



Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Telemática

## Grupos Fuchsianos Aritméticos Identificados em Ordens dos Quatérnios para Construção de Constelações de Sinais

Vandenberg Lopes Vieira

Tese de Doutorado

Orientador: **Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr.**  
Co-orientador: **Prof. Dr. Mercio Botelho Faria**

Banca Examinadora:

**Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr.** - FEEC/UNICAMP

**Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva** - CCEN/UFPB

**Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho** - FEIS/UNESP

**Prof. Dr. Henrique Lazari** - IGCE/UNESP

**Prof. Dr. Marcelo Firer** - IMECC/UNICAMP

**Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes** - FEEC/UNICAMP

Tese apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

23 de Fevereiro de 2007  
Campinas - SP

---

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

V673g      Vieira, Vandenberg Lopes  
             Grupos fuchsianos aritméticos identificados em ordens  
             dos quatérnios para construção de constelações de sinais /  
             Vandenberg Lopes Vieira. – Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Reginaldo Palazzo Júnior.

Co-orientador: Mercio Botelho Faria.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Álgebra. 2. Quatérnios. 3. Riemann, Superfícies de.  
4. Möbius, Transformações de. I. Palazzo Júnior,  
Reginaldo. II. Faria, Mercio Botelho. III. Universidade  
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica  
e de Computação. IV. Título.

Titulo em Inglês: Arithmetic fuchsian groups identified in quaternion orders for the  
construction of signal constellations

Palavras-chave em Inglês: Quaternion algebra, Geometrically uniform signal  
constellation, quaternion order, fuchsian group, quotient  
surface, Möbius transformation.

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Antônio de Andrade e Silva, Edson Donizete de Carvalho,  
Henrique Lazari, Marcelo Firer, Renato da Rocha Lopes

Data da defesa: 23/02/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

A duas pessoas especiais, minha  
esposa Kátia Daniele, e minha prima  
Elizabeth Rose

*DEDICO*

# Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus pela força que me deu para que eu pudesse realizar com afinco mais uma etapa na minha vida.

Ao orientador e amigo Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr. pela orientação eficaz, sem a qual o desenvolvimento deste trabalho não seria possível.

Ao Prof. Dr. Mercio Botelho Faria pela presteza na co-orientação. Pelas suas sugestões tão instrutivas. Agradeço também por sua amizade e companheirismo.

À banca julgadora pela disponibilidade e atenção.

Particularmente, agradeço à minha esposa Kátia Daniele pelo carinho que me dedicou durante todo o período de Doutorado.

À minha prima Elizabeth pela força que me deu. Pelos exemplos de determinação e perseverança.

Aos meus pais João e Francisca. A Manoel Miranda e à Lúcia Cabral, os quais têm também sido pais para mim.

Aos colegas do Departamento de Telemática.

Aos amigos Fábio Hernandes, João Henrique, Ricardo Coelho, Ricardo (que tem um grande coração), Giuliano e João Coelho. A todos agradeço sinceramente.

À Universidade Estadual da Paraíba, instituição que tão bem me acolheu.

Aos Professores Hélio Pires de Almeida e Antônio de Andrade e Silva por todo o incentivo.

À CAPES pelo suporte financeiro durante o período de março de 2005 a fevereiro de 2007.

A todos que direta e indiretamente contribuíram para a concretização deste trabalho.

# Resumo

Dentro do contexto de projetar sistema de comunicação digital em espaços homogêneos, em particular, em espaços hiperbólicos, é necessário estabelecer um procedimento sistemático para construção de reticulados  $\mathcal{O}$ , como elemento base para construção de constelações de sinais geometricamente uniformes. É através desse procedimento que identificamos as estruturas algébrica e geométrica a fim de construir códigos geometricamente uniformes em espaços homogêneos. Propomos, a partir desses reticulados, a construção de grupos fuchsianos aritméticos  $\Gamma_p$  obtidos de tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$ , derivados de álgebras de divisão dos quatérnios  $\mathcal{A}$  sobre corpos de números  $K$ . Generalizamos o processo de identificação desses grupos em ordens dos quatérnios (reticulados hiperbólicos), associadas às constelações de sinais geometricamente uniformes, provenientes de grupos discretos. Esse procedimento permite rotular os sinais das constelações construídas por elementos de uma estrutura algébrica.

**Palavras-chave:** álgebra dos quatérnios, constelação de sinais geometricamente uniforme, ordem dos quatérnios, grupo fuchsiano, superfície quociente, transformação de Möbius.

# Abstract

Within the context of digital communications system in homogeneous space in particular, in hyperbolic spaces, it is necessary to establish systematic procedure for the construction of lattices  $\mathcal{O}$ , as the basic entity for construction of geometrically uniform signal constellations. By this procedure we identify the algebraic and geometric structures to construct geometrically uniform codes in homogeneous spaces. We propose, from lattices, the construction of arithmetic fuchsian groups  $\Gamma_p$  obtained by hyperbolic tessellations  $\{p, q\}$ , derived from division quaternion algebras  $\mathcal{A}$  over numbers fields  $K$ . We generalize the process of identification of these groups in quaternion orders (hyperbolic lattices), which are associated with geometrically uniform signal constellations, proceeding from discrete groups. This procedure allows us to realize the labelling of the signals belonging to such constellations by elements of an algebraic structure.

**Key-words:** quaternion algebra, geometrically uniform signal constellation, quaternion order, fuchsian group, quotient surface, Möbius transformation.

# Sumário

<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Descrição do Trabalho . . . . .	3
<b>2 Revisão de Conceitos</b>	<b>7</b>
2.1 Corpos de Números e Anéis de Inteiros Algébricos . . . . .	8
2.2 Conceitos de Geometria . . . . .	13
2.2.1 Isometria . . . . .	13
2.2.2 Espaços Hiperbólicos . . . . .	14
2.2.3 Círculo Isométrico e a Região de Ford . . . . .	22
2.2.4 Grupos fuchsianos co-compactos . . . . .	23
2.2.5 A assinatura de um grupo fuchsiano . . . . .	24
2.2.6 Tesselações Regulares no Plano Hiperbólico . . . . .	25
2.3 Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes . . . . .	26
<b>3 Álgebra dos Quatérnios e Grupos Fuchsianos Aritméticos</b>	<b>29</b>
3.1 Álgebra dos Quatérnios . . . . .	29
3.2 Reticulados Hiperbólicos . . . . .	32
3.3 Grupos Fuchsianos Aritméticos . . . . .	35
<b>4 Identificação dos Grupos <math>\Gamma_{4g}</math> em Ordens dos Quatérnios</b>	<b>43</b>
4.1 O Grupo Fuchsiano $\Gamma_{4g}$ . . . . .	44
4.2 Caso $g = 2^n$ . . . . .	47
4.3 Caso $g = 3 \cdot 2^n$ . . . . .	54
4.4 Caso $g = 5 \cdot 2^n$ . . . . .	60

<b>5</b>	<b>Identificação dos Grupos <math>\Gamma_p</math> em Ordens dos Quatérnios</b>	<b>65</b>
5.1	Exemplos de Emparelhamentos . . . . .	66
5.1.1	Tesselação $\{10\lambda, 2\lambda\}$ . . . . .	70
5.1.2	Tesselação $\{12\lambda - 12, 4\}$ . . . . .	72
5.1.3	Tesselação $\{12\lambda - 12, 4\lambda - 4\}$ . . . . .	74
5.1.4	Tesselação $\{8\lambda + 16, 8\}$ . . . . .	76
5.1.5	Tesselação $\{10\lambda, 5\}$ . . . . .	78
5.1.6	Tesselação $\{p, q\}$ . . . . .	81
5.2	Geradores do Grupo $\Gamma_p$ . . . . .	85
5.3	O Grupo $\Gamma_{10\lambda}$ . . . . .	88
5.4	Identificação de $\Gamma_{30}$ em Ordem dos Quatérnios . . . . .	94
5.5	Identificação de $\Gamma_{60}$ em Ordem dos Quatérnios . . . . .	98
5.6	Densidade de Empacotamento . . . . .	99
5.7	Exemplos de Rotulamento Algébrico de Sinais de Constelações $G_p(0)$ . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>115</b>
6.1	Propostas para Trabalhos Futuros . . . . .	116

# Lista de Símbolos

$\mathbb{H}$	álgebra de divisão
$\mathcal{A}$	álgebra dos quatérnios
$\mathcal{A}[\Gamma]$	álgebra dos quatérnios obtida de $\Gamma$
$\mathfrak{D}_K$	anel de inteiros de $K$
$\mu(A)$	área hiperbólica de $A \subset \mathbb{H}^2$ ou $A \subset \mathbb{D}^2$
$\tau, \varepsilon$	aresta do polígono $P_p$
$(g; m_1, \dots, m_r)$	assinatura do grupo $\Gamma$
$\{1, i, j, k\}$	base de uma álgebra $\mathcal{A}$
$C_i$	ciclo de vértices de $P_p$
$[x]$	classe de equivalência de $x$
$I(T)$	círculo isométrico da transformação $T$
$\bar{a}$	conjugado complexo de $a \in \mathbb{C}$
$tr(\Gamma)$	conjunto dos traços dos elementos de $\Gamma$
$\{v_1, \dots, v_p\}$	conjunto dos vértices de $P_p$
$K$	corpo de números
$\mathbb{C}$	corpo dos números complexos
$\mathbb{Q}$	corpo dos números racionais
$\mathbb{R}$	corpo dos números reais
$d(\mathcal{A})$	discriminante da álgebra $\mathcal{A}$
$d(\mathcal{O})$	discriminante da ordem $\mathcal{O}$ em $\mathcal{A}$
$E$	espaço métrico
$\mathbb{H}^2/\Gamma$	espaço quociente $\mathbb{H}^2$ por $\Gamma$ localmente isométrico a $\mathbb{H}^2$
$\mathbb{H}^n$	espaço hiperbólico $n$ -dimensional
$\mathbb{Q}(tr(T) : T \in \Gamma)$	extensão de $\mathbb{Q}$ gerada pelo conjunto $tr(\Gamma)$
$\mathcal{D}_z(\Gamma)$	domínio de Dirichlet de $\Gamma$ centrado em $z$
$g$	gênero de $\mathbb{H}^2/\Gamma$
$[K : \mathbb{Q}]$	grau ou índice de uma extensão $K \supset \mathbb{Q}$
$SL(2, \mathbb{R})$	grupo das matrizes reais de ordem 2 com determinante 1
$\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O})$	grupo derivado de uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$ cuja ordem é $\mathcal{O}$

---

$PSL(2, \mathbb{R})$	grupo projetivo linear
$\mathcal{O}^1$	grupo dos invertíveis em $\mathcal{O}$ de norma reduzida 1
$\Gamma$	grupo fuchsiano
$\Gamma_p$	grupo fuchsiano associado à tesselação $\{p, q\}$
$Nrd(x)$	norma reduzida de um elemento $x$ em $\mathcal{A}$
$\varphi, \psi$	homomorfismo
$G(x)$	$G$ -órbita de $x$
$\mathcal{O}$	ordem dos quatérnios
$\mathcal{O}[\Gamma]$	ordem dos quatérnios da álgebra $\mathcal{A}[\Gamma]$
$P_p$	polígono hiperbólico regular associado ao grupo fuchsiano $\Gamma_p$
$\mathbb{H}^2, \mathbb{D}^2$	modelos de geometria hiperbólica plana
$\{p, q\}$	tesselação hiperbólica regular
$Trd(x)$	traço reduzido de um elemento $x$ em $\mathcal{A}$
$T, S$	transformação de Möbius

# Lista de Figuras

5.1	Tesselação $\{10\lambda, 2\lambda\}, \lambda = 6$ . . . . .	72
5.2	Tesselação $\{12\lambda - 12, 4\}, \lambda = 6$ . . . . .	74
5.3	Triângulo sobre uma tesselação $\{p,q\}$ . . . . .	86



# Lista de Tabelas

5.1	Tesselação $\{4g, 4g\}$ . . . . .	101
5.2	Tesselação $\{12\lambda - 12, 4\lambda - 4\}$ . . . . .	101
5.3	Tesselação $\{2\lambda^2 + 6\lambda + 4, 2\lambda + 2\}$ . . . . .	101
5.4	Tesselação $\{\lambda^2 + 3\lambda + 2, \lambda + 1\}$ . . . . .	102
5.5	Tesselação $\{10\lambda, 2\lambda\}$ . . . . .	102
5.6	Tesselação $\{8\lambda + 16, 8\}$ . . . . .	102
5.7	Tesselação $\{10\lambda, 5\}$ . . . . .	103
5.8	Tesselação $\{12\lambda - 12, 4\}$ . . . . .	103
5.9	Tesselação $\{12g - 6, 3\}$ . . . . .	103



# Capítulo 1

## Introdução

Um sistema de comunicação digital conecta uma fonte ao destinatário através de um canal que pode ser, por exemplo, uma fibra ótica, um disco de armazenamento, circuito integrado digital, etc. Quando do projeto de tal sistema uma das principais preocupações é o controle de erros de forma a garantir que a informação possa ser reproduzida. Em outras palavras, se uma mensagem recebida contém  $t$  erros, como detectar e corrigir esses erros e recuperar a mensagem enviada? É sob este enfoque que passamos a considerar a teoria dos códigos corretores de erros.

A teoria da codificação teve início em 1948, com o trabalho seminal de Shannon, [33]. Nesse trabalho, Shannon demonstrou que, usando códigos corretores de erros, é possível projetar sistemas de comunicações digitais codificados com probabilidades de erros tão pequena quanto se queira, desde que a taxa de transmissão seja menor que a capacidade do canal. Desde então, pesquisas na busca dos bons códigos previstos pela teoria de Shannon têm sido realizadas.

Os primeiros códigos de bloco surgiram quando Hamming descreveu uma classe de códigos binários capazes de corrigir erros simples. Bose e Ray-Chaudhuri (1960) e Hocquenghem (1959) propuseram uma classe de códigos de bloco capazes de corrigir erros múltiplos, os chamados códigos BCH, definidos sobre os corpos finitos  $GF(p^r)$ .

Códigos sobre os anéis quociente  $\mathbb{Z}_m$  foram considerados inicialmente por Blake em [3] e por Spiegel em [35]. Em [31], Rifà apresenta códigos sobre o grupo dos invertíveis do anel  $\mathbb{Z}[i]/(2^n + i2^n)$ . Em 1994, Huber em [17, 18] apresentou códigos definidos sobre subconjuntos finitos, convenientes, de anéis de inteiros de corpos quadráticos. Estes subconjuntos têm estrutura de corpo, pois são formados por representantes das classes do quociente do anel por um ideal maximal convenientemente escolhido. Em [12], Favareto *et al.* ampliaram as famílias dos códigos obtidas por Huber.

Até recentemente existiam duas classes gerais de construção de constelações de sinais, a saber, a classe associada aos códigos de Slepian e a classe associada aos códigos reticulados.

Essas duas linhas de pesquisa praticamente não interagiam entre si, dadas as especificidades e conceitos matemáticos inerentes. Todavia, no trabalho seminal de Forney, [14], essas duas classes passaram a fazer parte de uma classe mais geral de códigos denominada *códigos geometricamente uniformes*. Desde então, muitos pesquisadores começaram a desenvolver pesquisas no sentido de prover a fundamentação matemática necessária, [27], bem como de estabelecer as condições para generalizações e possíveis extensões dessa classe importante de códigos, como pode ser constatado em [7], [28], e referências internas.

A busca por constelações de sinais que apresentem o melhor desempenho, em termos da probabilidade de erro, está intimamente ligada ao problema de projetar sistemas de comunicações digitais. Alguns trabalhos tratam sobre constelações de sinais geometricamente uniformes provenientes de tesselações hiperbólicas. Em um trabalho pioneiro no contexto da teoria de comunicações e projeto de sistemas de comunicações no plano hiperbólico, Brandani em [4] considera as tesselações auto-duais  $\{p, p\}$ , um importante subconjunto das tesselações  $\{p, q\}$  com  $p \neq q$ , onde  $\{p, q\}$  denota um polígono regular de  $p$  arestas, onde em cada vértice  $q$  desses polígonos regulares se encontram tendo em comum somente as arestas. Em [24], Lazari propõe a construção de constelações de sinais geometricamente uniformes no plano hiperbólico através do processo de construção de cadeias de partições geometricamente uniformes a partir do grupo de isometrias do octógono, região fundamental da tesselação  $\{8, 8\}$ , e do grupo de isometrias do  $p$ -ágono da tesselação  $\{p, 3\}$ . Em [5], as tesselações  $\{8, 8\}$  e  $\{12, 12\}$ , associadas às tesselações  $\{4g, 4g\}$ , foram consideradas de modo a obter constelações de sinais geometricamente uniformes a partir de grupos fuchsianos aritméticos. Tesselações  $\{4g, 4g\}$ , geram os  $g$ -toros a partir das identificações das  $4g$  arestas do polígono regular. Já em [11], foram consideradas tesselações hiperbólicas da forma  $\{12g - 6, 3\}$ , cuja cardinalidade é maior do que as obtidas a partir das auto-duais  $\{4g, 4g\}$ .

Em [6], foi realizada a análise de desempenho de constelações de sinais geometricamente uniformes provenientes de tesselações hiperbólicas em espaços bidimensionais com curvatura seccional constante  $\mathfrak{C}$ . Verifica que, em geral, as constelações de sinais em espaços com  $\mathfrak{C} < 0$  apresentam os melhores desempenhos em termos da probabilidade de erro quando comparadas com as constelações de sinais em espaços com  $\mathfrak{C} \geq 0$ .

Bavard em [1], mostra que as tesselações do tipo  $\{12g - 6, 3\}$  apresentam densidade de empacotamento ótima, ou seja, são mais densas do que qualquer outra tesselação. Mais precisamente, associado a uma tesselação da forma  $\{12g - 6, 3\}$  está o valor de densidade de empacotamento máxima,  $\frac{3}{\pi}$ . Mediante um empacotamento por bolas um valor aproximado de  $\frac{3}{\pi}$  pode ser atingido escolhendo um gênero  $g$  apropriado. O valor máximo, isto é, o valor de  $\frac{3}{\pi}$  é atingido por um empacotamento por horobolas, [10]. Portanto, as constelações de sinais provenientes das tesselações  $\{12g - 6, 3\}$  apresentam melhores desempenhos do que

qualquer outra constelação obtida a partir de outra tesselação hiperbólica. Observamos que para  $g = 1$ , temos a tesselação  $\{6, 3\}$  que fornece a tesselação mais densa no plano euclidiano.

Em [6], é verificado também que dada uma tesselação hiperbólica  $\{p, q\}$ , quanto maior é o valor de  $p$  e quanto mais o valor de  $q$  se aproxima de 3, simultaneamente, mais densa é a tesselação e, conseqüentemente, melhor será a constelação obtida de  $\{p, q\}$ .

Dentro deste contexto, ou seja, a fim de obter um método de rotulagem de sinais das constelações hiperbólicas propostas em [5] (quociente de uma ordem por um ideal próprio) é necessário estabelecer um procedimento sistemático de construção de reticulados (ordem dos quatérnios). É por esse procedimento que identificamos as estruturas algébrica e geométrica de modo a construir códigos geometricamente uniformes e, conseqüentemente, alcançar a eficiência desejada. Até onde é de nosso conhecimento, esta proposta não foi usada anteriormente no contexto da teoria de comunicação.

## 1.1 Descrição do Trabalho

O problema central deste trabalho consiste em construir grupos fuchsianos aritméticos, associados às tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$ , e identificá-los em ordens dos quatérnios, de modo a obtermos uma relação entre esses grupos e as constelações de sinais geometricamente uniformes propostas em [5]. Em síntese, o problema estudado em nosso trabalho é descrito como segue.

Sejam  $\{p, q\}$  uma tesselação hiperbólica, onde  $p = f(\lambda) = a\lambda \pm b$ ,  $\lambda, a, b \in \mathbb{N}$ , e  $P_p$  o polígono hiperbólico regular com  $p$  arestas associado a essa tesselação. Consideremos  $\Gamma_p$  um grupo fuchsiano cujos geradores emparelham as arestas de  $P_p$  de modo que  $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$  representa uma superfície de Riemann compacta e orientável de gênero  $g$ . As arestas do polígono  $P_p$  constituem a fronteira da região fundamental de  $\Gamma_p$  (região de Dirichlet). Essa região fundamental é constituída dos pontos exteriores dos círculos isométricos fornecidos pelas funções de emparelhamentos.

Se considerarmos os baricentros desses polígonos é possível obter uma constelação de sinais geometricamente uniforme, desde que exista um grupo que atue transitivamente nos sinais da referida constelação. As constelações de sinais construídas em [5], são constituídas de baricentros de polígonos hiperbólicos regulares de  $4g$  arestas,  $P_{4g}$ , associados às tesselações auto-duais  $\{4g, 4g\}$ . Cada uma dessas constelações é na verdade uma  $G_p$ -órbita de 0 (onde 0 denota o baricentro de  $P_{4g}$ ) construídas da seguinte forma:

- Consideremos o grupo fuchsiano  $\Gamma$ ,  $\Gamma_{4g} < \Gamma$ , sendo  $\Gamma_{4g}$  o grupo fuchsiano derivado de uma álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A} = (a, b)_K$ , cujos elementos são identificados com elementos de uma ordem dos quatérnios  $\mathcal{O}$  em  $\mathcal{A}$ . A partir do grupo dos invertíveis  $\mathcal{O}^1$  de  $\mathcal{O}$ , obtemos o

subgrupo normal  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1$  de  $\mathcal{O}^1$  que corresponde a um subgrupo normal  $\Gamma_{\mathfrak{p}}$  (onde  $\mathfrak{p}$  é um ideal do anel de inteiros de  $K$ ) através do isomorfismo  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \varphi(\mathcal{A})$ , sendo

$$\Gamma = \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\{\pm I_2\}} \quad \text{e} \quad \Gamma_{\mathfrak{p}} = \frac{\varphi(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1)}{\{\pm I_2\}},$$

de modo que

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_{\mathfrak{p}}} \simeq \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\varphi(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1)} = G_{\mathfrak{p}}.$$

Portanto, a  $G_{\mathfrak{p}}$ -órbita de 0 é dada por

$$G_{\mathfrak{p}}(0) = \{T(0) : T \in G_{\mathfrak{p}}\}, \tag{1.1}$$

sendo, assim, uma constelação geometricamente uniforme no espaço quociente  $\mathbb{D}^2/G_{\mathfrak{p}}$ .

Observamos que as constelações de sinais como em (1.1) podem ser construídas a partir de qualquer tesselação hiperbólica  $\{p, q\}$ , desde que o grupo  $\Gamma_p$ , obtido de  $\{p, q\}$ , seja um grupo fuchsiano derivado de uma álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}$ . Em [5], foi proposto um algoritmo de rotulamento algébrico para os sinais de uma constelação como em (1.1). Entretanto, é necessário que os elementos de  $\Gamma_p$  sejam identificados, via isomorfismo, com elementos de uma ordem  $\mathcal{O}$  em  $\mathcal{A}$ .

Nesse processo, temos em [5] dois casos particulares de identificação. Para  $g = 2$ , o grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma_8$ , proveniente da tesselação hiperbólica  $\{8, 8\}$ , é identificado com elementos da ordem  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}$ . Para  $g = 3$ , o grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma_{12}$ , proveniente da tesselação  $\{12, 12\}$ , é identificado com elementos da ordem  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}[\sqrt{3}]}$ .

Nessa mesma direção, consideramos grupos fuchsianos aritméticos associados às tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$ , e construímos de forma generalizada os reticulados hiperbólicos  $\mathcal{O}$  nos quais os elementos de  $\Gamma_p$  são identificados.

Dividimos o trabalho da seguinte forma:

No Capítulo 2 revisamos os conceitos da teoria dos números algébricos e de geometria necessários para o desenvolvimento do texto. Em álgebra destacamos os corpos de números e anéis de inteiros. Em geometria consideramos os conceitos de espaços métricos, espaços hiperbólicos, grupos fuchsianos, tesselações hiperbólicas e constelações de sinais.

No Capítulo 3 destacamos os conceitos de álgebra dos quatérnios e grupos fuchsianos aritméticos. Consideramos também os reticulados hiperbólicos (ordem dos quatérnios). Esses dois últimos conceitos constituem ferramentas fundamentais para a construção das constelações de sinais hiperbólicas geometricamente uniformes propostas em [5]. Também caracterizamos os grupos fuchsianos aritméticos.

Nos Capítulos 4 e 5 apresentamos nossas contribuições. Primeiramente, no Capítulo 4, consideramos as tesselações hiperbólicas auto-duais  $\{4g, 4g\}$ , e identificamos as ordens dos

quatérnios  $\mathcal{O}$  associadas aos grupos fuchsianos aritméticos  $\Gamma_{4g}$  dessas tesselações auto-duais, para os valores de  $g$ , dados por  $g = m \cdot 2^n$ , onde  $m = 1, 3, 5$  e  $n \in \mathbb{N}$ . O Capítulo 5 segue na mesma direção do Capítulo 4. Construimos famílias de emparelhamentos generalizados associados à tesselações hiperbólicas mais densas do que as auto-duais  $\{4g, 4g\}$ . Para a família  $\{10\lambda, 2\lambda\}$ , apresentamos a identificação dos grupos fuchsianos aritméticos  $\Gamma_{10\lambda}$  em ordens dos quatérnios de forma generalizada para  $\lambda = 2^n$ , sendo  $n \in \mathbb{N}$  qualquer. Para as tesselações  $\{12g - 6, 3\}$  e  $\{12\lambda - 12, 4\}$  consideramos de modo particular, a identificação dos grupos fuchsianos aritméticos  $\Gamma_{30}$  e  $\Gamma_{60}$  nas respectivas ordens dos quatérnios para  $g = 3$  e  $\lambda = 6$ , respectivamente. Encerramos o Capítulo 5 apresentando alguns exemplos de rotulamento algébrico de sinais de uma constelação geometricamente uniforme proveniente da tesselação  $\{4g, 4g\}$ , com o objetivo de unir o processo de identificação de um grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma$  em ordens dos quatérnios, com o processo de rotulagem de sinais das constelações consideradas neste trabalho.

Concluimos o trabalho com o Capítulo 6, onde fazemos as considerações finais e apresentamos sugestões para trabalhos futuros.



# Capítulo 2

## Revisão de Conceitos

Carvalho em [5] estabeleceu um método de construção de constelações de sinais geometricamente uniforme no plano hiperbólico associadas às tesselações hiperbólicas auto-duais  $\{4g, 4g\}$ , sendo  $g$  o gênero de uma superfície compacta e orientável. Cada uma dessas constelações constitui uma  $G_p$ -órbita de  $0$  em um espaço quociente  $\mathbb{D}^2/G_p$ , onde  $0$  é o baricentro de um polígono hiperbólico regular de  $4g$  arestas e  $\mathbb{D}^2$  é o plano hiperbólico, modelo do disco de Poincaré. Tais constelações contêm  $p^m$  sinais que são rotulados por elementos de uma estrutura algébrica  $G_{p^m}$  (um grupo com  $p^m$  elementos).

O objetivo central do nosso trabalho está relacionado com o processo de construção e identificação de grupos fuchsianos aritméticos (Seção 3.3) com elementos de ordens dos quatérnios. Isso possibilita construirmos os reticulados hiperbólicos associados a essas constelações, bem como realizar a rotulagem dos sinais provenientes de tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$ . Para o desenvolvimento, faz-se necessária uma revisão dos conceitos e resultados da teoria dos números algébricos e geometria hiperbólica que serão usados no desenvolvimento deste trabalho.

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira apresentamos o conceito de corpos de números, com atenção especial aos seus anéis de inteiros e algumas de suas propriedades. Na segunda encontram-se os conceitos de geometria hiperbólica relevantes ao trabalho, tendo como enfoques principais o conceito de grupo fuchsiano e de outros inerentes a este tais como região fundamental, círculo isométrico e o conceito de constelação de sinais geometricamente uniforme.

Não pretendemos aqui fazer um estudo detalhado dos conceitos supra citados, mas apresentar os que, em geral, serão utilizados nos capítulos subsequentes. Admitiremos já conhecidos os conceitos e resultados básicos da teoria dos grupos e de anéis. Para um estudo detalhado sobre os mesmos, sugerimos as referências [15, 16, 23].

## 2.1 Corpos de Números e Anéis de Inteiros Algébricos

Uma leitura complementar dos assuntos desta seção pode ser feita nas referências [30, 32, 36].

Um anel  $A$  comutativo com unidade onde todo elemento não-nulo é invertível é chamado *corpo*. Ou seja,  $A$  é um corpo se, e somente se,  $A - \{0\}$  é um grupo abeliano multiplicativo.

Sejam  $A$  e  $B$  anéis (ou corpos). Uma aplicação  $\varphi : A \rightarrow B$  é um *homomorfismo* de  $A$  em  $B$  se valem as seguintes condições:

1.  $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ,  $\forall a, b \in A$ ;
2.  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ ,  $\forall a, b \in A$ ;
3.  $\varphi(1) = 1$ .

É claro que se  $\varphi : A \rightarrow B$  for um homomorfismo de anéis, então  $\varphi(0) = 0$ . Um homomorfismo injetivo é chamado de *monomorfismo* e um homomorfismo bijetivo é chamado de *isomorfismo*.

Se  $\varphi : A \rightarrow B$  é um isomorfismo, então dizemos que  $A$  e  $B$  são *isomorfos* e denotamos por  $A \simeq B$ . Dois anéis (ou corpos) isomorfos são considerados idênticos. Analogamente, seguem as definições de homomorfismo e isomorfismo para grupos.

Dados inteiros positivos  $p$  e  $n$ ,  $p$  primo, existe um corpo com  $p^n$  elementos. Reciprocamente, o número de elementos de qualquer corpo finito é uma potência de um primo. Um corpo finito com  $q$  elementos também é chamado *corpo de Galois* e é denotado por  $GF(q)$ .

Seja  $K$  um corpo. Uma *extensão* de  $K$  é qualquer corpo  $F$  contendo  $K$  como subcorpo. Para indicar que  $F$  é uma extensão de  $K$  usaremos a notação  $F/K$  ou  $F \supset K$ . Mediante as operações,

$$\begin{aligned} + : F \times F &\rightarrow F \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : K \times F &\rightarrow F \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda \cdot a \end{aligned}$$

tem-se claramente que  $F$  é um espaço vetorial sobre  $K$ . O grau ou índice de uma extensão  $F \supset K$ , denotado por  $[F : K]$ , é a dimensão de  $F$  visto como espaço vetorial sobre  $K$ . A extensão é dita finita se  $[F : K] = n < \infty$ , caso contrário, a extensão é dita infinita. Por exemplo, o corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$  é uma extensão do corpo dos números reais  $\mathbb{R}$  tal que  $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ . Já para o corpo dos números racionais  $\mathbb{Q}$ , temos  $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$  e  $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$ .

Dizemos que um elemento  $\alpha \in \mathbb{C}$  é um *número algébrico* se existir um polinômio não-nulo  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  tal que  $f(\alpha) = 0$ . Nesse caso, dizemos que  $\alpha$  é *algébrico* sobre o corpo  $\mathbb{Q}$ .

Se todo elemento em uma extensão  $L \supset \mathbb{Q}$  é algébrico, então a extensão  $L$  é dita ser uma *extensão algébrica*.

É claro que se  $\alpha$  é um número algébrico, então existe um único polinômio mônico  $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$  de menor grau tal que  $p(\alpha) = 0$ . Verifica-se que o polinômio  $p(x)$  é irredutível e chamado *polinômio minimal* de  $\alpha$ .

O conjunto  $\mathbf{A}$  de todos os números algébricos sobre  $\mathbb{Q}$  é um subcorpo de  $\mathbb{C}$ , [36]. Além disso,  $[\mathbf{A} : \mathbb{Q}] = \infty$ .

Por outro lado, um número complexo  $\theta$  é um *inteiro algébrico* se existir um polinômio mônico  $p(x)$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}$  tal que  $p(\theta) = 0$ . Em outras palavras,

$$\theta^n + a_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots + a_1\theta + a_0 = 0,$$

onde  $a_i \in \mathbb{Z}$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ .

Observamos também que o conjunto  $\mathbf{B}$  de inteiros algébricos é um subanel de  $\mathbf{A}$ .

Um resultado que relaciona o grau da extensão  $\mathbb{Q}(\alpha)$  com o grau do polinômio minimal de  $\alpha$  é o seguinte:

**Teorema 2.1.1** [16] *Se  $L \supset \mathbb{Q}$ , então  $\alpha \in L$  é algébrico sobre  $\mathbb{Q}$  se, e somente se,*

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{f(\alpha) : f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$$

*é uma extensão finita de  $\mathbb{Q}$ . Neste caso,  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \partial p(x)$ , onde  $p(x)$  é o polinômio minimal de  $\alpha$  sobre  $\mathbb{Q}$ , e  $\partial p(x)$  denota o grau de  $p(x)$ .*

Isso significa que o corpo  $\mathbb{Q}(\alpha)$  consiste das seguintes expressões polinomiais em  $\alpha$ ,

$$\beta = k_0 + k_1\alpha + \cdots + k_{n-1}\alpha^{n-1},$$

onde  $k_i \in \mathbb{Q}$  para todo  $i = 0, \dots, n-1$ . O corpo  $\mathbb{Q}(\alpha)$  é o menor subcorpo de  $\mathbb{C}$  que contém  $\mathbb{Q}$  e  $\{\alpha\}$ .

Temos também que se uma extensão  $L \supset \mathbb{Q}$  é finita, então  $L = \mathbb{Q}(\alpha)$  para algum  $\alpha \in \mathbf{A}$ , [36]. Portanto, toda extensão finita é algébrica, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo,  $[\mathbf{A} : \mathbb{Q}] = \infty$ .

Observamos que todos os resultados anteriores podem ser generalizados para qualquer extensão  $L \supset K$ . Entretanto, estamos interessados apenas em extensões da forma  $L = \mathbb{Q}(\theta)$  onde  $\theta \in \mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ .

Neste trabalho vamos considerar extensões algébricas de  $\mathbb{Q}$  de grau finito, isto é, extensões  $K \supset \mathbb{Q}$  tais que  $[K : \mathbb{Q}]$  é finito. Tais extensões são denominadas *corpos de números*. Desse modo, temos que  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  para algum  $\theta \in \mathbf{A}$ .

Sendo  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  um corpo de números, com  $[K : \mathbb{Q}] = n$ , existem  $n$  monomorfismos  $\varphi_i : K \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , definidos por, [36],

$$\varphi_i(\theta) = \theta_i,$$

onde  $\theta_i$  são as raízes distintas em  $\mathbb{C}$  do polinômio minimal de  $\alpha$  sobre  $\mathbb{Q}$ . Além disso, esses monomorfismos são tais que  $\varphi_i(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Desde que  $\mathbb{C} \supset K$ , o conjunto  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  constitui o *grupo de Galois* da extensão  $K \supset \mathbb{Q}$ .

**Exemplo 2.1.2** *Seja  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ . Como o polinômio minimal de  $\theta = \sqrt[3]{5}$  sobre  $\mathbb{Q}$  é  $p(x) = x^3 - 5$ , segue que existem três monomorfismos  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{C}$ , dados por  $\varphi_1(\theta) = \theta$ ,  $\varphi_2(\theta) = \omega\theta$  e  $\varphi_3(\theta) = \omega^2\theta$ , sendo  $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ .*

Para um corpo de números  $K$  vamos considerar o conjunto

$$\mathfrak{D}_K = K \cap \mathbf{B},$$

onde  $\mathbf{B}$  denota o anel de todos os inteiros algébricos. Portanto,  $\mathfrak{D}_K$  é um subanel de  $K$  chamado *anel de inteiros* de  $K$ . Além disso, como  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbf{B}$ , segue que  $\mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{D}_K$ .

O anel de inteiros de um corpo de números desempenhará um papel importante no processo de identificação de grupos fuchsianos aritméticos em ordens dos quatérnios.

Vimos que todo corpo de números  $K$  pode ser escrito na forma  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  com  $\theta \in \mathbf{A}$ . De modo mais preciso, podemos expressá-lo como  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  onde  $\theta \in \mathfrak{D}_K$ , [36].

Inerentes ao anel de inteiros de um corpo de números  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  existem propriedades bastantes significativas. Por exemplo, o anel  $\mathfrak{D}_K$  é noetheriano<sup>1</sup> e, portanto, satisfaz a condição de cadeia ascendente, bem como a condição maximal de ideais. Mais propriedades podem ser verificadas em [9] e [36].

Dentre essas propriedades vamos destacar, de modo especial, a de que  $(\mathfrak{D}_K, +)$  é um grupo abeliano livre de posto  $n$ , onde  $[K : \mathbb{Q}] = n$ .

Consideremos o corpo de números  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  e seja  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  uma  $\mathbb{Q}$ -base de  $K$ . O *discriminante* desta base, denotado por  $\Delta[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ , é definido como

$$\Delta[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = \{\det[\varphi_i(\alpha_j)]\}^2,$$

onde  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  constitui o grupo de Galois da extensão  $K \supset \mathbb{Q}$ . Desse modo, se  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  é uma outra  $\mathbb{Q}$ -base de  $K$ , então

$$\beta_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} \alpha_i \quad (c_{ik} \in \mathbb{Q}),$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Observe que  $C = (c_{ik})$  é a matriz de mudança de base e, portanto,  $\det(c_{ik}) \neq 0$ . Conseqüentemente, obtemos a igualdade

$$\Delta[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\det(c_{ik})]^2 \Delta[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n].$$

---

<sup>1</sup>Equivalentemente, todo ideal em  $\mathfrak{D}_K$  é finitamente gerado.

Além disso,  $\Delta[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{Q} - \{0\}$ ; e se  $\alpha_i \in \mathfrak{D}_K$ ,  $i = 1, \dots, n$ , então, [36],

$$\Delta[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

O traço e a norma de  $\alpha$ , relativos à extensão  $K \supset \mathbb{Q}$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = n$ , denotados respectivamente por  $T_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$  e  $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$ , ou simplesmente,  $T_K(\alpha)$  e  $N_K(\alpha)$ , são definidos por

$$T_K(\alpha) = T_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\alpha) \quad \text{e} \quad N_K(\alpha) = N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(\alpha),$$

onde  $\varphi_i$  denota o  $i$ -ésimo monomorfismo entre  $K$  e  $\mathbb{C}$ . Claramente,  $N_K(\alpha) = 0$  se, e somente se,  $\alpha = 0$ . Para quaisquer  $\alpha, \beta \in K$  e para quaisquer  $p, q \in \mathbb{Q}$ , valem as propriedades

- (a)  $N_K(\alpha\beta) = N_K(\alpha)N_K(\beta)$ ,
- (b)  $T_K(\alpha p + q\beta) = pT_K(\alpha) + qT_K(\beta)$ ,
- (c)  $T_K(p) = np$ ,
- (d)  $N_K(p) = p^n$ .

Podemos verificar também que se  $\alpha \in \mathfrak{D}_K$ , então  $T_K(\alpha), N_K(\alpha) \in \mathbb{Z}$ .

Seja  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  com uma  $\mathbb{Q}$ -base  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . Dado um elemento  $\beta$  do grupo abeliano  $(\mathfrak{D}_K, +)$ , nem sempre existem  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{Z}$  tais que  $\beta$  se expresse de forma única como

$$\beta = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 + \dots + z_n\alpha_n.$$

Isso nos leva à definição de base integral.

Sabemos que  $(\mathfrak{D}_K, +)$  é um grupo abeliano. Uma  $\mathbb{Z}$ -base para  $(\mathfrak{D}_K, +)$  é chamada uma *base integral* para  $K$  ou para  $\mathfrak{D}_K$ . Portanto,  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$  é uma base integral para  $K$  se, e somente se, para todo elemento  $\beta \in \mathfrak{D}_K$  existem únicos  $z_1, \dots, z_s \in \mathbb{Z}$  de modo que

$$\beta = z_1\alpha_1 + z_2\alpha_2 + \dots + z_s\alpha_s,$$

sendo  $\alpha_i \in \mathfrak{D}_K$  para  $i = 1, 2, \dots, s$ .

**Teorema 2.1.3** [9] *Todo corpo de números  $K$  possui uma base integral com  $[K : \mathbb{Q}] = n$  elementos, isto é, o grupo  $(\mathfrak{D}_K, +)$  é abeliano livre de posto  $n$ .*

Para quaisquer duas bases integrais  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  e  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  de um corpo de números  $K$ , vale a igualdade, [36],

$$\Delta = \Delta[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = \Delta[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n].$$

O valor comum  $\Delta$  é chamado *discriminante* de  $K$  ou de  $\mathfrak{D}_K$ .

É claro que toda base integral  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  é uma  $\mathbb{Q}$ -base de  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ . Basta notar que dado  $\beta \in K$ , existe  $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$  tal que  $c\beta \in \mathfrak{D}_K$ ; mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, para  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ , temos que<sup>2</sup>  $\frac{1+\sqrt{7}i}{2} \in \mathfrak{D}_K$ , ou seja,  $\{1, \sqrt{7}i\}$  é uma  $\mathbb{Q}$ -base de  $K$ , mas não uma base integral. Isso nos mostra que nem sempre se tem  $\mathfrak{D}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ .

Mesmo que o Teorema 2.1.3 garanta a existência de uma base integral para qualquer corpo de números  $K$ , o mesmo não nos mostra uma forma de encontrá-la. Uma exceção são os corpos quadráticos  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 2$  e  $d$  livre de quadrado. De fato,

**Teorema 2.1.4** [9] *Seja  $d$  um inteiro livre de quadrado. Então o anel de inteiros algébricos de  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  é dado por*

$$\mathfrak{D}_K = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & \text{se } d \not\equiv 1 \pmod{4}, \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right] & \text{se } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Para o caso de um corpo de números  $K$ ,  $[K : \mathbb{Q}] > 2$ , existem outros critérios (um pouco árdus) para determinar uma base integral para  $K$ . Dentre esses critérios, destacaremos os seguintes:

**Teorema 2.1.5** [36] *Suponha que  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{D}_K$  formam uma  $\mathbb{Q}$ -base para  $K$ . Se  $\Delta[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$  é livre de quadrado, então  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  é uma base integral.*

É claro que a recíproca do Teorema 2.1.5 não é válida, conforme mostra o Exemplo 2.1.7.

**Teorema 2.1.6** [36] *Seja  $G$  um subgrupo aditivo de  $\mathfrak{D}_K$  de posto igual a  $[K : \mathbb{Q}]$ , com uma  $\mathbb{Z}$ -base  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . Se  $G \neq \mathfrak{D}_K$ , então existe um inteiro algébrico da forma*

$$\frac{1}{p}(\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n),$$

onde  $0 \leq \lambda_i \leq p - 1$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e  $p$  é um primo tal que  $p^2$  divide  $\Delta_G = \Delta[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ .

**Exemplo 2.1.7** *Seja o corpo de números  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ , onde  $\theta = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ . O polinômio minimal de  $\theta$  é  $p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ . Consideremos então os quatro monomorfismos  $\varphi_i : K \rightarrow \mathbb{C}$ , dados por*

$$\begin{aligned} \varphi_1(\theta) &= \sqrt{2 + \sqrt{2}}, & \varphi_2(\theta) &= -\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \\ \varphi_3(\theta) &= \sqrt{2 - \sqrt{2}}, & \varphi_4(\theta) &= -\sqrt{2 - \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>O polinômio minimal de  $\frac{1+\sqrt{7}i}{2}$  é  $x^2 - x + 2$ .

Seja  $G$  um subgrupo aditivo de  $\mathfrak{D}_K$  de posto quatro com uma  $\mathbb{Z}$ -base  $\{1, \theta, \theta^2, \theta^3\}$ . Através de alguns cálculos, obtemos

$$\Delta_G = 2^{11}.$$

Sabemos que se  $\alpha \in \mathfrak{D}_K$ , então  $N_K(\alpha) \in \mathbb{Z}$ . Logo, considerando  $p = 2$ , segue que não existe inteiro algébrico de  $K$  da forma

$$\frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2\theta + \lambda_3\theta^2 + \lambda_4\theta^3),$$

onde  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , pois caso contrário, existem  $\lambda_i, \lambda_j \in \{0, 1\}$  tais que

$$\frac{\lambda_i^4 \pm 2\lambda_j^4}{4} \in \mathbb{Z} - \{0\},$$

o que não é possível. Portanto, pelo Teorema 2.1.6, temos  $G = \mathfrak{D}_K$ , ou seja,  $\mathfrak{D}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ .

