos		Diferença (%)	
	Ux	Uy	Ux	Uy	Ux	Uy
1	4,3176	1,5687	4,3119	1,5691	0,1312	0,0263
2	3,5172	2,9546	3,5145	2,9489	0,0754	0,1917
3	2,2940	3,9734	2,2938	3,9735	0,0079	0,0026
4	0,7900	4,5225	0,7908	4,5196	0,1063	0,0634
5	3,7434	1,3635	3,7425	1,3621	0,0234	0,1024
6	3,0529	2,5626	3,0504	2,5596	0,0826	0,1189
7	1,9940	3,4508	1,9911	3,4487	0,1474	0,0603
8	0,6931	3,9199	0,6916	3,9228	0,2113	0,0750

Percebe-se que mesmo usando elementos isoparamétricos lineares, que descrevem uma geometria de vários trechos retos ao longo do contorno curvo, refinando a malha pode-se conseguir melhorar muito os resultados de deslocamentos. As diferenças entre os resultados obtidos pela formulação que usa uma malha com 96 elementos isoparamétricos lineares e os resultados previstos pela solução analítica são inferiores a 0,3%.

É importante, também, observar o tempo de processamento necessário para cada tipo de discretização estudadas usando a equação integral de deslocamentos. No exemplo que usou uma malha com 24 elementos isoparamétricos lineares, o tempo de processamento foi de 0,7

segundos. Para a segunda discretização, com 48 elementos lineares, o tempo de processamento gasto foi de 2,4 segundos e na última discretização, o tempo de processamento foi de 9,15 segundos.

Os próximos exemplos de tubos de paredes espessas são extraídos do trabalho de FOLTRAN [35], onde os resultados obtidos são comparados com os resultados obtidos pelas soluções analíticas apresentadas no trabalho de BREBBIA [1].

Nos dois exemplos, foram considerados para o tubo, conforme apresentado no trabalho de FOLTRAN [35], a ação de pressão interna de 100 N/mm^2 , raio interno de 10mm e externo de 25mm e material com as seguintes constantes:

Módulo de elasticidade $E=200 \text{ kN/mm}^2$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,25$

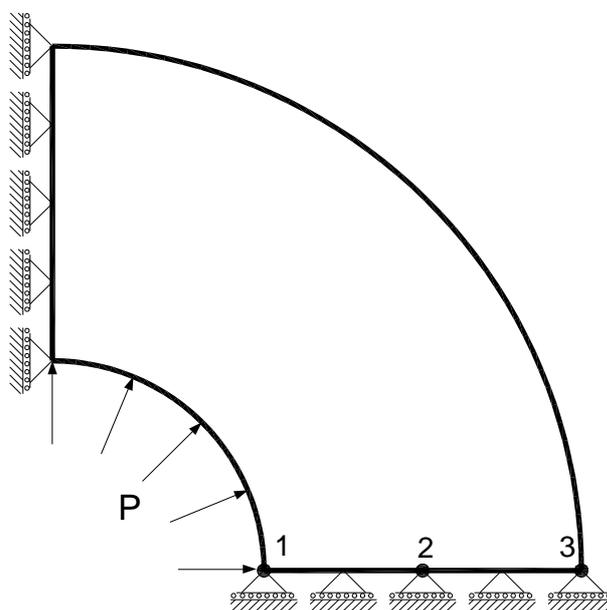


Figura 7.12 – Condições de contorno do cilindro.

A discretização do segundo exemplo, para um quarto do tubo, está demonstrada na figura 7.13. São 34 nós de contorno, sendo 4 nós duplos. O primeiro caso é analisado para 30 elementos lineares isoparamétricos e a seguir tem-se o segundo caso para 15 elementos quadráticos isoparamétricos.

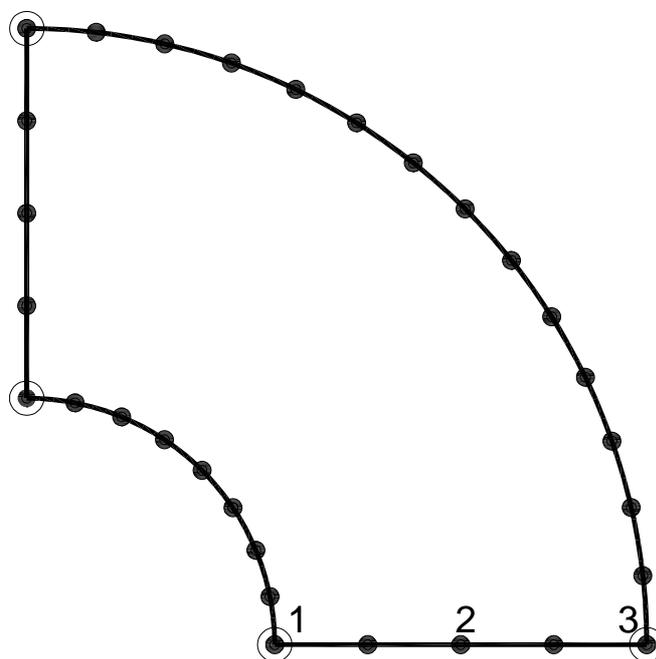


Figura 7.13 – Discretização do contorno do cilindro.

