UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES, REGULARIDADE E CONTROLE EM MODELOS DE CAMPOS DE FASE PARA SOLIDIFICAÇÃO.

Autor: **Bianca Morelli Calsavara Caretta**

Orientador: **Prof. Dr. José Luiz Boldrini**

14 de junho de 2006

Existência de Soluções, Regularidade e Controle em Modelos de Campos de Fase para Solidificação.

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Bianca Morelli Calsavara Caretta** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de junho de 2006.

José Luiz Boldrini

Prof. Dr. **José Luiz Boldrini**
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Luiz Boldrini (orientador)

Profa. Dra. Gabriela del Valle Planas

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

Prof. Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática.**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 859

Caretta, Bianca Morelli Calsavara

C186e Equações de soluções, regularidade e controle em modelos de cxampos de fase para solidificação / Bianca Morelli Calsavara Caretta -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : José Luiz Boldrini

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Teoria de controle. 3. Ligas. 4. Solidificação – Modelos matemáticos. I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês:

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.

Área de concentração:

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Gabriela del Valle Planas (ICMC-USP)
Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Meda (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento (UFSCar)
Prof. Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala (LNCC)

Data da defesa: 14/06/2006

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 14 de junho de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof. (a). Dr (a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof. (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

Prof. (a). Dr (a). ARNALDO SIMAL DO NASCIMENTO

Gustavo Perla Menzala

Prof. (a) Dr. (a) GUSTAVO ALBERTO PERLA MENZALA

A meus pais Rubens e Eliete.

Agradecimentos

A meus pais Rubens e Eliete e ao meu irmão Giuliano pelo apoio e incentivo.

Ao meu marido Henrique por todo apoio e pela paciência nos momentos difíceis.

Ao prof. Dr. José Luiz Boldrini pela orientação, dedicação, paciência e confiança.

Ao prof. Dr. Marko Rojas Medar pela ajuda na resolução de problemas de controle e ao Prof. Dr. Enrique Fernández Caras, da Universidade de Sevilla, pelas proveitosas horas de conversa sobre este trabalho.

Aos professores do IMECC/UNICAMP pela minha formação, em especial aos professores Benjamin Bordin pelos dois anos de orientação em iniciação científica, Edmundo Capelas de Oliveira pelo apoio e incentivo durante minha graduação e Aloisio José Freiria Neves pela orientação durante o mestrado.

Aos funcionários do IMECC/UNICAMP em especial a Cidinha, Ednaldo, Tânia, Alice, Esther e Júlio.

Às turmas de matemática da Unicamp/97 e do programa de Pós-graduação; pela amizade, pelo incentivo e por toda ajuda. Em especial aos amigos Edson, Gilmar, Ederson e Roger.

À Unicamp pela formação e pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Conteúdo

Resumo

Neste trabalho estudamos dois modelos envolvendo funções campo de fase para solidificação de ligas. O primeiro modelo discutido é um sistema envolvendo duas funções campo de fase e o segundo é um sistema envolvendo três funções campo de fase. Aqui são discutidas existência, regularidade, estabilidade em relação aos dados iniciais e termo forçante e unicidade de solução para os sistemas de equações diferenciais parciais não-lineares que representam tais modelos.

Também são discutidos vários problemas de controle ótimo envolvendo esses dois modelos de solidificação. Estes problemas consistem em minimizar um funcional de custo utilizando soluções destes sistemas sob certas restrições. São discutidos aqui problemas envolvendo várias restrições distintas, sendo elas tanto no controle quanto no estado. Para cada um destes problemas é verificada a existência de controle ótimo e também é utilizado o formalismo de Dubovitskii e Milyutin para encontrar condições necessárias de otimalidade.

Abstract

In this work we study two phase field models for solidification of alloys involving two and three phase field functions. These models are generalization of model treated by Hoffman and Jiang in [9]. In this work we discuss existence, uniqueness, regularity and continuous dependence of solutions of these systems of differential partial equation. We also deal with some optimal control problems involving different constraints; for each such problem we discuss existence of an optimal control and we use Dubovitskii and Milyutin formalism to obtain necessary conditions for optimality.

Introdução

Um dos primeiros enfoques para o estudo de mudanças de fase consiste no uso de interfaces tipo "sharp"para separar as fases. Modelos usando tal enfoque são conhecidos por problemas do tipo Stefan. Posteriormente foram introduzidos modelos utilizando o conceito de funções campo de fase. Um dos primeiros trabalhos a considerar tais modelos, deu origem a vários outros, foi Fix [6]. Destacamos aqui os trabalhos de Caginalp e outros [2], [3], [4] e [5] e também o trabalho de Hoffman e Jiang [9]. Nos trabalhos anteriormente citados Caginalp e outros utilizaram o funcional de energia livre como argumento para obtenção da equação para o campo de fase, analisaram matematicamente tais modelos e também suas relações com modelos utilizando interface tipo "sharp".

Neste trabalho estudamos dois modelos de solidificação de ligas metálicas envolvendo duas e três funções campo de fase, respectivamente, que são generalizações do modelo tratado por Hoffman e Jiang em [9]. Estes modelos estão também relacionados ao modelo de solidificação envolvendo três funções campos de fase apresentado em [13] e [14], por Steinbach e outros.

Este trabalho é dividido em duas partes. Na primeira parte discutimos existência, regularidade, estabilidade em relação aos dados iniciais e ao termo forçante e unicidade de solução para cada sistema de equações diferenciais parciais que representam o primeiro e o segundo modelos de solidificação envolvendo duas funções campo de fase. O sistema que representa o primeiro modelo, que envolve duas funções campo de fase, é dado abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau = l_1\frac{\partial u}{\partial t} + l_2\frac{\partial v}{\partial t} + f \quad &\text{em} \quad Q\\
\frac{\partial u}{\partial t} - k_1\Delta u = -a_1 u(1-u-v)(1-2u-v+c_1\tau+d_1) \quad &\text{em} \quad Q\\
\frac{\partial v}{\partial t} - k_2\Delta v = -a_2 v(1-v-u)(1-2v-u+c_2\tau+d_2) \quad &\text{em} \quad Q\\
\frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad &\text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T)\\
\tau=\tau_0, \quad u=u_0 \quad \text{e} \quad v=v_0 \quad &\text{em} \quad \Omega\times\{t=0\},
\end{aligned}$$

onde $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2 e $Q=\Omega\times(0,T)$, com $T<\infty$; n representa o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Aqui a função τ representa a temperatura e as funções campo de fase u e v distinguem entre dois subdomínios sólidos apresentando cristalizações distintas e um subdomínio líquido em Q. Os valores de calor latente l_1 e l_2 são constantes e tem mesmo sinal, b, k_1, k_2, a_1 e a_2 são constantes positivas e c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes quaisquer dadas. Os dados iniciais τ_0, u_0 e v_0 são dados adequadamente.

O sistema de equações diferenciais parciais que representa o segundo modelo, que envolve três funções campo de fase, é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tau}{\partial t} - b\Delta\tau &= l_1\frac{\partial u}{\partial t} + l_2\frac{\partial v}{\partial t} + l_3\frac{\partial w}{\partial t} + f \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= -a_1uw(w-u+c_1\tau+d_1) - a_3uv(v-u+c_3\tau+d_3) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v &= -a_2vw(w-v+c_2\tau+d_2) - a_3uv(u-v-c_3\tau-d_3) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w &= -a_1uw(u-w-c_1\tau-d_1) - a_2vw(v-w-c_2\tau-d_2) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial\tau}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T)\\
\tau = \tau_0, \quad u = u_0, &\quad v = v_0 \quad \text{e} \quad w = w_0 \quad \text{em} \quad \Omega\times\{t=0\},
\end{aligned}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2 e $Q = \Omega\times(0,T)$, com $T<\infty$; n representa o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

A função τ representa a temperatura e as funções campo de fase u, v e w distinguem entre três subdomínios sólidos apresentando cristalizações distintas e um subdomínio líquido em Q. Os valores de calor latente l_1, l_2, l_3 são constantes e tem mesmo sinal, b, k, a_1, a_2 e a_3 são constantes positivas c_1, c_2, c_3, d_1, d_2 e d_3 são constantes arbitrárias e f é uma função dada. As condições iniciais u_0, v_0 e w_0 são dadas adequadamente.

Na segunda parte do trabalho tratamos alguns problemas de controle relacionados aos dois modelos de solidificação mencionados anteriormente. Estes problemas envolvem diferentes restrições tanto no controle, quanto no estado. Para cada problema de controle é discutida a existência de controle ótimo e é usado o formalismo de Dubovitskii e Milyutin para encontrar condições de otimalidade.

Os problemas de controle relacionados ao primeiro modelo de solidificação citado consistem em minimizar, sob certas restrições, o funcional $J : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned}
J(\tau,u,v,f) = \frac{\alpha_1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\tau-\tau_d|^{2k}dxdt + \frac{\alpha_2}{2}\int_0^T\int_\Omega |u-u_d|^{2m}dxdt\\
+\frac{\alpha_3}{2}\int_0^T\int_\Omega |v-v_d|^{2m}dxdt + \frac{N}{2}\int_0^T\int_\Omega |f|^{2s}dxdt,
\end{aligned}$$

onde α_1, α_2, $\alpha_3 \geq 0$ e $N > 0$ são constantes, k, s e m são tais que k, s e $m \geq 1$, $\tau_d \in L^{2k}(Q)$, u_d, $v_d \in L^{2m}(Q)$ são funções dadas e E é um espaço adequado dado mais tarde.

Finalmente, os problemas de controle relacionados ao segundo modelo de solidificação citado também consistem em minimizar, sob certas restrições, o funcional $J : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned}
J(\tau,u,v,f) = \frac{\alpha_1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\tau-\tau_d|^{2n}dxdt + \frac{\alpha_2}{2}\int_0^T\int_\Omega |u-u_d|^{2m}dxdt + \frac{\alpha_3}{2}\int_0^T\int_\Omega |v-v_d|^{2m}dxdt\\
+\frac{\alpha_4}{2}\int_0^T\int_\Omega |w-w_d|^{2m}dxdt + \frac{N}{2}\int_0^T\int_\Omega |f|^{2s}dxdt,
\end{aligned}$$

onde α_1, α_2, α_3, $\alpha_3 \geq 0$ e $N > 0$ são constantes, s, n e m são tais que s, n e $m \geq 1$, $\tau_d \in L^{2n}(Q)$, u_d, $v_d \in L^{2m}(Q)$ são funções dadas e E é um espaço adequado dado mais tarde.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No primeiro capítulo são revisados algumas definições e resultados que serão utilizados em todo o trabalho. Depois, como já foi mencionado, o trabalho está dividido em duas partes. A primeira parte consiste em três capítulos. No Capítulo 2 são demonstradas existência, regularidade, estabilidade e unicidade da solução para o sistema que representa o primeiro modelo de solidificação mencionado. No Capítulo 3 são demonstradas existência, regularidade, estabilidade e unicidade da solução para um sistema que representa o segundo modelo de solidificação, mas sem a equação para a temperatura. Tais resultados são utilizados no capítulo seguinte. No quarto capítulo são demonstradas existência, regularidade, estabilidade e unicidade da solução para o sistema que representa o segundo modelo de solidificação mencionado.

A segunda parte do trabalho também é dividida em três capítulos. No Capítulo 5 são dados definições e resultados sobre o formalismo de Dubovitskii e Miyutin, que serão utilizados nos dois capítulos finais. No sexto Capítulo, para cada um dos diferentes problemas de controle envolvendo o primeiro funcional dado aqui, é demonstrado um resultado sobre existência de controle ótimo e também é utilizado o formalismo de Dubovitskii e Milyutin para encontrar condições necessárias de otimalidade. E no sétimo capítulo são encontrados resultados análogos aos do Capítulo 6, mas para o segundo funcional mencionado aqui. Finalmente, no Capítulo 8 são apresentadas as conclusões sobre este trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Aqui vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e de classe C^2, $T \in \mathbb{R}$ finito e $Q = \Omega \times (0,T)$. Usaremos as notações usuais de Espaços de Sobolev. Para isto uma referência básica é Adams[1].

Em Q trabalharemos também no espaço

$$W_q^{2,1}(Q) = \left\{ f \in L^q(Q) : D^\alpha f \in L^q(Q),\ para\ 1 \leq |\alpha| \leq 2,\ e\ \frac{\partial f}{\partial t} \in L^q(Q) \right\},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é um multi-índice com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$, $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Para tais espaços duas referências são Ladyzhenskaya [10] e Mikhaylov [12].

Com estas notações, como $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2, por um teorema de imersão de Lions-Peetre [11] ou por um caso particular do Lema 3.3, pág.80, de Ladyzhenskaya [10], temos que $W_q^{2,1}(Q) \subset L^p(Q)$ com inclusão contínua para p satisfazendo:

$$p = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{5}\right)^{-1} & \text{se} \quad 2 \leq q < \dfrac{5}{2} \\ \text{qualquer número positivo} & \text{se} \quad q = 5/2 \\ \infty & \text{se} \quad q > 5/2. \end{cases}$$

Além disso, a inclusão $W_q^{2,1}(Q) \subset L^{\tilde{p}}(Q)$ é contínua e compacta para todo $2 \leq \tilde{p} < p$, com p dado acima.

Uma conseqüência do teorema citado acima é que:

$$\text{a inclusão} \quad W_q^{2,1}(Q) \subset L^q(Q) \quad \text{é contínua e compacta,} \quad \forall\, 2 \leq q < \infty. \tag{1.0.1}$$

De fato, para $2 \leq q < 10$ temos que a inclusão $W_q^{2,1}(Q) \subset W_2^{2,1}(Q)$ é contínua, a inclusão $W_2^{2,1}(Q) \subset L^q(Q)$ é contínua e compacta. De onde, segue que a inclusão $W_q^{2,1}(Q) \subset L^q(Q)$ é contínua e compacta para $2 \leq q < 10$.

Agora para $10 \leq q < \infty$ temos que $2 \leq (1/q + 2/5)^{-1} < 10 \leq q$. Logo existe p tal que $2 \leq (1/q+2/5)^{-1} < p < 10 \leq q$. Então, $W_p^{2,1}(Q) \subset L^r(Q)$ com inclusão contínua e compacta para todo $r < (1/p - 2/5)^{-1}$. Mas como $(1/q + 2/5)^{-1} < p$ temos que $q < (1/p - 2/5)^{-1}$. Então $W_p^{2,1}(Q) \subset L^q(Q)$ com inclusão contínua e compacta. Além disso, $p < q$, logo $W_q^{2,1}(Q) \subset W_p^{2,1}(Q)$ com inclusão contínua. Portanto, a inclusão $W_q^{2,1}(Q) \subset L^q(Q)$ é contínua e compacta.

Queremos agora encontrar uma inclusão compacta e contínua $W_q^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ para q suficientemente grande. Para isso vamos introduzir algumas definições e resultados sobre espaços de Hölder. Uma referência para tais espaços é Ladyzhenskaya [10], pp.6 a 8.

Primeiramente fixemos algumas notações. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto e limitado, $0 < T < \infty$, $Q = \Omega \times (0,T)$ e $u : Q \to \mathbb{R}$. Sendo $r \in \mathbb{N}$ e $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ um multi-índice com $s_1, s_2, ..., s_n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $|s| = s_1 + s_2 + ... + s_n$,

$$D_t^r u = \frac{\partial^r u}{\partial t^r} \quad e \quad D_x^s u = \frac{\partial^{|s|} u}{\partial x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_n^{s_n}}.$$

Para cada $\lambda > 0$ não inteiro, sendo $\lambda = k + \alpha$, com $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \alpha < 1$, definimos o espaço de Hölder $\mathcal{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$ como o espaço das funções $u \in C^0(\overline{Q})$ tais que $D_t^r D_x^s u \in C^0(\overline{Q})$, para $2r + |s| \leq \lambda$, e para as quais a norma

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{2r+|s|=j} \|D_t^r D_x^s u\|_{C^0(\overline{Q})} + \sum_{2r+|s|=k} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_{x,Q}^{\alpha} + \sum_{0<\frac{\lambda-2r-|s|}{2}<1} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_{t,Q}^{\frac{\lambda-2r-|s|}{2}}$$

é finita. Onde,

$$\|v\|_{C^0(\overline{Q})} = \max_{\overline{Q}} |v|,$$

$$\langle v \rangle_{x,Q}^{\alpha} = \sup_{(x,t),(x',t') \in \overline{Q}} \frac{|v(x,t) - v(x',t')|}{|x - x'|^\alpha}$$

e

$$\langle D_t^r D_x^s u \rangle_{t,Q}^{\gamma} = \sup_{(x,t),(x',t') \in \overline{Q}} \frac{|v(x,t) - v(x',t')|}{|t - t'|^\gamma}.$$

Em Ladyzhenskaya [10] (pp.80, lemma 3.3), temos o seguinte resultado:

Lema 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto, limitado e satisfazendo a propriedade do cone, e seja $Q = \Omega \times (0,T)$, com $0 < T < \infty$. Se $2l - 2r - |s| - \frac{n+2}{q} > 0$, então*

$$W_q^{2l,l}(Q) \subset \mathcal{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad para\ 0 \leq \lambda < 2l - 2r - |s| - \tfrac{n+2}{q}.$$

Mais ainda,

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})} \leq C \|u\|_{W_q^{2l,l}(Q)},$$

com C dependendo de Ω, T, l, r, s, n e q.
Além disso, se $2l - 2r - |s| - \frac{n+2}{q}$ não é inteiro então as conclusões anteriores são válidas para $\lambda = 2l - 2r - |s| - \frac{n+2}{q}$.

Observação 1.1 *Para que um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfaça a propriedade do cone é suficiente que este seja Lipschitz, o que é satisfeito por todo Ω de classe C^k, para qualquer $k \geq 1$.*

Aplicando o lema anterior no caso $l = 1$, $r = s = 0$ e $n = 3$ obtemos o corolário a seguir.

Corolário 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e satisfazendo a propriedade do cone, e seja $Q = \Omega \times (0,T)$, com $0 < T < \infty$. Se $q > 5/2$, então*

$$W_q^{2,1}(Q) \subset \mathcal{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}), \quad \text{para } 0 \leq \lambda < 2 - 5/q.$$

Além disso, $\|u\|_{\mathcal{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})} \leq C\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)}$, com C dependendo de Ω, T e q.

A partir deste corolário podemos mostrar a resultado de imersão compacta enunciado a seguir.

Corolário 1.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e de classe C^2 e seja $Q = \Omega \times (0,T)$, com $0 < T < \infty$. Então para todo $q > 5/2$ temos*

$$W_q^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q),$$

com imersão contínua e compacta.

Demonstração:

Fixemos $q > 5/2$.

Pelo corolário anterior a inclusão $W_q^{2,1}(Q) \subset \mathcal{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$ é contínua para $0 \leq \lambda < 2 - 5/q$. E como valem as inclusões $\mathcal{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}) \subset C^0(\overline{Q})$ contínua e compacta, para todo $\lambda > 0$, e $C^0(\overline{Q}) \subset L^\infty(Q)$ contínua. Obtemos que a inclusão $W_q^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ é contínua e compacta.

Portanto, $W_q^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ com inclusão contínua e compacta para todo $q > 5/2$.

■

Também usaremos o seguinte resultado de imersão em espaços de Sobolev encontrado em Adams [1]

Proposição 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Sejam j e m inteiros não negativos e p satisfazendo $1 \leq p < \infty$. Se Ω satisfaz a propriedade do cone, então valem as seguintes imersões:*

1. *Suponha que $0 < n - mp < n$, então $W_p^{j+m}(\Omega) \to W_q^j(\Omega)$, para todo $p \leq q \leq np/(n - mp)$.*
2. *Suponha que $mp = n$, então $W_p^{j+m}(\Omega) \to W_q^j(\Omega)$, para todo $p \leq q < \infty$.*
3. *Suponha que $mp > n$, então $W_p^{j+m}(\Omega) \to C_B^j(\Omega)$.*

Um caso particular da proposição anterior é o seguinte resultado, que usaremos várias vezes durante o trabalho:

Corolário 1.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto satisfazendo a propriedade do e seja p satisfazendo $2 \leq 3p/5 < \infty$, então vale a seguinte imersão:*

$$W^2_{3p/5}(\Omega) \to W_q^{2-\frac{2}{p}}(\Omega), \quad \textit{para todo } 3p/5 \leq q \leq p.$$

Demonstração: Basta aplicar a Proposição anterior com: $n = 3$, $m = 2/p$, $j = 2 - 2/p$ e $3p/5$ no lugar de p.

■

Agora vamos enunciar alguns resultados que serão utilizados nas demonstrações de alguns resultados dos Capítulos 2 e 3.

Sejam Ω, T e Q como descritos anteriormente. Consideremos o problema **(P)**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = au + bu^2 - cu^3 + f \quad \text{em} \quad Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u = u_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

onde n denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Procedendo praticamente como na demonstração do Teorema 2.1 de Hoffman e Jiang [9] mostra-se o seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Suponha que k e c são constantes positivas, $a, b \in L^\infty(Q)$, $f \in L^q(Q)$, com $2 \leq q < \infty$, e $u_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfaz $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ seja um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então, o problema (P) possui uma solução $u \in W_2^{2,1}(Q)$ tal que u satisfaz:*

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right).$$

Mais ainda, $u \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$ e satisfaz

$$\|u\|_{W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^6_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)} + \|f\|^3_{L^q(Q)}\right).$$

Se, além disso, $u_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, para algum $2 \leq 3p/5 < \infty$, então $u \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)$, onde $\overline{q} = min\{p, q\}$ e u satisfaz

$$\|u\|_{W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|u_0\|^{18}_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)} + \|f\|^9_{L^q(Q)}\right).$$

onde C depende de Ω, T, k, a, b e c.

Procedendo exatamente como na demonstração do Teorema 2.2 de Hoffman e Jiang [9] mostra-se o seguinte resultado:

Teorema 1.2 *Sejam $f_1, f_2 \in L^q(Q)$ e $u, v \in W_p^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (P), para algum $2 \leq p \leq q$. Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.1, vale a seguinte estimativa de estabilidade:*

$$\|u - v\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)},$$

com C dependendo Ω, T, k, a, b, c, u e v.

Corolário 1.4 *Sob as mesmas condições do Teorema 1, a solução do problema (P) é única.*

Em algumas demonstrações sobre existência de solução de sistemas de equações diferenciais parciais com condições iniciais e de fronteira usaremos o Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder (ver Friedman[7]) enunciado abaixo.

Teorema 1.3 ***Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder***

Sejam B um espaço de Banach e $T : B \times [0,1] \to B$ uma transformação tal que $y = T_\lambda x$ com x, $y \in B$ e $\lambda \in [0,1]$. Suponha que:

a) $T_\lambda x$ está definido $\forall\ x \in B$ e $\forall\ \lambda \in [0,1]$.

b) $\forall\ \lambda \in [0,1]$ fixo, $T_\lambda : B \to B$ é uma transformação contínua e compacta.

c) $\forall\ x \in A$, $A \subset B$ limitado, $T_\lambda x$ é uma transformação uniformemente contínua em λ.

d) T_0 possui um único ponto fixo em B.

e) Existe constante $K > 0$ finita tal que toda possível solução de $x = T_\lambda x$ para qualquer $\lambda \in [0,1]$ satisfaz $\|x\|_B \leq K$.

Então existe único $x \in B$ solução da equação $x = T_1 x$.

Em algumas demonstrações sobre regularidade de solução de sistemas de equações diferenciais parciais com condições iniciais e de fronteira usaremos o seguinte Teorema sobre equações parabólicas encontrado em Ladyzhenskaya[10] (Teorema 9.1, pág.341).

Teorema 1.4 *Seja Ω um domínio aberto, limitado e de classe $\in C^2$. Então, para todo $f \in L^q(Q)$ e $u_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$, com $q > 1$, satisfazendo a condição de compatibilidade $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f(x,t) \quad em \quad Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad em \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u = u_0 \quad em \quad \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

possui única solução $u \in W_q^{2,1}(Q)$. E esta solução satisfaz a estimativa

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|f\|_{L^q(Q)} + \|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(Q)}\right].$$

onde C depende de Ω, T e k.

Capítulo 2

Modelo de Solidificação 1

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e de classe C^2, $T \in \mathbb{R}$ finito e $Q = \Omega \times (0,T)$. Consideremos o problema com condições de fronteira e condições iniciais:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau = l_1 \frac{\partial u}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v}{\partial t} + f \quad &\text{em} \quad Q \\
\frac{\partial u}{\partial t} - k_1 \Delta u = -a_1 u(1-u-v)(1-2u-v+c_1\tau+d_1) \quad &\text{em} \quad Q \\
\frac{\partial v}{\partial t} - k_2 \Delta v = -a_2 v(1-v-u)(1-2v-u+c_2\tau+d_2) \quad &\text{em} \quad Q \\
\frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad &\text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\
\tau = \tau_0, \quad u = u_0 \quad \text{e} \quad v = v_0 \quad &\text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}.
\end{aligned}
\tag{2.0.1}
$$

A função τ denota a temperatura e as funções campo de fase u e v distinguem entre dois subdomínios sólidos com cristalizações distintas e um subdomínio líquido em Q. Aqui n representa o vetor unitário normal exterior à $\partial\Omega$, b, k_1, k_2, a_1 e a_2 são constantes positivas, l_1 e l_2 são constantes de mesmo sinal e c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes dadas. Vale observar que em nenhum resultado é utilizado o fato de que l_1 e l_2 tem mesmo sinal, isto ocorre por razões físicas.

As condições iniciais τ_0, u_0 e v_0 são dadas em $W_2^2(\Omega)$ com $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$. Além disso, vamos supor que $0 \leq u_0, v_0 \leq M$, onde $M > 0$ é uma constante que definiremos adequadamente mais tarde.

Durante quase todo este capítulo discutiremos existência, regularidade e unicidade de soluções do problema (2.0.1), na penúltima seção trataremos de um problema envolvendo três funções campo de fase e na última do sistema formado pelas duas últimas equações (2.0.1) e pelos dados iniciais e de fronteira, sem a equação para a temperatura. Com a finalidade de discutir a existência da solução de (2.0.1), vamos primeiramente discutir a existência de solução de um problema auxiliar.

2.1 Um Problema Auxiliar

O problema auxiliar citado anteriormente é obtido da seguinte maneira: primeiramente rearranja-se alguns termos da segunda e terceira equações do problema (2.0.1) para que elas tenha a estrutura da equação do problema (P) introduzido no Capítulo 1, isto é, apresentem um termo que é um polinômio de grau três somente em u e em v nos casos da segunda e terceira equações, respectivamente, e os demais termos apresentando os produtos entre as funções τ, u e v, e dessa forma possam ser utilizados os Teoremas 1.1 e 1.2 e o Corolário 1.4. Posteriormente, introduz-se adequadamente truncamentos das funções u e v nos termos que apresentam produtos entre funções distintas nas equações obtidas.

Então, observemos que a segunda e terceira equações do problema (2.0.1) podem ser escritas como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k_1 \Delta u = -a_1 u(1-u)(1-u+d_1) - a_1 u(1-u-v)(-u+c_1\tau) + a_1 uv(2-2u-v+d_1) \text{ e}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k_2 \Delta v = -a_2 v(1-v)(1-v+d_2) - a_2 v(1-v-u)(-v+c_2\tau) + a_2 vu(2-2v-u+d_2),$$

respectivamente. E consideremos o problema auxiliar:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau = l_1\dfrac{\partial u}{\partial t} + l_2\dfrac{\partial v}{\partial t} + f \quad \text{em} \quad Q & \\
\dfrac{\partial u}{\partial t} - k_1\Delta u = -a_1 u(1-u)(1-u+d_1) - a_1\pi(u)[1-\pi(u)-\pi(v)][-\pi(u)+c_1\tau] & \\
\qquad +a_1\pi(u)\pi()[2-2\pi(u)-\pi(v)+d_1] & \text{em} \quad Q \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} - k_2\Delta v = -a_2 v(1-v)(1-v+d_2) - a_2\pi(v)[1-\pi(v)-\pi(u)][-\pi(v)+c_2\tau] & \\
\qquad +a_2\pi(v)\pi(u)[2-2\pi(v)-\pi(u)+d_2] & \text{em} \quad Q \\
\dfrac{\partial \tau}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) & \\
\tau = \tau_0, \quad u = u_0 \quad \text{e} \quad v = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\}, &
\end{array} \tag{2.1.2}$$

onde b, l_1, l_2, f, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2, τ_0, u_0 e v_0 são como no problema (2.0.1), o operador π é dado por

$$\pi(w)(x,t) = \begin{cases} w(x,t) & \text{se} \quad 0 \le w(x,t) \le M \\ 0 & \text{se} \quad w(x,t) < 0 \\ M & \text{se} \quad w(x,t) > M \end{cases}$$

e $M > 0$ é uma constante a ser definida.

Proposição 2.1 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes, com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, $f \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, e τ_0, u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \le u_0, v_0 \le M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então o problema (2.1.2) possui uma solução $(\tau,u,v) \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, com $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$, e satisfaz as estimativas:*

$$\|\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)}+\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)}+\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)}\le C\left(\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)}+\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}+\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(Q)}\right) \tag{2.1.3}$$

e

$$\begin{aligned}\|\tau\|_{W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)}+\|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}+\|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}\le C\Big[&\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)}+\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}+\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}\\ &+\|f\|_{L^q(Q)}+\|\tau_0\|^3_{W_2^2(\Omega)}+\|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)}+\|v_0\|^3_{W_2^2(\Omega)}+\|f\|^3_{L^2(Q)}\Big],\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.1.2).

Demonstração:

Para mostrar a existência da solução do problema (2.1.2) vamos aplicar o Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder (Teorema 1.3) no espaço de Banach

$$B := \{(\tau,u,v) : \tau\in L^\infty(Q), u,v\in L^9(Q)\} = L^\infty(Q)\times L^9(Q)\times L^9(Q).$$

Para isto vamos considerar o operador $T_\lambda : B\to B$ com

$$T_\lambda(\theta,\mu,\nu)=(\tau,u,v),\quad \forall\ (\theta,\mu,\nu)\in B,\quad 0\le\lambda\le 1,$$

definido pelo problema:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tau}{\partial t}-b\Delta\tau=l_1\frac{\partial u}{\partial t}+l_2\frac{\partial v}{\partial t}+f && \text{em } Q\\
&\frac{\partial u}{\partial t}-k_1\Delta u=-a_1u(1-u)(1-u+d_1)-\lambda a_1\pi(\mu)[1-\pi(\mu)-\pi(\nu)][-\pi(\mu)+c_1\theta]\\
&\qquad+\lambda a_1\pi(\mu)\pi(\nu)[2-2\pi(\mu)-\pi(\nu)+d_1] && \text{em } Q\\
&\frac{\partial v}{\partial t}-k_2\Delta v=-a_2v(1-v)(1-v+d_2)-\lambda a_2\pi(\nu)[1-\pi(\nu)-\pi(\mu)][-\pi(\nu)+c_2\theta]\\
&\qquad+\lambda a_2\pi(\nu)\pi(\mu)[2-2\pi(\nu)-\pi(\mu)+d_2] && \text{em } Q\\
&\frac{\partial\tau}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T)\\
&\tau=\tau_0,\quad u=u_0 \quad \text{e} \quad v=v_0 \quad \text{em} \quad \Omega\times\{t=0\}.
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Vamos agora demonstrar que as hipóteses do Teorema de Leray-Schauder são satisfeitas.

a) Primeiramente vamos mostrar que $T_\lambda(\theta,\mu,\nu)$ está bem definido $\forall\ (\theta,\mu,\nu)\in B$, $\forall\ 0\le\lambda\le 1$.

De fato, como θ, $\pi(\mu)$, $\pi(\nu)$, $m_1\in L^\infty(Q)$, temos que $-\lambda a_1\pi(\mu)[1-\pi(\mu)-\pi(\nu)][-\pi(\mu)+c_1\theta]$ $+\ \lambda a_1\pi(\mu)\pi(\nu)[2-2\pi(\mu)-\pi(\nu)+d_1]\in L^\infty(Q)$. Então, aplicando o Teorema 1.1 à segunda equação de (2.1.5), temos que existe $u\in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ solução desta equação. Mas como $W_{10/3}^{2,1}(Q)\subset L^9(Q)$, temos que $u\in L^9(Q)$. Agora aplicando o Corolário 1.4 , temos que a solução $u\in L^9(Q)$ da segunda equação de (2.1.5) é única.

De maneira análoga, aplicando o Teorema 1.1 e o Corolário 1.4 à terceira equação de (2.1.5), temos que existe uma única $v\in L^9(Q)\cap W_{10/3}^{2,1}(Q)$ solução desta equação.

Agora, como $(u,v)\in W_{10/3}^{2,1}(Q)\times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, temos que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}\in L^{10/3}(Q)$. Como também temos que $f\in L^q(Q)$, então o segundo membro da primeira equação de (2.1.5) pertence a $L^{\overline{q}}(Q)$, com $\overline{q}=$

$\min\{10/3, q\}$. E como $\tau_0 \in W_2^2(Q) \subset W_{10/3}^{2-\frac{2}{10/3}}(Q)$, pelo Corolário 1.3, então pelo Teorema 1.4 obtemos que existe uma única $\tau \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)$ solução da primeira equação de (2.1.5). Mas como $\overline{q} > 5/2$, temos que $W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$, e portanto, $\tau \in L^\infty(Q)$.

Assim obtivemos que existe único $(\tau, u, v) \in B$ solução de (2.1.5). E portanto, $T_\lambda : B \to B$ está bem definido para todo $\lambda \in [0,1]$. Mais ainda, para cada $\lambda \in [0,1]$, T_λ leva B em $W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$.

b) Agora demonstremos que para todo $\lambda \in [0,1]$ fixo, $T_\lambda : B \to B$ é contínua e compacta.

Para isso fixemos $\lambda \in [0,1]$. Sejam $(\delta_1, \mu_1, \nu_1), (\delta_2, \mu_2, \nu_2) \in B$ e sejam $(\tau_i, u_i, v_i) = T_\lambda(\delta_i, \mu_i, \nu_i)$, para $i = 1, 2$.

Pela segunda equação de (2.1.5), temos que u_i satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} - k_1 \Delta u_i = -a_1 u_i(1-u_i)(1-u_i+d_1) - \lambda a_1 \pi(\mu_i)[1 - \pi(\mu_i) - \pi(\nu_i)][-\pi(\mu_i) + c_1\theta_i] \\ +\lambda a_1 \pi(\mu_i)\pi(\nu_i)[2 - 2\pi(\mu_i) - \pi(\nu_i) + d_1] \qquad \text{em } Q \\ \partial u_i/\partial n = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u_i = u_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\}, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$.

Pelo Teorema 1.1, temos que u_1, $u_2 \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$. Então pelo Teorema 1.2, temos que

$$\begin{aligned} &\|u_1 - u_2\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\|\pi^2(\mu_1) - \pi^2(\mu_2) - \pi^3(\mu_1) + \pi^3(\mu_2) - \pi^2(\mu_1)\pi(\nu_1) + \pi^2(\mu_2)\pi(\nu_2) \\ &-\pi(\mu_1)\theta_1 + \pi(\mu_2)\theta_2 + \pi^2(\mu_1)\theta_1 - \pi^2(\mu_2)\theta_2 + \pi(\mu_1)\pi(\nu_1)\theta_1 - \pi(\mu_2)\pi(\nu_2)\theta_2 \\ &+\pi(\mu_1)\pi(\nu_1) - \pi(\mu_2)\pi(\nu_2) - \pi^2(\mu_1)\pi(\nu_1) + \pi^2(\mu_2)\pi(\nu_2) - \pi(\mu_1)\pi^2(\nu_1) + \pi^2(\mu_2)\pi^2(\nu_2)\|_{L^{10/3}(Q)}. \end{aligned}$$

De onde, usando a desigualdade triangular, a desigualdade de Hölder e sabendo que $\theta_1, \theta_2 \in L^\infty(Q)$ e $0 \leq \pi(\mu_1), \pi(\mu_2), \pi(\nu_1), \pi(\nu_2) \leq M$, obtemos

$$\|u_1 - u_2\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty(Q)} + \|\pi(\mu_1) - \pi(\mu_2)\|_{L^9(Q)} + \|\pi(\nu_1) - \pi(\nu_2)\|_{L^9(Q)}\right].$$

Como $|\pi(\mu_1) - \pi(\mu_2)| \leq |\mu_1 - \mu_2|$ e $|\pi(\nu_1) - \pi(\nu_2)| \leq |\nu_1 - \nu_2|$, segue da última desigualdade que

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} &\leq C\left[\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty(Q)} + \|\mu_1 - \mu_2\|_{L^9(Q)} + \|\nu_1 - \nu_2\|_{L^9(Q)}\right] \\ &\leq C\|(\theta_1, \mu_1, \nu_1) - (\theta_2, \mu_2, \nu_2)\|_B. \end{aligned}$$

Usando a terceira equação de (2.1.5) e procedendo do mesmo modo obtem-se que

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} &\leq C\left[\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty(Q)} + \|\mu_1 - \mu_2\|_{L^9(Q)} + \|\nu_1 - \nu_2\|_{L^9(Q)}\right] \\ &\leq C\|(\theta_1, \mu_1, \nu_1) - (\theta_2, \mu_2, \nu_2)\|_B. \end{aligned}$$

Agora, pela primeira equação de (2.1.5), temos que $\tau_1 - \tau_2$ satisfaz

$$\begin{gathered}
\frac{\partial(\tau_1 - \tau_2)}{\partial t} - b\Delta(\tau_1 - \tau_2) = l_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + l_2\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t}\right) \text{ em } Q\\
\frac{\partial(\tau_1 - \tau_2)}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T)\\
\tau_1 - \tau_2 = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}.
\end{gathered}$$

Pelo Teorema 1.1, temos que $\tau_1 - \tau_2 \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$. E pelo Teorema 1.4 temos que

$$\|\tau_1 - \tau_2\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} \leq C\|\tau_1 - \tau_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left\|l_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + l_2\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t}\right)\right\|_{L^{10/3}(Q)}$$

$$\leq C\left[\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}\right] \leq C\|(\theta_1,\mu_1,\nu_1) - (\theta_2,\mu_2,\nu_2)\|_B,$$

onde $\overline{q} = \min\{q, 10/3\} > 5/2$.

Logo, $T_\lambda : B \to W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$ é contínua. Como as inclusões $W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L^\infty(Q)$, $W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \subset L^\infty(Q)$ são contínuas e compactas, pelo Lema 1.2, pois $10/3$ e $\overline{q} > 5/2$, e como a inclusão $L^\infty(Q) \subset L^9(Q)$ é contínua, temos que a inclusão $W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset B$ é contínua e compacta. De onde, obtemos que $T_\lambda : B \to B$ é contínua e compacta para todo $\lambda \in [0,1]$ fixo.

c) Agora precisamos demonstrar que para todo $(\theta,\mu,\nu) \in A$, $A \subset B$ limitado, T_λ é uniformemente contínuo em λ.

Para isso basta fixar $A \subset B$ limitado e $(\theta,\mu,\nu) \in A$, tomar $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ e $(\tau_i, u_i, v_i) = T_{\lambda_i}(\theta,\mu,\nu)$, para $i = 1,2$, e proceder de modo análogo ao caso anterior. Dessa forma, obtem-se que $T_{(\cdot)}(\theta,\mu,\nu) : [0,1] \to B$ é contínua. Mas como $[0,1]$ é compacto, conclui-se que $T_\lambda(\theta,\mu,\nu)$ é uniformemente contínua em λ.

d) A seguir mostremos que o operador T_0 possui um único ponto fixo.

De fato, para $\lambda = 0$ o problema (2.1.5) se torna:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\tau}{\partial t} - b\Delta\tau = l_1\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + f \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial u}{\partial t} - k_1\Delta u = -a_1 u(1-u)(1-u+d_1) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial v}{\partial t} - k_2\Delta v = -a_2 v(1-v)(1-v+d_2) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial\tau}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T)\\
\tau = \tau_0,\ u = u_0 \text{ e } v = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\},
\end{gathered}$$

para todo $(\delta,\mu,\nu) \in B$.

Aplicando o Teorema 1.1 e o Corolário 1.4 para a segunda e para a terceira equações do problema acima temos que existem únicos $u, v \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ soluções da segunda e da terceira equações do problema acima, respectivamente.

Como as soluções u e v da segunda e da terceira equações, respectivamente, pertencem a $W^{2,1}_{10/3}(Q)$, temos que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{10/3}(Q)$. E como $f \in L^q(Q)$, temos que o segundo membro da primeira equação do problema acima pertence a $L^{\overline{q}}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$. Pelo Teorema 1.4 aplicado à primeira equação do problema anterior, temos que existe único $\tau \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)$ solução da referida equação.

Logo existe um único $(\tau, u, v) \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$, com $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$, solução do problema anterior. Então, $(\tau, u, v) \in B$ e satisfaz $T_0(\theta, \mu, \nu) = (\tau, u, v)$, $\forall\ (\theta, \mu, \nu) \in B$. Portanto, o operador T_0 possui único ponto fixo $(\tau, u, v) \in B$.

e) Finalmente mostremos que existe uma constante $K > 0$ tal que todo possível ponto fixo (τ, u, v) de T_λ para qualquer $\lambda \in [0,1]$ satisfaz $\|(\tau, u, v)\|_B \leq K$.

Precisamos então estimar as normas dos possíveis pontos fixos de T_λ.

Seja $(\tau, u, v) \in B$ um ponto fixo de T_λ para algum $\lambda \in [0,1]$, ou seja, $(\tau, u, v) = T_\lambda(\tau, u, v)$. Então, para tal $\lambda \in [0,1]$, (τ, u, v) satisfaz:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau = l_1\frac{\partial u}{\partial t} + l_2\frac{\partial v}{\partial t} + f \quad \text{em } Q\\
&\frac{\partial u}{\partial t} - k_1\Delta u = -a_1 u(1-u)(1-u+d_1) - \lambda a_1\pi(u)[1-\pi(u)-\pi(v)][-\pi(u)+c_1\tau]\\
&\qquad +\lambda a_1\pi(u)\pi(v)[2-2\pi(u)-\pi(v)+d_1] \quad \text{em } Q\\
&\frac{\partial v}{\partial t} - k_2\Delta v = -a_2 v(1-v)(1-v+d_2) - \lambda a_2\pi(v)[1-\pi(v)-\pi(u)][-\pi(v)+c_2\tau]\\
&\qquad +\lambda a_2\pi(v)\pi(u)[2-2\pi(v)-\pi(u)+d_2] \quad \text{em } Q\\
&\frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T)\\
&\tau = \tau_0,\ u = u_0 \text{ e } v = v_0 \quad \text{em } \Omega \times \{t=0\},
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

onde $\pi(w)$ é como no problema (2.1.2).

Multiplicando a segunda equação de (2.1.6) por u e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e utilizando que $u\pi(u) \leq u^2$ e $\pi(u), \pi(v) \geq 0$, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(t)dx + k_1\int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + a_1\int_0^t\int_\Omega \left[-(1+d_1)u^2 + C_\varepsilon u^2 + \varepsilon u^4 - u^4\right] dxdt$$

$$+\lambda a_1 c_1\int_0^t\int_\Omega \pi(u)\left[1+\pi(u)+\pi(v)\right]\left[-u^2 + c_1\tau u\right]dxdt.$$

$$+\lambda a_1\int_0^t\int_\Omega \pi(v)\left[2 + 2\pi(u) + \pi(v) + |d_1|\right]u^2 dxdt$$

Usando que $0 \leq \pi(u), \pi(v) \leq M$ nas duas últimas integrais acima e usando a desigualdade de Hölder no termo τu da penúltima integral, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(t)dx + k_1\int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega \left[C_\varepsilon u^2 + (\varepsilon - 1)u^4 + C\tau^2\right] dxdt.$$

Tomando $\varepsilon = 1/2$ na desigualdade acima e multiplicando-a por 2, obtemos

$$\int_\Omega u^2(t)dx + 2k_1\int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt + \int_0^t\int_\Omega u^4 dxdt \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t\int_\Omega \left(u^2+\tau^2\right)dxdt, \tag{2.1.7}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Multiplicando a terceira equação de (2.1.6) por v, integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0\leq t\leq T$, e procedendo de maneira análoga obtemos

$$\int_\Omega v^2(t)dx + 2k_2\int_0^t\int_\Omega |\nabla v|^2 dxdt + \int_0^t\int_\Omega v^4 \leq \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t\int_\Omega \left(v^2+\tau^2\right)dxdt, \tag{2.1.8}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Agora, multiplicando a primeira equação de (2.1.6) por $\tau - l_1 u - l_2 v$ e integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e utilizando as desigualdades triangular e de Young, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\tau + l_1 u + l_2 v\right)^2(t)dx + b\int_0^t\int_\Omega \left[|\nabla\tau|^2 - l_1\nabla\tau\nabla u - l_2\nabla\tau\nabla v\right]dxdt$$

$$\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right] + C\int_0^t\int_\Omega\left(\tau^2+u^2+v^2\right)dxdt.$$

Multiplicando a desigualdade (2.1.7) por uma constante $A/2 > 0$, a desigualdade (2.1.8) por $B/2$ e somando-as à última desigualdade obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\left(\tau + l_1 u + l_2 v\right)^2(t) + Au^2(t) + Bv^2(t)\right]dx$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\left[b|\nabla\tau|^2 - bl_1\nabla\tau\nabla u - bl_2\nabla\tau\nabla v + Ak_1|\nabla u|^2 + Bk_2|\nabla v|^2\right]dxdt + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega\left(Au^4+Bv^4\right)dxdt$$

$$\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right] + C\int_0^t\int_\Omega\left(\tau^2+u^2+v^2\right)dxdt.$$

Tomando $A = \max\{1+4l_1^2, (1+bl_1^2)/k_1\}$ e $B = \max\{1+4l_2^2, (1+bl_2^2)/k_2\}$, temos que $(\tau + l_1u + l_2v)^2 + Au^2 + Bv^2 \geq \frac{b}{2}|\nabla\tau|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2$ e $Au^4 + Bv^4 \geq u^4 + v^4$. De onde,

$$\int_\Omega\left[\tau^2(t) + u^2(t) + v^2(t)\right]dx + \int_0^t\int_\Omega\left(|\nabla\tau|^2 + k_1|\nabla u|^2 + k_2|\nabla v|^2\right]dxdt + \int_0^t\int_\Omega\left(u^4+v^4\right)dxdt$$

$$\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right] + C\int_0^t\int_\Omega\left(\tau^2+u^2+v^2\right)dxdt,$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Usando o Lema de Gronwall na desigualdade satisfeita pela primeira integral acima, temos

$$\int_\Omega\left[\tau^2(t) + u^2(t) + v^2(t)\right]dx + \int_0^t\int_\Omega\left(|\nabla\tau|^2 + k_1|\nabla u|^2 + k_2|\nabla v|^2\right)dxdt + \int_0^t\int_\Omega\left(u^4+v^4\right)dxdt$$
$$\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right], \tag{2.1.9}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Agora multiplicando a segunda equação de (2.1.6) por $\partial u/\partial t$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, utilizando as desigualdades de Hölder e de Young e que $0 \leq u_0 \leq M$ em Ω e $0 \leq \pi(u), \pi(v) \leq M$ em Q, temos

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + \frac{k_1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{a_1}{4}\int_\Omega u^4(t)dx$$

$$\leq \frac{k_1}{2}\,\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \frac{a_1 M^2}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(7a_1 + M + 2M^2\right)\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt$$

$$+C_\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \left[u^2 + u^4 + \tau^2 + \pi^2(u)\right] dxdt.$$

Como $a_1, M < \infty$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tão pequeno que $\left(7a_1 + M + 2M^2\right)\varepsilon = 1/2$, então tomando tal ε e usando que $\pi^2(u) \leq u^2$, obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + k_1 \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{a_1}{2}\int_\Omega u^4(t)dx$$

$$\leq k_1\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + a_1 M^2\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t \int_\Omega \left[u^2 + u^4 + \tau^2\right] dxdt.$$

De onde obtemos, pela desigualdade (2.1.9),

$$\begin{aligned}&\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + k_1 \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{a_1}{2}\int_\Omega u^4(t)dx \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right],\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

para todo $0 < t < T$.

Multiplicando a terceira equação de (2.1.6) por $\partial v/\partial t$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$ e procedendo de modo análogo obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dxdt + k_2 \int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx + \frac{a_2}{2}\int_\Omega v^4(t)dx \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right],\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

para todo $0 < t < T$.