## 2.2 Conceitos de Geometria

Nesta seção vamos considerar os conceitos geométricos usados na construção dos grupos de isometrias dos polígonos hiperbólicos  $P_p$ , ou seja, transformações  $T$  tais que  $T(P_p) = P'_p$  ( $P_p$  e  $P'_p$  são polígonos isométricos ou geometricamente congruentes). Os polígonos  $P_p$  estão associados às tesselações hiperbólicas regulares  $\{p, q\}$ . Começaremos então com o conceito de isometria.

### 2.2.1 Isometria

Seja  $E$  um conjunto não-vazio. Uma *métrica* em  $E$  é uma função  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo, para quaisquer  $x, y, z \in E$ , as seguintes condições:

1.  $d(x, y) \geq 0$ , com igualdade se, e somente se,  $x = y$ ,
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ .

Nessas condições,  $d(x, y)$  recebe o nome de *distância* de  $x$  a  $y$ .

O conjunto  $E$  munido com uma métrica  $d$  é chamado *espaço métrico* e indicado por  $(E, d)$ .

**Exemplo 2.2.1** Exemplos clássicos de espaços métricos são  $(\mathbb{R}, d_1)$  e  $(\mathbb{R}^n, d_2)$ , onde  $d_1(x, y) = |x - y|$  e  $d_2$  é a métrica euclidiana, ou seja,  $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ , sendo  $\|\mathbf{x}\|$  a norma do vetor  $\mathbf{x}$ .

**Exemplo 2.2.2** Dado um conjunto não-vazio  $E$ , a função  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

é uma métrica chamada métrica discreta.

Podemos, a partir da métrica discreta, definir outra métrica sobre o conjunto  $E^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in E\}$ . De fato, para quaisquer  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$ , digamos  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , consideremos

$$d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i),$$

sendo  $d$  a métrica discreta. Verifica-se que  $d_H$  é uma métrica em  $E^n$ , chamada *métrica de Hamming*.

Dado um espaço métrico  $(E, d)$ , uma aplicação  $T : E \rightarrow E$  é uma *isometria* de  $E$  se  $T$  preserva a distância  $d$ , isto é,

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)), \quad \forall x, y \in E.$$

Toda isometria  $T$  é uma aplicação injetora. Mais ainda, se  $T$  é sobrejetora, então,  $T^{-1}$  também é uma isometria e, para quaisquer duas isometrias  $T$  e  $S$  de  $E$ , a composta  $T \circ S$  continua sendo uma isometria.

Uma *figura geométrica*  $\mathcal{S}$  é um subconjunto de pontos em um espaço métrico  $E$ . Duas figuras geométricas  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  de um espaço métrico  $E$  são *geometricamente congruentes* (ou simplesmente *congruentes*) se existe uma isometria  $T : E \rightarrow E$  tal que  $T(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$ . Nesse caso, dizemos que  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  *têm a mesma forma*.

Uma isometria  $T$  que deixa uma figura geométrica  $\mathcal{S}$  invariante, ou seja,  $T(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ , é chamada uma *simetria* de  $\mathcal{S}$ . O conjunto das simetrias de  $\mathcal{S}$ ,  $U(\mathcal{S})$ , é um grupo sob a operação de composição, [14]. O grupo  $U(\mathcal{S})$  é chamado *grupo de simetrias* de  $\mathcal{S}$ .

Nos Capítulos 4 e 5 vamos considerar os grupos de simetrias de polígonos hiperbólicos  $P_p$  (grupos fuchsianos).

## 2.2.2 Espaços Hiperbólicos

Antes de considerarmos o conceito de grupo fuchsiano e alguns resultados inerentes a este, vamos apresentar os modelos de geometria hiperbólica que usaremos no decorrer do trabalho. Sugerimos as referências [13, 22] para um estudo aprofundado dos assuntos tratados nesta seção.

Consideremos o conjunto

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}$$

munido da estrutura Riemanniana

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}. \quad (2.1)$$

Com essa estrutura, o semi-espço  $\mathbb{H}^{n+1}$  é chamado de *espaço hiperbólico*  $(n+1)$ -dimensional, e a métrica  $ds$  é chamada *métrica hiperbólica*. A partir de (2.1), vamos considerar conceitos de comprimento de curvas, geodésicas e distância entre pontos de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma curva diferenciável por partes, onde

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)).$$

O *comprimento hiperbólico* da curva  $\gamma$ , que denotamos por  $\|\gamma\|$ , é definido como

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_{n+1}}{dt}\right)^2}}{x_{n+1}} dt.$$

Podemos, sem perda de generalidade, supor que a curva  $\gamma$  esteja definida no intervalo  $I = [0, 1]$ . De fato, considerando a aplicação  $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  definida por  $\phi(t) = a + (b-a)t$  e  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \phi)(t) = \gamma(a + bt - at)$ , obtemos pela regra da cadeia que

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\phi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_{n+1}}{d\phi}\right)^2}}{x_{n+1}} d\phi = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_{n+1}}{dt}\right)^2}}{x_{n+1}} dt = \|\tilde{\gamma}\|.$$

Com essa consideração, podemos definir a distância entre dois pontos de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

**Definição 2.2.3** *Dados dois pontos  $p, q \in \mathbb{H}^{n+1}$ , a distância entre  $p$  e  $q$  é definida pela fórmula*

$$d(p, q) = \inf \|\gamma\|, \quad (2.2)$$

onde o ínfimo é considerado sobre o conjunto das curvas continuamente diferenciáveis por partes  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ , com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) = q$ .

Uma prova detalhada de que a distância definida em (2.2) é de fato uma métrica pode ser encontrada em [13].

Consideremos agora o conceito de geodésica em  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

**Definição 2.2.4** *Uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  é dita geodésica se para quaisquer  $s, t \in [a, b]$ , tivermos*

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = \inf \int_s^t \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_{n+1}}{du}\right)^2}}{x_{n+1}} du,$$

ou seja, se  $\gamma$  minimizar a distância entre os pontos de seu traçado.

A partir de agora, vamos considerar dois modelos para a geometria hiperbólica plana, que são  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ , conhecido como *plano de Lobachevski*, e  $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , munido da métrica Riemanniana

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2},$$

conhecido como *disco de Poincaré*. Definições de comprimento de curvas em  $\mathbb{D}^2$ , bem como distâncias entre dois pontos  $p, q \in \mathbb{D}^2$  são análogas às definições em  $\mathbb{H}^2$ . Apesar de existirem outros modelos (Klein e de Minkowsky), os dois modelos a serem usados servem melhor aos objetivos deste trabalho.

Os conjuntos  $\partial_\infty \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}$  e  $\partial \mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  são chamados de *bordos* de  $\mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{D}^2$ , respectivamente. Já o conjunto  $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$  é o *fecho* de  $\mathbb{H}^2$ . De forma análoga,  $\overline{\mathbb{D}^2} = \mathbb{D}^2 \cup \partial \mathbb{D}^2$  é o *fecho* de  $\mathbb{D}^2$ .

**Teorema 2.2.5** [13] *As geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  são as semi-retas e semi-circunferências ortogonais a  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ . Já as geodésicas de  $\mathbb{D}^2$  são segmentos de retas e de circunferências ortogonais a  $\partial \mathbb{D}^2$ .*

Considerando a aplicação  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  definida por

$$f(z) = \frac{zi + 1}{z + i}. \quad (2.3)$$

Verifica-se que  $f$  é uma bijeção e que

$$\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{\text{Im}(z)}.$$

Assim, usando em  $\mathbb{D}^2$  a métrica

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2},$$

e usando o fato que  $\text{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ , segue que  $f$  torna-se uma isometria.

Dado um conjunto  $A \subset \mathbb{H}^2$ , sua *área hiperbólica*  $\mu(A)$ , é definida pela seguinte fórmula

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2},$$

se a mesma existir e for finita. Analogamente, se  $A \subset \mathbb{D}^2$ , então

$$\mu(A) = \int_A \frac{4dx dy}{(1-(x^2+y^2))^2}.$$

O próximo teorema mostra que a área hiperbólica de um triângulo hiperbólico depende apenas de seus ângulos.

**Teorema 2.2.6** (*Gauss-Bonnet*) [13] *Seja  $\Delta$  um triângulo hiperbólico com ângulos  $\alpha, \beta, \gamma$ . Então*

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

O próximo passo é considerar o conceito de grupo fuchsiano. Antes, precisamos considerar os conjuntos  $PSL(2, \mathbb{R})$  e  $SL(2, \mathbb{R})$ .

Seja  $PSL(2, \mathbb{R})$  o conjunto de todas as transformações lineares fracionárias  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.4)$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $ad - bc = 1$ . Essas transformações também são chamadas *transformações de Möbius*.

Cada transformação  $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$  como em (2.4) pode ser representada pelas matrizes

$$A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

onde  $A \in SL(2, \mathbb{R})$ , sendo  $SL(2, \mathbb{R})$  o grupo multiplicativo das matrizes reais  $A$  com  $\det(A) = 1$ . O grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  é chamado *grupo unimodular*. Assim,

$$T_A \in PSL(2, \mathbb{R}) \Leftrightarrow A \in SL(2, \mathbb{R}).$$

A composta de duas transformações em  $PSL(2, \mathbb{R})$  corresponde ao produto de duas matrizes em  $SL(2, \mathbb{R})$ , e a inversa de  $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$  corresponde à inversa de  $A$ . Portanto,  $PSL(2, \mathbb{R})$  é um grupo sob a operação de composição.

Sejam  $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$ ,  $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  e  $A$  como uma das matrizes de (2.5). Observamos que a função  $\varphi : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$ , dada por  $\varphi(A) = T_A$  é um homomorfismo sobrejetor cujo núcleo é  $\{\pm I_2\}$ , sendo  $I_2$  a matriz identidade de ordem 2. Portanto,

$$PSL(2, \mathbb{R}) \simeq \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm I_2\}}. \quad (2.6)$$

O grupo quociente em (2.6) é chamado *grupo projetivo linear*.

**Teorema 2.2.7** [22] *A área hiperbólica é invariante sob todas as transformações em  $PSL(2, \mathbb{R})$ , isto é, se  $A \subseteq \mathbb{H}^2$ ,  $\mu(A)$  existe e  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ , então  $\mu(A) = \mu(T(A))$ .*

As transformações em  $PSL(2, \mathbb{R})$  agem sobre  $\mathbb{H}^2$  por homeomorfismos, e pode-se mostrar que são isometrias de  $\mathbb{H}^2$  em  $\mathbb{H}^2$ , [22]. Assim, se  $\gamma$  é uma geodésica em  $\mathbb{H}^2$ , então para qualquer  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ ,  $T(\gamma)$  também é uma geodésica em  $\mathbb{H}^2$ .

**Lema 2.2.8** [13] *As isometrias que mantêm o disco de Poincaré invariante, são as transformações lineares fracionárias da forma*

$$T_1(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (2.7)$$

*Essas transformações formam um grupo com a operação de composição. Além disso, essas isometrias podem ser escritas na forma*

$$T_1 = f \circ T \circ f^{-1},$$

onde  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$  e  $f$  como em (2.3).

As transformações em  $PSL(2, \mathbb{R})$  são classificadas em três tipos. Sejam  $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$ ,  $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  com  $ad - bc = 1$  e  $A$  como uma das matrizes em (2.5). Seja  $tr(T) = |a + d|$ . Dizemos que  $T_A$  e  $A$  é:

1. *Elíptica*, se  $tr(T) < 2$ ,
2. *Parabólica*, se  $tr(T) = 2$ ,
3. *Hiperbólica*, se  $tr(T) > 2$ .

**Teorema 2.2.9** [13] *Seja  $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$  com  $T_A \neq Id$ , então existe uma matriz  $B \in SL(2, \mathbb{R})$  tal que  $T_B \circ T_A \circ T_B^{-1}$  é uma das matrizes*

$$\left( \begin{array}{cc} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc} 1 & t \\ 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{array} \right), \quad (2.8)$$

onde  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $t \in \mathbb{R}^*$  e  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ .

Portanto, a menos de conjugação, podemos assumir que a matriz  $A$  seja uma das matrizes de (2.8), conforme  $A$  seja elíptica, parabólica ou hiperbólica, respectivamente.

De modo natural, podemos identificar cada transformação  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ ,  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , com o elemento  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . Portanto, como espaço topológico,  $SL(2, \mathbb{R})$  pode ser identificado com o subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ ,

$$E = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : ad - bc = 1\},$$

herdando, dessa forma, a topologia de  $\mathbb{R}^4$ .

A aplicação  $-\varphi : E \rightarrow E$ , dada por  $-\varphi(a, b, c, d) = (-a, -b, -c, -d)$  é um homeomorfismo. Além disso,  $G = \{\varphi, -\varphi\}$ , onde  $\varphi$  é a função identidade sobre  $E$ , é um grupo cíclico

de ordem 2. Daí,  $E$  é um  $G$ -conjunto. Definimos a topologia em  $PSL(2, \mathbb{R})$  como o espaço quociente

$$PSL(2, \mathbb{R}) \simeq \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm \varphi\}}.$$

A norma em  $PSL(2, \mathbb{R})$  é induzida de  $\mathbb{R}^4$  da seguinte forma: para cada  $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ ,  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad - bc = 1$ , definimos

$$\|T\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

que está bem definida.  $PSL(2, \mathbb{R})$  é um grupo topológico com relação à métrica  $d(T, S) = \|T - S\|$ . Temos também que o grupo das isometrias de  $\mathbb{H}^2$ , que denotamos por  $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$ , é também topológico.

**Definição 2.2.10** *Um subgrupo  $\Gamma$  de  $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$  é chamado discreto se a topologia induzida em  $\Gamma$  é discreta, isto é, se  $\Gamma$  é um conjunto discreto no espaço topológico  $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$ .*

**Lema 2.2.11** [22]  *$\Gamma$  é discreto se, e somente se,  $T_n \rightarrow Id$ ,  $T_n \in \Gamma$  implica que  $T_n = Id$  para  $n$  suficientemente grande.*

**Definição 2.2.12** *Um grupo  $\Gamma$  é chamado grupo fuchsiano se é um subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$ .*

**Definição 2.2.13** *Seja  $G$  um grupo de permutações de um conjunto  $E \neq \emptyset$ . Dado  $x \in E$ , o conjunto*

$$G(x) = \{T(x) : T \in G\}$$

*é chamado  $G$ -órbita de  $x$ .  $E$  o subgrupo de  $G$ ,*

$$G_x = \{T \in G : T(x) = x\},$$

*é chamado estabilizador de  $x$ .*

O Teorema 2.2.16 caracteriza os grupos fuchsianos. Antes, vamos considerar alguns conceitos, os quais também nos conduzirão à definição de região fundamental de um grupo fuchsiano. No que segue,  $E$  é um espaço métrico e  $G$  é grupo de homeomorfismos agindo sobre  $E$ .

**Definição 2.2.14** *Uma família  $\{M_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$  de subconjuntos de  $E$  indexados por elementos de  $\Lambda$  é chamada localmente finita se para qualquer compacto  $K \subseteq E$ ,  $M_\alpha \cap K \neq \emptyset$  apenas para uma quantidade finita de  $\alpha \in \Lambda$ .*

**Definição 2.2.15** Dizemos que um grupo  $G$  age de maneira propriamente descontínua em  $E$ , se a  $G$ -órbita de qualquer ponto  $x \in E$  é localmente finita.

Como mencionado, os elementos de  $\Gamma$  são homeomorfismos agindo sobre  $\mathbb{H}^2$ . Além disso,

**Teorema 2.2.16** [22]  $\Gamma$  é um grupo fuchsiano se, e somente se,  $\Gamma$  age de maneira propriamente descontínua sobre  $\mathbb{H}^2$ .

**Definição 2.2.17** Um subgrupo  $\Gamma$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$  é dito grupo elementar se existir  $z \in \overline{\mathbb{H}^2}$  tal que a órbita  $\Gamma(z)$  seja finita.

**Teorema 2.2.18** [13] Seja  $\Gamma$  um grupo fuchsiano não-elementar. Então  $\Gamma$  possui elementos hiperbólicos.

**Definição 2.2.19** Sejam  $\Gamma$  um grupo fuchsiano e  $z \in \mathbb{H}^2$ .

1. Chamamos de conjunto limite de  $\Gamma$  determinado por  $z$  ao conjunto

$$\Lambda_z(\Gamma) = \{\xi \in \overline{\mathbb{H}^2} : \xi \text{ é ponto de acumulação de } \Gamma(z)\}.$$

2. Chamamos de conjunto limite de  $\Gamma$  ao conjunto

$$\Lambda(\Gamma) = \bigcup_{z \in \mathbb{H}^2} \Lambda_z(\Gamma).$$

Sendo  $\Gamma$  um subgrupo discreto, vemos que  $\Gamma(z)$  não possui ponto de acumulação em  $\mathbb{H}^2$ , isto é,  $\Lambda_z(\Gamma) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Resultado análogo vale para o conjunto limite  $\Lambda(\Gamma)$ . Além disso, se  $\xi \in \Lambda(\Gamma)$ , então  $T(\xi) \in \Lambda(\Gamma)$ , para qualquer  $T \in \Gamma$ , [13].

**Teorema 2.2.20** Seja  $\Gamma$  um grupo fuchsiano e suponha que  $\Lambda(\Gamma)$  possua mais do que dois pontos. Então uma das duas possibilidades ocorre:

1.  $\Lambda(\Gamma) = \partial_\infty \mathbb{H}^2$ ,
2.  $\Lambda(\Gamma)$  é perfeito e magro, ou seja, todo ponto de  $\Lambda(\Gamma)$  é ponto de acumulação de  $\Lambda(\Gamma)$  e o complementar de  $\Lambda(\Gamma)$  é denso.

**Definição 2.2.21** Dizemos que um grupo fuchsiano é de primeiro tipo se  $\Lambda(\Gamma) = \partial_\infty \mathbb{H}^2$ . O grupo  $\Gamma$  será dito de segundo tipo se  $\Lambda(\Gamma) \neq \partial_\infty \mathbb{H}^2$ .

Em nosso trabalho vamos considerar apenas grupos fuchsianos do primeiro tipo. Portanto, tais grupos são não-elementares, [22] e, assim, possuem elementos hiperbólicos (Teorema 2.2.18).

Agora vamos destacar o conceito de região fundamental de um grupo fuchsiano. Esse conceito está intimamente ligado no processo de construção das constelações de sinais geometricamente uniformes no plano hiperbólico consideradas em [5].

**Definição 2.2.22** *Sejam  $E$  um espaço métrico e  $\Gamma$  um grupo de homeomorfismos agindo sobre  $E$  de maneira propriamente descontínua. Um subconjunto fechado  $\mathcal{D} \subset E$  com interior não-vazio é chamado região fundamental de  $\Gamma$  se:*

1.  $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{D}) = E$ ,
2.  $\overset{\circ}{\mathcal{D}} \cap T(\overset{\circ}{\mathcal{D}}) = \emptyset, \forall T \in \Gamma - \{Id\}$ .

O conjunto  $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$  indica o interior de  $\mathcal{D}$ . A família  $\{T(\mathcal{D}) : T \in \Gamma\}$  é chamada *tesselação* ou *ladrilhamento* de  $E$ . Observamos que se  $\mathcal{D}$  é uma região fundamental de  $\Gamma$ , então  $T(\mathcal{D})$  também o é, para todo  $T \in \Gamma$ .

Sejam  $\Gamma$  um grupo fuchsiano e  $z_0 \in \mathbb{H}^2$  tal que  $T(z_0) \neq z_0$ , para todo  $T \in \Gamma$ . Chamamos *domínio (ou região) de Dirichlet de  $\Gamma$  centrado em  $z_0$*  ao conjunto

$$\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(z, z_0) \leq d(z, T(z_0)), \forall T \in \Gamma\}. \quad (2.9)$$

Em outras palavras,  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$  consiste de pontos de  $\mathbb{H}^2$  que estão mais próximos de  $z_0$  do que qualquer outro ponto da órbita  $\Gamma(z_0)$ . Por outro lado, como  $T$  é uma isometria,  $d(z, T(z_0)) = d(T^{-1}(z), z_0)$ . Portanto, determinar  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$  consiste considerar em cada órbita  $\Gamma(w)$ , os pontos mais próximos de  $z_0$ , ou seja,

$$\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(z, z_0) \leq d(T(z), z_0), \forall T \in \Gamma\}.$$

**Teorema 2.2.23** [13] *Se  $\Gamma$  é um grupo fuchsiano, então  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$  é uma região fundamental de  $\Gamma$ . Além disso,  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$  é localmente finita.*

Uma região fundamental cujo bordo seja a união de geodésicas é também chamada *região poligonal*.

**Definição 2.2.24** *Um grupo fuchsiano  $\Gamma$  é chamado geometricamente finito se existir uma região fundamental poligonal convexa de  $\Gamma$  com um número finito de arestas.*

### 2.2.3 Círculo Isométrico e a Região de Ford

O conceito de círculo isométrico desempenhará um papel fundamental no processo de determinação dos geradores do grupo fuchsiano  $\Gamma_p$  associado ao polígono hiperbólico  $P_p$ . O polígono  $P_p$  constitui a fronteira de uma região de Dirichlet  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$  de  $\Gamma_p$ .

Dada a isometria

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in PSL(2, \mathbb{R}),$$

temos que

$$T'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Portanto, se  $z = z(t)$  for uma curva diferenciável tal que  $|cz(t) + d| \equiv 1$ , então a integral de linha

$$\int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b |T'(z(t))| |z'(t)| dt,$$

isto é, o comprimento das curvas  $z(t)$  e  $(T \circ z)(t)$  coincidem. Disso decorre que a distância hiperbólica ao longo da curva e a distância euclidiana ao longo da mesma são preservadas. Logo, a restrição de  $T$  a esta curva é uma isometria euclidiana.

Se  $c \neq 0$ , então

$$|cz + d| = 1 \Leftrightarrow \left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{|c|},$$

isto é, o conjunto de pontos nos quais  $T$  age como isometria tanto no sentido hiperbólico quanto no sentido euclidiano é um círculo euclidiano de centro  $-\frac{d}{c}$  e raio  $r = \frac{1}{|c|}$ .

Seja  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$  uma isometria de  $\mathbb{H}^2$  com  $c \neq 0$ . Chamamos *círculo isométrico* de  $T$  o conjunto

$$I(T) = \{z \in \mathbb{C} : |cz + d| = 1\}.$$

De modo análogo, o círculo isométrico da isometria  $T(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ ,  $b \neq 0$ , de  $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}$  é o conjunto

$$I(T) = \{z \in \mathbb{C} : |\bar{b}z + \bar{a}| = 1\}.$$

**Proposição 2.2.25** [22] *Seja  $I(T)$  o círculo isométrico de uma isometria  $T$  em  $\mathbb{H}^2$ . Então  $I(T) \cap \mathbb{H}^2$  é uma geodésica em  $\mathbb{H}^2$ .*

Resultado análogo vale para uma isometria em  $\mathbb{D}^2$ .

Seja  $\Gamma$  um grupo discreto de isometrias cujos elementos preservam orientação no disco unitário

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

que por (2.7), são da forma (supondo  $b \neq 0$ )

$$T(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1, \quad T \in \Gamma.$$

Vamos considerar também

$$\check{I}(T) = \{z \in \mathbb{C} : |\bar{b}z + \bar{a}| > 1\}.$$

Então

$$R_0 = \overline{\bigcap_{T \in \Gamma} \check{I}(T)} \cap \mathbb{D}^2$$

estabelece uma região fundamental para  $\Gamma$ , onde  $\bar{X}$  denota o fecho do conjunto  $X$ . Essa região é chamada *região fundamental de Ford*.

**Teorema 2.2.26** [22]  $R_0$  é uma região fundamental de  $\Gamma$ .

Assim,  $R_0$  é uma região fundamental constituída dos pontos em  $\mathbb{D}^2$  que são exteriores aos círculos isométricos de todas as isometrias de  $\Gamma$ . São essas as regiões que iremos considerar no decorrer do trabalho.

## 2.2.4 Grupos fuchsianos co-compactos

Podemos obter uma superfície de Riemann considerando, por exemplo, os espaços quociente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  ou  $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$ , sendo  $\Gamma$  e  $\Gamma_p$  grupos discretos agindo de maneira propriamente descontínua sobre  $\mathbb{H}^2$  ou  $\mathbb{D}^2$ , respectivamente, [2]. O espaço  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é construído por meio da seguinte relação de equivalência sobre  $\mathbb{H}^2$ :

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \exists T \in \Gamma \text{ tal que } z_2 = T(z_1). \quad (2.10)$$

Além disso, a classe de equivalência de um elemento  $z \in \mathbb{H}^2$ ,  $[z]$ , é tal que  $[z] = \Gamma$ -órbita de  $z$ . Assim, os elementos do espaço  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  são as  $\Gamma$ -órbitas, isto é,

$$\mathbb{H}^2/\Gamma = \{[z] : z \in \mathbb{H}^2\}.$$

O espaço  $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$  é construído de modo análogo. Topologicamente, qualquer  $g$ -toro  $\mathcal{T}_g$  localmente isométrico a  $\mathbb{D}^2$  pode ser obtido pelo quociente de  $\mathbb{D}^2$  por um grupo fuchsiano  $\Gamma_p$ , isto é<sup>3</sup>,  $\mathcal{T}_g = \mathbb{D}^2/\Gamma_p$ . De um modo geral, para cada gênero  $g$ , a ação do grupo  $\Gamma_p$  em  $\mathbb{D}^2$  pode se processar pela identificação das arestas de um polígono regular  $P_p$  de  $p$  arestas em  $\mathbb{D}^2$  por isometrias que geram  $\Gamma_p$ . Na Seção 5.1, ilustraremos este processo considerando tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$ .

---

<sup>3</sup>Ou  $\mathcal{T}_g = \mathbb{H}^2/\Gamma$ .

Vamos considerar grupo fuchsiano  $\Gamma$  para o qual o espaço quociente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  seja uma superfície compacta. Nesse caso, o grupo  $\Gamma$  é chamado *grupo fuchsiano co-compacto*.

Os dois teoremas a seguir caracterizam os grupos fuchsianos co-compactos.

**Teorema 2.2.27** [22] *Um grupo fuchsiano  $\Gamma$  é co-compacto se, e somente se, toda região de Dirichlet de  $\Gamma$  for compacta.*

Temos também,

**Teorema 2.2.28** [13] *Um grupo fuchsiano  $\Gamma$  é co-compacto se, e somente se,  $\Gamma$  não possui elementos parabólicos e  $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$ .*

Desde que a área sobre o quociente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é induzida pela área hiperbólica sobre  $\mathbb{H}^2$ , então  $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma)$  (área hiperbólica de  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ ) está bem definida e é igual a  $\mu(\mathcal{D})$ , sendo  $\mathcal{D}$  a região fundamental obtida através da ação de  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{H}^2$ .

Como vamos considerar apenas superfícies  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  compactas e tendo área finita, os grupos fuchsianos considerados em nosso trabalho não possuem elementos parabólicos.

### 2.2.5 A assinatura de um grupo fuchsiano

Sejam  $\Gamma$  um grupo fuchsiano co-compacto e  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$  uma região de Dirichlet de  $\Gamma$ . Existem em  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$  um número finito de vértices, digamos  $r$ , que são pontos fixos de elementos elípticos de  $\Gamma$ .

Consideremos então  $m_1, \dots, m_r$  as ordens desses elementos elípticos e  $g$  o gênero da superfície compacta e orientável  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ . O conjunto ordenado de inteiros  $(g; m_1, \dots, m_r)$  é chamado *assinatura* de  $\Gamma$ .

Caso o grupo fuchsiano  $\Gamma$  não possua elementos elípticos, sua assinatura é  $(g; 0, \dots, 0)$ , ou simplesmente,  $(g; -)$ . O próximo teorema relaciona a área de  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  com a assinatura de  $\Gamma$ .

**Teorema 2.2.29** [22] *Seja  $\Gamma$  um grupo fuchsiano co-compacto com assinatura  $(g; m_1, \dots, m_r)$ . Então<sup>4</sup>,*

$$\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) = 2\pi \left[ (2g - 2) + \sum_{k=1}^r \left( 1 - \frac{1}{m_k} \right) \right]. \quad (2.11)$$

Reciprocamente,

---

<sup>4</sup>Se o grupo  $\Gamma$  não possui elementos elípticos, então  $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) = 2\pi[(2g - 2)]$ .

**Teorema 2.2.30** [22] *Dados os inteiros  $g \geq 0$ ,  $r \geq 0$ ,  $m_k \geq 2$  ( $1 \leq k \leq r$ ), tais que*

$$(2g - 2) + \sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k}\right) > 0.$$

*Então existe um grupo fuchsiano com assinatura  $(g; m_1, \dots, m_r)$ .*

O último teorema afirma que dada uma superfície compacta  $\mathbb{M}$  com gênero  $g \geq 2$ , existe um grupo fuchsiano  $\Gamma$  tal que  $\mathbb{M} \equiv \mathbb{H}^2/\Gamma$ .

Encerraremos os resultados dessa subseção com o seguinte:

**Teorema 2.2.31** [13] *Toda superfície compacta com gênero  $g \geq 2$  pode ser modelada no plano hiperbólico.*

No Capítulo 5 vamos considerar tesselações hiperbólicas. A partir dessas tesselações, iremos modelar no plano hiperbólico superfícies compactas orientáveis, de modo a obter os geradores dos grupos fuchsianos associados a reticulados hiperbólicos.

## 2.2.6 Tesselações Regulares no Plano Hiperbólico

Com o objetivo de determinar os reticulados hiperbólicos usados no processo de construção de constelações de sinais, [5], apresentamos a definição:

**Definição 2.2.32** *Uma tesselação regular do plano hiperbólico é uma partição deste plano em polígonos regulares isométricos não sobrepostos, todos congruentes, sujeitos à restrição de se interceptarem somente em suas arestas ou vértices, de modo a termos o mesmo número de polígonos partilhando um mesmo vértice, independente do vértice.*

Se os polígonos de uma tesselação de  $\mathbb{H}^2$  contém  $p$  arestas, onde cada vértice é recoberto por  $q$  desses polígonos, então a tesselação será denotada por  $\{p, q\}$ . Em particular, se  $p = q$ , então a tesselação é chamada *auto-dual*.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor do que  $\pi$ ,  $\{p, q\}$  é uma tesselação regular de  $\mathbb{H}^2$  se, e somente se,

$$\frac{2\pi}{p} + \frac{2\pi}{q} < \pi,$$

ou seja, se, e somente se,

$$(p - 2)(q - 2) > 4.$$

Portanto, existem infinitas tesselações regulares em  $\mathbb{H}^2$ . Por outro lado, como a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano é igual a  $\pi$ , segue que  $\{4, 4\}$ ,  $\{6, 3\}$  e  $\{3, 6\}$  são as únicas tesselações regulares no plano euclidiano. Nesses casos, temos partições de  $\mathbb{R}^2$  por quadrados, hexágonos regulares e por triângulos equiláteros, respectivamente.

## 2.3 Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes

Lembramos que nosso objetivo é identificar grupos fuchsianos em ordens dos quatérnios de modo a considerar constelações de sinais geometricamente uniformes, [5]. Destacaremos agora esse conceito.

Em sistemas de comunicações digitais, as figuras geométricas de interesse são conjuntos  $\mathcal{S}$  de pontos discretos de  $\mathbb{R}^n$ , [14]. Isso significa que dado  $s \in \mathcal{S}$ , existe  $r > 0$  tal que

$$\mathcal{B}_r(s) \cap \mathcal{S} = \{s\},$$

sendo  $\mathcal{B}_r(s)$  um bola aberta em  $\mathbb{R}^n$  de centro  $s$  e raio  $r$ . Nesse caso, o conjunto  $\mathcal{S}$  é chamado *conjunto de sinais*. Em geral, podemos considerar  $\mathcal{S}$  como um conjunto de pontos discretos de um espaço métrico qualquer  $(E, d)$ , desde que tenhamos uma identificação dos pontos de  $E$  por sinais.

Uma *constelação de sinais* é um subconjunto finito  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{S}$ .

**Definição 2.3.1** *Um conjunto de sinais  $\mathcal{K}$  é uma constelação de sinais geometricamente uniforme se para quaisquer dois pontos  $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$ , existe uma simetria  $T \in U(\mathcal{K})$  tal que  $T(k_1) = k_2$ . Nesse caso, dizemos que a ação de  $U(\mathcal{K})$  em  $\mathcal{K}$  é transitiva.*

Para todo  $k_0 \in \mathcal{K}$ , verifica-se que a ação de  $U(\mathcal{K})$  em  $\mathcal{K}$  é transitiva se, e somente se,

$$\mathcal{K} = \{T(k_0) : T \in U(\mathcal{K})\} = U(k_0),$$

ou seja,  $\mathcal{K}$  coincide com a órbita de  $k_0$ .

**Definição 2.3.2** *Chamamos de região de Voronoi associada a um dado ponto  $k \in \mathcal{K}$  ao conjunto<sup>5</sup>*

$$R_V(k) = \{x \in E : d(x, k) \leq d(x, T(k)), \quad \forall T \in U(\mathcal{K})\}.$$

Em outras palavras,  $R_V(k)$  consiste de pontos no espaço métrico  $(E, d)$  que estão mais próximos de  $k$  do que qualquer outro ponto da órbita de  $k$ ,  $U(k)$ .

**Definição 2.3.3** *O perfil de distância global com relação a  $k_0$ , denotado por  $PD(k_0)$ , é o conjunto*

$$PD(k_0) = \{d(k_0, k) : k \in \mathcal{K}\}.$$

No próximo teorema destacamos duas importantes propriedades de uma constelação geometricamente uniforme.

---

<sup>5</sup>Ver (2.9).

**Teorema 2.3.4** *Se  $\mathcal{K}$  é uma constelação de sinais geometricamente uniforme, então:*

1. *Todas as regiões de Voronoi são da mesma forma,*
2. *O perfil de distância global é o mesmo para qualquer sinal  $k \in \mathcal{K}$ .*

Uma constelação de sinais  $\mathcal{K}$  está casada a um grupo  $G$ , se existir uma aplicação  $\eta : G \rightarrow \mathcal{K}$  tal que

$$d(\eta(h_1), \eta(h_2)) = d(\eta(e), \eta(h_1^{-1}h_2)), \quad \forall h_1, h_2 \in G,$$

onde  $e$  é o elemento neutro de  $G$  e  $d$  é uma distância em  $\mathcal{K}$ . A aplicação  $\eta$  é chamada *aplicação casada*. Além disso, se  $\eta$  é injetora, então dizemos que  $\eta^{-1}$  é um *rotulamento casado*. Nesse caso, dizemos que  $\eta$  é um rotulamento isométrico.



# Capítulo 3

## Álgebra dos Quatérnios e Grupos Fuchsianos Aritméticos

Neste capítulo vamos considerar o conceito de álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}$ , bem como sua relação com grupos fuchsianos aritméticos  $\Gamma$ . Iremos destacar os resultados necessários, de modo a identificar os grupos  $\Gamma$  com os reticulados hiperbólicos  $\mathcal{O}$  usados no processo de rotulagem de sinais de uma constelação de sinais geometricamente uniforme com elementos de um  $p$ -grupo  $G_{p^m}$  (um grupo com  $p^m$  elementos). Por isso, vamos considerar também o conceito de ordem dos quatérnios  $\mathcal{O}$  de uma álgebra  $\mathcal{A}$  (reticulado hiperbólico) e algumas de suas propriedades.

Este capítulo é composto por três seções. Na Seção 3.1 abordamos o conceito de álgebra dos quatérnios. Nela, destacamos conceitos importantes que usaremos nos capítulos subsequentes. Na Seção 3.2, consideramos os reticulados hiperbólicos, destacando os grupos fuchsianos obtidos a partir deles. Encerramos com a Seção 3.3, onde estudamos os grupos fuchsianos aritméticos. Esta seção é na verdade uma conexão dos conceitos e resultados das duas primeiras seções. Para mais detalhes sugerimos [21, 22, 29].

### 3.1 Álgebra dos Quatérnios

Os grupos fuchsianos que iremos considerar são os grupos fuchsianos derivados de uma álgebra  $\mathcal{A}$ . Na Seção 3.3 iremos considerar esses grupos bem como uma forma de caracterizá-los. Antes, veremos o conceito de álgebra dos quatérnios e algumas de suas propriedades.

**Definição 3.1.1** *Seja  $K$  um corpo. Uma álgebra  $\mathcal{B}$  sobre  $K$  é um espaço vetorial com uma estrutura de anel com identidade  $1_{\mathcal{B}}$ , cujas operações de multiplicação do anel e por escalar são relacionadas por*

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y), \quad \forall \alpha \in K \quad e \quad \forall x, y \in \mathcal{B}.$$

*Além disso, a álgebra  $\mathcal{B}$  é comutativa se esta é comutativa sob sua estrutura de anel.*

A definição de álgebra dos quatérnios é um caso particular da Definição 3.1.1.

Seja  $K$  um corpo. Uma *álgebra dos quatérnios*  $\mathcal{A}$  sobre  $K$  é uma álgebra simples central de dimensão 4 sobre  $K$ . Equivalentemente,

1. O radical  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{A}$  (um ideal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{I}^n = \{0\}$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ ) é trivial;
2.  $\mathcal{Z} = \{x \in \mathcal{A} : x \cdot y = y \cdot x, \forall y \in \mathcal{A}\} = K$ , ( $\mathcal{Z}$  é o centro de  $\mathcal{A}$ );
3.  $\dim_K(\mathcal{A}) = 4$ .

Supondo que  $\text{car}K \neq 2$  (característica de  $K$ ), é possível encontrar uma  $K$ -base  $\{1, i, j, k\}$  de  $\mathcal{A}$  satisfazendo, [21],

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad k = ij = -ji,$$

onde  $a, b \in K - \{0\}$ . A álgebra  $\mathcal{A}$  será denotada por  $\mathcal{A} = (a, b)_K$ . Como  $ij = -ji$ , segue que não vale a comutatividade numa álgebra  $\mathcal{A}$ .

Se  $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathcal{A}$ , onde  $x_0, x_1, x_2, x_3 \in K$ , então  $\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$  é chamado *conjugado* de  $x$ . Observamos que o conceito de conjugado em uma álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}$ , estende ao de conjugado em  $\mathbb{C}$ . Além disso, para quaisquer  $x, y \in \mathcal{A}$ , valem as propriedades,

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \overline{\bar{x}} = x. \quad (3.1)$$

A *norma reduzida* de  $x$  e o *traço reduzido* de  $x$ , denotados, respectivamente, por  $Nrd(x)$  e  $Trd(x)$ , são definidos como

$$Nrd(x) = x \cdot \bar{x} = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 \quad \text{e} \quad Trd(x) = x + \bar{x} = 2x_0. \quad (3.2)$$

Como veremos, a função norma  $Nrd$  satisfaz

$$Nrd(x \cdot y) = Nrd(x) \cdot Nrd(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A}. \quad (3.3)$$

Sejam  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  e  $M_0, M_1, M_2, M_3$  matrizes linearmente independentes de  $M(2, K(\sqrt{a}))$ , dadas por

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ -b\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora a aplicação  $\varphi$  da álgebra  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  em  $M(2, K(\sqrt{a}))$ , definida por

$$\varphi(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) = x_0 \cdot M_0 + x_1 \cdot M_1 + x_2 \cdot M_2 + x_3 \cdot M_3.$$

Como  $\varphi(i^2) = aI_2$ ,  $\varphi(j^2) = bI_2$  e  $\varphi(i)\varphi(j) = -\varphi(j)\varphi(i)$ , sendo  $I_2$  a matriz identidade de ordem 2, verifica-se que  $\varphi$  é um isomorfismo de  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  em uma sub-álgebra de  $M(2, K(\sqrt{a}))$ . Dessa forma, cada elemento de  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  é identificado com

$$x \mapsto \varphi(x) = \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3\sqrt{a}) & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Com isso, temos dois casos a considerar:

1. Se  $a = t^2$  com  $t \in K - \{0\}$ , então  $\mathcal{A} \simeq M(2, K)$ . Neste caso, dizemos que  $\mathcal{A}$  é *não ramificada*.
2. Caso contrário,  $\mathcal{A} \simeq \mathbb{H}$ , onde  $\mathbb{H}$  é uma sub-álgebra de divisão de  $M(2, K(\sqrt{a}))$ , ou seja, todo elemento não-nulo de  $\mathbb{H}$  possui inverso multiplicativo. Neste caso, dizemos que  $\mathcal{A}$  é *ramificada*, para algum  $a \in K$  e  $\sqrt{a} \notin K$ .

A condição (2) é consequência do seguinte resultado:

**Teorema 3.1.2** [22] *Se  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  não é isomorfa a  $M(2, K)$ , então  $\mathcal{A}$  é uma álgebra de divisão.*

Consideremos  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  uma álgebra dos quatérnios sobre o corpo  $K$  e  $\varphi : K \rightarrow F$  um homomorfismo de corpos. Definimos,

$$\mathcal{A}^\varphi = (\varphi(a), \varphi(b))_{\varphi(K)} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}^\varphi \otimes F = (\varphi(a), \varphi(b))_F,$$

onde  $\mathcal{A}^\varphi \otimes F$  denota o produto tensorial da álgebra  $\mathcal{A}^\varphi$  com o corpo  $F$ , que continua sendo uma álgebra central simples, [26]. Para cada homomorfismo  $\varphi$ , chamamos a álgebra  $\mathcal{A}^\varphi = (\varphi(a), \varphi(b))_{\varphi(K)}$  de *lugar da álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}$* .

Seja  $K$  um corpo de números algébricos totalmente real de grau  $n$ . Isso significa que os  $n$  monomorfismos  $\varphi_i : K \rightarrow \mathbb{C}$  são tais que  $\varphi_i(K) \subset \mathbb{R}$ , ou seja, são monomorfismos de  $K$  em  $\mathbb{R}$ . Portanto, os  $n$  distintos lugares são definidos pelos  $\mathbb{R}$ -isomorfismos

$$\rho_1 : \mathcal{A}^{\varphi_1} \otimes \mathbb{R} \rightarrow M(2, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \rho_i : \mathcal{A}^{\varphi_i} \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}, \quad (3.5)$$

sendo  $\varphi_i$  um mergulho de  $K$  em  $\mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $\varphi_1$  é a identidade.

Desse modo, dizemos que  $\mathcal{A}$  é *não ramificada* no lugar  $\varphi_1$  e *ramificada* nos lugares  $\varphi_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ .

Sejam  $Nrd_{\mathbb{H}}$  e  $Trd_{\mathbb{H}}$  a norma e o traço reduzidos em  $\mathbb{H}$ , respectivamente. Dado  $x \in \mathcal{A}$ , verificamos através de simples cálculos que

$$Nrd(x) = \det(\rho_1(x)) \quad \text{e} \quad Trd(x) = tr(\rho_1(x)). \quad (3.6)$$

E, desde que identifiquemos

$$x_i \Leftrightarrow \varphi_i(x_i), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

obtemos, para todo  $i$ ,  $2 \leq i \leq n$ ,

$$\varphi_i(Nrd(x)) = Nrd_{\mathbb{H}}(\rho_i(x)) \quad \text{e} \quad \varphi_i(Trd(x)) = Trd_{\mathbb{H}}(\rho_i(x)). \quad (3.7)$$

**Exemplo 3.1.3** *Sejam  $\mathbb{H} = (-1, -1)_{\mathbb{R}}$  a álgebra dos quatérnios de Hamilton e*

$$\mathbb{H}^1 = \{x \in \mathbb{H} : Nrd_{\mathbb{H}}(x) = 1\}.$$

*Então, dado  $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H}^1$ , obtemos de (3.2) que  $Nrd_{\mathbb{H}}(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ . Disso segue que  $Trd_{\mathbb{H}}(x) = 2x_0 \in [-2, 2]$ , pois  $|x_0| \leq 1$ . Logo,  $Trd_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^1) = [-2, 2]$ .*

A álgebra  $\mathbb{H} = (-1, -1)_{\mathbb{R}}$  é uma álgebra de divisão. De fato,  $\mathcal{A} = (a, b)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{H}$  se, e somente se,  $a < 0$  e  $b < 0$ , [22].

Um invariante de uma álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}$  é seu *discriminante*  $d(\mathcal{A})$ , que é definido como o produto dos geradores dos ideais primos nos quais  $\mathcal{A}$  é ramificada.