São apresentados os resultados dos deslocamentos, para elementos quadráticos, na tabela 7.19, nos pontos 1, 2, e 3. Estes resultados, obtidos da formulação numérica, são comparados com os resultados previstos pela solução analítica em FOLTRAN [35].

Tabela 7.19 – Deslocamentos nos pontos de contorno 1, 2, e 3 do tubo sob pressão interna (10^{-3} mm).

Pontos contorno	solução analítica [35]	elementos quadráticos	Diferença (%)
1	8,0325	7,9201	1,3987
2	5,2912	5,2811	0,1908
3	4,4526	4,4664	0,3110

Com o objetivo de dar continuidade no estudo da formulação das duas equações, a equação integral de deslocamentos regularizada e a equação integral de forças de superfícies, aplicadas a contornos curvos, os resultados de deslocamentos obtidos para os três pontos no contorno são apresentados na tabela 7.20 e comparados com aqueles obtidos pela solução analítica.

Tabela 7.20 – Comparação dos deslocamentos nos pontos 1, 2, e 3, obtidos pelas duas formulações (10^{-3} mm).

Pontos contorno	solução analítica [35]	elementos lineares - Eq. desloc.	elementos lineares - força sup.	Diferença linear- Eq. deslc. (%)	Diferença linear- força sup. (%)
1	8,0325	7,7801	8,1161	3,1428	1,0409
2	5,2912	5,2465	5,4815	0,8440	3,5962
3	4,4526	4,4050	4,7124	1,0681	5,8348

Neste segundo exemplo de tubos, novamente pode-se perceber que os resultados de deslocamentos obtidos para elementos lineares, usando a equação integral regularizada, foram satisfatórios, mesmo se tratando de um contorno curvo e usando uma malha pobre.

No terceiro exemplo, é analisado a discretização para uma seção de meio tubo, demonstrada na figura 7.14, com o objetivo de melhorar os resultados. Segue-se a mesma metodologia, porém, neste exemplo são apresentados os resultados dos deslocamentos para os pontos no contorno 1 e 3 e para o ponto interno 2.

Os resultados dos deslocamentos, obtidos da formulação da equação de deslocamentos, apresentados na tabela 7.21, são comparados com os resultados previstos pela solução analítica apresentada em FOLTRAN [35].

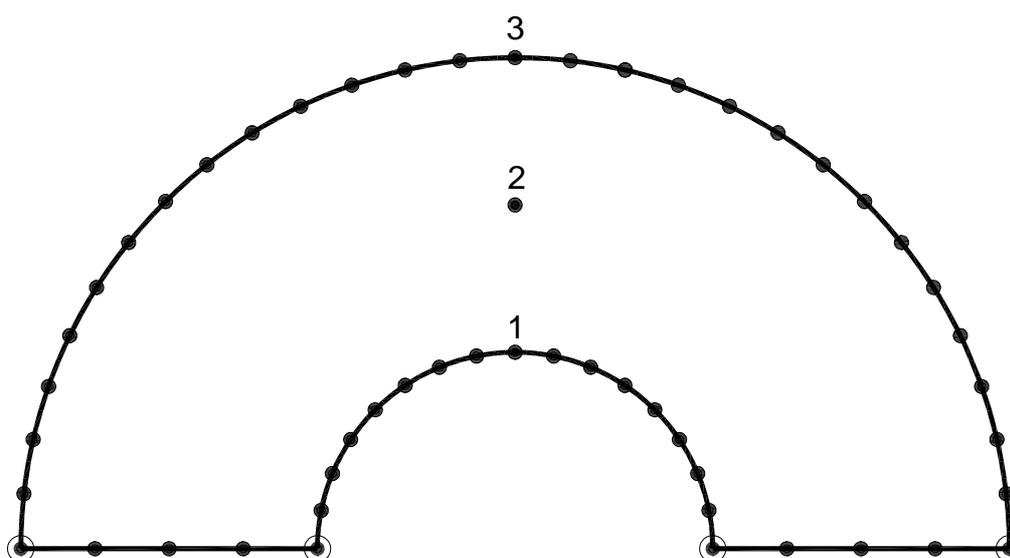


Figura 7.14 – Discretização do contorno do meio tubo.

Tabela 7.21 – Deslocamentos nos pontos de contorno 1 e 3 e no ponto interno 2 do tubo (10^{-3} mm).

Pontos	solução analítica [35]	elementos lineares	elementos quadráticos	Diferença linear (%)	Diferença quadrático (%)
1	8,0325	8,0200	8,0197	0,1561	0,1589
2	5,2912	5,2846	5,2811	0,1245	0,1908
3	4,4526	4,4655	4,4405	0,2903	0,2706

São apresentados na tabela 7.22 os resultados das tensões radiais no ponto interno, a partir da equação de deslocamentos, para elementos quadráticos e lineares. As tensões foram calculadas pelas duas equações, a hipersingular (4.75) e pela equação (4.107) definida a partir do operador tangente. Com o objetivo de comparar a formulação usada neste trabalho com os valores apresentados na literatura, têm-se ainda, na tabela 7.22, os valores obtidos pela solução analítica apresentados no trabalho de BREBBIA [1] e os valores obtidos do trabalho de FOLTRAN [35].