Agora multiplicando a primeira equação de (2.1.6) por $\partial \tau/\partial t$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e utilizando a desigualdade de Young temos

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 dxdt + \frac{b}{2}\int_\Omega |\nabla \tau(t)|^2 dx \leq \frac{b}{2}\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}$$

$$+\int_0^t \int_\Omega \left[\varepsilon\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon f^2\right] dxdt.$$

Tomando $\varepsilon = 1/6$ e usando as desigualdades (2.1.10) e (2.1.11), obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 dxdt + b\int_\Omega |\nabla \tau(t)|^2 dx \le C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right], \tag{2.1.12}$$

para todo $0 < t < T$.

Finalmente multiplicando a primeira equação de (2.1.6) por $-\Delta\tau$, a segunda por $-\Delta u$ e a terceira por $-\Delta v$, integrando cada uma das igualdades obtidas em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \le t \le T$ e procedendo de modo análogo aos casos anteriores, temos

$$\int_\Omega |\nabla \tau(t)|^2 dx + b\int_0^t \int_\Omega |\Delta\tau|^2 dxdt \le C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right], \tag{2.1.13}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + k_1\int_0^t \int_\Omega |\Delta u|^2 dxdt + 6a_1\int_0^t\int_\Omega u^2|\nabla u|^2 dxdt\\ &\quad\le C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right] \text{ e}\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx + k_2\int_0^t \int_\Omega |\Delta v|^2 dxdt + 6a_2\int_0^t\int_\Omega v^2|\nabla u|^2 dxdt\\ &\quad\le C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right],\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

para todo $0 < t < T$.

Das desigualdades (2.1.9) a (2.1.15) temos que

$$\|\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right].$$

Como $W_2^{2,1}(Q) \subset L^{10}(Q)$, da desigualdade anterior segue que

$$\|\tau\|_{L^{10}(Q)} + \|u\|_{L^{10}(Q)} + \|v\|_{L^{10}(Q)} \le C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right]. \tag{2.1.16}$$

Como $\tau, u, v \in L^{10}(Q)$, temos que o segundo membro da segunda equação do problema (2.1.6) está em $L^{10/3}(Q)$. Temos também que $u_0 \in W_2^2(Q) \subset W_{10/3}^{2-\frac{2}{10/3}}(Q)$, então aplicando o Teorema 1.4 a esta equação temos que $u \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} &\le C\Big[\|-a_1u(1-u)(1-u+d_1) - \lambda a_1\pi(u)[1-\pi(u)-\pi(v)][-\pi(u)+c_1\tau]\\ &\qquad + \lambda a_1\pi(u)\pi(v)[2-2\pi(u)-\pi(v)\tau+d_1]\|_{L^{10/3}} + \|u_0\|_{W_{10/3}^{2-\frac{2}{10/3}}(Q)}\Big]\\ &\le C\left[\|u\|_{L^{10}(Q)} + \|u\|^3_{L^{10}(Q)} + \|\pi(u)\|_{L^{10/3}(Q)} + \|\tau\|_{L^{10/3}(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(Q)}\right].\end{aligned}$$

Como $|\pi(u)| \le |u|$ e $L^{10/3}(Q) \subset L^{10}(Q)$, segue da desigualdade (2.1.16) que

$$\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \le C\Big[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}$$

$$+\|\tau_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^3_{L^2(Q)}\Big].$$

Procedendo de maneira análoga para a terceira equação de (2.1.6) obtemos que $v \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e satisfaz

$$\|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\Big[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}$$
$$+\|\tau_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^3_{L^2(Q)}\Big].$$

Como $u, v \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$, temos que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{10/3}(Q)$. E como $\tau_0 \in W_2^2(Q)$, temos que $\tau_0 \in W^{2-\frac{2}{10/3}}_{10/3}(Q)$. Então, aplicando o Teorema 1.4 à primeira equação de (2.1.6) temos que $\tau \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{10/3, q\} > 5/2$, e satisfaz

$$\|\tau\|_{L^\infty(Q)} \leq C\|\tau\|_{W^{2,1}\overline{q}(Q)} \leq C\left[\left\|l_1\frac{\partial u}{\partial t} + l_2\frac{\partial v}{\partial t} + f\right\|_{L^{\overline{q}}(Q)} + \|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right]$$
$$\leq C\Big[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}$$
$$+\|\tau_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^3_{L^2(Q)}\Big],$$

ou seja,

$$\|\tau\|_{L^\infty(Q)} \leq C\Big[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)} + \|\tau_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)}$$
$$+\|v_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^3_{L^2(Q)}\Big] := \widetilde{K}, \tag{2.1.17}$$

pelas duas últimas desigualdades.

E portanto, pelas desigualdades (2.1.16) e (2.1.17) temos

$$\|(\tau, u, v)\|_B \leq C\left[\|\tau\|_{L^\infty(Q)} + \|u\|_{L^9(Q)} + \|v\|_{L^9(Q)}\right]$$
$$\leq C\Big[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}$$
$$+\|\tau_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^3_{L^2(Q)}\Big] =: K.$$

Como as hipóteses **a)** a **e)** são satisfeitas, pelo Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder, temos que existe $(\tau, u, v) \in B \cap W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$ ponto fixo de T_1, ou seja, existe $(\tau, u, v) \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$ solução do problema (2.1.2), onde $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$. Além disso, temos que essa solução satisfaz as estimativas (2.1.3) e (2.1.4).

∎

2.2 Existência de Solução para o Modelo de Solidificação 1

Seja M dado por

$$M := 1 + \max\{|d_1|, |d_2|\} + \max\{|c_1|, |c_2|\}\widetilde{K} \tag{2.2.18}$$

com $\widetilde{K} = C\Big[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} + \|\tau_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W_2^2(\Omega)}$ $+\|f\|^3_{L^2(Q)}\Big]$, como em (2.1.17).

Teorema 2.1 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes, com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, $f \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, e τ_0, u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \le u_0, v_0 \le M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então o problema (2.0.1) possui uma solução $(\tau, u, v) \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, com $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$, tal que (τ, u, v) satisfaz as estimativas:*

$$\|\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)}\| + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le C\left(\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right), \tag{2.2.19}$$

$$\|\tau\|_{W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \le C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right] \tag{2.2.20}$$

$$e \quad 0 \le u, v \le M \quad q.t.p. \ em \quad Q, \tag{2.2.21}$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.0.1).

Demonstração:

Pela Proposição 2.1 existe $(\tau, u, v) \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, com $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$, solução do problema (2.1.2). Agora observemos que se mostrarmos que tal solução (τ, u, v) do problema (2.1.2) satisfaz $0 \le u, v \le M$ q.t.p. em Q, então teremos que $\pi(u) = u$ e $\pi(v) = v$. De onde, teremos que $(\tau, u, v) \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$ é solução do problema (2.0.1) e satisfaz as desigualdades (2.1.3) e (2.1.4). Logo, a desigualdade (2.2.19) é satisfeita. Para verificarmos que (2.2.20) é satisfeita observemos que, como $W_2^{2,1}(Q) \subset L^{10}(Q)$ da desigualdade (2.2.19) temos

$$\|\tau\|_{L^{10}(Q)} + \|u\|_{L^{10}(Q)} + \|v\|_{L^{10}(Q)} \le C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right]. \tag{2.2.22}$$

Como $\tau, u, v \in L^{10}(Q)$, temos que o segundo membro da segunda equação do problema (2.1.2) está em $L^{10/3}(Q)$. Temos também que τ_0, u_0, $v_0 \in W_2^2(Q) \subset W_{10/3}^{2-\frac{2}{10/3}}(Q)$, então aplicando o Teorema 1.4 a esta equação temos que $u \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \le C\Big[\| - a_1u(1-u)(1-u+d_1) - \lambda a_1\pi(u)[1-\pi(u)-\pi(v)][-\pi(u)+c_1\tau]$$

$$+\lambda a_1\pi(u)\pi(v)[2-2\pi(u)-\pi(v)+d_1]\|_{L^{10/3}(Q)} + \|u_0\|_{W_{10/3}^{2-\frac{2}{10/3}}(\Omega)}\Big]$$

$$\le C\left[\|u\|_{L^{10/3}(Q)} + \|\pi(u)\|_{L^{10/3}(Q)} + \|\tau\|_{L^{10/3}(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right],$$

se $0 \leq u,\, v \leq M$. Agora, como $|\pi(u)| \leq |u|$, pela desigualdade (2.2.22) temos que

$$\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right].$$

Procedendo de maneira análoga para a terceira equação de (2.1.2) obtemos que $v \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e satisfaz

$$\|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right].$$

Como $u, v \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$, temos que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{10/3}(Q)$. E como $\tau_0 \in W^2_2(Q)$, temos que $\tau_0 \in W^{2-\frac{2}{10/3}}_{10/3}(Q)$. Então, aplicando o Teorema 1.4 à primeira equação de (2.1.6) temos que $\tau \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{10/3, q\} > 5/2$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
\|\tau\|_{L^\infty(Q)} \leq C\|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} &\leq C\left[\left\|l_1\frac{\partial u}{\partial t} + l_2\frac{\partial v}{\partial t} + f\right\|_{L^{\overline{q}}(Q)} + \|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right] \\
&\leq C\left[\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|f\|_{L^q(Q)} + \|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right] \\
&\leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right].
\end{aligned}$$

Das três últimas desigualdades obtemos que a desigualdade (2.2.20) é satisfeita. Então para demonstrar este teorema basta verificar que $0 \leq u,\, v \leq M$.

Consideremos então uma solução (τ, u, v) do problema (2.1.2) dada pela Proposição 2.1 e mostremos que esta satisfaz $0 \leq u, v \leq M$ q.t.p. em Q. Vamos dividir essa demonstração em duas partes:

1) Mostremos que $u, v \geq 0$ q.t.p em Q:

Primeiramente mostremos que $u \geq 0$ q.t.p em Q. Para isto consideremos a função

$$-(u_-)(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{se} \quad u(x,t) \leq 0 \\ 0 & \text{se} \quad u(x,t) > 0 \end{cases}$$

e observemos que

$$\frac{\partial(-u_-)}{\partial t}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) & \text{se } u(x,t) \leq 0 \\ 0 & \text{se } u(x,t) > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \Delta(-u_-)(x,t) = \begin{cases} \Delta u(x,t) & \text{se } u(x,t) \leq 0 \\ 0 & \text{se } u(x,t) > 0 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação de (2.1.2) por $-(u_-)$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, temos

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\int_\Omega (u_-)^2(t)dx + k_1\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_-|^2 dxdt = \frac{1}{2}\,\|(u_0)_-\|^2_{L^2(\Omega)} \\
+a_1\int_0^t\int_\Omega \left[(-u)(-u_-) + d_1(-u)(-u_-) + 2u^2(-u_-) + d_1u^2(-u_-) - u^3(-u_-)\right] dxdt \\
-a_1c_1\int_0^t\int_\Omega \pi(u)\left[1 - \pi(u) - \pi(v)\right][-\pi(u) + c_1\tau](-u_-)dxdt
\end{gathered}$$

$$+a_1 \int_0^t \int_\Omega \pi(v)\,[2 - 3\pi(u) - \pi(v) + d_1]\,\pi(u)(-u_-)dxdt$$

$$= a_1 \int_0^t \int_\Omega \left[-(u_-)^2 - d_1(u_-)^2 - 2(u_-)^3 - d_1(u_-)^3 - (u_-)^4\right] dxdt,$$

pois $\|(u_0)_-\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$, já que $u_0 \geq 0$ por hipótese, e a segunda e terceira integrais são nulas, uma vez que $\pi(u)(-u_-) = 0$ pelas definições de $\pi(u)$ e de $-(u_-)$.

Então, usando que $-(u_-)^2 \leq 0$, $-2(u_-)^3 \leq 0$ e a desigualdade de Young no termo $-d_1(u_-)^3$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u_-)^2(t)dx + k_1 \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_-|^2 dxdt \leq a_1 \int_0^t \int_\Omega \left[-d_1(u_-)^2 - d_1(u_-)^3 - (u_-)^4\right] dxdt$$

$$\leq a_1 \int_0^t \int_\Omega \left[-d_1(u_-)^2 + C_\varepsilon |d_1| u_-^2 + \varepsilon |d_1| u_-^4 - (u_-)^4\right] dxdt.$$

Como $|d_1| < \infty$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon|d_1| - 1 \leq 0$. Assim obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u_-)^2(t)dx + k_1 \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_-|^2 dxdt \leq C \int_0^t \int_\Omega (u_-)^2 dxdt.$$

Agora usando o Lema de Gronwall na desigualdade satisfeita pela primeira integral acima, obtemos

$$\int_\Omega (u_-)^2(t)dx = 0,$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Logo, $(u_-)^2(t) = 0$ q.t.p. em Ω, $\forall\, 0 \leq t \leq T$. De onde, conclui-se que, $u(x,t) \geq 0$ q.t.p. em Q.

De modo análogo, mostra-se que $v(x,t) \geq 0$ q.t.p. em Q.

2) Mostremos que $u, v \leq M$ q.t.p em Q:

Primeiramente mostremos que $u \leq M$ q.t.p em Q. Para isto consideremos a função

$$(M-u)_-(x,t) = \begin{cases} u(x,t) - M & \text{se} \quad u(x,t) \geq M \\ 0 & \text{se} \quad u(x,t) < M. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.1.2) por $(M-u)_-$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (M-u)_-^2(t)dx + k_1 \int_0^t \int_\Omega |\nabla (M-u)_-|^2 dxdt = \frac{1}{2}\,\|(M-u_0)_-\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+a_1 \int_{Q1} \left[-u(1-u)(1-u+d_1)(M-u)_-\right] dxdt$$

$$+a_1 \int_{Q1} \left\{-\pi(u)[1-\pi(u)-\pi(v)][-\pi(u)+c_1\tau](M-u)_-\right\} dxdt$$

$$+a_1 \int_{Q1} \left\{\pi(u)\pi(v)[2-2\pi(u)-\pi(v)+c_1\tau+d_1](M-u)_-\right\} dxdt$$

$$+a_1 \int_{Q2} \left[-u(1-u)(1-u+d_1)(M-u)_-\right] dxdt$$

$$+a_1 \int_{Q2} \{-\pi(u)[1-\pi(u)-\pi(v)][-\pi(u)+c_1\tau](M-u)_-\}\, dxdt$$

$$+a_1 \int_{Q2} \{\pi(u)\pi(v)[2-2\pi(u)-\pi(v)+c_1\tau+d_1](M-u)_-\}\, dxdt,$$

onde $Q1 = \{(x,t) \in Q : u(x,t) < M\}$ e $Q2 = \{(x,t) \in Q : u(x,t) \geq M\}$.

Em $Q1$, $(M-u)_- = 0$, logo as três primeiras integral do último membro são nulas. Precisamos então analisar as três integrais em $Q2$.

Em $Q2$, $u \geq M = 1+\max\{|d_1|,|d_2|\}+\max\{|c_1|,|c_2|\}\widetilde{K}$, dado por (2.2.18). Logo, $-u < 0$, $1-u \leq 0$, $1-u+d_1 \leq 0$ e $(M-u)_- \geq 0$. Portanto, $[-u(1-u)(1-u-d_1)(M-u)_-] \leq 0$, de onde temos que a primeira integral do segundo membro é menor ou igual a zero.

Em $Q2$, também temos que $\pi(u) = M = 1+\max\{|d_1|,|d_2|\}+\max\{|c_1|,|c_2|\}\widetilde{K}$, então $-\pi(u) \leq 0$, $1-\pi(u)-\pi(v) \leq 0$, $(M-u)_- \geq 0$ e $-\pi(u)+c_1\tau = -M+c_1\tau \leq 0$, por (2.1.17). Logo,
$-\pi(u)[1-\pi(u)-\pi(v)][-\pi(u)+c_1\tau](M-u)_- \leq 0$ q.t.p. em Q, de onde temos que a segunda integral do segundo membro é menor ou igual a zero.

Finalmente, em $Q2$ temos que $\pi(u) = M = 1+\max\{|d_1|,|d_2|\}+\max\{|c_1|,|c_2|\}\widetilde{K}$, então $\pi(u)\pi(v) \geq 0$, $(M-u)_- \geq 0$ e $2-2\pi(u)-\pi(v)+c_1\tau+d_1 \leq 0$, por (2.1.17). Logo,
$\pi(u)\pi(v)[2-2\pi(u)-\pi(v)+c_1\tau+d_1](M-u)_- \leq 0$ q.t.p. em Q, de onde temos que a terceira integral do segundo membro é menor ou igual a zero.

Então, temos que

$$\int_\Omega (M-u)_-^2(t)dx \leq \|(M-u_0)_-\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Agora, por hipótese, $u_0 \leq M$, então $\|(M-u_0)_-\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$, o que implica em

$$\int_\Omega (M-u)_-^2(t)dx \leq 0,$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Segue que, $(M-u)_-^2(t) = 0$, $\forall\ 0 \leq t \leq T$, q.t.p. em Ω. De onde, conclui-se que $u(x,t) \leq M$ q.t.p. em Q.

De modo análogo, mostra-se que $v(x,t) \leq M$ q.t.p. em Q.

O que conclui a demonstração do teorema.

■

2.3 Regularidade de Solução para o Modelo de Solidificação 1

Proposição 2.2 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes, com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, $f \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, e τ_0, u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0, v_0 \leq M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $(\tau,u,v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é uma solução de (2.0.1), então $(\tau,u,v) \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$, e satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} + \|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C \Big[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}$$
$$+\|\tau_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|^3_{L^2(Q)}\Big],$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.0.1).

Se, além disso τ_0, u_0, $v_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, então $(\tau, u, v) \in W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q) \times W^{2,1}_p(Q) \times W^{2,1}_p(Q)$, com $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$, e satisfaz a seguinte estimativa

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)} + \|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C \Big[\|\tau_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}$$
$$+\|\tau_0\|^9_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|^9_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|^9_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|^9_{L^2(Q)}\Big],$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.0.1).

Observação 2.1 *Na próxima seção depois de demonstrarmos a unicidade da solução do problema (2.0.1), encontraremos melhores estimativas para $\|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} + \|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}$ e para $\|\tau\|_{W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)} + \|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_p(Q)}$.*

Demonstração:

Seja $(\tau, u, v) \in W^{2,1}_2(Q) \times W^{2,1}_2(Q) \times W^{2,1}_2(Q)$ uma solução do problema (2.0.1).

Procedendo para o problema (2.0.1) exatamente como no final da demonstração da Proposição 2.1 para o problema (2.1.6), obtemos que $(\tau, u, v) \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$, com $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$, e satisfaz

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} + \|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C \Big[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}$$
$$+\|\tau_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|^3_{L^2(Q)}\Big].$$

Agora vamos supor que τ_0, u_0, $v_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$. Então, τ_0, u_0, $v_0 \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$, pelo Corolário 1.3.

Como $u, v \in W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L^\infty(Q)$ e $\tau \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \subset L^\infty(Q)$, já que $\overline{q} > 5/2$, temos que o segundo membro da segunda equação de (2.0.1) pertence a $L^\infty(Q) \subset L^p(Q)$. Além disso, $u_0 \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$, então aplicando o Teorema 1.4 à segunda equação do problema (2.0.1) obtemos que $u \in W^{2,1}_p(Q)$ e satisfaz

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C \left[\| - a_1 u(1 - u - v)(1 - 2u - v + c_1\tau + d_1)\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}\right].$$

De onde, usando as desigualdades triangular, de Hölder e de Young e também a estimativa anterior para $\|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)}$, com $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$, $\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}$ e $\|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}$, temos

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C \Big[\|u\|_{L^{3p}(Q)} + \|u\|^3_{L^{3p}(Q)} + \|v\|_{L^{3p}(Q)} + \|v\|^3_{L^{3p}(Q)} + \|\tau\|_{L^{3p}(Q)} + \|\tau\|^3_{L^{3p}(Q)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\Big]$$

$$\leq C\left[\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}+\|u\|^3_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}+\|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}+\|v\|^3_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}+\|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)}+\|\tau\|^3_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)}+\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right]$$
$$\leq C\Big[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|f\|_{L^q(Q)}$$
$$+\|\tau_0\|^9_{W^2_2(\Omega)}+\|u_0\|^9_{W^2_2(\Omega)}+\|v_0\|^9_{W^2_2(\Omega)}+\|f\|^9_{L^2(Q)}\Big],$$

e procedendo de maneira análoga para a terceira equação de (2.0.1), temos

$$\|v\|_{W^{2,1}_p(Q)}\leq C\Big[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}+\|f\|_{L^q(Q)}$$
$$+\|\tau_0\|^9_{W^2_2(\Omega)}+\|u_0\|^9_{W^2_2(\Omega)}+\|v_0\|^9_{W^2_2(\Omega)}+\|f\|^9_{L^2(Q)}\Big].$$

Agora, como $u,v\in W^{2,1}_p(Q)$, temos que, $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\in L^p(Q)$, assim o segundo membro da primeira equação de (2.0.1) pertence a $\widetilde{q}=\min\{p,q\}$. Além disso, $\tau_0\in W^2_{3p/5}(\Omega)\subset W^2_{3\widetilde{q}/5}(\Omega)\subset W^{2-\frac{2}{q}}_{\widetilde{q}}(\Omega)$, já que $\widetilde{q}\leq p$ e pela Proposição 1.4. Então, aplicando o Teorema 1.4 à primeira equação de (2.0.1) temos que $\tau\in W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)$ e satisfaz

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)}\leq C\left[\left\|l_1\frac{\partial u}{\partial t}+l_2\frac{\partial v}{\partial t}+f\right\|_{L^{\widetilde{q}}(Q)}+\|\tau_0\|_{W^{2-\frac{2}{q}}_{\widetilde{q}}(\Omega)}\right]$$
$$\leq C\left[\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)}+\|v\|_{W^{2,1}_p(Q)}+\|f\|_{L^q(Q)}+\|\tau_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right]$$
$$\leq C\Big[\|\tau_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}+\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}+\|f\|_{L^q(Q)}$$
$$+\|\tau_0\|^9_{W^2_2(\Omega)}+\|u_0\|^9_{W^2_2(\Omega)}+\|v_0\|^9_{W^2_2(\Omega)}+\|f\|^9_{L^2(Q)}\Big].$$

Das três últimas estimativas concluimos que $(\tau,u,v)\in W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)\times W^{2,1}_p(Q)\times W^{2,1}_p(Q)$ e satisfaz a estimativa desejada. ∎

Proposição 2.3 *Se (τ,u,v) é uma solução do problema (2.0.1) dada pelo Teorema 2.1 e se τ_0, u_0, $v_0\in W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $2\leq 3p/5<\infty$, então $(\tau,u,v)\in W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)\times W^{2,1}_p(Q)\times W^{2,1}_p(Q)$, onde $\widetilde{q}=\min\{p,q\}$, e satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)}+\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)}+\|v\|_{W^{2,1}_p(Q)}\leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}+\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}+\|f\|_{L^q(Q)}\right],$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.0.1).

Demonstração:

Seja $(\tau,u,v)\in W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)$ uma solução do problema (2.0.1) dada pelo Teorema 2.1. Então, $(\tau,u,v)\in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)\times W^{2,1}_{10/3}(Q)\times W^{2,1}_{10/3}(Q)$, onde $\overline{q}=\min\{10/3,q\}$, e τ, u e v satisfazem (2.2.19) e (2.2.20).

Como $u,v\in W^{2,1}_{10/3}(Q)\subset L^\infty(Q)$ e $\tau\in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)\subset L^\infty(Q)$ temos que o segundo membro da segunda equação de (2.0.1) pertence a $L^\infty(Q)\subset L^p(Q)$. Além disso, $u_0\in W^2_{3p/5}(\Omega)\subset W^{2-\frac{2}{p}}_p(\Omega)$, aplicando o Teorema 1.4 à segunda equação do problema (2.0.1) obtemos que $u\in W^{2,1}_p(Q)$ e vale a seguinte estimativa:

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)}\leq C\left[\|-a_1u(1-u-v)(1-2u-v+c_1\tau+d_1)\|_{L^p(Q)}+\|u_0\|_{W^{2-\frac{2}{p}}_p(\Omega)}\right].$$

De onde, usando as desigualdades triangular e de Hölder, que $0 \leq u, v \leq M$, e também a estimativa (2.2.20) do Teorema 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} &\leq C \left[\| -a_1(1-u-v)(1-2u-v+d_1)\|_{L^\infty(Q)} \|u\|_{L^p(Q)} \right.\\ &\left. + \| -a_1 u(1-u-v)c_1\|_{L^\infty(Q)} \|\tau\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} \right]\\ &\leq C \left[\|u\|_{L^p(Q)} + \|\tau\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} \right] \leq C \left[\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|\tau\|_{W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} \right]\\ &\leq C \left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)} \right]\end{aligned}$$

e procedendo de maneira análoga para a segunda equação de (2.0.1), obtemos

$$\|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C \left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)} \right].$$

Agora, como $u, v \in W_p^{2,1}(Q)$, temos que, $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^p(Q)$, assim o segundo membro da primeira equação de (2.0.1) pertence a $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$. Além disso, $\tau_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega) \subset W^2_{3\widetilde{q}/5}(\Omega) \subset W_{\widetilde{q}}^{2-\frac{2}{\widetilde{q}}}(\Omega)$, já que $\widetilde{q} \leq p$ e pela Proposição 1.4. Então, aplicando o Teorema 1.4 à primeira equação de (2.0.1) temos que $\tau \in W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned}\|\tau\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} &\leq C \left[\left\| l_1 \frac{\partial u}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v}{\partial t} + f \right\|_{L^{\widetilde{q}}(Q)} + \|\tau_0\|_{W_{\widetilde{q}}^{2-\frac{2}{\widetilde{q}}}(\Omega)} \right]\\ &\leq C \left[\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|f\|_{L^q(Q)} + \|\tau_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} \right]\\ &\leq C \left[\|\tau_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)} \right].\end{aligned}$$

Das três últimas estimativas concluimos que $(\tau, u, v) \in \|\tau\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} \times \|\tau\|_{W_p^{2,1}(Q)} \times \|\tau\|_{W_p^{2,1}(Q)}$, onde $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$ e satisfaz a estimativa desejada.

■

2.4 Estabilidade e Unicidade de Solução para o Modelo de Solidificação 1

Teorema 2.2 *Sejam f_1 e $f_2 \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, (τ_0^1, u_0^1, v_0^1) e $(\tau_0^2, u_0^2, v_0^2) \in W_2^2(\Omega) \times W_2^2(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$ e sejam (τ_1, u_1, v_1), $(\tau_2, u_2, v_2) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (2.0.1) com $((\tau_0^1, u_0^1, v_0^1), f_1)$ e com $((\tau_0^2, u_0^2, v_0^2), f_2)$, respectivamente. Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes, com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, e τ_0^i, u_0^i, v_0^i satisfazem $\partial\tau_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0^i$, $v_0^i \leq M$, para $i = 1, 2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então $(\tau_1, u_1, v_1), (\tau_2, u_2, v_2)$ satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade*

$$\|\tau_1-\tau_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}+\|u_1-u_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}+\|v_1-v_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}$$
$$\leq C\left[\|\tau_0^1-\tau_0^2\|_{W_2^2(\Omega)}+\|u_0^1-u_0^2\|_{W_2^2(\Omega)}+\|v_0^1-v_0^2\|_{W_2^2(\Omega)}+\|f_1-f_2\|_{L^2(Q)}\right],$$

onde C depende de Ω, T, M, das constantes do problema (2.0.1) e de $\tau_1,\tau_2,u_1,u_2,v_1$ e v_2.

Demonstração:

Sejam f_1 e $f_2 \in L^q(Q)$, com $q>5/2$, (τ_0^1,u_0^1,v_0^1) e $(\tau_0^2,u_0^2,v_0^2)\in W_2^2(\Omega)\times W_2^2(\Omega)\times W_2^2(\Omega)$ e sejam (τ_1,u_1,v_1), $(\tau_2,u_2,v_2)\in W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (2.0.1) com f_1 e f_2, respectivamente.

Sejam $\tau=\tau_1-\tau_2$, $u=u_1-u_2$, $v=v_1-v_2$, $\tau_0=\tau_0^1-\tau_0^2$, $u_0=u_0^1-u_0^2$, $v_0=v_0^1-v_0^2$. Então as funções $(\tau,u,v)\in W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)$ e satisfazem o problema

$$\begin{array}{c}\dfrac{\partial\tau}{\partial t}-b\Delta\tau=l_1\dfrac{\partial u}{\partial t}+l_2\dfrac{\partial v}{\partial t}+(f_1-f_2)\quad \text{em}\quad Q\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}-k_1\Delta u=A_1u+A_2v+A_3\tau\quad\text{em}\quad Q\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-k_2\Delta v=B_1v+B_2u+B_3\tau\quad\text{em}\quad Q\\ \dfrac{\partial\tau}{\partial n}=\dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial v}{\partial n}=0\quad\text{em}\quad\partial\Omega\times(0,T)\\ \tau=\tau_0\quad u=u_0\quad\text{e}\quad v=v_0\quad\text{em}\quad\Omega\times\{t=0\},\end{array}\tag{2.4.23}$$

onde

$A_1=a_1\left[-(1+d_1)+(3+d_1)(u_1+u_2)-2(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)+(2+d_1)v_1-3(u_1+u_2)v_1\right.$
$\left.-v_1^2-c_1\tau_1+c_1v_1\tau_1+c_1(u_1+u_2)\tau_1\right]$,
$A_2=a_1\left[(2+d_1)u_2-3u_2^2-u_2(v_1+v_2)+c_1u_2\tau_1\right]$,
$A_3=a_1c_1\left[-u_2+u_2^2+u_2v_2\right]$,
$B_1=a_2\left[(2+d_2)v_2-3v_2^2-v_2(u_1+u_2)+c_2v_2\tau_1\right]$,
$B_2=a_2\left[-(1+d_2)+(3+d_2)(v_1+v_2)-2(v_1^2+v_1v_2+v_2^2)+(2+d_2)u_1-3(v_1+v_2)u_1\right.$
$\left.-u_1^2-c_2\tau_1+c_2u_1\tau_1+c_2(v_1+v_2)\tau_1\right]$ e
$B_3=a_2c_2\left[-v_2+v_2^2+v_2u_2\right]$.

Multiplicando a segunda equação do problema (2.4.23) por u, integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0\leq t\leq T$, e utilizando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(t)dx+k_1\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^2dxdt=\frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2dx+\int_0^t\int_\Omega\left[A_1u^2+A_2uv+A_3u\tau\right]dxdt$$
$$\leq\frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2dx+\int_0^t\int_\Omega\left\{\left[A_1+\frac{|A_2|}{2}+\frac{|A_3|}{2}\right]u^2+\frac{|A_2|}{2}v^2+\frac{|A_3|}{2}\tau^2\right\}dxdt.$$

Multiplicando a terceira equação de (2.4.23) por v, integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0\leq t\leq T$, e procedendo de modo análogo obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v^2(t)dx+k_2\int_0^t\int_\Omega|\nabla v|^2dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega v_0^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left\{ \frac{|B_2|}{2}\, u^2 + \left[B_1 + \frac{|B_2|}{2} + \frac{|B_3|}{2} \right] v^2 + \frac{|B_3|}{2}\tau^2 \right\} dxdt.$$

Multiplicando a primeira equação de (2.4.23) por $\tau - l_1 u - l_2 v$, integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0 \leq t \leq T$ e utilizando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\tau - l_1 u - l_2 v)^2(t)dx + b\int_0^t \int_\Omega \left(|\nabla\tau|^2 - l_1\nabla\tau\nabla u - l_2\nabla\tau\nabla v\right) dxdt$$

$$\leq C\int_\Omega (\tau_0^2 + u_0^2 + v_0^2)dx + C\int_0^t\int_\Omega (\tau^2 + u^2 + v^2)dxdt + C\int_0^t\int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdt.$$

Multiplicando a primeira desigualdade obtido por uma constante $A > 0$, a segunda por $B > 0$ e somando-as à terceira desigualdades obtida temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[(\tau - l_1 u - l_2 v)^2(t) + Au^2(t) + Bv^2(t)\right] dx$$

$$+ \int_0^t\int_\Omega \left(b|\nabla\tau|^2 - bl_1\nabla\tau\nabla u - bl_2\nabla\tau\nabla v + Ak_1|\nabla u|^2 + Bk_2|\nabla v|^2\right) dxdt$$

$$\leq C\int_\Omega (\tau_0^2 + u_0^2 + v_0^2)dx + \int_0^t\int_\Omega \left\{ \left[A|A_1| + A\frac{|A_2|}{2} + A\frac{|A_3|}{2} + B\frac{|B_2|}{2} + C \right] u^2 \right\} dxdt$$

$$+ \int_0^t\int_\Omega \left\{ \left[A\frac{|A_2|}{2} + B|B_1| + B\frac{|B_2|}{2} + B\frac{|B_3|}{2} + C \right] v^2 \right\} dxdt$$

$$+ \int_0^t\int_\Omega \left\{ \left[A\frac{|A_3|}{2} + B\frac{|B_3|}{2} + C \right] \tau^2 \right\} dxdt + C\int_0^t\int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdt.$$

Como $\tau_1, \tau_2, u_1, u_2, v_1, v_2 \in L^\infty(Q)$, pela Proposição 2.2, temos que A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 e $B_3 \in L^\infty(Q)$. Logo,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[(\tau - l_1 u - l_2 v)^2(t) + Au^2(t) + Bv^2(t)\right] dx$$

$$+ \int_0^t\int_\Omega \left(b|\nabla\tau|^2 - bl_1\nabla\tau\nabla u - bl_2\nabla\tau\nabla v + Ak_1|\nabla u|^2 + Bk_2|\nabla v|^2\right) dxdt$$

$$\leq C\left[\int_\Omega (\tau_0^2 + u_0^2 + v_0^2)dx + \int_0^t\int_\Omega (\tau^2 + u^2 + v^2)dxdt + \int_0^t\int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdt\right].$$

Tomando $A = \max\{1+4l_1^2, (1+bl_1^2)/k_1\}$ e $B = \max\{1+4l_2^2, (1+bl_2^2)/k_2\}$, temos que $(\tau + l_1 u + l_2 v)^2 + Au^2 + Bv^2 \geq \frac{\tau^2}{2} + u^2 + v^2$ e $b|\nabla\tau|^2 - bl_1\nabla\tau\nabla u - bl_2\nabla\tau\nabla v + Ak_1|\nabla u|^2 + Bk_2|\nabla v|^2 \geq \frac{b}{2}|\nabla\tau|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2$. De onde,

$$\int_\Omega \left[\tau^2(t) + u^2(t) + v^2(t)\right] dx + \int_0^t\int_\Omega \left(|\nabla\tau|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dxdt$$

$$\leq C\left[\int_\Omega (\tau_0^2 + u_0^2 + v_0^2)dx + \int_0^t\int_\Omega (\tau^2 + u^2 + v^2)dxdt + \int_0^t\int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdt\right].$$

Agora, usando o Lema de Gronwall na desigualdade satisfeita pela primeira integral acima, obtemos,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[\tau^2(t) + u^2(t) + v^2(t)\right] dx + \int_0^t\int_\Omega \left(|\nabla\tau|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dxdt \\ &\qquad \leq C\left[\int_\Omega (\tau_0^2 + u_0^2 + v_0^2)dx + \int_0^t\int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdt\right], \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Agora, multiplicando a segunda equação de (2.4.23) por $\partial u/\partial t$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e utilizando a desigualdade de Young, temos

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + \frac{k_1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \leq C\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}$$

$$+\int_0^t \int_\Omega \left[C_\varepsilon |A_1| u^2 + \varepsilon |A_1| \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon |A_2| v^2 + \varepsilon |A_2| \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon |A_3| \tau^2 + \varepsilon |A_3| \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dxdt.$$

Como A_1, A_2 e $A_3 \in L^\infty(Q)$, temos que existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\varepsilon|A_1| + \varepsilon|A_2| + \varepsilon|A_3| \leq 1/2$ q.t.p. em Q. Tomando tal ε e usando a inequação (2.4.24) temos

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + k_1 \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \leq C\left[\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \int_\Omega (\tau_0^2 + v_0^2)dx + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdt\right], \tag{2.4.25}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

De modo análogo, multiplicando a terceira equação de (2.4.23) por $\partial v/\partial t$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, obtem-se

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dxdt + k_2 \int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx \leq C\left[\|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \int_\Omega (\tau_0^2 + u_0^2)dx + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdt\right], \tag{2.4.26}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Multiplicando a primeira equação de (2.4.23) por $\partial \tau/\partial t$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e utilizando a desigualdade de Young, obtem-se

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 dxdt + \frac{b}{2}\int_\Omega |\nabla \tau(t)|^2 dx \leq C\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}$$

$$+\int_0^t \int_\Omega \left[C_\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon f^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2\right] dxdt.$$

Tomando $\varepsilon = 1/6$ e utilizando as desigualdades (2.4.25) e (2.4.26) obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 dxdt + b\int_\Omega |\nabla \tau(t)|^2 dx \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdt\right], \end{aligned} \tag{2.4.27}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Finalmente multiplicando a segunda equação de (2.4.23) por $(-\Delta u)$, terceira por $(-\Delta v)$, integrando cada uma das igualdades obtidas em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e procedendo da mesma forma como foi obtida a desigualdade (2.4.25), temos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + k_1 \int_0^t \int_\Omega |\Delta u|^2 dxdt \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdt\right]\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

e

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dxdt + k_2 \int_0^t \int_\Omega |\Delta v|^2 dxdt \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdt\right],\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Agora, multiplicando a primeira equação de (2.4.23) por $(-\Delta\tau)$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e procedendo como foi feito para obter (2.4.27), obtem-se

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla \tau(t)|^2 dxdt + b \int_0^t \int_\Omega |\Delta \tau|^2 dxdt \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 dxdt\right],\end{aligned} \tag{2.4.30}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Das desigualdades (2.4.24) a (2.4.30) obtemos que

$$\|\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)}\right], \tag{2.4.31}$$

o que prova o teorema.

■

Corolário 2.1 *Sejam f_1 e $f_2 \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, (τ_0^1, u_0^1, v_0^1) e $(\tau_0^2, u_0^2, v_0^2) \in W_2^2(\Omega)\times W_2^2(\Omega)\times W_2^2(\Omega)$ e sejam (τ_1, u_1, v_1), $(\tau_2, u_2, v_2) \in W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (2.0.1) com $((\tau_0^1, u_0^1, v_0^1), f_1)$ e com $((\tau_0^2, u_0^2, v_0^2), f_2)$, respectivamente. Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2 são constantes, com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, e τ_0^i, u_0^i, v_0^i satisfazem $\partial\tau_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0^i$, $v_0^i \leq M$, para $i = 1,2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então $(\tau_1, u_1, v_1), (\tau_2, u_2, v_2) \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)\times W_{10/3}^{2,1}(Q)\times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$, e satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade*

$$\|\tau_1 - \tau_2\|_{W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)} + \|u_1 - u_2\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C\left[\|\tau_0^1 - \tau_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0^1 - v_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right],$$

onde C depende de Ω, T, M, das constantes do problema (2.0.1) e de $\tau_1, \tau_2, u_1, u_2, v_1$ e v_2.

Se, além disso, τ_0^i, u_0^i, $v_0^i \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, para $i = 1,2$, então (τ_1, u_1, v_1), $(\tau_2, u_2, v_2) \in W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q) \times W^{2,1}_p(Q) \times W^{2,1}_p(Q)$, onde $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$, e satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade

$$\|\tau_1 - \tau_2\|_{W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)} + \|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_p(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W^{2,1}_p(Q)}$$

$$\leq C\left[\|\tau_0^1 - \tau_0^2\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|u_0^1 - u_0^2\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0^1 - v_0^2\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right],$$

onde C depende de Ω, T, M, das constantes do problema (2.0.1) e de $\tau_1, \tau_2, u_1, u_2, v_1$ e v_2.

Demonstração:

Sejam τ_1, τ_2, u_1, u_2, v_1, v_2, τ, u, v, τ_0, u_0 e v_0 como na demonstração do Teorema 2.2.

Pelo Teorema anterior temos que $(\tau, u, v) \in W^{2,1}_2(Q) \times W^{2,1}_2(Q) \times W^{2,1}_2(Q)$ e satisfaz a estimativa (2.4.31). Como A_1, A_2, $A_3 \in L^\infty(Q)$, temos que $A_1 u + A_2 v + A_3 \tau \in L^{10}(Q) \subset L^{10/3}(Q)$. Além disso, $u_0 \in W^2_2(\Omega)$ e, pelo Corolário 1.3, $W^2_2(\Omega) \subset W^{2-\frac{2}{10/3}}_{10/3}(\Omega)$. Então, aplicando o Teorema 1.4 à segunda equação do problema (2.4.23), temos que $u \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e satisfaz

$$\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left[\|A_1 u\|_{L^{10/3}(Q)} + \|A_2 v\|_{L^{10/3}(Q)} + \|A_3 \tau\|_{L^{10/3}(Q)} + \|u_0\|_{W^{2-\frac{2}{10/3}}_{10/3}(\Omega)}\right],$$

$$\leq C\left[\|u\|_{W^{2,1}_2(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_2(Q)} + \|\tau\|_{W^{2,1}_2(Q)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right],$$

pela desigualdade de Hölder. Agora, pela desigualdade (2.4.31), temos

$$\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)}\right]. \tag{2.4.32}$$

Como $v_0 \in W^2_2(\Omega)$, procedendo de modo análogo para a terceira equação de (2.4.23), obtemos que $v \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e satisfaz

$$\|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)}\right]. \tag{2.4.33}$$

Agora $u, v \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$, logo $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{10/3}(Q)$. Como $f_1 - f_2 \in L^q(Q)$, temos que o segundo membro da primeira equação do problema (2.4.23) pertence a $L^{\overline{q}}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$. Além disso, $\tau_0 \in W^2_2(\Omega)$ e, pelo Corolário 1.3, $W^2_2(\Omega) \subset W^{2-\frac{2}{10/3}}_{10/3}(\Omega)$. Então, pelo Teorema 1.4 aplicado a equação mencionada acima, obtemos que $\tau \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)$ e satisfaz

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} \leq C\left[\left\|l_1 \frac{\partial u}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v}{\partial t} + f_1 - f_2\right\|_{L^{\overline{q}}(Q)} + \|\tau_0\|_{W^{2-\frac{2}{10/3}}_{10/3}(\Omega)}\right]$$

$$\leq C\left[\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)} + \|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right].$$

De onde, obtemos pelas desigualdades (2.4.32) e (2.4.33) que

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right]. \tag{2.4.34}$$

Somando as desigualdades (2.4.32) a (2.4.34) obtemos a desigualdade desejada.

Suponha agora que τ_0, u_0, $v_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$.

Repetindo o que foi feito na parte anterior, obtemos que $(\tau, u, v) \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$, e satisfaz a estimativa

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} + \|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}$$

$$\leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right].$$

Como $(\tau, u, v) \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L^\infty(Q) \times L^\infty(Q) \times L^\infty(Q)$ e como A_1, A_2, $A_3 \in L^\infty(Q)$, temos que $A_1 u + A_2 v + A_3 \tau \in L^\infty(Q) \subset L^p(Q)$. Além disso, $u_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$ e, pelo Corolário 1.3, $W^2_{3p/5}(\Omega) \subset W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$. Então, aplicando o Teorema 1.4 à segunda equação do problema (2.4.23) temos que $u \in W^{2,1}_p(Q)$. Procedendo de modo análogo ao que foi feito para obter a desigualdade (2.4.32) e usando a desigualdade anterior, temos que u satisfaz

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right]. \tag{2.4.35}$$

Procedendo de modo análogo para a terceira equação de (2.4.23), obtemos que

$$\|v\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right]. \tag{2.4.36}$$

Finalmente, u, $v \in W^{2,1}_p(Q)$, então $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^p(Q)$. Como $f_1 - f_2 \in L^q(Q)$, temos que o segundo membro da primeira equação de (2.4.23) pertence a $L^{\widetilde{q}}(Q)$, onde $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$. Além disso, $\tau_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$ e, pelo Corolário 1.3, $W^2_{3p/5}(\Omega) \subset W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema 1.4 aplicada à primeira equação do problema (2.4.23), obtemos que $\tau \in W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)$, com $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$. Procedendo como foi feito para obter a desigualdade (2.4.34) e utilizando as desigualdades (2.4.35) e (2.4.36), temos que τ satisfaz

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right]. \tag{2.4.37}$$

Neste caso, a desigualdade desejada segue das desigualdades (2.4.35) a (2.4.37).

■

Segue diretamente do Teorema 2.2 o seguinte resultado:

Corolário 2.2 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes, com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, $f \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, e τ_0, u_0, $v_0 \in W^2_2(\Omega)$ satisfazem $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0, v_0 \leq M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então, a solução $(\tau, u, v) \in W^{2,1}_2(Q) \times W^{2,1}_2(Q) \times W^{2,1}_2(Q)$ do problema (2.0.1) é única.*

Do Corolário anterior e das Proposições 2.2 e 2.3, segue diretamente o teorema abaixo.

Teorema 2.3 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes, com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, $f \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, e τ_0, u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0, v_0 \leq M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $(\tau, u, v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é uma solução de (2.0.1), então $(\tau, u, v) \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, onde $\bar{q} = \min\{10/3, q\}$, e satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|\tau\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right],$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.0.1).

Se, além disso, τ_0, u_0, $v_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, então $(\tau, u, v) \in W_{\tilde{q}}^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$, onde $\tilde{q} = \min\{p, q\}$, e satisfaz a seguinte estimativa

$$\|\tau\|_{W_{\tilde{q}}^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right],$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.0.1).

2.5 Um novo problema

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e de classe C^2, $T \in \mathbb{R}$ finito e $Q = \Omega \times (0, T)$ como antes.

Queremos agora obter resultados análogos aos anteriores para o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial t} - b\Delta\tau &= l_1\frac{\partial u}{\partial t} + l_2\frac{\partial v}{\partial t} + l_3\frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= -a_1 uw(w - u + d_1\tau + c_1) \quad \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v &= -a_2 vw(w - v + d_2\tau + c_2) \quad \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w &= -a_1 uw(u - w - d_1\tau - c_1) - a_2 vw(v - w - d_2\tau - c_2) \quad \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial\tau}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, T) \\ \tau = \tau_0 \quad u &= u_0 \quad , \quad v = v_0 \quad \text{e} \quad w = w_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}, \end{aligned} \tag{2.5.38}$$

onde b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2 são constantes, com b, k, a_1, $a_2 > 0$, $f \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, é uma função dada e as condições iniciais τ_0, u_0, v_0 e $w_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem u_0, v_0 e $w_0 \geq 0$ em Ω, $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ em Ω e $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$.

Além disso, considerando M dado por (2.2.18), isto é,

$$M = 1 + \max\{|d_1|, |d_2|\} + \max\{|c_1|, |c_2|\}\widetilde{K}$$

com $\widetilde{K} = C\Big[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} + \|\tau_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W_2^2(\Omega)}$ $+\|f\|^3_{L^2(Q)} + \|u_0\|^6_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^6_{L^2(\Omega)}\Big]$, como em (2.1.17), é claro que $0 \leq u_0, v_0, w_0 \leq M$.

Um resultado sobre existência de solução do problema (2.5.38) é o seguinte:

Teorema 2.4 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2 são constantes, com b, k, a_1, $a_2 > 0$, $f \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$ e τ_0, u_0, v_0 e $w_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0 e $w_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ em Ω. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então (2.5.38) possui uma solução $(\tau, u, v, w) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que τ, u, v e w satisfazem as estimativas:*

$$\begin{aligned} &\|\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\left(\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right), \\ &u, v, w \geq 0 \quad e \quad u + v + w = 1, \end{aligned}$$

onde C depende de Ω, T e das constantes do problema (2.5.38).

Para demonstrar tal resultado basta considerar $(\tau, u, v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ a única solução do problema (2.0.1) e tomar $w = 1 - u - v$. Procedendo como na obtenção das estimativas para $\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)}$ e para $\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)}$ na Proposição 2.1 e utilizando-as, mostra-se a estimativa satisfeita por $\|w\|_{W_2^{2,1}(Q)}$. E procedendo como na demonstração de que $u, v \geq 0$ no Teorema 2.1, mostra-se que $w \geq 0$.

Observação 2.2 *Segue do teorema anterior e do modo como este é demonstrado que se $(\tau, u, v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é solução do problema (2.0.1), então $u, v \geq 0$ e $u + v \leq 1$. De onde, $0 \leq u, v \leq 1$.*

Vejamos agora um resultado sobre a regularidade de solução do problema (2.5.38).

Teorema 2.5 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2 são constantes, com b, k, a_1, $a_2 > 0$, $f \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$ e τ_0, u_0, v_0 e $w_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0 e $w_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ em Ω. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $(\tau, u, v, w) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ é uma solução de (2.5.38), então $(\tau, u, v, w) \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{10/3, q\}$ e satisfaz a estimativa*

$$\begin{aligned} &\|\tau\|_{W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right], \end{aligned} \tag{2.5.39}$$

onde C depende de Ω, T e das constantes do problema (2.5.38).