Se duas álgebras  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  e  $\mathcal{A}_1 = (a_1, b_1)_K$  são isomorfas<sup>1</sup>, então  $d(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}_1)$ , [21]. Além disso, se  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  e  $\mathcal{A}_1 = (ax^2, by^2)_K$ , então  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_1$ , para quaisquer  $x, y \in K - \{0\}$ . Temos também  $(a, b)_K \simeq (b, ab)_K$ , onde  $K$  é um corpo de números.

**Observação 3.1.4** *Consideremos a álgebra  $\mathcal{A} = (\sqrt{2}, -1)_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ . Então,  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_1 = (-1, -\sqrt{2})_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ . Portanto, [25],*

$$d(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}_1) = \sqrt{2}.$$

## 3.2 Reticulados Hiperbólicos

Sejam  $\mathcal{A}$  uma álgebra dos quatérnios sobre  $K$  e  $R$  um anel de  $K$ . Uma  $R$ -ordem  $\mathcal{O}$  em  $\mathcal{A}$  é um subanel com unidade de  $\mathcal{A}$  que é um  $R$ -módulo finitamente gerado tal que  $\mathcal{A} = K\mathcal{O}$ .

Também chamaremos uma  $R$ -ordem  $\mathcal{O}$  de *reticulado hiperbólico*, devido a sua identificação com grupos fuchsianos aritméticos.

Os reticulados  $\mathcal{O}$  são usados no processo de rotulagem dos sinais de uma constelação de sinais geometricamente uniforme no plano hiperbólico proposto em [5]. Nos Capítulos 4 e 5 iremos considerar tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$  associadas a grupos fuchsianos aritméticos  $\Gamma_p$ , os quais identificaremos com as respectivas ordens  $\mathcal{O}$ .

<sup>1</sup>Simbolicamente,  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_1$ .

Sendo  $\mathcal{O}$  uma ordem em  $\mathcal{A}$ , existe uma base  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  de  $\mathcal{A}$  e um  $R$ -ideal  $\mathfrak{a}$  tal que, [26],

$$\mathcal{O} = \mathfrak{a}e_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3 \oplus Re_4,$$

onde  $\oplus$  denota a soma direta.

**Observação 3.2.1** *Por definição, dados  $x, y \in \mathcal{O}$ , temos  $x \cdot y \in \mathcal{O}$ . Além disso, como todo elemento  $x \in \mathcal{O}$  é integral sobre  $R$ , [29], então  $Nrd(x), Trd(x) \in R$ , [21].*

Um invariante de uma ordem  $\mathcal{O}$ , que será usado neste trabalho, é seu discriminante  $d(\mathcal{O})$  definido a seguir.

Seja  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  um conjunto de geradores de  $\mathcal{O}$  sobre  $R$ . O discriminante de  $\mathcal{O}$ , denotado por  $d(\mathcal{O})$ , é definido pela raiz quadrada do  $R$ -ideal gerado pelo conjunto de elementos

$$\{\det(Trd(x_i \cdot \bar{x}_j)) : 0 \leq i, j \leq 3\}. \quad (3.8)$$

**Exemplo 3.2.2** *Sejam  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  e  $\mathfrak{D}_K$  o anel de inteiros de  $K$ , onde  $a, b \in \mathfrak{D}_K - \{0\}$ . Então*

$$\mathcal{O} = \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{D}_K\},$$

é uma ordem em  $\mathcal{A}$  denotada por  $\mathcal{O} = (a, b)_{\mathfrak{D}_K}$ . Vamos determinar  $d(\mathcal{O})$ . Temos que o  $R$ -ideal gerado por (3.8) é o seguinte ideal principal, [29],

$$R \cdot \det(Trd(x_i \cdot \bar{x}_j)), \quad R = \mathfrak{D}_K,$$

com  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{1, i, j, k\}$ . Assim, por definição,

$$d(\mathcal{O}) = (\det(Trd(x_i \cdot \bar{x}_j)))^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado, verifica-se que  $(Trd(x_i \cdot \bar{x}_j))$  é a seguinte matriz diagonal:

$$(Trd(x_i \cdot \bar{x}_j)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2ab \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$d(\mathcal{O}) = 4ab. \quad (3.9)$$

O objetivo central de nosso trabalho é identificar grupos fuchsianos aritméticos em uma ordem dos quatérnios  $\mathcal{O}$ , de modo a realizar a rotulagem dos sinais das constelações mencionadas anteriormente (quociente de uma ordem por um ideal próprio). Entretanto, para que a rotulagem algébrica seja completa, é necessário que as respectivas ordens sejam maximais.

Uma ordem  $\mathcal{M}$  em uma álgebra  $\mathcal{A}$  é chamada *maximal* se  $\mathcal{M}$  não está propriamente contida em nenhuma outra ordem em  $\mathcal{A}$ . A existência de uma ordem maximal  $\mathcal{M}$  é garantida pelo seguinte resultado:

**Proposição 3.2.3** [29] *Existe pelo menos uma  $R$ -ordem maximal em  $\mathcal{A}$ . Além disso, toda  $R$ -ordem em  $\mathcal{A}$  está contida em uma  $R$ -ordem em  $\mathcal{A}$ .*

Se  $\mathcal{M}$  é uma ordem maximal em  $\mathcal{A}$  contendo uma outra ordem  $\mathcal{O}$ , então o discriminante satisfaz, [19],

$$d(\mathcal{O}) = d(\mathcal{M}) \cdot [\mathcal{M} : \mathcal{O}], \quad d(\mathcal{M}) = d(\mathcal{A}).$$

Reciprocamente, se  $d(\mathcal{O}) = d(\mathcal{A})$ , então  $\mathcal{O}$  é uma ordem maximal em  $\mathcal{A}$ .

**Exemplo 3.2.4** *Consideremos a álgebra  $\mathcal{A} = (\sqrt{2}, -1)_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$  com uma base  $\{1, i, j, k\}$ , satisfazendo*

$$i = \sqrt[4]{2}, \quad j = \text{Im}, \quad k = \sqrt[4]{2} \text{Im},$$

e  $\mathcal{O} = (\sqrt{2}, -1)_R$ , onde

$$R = \left\{ \frac{x}{2^n} : x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \quad e \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Por (3.9),  $d(\mathcal{O}) = -\sqrt{2}$ . Além disso, como observado em 3.1.4,  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_1 = (-1, -\sqrt{2})_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$  e  $d(\mathcal{A}) = \sqrt{2}$ . Desta forma,  $\mathcal{O}$  é uma ordem maximal em  $\mathcal{A}$ .

Para cada ordem  $\mathcal{O}$  em  $\mathcal{A}$ , consideremos  $\mathcal{O}^1$  o conjunto,

$$\mathcal{O}^1 = \{x \in \mathcal{O} : \text{Nrd}(x) = 1\}.$$

**Proposição 3.2.5**  $\mathcal{O}^1$  é um grupo multiplicativo.

**Demonstração:** Sejam  $x, y \in \mathcal{O}^1$ . Já sabemos que  $x \cdot y \in \mathcal{O}$ . Mas por (3.3), segue que  $\text{Nrd}(x \cdot y) = \text{Nrd}(x) \cdot \text{Nrd}(y) = 1$ . Assim,  $x \cdot y \in \mathcal{O}^1$ . Por outro lado, o inverso de  $x$  é  $\bar{x}$  e  $\text{Nrd}(\bar{x}) = 1$ . ■

Agora, observamos que os grupos fuchsianos podem ser obtidos do isomorfismo  $\rho_1$  em (3.5). De fato, por (3.6) segue que  $\text{Nrd}(x) = \det(\rho_1(x))$ . Disto e da Proposição 3.2.5, obtemos  $\rho_1(\mathcal{O}^1) < SL(2, \mathbb{R})$ , isto é,  $\rho_1(\mathcal{O}^1)$  é um subgrupo de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Portanto, o grupo derivado de uma álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  cuja ordem é  $\mathcal{O}$ , denotado por  $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ , é dado por,

$$\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O}) = \frac{\rho_1(\mathcal{O}^1)}{\{\pm I_2\}} < \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm I_2\}} \simeq PSL(2, \mathbb{R}).$$

Mais ainda,

**Teorema 3.2.6** [22]  $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O})$  é um grupo fuchsiano.

**Demonstração:** Vamos provar para o caso em que a álgebra de divisão é  $\mathcal{A} = (a, b)_{\mathbb{Q}}$ ,  $a > 0$  e  $\mathcal{O} = \{x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$ . Para o caso de um corpo de números  $\mathbb{Q}(\theta)$ , a demonstração segue o mesmo raciocínio com algumas adaptações. É necessário encontrarmos uma vizinhança  $V_{Id}$  de  $Id \in SL(2, \mathbb{R})$  que não contenha nenhum elemento de  $\rho_1(\mathcal{O}^1)$  diferente de  $Id$ . Consideremos,

$$V_{Id} = \left\{ (g_{ij})_{i,j=1,2} \in SL(2, \mathbb{R}) : |g_{11} - 1| < \frac{1}{2}, |g_{12}| < \frac{1}{2}, |g_{21}| < \frac{1}{2}, |g_{22} - 1| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Seja  $g_x \in \rho_1(\mathcal{O}^1) \cap V_{Id}$ , digamos,

$$g_x = \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3\sqrt{a}) & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Deste modo,  $2|x_0 - 1| < 1$ , ou seja,  $x_0 = 1$ . Como  $b > 1$  temos, também, que  $|x_2 - x_3\sqrt{a}| < \frac{1}{2b} < \frac{1}{2}$  e, assim,  $|2x_2| < 1$ , o que implica que  $x_2 = 0$ . Por outro lado,  $|x_1\sqrt{a}| < \frac{1}{2}$ ,  $|x_3\sqrt{a}| < \frac{1}{2}$ , implicando que  $x_1 = x_3 = 0$  e, conseqüentemente,  $g_x = Id$ . Desse modo,  $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O})$  é um subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$ . ■

### 3.3 Grupos Fuchsianos Aritméticos

Os grupos fuchsianos aritméticos foram considerados no processo de construção de constelações de sinais geometricamente uniformes no plano hiperbólico, no trabalho de Carvalho, [5], onde as partes aritmética e geométrica inerentes a esses grupos são unidas nesse processo.

Nesta seção vamos considerar grupos fuchsianos aritméticos e um critério para caracterizá-los. Destacaremos os principais resultados que usaremos no processo de identificação desses grupos em ordens dos quatérnios.

Se  $\Gamma$  é um grupo fuchsiano de índice finito de algum  $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ , então dizemos que  $\Gamma$  é um *grupo fuchsiano derivado da álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}$* .

Dois grupos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são chamados *comensuráveis* se a interseção  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  tem índice finito em  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Se  $\Gamma$  é comensurável com algum  $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ , então  $\Gamma$  é chamado *grupo fuchsiano aritmético*.

Observamos que, por definição, um grupo fuchsiano derivado de uma álgebra  $\mathcal{A}$  é aritmético. Agora, mostraremos que podemos caracterizar os grupos fuchsianos aritméticos através do conjunto dos traços de seus elementos

$$tr(\Gamma) = \{\pm tr(T) : T \in \Gamma\},$$

conforme o Teorema (3.3.6), que é o principal resultado desta seção.

A partir de agora, vamos apresentar uma série de resultados que nos conduzirá ao Teorema 3.3.6.

Para cada corpo de números  $K$ , vamos considerar,

$$SL(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in K, ad - bc = 1 \right\}$$

e

$$PSL(2, K) = \frac{SL(2, K)}{\{\pm I_2\}}.$$

**Lema 3.3.1** [22] *Seja  $\Gamma$  um grupo fuchsiano tal que  $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$ . Consideremos o conjunto formado pelos traços dos elementos de  $\Gamma$ ,  $tr(\Gamma)$ , e suponhamos que  $tr(\Gamma) \subset K_1$ , sendo  $K_1$  um corpo de números algébricos,  $[K_1 : \mathbb{Q}] < \infty$ . Então existem um corpo de números  $K$  e  $h \in SL(2, K)$  tais que  $h^{-1}\Gamma h \in PSL(2, K)$ .*

**Teorema 3.3.2** [22] *Assumindo as hipóteses do Lema 3.3.1, consideremos  $K_1 = \mathbb{Q}(tr(T) : T \in \Gamma)$ . Então,*

$$\mathcal{A}[\Gamma] = K_1[\Gamma] = \left\{ \sum_{i=1}^d a_i T_i : a_i \in K_1, T_i \in \Gamma \right\} \quad (3.10)$$

é uma álgebra dos quatérnios sobre  $K_1$ .

**Demonstração:** Como  $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$ , temos que  $\Gamma$  é um grupo fuchsiano do primeiro tipo e, portanto, não-elementar. Assim, pelo Lema 3.3.1, podemos supor que  $\Gamma$  contém os elementos

$$T_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad (c_1 \neq 0 \text{ e } \lambda \neq 1), \quad (3.11)$$

e  $\Gamma \subseteq PSL(2, K)$ , onde  $K = K_1(\lambda)$  é uma extensão quadrática de  $K_1$ , ou seja,  $[K : K_1] = 2$ . Para simplificar a notação, vamos indicar a álgebra  $\mathcal{A}[\Gamma]$  por  $\mathcal{A}$ . Dessa forma,  $\mathcal{A} \subseteq M(2, K)$  e  $1 < \dim_{K_1}(\mathcal{A}) \leq 8$ . Vamos mostrar agora que:

1.  $\mathcal{I} = \{0\}$ ,
2.  $\mathcal{Z} = K_1$ ,
3.  $\dim_{K_1}(\mathcal{A}) = 4$ ,

onde  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{Z}$  denotam o radical e centro de  $\mathcal{A}$ , respectivamente. Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{I}$$

tais que  $T^n = 0$ . Logo,  $\det(T) = 0$ . Mas como  $ad = bc$ , temos que  $tr(T^n) = tr(T)^n$ , ou seja,

$$(a + d)^n = 0 \Leftrightarrow tr(T) = a + d = 0. \quad (3.12)$$

Como  $\mathcal{I}$  é um ideal, obtemos que

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda^{-1}c & \lambda^{-1}d \end{pmatrix} \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \lambda a + \lambda^{-1}d = 0. \quad (3.13)$$

Portanto, de (3.12) e (3.13), temos que  $a = d = 0$ . Analogamente,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{I}.$$

Assim,  $bc_1 + c = 0$  e  $bc(c_1 - a_1d_1) = 0$ . Portanto,

$$bc = 0 \Rightarrow b = c = 0.$$

Conseqüentemente,  $\mathcal{I} = \{0\}$ . Consideremos agora,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}.$$

Como  $TT_0 = T_0T$ , obtemos que

$$c(\lambda^2 - 1) = 0 \quad \text{e} \quad b(\lambda^2 - 1) = 0.$$

Disso segue que  $b = c = 0$ . Mas  $T$  também comuta com  $T_1$ , assim  $a = d$ . Por outro lado, para qualquer  $T' \in \mathcal{A}$ ,  $tr(T') \in K_1$ . Daí,  $tr(T) = a + d = 2a$ , implicando que  $a \in K_1$ . Portanto,

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in K_1 \right\} \simeq K_1.$$

Por fim, a dimensão de  $\mathcal{A}$  sobre  $K$  é um quadrado de um inteiro. Logo  $\dim_{K_1}(\mathcal{A}) = 4$ . ■

**Lema 3.3.3** [22] *Seja  $\Gamma$  um grupo fuchsiano com  $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$ ,  $K_1 = \mathbb{Q}(tr(T) : T \in \Gamma)$ ,  $[K_1 : \mathbb{Q}] < \infty$  e  $tr(\Gamma) \subset \mathfrak{D}_{K_1}$ , onde  $\mathfrak{D}_{K_1}$  é o anel de inteiros de  $K_1$ . Então*

$$\mathcal{O}[\Gamma] = \mathfrak{D}_{K_1}[\Gamma] = \left\{ \sum_{i=1}^d a_i T_i : a_i \in \mathfrak{D}_{K_1}, T_i \in \Gamma \right\} \quad (3.14)$$

é uma ordem da álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}[\Gamma]$ .

Consideremos  $T_0$  e  $T_1$  como em (3.11). Verificamos que o conjunto

$$\{I_2, T_0, T_1, T_0T_1\}$$

é uma base para a álgebra  $\mathcal{A}[\Gamma]$  sobre  $K_1$ . Conseqüentemente,

$$\mathcal{A}[\Gamma] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b'c_1 & a' \end{pmatrix} : a, b \in K, c_1 \in K_1 \right\}, \quad (3.15)$$

onde  $a'$  e  $b'$  são os conjugados de  $a$  e  $b$  em  $K = K_1(\lambda)$ , respectivamente. A álgebra  $\mathcal{A}[\Gamma]$  desempenhará um papel fundamental no estudo dos grupos aritméticos  $\Gamma < \Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ .

**Lema 3.3.4** *Seja  $\Gamma$  um grupo fuchsiano com  $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$  satisfazendo as condições:*

1. *Seja  $K_1$  o corpo  $\mathbb{Q}(tr(T) : T \in \Gamma)$ . Então  $K_1$  é um corpo de números algébricos de grau finito, e  $tr(\Gamma)$  está contido no anel de inteiros de  $K_1$ ,  $\mathfrak{O}_{K_1}$ ;*
2. *Seja  $\varphi$  um mergulho de  $K_1$  em  $\mathbb{C}$  tal que  $\varphi \neq Id$  (identidade). Então  $\varphi(tr(\Gamma))$  é limitado em  $\mathbb{C}$ .*

*Então  $K_1$  é um corpo de números totalmente real. Além disso,  $\varphi(tr(\Gamma))$  está contido no intervalo  $[-2, 2]$ .*

**Proposição 3.3.5** *Seja  $\varphi$  um mergulho de  $K = K_1(\lambda)$  em  $\mathbb{C}$  tal que  $\varphi|_{K_1} \neq Id$  (identidade). Então, para qualquer elemento*

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ b'c_1 & a' \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

*temos  $|\varphi(a)| \leq 1$ . Em particular, para*

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & a'_1 \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

*obtemos  $\varphi(c_1) < 0$ .*

**Demonstração:** Consideremos

$$T_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Como  $TT_0^n \in \Gamma$  temos, pelo Lema 3.3.4, que

$$|\varphi(tr(TT_0^n))| \leq 2. \quad (3.16)$$

Usando o Lema 3.3.4, podemos mostrar que

$$|\varphi(\lambda)| = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\lambda} = \lambda'.$$

Desse modo, para  $a = \alpha_0\lambda + \alpha_1\lambda' \in K = K_1(\lambda)$ ,

$$\varphi(a') = \overline{\varphi(a)}, \quad (3.17)$$

basta notar que  $K_1$  é um corpo de números totalmente real e  $\varphi(\lambda') = \overline{\varphi(\lambda)}$ . Por outro lado,

$$tr(TT_0^n) = a\lambda^n + a'(\lambda')^n.$$

Daí, usando (3.17), obtemos

$$\varphi(tr(TT_0^n)) = \varphi(a\lambda^n) + \varphi(a'(\lambda')^n) = \varphi(a\lambda^n) + \overline{\varphi(a\lambda^n)},$$

isto é,

$$\varphi(\operatorname{tr}(TT_0^n)) = 2 \operatorname{Re}(\varphi(a)\varphi(\lambda^n)).$$

Logo, de (3.16),

$$|\operatorname{Re}(\varphi(a)\varphi(\lambda^n))| \leq 1. \quad (3.18)$$

Como  $\varphi(\lambda)^n \neq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o conjunto  $\{\varphi(\lambda)^m : m \in \mathbb{Z}\}$  é um subgrupo denso de  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Disso segue que

$$|\operatorname{Re}(\varphi(a) \cdot z)| \leq 1, \quad \forall z \in S^1.$$

Assim, de (3.18), obtemos  $|\varphi(a)| \leq 1$ . Agora, aplicando o mesmo raciocínio ao elemento  $T_1$ , obtemos  $|\varphi(a_1)| \leq 1$ . Por outro lado,

$$a_1 a'_1 - c_1 = 1 \Leftrightarrow \varphi(c_1) = |\varphi(a_1)|^2 - 1 \leq 0.$$

Mas sendo  $c_1 \neq 0$ , temos que  $\varphi(c_1) < 0$ . ■

Sejam  $K_1$  um corpo de números tal que  $[K_1 : \mathbb{Q}] = n$  e

$$\varphi_i : K_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

os monomorfismos de  $K_1$  em  $\mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e  $\varphi_1$  sendo a identidade. A partir de cada  $\varphi_i$ , consideremos o isomorfismo<sup>2</sup>

$$\psi_i : K \rightarrow \mathbb{C},$$

onde  $K = K_1(\lambda)$ ,  $[K : K_1] = 2$ . Logo,

$$\Psi_i : \mathcal{A}[\Gamma] \rightarrow M(2, \mathbb{C}),$$

definido por

$$\Psi_i(\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_i(a) & \psi_i(b) \\ \psi_i(b'c) & \psi_i(a') \end{pmatrix},$$

com

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b'c & a' \end{pmatrix},$$

é um mergulho. Portanto,

$$\mathcal{A}^{\varphi_i} = \mathcal{A}^{\psi_i} = \Psi_i(\mathcal{A}[\Gamma]) = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_i(a) & \psi_i(b) \\ \psi_i(b'c) & \psi_i(a') \end{pmatrix} : a, b \in K \right\},$$

ou seja,

$$\mathcal{A}^{\varphi_i} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b\psi_i(c) & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \psi_i(K), c \in K_1 \right\},$$

---

<sup>2</sup>Mais precisamente,  $\psi_i : K \rightarrow \psi_i(K)$ .

onde  $\mathcal{A}^{\varphi_i}$  é uma álgebra dos quatérnios sobre  $\varphi_i(K_1)$ . Disso segue que, [22],

$$\mathcal{A}^{\varphi_1} \otimes \mathbb{R} \simeq M(2, \mathbb{R}). \quad (3.19)$$

Por outro lado, usando a Proposição 3.3.5 e considerando que  $\psi_i(a') = \overline{\psi_i(a)}$  para  $i \neq 1$ , temos, [22],

$$\mathcal{A}^{\varphi_i} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}, \quad 2 \leq i \leq n. \quad (3.20)$$

Portanto, de (3.19) e (3.20), concluímos que  $\mathcal{A}[\Gamma]$  satisfaz (3.5). Disso segue que  $\mathcal{A}[\Gamma]$  é uma álgebra de divisão sobre  $K_1$ , [22]. Encerraremos este capítulo apresentando o resultado principal, pois a partir dele caracterizamos os grupos derivados de uma álgebra dos quatérnios.

**Teorema 3.3.6** [22] *Seja  $\Gamma$  um grupo fuchsiano com  $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$ . Então  $\Gamma$  é derivado de uma álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}$  sobre um corpo de números  $K$  totalmente real se, e somente se,  $\Gamma$  satisfaz as seguintes condições:*

1. *Seja  $K_1$  o corpo  $\mathbb{Q}(tr(T) : T \in \Gamma)$ . Então  $K_1$  é um corpo de números algébricos de grau finito, e  $tr(\Gamma)$  está contido no anel de inteiros de  $K_1$ ,  $\mathfrak{D}_{K_1}$ .*
2. *Seja  $\varphi$  um mergulho de  $K_1$  em  $\mathbb{C}$  tal que  $\varphi \neq Id$  (identidade). Então  $\varphi(tr(\Gamma))$  é limitado em  $\mathbb{C}$ .*

**Demonstração:** Suponhamos primeiro que  $\Gamma$  seja um subgrupo de índice finito em  $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ . Para qualquer  $T \in \Gamma$ ,  $tr(T) \in K$ . Mas, sendo  $K_1$  o corpo  $\mathbb{Q}(tr(T) : T \in \Gamma)$ , temos que  $K_1 \subseteq K$ . Portanto,  $K_1$  também é totalmente real. Como  $Trd(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{D}_K$ , obtemos  $tr(\Gamma) \subset \mathfrak{D}_K$ . Com isso, segue a primeira condição. Consideremos agora um mergulho  $\varphi_i$  de  $K_1$  em  $\mathbb{C}$  tal que  $\varphi_i \neq Id$ . Por (3.7),  $\varphi_i(tr(\Gamma)) \subset Trd_{\mathbb{H}}(\rho_i(\mathcal{O}^1))$ , para  $2 \leq i \leq n$ ,  $[K_1 : \mathbb{Q}] = n$ . Por outro lado, para qualquer  $x \in \mathcal{O}^1$ , temos que  $\varphi_i(Nrd(x)) = Nrd_{\mathbb{H}}(\rho_i(x))$ . Portanto,  $\rho_i(\mathcal{O}^1) \subset \mathbb{H}^1 = \{x \in \mathbb{H} : Nrd_{\mathbb{H}}(x) = 1\}$ . Mas pelo Exemplo 3.1.3, sabemos que  $Trd_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^1) = [-2, 2]$ . Desse modo,

$$\varphi_i(tr(\Gamma)) \subset Trd_{\mathbb{H}}(\rho_i(\mathcal{O}^1)) \subset Trd_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^1) = [-2, 2],$$

isto é,  $\varphi_i(tr(\Gamma)) \subset [-2, 2]$ . Logo,  $\varphi_i(tr(\Gamma))$  é limitado em  $\mathbb{R}$ . Vamos mostrar que  $K = K_1$ . Suponhamos que  $K$  seja uma extensão própria de  $K_1$ . Dessa forma, existe um mergulho  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi \neq Id$  tal que  $\varphi|_{K_1} = Id$ . Portanto, pela definição de  $K_1$ , obtemos  $\varphi(tr(\Gamma)) = tr(\Gamma) \subset [-2, 2]$ . Isso significa que  $\Gamma$  não contém elementos hiperbólicos, o que contradiz o fato de  $\Gamma$  ser não-elementar (por hipótese,  $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$ ), e a segunda condição também é satisfeita.

Consideremos agora a recíproca. Em decorrência da Proposição 3.3.5, mostramos que a álgebra  $\mathcal{A}[\Gamma]$  em (3.13) satisfaz as condições de (3.5). Por outro lado, temos que  $\Gamma$  é um

subgrupo de  $\Gamma(\mathcal{A}[\Gamma], \mathcal{O}[\Gamma])$ . Mas como  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  e  $\mathbb{H}^2/\Gamma(\mathcal{A}[\Gamma], \mathcal{O}[\Gamma])$  têm volume finito, segue que  $\Gamma$  é um subgrupo de índice finito em  $\Gamma(\mathcal{A}[\Gamma], \mathcal{O}[\Gamma])$ . Por isso,  $\Gamma$  é um grupo fuchsiano derivado de uma álgebra dos quatérnios. ■

**Observação 3.3.7** *Na primeira condição do Teorema 3.3.6, o anel de inteiros algébricos de  $K_1$ ,  $\mathfrak{D}_{K_1}$ , pode ser substituído por um anel  $R$  tal que  $\mathfrak{D}_{K_1} \subset R \subset K_1$ , desde que  $\mathcal{O} = (a, b)_R$  e  $\mathcal{A} = (a, b)_{K_1}$ .*



# Capítulo 4

## Identificação dos Grupos $\Gamma_{4g}$ em Ordens dos Quatérnios Provenientes das Tesselações $\{4g, 4g\}$

As constelações de sinais no plano hiperbólico construídas em [5] são constituídas de baricentros de polígonos hiperbólicos regulares de  $4g$  arestas, denotados por  $P_{4g}$ , associados às tesselações hiperbólicas auto-duais  $\{4g, 4g\}$ , onde  $g$  é o gênero da superfície compacta  $\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}$ . Cada baricentro, ou melhor, cada sinal  $v$  de uma constelação é imagem de outro sinal  $w$  da constelação através de uma isometria hiperbólica  $T \in \Gamma_{4g}$ , isto é,  $T(v) = w$ , sendo  $\Gamma_{4g}$  o grupo fuchsiano associado ao polígono  $P_{4g}$ . Portanto, essas constelações de sinais são geometricamente uniformes, a menos de efeito de bordo. Tais constelações contêm  $p^m$  sinais e estão associadas aos ideais  $\mathcal{O}_p$  na ordem dos quatérnios  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}[\theta]}$ .

Katok, [22], e Johansson, [19], considerando os resultados de Takeuchi, [37], propuseram uma maneira aritmética de se obter grupos fuchsianos. Esses grupos são conhecidos como grupos fuchsianos aritméticos.

Johansson em [20] mostrou que um grupo fuchsiano aritmético está associado a uma ordem  $\mathcal{O}$  em uma álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}$  sobre uma extensão quadrática  $K$  de  $\mathbb{Q}$ , isto é,  $[K : \mathbb{Q}] = 2$ , onde os geradores de  $\Gamma$  são da forma

$$T_l = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b\sqrt{t} & r_1(c + d\sqrt{t}) \\ r_2(c - d\sqrt{t}) & a - b\sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[\theta]$ , onde  $\mathbb{Z}[\theta]$  é o anel de inteiros de  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ,  $m > 0$ ,  $r_1 = -r_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $t \in \mathbb{Z}[\theta]$  e  $\sqrt{t} \notin \mathbb{Z}[\theta]$ .

A partir da identificação de um grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma$  em uma ordem dos quatérnios  $\mathcal{O}$ , foi apresentado em [5] um algoritmo de rotulamento algébrico dos sinais pertencentes a uma constelação de sinais no plano hiperbólico por elementos de um  $p$ -grupo  $G_{p^m}$ , derivado de uma ordem por um ideal próprio. Em decorrência dessa identificação, obtemos os reticulados hiperbólicos associados à essas constelações. Portanto, a identificação de um grupo

fuchsiano aritmético  $\Gamma$  com uma ordem dos quatérnios  $\mathcal{O}$  é o principal passo no processo de rotulamento.

Nesse processo, encontramos em [5] dois casos particulares de identificação. Para  $g = 2$  o grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma_8$ , proveniente da tesselação  $\{8, 8\}$ , é identificado com elementos da ordem  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}$ . Para  $g = 3$  o grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma_{12}$ , proveniente da tesselação  $\{12, 12\}$ , é identificado com elementos da ordem  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}[\sqrt{3}]}$ .

Não é trivial verificar se um dado subgrupo discreto de  $PSL(2, \mathbb{R})$  é ou não aritmético. Uma abordagem sobre grupos de índices finito em  $PSL(2, \mathbb{R})$ , ou melhor, de índices finito no subgrupo discreto  $PSL(2, \mathbb{Z}) < PSL(2, \mathbb{R})$ , é feita em [22].

Este capítulo tem como objetivo estudar os grupos fuchsianos  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$ , que correspondem às tesselações  $\{4g, 4g\}$ ,  $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ , no sentido de caracterizá-los quanto a sua aritmetividade. Estendemos os resultados de [5] e [20] para os casos em que  $g = m \cdot 2^n$ ,  $m = 1, 3, 5$ , e  $n \in \mathbb{N}$  qualquer. Mostramos que esses grupos são derivados de uma álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}$  sobre um corpo de números  $K$ , tal que  $[K : \mathbb{Q}] = 2^m$ , onde  $2^m$  denota o grau da extensão do corpo dos racionais  $\mathbb{Q}$ , conduzindo ao corpo  $K$  e, para esses casos, identificamos as ordens  $\mathcal{O}$  em  $\mathcal{A}$  associadas aos grupos  $\Gamma_{4g}$ . Dessa forma, generalizamos os resultados anteriores.

Dividimos este capítulo em quatro seções. A Seção 4.1 é dedicada à apresentação dos grupos  $\Gamma_{4g}$ , associados às tesselações hiperbólicas  $\{4g, 4g\}$ . Na Seção 4.2 estudamos detalhadamente os grupos  $\Gamma_{4g}$  para o caso  $g = 2^n$ . As Seções 4.3 e 4.4 são completamente análogas à Seção 4.2. Nelas, estudamos os grupos  $\Gamma_{4g}$  para os casos  $g = 3 \cdot 2^n$  e  $g = 5 \cdot 2^n$ , respectivamente.

## 4.1 O Grupo Fuchsiano $\Gamma_{4g}$

Nesta seção apresentamos o grupo fuchsiano  $\Gamma_{4g}$ . No que segue, o modelo de espaço hiperbólico a ser usado será o disco de Poincaré,  $\mathbb{D}^2$ . Uma explanação mais detalhada do processo de construção do grupo  $\Gamma_{4g}$  pode ser encontrada em [5]. De modo sucinto, o grupo  $\Gamma_{4g}$  é construído como segue:

Consideremos uma tesselação auto-dual  $\{4g, 4g\}$ ,  $g \geq 2$ , e seja  $P_{4g}$  o polígono hiperbólico regular de  $4g$  arestas associado a essa tesselação. O polígono  $P_{4g}$  tessela o plano hiperbólico  $\mathbb{D}^2$ , de modo que cada vértice é compartilhado por  $4g$  polígonos de mesma forma. Logo, para cada  $g$ ,  $\Gamma_{4g}$  será grupo que tem  $P_{4g}$  como domínio fundamental. Algebricamente, temos que  $\Gamma_{4g} \simeq \pi_1(\mathcal{T}_g)$ , ou seja, grupo fundamental de um  $g$ -toro  $\mathcal{T}_g$ .

Sem perda de generalidade, vamos supor que  $P_{4g}$  esteja centrado na origem de  $\mathbb{D}^2$ . Consideremos também as arestas de  $P_{4g}$  dispostas na seguinte ordem cíclica fixa no sentido anti-horário:

$$\tau_1, \varepsilon_1, \tau'_1, \varepsilon'_1, \dots, \tau_g, \varepsilon_g, \tau'_g, \varepsilon'_g,$$

e as isometrias hiperbólicas  $T_1, S_1, \dots, T_g, S_g$  (os geradores do grupo fuchsiano  $\Gamma_{4g}$ ) tais que

$$T_k(\tau_k) = \tau'_k \quad \text{e} \quad S_j(\varepsilon_j) = \varepsilon'_j, \quad k, j = 1, \dots, g. \quad (4.2)$$

Por meio desses emparelhamentos, obtemos uma superfície compacta e orientável  $\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}$  de gênero  $g$ , [2]. Portanto, definido por uma tesselação auto-dual  $\{4g, 4g\}$ , temos um polígono hiperbólico regular  $P_{4g}$  de  $4g$  arestas, que por sua vez está associado a um grupo fuchsiano  $\Gamma_{4g}$ , cuja assinatura é  $(g, -)$ . Disso segue que a área hiperbólica de  $P_{4g}$  é dada por, [22],

$$\mu(P_{4g}) = \mu(\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}) = 4\pi(g-1). \quad (4.3)$$

Observamos que a inexistência do somatório  $\sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k}\right)$  na medida da área hiperbólica de  $\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}$  em (4.3) fornecida pelo Teorema 2.2.29, é equivalente a inexistência de elementos elípticos no grupo  $\Gamma_{4g}$ . Isto é suficiente para que tenhamos o quociente  $\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}$  localmente isométrico a  $\mathbb{D}^2$ .

Consideremos agora  $T_C$  como sendo uma transformação elíptica de ordem  $4g$  com matriz associada

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4g}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{4g}} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

de modo que  $T_C(\tau_1) = \varepsilon_1$  e  $r_k$  é a potência de  $T_C$  tal que

$$(T_C)^{r_k} = T_C^{r_k}(\tau_1) \in \{\tau_k, \varepsilon_k, \tau'_k, \varepsilon'_k\}, \quad k = 1, \dots, g. \quad (4.5)$$

Isto permite escrever os geradores de  $\Gamma_{4g}$  como conjugações de  $T_1$  por meio de potências de  $T_C$ . Por exemplo, queremos uma transformação  $T_2$  de modo que  $T_2(\tau_2) = \tau'_2$ . Mas,  $T_1(\tau_1) = \tau'_1$  e  $T_C^4(\tau_1) = \tau_2$ . Disso segue que  $T_C^{-4}(\tau_2) = \tau_1$ . Logo,

$$T_1(T_C^{-4}(\tau_2)) = \tau'_1 \Leftrightarrow T_C^4(T_1(T_C^{-4}(\tau_2))) = T_C^4(\tau'_1) = \tau'_2,$$

ou seja,

$$T_C^4 \circ T_1 \circ T_C^{-4}(\tau_2) = \tau'_2.$$

Dessa forma, basta considerarmos  $T_2 = T_C^4 \circ T_1 \circ T_C^{-4}$ . Para os demais casos, usando (4.2) e (4.5) obtemos (cf. [5]),

$$A_k = C^{4(k-1)} A_1 C^{-4(k-1)} \quad \text{e} \quad B_j = C^{4j-3} A_1 C^{-4j+3}, \quad (4.6)$$

onde  $A_k$  e  $B_j$  são as matrizes correspondentes às transformações  $T_k$  e  $S_j$ , respectivamente, com  $k, j = 1, \dots, g$ .

Após algumas manipulações algébricas, podemos expressar os geradores do grupo  $\Gamma_{4g}$  em (4.6) da seguinte forma:

$$A_l = \begin{cases} C^{2(l-1)}A_1C^{-2(l-1)} & \text{para } l \text{ ímpar} \\ C^{(2l-3)}A_1C^{-(2l-3)} & \text{para } l \text{ par} \end{cases}. \quad (4.7)$$

Portanto, de posse do gerador  $T_1$  estamos, conseqüentemente, determinando os demais geradores. O próximo teorema nos mostra a forma do gerador  $T_1$ .

**Teorema 4.1.1** [5] *Seja  $P_{4g}$  o polígono hiperbólico regular de  $4g$  arestas, cujo grupo fuchsiano associado é  $\Gamma_{4g}$  com assinatura  $(g, -)$ . Consideremos  $\tau_1$  como sendo a aresta entre os argumentos  $-\frac{\pi}{2}$  e  $-\frac{(g-1)\pi}{2g}$  e  $T_1$  a transformação hiperbólica que emparelha as arestas  $\tau_1$  e  $\tau'_1$  do polígono  $P_{4g}$ . Então*

$$T_1(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}},$$

onde  $a$  e  $b$  são dados por

$$\arg(a) = \frac{(g-1)\pi}{2g}, \quad |a| = \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g}$$

e

$$|b| = \left( \left( \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \arg(b) = \frac{-(2g+1)\pi}{4g}.$$

As demais transformações hiperbólicas  $T_k(\tau_k) = \tau'_k$  e  $S_j(\varepsilon_j) = \varepsilon'_k$  geradoras do grupo fuchsiano  $\Gamma_{4g}$  que realizam os outros emparelhamentos de arestas são obtidas pelas conjugações

$$T_k = T_{C^{r_k}} \circ T_1 \circ T_{C^{-r_k}}, \quad S_j = T_{C^{r_j}} \circ T_1 \circ T_{C^{-r_j}}.$$

Por meio do processo de construção do grupo  $\Gamma_{4g}$ , podemos determinar sua estrutura algébrica através de sua apresentação que é dada por,

$$\langle T_1, S_1, \dots, T_g, S_g : T_1 S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} \dots T_g S_g T_g^{-1} S_g^{-1} = Id \rangle.$$

De fato, por construção, podemos verificar que existe um vértice  $w \in P_{4g}$  tal que

$$T_1 S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} \dots T_g S_g T_g^{-1} S_g^{-1}(w) = w.$$

Mas, o estabilizador de  $w$ ,

$$\{T \in \Gamma_{4g} : T(w) = w\},$$

é constituído apenas da identidade, [22].

## 4.2 Caso $g = 2^n$

Nesta seção consideramos os grupos fuchsianos  $\Gamma_{4g}$  em que  $g = 2^n$ . Poderíamos formalizar os resultados aqui desenvolvidos juntos com os das Seções 4.3 e 4.4, haja vista serem completamente análogos aos casos  $g = 3 \cdot 2^n$  e  $g = 5 \cdot 2^n$ . Mas, para facilitar o entendimento dos conceitos utilizados na construção dos grupos  $\Gamma_{4g}$ , bem como no processo de identificação de  $\Gamma_{4g}$  em ordens dos quatérnios, iremos tratá-los separadamente.

Nosso principal objetivo é mostrar que  $\Gamma_{4g}$  é derivado de uma álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}$  sobre um corpo de números  $K$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 2^n$ , onde  $2^n$  é o gênero da superfície  $\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}$ , bem como determinar a ordem dos quatérnios  $\mathcal{O}$  em  $\mathcal{A}$  associada ao grupo  $\Gamma_{4g}$ . Com isso, generalizamos o processo de identificação dos grupos fuchsianos  $\Gamma_{4g}$  em ordens dos quatérnios. Começaremos com a seguinte:

**Proposição 4.2.1** *Se  $g = 2^n$  com  $n > 0$ , então*

$$2 \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g} \cos \frac{(g-1)\pi}{2g} = 2 + \theta,$$

onde  $\theta = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$  contém  $n$  radicais.

**Demonstração:** Como  $g = 2^n$ , temos que

$$2 \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g} \cos \frac{(g-1)\pi}{2g} = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Por outro lado, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$2 \cos x = \sqrt{2 + 2 \cos 2x}.$$

Assim, para  $n \in \mathbb{N}$ , vale a igualdade

$$2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^n}}. \quad (4.8)$$

Para  $n = 1$ , isto é, para  $g = 2$ ,

$$2 + 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 + \sqrt{2}.$$

Suponhamos, como hipótese de indução, que o resultado seja válido para  $n$ , ou seja,

$$2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = 2 + \theta,$$

onde  $\theta$  contém  $n$  radicais. Assim, de (4.8), obtemos,

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+2}} &= \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= \sqrt{2 + \theta}, \end{aligned}$$

contém  $n + 1$  radicais, e o resultado segue. ■

Observamos que  $\cos \frac{\pi}{g}$  e  $\sin \frac{\pi}{g}$ , bem como  $\cos \frac{k\pi}{g}$  e  $\sin \frac{k\pi}{g}$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $g = 2^n$ , podem ser calculados a partir da igualdade em (4.8). Desse modo, para qualquer  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $r \neq \pm 1$ , a matriz  $C^r$  pode ser escrita sob a forma

$$C^r = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \bar{x} \end{pmatrix},$$

com  $x = a + bi$ , onde  $a, b \in \mathbb{Q}(\theta)$ , sendo  $C$  como em (4.4).

Consideremos agora a isometria,

$$f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 \\ z \mapsto \frac{zi+1}{z+i}.$$

Então,  $\Gamma = f^{-1}\Gamma_{4g}f$  é um subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Além disso<sup>1</sup>,  $\Gamma$  é isomorfo a  $\Gamma_{4g}$ . Sejam  $G_l = f^{-1}A_l f$  os geradores de  $\Gamma$ , para  $l = 1, \dots, 2^{n+1}$ . Usando a Proposição 4.2.1, as igualdades em (4.7) e levando em consideração que  $T_1(z) = \frac{az+b}{bz+a}$ , onde

$$\arg(a) = \frac{(g-1)\pi}{2g}, \quad |a| = \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g}$$

e

$$|b| = \left( \left( \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \arg(b) = \frac{-(2g+1)\pi}{4g},$$

os geradores  $G_l$  são dados por

$$G_l = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_l + y_l\sqrt{\theta} & z_l + w_l\sqrt{\theta} \\ -z_l + w_l\sqrt{\theta} & x_l - y_l\sqrt{\theta} \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, 2^{n+1}, \quad (4.9)$$

onde  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta]$  e  $\theta$  como na Proposição 4.2.1. Observamos que para  $g = 2^n$ , os geradores de  $\Gamma_{4g}$  se apresentam da mesma forma como em (4.1) para os casos  $g = 2$  e  $g = 3$ .

Nosso objetivo agora é mostrar que para cada  $g = 2^n$ , o grupo  $\Gamma_{4g}$  é derivado de uma álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}$  sobre um corpo  $K$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 2^n$ . Inicialmente, vamos considerar o anel de inteiros de  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ .

**Proposição 4.2.2** *Sejam  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  e  $\theta$  como na Proposição 4.2.1. Então o anel de inteiros de  $K$  é*

$$\mathfrak{D}_K = \mathbb{Z}[\theta].$$

<sup>1</sup>A aplicação  $\xi : \Gamma \rightarrow \Gamma_{4g}$  dada por  $\xi(T) = f^{-1}Tf$  é um isomorfismo de grupos.