Tabela 7.22 – Módulo das tensões radiais calculadas no ponto interno do tubo, pelas equações (4.75) e (4.107) (N/mm^2).

Tipo de elemento	solução analítica apresentada em [1]	solução apresentada em [35]	Resultado obtido pela equação (4.75)	Resultado obtido pela equação (4.107)
Elementos lineares	19,8251	19,5999	19,6720	19,6720
Elementos quadráticos		19,8674	19,8201	19,8201

Neste exemplo, pode-se perceber que na discretização de meio tubo os resultados de deslocamentos obtidos para elementos isoparamétricos lineares e quadráticos são melhores que a discretização para um quarto do tubo. As diferenças nesta discretização, comparadas com os resultados previstos pela solução analítica, são inferiores a 0,3%.

Para os valores de tensão no ponto interno, percebe-se que os resultados obtidos pelas duas equações (4.75) e (4.107) são mais próximos da solução analítica apresentada por BREBBIA [1] quando comparados com os resultados apresentados no trabalho de FOLTRAN [35].

A seguir é apresentado um exemplo onde deslocamentos e tensões são estudadas em um ponto interno, o qual tende ao contorno.

Neste exemplo é usada a discretização do cilindro da figura 7.14, para elementos quadráticos. São apresentados valores de tensões radiais no ponto interno, conforme demonstrado na figura 7.15.

Na tabela 7.23 são mostrados os valores das tensões radiais, calculados pela equação (4.107) definida a partir do operador tangente, para o ponto interno a uma distancia de L/x , onde L é o comprimento do elemento de contorno mais próximo ao ponto interno e X a unidade por qual o comprimento é dividido. Os valores das tensões radiais calculadas são comparados com os resultados calculados a partir da expressão analítica dada no trabalho de CHEN [33], para cada posição do ponto tendendo ao contorno.

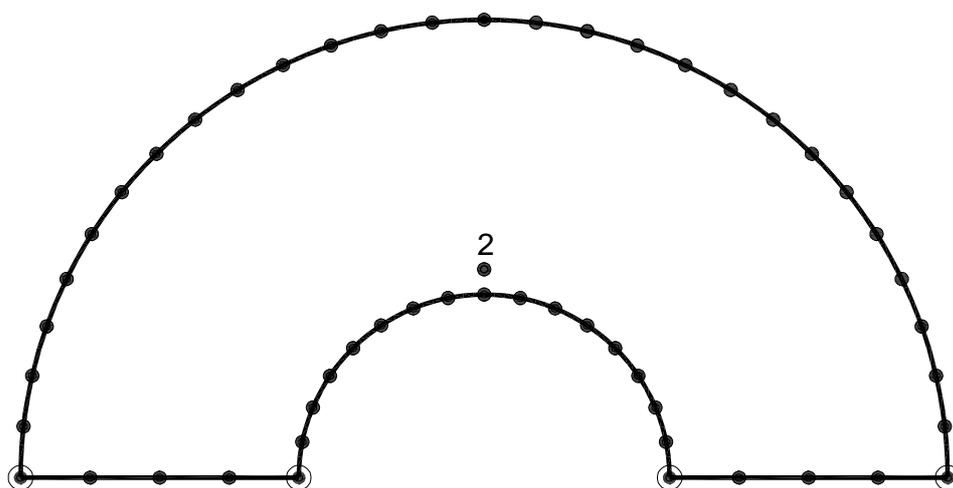


Figura 7.15 – Discretização do contorno com ponto interno tendendo ao contorno

Tabela 7.23 – Módulo das tensões radiais calculadas no ponto interno do tubo tendendo ao contorno (N/mm²).

Distancia do contorno	Solução analítica calculada pela expressão dada em [33]	Elementos quadráticos, usando equação (4.107)	Diferenças (%)
L	42,5502	42,4568	0,2195
$L/2$	64,3050	64,5874	0,4392
$L/4$	79,7794	81,0697	1,6174
$L/6$	85,9059	87,9825	2,4173
$L/8$	89,1850	91,8627	3,0024
$L/10$	91,2267	94,3849	3,4619
$L/12$	92,6202	96,1766	3,8398
$L/16$	94,3994	98,5930	4,4424
$L/20$	95,4875	100,0202	4,7469
$L/30$	96,9627	102,5721	5,7851
$L/100$	99,0764	109,0488	10,0654

Quando o ponto está exatamente sobre o contorno, o valor das tensões radiais calculados pela expressão analítica dada por CHEN [33] é de 100,00 N/mm².

Neste estudo, observa-se que os resultados de tensões obtidos para o ponto próximo do contorno são satisfatórios, embora se tenha usado a equação integral de tensões para pontos internos. Estudo semelhante foi apresentado no trabalho de FOLTRAN [35], o qual usou uma técnica de sub-elementos para obter resultados próximos da solução analítica, ao passo que, nesta formulação, não foi usado nenhum tipo de técnica. Percebe-se que para uma distância de até metade do elemento próximo do ponto interno, os resultados são satisfatórios, apresentando uma diferença inferior a 0,5%.