Se, além disso, τ_0, u_0, v_0 e $w_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, então $(\tau, u, v, w) \in W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$, onde $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$ e satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned} &\|\tau\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_p^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right]. \end{aligned} \tag{2.5.40}$$

onde C depende de Ω, T e das constantes do problema (2.5.38).

Para demonstrar tal teorema, basta considerar uma solução (u, v, w) do problema (2.5.38) e observar que, como $u + v + w = 1$, então (u, v) é solução do problema (2.0.1). Então, usando o Teorema 2.3, obtemos que (u, v, w) pertence ao espaço desejado e que u e v satisfazem as estimativas desejadas. Para obter as estimativas para w, basta aplicar o Teorema 1.4 à terceira equação de (2.5.38).

Vejamos agora resultados sobre a estabilidade e a unicidade da solução de (2.5.38).

Teorema 2.6 *Sejam f_1 e $f_2 \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, $(\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1)$ e $(\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2) \in \left[W_2^2(\Omega)\right]^4$ e sejam (τ_1, u_1, v_1, w_1), $(\tau_2, u_2, v_2, w_2) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ as soluções correspondentes de (2.5.38) com f_1 e $(\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1)$ e com f_2 e $(\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2)$, respectivamente. Suponha que k, a_1, $a_2 > 0$ são constantes e τ_0^i, u_0^i, v_0^i e w_0^i satisfazem $\partial\tau_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0^i, v_0^i, $w_0^i \geq 0$ e $u_0^i + v_0^i + w_0^i = 1$, para $i = 1, 2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então (τ_1, u_1, v_1, w_1) e (τ_2, u_2, v_2, w_2) satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade*

$$
\begin{aligned}
&\|u_1 - u_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|w_1 - w_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\
&\leq C \left[\|\tau_0^1 - \tau_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0^1 - v_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0^1 - w_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)}\right],
\end{aligned}
\tag{2.5.41}
$$

onde C depende de Ω, T, das constantes do problema (2.5.38) e de $\tau_1, \tau_2, u_1, u_2, v_1$, v_2, w_1 e w_2.

Para demonstrar tal teorema basta observar que (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ são soluções do problema (2.0.1) e utilizar o Teorema 2.2 para obter as estimativas para $\|u_1 - u_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}$ e para $\|v_1 - v_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}$. Para obter a estimativa para $\|w_1 - w_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}$, basta utilizar que $w_i = 1 - u_i - v_i$, para $i = 1, 2$, e as estimativas anteriores.

Do mesmo modo que foi feito na Seção 2.4, segue deste teorema o resultado abaixo:

Corolário 2.3 *Sejam f_1 e $f_2 \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, $(\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1)$ e $(\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2) \in \left[W_2^2(\Omega)\right]^4$ e sejam (τ_1, u_1, v_1, w_1), $(\tau_2, u_2, v_2, w_2) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ as soluções correspondentes de (2.5.38) com f_1 e $(\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1)$ e com f_2 e $(\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2)$, respectivamente. Suponha que k, a_1, $a_2 > 0$ são constantes e τ_0^i,, u_0^i, v_0^i e w_0^i satisfazem $\partial\tau_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0^i, v_0^i, $w_0^i \geq 0$ e $u_0^i + v_0^i + w_0^i = 1$, para $i = 1, 2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então (τ_1, u_1, v_1, w_1) e $(\tau_2, u_2, v_2, w_2) \in W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$, com $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$ e satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade*

$$
\begin{aligned}
\|\tau_1 - \tau_2\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} + \|u_1 - u_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|w_1 - w_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C \Big[\|\tau_0^1 - \tau_0^2\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} \\
+ \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|v_0^1 - v_0^2\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|w_0^1 - w_0^2\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\Big],
\end{aligned}
$$

onde C depende de Ω, T, das constantes do problema (2.5.38) e de $\tau_1, \tau_2, u_1, u_2, v_1$, v_2, w_1 e w_2.

Segue também do Teorema 2.6 o seguinte resultado:

Corolário 2.4 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2 são constantes, com b, k, a_1, $a_2 > 0$, $f \in L^q(Q)$ com $q > 5/2$, e τ_0, u_0, v_0 e $w_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0 e $w_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ em Ω. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então a solução $(\tau, u, v, w) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ do problema (2.5.38) é única.*

2.6 Modelo de Solidificação 1 Sem Equação de Temperatura

Nesta seção veremos resultados análogos aos anteriores para um problema formado pelas equações para as funções campo de fase do modelo de solidificação tratado anteriormente, mas sem a equação para a temperatura. Estes resultados serão úteis quando tratarmos de alguns dos problemas de controle abordados mais tarde.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e de classe C^2, $T \in \mathbb{R}$ finito e $Q = \Omega \times (0, T)$. Consideremos o problema com condições de fronteira e condições iniciais:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial t} - k_1 \Delta u = -a_1 u(1-u-v)(1-2u-v-2m_1) \quad \text{em} \quad Q \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - k_2 \Delta v = -a_2 v(1-v-u)(1-2v-u-2m_2) \quad \text{em} \quad Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u = u_0 \quad \text{e} \quad v = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}. \end{array} \tag{2.6.42}$$

As funções campo de fase u e v distinguem entre dois subdomínios sólidos com cristalizações distintas e um subdomínio líquido em Q. Aqui k_1, k_2, a_1 e a_2 são constantes positivas e m_1, $m_2 \in L^\infty(Q)$ são funções dadas que dependem da temperatura. n representa o vetor unitário normal exterior à $\partial\Omega$. As condições iniciais u_0 e v_0 são dadas em $W_2^2(\Omega)$. Além disso, denotando por

$$M = 1 + \max\{\|m_1\|_{L^\infty(Q)}, \|m_2\|_{L^\infty(Q)}\} \tag{2.6.43}$$

vamos supor que $0 \leq u_0, v_0 \leq M$.

Vamos agora, somente enunciar alguns resultados sobre existência, estabilidade e regularidade de solução do problema (2.6.42). Tais resultados podem ser demonstrados de forma análoga, ou mais simples, que seus análogos para o problema (2.0.1).

Procedendo de modo semelhante, mas mais simples, ao que foi feito para a obtenção do resultado sobre existência de solução do problema (2.0.1), obtemos o seguinte resultado para existência de solução do problema (2.6.42):

Teorema 2.7 *Suponha que k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$ são constantes, m_1, $m_2 \in L^\infty(Q)$ e u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0, v_0 \leq M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então o problema (2.6.42) possui uma solução $(u,v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que u e v satisfazem as estimativas:*

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} \quad e \quad 0 \leq u, v \leq M \ \text{q.t.p. em } Q,$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.6.42).

Para a regularidade de solução do problema (2.6.42) temos os seguintes resultados:

Proposição 2.4 *Suponha que k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$ são constantes, m_1, $m_2 \in L^\infty(Q)$ e u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0, v_0 \leq M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $(u,v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é uma solução de (2.6.42), então $(u,v) \in W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfazem as seguintes estimativas*

$$\|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}^3 + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}^3\right],$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.6.42).

Se, além disso, $(u,v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é uma solução de (2.6.42) e u_0, $v_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, então $(u,v) \in W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ e satisfazem a seguinte estimativa

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|u_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}^9 + \|v_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}^9\right],$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.6.42).

Proposição 2.5 *Se (u,v) é uma solução do problema (2.6.42) dada pelo Teorema 2.7, então $(u,v) \in W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfazem as seguintes estimativas*

$$\|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \quad e \quad \|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)},$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.6.42).

Se, além disso, u_0, $v_0 \in W_{3p/5}^2(Q)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, então $(u,v) \in W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ e satisfazem as seguintes estimativas

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} \quad e \quad \|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)},$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.6.42).

Para a estabilidade e unicidade de solução do problema (2.6.42) temos os resultados enunciados a seguir.

Teorema 2.8 *Sejam (m_1, m_2) e $(n_1, n_2) \in L^\infty(Q) \times L^\infty(Q)$, (u_0^1, v_0^1) e $(u_0^2, v_0^2) \in W_2^2(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$ e sejam (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (2.6.42) com (m_1, m_2) e (u_0^1, v_0^1) e (n_1, n_2) e (u_0^2, v_0^2), respectivamente. Suponha que k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$ são constantes e u_0^i e v_0^i satisfazem $\partial u_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0^i$, $v_0^i \leq M$, para $i = 1, 2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então (u_1, v_1) e (u_2, v_2) satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade*

$$\begin{aligned} &\|u_1 - u_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\left[\|u_0^1 - u_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0^1 - v_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|m_1 - n_1\|_{L^\infty(Q)} + \|m_2 - n_2\|_{L^\infty(Q)}\right], \end{aligned} \tag{2.6.44}$$

onde C depende de Ω, T, M, das constantes do problema (2.6.42) e de u_1, u_2, v_1 e v_2.

Corolário 2.5 *Sejam (m_1, m_2) e $(n_1, n_2) \in L^\infty(Q) \times L^\infty(Q)$ e (u_0^1, v_0^1) e $(u_0^2, v_0^2) \in W_{3p/5}^2(\Omega) \times W_{3p/5}^2(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, e sejam (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (2.6.42) com (m_1, m_2) e (u_0^1, v_0^1) e com (n_1, n_2) e (u_0^2, v_0^2), respectivamente. Suponha que k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$ são constantes e u_0^i, v_0^i satisfazem $= \partial u_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0^i$, $v_0^i \leq M$, para $i = 1, 2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ e satisfaz a seguinte estimativa de estabilidade*

$$\|u_1 - u_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W_p^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C\left[\|u_0^1 - u_0^2\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|v_0^1 - v_0^2\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|m_1 - n_1\|_{L^\infty(Q)} + \|m_2 - n_2\|_{L^\infty(Q)}\right],$$

onde C depende de Ω, T, M, das constantes do problema (2.6.42) e de u_1, u_2, v_1 e v_2.

Segue diretamente do Teorema 2.8 o seguinte resultado:

Corolário 2.6 *Suponha que k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$ são constantes, m_1, $m_2 \in L^\infty(Q)$ e u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0, v_0 \leq M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então, a solução $(u, v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ do problema (2.6.42) é única.*

Do último corolário e da Proposição 2.5 obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.9 *Suponha que k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$ são constantes, m_1, $m_2 \in L^\infty(Q)$ e u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0, v_0 \leq M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $(u, v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é uma solução de (2.6.42), então $(u, v) \in W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e u e v satisfazem as seguintes estimativas*

$$\|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \quad e \quad \|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)},$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (2.6.42).

Se, além disso, u_0, $v_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, *então* $(u,v) \in W^{2,1}_p(Q) \times W^{2,1}_p(Q)$ *e satisfazem as seguintes estimativas*

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} \quad e \quad \|v\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}.$$

onde C *depende de* Ω, T, M *e das constantes do problema (2.6.42).*

Observação 2.3 *Como foi feito para o problema (2.0.1), pode-se usar o problema satisfeito por* (u, v, w), *onde* (u, v) *é uma solução qualquer de (2.6.42) e* $w = 1 - u - v$, *para mostrar que toda solução* (u, v) *de (2.6.42) satisfaz* $0 \leq u, v \leq 1$.

Capítulo 3

Modelo de Solidificação 2 Sem Equação para a Temperatura

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e de classe C^2, $T \in \mathbb{R}$ finito e $Q = \Omega \times (0,T)$, como nos capítulos anteriores. Aqui vamos discutir existência, regularidade e unicidade de soluções do problema com condições de fronteira e condições iniciais:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= -a_1 uw(w-u-2m_1) - a_3 uv(v-u-2m_3) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v &= -a_2 vw(w-v-2m_2) - a_3 uv(u-v+2m_3) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w &= -a_1 uw(u-w+2m_1) - a_2 vw(v-w+2m_2) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T)\\
u = u_0, \quad v = v_0 \quad &\text{e} \quad w = w_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\}.
\end{aligned}
\tag{3.0.1}
$$

As funções campo de fase u, v e w distinguem entre três subdomínios sólidos com cristalizações distintas e um subdomínio líquido em Q. Aqui k, a_1, a_2 e a_3 são constantes positivas e m_1, m_2, $m_3 \in L^\infty(Q)$ são funções dadas que dependem da temperatura. n representa o vetor unitário normal exterior à $\partial\Omega$. As condições iniciais u_0, v_0 e w_0 são dadas em $W_2^2(\Omega)$ e satisfazem $\partial u_0/\partial t|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial t|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial t|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0, $w_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

3.1 Resultados Sobre Existência de Soluções

Observemos que no problema (3.0.1) temos que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ e, além disso, somando suas três primeiras equacões obtemos $\partial(u+v+w)/\partial t = 0$ em Q. De onde, todas as possíveis soluções do problema (3.0.1) satisfazem $u+v+w = 1$ em Q. Então substituindo w por $1-u-v$ neste problema obtemos o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = -a_1 u(1-u-v)(1-2u-v-2m_1) - a_3 uv(v-u-2m_3) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v = -a_2 v(1-v-u)(1-2v-u-2m_2) - a_3 vu(u-v+2m_3) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w = a_1 u(1-u-v)(1-2u-v-2m_1) + a_2 v(1-v-u)(1-2v-u-2m_2) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T)\\
u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{e} \quad w = w_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\}.
\end{gathered} \tag{3.1.2}$$

Para obter um resultado sobre existência de soluções do problema (3.0.1) vamos primeiro obter um resultado sobre existência de soluções do problema (3.1.2). E para obter tal resultado sobre a existência de soluções do problema (3.1.2), vamos primeiramente discutir a existência de soluções de um segundo problema auxiliar introduzido a seguir.

3.1.1 Existência de Soluções de um Problema Auxiliar

O problema auxiliar citado anteriormente é obtido de maneira análoga ao que foi feito para obter o problema auxiliar do Capítulo 2, isto é, rearranjando alguns termos da segunda e terceira equações do problema (3.1.2) para que elas tenha a estrutura da equação do problema (P) introduzido no Capítulo 1, e posteriormente, introduzindo truncamentos das funções u, v e w nos termos adequados.

Então, para introduzir o problema auxiliar mencionado acima observemos que as duas primeiras equações do problema (3.1.2) podem ser escritas como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = -a_1 u(1-u)(1-2u-2m_1) + uv[2a_1 + (a_3 - 3a_1)u - (a_1+a_3)v - 2m_1 a_1 + 2m_3 a_3] \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v = -a_2 v(1-v)(1-2v-2m_2) + vu[2a_2 + (a_3 - 3a_2)v - (a_2+a_3)u - 2m_2 a_2 - 2m_3 a_3],$$

respectivamente. E consideremos o problema auxiliar:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = -a_1 u(1-u)(1-2u-2m_1)\\
+\pi(u)\pi(v)[2a_1 + (a_3 - 3a_1)\pi(u) - (a_1+a_3)\pi(v) - 2m_1 a_1 + 2m_3 a_3] \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v = -a_2 v(1-v)(1-2v-2m_2)\\
+\pi(v)\pi(u)[2a_2 + (a_3 - 3a_2)\pi(v) - (a_2+a_3)\pi(u) - 2m_2 a_2 - 2m_3 a_3] \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T)\\
u = u_0 \quad \text{e} \quad v = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\},
\end{gathered} \tag{3.1.3}$$

onde k, a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3, u_0 e v_0 são como no problema (3.0.1) e o operador π é dado por:

$$\pi(f)(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{se} \quad 0 \le f(x,t) \le M \\ 0 & \text{se} \quad f(x,t) < 0 \\ M & \text{se} \quad f(x,t) > M \end{cases}$$

com

$$M = 4\frac{A}{a}\left(3 + 2max\left\{\|m_1\|_{L^\infty(Q)}, \|m_2\|_{L^\infty(Q)}\right\}\right), \tag{3.1.4}$$

onde $A = max\{a_1, a_2\}$ e $a = min\{a_1, a_2\}$. Observe que $a \neq 0$, já que a_1 e a_2 são ambos não nulos. Portanto, a fração A/a está bem definida.

Proposição 3.1 *Suponha que k, a_1, a_2, $a_3 > 0$ são constantes, m_1, m_2, $m_3 \in L^\infty(Q)$ e u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0 = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega}$ e $0 \leq u_0, v_0 \leq M$, com M dado por (3.1.4). Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então o problema (3.1.3) possui uma solução $(u,v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que u e v satisfazem as estimativas:*

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \quad e \quad \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.1.5}$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (3.1.3).

Demonstração:

Para mostrar a existência da solução do problema (3.1.3) vamos aplicar o Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder (Teorema 1.3) no espaço de Banach

$$B := \{(u,v) : u, v \in L^9(Q)\} = L^9(Q) \times L^9(Q).$$

Para isto, vamos considerar o operador $T_\lambda : B \to B$ com

$$T_\lambda(\mu,\nu) = (u,v), \quad \forall\, (\mu,\nu) \in B, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

definido pelo problema:

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = -a_1 u(1-u)(1-2u-2m_1) \\
+\lambda\pi(\mu)\pi(\nu)[2a_1 + (a_3 - 3a_1)\pi(\mu) - (a_1+a_3)\pi(\nu) - 2m_1a_1 + 2m_3a_3] \quad \text{em} \quad Q \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v = -a_2 v(1-v)(1-2v-2m_2) \\
+\lambda\pi(\nu)\pi(\mu)[2a_2 + (a_3 - 3a_2)\pi(\nu) - (a_2+a_3)\pi(\mu) - 2m_2a_2 - 2m_3a_3] \quad \text{em} \quad Q \\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\
u = u_0 \quad \text{e} \quad v = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}.
\end{array} \tag{3.1.6}$$

Vamos agora demonstrar que as hipóteses do Teorema de Leray-Schauder são satisfeitas.

a) Primeiramente mostremos que $T_\lambda(\mu,\nu)$ está bem definido $\forall\, (\mu,\nu) \in B$ e $\forall\, 0 \leq \lambda \leq 1$.

De fato, como $\pi(\mu)$, $\pi(\nu)$, $m_1 \in L^\infty(Q)$, temos que $\pi(\mu)\pi(\nu)[2a_1 + (a_3 - 3a_1)\pi(\mu) - (a_1 + a_3)\pi(\nu) - 2m_1a_1 + 2m_3a_3] \in L^\infty(Q)$. Então aplicando o Teorema 1.1 à primeira equação do problema (3.1.6), temos que existe uma solução u desta equação e pelo mesmo teorema $u \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$. Mas como $W_{10/3}^{2,1}(Q) \subset L^9(Q)$, temos que $u \in L^9(Q)$. Agora aplicando o Corolário 1.4, temos que a solução $u \in L^9(Q)$ da primeira equação de (3.1.6) é única.

De maneira análoga, aplicando o Teorema 1.1 e o Corolário 1.4 à segunda equação do problema (3.1.6), temos que existe uma única solução v desta equação. Além disso, $v \in L^9(Q) \cap W^{2,1}_{10/3}(Q)$.

Logo existe único $(u, v) \in B$ solução de (3.1.6). E portanto, $T_\lambda(\mu, \nu)$ está bem definido $\forall\ (\mu, \nu) \in B$ e $\forall\ 0 \le \lambda \le 1$, e para cada $\lambda \in [0,1]$, T_λ leva B em B. Mais ainda, para cada $\lambda \in [0,1]$, T_λ leva B em $W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$.

b) A seguir mostremos que para todo $\lambda \in [0,1]$ fixo, $T_\lambda : B \to B$ é contínua e compacta.

Para isso, fixemos $\lambda \in [0,1]$. Sejam (μ_1, ν_1), $(\mu_2, \nu_2) \in B$ e sejam $(u_i, v_i) = T_\lambda(\mu_i, \nu_i)$, para $i = 1, 2$. Temos que u_i satisfaz

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_i}{\partial t} - k\Delta u_i = -a_1 u_i(1-u_i)(1-2u_i-2m_1) \\
+\lambda\pi(\mu_i)\pi(\nu_i)[2a_1 + (a_3 - 3a_1)\pi(\mu_i) - (a_1 + a_3)\pi(\nu_i) - 2m_1a_1 + 2m_3a_3] \quad \text{em } Q \\
\partial u_i/\partial n = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\
u_i = u_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\},
\end{gathered}$$

para $i = 1, 2$.

Como $u_1, u_2 \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$, então pelo Teorema 1.2, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} &\le C\,\|\lambda\pi(\mu_1)\pi(\nu_1)[2a_1 + (a_3 - 3a_1)\pi(\mu_1) - (a_1+a_3)\pi(\nu_1) - 2m_1a_1 + 2m_3a_3] \\
&\quad - \lambda\pi(\mu_2)\pi(\nu_2)[2a_1 + (a_3 - 3a_1)\pi(\mu_2) - (a_1+a_3)\pi(\nu_2) - 2m_1a_1 + 2m_3a_3]\|_{L^{10/3}(Q)} \\
&\le C\Big[\|\pi(\mu_1)\pi(\nu_1) - \pi(\mu_1)\pi(\nu_2)\|_{L^{10/3}(Q)} + \|\pi(\mu_1)\pi(\nu_2) - \pi(\mu_2)\pi(\nu_2)\|_{L^{10/3}(Q)} \\
&\quad + \big\|\pi(\mu_1)^2\pi(\nu_1) - \pi(\mu_1)^2\pi(\nu_2)\big\|_{L^{10/3}(Q)} + \big\|\pi(\mu_1)^2\pi(\nu_2) - \pi(\mu_2)^2\pi(\nu_2)\big\|_{L^{10/3}(Q)} \\
&\quad + \big\|\pi(\mu_1)\pi(\nu_1)^2 - \pi(\mu_2)\pi(\nu_1)^2\big\|_{L^{10/3}(Q)} + \big\|\pi(\mu_2)\pi(\nu_1)^2 - \pi(\mu_2)\pi(\nu_2)^2\big\|_{L^{10/3}(Q)}\Big],
\end{aligned}$$

pois $a_1, a_3, m_1, m_3 \in L^\infty(Q)$.

Agora, usando a desigualdade de Hölder e que $0 \le \pi(\mu_i)$, $\pi(\nu_i) \le M$, para $i = 1, 2$, segue que

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \le C\left[\|\pi(\mu_1) - \pi(\mu_2)\|_{L^{10/3}(Q)} + \|\pi(\nu_1) - \pi(\nu_2)\|_{L^{10/3}(Q)}\right]$$

$$\le C\left[\|\pi(\mu_1) - \pi(\mu_2)\|_{L^9(Q)} + \|\pi(\nu_1) - \pi(\nu_2)\|_{L^9(Q)}\right] \le C\Big[\|\mu_1 - \mu_2\|_{L^9(Q)} + \|\nu_1 - \nu_2\|_{L^9(Q)}\Big],$$

pois $|\pi(\mu_1) - \pi(\mu_2)| \le |\mu_1 - \mu_2|$ e $|\pi(\nu_1) - \pi(\nu_2)| \le |\nu_1 - \nu_2|$.

Do mesmo modo obtem-se que

$$\|v_1 - v_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \le C\Big[\|\mu_1 - \mu_2\|_{L^9(Q)} + \|\nu_1 - \nu_2\|_{L^9(Q)}\Big].$$

Logo, $T_\lambda : B \to W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$ é contínua. Agora, por (1.0.1), temos que a inclusão $W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L^9(Q)$ é contínua e compacta. De onde, segue que $T_\lambda : B \to B$ é contínua e compacta para todo $\lambda \in [0,1]$ fixo.

c) Agora mostremos que para todo $(\mu,\nu) \in A$, $A \subset B$ limitado, T_λ é uniformemente contínuo em λ.

Para isto fixemos $A \subset B$ limitado e $(\mu,\nu) \in A$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ e sejam $(u_i, v_i) = T_{\lambda_i}(\mu,\nu)$, para $i = 1, 2$. Procedendo como no caso anterior obtem-se

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \le C|\lambda_1 - \lambda_2| \quad \text{e} \quad \|v_1 - v_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \le C|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

com C dependendo de λ_1 e λ_2. Finalmente, como $W^{2,1}_{10/3} \subset L^9(Q)$ com inclusão contínua, segue das duas últimas desigualdades que

$$\begin{aligned}\|(u_1,v_1) - (u_2,v_2)\|_B &\le C\left[\|u_1 - u_2\|_{L^9(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{L^9(Q)}\right] \\ &\le C\left[\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}\right] \le C|\lambda_1 - \lambda_2|,\end{aligned}$$

com C dependendo de λ_1 e λ_2.

Logo, $T_{(.)}(\mu,\nu) : [0,1] \to B$ é contínua em λ. Mas como $[0,1]$ é compacto temos que $T_\lambda(\mu,\nu)$ é uniformemente contínua em λ.

d) Mostremos que agora que o operador T_0 possui um único ponto fixo.

Para $\lambda = 0$ o problema (3.1.6) se torna:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= -a_1 u(1-u)(1-2u-2m_1) \quad \text{em } Q \\ \frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v &= -a_2 v(1-v)(1-2v-2m_2) \quad \text{em } Q \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u = u_0 \quad \text{e} \quad v &= v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\},\end{aligned}$$

para todo $(\mu,\nu) \in B$.

Aplicando o Teorema 1.1 e o Corolário 1.4 para a primeira e para a segunda equações do problema acima temos que existe um único $(u,v) \in B$ solução deste problema, ou seja, $T_0(\mu,\nu) = (u,v)$, $\forall\ (\mu,\nu) \in B$. Logo, o operador T_0 possui único ponto fixo $(u,v) \in B$.

e) Finalmente mostremos que existe uma constante $K > 0$ tal que todo possível ponto fixo (u,v) de T_λ para qualquer $\lambda \in [0,1]$ satisfaz $\|(u,v)\|_B \le K$.

Precisamos então estimar as normas dos possíveis pontos fixos de T_λ.

Seja $(u,v) \in B$ um ponto fixo de T_λ para algum $\lambda \in [0,1]$, ou seja, $(u,v) = T_\lambda(u,v)$. Então para tal $\lambda \in [0,1]$, (u,v) satisfaz:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = -a_1 u(1-u)(1-2u-2m_1) \\ &+\lambda\pi(u)\pi(v)[2a_1 + (a_3 - 3a_1)\pi(u) - (a_1 + a_3)\pi(v) - 2m_1 a_1 + 2m_3 a_3] \quad \text{em } Q \\ &\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v = -a_2 v(1-v)(1-2v-2m_2) \\ &+\lambda\pi(v)\pi(u)[2a_2 + (a_3 - 3a_2)\pi(v) - (a_2 + a_3)\pi(u) - 2m_2 a_2 - 2m_3 a_3] \quad \text{em } Q \\ &\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ &u = u_0 \quad \text{e} \quad v = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\},\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

onde $\pi(f)$ é como no problema (3.1.3).

Multiplicando a primeira equação do problema (3.1.7) por u, integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0\le t\le T$, e utilizando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2dxdt$$

$$\le \frac{1}{2}\,\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + a_1\int_0^t\int_\Omega \left[-u^2+2m_1u^2+C_\varepsilon u^2+\varepsilon u^4+C_\varepsilon|m_1|u^2+\varepsilon|m_1|u^4-2u^4\right]dxdt$$

$$+\lambda\int_0^t\int_\Omega \left[2a_1u\pi(u)\pi(v)+(a_3-3a_1)u\pi^2(u)\pi(v)-(a_1+a_3)u\pi(u)\pi^2(v)\right.$$

$$\left.+(-2m_1a_1+2m_3a_3)u\pi(u)\pi(v)\right]dxdt.$$

Como $m_1\in L^\infty(Q)$ podemos tomar $\varepsilon>0$ tão pequeno que $\varepsilon+\varepsilon|m_1|\le 1$ q.t.p. em Q. Então, tomando tal ε e utilizando que $u\pi(u)\le u^2$, $0\le\pi(u)$, $\pi(v)\le M$, e a_1, a_3 m_1, $m_3\in L^\infty(Q)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^2dxdt + a_1\int_0^t\int_\Omega u^4dxdt$$

$$\le \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt + C\int_0^t\int_\Omega u\pi(u)dxdt \;\le \frac{1}{2}\,\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt.$$

Agora usando o Lema de Gronwall na desigualdade satisfeita pela primeira integral da desigualdade acima, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^2dxdt + a_1\int_0^t\int_\Omega u^4dxdt \le C\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.1.8)$$

para todo $0\le t\le T$.

Agora multiplicando a primeira equação do problema (3.1.7) por $\partial u/\partial t$, integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0\le t\le T$, procedendo de modo análogo e utilizando a estimativa anterior, temos

$$\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dxdt + k\int_\Omega|\nabla u|^2(t)dx + a_1\int_\Omega u^4(t)dx \le C\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}, \qquad (3.1.9)$$

para todo $0<t<T$.

Finalmente, multiplicando a primeira equação de (3.1.7) por $(-\Delta u)$, integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0\le t\le T$, e utilizando a desigualdade de Young e integração por partes nos termo adequados, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega|\Delta u|^2dxdt \le \frac{1}{2}\,\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\le +a_1\int_0^t\int_\Omega\left[\varepsilon(\Delta u)^2+C_\varepsilon u^2+\varepsilon|m_1|(\Delta u)^2+C_\varepsilon|m_1|u^2+\varepsilon(\Delta u)^2+C_\varepsilon u^4\right.$$

$$\left.+\varepsilon|m_1|(\Delta u)^2+C_\varepsilon|m_1|u^4\right]dxdt - 6a_1\int_0^t\int_\Omega u^2|\nabla u|^2dxdt$$

$$+\lambda \int_0^t \int_\Omega \left[\varepsilon a_1(\Delta u)^2 + C_\varepsilon a_1 \pi^2(u)\pi^2(v) + \varepsilon(a_1+3a_3)(\Delta u)^2 + C_\varepsilon(a_1+3a_3)\pi^4(u)\pi^2(v)\right.$$
$$+\varepsilon(a_1+a_3)(\Delta u)^2 + C_\varepsilon(a_1+a_3)\pi^2(u)\pi^4(v)$$
$$\left.+\varepsilon(a_1|m_1|+a_3|m_3|)(\Delta u)^2 + C_\varepsilon(a_1|m_1|+a_3|m_3|)\pi^2(u)\pi^2(v)\right] dxdt.$$

Como $m_1, m_3 \in L^\infty(Q)$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tão pequeno que $5a_1\varepsilon + 3a_1|m_1|\varepsilon + 4a_3\varepsilon + a_3|m_3|\varepsilon \leq 1/2$ q.t.p. em Q. Tomando tal ε, lembrando que $m_1, m_3 \in L^\infty(Q)$, $\pi(u)$, $\pi(v) \leq M$, $(u_0)^2 \leq M$, $\pi(u)^2 \leq u^2$, $\pi(u)^4 \leq u^4$ em Q, e procedendo como nos casos anteriores obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2(t)dx + k\int_0^t \int_\Omega |\Delta u|^2 dxdt + 12a_1 \int_0^t \int_\Omega u^2|\nabla u|^2 dxdt$$
$$\leq \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t \int_\Omega \left(u^2+u^4\right) dxdt.$$

O que nos fornece, pela desigualdade (3.1.8),

$$\int_\Omega |\nabla u|^2(t)dx + \int_0^t \int_\Omega |\Delta u|^2 dxdt + \int_0^t \int_\Omega u^2|\nabla u|^2 dxdt \leq C\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.1.10}$$

para todo $0 < t < T$.

Das desigualdades (3.1.8) a (3.1.10) temos que $\|u\|_{L^9(Q)} \leq C\|u\|_{W^2_{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}$. E de modo análogo, obtem-se que $\|v\|_{L^9(Q)} \leq C\|v\|_{W^2_{2,1}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}$. Portanto,

$$\|(u,v)\|_B \leq C\left[\|u\|_{L^9(Q)} + \|v\|_{L^9(Q)}\right] \leq C\left[\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right] =: K.$$

Como as hipóteses **a)** a **e)** são satisfeitas, pelo Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder (Teorema 1.3), temos que existe $(u,v) \in B \cap W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ ponto fixo de T_1, ou seja, existe $(u,v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ solução do problema (3.1.3). Além disso, temos que essa solução satisfaz as estimativas dadas por (3.1.5).

∎

3.1.2 Existência de Soluções de outro Problema Auxiliar

Teorema 3.1 *Suponha que k, a_1, a_2 e $a_3 > 0$ são constantes, m_1, m_2, $m_3 \in L^\infty(Q)$ e u_0, v_0, $w_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ com $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então, o problema (3.1.2) possui uma solução $(u,v,w) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que u, v e w satisfazem as estimativas:*

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.1.11}$$

$$\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.1.12}$$

$$\|w\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|w_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.1.13}$$

$$u, v, w \geq 0 \quad q.t.p.\ em \quad Q \quad e \tag{3.1.14}$$

$$u + v + w = 1 \quad q.t.p.\ em \quad Q, \tag{3.1.15}$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (3.1.2).

Para demonstrar este teorema vamos utilizar a proposição demonstrada a seguir.

Proposição 3.2 *Suponha que k, a_1, $a_2 > 0$ são constantes, m_1, m_2, $m_3 \in L^\infty(Q)$ e u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0 = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega}$, $u_0, v_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 \leq M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então o sistema formado pelas duas primeiras equações do problema (3.1.2) com as condições de fronteira e iniciais sobre u e v possui uma solução $(u, v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que u e v satisfazem as estimativas:*

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.1.16}$$

$$\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} \quad e \tag{3.1.17}$$

$$0 \leq u, v \leq M \quad q.t.p.\ em \quad Q, \tag{3.1.18}$$

onde C depende de Ω, T, M e das constantes do problema (3.1.2).

Demonstração da proposição 3.2:

Observemos que se mostrarmos que a solução (u, v) do problema (3.1.3) dada pela Proposição 3.1 satisfaz (3.1.18), ou seja, $0 \leq u, v \leq M$ q.t.p. em Q, então teremos que $\pi(u) = u$ e $\pi(v) = v$. De onde, $(u, v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é solução do sistema formado pelas duas primeiras equações do problema (3.1.2) com as condições de fronteira e iniciais sobre u e v e satisfaz as estimativas dadas em (3.1.5), ou seja, satisfaz as estimativas (3.1.16) e (3.1.17). O que demonstra a proposição.

Consideremos então uma solução (u, v) do problema (3.1.3) dada pela Proposição 3.1 e mostremos que esta satisfaz $0 \leq u, v \leq M$ q.t.p. em Q. Vamos dividir a demonstração em duas partes:

1) Mostremos que $u, v \geq 0$ q.t.p em Q:

Primeiramente mostremos que $u \geq 0$ q.t.p em Q. Para isto consideremos a função

$$-u_-(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{se} \quad u(x,t) \leq 0 \\ 0 & \text{se} \quad u(x,t) > 0 \end{cases}$$

e observemos que

$$\frac{\partial(-u_-)}{\partial t}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) & \text{se } u(x,t) \leq 0 \\ 0 & \text{se } u(x,t) > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \Delta(-u_-)(x,t) = \begin{cases} \Delta u(x,t) & \text{se } u(x,t) \leq 0 \\ 0 & \text{se } u(x,t) > 0 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação do problema (3.1.3) por $(-u_-)$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u_-)^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_-|^2 dxdt = \frac{1}{2}\ \|(u_0)_-\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+a_1\int_0^t\int_\Omega \left[(-u)(-u_-) + 2m_1 u(-u_-) + 3u^2(-u_-) - 2m_1u^2(-u_-) - 2u^3(-u_-)\right] dxdt$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \pi(u)\pi(v)\left[2a_1 + (a_3 - 3a_1)\pi(u) - (a_1+a_3)\pi(v) - 2m_1a_1 + 2m_3a_3\right](-u_-)dxdt.$$

Observe que $\|(u_0)_-\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$, pois $u_0 \geq 0$ por hipótese, e a segunda integral é nula pois $\pi(u)(-u_-) = 0$, pelas definições de $\pi(u)$ e de $(-u_-)$. Então, utilizando que $-(u_-)^2 \leq 0$, $-3(u_-)^3 \leq 0$ e a desigualdade de Young na primeira integral, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u_-)^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_-|^2 dxdt$$

$$\leq a_1\int_0^t\int_\Omega \left[2m_1(u_-)^2 + C_\varepsilon|m_1|(u_-)^2 + \varepsilon|m_1|(u_-)^4 - 2(u_-)^4\right] dxdt.$$

Como $m_1 \in L^\infty(Q)$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon|m_1| - 2 \leq 0$ q.t.p. em Q. Tomando tal ε e usando que $m_1 \in L^\infty(Q)$, teremos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u_-)^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_-|^2 dxdt \leq C\int_0^t\int_\Omega (u_-)^2 dxdt.$$

Agora usando o Lema de Gronwall na desigualdade satisfeita pela primeira integral acima obtemos que

$$\int_\Omega (u_-)^2(t)dx = 0,$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Logo, $(u_-)^2(t) = 0$ q.t.p. em Ω, $\forall\ 0 \leq t \leq T$. De onde, conclui-se que $u \geq 0$ q.t.p. em Q.

De modo análogo, mostra-se que $v \geq 0$ q.t.p. em Q.

2) Mostremos que $u, v \leq M$ q.t.p em Q:

Primeiramente mostremos que $u + v \leq M$ q.t.p em Q. Para isto consideremos a função

$$(M-u-v)_-(x,t) = \begin{cases} u(x,t)+v(x,t)-M & \text{se} \quad u(x,t)+v(x,t) \geq M \\ 0 & \text{se} \quad u(x,t)+v(x,t) < M. \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações do problema (3.1.3) e rearranjando alguns termos, obtemos

$$\frac{\partial(u+v)}{\partial t} - k\Delta(u+v)$$

$$= -(a_1u + a_2v) + 3(a_1u^2 + a_2v^2) - 2(a_1u^3 + a_2v^3) + 2(a_1m_1u + a_2m_2v) - 2(a_1m_1u^2 + a_2m_2v^2)$$

$$+\pi(u)\pi(v)[2a_1 + 2a_2 - 2a_1\pi(u) - 2a_2\pi(v) - (a_1+a_2)(\pi(u)+\pi(v)) - 2m_1a_1 - 2m_2a_2].$$

Agora multiplicando a última equação por $(M-u-v)_-$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega (M-u-v)_-^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla(M-u-v)_-|^2 dxdt &= \frac{1}{2}\|(M-u_0-v_0)_-\|^2_{L^2(\Omega)} \\
+\int_{Q1}\{[-(a_1u+a_2v)+3(a_1u^2+a_2v^2)-2(a_1u^3+a_2v^3)+2(a_1m_1u+a_2m_2v) \\
-2(a_1m_1u^2+a_2m_2v^2)]\,(M-u-v)_-\}\,dxdt \\
+\int_{Q1}\{\pi(u)\pi(v)\,[2a_1+2a_2-2a_1\pi(u)-2a_2\pi(v)-(a_1+a_2)(\pi(u)+\pi(v)) \\
-2m_1a_1-2m_2a_2]\,(M-u-v)_-\}\,dxdt \\
+\int_{Q2}\{[-(a_1u+a_2v)+3(a_1u^2+a_2v^2)-2(a_1u^3+a_2v^3)+2(a_1m_1u+a_2m_2v) \\
-2(a_1m_1u^2+a_2m_2v^2)]\,(M-u-v)_-\}\,dxdt \\
+\int_{Q2}\{\pi(u)\pi(v)\,[2a_1+2a_2-2a_1\pi(u)-2a_2\pi(v)-(a_1+a_2)(\pi(u)+\pi(v)) \\
-2m_1a_1-2m_2a_2]\,(M-u-v)_-\}\,dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.1.19}
$$

onde $Q1 = \{(x,t) \in Q : u(x,t)+v(x,t) < M\}$ e $Q2 = \{(x,t) \in Q : u(x,t)+v(x,t) \geq M\}$.

Em $Q1$, $(M-u-v)_- = 0$, logo as duas primeiras integral do segundo membro membro da equação (3.1.19) são nulas. Precisamos analisar as duas integrais em $Q2$.

Primeiramente, vamos analisar a última integral da equação (3.1.19). Em $Q2$ temos que $u+v \geq M$, de onde, $-[\pi(u)+\pi(v)] \leq -M$, e temos também que $-a_1\pi(u) \leq 0$ e $-a_2\pi(v) \leq 0$. De onde, temos que $2a_1+2a_2-2a_1\pi(u)-2a_2\pi(v)-(a_1+a_2)(\pi(u)+\pi(v))-2m_1a_1-2m_2a_2 \leq a_1(2-M-2m_1)+a_2(2-M-2m_2) \leq 0$, pela definição de M.

Como vale a última desigualdade, $\pi(u) \geq 0$, $\pi(v) \geq 0$ e $(M-u-v)_- \geq 0$, temos que $\{\pi(u)\pi(v)[2a_1+2a_2-2a_1\pi(u)-2a_2\pi(v)-(a_1+a_2)(\pi(u)+\pi(v))-2m_1a_1-2m_2a_2](M-u-v)_-\} \leq 0$. De onde, temos que a última integral do segundo membro da equação (3.1.19) é menor ou igual a zero.

Finalmente, vamos analisar a terceira integral do segundo membro da equação (3.1.19). Para isso lembremos que $a = min\{a_1,a_2\}$, $A = max\{a_1,a_2\}$ e tomemos $m = max\{\|m_1\|_{L^\infty(Q)}, \|m_2\|_{L^\infty(Q)}\}$.

Vamos agora analisar o sinal de

$$-(a_1u+a_2v)+3(a_1u^2+a_2v^2)-2(a_1u^3+a_2v^3)+2(a_1m_1u+a_2m_2v)-2(a_1m_1u^2+a_2m_2v^2)$$

em Q2.

Como u, $v \geq 0$ temos que $-(a_1u+a_2v) \leq 0$, $a_1u^2+a_2v^2 \leq A(u+v)^2$, $-(a_1u^3+a_2v^3) \leq -\frac{a}{4}(u+v)^3$, $a_1m_1u+a_2m_2v \leq m(a_1u+a_2v) \leq mA(u+v)4$ e $-a_1m_1u^2-a_2m_2v \leq mA(u+v)^2$. Então em $Q2$ temos,

$$
\begin{aligned}
-(a_1u+a_2v)&+3(a_1u^2+a_2v^2)-2(a_1u^3+a_2v^3)+2(a_1m_1u+a_2m_2v)-2(a_1m_1u^2+a_2m_2v^2) \\
&\leq (u+v)\left[(3+2m)A(u+v)-\frac{a}{2}(u+v)^2+2mA\right] \\
&\leq (u+v)\left[\frac{(3+2m)^2A^2}{a}+\frac{a}{4}(u+v)^2-\frac{a}{2}(u+v)^2+a+\frac{m^2A^2}{a}\right]
\end{aligned}
$$

$$\leq (u+v)\left[\frac{(3+2m)^2A^2}{a} - \frac{a}{16}M + a - \frac{a}{16}M + \frac{m^2A^2}{a} - \frac{a}{16}M - \frac{a}{16}M\right]$$

$$\leq (u+v)\left[\frac{(3+2m)^2A^2}{a} - \frac{a}{16}\frac{16(3+2m)^2A^2}{a^2} + a - \frac{a}{16}16 + \frac{m^2A^2}{a} - \frac{a}{16}\frac{16m^2A^2}{a^2} - \frac{a}{16}M\right] \leq 0,$$

pois $M = 4\frac{A}{a}(3+2m) = \frac{4(3+2m)A}{a}$, logo $M \geq 4$ e $M \geq \frac{4mA}{a}$.

Então, pela desigualdade anterior e como e $(M-u-v)_- \geq 0$ temos que

$$\left[-(a_1u + a_2v) + 3(a_1u^2 + a_2v^2) - 2(a_1u^3 + a_2v^3) + 2(a_1m_1u + a_2m_2v)\right.$$
$$\left. -2(a_1m_1u^2 + a_2m_2v^2)\right](M-u-v)_- \leq 0.$$

Portanto, a terceira integral do segundo membro da equação (3.1.19) é menor ou igual a zero.

Logo, temos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (M-u-v)_-^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla(M-u-v)_-|^2dxdt \leq \frac{1}{2}\|(M-u_0-v_0)_-\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Mas, por hipótese $u_0 + v_0 \leq M$, de onde, temos que $(M-u_0-v_0)_- = 0$. Então,

$$\int_\Omega (M-u-v)_-^2(t)dx \leq 0,$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Segue que $(M-u-v)_-^2(t) = 0$, $\forall\, 0 \leq t \leq T$, q.t.p. em Ω. De onde, conclui-se que $u+v \leq M$ q.t.p. em Q. Agora, como $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u+v \leq M$, q.t.p. em Q, temos que

$$u \leq M \quad \text{e} \quad v \leq M \quad \text{q.t.p. em } Q.$$

E assim concluimos a demonstração da proposição.

■

Demonstração do Teorema 3.1:

Pela Proposição 3.2 temos que existe $(u,v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ solução do sistema formado pelas duas primeiras equações do problema (3.1.2) com as condições de fronteira e iniciais sobre u e v e tal que u e v satisfazem as estimativas (3.1.16) a (3.1.18), ou seja,

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} \quad \text{e } 0 \leq u, v \leq M \text{ q.t.p. em } Q.$$

Tomemos tais u e v dados pela Proposição 3.2 e $w = 1 - u - v$. Pela referida proposição u e v satisfazem as duas primeiras equações do problema (3.1.2), as condições iniciais e de fronteira, (3.1.11), (3.1.12), (3.1.15) e $u, v \geq 0$. Para demonstrar o teorema precisamos mostrar então que u, v e w satisfazem a terceira equação de (3.1.2), w satisfaz as condições iniciais, de fronteira e a estimativa (3.1.13) e $w \geq 0$.

Vamos dividir essa demonstração em 4 partes.

i) Primeiramente mostremos que u, v e w satisfazem a terceira equação do problema (3.1.2).

De fato, como u e v satisfazem as duas primeiras equações de (3.1.2) e $u+v+w=1$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t}-k\Delta w &= \frac{\partial(1-u-v)}{\partial t}-k\Delta(1-u-v) = -\left(\frac{\partial u}{\partial t}-k\Delta u\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial t}-k\Delta v\right)\\ &= -[-a_1u(1-u-v)(1-2u-v-2m_1)-a_3uv(v-u-2m_3)]\\ &\quad -[-a_2v(1-v-u)(1-2v-u-2m_2)-a_3vu(u-v+2m_3)]\\ &= a_1u(1-u-v)(1-2u-v-2m_1)+a_2v(1-v-u)(1-2v-u-2m_2),\end{aligned}$$

ou seja, u, v e w satisfazem a terceira equação de (3.1.2).

ii) Agora mostremos que w satisfaz as condições iniciais e de fronteira do problema (3.1.2).

De fato, como u e v satisfazem as condições iniciais de (3.1.2) e $u_0+v_0+w_0=1$ temos que para $t=0$

$$w(0)=1-u(0)-v(0)=1-u_0-v_0=w_0.$$

E como u e v satisfazem as condições de fronteira de (3.1.2) e $u+v+w=1$ temos que

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial(1-u-v)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=-\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}-\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0.$$

Portanto, w satisfaz as condições iniciais e de fronteira do problema (3.1.2).

iii) Devemos mostrar agora que $w\geq 0$.

Como $w=1-u-v$, a terceira equação do problema (3.1.2) pode ser escrita como

$$\frac{\partial w}{\partial t}-k\Delta w=-a_1w(1-v-w)(1-2u-v+2m_1)-a_2w(1-u-w)(1-2v-u+2m_2).$$

Multiplicando a última equação por $-(w_-)$, procedendo de modo análoga à parte (i) da demonstração da proposição anterior e usando que u e v satisfazem (3.1.18), mostra-se que $w\geq 0$.

iv) Finalmente, mostremos que w satisfaz a desigualdade (3.1.13).

Novamente observemos que a terceira equação do problema (3.1.2) pode ser escrita como

$$\frac{\partial w}{\partial t}-k\Delta w=-a_1w(1-v-w)(1-2u-v+2m_1)-a_2w(1-u-w)(1-2v-u+2m_2).$$

Multiplicando esta última equação por w, por $\partial w/\partial t$ e por $-\Delta w$, integrando cada uma das igualdades obtidas em $\Omega\times(0,t)$, com $0\leq t\leq T$, e procedendo como na obtenção das estimativas (3.1.5) da Proposição 3.1 obtemos (3.1.13).

Como mostramos **i)** a **iv)**, concluimos a demonstração do teorema.

■

3.1.3 Existência de Solução para o Modelo de Solidificação

Teorema 3.2 *Suponha que k, a_1, a_2 e $a_3 > 0$ são constantes, m_1, m_2, $m_3 \in L^\infty(Q)$ e u_0, v_0, $w_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ com $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então o problema (3.0.1) possui uma solução $(u, v, w) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ tal que u, v e w satisfazem as estimativas:*

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.1.20}$$

$$\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.1.21}$$

$$\|w\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|w_0\|_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.1.22}$$

$$u, v, w \geq 0 \quad e \quad u + v + w = 1 \quad q.t.p. \ em \quad Q, \tag{3.1.23}$$

onde C depende de Ω, T e das constantes do problema (3.1.2).