**Demonstração:** Como  $\theta$  é um inteiro algébrico, claramente  $\mathbb{Z}[\theta] \subseteq \mathfrak{D}_K$ . Mostraremos a outra inclusão. Seja  $G$  um subgrupo aditivo de  $\mathfrak{D}_K$  de posto  $2^n$  com uma  $\mathbb{Z}$ -base  $\{1, \theta, \dots, \theta^{2^n-1}\}$ . Como os  $2^n$  monomorfismos  $\varphi_i : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, 2^n$ , são dados por<sup>2</sup>

$$\varphi_i(\theta) = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \dots \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}}},$$

temos que o discriminante da base  $\{1, \theta, \dots, \theta^{2^n-1}\}$  é

$$\Delta[1, \theta, \dots, \theta^{2^n-1}] = 2^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Logo, fazendo uso do Teorema 2.1.6 com  $p = 2$ , concluímos que não existe nenhum inteiro algébrico da forma

$$\frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2 \theta + \dots + \lambda_{2^n} \theta^{2^n-1}),$$

onde  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, 2^n$ , pois caso contrário, existem  $\lambda_i, \lambda_j \in \{0, 1\}$  tais que

$$\frac{\lambda_i^{2^n} \pm 2\lambda_j^{2^n}}{4} \in \mathbb{Z} - \{0\},$$

o que não é possível. Assim, concluímos que  $G = \mathfrak{D}_K$ , ou seja,  $\mathfrak{D}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ . ■

Com relação a um grupo fuchsiano  $\Gamma$ , existem, no processo de construção de constelações de sinais  $G_p(0)$  como em (5.55), bem como no algoritmo de rotulamento para seus sinais, duas condições a serem satisfeitas. A primeira é que os elementos do grupo  $\Gamma$ , associado a um polígono hiperbólico regular  $P$ , sejam identificados com elementos de uma ordem  $\mathcal{O}$  em  $\mathcal{A}$ , onde  $\mathcal{A}$  é uma álgebra dos quatérnios sobre um corpo de números  $K$ . A segunda é que o grupo  $\Gamma$  seja derivado da álgebra  $\mathcal{A}$ . Vamos considerar essas duas condições nos Teoremas 4.2.5 e 4.2.6. Primeiramente, apresentamos a Proposição 4.2.3, cuja demonstração é simples, e que será fundamental para o estudo dos grupos fuchsianos aritméticos.

**Proposição 4.2.3** *Seja  $\Gamma$  um grupo fuchsiano aritmético finitamente gerado por  $G_1, \dots, G_l$ , com*

$$G_k = \begin{pmatrix} x_k + y_k \sqrt{\theta} & z_k + w_k \sqrt{\theta} \\ -z_k + w_k \sqrt{\theta} & x_k - y_k \sqrt{\theta} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, l,$$

onde  $G_k \in M(2, K(\sqrt{\theta}))$  e  $\theta, x_k, y_k, z_k, w_k \in K$ , sendo  $K$  um corpo. Então qualquer elemento  $T \in \Gamma$  assume a mesma forma dos geradores de  $\Gamma$ .

**Demonstração:** Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois geradores de  $\Gamma$ , digamos

$$G_1 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \sqrt{\theta} & z_1 + w_1 \sqrt{\theta} \\ -z_1 + w_1 \sqrt{\theta} & x_1 - y_1 \sqrt{\theta} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G_2 = \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \sqrt{\theta} & z_2 + w_2 \sqrt{\theta} \\ -z_2 + w_2 \sqrt{\theta} & x_2 - y_2 \sqrt{\theta} \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup>Os elementos  $\varphi_i(\theta)$  são as raízes do polinômio minimal de  $\theta$  sobre  $\mathbb{Q}$ ,  $f_\theta(x)$ , que é da forma  $f_\theta(x) = x^{2^n} + a_{2^n-2}x^{2^n-2} + a_{2^n-4}x^{2^n-4} + \dots + a_2x^2 + 2$ , cujos coeficientes (exceto o líder) são pares.

Se  $G_1 \cdot G_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , então

$$\begin{aligned} a_{11} &= x_1x_2 - z_1z_2 + (y_1y_2 + w_1w_2)\theta + (x_1y_2 + x_2y_1 + z_1w_2 - z_2w_1)\sqrt{\theta}, \\ a_{22} &= x_1x_2 - z_1z_2 + (y_1y_2 + w_1w_2)\theta - (x_1y_2 + x_2y_1 + z_1w_2 - z_2w_1)\sqrt{\theta}, \\ a_{21} &= -z_1x_2 - x_1z_2 - (y_1w_2 - w_1y_2)\theta + (-z_1y_2 + x_2w_1 + x_1w_2 + y_1z_2)\sqrt{\theta}, \\ a_{12} &= z_1x_2 + x_1z_2 + (y_1w_2 - w_1y_2)\theta + (-z_1y_2 + x_2w_1 + x_1w_2 + y_1z_2)\sqrt{\theta}. \end{aligned}$$

■

**Proposição 4.2.4** *Sejam a álgebra  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  com uma  $K$ -base  $\{1, i, j, k\}$ ,  $r \in \mathbb{N} - \{0\}$  fixo e  $R$  o conjunto*

$$R = \left\{ \frac{\alpha}{r^m} : \alpha \in \mathfrak{D}_K \quad e \quad m \in \mathbb{N} \right\}, \quad (4.10)$$

onde  $\mathfrak{D}_K$  é o anel de inteiros do corpo  $K$ . Então

$$\mathcal{O} = (a, b)_R = \{x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_0, x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

é uma ordem em  $\mathcal{A}$ .

**Demonstração:** Temos que  $R$  é um subanel de  $K$  contendo  $\mathfrak{D}_K$  e que  $\mathcal{O}$  é um  $R$ -módulo. Por outro lado, se  $\beta \in K$ , então existe  $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$  tal que  $c\beta \in \mathfrak{D}_K$ . Logo, para quaisquer  $x_0, x_1, x_2, x_3 \in K$ , existem  $c_l \in \mathbb{Z} - \{0\}$  tais que  $c_l x_l = \alpha_l \in \mathfrak{D}_K$ ,  $l = 0, 1, 2, 3$ . Desse modo, dado  $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathcal{A}$ , existe  $\gamma \in K$  tal que  $x = \gamma x'$ , com  $x' \in \mathcal{O}$ . Ou seja,  $\mathcal{A} = K\mathcal{O}$ , o que mostra que  $\mathcal{O}$  é uma ordem em  $\mathcal{A}$ . ■

Os reticulados hiperbólicos associados aos grupos  $\Gamma_{4g}$ ,  $g = 2^n$ , são descritos no próximo teorema.

**Teorema 4.2.5** *Para cada  $g = 2^n$  com  $n > 0$ , os elementos do grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$  são identificados, via isomorfismo<sup>3</sup>, com elementos do grupo dos invertíveis  $\mathcal{O}^1$  da ordem  $\mathcal{O} = (\theta, -1)_R$ , onde*

$$R = \left\{ \frac{\alpha}{2^m} : \alpha \in \mathbb{Z}[\theta] \quad e \quad m \in \mathbb{N} \right\} \quad (4.11)$$

e  $\theta$  como na Proposição 4.2.1. Conseqüentemente,

$$\{1, \sqrt{\theta}, \text{Im}, \sqrt{\theta} \text{Im}\}$$

é uma  $R$ -base para o reticulado  $\mathcal{O}$ , sendo  $\text{Im}$  a unidade imaginária.

<sup>3</sup>Esse isomorfismo, digamos  $\varphi$ , é tal que  $\Gamma_{4g} \simeq \Gamma < \Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O}) = \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\{\pm I_2\}}$ , onde  $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$ .

**Demonstração:** Consideremos as seguintes matrizes  $M_0, M_1, M_2$  e  $M_3$  em  $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{\theta}))$ , dadas por

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\theta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\theta} \\ \sqrt{\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Se  $T \in \Gamma$ , então pela Proposição 4.2.3 e por (4.9),

$$T = \frac{1}{2^s} \begin{pmatrix} x_l + y_l \sqrt{\theta} & z_l + w_l \sqrt{\theta} \\ -z_l + w_l \sqrt{\theta} & x_l - y_l \sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

onde  $s \in \mathbb{N}$  e  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta]$ . Portanto,  $T$  é identificado com o elemento  $x \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (\theta, -1)_R$ ,

$$x = \frac{x_l}{2^s} + \frac{y_l}{2^s}i + \frac{z_l}{2^s}j + \frac{w_l}{2^s}k,$$

através do isomorfismo  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \varphi(\mathcal{A})$  definido por<sup>4</sup>

$$\varphi(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) = x_0 \cdot M_0 + x_1 \cdot M_1 + x_2 \cdot M_2 + x_3 \cdot M_3, \quad (4.12)$$

ou seja,

$$\varphi(x) = T,$$

com  $i^2 = \theta, j^2 = -1, k = ij$  e  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta]$ . Portanto, cada elemento do grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$  é identificado, via o isomorfismo  $\varphi$ , com um elemento  $x \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (\theta, -1)_R$  e  $\{1, \sqrt{\theta}, \text{Im}, \sqrt{\theta} \text{Im}\}$  é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ . ■

**Teorema 4.2.6** *Para cada  $g = 2^n$  com  $n > 0$ , o grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$ , associado ao polígono hiperbólico regular  $P_{4g}$ , é derivado de uma álgebra de divisão dos quatérnios<sup>5</sup>  $\mathcal{A} = (\theta, -1)_K$  sobre o corpo de números  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 2^n$  e  $\theta$  como na Proposição 4.2.1.*

**Demonstração:** Pela Proposição 4.2.3 e por (4.9), qualquer elemento  $T \in \Gamma$  se escreve na forma

$$T = \frac{1}{2^s} \begin{pmatrix} x_l + y_l \sqrt{\theta} & z_l + w_l \sqrt{\theta} \\ -z_l + w_l \sqrt{\theta} & x_l - y_l \sqrt{\theta} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

onde  $s \in \mathbb{N}$  e  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta]$ . Portanto, pelo Teorema 4.2.5, existe  $x = \frac{x_l}{2^s} + \frac{y_l}{2^s}i + \frac{z_l}{2^s}j + \frac{w_l}{2^s}k \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (\theta, -1)_R$  tal que  $\varphi(x) = T$ . Logo,  $\text{tr}(T) = \text{tr}(\varphi(x)) = \text{Trd}(x) = \frac{2x_l}{2^s} \in R$ . Desse modo,  $\text{tr}(\Gamma) \subset R$ . Por outro lado, para o caso  $g = 2^n$ , temos<sup>6</sup>

$$K = \mathbb{Q}(\text{tr}(T) : T \in \Gamma) = \mathbb{Q}(\theta).$$

<sup>4</sup>Análogo ao isomorfismo de (3.4). Neste caso,  $\varphi(\mathcal{A}) \subset M(2, K(\sqrt{\theta}))$  com  $\mathcal{A} = (\theta, -1)_K$  e  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ .

<sup>5</sup>Observamos que  $\theta$  não é um quadrado em  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ , ou seja, não existe  $t \in K - \{0\}$  tal que  $t^2 = \theta$ .

<sup>6</sup>Essa igualdade pode ser verificada usando o fato que  $\text{tr}(T) \in \mathbb{Q}(\text{tr}(T_1)), \forall T \in \Gamma$  e  $\text{tr}(T_1) = 2 + \theta$ .

Disso segue que a primeira condição do Teorema 3.3.6 é satisfeita.

Agora, seja  $\varphi_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$  um homomorfismo dado por  $\varphi_2(\theta) = -\theta$ , o qual estendemos ao isomorfismo<sup>7</sup>  $\psi_2 : L \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$\psi_2(x + y\sqrt{\theta}) = \varphi_2(x) + \varphi_2(y)i\sqrt{\theta}, \quad x, y \in K, \quad (4.14)$$

onde  $L = K(\sqrt{\theta})$ ,  $[L : K] = 2$ . Consideremos agora a álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}[\Gamma]$  sobre  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  (Teorema 3.3.2),

$$\mathcal{A}[\Gamma] = \left\{ \sum_{i=1}^d a_i T_i : a_i \in K, T_i \in \Gamma \right\}.$$

Usando as expressões dos geradores de  $\Gamma$  em (4.9), temos que

$$\mathcal{A}[\Gamma] = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b'_1 & a'_1 \end{pmatrix} : a_1, b_1 \in L \right\},$$

onde  $a'_1$  e  $b'_1$  são os conjugados de  $a_1$  e  $b_1$  em  $L$ , respectivamente<sup>8</sup>. Seja

$$\Psi : \mathcal{A}[\Gamma] \rightarrow M(2, \mathbb{C})$$

o mergulho definido por

$$\Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_2(a_1) & \psi_2(b_1) \\ -\psi_2(b'_1) & \psi_2(a'_1) \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{A}^{\psi_2} = \Psi(\mathcal{A}[\Gamma]) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \psi_2(L) \right\}.$$

De (3.20), segue que  $\mathcal{A}^{\psi_2} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ , [22]. Por outro lado, se  $T$  é um elemento qualquer de  $\Gamma$  e  $\text{tr}(T) = a + a'$  (o traço de  $T$ ), então usando o Exemplo 3.1.3, temos

$$\psi_2(a) + \psi_2(a') \in [-2, 2].$$

Mas como  $a + a' \in K = \mathbb{Q}(\theta)$ , temos

$$\psi_2(a) + \psi_2(a') = \psi_2(a + a') = \varphi_2(a + a'),$$

ou seja,

$$\varphi_2(a + a') \in [-2, 2].$$

Portanto,  $\varphi_2(\text{tr}(\Gamma))$  é limitado em  $\mathbb{C}$ . Logo, a segunda condição do Teorema 3.3.6 também é satisfeita. Concluimos que  $\Gamma$  é derivado de uma álgebra dos quatérnios<sup>9</sup>  $\mathcal{A}$  sobre  $K = \mathbb{Q}(\text{tr}(T) : T \in \Gamma) = \mathbb{Q}(\theta)$ , sendo

$$\theta = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

<sup>7</sup>Ou melhor,  $\psi_2 : L \rightarrow \psi_2(L)$ .

<sup>8</sup>Observamos que  $L$  é uma extensão de  $K$  tal que  $[L : K] = 2$ , pois  $x^2 - \theta$  é o polinômio minimal de  $\sqrt{\theta}$  sobre  $K$ . Por isso, dado  $a \in L$ , podemos escrevê-lo da forma  $a = x + y\sqrt{\theta} \Leftrightarrow a' = x - y\sqrt{\theta}$ ,  $x, y \in K$ .

<sup>9</sup>A álgebra é  $\mathcal{A} = (\theta, -1)_{\mathbb{Q}(\theta)}$ .

e  $[K : \mathbb{Q}] = 2^n$ . ■

Pelo Teorema 4.2.6 temos que o espaço das órbitas  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é compacto, [22]. Mas por construção, os emparelhamentos das arestas de  $P_{4g}$  são realizados de modo que a superfície  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  seja compacta e orientável. Portanto, para os grupos  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$ ,  $g = 2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  qualquer, valem a recíproca do seguinte resultado:

**Teorema 4.2.7** [22] *Seja  $\Gamma$  um grupo fuchsiano derivado de uma álgebra de divisão dos quatérnios. Então o espaço quociente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é compacto.*

Como uma aplicação dos conceitos estabelecidos anteriormente, iremos apresentar, no exemplo a seguir, os geradores do grupo fuchsiano  $\Gamma_{4g}$  para  $g = 4$ .

**Exemplo 4.2.8** *Sejam  $g = 4$ ,*

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{16}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{16}} \end{pmatrix} \quad e \quad A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

com  $\arg(a) = \frac{3\pi}{8}$ ,  $|a| = \tan \frac{7\pi}{16}$ ,  $|b| = \left( (\tan \frac{7\pi}{16})^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$  e  $\arg(b) = \frac{-9\pi}{16}$ . Disso segue que

$$C = \begin{pmatrix} x + yi & 0 \\ 0 & x - yi \end{pmatrix}$$

com

$$2x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad 2y = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Temos também,

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1(1+i(1+\sqrt{2}))}{2} & \frac{-(\sqrt{2}+iy_1)^4\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{-(2-iy_1)^4\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1(1-i(1+\sqrt{2}))}{2} \end{pmatrix}.$$

Portanto, usando as igualdades em (4.7) e o fato que  $G_l = f^{-1}A_l f$ ,  $l = 1, \dots, 8$ , obtemos os seguintes geradores do grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma \simeq \Gamma_{16}$ :

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - y_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{z_1 - w_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{-z_1 - w_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1 + y_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j - \frac{w_1}{2}k\right),$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - w_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{z_1 + y_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{-z_1 + y_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1 + w_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} - \frac{w_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j + \frac{y_1}{2}k\right),$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + y_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{z_1 + w_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{-z_1 + w_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1 - y_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j + \frac{w_1}{2}k\right),$$

$$\begin{aligned}
G_4 &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+w_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} & \frac{z_1-y_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \\ \frac{-z_1-y_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} & \frac{x_1-w_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} + \frac{w_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j - \frac{y_1}{2}k\right), \\
G_5 &= \begin{pmatrix} \frac{x_1-y_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} & \frac{z_1+w_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \\ \frac{-z_1+w_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} & \frac{x_1+y_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j + \frac{w_1}{2}k\right), \\
G_6 &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+w_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} & \frac{z_1+y_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \\ \frac{-z_1+y_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} & \frac{x_1-w_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} + \frac{w_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j + \frac{y_1}{2}k\right), \\
G_7 &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+y_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} & \frac{z_1-w_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \\ \frac{-z_1-w_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} & \frac{x_1-y_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j - \frac{w_1}{2}k\right), \\
G_8 &= \begin{pmatrix} \frac{x_1-w_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} & \frac{z_1-y_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \\ \frac{-z_1-y_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} & \frac{x_1+w_1}{2} \sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} - \frac{w_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j - \frac{y_1}{2}k\right),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}, & y_1 &= 2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \\
z_1 &= (1 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}), & w_1 &= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Assim, a ordem associada ao grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{16}$  é

$$\mathcal{O} = \left( \sqrt{2 + \sqrt{2}}, -1 \right)_R,$$

sendo  $R = \left\{ \frac{\alpha}{2^m} : \alpha \in \mathbb{Z}[\theta] \text{ e } m \in \mathbb{N} \right\}$ ,  $\theta = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$  e

$$\left\{ 1, \sqrt[4]{2 + \sqrt{2}}, \text{Im}, \sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} \text{Im} \right\}$$

é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ , conforme o Teorema 4.2.5.

O processo de identificação dos grupos  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$  em ordens dos quatérnios através do isomorfismo em (4.12), nos permite rotular os sinais da constelação  $G_p(0)$  como em (1.1) obtidas de  $\Gamma_{4g}$ . Na Seção 5.1 ilustraremos esse processo.

### 4.3 Caso $g = 3 \cdot 2^n$

Nesta seção consideramos o caso  $g = 3 \cdot 2^n$ . Os procedimentos utilizados nesta seção são análogos ao caso  $g = 2^n$ . Por isso, omitiremos alguns passos realizados com detalhes na Seção 4.2. Começamos com o seguinte resultado:

**Proposição 4.3.1** *Se  $g = 3 \cdot 2^n$ , sendo  $n$  um número natural qualquer, então*

$$2 \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g} \cos \frac{(g-1)\pi}{2g} = 2 + \theta,$$

onde  $\theta = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$  contém  $n + 1$  radicais.

**Demonstração:** Como  $g = 3 \cdot 2^n$ , temos

$$2 \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g} \cos \frac{(g-1)\pi}{2g} = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}}.$$

Para  $n = 1$ , temos que  $g = 6$  e

$$2 + 2 \cos \frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Suponhamos, como hipótese de indução, que o resultado seja válido para  $n$ . Como

$$2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+2}} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+1}}}. \quad (4.15)$$

temos que

$$2 \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+2}} = \sqrt{2 + \theta}$$

contém  $n + 2$  radicais, e o resultado segue. ■

De modo análogo, observamos que para  $g = 3 \cdot 2^n$ ,  $\cos \frac{k\pi}{g}$  e  $\sin \frac{k\pi}{g}$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , podem ser calculados a partir da igualdade em (4.15). Desse modo, para qualquer  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $r \neq \pm 1$ , verificamos que

$$C^r = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \bar{x} \end{pmatrix},$$

com  $x = a + bi$ , onde  $a, b \in \mathbb{Q}(\theta)$ , sendo  $C$  como em (4.4) e  $\theta$  como na Proposição 4.3.1.

Notamos que, devido às manipulações aritméticas que envolvem as expressões de  $\cos \frac{k\pi}{3 \cdot 2^n}$  e  $\sin \frac{k\pi}{3 \cdot 2^n}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , usadas para determinar as matrizes em (4.7),  $\sqrt{2}$  aparece nas entradas de alguma dessas matrizes. Mas, como podemos escrever

$$\sqrt{2} = (-1 + \sqrt{3}) \sqrt{2 + \sqrt{3}} \in \mathbb{Q}(\theta),$$

então, usando a Proposição 4.3.1 e as igualdades em (4.7), obtemos as seguintes expressões para os geradores de  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$ ,  $g = 3 \cdot 2^n$ ,

$$G_l = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_l + y_l \sqrt{\theta} & z_l + w_l \sqrt{\theta} \\ -z_l + w_l \sqrt{\theta} & x_l - y_l \sqrt{\theta} \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, 3 \cdot 2^{n+1}, \quad (4.16)$$

onde  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta] \subseteq \mathfrak{D}_K$ ,  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  e  $\theta$  como na Proposição 4.3.1.

**Teorema 4.3.2** *Para cada  $g = 3 \cdot 2^n$ , onde  $n$  é um número natural qualquer, os elementos do grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$  são identificados, via isomorfismo<sup>10</sup>, com elementos do grupo dos invertíveis  $\mathcal{O}^1$  da ordem  $\mathcal{O} = (\theta, -1)_R$ , onde*

$$R = \left\{ \frac{\alpha}{2^m} : \alpha \in \mathfrak{D}_K \quad e \quad m \in \mathbb{N} \right\}, \quad (4.17)$$

$K = \mathbb{Q}(\theta)$ , e  $\theta$  como na Proposição 4.3.1. Conseqüentemente,

$$\{1, \sqrt{\theta}, \text{Im}, \sqrt{\theta} \text{Im}\}$$

é uma  $R$ -base para o reticulado  $\mathcal{O}$ , sendo  $\text{Im}$  a unidade imaginária.

**Demonstração:** A demonstração é análoga à do Teorema 4.2.5. De fato, sejam as matrizes  $M_0, M_1, M_2$  e  $M_3$  em  $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{\theta}))$ , dadas por

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\theta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\theta} \\ \sqrt{\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição 4.2.3 e por (4.16), cada elemento  $T \in \Gamma$  pode ser escrito na forma

$$T = \frac{1}{2^s} \begin{pmatrix} x_l + y_l \sqrt{\theta} & z_l + w_l \sqrt{\theta} \\ -z_l + w_l \sqrt{\theta} & x_l - y_l \sqrt{\theta} \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

onde  $s \in \mathbb{N}$  e  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta]$ . Portanto,  $T$  é identificado através do isomorfismo<sup>11</sup>  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \varphi(\mathcal{A})$ , com o seguinte elemento  $x \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (\theta, -1)_R$ ,

$$x = \frac{x_l}{2^s} + \frac{y_l}{2^s} i + \frac{z_l}{2^s} j + \frac{w_l}{2^s} k,$$

onde  $i^2 = \theta$ ,  $j^2 = -1$ ,  $k = ij$  e  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta]$ , ou seja,  $\varphi(x) = T$ . Assim, cada elemento do grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$  é identificado, via o isomorfismo  $\varphi$ , com um elemento  $x \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (\theta, -1)_R$  e  $\{1, \sqrt{\theta}, \text{Im}, \sqrt{\theta} \text{Im}\}$  é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ . ■

**Teorema 4.3.3** *Para cada  $g = 3 \cdot 2^n$ , onde  $n$  é um número natural qualquer, o grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$ , associado ao polígono hiperbólico regular  $P_{4g}$ , é derivado de uma álgebra de divisão dos quatérnios  $\mathcal{A} = (\theta, -1)_K$  sobre o corpo de números  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 2^{n+1}$  e  $\theta$  como na Proposição 4.3.1.*

<sup>10</sup>Esse isomorfismo, digamos  $\varphi$ , é tal que  $\Gamma_{4g} \simeq \Gamma < \Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O}) = \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\{\pm I_2\}}$ , onde  $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$ .

<sup>11</sup>Definido de forma análoga como em (4.12), onde  $\varphi(\mathcal{A}) \subset M(2, K(\sqrt{\theta}))$  com  $\mathcal{A} = (\theta, -1)_K$  e  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ .

**Demonstração:** A demonstração é totalmente análoga a do Teorema 4.2.6, apenas com algumas modificações. Seja  $T \in \Gamma$  como em (4.18). Logo,  $tr(T) = \frac{2x_1}{2^s} \in R$ , sendo  $R$  como em (4.17), ou seja,  $tr(\Gamma) \subset R$ , e como  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ , segue a primeira condição do Teorema 3.3.6. Por outro lado, seja  $\varphi_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$  um homomorfismo dado por  $\varphi_2(\theta) = -\theta$ . Portanto,  $\psi_2 : L \rightarrow \psi_2(L)$  definido por  $\psi_2(\sqrt{\theta}) = i\sqrt{\theta}$ , é um isomorfismo, onde  $L = K(\sqrt{\theta})$ . Consideremos, agora, a álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A}[\Gamma]$  sobre  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  dada por, [22],

$$\mathcal{A}[\Gamma] = \left\{ \sum_{i=1}^d a_i T_i : a_i \in K, T_i \in \Gamma \right\}.$$

Como as expressões em (4.16) assemelham-se às expressões em (4.9), segue que

$$\mathcal{A}[\Gamma] = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b'_1 & a'_1 \end{pmatrix} : a_1, b_1 \in L \right\}.$$

Portanto,

$$\mathcal{A}^{\psi_2} = \Psi(\mathcal{A}[\Gamma]) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \psi_2(L) \right\},$$

sendo

$$\Psi : \mathcal{A}[\Gamma] \rightarrow M(2, \mathbb{C}),$$

um mergulho dado por

$$\Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_2(a_1) & \psi_2(b_1) \\ -\psi_2(b'_1) & \psi_2(a'_1) \end{pmatrix}.$$

Conseqüentemente,  $\mathcal{A}^{\varphi_2} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ . Consideremos, agora,  $T$  um elemento qualquer de  $\Gamma$  e  $tr(T) = a + a'$ . Então, pelo Exemplo 3.1.3, temos que

$$\psi_2(a) + \psi_2(a') \in [-2, 2].$$

Mas  $a + a' \in K = \mathbb{Q}(\theta)$ . Assim,

$$\psi_2(a + a') = \psi_2(a) + \psi_2(a') = \varphi_2(a + a'),$$

isto é,

$$\varphi_2(a + a') \in [-2, 2].$$

Portanto,  $\varphi_2(tr(\Gamma))$  é limitado em  $\mathbb{C}$ . Logo, a segunda condição do Teorema 3.3.6 também é satisfeita. Concluimos que  $\Gamma$  é derivado de uma álgebra dos quatérnios<sup>12</sup>  $\mathcal{A}$  sobre  $K = \mathbb{Q}(tr(T) : T \in \Gamma) = \mathbb{Q}(\theta)$ , sendo

$$\theta = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

<sup>12</sup>A álgebra é  $\mathcal{A} = (\theta, -1)_{\mathbb{Q}(\theta)}$ .

e  $[K : \mathbb{Q}] = 2^{n+1}$ . ■

Concluimos, também do Teorema 4.3.3, que para o caso  $g = 3 \cdot 2^n$ , continua valendo a recíproca do Teorema 4.2.7 para os grupos  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$ .

Encerraremos esta seção com o Exemplo 4.3.4, onde apresentamos os geradores do grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma \simeq \Gamma_{24}$ ,  $g = 6$ .

**Exemplo 4.3.4** *Sejam  $g = 6$ ,*

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{24}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{24}} \end{pmatrix} \quad e \quad A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

com  $\arg(a) = \frac{5\pi}{12}$ ,  $|a| = \tan \frac{11\pi}{24}$ ,  $|b| = \left( (\tan \frac{11\pi}{24})^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$  e  $\arg(b) = \frac{-13\pi}{24}$ . Portanto,

$$C = \begin{pmatrix} x + yi & 0 \\ 0 & x - yi \end{pmatrix}$$

com

$$2x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \quad 2y = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

Por outro lado,

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + iz_1}{2} & \frac{-(w_1 + iy_1) \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-(w_1 - iy_1) \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1 - iz_1}{2} \end{pmatrix}.$$

Desse modo, usando as igualdades em (4.7) e o fato que  $G_l = f^{-1}A_l f$ ,  $l = 1, \dots, 12$ , obtemos os seguintes geradores do grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma \simeq \Gamma_{24}$ :

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - y_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1 - w_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-z_1 - w_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1 + y_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j - \frac{w_1}{2}k\right),$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - y_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1 + w_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-z_1 + w_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1 + y_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j + \frac{w_1}{2}k\right),$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - k_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1 + l_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-z_1 + l_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1 + k_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} - \frac{k_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j + \frac{l_1}{2}k\right),$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - t_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1 + \lambda_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-z_1 + \lambda_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1 + t_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} - \frac{t_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j + \frac{\lambda_1}{2}k\right),$$

$$G_5 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + t_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1 + \lambda_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-z_1 + \lambda_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1 - t_1 \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} + \frac{t_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j + \frac{\lambda_1}{2}k\right),$$

$$\begin{aligned}
G_6 &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+k_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1+l_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \frac{z_1+l_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1-k_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} + \frac{k_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j + \frac{l_1}{2}k\right), \\
G_7 &= \begin{pmatrix} \frac{x_1-y_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1-w_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-z_1-w_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1+y_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j - \frac{w_1}{2}k\right), \\
G_8 &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+y_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1-w_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-z_1-w_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1-y_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j - \frac{w_1}{2}k\right), \\
G_9 &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+k_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1-l_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-z_1-l_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1-k_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} + \frac{k_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j - \frac{l_1}{2}k\right), \\
G_{10} &= \begin{pmatrix} \frac{x_1+t_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1-\lambda_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-z_1-\lambda_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1-t_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} + \frac{t_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j - \frac{\lambda_1}{2}k\right), \\
G_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{x_1-t_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1-\lambda_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-z_1-\lambda_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1+t_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} - \frac{t_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j - \frac{\lambda_1}{2}k\right), \\
G_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{x_1-k_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{z_1-l_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \frac{-z_1-l_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} & \frac{x_1+k_1}{2} \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}}{2} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{2} - \frac{k_1}{2}i + \frac{z_1}{2}j - \frac{l_1}{2}k\right),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}, & y_1 &= 2 + 2\sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \\
z_1 &= 4 + 2\sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}}, & k_1 &= 1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \\
t_1 &= 1 + \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}}, & \lambda_1 &= 3 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}}, \\
l_1 &= 3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}, & w_1 &= \sqrt{2} = (-1 + \sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Assim, a ordem associada ao grupo fuchsiano  $\Gamma_{24}$  é

$$\mathcal{O} = \left( \sqrt{2 + \sqrt{3}}, -1 \right)_R,$$

sendo  $R = \left\{ \frac{\alpha}{2^m} : \alpha \in \mathbb{Z}[\theta] \text{ e } m \in \mathbb{N} \right\}$ ,  $\theta = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$  e

$$\left\{ 1, \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}}, \text{Im}, \sqrt[4]{2 + \sqrt{3}} \text{Im} \right\}$$

é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ , conforme o Teorema 4.3.2.

#### 4.4 Caso $g = 5 \cdot 2^n$

Finalmente, para o caso  $g = 5 \cdot 2^n$ , temos:

**Proposição 4.4.1** *Se  $g = 5 \cdot 2^n$ , sendo  $n$  um número natural qualquer, então*

$$2 \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g} \cos \frac{(g-1)\pi}{2g} = 2 + \theta,$$

onde  $\theta = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}}}$  contém  $n + 2$  radicais.

**Demonstração:** Como  $g = 5 \cdot 2^n$ , temos que

$$2 \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g} \cos \frac{(g-1)\pi}{2g} = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{5 \cdot 2^{n+1}}.$$

Mas para  $n = 1$ , ou seja, para  $g = 10$ ,

$$2 + 2 \cos \frac{\pi}{20} = 2 + \sqrt{2 + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}.$$

Supondo, como hipótese de indução, que o resultado seja válido para  $n$ , e usando (4.8), temos que

$$2 \cos \frac{\pi}{5 \cdot 2^{n+2}} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{5 \cdot 2^{n+1}}}. \quad (4.19)$$

Disso segue que

$$2 \cos \frac{\pi}{5 \cdot 2^{n+2}} = \sqrt{2 + \theta},$$

contém  $n + 3$  radicais. ■

Portanto, usando (4.19), obtemos, para qualquer  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $r \neq \pm 1$ ,

$$C^r = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \bar{x} \end{pmatrix},$$

com  $x = a + bi$ , onde  $a, b \in \mathbb{Q}(\theta)$ , sendo  $C$  como em (4.4) e  $\theta$  como na Proposição 4.4.1. Além disso, devido às expressões que envolvem  $\cos \frac{k\pi}{5 \cdot 2^n}$  e  $\sin \frac{k\pi}{5 \cdot 2^n}$ , podemos, para  $g = 5 \cdot 2^n$ , escrever os geradores  $G_l$  de  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$  na seguinte forma

$$G_l = \frac{1}{2^s} \begin{pmatrix} x_l + y_l \sqrt{\theta} & z_l + w_l \sqrt{\theta} \\ -z_l + w_l \sqrt{\theta} & x_l - y_l \sqrt{\theta} \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, 5 \cdot 2^{n+1}, \quad (4.20)$$

onde  $s \in \mathbb{N}$ ,  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta] \subseteq \mathfrak{D}_K$ ,  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  e  $\theta$  como na Proposição (4.4.1).

Consideremos os reticulados associados aos grupos  $\Gamma_{4g}$ ,  $g = 5 \cdot 2^n$ .

**Teorema 4.4.2** *Para cada  $g = 5 \cdot 2^n$ , onde  $n$  é um número natural qualquer, os elementos do grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$  são identificados, via isomorfismo<sup>13</sup>, com elementos do grupo dos invertíveis  $\mathcal{O}^1$  da ordem  $\mathcal{O} = (\theta, -1)_R$ , onde<sup>14</sup>*

$$R = \left\{ \frac{\alpha}{2^m} : \alpha \in \mathfrak{D}_K \quad e \quad m \in \mathbb{N} \right\}, \quad (4.21)$$

$K = \mathbb{Q}(\theta)$ , e  $\theta$  como na Proposição 4.4.1. Conseqüentemente,

$$\{1, \sqrt{\theta}, \text{Im}, \sqrt{\theta} \text{Im}\}$$

é uma  $R$ -base para o reticulado  $\mathcal{O}$ , sendo  $\text{Im}$  a unidade imaginária.

**Demonstração:** Consideremos as seguintes matrizes  $M_0, M_1, M_2$  e  $M_3$  em  $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{\theta}))$ , dadas por

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\theta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\theta} \\ \sqrt{\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição 4.2.3 e por (4.20), cada elemento  $T \in \Gamma$  pode ser escrito na forma

$$T = \frac{1}{2^s} \begin{pmatrix} x_l + y_l \sqrt{\theta} & z_l + w_l \sqrt{\theta} \\ -z_l + w_l \sqrt{\theta} & x_l - y_l \sqrt{\theta} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

onde  $s \in \mathbb{N}$  e  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta]$ . Portanto,  $T$  é identificado através do isomorfismo<sup>15</sup>  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \varphi(\mathcal{A})$  com o seguinte elemento  $x \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (\theta, -1)_R$ ,

$$x = \frac{x_l}{2^s} + \frac{y_l}{2^s} i + \frac{z_l}{2^s} j + \frac{w_l}{2^s} k,$$

onde  $i^2 = \theta$ ,  $j^2 = -1$ ,  $k = ij$  e  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta]$ . Portanto, cada elemento do grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$  é identificado, via o isomorfismo  $\varphi$ , com um elemento  $x \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (\theta, -1)_R$  e  $\{1, \sqrt{\theta}, \text{Im}, \sqrt{\theta} \text{Im}\}$  é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ . ■

**Teorema 4.4.3** *Para cada  $g = 5 \cdot 2^n$ , onde  $n$  é um número natural qualquer, o grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$ , associado ao polígono hiperbólico regular  $P_{4g}$ , é derivado de uma álgebra de divisão dos quatérnios  $\mathcal{A} = (\theta, -1)_K$  sobre o corpo de números  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 2^{n+2}$  e  $\theta$  como na Proposição 4.4.1.*

<sup>13</sup>Esse isomorfismo, digamos  $\varphi$ , é tal que  $\Gamma_{4g} \simeq \Gamma < \Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O}) = \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\{\pm I_2\}}$ , onde  $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$ .

<sup>14</sup>Observamos que  $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} \in \mathfrak{D}_K$  e, portanto,  $\theta \in \mathfrak{D}_K$ .

<sup>15</sup>Definido de forma análoga como em (4.12), onde  $\varphi(\mathcal{A}) \subset M(2, K(\sqrt{\theta}))$  com  $\mathcal{A} = (\theta, -1)_K$  e  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ .

**Demonstração:** De modo análogo à demonstração do Teorema 4.2.6, usando (4.22), concluímos que  $tr(\Gamma) \subset R$ , sendo  $R$  como em (4.21). Mas para o caso  $g = 5 \cdot 2^n$ ,  $K = \mathbb{Q}(tr(T) : T \in \Gamma) = \mathbb{Q}(\theta)$ . Portanto, a primeira condição do Teorema 3.3.6 é satisfeita.

Seja  $\varphi_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$  um homomorfismo dado por  $\varphi_2(\theta) = -\theta$ . Desse modo,  $\psi_2 : L \rightarrow \psi_2(L)$  definido por  $\psi_2(\sqrt{\theta}) = i\sqrt{\theta}$ , é um isomorfismo, onde  $L = K(\sqrt{\theta})$ . Além disso,

$$\mathcal{A}^{\psi_2} = \Psi(\mathcal{A}[\Gamma]) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \psi_2(L) \right\},$$

sendo

$$\Psi : \mathcal{A}[\Gamma] \rightarrow M(2, \mathbb{C})$$

um mergulho dado por

$$\Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_2(a_1) & \psi_2(b_1) \\ \psi_2(-b'_1) & \psi_2(a'_1) \end{pmatrix}.$$

Conseqüentemente,  $\mathcal{A}^{\varphi_2} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ . Consideremos, agora,  $T$  um elemento qualquer de  $\Gamma$  e  $tr(T) = a + a'$ . Assim, usando o Exemplo 3.1.3 e o fato que  $a + a' \in K = \mathbb{Q}(\theta)$ , temos,

$$\psi_2(a) + \psi_2(a') = \varphi_2(a + a') \in [-2, 2].$$

Portanto,  $\varphi_2(tr(\Gamma))$  é limitado em  $\mathbb{C}$ . Disso segue que a segunda condição do Teorema 3.3.6 também é satisfeita. Concluímos que  $\Gamma$  é derivado de uma álgebra dos quatérnios<sup>16</sup>  $\mathcal{A}$  sobre  $K = \mathbb{Q}(tr(T) : T \in \Gamma) = \mathbb{Q}(\theta)$  e  $[K : \mathbb{Q}] = 2^{n+2}$ . ■

Concluímos que, para  $g = 5 \cdot 2^n$ , a recíproca do Teorema 4.2.7 para os grupos  $\Gamma \simeq \Gamma_{4g}$  é também válida. Observamos, também, que para os casos de  $g = m \cdot 2^n$ ,  $m = 1, 3$  e  $5$ , os grupos  $\Gamma_{4g}$  são derivados de álgebras de divisão dos quatérnios da forma  $\mathcal{A} = (\theta, -1)_{\mathbb{Q}(\theta)}$ , ou seja, são álgebras similares<sup>17</sup> com  $a = \theta$  e  $b = -1$ , onde o valor de  $\theta$  está de acordo com o valor de  $m$  (Teoremas 4.2.6, 4.3.3 e 4.4.3). Este fato será comum para as álgebras consideradas neste trabalho. Como veremos na Seção 5.7, isso de certo modo facilita o processo de rotulagem dos sinais das constelações como em (5.55).

Para encerrar este capítulo, apresentaremos no Exemplo 4.4.4 os geradores do grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma \simeq \Gamma_{20}$ ,  $g = 5$ .

**Exemplo 4.4.4** *Sejam  $g = 5$ ,*

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{20}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{20}} \end{pmatrix} \quad e \quad A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

<sup>16</sup>A álgebra é  $\mathcal{A} = (\theta, -1)_{\mathbb{Q}(\theta)}$ .

<sup>17</sup>Similares, no sentido do valor de  $b$  ser sempre  $-1$ , onde estamos usando a mesma notação da Seção 3.1.

com  $\arg(a) = \frac{4\pi}{10}$ ,  $|a| = \tan \frac{9\pi}{20}$ ,  $|b| = \left( (\tan \frac{9\pi}{20})^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$  e  $\arg(b) = \frac{-11\pi}{20}$ . Portanto,

$$C = \begin{pmatrix} x + yi & 0 \\ 0 & x - yi \end{pmatrix}$$

com,

$$2x = \sqrt{2 + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}, \quad 2y = \sqrt{2 - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}.$$

Logo, considerando as igualdades em (4.7) e usando o fato que  $G_l = f^{-1}A_l f$ ,  $l = 1, \dots, 10$ , obtemos os seguintes geradores do grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma \simeq \Gamma_{20}$ :

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - y_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{z_1 - 4 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \\ \frac{-z_1 - 4 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{x_1 + y_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} - \frac{y_1}{8}i + \frac{z_1}{8}j - \frac{1}{2}k\right),$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - w_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{z_1 + t_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \\ \frac{-z_1 + t_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{x_1 + w_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} - \frac{w_1}{8}i + \frac{z_1}{8}j + \frac{t_1}{8}k\right),$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + l_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{z_1 + l_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \\ \frac{-z_1 + l_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{x_1 - l_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} + \frac{l_1}{8}i + \frac{z_1}{8}j + \frac{l_1}{8}k\right),$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + t_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{z_1 - w_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \\ \frac{-z_1 - w_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{x_1 - t_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} + \frac{t_1}{8}i + \frac{z_1}{8}j - \frac{w_1}{8}k\right),$$

$$G_5 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - 4 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{z_1 - y_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \\ \frac{-z_1 - y_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{x_1 + 4 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} - \frac{1}{2}i + \frac{z_1}{8}j - \frac{y_1}{8}k\right),$$

$$G_6 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - y_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{z_1 + 4 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \\ \frac{-z_1 + 4 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{x_1 + y_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} - \frac{y_1}{8}i + \frac{z_1}{8}j + \frac{1}{2}k\right),$$

$$G_7 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - 4 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{z_1 + y_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \\ \frac{-z_1 + y_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{x_1 + 4 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} - \frac{1}{2}i + \frac{z_1}{8}j + \frac{y_1}{8}k\right),$$

$$G_8 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + t_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{z_1 + w_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \\ \frac{-z_1 + w_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{x_1 - t_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} + \frac{t_1}{8}i + \frac{z_1}{8}j + \frac{w_1}{8}k\right),$$

$$G_9 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + l_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{z_1 - l_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \\ \frac{-z_1 - l_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{x_1 - l_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} + \frac{l_1}{8}i + \frac{z_1}{8}j - \frac{l_1}{8}k\right),$$

$$G_{10} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - w_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{z_1 - t_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \\ \frac{-z_1 - t_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} & \frac{x_1 + w_1 \sqrt[4]{10+2\sqrt{5}}}{8} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} - \frac{w_1}{8}i + \frac{z_1}{8}j - \frac{t_1}{8}k\right),$$

sendo

$$x_1 = 8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad y_1 = 4 + 4\sqrt{5} + (1 + \sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$z_1 = 10 + 6\sqrt{5} + (2 + 2\sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad w_1 = 4 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$t_1 = 6 + 2\sqrt{5} + (1 + \sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad l_1 = 6 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Portanto, a ordem associada ao grupo fuchsiano  $\Gamma_{20}$  é

$$\mathcal{O} = \left( \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, -1 \right)_R,$$

onde  $R = \left\{ \frac{\alpha}{2^m} : \alpha \in \mathbb{Z}[\theta] \text{ e } m \in \mathbb{N} \right\}$ ,  $\theta = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$  e

$$\left\{ 1, \sqrt[4]{10 + 2\sqrt{5}}, \text{Im}, \sqrt[4]{10 + 2\sqrt{5}} \text{Im} \right\}$$

é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ , conforme o Teorema 4.4.2.