7.4.2 - Exemplo de cavidade circular em meio elástico infinito.

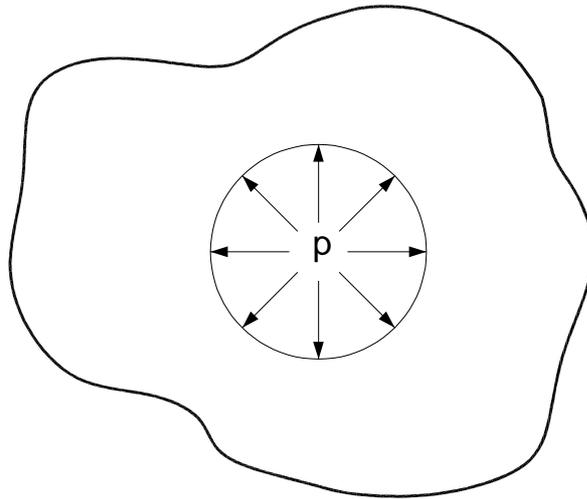


Figura 7.16 – Definição do problema da cavidade

A cavidade circular em meio elástico infinito caracteriza um problema do tipo encontrado em perfurações de túneis e poços profundos, onde o domínio é considerado infinito. Na figura 7.16 tem-se a definição do problema.

Este exemplo foi extraído do trabalho de BREBBIA [1]. A cavidade circular tem furo de raio 3 metros com uma pressão interna de $p = 100 Pa$ e foi adotado um material de módulo de elasticidade $E = 207900 Pa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,1$.

A figura 7.17 mostra a discretização do problema, com os primeiros quatro pontos internos, onde são calculados os deslocamentos e tensões, cujas distâncias estão em relação ao centro do furo da cavidade.

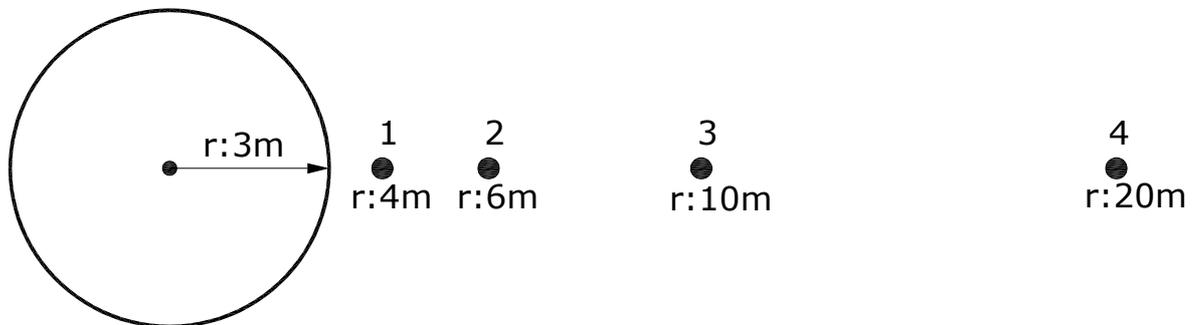


Figura 7.17 – Localização dos quatro primeiros pontos onde são calculados os deslocamentos e tensões.

Na discretização do problema foram usados 24 nós de contorno, com 24 elementos lineares isoparamétricos para o primeiro exemplo e 12 elementos quadráticos isoparamétricos para o outro exemplo. Os resultados dos deslocamentos calculados pela formulação numérica são comparados com as soluções analíticas apresentadas no trabalho de BREBBIA [1].

Tabela 7.24 – Deslocamentos nos quatro primeiros pontos internos da cavidade em domínio infinito (mm).

Distância do centro	solução analítica ref.[1]	elementos lineares	elementos quadráticos	Diferença linear (%)	Diferença quadrático (%)
4m	1,1905	1,1653	1,1876	2,1191	0,2428
6m	0,7965	0,7768	0,7916	2,4686	0,6147
10m	0,4762	0,4661	0,4750	2,1204	0,2603
20m	0,2381	0,2331	0,2375	2,1204	0,2603

Os resultados das tensões nos pontos internos, calculados pela formulação numérica, apresentados na tabela 7.25, são comparados com as soluções da teoria da elasticidade, obtidas no trabalho de BREBBIA [1]. As tensões calculadas para elementos lineares, são obtidas a partir da formulação da equação de deslocamentos.

Tabela 7.25 – Tensões radiais nos quatro primeiros pontos internos da cavidade em domínio infinito (Pa).

Distância do centro	solução analítica ref. [1]	elementos lineares	elementos quadráticos	Diferença linear (%)	Diferença quadrático (%)
4m	56,2500	55,0747	56,2049	2,0895	0,0801
6m	25,0000	24,4704	24,9366	2,1185	0,2537
10m	9,0000	8,8093	8,9768	2,1185	0,2583
20m	2,2500	2,2023	2,2442	2,1185	0,2583

Com o uso de elementos quadráticos obtêm-se resultados melhores, embora as diferenças entre o resultados usando elementos lineares e os resultados previstos pela solução analítica são na ordem de apenas 2%. Os resultados obtidos de deslocamentos, onde se usou a equação integral de deslocamentos regularizada, são muito próximos dos resultados da solução analítica, atestando novamente a boa convergência da formulação usada neste trabalho.