Demonstração:

Seja (u, v, w) a solução do problema (3.1.2) dada pelo Teorema 3.1. Temos pelo mesmo teorema que $(u, v, w) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$, u, v e w satisfazem as condições iniciais e de fronteira do problema (3.0.1) e também satisfazem as estimativas (3.1.20) a (3.1.23).

Assim, para demonstrar este teorema basta verificar que (u, v, w) satisfaz as equações do problema (3.0.1). Para isto vamos aplicar a igualdade $u + v + w = 1$ nas três equações de (3.1.2).

Substituindo $w = 1 - u - v$ na primeira equação de (3.1.2) temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= -a_1 u(1 - u - v)(1 - 2u - v - 2m_1) - a_3 uv(v - u - 2m_3) \\ &= -a_1 u(1 - u - v)((1 - u - v) - u - 2m_1) - a_3 uv(v - u - 2m_3) \\ &= -a_1 uw(w - u - 2m_1) - a_3 uv(v - u - 2m_3),\end{aligned}$$

ou seja, (u, v, w) satisfaz a primeira equação do problema (3.0.1).

E substituindo $w = 1 - u - v$ no segundo membro da segunda e terceira equações de (3.1.2) e procedendo de modo análogo ao caso anterior obtemos que (u, v, w) satisfaz a segunda e a terceira equações de (3.0.1).

Portanto, a solução (u, v, w) do problema (3.1.2) dada pelo Teorema 3.1 é a solução do problema (3.0.1) que satisfaz o Teorema 3.2.

∎

3.2 Regularidade de Solução

Proposição 3.3 *Suponha que k, a_1, a_2 e $a_3 > 0$ são constantes, m_1, m_2, $m_3 \in L^\infty(Q)$ e u_0, v_0, $w_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ com $u_0+v_0+w_0 = 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $(u,v,w) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é uma solução do problema (3.0.1), então $(u,v,w) \in W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e u, v e w satisfazem a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C\left[\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^3_{W_2^2(\Omega)}\right],$$

onde C depende de Ω, T e das constantes do problema (3.0.1).

Se além disso, Se $(u,v,w) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é uma solução do problema (3.0.1) e u_0, v_0, $w_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, então $(u,v,w) \in W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ e satisfazem a seguinte estimativa

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_p^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C\left[\|u_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|^9_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|v_0\|^9_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|w_0\|^9_{W_{3p/5}^2(\Omega)}\right],$$

onde C depende de Ω, T e das constantes do problema (3.0.1).

Observação 3.1 *Na próxima seção, após obtermos a unicidade da solução do problema (3.0.1) obteremos um teorema com melhores estimativas para as normas $\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)}$, $\|v\|_{W_p^{2,1}(Q)}$ e $\|w\|_{W_p^{2,1}(Q)}$, onde (u,v,w) é solução de (3.0.1).*

Demonstração:

Seja $(u,v,w) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ uma solução do problema (3.0.1).

Como $u,v,w \in W_2^{2,1}(Q) \subset L^{10}(Q)$ e $m_1, m_2, m_3 \in L^\infty(Q)$ temos que

$$-a_1uw(w-u-2m_1) - a_3uv(v-u-2m_3) \in L^{10/3}(Q).$$

E como $u_0 \in W_2^2(\Omega) \subset W_{10/3}^{2-\frac{2}{10/3}}(\Omega)$, pelo Corolário 1.3, então aplicando o Teorema 1.4 à primeira equação do problema (3.0.1) obtemos que $u \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e vale a seguinte estimativa:

$$\|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|-a_1uw(w-u-2m_1) - a_3uv(v-u-2m_3)\|_{L^{10/3}(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right].$$

De onde, usando as desigualdades de Hölder e Young e também as estimativas (3.1.20) a (3.1.22) do Teorema 3.2, obtemos

$$\|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^3_{W_2^2(\Omega)}\right].$$

Procedendo de modo análogo para a segunda e a terceira equações do problema (3.0.1) obtemos que $v,\, w \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e satisfazem

$$\|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left[\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|w_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|w_0\|^3_{W^2_2(\Omega)}\right] \quad \text{e}$$

$$\|w\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left[\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|w_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|w_0\|^3_{W^2_2(\Omega)}\right].$$

Agora, se $u_0, v_0, w_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $3p/5 \geq 2$, pelo Corolário 1.3, temos que $u_0, v_0, w_0 \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$. Procedendo como no caso anterior obtemos que $u,\, v,\, w \in W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L^\infty(Q)$ e satisfazem as três últimas estimativas. E como $m_1, m_2 \in L^\infty(Q)$ temos que o segundo membro das três primeiras equações de (3.0.1) pertencem a $L^\infty(Q) \subset L^p(Q)$. Como valem as três últimas inclusões e $u_0, v_0, w_0 \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$, aplicando o Teorema 1.4 às três primeiras equações de (3.0.1) obtemos que $u, v, w \in W_p^{2,1}(Q)$ e valem as seguintes estimativas:

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|-a_1uw(w-u-2m_1) - a_3uv(v-u-2m_3)\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}\right],$$

$$\|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|-a_2vw(w-v-2m_2) - a_3uv(u-v+2m_3)\|_{L^p(Q)} + \|v_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}\right]$$

e

$$\|w\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|-a_1uw(u-w+2m_1) - a_2vw(v-w+2m_2)\|_{L^p(Q)} + \|w_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}\right].$$

De onde, usando as desigualdades de Hölder e de Young, que $W^2_{3p/5}(\Omega) \subset W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ com inclusão contínua e também as estimativas anteriores em $W^{2,1}_{10/3}(Q)$, obtemos

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\Big[\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|u_0\|^9_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|^9_{W^2_{3p/5}(\Omega)}$$
$$+\|w_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|w_0\|^9_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\Big],$$

$$\|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\Big[\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|u_0\|^9_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|^9_{W^2_{3p/5}(\Omega)}$$
$$+\|w_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|w_0\|^9_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\Big]$$

e

$$\|w\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\Big[\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|u_0\|^9_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|^9_{W^2_{3p/5}(\Omega)}$$
$$+\|w_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|w_0\|^9_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\Big],$$

De onde, conclui-se a demonstração.

■

Proposição 3.4 *Se (u,v,w) é uma solução do problema (3.0.1) dada pelo Teorema 3.2, então $(u,v,w) \in W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e u, v e w satisfazem as seguintes estimativas*

$$\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}, \quad \|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} \quad e \quad \|w\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\|w_0\|_{W^2_2(\Omega)},$$

onde C depende de Ω, T e das constantes do problema (3.0.1).

Se além disso, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{3p/5}(Q)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, então $(u,v,w) \in W^{2,1}_p(Q) \times W^{2,1}_p(Q) \times W^{2,1}_p(Q)$ e u, v e w satisfazem as seguintes estimativas

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}, \quad \|v\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} \quad e \quad \|w\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\|w_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)},$$

onde C depende de Ω, T e das constantes do problema (3.0.1).

Demonstração:

Seja $(u,v,w) \in W^{2,1}_2(Q) \times W^{2,1}_2(Q) \times W^{2,1}_2(Q)$ uma solução do problema (3.0.1) dada pelo Teorema 3.2. Então, pelo mesmo teorema, u, v e w satisfazem $\|u\|_{W^{2,1}_2(Q)} \leq C\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}$, $\|v\|_{W^{2,1}_2(Q)} \leq C\|v_0\|_{W^2_2(\Omega)}$, $\|w\|_{W^{2,1}_2(Q)} \leq C\|w_0\|_{W^2_2(\Omega)}$ e $0 \leq u,v,w \leq 1$.

Como $0 \leq u,v,w \leq 1$ e $m_1, m_2, m_3 \in L^\infty(Q)$ temos que o segundo membro das três equações do problema (3.0.1) pertencem a $L^\infty(Q) \subset L^{10/3}(Q)$.

Como o segundo membro da primeira equação do problema (3.0.1) pertencem a $L^{10/3}(Q)$ e $u_0 \in W^2_2(\Omega) \subset W^{2-\frac{2}{10/3}}_{10/3}(\Omega)$, pelo Corolário 1.3, aplicando o Teorema 1.4 à primeira equação do problema (3.0.1) obtemos que $u \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e satisfaz

$$\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left[\|-a_1uw(w-u-2m_1) - a_3uv(v-u-2m_3)\|_{L^{10/3}(Q)} + \|u_0\|_{W^{2-\frac{2}{10/3}}_{10/3}(\Omega)}\right].$$

De onde, usando a desigualdade de Hölder, o Corolário 1.3 e também as estimativas dadas acima, obtemos

$$\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left[\|-a_1w(w-u-2m_1) - a_3v(v-u-2m_3)\|_{L^\infty(Q)}.\|u\|_{L^{10/3}(Q)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right]$$

$$\leq C\left[\|u\|_{W^{2,1}_2(Q)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right] \leq C\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}.$$

Procedendo de modo análogo para a segunda e terceira equações do problema (3.0.1), obtemos

$$\|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|w\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\|w_0\|_{W^2_2(\Omega)}.$$

Agora, se u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $3p/5 \geq 2$, pelo Corolário 1.3, temos que u_0, v_0, $w_0 \in W^{2-\frac{2}{p}}_p(\Omega)$. Como u, v, $w \in W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L^\infty(Q)$ e $m_1, m_2 \in L^\infty(Q)$ temos que o segundo membro das três equações do problema (3.0.1) pertencem a $L^\infty(Q)$.

Como valem as três últimas inclusões e $u_0, v_0, w_0 \in W^{2-\frac{2}{p}}_p(\Omega)$, aplicando o Teorema 1.4 às três primeiras equações de (3.0.1) obtemos que $u, v, w \in W^{2,1}_p(Q)$ e valem as seguintes estimativas:

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\left[\|-a_1uw(w-u-2m_1) - a_3uv(v-u-2m_3)\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W^{2-\frac{2}{p}}_p(\Omega)}\right],$$

$$\|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|-a_2vw(w-v-2m_2)-a_3uv(u-v+2m_3)\|_{L^p(Q)}+\|v_0\|_{W^{2-\frac{2}{p}}_p(\Omega)}\right] \quad \text{e}$$

$$\|w\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|-a_1uw(u-w+2m_1)-a_2vw(v-w+2m_2)\|_{L^p(Q)}+\|w_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}\right].$$

De onde, usando a desigualdade de Hölder, o Corolário 1.3, as estimativas anteriores em $W_{10/3}^{2,1}(Q)$, que $0 \leq u, v, w \leq 1$ e procedendo como no caso anterior, obtemos

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}, \quad \|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|w\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\|w_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}.$$

De onde, conclui-se a proposição.

■

3.3 Estabilidade e Unicidade de Solução

Teorema 3.3 *Sejam (m_1, m_2, m_3) e $(n_1, n_2, n_3) \in L^\infty(Q)\times L^\infty(Q)\times L^\infty(Q)$, (u_0^1, v_0^1, w_0^1) e $(u_0^2, v_0^2, w_0^2) \in W_2^2(\Omega)\times W_2^2(\Omega)\times W_2^2(\Omega)$ e sejam (u_1, v_1, w_1), $(u_2, v_2, w_2) \in W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (3.0.1) com (m_1, m_2, m_3) e (u_0^1, v_0^1, w_0^1) e com (n_1, n_2, n_3) e (u_0^2, v_0^2, w_0^2), respectivamente. Suponha que k, a_1, a_2 e $a_3 > 0$ são constantes e u_0^i, v_0^i e w_0^i satisfazem $\partial u_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0^i, v_0^i, $w_0^i \geq 0$ e $u_0^i + v_0^i + w_0^i = 1$, para $i = 1, 2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então, (u_1, v_1, w_1) e (u_2, v_2, w_2) satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade*

$$\|u_1-u_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}+\|v_1-v_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}+\|w_1-w_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C\Big[\|u_0^1-u_0^2\|_{W_2^2(\Omega)}+\|v_0^1-v_0^2\|_{W_2^2(\Omega)}+\|w_0^1-w_0^2\|_{W_2^2(\Omega)}$$

$$+\|m_1-n_1\|_{L^2(Q)}+\|m_2-n_2\|_{L^2(Q)}+\|m_3-n_3\|_{L^2(Q)}\Big],$$

onde C depende de Ω, T, das constantes do problema (3.0.1) e de u_1, v_1, w_1, u_2, v_2 e w_2.

Demonstração:

Sejam (m_1, m_2, m_3) e $(n_1, n_2, n_3) \in L^\infty(Q)\times L^\infty(Q)\times L^\infty(Q)$, (u_0^1, v_0^1, w_0^1) e $(u_0^2, v_0^2, w_0^2) \in W_2^2(\Omega)\times W_2^2(\Omega)\times W_2^2(\Omega)$ e sejam (u_1, v_1, w_1), $(u_2, v_2, w_2) \in W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (3.0.1) com (m_1, m_2, m_3) e (u_0^1, v_0^1, w_0^1) e com (n_1, n_2, n_3) e (u_0^2, v_0^2, w_0^2), respectivamente.

Sejam $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$, $w = w_1 - w_2$, $u_0 = u_0^1 - u_0^2$, $v_0 = v_0^1 - v_0^2$ e $w_0 = w_0^1 - w_0^2$. Então, as funções $(u, v, w) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ e satisfazem o problema:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = A_1 u + A_2 v + A_3 w + A_4(m_1 - n_1) + A_5(m_2 - n_2) + A_6(m_3 - n_3) \quad \text{em} \quad Q\\
&\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v = B_1 u + B_2 v + B_3 w + B_4(m_1 - n_1) + B_5(m_2 - n_2) + B_6(m_3 - n_3) \quad \text{em} \quad Q\\
&\frac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w = D_1 u + D_2 v + D_3 w + D_4(m_1 - n_1) + D_5(m_2 - n_2) + D_6(m_3 - n_3) \quad \text{em} \quad Q\\
&\qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, T)\\
&\qquad u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{e} \quad w = w_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\},
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_1 w_1(-w_1 + u_1 + u_2 + 2m_1) + a_3 v_1(-v_1 + u_1 + u_2 + 2m_3),\\
A_2 &= a_3 u_2(v_1 + v_2 + u_2 + 2m_3),\\
A_3 &= a_1 u_2(w_1 + w_2 + u_2 + 2m_1),\\
A_4 &= -2u_2 w_2,\ A_5 = 0,\ A_6 = -2u_2 v_2,\\
B_1 &= a_3 v_2(u_1 + u_2 + v_2 - 2m_3),\\
B_2 &= a_2 w_1(-w_1 + v_1 + v_2 + 2m_2) + a_3 u_1(-u_1 + v_1 + v_2 - 2m_3),\\
B_3 &= a_2 v_2(w_1 + w_2 + v_2 + 2m_2),\\
B_4 &= 0,\ B_5 = -2v_2 w_2,\ B_6 = 2v_2 u_2,\\
D_1 &= a_1 w_2(u_1 + u_2 + w_2 - 2m_1),\\
D_2 &= a_2 w_2(v_1 + v_2 + w_2 - 2m_2),\\
D_3 &= a_1 u_1(-u_1 + w_1 + w_2 - 2m_1) + a_2 v_1(-v_1 + w_1 + w_2 - 2m_2),\\
D_4 &= 2w_2 u_2,\ D_5 = 2w_2 v_2 \text{ e } D_6 = 0.
\end{aligned}$$

Aqui adotamos $A_5 = B_4 = D_6 = 0$ para que as três equações do problema (3.3.24) tenham a mesma estrutura.

Multiplicando a primeira equação do problema (3.3.24) por u, integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e utilizando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}||u_0||^2_{L^2(\Omega)}\\
+ \int_0^t\int_\Omega \left\{ \left[A_1 + \frac{|A_2|}{2} + \frac{|A_3|}{2} + \frac{|A_4|}{2} + \frac{|A_5|}{2} + \frac{|A_6|}{2} \right] u^2 + \frac{|A_2|}{2} v^2 + \frac{|A_3|}{2} w^2 \right\} dxdt\\
+ \int_0^t\int_\Omega \left[\frac{|A_4|}{2}(m_1 - n_1)^2 + \frac{|A_5|}{2}(m_2 - n_2)^2 + \frac{|A_6|}{2}(m_3 - n_3)^2 \right] dxdt.
\end{aligned}$$

Multiplicando a segunda e a terceira equações do problema (3.3.24) por v e w, respectivamente, integrando cada uma das igualdades em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e procedendo de modo análogo obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla v|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}||v_0||^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\int_0^t\int_\Omega \left\{\frac{|B_1|}{2}u^2 + \left[\frac{|B_1|}{2} + |B_2| + \frac{|B_3|}{2} + \frac{|B_4|}{2} + \frac{|B_5|}{2} + \frac{|B_6|}{2}\right]v^2 + \frac{|B_3|}{2}w^2\right\}dxdt$$
$$+\int_0^t\int_\Omega \left[\frac{|B_4|}{2}(m_1-n_1)^2 + \frac{|B_5|}{2}(m_2-n_2)^2 + \frac{|B_6|}{2}(m_3-n_3)^2\right]dxdt$$

e

$$\frac{1}{2}\int_\Omega w^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla w|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}||w_0||^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\int_0^t\int_\Omega \left\{\frac{|D_1|}{2}u^2 + \frac{|D_2|}{2}v^2 + \left[\frac{|D_1|}{2} + \frac{|D_2|}{2} + D_3 + \frac{|D_4|}{2} + \frac{|D_5|}{2} + \frac{|D_6|}{2}\right]w^2\right\}dxdt$$
$$+\int_0^t\int_\Omega \left[\frac{|D_4|}{2}(m_1-n_1)^2 + \frac{|D_5|}{2}(m_2-n_2)^2 + \frac{|D_6|}{2}(m_3-n_3)^2\right]dxdt.$$

Somando as três últimas desigualdades e utilizando que A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, D_1, D_2, D_3 , D_4, D_5 e $D_6 \in L^\infty(Q)$, pois $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 \in W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L^\infty(Q)$ pela Proposição 3.3, temos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[u^2(t)+v^2(t)+w^2(t)\right]dx + k\int_0^t\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2\right]dxdt$$
$$\leq C\left\{||u_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||w_0||^2_{L^2(\Omega)}\int_0^t\int_\Omega \left(u^2+v^2+w^2\right)dxdt\right.$$
$$\left.+\int_0^t\int_\Omega \left[(m_1-n_1)^2 + (m_2-n_2)^2 + (m_3-n_3)^2\right]dxdt\right\}.$$

Agora, usando o Lema de Gronwall na desigualdade satisfeita pela primeira integral acima, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[u^2(t)+v^2(t)+w^2(t)\right]dx + k\int_0^t\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2\right]dxdt$$
$$\leq C\left\{||u_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||v_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||w_0||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega \left[(m_1-n_1)^2 + (m_2-n_2)^2 + (m_3-n_3)^2\right]dxdt\right\}, \tag{3.3.25}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Agora multiplicando a primeira equação do problema (3.3.24) por $\partial u/\partial t$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com, $0 \leq t \leq T$, e usando a desigualdade de Young, temos

$$\int_0^t\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dxdt \leq C||u_0||^2_{W^2_2(\Omega)}$$
$$+C_\varepsilon|A_2|v^2 + \varepsilon|A_2|\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \int_0^t\int_\Omega \left[\varepsilon|A_1|\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon|A_1|u^2 + \varepsilon|A_3|\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon|A_3|w^2 + \varepsilon|A_4|\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right.$$
$$\left.+C_\varepsilon|A_4|(m_1-n_1)^2 + \varepsilon|A_5|\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon|A_5|(m_2-n_2)^2 + \varepsilon|A_6|\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon|A_6|(m_3-n_3)^2\right]dxdt.$$

Como A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e $A_6 \in L^\infty(Q)$, temos que existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\varepsilon|A_1| + \varepsilon|A_2| + \varepsilon|A_3| + \varepsilon|A_4| + \varepsilon|A_5| + \varepsilon|A_6| \leq 1/2$ q.t.p. em Q. Tomando tal ε e usando que A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e $A_6 \in L^\infty(Q)$, temos

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + k \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dxdt \leq C\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}$$

$$+C \int_0^t \int_\Omega \left(u^2 + v^2 + w^2\right) dxdt + C \int_0^t \int_\Omega \left[(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)^2\right] dxdt.$$

Agora, usando a inequação (3.3.25) na desigualdade anterior temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + k \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dxdt \leq C \Big[& \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ & + \int_0^t \int_\Omega \left[(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)^2\right] dxdt \Big], \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

De modo análogo, multiplicando a segunda equação do problema (3.3.24) por $\partial v/\partial t$ e a terceira por $\partial w/\partial t$ e integrando em $\Omega \times (0, t)$, com $0 \leq t \leq T$, obtem-se respectivamente

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dxdt + k \int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dxdt \leq C \Big[& \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ & + \int_0^t \int_\Omega \left[(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)^2\right] dxdt \Big] \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdt + k \int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dxdt \leq C \Big[& \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \\ & + \int_0^t \int_\Omega \left[(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)^2\right] dxdt \Big], \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Finalmente, multiplicando a primeira equação do problema (3.3.24) por $(-\Delta u)$, a segunda por $(-\Delta v)$ e a terceira por $(-\Delta w)$, integrando cada igualdade obtida em $\Omega \times (0, t)$, com $0 \leq t \leq T$, e procedendo como no caso anterior, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dxdt + k \int_0^t \int_\Omega |\Delta u|^2 dxdt \leq & \, C \left[\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \\ & + C \int_0^t \int_\Omega \left[(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)^2\right] dxdt, \end{aligned} \tag{3.3.29}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dxdt + k \int_0^t \int_\Omega |\Delta v|^2 dxdt \leq & \, C \left[\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \\ & + C \int_0^t \int_\Omega \left[(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)^2\right] dxdt \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dxdt + k\int_0^t \int_\Omega |\Delta w|^2 dxdt \leq C\left[\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}\right] \\ +C\int_0^t \int_\Omega \left[(m_1-n_1)^2 + (m_2-n_2)^2 + (m_3-n_3)^2\right] dxdt, \tag{3.3.31}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Das equações (3.3.25) a (3.3.31) obtemos que

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right] \\ +C\left[\|m_1-n_1\|_{L^2(Q)} + \|m_2-n_2\|_{L^2(Q)} + \|m_3-n_3\|_{L^2(Q)}\right]. \tag{3.3.32}$$

Logo vale a estimativa do enunciado do teorema.

■

Corolário 3.1 *Sejam (m_1, m_2, m_3) e $(n_1, n_2, n_3) \in L^\infty(Q)\times L^\infty(Q)\times L^\infty(Q)$, (u_0^1, v_0^1, w_0^1) e $(u_0^2, v_0^2, w_0^2) \in W^2_{3p/5}(\Omega) \times W^2_{3p/5}(\Omega) \times W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, e sejam (u_1, v_1, w_1), $(u_2, v_2, w_2) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (3.0.1) com (m_1, m_2, m_3) e (u_0^1, v_0^1, w_0^1) e com (n_1, n_2, n_3) e (u_0^2, v_0^2, w_0^2), respectivamente. Suponha que k, a_1, a_2 e $a_3 > 0$ são constantes, m_1, m_2, $m_3 \in L^\infty(Q)$ e u_0^i, v_0^i e w_0^i satisfazem $\partial u_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0^i, v_0^i, $w_0^i \geq 0$ e $u_0^i + v_0^i + w_0^i = 1$, para $i = 1, 2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então (u_1, v_1, w_1), $(u_2, v_2, w_2) \in W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ e satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade*

$$\|u_1-u_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|v_1-v_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|w_1-w_2\|_{W_p^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C\left[\|u_0^1-u_0^2\|_{W_p^2(\Omega)} + \|v_0^1-v_0^2\|_{W_p^2(\Omega)} + \|w_0^1-w_0^2\|_{W_p^2(\Omega)}\right.$$

$$\left.+\|m_1-n_1\|_{L^\infty(Q)} + \|m_2-n_2\|_{L^\infty(Q)} + \|m_3-n_3\|_{L^\infty(Q)}\right],$$

onde C depende de Ω, T, das constantes do problema (3.0.1) e de u_1, v_1, w_1, u_2, v_2 e w_2.

Demonstração:

Sejam u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u, v, w, u_0, v_0 e w_0 como na demonstração do Teorema 3.3.

Como u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, pela Proposição 3.3, (u_1, v_1, w_1), $(u_2, v_2, w_2) \in W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$. Então $(u, v, w) \in W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$.

Para mostrar que a estimativa do enunciado é satisfeita, vamos dividir a demonstração em dois casos: $2 \leq p \leq 10$ e $10 < p < \infty$.

i) Mostremos que a estimativa é satisfeita para $2 \leq p \leq 10$.

Como $A_1u + A_2v + A_3w + A_4(m_1 - n_1) + A_5(m_2 - n_2) + A_6(m_3 - n_3) \in L^\infty(Q) \subset L^p(Q)$, para $2 \leq p \leq 10$, e como $u_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega) \subset W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$, aplicando o Teorema 1.4 à primeira equação do problema (3.3.24), temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} &\leq C \left[\|A_1u + A_2v + A_3w + A_4(m_1 - n_1) + A_5(m_2 - n_2) + A_6(m_3 - n_3)\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}\right] \\
&\leq C \left[\|u\|_{L^p(Q)} + \|v\|_{L^p(Q)} + \|w\|_{L^p(Q)} + \|m_1 - n_1\|_{L^p(Q)} + \|m_2 - n_2\|_{L^p(Q)}\right. \\
&\qquad \left. + \|m_3 - n_3\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right] \\
&\leq C \left[\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|m_1 - n_1\|_{L^\infty(Q)}\right. \\
&\qquad \left. + \|m_2 - n_2\|_{L^\infty(Q)} + \|m_3 - n_3\|_{L^\infty(Q)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right],
\end{aligned}$$

pois A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, $A_6 \in L^\infty(Q)$ e $W_2^{2,1}(Q) \subset L^p(Q)$, com $2 \leq p \leq 10$. Agora, pela desigualdade (3.3.32), temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} &\leq C \left[\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right. \\
&\left. + \|m_1 - n_1\|_{L^\infty(Q)} + \|m_2 - n_2\|_{L^\infty(Q)} + \|m_3 - n_3\|_{L^\infty(Q)}\right],
\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

para todo $2 \leq p \leq 10$.

Procedendo de modo análogo para a segunda e terceira equações do problema (3.3.24), obtemos respectivamente

$$\begin{aligned}
\|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} &\leq C \left[\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right. \\
&\left. + \|m_1 - n_1\|_{L^\infty(Q)} + \|m_2 - n_2\|_{L^\infty(Q)} + \|m_3 - n_3\|_{L^\infty(Q)}\right] \quad \text{e}
\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

$$\begin{aligned}
\|w\|_{W_p^{2,1}(Q)} &\leq C \left[\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right. \\
&\left. + \|m_1 - n_1\|_{L^\infty(Q)} + \|m_2 - n_2\|_{L^\infty(Q)} + \|m_3 - n_3\|_{L^\infty(Q)}\right],
\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

para todo $2 \leq p \leq 10$. E somando as desigualdades (3.3.33) a (3.3.35), obtemos a desigualdade desejada no caso $2 \leq p \leq 10$.

ii) Agora mostremos que a estimativa é satisfeita para $10 < p < \infty$.

Como $A_1u + A_2v + A_3w + A_4(m_1 - n_1) + A_5(m_2 - n_2) + A_6(m_3 - n_3) \in L^\infty(Q) \subset L^{10/3}(Q)$ e como $u_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega) \subset W_2^2(\Omega)$, aplicando o Teorema 1.4 às três primeira equações do problema (3.3.24) e procedendo como no caso anterior obtemos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|w\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} &\leq C \left[\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right. \\
&\left. + \|m_1 - n_1\|_{L^\infty(Q)} + \|m_2 - n_2\|_{L^\infty(Q)} + \|m_3 - n_3\|_{L^\infty(Q)}\right].
\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

Agora, como $A_1u + A_2v + A_3w + A_4(m_1 - n_1) + A_5(m_2 - n_2) + A_6(m_3 - n_3) \in L^\infty(Q) \subset L^p(Q)$, para $2 \leq p \leq 10$, e como $u_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega) \subset W_2^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$, aplicando o Teorema 1.4 à primeira equação do problema (3.3.24), temos que

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C \left[\|A_1u + A_2v + A_3w + A_4(m_1 - n_1) + A_5(m_2 - n_2) + A_6(m_3 - n_3)\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}\right]$$

$$\leq C\left[\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}+\|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}+\|w\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}+\|m_1-n_1\|_{L^\infty(Q)}\right.$$
$$\left.+\|m_2-n_2\|_{L^\infty(Q)}+\|m_3-n_3\|_{L^\infty(Q)}+\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right],$$

pois A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, $A_6 \in L^\infty(Q)$ e $W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L^p(Q)$, para qualquer $p \geq 2$. Agora, pela desigualdade (3.3.36),

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\left[\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|w_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right.$$
$$\left.+\|m_1-n_1\|_{L^\infty(Q)}+\|m_2-n_2\|_{L^\infty(Q)}+\|m_3-n_3\|_{L^\infty(Q)}\right],$$

para $10 < p < \infty$.

Procedendo de modo análogo para a segunda e terceira equações do problema (3.3.24), obtemos que

$$\|v\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\left[\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}+\|w_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right.$$
$$\left.+\|m_1-n_1\|_{L^\infty(Q)}+\|m_2-n_2\|_{L^\infty(Q)}+\|m_3-n_3\|_{L^\infty(Q)}\right] \quad \text{e}$$

$$\|w\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\left[\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|w_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right.$$
$$\left.+\|m_1-n_1\|_{L^\infty(Q)}+\|m_2-n_2\|_{L^\infty(Q)}+\|m_3-n_3\|_{L^\infty(Q)}\right],$$

para $10 < p < \infty$.

A desigualdade desejada para $10 < p < \infty$ é obtida somando as três últimas desigualdades.

■

Segue diretamente do Teorema 3.3 o seguinte resultado:

Corolário 3.2 *Suponha que k, a_1, a_2 e $a_3 > 0$ são constantes, m_1, m_2, $m_3 \in L^\infty(Q)$ e u_0, v_0, $w_0 \in W^2_2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ com $u_0+v_0+w_0=1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então, a solução $(u,v,w) \in W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)$ do problema (3.0.1) é única.*

Do corolário anterior e das Proposições 3.3 e 3.4 obtemos o seguinte teorema:

Teorema 3.4 *Suponha que k, a_1, a_2 e $a_3 > 0$ são constantes, m_1, m_2, $m_3 \in L^\infty(Q)$ e u_0, v_0, $w_0 \in W^2_2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ com $u_0+v_0+w_0=1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $(u,v,w) \in W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)$ é uma solução do problema (3.0.1), então $(u,v,w) \in W^{2,1}_{10/3}(Q)\times W^{2,1}_{10/3}(Q)\times W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e u, v e w satisfazem a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}+\|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}+\|w\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left[\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|w_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right],$$

onde C depende de Ω, T e das constantes do problema (3.0.1).

Se, além disso, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, então $(u, v, w) \in W^{2,1}_p(Q) \times W^{2,1}_p(Q) \times W^{2,1}_p(Q)$ e u, v e w satisfazem a seguinte estimativa

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_p(Q)} + \|w\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\left[\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|w_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right],$$

onde C depende de Ω, T e das constantes do problema (3.0.1).

Capítulo 4

Modelo de Solidificação 2

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e de classe C^2, $T \in \mathbb{R}$ finito e $Q = \Omega \times (0,T)$, como nos capítulos anteriores. Aqui vamos discutir existência, regularidade e unicidade de soluções do problema com condições de fronteira e condições iniciais:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau = l_1\dfrac{\partial u}{\partial t} + l_2\dfrac{\partial v}{\partial t} + l_3\dfrac{\partial w}{\partial t} + f \quad \text{em} \quad Q \\
\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = -a_1uw(w-u+c_1\tau+d_1) - a_3uv(v-u+c_3\tau+d_3) \quad \text{em} \quad Q \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v = -a_2vw(w-v+c_2\tau+d_2) - a_3uv(u-v-c_3\tau-d_3) \quad \text{em} \quad Q \\
\dfrac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w = -a_1uw(u-w-c_1\tau-d_1) - a_2vw(v-w-c_2\tau-d_2) \quad \text{em} \quad Q \\
\dfrac{\partial \tau}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\
\tau = \tau_0, \quad u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{e} \quad w = w_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\}.
\end{array}
\tag{4.0.1}
$$

As funções campo de fase u, v e w distinguem entre três subdomínios sólidos com cristalizações distintas e um subdomínio líquido em Q e τ representa a temperatura. Aqui b, k, a_1, a_2 e a_3 são constantes positivas l_1, l_2, l_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2 e d_3 são constantes arbitrárias e $f \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, é uma função dada. Vale observar que as constantes l_1, l_2 e l_3 tem mesmo sinal por razões físicas, mas este fato não será mais mencionado, pois não será utilizado na obtenção de nenhum resultado. n representa o vetor unitário normal exterior à $\partial\Omega$. As condições iniciais u_0, v_0 e w_0 são dadas em $W_2^2(\Omega)$ e satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

4.1 Resultados Sobre Existência de Solução

Observemos que no problema (4.0.1) temos que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ e, além disso, somando suas três primeiras equacões obtemos $\partial(u+v+w)/\partial t = 0$ em Q. De onde, todas as possíveis soluções do problema (4.0.1) satisfazem $u + v + w = 1$ em Q. Então substituindo w por $1 - u - v$ neste problema obtemos o seguinte problema auxiliar:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau = l_1' \frac{\partial u}{\partial t} + l_2' \frac{\partial v}{\partial t} + f \quad \text{em} \quad Q \\
&\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = -a_1 u(1-u-v)(1-2u-v+c_1\tau+d_1) - a_3 uv(v-u+c_3\tau+d_3) \quad \text{em} \quad Q \\
&\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v = -a_2 v(1-v-u)(1-2v-u+c_2\tau+d_2) - a_3 vu(u-v-c_3\tau-d_3) \quad \text{em} \quad Q \\
&\frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\
&\tau = \tau_0,\ u = u_0,\ v = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\},
\end{aligned}
\tag{4.1.2}
$$

onde b, f, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2, d_2, a_3, c_3, d_3, τ_0, u_0, v_0 são como no problema (4.0.1) e $l_1' = l_1 - l_3$ e $l_2' = l_2 - l_3$.

Para obter um resultado sobre existência de soluções do problema (4.0.1) vamos primeiro discutir um resultado sobre existência de soluções do problema auxiliar acima.

4.1.1 Existência de Solução de um Problema Auxiliar

Proposição 4.1 *Suponha que b, l_1', l_2', k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2, d_2, a_3, c_3 e d_3 são constantes com b, k, a_1, a_2, $a_3 > 0$, $f \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, e τ_0, u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\frac{\partial \tau_0}{\partial n} = \frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{\partial v_0}{\partial n} = 0$, $u_0, v_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 \leq 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então, o problema (4.1.2) possui uma solução $(\tau, u, v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ e τ, u, v satisfazem as estimativas*

$$
\|\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right], \tag{4.1.3}
$$

$$
u, v \geq 0 \quad e \quad u + v \leq 1 \quad q.t.p.\ em\ Q, \tag{4.1.4}
$$

onde C depende de Ω, T e das constantes do problema (4.1.2).

Demonstração:

Para demonstrar a existência de solução $(\tau, u, v) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ do problema (4.1.2) vamos aplicar o Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder (Teorema 1.3) no espaço de Banach

$$
B := \{(\tau, u, v); \tau \in L^\infty(Q), u, v \in L^9(Q)\} = L^\infty(Q) \times L^9(Q) \times L^9(Q).
$$

Para isso consideremos o operador $T_\lambda : B \to B$, com

$$
T_\lambda(\theta, \mu, \nu) = (\tau, u, v), \quad \forall\ (\theta, \mu, \nu) \in B,\ \forall\ 0 \leq \lambda \leq 1,
$$

definido pelo problema a seguir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau &= l_1' \frac{\partial u}{\partial t} + l_2' \frac{\partial v}{\partial t} + f \quad \text{em } Q \\
\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= -a_1 u(1-u-v)(1-2u-v+\lambda c_1\theta + d_1) - a_3 uv(v-u+\lambda c_3\theta + d_3) \quad \text{em } Q \\
\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v &= -a_2 v(1-v-u)(1-2v-u+\lambda c_2\theta + d_2) - a_3 vu(u-v-\lambda c_3\theta - d_3) \quad \text{em } Q \\
\frac{\partial \tau}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\
\tau &= \tau_0, \quad u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\},
\end{aligned}
\tag{4.1.5}
$$

com b, l_1', l_2', f, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2, d_2, a_3, c_3, d_3, τ_0, u_0 e v_0 como no problema (4.1.2).

Vamos agora verificar que as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder são satisfeitas.

a) Primeiramente mostremos que T_λ está bem definido $\forall$ $(\theta,\mu,\nu) \in B$ e $\forall$ $\lambda \in [0,1]$.

Para isso, sejam $(\theta,\mu,\nu) \in B$ e $\lambda \in [0,1]$. Como $\theta \in L^\infty(Q)$ temos que $\lambda c_i\theta + d_i \in L^\infty(Q)$, para i=1,2,3, então aplicando a Proposição 3.2 às duas últimas equações de (4.1.5) temos que existe $(u,v) \in W_2^2(Q) \times W_2^2(Q)$ solução destas equações.

Tomando $w = 1-u-v$ temos que $(u,v,w) \in W_2^2(Q) \times W_2^2(Q) \times W_2^2(Q)$ é solução do problema (3.0.1), pela demonstração do Teorema 3.2. E pelo Corolário 3.2 temos que tal solução de (3.0.1) é única.

Pela unicidade da solução em $W_2^2(Q) \times W_2^2(Q) \times W_2^2(Q)$ do problema (3.0.1), temos pelo Teorema 3.2, que $u,v \geq 0$ e $u+v+w=1$, de onde, $u+v \leq 1$, e pelo Teorema 3.4, que $(u,v,w) \in W_{10/3}^2(Q) \times W_{10/3}^2(Q) \times W_{10/3}^2(Q)$.

Agora, como $(u,v) \in W_{10/3}^2(Q) \times W_{10/3}^2(Q)$, temos que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{10/3}(Q)$. De onde, o segundo membro da primeira equação de (4.1.5) pertence a $L^{\overline{q}}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$. Então, pelo Corolário 1.3 e pelo Teorema 1.4, temos que existe único $\tau \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)$ solução desta equação. Mas como $\overline{q} > 5/2$, então $W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$, portanto $\tau \in L^\infty(Q)$.

Assim, obtivemos que $T_\lambda : B \to B$ está bem definido. Mais ainda, $T_\lambda : B \to W_{\overline{q}}^2(Q) \times W_{10/3}^2(Q) \times W_{10/3}^2(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$.

Antes de continuarmos a verificar as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder, observemos que todo (u,v), tal que $(\tau,u,v) = T_\lambda(\theta,\mu,\nu)$, satisfaz $u,v \geq 0$ e $u+v \leq 1$, q.t.p. em Q. Logo, se tivermos um ponto fixo para T_1, ou seja, uma solução para (4.1.2), esta deve satisfazer (4.1.4).

b) Agora mostremos que para todo $\lambda \in [0,1]$ fixo, $T_\lambda : B \to B$ é uma transformação contínua e compacta.

Para isso, fixemos $\lambda \in [0,1]$. Sejam $(\theta_1,\mu_1,\nu_1), (\theta_2,\mu_2,\nu_2) \in B$. E sejam $(\tau_i,u_i,v_i) = T_\lambda(\theta_i,\mu_i,\nu_i)$, para i=1,2, e $w_i = 1-u_i-v_i$.

Como (u_1,v_1,w_1) é solução do problema (3.0.1) com $-2m_1 = \lambda c_1\theta_1 + d_1$, $-2m_2 = \lambda c_2\theta_1 + d_2$ e $-2m_3 = \lambda c_3\theta_1 + d_3$, e (u_2,v_2,w_2) é solução do problema (3.0.1) com $-2n_1 = \lambda c_1\theta_2 + d_1$, $-2n_2 = \lambda c_2\theta_2 + d_2$ e $-2n_3 = \lambda c_3\theta_2 + d_3$. Então, pelo Teorema 3.3,

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \le C\left[\|\lambda c_1\theta_1 + d_1 - \lambda c_1\theta_2 - d_1\|_{L^{10/3}(Q)}\right.$$
$$\left. + \|\lambda c_2\theta_1 + d_2 - \lambda c_2\theta_2 - d_2\|_{L^{10/3}(Q)} + \|\lambda c_3\theta_1 + d_3 - \lambda c_3\theta_2 - d_3\|_{L^{10/3}(Q)}\right]$$
$$\le C\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty(Q)},$$

onde C depende de u_1, u_2, v_1 e v_2.

Agora, observemos que $\tau := \tau_1 - \tau_2$ satisfaz

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = l_1' \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} + l_2' \frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial t} \quad \text{em } Q$$
$$\partial\tau/\partial n = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T)$$
$$\tau = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}.$$

Como $u_1, u_2, v_1, v_2 \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$, temos $\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial t}, \frac{\partial(v_1-v_2)}{\partial t} \in L^{10/3}(Q)$. Então $\tau := \tau_1 - \tau_2 \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e satisfaz

$$\|\tau_1 - \tau_2\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} \le C\|\tau_1 - \tau_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \le C\left\|\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial t}\right\|_{L^{10/3}(Q)}$$
$$\le C\left[\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}\right] \le C\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty(Q)},$$

onde $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$.

De onde, temos que

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|\tau_1 - \tau_2\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} \le C\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty(Q)}.$$

Logo, $T_\lambda : B \to W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$ é contínua. Mas como as inclusões $W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \subset L^\infty(Q)$, com $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$, e $W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L^9(Q)$ são contínuas e compactas, segue que $T_\lambda : B \to B$ é contínua e compacta.

c) A seguir vamos mostrar que $\forall\ (\theta, \mu, \nu) \in A$, $A \subset B$ limitado, $T_\lambda(\theta, \mu, \nu)$ é uma transformação uniformemente contínua em λ.

Fixemos $(\theta, \mu, \nu) \in A$ com $A \subset B$ limitado. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$. E sejam $(\tau_i, u_i, v_i) = T_{\lambda_i}(\theta, \mu, \nu)$ e $w_i = 1 - u_i - v_i$, para i=1,2. Procedendo de maneira análoga ao caso anterior, obtem-se que

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \le C\|\theta\|_{L^\infty(Q)}|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

onde C depende de u_1, u_2, v_1 e v_2. Agora, como $(\theta, \mu, \nu) \in A$ com $A \subset B$ limitado, temos que

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \le C|\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Novamente, observando utilizando o problema satisfeito por $\tau := \tau_1 - \tau_2$ e procedendo como no caso anterior, temos

$$\|\tau_1 - \tau_2\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} \le C|\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Das duas últimas estimativas obtemos que $T_{(.)}(\theta,\mu,\nu):[0,1]\to W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)\times W^{2,1}_{10/3}(Q)\times W^{2,1}_{10/3}(Q)$ é contínua, onde $\overline{q}=\min\{q,10/3\}$. Mas como as inclusões $W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)\subset L^\infty(Q)$ e $W^{2,1}_{10/3}(Q)\subset L^9(Q)$ são contínuas, segue que $T_{(.)}(\theta,\mu,\nu):[0,1]\to B$ é contínua. Além disso, como $[0,1]$ é compacto, temos que $T_{(.)}(\theta,\mu,\nu)$ é uniformemente contínua em λ.

d) Agora mostremos que o operador T_0 possui um único ponto fixo em B.

Para $\lambda=0$ o problema (4.1.5) se torna

$$\begin{array}{c}\dfrac{\partial\tau}{\partial t}-b\Delta\tau=l_1'\dfrac{\partial u}{\partial t}+l_2'\dfrac{\partial v}{\partial t}+f \quad \text{em } Q\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}-k\Delta u=-a_1u(1-u-v)(1-2u-v+d_1)-a_3uv(v-u+d_3) \quad \text{em } Q\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}-k\Delta v=-a_2v(1-v-u)(1-2v-u+d_2)-a_3vu(u-v-d_3) \quad \text{em } Q\\ \dfrac{\partial\tau}{\partial n}=\dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial v}{\partial n}=0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T)\\ \tau=\tau_0,\quad u=u_0,\quad v=v_0 \quad \text{em} \quad \Omega\times\{t=0\},\end{array} \tag{4.1.6}$$

para todo $(\theta,\mu,\nu)\in B$.

Seja $(\theta,\mu,\nu)\in B$. Como d_i é uma constante finita, temos que $d_i\in L^\infty(Q)$, para $i=1,\,2,\,3$, então aplicando a Proposição 3.2 às duas últimas equações de (4.1.6) temos que existe $(u,v)\in W^2_2(Q)\times W^2_2(Q)\subset L^9(Q)\times L^9(Q)$ solução destas equações.

Tomando $w=1-u-v$ temos que $(u,v,w)\in W^2_2(Q)\times W^2_2(Q)\times W^2_2(Q)$ é solução do problema (3.0.1), pela demonstração do Teorema 3.2. Pelo Corolário 3.1 temos que tal solução de (3.0.1) é única. Logo, existe único $(u,v)\in L^9(Q)\times L^9(Q)$ solução das duas últimas equações de (4.1.6).

Pela unicidade da solução em $W^2_2(Q)\times W^2_2(Q)\times W^2_2(Q)$ do problema (3.0.1), temos pelo Teorema 3.4, que $(u,v,w)\in W^2_{10/3}(Q)\times W^2_{10/3}(Q)\times W^2_{10/3}(Q)$. Agora, como $(u,v)\in W^2_{10/3}(Q)\times W^2_{10/3}(Q)$, temos que $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\in L^{10/3}(Q)$. De onde, o segundo membro da primeira equação de (4.1.6) pertence a $L^{\overline{q}}(Q)$, com $\overline{q}=\min\{q,10/3\}$. Então, pelo Corolário 1.3 e pelo Teorema 1.4, temos que existe único $\tau\in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)$ solução desta equação. Mas como $\overline{q}>5/2$, temos $W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)\subset L^\infty(Q)$, e conseqüentemente, $\tau\in L^\infty(Q)$.

Portanto, existe um único $(\tau,u,v)\in B$ solução de (4.1.6). Como tal solução é a mesma para qualquer $(\theta,\mu,\nu)\in B$, temos que $T_0(\theta,\mu,\nu)=(\tau,u,v)$, $\forall\ (\theta,\mu,\nu)\in B$. Logo, o operador T_0 possui único ponto fixo $(\tau,u,v)\in B$.

e) Finalmente mostremos que existe uma constante $K>0$ finita tal que toda possível solução de $(\tau,u,v)=T_\lambda(\tau,u,v)$, para qualquer $\lambda\in[0,1]$, satisfaz $\|(\tau,u,v)\|_B\le K$.

Precisamos então estimar as normas dos possíveis pontos fixos de T_λ.

Seja $(\tau,u,v)\in B$ um ponto fixo de T_λ para algum $\lambda\in[0,1]$, ou seja, $T_\lambda(\tau,u,v)=(\tau,u,v)$. Observemos que para tal λ, (τ,u,v) satisfaz o problema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau &= l_1' \frac{\partial u}{\partial t} + l_2' \frac{\partial v}{\partial t} + f \qquad \text{em } Q \\
\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= -a_1 u(1-u-v)(1-2u-v+d_1) - a_3 uv(v-u+d_3) \\
&\quad -\lambda a_1 c_1 u(1-u-v)\tau - \lambda a_3 c_3 uv\tau \qquad \text{em } Q \\
\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v &= -a_2 v(1-v-u)(1-2v-u+d_2) - a_3 vu(u-v-d_3) \\
&\quad -\lambda a_2 c_2 v(1-v-u)\tau + \lambda a_3 c_3 vu\tau \qquad \text{em } Q \\
\frac{\partial \tau}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\
\tau = \tau_0, \quad u &= u_0, \quad v = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\},
\end{aligned}
\tag{4.1.7}
$$

com b, l_1', l_2', f, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2, d_2, a_3, c_3, d_3, τ_0, u_0 e v_0 como no problema (4.1.2).