## Capítulo 5

# Identificação dos Grupos $\Gamma_p$ em Ordens dos Quatérnios Provenientes de Outras Tesselações

Em [5], as tesselações  $\{4g, 4g\}$  foram usadas com o objetivo de obter constelações de sinais geometricamente uniformes relacionadas com grupos fuchsianos aritméticos, para os casos particulares de  $g = 2, 3$ . No Capítulo 4, apresentamos os casos em que  $g = m \cdot 2^n$ ,  $m = 1, 3, 5$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Nosso objetivo neste capítulo é considerar tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$ ,  $p \neq q$ , mais densas do que as auto-duais  $\{4g, 4g\}$  e, portanto, reticulados mais densos, de modo a construir constelações de sinais geometricamente uniformes relacionadas com grupos fuchsianos aritméticos. O problema que surge em decorrência da mudança da tesselação  $\{4g, 4g\}$  para uma tesselação  $\{p, q\}$ , é a dificuldade em determinar valores de  $p$  para os quais os grupos  $\Gamma_p$  sejam aritméticos. Esse fato é evidenciado, por exemplo, quando buscamos a ordem dos quatérnios relacionada com o grupo  $\Gamma_{18}$  associado com a tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ , para o caso  $g = 2$ . Essa complexidade consiste não apenas em determinar uma forma padrão para os elementos do grupo  $\Gamma_p$  (desde que desejamos construir álgebra de divisão dos quatérnios  $\mathcal{A}$  a partir de  $\Gamma_p$ ), bem como em determinar de modo explícito o corpo de números  $K$  e um anel  $R \subset K$  tais que  $\mathcal{A} = (a, b)_K$  e  $\mathcal{O} = (a, b)_R$ .

Como mencionamos anteriormente, este capítulo tem como objetivo considerar grupos discretos de isometrias obtidos a partir de outras tesselações hiperbólicas. Portanto, é necessário considerar alguns conceitos e resultados, de modo a estabelecer uma conexão entre tesselação hiperbólica e grupo fuchsiano. Por causa disso, dividimos este capítulo na seguinte forma: na Seção 5.1 apresentamos exemplos de emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos regulares  $P_p$  associados às famílias de tesselações hiperbólicas que construímos. Na Seção 5.2 abordamos um método de descrever os geradores de um grupo fuchsiano, usando uma transformação hiperbólica fixa do grupo com uma transformação elíptica de ordem  $p$ ,

que mapeia as arestas de  $P_p$ . A Seção 5.3 segue em decorrência da Seção 5.2, onde estabelecemos os geradores do grupo fuchsiano associado à família de tesselações da forma  $\{10\lambda, 2\lambda\}$ , construída na Seção 5.1. Nela, apresentamos uma generalização de identificação dos grupos  $\Gamma_{10\lambda}$  em ordens dos quatérnios. Nas Seções 5.4 e 5.5, também apresentamos casos de identificação de grupos fuchsianos provenientes das tesselações  $\{30, 3\}$  e  $\{60, 4\}$  em ordens dos quatérnios, casos particulares das tesselações  $\{12g - 6, 3\}$  e  $\{12g - 12, 4\}$ , respectivamente. Na Seção 5.6, fazemos uma análise sucinta sobre as tesselações construídas na Seção 5.1. Encerramos o capítulo com a Seção 5.7, onde exibimos exemplos de rotulamento de sinais de uma  $G_p$ -órbita de 0, onde 0 é o baricentro do polígono  $P_{4g}$ , para  $g = 2, 4$ .

## 5.1 Exemplos de Emparelhamentos

Como observamos na Subseção 2.2.4, uma superfície de Riemann pode ser obtida, por exemplo, considerando o espaço quociente  $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$ , onde o grupo  $\Gamma_p$  age de maneira propriamente descontínua sobre  $\mathbb{D}^2$  (cf. Definição 2.2.15), ou seja, se, e somente se,  $\Gamma_p$  é um grupo fuchsiano (Teorema 2.2.16) e, portanto, um grupo discreto de isometrias. Nesta seção, fornecemos as condições necessárias para que, a partir de uma tesselação hiperbólica  $\{p, q\}$ , possamos obter grupos fuchsianos  $\Gamma_p$ . Lembramos que, de um modo geral, este trabalho tem como objetivo construir, a partir de um grupo fuchsiano aritmético, constelação de sinais geometricamente uniforme, cujos sinais constituem uma  $G_p$ -órbita de 0 (baricentro de um polígono  $P_p$ ). Portanto, a condição do grupo  $\Gamma_p$  ser discreto é imprescindível no processo de construção dessas constelações.

Com este objetivo, apresentamos famílias de tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$ , de modo a estudarmos a aritmeticidade dos grupos fuchsianos  $\Gamma_p$  por elas obtidos. Essas tesselações surgiram de um modo natural através de uma busca (quase que exaustiva) de um conjunto de isometrias que identifiquem as arestas de um polígono hiperbólico regular  $P_p$  (domínio de Dirichlet de  $\Gamma_p$ ), obedecendo, é claro, condições pré-estabelecidas (Teoremas 5.1.3 e 5.1.5). Por isso, a presente seção tem também a finalidade de oferecer um texto sobre emparelhamentos generalizados de arestas de polígonos regulares obtendo, como consequência, superfícies de Riemann compactas e orientáveis, localmente isométricas a  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  ou  $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$ , onde<sup>1</sup>  $\Gamma \simeq \Gamma_p$ .

A busca dos grupos  $\Gamma_p$  e, portanto, das superfícies  $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$ , com o objetivo de construir constelações de sinais hiperbólicas provenientes de tesselações  $\{p, q\}$ , é equivalente, por exemplo, à busca dos ideais primos  $\mathfrak{p}$ , convenientemente escolhidos, no anel de inteiros  $\mathfrak{D}_K$  de um corpo de números  $K$ , de modo a considerar as constelações de sinais euclidianas, provenientes

<sup>1</sup>Neste capítulo (exceto na Seção 5.7),  $\Gamma$  e  $\Gamma_p$  representarão grupos discretos de isometrias agindo em  $\mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{D}^2$ , respectivamente e  $\Gamma \simeq \Gamma_p$ . Além disso,  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  e  $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$  representam topologicamente a mesma superfície ( $g$ -toro).

dos anéis quocientes  $\mathfrak{D}_K/\mathfrak{p}$ , os quais têm estruturas de corpos. Por exemplo, as constelações de sinais construídas em [12]. Portanto, enquanto que na construção de constelações de sinais no plano hiperbólico  $\mathbb{D}^2$  consideramos superfícies de Riemann, para as constelações de sinais no plano euclidiano consideramos quocientes dotados de uma estrutura algébrica, que pode ser tanto a de grupo, (por exemplo, [8] e [31]), como a de anéis (por exemplo, [17] e [35]).

Consideraremos emparelhamentos das arestas de polígonos hiperbólicos regulares  $P_p$  de  $p$  arestas que estão associados às tesselações hiperbólicas regulares do tipo  $\{p, q\}$ ,  $p \neq q$ . Isso significa que os ângulos internos nos respectivos vértices do polígono  $P_p$  é  $\frac{2\pi}{q}$ . Nesta direção, apresentamos emparelhamentos generalizados que estão associados às tesselações:  $\{10\lambda, 2\lambda\}$ ,  $\{12\lambda - 12, 4\}$ ,  $\{12\lambda - 12, 4\lambda - 4\}$ ,  $\{8\lambda + 16, 8\}$ ,  $\{10\lambda, 5\}$ ,  $\{2\lambda^2 + 6\lambda + 4, 2\lambda + 2\}$  e  $\{\lambda^2 + 3\lambda + 2, \lambda + 1\}$ , onde  $\lambda \in \mathbb{N}$ .

Seja  $\Gamma_p$  o grupo discreto obtido a partir do respectivo emparelhamento, conforme os Teoremas 5.1.3 e 5.1.5. Para cada tesselação  $\{p, q\}$ , o polígono  $P_p$  constitui a fronteira do domínio de Dirichlet  $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma_p)$  de  $\Gamma_p$ . Assim, chamamos também  $P_p$  de *região fundamental*.

**Definição 5.1.1** *Seja  $\Gamma_p$  um grupo discreto de isometrias, e sejam  $u$  e  $v$  pontos de  $\mathbb{D}^2$ . Dizemos que  $u$  e  $v$  são congruentes se eles pertencem à mesma  $\Gamma_p$ -órbita.*

Observamos primeiramente que dois pontos em uma região fundamental  $P_p$  são congruentes se, e somente se, eles pertencem à fronteira de  $P_p$ .

Já vimos na Subseção 2.2.4 que a relação de congruência é uma relação de equivalência, cujas  $\Gamma$ -órbitas constituem as classes de equivalência dos pontos de  $\mathbb{H}^2$ .

**Definição 5.1.2** *Consideremos  $v_1, \dots, v_p$  os  $p$  vértices de  $P_p$ . Chamamos de ciclo a classe de equivalência obtida a partir de cada um dos vértices, ou seja, um ciclo é um conjunto da forma*

$$C_i = \{T(v_i) : v_i \text{ e } T(v_i) \text{ são vértices de } P_p\}.$$

Portanto, para quaisquer dois ciclos  $C_i$  e  $C_j$ , temos

1.  $C_i \cap C_j = \emptyset$  ou  $C_i = C_j$ ;
2.  $\bigcup_i C_i = \{v_1, \dots, v_p\}$ .

Se um dos vértices de  $P_p$  é fixo por um elemento elíptico  $T \in \Gamma_p$ , ou seja, se  $T(v_i) = v_i$ , então todos os vértices do ciclo  $C_i$  são fixos por elementos elípticos<sup>2</sup> de  $\Gamma_p$ . Mais precisamente, se  $T(v_i) = v_i$  e  $T$  é elíptico, então  $S(v_i) = v_j$  é ponto fixo do elemento elíptico  $STS^{-1}$ . Portanto, os estabilizadores  $G_{v_i}$  e  $G_{v_j}$  de  $v_i$  e  $v_j$ , respectivamente, são conjugados, isto é,  $G_{v_i} = SG_{v_j}S^{-1}$  e, assim, têm a mesma ordem. Com isso, chegamos ao seguinte resultado:

---

<sup>2</sup>O ciclo  $C_i$  é chamado *ciclo elíptico*.

**Teorema 5.1.3** [13] *Seja  $P_p$  um domínio de Dirichlet de  $\Gamma_p$ . Sejam  $v_1, \dots, v_t$  os vértices de um ciclo e  $\theta_1, \dots, \theta_t$  os ângulos internos nos respectivos vértices. Se  $m$  denota a ordem do estabilizador em  $\Gamma_p$  de um dos vértices do ciclo, então*

$$\theta_1 + \dots + \theta_t = \frac{2\pi}{m}. \quad (5.1)$$

Como uma consequência do Teorema 5.1.3, temos que se um dos vértices  $\{v_1, \dots, v_t\}$  de um ciclo não é ponto fixo, então  $G_{v_i} = \{Id\}$ , de modo que  $m = 1$ ,  $i = 1, \dots, t$ .

**Observação 5.1.4** *Como os grupos fuchsianos  $\Gamma_p$  que iremos considerar não possuem elementos elípticos, então a condição (5.1) resume-se ao caso  $m = 1$  e, portanto,  $\theta_1 + \dots + \theta_t = 2\pi$ .*

O próximo teorema nos mostra como obter um conjunto de geradores de  $\Gamma_p$ .

**Teorema 5.1.5** [13] *Seja  $\mathcal{D}_z(\Gamma_p)$  um domínio de Dirichlet de  $\Gamma_p$ . Considere o conjunto  $\{T_i : T_i \in \Gamma_p\}$  de elementos de  $\Gamma_p$  que identificam arestas distintas de  $\mathcal{D}_z(\Gamma_p)$ . Então  $\{T_i : T_i \in \Gamma_p\}$  é um conjunto de geradores de  $\Gamma_p$ .*

Concluimos dos Teoremas 5.1.3 e 5.1.5, que para obter um grupo discreto de isometrias  $\Gamma_p$ , a partir de uma tesselação hiperbólica  $\{p, q\}$ , é necessário considerar um conjunto de emparelhamentos das arestas de  $P_p$  satisfazendo a condição (5.1)<sup>3</sup>. Conseqüentemente, é possível obter o gênero  $g$  da superfície compacta resultante  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ . O gênero  $g$  é obtido da característica de Euler, isto é, [13],  $\chi(\mathbb{H}^2/\Gamma) = \text{número de vértices} - \text{número de arestas} + \text{número de faces}$ , ou seja,

$$\chi(\mathbb{H}^2/\Gamma) = \frac{p}{q} - \frac{p}{2} + 1 = 2 - 2g, \quad (5.2)$$

para superfícies compactas.

Para proposta do nosso trabalho, é imprescindível que o grupo  $\Gamma_p$  seja discreto, uma vez que vamos considerar constelações de sinais que são  $\Gamma_p$ -órbita de 0, baricentro de  $P_p$ .

Se  $\Gamma_p$  não possui elementos parabólicos, então pelo Teorema 2.2.28, temos que  $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$  é compacta. Assim, a assinatura do grupo  $\Gamma_p$  é  $(g, -)$ , de modo que<sup>4</sup>

$$\mu(P_p) = \mu(\mathbb{D}^2/\Gamma_p) = 4\pi(g - 1), \quad (5.3)$$

pois estaremos supondo que as transformações em  $\Gamma_p - \{Id\}$  são hiperbólicas, uma vez que vamos considerar apenas quocientes compactos  $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$  localmente isométricos a  $\mathbb{D}^2$ .

<sup>3</sup>Se a condição (5.1) não for satisfeita, então não podemos garantir que o grupo  $\Gamma_p$  seja discreto.

<sup>4</sup>A expressão  $\sum_{k=1}^r (1 - \frac{1}{m_k})$  do Teorema 2.2.29 é suprimida pelo fato do grupo  $\Gamma_p$  não possuir elementos elípticos.

Nesta direção, consideremos uma tesselação hiperbólica  $\{p, q\}$ ,  $P_p$  o polígono fundamental regular de  $p$  arestas associado a  $\{p, q\}$  e  $\Gamma_p$  o grupo fuchsiano obtido a partir de  $P_p$ . Sejam  $\lambda \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \geq 2$  e  $p$  como função de  $\lambda$ , digamos  $p = f(\lambda) = a\lambda + b$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a \neq 0$ . Queremos, a partir de  $\Gamma_p$ , obter uma superfície compacta  $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$  de gênero  $g$ . Primeiramente, devemos ter<sup>5</sup>, [2],

$$4g \leq p \leq 12g - 6. \quad (5.4)$$

De modo análogo, considerando a restrição da relação de equivalência definida em (2.10) sobre o conjunto das arestas de  $P_p$ ,

$$\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\},$$

verificamos que cada classe de equivalência de arestas contém exatamente dois elementos. Portanto,  $p$  deve necessariamente ser um número par. Logo, para uma aresta  $\tau_i \in P_p$ , existe uma única aresta  $\tau_j \in P_p$  e um único elemento  $T \in \Gamma_p$  tal que

$$T(\tau_i) = \tau_j \Leftrightarrow T^{-1}(\tau_j) = \tau_i,$$

ou seja, a classe de equivalência de  $\tau_i$  é  $\{\tau_i, \tau_j\}$ . Nesse caso, dizemos que  $T$  relaciona o par  $\{\tau_i, \tau_j\}$  ou que *emparelha as arestas*  $\tau_i$  e  $\tau_j$ . Dizemos também que as arestas  $\tau_i$  e  $\tau_j$  são *congruentes*. Observamos ainda que se  $T$  relaciona o par  $\{\tau_i, \tau_j\}$ , então  $T^{-1}$  também o relaciona. Usaremos os símbolos

$$T(\tau_i) = \tau_j \Leftrightarrow \tau_i \rightarrow \tau_j \Leftrightarrow \{\tau_i, \tau_j\}$$

para indicar que  $\tau_i$  e  $\tau_j$  pertencem à mesma classe de equivalência. E para cada  $p$ ,

$$I = \{1, 2, \dots, p\},$$

representa um conjunto de índices com  $p$  elementos. Por fim, a adição no índice da aresta  $\tau_{k+l}$  é realizada módulo  $p$ .

Por outro lado, como cada vértice de  $P_p$  é recoberto por  $q$  desses polígonos, temos, pelo Teorema 5.1.3, que cada ciclo deve conter exatamente  $q$  vértices<sup>6</sup>, de modo que  $q$  deve dividir  $p$ . Essas são as condições que devemos usar para determinar os emparelhamentos das arestas de  $P_p$ .

Como o processo de construção dos emparelhamentos generalizados que seguem são um tanto quanto construtivos, fornecemos para cada um deles um exemplo a fim de tornar o processo o mais claro possível. Desse modo, repetições de expressões nas próximas subseções são quase que inevitáveis<sup>7</sup>.

<sup>5</sup>O gênero  $g$  é obtido a partir de (5.2).

<sup>6</sup>O número de vértices de um ciclo é chamado *comprimento do ciclo*.

<sup>7</sup>Por exemplo, progressão aritmética, ou simplesmente PA, aparecerá freqüentemente.

### 5.1.1 Tesselação $\{10\lambda, 2\lambda\}$

Sejam  $P_p$  o polígono hiperbólico regular de  $p = 10\lambda$  arestas associado à tesselação<sup>8</sup>  $\{10\lambda, 2\lambda\}$  e  $\lambda \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}$  com  $k > 1$ . Consideremos

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{10\lambda} \quad \text{e} \quad v_1, v_2, \dots, v_{10\lambda},$$

as arestas e os vértices de  $P_p$ , respectivamente, dispostos em ordens cíclicas no sentido anti-horário. Para cada  $\lambda$ , sejam

$$\begin{cases} I_{1,i} = \{(i-1)\lambda + i, \dots, i(\lambda+1) - 2\}, & i = 1, \dots, 4, \\ I_{1,5} = \{4\lambda + 4, \dots, 5\lambda - 1\}, \end{cases} \quad (5.5)$$

e

$$I_1^* = \{\lambda + 1, 2\lambda + 2, 3\lambda + 3, 5\lambda, 6\lambda + 1, 7\lambda + 2, 8\lambda + 3, 10\lambda\}, \quad (5.6)$$

sendo  $I_{1,i}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , PA's com  $\lambda - 1$  termos e mesma razão  $r = 1$ , enquanto que  $I_{1,5}$  é uma PA com  $\lambda - 4$  termos e razão  $r = 1$ . Para o caso  $\lambda = 4$ , vamos considerar  $I_{1,5} = \emptyset$ . Façamos então

$$I_1 = \bigcup_{i=1}^5 I_{1,i}. \quad (5.7)$$

Sob essas condições, consideremos agora os emparelhamentos das arestas de  $P_p$  dados por<sup>9</sup>

$$\tau_i \rightarrow \begin{cases} \tau_{5\lambda+i}, & \text{se } i \in I_1 \\ \tau_{\lambda+i}, & \text{se } i \in I_1^* \end{cases}. \quad (5.8)$$

Como  $\frac{p}{q} = 5$ , temos um total de cinco ciclos, todos de comprimento  $2\lambda$  que, por (5.8), são especificados por

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_2, \dots, v_\lambda, v_{5\lambda+1}, v_{5\lambda+2}, \dots, v_{6\lambda}\}, \\ C_2 &= \{v_{\lambda+1}, v_{2\lambda+2}, \dots, v_{4\lambda+4}, v_{5\lambda}, v_{6\lambda+1}, v_{7\lambda+2}, \dots, v_{9\lambda+4}, \\ &\quad v_{4\lambda+5}, \dots, v_{5\lambda-1}, v_{9\lambda+5}, \dots, v_{10\lambda}\}, \\ C_3 &= \{v_{\lambda+2}, v_{\lambda+3}, \dots, v_{2\lambda+1}, v_{6\lambda+2}, v_{6\lambda+3}, \dots, v_{7\lambda+1}\}, \\ C_4 &= \{v_{2\lambda+3}, v_{2\lambda+4}, \dots, v_{3\lambda+2}, v_{7\lambda+3}, v_{7\lambda+4}, \dots, v_{8\lambda+2}\}, \\ C_5 &= \{v_{3\lambda+4}, v_{3\lambda+5}, \dots, v_{4\lambda+3}, v_{8\lambda+4}, v_{8\lambda+5}, \dots, v_{9\lambda+3}\}. \end{aligned}$$

O ciclo  $C_1$  é dividido em dois blocos. O primeiro bloco consiste dos primeiros  $\lambda$  vértices, começando no vértice  $v_1$  e terminando no vértice  $v_\lambda$ ; o segundo também contém  $\lambda$  vértices,

<sup>8</sup>Isso significa que os ângulos internos nos respectivos vértices do polígono  $P_p$  é  $\frac{2\pi}{q} = \frac{\pi}{\lambda}$ .

<sup>9</sup>Os índices em  $I_1$  indexarão os geradores de  $\Gamma_{10\lambda}$  que identificam as arestas de  $P_{10\lambda}$  diametralmente opostas. Já os índices em  $I_1^*$  indexarão os geradores que identificam as arestas que não são diametralmente opostas.

que começa no vértice  $v_{5\lambda+1}$  e termina no vértice  $v_{6\lambda}$ . Os ciclos  $C_3$ ,  $C_4$  e  $C_5$  são organizados de forma análoga a do ciclo  $C_1$ . Já o ciclo  $C_2$  é dividido em quatro blocos. O primeiro consiste de cinco vértices<sup>10</sup>, que começa em  $v_{\lambda+1}$  e termina em  $v_{5\lambda}$ , sendo que os índices dos quatro primeiros vértices obedecem uma PA de razão  $r = \lambda + 1$ . O segundo contém quatro vértices, cujos índices estão em PA de razão  $r = \lambda + 1$ , que começa em  $v_{6\lambda+1}$  e vai até  $v_{9\lambda+4}$ . O terceiro contém  $\lambda - 5$  vértices, onde os seus índices obedecem uma PA de razão  $r = 1$ , começando em  $v_{4\lambda+5}$  e terminando em  $v_{5\lambda-1}$ . Finalmente, o quarto bloco contém  $\lambda - 4$  vértices, onde seus índices formam uma PA de razão  $r = 1$ , sendo  $v_{9\lambda+5}$  e  $v_{10\lambda}$  o primeiro e último vértices, respectivamente.

Assim, pelo Teorema 5.1.3,  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é uma superfície Riemanniana compacta e orientável, cujo gênero, por (5.2), é  $g = \frac{5\lambda-4}{2}$ . Observamos que

$$4g \leq p \leq 12g - 6 \Leftrightarrow 10\lambda - 8 \leq 10\lambda \leq 30\lambda - 30, \quad \lambda \geq 2,$$

de acordo com (5.4).

**Exemplo 5.1.6** Para  $\lambda = 6$ , ou seja,  $g = 13$ , temos a tesselação  $\{60, 12\}$ . Logo,

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, & I_{1,2} &= \{8, 9, 10, 11, 12\}, \\ I_{1,3} &= \{15, 16, 17, 18, 19\}, & I_{1,4} &= \{22, 23, 24, 25, 26\}, \\ I_{1,5} &= \{28, 29\} \end{aligned}$$

e

$$I_1^* = \{7, 14, 21, 30, 37, 44, 51, 60\}.$$

Assim, se  $i \in I_1 = \bigcup_{i=1}^5 I_{1,i}$ , então os pares de arestas são

$$\begin{aligned} &\{\tau_1, \tau_{31}\}, \{\tau_2, \tau_{32}\}, \{\tau_3, \tau_{33}\}, \{\tau_4, \tau_{34}\}, \{\tau_5, \tau_{35}\}, \\ &\{\tau_8, \tau_{38}\}, \{\tau_9, \tau_{39}\}, \{\tau_{10}, \tau_{40}\}, \{\tau_{11}, \tau_{41}\}, \{\tau_{12}, \tau_{42}\}, \\ &\{\tau_{15}, \tau_{45}\}, \{\tau_{16}, \tau_{46}\}, \{\tau_{17}, \tau_{47}\}, \{\tau_{18}, \tau_{48}\}, \{\tau_{19}, \tau_{49}\}, \\ &\{\tau_{22}, \tau_{52}\}, \{\tau_{23}, \tau_{53}\}, \{\tau_{24}, \tau_{54}\}, \{\tau_{25}, \tau_{55}\}, \{\tau_{26}, \tau_{56}\}, \\ &\{\tau_{28}, \tau_{58}\}, \{\tau_{29}, \tau_{59}\}. \end{aligned}$$

Se  $i \in I_1^*$ , então

$$\begin{aligned} &\{\tau_6, \tau_{60}\}, \{\tau_7, \tau_{13}\}, \{\tau_{14}, \tau_{20}\}, \{\tau_{21}, \tau_{27}\}, \\ &\{\tau_{30}, \tau_{36}\}, \{\tau_{37}, \tau_{43}\}, \{\tau_{44}, \tau_{50}\}, \{\tau_{51}, \tau_{57}\}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos os ciclos

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_{31}, v_{32}, v_{33}, v_{34}, v_{35}, v_{36}\}, \\ C_2 &= \{v_7, v_{14}, v_{21}, v_{28}, v_{29}, v_{30}, v_{37}, v_{44}, v_{51}, v_{58}, v_{59}, v_{60}\}, \\ C_3 &= \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{30}, v_{39}, v_{40}, v_{41}, v_{42}, v_{43}\}, \\ C_4 &= \{v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}, v_{45}, v_{46}, v_{47}, v_{48}, v_{49}, v_{50}\}, \\ C_5 &= \{v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}, v_{26}, v_{27}, v_{52}, v_{53}, v_{54}, v_{55}, v_{56}, v_{57}\}. \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Para  $\lambda = 4$ , ordenamos  $C_2$  na forma  $C_2 = \{v_5, v_{10}, v_{15}, v_{20}, v_{25}, v_{30}, v_{35}, v_{40}\}$ .

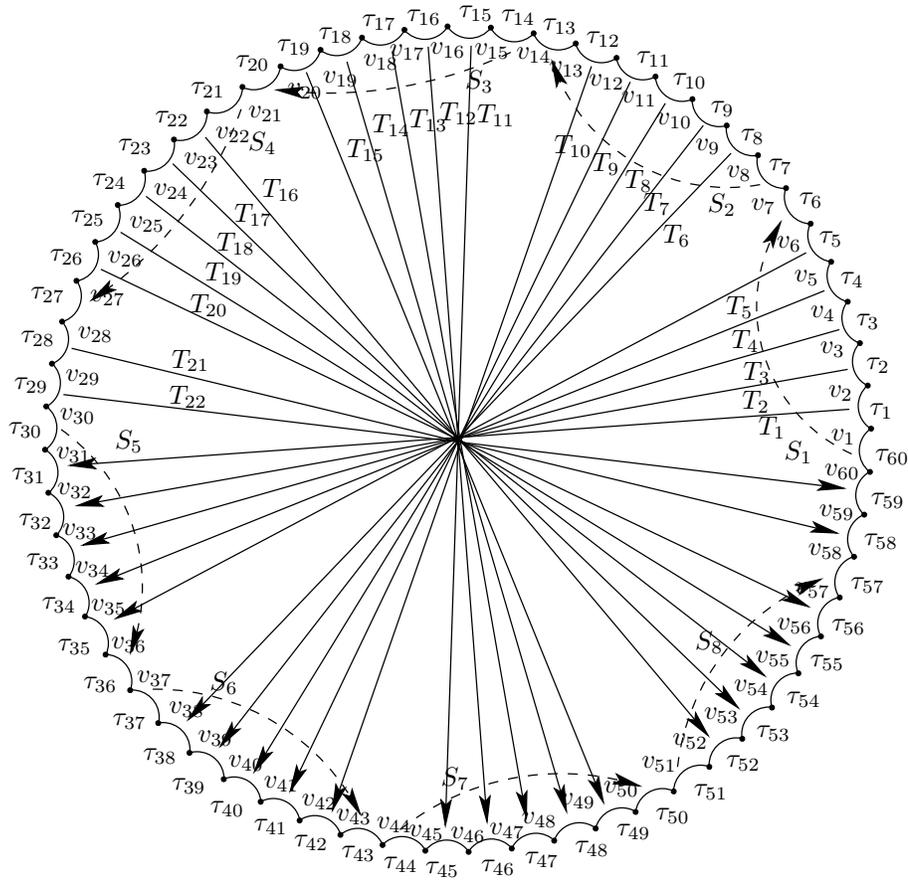


Figura 5.1: Tesselação  $\{10\lambda, 2\lambda\}$ ,  $\lambda = 6$

Na Figura 5.1, temos o polígono  $P_{60}$ , associado à tesselação  $\{60, 12\}$ , com os respectivos emparelhamentos de suas arestas. Obtemos de  $P_{60}$  a superfície  $\mathbb{D}^2/\Gamma_{60}$  de gênero  $g = 13$ , localmente isométrica a  $\mathbb{D}^2$ .

### 5.1.2 Tesselação $\{12\lambda - 12, 4\}$

O emparelhamento a seguir é válido para todo  $\lambda$  tal que  $\lambda \in \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ . De modo análogo ao caso anterior, seja  $P_p$  o polígono hiperbólico regular com  $p = 12\lambda - 12$  arestas associado à tesselação<sup>11</sup>  $\{12\lambda - 12, 4\}$ . Sejam

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{12\lambda-12} \quad \text{e} \quad v_1, v_2, \dots, v_{12\lambda-12},$$

as arestas e os vértices de  $P_p$  dispostos em ordens cíclicas no sentido anti-horário, respectivamente. Consideremos também

$$I_1 = \{2, 4, \dots, 6\lambda - 6\}$$

<sup>11</sup>Isso significa que os ângulos internos nos respectivos vértices do polígono  $P_p$  é  $\frac{2\pi}{q} = \frac{\pi}{2}$ .

e

$$I_2 = \{1, 3, \dots, 3\lambda - 3, 6\lambda - 3, \dots, 9\lambda - 9\},$$

onde  $I_1$  é uma PA com  $n = 3\lambda - 3$  termos e razão  $r = 2$ , e o conjunto  $I_2$  é constituído de duas PA's<sup>12</sup> de mesma razão  $r = 2$  com  $n = \frac{3\lambda-2}{2}$  e  $n = \frac{3\lambda-4}{2}$  termos, respectivamente. Consideremos então os seguintes emparelhamentos

$$\tau_i \rightarrow \begin{cases} \tau_{12\lambda-12-(i-2)}, & \text{se } i \in I_1 \\ \tau_{6\lambda-4-i}, & \text{se } i \in I_2 \end{cases}. \quad (5.9)$$

Neste caso, temos um total de  $3\lambda - 3$  ciclos, todos de comprimento  $q = 4$ . Usando (5.9) obtemos<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_2, v_{6\lambda-5}, v_{6\lambda-4}\}, \\ C_2 &= \{v_3, v_{6\lambda-6}, v_{6\lambda-3}, v_{12\lambda-12}\}, \\ C_3 &= \{v_4, v_{6\lambda-7}, v_{6\lambda-2}, v_{12\lambda-13}\}, \\ &\vdots \\ C_{3\lambda-4} &= \{v_{3\lambda-3}, v_{3\lambda}, v_{9\lambda-9}, v_{9\lambda-6}\}, \\ C_{3\lambda-3} &= \{v_{3\lambda-2}, v_{3\lambda-1}, v_{9\lambda-8}, v_{9\lambda-7}\}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 5.1.3, segue que  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é uma superfície Riemanniana compacta e orientável de gênero  $g = \frac{3\lambda-2}{2}$ . Temos também,

$$4g \leq p \leq 12g - 6 \Leftrightarrow 6\lambda - 4 \leq 12\lambda - 12 \leq 18\lambda - 18, \quad \lambda \geq 2,$$

conforme (5.4).

**Exemplo 5.1.7** Para  $\lambda = 4$ , ou seja,  $g = 5$ , obtemos a tesselação  $\{36, 4\}$ . Logo, se  $i \in I_2$ ,

$$\begin{aligned} &\{\tau_1, \tau_{19}\}, \{\tau_3, \tau_{17}\}, \{\tau_5, \tau_{15}\}, \{\tau_7, \tau_{13}\}, \{\tau_9, \tau_{11}\}, \\ &\{\tau_{21}, \tau_{35}\}, \{\tau_{23}, \tau_{33}\}, \{\tau_{25}, \tau_{31}\}, \{\tau_{27}, \tau_{29}\}, \end{aligned}$$

e para  $i \in I_1$ ,

$$\begin{aligned} &\{\tau_2, \tau_{36}\}, \{\tau_4, \tau_{34}\}, \{\tau_6, \tau_{32}\}, \{\tau_8, \tau_{30}\}, \{\tau_{10}, \tau_{28}\}, \\ &\{\tau_{12}, \tau_{26}\}, \{\tau_{14}, \tau_{24}\}, \{\tau_{16}, \tau_{22}\}, \{\tau_{18}, \tau_{20}\}. \end{aligned}$$

<sup>12</sup>A primeira PA começa em 1 termina em  $3\lambda - 3$ . Já  $6\lambda - 3$  e  $9\lambda - 9$  são o primeiro e o último termos da segunda PA, respectivamente.

<sup>13</sup>Quaisquer dois ciclos  $C_i$  e  $C_j$ ,  $i, j \neq 1$ ,  $j = i + 1$ , obedecem a seguinte relação: se  $C_i = \{v_{i+1}, v_{l_1}, v_{l_2}, v_{l_3}\}$ , então  $C_j = \{v_{j+1}, v_{l_1-1}, v_{l_2+1}, v_{l_3-1}\}$ .

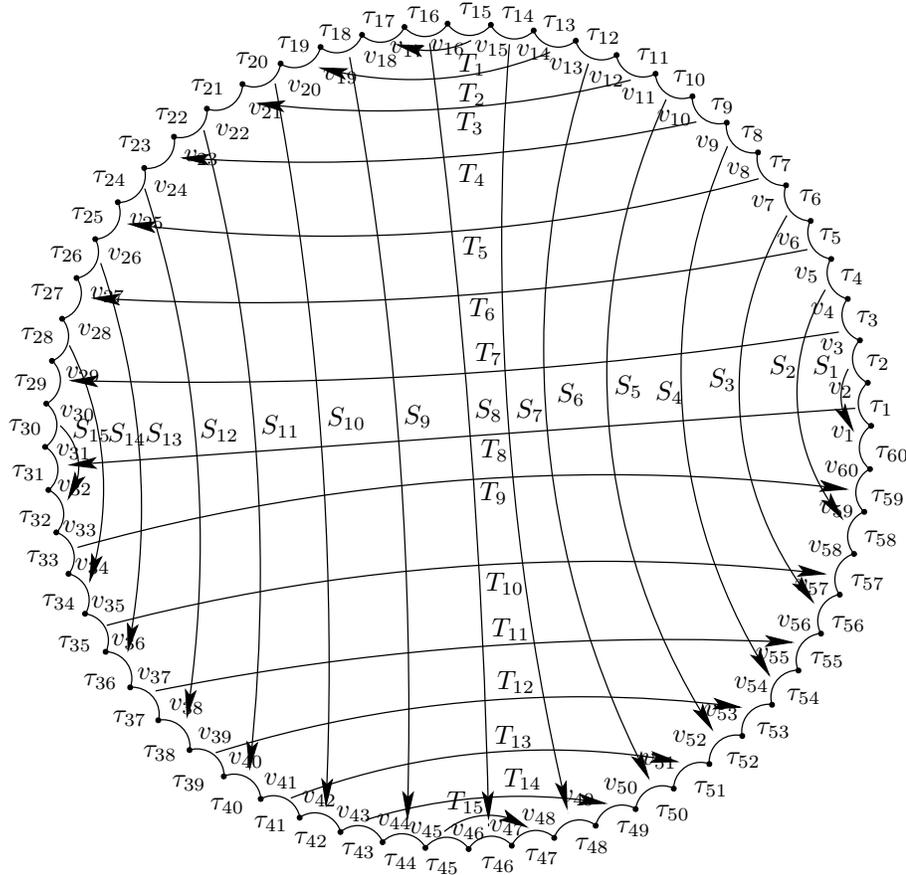


Figura 5.2: Tesselação  $\{12\lambda - 12, 4\}$ ,  $\lambda = 6$

*Disso segue que os ciclos são caracterizados por*

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{v_1, v_2, v_{19}, v_{20}\}, & C_2 &= \{v_3, v_{18}, v_{21}, v_{36}\}, \\
 C_3 &= \{v_4, v_{17}, v_{22}, v_{35}\}, & C_4 &= \{v_5, v_{16}, v_{23}, v_{34}\}, \\
 C_5 &= \{v_6, v_{15}, v_{24}, v_{33}\}, & C_6 &= \{v_7, v_{14}, v_{25}, v_{32}\}, \\
 C_7 &= \{v_8, v_{13}, v_{26}, v_{31}\}, & C_8 &= \{v_9, v_{12}, v_{27}, v_{30}\}, \\
 C_9 &= \{v_{10}, v_{11}, v_{28}, v_{29}\}.
 \end{aligned}$$

Na Figura 5.2, temos o polígono  $P_{60}$ , associado à tesselação  $\{60, 4\}$ , com os respectivos emparelhamentos de suas arestas. Em decorrência desses emparelhamentos, obtemos a superfície  $\mathbb{D}^2/\Gamma_{60}$  de gênero  $g = 8$ , localmente isométrica a  $\mathbb{D}^2$ .

### 5.1.3 Tesselação $\{12\lambda - 12, 4\lambda - 4\}$

Sejam

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{12\lambda-12} \quad \text{e} \quad v_1, v_2, \dots, v_{12\lambda-12},$$

as arestas e os vértices do polígono hiperbólico regular  $P_p$  com  $p = 12\lambda - 12$  arestas associado à tesselação<sup>14</sup>  $\{12\lambda - 12, 4\lambda - 4\}$ , dispostos em ordens cíclicas no sentido anti-horário, respectivamente. O emparelhamento a seguir é válido para todo  $\lambda$  ímpar e  $\lambda > 1$ . Assim, para cada  $\lambda = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sejam<sup>15</sup>

$$I_1 = \bigcup_{i=1}^4 I_{1,i}$$

onde

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \{1, \dots, 2\lambda - 3\}, & I_{1,2} &= \{2\lambda - 1, \dots, 3\lambda - 4\}, \\ I_{1,3} &= \{3\lambda - 2, \dots, 5\lambda - 6\}, & I_{1,4} &= \{5\lambda - 4, \dots, 6\lambda - 7\}, \end{aligned}$$

e

$$I_1^* = \{2\lambda - 2, 3\lambda - 3, 6\lambda - 6, 9\lambda - 9\}.$$

Considerando os emparelhamentos<sup>16</sup>

$$\tau_i \rightarrow \begin{cases} \tau_{6\lambda-6+i}, & \text{se } i \in I_1 \\ \tau_{2\lambda-2+i}, & \text{se } i \in I_1^* \end{cases},$$

obtemos três ciclos, cada um de comprimento  $4\lambda - 4$ , dados por<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_2, \dots, v_{2\lambda-2}, v_{6\lambda-5}, v_{6\lambda-4}, \dots, v_{8\lambda-8}\}, \\ C_2 &= \{v_{2\lambda-1}, v_{2\lambda}, \dots, v_{3\lambda-3}, v_{5\lambda-4}, v_{5\lambda-3}, \dots, v_{6\lambda-6}, \\ &\quad v_{8\lambda-7}, v_{8\lambda-6}, \dots, v_{9\lambda-9}, v_{11\lambda-10}, v_{11\lambda-9}, \dots, v_{12\lambda-12}\}, \\ C_3 &= \{v_{3\lambda-2}, v_{3\lambda-1}, \dots, v_{5\lambda-5}, v_{9\lambda-8}, \dots, v_{11\lambda-11}\}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é uma superfície Riemanniana compacta e orientável de gênero  $g = 3\lambda - 4$ . Temos,

$$4g \leq p \leq 12g - 6 \Leftrightarrow 6\lambda - 4 \leq 12\lambda - 12 \leq 36\lambda - 54, \quad \lambda \geq 3,$$

de acordo com (5.4).

**Exemplo 5.1.8** Para  $\lambda = 5$ , temos  $g = 11$  e, conseqüentemente, a tesselação é  $\{48, 16\}$ . Desse modo,

$$I_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{9, 10, 11\} \cup \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\} \cup \{21, 22, 22\}$$

<sup>14</sup>Isso significa que os ângulos internos nos respectivos vértices do polígono  $P_p$  é  $\frac{2\pi}{q} = \frac{\pi}{2\lambda-2}$ .

<sup>15</sup> $I_1$  é união de quatro PA's, todas de razão  $r = 1$ , sendo  $I_{1,i}$  a  $i$ -ésima PA de  $I_1$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , com  $2\lambda - 3$ ,  $\lambda - 2$ ,  $2\lambda - 3$  e  $\lambda - 2$  termos, respectivamente. Os índices em  $I_{1,i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , indexarão os geradores de  $\Gamma_{12\lambda-12}$  que identificam as arestas de  $P_{12\lambda-12}$  diametralmente opostas, enquanto os índices em  $I_1^*$  as que não são diametralmente opostas.

<sup>16</sup>Os índices em  $I_{1,i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , indexarão os geradores de  $\Gamma_{12\lambda-12}$  que identificam as arestas de  $P_{12\lambda-12}$  diametralmente opostas. Já os índices em  $I_1^*$  indexarão os geradores que identificam as arestas que não são diametralmente opostas.

<sup>17</sup>Esses ciclos são construídos de modo análogo aos ciclos da tesselação  $\{10\lambda, 2\lambda\}$ .

e

$$I_1^* = \{8, 12, 24, 36\}.$$

Se  $i \in I_1$ , temos os pares de arestas

$$\begin{aligned} & \{\tau_1, \tau_{25}\}, \{\tau_2, \tau_{26}\}, \{\tau_3, \tau_{27}\}, \{\tau_4, \tau_{28}\}, \{\tau_5, \tau_{29}\}, \{\tau_6, \tau_{30}\} \\ & \{\tau_7, \tau_{31}\}, \{\tau_9, \tau_{33}\}, \{\tau_{10}, \tau_{34}\}, \{\tau_{11}, \tau_{35}\}, \{\tau_{13}, \tau_{37}\}, \{\tau_{14}, \tau_{38}\}, \\ & \{\tau_{15}, \tau_{39}\}, \{\tau_{16}, \tau_{40}\}, \{\tau_{17}, \tau_{41}\}, \{\tau_{18}, \tau_{42}\}, \{\tau_{19}, \tau_{43}\}, \{\tau_{21}, \tau_{45}\}, \\ & \{\tau_{22}, \tau_{46}\}, \{\tau_{23}, \tau_{47}\}, \end{aligned}$$

e para  $i \in I_1^*$ ,

$$\{\tau_8, \tau_{48}\}, \{\tau_{12}, \tau_{20}\}, \{\tau_{24}, \tau_{32}\}, \{\tau_{36}, \tau_{44}\}.$$

Disso segue que os ciclos são caracterizados por

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{25}, v_{26}, v_{27}, v_{28}, v_{29}, v_{30}, v_{31}, v_{32}\}, \\ C_2 &= \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{33}, v_{34}, v_{35}, v_{36}, v_{45}, v_{46}, v_{47}, v_{48}\}, \\ C_3 &= \{v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}, v_{37}, v_{38}, v_{39}, v_{40}, v_{41}, v_{42}, v_{43}, v_{44}\}. \end{aligned}$$

#### 5.1.4 Tesselação $\{8\lambda + 16, 8\}$

Seja  $P_p$  o polígono hiperbólico regular com  $p = 8\lambda + 16$  arestas associado à tesselação<sup>18</sup>  $\{8\lambda + 16, 8\}$ . Seja  $\lambda \in \mathbb{N}$  tal que

$$2\lambda + 3 \equiv (\text{mod } 4) \Leftrightarrow \lambda \in \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}.$$

Analogamente,

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{8\lambda+16} \quad \text{e} \quad v_1, v_2, \dots, v_{8\lambda+16},$$

denotam as arestas e os vértices de  $P_p$  dispostos em ordens cíclicas no sentido anti-horário, respectivamente. Para cada  $\lambda = 2k + 1$ , consideremos os conjuntos

$$I_1 = \bigcup_{i=1}^4 I_{1,i}$$

onde

$$I_{1,1} = \{2, \dots, \lambda + 1\}, \quad I_{1,2} = \{2\lambda + 6, \dots, 3\lambda + 5\},$$

$$I_{1,3} = \{4\lambda + 10, \dots, 5\lambda + 9\}, \quad I_{1,4} = \{6\lambda + 14, \dots, 7\lambda + 13\},$$

e

$$I_2 = \{3, \dots, 2\lambda + 3\} \cup \{3\lambda + 8, \dots, 4\lambda + 7\} \cup \{5\lambda + 12, \dots, 6\lambda + 11\},$$

$$I_3 = \{1, \lambda + 3, 2\lambda + 5, 3\lambda + 7\}.$$

<sup>18</sup>Isso significa que os ângulos internos nos respectivos vértices do polígono  $P_p$  é  $\frac{2\pi}{q} = \frac{\pi}{4}$ .