8 - PROBLEMAS DE FRATURA PELA TÉCNICA DAS DUAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO – MÉTODO DUAL

8.1 - Introdução

Com a montagem do programa computacional envolvendo as duas equações integrais de contorno, a equação de deslocamentos e a equação integral de forças de superfície, verificou-se que bons resultados foram alcançados. Criou-se, assim, a possibilidade de analisar exemplos numéricos de problemas que envolvam trincas, estudados pela mecânica da fratura. Desta forma, motivou-se a desenvolver uma nova rotina neste trabalho.

Tomando como referências os trabalhos de FIGUEIREDO E ALMEIDA [26] e ALMEIDA E PALERMO [36], é tratado neste capítulo um resumo da teoria da mecânica da fratura elástico-linear, aplicada na rotina computacional desenvolvida.

No final do capítulo é apresentado um exemplo numérico cujos resultados são comparados àqueles disponíveis na bibliografia de referência.

A modelagem matemática de trinca, presente no problema analisado neste trabalho, pode ser definida como sendo uma linha, onde as duas faces da trinca coincidem nesta linha. Como as faces coincidem, os pontos de colocação das duas superfícies vão coincidir, levando a obter uma mesma equação para as duas faces. Desta forma, não se pode alcançar a solução total do problema apenas com a aplicação direta da equação integral de deslocamentos.

O método das duas equações integrais de contorno é usado para tratar o problema, pois em cada face da trinca é usada uma equação diferente, mesmo que ambas faces se coincidam.

8.2 - As duas Equações Integrais de Contorno – Método Dual

Para problemas que envolvem trincas, várias estratégias têm sido usadas, como o método dos deslocamentos descontínuos, o método das funções de Green em trincas, o método da sub-região (ou sub-domínio) e o método dos elementos de contorno dual (DBEM), conforme demonstrado em FIGUEIREDO E ALMEIDA [26] e ALMEIDA E PALERMO [36].

As análises propostas neste trabalho, para problema de trinca, se desenvolvem a partir do método dos elementos de contorno dual, onde as duas equações do método são a equação integral de deslocamentos (4.39) e equação integral de forças de superfície (4.118), ambas apresentadas no capítulo 4. Podem ser novamente escritas:

$$C_{ij} u_i(x_0) + \int_{\Gamma} [P_{ij}^*(X, x_0) u_j(X) d\Gamma(X)] = \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(X, x_0) p_j(X) d\Gamma(X)]$$

$$\frac{1}{2} t_k(x') = n_i(x') C_{ikjm} \int_{\Gamma} S_{ikj}(x', X) u_j(X) d\Gamma(X) - n_i(x') \int_{\Gamma} D_{ikj}(x', X) p_j(X) d\Gamma(X)$$

8.3 - Modelagem da trinca usada no trabalho

Na estratégia usada no programa computacional para o problema da trinca, foram considerados, ao longo da trinca, elementos de contorno contínuos. Concorrentes ao nó da trinca, foram considerados elementos mistos, uma vez que na ponta da trinca foram usados nós duplos.

Os elementos de contorno usados no exemplo de problema com trinca foram elementos isoparamétricos lineares. As funções de forma foram escritas em relação aos extremos do elemento.

Para satisfazer as condições de continuidade na equação integral de contorno, os pontos de colocação sempre serão posicionados no interior do elemento. Conforme apresentado no item 7.2 do capítulo 7.

8.4 - Fatores de Intensidade de Tensão

As análises de tensões nas vizinhanças de uma trinca podem ser realizadas através da determinação do fator de tensão “K”. O valor de “K” depende basicamente do nível de tensão no corpo longe da trinca e da geometria do espécime com trinca.

A Trinca pode ser solicitada em três modos independentes, conforme é demonstrado na figura 8.1, que pode ser visto em FIGUEIREDO E ALMEIDA [26].

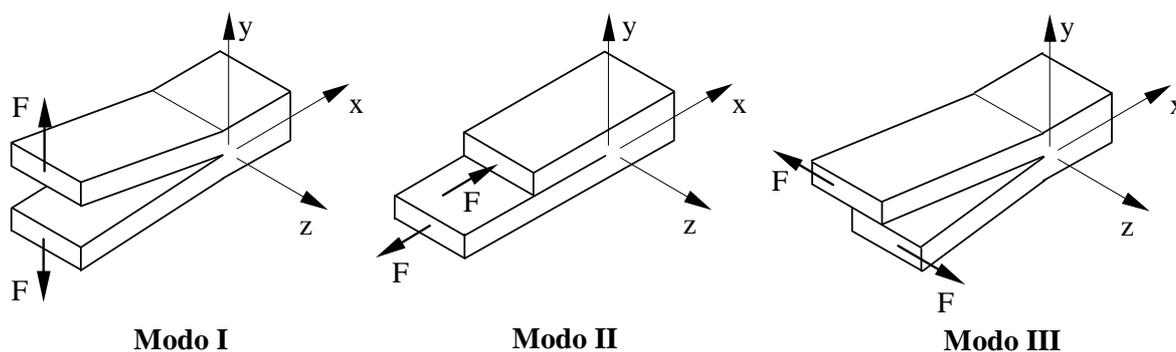


Figura 8.1 – Modos de deformação da trinca.