Primeiramente, multiplicando a primeira equação de (4.1.7) por $\tau - l_1' u - l_2' v$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega [\tau(t) - l_1' u(t) - l_2' v(t)]^2 \, dx + 2b \int_0^t \int_\Omega \left[|\nabla\tau|^2 - l_1' \nabla\tau\nabla u - l_2' \nabla\tau\nabla v \right] dxdt \\
&\leq C \left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)} + \int_0^t \int_\Omega \left(\tau^2 + u^2 + v^2\right) dxdt \right].
\end{aligned}
\tag{4.1.8}
$$

Multiplicando a segunda equação do problema (4.1.7) por u, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e utilizando a desigualdade de Hölder nas integrais do segundo membro, visto que $0 \leq u, v \leq 1$, e portanto u, $v \in L^\infty(Q)$, temos

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(t) dx + k \int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}
$$

$$
+ \|a_1(2 + |d_1|) + a_3(1 + |d_3|)\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \int_\Omega u^2 dxdt + \|a_1|c_1| + a_3|c_3|\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \int_\Omega (u\tau) \, dxdt,
$$

de onde, utilizando a desigualdade de Young obtemos

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(t) dx + k \int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \leq C \left[\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega \left(u^2 + \tau^2\right) dxdt \right], \tag{4.1.9}
$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Multiplicando a terceira equação do problema (4.1.7) por v, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e procedendo de modo análogo obtemos

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega v^2(t) dx + k \int_0^t \int_\Omega |\nabla v|^2 dxdt \leq C \left[\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega \left(v^2 + \tau^2\right) dxdt \right], \tag{4.1.10}
$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Multiplicando a desigualdade (4.1.9) por uma constante $2A > 0$, a (4.1.10) por uma constante $2B > 0$ e somando-as à desigualdade (4.1.8), temos

$$\int_\Omega \left\{[\tau(t) - l_1'u(t) - l_2'v(t)]^2 + Au^2(t) + Bv^2(t)\right\} dx$$

$$+2\int_0^t \int_\Omega \left[b|\nabla\tau|^2 - bl_1'\nabla\tau\nabla u - bl_2'\nabla\tau\nabla v + Ak|\nabla u|^2 + Bk|\nabla v|^2\right] dxdt$$

$$\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)} + \int_0^t \int_\Omega \left(\tau^2 + u^2 + v^2\right) dxdt\right].$$

Tomando $A = \max\{1 + 4(l_1')^2, 1 + b(l_1')^2/k\}$ e $B = \max\{1 + 4(l_2')^2, 1 + b(l_2')^2/k\}$, temos que $(\tau - l_1'u - l_2'v)^2 + Au^2 + Bv^2 \geq \frac{\tau}{2}^2 + u^2 + v^2$ e $b|\nabla\tau|^2 - bl_1'\nabla\tau\nabla u - bl_2'\nabla\tau\nabla v + Ak|\nabla u|^2 + Bk|\nabla v|^2 \geq \frac{b}{2}|\nabla\tau|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2$. De onde,

$$\int_\Omega \left[\tau^2(t) + u^2(t) + v^2(t)\right] dx + \int_0^t \int_\Omega \left[|\nabla\tau|^2 + k|\nabla u|^2 + k|\nabla v|^2\right] dxdt$$

$$\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)} + \int_0^t \int_\Omega \left(\tau^2 + u^2 + v^2\right) dxdt\right].$$

Usando o Lema de Gronwall na desigualdade satisfeita pela primeira integral acima obtemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[\tau^2(t) + u^2(t) + v^2(t)\right] dx + \int_0^t \int_\Omega \left[|\nabla\tau|^2 + k|\nabla u|^2 + k|\nabla v|^2\right] dxdt \\ \leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right],\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Agora, multiplicando a primeira equação de (4.1.7) por $\partial\tau/\partial t$, integrando em $\Omega \times (0, t)$, com $0 \leq t \leq T$, e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)^2 - 2l_1'\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} - 2l_2'\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}\right] dxdt + b\int_\Omega |\nabla\tau(t)|^2 dx \leq b\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}, \tag{4.1.12}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Multiplicando a segunda equação do problema (4.1.7) por $\partial u/\partial t$, integrando em $\Omega \times (0, t)$, com $0 \leq t \leq T$, e usando a desigualdade de Hölder e depois a de Young, como no caso anterior, temos

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx$$

$$\leq \frac{k}{2}\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|a_1(2 + |d_1|) + a_3(1 + |d_3|)\|_{L^\infty(Q)}\frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \left[C_\varepsilon u^2 + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dxdt$$

$$+ \|a_1|c_1| + a_3|c_3|\|_{L^\infty(Q)}\frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \left[C_\varepsilon\tau^2 + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dxdt.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $\left[\|a_1(2 + |d_1|) + a_3(1 + |d_3|)\|_{L^\infty(Q)} + \|a_1|c_1| + a_3|c_3|\|_{L^\infty(Q)}\right]\varepsilon = 1$, obtemos que

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + k\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \leq k\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + C\int_0^t \int_\Omega \left(u^2+\tau^2\right) dxdt, \tag{4.1.13}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Multiplicando a terceira equação do problema (4.1.7) por $\partial v/\partial t$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e procedendo de modo análogo obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dxdt + k\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx \leq k\|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + C\int_0^t \int_\Omega \left(v^2+\tau^2\right) dxdt, \tag{4.1.14}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Multiplicando a desigualdade (4.1.13) por A, a (4.1.14) por B e somando-as à desigualdade (4.1.12), temos

$$\int_0^t \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 - 2l_1'\frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} - 2l_2'\frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + B\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] dxdt$$

$$+\int_\Omega \left[b|\nabla \tau(t)|^2 + Ak|\nabla u(t)|^2 + Bk|\nabla v(t)|^2\right] dx$$

$$\leq b\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + Ak\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + Bk\|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)} + C\int_0^t \int_\Omega \left(u^2+v^2+\tau^2\right) dxdt.$$

Tomando $A = 1+4(l_1')^2$ e $B = 1+4(l_2')^2$, temos que

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 - 2l_1'\frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} - 2l_2'\frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + B\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2$$

e $b|\nabla \tau(t)|^2 + Ak|\nabla u(t)|^2 + Bk|\nabla v(t)|^2 \geq b|\nabla \tau(t)|^2 + k|\nabla u(t)|^2 + k|\nabla v(t)|^2$. De onde,

$$\int_0^t \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] dxdt + \int_\Omega \left[|\nabla \tau(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2 + |\nabla v(t)|^2\right] dx$$

$$\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right] + C\int_0^t \int_\Omega \left(u^2+v^2+\tau^2\right) dxdt.$$

Usando a desigualdade (4.1.11) obtemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] dxdt + \int_\Omega \left[|\nabla \tau(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2 + |\nabla v(t)|^2\right] dx \\ \leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right],\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Finalmente, multiplicando a primeira equação de (4.1.7) por $-\Delta\tau$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \tau(t)|^2 dx + b\int_0^t \int_\Omega |\Delta \tau|^2 dx \leq \frac{1}{2}\|\nabla \tau_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+\int_0^t \int_\Omega \left[C_\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon(\Delta\tau)^2 + C_\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon(\Delta\tau)^2 + C_\varepsilon f^2 + \varepsilon(\Delta\tau)^2\right] dxdt.$$

Tomando $\varepsilon = b/6$ e usando a desigualdade (4.1.15), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla\tau(t)|^2 dx + b\int_0^t\int_\Omega |\Delta\tau|^2 dx \leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right], \qquad (4.1.16)$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Multiplicando a segunda equação do problema (4.1.7) por $-\Delta u$ e a terceira por $-\Delta v$, integrando cada uma delas em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e procedendo como na obtenção das estimativas (4.1.13) e (4.1.14) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + k\int_0^t\int_\Omega |\Delta u|^2 dx \leq C\left(\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right) dxdt \qquad (4.1.17)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx + k\int_0^t\int_\Omega |\Delta v|^2 dx \leq C\left(\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)}\right) dxdt, \qquad (4.1.18)$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Das desigualdades (4.1.11) e (4.1.15) a (4.1.18) obtemos que

$$\|\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right].$$

Como $W_2^{2,1}(Q) \subset L^{10}(Q)$ com inclusão contínua, da desigualdade anterior segue que

$$\|\tau\|_{L^{10}(Q)} + \|u\|_{L^{10}(Q)} + \|v\|_{L^{10}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right]. \qquad (4.1.19)$$

Agora, como $\tau, u, v \in L^{10}(Q)$ satisfazendo a estimativa anterior e $0 \leq u, v \leq 1$, temos que o segundo membro da segunda e da terceira equações de (4.1.7) pertencem a $L^{10}(Q) \subset L^{10/3}(Q)$. Como u_0, $v_0 \in W_2^2(\Omega)$, pelo Corolário 1.3 e pelo Teorema 1.4 aplicados a segunda e terceira equações deste problema obtemos que $u, v \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfazem

$$\|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\|u_0\|_{W_2^2(Q)}$$

$$+C\| - a_1u(1-u-v)(1-2u-v+d_1) - a_3uv(v-u+d_3) - \lambda a_1c_1u(1-u-v)\tau - \lambda a_3c_3uv\tau\|_{L^{10/3}(Q)}$$

$$\leq C\left[\|u\|_{L^{10/3}(Q)} + \|\tau\|_{L^{10/3}(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(Q)}\right] \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right],$$

pois $0 \leq u$, $v \leq 1$ e pela desigualdade (4.1.19). E do mesmo modo,

$$\|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right].$$

Como $u, v \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$, temos que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{10/3}(Q)$. Assim o segundo membro da primeira equação de (4.1.7) pertence a $L^{\overline{q}}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$. Então, pelo Teorema 1.4 aplicado a esta equação obtemos que $\tau \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)$. Como $\overline{q} > 5/2$, temos que $\tau \in L^\infty(Q)$ e satisfaz

$$\|\tau\|_{L^\infty(Q)} \leq C\|\tau\|_{W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\left\|l_1'\frac{\partial u}{\partial t} + l_2'\frac{\partial v}{\partial t} + f\right\|_{L^{\overline{q}}(Q)} + \|\tau_0\|_{W_2^2(Q)}\right]$$

$$\leq C\left[\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}+\|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}+\|f\|_{L^q(Q)}+\|\tau_0\|_{W^2_2(Q)}\right]$$
$$\leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|f\|_{L^q(Q)}\right].$$

Da última desigualdade e de (4.1.19) temos que

$$\|(\tau,u,v)\|_B\leq C\left[\|\tau\|_{L^\infty(Q)}+\|u\|_{L^q(Q)}+\|v\|_{L^q(Q)}\right]$$
$$\leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|f\|_{L^q(Q)}\right]:=K.$$

Como as hipóteses **a)** a **e)** do Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder são satisfeitas, temos que existe $(\tau,u,v)\in B\cap W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)$ ponto fixo de T_1, ou seja, existe $(\tau,u,v)\in W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)$ solução do problema (4.1.2). Além disso, temos que essa solução satisfaz as estimativas (4.1.3) e (4.1.4).

∎

Observação 4.1 *Sob as hipóteses do teorema anterior, pelos argumentos apresentados na demonstração de que a hipótese a) do Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder é satisfeita, temos que se* $(\tau,u,v)\in W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)$ *é solução do problema (4.1.2), então* $u,v\geq 0$ *e* $u+v\leq 1$ *q.t.p. em* Q.

4.1.2 Existência de Solução para o Modelo de Solidificação 2

Teorema 4.1 *Suponha que* b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2, d_2, a_3, c_3 *e* d_3 *são constantes com* b, k, a_1, a_2, $a_3>0$, $f\in L^q(Q)$, *com* $q>5/2$, *e* τ_0, u_0, v_0, $w_0\in W^2_2(\Omega)$ *satisfazem* $\frac{\partial\tau_0}{\partial n}=\frac{\partial u_0}{\partial n}=\frac{\partial v_0}{\partial n}=\frac{\partial w_0}{\partial n}=0$, $u_0,v_0,w_0\geq 0$ *e* $u_0+v_0+w_0=1$. *Além disso, suponha que* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *é um domínio aberto, limitado e de classe* C^2. *Então o problema (4.0.1) possui uma solução* $(\tau,u,v,w)\in\left[W^{2,1}_2(Q)\right]^4$ *e* τ,u,v,w *satisfazem as estimativas*

$$\begin{aligned}&\|\tau\|_{W^{2,1}_2(Q)}+\|u\|_{W^{2,1}_2(Q)}+\|v\|_{W^{2,1}_2(Q)}+\|w\|_{W^{2,1}_2(Q)}\\&\leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|w_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(Q)}\right],\end{aligned}\tag{4.1.20}$$

$$u,v,w\geq 0\quad e\quad u+v+w=1\quad q.t.p.\ em\ Q,\tag{4.1.21}$$

onde C *depende de* Ω, T *e das constantes do problema (4.0.1).*

Demonstração:

Tomemos $l_1'=l_1-l_3$ e $l_2'=l_2-l_3$. Então, pela Proposição 4.1, existe $(\tau,u,v)\in W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)\times W^{2,1}_2(Q)$ solução do problema (4.1.2). Além disso, tal solução satisfaz as estimativas (4.1.3) e (4.1.4), isto é,

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_2(Q)}+\|u\|_{W^{2,1}_2(Q)}+\|v\|_{W^{2,1}_2(Q)}\leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|v_0\|_{W^2_2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(Q)}\right]\quad e$$

$u, v \geq 0$ e $u + v \leq 1$ q.t.p. em Q. Seja $w = 1 - u - v$. Como $u + v \leq 1$ q.t.p. em Q, temos que $w \geq 0$, e pela definição de w, temos que $u + v + w = 1$. Logo u, v e w satisfazem (4.1.21).

Como (τ, u, v) é solução do problema (4.1.2), substituindo $1 - u - v$ por w nos lugares adequados temos que:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau = l_1' \frac{\partial u}{\partial t} + l_2' \frac{\partial v}{\partial t} + f = (l_1 - l_3)\frac{\partial u}{\partial t} + (l_2 - l_3)\frac{\partial v}{\partial t} + f$$
$$= l_1 \frac{\partial u}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v}{\partial t} + l_3 \frac{\partial}{\partial t}(1 - u - v) + f = l_1 \frac{\partial u}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v}{\partial t} + l_3 \frac{\partial w}{\partial t} + f,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = -a_1 u(1 - u - v)(1 - 2u - v + c_1\tau + d_1) - a_3 uv(v - u + c_3\tau + d_3)$$
$$= -a_1 uw(w - u + c_1\tau + d_1) - a_3 uv(v - u + d_3\tau + c_3),$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v = -a_2 v(1 - v - u)(1 - 2v - u + c_2\tau + d_2) - a_3 vu(u - v - c_3\tau - d_3)$$
$$= -a_2 vw(w - v + c_2\tau + d_2) - a_3 uv(u - v - c_3\tau - d_3)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w = -\frac{\partial u}{\partial t} + k\Delta u - \frac{\partial v}{\partial t} + k\Delta v$$
$$= a_1 uw(w - u + c_1\tau + d_1) + a_2 vw(w - v + c_2\tau + d_2)$$
$$= -a_1 uw(u - w - c_1\tau - d_1) - a_2 vw(v - w - c_2\tau - d_2)$$

em Q.

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, T).$$

$$\tau = \tau_0, \quad u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{e} \quad w = 1 - u - v = 1 - u_0 - v_0 = w_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}.$$

Logo $(\tau, u, v, w) \in \left[W_{2,1}^2(Q)\right]^4$ é solução do problema (4.0.1). Falta agora mostrarmos que w satisfaz a estimativa (4.1.20), isto é,

$$\|w\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right].$$

Para isso, multiplicando a primeira equação do problema (4.0.1) por w, integrando em $(0, t)$, com $0 \leq t \leq T$, e usando as desigualdades de Hölder, Young e Gronwall, como nas estimativas dos possíveis pontos fixos do operador T_λ da demonstração da Proposição 4.1, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega w^2(t)dx + k\int_\Omega\int_0^t |\nabla w|^2 dxdt \leq C\left[\|w_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega \tau^2 dxdt\right].$$

Agora, multiplicando a primeira equação do problema (4.0.1) por $\partial w/\partial t$ e depois por $-\Delta w$, procedendo da mesma forma, obtemos

$$\int_\Omega\int_0^t \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dx \leq C\left[\|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega \tau^2 dxdt\right]$$

e

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dx + \int_\Omega \int_0^t |\Delta w|^2 \leq C\left[\|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega \tau^2 dxdt\right].$$

Somando as três desigualdades anteriores e usando a desigualdade (4.1.3) obtemos

$$\|w\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right].$$

O que nos fornece a desigualdade desejada.

∎

Observação 4.2 *Sob as hipóteses do teorema anterior, se* $(\tau, u, v, w) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ *é solução do problema (4.0.1), então* $u, v, w \geq 0$ *e* $u + v + w = 1$ *q.t.p. em* Q.

De fato, como $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ em Ω, somando as três últimas equações do problema (4.0.1), obtemos pela teoria de equações parabólicas em L^p, que $u + v + w = 1$ q.t.p. em Q. Agora, como $(\tau, u, v, w) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ é solução do problema (4.0.1) e $u + v + w = 1$, temos que $(\tau, u, v) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^3$ é solução do problema (4.1.2). Então pela Observação 4.1, temos que $u, v \geq 0$ e $u + v \leq 1$ q.t.p. em Q. De onde, $u, v, w \geq 0$ e $u + v + w = 1$ q.t.p. em Q.

4.2 Regularidade de Solução para o Modelo de Solidificação 2

Teorema 4.2 *Suponha que* b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2, d_2, a_3, c_3 *e* d_3 *são constantes com* b, k, a_1, a_2, $a_3 > 0$, $f \in L^q(Q)$, *com* $q > 5/2$, *e* τ_0, u_0, v_0, $w_0 \in W_2^2(\Omega)$ *satisfazem* $\frac{\partial \tau_0}{\partial n} = \frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{\partial v_0}{\partial n} = \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0$, $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ *e* $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. *Além disso, suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *é um domínio aberto, limitado e de classe* C^2. *Se* $(\tau, u, v, w) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ *é uma solução do problema (4.0.1), então* $(\tau, u, v, w) \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, *onde* $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$, *e* τ, u, v, w *satisfazem a estimativa*

$$\begin{aligned}&\|\tau\|_{W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right],\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

onde C *depende de* Ω, T *e das constantes do problema (4.0.1).*

Se, além disso, τ_0, u_0, v_0, $w_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega)$, *com* $2 \leq 3p/5 < \infty$, *então* $(\tau, u, v, w) \in W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$, *onde* $\widetilde{q} = \min\{q, p\}$, *e* τ, u, v, w *satisfazem a estimativa*

$$\begin{aligned}&\|\tau\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_p^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right],\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

onde C *depende de* Ω, T *e das constantes do problema (4.0.1).*

Demonstração:

Seja $(\tau, u, v, w) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ uma solução do problema (4.0.1). Procedendo exatamente como nas estimativas obtidas nas demonstrações da Proposição 4.1 e do Teorema 4.1 obtem-se que

$$\begin{aligned} &\|\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right]. \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

Agora, como $\tau, u, v, w \in W_2^{2,1}(Q) \subset L^{10}(Q)$ satisfazendo a estimativa anterior e $0 \leq u, v, w \leq 1$ (pela Observação 4.2), temos que o segundo membro das três últimas equações de (4.0.1) pertencem a $L^{10}(Q) \subset L^{10/3}(Q)$. Além disso, τ_0, u_0, v_0, $w_0 \in W_2^2(Q) \subset W_{10/3}^{2-\frac{2}{10/3}}(Q)$, pelo Corolário 1.3. Logo, pelo Teorema 1.4 aplicado a estas equações obtemos que $u, v, w \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfazem

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} &\leq C\,\|[-a_1 w(w-u+d_1) - a_3 v(v-u+d_3)]u - [a_1 c_1 uw + a_3 c_3 uv]\tau\|_{L^{10/3}(Q)} + C\|u_0\|_{W_2^2(Q)} \\ &\leq C\left[\|u\|_{L^{10/3}(Q)} + \|\tau\|_{L^{10/3}(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(Q)}\right] \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)}\right], \end{aligned}$$

pela desigualdade (4.2.24). E do mesmo modo,

$$\|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2} + \|f\|_{L^2(Q)}\right] \quad \text{e}$$

$$\|w\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2} + \|f\|_{L^2(Q)}\right].$$

Como $u, v, w \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$, então $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \in L^{10/3}(Q)$. Assim o segundo membro da primeira equação de (4.0.1) pertence a $L^{\overline{q}}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$. Então, aplicando o Teorema 1.4 à primeira equação do problema (4.0.1) obtemos que $\tau \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)$ e satisfaz a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|\tau\|_{L^\infty(Q)} \leq C\|\tau\|_{W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)} &\leq C\left[\left\|l_1\frac{\partial u}{\partial t} + l_2\frac{\partial v}{\partial t} + l_3\frac{\partial w}{\partial t} + f\right\|_{L^{\overline{q}}(Q)} + \|\tau_0\|_{W_2^2(Q)}\right] \\ &\leq C\left[\|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|f\|_{L^q(Q)} + \|\tau_0\|_{W_2^2(Q)}\right] \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right], \end{aligned}$$

pelas três últimas desigualdades.

Somando as quatro últimas desigualdades obtemos a estimativa (4.2.22).

Agora, se τ_0, u_0, v_0, $w_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega)$. Então, pelo Corolário 1.3, temos que τ_0, u_0, v_0, $w_0 \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$. Procedendo como no caso anterior, temos que $u, v, w \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfazem a estimativa (4.2.22). Como $u, v, w \in W_{10/3}^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ e $\tau \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$, temos que o segundo membro da segunda, terceira e quarta equações de (4.0.1) pertencem a $L^\infty(Q) \subset L^p(Q)$. Então, aplicando o Teorema 1.4 a segunda, terceira e quarta equações do problema (4.0.1) obtemos que u, v, $w \in W_p^{2,1}(Q)$ e satisfazem as seguintes estimativas

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C \left[\|[-a_1 w(w-u+d_1) - a_3 v(v-u+d_3)]u - [a_1 c_1 uw + a_3 c_3 uv]\tau\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}\right]$$

$$\leq C \left[\|u\|_{L^p(Q)} + \|\tau\|_{L^{\overline{q}}(Q)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right] \leq C \left[\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right]$$

$$\leq C \left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right],$$

pela desigualdade (4.2.22). Do mesmo modo, obtemos

$$\|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C \left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right] \quad \text{e}$$

$$\|w\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C \left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2} + \|w_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right].$$

Como $u, v, w \in W_p^{2,1}(Q)$, então $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \in L^p(Q)$. Assim, o segundo membro da primeira equação de (4.0.1) pertence a $L^{\widetilde{q}}(Q)$, onde $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$. Além disso, $\tau_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega) \subset W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$, pelo Corolário 1.3. Então, aplicando o Teorema 1.4 à primeira equação do problema (4.0.1), obtemos que $\tau \in W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)$ e satisfaz

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\widetilde{q}}(Q)} \leq C \left[\left\|l_1 \frac{\partial u}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v}{\partial t} + l_3 \frac{\partial w}{\partial t} + f\right\|_{L^{\widetilde{q}}(Q)} + \|\tau_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}\right]$$

$$\leq C \left[\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|w\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|f\|_{L^q(Q)} + \|\tau_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right]$$

$$\leq C \left[\|\tau_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L^q(Q)}\right],$$

pela desigualdade (4.2.22).

Somando as quatro últimas desigualdades obtemos a estimativa (4.2.23)

∎

4.3 Estabilidade e Unicidade de Solução para o Modelo de Solidificação 2

Teorema 4.3 *Sejam $f_1, f_2 \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, $(\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1)$, $(\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2) \in [W_2^2(\Omega)]^4$, e $(\tau_1, u_1, v_1, w_1), (\tau_2, u_2, v_2, w_2) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ soluções do problema (4.0.1) com $(f_1, (\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1))$ e $(f_2, (\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2))$, respectivamente. Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2, d_2, a_3, c_3 e d_3 são constantes, com b, k, a_1, a_2, $a_3 > 0$, e τ_0^i, u_0^i, v_0^i, w_0^i satisfazem $\frac{\partial \tau_0^i}{\partial n} = \frac{\partial u_0^i}{\partial n} = \frac{\partial v_0^i}{\partial n} = \frac{\partial w_0^i}{\partial n} = 0$, $u_0^i, v_0^i, w_0^i \geq 0$ e $u_0^i + v_0^i + w_0^i = 1$, para $i = 1, 2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então, (τ_1, u_1, v_1, w_1) e (τ_2, u_2, v_2, w_2) satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade*

$$
\begin{aligned}
&\|\tau_1-\tau_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}+\|u_1-u_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}+\|v_1-v_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}+\|w_1-w_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}\\
&\leq C\left[\|f_1-f_2\|_{L^2(Q)}+\|\tau_0^1-\tau_0^2\|_{W_2^2(\Omega)}+\|u_0^1-u_0^2\|_{W_2^2(\Omega)}+\|v_0^1-v_0^2\|_{W_2^2(\Omega)}+\|w_0^1-w_0^2\|_{W_2^2(\Omega)}\right].
\end{aligned}
\tag{4.3.25}
$$

onde C depende de Ω, T, das constantes do problema (4.0.1) e de u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, e w_2.

Demonstração:

Sejam $f_1, f_2 \in L^q(Q)$, $(\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1)$, $(\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2) \in \left[W_2^2(\Omega)\right]^4$, e (τ_1, u_1, v_1, w_1), $(\tau_2, u_2, v_2, w_2) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ soluções do problema (4.0.1) com $(f_1, (\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1))$ e $(f_2, (\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2))$, respectivamente. E sejam $\tau = \tau_1 - \tau_2$, $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$ e $w = w_1 - w_2$ e sejam $\tau_0 = \tau_0^1 - \tau_0^2$, $u_0 = u_0^1 - u_0^2$, $v_0 = v_0^1 - v_0^2$ e $w_0 = w_0^1 - w_0^2$. Então, $(\tau, u, v, w) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ e satisfaz ao seguinte problema

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau = l_1\dfrac{\partial u}{\partial t} + l_2\dfrac{\partial v}{\partial t} + l_3\dfrac{\partial w}{\partial t} + f_1 - f_2 \quad \text{em } Q\\
\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = A_1 u + A_2 v + A_3 w + A_4\tau \quad \text{em } Q\\
\dfrac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v = B_1 u + B_2 v + B_3 w + B_4\tau \quad \text{em } Q\\
\dfrac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w = C_1 u + C_2 v + C_3 w + C_4\tau \quad \text{em } Q\\
\dfrac{\partial \tau}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T)\\
\tau = \tau_0, \quad u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{e } w = w_0 \quad \text{em } \Omega \times \{t=0\},
\end{array}
\tag{4.3.26}
$$

onde

$A_1 = -a_1(w_1 - u_1 - u_2 + c_1\tau_1 + d_1)w_1 - a_3(v_1 - u_1 - u_2 + c_3\tau_1 + d_3)v_1,$

$A_2 = -a_3(v_1 + v_2 - u_2 + c_3\tau_1 + d_3)u_2,$

$A_3 = -a_1(w_1 + w_2 - u_2 + c_1\tau_1 + d_1)u_2,$

$A_4 = -a_1c_1u_2w_2 - a_3c_3u_2v_2,$

$B_1 - a_3(u_1 + u_2 - v_2 - c_3\tau_1 - d_3)v_2,$

$B_2 = -a_2(w_1 - v_1 - v_2 + c_2\tau_1 + d_2)w_1 - a_3(u_1 - v_1 - v_2 - c_3\tau_1 - d_3)u_1,$

$B_3 = -a_2(w_1 + w_2 - v_2 + c_2\tau_1 + d_2)v_2,$

$B_4 = -a_2c_2v_2w_2 + a_3c_3v_2u_2,$

$C_1 = -a_1(u_1 + u_2 - w_2 - c_1\tau_1 - d_1)w_2,$

$C_2 = -a_2(v_1 + v_2 - w_2 - c_2\tau_1 - d_2)w_2,$

$C_3 = -a_1(u_1 - w_1 - w_2 - c_1\tau_1 - d_1)u_1 - a_2(v_1 - w_1 - w_2 - c_2\tau_1 - d_2)v_1$ e

$C_4 = a_1c_1w_2u_2 + a_2c_2w_2v_2.$

Multiplicando a primeira equação do problema anterior por τ, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com

$0 \leq t \leq T$, e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \tau^2(t)dx + 2b\int_0^t\int_\Omega |\nabla\tau|^2 dxdt \\ \leq &\int_\Omega \tau_0^2 dx + C\int_0^t\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \tau^2\right] dxdt + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(Q)}\,.\end{aligned} \tag{4.3.27}$$

Multiplicando a segunda equação do problema (4.3.26) por u, a terceira por v, a quarta por w e procedendo do mesmo modo com cada uma das igualdades obtidas, temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \\ \leq &\frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2 dx + \int_0^t\int_\Omega \left[\left(|A_1| + \frac{|A_2|}{2} + \frac{|A_3|}{2} + \frac{|A_4|}{2}\right)u^2 + \frac{|A_2|}{2}v^2 + \frac{|A_3|}{2}w^2 + \frac{|A_4|}{2}\tau^2\right] dxdt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega v^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla v|^2 dxdt \\ \leq &\frac{1}{2}\int_\Omega v_0^2 dx + \int_0^t\int_\Omega \left[\frac{|B_1|}{2}u^2 + \left(\frac{|B_1|}{2} + |B_2| + \frac{|B_3|}{2} + \frac{|B_4|}{2}\right)v^2 + \frac{|B_3|}{2}w^2 + \frac{|B_4|}{2}\tau^2\right] dxdt\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega w^2(t)dx + k\int_0^t\int_\Omega |\nabla w|^2 dxdt \\ \leq &\frac{1}{2}\int_\Omega w_0^2 dx + \int_0^t\int_\Omega \left[\frac{|C_1|}{2}u^2 + \frac{|C_2|}{2}v^2 + \left(\frac{|C_1|}{2} + \frac{|C_2|}{2} + |C_3| + \frac{|C_4|}{2}\right)w^2 + \frac{|C_4|}{2}\tau^2\right] dxdt.\end{aligned}$$

Multiplicando as três últimas desigualdades por 2 e somando-as à desigualdade (4.3.27), obtemos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[\tau^2(t) + u^2(t) + v^2(t) + w^2(t)\right] dx + 2\int_0^t\int_\Omega \left[b|\nabla\tau|^2 + k|\nabla u|^2 + k|\nabla v|^2 + k|\nabla w|^2\right] dxdt \\ &\quad\leq C\int_0^t\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] dxdt + C\int_0^t\int_\Omega \left(u^2 + v^2 + w^2 + \tau^2\right) dxdt \\ &\quad\quad + \|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(Q)}\,,\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

pois pela Observação 4.2, $0 \leq u_i, v_i, w_i \leq 1$, para i=1,2, e assim $A_j, B_j, C_j \in L^\infty(Q)$, para j=1,2,3.

Agora, multiplicando a segunda equação do problema (4.3.26) por $\partial u/\partial t$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e utilizando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \leq \frac{k}{2}\int_\Omega |\nabla u(0)|^2 dx \\ \leq &\int_0^t\int_\Omega \left[C_\varepsilon|A_1|u^2 + \varepsilon|A_1|\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon|A_2|v^2 + \varepsilon|A_2|\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon|A_3|w^2\right. \\ &\left. + \varepsilon|A_3|\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon|A_4|\tau^2 + \varepsilon|A_4|\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dxdt.\end{aligned}$$

Como $A_j, B_j, C_j \in L^\infty(Q)$, para j=1,2,3, usando a desigualdada de Hölder, temos que

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + \frac{k}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \leq \frac{k}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+C_\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \left[u^2+v^2+w^2+\tau^2\right] dxdt + 4\varepsilon\|A_1+A_2+A_3+A_4\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $4\varepsilon\|A_1+A_2+A_3+A_4\|_{L^\infty(Q)} = 1/2$, obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + k\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \leq k\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + C\int_0^t \int_\Omega \left[u^2+v^2+w^2+\tau^2\right] dxdt. \quad (4.3.29)$$

Multiplicando a terceira equação do problema (4.3.26) por $\partial v/\partial t$, a quarta por $\partial w/\partial t$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e procedendo de modo análogo obtemos respectivamente

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dxdt + k\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx \leq k\|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + C\int_0^t \int_\Omega \left[u^2+v^2+w^2+\tau^2\right] dxdt \quad (4.3.30)$$

e

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdt + k\int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dx \leq k\|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + C\int_0^t \int_\Omega \left[u^2+v^2+w^2+\tau^2\right] dxdt. \quad (4.3.31)$$

Substituindo as desigualdades (4.3.29) a (4.3.31) em (4.3.28), obtemos que

$$\int_\Omega \left[\tau^2(t)+u^2(t)+v^2(t)+w^2(t)\right] dx + 2\int_0^t \int_\Omega \left[b|\nabla \tau|^2 + k|\nabla u|^2 + k|\nabla v|^2 + k|\nabla w|^2\right] dxdt$$

$$\leq C\int_0^t \int_\Omega (u^2+v^2+w^2+\tau^2)\, dxdt$$

$$+C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1-f_2\|^2_{L^2(Q)}\right].$$

De onde, usando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[\tau^2(t)+u^2(t)+v^2(t)+w^2(t)\right] dx + 2\int_0^t \int_\Omega \left[b|\nabla \tau|^2 + k|\nabla u|^2 + k|\nabla v|^2 + k|\nabla w|^2\right] dxdt \\ \leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1-f_2\|^2_{L^2(Q)}\right].\end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Substituindo a última desigualdade em (4.3.29) a (4.3.31) obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt + k\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \\ \leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1-f_2\|^2_{L^2(Q)}\right],\end{aligned} \quad (4.3.33)$$

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dxdt + k\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx \\ \leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1-f_2\|^2_{L^2(Q)}\right]\end{aligned} \quad (4.3.34)$$

e

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdt + k\int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dx \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(Q)}\right].\end{aligned} \tag{4.3.35}$$

Multiplicando a primeira equação do problema (4.3.26) por $\partial\tau/\partial t$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, temos

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 dxdt + \frac{b}{2}\int_\Omega \left[|\nabla\tau(t)|^2 - |\nabla\tau(0)|^2\right] dx \\ &\leq C\int_0^t\int_\Omega\left[C_\epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + C_\varepsilon\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + 4\epsilon\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2\right] dxdt + C_\varepsilon\|f_1 - f_2\|^2_{L^2(Q)},\end{aligned}$$

pela desigualdade de Young.

De onde, substituindo as desigualdades (4.3.33) a (4.3.35) e tomando $\varepsilon = 1/8$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 dxdt + b\int_\Omega |\nabla\tau(t)|^2 dx \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(Q)}\right].\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

Finalmente, multiplicando a primeira equação do problema (4.3.26) por $-\Delta\tau$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, utilizando a desigualdade de Young, tomando ε adequadamente e usando as desigualdades (4.3.33) a (4.3.35) como antes, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla\tau(t)|^2 dx + b\int_0^t\int_\Omega |\Delta\tau|^2 dxdt \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(Q)}\right].\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

Multiplicando a segunda equação do problema (4.3.26) por $-\Delta u$, a terceira $-\Delta v$, a quarta por $-\Delta w$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e procedendo de modo análogo obtemos respectivamente

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + k\int_0^t\int_\Omega |\Delta u|^2 dxdt \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(Q)}\right],\end{aligned} \tag{4.3.38}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx + k\int_0^t\int_\Omega |\Delta v|^2 dxdt \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(Q)}\right]\end{aligned} \tag{4.3.39}$$

e

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dx + k\int_0^t\int_\Omega |\Delta w|^2 dxdt \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(Q)}\right].\end{aligned} \tag{4.3.40}$$

Das desigualdades (4.3.32) a (4.3.40) obtemos a desigualdade (4.3.25).

■

Corolário 4.1 *Sejam $f_1, f_2 \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, $(\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1)$, $(\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2) \in \left[W_2^2(\Omega)\right]^4$, e $(\tau_1, u_1, v_1, w_1), (\tau_2, u_2, v_2, w_2) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ soluções do problema (4.0.1) com $(f_1, (\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1))$ e $(f_2, (\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2))$, respectivamente. Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2, d_2, a_3, c_3 e d_3 são constantes, com b, k, a_1, a_2, $a_3 > 0$, e τ_0^i, u_0^i, v_0^i, w_0^i satisfazem $\frac{\partial \tau_0^i}{\partial n} = \frac{\partial u_0^i}{\partial n} = \frac{\partial v_0^i}{\partial n} = \frac{\partial w_0^i}{\partial n} = 0$, $u_0^i, v_0^i, w_0^i \geq 0$ e $u_0^i + v_0^i + w_0^i = 1$, para $i = 1, 2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então, (τ_1, u_1, v_1, w_1), $(\tau_2, u_2, v_2, w_2) \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$, e satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade*

$$\begin{aligned} &\|\tau_1 - \tau_2\|_{W_{\overline{q}}^{2,1}(Q)} + \|u_1 - u_2\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|w_1 - w_2\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right], \end{aligned} \tag{4.3.41}$$

onde C depende de Ω, T, das constantes do problema (4.0.1) e de u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, e w_2.

Se, além disso, $(\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1)$, $(\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2) \in \left[W_{3p/5}^2(\Omega)\right]^4$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, então, (τ_1, u_1, v_1, w_1), $(\tau_2, u_2, v_2, w_2) \in W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$, onde $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$, e satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade

$$\begin{aligned} &\|\tau_1 - \tau_2\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} + \|u_1 - u_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|w_1 - w_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\left[\|\tau_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right], \end{aligned} \tag{4.3.42}$$

onde C depende de Ω, T, das constantes do problema (4.0.1) e de u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, e w_2.

Demonstração:

Sejam $f_1, f_2 \in L^q(Q)$, $(\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1)$, $(\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2) \in \left[W_2^2(\Omega)\right]^4$, e (τ_1, u_1, v_1, w_1), $(\tau_2, u_2, v_2, w_2) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ soluções do problema (4.0.1) com $(f_1, (\tau_0^1, u_0^1, v_0^1, w_0^1))$ e $(f_2, (\tau_0^2, u_0^2, v_0^2, w_0^2))$, respectivamente. Sejam $\tau = \tau_1 - \tau_2$, $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$ e $w = w_1 - w_2$ e sejam $\tau_0 = \tau_0^1 - \tau_0^2$, $u_0 = u_0^1 - u_0^2$, $v_0 = v_0^1 - v_0^2$ e $w_0 = w_0^1 - w_0^2$, como na demonstração do Teorema 4.3.

Pelo Teorema 4.2 temos que $(\tau_1, u_1, v_1, w_1), (\tau_2, u_2, v_2, w_2) \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$, então $(\tau, u, v, w) \in W_{\overline{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, com $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$. Além disso, (τ, u, v, w) satisfaz o problema (4.3.26). Então, pelo teorema anterior temos que (τ, u, v, w) satisfaz a estimativa (4.3.25).

Como $W_2^{2,1}(Q) \subset L^{10}(Q)$ com inclusão contínua, temos que o segundo membro da segunda equação do problema (4.3.26) pertence a $L^{10}(Q) \subset L^{10/3}(Q)$. Além disso, $u_0 \in W_2^2(\Omega)$ e $W_2^2(\Omega) \subset W_{10/3}^{2-\frac{2}{10/3}}(\Omega)$ com imersão contínua, pelo Corolário 1.3. Então, aplicando o Teorema 1.4 a esta equação, temos que $u \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} &\leq C\left[\|A_1 u + A_2 v + A_3 w + A_4 \tau\|_{L^{10/3}(Q)} + \|u_0\|_{W_{10/3}^{2-\frac{2}{10/3}}(\Omega)}\right] \\ &\leq C\left[\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\tau\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right], \end{aligned}$$

pois $A_i \in L^\infty(Q)$, para $i = 1, 2, 3, 4$, e $W_2^{2,1}(Q) \subset L^{10/3}(Q)$. Logo, por (4.3.25) temos

$$\|u\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)}\right]. \tag{4.3.43}$$

Procedendo de maneira análoga para a terceira e quarta equações do problema (4.3.26) obtemos que $v, w \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e satisfazem

$$\|v\|_{W^{2,1}_{10}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|w_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)}\right] \tag{4.3.44}$$

e

$$\|w\|_{W^{2,1}_{10}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|w_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^2(Q)}\right]. \tag{4.3.45}$$

Como $u, v, w \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$, temos que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \in L^{10/3}(Q)$. Então, como $f \in L^q(Q)$, o segundo membro da primeira equação do problema (4.3.26) pertence a $L^{\overline{q}}(Q)$, onde $\overline{q} = \min\{q, 10/3\}$. Além disso, $\tau_0 \in W^2_2(\Omega)$ e $W^2_2(\Omega) \subset W^{2-\frac{2}{10/3}}_{10/3}(\Omega)$ com imersão contínua, pelo Corolário 1.3. Então, aplicando o Teorema 1.4 a esta equação e procedendo do mesmo modo, temos que $\tau \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)$ e satisfaz

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} \leq C\left[\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|w\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)} + \|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right].$$

O que nos fornece, pelas desigualdades (4.3.43) a (4.3.45),

$$\|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|w_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right]. \tag{4.3.46}$$

Somando as desigualdades (4.3.43) a (4.3.46) obtemos a estimativa (4.3.41).

Vamos demonstrar agora o caso $\tau_0,\ u_0,\ v_0,\ w_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$.

Procedendo exatamente como no caso anterior, obtemos que $(\tau, u, v, w) \in W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e satisfazem a estimativa (4.3.41).

Como $W^{2,1}_{10/3}(Q), W^{2,1}_{\overline{q}}(Q) \subset L^\infty(Q)$, pois $\overline{q} > 5/2$, temos que $u, v, w, \tau \in L^\infty(Q)$. Logo, segundo membro da segunda equação do problema (4.3.26) pertence a $L^\infty(Q) \subset L^p(Q)$. Além disso, $u_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$ e $W^2_{3p/5}(\Omega) \subset W^{2-\frac{2}{p}}_p(\Omega)$, pelo Corolário 1.3. Então, aplicando o Teorema 1.4 a esta equação temos que $u \in W^{2,1}_p(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} &\leq C\left[\|A_1 u + A_2 v + A_3 w + A_4 \tau\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W^{2-\frac{2}{p}}_p(\Omega)}\right] \\
&\leq C\left[\|A_1\|_{L^\infty(Q)}\|u\|_{L^p(Q)} + \|A_2\|_{L^\infty(Q)}\|v\|_{L^p(Q)} + \|A_3\|_{L^\infty(Q)}\|w\|_{L^p(Q)}\right. \\
&\qquad \left. + \|A_4\|_{L^\infty(Q)}\|\tau\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right] \\
&\leq C\left[\|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|v\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|w\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|\tau\|_{W^{2,1}_{\overline{q}}(Q)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right].
\end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade (4.3.41) temos

$$\|u\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|w_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right]. \tag{4.3.47}$$

Procedendo de maneira análoga para a terceira e quarta equações do problema (4.3.26) obtemos que $v, w \in W^{2,1}_p(Q)$ e satisfazem

$$\|v\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|v_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|w_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right] \tag{4.3.48}$$

e

$$\|w\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right]. \quad (4.3.49)$$

Como $u, v, w \in W_p^{2,1}(Q)$, temos que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \in L^p(Q)$. Então, o segundo membro da primeira equação do problema (4.3.26) pertence a $L^{\widetilde{q}}(Q)$, onde $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$. Além disso, $\tau_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega)$ e $W_{3p/5}^2(\Omega) \subset W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$, pelo Corolário 1.3. Então, aplicando o Teorema 1.4 a esta equação e procedendo do mesmo modo, temos que $\tau \in W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\|\tau\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|w\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)} + \|\tau_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)}\right],$$

que nos fornece, pelas desigualdades (4.3.47) a (4.3.49),

$$\|\tau\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|\tau_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|w_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L^q(Q)}\right], \quad (4.3.50)$$

onde $\widetilde{q} = \min\{p, q\}$.

Das desigualdades (4.3.47) a (4.3.50) obtemos a desigualdade desejada, ou seja, (4.3.42).

■

Segue diretamente do Teorema 4.3 o seguinte resultado:

Corolário 4.2 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2, d_2, a_3, c_3 e d_3 são constantes com b, k, a_1, a_2, $a_3 > 0$, $f \in L^q(Q)$, com $q > 5/2$, e τ_0, u_0, v_0, $w_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\frac{\partial \tau_0}{\partial n} = \frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{\partial v_0}{\partial n} = \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0$, $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então, a solução $(\tau, u, v, w) \in \left[W_2^{2,1}(Q)\right]^4$ do problema (4.0.1) é única.*

Capítulo 5

Teoria de Controle Ótimo e o Formalismo de Dubovitskii e Milyutin

Neste capítulo, serão apresentados as definições e os resultados que constituem o método que usaremos para obter condições necessárias de otimalidade dos problemas de otimização. Tal técnica é conhecida como Formalismo de Dubovitskii e Milyutin e uma referência para esta técnica é Girsanov [8].

Inicialmente consideremos o seguinte problema de minimizar um funcional definido sobre um aberto de um espaço de Banach sujeito a restrições:

Sejam X e Y dois espaços de Banach, e $J : X \to \mathbb{R}$ o funcional a ser minimizado. Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} \min J(x) \\ \text{sujeito a} \quad x \in Q = \cap_{i=1}^{n+1} Q_i, \end{cases} \tag{5.0.1}$$

onde Q_i, $i = 1, ..., n+1$, são as restrições do problema.

Definição 5.1 *Se $intQ_i \neq \emptyset$ dizemos que Q_i é uma restrição de desigualdade. Caso contrário, dizemos que Q_i é uma restrição de igualdade*

Definição 5.2 *O conjunto admissível, U_{ad}, para o problema de otimização (5.0.1) é definido por*

$$U_{ad} = \{x \in Q : J(x) < \infty\}.$$

Definição 5.3 *$x \in U_{ad}$ é chamada solução ótima local do problema de otimização (5.0.1) se existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$J(x) \leq J(y)$$

para todo $y \in U_{ad}$ *satisfazendo*

$$\|x - y\|_X < \varepsilon.$$

5.1 Teorema de Dubovitskii e Milyutin

Antes de apresentarmos o Teorema de Dubovitskii e Milyutin vejamos algumas definições e alguns resultados básicos. Nesta seção consideraremos as notações do problema (5.0.1) e um ponto $x_0 \in X$.

Definição 5.4 *Dizemos que um vetor* h *é uma direção de descida do funcional* $J(\cdot)$ *no ponto* x_0 *se existe uma vizinhança* U *de* h *e um número estritamente negativo* $\alpha = \alpha(J, x_0, h)$ *tal que, para todo* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *e qualquer* $\overline{h} \in U$,

$$J(x_0 + \varepsilon\overline{h}) \leq J(x_0) + \varepsilon\alpha.$$

Definição 5.5 *Dizemos que um funcional* $J(\cdot)$ *é regularmente de descida no ponto* x_0 *se suas direções de descida em* x_0 *formam um conjunto convexo.*

Definição 5.6 *Sendo* Q_i *dado por uma restrição de desigualdade, dizemos que o vetor* h *é uma direção factível para* Q_i *no ponto* $x_0 \in Q_i$ *se existe uma vizinhança* U *de* h *tal que, para todo* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *e qualquer* $\overline{h} \in U$, *tem-se que* $x_0 + \varepsilon\overline{h} \in Q_i$.

Definição 5.7 *Dizemos que uma restrição de desigualdade* Q_i *é regular no ponto* $x_0 \in Q_i$ *se o conjunto das direções factíveis para* Q_i *em* x_0 *é convexo.*

Observemos que se Q_i for dado por uma restrição de igualdade a definição de direção factível não tem sentido. Então, neste caso precisamos de uma nova definição.

Definição 5.8 *Sendo* Q_i *dado por uma restrição de igualdade, dizemos que* h *é um vetor tangente unilateral ou simplesmente direção tangente a* Q_i *no ponto* $x_0 \in Q_i$ *se para qualquer* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *existe um ponto* $x(\varepsilon) \in Q_i$ *tal que, se colocarmos* $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon h + r(\varepsilon)$, *então o vetor* $r(\varepsilon) \in X$ *é tal que, para qualquer vizinhança* U *de zero,* $\frac{1}{\varepsilon} r(\varepsilon) \in U$ *para qualquer* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno, ou equivalentemente,* $\|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon)$.

Definição 5.9 *Dizemos que uma restrição de igualdade* Q_i *é regular no ponto* $x_0 \in Q_i$ *se o conjunto das direções tangentes a* Q_i *em* x_0 *é convexo.*

Observação 5.1 *Quando o conjunto das direções tangentes é um subespaço vetorial, ele é denominado espaço tangente.*

Proposição 5.1
(i) As direções de descida geram um cone aberto com vértice em zero.
(ii) As direções factíveis geram um cone aberto com vértice em zero.
(iii) As direções tangentes geram um cone com vértice em zero.

Definição 5.10 *Se K é um cone em X, seu cone dual denotado por K^* é dado por*

$$K^* = \{\varphi \in X^* : \varphi(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in K\}.$$

Observação 5.2 *O uso da notação K^* para o cone dual pode não parecer adequada, pois se $K = X$, então $K^* = \{0\} \neq X^*$. Porém, esta é a notação usual na literatura, não devendo, portanto, causar confusão.*

Vamos agora apresentar o resultado principal desta seção.