O conjunto  $I_1$  é a união de quatro PA's<sup>19</sup>, todas com  $n = \frac{\lambda+1}{2}$  termos e razão  $r = 2$ , começando em  $2, 2\lambda + 6, 4\lambda + 10$  e  $6\lambda + 14$ , respectivamente. O conjunto  $I_2$  é união de três PA's de mesma razão  $r = 2$ , começando em  $3, 3\lambda + 8$  e  $5\lambda + 12$ , respectivamente. A primeira das três PA's contém  $\lambda + 1$  termos e as duas últimas contêm  $\frac{\lambda+1}{2}$  termos.

Agora, seja  $N = \{2, \dots, 2\lambda\}$  uma PA com  $\frac{\lambda+1}{2}$  termos e razão  $r = 4$ . Sob essas condições, sejam<sup>20</sup>

$$\tau_i \rightarrow \begin{cases} \tau_{2\lambda+4+(i-j)}, & \text{se } i \in I_1 \\ \tau_{8\lambda+16-(i-2)}, & \text{se } i \in I_2, \\ \tau_{4\lambda+8+i}, & \text{se } i \in I_3 \end{cases},$$

onde  $i$  e  $j$  ocuparão a  $n$ -ésima posição<sup>21</sup> tanto em  $I_{1,l}$  como em  $N$ , respectivamente, com  $l = 1, \dots, 4$  e  $n = 1, \dots, \frac{\lambda+1}{2}$ . Desse modo, obtemos os ciclos<sup>22</sup>,

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_2, v_{2\lambda+5}, v_{2\lambda+6}, v_{4\lambda+9}, v_{4\lambda+10}, v_{6\lambda+13}, v_{6\lambda+14}\}, \\ C_2 &= \{v_3, v_{2\lambda+4}, v_{2\lambda+7}, v_{4\lambda+8}, v_{4\lambda+11}, v_{6\lambda+12}, v_{6\lambda+15}, v_{8\lambda+16}\}, \\ C_3 &= \{v_4, v_{2\lambda+3}, v_{2\lambda+8}, v_{4\lambda+7}, v_{4\lambda+12}, v_{6\lambda+11}, v_{6\lambda+16}, v_{8\lambda+15}\}, \\ &\vdots \\ C_{\lambda+1} &= \{v_{\lambda+2}, v_{\lambda+5}, v_{3\lambda+6}, v_{3\lambda+9}, v_{5\lambda+10}, v_{5\lambda+13}, v_{7\lambda+14}, v_{7\lambda+17}\}, \\ C_{\lambda+2} &= \{v_{\lambda+3}, v_{\lambda+4}, v_{3\lambda+7}, v_{3\lambda+8}, v_{5\lambda+11}, v_{5\lambda+12}, v_{7\lambda+15}, v_{7\lambda+16}\}, \end{aligned}$$

e assim,  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é uma superfície Riemanniana compacta e orientável de gênero  $g = \frac{3\lambda+7}{2}$ . Observamos que

$$4g \leq p \leq 12g - 6 \Leftrightarrow 6\lambda + 14 \leq 8\lambda + 16 \leq 18\lambda + 36, \quad \lambda \geq 1,$$

de acordo com (5.4).

**Exemplo 5.1.9** Para  $\lambda = 5$ , temos  $g = 11$  e a tesselação é  $\{56, 8\}$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \{2, 4, 6\}, & I_{1,2} &= \{16, 18, 20\}, & I_{1,3} &= \{30, 32, 34\}, & I_{1,4} &= \{44, 46, 48\}, \\ I_2 &= \{3, 5, 7, 9, 11, 13\} \cup \{23, 25, 27\} \cup \{37, 39, 41\}, \\ I_3 &= \{1, 8, 15, 22\}, \\ N &= \{2, 6, 10\}. \end{aligned}$$

Se  $i \in I_1$ , então

$$\begin{aligned} &\{\tau_2, \tau_{14}\}, \{\tau_4, \tau_{12}\}, \{\tau_6, \tau_{10}\}, \{\tau_{16}, \tau_{28}\}, \{\tau_{18}, \tau_{26}\}, \{\tau_{20}, \tau_{24}\}, \\ &\{\tau_{30}, \tau_{42}\}, \{\tau_{32}, \tau_{40}\}, \{\tau_{34}, \tau_{38}\}, \{\tau_{44}, \tau_{56}\}, \{\tau_{46}, \tau_{54}\}, \{\tau_{48}, \tau_{52}\}. \end{aligned}$$

<sup>19</sup>Sendo  $I_{1,i}$  a  $i$ -ésima PA de  $I_1$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

<sup>20</sup>Os índices em  $I_1$  e  $I_2$  indexarão os geradores de  $\Gamma_{8\lambda+16}$  que identificam as arestas de  $P_{8\lambda+16}$  que não são diametralmente opostas. Já os índices em  $I_3$  indexarão os geradores que identificam as arestas que são diametralmente opostas.

<sup>21</sup>Por exemplo, se  $i$  estiver na terceira posição de  $I_{1,2}$ , o  $j$  também estará na terceira posição de  $N$ . Isso será feito até que percorramos todos os índices de  $I_{1,2}$  e  $N$ .

<sup>22</sup>Esses ciclos são construídos de modo análogo aos ciclos da tesselação  $\{12\lambda - 12, 4\}$ .

Se  $i \in I_2$ , então

$$\{\tau_3, \tau_{55}\}, \{\tau_5, \tau_{53}\}, \{\tau_7, \tau_{51}\}, \{\tau_9, \tau_{21}\}, \{\tau_{11}, \tau_{19}\}, \{\tau_{13}, \tau_{17}\}, \\ \{\tau_{23}, \tau_{35}\}, \{\tau_{25}, \tau_{33}\}, \{\tau_{27}, \tau_{31}\}, \{\tau_{37}, \tau_{49}\}, \{\tau_{39}, \tau_{47}\}, \{\tau_{41}, \tau_{45}\}.$$

Finalmente, para  $i \in I_3$ ,

$$\{\tau_1, \tau_{29}\}, \{\tau_8, \tau_{36}\}, \{\tau_{15}, \tau_{43}\}, \{\tau_{22}, \tau_{50}\}.$$

Disso segue que os ciclos são caracterizados por

$$C_1 = \{v_1, v_2, v_{15}, v_{16}, v_{29}, v_{30}, v_{43}, v_{44}\}, \\ C_2 = \{v_3, v_{14}, v_{17}, v_{28}, v_{31}, v_{42}, v_{45}, v_{56}\}, \\ C_3 = \{v_4, v_{13}, v_{18}, v_{27}, v_{32}, v_{41}, v_{46}, v_{55}\}, \\ C_4 = \{v_5, v_{12}, v_{19}, v_{26}, v_{33}, v_{40}, v_{47}, v_{54}\}, \\ C_5 = \{v_6, v_{11}, v_{20}, v_{25}, v_{34}, v_{39}, v_{48}, v_{53}\}, \\ C_6 = \{v_7, v_{10}, v_{21}, v_{24}, v_{35}, v_{38}, v_{49}, v_{52}\}, \\ C_7 = \{v_8, v_9, v_{22}, v_{23}, v_{36}, v_{37}, v_{50}, v_{51}\}.$$

### 5.1.5 Tesselação $\{10\lambda, 5\}$

No que segue,  $\lambda \in \mathbb{N}$  é tal que

$$10\lambda \equiv (\lambda + 3)(\text{mod } 6) \Leftrightarrow \lambda \in \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}.$$

Seja  $P_p$  o polígono hiperbólico regular com  $p = 10\lambda$  arestas associado à tesselação<sup>23</sup>  $\{10\lambda, 5\}$ .

Sejam

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{10\lambda} \quad \text{e} \quad v_1, v_2, \dots, v_{10\lambda},$$

as arestas e os vértices de  $P_p$  dispostos em ordens cíclicas no sentido anti-horário, respectivamente. Por conveniência, vamos supor que  $\lambda > 3$ . Para cada  $\lambda = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , vamos considerar os conjuntos

$$I_j = \{19j - 13, 19j - 7, 19j - 1\}, \quad j = 1, \dots, k - 1$$

e

$$I_k = \{19k - 13, 19k - 7, 19k - 1, 19k + 5\}.$$

Consideremos também

$$I_1^* = \bigcup_{i=1}^k I_i,$$

<sup>23</sup>Isso significa que os ângulos internos nos respectivos vértices do polígono  $P_p$  é  $\frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{5}$ .

e

$I_2^* = \{1, 2, 7, 8, \dots, 19, 20, a_1 + 2, a_1 + 3, a_1 + 8, a_1 + 9, \dots, a_{k-1} + 2, a_{k-1} + 3, a_{k-1} + 8, a_{k-1} + 9, \dots, 10\lambda - (k+4), 10\lambda - (k+3)\}$ , onde  $a_i$  é o  $i$ -ésimo termo de  $N$ , sendo  $N = \{24, \dots, 19k - 14\}$  uma PA com<sup>24</sup>  $k-1$  elementos e razão  $r = 19$ . O conjunto  $I_2^*$  é constituído de  $\frac{3\lambda+1}{2}$  blocos, cada um com 2 elementos ordenados em ordem crescente<sup>25</sup> e é obtido até que percorramos todos os termos de  $N$ . Com essas considerações, sejam

$$\tau_i \rightarrow \begin{cases} \tau_{i+5}, & \text{se } i \in I_1^* \\ \tau_{i+2}, & \text{se } i \in I_2^* \end{cases},$$

para  $i = 5$ ,

$$\tau_5 \rightarrow \tau_p,$$

e para  $i \in N$ ,

$$\begin{cases} \tau_{24} \rightarrow \tau_{p-1} \\ \tau_{43} \rightarrow \tau_{p-2} \\ \vdots \\ \tau_{19k-14} \rightarrow \tau_{p-k+1} \end{cases}.$$

Com esses emparelhamentos, obtemos os ciclos<sup>26</sup>

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \\ C_2 &= \{v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \\ &\vdots \\ C_{3k-4} &= \{v_{18k-29}, v_{18k-28}, v_{18k-27}, v_{18k-26}, v_{18k-25}\}, \\ C_{3k-3} &= \{v_{18k-23}, v_{18k-22}, v_{18k-21}, v_{18k-20}, v_{18k-19}\}, \\ C_{3k-2} &= \{v_{18k-17}, v_{18k-16}, v_{18k-15}, v_{18k-14}, v_{18k-13}\}, \\ C_{3k-1} &= \{v_{18k-10}, v_{18k-9}, v_{18k-8}, v_{18k-7}, v_{18k-6}\}, \\ C_{3k} &= \{v_{18k-4}, v_{18k-3}, v_{18k-2}, v_{18k-1}, v_{18k}\}, \\ C_{3k+1} &= \{v_{18k+2}, v_{18k+3}, v_{18k+4}, v_{18k+5}, v_{18k+6}\}, \\ C_{3k+2} &= \{v_{18k+8}, v_{18k+9}, v_{18k+10}, v_{18k+11}, v_{18k+12}\}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

e<sup>27</sup>

$$\begin{aligned} C_1^* &= \{v_6, v_{12}, v_{18}, v_{24}, v_p\}, \\ C_2^* &= \{v_{25}, v_{31}, v_{37}, v_{43}, v_{p-1}\}, \\ &\vdots \\ C_{k-1}^* &= \{v_{19k-32}, v_{19k-26}, v_{19k-20}, v_{19k-14}, v_{p-(k-2)}\}, \\ C_k^* &= \{v_{19k-13}, v_{19k-7}, v_{19k-1}, v_{19k+5}, v_{p-(k-1)}\}. \end{aligned}$$

<sup>24</sup>O valor de  $k$  é obtido de  $\lambda = 2k + 1$ .

<sup>25</sup>Sejam  $\{l_1, l_2\}$  e  $\{l_3, l_4\}$  quaisquer dois blocos em seqüências de  $I_2^*$ ,  $l_2 = l_1 + 1$  e  $l_4 = l_3 + 1$ . Se  $l_3 = a_i + 2$ , então  $l_3 = l_1 + 7$ . Se  $l_3 \neq a_i + 2$ , então  $l_3 = l_1 + 6$ . Por exemplo, os pares de blocos  $\{1, 2\}$  e  $\{7, 8\}$ ;  $\{19, 20\}$  e  $\{26, 27\}$ .

<sup>26</sup>O conjunto  $\{j : v_j \text{ é o } j\text{-ésimo vértice de } C_l, l = 1, \dots, 3k - 2\}$  é uma PA de razão  $r = 6$ . Análogo para os quatro últimos ciclos  $C_l$ ,  $l = 3k - 1, \dots, 3k + 2$ . Por exemplo, para os primeiros vértices dos ciclos  $C_l$ ,  $l = 1, \dots, 3k - 2$ , temos o conjunto  $\{1, 7, \dots, 18k - 17\}$ .

<sup>27</sup>O conjunto  $\{j : v_j \text{ é o } j\text{-ésimo vértice de } C_l^*, l = 1, \dots, k\}$  é uma PA de razão  $r = 19$ , com excessão dos últimos vértices, que formam uma outra PA de razão  $r = -1$ . Por exemplo, para os primeiros vértices dos ciclos  $C_l^*$ ,  $l = 1, \dots, k$ , temos o conjunto  $\{6, 25, \dots, 19k - 13\}$ .

Conseqüentemente,  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é uma superfície Riemanniana compacta e orientável de gênero  $g = \frac{3\lambda+1}{2}$ . Temos

$$4g \leq p \leq 12g - 6 \Leftrightarrow 6\lambda + 2 \leq 10\lambda \leq 18\lambda, \quad \lambda \geq 5,$$

de acordo com (5.4).

**Exemplo 5.1.10** Para  $\lambda = 5$ , temos  $g = 8$  e a correspondente tesselação é  $\{50, 5\}$ . Como  $5 = 2 \cdot 2 + 1$ , temos que  $k = 2$ . Assim,

$$I_1 = \{6, 12, 18\} \quad e \quad I_2 = \{25, 31, 37, 43\}.$$

Logo,

$$I_1^* = \{6, 12, 18, 25, 31, 37, 43\}.$$

Por outro lado,

$$N = \{24\}.$$

Dessa forma,  $a_1 = 24$  e, conseqüentemente,<sup>28</sup>

$$I_2^* = \{1, 2, 7, 8, 13, 14, 19, 20, 26, 27, 32, 33, 38, 39, 44, 45\}.$$

Primeiramente, temos  $\{\tau_5, \tau_{50}\}$ . Agora, para  $i \in I_1^*$ ,

$$\begin{aligned} &\{\tau_6, \tau_{11}\}, \{\tau_{12}, \tau_{17}\}, \{\tau_{18}, \tau_{23}\}, \{\tau_{25}, \tau_{30}\}, \\ &\{\tau_{31}, \tau_{36}\}, \{\tau_{37}, \tau_{42}\}, \{\tau_{43}, \tau_{48}\}, \end{aligned}$$

para  $i \in N$ , ou seja,  $i = 24$ ,  $\{\tau_{24}, \tau_{49}\}$ . Finalmente, se  $i \in I_2^*$ , então

$$\begin{aligned} &\{\tau_1, \tau_3\}, \{\tau_2, \tau_4\}, \{\tau_7, \tau_9\}, \{\tau_8, \tau_{10}\}, \\ &\{\tau_{13}, \tau_{15}\}, \{\tau_{14}, \tau_{16}\}, \{\tau_{19}, \tau_{21}\}, \{\tau_{20}, \tau_{22}\}, \\ &\{\tau_{26}, \tau_{28}\}, \{\tau_{27}, \tau_{29}\}, \{\tau_{32}, \tau_{34}\}, \{\tau_{33}, \tau_{35}\}, \\ &\{\tau_{38}, \tau_{40}\}, \{\tau_{39}, \tau_{41}\}, \{\tau_{44}, \tau_{46}\}, \{\tau_{45}, \tau_{47}\}. \end{aligned}$$

Disso segue que os ciclos são caracterizados por

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \\ C_2 &= \{v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \\ C_3 &= \{v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}, \\ C_4 &= \{v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_{22}, v_{23}\}, \\ C_5 &= \{v_{26}, v_{27}, v_{28}, v_{29}, v_{30}\}, \\ C_6 &= \{v_{32}, v_{33}, v_{34}, v_{35}, v_{36}\}, \\ C_7 &= \{v_{38}, v_{39}, v_{40}, v_{41}, v_{42}\}, \\ C_8 &= \{v_{44}, v_{45}, v_{46}, v_{47}, v_{48}\}, \end{aligned}$$

<sup>28</sup>Para  $\lambda = 7$ , temos que  $k = 3$  e  $N = \{24, 43\}$ . Assim,  $a_1 = 24$  e  $a_2 = 43$ . Logo,

$$I_2^* = \{1, 2, 7, 8, 13, 14, 19, 20, 26, 27, 32, 33, 38, 39, 45, 46, 51, 52, 57, 58, 63, 64\}.$$

e

$$\begin{aligned} C_1^* &= \{v_6, v_{12}, v_{18}, v_{24}, v_{50}\}, \\ C_2^* &= \{v_{25}, v_{31}, v_{37}, v_{43}, v_{49}\}. \end{aligned}$$

### 5.1.6 Tesselação $\{p, q\}$

Agora, ao contrário dos exemplos anteriores, consideramos emparelhamentos para família de tesselação  $\{p, q\}$ ,  $p \neq q$ , onde  $p$  é uma função quadrática de  $\lambda$ , isto é,  $p = a\lambda^2 + b\lambda + c$ , com  $a, b, c \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Estes emparelhamentos serão divididos em dois casos, como estabelecidos nos Teoremas 5.1.11 e 5.1.13.

**Teorema 5.1.11** *Sejam  $\{p, q\}$  uma tesselação hiperbólica com polígono regular associado  $P_p$  e  $\Gamma_p$  o grupo fuchsiano obtido de  $P_p$ . Se  $p = 2\lambda^2 + 6\lambda + 4$  e  $q = 2\lambda + 2$ , sendo  $\lambda \in \mathbb{N}$  um número ímpar qualquer, então<sup>30</sup>*

$$\tau_i \rightarrow \begin{cases} \tau_{\alpha+i}, & \text{se } i \in \bigcup_{i=1}^{\lambda+1} I_{1,i}, \\ \tau_{i+\lambda+1}, & \text{se } i \in I_1^* \end{cases}, \quad (5.11)$$

onde  $\alpha = \frac{p}{2}$ ,

$$I_{1,i} = \{(i-1)\lambda + 2i - 1, \dots, i(\lambda + 2) - 2\}, \quad i = 1, 2, \dots, \lambda + 1,$$

é uma PA<sup>31</sup> com  $\lambda$  termos e razão  $r = 1$ , e

$$I_1^* = \{\lambda + 2, \dots, p\},$$

é uma PA com  $2\lambda + 2$  termos e razão  $r = \lambda + 2$ , fornecem emparelhamentos das arestas de  $P_p$ , tais que  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  resulta em uma superfície Riemanniana compacta e orientável de gênero  $g = \frac{(\lambda+1)^2}{2}$ .

**Demonstração:** Seja  $P_p$  o polígono regular de  $p$  arestas associado à tesselação  $\{p, q\}$ , onde

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p \quad \text{e} \quad v_1, v_2, \dots, v_p,$$

denotam as arestas e os vértices de  $P_p$  dispostos em ordens cíclicas no sentido anti-horário, respectivamente. Suponhamos que  $p = 2\lambda^2 + 6\lambda + 4$  e  $q = 2\lambda + 2$ , onde  $\lambda \in \mathbb{N}$  é um

<sup>29</sup> Isso significa que os ângulos internos nos respectivos vértices do polígono  $P_p$  é  $\frac{2\pi}{q} = \frac{\pi}{\lambda+1}$ .

<sup>30</sup> Os índices em  $I_{1,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \lambda + 1$ , indexarão os geradores de  $\Gamma_p$  que identificam as arestas de  $P_p$  diametralmente opostas. Já os índices em  $I_1^*$  indexarão os geradores que identificam as arestas que não são diametralmente opostas.

<sup>31</sup> Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, \lambda + 1\}$ .

número ímpar qualquer. Com os emparelhamentos em (5.11), obtemos  $\lambda + 2$  ciclos, todos de comprimento  $2\lambda + 2$ , dados por<sup>32</sup>

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_2, \dots, v_{\lambda+1}, v_{\alpha+1}, v_{\alpha+2}, \dots, v_{\alpha+\lambda+1}\}, \\ C_2 &= \{v_{\lambda+2}, v_{2\lambda+4}, v_{3\lambda+6}, \dots, v_p\}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são construídos da seguinte forma:  $C_1$  é dividido em dois blocos. O primeiro é constituído dos  $\lambda + 1$  primeiros vértices, enquanto que o segundo começa em  $v_{\alpha+1}$  e termina em  $v_{\alpha+\lambda+1}$ . Já os índices dos vértices de  $C_2$  estão em uma PA de razão  $r = \lambda + 2$ . Os  $\lambda$  ciclos restantes são organizados como segue<sup>33</sup>

$$\begin{aligned} C_3 &= \{v_{\lambda+3}, v_{\lambda+4}, \dots, v_{2\lambda+3}, v_{\alpha+\lambda+3}, v_{\alpha+\lambda+4}, \dots, v_{\alpha+2\lambda+3}\}, \\ C_4 &= \{v_{2\lambda+5}, v_{2\lambda+6}, \dots, v_{3\lambda+5}, v_{\alpha+2\lambda+5}, v_{\alpha+2\lambda+6}, \dots, v_{\alpha+3\lambda+5}\}, \\ C_5 &= \{v_{3\lambda+7}, v_{3\lambda+8}, \dots, v_{4\lambda+7}, v_{\alpha+3\lambda+7}, v_{\alpha+3\lambda+8}, \dots, v_{\alpha+4\lambda+7}\}, \\ &\vdots \\ C_{\lambda+2} &= \{v_{\lambda^2+2\lambda+1}, v_{\lambda^2+2\lambda+2}, \dots, v_{\lambda^2+3\lambda+1}, v_{\alpha+\lambda^2+2\lambda+1}, v_{\alpha+\lambda^2+2\lambda+2}, \dots, v_{\alpha+\lambda^2+3\lambda+1}\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Logo, pelo Teorema 5.1.3,  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é uma superfície Riemanniana compacta e orientável de gênero  $g = \frac{(\lambda+1)^2}{2}$ . Temos

$$4g \leq p \leq 12g - 6 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 4\lambda + 2 \leq 2\lambda^2 + 6\lambda + 4 \leq 6\lambda^2 + 12\lambda, \quad \lambda \geq 1,$$

de acordo com (5.4). ■

**Exemplo 5.1.12** Para  $\lambda = 3$ , temos que  $g = 8$  e  $\{2\lambda^2 + 6\lambda + 4, 2\lambda + 2\} = \{40, 8\}$ . Portanto,  $p = 40$  e  $\alpha = \frac{p}{2} = 20$ . Logo,

$$I_{1,1} = \{1, 2, 3\}, \quad I_{1,2} = \{6, 7, 8\},$$

$$I_{1,3} = \{11, 12, 13\}, \quad I_{1,4} = \{16, 17, 18\}$$

e

$$I_1^* = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}.$$

Se  $i \in \bigcup_{i=1}^4 I_{1,i}$ , então os pares de arestas são

$$\begin{aligned} &\{\tau_1, \tau_{21}\}, \{\tau_2, \tau_{22}\}, \{\tau_3, \tau_{23}\}, \{\tau_6, \tau_{26}\}, \{\tau_7, \tau_{27}\}, \{\tau_8, \tau_{28}\} \\ &\{\tau_{11}, \tau_{31}\}, \{\tau_{12}, \tau_{32}\}, \{\tau_{13}, \tau_{33}\}, \{\tau_{16}, \tau_{36}\}, \{\tau_{71}, \tau_{27}\}, \{\tau_{18}, \tau_{38}\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $i \in I_1^*$ , então

$$\begin{aligned} &\{\tau_5, \tau_9\}, \{\tau_{10}, \tau_{14}\}, \{\tau_{15}, \tau_{19}\}, \{\tau_{20}, \tau_{24}\}, \\ &\{\tau_{25}, \tau_{29}\}, \{\tau_{30}, \tau_{34}\}, \{\tau_{35}, \tau_{39}\}, \{\tau_{40}, \tau_4\}. \end{aligned}$$

<sup>32</sup>O valor de  $\alpha$  é obtido de  $\alpha = \frac{p}{2}$ .

<sup>33</sup>Esses ciclos são construídos de modo análogo aos primeiros  $3k - 2$  ciclos da tesselação  $\{10\lambda, 5\}$  em (5.10). Neste caso, usamos  $r = \lambda + 2$ . Cada um dos ciclos é dividido em dois blocos.

Disso segue que os ciclos são caracterizados por

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{24}\}, \\ C_2 &= \{v_5, v_{10}, v_{15}, v_{20}, v_{25}, v_{30}, v_{35}, v_{40}\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C_3 &= \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{26}, v_{27}, v_{28}, v_{29}\}, \\ C_4 &= \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{31}, v_{32}, v_{33}, v_{34}\}, \\ C_5 &= \{v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{36}, v_{37}, v_{38}, v_{39}\}. \end{aligned}$$

Análogo ao Teorema 5.1.11, temos:

**Teorema 5.1.13** *Sejam  $\{p, q\}$  uma tesselação hiperbólica com polígono regular associado  $P_p$  e  $\Gamma_p$  o grupo fuchsiano obtido de  $P_p$ . Se  $p = \lambda^2 + 3\lambda + 2$  e  $q = \lambda + 1$ , sendo  $\lambda \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda \equiv 0 \pmod{4}$ , então*

$$\tau_i \rightarrow \begin{cases} \tau_{i+2}, & \text{se } i \in \bigcup_{i=1}^{\lambda+1} I_{1,i} \\ \tau_{i+\lambda+1}, & \text{se } i \in I_1^* \end{cases}, \quad (5.14)$$

sendo

$$I_{1,i} = \left\{ (i-1)\lambda + 2i - 1, \dots, \frac{i(2\lambda+4) - (\lambda+4)}{2} \right\}, \quad i = 1, \dots, \lambda + 1,$$

uma PA<sup>35</sup> com  $\frac{\lambda}{2}$  termos e razão  $r = 1$ , e

$$I_1^* = \{\lambda + 2, \dots, p\},$$

uma PA com  $\lambda + 1$  termos e razão  $r = \lambda + 2$ , fornecem emparelhamentos das arestas de  $P_p$ , tais que  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  resulta em uma superfície Riemanniana compacta e orientável de gênero  $g = \frac{\lambda(\lambda+1)}{4}$ .

**Demonstração:** Vamos assumir a mesma notação usada na demonstração do Teorema 5.1.11. Usando os emparelhamentos de (5.14), obtemos  $\lambda + 2$  ciclos, todos de comprimento  $\lambda + 1$ , dados por<sup>36</sup>

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_2, \dots, v_{\lambda+1}\} \\ C_2 &= \{v_{\lambda+2}, v_{2\lambda+4}, v_{3\lambda+6}, \dots, v_p\}, \end{aligned}$$

e<sup>37</sup>

<sup>34</sup>Isso significa que os ângulos internos nos respectivos vértices do polígono  $P_p$  é  $\frac{2\pi}{\lambda+1}$ .

<sup>35</sup>Para cada  $i \in \{1, \dots, \lambda + 1\}$ .

<sup>36</sup> $C_1$  e  $C_2$  como em (5.12), com a ressalva do ciclo  $C_1$  conter apenas um bloco.

<sup>37</sup>Análogos aos ciclos em (5.13), com mesma razão  $r = \lambda + 2$ . Apenas estão divididos em um bloco.

$$\begin{aligned}
C_3 &= \{v_{\lambda+3}, v_{\lambda+4}, \dots, v_{2\lambda+3}\}, \\
C_4 &= \{v_{2\lambda+5}, v_{2\lambda+6}, \dots, v_{3\lambda+5}\}, \\
C_5 &= \{v_{3\lambda+7}, v_{3\lambda+8}, \dots, v_{4\lambda+7}\}, \\
&\vdots \\
C_{\lambda+2} &= \{v_{\lambda^2+2\lambda+1}, v_{\lambda^2+2\lambda+2}, \dots, v_{\lambda^2+3\lambda+1}\}.
\end{aligned}$$

Concluimos pelo Teorema 5.1.3 que  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  é uma superfície Riemanniana compacta e orientável de gênero  $g = \frac{\lambda(\lambda+1)}{4}$ . Observamos que

$$4g \leq p \leq 12g - 6 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda \leq \lambda^2 + 3\lambda + 2 \leq 3\lambda^2 + 3\lambda - 6, \quad \lambda \geq 4,$$

de acordo com (5.4). ■

**Exemplo 5.1.14** Para  $\lambda = 4$ , temos que  $g = 5$  e  $\{\lambda^2 + 3\lambda + 2, \lambda + 1\} = \{30, 5\}$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
I_{1,1} &= \{1, 2\}, & I_{1,2} &= \{7, 8\}, \\
I_{1,3} &= \{13, 14\}, & I_{1,4} &= \{19, 20\}, \\
I_{1,5} &= \{25, 26\},
\end{aligned}$$

e

$$I_1^* = \{6, 12, 18, 24, 30\}.$$

Se  $i \in \bigcup_{i=1}^4 I_{1,i}$ , então os pares de arestas são

$$\begin{aligned}
&\{\tau_1, \tau_3\}, \{\tau_2, \tau_4\}, \{\tau_7, \tau_9\}, \{\tau_8, \tau_{10}\}, \{\tau_{13}, \tau_{15}\}, \{\tau_{14}, \tau_{16}\} \\
&\{\tau_{19}, \tau_{21}\}, \{\tau_{20}, \tau_{22}\}, \{\tau_{25}, \tau_{27}\}, \{\tau_{26}, \tau_{28}\},
\end{aligned}$$

e para  $i \in I_1^*$ ,

$$\{\tau_6, \tau_{11}\}, \{\tau_{12}, \tau_{17}\}, \{\tau_{18}, \tau_{23}\}, \{\tau_{24}, \tau_{29}\}, \{\tau_{30}, \tau_5\}.$$

Disso segue que os ciclos são caracterizados por

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \\
C_2 &= \{v_6, v_{12}, v_{18}, v_{24}, v_{30}\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
C_3 &= \{v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \\
C_4 &= \{v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}\}, \\
C_5 &= \{v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_{22}, v_{23}\}, \\
C_6 &= \{v_{25}, v_{26}, v_{27}, v_{28}, v_{29}\}.
\end{aligned}$$

## 5.2 Geradores do Grupo $\Gamma_p$

O objetivo desta seção é determinar as isometrias hiperbólicas que emparelham as arestas do polígono hiperbólico  $P_p$ . Pelo Teorema 5.1.5, essas isometrias geram o grupo fuchsiano  $\Gamma_p$  associado à tesselação  $\{p, q\}$ . Por conveniência, o modelo de geometria hiperbólica usado para determinar esses geradores será o do disco de Poincaré,  $\mathbb{D}^2$ .

Seja  $P_p$  o polígono hiperbólico regular com  $p$  arestas associado à  $\{p, q\}$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $P_p$  esteja centrado em 0, a origem de  $\mathbb{D}^2$ .

Consideremos

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p \quad \text{e} \quad v_1, v_2, \dots, v_p,$$

as arestas e os vértices de  $P_p$  dispostos em ordem cíclicas no sentido anti-horário, respectivamente. Ligando cada vértice de  $P_p$  ao seu baricentro, obtemos  $p$  triângulos hiperbólicos. Como  $\{p, q\}$  é regular, cada um desses triângulos tem ângulo  $\frac{2\pi}{p}$  no vértice que é o baricentro de  $P_p$  e ângulo  $\frac{\pi}{q}$  nos outros dois vértices. Portanto, pela fórmula de Gauss-Bonnet (Teorema 2.2.6), cada triângulo tem área igual a

$$\frac{\pi(pq - 2q - 2p)}{pq}.$$

Sejam  $T_1 \in \Gamma_p$  uma isometria que emparelha a aresta  $\tau_1$  em outra diametralmente oposta a esta, isto é,  $T_1(\tau_1) = \tau_{\frac{p}{2}+1}$ ,  $A_1$  a matriz associada a  $T_1$  que, por (2.7), é da forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1,$$

e

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix}.$$

A Figura 5.3 ilustra uma região fundamental  $P_p$ , cujo baricentro é o ponto 0 de  $\mathbb{D}^2$ , com arestas  $\tau_p, \tau_1$  e  $\tau_2$  correspondendo aos arcos  $E\tilde{H}$ ,  $\tilde{H}H$  e  $HF$ , respectivamente. Além disso,  $R$  denota o raio do círculo isométrico  $I(T_1)$  da isometria  $T_1$  e, portanto, dos outros círculos isométricos das outras isometrias de emparelhamentos, e  $D$  é o centro de  $I(T_1)$ .

Como cada triângulo hiperbólico tem ângulo de  $\frac{2\pi}{p}$  no baricentro 0, segue que  $\vartheta = \frac{\pi}{p}$ . Sejam  $G$  o ponto de interseção da reta  $r$  com o segmento de reta  $\overline{OD}$  e  $\tilde{\beta}$  o ângulo no ponto  $G$ . Como  $\vartheta = \frac{\pi}{p}$  e  $\nu = \frac{\pi}{q}$ , segue que  $\tilde{\beta} = \frac{(p+q)\pi}{pq}$ . Por outro lado, usando simples relações trigonométricas sobre os triângulos  $OGH$  e  $DHN$  ( $DHN$  é isósceles) obtemos as seguintes igualdades

$$\vartheta = \frac{\pi}{p}, \quad \tilde{\beta} = \frac{(p+q)\pi}{pq}, \quad \beta = \frac{2\pi}{q}, \quad \gamma = \alpha = \frac{(q-2)\pi}{2q}, \quad \nu = \frac{\pi}{q}.$$

Façamos agora  $x = \overline{DG}$  (hipotenusa do triângulo  $DGH$ ),  $y = \overline{OG}$  e  $z = \overline{GH}$ . Do triângulo  $DGH$ , temos que

$$R = x \operatorname{sen} \tilde{\beta} \quad \text{e} \quad z = x \cos \tilde{\beta}. \quad (5.15)$$



Sabemos por (5.15) que  $R^2 = x^2 \text{sen}^2 \tilde{\beta}$ . Assim, substituindo o valor de  $x^2$  em (5.19), segue que

$$R^2 = \left( \frac{1 + R^2}{s} \right) \text{sen}^2 \tilde{\beta} \Rightarrow R^2 = \frac{\text{sen}^2 \tilde{\beta}}{s - \text{sen}^2 \tilde{\beta}},$$

ou seja,

$$R^2 = \frac{2\text{sen}^2 \frac{\pi}{p}}{\cos \frac{2\pi}{p} + \cos \frac{2\pi}{q}} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2\text{sen}^2 \frac{\pi}{p}}{\cos \frac{2\pi}{p} + \cos \frac{2\pi}{q}}}. \quad (5.20)$$

Portanto,

$$(x + y)^2 = R^2 + 1 \Rightarrow (x + y)^2 = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{q}}{\cos \frac{2\pi}{p} + \cos \frac{2\pi}{q}},$$

isto é,

$$\overline{OD} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{2\pi}{q}}{\cos \frac{2\pi}{p} + \cos \frac{2\pi}{q}}}. \quad (5.21)$$

Conseqüentemente, o centro do círculo isométrico de  $T_1$ ,  $I(T_1)$ , é dado por

$$e^{\frac{i\pi}{p}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{2\pi}{q}}{\cos \frac{2\pi}{p} + \cos \frac{2\pi}{q}}}. \quad (5.22)$$

De forma análoga, verificamos que os centros dos círculos isométricos das outras isometrias de emparelhamentos das arestas são

$$e^{\frac{i(1+2k)\pi}{p}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{2\pi}{q}}{\cos \frac{2\pi}{p} + \cos \frac{2\pi}{q}}}, \quad k = 1, \dots, p-1. \quad (5.23)$$

Observamos que as arestas de  $P_p$  estão contidas nos círculos isométricos (círculos euclidianos) de centro  $C$  e raio  $R$ , onde  $C$  é dado por (5.23) e  $R$  como em (5.20).

Nosso objetivo é determinar os valores de  $a$  e  $b$  da matriz  $A_1$ . Como o centro do círculo isométrico de  $T_1$  é  $\frac{-\bar{a}}{\bar{b}}$ , obtemos de (5.22) que

$$\frac{-\bar{a}}{\bar{b}} = e^{\frac{i\pi}{p}} \cdot \sqrt{\frac{2\text{sen}^2 \frac{\pi}{p}}{\cos \frac{2\pi}{p} + \cos \frac{2\pi}{q}}}. \quad (5.24)$$

Analogamente, o raio  $R$  de  $I(T_1)$  é  $\frac{1}{|b|}$ . Portanto, de (5.20), temos que

$$\frac{1}{|b|} = \sqrt{\frac{2\text{sen}^2 \frac{\pi}{p}}{\cos \frac{2\pi}{p} + \cos \frac{2\pi}{q}}}. \quad (5.25)$$

Por outro lado, o centro do círculo isométrico de  $T_1^{-1}$  é  $\frac{a}{b}$ . Assim, de (5.23), temos que

$$\frac{a}{b} = e^{\frac{i(1+p)\pi}{p}} \cdot \sqrt{\frac{2\text{sen}^2 \frac{\pi}{p}}{\cos \frac{2\pi}{p} + \cos \frac{2\pi}{q}}}. \quad (5.26)$$

De (5.24) e (5.26), concluímos que

$$a = -\bar{a} \cdot e^{\frac{i\pi}{p}(1+p)} e^{-\frac{i\pi}{p}} = -\bar{a} \cdot e^{i\pi} = \bar{a}.$$

Disso segue que<sup>38</sup>

$$a^2 = a \cdot \bar{a} = |a|^2 = (1 + |b|^2).$$

Usando (5.25), obtemos

$$a^2 = \left( 1 + \frac{\cos \frac{2\pi}{p} + \cos \frac{2\pi}{q}}{2\text{sen}^2 \frac{\pi}{p}} \right) = \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{q}}{2\text{sen}^2 \frac{\pi}{p}}.$$

Logo,

$$a = \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{\text{sen} \frac{\pi}{p}}. \quad (5.27)$$

Desse modo,

$$\bar{b} = \frac{\sqrt{2 \cos \frac{2\pi}{p} + 2 \cos \frac{2\pi}{q}}}{2\text{sen} \frac{\pi}{p}} \cdot e^{-i\left(\frac{p+1}{p}\right)\pi}.$$

Portanto, a matriz  $A_1$  associada à transformação  $T_1$  é

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2 \cos \frac{\pi}{q}}{2\text{sen} \frac{\pi}{p}} & \frac{\sqrt{2 \cos \frac{2\pi}{p} + 2 \cos \frac{2\pi}{q}} \cdot e^{i\left(\frac{p+1}{p}\right)\pi}}{2\text{sen} \frac{\pi}{p}} \\ \frac{\sqrt{2 \cos \frac{2\pi}{p} + 2 \cos \frac{2\pi}{q}} \cdot e^{-i\left(\frac{p+1}{p}\right)\pi}}{2\text{sen} \frac{\pi}{p}} & \frac{2 \cos \frac{\pi}{q}}{2\text{sen} \frac{\pi}{p}} \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Fazendo uso de um conjunto de emparlhamentos das arestas de  $P_p$ , podemos, a partir de  $T_1$ , determinar as outras isometrias de emparelhamentos e expressá-las na forma  $T_{C^{r_i}} T_1 T_{C^{-r_i}}$  ou por expressões como  $T_{C^{r_i}} T_1 T_{C^{-r_j}}$ , sendo  $T_C$  a transformação elíptica de ordem  $p$ , isto é,

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{p}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{p}} \end{pmatrix}.$$

Na Seção 5.3 vamos explicitar este processo, e com isso estabelecer os geradores dos grupos  $\Gamma_{10\lambda}$  associados à família  $\{10\lambda, 2\lambda\}$ .

### 5.3 O Grupo $\Gamma_{10\lambda}$

Vimos na Subseção 5.1.1 que

$$\tau_i \rightarrow \begin{cases} \tau_{5\lambda+i}, & \text{se } i \in I_1 \\ \tau_{\lambda+i}, & \text{se } i \in I_1^* \end{cases}, \quad (5.29)$$

<sup>38</sup>Lembramos que  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ .

onde

$$I_1 = \bigcup_{i=1}^5 I_{1,i},$$

forneem os emparelhamentos para as arestas de  $P_p$ ,  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ , tais que  $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$  seja uma superfície compacta e orientável,  $p = 10\lambda$ , onde  $I_{1,i}$  denota as progressões aritméticas em (5.5) e  $I_1^*$  como em (5.6). A fim de determinarmos os geradores de  $\Gamma_{10\lambda}$ , faremos uso das progressões aritméticas:

$$I_{2,i} = \{(i-1)\lambda - (i-2), \dots, i(\lambda-1)\}, \quad i = 1, \dots, 5,$$

sendo  $I_{2,i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , PA's com  $\lambda - 1$  termos e razão  $r = 1$ , e  $I_{2,5}$  uma PA com  $\lambda - 4$  elementos e razão  $r = 1$ . Sejam  $T_k$  as isometrias que emparelham as arestas de  $P_{10\lambda}$  da forma

$$T_l(\tau_j) = \tau_{j+5\lambda},$$

onde  $l$  e  $j$  são os  $n$ -ésimos termos das progressões  $I_{2,i}$  e  $I_{1,i}$ , respectivamente,  $i = 1, \dots, 5$ . Consideremos, agora, os conjuntos ordenados em ordem crescente

$$I_3 = \{\lambda + 1, 2\lambda + 2\},$$

$$I_3^* = \{1, 2\},$$

$$I_4 = \{3\lambda + 3, 5\lambda, 6\lambda + 1, 7\lambda + 2, 8\lambda + 3, 10\lambda\},$$

$$I_4^* = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

e sejam  $S_k$  as isometrias que emparelham as arestas de  $P_{10\lambda}$  da forma

$$S_l(\tau_j) = \tau_{j+\lambda},$$

onde  $l$  e  $j$  são os  $n$ -ésimos elementos de  $I_i^*$  e  $I_i$ , respectivamente<sup>39</sup>,  $i = 3, 4$ .

Sejam  $C$  a matriz correspondente ao elemento elíptico de ordem  $10\lambda$ ,  $T_C$ ,

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{10\lambda}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{10\lambda}} \end{pmatrix}$$

e  $A_1$  a matriz hiperbólica correspondente à transformação

$$T_1(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}}.$$

Fixando  $T_1(\tau_1) = \tau_{5\lambda+1}$ , temos que para  $p = 10\lambda$  e  $q = 2\lambda$ , a matriz  $A_1$  em (5.28) assume a forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2 \cos \frac{\pi}{2\lambda}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{10\lambda}} & \frac{\sqrt{2(\cos \frac{\pi}{5\lambda} + \cos \frac{\pi}{\lambda})} \cdot e^{i(\frac{10\lambda+1}{10\lambda})\pi}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{10\lambda}} \\ \frac{\sqrt{2(\cos \frac{\pi}{5\lambda} + \cos \frac{\pi}{\lambda})} \cdot e^{-i(\frac{10\lambda+1}{10\lambda})\pi}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{10\lambda}} & \frac{2 \cos \frac{\pi}{2\lambda}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{10\lambda}} \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

<sup>39</sup>Se  $l$  for o primeiro elemento de  $I_i^*$ , então  $j$  também será o primeiro elemento de  $I_i$ .