Modo I - Tensão normal de tração, ensaio Compact Tension.

Modo II - Tensão de cisalhamento na direção "x"

Modo III - Tensão de cisalhamento na direção "z"

Neste trabalho apenas será analisado o modo I.

A extrapolação dos deslocamentos próximos à ponta da trinca é um processo usado para obter os fatores de intensidade de tensão.

Seja um sistema de coordenadas polares, dado por r e θ , com centro na ponta da trinca, o qual define a superfície da trinca em $\theta = \pm\pi$.

O campo de deslocamentos na superfície da trinca, considerando a expansão de Williams, conforme apresentado em FIGUEIREDO E ALMEIDA [26], é:

$$u_2(\theta = \pi) - u_2(\theta = -\pi) = \frac{k+1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (8.1)$$

O fator de intensidade de tensão para o modo I de deformação é K_I , μ é o módulo transversal e $k = 3 - 4\eta$, onde $\eta = \nu$ para o estado plano de deformação e $\eta = \nu/(1 + \nu)$ para o estado plano de tensão, sendo ν o coeficiente de Poisson.

Percebe-se na equação (8.1) que o fator de intensidade de tensão pode ser obtido quando os deslocamentos nas superfícies da trinca são conhecidos. Os elementos lineares que pertencem as duas superfícies da trinca são ilustrados na figura 8.2, com os pontos “B” e “C” localizados na ponta da trinca. Os pontos “D” e “E” são os pontos iniciais dos elementos concorrentes à trinca.



Figura 8.2 – Elemento linear da ponta da trinca.

A expressão do fator de intensidade de tensão K_I para o elemento linear, em função dos deslocamentos nos pontos “D” e “E” é dada por:

$$K_I^{DE} = (u_2^D - u_2^E) \frac{\mu}{k+1} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (8.2)$$

8.5 - Exemplo numérico

O exemplo apresentado neste item é de um corpo solicitado no modo I com trinca de canto. É calculado o fator de intensidade de tensão e os resultados são comparados aos resultados apresentados no trabalho de FIGUEIREDO E ALMEIDA [26], onde os resultados obtidos no trabalho de Civelek são referência para o trabalho de FIGUEIREDO E ALMEIDA [26].

A placa retangular que contém a trinca horizontal de canto, mostrada na figura 8.3 é discretizada com uma malha de 48 elementos lineares mais 8 elementos em cada superfície da trinca, resultando em um total de 64 elementos isoparamétricos lineares. Nos cantos da placa e na ponta da trinca foram introduzidos nós duplos.

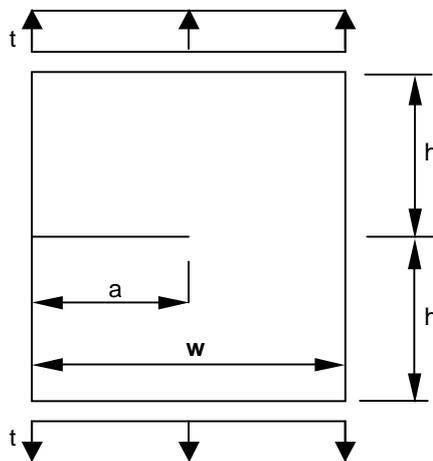


Figura 8.3 – Esquema da placa com trinca de canto.

O comprimento da trinca é “a”, a largura da placa é representado por “w” e o seu comprimento é 2h. As forças distribuídas “t” são simétricas e aplicadas nas bordas extremas superior e inferior da placa. Os resultados obtidos são para a relação h/w igual a 0,5, conforme demonstrados na tabela 8.1. Foram considerados cinco valores para a relação a/w: 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6.

O fator de intensidade de tensão foi obtido pela equação (8.2).

Tabela 8.1 – Resultados do fator de intensidade no modo I: $K_I / \sqrt{\pi a}$

a/w	Portela, apresentado em [26]	Civelek, apresentado em [26]	Figueiredo e Almeida [26] discretização 3	resultados usando operador diferencial tangente
0,2	1,566	1,488	1,511	1,503
0,3	1,962	1,848	1,882	1,879
0,4	2,230	2,324	2,380	2,383
0,5	3,268	3,010	3,100	3,117
0,6	4,580	4,152	4,397	4,352

9 – CONCLUSÕES

O trabalho foi iniciado com as formulações das integrais de contorno aplicadas a problemas de elasticidade. Quando o ponto de colocação coincidia com o ponto fonte, expressões analíticas eram desenvolvidas. Com o aumento de dificuldade de desenvolvimento dessas expressões para elementos de contorno de ordem maior (quadrático, dentre outros), o desenvolvimento e aplicação da técnica de regularização indireta foram apresentados neste trabalho, onde os núcleos das integrais de contorno foram tratados numericamente. O método dos elementos de contorno foi aplicado na análise de vários problemas em regime elástico, usando a técnica da regularização para a equação integral de deslocamentos.