Teorema 5.1 *(Teorema de Dubovitskii e Milyutin)*
Suponha que $J(\cdot)$ assume um mínimo local em $Q = \cap_{i=1}^{p+1} Q_i$ no ponto x_0, J é regularmente de descida em x_0, com direções de descida K_0, Q_i, $i = 1, ..., p$, é regular em x_0, com direções factíveis K_i, $i = 1, ..., p$, e Q_{p+1} é regular em x_0, com direções tangentes K_{p+1}. Então existem formas lineares contínuas $\varphi_i \in K_i^*$, $i = 0, ..., p+1$, não simultaneamente nulas, tais que,

$$\varphi_0 + \varphi_1 + ... + \varphi_p + \varphi_{p+1} = 0.$$

Tal equação é chamada Equação de Euler-Lagrange.

Observemos que para obter uma caracterização analítica das condições de otimalidade a partir do teorema anterior devemos conseguir calcular os cones associados a cada restrição e seus duais. Isto é o que veremos na próxima seção.

5.2 Cálculo dos Cones

Nesta seção consideremos X e Y dois espaços de Banach, $F_1, F_2, ..., F_n : X \to \mathbb{R}$ funcionais contínuos, $M : X \to Y$ um operador e $J : X \to \mathbb{R}$ o funcional a ser minimizado. E consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} \min J(x) \\ \text{sujeito a} \quad x \in Q = \cap_{i=1}^{n+1} Q_i, \end{cases} \tag{5.2.2}$$

onde $Q_i = \{x \in X : F_n(x) \leq \lambda_n\}$, $i = 1, ..., n$, são restrições de desigualdade e $Q_{n+1} = \{x \in X : M(x) = 0\}$ é uma restrição de igualdade.

Antes de apresentarmos os resultados referentes a cálculo dos cones, vejamos algumas definições do cálculo diferenciais que serão utilizadas.

5.2.1 Algumas Definições do Cálculo Diferencial

Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados, U uma vzinhança de um ponto x_0 em X e F uma aplicação de U em Y.

Definição 5.11 *Dizemos que F tem uma derivada direcional no ponto x_0 na direção h se o limite*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(x_0 + \varepsilon h) - F(x_0)}{\varepsilon}$$

existe. Notação: $F'(x_0, h)$.

Definição 5.12 *Suponhamos que para todo $h \in X$ a derivada $F'(x_0, h)$ na direção h existe. A aplicação $\delta_+ F(x_0, \cdot) : X \to Y$ definida por $\delta_+ F(x_0, h) = F'(x_0, h)$ é denominada a primeira variação da aplicação F no ponto x_0.*

Definição 5.13 *Suponhamos que F possui uma primeira variação no ponto x_0 e que existe um operador linear contínuo $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\delta_+ F(x_0, h) = \Lambda h$. Então, o operador Λ é denominado derivada de Gâteaux da aplicação F no ponto x_0 e será denotada por $F'_G(x_0)$. Assim, $F'_G(x_0)$ é um elemento de $\mathcal{L}(X, Y)$ tal que para cada $h \in X$ temos a relação*

$$F(x_0 + \varepsilon h) = F(x_0) + \varepsilon F'_G(x_0) h + o(\varepsilon),$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Definição 5.14 *Dizemos que o operador F é Fréchet-diferenciável em x_0 se, numa vizinhança de x_0, ele pode ser representado sob a forma*

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \Lambda h + \alpha(h) \|h\|,$$

onde $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $\lim_{\|h\| \to 0} \|\alpha(h)\| = \|\alpha(0)\| = 0$.
Neste caso, o operador Λ é chamado derivada de Fréchet (ou simplesmente derivada) da aplicação F no ponto x_0 e é denotados por $F'(x_0)$.

Definição 5.15 *Dizemos que o operador $F : X \to Y$ é estritamente diferenciável em x_0 se existe $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todos x_1, x_2 verificando $\|x_1 - x_0\| < \delta$, $\|x_2 - x_0\| < \delta$, temos a seguinte desigualdade*

$$\|F(x_1) - F(x_2) - \Lambda(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Definição 5.16 *Dizemos que o operador $F : U \subset X \to Y$ definido sobre um aberto U é de classe $C^1(U)$ se ele possui uma derivada em cada ponto $x \in U$ e a aplicação $x \to F'(x)$ é contínua.*

Observação 5.3 *As seguintes conclusões são satisfeitas:*

(i) Se F é Fréchet-diferenciável em x_0, então F é Gâteaux-diferenciável em x_0 e $F'(x_0) = F'_G(x_0)$.

(ii) Se F é estritamente diferenciável em x_0, então F é Fréchet-diferenciável em x_0 e $\Lambda = F'(x_0)$.

(iii) Se F é Gâteaux-diferenciável em cada ponto $x \in U$, onde U é uma vizinhança de x_0, e a aplicação $x \to F'_G(x_0)$ é contínua em x_0, então F é estritamente diferenciável em x_0.

(iv) Se F é estritamente diferenciável em x_0, então existe uma vizinhança de x_0 onde F é Lipschitz contínua.

(v) F pode ser Fréchet-diferenciável em x_0 e não ser estritamente diferenciável em x_0. Por exemplo, o operador $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

é Fréchet-diferenciável em $x_0 = 0$,mas não é estritamente diferenciável, pois F só é contínua em $x_0 = 0$.

(iv) Se F é de classe C^1, então ela é estritamente diferenciável.

5.2.2 Direções de Descida

Teorema 5.2 *Seja X um espaço de Banach. Suponha que o funcional $J(\cdot)$ satisfaz uma condição de Lipschitz em uma vizinhança do ponto $x_0 \in X$ e que é direcionalmente diferenciável em x_0 em qualquer direção h. Se $J'(x_0, h)$ é convexa como função de h, então $J(\cdot)$ é regularmente de descida em x_0 e seu cone de direções de descida K_0 é dado por*

$$K_0 = \{h \in X : J'(x_0, h) < 0\}.$$

Corolário 5.1 *Seja X um espaço de Banach.*

(i) Se $J(\cdot)$ é um funcional convexo contínuo, então $J(\cdot)$ é regularmente de descida em qualquer ponto x_0 e $K_0 = \{h \in X : J'(x_0, h) < 0\}$.

(ii) Se $J(\cdot)$ é Fréchet-diferenciável, então $J(\cdot)$ é regularmente de descida em qualquer ponto x_0 e $K_0 = \{h \in X : \langle J'(x_0), h\rangle < 0\}$.

5.2.3 Direções Factíveis ou Admissíveis

Sejam Q uma restrição de desigualdade e K_a seu cone de direções factíveis. Nessa seção vamos admitir que $intQ \neq \emptyset$, pois caso contrário $K_a = \emptyset$.

Lembremos que estamos considerando Q definido por um funcional, isto é,

$$Q = \{x \in X : F(x) \leq F(x_0)\}.$$

Se F for contínuo podemos estudar o caso $Q = \{x \in X : F(x) \leq \lambda\}$.

Denotando por K_d o cone das direções de descida do funcional $F(\cdot)$ no ponto x_0, vejamos alguns resultados:

Observação 5.4 *Sempre vale a inclusão $K_d \subset K_a$. A "recíproca"é dada pelo próximo resultado.*

Proposição 5.2 *Suponha que $F(\cdot)$ é direcionalmente diferenciável em x_0 em qualquer direção. Se existe $\widetilde{h}$ tal que $F'(x_0, \widetilde{h}) < 0$, então*

$$K_a = \{h \in X : F'(x_0, h) < 0\}.$$

Observação 5.5 *A condição $F'(x_0, \widetilde{h}) < 0$ para algum $\widetilde{h}$ é equivalente a $K_d \neq \emptyset$.*

Corolário 5.2 *Suponha que qualquer uma das condições abaixo é satisfeita:*
(i) X é um espaço de Banach, $F(\cdot)$ satisfaz uma condição de Lipschitz numa vizinhança do ponto e é direcionalmente diferenciável em x_0 em qualquer direção h, $F'(x_0, h)$ é convexa como função de h e existe $\widetilde{h}$ tal que $F'(x_0, \widetilde{h}) < 0$;
(ii) $F(\cdot)$ é um funcional convexo contínuo e existe $\widetilde{x}$ tal que $F(\widetilde{x}) < F(x_0)$;
(iii) $F(\cdot)$ é Fréchet-diferenciável em x_0 e $F'(x_0) \neq 0$.
Então, $K_a = K_d = \{h \in X : F'(x_0, h) < 0\}$.

Proposição 5.3 *Se Q é um conjunto convexo, seu cone de direções factíveis é dado por*

$$K_a = \{h \in X : h = \lambda(x - x_0),\ x \in intQ, \lambda > 0\} = \{\lambda(intQ - x_0) : \lambda > 0\}.$$

5.2.4 Direções Tangentes

Teorema 5.3 *(Lyusternik)*
Sejam X, Z espaços de Banach, U uma vizinhança do ponto $x_0 \in X$, $P : U \to Z$ tal que $P(x_0) = 0$. Se P é estritamente diferenciável no ponto x_0 e $P'(x_0)X = Z$ (ou seja, P é um epimorfismo), então o conjunto $Q = \{x \in X : P(x) = 0\}$ tem no ponto x_0 um espaço tangente dado por

$$T_{x_0}Q = \ker P'(x_0) = \{h \in X : P'(x_0)h = 0\}.$$

5.3 Cálculo dos Cones Duais

Teorema 5.4 *Suponha que o cone K é um subespaço vetorial de um espaço normado X. Então*

$$K^* = \{\varphi \in X^* : \varphi(x) = 0,\ \forall x \in K\}.$$

Teorema 5.5 *Seja* $\varphi \in X^*$ *se*

$$K_1 = \{x \in X : \varphi(x) = 0\},$$
$$K_2 = \{x \in X : \varphi(x) \geq 0\},$$
$$K_3 = \{x \in X : \varphi(x) > 0\}.$$

Então,

$$K_1^* = \{\lambda\varphi : -\infty < \lambda < \infty\},$$
$$K_2^* = \{\lambda\varphi : 0 \leq \lambda < \infty\},$$
$$K_3^* = \begin{cases} X^* & se \quad \varphi = 0, \\ K_2^* & se \quad \varphi \neq 0. \end{cases}$$

Definição 5.17 *Um funcional suporte para um subconjunto* $A \subset X$ *em* $x_0 \in A$ *é uma forma linear contínua* $\varphi \in X^*$ *não nula tal que* $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)$ *para todo* $x \in A$.

Sejam $Q \subset X$, $x_0 \in Q$, K_a o cone das direções factíveis para Q em x_0, K_T o cone das direções tangentes a Q em x_0 e Q^* o cone dos funcionais lineares suportes para Q em x_0, isto é,

$$Q^* = \{\varphi \in X^* : \varphi(x) \geq \varphi(x_0),\ \forall x \in Q\}.$$

Teorema 5.6 *Se* Q *é um conjunto convexo fechado, então* $K_T^* = Q^*$. *Se além disso,* $intQ \neq \emptyset$, *então* $K_a^* = Q^*$.

5.4 Generalização do Teorema de Dubovitskii e Milyutin

Nesta seção consideremos X e Y dois espaços de Banach, $J : X \to \mathbb{R}$ o funcional a ser minimizado e o seguinte problema

$$\begin{cases} \min J(x) \\ \text{sujeito a} \quad x \in Q = \cap_{i=1}^{n+m} Q_i, \end{cases} \tag{5.4.3}$$

onde Q_i, $i = 1, ..., n$, são restrições de desigualdade e $Q_i = \{x \in X : M(x) = 0\}$, $i = n+1, ..., m$, são restrições de igualdade.

Antes de apresentarmos uma generalização do Teorema de Dubovitskii e Milyutin vamos introduzir a definição de sistema cones de mesmo sentido (SSS), que será utilizada no teorema.

Definição 5.18 *Seja* $\{K_i\}_{i=1}^m$ *um sistema de cones em um espaço normado* X. *Dizemos que* $\{K_i\}_{i=1}^m$ *é um sistema de cones de mesmo sentido (SSS) se para qualquer constante* $M > 0$ *existem constantes* $M_1, M_2, \ldots, M_m > 0$ *tais que, para todo* $x \in X$ *com* $\|x\|_X \leq M$ *e* $x = \sum_{i=1}^m x_i$, *com* $x_i \in K_i$, *para* $i = 1, \ldots m$, *tem-se que* $\|x_i\|_X \leq M_i$, *para cada* $i = 1, \ldots m$.

Com as notações introduzidas no início da seção temos o seguinte resultado, que é uma generalização do Teorema de Dubovitskii e Milyutin citado anteriormente (ref. Walczak [15]):

Teorema 5.7 *Assuma que*

1. $x_0 \in \cap_{i=1}^{m} Q_i$ *é uma solução do problema de otimização* $\min\left\{J(x) : x \in \cap_{i=1}^{n+m} Q_i\right\}$, *associado ao funcional* $J : X \to \mathbb{R}$ *com cone de descida* DC_0, *cones factíveis* FC_i, $i = 1, \ldots, n$, *e cones tangentes* TC_i, $i = n+1, \ldots, m$, *no ponto* x_0.

2. *Os cones* DC_0 *e* FC_i, $i = 1, \ldots, n$, *são convexos e abertos.*

3. *Os cones* TC_i, $i = n+1, \ldots, m$, *são convexos e fechados.*

4. *O cone* $\cap_{i=n+1}^{n} TC_i$ *está contido no cone tangente* $TC\left(\cap_{i=n+1}^{n} Q_i\right)$ *associado ao conjunto de todas as restrições de igualdade* Q_i, $i = n+1, \ldots, m$.

5. *Os cones duais* $[TC_i]^*$, $i = n+1, \ldots, m$, *formam um sistema de cones de mesmo sentido.*

Então, existem $f_0 \in [DC_0]^*$, $f_i \in [FC_i]^*$, $i = 1, \ldots, n$ *e* $f_i \in [TC_i]^*$, $i = n+1, \ldots, m$, *não todas simultaneamente nulas, tais que*

$$\sum_{i=0}^{m} f_i = 0.$$

Capítulo 6

Problemas de Controle Para o Modelo de Solidificação 1

Aqui vamos demonstrar a existência de solução ótima para problemas de controle relacionados ao Modelo de Solidificação 1 e usar o formalismo de Dubovitskii e Milyutin para encontrar condições necessárias de otimalidade.

Neste capítulo vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e de classe C^2, como nos primeiros capítulos, e também os espaços

$$\begin{aligned} E &:= W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q) \qquad \text{e} \\ \widetilde{E} &:= L^r(Q) \times L^l(Q) \times L^l(Q) \times W_{\widetilde{r}}^{2}(\Omega) \times W_{\widetilde{l}}^{2}(\Omega) \times W_{\widetilde{l}}^{2}(\Omega), \end{aligned} \tag{6.0.1}$$

onde

$$r > 5/2, \quad l \geq r, \quad \widetilde{r} = \max\{2, 3r/5\} \quad \text{e} \quad \widetilde{l} = \max\{2, 3l/5\}. \tag{6.0.2}$$

Consideremos o seguinte funcional $J : E \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} J(\tau, u, v, f) = \frac{\alpha_1}{2}\int_0^T \int_\Omega |\tau - \tau_d|^{2k} dxdt + \frac{\alpha_2}{2}\int_0^T \int_\Omega |u - u_d|^{2m} dxdt \\ + \frac{\alpha_3}{2}\int_0^T \int_\Omega |v - v_d|^{2m} dxdt + \frac{N}{2}\int_0^T \int_\Omega |f|^{2s} dxdt, \end{aligned} \tag{6.0.3}$$

onde α_1, α_2, $\alpha_3 \geq 0$ e $N > 0$ são constantes, k, s e m são tais que k, s e $m \geq 1$, e $\tau_d \in L^{2k}(Q)$, u_d, $v_d \in L^{2m}(Q)$ são funções dadas.

6.1 Um Problema de Controle Simples

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$\min_{(\tau,u,v,f)\in\mathcal{Q}} J(\tau, u, v, f), \tag{6.1.4}$$

onde o funcional J é dado por (6.0.3) e Q é dado pela restrição de igualdade

$$Q = \{(\tau, u, v, f) \in E : M(\tau, u, v, f) = 0\},$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido por

$$M(\tau, u, v, f) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6),$$

se, e somente se,

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau - l_1\dfrac{\partial u}{\partial t} - l_2\dfrac{\partial v}{\partial t} - f = \varphi_1 \quad \text{em} \quad Q \\
\dfrac{\partial u}{\partial t} - k_1\Delta u + a_1 u(1-u-v)(1-2u-v+c_1\tau+d_1) = \varphi_2 \quad \text{em} \quad Q \\
\dfrac{\partial v}{\partial t} - k_2\Delta v + a_2 v(1-v-u)(1-2v-u+c_2\tau+d_2) = \varphi_3 \quad \text{em} \quad Q \\
\dfrac{\partial \tau}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\
\tau - \tau_0 = \varphi_4, \quad u - u_0 = \varphi_5 \quad \text{e} \quad v - v_0 = \varphi_6 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}.
\end{array} \tag{6.1.5}$$

Observação 6.1 *Observe que $M(\tau, u, v, f) = 0$ se, e somente se, (τ, u, v, f) é solução do problema (2.0.1). E observe também que pelas definições de E e $\widetilde{E}$ dadas em (6.0.1), o operador M acima está bem definido.*

Na próxima subseção mostraremos a existência de uma solução ótima do problema (6.1.4).

6.1.1 Existência de Solução Ótima

Para mostrarmos a existência de uma solução ótima do problema (6.1.4) precisaremos do resultado dado a seguir.

Lema 6.1 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\tilde{r}}(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W^2_{\tilde{l}}(\Omega)$, com $\tilde{r}$ e $\tilde{l}$ satisfazendo (6.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \le u_0, v_0 \le 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $r \ge 2s$, então $U_{ad} \ne \emptyset$.*

Demonstração:

Seja $f \in L^r(Q)$, como $l \ge r$ por (6.0.2), então pelo Teorema 2.1, Corolário 2.3 e Teorema 2.3, existe único $(\tau, u, v) \in W^{2,1}_r(Q) \times W^{2,1}_l(Q) \times W^{2,1}_l(Q)$ solução do problema (2.0.1). Logo, $(\tau, u, v, f) \in E$, com E dado por (6.0.1), e $M(\tau, u, v, f) = 0$.

Além disso, como $r \ge 2s$, temos que $f \in L^{2s}(Q)$. E como r, $l > 5/2$ temos que $W^{2,1}_r(Q) \subset L^{2k}(Q)$ e $W^{2,1}_l(Q) \subset L^{2m}(Q)$ com inclusão contínua. Logo, temos que $(\tau, u, v) \in L^{2k}(Q) \times L^{2m}(Q) \times L^{2m}(Q)$, de onde $J(\tau, u, v, f) < \infty$. Assim, $(\tau, u, v, f) \in U_{ad}$.

■

Teorema 6.1 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\tilde{r}}(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W^2_{\tilde{l}}(\Omega)$, com $\tilde{r}$, $\tilde{l}$ satisfazendo (6.0.2), são tais que $\frac{\partial \tau_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0, v_0 \leq 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2k}(Q)$ e u_d, $v_d \in L^{2m}(Q)$, com k e m quaisquer inteiros tais que k, $m \geq 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (6.1.4) possui uma solução ótima.*

Demonstração:

Primeiramente observemos que se $r \geq 2s$, então $U_{ad} \neq \emptyset$, pelo Lema 6.1.

Seja $\{(\tau_n, u_n, v_n, f_n)\} \subset U_{ad}$ uma seqüência minimizante do funcional J.

Como $J(\tau_n, u_n, v_n, f_n) \leq C$, pela estrutura de J temos que

$$\|f_n\|_{L^r(Q)} = \|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$$

e, pelo Teorema 2.3, temos que

$$\|\tau_n\|_{W_r^{2,1}(Q)} + \|u_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} + \|v_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} \leq C.$$

Podemos então tomar uma subseqüência de $\{f_n\}$ e de $\{(\tau_n, u_n, v_n)\}$, com $M(\tau_n, u_n, v_n, f_n) = 0$, que continuaremos denotando por $\{(\tau_n, u_n, v_n, f_n)\}$, tal que

$$\begin{array}{lll} f_n \rightharpoonup f & \text{fracamente em} & L^r(Q), \\ \tau_n \rightharpoonup \tau & \text{fracamente em} & W_r^{2,1}(Q), \\ u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em} & W_s^{2,1}(Q) \text{ e} \\ v_n \rightharpoonup v & \text{fracamente em} & W_s^{2,1}(Q). \end{array}$$

Como r, $l > 5/2$, pelo Corolário 1.2 temos que $W_r^{2,1}(Q)$, $W_l^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ com inclusão contínua e compacta. Então,

$$\begin{array}{lll} \tau_n \to \tau & \text{fortemente em} & L^\infty(Q), \\ u_n \to u & \text{fortemente em} & L^\infty(Q), \\ v_n \to v & \text{fortemente em} & L^\infty(Q). \end{array}$$

Mostremos agora que $M(\tau, u, v, f) = 0$, ou seja, que (τ, u, v, f) é solução do problema (2.0.1).

Primeiramente observemos que cada quádrupla (τ_n, u_n, v_n, f_n) satisfaz o problema

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial \tau_n}{\partial t} - b\Delta\tau_n = l_1\dfrac{\partial u_n}{\partial t} + l_2\dfrac{\partial v_n}{\partial t} + f_n \quad \text{em} \quad Q \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - k_1\Delta u_n = -a_1 u_n(1 - u_n - v_n)(1 - 2u_n - v_n + c_1\tau_n + d_1) \quad \text{em} \quad Q \\ \dfrac{\partial v_n}{\partial t} - k_2\Delta v_n = -a_2 v_n(1 - v_n - u_n)(1 - 2v_n - u_n + c_2\tau_n + d_2) \quad \text{em} \quad Q \\ \dfrac{\partial \tau_n}{\partial n} = \dfrac{\partial u_n}{\partial n} = \dfrac{\partial v_n}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, T) \\ \tau_n = \tau_0, \quad u_n = u_0 \quad \text{e} \quad v_n = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}. \end{array} \tag{6.1.6}$$

Precisamos mostrar que (τ, u, v) satisfaz o problema (2.0.1).

Como $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $L^r(Q)$ temos que $f_n \to f$ no sentido das distribuições.

Como $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $W_r^{2,1}(Q)$ temos que

$$\tau_n \to \tau, \quad \frac{\partial \tau_n}{\partial t} \to \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \text{e} \quad \Delta\tau_n \to \Delta\tau$$

no sentido das distribuições.

Como $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_l^{2,1}(Q)$ temos que

$$u_n \to u, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \Delta u_n \to \Delta u \quad \text{e}$$

$$v_n \to v, \quad \frac{\partial v_n}{\partial t} \to \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \Delta v_n \to \Delta v,$$

respectivamente, no sentido das distribuições.

Finalmente, como $\tau_n \to \tau$, $u_n \to u$ e $v_n \to v$ fortemente em $L^\infty(Q)$, temos que

$$\begin{aligned}
&u_n(1-u_n-v_n)(1-2u_n-v_n+c_1\tau_n+d_1) \to u(1-u-v)(1-2u-v+c_1\tau+d_1) \quad \text{e}\\
&v_n(1-v_n-u_n)(1-2v_n-u_n+c_2\tau_n+d_2) \to v(1-v-u)(1-2v-u+c_2\tau+d_2)
\end{aligned}$$

no sentido das distribuições.

Então, tomando o limite $n \to \infty$ nas três primeiras equações de (6.1.6) obtemos que (τ, u, v, f) satisfazem as três primeiras equações de (2.0.1) no sentido das distribuições. Mas como, $(\tau, u, v, f) \in W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$, temos que (τ, u, v, f) satisfazem as três primeiras equações de (2.0.1) neste espaço.

Mostremos agora que τ, u e v satisfazem as condições iniciais e de fronteira do problema (2.0.1).

Para isso consideremos $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ tal que $\phi(x,T) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Multiplicando a primeira equação de (6.1.6) por ϕ e integrando em $\Omega \times (0,T)$ temos

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \tau_n}{\partial t}.\phi \, dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\tau_n.\phi \, dxdt = \int_0^T \int_\Omega \left(l_1 \frac{\partial u_n}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v_n}{\partial t} + f_n \right) \phi \, dxdt.$$

Usando integração por partes nas duas integrais do primeiro membro da igualdade acima, como $\tau_n = \tau_0$ para $t = 0$, $\phi(T) = 0$ e $\frac{\partial \tau_n}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega \tau_n \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dxdt - \int_\Omega \tau_0 \phi(0) dx + \int_0^T \int_\Omega \nabla\tau_n.\nabla\phi \, dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \left(l_1 \frac{\partial u_n}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v_n}{\partial t} + f_n \right) \phi \, dxdt.
\end{aligned}$$

Como $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $L^r(Q)$ e $r > 2$, temos que $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $L^2(Q)$. Como $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $W_r^{2,1}(Q)$, temos que $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $L^2(Q)$. Como $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $W_r^{2,1}(Q)$, com $r > 2$, e $\frac{\partial \tau_n}{\partial t} \to \frac{\partial \tau}{\partial t}$ no sentido das distribuições, então $\frac{\partial \tau_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \tau}{\partial t}$ fracamente em $L^2(Q)$. E como $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $W_r^{2,1}(Q)$, com $r > 2$, e $\nabla\tau_n \to \nabla\tau$ no sentido das distribuições, temos que $\nabla\tau_n \rightharpoonup \nabla\tau$ fracamente em $L^2(Q)$. De modo análogo, $\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial v_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial t}$ fracamente em $L^2(Q)$.

Logo, tomando o limite $n \to \infty$ na igualdade anterior obtemos

$$-\int_0^T \int_\Omega \tau \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dxdt - \int_\Omega \tau_0 \phi(0) dx + \int_0^T \int_\Omega \nabla\tau.\nabla\phi \, dxdt = \int_0^T \int_\Omega \left(l_1 \frac{\partial u}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v}{\partial t} + f \right) \phi \, dxdt.$$

Agora, multiplicando a primeira equação de (2.0.1) por ϕ e fazendo as mesmas integrações por partes obtemos que

$$-\int_0^T\int_\Omega \tau\frac{\partial\phi}{\partial t}\,dxdt - \int_\Omega \tau(0)\phi(0)dx + \int_0^T\int_\Omega \nabla\tau.\nabla\phi\,dxdt - \int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\tau}{\partial n}\phi\,dxdt$$
$$= \int_0^T\int_\Omega\left(l_1\frac{\partial u}{\partial t}+l_2\frac{\partial v}{\partial t}+f\right)\phi\,dxdt.$$

Comparando as duas últimas igualdades obtemos

$$\int_\Omega \tau_0\phi(0)dx = \int_\Omega \tau(0)\phi(0)dx + \int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\tau}{\partial n}\phi\,dxdt,$$

para todo $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R})$ tal que $\phi(x,T)=0$, para todo $x\in\Omega$. De onde, concluimos que $\tau_0=\tau(0)$ q.t.p em Ω e $\frac{\partial\tau}{\partial n}=0$ q.t.p. em $\partial\Omega\times(0,T)$. De modo análogo, obtemos que $u(0)=u_0$ e $v(0)=v_0$ q.t.p em Ω e $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=0$ q.t.p. em $\partial\Omega\times(0,T)$.

Logo, $(\tau,u,v,f)\in E$ e satisfaz o problema (2.0.1). Além disso, como $r=2s$ e r, $l>5/2$, temos que $\tau\in W_r^{2,1}(Q)\subset L^{2s}(Q)$, u, $v\in W_l^{2,1}(Q)\subset L^{2m}(Q)$ e $f\in L^r(Q)=L^{2s}(Q)$, de onde $J(\tau,u,v,f)<\infty$. E portanto, $(\tau,u,v,f)\in U_{ad}$.

Como $(\tau,u,v,f)\in U_{ad}$, se mostrarmos que

$$\liminf_{n\to\infty} J(\tau_n,u_n,v_n,f_n)\geq J(\tau,u,v,f)$$

concluimos que (τ,u,v,f) é uma solução ótima do problema (6.1.4). Então mostremos a desigualdade anterior.

Pela estrutura de J temos que este é contínuo na norma de $L:=L^{2k}(Q)\times L^{2m}(Q)\times L^{2m}(Q)\times L^{2s}(Q)$, de onde temos que J é semi-contínuo inferiormente na topologia da norma de L. Além disso, J é convexo, então J é semi-contínuo inferiormente na topologia fraca de L, e portanto, J é sequencialmente semi-contínuo inferiormente na topologia fraca de L. Logo,

$$(\tau_n,u_n,v_n,f_n)\rightharpoonup(\tau,u,v,f)\quad \text{fracamente em}\quad L,$$

implica que

$$\liminf_{n\to\infty} J(\tau_n,u_n,v_n,f_n)\geq J(\tau,u,v,f).$$

Como (τ_n,u_n,v_n,f_n) é uma seqüência minimizante de J obtemos que (τ,u,v,f) é uma solução ótima do problema (6.1.4).

■

Observação 6.2 *Para o funcional de custo dado por*

$$J[\tau,u,v;f] := \frac{\alpha_1}{2}\int_0^T\int_\Omega|\tau(x,t)-\tau_d(x,t)|^{2k}dxdt+\frac{\alpha_2}{2}\int_0^T\int_\Omega|u(x,t)-u_d(x,t)|^{2m_1}dxdt$$
$$+\frac{\alpha_3}{2}\int_0^T\int_\Omega|v(x,t)-v_d(x,t)|^{2m_2}dxdt+\frac{N}{2}\int_0^T\int_\Omega|f(x,t)|^{2s}dxdt \tag{6.1.7}$$

temos que se $u_d \in L^{m_1}(Q)$ *e* $v_d \in L^{m_2}(Q)$, *com* m_1, $m_2 \geq 1$ *e* $m_1 \neq m_2$, *então o lema e o teorema anteriores continuam valendo. Para demonstrar tais resultados basta repetir as demonstrações anteriores substituindo* m *por* m_1 *ou* m_2 *nos locais convenientes.*

Observação 6.3 *Resultados análogos valem para o funcional de custo dado por*

$$\begin{aligned} J[\tau, u, v; f] := \frac{\alpha_1}{2}\int_\Omega |\tau(x,T) - \tau_d(x)|^{2k} dx + \frac{\alpha_2}{2}\int_\Omega |u(x,T) - u_d(x)|^{2m_1} dx \\ + \frac{\alpha_3}{2}\int_\Omega |v(x,T) - v_d(x)|^{2m_2} dx + \frac{N}{2}\int_0^T \int_\Omega |f(x,t)|^{2s} dx dt, \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

ou seja, se $u_d \in L^{m_1}(\Omega)$ *e* $v_d \in L^{m_2}(\Omega)$, *com* m_1, $m_2 \geq 1$ *podendo ocorrer* $m_1 = m_2$ *ou* $m_1 \neq m_2$, *então o lema e o teorema anteriores continuam valendo. Também podemos demonstrar tais resultados repetindo as demonstrações anteriores, substituindo* m *por* m_1 *ou* m_2 *nos locais convenientes.*

Agora estudaremos condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (6.1.4).

6.1.2 Condição Necessária de Otimalidade

Para obtermos as condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$, com E dado por (6.0.1), seja uma solução ótima do problema (6.1.4) precisamos calcular o cone das direções de descida do funcional $J(\cdot)$, o cone das direções tangentes de Q e os cones duais.

Para isso, consideremos uma solução ótima $(\tau, u, v, f) \in E$ do problema (6.1.4).

Para o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto (τ, u, v, f) e seu dual temos o seguinte resultado.

Lema 6.2 *O cone de direções de descida associado ao funcional* $J(\cdot)$ *no ponto* $(\tau, u, v, f) \in E$ *é dado por*

$$DC(J, (\tau, u, v, f)) = \{(\theta, w, z, h) : J'(\tau, u, v, f)(\theta, w, z, h) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$\begin{gathered} [DC(J, (\tau, u, v, f))]^* \\ = \{g_0 \in E' : g_0(\theta, w, z, h) = -\lambda J'(\tau, u, v, f)(\theta, w, z, h) < 0, \text{ para algum } \lambda \geq 0\}. \end{gathered}$$

Demonstração:

Como J é um funcional convexo contínuo, então pelo Corolário 5.1, parte (i), temos que

$$DC(J,(\tau,u,v,f)) = \{(\theta,w,z,h) : J'(\tau,u,v,f)(\theta,w,z,h) < 0\}.$$

Como $J'(\tau,u,v,f) \in E^*$, $J'(\tau,u,v,f) \not\equiv 0$ e, pela parte anterior, $DC(J,(\tau,u,v,f)) = \{(\theta,w,z,h) : J'(\tau,u,v,f)(\theta,w,z,h) < 0\}$, então pelo Teorema 5.5, temos que

$$\begin{aligned}[DC(J,(\tau,u,v,f))]^* &= \{-\lambda J'(\tau,u,v,f)(\theta,w,z,h) < 0 : \lambda \geq 0\}\\ &= \{g_0 \in E' : g_0(\theta,w,z,h) = -\lambda J'(\tau,u,v,f)(\theta,w,z,h) < 0, \text{ para algum } \lambda \geq 0\}.\end{aligned}$$

■

Observação 6.4 *O funcional $J(\cdot)$ é direcionalmente diferenciável em qualquer direção. Sua derivada direcional no ponto (τ,u,v,f) e na direção (θ,w,z,h) é dada por*

$$\begin{aligned}J'(\tau,u,v,f)(\theta,w,z,h) = \alpha_1 k\int_0^T\int_\Omega(\tau-\tau_d)^{2k-1}\theta dxdt + \alpha_2 m\int_0^T\int_\Omega(u-u_d)^{2m-1}wdxdt\\ +\alpha_3 m\int_0^T\int_\Omega(v-v_d)^{2m-1}zdxdt + Ns\int_0^T\int_\Omega f^{2s-1}hdxdt.\end{aligned}$$

Falta somente calcular o cone tangente ao conjunto $Q = \{(\theta,w,z,h) \in E : M(\theta,w,z,h) = 0\}$ no ponto (τ,u,v,f) e seu dual. Mas antes precisamos do seguinte resultado:

Lema 6.3 *(i) A aplicação $M(\cdot)$ é Gâteaux-diferenciável e sua derivada de Gâteaux no ponto (τ,u,v,f) é definida por*

$$M'_G(\tau,u,v,f)(\theta,w,z,h) = (\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5,\psi_6),$$

se e somente se,

$$\left\{\begin{array}{rll} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - b\Delta\theta - l_1\dfrac{\partial w}{\partial t} - l_2\dfrac{\partial z}{\partial t} - h = \psi_1 & em & Q\\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - k_1\Delta w - \dfrac{\partial F_1}{\partial\tau}\theta - \dfrac{\partial F_1}{\partial u}w - \dfrac{\partial F_1}{\partial v}z = \psi_2 & em & Q\\ \dfrac{\partial z}{\partial t} - k_2\Delta z - \dfrac{\partial F_2}{\partial\tau}\theta - \dfrac{\partial F_2}{\partial u}w - \dfrac{\partial F_2}{\partial v}z = \psi_3 & em & Q\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n} = \dfrac{\partial w}{\partial n} = \dfrac{\partial z}{\partial n} = 0 & em & \partial\Omega\times(0,T)\\ \theta(0) = \psi_4,\ w(0) = \psi_5,\ z(0) = \psi_6 & em & \Omega, \end{array}\right. \tag{6.1.9}$$

onde $F_1(\tau,u,v) = -a_1u(1-u-v)(1-2u-v+c_1\tau+d_1)$ e $F_2 = -a_2v(1-v-u)(1-2v-u+c_2\tau+d_2)$.
(ii) A aplicação $M(\cdot)$ é estritamente diferenciável e o operador $M'(\tau,u,v,f) = M'_G(\tau,u,v,f)$ é sobrejetivo.

Demonstração:

(i) Para demonstrar que M é Gâteax-diferenciável e que sua derivada de Gâteaux M'_G é como no enunciado, precisamos mostrar que

$$\lim_{k\to 0}\left\|\frac{M(\tau+k\theta,u+kw,v+kz,f+kh)-M(\tau,u,v,f)}{k}-M'_G(\tau,u,v,f)(\theta,w,z,h)\right\|_{\tilde{E}}=0.$$

Agora, como M é dado pelo problema (6.1.5) e como (θ,w,z,h) satisfaz o problema (6.1.9) temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\left[M(\tau+k\theta,u+kw,v+kz,f+kh)-M(\tau,u,v,f)\right]\\
&=\Big(\frac{\partial\theta}{\partial t}-b\Delta\theta-l_1\frac{\partial w}{\partial t}-l_2\frac{\partial z}{\partial t}-h,\frac{\partial w}{\partial t}-k_1\Delta w-\frac{F_1(\tau+k\theta,u+kw,v+kz)-F_1(\tau,u,v)}{k},\\
&\qquad\frac{\partial z}{\partial t}-k_2\Delta z-\frac{F_2(\tau+k\theta,u+kw,v+kz)-F_2(\tau,u,v)}{k},\theta(0),w(0),z(0)\Big)\\
&\qquad=\Big(\psi_1,\frac{\partial w}{\partial t}-k_1\Delta w-\frac{F_1(\tau+k\theta,u+kw,v+kz)-F_1(\tau,u,v)}{k},\\
&\qquad\frac{\partial z}{\partial t}-k_2\Delta z-\frac{F_2(\tau+k\theta,u+kw,v+kz)-F_2(\tau,u,v)}{k},\psi_4,\psi_5,\psi_6\Big).
\end{aligned}$$

E como $-M'_G(\tau,u,v,f)(\theta,w,z,h)=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5,\psi_6)$, segue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to 0}\left\|\frac{M(\tau+k\theta,u+kw,v+kz,f+kh)-M(\tau,u,v,f)}{k}-M'_G(\tau,u,v,f)(\theta,w,z,h)\right\|_{\tilde{E}}\\
&=\lim_{k\to 0}\Big\|\Big(0,\frac{\partial w}{\partial t}-k_1\Delta w-\frac{F_1(\tau+k\theta,u+kw,v+kz)-F_1(\tau,u,v)}{k}-\psi_2,\\
&\qquad\frac{\partial z}{\partial t}-k_2\Delta z-\frac{F_2(\tau+k\theta,u+kw,v+kz)-F_2(\tau,u,v)}{k}-\psi_3,0,0,0\Big)\Big\|_{\tilde{E}}\\
&=\Big\|\Big(0,\frac{\partial w}{\partial t}-k_1\Delta w-\frac{\partial F_1}{\partial\tau}\theta-\frac{\partial F_1}{\partial u}w-\frac{\partial F_1}{\partial v}z-\psi_2,\\
&\qquad\frac{\partial z}{\partial t}-k_2\Delta z-\frac{\partial F_2}{\partial\tau}\theta-\frac{\partial F_2}{\partial u}w-\frac{\partial F_2}{\partial v}z-\psi_3,0,0,0\Big)\Big\|_{\tilde{E}}=0,
\end{aligned}$$

por (6.1.9), onde $F_1(\tau,u,v)=-a_1u(1-u-v)(1-2u-v+c_1\tau+d_1)$ e $F_2=-a_2v(1-v-u)(1-2v-u+c_2\tau+d_2)$.

Logo, M é Gâteax-diferenciável e que sua derivada de Gâteaux M'_G é dada por (6.1.9).

(ii) Como M é Gâteaux-diferenciável, pela Observação 5.3, parte (iii), para concluir que M é estritamente diferenciáve, basta mostrar que a aplicação $(\tau,u,v,f)\mapsto M'_G(\tau,u,v,f)$ é contínua. E neste caso, $M'(\tau,u,v,f)=M'_G(\tau,u,v,f)$.

Mostremos então a continuidade da aplicação acima.

Para cada $(\theta,w,z,h)\in E$ temos que

$$\begin{aligned}
&\|M'_G(\tau_1,u_1,v_1,f_1)(\theta,w,z,h)-M'_G(\tau_2,u_2,v_2,f_2)(\theta,w,z,h)\|_{\tilde{E}}\\
&=\|(0,F'_1(\tau_2,u_2,v_2)(\theta,w,z,h)-F'_1(\tau_1,u_1,v_1)(\theta,w,z,h),\\
&\quad F'_2(\tau_2,u_2,v_2)(\theta,w,z,h)-F'_2(\tau_1,u_1,v_1)(\theta,w,z,h),0,0,0)\|_{\tilde{E}}\\
&\le\|F'_1(\tau_2,u_2,v_2,f_2)-F'_1(\tau_1,u_1,v_1)\|_E\,.\|(\theta,w,z,h)\|_E\\
&\quad\|F'_2(\tau_2,u_2,v_2)-F'_2(\tau_1,u_1,v_1)\|_E\,.\|(\theta,w,z,h)\|_E\\
&\le C\|(\theta,w,z,h)\|_E.\left[\|\tau_1-\tau_2\|_{W^{2,1}_r(Q)}+\|u_1-u_2\|_{W^{2,1}_r(Q)}+\|v_1-v_2\|_{W^{2,1}_r(Q)}+\|f_1-f_2\|_{L^r(Q)}\right],
\end{aligned}$$

por (6.1.9) e porque $W_r^{2,1}(Q)$, $W_l^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$, já que r, $l > 5/2$. Na última desigualdade C depende de (τ_1, u_1, v_1, f_1) e (τ_2, u_2, v_2, f_2), $F_1(\tau, u, v) = -a_1 u(1 - u - v)(1 - 2u - v + c_1\tau + d_1)$ e $F_2 = -a_2 v(1 - v - u)(1 - 2v - u + c_2\tau + d_2)$.

Logo, a aplicação $(\tau, u, v, f) \mapsto M'_G(\tau, u, v, f)$ é contínua em (τ, u, v, f). Mas como $(\tau, u, v, f) \in E$ é arbitrário, temos que esta aplicação é contínua. E portanto, M é estritamente diferenciável.

Finalmente, procedendo como nas demonstrações da Proposição 2.1, isto é, aplicando o Teorema de Leray-Schauder, e dos Teoremas 2.2 e 2.3, obtemos que para todo $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6) \in \widetilde{E}$, o problema (6.1.9) possui solução única em E, pois $l \geq r$ e $r > 5/2$. Logo $M'(\tau, u, v, f)$ é sobrejetivo.

∎

Vamos finalmente calcular o cone tangente ao conjunto $\mathcal{Q}$ no ponto (τ, u, v, f).

Lema 6.4 *O cone tangente ao conjunto $\mathcal{Q}$ no ponto (τ, u, v, f) é o subespaço vetorial*

$$TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, f)) = \{(\theta, w, z, h) \in E : M'(\tau, u, v, f)(\theta, w, z, h) = 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, f))]^* =$$
$$\{g_1 \in E^* : g_1(\theta, w, z, h) = 0 \text{ para todo } (\theta, w, z, h) \in TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, f))\}.$$

Demonstração:

Pelo lema anterior temos que M é estritamente diferenciável em (τ, u, v, f) e $M'(\tau, u, v, f) : E \to E$ é uma aplicação sobrejetora. Então, pelo Teorema de Lyusternik, isto é, Teorema 5.3, o conjunto

$$\mathcal{Q} = \{(\theta, w, z, h) \in E : M(\theta, w, z, h) = 0\}$$

tem no ponto (τ, u, v, f) um espaço tangente dado por

$$TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, f)) = \ker M'(\tau, u, v, f) = \{(\theta, w, z, h) \in E : M'(\tau, u, v, f)(\theta, w, z, h) = 0\}.$$

Observemos agora que o cone $TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, f))$ é um subespaço vetorial do espaço E, pois $M'(\tau, u, v, f)$ é um operador linear já que o sistema 6.1.9 é linear em (θ, w, z, h). Então, pelo Teorema 5.4,

$$[TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, f))]^* = \{g_1 \in E^* : g_1(\theta, w, z, h) = 0, \ \forall (\theta, w, z, h) \in E\}.$$

∎

Vejamos agora um resultado sobre condição necessária de otimalidade para o problema de otimização (6.1.4).

Teorema 6.2 *Seja $(\tau, u, v, f) \in E = W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$ uma solução ótima do problema (6.1.4), com r e l satisfazendo (6.0.2). Se $r \geq 2s$, então existem funções $(\theta, p, q) \in W_{2s}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q)$ satisfazendo o sistema adjunto*

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \theta}{\partial t} - b\Delta\theta &= \frac{\partial F_1}{\partial \tau}p + \frac{\partial F_2}{\partial \tau}q + \alpha_1 k(\tau - \tau_d)^{2k-1} && \text{em } Q\\
-\frac{\partial p}{\partial t} - k_1\Delta p &= -l_1\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial u}p + \frac{\partial F_2}{\partial u}q + \alpha_2 m(u - u_d)^{2m-1} && \text{em } Q\\
-\frac{\partial q}{\partial t} - k_2\Delta q &= -l_2\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial v}p + \frac{\partial F_2}{\partial v}q + \alpha_3 m(v - v_d)^{2m-1} && \text{em } Q\\
\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{\partial q}{\partial n} = 0 && \text{em } \partial\Omega \times (0,T)\\
\theta = p &= q = 0 && \text{em } \Omega \times \{t = T\},
\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

onde $F_1(\tau, u, v) = -a_1 u(1 - u - v)(1 - 2u - v + c_1\tau + d_1)$ e $F_2 = -a_2 v(1 - v - u)(1 - 2v - u + c_2\tau + d_2)$, como no problema (6.1.9), e o controle é dado por

$$f = -\left(\frac{|\theta|}{sN}\right)^{\frac{1}{2s-1}} sgn\theta, \quad q.t.p. \text{ em } t \in [0, T].$$

Observação 6.5 *Antes de demonstrarmos o teorema acima observemos que, procedendo como nas demonstrações da Proposição 2.1, isto é, aplicando o Teorema de Leray-Schauder, e dos Teoremas 2.2 e 2.3 para o problema (6.1.10), temos que se $\tau_d \in L^{4k-2}(Q)$ e $u_d, v_d \in L^{4m-2}(Q)$, então o problema (6.1.10) possui solução única $(\theta, p, q) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$. Se além disso, $\tau_d \in L^{k'}(Q)$ e $u_d, v_d \in L^{m'}(Q)$, com $k' > 4k-2$ e $m' > 4m-2$, então por argumentos do tipo bootstrapping mostra-se que o problema (6.1.10) possui solução (θ, p, q) com maior regularidade, que depende também da regularidade dos dados iniciais.*

Demonstração:

Primeiramente, observemos que:

- Como J é um funcional convexo contínuo, então pelo Corolário 5.1, parte (i), J é regularmente de descida em (τ, u, v, f) e tem direções de descida $DC(J, (\tau, u, v, f))$ dadas pelo Lema 6.2;
- $\mathcal{Q}$ tem direções tangentes $TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, f))$ dadas pelo Lema 6.4. Como $TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, f))$ é convexo (pois é um subespaço vetorial de E^*), $\mathcal{Q}$ é regular em (τ, u, v, f).

Como $J(\cdot)$ assume um mínimo local no ponto $(\tau, u, v, f) \in \mathcal{Q}$ com direções de descida $DC(J, (\tau, u, v, f))$ e $\mathcal{Q}$ é regular em (τ, u, v, f) com direções tangentes $TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, f))$. Então, segue do Teorema de Dubovitskii e Milyutin (Teorema 5.1) que existem formas lineares contínuas $g_0 \in [DC(J, (\tau, u, v, f))]^*$ e $g_1 \in [TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, f))]^*$, não simultaneamente nulas, tais que,

$$g_0 + g_1 = 0. \tag{6.1.11}$$

Seja $h \in L^r(Q)$ um controle arbitrário e seja $(\varphi, w, z, h) \in E$ solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - b\Delta\varphi = l_1\dfrac{\partial w}{\partial t} + l_2\dfrac{\partial z}{\partial t} + h & \text{em} & Q \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - k_1\Delta w = \dfrac{\partial F_1}{\partial \tau}\varphi + \dfrac{\partial F_1}{\partial u}w + \dfrac{\partial F_1}{\partial v}z & \text{em} & Q \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} - k_2\Delta z = \dfrac{\partial F_2}{\partial \tau}\varphi + \dfrac{\partial F_2}{\partial u}w + \dfrac{\partial F_2}{\partial v}z & \text{em} & Q \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \dfrac{\partial w}{\partial n} = \dfrac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{em} & \partial\Omega \times (0,T) \\ \varphi(0) = w(0) = z(0) = 0 & \text{em} & \Omega, \end{array}\right. \tag{6.1.12}$$

onde $F_1(\tau, u, v) = -a_1u(1-u-v)(1-2u-v+c_1\tau+d_1)$ e $F_2 = -a_2v(1-v-u)(1-2v-u+c_2\tau+d_2)$, como no problema (6.1.9).