As transformações  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, 5\lambda - 8$ , são obtidas através de conjugações de  $T_1$  por meio da transformação elíptica  $T_C$ . De fato, usando (5.29) obtemos

$$T_i = T_{C^{(k+i)}} T_1 T_{C^{-(k+i)}}, \quad (5.31)$$

onde

$$k = \begin{cases} -1 & \text{se } i \in I_{2,1} \\ 1 & \text{se } i \in I_{2,2} \\ 3 & \text{se } i \in I_{2,3} \\ 5 & \text{se } i \in I_{2,4} \\ 6 & \text{se } i \in I_{2,5} \end{cases}.$$

As isometrias  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , são dados por

$$\begin{aligned} S_1 &= T_{C^{-(4\lambda+1)}} T_1 T_C, \\ S_2 &= T_{C^{-3\lambda}} T_1 T_{C^{-\lambda}}, \\ S_3 &= T_{C^{-(2\lambda-1)}} T_1 T_{C^{-(2\lambda+1)}}, \\ S_4 &= T_{C^{-(\lambda-2)}} T_1 T_{C^{-(3\lambda+2)}}, \\ S_5 &= T_{C^{(\lambda-1)}} T_1 T_{C^{(5\lambda+1)}}, \\ S_6 &= T_{C^{2\lambda}} T_1 T_{C^{4\lambda}}, \\ S_7 &= T_{C^{(3\lambda+1)}} T_1 T_{C^{(3\lambda-1)}}, \\ S_8 &= T_{C^{(4\lambda+2)}} T_1 T_{C^{(2\lambda-2)}}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Sejam  $A_i$  e  $B_j$  as matrizes correspondentes às transformações  $T_i$  e  $S_j$ , respectivamente,  $i = 1, \dots, 5\lambda - 8$  e  $j = 1, \dots, 8$ , ou seja,

$$A_i = C^{(k+i)} A_1 C^{-(k+i)}$$

e

$$B_j = C^{r_m} A_1 C^{r_s}.$$

Portanto,

$$\text{tr}(A_i) = \text{tr}(A_1) = \frac{2 \cos \frac{\pi}{2\lambda}}{\text{sen} \frac{\pi}{10\lambda}}, \quad i = 1, \dots, 5\lambda - 8. \quad (5.33)$$

Por outro lado, verificamos que

$$\text{Tr}(B_j) = a \cdot (x^{4\lambda} + y^{4\lambda}), \quad j = 1, \dots, 4 \quad (5.34)$$

e

$$\text{Tr}(B_j) = a \cdot (x^{6\lambda} + y^{6\lambda}), \quad j = 5, \dots, 8, \quad (5.35)$$

onde  $a = \frac{\cos \frac{\pi}{2\lambda}}{\text{sen} \frac{\pi}{10\lambda}}$ ,  $x = e^{\frac{i\pi}{10\lambda}}$  e  $y = \bar{x}$  (o conjugado de  $x$ ). Disso segue que

$$\text{Tr}(B_j) = a \cdot 2 \cos \frac{2\pi}{5} = a \cdot \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right), \quad j = 1, \dots, 4 \quad (5.36)$$

e

$$\text{Tr}(B_j) = a \cdot 2 \cos \frac{3\pi}{5} = a \cdot \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right), \quad j = 5, \dots, 8. \quad (5.37)$$

Consideremos o grupo  $\Gamma = f^{-1}\Gamma_{10\lambda}f$ , sendo  $f$  como em (2.3). Portanto,  $\Gamma \simeq \Gamma_{10\lambda}$ , onde

$$G_i = f^{-1}A_i f \quad \text{e} \quad G_j = f^{-1}B_j f, \quad (5.38)$$

são geradores de  $\Gamma$ .

Nosso objetivo é estudar os grupos  $\Gamma_{10\lambda}$  para os valores de  $\lambda = 2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Como veremos nos Teoremas 5.3.2 e 5.3.1, o estudo desses grupos tanto no sentido aritmético, como no sentido de identificação de  $\Gamma_{10\lambda}$  em ordens dos quatérnios é, de fato, a conexão dos grupos  $\Gamma_{4g}$  para os casos  $g = 2^n$  e  $g = 5 \cdot 2^n$ .

Fazendo uso da expressão da matriz  $A_1$  em (5.30) para  $\lambda = 2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  qualquer, e usando as igualdades em (5.31) e (5.32), podemos expressar os geradores  $G_l$  em (5.38) como

$$G_l = \frac{1}{2^s} \begin{pmatrix} x_l + y_l \sqrt{\theta_1 + \theta_2} & z_l + w_l \sqrt{\theta_1 + \theta_2} \\ -z_l + w_l \sqrt{\theta_1 + \theta_2} & x_l - y_l \sqrt{\theta_1 + \theta_2} \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, 5\lambda, \quad (5.39)$$

onde  $s \in \mathbb{N}$  e  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta_1 + \theta_2]$ , sendo

$$\theta_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \quad (5.40)$$

com  $n - 1$  radicais, e

$$\theta_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}}} \quad (5.41)$$

com  $n + 1$  radicais.

Dessa forma, apresentamos o Teorema 5.3.1 que é uma conexão dos resultados obtidos nos Teoremas 4.2.5 e 4.4.2.

**Teorema 5.3.1** *Para cada  $\lambda = 2^n$  com  $n > 0$ , ou seja, para cada gênero  $g = 5 \cdot 2^{n-1} - 2$  de  $\mathbb{D}^2/\Gamma_{10\lambda}$ , os elementos do grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{10\lambda}$  são identificados, via isomorfismo<sup>40</sup>, com elementos do grupo dos invertíveis  $\mathcal{O}^1$  da ordem  $\mathcal{O} = (\theta_1 + \theta_2, -1)_R$ ,*

$$R = \left\{ \frac{\alpha}{2^m} : \alpha \in \mathbb{Z}[\theta_1 + \theta_2] \quad \text{e} \quad m \in \mathbb{N} \right\}, \quad (5.42)$$

sendo  $\theta_1$  e  $\theta_2$  como em (5.40) e (5.41). Conseqüentemente,

$$\{1, \sqrt{\theta_1 + \theta_2}, \text{Im}, \sqrt{\theta_1 + \theta_2} \text{Im}\}$$

é uma  $R$ -base para o reticulado  $\mathcal{O}$ , sendo  $\text{Im}$  a unidade imaginária.

<sup>40</sup>Esse isomorfismo, digamos  $\varphi$ , é tal que  $\Gamma_{10\lambda} \simeq \Gamma < \Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O}) = \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\{\pm I_2\}}$ , onde  $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$ .

**Demonstração:** Sejam as matrizes  $M_0, M_1, M_2$  e  $M_3$  em  $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{\theta_1 + \theta_2}))$ , dadas por

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\theta_1 + \theta_2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\theta_1 + \theta_2} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\theta_1 + \theta_2} \\ \sqrt{\theta_1 + \theta_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Se  $T \in \Gamma_{10\lambda}$ , então pela Proposição 4.2.3 e por (5.39),

$$T = \frac{1}{2^m} \begin{pmatrix} x_l + y_l \sqrt{\theta_1 + \theta_2} & z_l + w_l \sqrt{\theta_1 + \theta_2} \\ -z_l + w_l \sqrt{\theta_1 + \theta_2} & x_l - y_l \sqrt{\theta_1 + \theta_2} \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

onde  $m \in \mathbb{N}$  e  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta_1 + \theta_2]$ . Portanto<sup>41</sup>,

$$\varphi \left( \frac{x_l}{2^m} + \frac{y_l}{2^m} i + \frac{z_l}{2^m} j + \frac{w_l}{2^m} k \right) = T,$$

onde  $i^2 = \theta_1 + \theta_2$ ,  $j^2 = -1$ ,  $k = ij$  e  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \varphi(\mathcal{A})$  é o isomorfismo definido de modo análogo àquele em (4.12),  $\varphi(\mathcal{A}) \subset M(2, K(\sqrt{\theta_1 + \theta_2}))$  com  $\mathcal{A} = (\theta_1 + \theta_2, -1)_K$  e  $K = \mathbb{Q}(\theta_1 + \theta_2)$ . Claramente,  $\{1, \sqrt{\theta_1 + \theta_2}, \text{Im}, \sqrt{\theta_1 + \theta_2} \text{Im}\}$  é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ . ■

Encerramos os resultados desta seção com o Teorema 5.3.2 que é uma conexão dos resultados obtidos nos Teoremas 4.2.6 e 4.4.3.

**Teorema 5.3.2** *Para cada  $\lambda = 2^n$  com  $n > 0$ , ou seja, para cada gênero  $g = 5 \cdot 2^{n-1} - 2$  de  $\mathbb{D}^2/\Gamma_{10\lambda}$ , o grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{10\lambda}$ , associado à tesselação  $\{10\lambda, 2\lambda\}$ , é derivado de uma álgebra de divisão dos quatérnios  $\mathcal{A} = (\theta_1 + \theta_2, -1)_K$  sobre o corpo de números  $K = \mathbb{Q}(\theta_1 + \theta_2)$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 2^{n+1}$ , sendo  $\theta_1$  e  $\theta_2$  como em (5.40) e (5.41).*

**Demonstração:** Inicialmente, vamos estudar o traço do grupo  $\Gamma \simeq \Gamma_{10\lambda}$ . Seja  $T \in \Gamma$  como em (5.43). Pelo Teorema 5.3.1, existe  $x = \frac{x_l}{2^m} + \frac{y_l}{2^m} i + \frac{z_l}{2^m} j + \frac{w_l}{2^m} k \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (\theta_1 + \theta_2, -1)_R$  tal que  $\varphi(x) = T$ . Logo,  $\text{tr}(T) = \text{tr}(\varphi(x)) = \text{Trd}(x) = \frac{2x_l}{2^m} \in R$ . Portanto,  $\text{tr}(\Gamma) \subset R$ . Por outro lado, como  $K = \mathbb{Q}(\text{tr}(T) : T \in \Gamma) = \mathbb{Q}(\theta_1 + \theta_2)$ , segue a primeira condição do Teorema 3.3.6.

Consideremos agora o monomorfismo  $\varphi_2 : \mathbb{Q}(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por<sup>42</sup>  $\varphi_2(\theta_1 + \theta_2) = -(\theta_1 + \theta_2)$ , e o isomorfismo<sup>43</sup>  $\psi_2 : L \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $\psi_2(\sqrt{\theta_1 + \theta_2}) = i\sqrt{\theta_1 + \theta_2}$ , construído a partir de  $\varphi_2$ , onde  $L = K(\sqrt{\theta_1 + \theta_2})$ . Seja  $\mathcal{A}[\Gamma]$  a álgebra dos quatérnios sobre  $K = \mathbb{Q}(\theta_1 + \theta_2)$ , isto é,

$$\mathcal{A}[\Gamma] = \left\{ \sum_{i=1}^d a_i T_i : a_i \in K, T_i \in \Gamma \right\}.$$

<sup>41</sup>Observe que  $x = \frac{x_l}{2^m} + \frac{y_l}{2^m} i + \frac{z_l}{2^m} j + \frac{w_l}{2^m} k \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (\theta_1 + \theta_2, -1)_R$ .

<sup>42</sup>As potências em  $x$  do polinômio minimal  $p(x)$  de  $\theta_1 + \theta_2$  são todas pares. Dessa forma,  $-(\theta_1 + \theta_2)$  também é raiz de  $p(x)$ .

<sup>43</sup>Este isomorfismo é construído de modo análogo àquele em (4.14).

As expressões dos geradores  $G_l$  em (5.39) nos permitem concluir que

$$\mathcal{A}[\Gamma] = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b'_1 & a'_1 \end{pmatrix} : a_1, b_1 \in L \right\},$$

onde  $a'_1$  e  $b'_1$  são os conjugados de  $a_1$  e  $b_1$  em  $L$ , respectivamente. Sendo

$$\Psi : \mathcal{A}[\Gamma] \rightarrow M(2, \mathbb{C}),$$

o mergulho dado por

$$\Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_2(a_1) & \psi_2(b_1) \\ \psi_2(-b'_1) & \psi_2(a'_1) \end{pmatrix},$$

então,

$$\mathcal{A}^{\psi_2} = \Psi(\mathcal{A}[\Gamma]) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \psi_2(L) \right\}.$$

Mas de (3.20), segue que  $\mathcal{A}^{\varphi_2} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ , [22]. Assim, usando o Exemplo 3.1.3, temos, para qualquer  $T \in \Gamma$ , com  $\text{tr}(T) = a + a'$ , que

$$\psi_2(a) + \psi_2(a') = \psi_2(a + a') = \varphi_2(a + a') \in [-2, 2].$$

Portanto,  $\varphi_2(\text{tr}(\Gamma))$  é limitado em  $\mathbb{C}$ . Assim, do Teorema 3.3.6, concluímos que  $\Gamma$  é derivado de uma álgebra de divisão dos quatérnios  $\mathcal{A} = (\theta_1 + \theta_2, -1)_K$  sobre  $K = \mathbb{Q}(\theta_1 + \theta_2)$  e  $[K : \mathbb{Q}] = 2^{n+1}$ . ■

No próximo exemplo, vamos exibir os geradores  $G_1$  dos grupos fuchsianos aritméticos  $\Gamma \simeq \Gamma_{10\lambda}$  para os casos  $\lambda = 2, 4$ . Para tanto, faremos uso das igualdades em (5.39), (5.40) e (5.41).

**Exemplo 5.3.3** *Seja  $\Gamma_{10\lambda}$  o grupo fuchsiano aritmético associado à tesselação  $\{10\lambda, 2\lambda\}$ .*

1. Para  $\lambda = 2$ , o gerador  $G_1$  do grupo  $\Gamma_{20}$  é dado por

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + y_1 \sqrt[4]{10 + 2\sqrt{5}}}{8} & \frac{w_1 \sqrt[4]{10 + 2\sqrt{5}}}{8} \\ \frac{w_1 \sqrt[4]{10 + 2\sqrt{5}}}{8} & \frac{x_1 - y_1 \sqrt[4]{10 + 2\sqrt{5}}}{8} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 &= 12 + 4\sqrt{5} + 4\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, & y_1 &= -2\sqrt{2}, \\ w_1 &= -2\sqrt{2} - 2\sqrt{10} - (1 + \sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5} + 5}. \end{aligned}$$

2. Para  $\lambda = 4$ , o gerador  $G_1$  do grupo  $\Gamma_{40}$  é dado por

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - 4\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}}}{8} & \frac{w_1\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}}}{8} \\ \frac{w_1\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}}}{8} & \frac{x_1 + 4\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}}}{8} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 &= 12 + 10\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + (6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10})\sqrt{5 + \sqrt{5}}, \\ w_1 &= -4 - 6\sqrt{2} - 4\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - (4 + \sqrt{2} + \sqrt{10})\sqrt{5 + \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Nas Seções 5.4 e 5.5 consideramos as tesselações  $\{12g - 6, 3\}$  e  $\{12\lambda - 12, 4\}$ , onde identificamos os grupos  $\Gamma_{30}$  e  $\Gamma_{60}$  em ordens dos quatérnios para os casos em que  $g = 3$  e  $\lambda = 6$ , respectivamente.

## 5.4 Identificação de $\Gamma_{30}$ em Ordem dos Quatérnios

Em [11] foi estabelecido um conjunto de emparelhamentos das arestas do polígono hiperbólico regular  $P_{12g-6}$  associado à tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ , de modo que  $\mathbb{D}^2/\Gamma_{12g-6}$  é uma superfície compacta e orientável de gênero  $g$ . Essa tesselação é a mais densa dentre todas as tesselações, cuja densidade de empacotamento máxima,  $\frac{3}{\pi}$ , é alcançada quando  $g \rightarrow \infty$ . Entretanto, um valor bastante próximo de  $\frac{3}{\pi}$  é atingido para pequenos valores de  $g$ , (cf. Tabela 5.9). Por exemplo, para  $g = 3$ ,  $\{12g - 6, 3\} = \{30, 3\}$  tem densidade de empacotamento  $0.94585 \approx \frac{3}{\pi}$ . Portanto, este será o caso que iremos considerar.

**Teorema 5.4.1** [11] *Seja  $P_{12g-6}$  um polígono hiperbólico regular de  $12g - 6$  arestas associado à tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ . Então os geradores do grupo fuchsiano  $\Gamma_{12g-6}$ , obtidos de  $P_{12g-6}$ , são dados por*

$$T_{k+1} = T_C^{5k+1} T_1 T_{C^{-(5k+1)}} \quad e \quad S_{k+1} = T_C^{5k} T_1 T_{C^{-5k}}, \quad k = \{1, \dots, g-1\},$$

sendo  $S_1 = T_C T_1 T_{C^{-1}}$  e

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{12g-6}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{12g-6}} \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

a matriz elíptica de ordem  $12g - 6$ , e  $T_1 \in \Gamma_{12g-6}$  é tal que  $T_1(\tau_1) = \tau_{6g-2}$ .

Para  $g = 3$ , a matriz  $A_1$  em (5.28) associada a  $T_1$  assume a forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{2 \cos \frac{\pi}{3}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{30}} & \frac{\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{15} + 2 \cos \frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i(\frac{31}{30})\pi}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{30}} \\ \frac{\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{15} + 2 \cos \frac{2\pi}{3}} \cdot e^{-i(\frac{31}{30})\pi}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{30}} & \frac{2 \cos \frac{\pi}{3}}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{30}} \end{pmatrix}. \quad (5.45)$$

Temos também

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{30}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{30}} \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Sejam  $A_i$  e  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , as matrizes correspondentes às transformações  $T_i$  e  $S_i$ , respectivamente. Consideremos também

$$G_l = f^{-1}A_l f \quad \text{para } l = 1, 2, 3$$

e

$$G_4 = f^{-1}B_1 f, \quad G_5 = f^{-1}B_2 f, \quad G_6 = f^{-1}B_3 f,$$

os geradores de  $\Gamma \simeq \Gamma_{30}$ , sendo  $f$  como em (2.3). Usando as matrizes  $A_1$  em (5.45) e  $C$  em (5.46) e considerando que

$$4 \cos \frac{\pi}{15} = \sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}$$

obtemos os geradores de  $\Gamma \simeq \Gamma_{30}$ , dados por<sup>44</sup>

$$\begin{aligned} G_1 &= \begin{pmatrix} \frac{x_1 - 2\sqrt{-4+2\theta}}{8} & \frac{-w_1\sqrt{-4+2\theta}}{8} \\ \frac{-w_1\sqrt{-4+2\theta}}{8} & \frac{x_1 + 2\sqrt{-4+2\theta}}{8} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} - \frac{1}{4}i - \frac{w_1}{8}k\right), \\ G_2 &= \begin{pmatrix} \frac{2x_1 - y_2\sqrt{-4+2\theta}}{16} & \frac{-w_2\sqrt{-4+2\theta}}{16} \\ \frac{-w_2\sqrt{-4+2\theta}}{16} & \frac{2x_1 + y_2\sqrt{-4+2\theta}}{16} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} - \frac{y_2}{16}i - \frac{w_2}{16}k\right), \\ G_3 &= \begin{pmatrix} \frac{4x_1 - y_3\sqrt{-4+2\theta}}{32} & \frac{w_3\sqrt{-4+2\theta}}{96} \\ \frac{w_3\sqrt{-4+2\theta}}{96} & \frac{4x_1 + y_3\sqrt{-4+2\theta}}{32} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} - \frac{y_3}{32}i + \frac{w_3}{96}k\right), \\ G_4 &= \begin{pmatrix} \frac{4x_1 - y_4\sqrt{-4+2\theta}}{32} & \frac{-w_4\sqrt{-4+2\theta}}{32} \\ \frac{-w_4\sqrt{-4+2\theta}}{32} & \frac{4x_1 + y_4\sqrt{-4+2\theta}}{32} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{16} - \frac{y_4}{32}i - \frac{w_4}{32}k\right), \\ G_5 &= \begin{pmatrix} \frac{2x_1 - y_5\sqrt{-4+2\theta}}{16} & \frac{-w_5\sqrt{-4+2\theta}}{16} \\ \frac{-w_5\sqrt{-4+2\theta}}{16} & \frac{2x_1 + y_5\sqrt{-4+2\theta}}{16} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} - \frac{y_5}{16}i - \frac{w_5}{16}k\right), \\ G_6 &= \begin{pmatrix} \frac{2x_1 - y_6\sqrt{-4+2\theta}}{16} & \frac{w_6\sqrt{-4+2\theta}}{16} \\ \frac{w_6\sqrt{-4+2\theta}}{16} & \frac{2x_1 + y_6\sqrt{-4+2\theta}}{16} \end{pmatrix} = \varphi\left(\frac{x_1}{8} - \frac{y_6}{16}i + \frac{w_6}{16}k\right), \end{aligned}$$

onde

$$i^2 = -4 + 2\theta, \quad j^2 = -1, \quad k = ij,$$

<sup>44</sup>O isomorfismo  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \varphi(\mathcal{A})$  é definido de forma análoga ao de (3.4). Neste caso,  $\varphi(\mathcal{A}) \subset M(2, K(\sqrt{-4+2\theta}))$  com  $\mathcal{A} = (-4 + 2\theta, -1)_K$ , onde  $K = \mathbb{Q}(\theta_1)$ ,  $\theta = \sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}$  e  $\theta_1 = \sqrt{3} + \theta$ .

$$\begin{aligned}
x_1 &= 8 + 4\sqrt{5} + (3 + \sqrt{5})\tilde{\theta}, & w_1 &= 3\sqrt{3} + \sqrt{15} + (2 + \sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \\
y_2 &= 9 + 5\sqrt{5} + (2 + \sqrt{5})\tilde{\theta}, & w_2 &= \sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \\
y_3 &= 12 + 8\sqrt{5} + (3 + \sqrt{5})\tilde{\theta}, & w_3 &= 24\sqrt{3} + 12\sqrt{15} + (5\sqrt{3} + 3\sqrt{15})\tilde{\theta}, \\
y_4 &= 6 + 2\sqrt{5} + (1 + \sqrt{5})\tilde{\theta}, & w_4 &= 10\sqrt{3} + 6\sqrt{15} + (7 + 3\sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \\
y_5 &= 11 + 3\sqrt{5} + (2 + \sqrt{5})\tilde{\theta}, & w_5 &= \sqrt{3} + \sqrt{15} + (2 + \sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \\
y_6 &= 7 + 3\sqrt{5} + (2 + \sqrt{5})\tilde{\theta}, & w_6 &= 5\sqrt{3} + \sqrt{15} + (2 + \sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \\
\tilde{\theta} &= \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

e

$$\theta = \sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}. \quad (5.47)$$

Portanto, os geradores de  $\Gamma_{30}$  podem ser escritos na seguinte forma

$$G_l = \frac{1}{96} \begin{pmatrix} x_l + y_l\sqrt{-4 + 2\theta} & z_l + w_l\sqrt{-4 + 2\theta} \\ -z_l + w_l\sqrt{-4 + 2\theta} & x_l - y_l\sqrt{-4 + 2\theta} \end{pmatrix}, \quad l = 1, \dots, 8, \quad (5.48)$$

onde  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta_1]$  e  $\theta_1 = \sqrt{3} + \theta$ . Com as expressões dos geradores de  $\Gamma_{30}$ , podemos provar que  $\Gamma_{30}$  é um grupo fuchsiano aritmético.

**Teorema 5.4.2** *Os elementos do grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{30}$  são identificados, via isomorfismo<sup>45</sup>, com elementos do grupo dos invertíveis  $\mathcal{O}^1$  da ordem  $\mathcal{O} = (-4 + 2\theta, -1)_R$ , onde*

$$R = \left\{ \frac{\alpha}{96^n} : \alpha \in \mathbb{Z}[\theta_1] \quad e \quad n \in \mathbb{N} \right\},$$

sendo  $\theta$  como em (5.47) e  $\theta_1 = \sqrt{3} + \theta$ . Disso segue que  $\{1, \sqrt{-4 + 2\theta}, \text{Im}, \sqrt{-4 + 2\theta} \text{Im}\}$  é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ .

**Demonstração:** Sejam as matrizes  $M_0, M_1, M_2$  e  $M_3$  em  $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{-4 + 2\theta}))$ , dadas por

$$\begin{aligned}
M_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & M_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{-4 + 2\theta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-4 + 2\theta} \end{pmatrix}, \\
M_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-4 + 2\theta} \\ \sqrt{-4 + 2\theta} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Se  $T \in \Gamma_{30}$ , então pela Proposição 4.2.3 e por (5.48), podemos escrever

$$T = \frac{1}{96^s} \begin{pmatrix} x_l + y_l\sqrt{-4 + 2\theta} & z_l + w_l\sqrt{-4 + 2\theta} \\ -z_l + w_l\sqrt{-4 + 2\theta} & x_l - y_l\sqrt{-4 + 2\theta} \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

<sup>45</sup>Esse isomorfismo, digamos  $\varphi$ , é tal que  $\Gamma_{30} \simeq \Gamma < \Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O}) = \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\{\pm I_2\}}$ , onde  $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$ .

onde  $s \in \mathbb{N}$  e  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta_1]$ . Portanto<sup>46</sup>,

$$\varphi\left(\frac{x_l}{96^s} + \frac{y_l}{96^s}i + \frac{z_l}{96^s}j + \frac{w_l}{96^s}k\right) = T,$$

sendo  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \varphi(\mathcal{A})$ ,  $\varphi(\mathcal{A}) \subset M(2, K(\sqrt{-4 + 2\theta}))$ , o isomorfismo definido por

$$\varphi(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) = x_0 \cdot M_0 + x_1 \cdot M_1 + x_2 \cdot M_2 + x_3 \cdot M_3,$$

$i^2 = -4 + 2\theta$ ,  $j^2 = -1$ ,  $k = ij$ ,  $\mathcal{A} = (-4 + 2\theta, -1)_K$  e  $K = \mathbb{Q}(\theta_1)$ . Temos também que  $\{1, \sqrt{-4 + 2\theta}, \text{Im}, \sqrt{-4 + 2\theta} \text{Im}\}$  é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ , onde  $\text{Im}$  é a unidade imaginária. ■

**Teorema 5.4.3** *O grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{30}$ , associado à tesselação  $\{30, 3\}$ , é derivado de uma álgebra de divisão dos quatérnios<sup>47</sup>  $\mathcal{A} = (-4 + 2\theta, -1)_K$  sobre o corpo de números<sup>48</sup>  $K = \mathbb{Q}(\theta_1)$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 8$ , onde*

$$\theta_1 = \sqrt{3} + \theta \quad e \quad \theta = \sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}. \quad (5.50)$$

**Demonstração:** Seja  $T \in \Gamma$  com em (5.49). Pelo Teorema 5.4.2, existe  $x \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (-4 + 2\theta, -1)_R$  tal que  $\varphi(x) = T$ . Assim,  $\text{tr}(T) = \text{tr}(x) = \frac{2x_l}{96^s} \in R$  e, portanto,  $\text{tr}(\Gamma) \subset R$ . Por outro lado, como  $K = \mathbb{Q}(\text{tr}(T) : T \in \Gamma) = \mathbb{Q}(\theta_1)$ , segue a primeira condição do Teorema 3.3.6.

Como  $[K : \mathbb{Q}] = 8$ , então existem oito monomorfismos

$$\varphi_i : \mathbb{Q}(\theta_1) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Observamos que a aplicação  $\varphi$  tal que  $\varphi(\theta_1) = -\theta_1$  não define um homomorfismo entre  $\mathbb{Q}(\theta_1)$  e  $\mathbb{R}$ , uma vez que  $1196x^3$  é uma parcela do polinômio minimal  $p(x)$  de  $\theta_1$  sobre  $\mathbb{Q}$ ; isso significa que  $p(-\theta_1) \neq 0$ . Escolhamos então  $\varphi_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\varphi_2(\theta_1) = \theta'_1 = -\sqrt{3} - \sqrt{9 - \sqrt{5} + \sqrt{30 + 6\sqrt{5}}}$$

e, a partir de  $\varphi_2$ , consideremos o isomorfismo<sup>49</sup>

$$\psi_2 : L \rightarrow \mathbb{C}$$

dado por  $\psi_2(\sqrt{\theta_1}) = i\sqrt{-\theta'_1}$ , onde  $L = K(\sqrt{\theta_1})$  e  $[L : K] = 2$ . Seja  $\mathcal{A}[\Gamma]$  a álgebra dos quatérnios sobre  $K = \mathbb{Q}(\theta_1)$ , isto é,

$$\mathcal{A}[\Gamma] = \left\{ \sum_{i=1}^d a_i T_i : a_i \in K, T_i \in \Gamma \right\}.$$

<sup>46</sup>Observe que  $\frac{x_l}{96^s} + \frac{y_l}{96^s}i + \frac{z_l}{96^s}j + \frac{w_l}{96^s}k \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (-4 + 2\theta, -1)_R$ .

<sup>47</sup>O elemento  $-4 + 2\theta$  não é um quadrado em  $K = \mathbb{Q}(\theta_1)$ , ou seja, não existe  $t \in K - \{0\}$  tal que  $t^2 = -4 + 2\theta$ .

<sup>48</sup>O polinômio minimal de  $\theta_1$  sobre  $\mathbb{Q}$  é  $p(x) = x^8 + 4x^7 - 40x^6 - 164x^5 + 274x^4 + 1196x^3 - 160x^2 - 2476x - 1499$ .

<sup>49</sup>Na verdade,  $\psi_2 : L \rightarrow \psi_2(L)$ .

Com as expressões dos geradores  $G_i$  de  $\Gamma_{30}$ , obtemos

$$\mathcal{A}[\Gamma] = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b'_1 & a'_1 \end{pmatrix} : a_1, b_1 \in L \right\},$$

onde  $a'_1$  e  $b'_1$  são os conjugados de  $a_1$  e  $b_1$  em  $L$ , respectivamente. Seja

$$\Psi : \mathcal{A}[\Gamma] \rightarrow M(2, \mathbb{C})$$

como sendo o mergulho dado por

$$\Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \psi_2(a_1) & \psi_2(b_1) \\ \psi_2(-b'_1) & \psi_2(a'_1) \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\mathcal{A}^{\psi_2} = \Psi(\mathcal{A}[\Gamma]) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \psi_2(L) \right\}.$$

Mas de (3.20), segue que  $\mathcal{A}^{\varphi_2} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ , [22]. Assim, usando o Exemplo 3.1.3, temos, para qualquer  $T \in \Gamma$ , com  $tr(T) = a + a'$ , que

$$\psi_2(a) + \psi_2(a') = \psi_2(a + a') = \varphi_2(a + a') \in [-2, 2].$$

Portanto,  $\varphi_2(tr(\Gamma))$  é limitado em  $\mathbb{C}$ . Assim, concluímos que  $\Gamma$  é derivado de uma álgebra dos quatérnios  $\mathcal{A} = (-4 + 2\theta, -1)_K$  sobre  $K = \mathbb{Q}(\theta_1)$  e  $[K : \mathbb{Q}] = 8$ . ■

## 5.5 Identificação de $\Gamma_{60}$ em Ordem dos Quatérnios

Encerraremos o processo de identificação de grupos fuchsianos aritméticos em ordem dos quatérnios considerando a tesselação  $\{12\lambda - 12, 4\}$  para o caso particular de  $\lambda = 6$ ,  $\{12\lambda - 12, 4\} = \{60, 4\}$ , cuja densidade de empacotamento é aproximadamente 0.89364. Como o processo de identificação é análogo ao da Seção 5.4, apresentaremos apenas um esboço das demonstrações dos Teoremas 5.5.1 e 5.5.2.

**Teorema 5.5.1** *Os elementos do grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{60}$  são identificados, via isomorfismo, com elementos do grupo dos invertíveis  $\mathcal{O}^1$  da ordem  $\mathcal{O} = (2\theta, -1)_R$ , sendo*

$$R = \left\{ \frac{\alpha}{96^s} : \alpha \in \mathbb{Z}[\theta_1] \quad e \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N} \right\},$$

onde  $s \in \mathbb{N}$ ,

$$\theta_1 = \sqrt{3} + \theta \quad e \quad \theta = \sqrt{8 + 2\sqrt{9 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}}. \quad (5.51)$$

Portanto,  $\{1, \sqrt{2\theta}, \text{Im}, \sqrt{2\theta} \text{Im}\}$  é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ .

**Demonstração:** Com os emparelhamentos das arestas de  $P_{60}$  em (5.9), é possível padronizar os geradores de  $\Gamma_{60}$  na forma

$$G_l = \frac{1}{96^s} \begin{pmatrix} x_l + y_l\sqrt{2\theta} & z_l + w_l\sqrt{2\theta} \\ -z_l + w_l\sqrt{2\theta} & x_l - y_l\sqrt{2\theta} \end{pmatrix},$$

onde  $s \in \mathbb{N}$  e  $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta_1]$ . ■

**Teorema 5.5.2** *O grupo fuchsiano  $\Gamma \simeq \Gamma_{60}$  associado à tesselação  $\{60, 4\}$ , é derivado de uma álgebra de divisão dos quatérnios<sup>50</sup>  $\mathcal{A} = (2\theta, -1)_K$  sobre o corpo de números<sup>51</sup>  $K = \mathbb{Q}(\theta_1)$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 8$ , sendo  $\theta$  e  $\theta_1$  como em (5.51).*

**Demonstração:** Basta considerarmos os emparelhamentos das arestas de  $P_{60}$ , construídos na Seção 5.5 em (5.9) e fazer uso da matriz  $A_1$  em (5.28) com  $p = 60$ , associada à transformação  $T_1$ , tal que  $T_1(\tau_1) = \tau_{31}$ . ■

## 5.6 Densidade de Empacotamento

Nesta seção faremos algumas considerações sucintas sobre os desempenhos das tesselações hiperbólicas construídas na Seção 5.1 com relação a densidade de empacotamento, cujos cálculos são baseados nos resultados obtidos em [10]. Naturalmente, existe uma relação bastante interessante sobre densidade de empacotamento de uma tesselação hiperbólica  $\{p, q\}$  e a probabilidade de erro associada a sinais de uma constelação de sinais obtida de  $\{p, q\}$ . Entretanto, esse tipo de análise não se encaixa na proposta de nosso trabalho podendo, portanto, ser explorada em trabalhos futuros.

Antes de fazer estas considerações, gostaríamos de apresentar, mesmo que de forma sintetizada, o conceito de densidade de empacotamento em  $\mathbb{H}^2$ .

Desse modo, definimos o conceito de empacotamento de um domínio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^2$ , isto é, um subconjunto fechado com interior não-vazio.

**Definição 5.6.1** *Um empacotamento de um domínio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^2$  é uma família  $\{\mathcal{D}_i\}_{i \in I}$ ,  $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{H}^2$  sendo todos isométricos a  $\mathcal{D}$  com  $\mathring{\mathcal{D}}_i \cap \mathring{\mathcal{D}}_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ .*

A seguir a definição de empacotamento de bolas de  $\mathbb{H}^2$  bem como a definição de célula de Voronoi.

**Definição 5.6.2** *Um empacotamento de bolas  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(r)$  de  $\mathbb{H}^2$  é um conjunto de bolas  $B = B(r)$  de raio  $r$  disjuntas e que não se sobrepõem.*

<sup>50</sup>O elemento  $2\theta$  não é um quadrado em  $K = \mathbb{Q}(\theta_1)$ .

<sup>51</sup>O polinômio minimal de  $\theta_1$  sobre  $\mathbb{Q}$  é  $p(x) = x^8 - 52x^6 + 734x^4 - 3428x^2 + 3721$ .

**Definição 5.6.3** Consideramos uma célula de Voronoi ou um domínio de Voronoi  $\mathcal{D}$  em  $\mathbb{H}^2$  como,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(B; \mathcal{B}) = \{p \in \mathbb{H}^2 : d(p; B) \leq d(p; B'), \quad \forall B' \in \mathcal{B}\}. \quad (5.52)$$

Observamos que  $\mathcal{D}$  é a interseção de uma coleção finita de semi-espacos em  $\mathbb{H}^2$ , ou seja, é um polígono convexo. A família  $\{\mathcal{D}(B; \mathcal{B}) : B \in \mathcal{B}\}$  cobre  $\mathbb{H}^2$  sem sobreposições.

De certo modo, esses conceitos já foram tratados no Capítulo 2, quando da definição de região fundamental de um grupo fuchsiano (Definição 2.2.22).

O conceito mais importante relacionado com empacotamentos é o de densidade. De uma maneira intuitiva, para um empacotamento temos que a densidade é a razão entre a soma das áreas dos conjuntos convexos empacotados e a do espaço no qual foram empacotados, que sempre é um número menor ou igual a 1.

Consideraremos, agora, a definição precisa de densidade de empacotamento em  $\mathbb{H}^2$ . Vale observar que, diferente da definição euclidiana de densidade, o conceito de densidade no plano hiperbólico é definida de forma local.

**Definição 5.6.4** A densidade local  $ld(B, \mathcal{B})$  de  $B$  em  $\mathcal{B}$  é dada pela densidade de  $B$  com respeito ao seu domínio de Voronoi  $\mathcal{D}$ , isto é,

$$ld(B, \mathcal{B}) = \frac{vol(B)}{vol(\mathcal{D})},$$

onde  $\mathcal{D} \supset B$  é a célula de Voronoi que a contém. Observamos que  $ld(B, \mathcal{B}) < 1$ .

Os domínios de Voronoi que estamos interessados são de grupos fuchsianos  $\Gamma_p$ , obtidos a partir de tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$ , ou seja, de polígonos hiperbólicos regulares  $P_p$  de  $p$  arestas,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{z_0}(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(z, z_0) \leq d(z, T(z_0)), \quad \forall T \in \Gamma_p\}.$$

Lembramos que, se  $\mathcal{D}$  é uma região fundamental de  $\Gamma_p$ , então  $T(\mathcal{D})$  também o é. Neste caso, todos polígonos são isométricos, e daí a densidade local está bem definida, independente do polígono escolhido. Desse modo, temos que

$$ld(B, \mathcal{B}) = ld(p, q) = \frac{\text{área}(\text{circunferência inscrita})}{\text{área}(\text{polígono})} = \frac{\text{área}(C)}{\text{área}(P_p)},$$

onde  $C$  denota o maior círculo hiperbólico inscrito em  $P_p$ . Portanto, [10],

$$ld(p, q) = 2 \left( \frac{\cos \frac{\pi}{q} - \text{sen} \frac{\pi}{p}}{\text{sen} \frac{\pi}{p}} \right) \left( \frac{q}{p(q-2) - 2q} \right). \quad (5.53)$$

Portanto,

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} ld(p, q) = \frac{2}{\pi}. \quad (5.54)$$

$\lambda$	gênero $g$	densidade
2	2	0.70711
3	3	0.68301
4	4	0.67122
5	5	0.66423
6	6	0.65958
7	7	0.65627
8	8	0.65380
9	9	0.65188
10	10	0.65035
$10^{12}$	$10^{12}$	0.63662
$\lambda \rightarrow \infty$	$g \rightarrow \infty$	0.63662

Tabela 5.1: Tesselação  $\{4g, 4g\}$ 

$\lambda$	gênero $g$	densidade
3	5	0.75977
5	11	0.69980
7	17	0.679045
9	23	0.66855
11	29	0.66221
13	35	0.65797
15	41	0.65494
17	47	0.652659
19	53	0.65088
21	59	0.64943
$10^{10} + 1$	$3 \cdot 10^{10} - 1$	0.63662
$\lambda \rightarrow \infty$	$g \rightarrow \infty$	0.63662

Tabela 5.2: Tesselação  $\{12\lambda - 12, 4\lambda - 4\}$ 

$\lambda$	gênero $g$	densidade
3	8	0.76966
5	18	0.73038
7	32	0.70902
9	50	0.69560
11	72	0.68637
13	98	0.67964
15	128	0.67452
17	162	0.67049
19	200	0.66723
$2 \cdot 10^{12} + 1$	$2 \cdot (10^{12} + 1)^2$	0.63662
$\lambda \rightarrow \infty$	$g \rightarrow \infty$	0.63662

Tabela 5.3: Tesselação  $\{2\lambda^2 + 6\lambda + 4, 2\lambda + 2\}$

$\lambda$	gênero $g$	densidade
4	5	0.84246
8	18	0.76252
12	39	0.72700
16	68	0.70706
20	105	0.69432
24	150	0.68547
28	203	0.67898
32	264	0.67400
36	333	0.67008
$4 \cdot 10^{12}$	$4 \cdot 10^{24} + 10^{12}$	0.66690
$\lambda \rightarrow \infty$	$g \rightarrow \infty$	0.63662

Tabela 5.4: Tesselação  $\{\lambda^2 + 3\lambda + 2, \lambda + 1\}$ 

$\lambda$	gênero $g$	densidade
2	3	0.88003
4	8	0.76966
6	13	0.72734
8	18	0.70535
10	23	0.69192
12	28	0.68287
14	33	0.67636
16	38	0.67145
18	43	0.66763
$2 \cdot 10^{12}$	$5 \cdot 10^{12} - 2$	0.63662
$\lambda \rightarrow \infty$	$g \rightarrow \infty$	0.63662

Tabela 5.5: Tesselação  $\{10\lambda, 2\lambda\}$ 

$\lambda$	gênero $g$	densidade
3	8	0.76966
5	11	0.77386
7	14	0.77617
9	17	0.77764
11	20	0.77866
13	23	0.7794
15	26	0.77997
17	29	0.78042
19	32	0.78078
$2^{10} + 1$	$3 \cdot 2^9 + 5$	0.78414
$\lambda \rightarrow \infty$	$g \rightarrow \infty$	0.78421

Tabela 5.6: Tesselação  $\{8\lambda + 16, 8\}$

$\lambda$	gênero $g$	densidade
3	5	0.84246
5	8	0.84888
7	11	0.85162
9	14	0.85313
11	17	0.85409
13	20	0.85475
15	23	0.85524
17	26	0.85561
19	29	0.85591
$2 \cdot 10^{12} + 1$	$3 \cdot 10^{12} + 2$	0.85839
$\lambda \rightarrow \infty$	$g \rightarrow \infty$	0.85839

Tabela 5.7: Tesselação  $\{10\lambda, 5\}$ 

$\lambda$	gênero $g$	densidade
2	2	0.86603
4	5	0.88914
6	8	0.89364
8	11	0.89555
10	14	0.89661
12	7	0.89729
14	20	0.89776
16	23	0.89810
18	26	0.89836
$2 \cdot 10^{12}$	$3 \cdot 10^{12} - 1$	0.90032
$\lambda \rightarrow \infty$	$g \rightarrow \infty$	0.90032

Tabela 5.8: Tesselação  $\{12\lambda - 12, 4\}$ 

$\lambda$	gênero $g$	densidade
2	2	0.93969
3	3	0.94585
4	4	0.94846
5	5	0.94990
6	6	0.95082
7	7	0.95145
8	8	0.95192
9	9	0.95227
10	10	0.95255
11	11	0.95278
$10^{12}$	$10^{12}$	0.95493
$\lambda \rightarrow \infty$	$g \rightarrow \infty$	0.95493

Tabela 5.9: Tesselação  $\{12g - 6, 3\}$

Nas Tabelas anteriores, temos na primeira coluna os valores de  $\lambda$ , na segunda os gêneros  $g$  e na terceira as respectivas densidades de empacotamento, calculadas usando (5.53).

Por (5.54), concluímos que os valores das densidades de empacotamentos das tesselações  $\{4g, 4g\}$ ,  $\{12\lambda - 12, 4\lambda - 4\}$ ,  $\{2\lambda^2 + 6\lambda + 4, 2\lambda + 2\}$ ,  $\{\lambda^2 + 3\lambda + 2, \lambda + 1\}$  e  $\{10\lambda, 2\lambda\}$  convergem assintoticamente para o valor de  $\frac{2}{\pi}$ , e pelas Tabelas 5.1, 5.2, 5.5, 5.4 e 5.3,  $\{8, 8\}$ ,  $\{24, 8\}$ ,  $\{20, 4\}$ ,  $\{40, 8\}$  e  $\{30, 5\}$  são as suas tesselações mais densas, respectivamente.

As tesselações  $\{10\lambda, 5\}$ ,  $\{12\lambda - 12, 4\}$  e  $\{8\lambda + 16, 8\}$  têm densidade máxima de  $\frac{5(1+\sqrt{5})}{6\pi}$ ,  $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$  e  $\frac{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}{3\pi}$ , respectivamente, as quais são alcançadas quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Entretanto, como mostra as Tabelas 5.7, 5.8 e 5.6, valores muito próximos das densidades máximas são atingidos para pequenos valores de  $\lambda$ . Em geral, essa propriedade é compartilhada por toda tesselação hiperbólica  $\{p, q\}$ , com  $q$  fixo.