Os resultados obtidos em chapas demonstram o sucesso da aplicação da regularização indireta para elementos lineares e quadráticos, os valores de deslocamentos foram muito próximos aos resultados das soluções analíticas.

Nos exemplos de tubos de paredes espessas, a aplicação da técnica da regularização nas equações integrais de deslocamentos apresentou melhor eficácia quando foram tratados elementos quadráticos do que para elementos lineares. Mesmo sucesso se percebeu nos resultados analisados no problema de cavidades em meio elástico infinito, onde as diferenças entre valores obtidos e àquelas da solução analítica não foram superiores a 1%. Isso se deve ao fato dos elementos de ordem linear considerar um contorno curvo como vários segmentos de trechos retos.

Outro desenvolvimento feito no trabalho foi transformar a singularidade forte do tipo $1/r^2$, presente no núcleo da equação integral de contorno que contém a solução fundamental de forças de superfície, em uma singularidade fraca de ordem $1/r$. Para este propósito foi aplicado o operador diferencial tangente no núcleo da equação integral que contém a singularidade forte.

Desta forma foi permitido desenvolver uma formulação para obtenção de tensões em pontos internos próximos ao contorno, para elementos lineares e quadráticos, onde se trabalhou apenas com núcleos que possuem singularidade fraca.

A aplicação do operador diferencial tangente possibilitou, também, obter tensões no contorno para elementos lineares, ao usar as equações integrais de contorno de tensões, onde a singularidade foi tratada pelo valor principal de Cauchy quando o ponto de colocação foi levado ao contorno.

Os exemplos apresentados de chapas, no capítulo 7, demonstram que os resultados de tensões em pontos internos, para elementos quadráticos, usando o operador diferencial tangente obtiveram diferenças muito inferiores a 1% se comparados àqueles apresentados pela solução analítica dada na literatura. Quando se usou a discretização de elementos lineares, tanto para as tensões em pontos internos, como em pontos no contorno, os valores obtidos, empregando o operador tangente, convergiram.

Nos exemplos de tubos e da cavidade circular em meio elástico, os valores de tensões internas usando o operador diferencial tangente foram melhores quando se trabalhou com elementos quadráticos, uma vez que o elemento de ordem superior descreve melhor um contorno curvo.

Na seqüência do trabalho foi apresentada a formulação das equações integrais de forças de superfície, para elementos lineares. Usando esta formulação nos exemplos de chapa, percebeu-se que os valores de deslocamentos, comparados àqueles apresentados na solução analítica,

convergem. Assim, conclui-se pela boa estabilidade da formulação das equações integrais de forças de superfície como alternativa a das equações integrais de deslocamentos.

Com os resultados satisfatórios de deslocamentos, obtidos pela aplicação das duas equações integrais de contorno, ambas usando o operador diferencial tangente, foi estimulado o estudo do método dos elementos de contorno dual no desenvolvimento de um exemplo de chapa com trinca de canto. Os resultados obtidos dos fatores de intensidade de tensão na ponta da trinca, do exemplo do capítulo 8, foram muito próximos daqueles apresentados na literatura.

Este trabalho sugere fortemente o uso do operador diferencial tangente na formulação das tensões integrais de forças de superfície para a aplicação do método dos elementos de contorno dual.

É importante observar que o tempo de processamento computacional gasto em todos os exemplos foi inferior a três segundos, mesmo usando um processador convencional Pentium III 800 com 512 de memória. Exceção única quando se usou uma malha com 96 elementos isoparamétricos lineares no primeiro exemplo de tubos de paredes espessas do capítulo 7, item 7.4.1, cujo tempo de processamento foi de 9,15 segundos. Quando comparado com o tempo gasto nos exemplos apresentados na bibliografia de referência, percebe-se que o tempo de processamento inferior a três segundos é bastante pequeno. Este dado é, também, importante para validar a formulação utilizada no trabalho.

Futuramente existem alguns aspectos que poderão ser abordados na continuidade do trabalho:

- Aplicação da técnica da regularização indireta na equação integral de forças de superfície;
- Aplicação do operador diferencial tangente aos tratamentos do MEC para problemas tridimensionais, incluindo fratura e plasticidade, onde se acredita que haverá melhor precisão para determinação de tensões na vizinhança do contorno com procedimentos numéricos.

10 - BIBLIOGRAFIA

- [1] BREBBIA, C. A. and DOMINGUES, J., Boundary Elements: an Introductory Course, McGraw-Hill, 2^aed, New York, USA, 1992.
- [2] KANE, J. H., Boundary Element Mechanics, In Continuum Mechanics, Clarkson University, 1994
- [3] FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionelles. Acta Math., v.27, p.365-390, 1903.
- [4] KELLOG, O. D., Foundations of Potential Theory, Springer, Berlin, 1929.
- [5] MUSKHELISVILI, N.I., Some Basic Problem of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Holland, 1953.
- [6] MIKHLIN, S.G., Integral Equations, Pergamon Press, Oxford, 1957
- [7] SMIRNOV, V. J. Integral equations and partial differential equations. In: Course in Higher Mathematics. London: Addison-Wesley, v.4, 1964.
- [8] KUPRADZE, O. D. Potential methods in theory of elasticity. Daniel Davy, New York, 1965.
- [9] JASWON, M. A. Integral equation methods in potential theory – I. Proc. Roy. Soc. Lond., v.A275, p.23-32, 1963.
- [10] SYMM, G. T. Integral equation methods in potential theory – I. Proc. Roy. Soc. Lond., v.A275, p.33-46, 1963.