Neste caso, temos que $M'(\tau, u, v, f)(\varphi, w, z, h) = 0$, e portanto, $(\varphi, w, z, h) \in TC(Q, (\tau, u, v, f))$. Logo, $g_1(\varphi, w, z, h) = 0$, e portanto, $g_0(\varphi, w, z, h) = 0$.

Como $g_0 \in [DC(J, (\tau, u, v, f))]^*$, pelo Lema 6.2, existe $\lambda \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} g_0(\varphi, w, z, h) &= -\lambda J'(\tau, u, v, f)(\varphi, w, z, h) \\ = -\lambda\alpha_1 k \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2k-1}\varphi dxdt &- \lambda\alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u-u_d)^{2m-1} w dxdt \\ -\lambda\alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v-v_d)^{2m-1} z dxdt &- \lambda N s \int_0^T \int_\Omega f^{2s-1} h dxdt = 0. \end{aligned}$$

Observemos que $\lambda \neq 0$. Pois, caso contrário, temos que $g_0 \equiv 0$, e pela igualdade (6.1.11), temos também que $g_1 \equiv 0$. O que contradiz o Teorema de Dubovitskii e Milyutin. Então, multiplicando a igualdade anterior por $1/\lambda$ obtemos

$$\begin{aligned} -\alpha_1 k \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2k-1}\varphi dxdt &- \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u-u_d)^{2m-1} w dxdt \\ -\alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v-v_d)^{2m-1} z dxdt &- N s \int_0^T \int_\Omega f^{2s-1} h dxdt = 0. \end{aligned} \tag{6.1.13}$$

Encontremos agora o controle ótimo f.

Seja (θ, p, q) uma solução do problema adjunto (6.1.10), que possui solução única pela Observação 6.5. E seja (φ, w, z, h) solução do problema (6.1.12). Multiplicando a primeira equação do problema (6.1.10) por φ, a segunda por w, a terceira por z, integrando cada uma delas em $\Omega \times (0,T)$ e somando-as obtemos

$$\begin{aligned} -\alpha_1 k \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2k-1}\varphi dxdt &- \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u-u_d)^{2m-1} w dxdt \\ &-\alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v-v_d)^{2m-1} z dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + b\Delta\theta + \frac{\partial F_1}{\partial \tau}p + \frac{\partial F_2}{\partial \tau}q \right) \varphi dxdt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial t} + k_1\Delta p - l_1\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial u}p + \frac{\partial F_2}{\partial u}q \right) w dxdt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial q}{\partial t} + k_2\Delta q - l_2\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial v}p + \frac{\partial F_2}{\partial v}q \right) z dxdt. \end{aligned}$$

Integrando o segundo membro da igualdade acima por partes e observando que $\frac{\partial\theta}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial q}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$ em $\partial\Omega$, $\theta(T) = p(T) = q(T) = 0$ e $\varphi(0) = z(0) = w(0) = 0$ em Ω, temos

$$\begin{aligned}
-\alpha_1 k \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2k-1}\varphi dxdt - \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u - u_d)^{2m-1} w dxdt \\
-\alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v - v_d)^{2m-1} z dxdt \\
= \int_0^T \int_\Omega \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + b\Delta\varphi + l_1 \frac{\partial w}{\partial t} + l_2 \frac{\partial z}{\partial t} \right) \theta dxdt \\
+ \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial F_1}{\partial\tau}\varphi - \frac{\partial w}{\partial t} + k_1\Delta w + \frac{\partial F_1}{\partial u} w + \frac{\partial F_1}{\partial v} z \right) p \; dxdt \\
+ \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial\tau}\varphi - \frac{\partial z}{\partial t} + k_2\Delta z + \frac{\partial F_2}{\partial u} w + \frac{\partial F_2}{\partial v} z \right) q \; dxdt = -\int_0^T \int_\Omega h\theta \; dxdt,
\end{aligned}$$

pois (φ, w, z, h) é solução do problema (6.1.12).

Agora, usando a igualdade (6.1.13) no primeiro membro da igualdade acima obtemos

$$Ns \int_0^T \int_\Omega f^{2s-1} h dxdt = -\int_0^T \int_\Omega h\theta \; dxdt.$$

Como $h \in L^{2s}(Q)$ é arbitrário, temos que $Nsf^{2s-1} = -\theta$ q.t.p. em Q. E portanto,

$$f = -\left(\frac{|\theta|}{Ns}\right)^{\frac{1}{2s-1}} sgn\theta, \quad \text{q.t.p. em } Q.$$

■

Observação 6.6 *Procedendo como nas demonstrações da Proposição 2.1, isto é, aplicando o Teorema de Leray-Schauder, e dos Teoremas 2.2 e 2.3 para o sistema (6.1.12) obtemos que para todo $h \in L^r(Q)$, o problema (6.1.12) possui solução única $(\theta, w, z) \in W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q)$, e portanto, $(\theta, w, z, h) \in E$ satisfaz (6.1.12).*

Observação 6.7 *Do mesmo modo como foi demonstrado o teorema anterior mostra-se que para o funcional de custo dado por (6.1.7), na Observação 6.2, as condições de otimalidade são: Se $(\tau, u, v, f) \in U_{ad}$ é uma solução ótima para o problema funcional de custo dado por (6.1.7), então existem (θ, p, q) satisfazendo o problema*

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial\theta}{\partial t} - b\Delta\theta &= \frac{\partial F_1}{\partial\tau} p + \frac{\partial F_2}{\partial\tau} q + k\alpha_1(\tau - \tau_d)^{2k-1} \quad em \quad Q \\
-\frac{\partial p}{\partial t} - k_1\Delta p &= -l_1 \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial u} p + \frac{\partial F_2}{\partial u} q + m_1\alpha_2(u - u_d)^{2m_1-1} \quad em \quad Q \\
-\frac{\partial q}{\partial t} - k_2\Delta q &= -l_2 \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial v} p + \frac{\partial F_2}{\partial v} q + m_2\alpha_3(v - v_d)^{2m_2-1} \quad em \quad Q \\
\frac{\partial\theta}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{\partial q}{\partial n} = 0 \quad em \quad \partial\Omega \times (0, T) \\
\theta = 0, \quad p &= 0 \quad e \quad q = 0 \quad em \quad \Omega \times \{t = T\},
\end{aligned}$$

onde $F_1(\tau, u, v) = -a_1 u(1 - u - v)(1 - 2u - v + c_1\tau + d_1)$ e $F_2 = -a_2 v(1 - v - u)(1 - 2v - u + c_2\tau + d_2)$, como no problema (6.1.9), e o controle é dado por

$$f = -\left(\frac{|\theta|}{sN}\right)^{\frac{1}{2s-1}} sgn\theta, \quad q.t.p. \; em \; t \in [0, T].$$

Observação 6.8 *Também de modo análogo, mostra-se que para o funcional de custo dado por (6.1.8), na Observação 6.3, as condições de otimalidade são: Se* $(\tau, u, v, f) \in U_{ad}$ *é uma solução ótima para o problema funcional de custo dado por (6.1.8), então existem* (θ, p, q) *satisfazendo o problema*

$$
\begin{array}{rll}
-\dfrac{\partial \theta}{\partial t} - b\Delta\theta = \dfrac{\partial F_1}{\partial \tau}p + \dfrac{\partial F_2}{\partial \tau}q & em & Q \\
-\dfrac{\partial p}{\partial t} - k_1\Delta p = -l_1\dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \dfrac{\partial F_1}{\partial u}p + \dfrac{\partial F_2}{\partial u}q & em & Q \\
-\dfrac{\partial q}{\partial t} - k_2\Delta q = -l_2\dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \dfrac{\partial F_1}{\partial v}p + \dfrac{\partial F_2}{\partial v}q & em & Q \\
\dfrac{\partial \theta}{\partial n} = \dfrac{\partial p}{\partial n} = \dfrac{\partial q}{\partial n} = 0 \quad em \quad \partial\Omega \times (0,T) & & \\
\theta(T) = k\alpha_1(\tau - \tau_d)^{2k-1} & em & \Omega \\
p(T) = m_1\alpha_2(u - u_d)^{2m_1-1} + kl_1\alpha_1(\tau - \tau_d)^{2k-1} & em & \Omega \\
q(T) = m_2\alpha_3(v - v_d)^{2m_2-1} + kl_2\alpha_1(\tau - \tau_d)^{2k-1} & em & \Omega,
\end{array}
$$

onde $F_1(\tau, u, v) = -a_1u(1-u-v)(1-2u-v+c_1\tau+d_1)$ *e* $F_2 = -a_2v(1-v-u)(1-2v-u+c_2\tau+d_2)$*, como no problema (6.1.9), e o controle é dado por*

$$
f = -\left(\frac{|\theta|}{sN}\right)^{\frac{1}{2s-1}} sgn\theta, \qquad q.t.p. \ em \ t \in [0,T].
$$

6.2 Um Problema com Restrição sobre o Controle

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$
\min_{(\tau,u,v,f)\in \mathcal{Q}} J(\tau, u, v, f), \tag{6.2.14}
$$

onde o funcional J é dado por (6.0.3) e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, sendo $\mathcal{Q}_1$ dado pela restrição de desigualdade

$$
\mathcal{Q}_1 = \{(\tau, u, v, f) \in E : \|f\|_{L_{2s}(Q)} \leq C_1\},
$$

e $\mathcal{Q}_2$ dado pela restrição de igualdade

$$
\mathcal{Q}_2 = \{(\tau, u, v, f) \in E : M(\tau, u, v, f) = 0\},
$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido, como na seção anterior, por $M(\tau, u, v, f) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$ se, e somente se, (τ, u, v, f) é solução do sistema (6.1.5) com não-homogeneidade $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$. Lembremos que $M(\tau, u, v, f) = 0$ se, e somente se, (τ, u, v, f) é solução do problema (2.0.1).

Antes de demonstrarmos a existência de controle ótimo para este problema, mostremos que o conjunto admissível, U_{ad}, é não vazio.

Lema 6.5 *Suponha que* b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 *e* d_2 *são constantes com* b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, *e* $\tau_0 \in W^2_{\tilde{r}}(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W^2_{\tilde{l}}(\Omega)$, *com* $\tilde{r}$ *e* $\tilde{l}$ *satisfazendo (6.0.2), são tais que* $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ *e* $0 \leq u_0, v_0 \leq 1$. *Além disso, suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *é um domínio aberto, limitado e de classe* C^2. *Se* $r \geq 2s$, *então* $U_{ad} \neq \emptyset$.

Demonstração:

Seja $f \in L^r(Q) \subset L^{2s}(Q)$, pois $r \geq 2s$, tal que $\|f\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1$. Como $l \geq r$ por (6.0.2), então pelo Teorema 2.1, Corolário 2.3 e Teorema 2.3, existe um único $(\tau, u, v) \in W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q)$ solução do problema (2.0.1). Logo, $(\tau, u, v, f) \in E$, com E dado por (6.0.1), e $M(\tau, u, v, f) = 0$.

Além disso, como r, $l > 5/2$ temos, que $W_r^{2,1}(Q) \subset L^{2k}(Q)$ e $W_l^{2,1}(Q) \subset L^{2m}(Q)$ com inclusão contínua. Logo, temos que $(\tau, u, v) \in L^{2k}(Q) \times L^{2m}(Q) \times L^{2m}(Q)$. Assim, $J(\tau, u, v, f) < \infty$, e portanto, $(\tau, u, v, f) \in U_{ad}$.

■

Agora mostremos a existência de uma solução ótima do problema (6.2.14).

6.2.1 Existência de Solução Ótima

Teorema 6.3 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W_{\widetilde{r}}^2(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W_{\widetilde{l}}^2(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (6.0.2), são tais que $\frac{\partial \tau_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0$, $u_0, v_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 \leq 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2k}(Q)$ e u_d, $v_d \in L^{2m}(Q)$, com k, $m \geq 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (6.2.14) possui uma solução ótima.*

Demonstração:

Primeiramente observemos que, como $r = 2s$, temos que $U_{ad} \neq \emptyset$, pelo Lema 6.5.

Depois, basta repetir a demonstração do Teorema 6.1, observando que se $\{(\tau_n, u_n, v_n, f_n)\} \subset U_{ad}$ é a subseqüência convergente a (τ, u, v, f) da seqüência minimizante do funcional J dada na demonstração citada anteriormente, tem-se que $\|f_n\|_{L^r(Q)} = \|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $L^r(Q)$. Agora, como $f_n \rightharpoonup f$ em $L^{2s}(Q)$ e $\|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $\|f\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$. Logo, $(\tau, u, v, f) \in U_{ad}$ para o problema (6.2.14).

Procedendo como na mesma demonstração, tem-se que (τ, u, v, f) é uma solução ótima do problema (6.2.14).

■

Na próxima seção estudaremos condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (6.2.14).

6.2.2 Condição Necessária de Otimalidade

Para obtermos as condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (6.2.14) precisamos calcular o cone das direções de descida do funcional $J(\cdot)$, o cone das direções factíveis de Q_1, o cone das direções tangentes de Q_2 e os cones duais.

Para isso, consideremos uma solução ótima $(\tau, u, v, f) \in E$ do problema (6.2.14).

Lembremos que o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ e seu dual são dados pelo Lema 6.2. E o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ, u, v, f) e seu dual são dados pelo Lema 6.4.

Vamos agora calcular o cone das direções factíveis associado a restrição de desigualdade Q_1 e seu dual. Observemos que podemos utilizar a Proposição 5.3 e o Teorema 5.6 para tais cálculos, pois Q_1 pode ser escrito como $Q_1 = \{(\tau, u, v, f) \in E : F \leq 0\}$, onde F é o funcional dado por $F = \|f\|_{L^{2s}(Q)} - C_1$.

Lema 6.6 *O cone de direções factíveis de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ é dado por*

$$\begin{aligned}&FC(Q_1, (\tau, u, v, f))\\ &= \{\lambda(\theta - \tau, w - u, z - v, h - f) : \lambda > 0 \text{ e } (\theta, w, z, h) \in E \text{ tal que } \|h\|_{L^{2s}(Q)} < C_1\} \neq \emptyset\end{aligned}$$

e seu cone dual é dado por

$$\begin{aligned}&[FC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^*\\ &= \{G_1 \in L^{r'}(Q) : \textstyle\int_Q G_1 h \, dxdt \geq \int_Q G_1 f \, dxdt, \ \forall \ h \in L^r(Q) \text{ tal que } \|h\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1\},\end{aligned}$$

onde r' é tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Demonstração:

Vamos dividir a demonstração em quatro partes:

i) Mostremos que $FC(Q_1, (\tau, u, v, f)) = \{\lambda(\theta - \tau, w - u, z - v, h - f) : \lambda > 0 \text{ e } (\theta, w, z, h) \in intQ_1\}$.

Primeiramente mostremos que Q_1 é convexo.

Para isso consideremos $x = (\tau, u, v, f)$, $y = (\theta, w, z, h) \in Q_1$ e $\alpha \in [0, 1]$ e mostremos que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in Q_1$. Como x, $y \in E$, temos que

$$\alpha x + (1 - \alpha)y = (\alpha\tau + (1 - \alpha)\theta, \alpha u + (1 - \alpha)w, \alpha v + (1 - \alpha)z, \alpha f + (1 - \alpha)h) \in E.$$

Além disso, como x, $y \in Q_1$, temos que $\|f\|_{L^{2s}(Q)}, \|h\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1$, e portanto, $\|\alpha f + (1 - \alpha)h\|_{L^{2s}(Q)} \leq \alpha\|f\|_{L^{2s}(Q)} + (1 - \alpha)\|h\|_{L^{2s}(Q)} \leq \alpha C_1 + (1 - \alpha)C_1 = C_1$. Logo, $\alpha x + (1 - \alpha)y \in Q_1$. De onde concluimos que Q_1 é convexo.

Então, pela Proposição 5.3, temos que o cone de direções factíveis de Q_1 é dado por

$$\begin{aligned}FC &= \{\lambda(intQ_1 - (\tau, u, v, f)) : \lambda > 0\}\\ &= \{\lambda(\theta - \tau, w - u, z - v, h - f) : \lambda > 0 \text{ e } (\theta, w, z, h) \in intQ_1\}.\end{aligned}$$

ii) Agora mostremos que $intQ_1 = \{(\theta, w, z, h) \in E : \|h\|_{L^{2s}(Q)} < C_1\}$. De onde, concluimos que $FC(Q_1, (\tau, u, v, f))$ é da forma apresentada no enunciado e $FC(Q_1, (\tau, u, v, f)) \neq \emptyset$.

Consideremos $(\theta_0, w_0, z_0, h_0) \in Q_1$ tal que $\|h_0\|_{L^{2s}(Q)} < C_1$ e tomemos $\delta := C_1 - \|h_0\|_{L^{2s}(Q)} > 0$. Para todo $(\theta, w, z, h) \in E$ tal que $\|h - h_0\|_{L^{2s}(Q)} \leq \delta$, temos que

$$\|h\|_{L^{2s}(Q)} \leq \|h - h_0\|_{L^{2s}(Q)} + \|h_0\|_{L^{2s}(Q)} \leq \delta + \|h_0\|_{L^{2s}(Q)} = C_1 - \|h_0\|_{L^{2s}(Q)} + \|h_0\|_{L^{2s}(Q)} = C_1.$$

Mas existe uma constante $C > 0$ tal que $\|\tilde{h}\|_{L^{2s}(Q)} \leq C\|(\tilde{\theta}, \tilde{w}, \tilde{z}, \tilde{h})\|_E$, para todo $(\tilde{\theta}, \tilde{w}, \tilde{z}, \tilde{h}) \in E$. Então, para todo $(\theta, w, z, h) \in B_{\delta/C}(\theta_0, w_0, z_0, h_0) \subset E$, $\|h\|_{L^{2s}(Q} \leq C_1$, e portanto, $(\theta, w, z, h) \in Q_1$. Logo, $B_{\delta/C}(\theta_0, w_0, z_0, h_0) \subset Q_1$.

Assim, $\{(\theta, w, z, h) \in E : \|h\|_{L^{2s}(Q)} < C_1\} \subset intQ_1$ e $intQ_1 \neq \emptyset$. Além disso, pela parte (i) da demonstração temos que $FC(Q_1, (\tau, u, v, f)) \neq \emptyset$.

Agora, suponha que $intQ_1 \not\subset \{(\theta, w, z, h) \in E : \|h\|_{L^{2s}(Q)} < C_1\}$.

Então, existe $(\theta, w, z, h) \in E$ com $\|h\|_{L^{2s}(Q)} = C_1$ tal que $(\theta, w, z, h) \in intQ_1$. Assim, existe $R > 0$ tal que $B_R(\theta, w, z, h) \subset Q_1$.

Consideremos agora $h' = hR/2C_1C \in L^{2s}(Q)$ com C dado acima. E tomemos $(\theta, w, z, h + h') \in E$, então

$$\|(\theta, w, z, h) - (\theta, w, z, h + h')\|_E = \|(0, 0, 0, h')\|_E \leq C\|h'\|_{L^{2s}(Q)} = C\frac{R}{2C_1C}\|h\|_{L^{2s}(Q)} = \frac{R}{2}.$$

Assim, $(\theta, w, z, h + h') \in B_R(\theta, w, z, h)$. Mas $(\theta, w, z, h + h') \notin Q_1$, pois $\|h + h'\|_{L^{2s}(Q)} = \left(1 + \frac{R}{2C_1C}\right)\|h\|_{L^{2s}(Q)} = C_1 + \frac{R}{2C} > C_1$. O que é uma contradição.

Portanto, $intQ_1 \subset \{(\theta, w, z, h) \in E : \|h\|_{L^{2s}(Q)} < C_1\}$. O que completa esta parte da demonstração.

iii) Vamos agora mostrar que $[FC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^* = \{g_1 \in E' : g_1(\theta, w, z, h) \geq g_1(\tau, u, v, f), \forall\, (\theta, w, z, h) \in Q_1\}$.

Como Q_1 é convexo e $intQ_1 \neq \emptyset$, se mostrarmos que Q_1 é fechado, pelo Teorema 5.6 teremos o resultado desejado.

Para isso consideremos uma seqüência $\{x_n = (\tau_n, u_n, v_n, f_n)\} \subset Q_1$ tal que $x_n \to x = (\overline{\tau}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{f})$ em E. Precisamos mostrar que $x \in Q_1$ para concluir que Q_1 é fechado em E. Como $x \in E$ basta mostrar que $\|\overline{f}\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1$.

Da convergência anterior, temos que $f_n \to \overline{f}$ em $L^r(Q)$. Então se $r \geq 2s$, temos que $f_n \to \overline{f}$ em $L^{2s}(Q)$. E portanto, $\|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, implica que $\|\overline{f}\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1$.

Vejamos agora o caso, $r < 2s$. Como $\|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que existe uma subseqüência f_{n_k} que converge fracamente em $L^{2s}(Q)$ para uma função $\tilde{f}$. Além disso, $\|\tilde{f}\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1$. Agora, como $r < 2s$ temos que $f_{n_k} \rightharpoonup \tilde{f}$ em $L^r(Q)$. Então pela unicidade do limite em $L^r(Q)$, temos que $\tilde{f} = \overline{f}$. Portanto, $\|\overline{f}\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1$.

Logo, $x \in Q_1$, e portanto, Q_1 é fechado.

iv) Finalmente, vamos mostrar que $[FC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^* = \{G_1 \in L^{r'}(Q) : \int_Q G_1 h\, dxdt \geq \int_Q G_1 f\, dxdt$, $\forall\, h \in L^r(Q)$ *tal que* $\|h\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1\}$.

Primeiramente mostremos que $g_1 \in [FC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^*$ encontrado na parte anterior só depende da última componente, isto é, $g_1(\tau, u, v, f) = g_1(f)$ para todo $(\tau, u, v, f) \in E$.

Seja $g_1 \in FC(Q_1, (\tau, u, v, f))$, pela parte anterior temos que

$$g_1(\varphi, w, z, h) \geq g_1(\tau, u, v, f), \quad \text{para todo } (\varphi, w, z, h) \in Q_1.$$

Tomemos $(\varphi, w, z, h) \in \mathcal{Q}_1$ arbitrário. Então $(-\varphi, -w, -z, -h) \in \mathcal{Q}_1$, pois $\|\varphi\|_{L^{2s}(Q)} = \|-\varphi\|_{L^{2s}(Q)}$, para todo $\varphi \in L^{2s}(Q)$. Logo, $g_1(-\varphi, -w, -z, -h) \geq g_1(\tau, u, v, f)$. De onde, como g_1 é linear, obtemos que

$$g_1(\varphi, w, z, h) \leq -g_1(\tau, u, v, f),$$

e portanto,

$$\mathcal{C}_1 := g_1(\tau, u, v, f) \leq g_1(\varphi, w, z, h) \leq \mathcal{C}_2 := -g_1(\tau, u, v, f),$$

para todo $(\varphi, w, z, h) \in \mathcal{Q}_1$.

Agora, como $g_1 \in E'$, podemos escrevê-la como

$$g_1(\varphi, w, z, h) = \psi_1(\varphi) + \psi_2(w) + \psi_3(z) + \psi_4(h),$$

com $\psi_1 \in (W_r^{2,1}(Q))'$, $\psi_2 \in \left(W_l^{2,1}(Q)\right)'$, $\psi_3 \in \left(W_l^{2,1}(Q)\right)'$ e $\psi_4 \in (L^r(Q))'$.

Tomemos agora $w, z \in W_l^{2,1}(Q)$, $h \in L^r(Q)$ com $\|h\|_{L^{2s}(Q)}$ e $\varphi \in W_r^{2,1}(Q)$. Então, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $(k\varphi, kw, kz, h) \in \mathcal{Q}_1$, e assim $\mathcal{C}_1 \leq g_1(k\varphi, kw, kz, h) \leq \mathcal{C}_2$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, de onde,

$$\mathcal{C}_1 \leq k\psi_1(\varphi) + k\psi_2(w) + k\psi_3(z) + \psi_4(h) \leq \mathcal{C}_2, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 \equiv 0$. Então $g_1(\varphi, w, z, h) = g_1(h) = \psi_4(h)$, com $\psi_4 \in (L^r(Q))'$.

De onde, pelo item anterior, obtemos que $[FC(\mathcal{Q}_1, (\tau, u, v, f))]^* = \{g_1 \in (L^r(Q)) : g_1(h) \geq g_1(f), \; \forall\, h \in L^r(Q) \; \textit{tal que} \; \|h\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1\}$.

Finalmente, mostremos que $[FC(\mathcal{Q}_1, (\tau, u, v, f))]^* = \{G_1 \in L^{r'}(Q) : \int_Q G_1 h \; dxdt \geq \int_Q G_1 f \; dxdt, \; \forall\, h \in L^r(Q) \; \textit{tal que} \; \|h\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1\}$, com r' tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Para isso basta observar que $(L^r(Q))' \cong L^{r'}(Q)$. De fato, pela caracterização acima $g_1 \in [FC(\mathcal{Q}_1, (\tau, u, v, f))]^*$ se, e somente se, existe $G_1 \in L^{r'}(Q)$ tal que $\int_Q G_1 h \; dxdt \geq \int_Q G_1 f \; dxdt$, para todo $h \in L^r(Q)$ tal que $\|h\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1$.

■

Vejamos agora um resultado sobre condição necessária de otimalidade para o problema de otimização (6.2.14).

Teorema 6.4 *Seja* $(\tau, u, v, f) \in E = W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$ *é uma solução ótima do problema (6.2.14), onde* r *e* l *satisfazem (6.0.2). Se* $r \geq 2s$*, então existem funções* $(\theta, p, q) \in W_{2s}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q)$ *que satisfaz o sistema adjunto (6.1.10). Além disso, existe* $G_1 \in [FC(\mathcal{Q}_1, (\tau, u, v, f))]^* = \{G_1 \in L^{r'}(Q) : \int_Q G_1 h \; dxdt \geq \int_Q G_1 f \; dxdt, \; \forall\, h \in L^r(Q) \; tal \; que \; \|h\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1\}$ *tal que*

$$\int_0^T \int_\Omega \left(Nsf^{2s-1} + \theta\right) h \; dxdt = \int_0^T \int_\Omega G_1 h \; dxdt,$$

para todo $h \in L^r(Q)$.

Demonstração:

Primeiramente, observemos que:

- Como J é um funcional convexo contínuo, então pelo Corolário 5.1, parte (i), J é regularmente de descida em (τ, u, v, f) e tem direções de descida $DC(J, (\tau, u, v, f))$ dadas pelo Lema 6.2 ;
- Q_1 tem direções factíveis $FC(Q_1, (\tau, u, v, f))$ dadas pelo Lema 6.6. E como $FC(Q_1, (\tau, u, v, f))$ é convexo (é fácil verificar pela própria caracterização de Q_1), Q_1 é regular em (τ, u, v, f);
- Q_2 tem direções tangentes $TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$ dadas pelo Lema 6.4 . Como $TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$ é convexo (pois é um subespaço vetorial de E'), Q_2 é regular em (τ, u, v, f).

Como $J(\cdot)$ assume um mínimo local no ponto $(\tau, u, v, f) \in Q = Q_1 \cap Q_2$, J tem direções de descida $DC(J, (\tau, u, v, f))$, Q_1 é regular em (τ, u, v, f), com direções factíveis $FC(Q_1, (\tau, u, v, f))$ e Q_2 é regular em (τ, u, v, f), com direções tangentes $TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$. Então, segue do Teorema 5.1, isto é, Teorema de Dubovitskii e Milyutin, que existem formas lineares contínuas $g_0 \in [DC(J, (\tau, u, v, f))]^*$, $g_1 \in [FC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^*$ e $g_2 \in [TC(Q_2, (\tau, u, v, f))]^*$, não simultaneamente nulas, tais que,

$$g_0 + g_1 + g_2 = 0. \tag{6.2.15}$$

Seja $h \in L^r(Q)$ um controle arbitrário e seja $(\varphi, w, z, h) \in E$ solução do sistema (6.1.12). Neste caso, temos que $M'(\tau, u, v, f)(\varphi, w, z, h) = 0$, e portanto, $(\varphi, w, z, h) \in TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$. Logo, $g_2(\varphi, w, z, h) = 0$.

Como $g_0 \in [DC(J, (\tau, u, v, f))]^*$, pelo Lema 6.2, existe $\lambda \geq 0$ tal que

$$\begin{gathered} g_0(\varphi, w, z, h) = -\lambda J'(\tau, u, v, f)(\varphi, w, z, h) \\ = -\lambda \alpha_1 k \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2k-1} \varphi dx dt - \lambda \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u - u_d)^{2m-1} w dx dt \\ -\lambda \alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v - v_d)^{2m-1} z dx dt - \lambda N s \int_0^T \int_\Omega f^{2s-1} h dx dt. \end{gathered}$$

E pela igualdade (6.2.15), como $g_2(\varphi, w, z, h) = 0$, temos que

$$\begin{gathered} \lambda \alpha_1 k \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2k-1} \varphi dx dt + \lambda \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u - u_d)^{2m-1} w dx dt \\ +\lambda \alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v - v_d)^{2m-1} z dx dt + \lambda N s \int_0^T \int_\Omega f^{2s-1} h dx dt = -g_1(h). \end{gathered} \tag{6.2.16}$$

Antes de continuarmos a demonstração, mostremos que $\lambda \neq 0$.

Se $\lambda = 0$, pela igualdade (6.2.15) temos que $g_1 + g_2 = 0$.

Agora, $g_1 \in [FC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^*$, logo $g_1(\varphi, w, z, h) = g_1(h)$. Então, para todo $(\varphi, w, z, h) \in W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$, temos que $g_2(\varphi, w, z, h) = g_2(h) = -g_1(h)$. Mas, para cada

$h \in L^r(Q)$, existe único $(\varphi, w, z) \in W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q)$ solução do sistema (6.1.12). Logo, $(\varphi, w, z, h) \in TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$, e portanto, $g_2(h) = g_2(\varphi, w, z, h) = 0$, pois $g_2 \in [TC(Q_2, (\tau, u, v, f))]^*$. Assim temos que $g_2 \equiv 0$ e $g_1 = -g_2 \equiv 0$. Logo, $g_0 = g_1 = g_2 \equiv 0$. O que contradiz o Teorema de Dubovitskii e Milyutin. E portanto, $\lambda \neq 0$.

Observemos agora que podemos supor que $\lambda = 1$, para isso multiplicando (6.2.16) por $1/\lambda$ e continuando a denotar g_1/λ por g_1, temos

$$\begin{aligned} &\alpha_1 k \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2k-1} \varphi dx dt + \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u - u_d)^{2m-1} w dx dt \\ &+\alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v - v_d)^{2m-1} z dx dt + Ns \int_0^T \int_\Omega f^{2s-1} h dx dt = -g_1(h). \end{aligned} \tag{6.2.17}$$

Encontremos agora o controle ótimo f.

Seja (θ, p, q) uma solução do problema adjunto (6.1.10), que possui solução única pela Observação 6.5. E seja (φ, w, z, h) solução do problema (6.1.12). Multiplicando a primeira equação do problema (6.1.10) por φ, a segunda por w, a terceira por z, integrando cada uma delas em $\Omega \times (0, T)$ e somando-as obtemos

$$\begin{aligned} &-\alpha_1 k \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2k-1} \varphi dx dt - \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u - u_d)^{2m-1} w dx dt \\ &-\alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v - v_d)^{2m-1} z dx dt = \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + b \Delta \theta + \frac{\partial F_1}{\partial \tau} p + \frac{\partial F_2}{\partial \tau} q \right) \varphi dx dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial t} + k_1 \Delta p - l_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial u} p + \frac{\partial F_2}{\partial u} q \right) w dx dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial q}{\partial t} + k_2 \Delta q - l_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial v} p + \frac{\partial F_2}{\partial v} q \right) z dx dt. \end{aligned}$$

Integrando o segundo membro da igualdade acima por partes e usando que (φ, w, z, h) é solução do problema (6.1.12), temos

$$\begin{aligned} &-\alpha_1 k \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2k-1} \varphi dx dt - \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u - u_d)^{2m-1} w dx dt \\ &-\alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v - v_d)^{2m-1} z dx dt = - \int_0^T \int_\Omega h \theta \ dx dt. \end{aligned}$$

Agora, usando a igualdade (6.2.17) no primeiro membro da igualdade acima, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega \left(N s f^{2s-1} + \theta \right) h \ dx dt = \int_0^T \int_\Omega G_1 h dx dt,$$

para todo $h \in L^r(Q)$.

■

6.3 Mais um Problema com Restrição sobre o Controle

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$\min_{(\tau,u,v,f)\in\mathcal{Q}} J(\tau,u,v,f), \tag{6.3.18}$$

onde o funcional J é dado por (6.0.3) e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, sendo $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ são dados pelas restrições

$$\mathcal{Q}_1 = \{(\tau,u,v,f) \in E : |f| \leq C_3 \text{ q.t.p. em } Q\} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_2 = \{(\tau,u,v,f) \in E : M(\tau,u,v,f) = 0\},$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido, como na seção anterior, por $M(\tau,u,v,f) = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6)$ se, e somente se, (τ,u,v,f) é solução do sistema (6.1.5) com não-homogeneidade $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6)$. Lembremos que $M(\tau,u,v,f) = 0$ se, e somente se, (τ,u,v,f) é solução do problema (2.0.1).

Segue diretamente dos Teoremas 2.1 e 2.3 e do Corolário e 2.3 o seguinte resultado:

Lema 6.7 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$. Suponha também que $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (6.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq u_0, v_0 \leq 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $r \geq 2s$, então $U_{ad} \neq \emptyset$.*

Agora mostremos a existência de uma solução ótima do problema (6.1.4).

6.3.1 Existência de Solução Ótima

Teorema 6.5 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (6.0.2), são tais que $\frac{\partial\tau_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$, $u_0, v_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 \leq 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2k}(Q)$, u_d, $v_d \in L^{2m}(Q)$, com k e m quaisquer inteiros tais que k, $m \geq 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (6.3.18) possui uma solução ótima.*

Demonstração:

Primeiramente observemos que $U_{ad} \neq \emptyset$ pelo Lema 6.7, pois $r = 2s$.

Seja $\{(\tau_n,u_n,v_n,f_n)\} \subset U_{ad}$ uma seqüência minimizante do funcional J.

Agora, observemos que $|f_n| \leq C_3$ q.t.p. em Q para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde, $||f_n||_{L^\infty(Q)} \leq C_3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, temos que existe subseqüência, que continuaremos denotando por f_n, tal que

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{fraco* em } L^\infty(Q),$$

e consequntemente, $||f||_{L^\infty(Q)} \leq C_3$. Portanto,

$$|f| \leq C_3 \quad \text{q.t.p. em } Q.$$

Considerando a subseqüência (τ_n, u_n, v_n, f_n) obtida acima. Como $J(\tau_n, u_n, v_n, f_n) \leq C$, pela estrutura de J temos que

$$\|f_n\|_{L^r(Q)} = \|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$$

e, pelo Teorema 2.3, temos que

$$\|\tau_n\|_{W_r^{2,1}(Q)} + \|u_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} + \|v_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} \leq C,$$

já que $l \geq r$. Podemos então tomar uma subseqüência de $\{(\tau_n, u_n, v_n, f_n)\}$, com $M(\tau_n, u_n, v_n, f_n) = 0$, que continuaremos denotando por $\{(\tau_n, u_n, v_n, f_n)\}$, tal que $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $L^r(Q)$, $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $W_r^{2,1}(Q)$ e $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_l^{2,1}(Q)$.

Depois, procedendo como na demonstração do Teorema 6.1, obtemos que $(\tau, u, v, f) \in U_{ad}$ para o problema (6.3.18) e que (τ, u, v, f) é uma solução ótima do mesmo problema.

■

Na próxima seção estudaremos condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (6.3.18).

6.3.2 Condição Necessária de Otimalidade

Para demonstrarmos condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (6.3.18) não podemos proceder como na demonstração do Teorema 6.4, pois $intQ_1 = \emptyset$ já que $Q_1 \in L^{2s}(Q)$ com $2s < \infty$, e portanto, não poderemos utilizar o Teorema de Dubovitskii e Milyutin (Teorema 5.1). Logo, precisaremos do Teorema 5.7, que é uma generalização do Teorema de Dubovitskii e Milyutin.

Para obtermos as condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (6.3.18) precisaremos do cone das direções de descida do funcional $J(\cdot)$, e dos cones das direções tangentes de Q_1 e Q_2 e os cones duais.

Lembremos que o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ e seu dual são dados pelo Lema 6.2. E o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ, u, v, f) e sue dual são dados pelo Lema 6.4. Finalmente, para o cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ e seu dual, temos que

Lema 6.8 *O cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ é dado por*

$$TC(Q_1, (\tau, u, v, f)) = \{(\theta, w, z, h) \in E : h(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = C_3\} \text{ e }$$
$$h(x,t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = -C_3\}\}.$$

E seu cone dual é dado por

$$[TC(Q_1,(\tau,u,v,f))]^* = \{G_1 \in L^{\frac{r}{r-1}}(Q) : G_1(x,t) \leq 0 \textit{ q.t.p. em } \{(x,t) \textit{ tal que } f(x,t) = C_3\},$$
$$G_1(x,t) \geq 0 \textit{ q.t.p. em } \{(x,t) \textit{ tal que } f(x,t) = -C_3\} \textit{ e}$$
$$G_1(x,t) = 0 \textit{ q.t.p. em } \{(x,t) \textit{ tal que } |f(x,t)| < C_3\}\}.$$

Demonstração:

Por definição temos que o cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau,u,v,f) \in E$ é dado por

$$TC(Q_1,(\tau,u,v,f)) = \{(\theta,w,z,h) : \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ \exists r(\varepsilon) \in E, \text{ com } \|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon),$$
$$\text{tal que } (\tau,u,v,f) + \varepsilon(\theta,w,z,h) + r(\varepsilon) \in Q_1\},$$

ou seja, $(\theta,w,z,h) \in TC(Q_1,(\tau,u,v,f))$, se e somente se, $(\theta,w,z,h) \in E$ e para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existe $r(\varepsilon) \in E$, com $\|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon)$, tal que

$$|f + \varepsilon h + r_4(\varepsilon)| \leq C_3, \quad \text{q.t.p. em } Q,$$

onde $r_4(\varepsilon)$ denota a quarta componente de $r(\varepsilon)$.

Seja $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Se $|f(x,t)| < C_3$, então para todo $h(x,t)$ existe $r(\varepsilon) \in E$, com $\|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon)$, tal que $|f+\varepsilon h+r_4(\varepsilon)| \leq C_3$. Se $f(x,t) = C_3$, então existe $r(\varepsilon) \in E$, com $\|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon)$, tal que $|f+\varepsilon h+r_4(\varepsilon)| \leq C_3$ se, e somente se, $h(x,t) \leq 0$. E se $f(x,t) = -C_3$, existe $r(\varepsilon) \in E$, com $\|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon)$, tal que $|f+\varepsilon h+r_4(\varepsilon)| \leq C_3$ se, e somente se, $h(x,t) \geq 0$.

Assim,

$$TC(Q_1,(\tau,u,v,f)) = \{(\theta,w,z,h) : h(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = C_3\} \text{ e}$$
$$h(x,t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = -C_3\}\}.$$

Agora, por definição temos que o cone dual $[TC(Q_1,(\tau,u,v,f))]^*$ é dado por

$$[TC(Q_1,(\tau,u,v,f))]^* = \{g_1 \in E' : g_1(\theta,w,z,h) \geq 0,\ \forall\ (\theta,w,z,h) \in TC(Q_1)\}.$$

Do mesmo modo como foi feito no Lema 6.6, mostra-se que $g_1(\theta,w,z,h) = \psi(h)$, com $\psi \in (L^r(Q))'$. E como $(L^r(Q))' \cong L^{\frac{r}{r-1}}(Q)$, para cada $g_1 \in E'$ temos que existe único $G_1 \in L^{\frac{r}{r-1}}(Q)$ tal que

$$g_1(\theta,w,z,h) = \psi(h) = \int_0^T \int_Q G_1 h \, dxdt,$$

para todo $h \in L^r(Q)$.

Agora, como $g_1(\theta,w,z,h) \geq 0$, para todo $(\theta,w,z,h) \in TC(Q_1,(\tau,u,v,f))$, temos que

$$\int_0^T \int_\Omega G_1 h \, dxdt \geq 0,$$

para todo $h \in L^r(Q)$ tal que $h(x,t) \leq 0$ q.t.p. em $\{(x,t)$ tal que $f(x,t) = C_3\}$ e $h(x,t) \geq 0$ q.t.p. em $\{(x,t)$ tal que $f(x,t) = -C_3\}$. Logo, G_1 deve satisfazer:

$$\begin{gathered} G_1(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = C_3\}, \\ G_1(x,t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = -C_3\} \text{ e} \\ G_1(x,t) = 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } |f(x,t)| = C_3\}. \end{gathered}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} [TC(\mathcal{Q}_1,(\tau,u,v,f))]^* = \{G_1 \in L^{\frac{r}{r-1}}(Q) : G_1(x,t) &\leq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = C_3\}, \\ G_1(x,t) &\geq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = -C_3\} \text{ e} \\ G_1(x,t) &= 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } |f(x,t)| < C_3\}\}. \end{aligned}$$

■

Vejamos agora um resultado sobre condição necessária de otimalidade para o problema de otimização (6.3.18).

Teorema 6.6 *Seja* $(\tau,u,v,f) \in E = W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$ *uma solução ótima do problema (6.3.18), onde* r *e* l *satisfazem (6.0.2). Se* $r \geq 2s$, *então existem funções* $(\theta,p,q) \in W_{2s}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q)$ *satisfazendo ao sistema adjunto (6.1.10). Além disso, existe* $G_1 \in L^{\frac{2s}{2s-1}}(Q)$ *satisfazendo:*

$$\begin{gathered} G_1(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = C_3\}, \\ G_1(x,t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = -C_3\} \text{ e} \\ G_1(x,t) = 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } |f(x,t)| < C_3\}, \end{gathered}$$

tal que

$$\int_0^T \int_\Omega (Nsf^{2s-1} + \theta)\,.h\; dxdt = -\int_0^T \int_\Omega G_1 h dxdt,$$

para todo $h \in L^r(Q)$.

Demonstração:

Suponha que $J(\cdot)$ assume um mínimo local no ponto $(\tau,u,v,f) \in \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$. Pelos Lemas 6.2, 6.4 e 6.8, J tem direções de descida $DC(J,(\tau,u,v,f))$ e $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ tem direções tangentes $TC(\mathcal{Q}_1,(\tau,u,v,f))$ e $TC(\mathcal{Q}_2,(\tau,u,v,f))$, respectivamente, em (τ,u,v,f). Além disso, o cone $DC(J,(\tau,u,v,f))$ é aberto, pois os cones de descida sempre o são.

Para podermos usar o Teorema 5.7 ainda precisamos mostrar que: os cones $DC(J,(\tau,u,v,f))$, $TC(\mathcal{Q}_1,(\tau,u,v,f))$ e $TC(\mathcal{Q}_2,(\tau,u,v,f))$ são convexos, os cones $TC(\mathcal{Q}_i,(\tau,u,v,f))$, $i = 1,2$, são fechados, o cone $TC(\mathcal{Q}_1,(\tau,u,v,f)) \cap TC(\mathcal{Q}_2,(\tau,u,v,f))$ está contido no cone tangente $TC(\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2,(\tau,u,v,f))$ associado ao conjunto das restrições de igualdade $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ e os cones duais $[TC(\mathcal{Q}_i,(\tau,u,v,f))]^*$, $i = 1,2$, formam um sistema de cones de mesmo sentido.

Mostremos então tais fatos:

i) Primeiramente observemos que os cones $DC(J,(\tau,u,v,f))$, $TC(Q_1,(\tau,u,v,f))$ e $TC(Q_2,(\tau,u,v,f))$ são convexos;

De fato, pelo Lema 6.2 o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto $(\tau,u,v,f)\in E$ é dado por $DC(J,(\tau,u,v,f))=\{(\varphi,w,z,h) : J'(\tau,u,v,f)(\varphi,w,z,h)<0\}$. Como $J'(\tau,u,v,f)(\cdot)$ é linear em (φ,w,z,h), temos que $DC(J,(\tau,u,v,f))$ é convexo.

Agora, pelo Lema 6.8 o cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau,u,v,f)\in E$ é dado por

$$TC(Q_1,(\tau,u,v,f))=\{(\theta,w,z,h) : h(x,t)\leq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t)=C_3\} \text{ e } h(x,t)\geq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t)=-C_3\}\},$$

logo é convexo.

Pelo Lema 6.4 o cone de direções tangentes de Q_2 no ponto $(\tau,u,v,f)\in E$ é o subespaço vetorial $TC(Q_2,(\tau,u,v,f))=\{(\theta,w,z,h) : M'(\tau,u,v,f)(\theta,w,z,h)=0\}$, logo é convexo.

ii) Agora observemos que os cones $TC(Q_1,(\tau,u,v,f))$ e $TC(Q_2,(\tau,u,v,f))$ são fechados;

Pelo Lema 6.4, o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ,u,v,f) é dado por $TC(Q_2,(\tau,u,v,f))=\{(\varphi,w,z,h)\in E : M'(\tau,u,v,f)(\varphi,w,z,h)=0\}$, que é fechado em E.

Agora, pelo Lema 6.8 o cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau,u,v,f)\in E$ é dado por $TC(Q_1,(\tau,u,v,f))=\{\lambda(\theta,w,z,h) : h(x,t)\leq 0$ q.t.p. em $\{(x,t)$ tal que $f(x,t)=C_3\}$ e $h(x,t)\geq 0$ q.t.p. em $\{(x,t)$ tal que $f(x,t)=-C_3\}\}$, que é fechado em E.

iii) Mostremos que o cone $TC(Q_1,(\tau,u,v,f))\cap TC(Q_2,(\tau,u,v,f))$ está contido no cone tangente $TC(Q,(\tau,u,v,f))$ associado ao conjunto das restrições de igualdade $Q=Q_1\cap Q_2$;

Para isso seja $(\varphi,w,z,h)\in TC(Q_1,(\tau,u,v,f))\cap TC(Q_2,(\tau,u,v,f))$. Precisamos mostrar que $(\varphi,w,z,h)\in TC(Q_1\cap Q_2,(\tau,u,v,f))$.

Seja $\varepsilon>0$. Queremos encontrar $r(\varepsilon)\in E$, com $\|r(\varepsilon)\|_E=o(\varepsilon)$, tal que

$$(\tau,u,v,f)+\varepsilon(\varphi,w,z,h)+r(\varepsilon)\in Q_1\cap Q_2.$$

Como $(\varphi,w,z,h)\in TC(Q_1,(\tau,u,v,f))$, por definição existe $r_1(\varepsilon)\in E$, com $\|r_1(\varepsilon)\|_E=o(\varepsilon)$, tal que

$$(\varphi_\varepsilon,w_\varepsilon,z_\varepsilon,h_\varepsilon):=(\tau,u,v,f)+\varepsilon(\varphi,w,z,h)+r_1(\varepsilon)\in Q_1$$

e como $(\varphi,w,z,h)\in TC(Q_2,(\tau,u,v,f))$, por definição existe $r_2(\varepsilon)\in E$, com $\|r_2(\varepsilon)\|_E=o(\varepsilon)$, tal que

$$(\widetilde{\varphi}_\varepsilon,\widetilde{w}_\varepsilon,\widetilde{z}_\varepsilon,\widetilde{h}_\varepsilon):=(\tau,u,v,f)+\varepsilon(\varphi,w,z,h)+r_2(\varepsilon)\in Q_2.$$

Tomemos h_ε definido acima e resolvendo o sistema (2.0.1) encontremos φ'_ε, w'_ε e z'_ε tais que $M(\varphi'_\varepsilon,w'_\varepsilon,z'_\varepsilon,h_\varepsilon)=0$. Então temos que, $(\varphi'_\varepsilon,w'_\varepsilon,z'_\varepsilon,h_\varepsilon)\in Q_1\cap Q_2$. Além disso, temos que

$$(\varphi'_\varepsilon,w'_\varepsilon,z'_\varepsilon,h_\varepsilon)=(\tau,u,v,f)+\varepsilon(\varphi,w,z,h)+r(\varepsilon)$$

para algum $r(\varepsilon) \in E$.

Precisamos mostrar que $\|r(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon)$.