Denotando por  $\Delta_q$  o valor da densidade de empacotamento da tesselação  $\{p, q\}$ , obtemos, em geral, as desigualdades

$$\Delta_{4g} < \Delta_{4\lambda-4} < \Delta_{2\lambda+2} < \Delta_{\lambda+1} < \Delta_{2\lambda} < \Delta_8 < \Delta_5 < \Delta_4 < \Delta_3.$$

## 5.7 Exemplos de Rotulamento Algébrico de Sinais de Constelações $G_{\mathfrak{p}}(0)$

Nesta seção forneceremos alguns exemplos de rotulamentos de sinais de constelações obtidas a partir de grupos fuchsianos aritméticos  $\Gamma_{4g}$ , correspondentes às tesselações auto-duais  $\{4g, 4g\}$ , para os casos  $g = 2, 4$ . Antes, apresentamos de modo generalizado as constelações de sinais geometricamente uniformes consideradas neste trabalho, obtidas de tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$ .

Seja  $\Gamma_p$  um grupo fuchsiano aritmético correspondendo à tesselação  $\{p, q\}$ , tal que  $\Gamma_p < \Gamma$  ( $\Gamma_p$  é um subgrupo de  $\Gamma$ ), com

$$\Gamma = \Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O}) = \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\{\pm I_2\}},$$

onde  $\mathcal{O}$  é uma ordem da álgebra  $\mathcal{A} = (a, b)_K$ , associada com o grupo  $\Gamma_p$  e  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \varphi(\mathcal{A})$  é um isomorfismo, onde  $\varphi(\mathcal{A})$  é uma sub-álgebra de divisão da álgebra  $M(2, K(\sqrt{a}))$ . Para um ideal  $\mathfrak{p}$  em  $\mathfrak{D}_K$  (anel de inteiros de  $K$ ),

$$\Gamma_{\mathfrak{p}} = \frac{\varphi(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1)}{\{\pm I_2\}},$$

é um subgrupo normal de  $\Gamma$ , [5], onde

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1 = \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{p}\} \cup \{\pm 1\},$$

é um subgrupo normal do grupo dos invertíveis de  $\mathcal{O}$ , denotado por  $\mathcal{O}^1$ , sendo

$$\{1, i, j, ij\},$$

uma  $K$ -base da álgebra  $\mathcal{A}$  satisfazendo

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad k = ij = -ji.$$

Desse modo,

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_{\mathfrak{p}}} \simeq \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\varphi(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1)} = G_{\mathfrak{p}}.$$

Portanto, a  $G_{\mathfrak{p}}$ -órbita de 0 (baricentro de um polígono hiperbólico regular  $P_p$ ),

$$G_{\mathfrak{p}}(0) = \{T(0) : T \in G_{\mathfrak{p}}\}, \quad (5.55)$$

é uma constelação de sinais geometricamente uniforme no espaço quociente  $\mathbb{D}^2/G_{\mathfrak{p}}$ . Observamos que  $\mathcal{O}^1 \simeq \varphi(\mathcal{O}^1)$  e  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1 \simeq \varphi(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1)$ . Assim,

$$\frac{\mathcal{O}^1}{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1} \simeq \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\varphi(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1)}. \quad (5.56)$$

Portanto, a constelação de sinais em (5.55) fica, totalmente caracterizada, pelo grupo quociente  $\frac{\mathcal{O}^1}{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1}$ , isto é, descrevendo os elementos de  $\frac{\mathcal{O}^1}{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1}$  estamos, conseqüentemente, descrevendo todos os sinais de  $G_{\mathfrak{p}}(0)$ .

Em [5], foi apresentado um algoritmo de rotulamento para os sinais de uma  $G_{\mathfrak{p}}$ -órbita como em (5.55), obtida a partir de um grupo  $\Gamma_{4g}$ , cujos elementos são identificados com elementos de uma ordem  $\mathcal{O}$  de uma álgebra  $\mathcal{A}$  sobre um corpo de números  $K$  de grau 2, ou seja,  $\mathcal{A} = (a, b)_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ , onde  $d$  é um número inteiro positivo livre de quadrado.

Como foi mostrado no Capítulo 4, os grupos  $\Gamma_{4g}$ , provenientes de tesselações  $\{4g, 4g\}$  que estão associados às ordens dos quatérnios de álgebras sobre corpos de números de grau 2 são  $\Gamma_8$  e  $\Gamma_{12}$ , obtidos de  $\{8, 8\}$  e  $\{12, 12\}$ , respectivamente. Para estes casos, o algoritmo é descrito como segue.

**Algoritmo de Rotulamento Algébrico de Constelações de Sinais em Tesselações  $\{4g, 4g\}$  no Plano Hiperbólico.**

**Passo 1)** Seja  $\mathcal{O}^1$  o grupo dos invertíveis da ordem  $\mathcal{O} = (a, b)_{\mathbb{Z}[\theta]}$  em uma álgebra  $\mathcal{A} = (a, b)_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ , associada ao grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma_{4g}$ ,  $a = a_1 + a_2\theta$ ,  
 $b = b_1 + b_2\theta \in \mathbb{Z}[\theta]$ , tal que  $d(\mathcal{O}) = d(\mathcal{A})$ .

**Passo 2)** Considere uma base  $\{1, i, j, ij\}$  de  $\mathcal{O}$  sobre  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  e determine o polinômio minimal  $p(x)$  de  $k = ij$  sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Passo 3)** Fixe um número primo  $p$ , e considere o polinômio  $\overline{p(x)} = p(x) \pmod{p}$ .

**Passo 4)** Caso o polinômio  $\overline{p(x)}$  do Passo 3 tenha solução em  $\mathbb{Z}_p$ , considere os subgrupos normais  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1 \cup \{\pm 1\}$  em  $\mathcal{O}^1$ , para os ideais  $\mathfrak{p}$  em  $\mathbb{Z}[\theta]$  que tenham normas algébrica potências de  $p$ .

**Passo 5)** Caso o polinômio  $\overline{p(x)}$  satisfaça o Passo 4, considere a raiz  $s$  de  $\overline{p(x)}$  como rótulo do elemento  $ij$ .

**Passo 6)** Se  $s$  não for primo, determine a fatoração de  $s$  como sendo dois números inteiros módulo  $p$ , ou seja,  $s = u \cdot v$ ,  $1 < u, v < p$ . Então  $u$  será o rótulo do elemento  $i$  e  $v$  será o rótulo do elemento  $j$ , ou vice-versa, caso contrário retorne ao Passo 3.

**Passo 7)** Caso o Passo 6 seja satisfeito, determine as soluções das equações diofantinas  $a_1 + a_2r_1 = u^2 \pmod{p}$  e  $b_1 + b_2r_1 = v^2 \pmod{p}$ , onde  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ , provenientes de  $a = a_1 + a_2\theta$ ,  $b = b_1 + b_2\theta$ . Atribuímos como sendo  $r$  o rótulo do elemento  $\theta$ , onde  $r$  é dado por  $r = r_1$  ou  $r = r_2$ , mas desde que  $r_1 \neq s, u$  e  $r_2 \neq s, v$ .

**Passo 8)** Caso todos os Passos anteriores sejam satisfeitos, o rótulo do elemento

$$x = (x_0 + x'_0\theta) + (x_1 + x'_1\theta)i + (x_2 + x'_2\theta)j + (x_3 + x'_3\theta)ij \in \mathcal{O}^1$$

é dado pela função de rotulamento multiplicativo  $l : \mathcal{O}^1 \rightarrow G_p$ , onde  $G_p$  é um grupo, definida por

$$l(x) = (x_0 + x'_0r) + (x_1 + x'_1r)u + (x_2 + x'_2r)v + (x_3 + x'_3r)s \pmod{p}.$$

**Observação 5.7.1** O número primo  $p$  (que não tem relação com a notação  $\Gamma_p$ ) do Passo 3 do algoritmo está relacionado com o número de pontos da constelação de sinais  $G_{\mathfrak{p}}(0)$  como em (5.55) e, portanto, da ordem do grupo quociente  $\frac{\mathcal{O}^1}{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1}$  em (5.56).

Os exemplos de rotulamentos a seguir têm como objetivo unir, de forma ilustrativa, o processo de identificação de um grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma_p$  em ordens dos quatérnios  $\mathcal{O}$  com os sinais da constelação  $G_p(0)$ . Como mencionamos anteriormente, a proposta de descrever  $G_p(0)$  como um todo, com os respectivos rótulos de seus sinais depende, totalmente, da apresentação das classes de equivalências do grupo quociente  $\frac{\mathcal{O}^1}{\mathcal{O}^\Gamma}$ . Uma vez apresentadas essas classes, os sinais de  $G_p(0)$ , bem como os seus rótulos, surgem de forma natural, como consequência da identificação dos elementos de  $\Gamma_p$  com elementos de  $\mathcal{O}$ . Entretanto, não será esse o caso a ser considerado a seguir. Os Exemplos 5.7.2 e 5.7.3 ilustram, mesmo que de forma pontual, esse processo.

**Exemplo 5.7.2** *Seja  $\Gamma_8$  o grupo fuchsiano aritmético associado à tesselação  $\{8, 8\}$ . Pelo Teorema 4.2.5, os elementos de  $\Gamma_8$  estão associados com elementos da ordem  $\mathcal{O}_1 = (\sqrt{2}, -1)_R$  em  $\mathcal{A} = (\sqrt{2}, -1)_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$ , onde*

$$R = \left\{ \frac{\alpha}{2^m} : \alpha \in \mathbb{Z}[\theta] \quad e \quad m \in \mathbb{N} \right\}$$

e

$$\{1, i, j, ij\} = \{1, \sqrt[4]{2}, \text{Im}, \sqrt[4]{2} \text{Im}\}$$

é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ . Consideremos também a ordem  $\mathcal{O}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})_R$ . É claro que  $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ . Entretanto, a escolha de  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $b = \frac{-1}{2}$  é apenas um artifício matemático, de modo a obtermos um número primo  $p$  que satisfaça os passos do algoritmo anterior. Além disso, o isomorfismo em (4.12) foi construído usando os valores pré-estabelecidos de  $a = \sqrt{2}$  e  $b = -1$ . Consideremos agora uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}_2$ ,

$$\{1, i', j', i'j'\} = \left\{ 1, \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}\text{Im}}{2}, \frac{\sqrt[4]{2}\text{Im}}{2} \right\}.$$

Temos que o polinômio minimal de  $k' = i'j' = \frac{\sqrt[4]{2}\text{Im}}{2}$  sobre  $\mathbb{Q}$  é  $p(x) = x^4 - \frac{1}{8} \in R[x]$ . Fixemos o número primo  $p = 7$ . Assim,  $p_1(x) = p(x) \pmod{7} = x^4 + 6$ , ou seja,  $p_1(x) = x^4 + 6$ , e  $s = 6$  é a solução de  $p_1(x)$  em  $\mathbb{Z}_7$ . Sendo  $\mathcal{O}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})_R$ , então  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $b = \frac{-1}{2}$ . Logo, as representações de  $a$  e  $b$  na  $R'$ -base de  $R$ ,  $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ , onde  $R' = \left\{ \frac{z}{2^m} : z \in \mathbb{Z} \quad e \quad m \in \mathbb{N} \right\}$ , são<sup>52</sup>

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_1 = 0 \quad e \quad a_2 = 1,$$

$$b = \frac{-1}{2} = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b_1 = -1 \quad e \quad b_2 = 0.$$

Considerando a  $R'$ -base de  $R$ , vamos considerar  $r$  o rótulo do elemento  $\theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ao invés de  $\theta = \sqrt{2}$ . Como  $s = 3 \cdot 2$ , vamos escolher  $u = 3$  e  $v = 2$ . Desse modo,  $s = 6$  é o rótulo de

<sup>52</sup>Na representação de  $a$  na  $R'$ -base de  $R$ , apenas um dos coeficientes é diferente de zero, isso se deve à expressão da ordem  $\mathcal{O}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2})_R$ . O mesmo vale para  $b$ .

$i'j' = \frac{\sqrt[4]{2}\text{Im}}{2}$ ,  $u = 3$  é o rótulo de  $i' = \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}{2}$  e  $v = 2$  é o rótulo de  $j' = \frac{\sqrt{2}\text{Im}}{2}$ . Por outro lado, o rótulo de  $\theta'$  é obtido por uma das equações diofantinas do Passo 7. Consideremos a equação  $a_1 + r_1a_2 = u^2 \pmod{7}$ , ou seja,  $r_1 = 9 \pmod{7}$ , de onde obtemos  $r_1 = 2$ . Como  $r_1 \neq 6, 3$ , temos que  $r_1 = 2$  é o rótulo de  $\theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Vamos determinar os rótulos dos sinais  $z_1 = T_1(0)$  e  $z_2 = T_1^2(0)$  de  $G_{\mathfrak{p}}(0) = \{T(0) : T \in G_{\mathfrak{p}}\}$ , onde  $\mathfrak{p} = \langle 7 \rangle$ , provenientes do gerador  $G_1$  de  $\Gamma_8$  que, pelas Seções 4.1 e 4.2, é dado por<sup>53</sup>

$$G_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - y_1\sqrt[4]{2} & -z_1 + w_1\sqrt[4]{2} \\ z_1 + w_1\sqrt[4]{2} & x_1 + y_1\sqrt[4]{2} \end{pmatrix},$$

onde  $x_1 = y_1 = z_1 = 2 + \sqrt{2}$  e  $w_1 = \sqrt{2}$ . Observamos que  $G_1 = f^{-1}A_1f$  e  $G_1^2 = f^{-1}A_1^2f$ . Portanto, ao rotularmos  $z_1$  e  $z_2$ , estamos rotulando<sup>54</sup>  $z'_1 = \frac{b_1}{\bar{a}_1}$  e  $z'_2 = \frac{b_2}{\bar{a}_2}$ ,  $z'_1, z'_2 \in \mathbb{D}^2$ , respectivamente, onde

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \bar{b}_1 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \quad e \quad A_1^2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ \bar{b}_2 & \bar{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que

$$\frac{\mathcal{O}^1}{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1} \simeq \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\varphi(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1)} = G_{\mathfrak{p}}.$$

Desse modo, rotulando um elemento  $x \in \mathcal{O}^1$  (ou sua classe  $[x] \in \frac{\mathcal{O}^1}{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1}$ ), estamos, conseqüentemente, rotulando  $\varphi(x) \in \varphi(\mathcal{O}^1)$  (ou sua classe  $[\varphi(x)] \in \frac{\varphi(\mathcal{O}^1)}{\varphi(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1)}$ ).

**a)** Rótulo do elemento  $z_1 = T_1(0)$ . Temos que o elemento

$$x = \frac{2+\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)i - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)j + \frac{\sqrt{2}}{2}k \in \mathcal{O}^1,$$

é tal que<sup>55</sup>  $\varphi(x) = G_1$ . Mas,

$$x = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)j + \frac{\sqrt{2}}{2}k,$$

ou seja<sup>56</sup>,

$$x = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-1 - \sqrt{2})i' + (-1 - \sqrt{2})j' + \sqrt{2}k'.$$

Disso segue que

$$l(x) = (1 + 1 \cdot 2) + (-1 - 2 \cdot 2) \cdot 3 + (-1 - 2 \cdot 2) \cdot 2 + (0 + 2 \cdot 2) \cdot 6 \pmod{7} = 2,$$

isto é,  $x$  é rotulado por 2. Por outro lado,

$$z_1 = T_1(0) = \frac{-z_1 + w_1\sqrt[4]{2}}{x_1 + y_1\sqrt[4]{2}} = 1 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})\sqrt[4]{2} \in \mathbb{D}^2,$$

<sup>53</sup> $G_1$  é a matriz associada à transformação  $T_1$ .

<sup>54</sup>Lembramos que os grupos  $\Gamma$  e  $\Gamma_{4g}$ , onde  $\Gamma = f^{-1}\Gamma_{4g}f$ , são isomorfos.

<sup>55</sup>Onde  $\varphi$  é o isomorfismo de (4.12).

<sup>56</sup>Observamos que  $i = \sqrt{2}i'$ ,  $j = \sqrt{2}j'$  e  $k = 2k'$ .

$$e \quad z'_1 = \frac{b_1}{\bar{a}_1} = \frac{-\sqrt[4]{2}(\sqrt{2} + \text{Im}(2 + \sqrt{2}))}{(2 + \sqrt{2})(1 - \text{Im})} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \left( 2 - (1 + \text{Im})\sqrt{2} \right) \in \mathbb{D}^2,$$

onde  $\text{Im}^2 = -1$ . Portanto,  $z_1 \Leftrightarrow z'_1$  é rotulado por 2.

b) Rótulo do elemento  $z_2 = T_1^2(0)$ . Temos que<sup>57</sup>

$$G_1^2 = \begin{pmatrix} x_1 - y_1\sqrt[4]{2} & -z_1 + w_1\sqrt[4]{2} \\ z_1 + w_1\sqrt[4]{2} & x_1 + y_1\sqrt[4]{2} \end{pmatrix},$$

onde  $x_1 = 2 + 2\sqrt{2}$ ,  $y_1 = z_1 = 3 + 2\sqrt{2}$  e  $w_1 = 1 + \sqrt{2}$ . O elemento

$$y = 2 + 2\sqrt{2} - (3 + 2\sqrt{2})i - (3 + 2\sqrt{2})j + (1 + \sqrt{2})k,$$

é tal que  $\varphi(y) = G_1^2$ . Mas,

$$y = 2 + 2\sqrt{2} + (-4 - 3\sqrt{2})i' + (-4 - 3\sqrt{2})j' + (2 + 2\sqrt{2})k'.$$

Portanto, o rótulo de  $y$  é

$$l(y) = (2 + 4 \cdot 2) + (-4 - 6 \cdot 2) \cdot 3 + (-4 - 6 \cdot 2) \cdot 2 + (2 + 4 \cdot 2) \cdot 6 \pmod{7} = 4.$$

Agora,

$$z_2 = T_1^2(0) = \frac{-z_1 + w_1\sqrt[4]{2}}{x_1 + y_1\sqrt[4]{2}} \in \mathbb{D}^2,$$

e

$$z'_2 = \frac{b_2}{\bar{a}_2} = \frac{\sqrt[4]{2}(-1 - \sqrt{2} - \text{Im}(3 + 2\sqrt{2}))}{2 + 2\sqrt{2} - \text{Im}(3 + 2\sqrt{2})} \in \mathbb{D}^2,$$

onde  $\text{Im}^2 = -1$ . Logo,  $z_2 \Leftrightarrow z'_2$  é rotulado por 4. Observamos que  $l(y) = l(x) \cdot l(x)$ , como já era esperado.

Agora, estenderemos o algoritmo para constelações de sinais de tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$ , cujos grupos fuchsianos  $\Gamma_p$  estão associados com ordens dos quatérnios de álgebras  $\mathcal{A} = (a, b)_K$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = n$ .

**Algoritmo de Rotulamento Algébrico de Constelações de Sinais em Tesselações  $\{p, q\}$  no Plano Hiperbólico.**

**Passo 1)** Seja  $\mathcal{O}^1$  o grupo dos invertíveis da ordem  $\mathcal{O} = (a, b)_R$  em uma álgebra  $\mathcal{A} = (a, b)_K$ , associada ao grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma_p$ , tal que  $d(\mathcal{O}) = d(\mathcal{A})$ . Sejam<sup>58</sup>  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  uma  $R'$ -base de  $R$  e

$$a = a_1\theta_1 + \dots + a_n\theta_n \quad e \quad b = b_1\theta_1 + \dots + b_n\theta_n,$$

as representações de  $a$  e  $b$  nesta base.

<sup>57</sup> $G_1^2$  é a matriz associada à transformação  $T_1^2$ .

<sup>58</sup>O anel  $R$  admite uma base com  $n$  elementos, onde  $[K : \mathbb{Q}] = n$ .

**Passo 2)** Considere uma base  $\{1, i, j, ij\}$  de  $\mathcal{O}$  sobre  $R$  e determine o polinômio minimal  $p(x)$  de  $k = ij$  sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Passo 3)** Fixe um número primo  $p$ , e considere o polinômio  $\overline{p(x)} = p(x) \pmod{p}$ .

**Passo 4)** Caso o polinômio  $\overline{p(x)}$  do Passo 3 tenha solução em  $\mathbb{Z}_p$ , considere os subgrupos normais  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1 \cup \{\pm 1\}$  em  $\mathcal{O}^1$ , para os ideais  $\mathfrak{p}$  em  $\mathfrak{D}_K$  que tenham normas algébrica potências de  $p$ .

**Passo 5)** Caso o polinômio  $\overline{p(x)}$  satisfaça o Passo 4, considere a raiz  $s$  de  $\overline{p(x)}$  como rótulo do elemento  $ij$ .

**Passo 6)** Se  $s$  não for primo, determine a fatoração de  $s$  como sendo dois números inteiros módulo  $p$ , ou seja,  $s = u \cdot v$ ,  $1 < u, v < p$ . Então  $u$  será o rótulo do elemento  $i$  e  $v$  será o rótulo do elemento  $j$ , ou vice-versa, caso contrário retorne ao Passo 3.

**Passo 7)** Caso o Passo 6 seja satisfeito, determine as soluções em  $\mathbb{Z}_p$  das equações diofantinas  $a_1 r_1 + \cdots + a_n r_n = u^2 \pmod{p}$  e  $b_1 s_1 + \cdots + b_n s_n = v^2 \pmod{p}$ , onde  $a_i, b_i \in R'$ ,  $i = 1, \dots, n$ , provenientes de  $a = a_1 \theta_1 + \cdots + a_n \theta_n$  e  $b = b_1 \theta_1 + \cdots + b_n \theta_n$ . Fixe  $i \in \{1, \dots, n\}$  e considere  $r_i$  e  $s_i$ . Atribuímos como sendo  $r$  o rótulo do elemento  $\theta_i$ , onde  $r$  é dado por  $r = r_i$  ou  $r = s_i$ , mas desde que  $r_i \neq s_i$ ,  $u$  e  $s_i \neq s, v$ .

**Passo 8)** Sejam  $r_i$  ou  $s_i$  o rótulo de  $\theta_i$ , conforme o Passo 7. Suponhamos que  $r_i$  ou  $s_i$  não sejam primos e que sejam fatorados como produtos de números inteiros, digamos<sup>59</sup>

$$r_i = z_i = z_1 \cdots z_{n-1} \quad \text{ou} \quad s_i = z_i = z'_1 \cdots z'_{n-1}.$$

Atribuímos como sendo  $z_j$  ou  $z'_j$  o rótulo de  $\theta_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \neq i$ .

**Passo 9)** Caso todos os Passos anteriores sejam satisfeitos, o rótulo do elemento

$x = (x_1 \theta_1 + \cdots + x_n \theta_n) + (y_1 \theta_1 + \cdots + y_n \theta_n) i + (x'_1 \theta_1 + \cdots + x'_n \theta_n) j + (y'_1 \theta_1 + \cdots + y'_n \theta_n) ij \in \mathcal{O}^1$  é dado pela função de rotulamento multiplicativo  $l : \mathcal{O}^1 \rightarrow G_p$ , onde  $G_p$  é um grupo, definida por

$$l(x) = (x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n) u + (x'_1 z_1 + \cdots + x'_n z_n) v + (y'_1 z_1 + \cdots + y'_n z_n) s \pmod{p}.$$

**Exemplo 5.7.3** Vamos considerar a tesselação  $\{4g, 4g\}$  para o caso  $g = 4$ . Seja  $\Gamma_{16}$  o grupo fuchsiano aritmético associado à tesselação  $\{16, 16\}$ . Pelo Teorema 4.2.5, os elementos

<sup>59</sup>A condição  $j \neq i$  tem o seguinte significado: se  $i = 1$ , então  $r_1 = z_1 = z_2 \cdots z_n$ ; se  $i = 2$ , então  $r_2 = z_2 = z_1 z_3 \cdots z_n$ , e assim sucessivamente. O importante é que  $r_i$  seja fatorado em  $n - 1$  elementos em  $\mathbb{Z}$ . O mesmo argumento vale para  $s_i = z_i = z'_1 \cdots z'_{n-1}$ .

de  $\Gamma_{16}$  estão associados com elementos da ordem  $\mathcal{O}_1 = (\theta, -1)_R$  em  $\mathcal{A} = (\theta, -1)_{\mathbb{Q}(\theta)}$ , onde  $\theta = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,

$$R = \left\{ \frac{\alpha}{2^m} : \alpha \in \mathbb{Z}[\theta] \quad e \quad m \in \mathbb{N} \right\},$$

e

$$\{1, i, j, ij\} = \left\{ 1, \sqrt[4]{2 + \sqrt{2}}, \text{Im}, \sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} \text{Im} \right\},$$

é uma  $R$ -base de  $\mathcal{O}$ . Análogo ao exemplo anterior, consideremos  $\mathcal{O}_2 = \left( \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}, \frac{-1}{4} \right)_R$  com uma  $R$ -base

$$\{1, i', j', i'j'\} = \left\{ 1, \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\text{Im}}{2}, \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \text{Im}}{4} \right\}.$$

Temos que o polinômio minimal de  $k' = i'j' = \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \text{Im}}{4}$  sobre  $\mathbb{Q}$  é

$$p(x) = x^8 - \frac{x^4}{64} + \frac{1}{32768} \in R[x].$$

Fixemos o número primo  $p = 17$ . Assim,  $p_1(x) = p(x) \pmod{17} = x^8 + 13x^4 + 2$ . Verificamos que  $s = 12$  é a solução de  $p_1(x)$  em  $\mathbb{Z}_{17}$ . Agora, temos que  $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$  e  $b = \frac{-1}{4}$ . Seja<sup>60</sup>

$$\{\theta_1, \dots, \theta_4\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \right\},$$

uma  $R'$ -base de  $R$ , onde  $R' = \left\{ \frac{z}{2^m} : z \in \mathbb{Z} \quad e \quad m \in \mathbb{N} \right\}$ . Temos<sup>61</sup>

$$a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} = 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_4 = 0 \quad e \quad a_3 = 1,$$

$$b = \frac{-1}{4} = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \Rightarrow b_1 = -1 \quad e \quad b_2 = b_3 = b_4 = 0.$$

Como  $s = 12 = 4 \cdot 3$ , vamos escolher  $u = 4$  e  $v = 3$ . Desse modo,  $s = 12$  é o rótulo de  $i'j' = \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}} \text{Im}}{4}$ ,  $u = 4$  é o rótulo de  $i' = \frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2}$  e  $v = 3$  é o rótulo de  $j' = \frac{\text{Im}}{2}$ .

Consideremos a equação  $a_1 r_1 + \dots + a_4 r_4 = u^2 \pmod{17}$ , ou seja,  $r_3 = 16 \pmod{17}$ , de onde obtemos que  $r_3 = 16$ . Como  $r_3 \neq 12, 4$ , temos que  $r_3 = z_3 = 16$  é o rótulo de  $\theta_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$ .

Por outro lado,  $r_3 = 16 = 4 \cdot 2 \cdot 2$ . Consideremos, então,  $z_1 = 4$ ,  $z_2 = z_4 = 2$ . Disso segue que, os rótulos de  $\theta_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$  e  $\theta_4 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$  são 4, 2 e 2, respectivamente. Vamos determinar os rótulos dos sinais  $z_1 = T_1^2(0)$  e  $z_2 = T_1^2(0)$  de  $G_{\mathfrak{p}}(0) = \{T(0) : T \in G_{\mathfrak{p}}\}$ , onde<sup>62</sup>

<sup>60</sup>Vamos considerar  $\theta_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,  $\theta_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$  e  $\theta_4 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$ .

<sup>61</sup>Análogo ao Exemplo 5.7.2, apenas um dos coeficientes de  $a$  na  $R'$ -base é diferente de zero, isso se deve à expressão da ordem  $\mathcal{O}_2 = \left( \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}, \frac{-1}{4} \right)_R$ . O mesmo argumento vale para  $b$ .

<sup>62</sup>A norma do ideal  $\mathfrak{p} = \langle 1 - 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \rangle$  é

$$\left(1 - 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) \left(1 + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) \left(1 + 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right) \left(1 - 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right) = 17.$$

$\mathfrak{p} = \langle 1 - 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \rangle$ , provenientes do gerador  $G_1$  de  $\Gamma_{16}$ , que pelo Exemplo 4.2.8, é dado por<sup>63</sup>

$$G_1 = f^{-1}A_1f = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - y_1\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} & z_1 - w_1\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} \\ -z_1 - w_1\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} & x_1 + y_1\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

onde  $x_1 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  $y_1 = 2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  $z_1 = (1 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}})$  e  $w_1 = \sqrt{2}$ .

a) Rótulo do elemento  $z_1 = T_1(0)$ . Temos que o elemento

$$x = \frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - \left( \frac{2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right) i + \left( \frac{(1 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}})}{2} \right) j - \frac{\sqrt{2}}{2} k \in \mathcal{O}^1,$$

é tal que<sup>64</sup>  $\varphi(x) = G_1$ . Mas,

$$\begin{aligned} x &= \left( 1 + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right) - \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) i \\ &\quad + \left( 1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right) j - \frac{\sqrt{2}}{2} k, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x &= \left( 1 + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right) - \left( 2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) i' \\ &\quad + \left( 2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) j' - 2\sqrt{2}k'. \end{aligned}$$

Desse modo, o rótulo de  $x$  é

$$\begin{aligned} l(x) &= (4 \cdot 4 + 2 \cdot 16) - (8 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 16) \cdot 4 \\ &\quad + (8 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 2) \cdot 3 - (8 \cdot 2) \cdot 12 \pmod{17} = 3, \end{aligned}$$

ou seja,  $l(x) = 3$ . Por outro lado,

$$z_1 = T_1(0) = \frac{z_1 - w_1\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}}}{x_1 + y_1\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}}} \in \mathbb{D}^2,$$

e

$$z'_1 = \frac{b_1}{\bar{a}_1} = \frac{-(\sqrt{2} + \text{Im } y_1)\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}}}{x_1(1 - \text{Im}(1 + \sqrt{2}))} \in \mathbb{D}^2,$$

onde  $\text{Im}^2 = -1$ . Portanto,  $z_1 \Leftrightarrow z'_1$  é rotulado por 3.

b) Rótulo do elemento  $z_2 = T_1^2(0)$ . Temos<sup>65</sup>

$$G_1^2 = f^{-1}A_1^2f = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - y_1\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} & z_1 - w_1\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} \\ -z_1 - w_1\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} & x_1 + y_1\sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

<sup>63</sup> $G_1$  é a matriz associada à transformação  $T_1$ .

<sup>64</sup>Onde  $\varphi$  é o isomorfismo de (4.12).

<sup>65</sup> $G_1^2$  é a matriz associada à transformação  $T_1^2$ .

onde

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 + \sqrt{2} + 4\sqrt{2 + \sqrt{2}}, & y_1 &= 8 + 4\sqrt{2} + (6 + \sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \\ z_1 &= 8 + 7\sqrt{2} + (4 + 4\sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{2}}, & w_1 &= 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

O elemento

$$\begin{aligned} y &= \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) - \left(4 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\right) i \\ &+ \left(4 + 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (2 + 2\sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) j - \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\right) k, \end{aligned}$$

é tal que  $\varphi(y) = G_1^2$ . Mas,

$$\begin{aligned} y &= \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) - \left(8 + 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) i' \\ &+ \left(8 + 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 4\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) j' - \left(4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) k'. \end{aligned}$$

Portanto, o rótulo de  $y$  é

$$\begin{aligned} l(y) &= (8 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 16) - (32 \cdot 4 + 16 \cdot 2 + 24 \cdot 16 + 4 \cdot 2) \cdot 4 \\ &+ (32 \cdot 4 + 28 \cdot 2 + 16 \cdot 16 + 16 \cdot 2) \cdot 3 - (16 \cdot 2 + 8 \cdot 2) \cdot 12 \pmod{17} = 3, \end{aligned}$$

ou seja,  $y$  é rotulado por 3. Agora,

$$z_2 = T_1^2(0) = \frac{z_1 - w_1 \sqrt[4]{2}}{x_1 + y_1 \sqrt[4]{2}} \in \mathbb{D}^2,$$

e

$$z'_2 = \frac{b_2}{\bar{a}_2} = \frac{(-\operatorname{Im} x_2 + y_2) \sqrt[4]{\sqrt{2} + 2}}{x'_2 - \operatorname{Im} y'_2} \in \mathbb{D}^2,$$

onde  $\operatorname{Im}^2 = -1$  e

$$\begin{aligned} x_2 &= 8 + 4\sqrt{2} + (6 + \sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{2}}, & y_2 &= 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \\ x'_2 &= 4 + \sqrt{2} + 4\sqrt{2 + \sqrt{2}}, & y'_2 &= 8 + 7\sqrt{2} + (4 + 4\sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Assim,  $z_2 \Leftrightarrow z'_2$  é rotulado por 3.

**Observação 5.7.4** O fato de  $x$  e  $y$  serem rotulados por 3, sugere que  $x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in \mathcal{O}_p^1$ , ou seja,  $[x] = [y]$  em  $\frac{\mathcal{O}_p^1}{\mathcal{O}_p^1}$ .



# Capítulo 6

## Conclusões

Em [5], foram estabelecidas as condições algébricas necessárias para o processo de rotulagem de sinais de constelações geometricamente uniformes no plano hiperbólico, a partir de tesselações auto-duais  $\{4g, 4g\}$ . Essa proposta consiste na busca de subgrupos normais  $\Gamma_p$  com  $p^m$  elementos, em grupos fuchsianos aritméticos<sup>1</sup>  $\Gamma_{4g}$ , através da identificação dos grupos  $\Gamma_{4g}$  em ordens dos quatérnios  $\mathcal{O}$  de uma álgebra  $\mathcal{A}$  sobre um corpo  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 2$ . Carvalho em [5] e Johansson em [19] mostraram que ordens  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}[\theta]}$ , sendo  $\mathbb{Z}[\theta]$  o anel de inteiros do corpo  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , correspondem a específicos grupos fuchsianos aritméticos.

Em nosso trabalho, generalizamos o processo de identificação de grupos fuchsianos aritméticos em ordens dos quatérnios de modo a determinar os reticulados hiperbólicos associados às constelações de sinais geometricamente uniformes, como em [5]. Para tanto, foi necessário estabelecer um procedimento sistemático de construção de grupos fuchsianos aritméticos derivados de álgebras de divisão dos quatérnios  $\mathcal{A}$  sobre corpos de números  $K$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 2^m$ .

No Capítulo 4 estendemos os resultados obtidos em [5] e [19], considerando as tesselações da forma  $\{4g, 4g\}$ , para  $g = m \cdot 2^n$ ,  $m = 1, 3, 5$ , sendo  $n \in \mathbb{N}$  qualquer. Mostramos que, para esses valores, os grupos  $\Gamma_{4g}$  são aritméticos e determinamos os reticulados nos quais esses grupos são identificados.

Nessa mesma direção, trabalhamos também no Capítulo 5 com famílias de tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$ ,  $p \neq q$ , mais densas do que as tesselações  $\{4g, 4g\}$ . Inicialmente, fornecemos uma série de exemplos de emparelhamentos que identificam as arestas de  $P_p$ , a fim de obtermos superfícies compactas  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  (particularmente, trabalhamos com  $\{10\lambda, 2\lambda\}$  e  $\{12\lambda - 12, 4\}$ ). Entretanto, o processo de identificação dos grupos  $\Gamma_p$  associados a  $\{p, q\}$  em ordens dos quatérnios se torna um tanto quanto complexo. Como exemplo dessa complexidade, citamos a busca da ordem dos quatérnios associada ao grupo  $\Gamma_{18}$  proveniente da tesselação  $\{12g - 6, 3\}$ ,  $g = 2$ .

Consideramos três casos de identificação. Exibimos de forma generalizada os reticulados

---

<sup>1</sup>Os grupos relacionados com as tesselações  $\{4g, 4g\}$ .

associados aos grupos  $\Gamma_{10\lambda}$  associado à família  $\{10\lambda, 2\lambda\}$  para  $\lambda = 2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  qualquer, a qual tem  $\{20, 4\}$  como sua tesselação apresentando a maior densidade de empacotamento. Para a família  $\{12\lambda - 12, 4\}$ , exibimos um caso particular de identificação para a tesselação  $\{60, 4\}$ ,  $\lambda = 6$ , cuja densidade de empacotamento é 0.89363. Para a família  $\{12g - 6, 3\}$ , apresentamos a ordem  $\mathcal{O}$  associada ao grupo  $\Gamma_{30}$  que corresponde a  $\{12g - 6, 3\}$  para  $g = 3$ . A tesselação  $\{30, 3\}$  tem densidade de empacotamento de 0.94585, algo muito próximo da densidade máxima, que é  $\frac{3}{\pi} \approx 0.95493$ .

Finalmente, apresentamos alguns exemplos de rotulamento de sinais de uma constelação de sinais geometricamente uniforme ( $G_p$ -órbita) obtida da tesselação  $\{4g, 4g\}$ . De modo particular, consideramos os casos  $g = 2, 4$ . Para o caso  $g = 2$ , fizemos uso do algoritmo de rotulamento proposto em [5]. Estendemos esse algoritmo a fim de considerar outros valores para  $g$  ( $g > 2$ ), uma vez que a proposta de rotulamento em [5] só é válida para grupos fuchsianos aritméticos  $\Gamma_{4g}$  derivado de uma álgebra dos quatérnios sobre um corpo  $K$ ,  $[K : \mathbb{Q}] = 2$ . Como conseqüência, propomos um método de rotulagem de sinais de uma constelação geometricamente uniforme como em (5.55), proveniente de um grupo fuchsiano aritmético  $\Gamma_p$ , associado a uma tesselação hiperbólica  $\{p, q\}$ , cujos elementos são identificados com elementos de uma ordem  $\mathcal{O}$  em uma álgebra  $\mathcal{A}$  sobre um corpo de números  $K$ , tal que  $[K : \mathbb{Q}] = n$ .

## 6.1 Propostas para Trabalhos Futuros

Para finalizar, gostaríamos de apresentar de modo sucinto alguns tópicos que podem ser objetos de estudos para trabalhos futuros. De uma forma indireta, já comentamos sobre esses tópicos no decorrer do trabalho, que são:

- O estudo da aritmeticidade dos grupos  $\Gamma_p$  obtidos das tesselações hiperbólicas  $\{p, q\}$  construídas neste trabalho.
- A identificação dos grupos  $\Gamma_p$  em ordens dos quatérnios, de modo a determinar os reticulados hiperbólicos associados com as constelações de sinais  $G_p(0)$  como em (5.55).
- Para a família de tesselações  $\{12g - 6, 3\}$ , o problema que surge é o seguinte: como obter o reticulado hiperbólico associado a  $\{12g_2 - 6, 3\}$ , desde que se conheça o reticulado associado a  $\{12g_1 - 6, 3\}$ , sendo  $g_2$  um múltiplo de  $g_1$ ? Esse problema trata de fato de uma generalização de identificação dos grupos  $\Gamma_{12g-6}$  em ordens dos quatérnios.
- A partir da identificação de um grupo  $\Gamma_p$  em uma ordem dos quatérnios  $\mathcal{O}$ , descrever, de forma geral, a constelação  $G_p(0)$  com os respectivos rótulos de seus sinais. Para tanto,

---

é necessário estabelecer as classes de equivalências do grupo quociente  $\frac{\mathcal{O}^1}{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^1}$ , através de um ideal  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{D}_K$ , convenientemente escolhido. Esse é um problema que julgamos de uma complexidade considerável.



# Bibliografia

- [1] Bavard, C. *Disques extrémaux et surfaces modulaires*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. V, n. 2, 191-202, 1996.
- [2] Beardon, A. *The Geometry of Discret Groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [3] Blake, I. F. *Codes Over Certain Rings*. Inform. Contr. vol. 20, p. 396-404, 1972.
- [4] Brandani, E. *Constelações de Sinais e Análise de Desempenho no Plano Hiperbólico*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2000.
- [5] Carvalho, E. D. *Construção e Rotulamento de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes em espaços Euclidianos e Hiperbólicos*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2001.
- [6] Cavalcante, R. G. *Análise de Desempenho de Constelações de Sinais em Variedade Riemannianas*, Dissertação de Mestrado, FEEC-UNICAMP, 2002.
- [7] Cavalcante, R.G., Lazari, H., J.D. Lima, and R. Palazzo Jr., *A New Approach to the Design of Digital Communication Systems*. In Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science - DIMACS Series, American Mathematical Society, Editors A. Ashikhimin and A. Barg, vol. 68, pp. 145-177, August 2005.
- [8] Dong, X.D. and C.B. Soh. *Group of Algebraic Interger Used for Coding QAM Signal*. IEEE Trans. Inform, Theory, vol. 44, No.5 pp.1848-1860, set. 1998.
- [9] Endler, O. *Teoria dos Números Algébricos*. Projeto Euclides, IMPA, 2<sup>nd</sup>. ed., 2006.
- [10] Faria, M. B. *Empacotamento de Esferas em Espaços Hiperbólicos*. Dissertação de Mestrado, IMEEC-UNICAMP, 2001.
- [11] Faria, M. B. *Coordenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos*. Tese de Doutorado, IMEEC-UNICAMP, 2005.
- [12] Favareto, O. M. *Códigos de Blocos Lineares sobre Anéis de Inteiros Algébricos com Alfabeto Casado a GP (p)*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 1996.

- [13] Firer, M. *Grupos fuchsianos*. Notas de Aula, IMECC-UNICAMP, 2001.
- [14] G.D. Forney Jr. *Geometrically Uniform Codes*. IEEE Trans. Inform. Theory, 1991, vol. IT-37, no. 5, pp.1241-1260.
- [15] Garcia, A. e Lequain, Y. *Elementos de Álgebra*. Projeto Euclides, IMPA, 2<sup>nd</sup>. ed., 2003.
- [16] Gonçalves, A. *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides, 5<sup>nd</sup>. ed., 1999.
- [17] Huber, K. *Codes Over Gaussian Integers*. IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 40. No.1, p. 207-216, Jan. 1994.
- [18] Huber, K. *Codes Over Eisenstein-Jacobi Integers*. AMS, p. 165-179, 1994.
- [19] Johansson, S. *On Fundamental Domains of Arithmetic Fuchsian Groups*. [www.math.chalmers.se/~sj/forskning.html](http://www.math.chalmers.se/~sj/forskning.html).
- [20] Johansson, S. *Genera of Arithmetic Fuchsian Groups*. [www.math.chalmers.se/~sj/forskning.html](http://www.math.chalmers.se/~sj/forskning.html).
- [21] Johansson, S. *A Description of Quaternion Algebra*. [www.math.chalmers.se/~sj/forskning.html](http://www.math.chalmers.se/~sj/forskning.html).
- [22] Katok, S. *Fuchsian Groups*. The University of Chicago Press, 1992.
- [23] Lang, S. *Algebra*, New York: Addison-Wesley, 1970.
- [24] Lazari, H. *Uma Contribuição à Teoria dos Códigos Geometricamente Uniformes Hiperbólicos*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2000.
- [25] Maclachlan, C. *Introduction to Arithmetic Fuchsian Groups*. [www.maths.abdn.ac.uk/~ran/rctg/downloadables/Maclachlan/ArithFuchs.pdf.html](http://www.maths.abdn.ac.uk/~ran/rctg/downloadables/Maclachlan/ArithFuchs.pdf.html).
- [26] O'Meara, O. T. *Introduction to Quadratic Forms*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [27] Projeto Temático Fapesp. *Fundamentos Algébricos e Geométricos dos Códigos Geometricamente Uniformes*, setembro de 1996 a agosto de 2000.
- [28] Projeto Temático Fapesp. *Códigos Geometricamente Uniformes em Espaços Homogêneos*, agosto de 2003 a julho de 2007.
- [29] Reiner, I. *Maximal Orders*. Academic Press, London, 1975.

- 
- [30] Ribenboim, P. *Algebraic Numbers*. New York, Wiley-Interscience, 1972.
- [31] Rifà, J. *Groups of Complex Integers Used as QAM Signals*. IEEE Trans. Inform. Theory, vol 41. No.5. Set. 1995.
- [32] Samuel, P. *Algebraic Theory of Numbers*. Hermann, Paris, 1970.
- [33] Shannon, C. E. *A Mathematical Theory of Communication*. Bell Syst. Tech. J., vol. 27, 1948.
- [34] Slepian, D. *Group Codes for Gaussian Channel*. Bell Syst. Tech. J., vol. 47, p. 575-602, 1968.
- [35] Spiegel, E. *Codes Over  $\mathbb{Z}_m$* . Inform and Control, n. 35, p. 48-51, 1977.
- [36] Stewart, I.N. e Tall, D.O. *Algebraic Number Theory*. Chapman and Hall, 1996.
- [37] Takeuchi, K. *A characterization of arithmetic Fuchsian groups*. J. Math. Soc. Japan, vol. 27, pp. 600-612, 1975.