- [11] JASWON, M. A., PONTER, A. R. An integral equation solution of the torsion problem. Proc. Roy. Soc. Ser. A, v.273, p.237-246, 1968.
- [12] RIZZO, F. J. An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quat. Appl. Math., v.25(1), p.83-92, 1967.
- [13] CRUSE, T. A. Numerical solution in three dimensional elastostatics. Int. J. Solids Struct., v.5, p.1259-1274, 1969.
- [14] LACHAT, J. C. A further development of the boundary integral technique for elastostatics. PhD Thesis, Southampton, University of Southampton, US, 1975.
- [15] LACHAT, J. C., WATSON, J. O. A second generation boundary Integral equation program for three-dimensional elastic analysis. ASME Applied Mechanics National Conference, New York, 1975.
- [16] LACHAT, J. C., WATSON, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. Int. J. Numer. Meth. In Engng, v.10, p.991-1005, 1976.
- [17] CRUSE, T.A., and WILSON, R.B., Advanced applications of boundary integral equation methods, Nuclear Engng. Design 46, 223-234, 1978.
- [18] HANSEN, E. B. Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. J. of Elasticity, v.6(1), p.39-56, 1976.
- [19] CRUSE, T. A. Mathematical foundations of the boundary integral equation method in solid mechanics. Pratt and Whitney Aircraft Group, 1977. (Report AFOSR-IR-1002)
- [20] BREBBIA, C. A. The boundary element method for engineers. London: Pentech Press, 1978.
- [21] BANERJEE, P.K., BUTTERFIELD, R. Boundary element methods in engineering science, McGraw-Hill Book Co. London, UK. 1981.

- [22] STERN, M.A. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *Int. J. Solids Struct.*, v.15, p. 769-782. 1979
- [23] TOTTENHAM, H. *The boundary elements for plates and shells, development in BEM*, Applied Science Publishers
- [24] SIMÕES, R., Um estudo de placas sob cargas dinâmicas estacionárias e com o efeito da não linearidade geométrica sob cargas estáticas usando o método dos elementos de contorno, Universidade Estadual de Campinas, Dissertação de mestrado, 222 p., 2001.
- [25] PALERMO JR., L. Análise de peças de seção delgada com associação de placas pelo método dos elementos de contorno. Tese Doutorado, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, p.7-97, 1989.
- [26] FIGUEIREDO E ALMEIDA, L.P.C.P., Avaliação de Tensões em Peças Pré-Fissuradas usando o Método dos Elementos de Contorno, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, (Dissertação de Mestrado), 81p., 2003.
- [27] PORTELA, A., ALIABADI, M. H. e ROOKE, D. P., 1992, The Dual Boundary Element Method: Effective implementation for crack problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1269-1287.
- [28] MI, Y., ALIABADI, M. H., Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis, *Eng. Anal with Boundary Elements*, vol. 10, p. 161-171, 1992
- [29] BONNET, M., *Boundary Integral Equations Methods for Solids and Fluids*, John Wiley & Sons, Ltd., 1999
- [30] BREBBIA, C. A., TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C., *Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Southampton, 1984.
- [31] BECKER, A. A., *The Boundary Element Method in Engineering: a Complete Course*, McGraw-Hill, London, UK, 1992.

- [32] TIMOSHENKO, S. P. Theory of elastic stability. Southampton, McGraw-Hill, Book Company, 1961, 541p.
- [33] CHEN, W. F., HAN, D.J., Plasticity for Structural Engineers, Springer-Verlag, New York, 1988
- [34] BANERJEE, P. K. The boundary element methods in engineering. State University of New York at Buffalo, McGraw-Hill, Book Company, 1994, 496p.
- [35] FOLTRAN, C. E., Analise de Problemas Planos em Regime Elasto-plástico pelo Método dos Elementos de Contorno, Campinas, Faculdade de Engenharia Civil – Unicamp, 1999, 227 pp. (Tese de Mestrado, financiada pela FAPESP), (Orientador Leandro Palermo Junior)
- [36] ALMEIDA, LPCPF, PALERMO JR., L, On the implementation of the Two Dimensional Dual Boundary Element Method for Crack Problems, “5th International Conference on Boundary Elements Techniques” Lisboa, Portugal, 2004
- [37] SAADA, A. S., Elasticity: Theory and Applications, Pergamon unified engineering series, New York, USA, 1973
- [38] CRUSE, T. A., SNOW, D. W., WILSON, R. B. Numerical solutions in axisymmetric elasticity. *Comp. and Struct.*, v.7, p.445-451, 1977.
- [39] TELLES, J. C. F., BREBBIA, C. A. Boundary element solution of half-plane problems. *Int. J. Solids Struct.*, v.17, p.1149-1158, 1981.