Usando desigualdade triangular e estabilidade do problema (2.0.1), temos que

$$\|r(\varepsilon)\|_E = \|(\varphi'_\varepsilon, w'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h_\varepsilon) - (\tau, u, v, f) - \varepsilon(\varphi, w, z, h)\|_E$$

$$\leq \|(\varphi'_\varepsilon, w'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h_\varepsilon) - (\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{w}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon)\|_E + \|(\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{w}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon) - (\tau, u, v, f) - \varepsilon(\varphi, w, z, h)\|_E$$

$$\leq \|\varphi'_\varepsilon - \widetilde{\varphi}_\varepsilon\|_{W^{2,1}_{2s}(Q)} + \|w'_\varepsilon - \widetilde{w}_\varepsilon\|_{W^{2,1}_{2m}(Q)} + \|z'_\varepsilon - \widetilde{z}_\varepsilon\|_{W^{2,1}_{2m}(Q)} + \|h_\varepsilon - \widetilde{h}_\varepsilon\|_{L^{2s}(Q)} + \|r_2(\varepsilon)\|_E$$

$$\leq C\|h_\varepsilon - \widetilde{h}_\varepsilon\|_{L^{2s}(Q)} + \|r_2(\varepsilon)\|_E \leq C\|(\varphi_\varepsilon, w_\varepsilon, z_\varepsilon, h_\varepsilon) - (\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{w}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon)\|_E + \|r_2(\varepsilon)\|_E$$

$$\leq C\|(\varphi_\varepsilon, w_\varepsilon, z_\varepsilon, h_\varepsilon) - (\tau, u, v, f) - \varepsilon(\varphi, w, z, h)\|_E + C\|(\tau, u, v, f) + \varepsilon(\varphi, w, z, h) - (\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{w}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon)\|_E + \|r_2(\varepsilon)\|_E$$

$$\leq C\|r_1(\varepsilon)\|_E + (C+1)\|r_2(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon).$$

Logo, $(\varphi, w, z, h) \in TC(Q_1 \cap Q_2, (\tau, u, v, f))$, e assim, $TC(Q_1, (\tau, u, v, f)) \cap TC(Q_2, (\tau, u, v, f)) \subset TC(Q_1 \cap Q_2, (\tau, u, v, f))$.

iv) Finalmente, mostremos que os cones duais $[TC(Q_i, (\tau, u, v, f))]^*$, $i = 1, 2$, formam um sistema de cones de mesmo sentido;

Seja $M > 0$ e sejam $g_i \in [TC(Q_i, (\tau, u, v, f))]^*$, para $i = 1, 2$, tais que $\|g_1 + g_2\|_{E'} \leq M$. Precisamos mostrar que existem M_1, $M_2 > 0$ tais que $\|g_i\|_{E'} \leq M_i$, para $i = 1, 2$.

Como foi visto na demonstração do Lema 6.8, se $g_1 \in [TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^*$, então

$$g_1(\varphi, w, z, h) = \psi(h),$$

com $\psi \in (L^r(Q))'$.

E como $g_2 \in [TC(Q_2, (\tau, u, v, f))]^* \subset E'$, então

$$g_2(\varphi, w, z, h) = \phi_1(\varphi) + \phi_2(w) + \phi_3(z) + \phi_4(h),$$

com $\phi_1 \in \left(W^{2,1}_r(Q)\right)'$, ϕ_2, $\phi_3 \in \left(W^{2,1}_l(Q)\right)'$ e $\phi_4 \in (L^r(Q))'$.

Então, temos que

$$M \geq \|g_1 + g_2\|_{E'} \geq C\left[\|\phi_1\|_{(W^{2,1}_r(Q))'} + \|\phi_2\|_{(W^{2,1}_l(Q))'} + \|\phi_3\|_{(W^{2,1}_l(Q))'} + \|\psi + \phi_4\|_{(L^r(Q))'}\right].$$

De onde, já temos que $\|\phi_1\|_{(W^{2,1}_r(Q))'}$, $\|\phi_2\|_{(W^{2,1}_l(Q))'}$, $\|\phi_3\|_{(W^{2,1}_l(Q))'} \leq M/C$.

Agora, dado $h \in L^r(Q)$ existe $(\varphi, w, z) \in W^{2,1}_r(Q) \times W^{2,1}_l(Q) \times W^{2,1}_l(Q)$ tal que $M'(\tau, u, v, f)(\varphi, w, z, h) = 0$. Logo, $g_2(\varphi, w, z, h) = \phi_1(\varphi) + \phi_2(w) + \phi_3(z) + \phi_4(h) = 0$, então,

$$|\phi_4(h)| \leq |\phi_1(\varphi)| + |\phi_2(w)| + |\phi_3(z)|$$

$$\leq \|\phi_1\|_{(W^{2,1}_r(Q))'}\|\varphi\|_{W^{2,1}_r(Q)} + \|\phi_2\|_{(W^{2,1}_l(Q))'}\|w\|_{W^{2,1}_l(Q)} + \|\phi_3\|_{(W^{2,1}_l(Q))'}\|z\|_{W^{2,1}_l(Q)}$$

$$\leq \frac{M}{C}\left[\|\varphi\|_{W^{2,1}_r(Q)} + \|w\|_{W^{2,1}_l(Q)} + \|z\|_{W^{2,1}_l(Q)}\right] \leq CM\|h\|_{L^r(Q)}$$

Como $h \in L^r(Q)$ é arbitrário obtemos que

$$\|\phi_4\|_{(L^r(Q))'} \leq CM,$$

e portanto,

$$\|g_2\|_{E'} \leq C\left[\|\phi_1\|_{(W_r^{2,1}(Q))'} + \|\phi_2\|_{(W_l^{2,1}(Q))'} + \|\phi_3\|_{(W_l^{2,1}(Q))'} + \|\phi_4\|_{(L^r(Q))'}\right] \leq CM =: M_2.$$

Finalmente, temos que

$$\|g_1\|_{E'} \leq C[\|\psi\|_{(L^r(Q))'} \leq C\left[\|\psi + \phi_4\|_{(L^r(Q))'} + \|\phi_4\|_{(L^r(Q))'}\right] \leq CM =: M_1.$$

Portanto, os cones $[TC(Q_i,(\tau,u,v,f))]^*$, $i = 1,2$, formam um sistema de cones de mesmo sentido.

Como todas as hipóteses do Teorema 5.7 são satisfeitas segue deste teorema que existem formas lineares contínuas $g_0 \in [DC(J,(\tau,u,v,f))]^*$, $g_1 \in [TC(Q_1,(\tau,u,v,f))]^*$ e $g_2 \in [TC(Q_2,(\tau,u,v,f))]^*$, não simultaneamente nulas, tais que,

$$g_0 + g_1 + g_2 = 0. \tag{6.3.19}$$

Agora, procedendo exatamente como na parte final da demonstração do Teorema 6.4, mas usando a equação 6.3.19 no lugar de 6.2.15 e usando o Lema 6.8 no lugar do Lema 6.6, obtemos o resultado desejado.

■

6.4 Um Problema de Controle com Restrição na Temperatura

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$\min_{(\tau,u,v,f)\in\mathcal{Q}} J(\tau,u,v,f), \tag{6.4.20}$$

onde o funcional J é dado por (6.0.3) e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, sendo $\mathcal{Q}_1$ dado pela restrição de desigualdade

$$\mathcal{Q}_1 = \{(\tau,u,v,f) \in E : C_1 \leq \tau \leq C_2 \text{ q.t.p. em } Q\}$$

e $\mathcal{Q}_2$ dado pela restrição de igualdade

$$\mathcal{Q}_2 = \{(\tau,u,v,f) \in E : M(\tau,u,v,f) = 0\},$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido, como nas seções anteriores, por $M(\tau,u,v,f) =$ $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6)$ se, e somente se, (τ,u,v,f) é solução do sistema (6.1.5) com não-homogeneidade

$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$. Lembremos que $M(\tau, u, v, f) = 0$ se, e somente se, (τ, u, v, f) é solução do problema (2.0.1).

Antes de demonstrarmos a existência de controle ótimo para este problema, mostremos que o conjunto admissível, U_{ad}, é não vazio.

Lema 6.9 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (6.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, $0 \leq u_0, v_0 \leq 1$ e $C_1 \leq \tau_0 \leq C_2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $r \geq 2s$, então $U_{ad} \neq \emptyset$.*

Demonstração:

Seja $\tau \in W^{2,1}_r(Q)$ solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial t} - b\Delta\tau = 0 \quad & \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial\tau}{\partial n} = 0 \quad & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ \tau = \tau_0 \quad & \text{em} \quad \Omega \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Pelo princípio de máximo para equações parabólicas temos que $\tau(x,t) \geq \min\{\tau_0(x) : x \in \Omega\} \geq C_1$ e $\tau(x,t) \leq \max\{\tau_0(x) : x \in \Omega\} \leq C_2$. Logo $C_1 \leq \tau \leq C_2$.

Tomando $-2m_i = c_i\tau + d_i$, para $i = 1, 2$ (aqui c_i, d_i, para $i = 1, 2$, são os mesmos do problema (6.1.5)). Como $r > 5/2$, temos que $W^{2,1}_r(Q) \subset L^\infty(Q)$, logo $m_i \in L^\infty(Q)$, para $i = 1, 2$. Então pelos Teoremas 2.7 e 2.9 e pelo Corolário 2.6 existe único $(u, v) \in W^{2,1}_l(Q) \times W^{2,1}_l(Q)$ solução do problema (3.0.1). Tomando

$$f = \frac{\partial\tau}{\partial t} - b\Delta\tau - l_1\frac{\partial u}{\partial t} - l_2\frac{\partial v}{\partial t}$$

como $l \geq r$, temos que $f \in L^r(Q)$. Logo, $(\tau, u, v, f) \in E$, é solução do problema (2.0.1), ou seja, $M(\tau, u, v, f) = 0$, e $C_1 \leq \tau \leq C_2$ q.t.p. em Q.

Além disso, como $r \geq 2s$, temos que $L^r(Q) \subset L^{2s}(Q)$, e como l, $r > 5/2$, temos que $W^{2,1}_r(Q)$, $W^{2,1}_l(Q) \subset L^\infty(Q)$. De onde, $J(\tau, u, v, f) < \infty$. Assim, $(\tau, u, v, f) \in U_{ad}$.

∎

Agora mostremos a existência de uma solução ótima do problema (6.4.20).

6.4.1 Existência de Solução Ótima

Teorema 6.7 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (6.0.2), são tais que $\frac{\partial\tau_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$, $u_0, v_0 \geq 0$, $u_0 + v_0 \leq 1$ e $C_1 \leq \tau_0 \leq C_2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio* *aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2k}(Q)$, u_d, $v_d \in L^{2m}(Q)$, com k, $m \geq 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (6.4.20) possui uma solução ótima.*

Demonstração:

Primeiramente observemos que, como $r = 2s$, temos que $U_{ad} \neq \emptyset$, pelo Lema 6.9.

Seja $\{(\tau_n, u_n, v_n, f_n)\} \subset U_{ad}$ uma seqüência minimizante do funcional J.

Como $J(\tau_n, u_n, v_n, f_n) \leq C$, pela estrutura de J temos que

$$\|f_n\|_{L^r(Q)} = \|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$$

e pelo Teorema 2.3 temos que

$$\|\tau_n\|_{W_r^{2,1}(Q)} + \|u_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} + \|v_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} \leq C,$$

pois $l \geq r$. Podemos então tomar uma subseqüência que continuaremos denotando por $\{(\tau_n, u_n, v_n, f_n)\}$ tal que $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $L^r(Q)$, $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $W_r^{2,1}(Q)$ e $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_l^{2,1}(Q)$. Pelo Corolário 1.2 temos que $W_r^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ com inclusão contínua e compacta, então $\tau_n \to \tau$ fortemente em $L^\infty(Q)$.

Como $\tau_n \to \tau$ em $L^\infty(Q)$, ou seja, $\|\tau - \tau_n\|_{L^\infty(Q)} \to 0$ quando $n \to \infty$, e como $C_1 \leq \tau_n \leq C_2$ q.t.p. em Q, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $C_1 \leq \tau \leq C_2$ q.t.p. em Q.

Para mostrar que $M(\tau, u, v, f) = 0$, ou seja, que (τ, u, v, f) é solução do problema (2.0.1) e assim concluirmos que $(\tau, u, v, f) \in U_{ad}$, basta repetir a parte correspondente da demonstração do Teorema 6.1. E para mostrarmos que (τ, u, v, f) é uma solução ótima do problema (6.4.20) basta repetir a parte final da demonstração do mesmo teorema.

■

Na próxima seção estudaremos condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (6.4.20).

6.4.2 Condição Necessária de Otimalidade

Para obtermos as condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (6.4.20) precisamos calcular o cone das direções de descida do funcional $J(\cdot)$, o cone das direções factíveis de Q_1, o cone das direções tangentes de Q_2 e os cones duais.

Para isso, consideremos uma solução ótima $(\tau, u, v, f) \in E$ do problema (6.4.20).

Lembremos que o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ e seu dual são dados pelo Lema 6.2. E o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ, u, v, f) e seu dual são dados pelo Lema 6.4.

Vamos agora calcular o cone das direções factíveis associado a restrição de desigualdade Q_1 e seu dual. Para isso observemos que podemos utilizar a Proposição 5.3 e o Teorema 5.6 para tais cálculos, pois Q_1 pode ser escrito como $Q_1 = \{(\tau, u, v, f) \in E : F \leq 0\}$, onde F é o funcional dado por $F = -sup\ ess(\tau - C_2).sup\ ess(C_1 - \tau)$.

Lema 6.10 *O cone de direções factíveis de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ é dado por*

$$FC(Q_1, (\tau, u, v, f)) = \{\lambda(\theta - \tau, w - u, z - v, h - f) : \lambda > 0 \text{ e } (\theta, w, z, h) \in intQ_1\} \neq \emptyset$$

e seu cone dual é dado por

$$[FC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^* = \{g_1 \in (W_r^{2,1}(Q))' : g_1(\theta) \geq g_1(\tau),\ \forall\ \theta \in W_r^{2,1}(Q) \text{ tal que } C_1 \leq \theta \leq C_2\}.$$

Demonstração:

Vamos dividir a demonstração em quatro partes:

i) Mostremos que $FC(Q_1, (\tau, u, v, f)) = \{\lambda(\theta - \tau, w - u, z - v, h - f) : \lambda > 0 \text{ e } (\theta, w, z, h) \in intQ_1\}$.

Primeiramente mostremos que Q_1 é convexo. Para isso consideremos $x = (\tau, u, v, f)$, $y = (\theta, w, z, h) \in Q_1$ e $\alpha \in [0, 1]$ e mostremos que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in Q_1$. Temos que

$$\alpha x + (1 - \alpha)y = (\alpha\tau + (1 - \alpha)\theta, \alpha u + (1 - \alpha)w, \alpha v + (1 - \alpha)z, \alpha f + (1 - \alpha)h) \in E,$$

pois $x, y \in E$. Além disso, como $x, y \in Q_1$, temos que $C_1 \leq \tau, \theta \leq C_2$, de onde, $C_1 \leq \alpha\tau + (1-\alpha)\theta \leq C_2$. Logo, $\alpha x + (1 - \alpha)y \in Q_1$, e portanto, Q_1 é convexo.

Então, pela Proposição 5.3, temos que o cone de direções factíveis de Q_1 é dado por

$$\begin{aligned} FC &= \{\lambda(intQ_1 - (\tau, u, v, f)) : \lambda > 0\} \\ &= \{\lambda(\theta - \tau, w - u, z - v, h - f) : \lambda > 0 \text{ e } (\theta, w, z, h) \in intQ_1\}. \end{aligned}$$

ii) Agora mostremos que $FC(Q_1, (\tau, u, v, f)) \neq \emptyset$.

Para isso basta mostrar que $intQ_1 \neq \emptyset$, pela parte (i).

Seja $(\theta_0, w_0, z_0, h_0) \in Q_1$ tal que $C_1 + \varepsilon \leq \theta_0 \leq C_2 - \varepsilon$ em Q_1, para algum $\varepsilon > 0$. Para todo $(\theta, w, z, h) \in E$ vale

$$\begin{aligned} &||\theta - \theta_0||_{L^\infty(Q)} \leq C||\theta - \theta_0||_{W_r^{2,1}(Q)} \\ &\leq C\left[||\theta - \theta_0||_{W_r^{2,1}(Q)} + ||w - w_0||_{W_l^{2,1}(Q)} + ||z - z_0||_{W_l^{2,1}(Q)} + ||h - h_0||_{L^r(Q)}\right] \\ &\leq \widetilde{C}||(\theta, w, z, h) - (\theta_0, w_0, z_0, h_0)||_E. \end{aligned}$$

Então, tomando $\delta := \varepsilon/\widetilde{C} > 0$, temos que para todo $(\theta, w, z, h) \in B_\delta(\theta_0, w_0, z_0, h_0) \subset E$, $C_1 \leq \theta \leq C_2$, e portanto, $(\theta, w, z, h) \in Q_1$. Logo $B_\delta(\theta_0, w_0, z_0, h_0) \subset Q_1$. Assim $intQ_1 \neq \emptyset$. Então, pela parte (i) da demonstração temos que $FC(Q_1, (\tau, u, v, f)) \neq \emptyset$.

iii) Vamos agora mostrar que $[FC(Q_1,(\tau,u,v,f))]^* = \{g_1 \in E' : g_1(\theta,w,z,h) \geq g_1(\tau,u,v,f), \forall\, (\theta,w,z,h) \in Q_1\}$.

Como Q_1 é convexo e $intQ_1 \neq \emptyset$, se mostrarmos que Q_1 é fechado, pelo Teorema 5.6 teremos o resultado desejado. Para isso consideremos uma seqüência $\{x_n = (\tau_n,u_n,v_n,f_n)\}$ em Q_1 tal que $x_n \to x = (\overline{\tau},\overline{u},\overline{v},\overline{f})$ em E. Precisamos mostrar que $x \in Q_1$ para concluir que Q_1 é fechado em E. Como $x \in E$ basta mostrar que $C_1 \leq \overline{\tau} \leq C_2$ q.t.p. em Q.

Mas como $W_r^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ com inclusão contínua, temos

$$\|\tau_n - \overline{\tau}\|_{L^\infty(Q)} \leq C\|\tau_n - \overline{\tau}\|_{W_r^{2,1}(Q)}$$
$$\leq C\left[\|\tau_n - \overline{\tau}\|_{W_r^{2,1}(Q)} + \|u_n - \overline{u}\|_{W_l^{2,1}(Q)} + \|v_n - \overline{v}\|_{W_l^{2,1}(Q)} + \|f_n - \overline{f}\|_{L^r(Q)}\right] \leq C\|x_n - x\|_E.$$

E como $\|x_n - x\|_E \to 0$ quando $n \to \infty$ (pois $x_n \to x$) temos que $\|\tau_n - \overline{\tau}\|_{L^\infty(Q)} \to 0$ quando $n \to \infty$. De onde, obtemos que $C_1 \leq \tau_n \leq C_2$ q.t.p. em Q, para todo $n \in \mathbb{N}$, implica que $C_1 \leq \overline{\tau} \leq C_2$ q.t.p. em Q. Logo $x \in Q_1$, e portanto, Q_1 é fechado.

iv) Finalmente vamos mostrar que $[FC(Q_1,(\tau,u,v,f))]^* = \{g_1 \in (W_r^{2,1}(Q))' : g_1(\theta) \geq g_1(\tau),\ \forall\, \theta \in W_r^{2,1}(Q)\ \textit{tal que}\ C_1 \leq \theta \leq C_2\}$.

Pela parte anterior e pela definição de Q_1, basta mostrar que g_1 só depende da primeira componente, isto é, só depende de θ.

Seja $g_1 \in FC(Q_1,(\tau,u,v,f))$, pela parte anterior temos que

$$g_1(\varphi,w,z,h) \geq g_1(\tau,u,v,f), \quad \text{para todo } (\varphi,w,z,h) \in Q_1.$$

Tomemos $(\varphi,w,z,h) \in Q_1$ arbitrário. Seja $(\widetilde{\varphi},\widetilde{w},\widetilde{z},\widetilde{h}) = (C_1+C_2-\varphi,-w,-z,-h) \in E$. Como $C_1 \leq \varphi \leq C_2$, obtemos que $C_1 \leq \widetilde{\varphi} \leq C_2$, e portanto, $(\widetilde{\varphi},\widetilde{w},\widetilde{z},\widetilde{h}) \in Q_1$. Logo, $g_1(\widetilde{\varphi},\widetilde{w},\widetilde{z},\widetilde{h}) \geq g_1(\tau,u,v,f)$. De onde, como g_1 é linear, obtemos que

$$g_1(C_1+C_2,0,0,0) - g_1(\varphi,w,z,h) = g_1(\widetilde{\varphi},\widetilde{w},\widetilde{z},\widetilde{h}) \geq g_1(\tau,u,v,f).$$

E portanto,

$$\mathcal{C}_1 := g_1(\tau,u,v,f) \leq g_1(\varphi,w,z,h) \leq \mathcal{C}_2 := g_1(C_1+C_2,0,0,0) - g_1(\tau,u,v,f),$$

para todo $(\varphi,w,z,h) \in Q_1$.

Agora, como $g_1 \in E'$, podemos escrevê-la como

$$g_1(\varphi,w,z,h) = \psi_1(\varphi) + \psi_2(w) + \psi_3(z) + \psi_4(h),$$

com $\psi_1 \in \left(W_r^{2,1}(Q)\right)'$, $\psi_2,\psi_3 \in \left(W_l^{2,1}(Q)\right)'$ e $\psi_4 \in (L^r(Q))'$.

Tomemos agora $w,z \in W_l^{2,1}(Q)$, $h \in L^r(Q)$ e $\varphi \in W_r^{2,1}(Q)$ tal que $C_1 \leq \varphi \leq C_2$. Então, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $(\varphi,kw,kz,kh) \in Q_1$, e assim, $\mathcal{C}_1 \leq g_1(\varphi,kw,kz,kh) \leq \mathcal{C}_2$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, de onde,

$$\mathcal{C}_1 \leq \psi_1(\varphi) + k\psi_2(w) + k\psi_3(z) + k\psi_4(h) \leq \mathcal{C}_2, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $\psi_2 = \psi_3 = \psi_4 \equiv 0$. Então $g_1(\varphi,w,z,h) = g_1(\varphi) = \psi_1(\varphi)$, com $\psi_1 \in \left(W_r^{2,1}(Q)\right)'$.

■

Vejamos agora um resultado sobre condição necessária de otimalidade para o problema de otimização (6.4.20).

Teorema 6.8 *Seja* $(\tau, u, v, f) \in E = W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$ *é uma solução ótima do problema (6.4.20), onde* r *e* l *satisfazem (6.0.2). Se* $r \geq 2s$*, então existem funções* $(\theta, p, q) \in W_{2s}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q)$ *que satisfaz o sistema adjunto (6.1.10). Além disso, existe* $g_1 \in [TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^* = \{g \in (W_r^{2,1}(Q))' : g(\theta) \geq g(\tau),\ \forall\ \theta \in W_r^{2,1}(Q)$ *tal que* $C_1 \leq \theta \leq C_2\}$ *tal que*

$$\int_0^T \int_\Omega \left(Nsf^{2s-1} + \theta\right).h\ dxdt = g_1(\varphi),$$

para todo (φ, w, z, h) *solução do sistema (6.1.12).*

Este teorema é demonstrado exatamente como o Teorema 6.4, mas usando o Lema 6.10 no lugar do Lema 6.6.

6.5 Um Problema de Controle com Restrição no Gradiente da Temperatura

Procedendo para o problema descrito a seguir de maneira análoga ao que foi feito para o problema (6.4.20) obteremos resultados semelhantes.

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$\min_{(\tau,u,v,f)\in\mathcal{Q}} J(\tau, u, v, f), \tag{6.5.21}$$

onde o funcional J é dado por (6.0.3) e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, sendo $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ dados pelas restrições

$$\mathcal{Q}_1 = \{(\tau, u, v, f) \in E : |\nabla\tau| \leq C_3 \text{ q.t.p. em } Q\} \text{ e } \mathcal{Q}_2 = \{(\tau, u, v, f) \in E : M(\tau, u, v, f) = 0\},$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido, como nas seções anteriores, por $M(\tau, u, v, f)$ $= (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$ se, e somente se, (τ, u, v, f) é solução do sistema (6.1.5) com não-homogeneidade $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$. Lembremos que $M(\tau, u, v, f) = 0$ se, e somente se, (τ, u, v, f) é solução do problema (2.0.1).

Antes de demonstrarmos a existência de controle ótimo para este problema, também é necessário demonstrar que o conjunto admissível, U_{ad}, é não vazio. Mas procedendo praticamente como no Lema 6.9, obtemos o resultado a seguir.

Lema 6.11 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\tilde{r}}(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W^2_{\tilde{l}}(\Omega)$, com $\tilde{r}$ e $\tilde{l}$ satisfazendo (6.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, $0 \le u_0, v_0 \le 1$ e $|\nabla\tau_0| \le C_3$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $r \ge 2s$, então $U_{ad} \ne \emptyset$.*

6.5.1 Existência de Solução Ótima

Usando o Lema 6.11, de modo análogo como foi demonstrada a existência de uma solução ótima do problema (6.4.20), demonstra-se a existência de uma solução ótima do problema (6.5.21), que é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 6.9 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\tilde{r}}(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W^2_{\tilde{l}}(\Omega)$, com $\tilde{r}$ e $\tilde{l}$ satisfazendo (6.0.2), são tais que $\frac{\partial\tau_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$, $u_0, v_0 \ge 0$, $u_0 + v_0 \le 1$ e $|\nabla\tau_0| \le C_3$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2k}(Q)$, u_d, $v_d \in L^{2m}(Q)$, com k e m quaisquer inteiros tais que k, $m \ge 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (6.5.21) possui uma solução ótima.*

Na próxima seção estudaremos condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (6.5.21).

6.5.2 Condição Necessária de Otimalidade

Para demonstrarmos condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (6.5.21) não podemos proceder como na demonstração do Teorema 6.8, pois $int Q_1 = \emptyset$. Então neste caso Q_1 não é uma restrição de desigualdade, mas sim uma restrição de igualdade. Logo não poderemos utilizar o Teorema de Dubovitskii e Milyutin (Teorema 5.1). Precisaremos então do Teorema 5.7, que é uma generalização do Teorema de Dubovitskii e Milyutin, como na demonstração do Teorema 6.6.

Para obtermos as condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (6.5.21) precisaremos do cone das direções de descida do funcional $J(\cdot)$, e dos cones das direções tangentes de Q_1 e Q_2 e os cones duais.

Para isso, consideremos uma solução ótima $(\tau, u, v, f) \in E$ do problema (6.5.21). Lembremos que o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ e seu dual são dados pelo Lema 6.2. E o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ, u, v, f) e seu dual são dados pelo Lema 6.4. Finalmente, temos que

Lema 6.12 *O cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ é dado por*

$$TC(Q_1, (\tau, u, v, f))$$
$$= \{(\theta, w, z, h) \in E : \langle \nabla\tau(x,t), \nabla\theta(x,t)\rangle \leq 0 \text{ para quase todo } (x,t) \text{ tal que } |\nabla\tau(x,t)| = C_3\},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico em $\mathbb{R}^3$

Demonstração:

Lembrando que, por definição, o cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ é dado por

$$TC(Q_1, (\tau, u, v, f)) = \{(\theta, w, z, h) : \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ \exists r(\varepsilon) \in E, \text{ com } \|r(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon),$$
$$\text{tal que } (\tau, u, v, f) + \varepsilon(\theta, w, z, h) + r(\varepsilon) \in Q_1\}.$$

Pela definição de Q_1, temos que $(\theta, w, z, h) \in Q_1, (\tau, u, v, f))$, se e somente se, para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, existe $r(\varepsilon) \in E$, com $\|r(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon)$, tal que $|\nabla\tau + \varepsilon\nabla\theta + \nabla r_1(\varepsilon))| = |\nabla(\tau + \varepsilon\theta + r_1(\varepsilon))| \leq C_3$ q.t.p. em Q, onde $r_1(\varepsilon)$ denota a primeira componente de $r(\varepsilon)$.

Mas

$$|\nabla\tau + \varepsilon\nabla\theta + \nabla r_1(\varepsilon))|^2$$
$$= |\nabla\tau|^2 + \varepsilon^2|\nabla\theta|^2 + |\nabla r_1(\varepsilon))|^2 + 2\varepsilon\langle\nabla\tau, \nabla\theta\rangle + 2\varepsilon\langle\nabla\theta, \nabla r_1(\varepsilon)\rangle + 2\langle\nabla\tau, \nabla r_1(\varepsilon)\rangle \leq C_3^2$$

para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, se e somente se, $\langle\nabla\tau, \nabla\theta\rangle \leq 0$ quando $|\nabla\tau| = C_3$. Ou seja, $(\theta, w, z, h) \in TC(Q_1, (\tau, u, v, f))$ se, e somente se, $\langle\nabla\tau(x,t), \nabla\theta(x,t)\rangle \leq 0$ q.t.p. em $\{(x,t) : |\nabla\tau(x,t)| = C_3\}$.

■

Agora lembremos que, por definição, o cone dual de $TC(Q_1, (\tau, u, v, f))$ é dado por

$$[TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^* = \{g_1 \in E' : g_1(\theta, w, z, h) \geq 0,\ \forall\ (\theta, w, z, h) \in TC(Q_1)\}.$$

Para $[TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^*$ temos o seguinte resultado:

Lema 6.13 $[TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^* \subset \left[W_r^{2,1}(Q)\right]'$, *isto é, para cada $g_1 \in [TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^*$ existe $\psi_1 \in \left[W_r^{2,1}(Q)\right]'$ tal que $g_1(\theta, w, z, h) = \psi_1(\theta)$, para todo $(\theta, w, z, h) \in E$.*

Demonstração:

Seja $g_1 \in [TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^*$. Como $[TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^* \subset E'$, existem $\psi_1 \in \left(W_r^{2,1}(Q)\right)'$, ψ_2, $\psi_3 \in \left(W_l^{2,1}(Q)\right)'$ e $\psi_4 \in (L^r(Q))'$, tais que

$$g_1(\varphi, w, z, h) = \psi_1(\varphi) + \psi_2(w) + \psi_3(z) + \psi_4(h),$$

para todo $(\varphi, w, z, h) \in E$.

Tomando $w, z \in W_l^{2,1}(Q)$, $h \in L^r(Q)$ quaisquer e tomando $\varphi \in W_r^{2,1}(Q)$ tal que $\langle\nabla\tau(x,t), \nabla\varphi(x,t)\rangle \leq 0$ para (x,t) tal que $|\nabla\tau(x,t)| = C_3$ temos que, $(\varphi, kw, kz, kh) \in TC(Q_1, (\tau, u, v, f))$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, e assim $g_1(\varphi, kw, kz, kh) = \psi_1(\varphi) + k\psi_2(w) + k\psi_3(z) + k\psi_4(h)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Mas por definição $[TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^* = \{g_1 \in E' : g_1(\varphi, w, z, h) \geq 0,\ \forall\ (\varphi, w, z, h) \in TC(Q_1, (\tau, u, v, f))\}$. Então,

$$g_1(\varphi, kw, kz, kh) = \psi_1(\varphi) + k\psi_2(w) + k\psi_3(z) + k\psi_4(h) \geq 0,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Logo, devemos ter $\psi_2 = \psi_3 = \psi_4 \equiv 0$. De onde, $g_1(\varphi, w, z, h) = g_1(\varphi) = \psi_1(\varphi)$.

∎

Vejamos agora um resultado sobre a condição necessária de otimalidade para o problema de otimização (6.5.21).

Teorema 6.10 *Seja* $(\tau, u, v, f) \in E = W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$ *uma solução ótima do problema (6.5.21), com* r *e* l *satisfazendo (6.0.2). Se* $r \geq 2s$, *então existem funções* $(\theta, p, q) \in W_{2s}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q)$ *satisfazendo ao sistema adjunto (6.1.10). Além disso, existe* $g_1 \in [TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^* \subset \left[W_r^{2,1}(Q)\right]'$ *tal que*

$$\int_0^T \int_\Omega \left(Nsf^{2s-1} + \theta\right).h\ dxdt = -g_1(\varphi),$$

para todo (φ, w, z, h) *solução de (6.1.12).*

Demonstração:

Suponha que $J(\cdot)$ assume um mínimo local no ponto $(\tau, u, v, f) \in Q = Q_1 \cap Q_2$. Pelos Lemas 6.2, 6.4 e 6.12, J tem direções de descida $DC(J, (\tau, u, v, f))$ e Q_1 e Q_2 tem direções tangentes $TC(Q_1, (\tau, u, v, f))$ e $TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$, respectivamente, em (τ, u, v, f). Além disso, o cone $DC(J, (\tau, u, v, f))$ é aberto, pois os cones de descida sempre o são.

Para podermos usar o Teorema 5.7 ainda precisamos mostrar que: os cones $DC(J, (\tau, u, v, f))$, $TC(Q_1, (\tau, u, v, f))$ e $TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$ são convexos, os cones $TC(Q_i, (\tau, u, v, f))$, $i = 1, 2$, são fechados, o cone $TC(Q_1, (\tau, u, v, f)) \cap TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$ está contido no cone tangente $TC\left(Q_1 \cap Q_2, (\tau, u, v, f)\right)$ associado ao conjunto das restrições de igualdade $Q_1 \cap Q_2$ e os cones duais $[TC(Q_i, (\tau, u, v, f))]^*$, $i = 1, 2$, formam um sistema de cones de mesmo sentido.

Mostremos então tais fatos:

i) Primeiramente observemos que os cones $DC(J, (\tau, u, v, f))$, $TC(Q_1, (\tau, u, v, f))$ e $TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$ são convexos;

De fato, pelo Lema 6.2 o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ é dado por $DC(J, (\tau, u, v, f)) = \{(\varphi, w, z, h) : J'(\tau, u, v, f)(\varphi, w, z, h) < 0\}$, que é convexo. Pois $J'(\tau, u, v, f)(\cdot)$ é linear em (φ, w, z, h).

Pelo Lema 6.12 o cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ é dado por

$$\begin{gathered} TC(Q_1, (\tau, u, v, f)) \\ = \{(\theta, w, z, h) \in E : \langle \nabla\tau(x,t), \nabla\theta(x,t)\rangle \leq 0 \textit{ para quase todo } (x,t) \textit{ tal que } |\nabla\tau(x,t)| = C_3\}, \end{gathered}$$

que é convexo. Pois $\langle \nabla\tau, \nabla(\cdot)\rangle$ é linear em θ.

Finalmente, pelo Lema 6.4, o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ, u, v, f) é o subespaço vetorial $TC(Q_2, (\tau, u, v, f)) = \{(\varphi, w, z, h) \in E : M'(\tau, u, v, f)(\varphi, w, z, h) = 0\}$, então é convexo.

ii) Agora observemos que os cones $TC(Q_1, (\tau, u, v, f))$ e $TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$ são fechados;

De fato, pelo Lema 6.4, o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ, u, v, f) é dado por $TC(Q_2, (\tau, u, v, f)) = \{(\varphi, w, z, h) \in E : M'(\tau, u, v, f)(\varphi, w, z, h) = 0\}$, que é fechado em E.

Pelo Lema 6.12 o cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, f) \in E$ é dado por

$$TC(Q_1, (\tau, u, v, f))$$
$$= \{(\theta, w, z, h) \in E : \langle \nabla\tau(x,t), \nabla\theta(x,t)\rangle \leq 0 \textit{ para quase todo } (x,t) \textit{ tal que } |\nabla\tau(x,t)| = C_3\},$$

que é fechado em E.

iii) Mostremos agora que o cone $TC(Q_1, (\tau, u, v, f)) \cap TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$ está contido no cone tangente $TC(Q, (\tau, u, v, f))$ associado ao conjunto das restrições de igualdade $Q = Q_1 \cap Q_2$;

Seja $(\varphi, w, z, h) \in TC(Q_1, (\tau, u, v, f)) \cap TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$. Precisamos mostrar que $(\varphi, w, z, h) \in TC(Q_1 \cap Q_2, (\tau, u, v, f))$.

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $r(\varepsilon) \in E$, com $\|r(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon)$, tal que

$$(\tau, u, v, f) + \varepsilon(\varphi, w, z, h) + r(\varepsilon) \in Q_1 \cap Q_2.$$

Como $(\varphi, w, z, h) \in TC(Q_1, (\tau, u, v, f))$, por definição existe $r_1(\varepsilon) \in E$, com $\|r_1(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon)$, tal que

$$(\varphi_\varepsilon, w_\varepsilon, z_\varepsilon, h_\varepsilon) := (\tau, u, v, f) + \varepsilon(\varphi, w, z, h) + r_1(\varepsilon) \in Q_1$$

e como $(\varphi, w, z, h) \in TC(Q_2, (\tau, u, v, f))$, por definição existe $r_2(\varepsilon) \in E$, com $\|r_2(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon)$, tal que

$$(\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{w}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon) := (\tau, u, v, f) + \varepsilon(\varphi, w, z, h) + r_2(\varepsilon) \in Q_2.$$

Tomemos φ_ε definido acima. Resolvendo o problema (2.0.1) encontremos w'_ε, z'_ε e h'_ε tais que $M(\varphi_\varepsilon, w'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h'_\varepsilon) = 0$. Então, temos que, $(\varphi_\varepsilon, w'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h'_\varepsilon) \in Q_1 \cap Q_2$. Além disso, temos que $(\varphi_\varepsilon, w'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h'_\varepsilon) = (\tau, u, v, f) + \varepsilon(\varphi, w, z, h) + r(\varepsilon)$. Precisamos mostrar que $\|r(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon)$.

Usando desigualdade triangular e estabilidade do sistema linear (6.1.9), temos que

$$\|r(\varepsilon)\|_E = \|(\varphi_\varepsilon, w'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h'_\varepsilon) - (\tau, u, v, f) - \varepsilon(\varphi, w, z, h)\|_E$$

$$\leq \|(\varphi_\varepsilon, w'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h'_\varepsilon) - (\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{w}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon)\|_E + \|(\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{w}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon) - (\tau, u, v, f) - \varepsilon(\varphi, w, z, h)\|_E$$

$$\leq \|\varphi_\varepsilon - \widetilde{\varphi}_\varepsilon\|_{W^{2,1}_{2s}(Q)} + \|w'_\varepsilon - \widetilde{w}_\varepsilon\|_{W^{2,1}_{2s}(Q)} + \|z'_\varepsilon - \widetilde{z}_\varepsilon\|_{W^{2,1}_{2m}(Q)} + \|h'_\varepsilon - \widetilde{h}_\varepsilon\|_{L^{2s}(Q)} + \|r_2(\varepsilon)\|_E$$

$$\leq C\|\varphi_\varepsilon - \widetilde{\varphi}_\varepsilon\|_{W^{2,1}_{2s}(Q)} + \|r_2(\varepsilon)\|_E \leq C\|(\varphi_\varepsilon, w_\varepsilon, z_\varepsilon, h_\varepsilon) - (\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{w}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon)\|_E + \|r_2(\varepsilon)\|_E$$

$$\leq C\|(\varphi_\varepsilon, w_\varepsilon, z_\varepsilon, h_\varepsilon) - (\tau, u, v, f) - \varepsilon(\varphi, w, z, h)\|_E$$

$$+C\|(\tau,u,v,f)+\varepsilon(\varphi,w,z,h)-(\widetilde{\varphi}_\varepsilon,\widetilde{w}_\varepsilon,\widetilde{z}_\varepsilon,\widetilde{h}_\varepsilon)\|_E+\|r_2(\varepsilon)\|_E$$

$$\leq C\|r_1(\varepsilon)\|_E+(C+1)\|r_2(\varepsilon)\|_E=o(\varepsilon).$$

Logo, $(\varphi,w,z,h)\in TC(Q_1\cap Q_2,(\tau,u,v,f))$, e assim, $TC(Q_1,(\tau,u,v,f))\cap TC(Q_2,(\tau,u,v,f))\subset TC(Q_1\cap Q_2,(\tau,u,v,f))$.

iv) Finalmente mostremos que os cones duais $[TC(Q_i,(\tau,u,v,f))]^*$, $i=1,2$, formam um sistema de cones de mesmo sentido;

Para isso, seja $M>0$ e sejam $g_i\in[TC(Q_i,(\tau,u,v,f))]^*$, para $i=1,2$, tais que $\|g_1+g_2\|_{E'}\leq M$. Precisamos mostrar que existem M_1, $M_2>0$ tais que $\|g_i\|_{E'}\leq M_i$, para $i=1,2$.

Pelo Lema 6.13, temos que $g_1(\varphi,w,z,h)=\psi_1(\varphi)$, com $\psi_1\in\left(W_r^{2,1}(Q)\right)'$. E como $g_2\in[TC(Q_2,(\tau,u,v,f))]^*\subset E'$, então temos que $g_2(\varphi,w,z,h)=\phi_1(\varphi)+\phi_2(w)+\phi_3(z)+\phi_4(h)$, com $\phi_1\in\left(W_{2s}^{2,1}(Q)\right)'$, ϕ_2, $\phi_3\in\left(W_{2m}^{2,1}(Q)\right)'$ e $\phi_4\in\left(L^{2s}(Q)\right)'$.

Deste modo, obtemos que

$$M\geq\|g_1+g_2\|_{E'}\geq C\left[\|\psi_1+\phi_1\|_{(W_r^{2,1}(Q))'}+\|\phi_2\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}+\|\phi_3\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}+\|\phi_4\|_{(L^r(Q))'}\right].$$

De onde, já temos que $\|\phi_2\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}$, $\|\phi_3\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}$, $\|\phi_4\|_{(L^r(Q))'}\leq M/C$.

Agora, dado $\varphi\in W_r^{2,1}(Q)$ existe $(w,z,h)\in W_l^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)\times L^r(Q)$ tal que $M'(\tau,u,v,f)(\varphi,w,z,h)=0$. Logo, $g_2(\varphi,w,z,h)=\phi_1(\varphi)+\phi_2(w)+\phi_3(z)+\phi_4(h)=0$, e portanto,

$$|\phi_1(\varphi)|\leq|\phi_2(w)|+|\phi_3(z)|+|\phi_4(h)|$$

$$\leq\|\phi_2\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}\|w\|_{W_l^{2,1}(Q)}+\|\phi_3\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}\|z\|_{W_l^{2,1}(Q)}+\|\phi_4\|_{(L^r(Q))'}\|h\|_{L^r(Q)}$$

$$\leq\frac{M}{C}\left[\|w\|_{W_l^{2,1}(Q)}+\|z\|_{W_l^{2,1}(Q)}+\|h\|_{L^r(Q)}\right]\leq CM\|\varphi\|_{W_r^{2,1}(Q)}.$$

Como $\varphi\in W_r^{2,1}(Q)$ é arbitrário obtemos que $\|\phi_1\|_{(W_r^{2,1}(Q))'}\leq CM$, e portanto,

$$\|g_2\|_{E'}\leq C\left[\|\phi_1\|_{(W_r^{2,1}(Q))'}+\|\phi_2\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}+\|\phi_3\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}+\|\phi_4\|_{(L^r(Q))'}\right]\leq CM=:M_2.$$

Finalmente, temos que

$$\|g_1\|_{E'}\leq C[\|\psi_1\|_{(W_{2s}^{2,1}(Q))'}\leq C\left[\|\psi_1+\phi_1\|_{(W_{2s}^{2,1}(Q))'}+\|\phi_1\|_{(W_{2s}^{2,1}(Q))'}\right]\leq CM=:M_1.$$

Portanto, os cones $[TC(Q_i,(\tau,u,v,f))]^*$, $i=1,2$, formam um sistema de cones de mesmo sentido.

Como todas as hipóteses do Teorema 5.7 são satisfeitas segue deste teorema que existem formas lineares contínuas $g_0\in[DC(J,(\tau,u,v,f))]^*$, $g_1\in[TC(Q_1,(\tau,u,v,f))]^*$ e $g_2\in[TC(Q_2,(\tau,u,v,f))]^*$, não simultaneamente nulas, tais que,

$$g_0+g_1+g_2=0. \tag{6.5.22}$$

Agora, procedendo exatamente como no Teorema 6.8, obtemos que existe
$g_1 \in [TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^*$ tal que

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\lambda N s f^{2s-1} + \theta\right) h \; dxdt = g_1(\varphi, w, z, h),$$

para todo (φ, w, z, h) solução do sistema (6.1.12).

Finalmente, pelo Lema 6.13 temos que $[TC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^* \subset \left(W_\tau^{2,1}(Q)\right)'$, logo,

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\lambda N s f^{2s-1} + \theta\right) h \; dxdt = g_1(\varphi),$$

para todo (φ, w, z, h) solução do sistema (6.1.12).

$\blacksquare$

6.6 Um Problema com Restrições sobre o Controle e sobre a Temperatura

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$\min_{(\tau,u,v,f)\in Q} J(\tau, u, v, f), \tag{6.6.23}$$

onde o funcional J é dado por (6.0.3) e $Q = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$, sendo Q_1 e Q_2 dados pelas restrições de desigualdade

$$Q_1 = \{(\tau, u, v, f) \in E : C_1 \leq \tau \leq C_2 \text{ q.t.p. em } Q\} \text{ e}$$
$$Q_2 = \{(\tau, u, v, f) \in E : \|f\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_3\},$$

respectivamente, com $C_3 \geq |l_1|\widetilde{k}_1(C_1, C_2) + |l_2|\widetilde{k}_2(C_1, C_2)$, onde $\widetilde{k}_1$ e $\widetilde{k}_2$ são como em (6.6.24) na demonstração do Lema 6.14. E Q_3 é dado pela restrição de igualdade

$$Q_3 = \{(\tau, u, v, f) \in E : M(\tau, u, v, f) = 0\},$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido, como nas seções anteriores, por $M(\tau, u, v, f)$
$= (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$, se, e somente se, (τ, u, v, f) é solução do sistema (6.1.5) com não-homogeneidade $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$. Lembremos que $M(\tau, u, v, f) = 0$ se, e somente se, (τ, u, v, f) é solução do problema (2.0.1).

Antes de demonstrarmos a existência de controle ótimo para este problema, também é necessário demonstrar que o conjunto admissível, U_{ad}, é não vazio.

Lema 6.14 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$. Suponha também que $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (6.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, $0 \leq u_0, v_0 \leq 1$, $C_1 \leq \tau_0 \leq C_2$ q.t.p. em Q e $C_3 \geq |l_1|\widetilde{k}_1(C_1,C_2) + |l_2|\widetilde{k}_2(C_1,C_2)$, onde $\widetilde{k}_1$ e $\widetilde{k}_2$ são como em (6.6.24). Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $r \geq 2s$, então $U_{ad} \neq \emptyset$.*

Demonstração:

Seja $\tau \in W^{2,1}_r(Q)$ solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial t} - b\Delta\tau = 0 \quad & \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial\tau}{\partial n} = 0 \quad & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ \tau = \tau_0 \quad & \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\}. \end{aligned}$$

Pelo princípio de máximo para equações parabólicas temos que $\tau(x,t) \geq \min\{\tau_0(x) : x \in \Omega\} \geq C_1$ e $\tau(x,t) \leq \max\{\tau_0(x) : x \in \Omega\} \leq C_2$. Logo $C_1 \leq \tau \leq C_2$.

Pelos Teoremas 2.7 e 2.9 temos que existe único $(u,v) \in W^{2,1}_l(Q) \times W^{2,1}_l(Q)$ solução do problema (2.6.42) com $-2m_i = c_i\tau + d_i$, sendo c_i, d_i os mesmos do problema (6.1.5), para $i = 1,2$, e, além disso, u e v satisfazem $\|u\|_{W^{2,1}_l(Q)} \leq \overline{k}_1(C_1,C_2)$ e $\|v\|_{W^{2,1}_l(Q)} \leq \overline{k}_2(C_1,C_2)$. Como $l \geq r \geq 2s$ temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2,1}_{2s}(Q)} \leq C\|u\|_{W^{2,1}_l(Q)} \leq \widetilde{k}_1(C_1,C_2) \quad & \text{e} \\ \|v\|_{W^{2,1}_{2s}(Q)} \leq C\|v\|_{W^{2,1}_l(Q)} \leq \widetilde{k}_2(C_1,C_2). & \end{aligned} \tag{6.6.24}$$

Tomando $f = -l_1\frac{\partial u}{\partial t} - l_2\frac{\partial v}{\partial t}$ temos que $f \in L^{2s}(Q)$, $(\tau,u,v,f) \in E$ é solução do problema (2.0.1) e

$$\|f\|_{L^{2s}(Q)} \leq |l_1|\|u\|_{W^{2,1}_{2s}(Q)} + |l_2|\|v\|_{W^{2,1}_{2s}(Q)} \leq |l_1|\widetilde{k}_1(C_1,C_2) + |l_2|\widetilde{k}_2(C_1,C_2) \leq C_3.$$

Logo, $(\tau,u,v,f) \in U_{ad}$.

∎

6.6.1 Existência de Solução Ótima

Usando o Lema 6.14, de modo análogo como foi demonstrada a existência de uma solução ótima do problema (6.4.20), demonstra-se a existência de uma solução ótima do problema (6.6.23), que é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 6.11 *Suponha que b, l_1, l_2, k_1, k_2, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k_1, k_2, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, $v_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (6.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, $0 \leq u_0, v_0 \leq 1$, $C_1 \leq \tau_0 \leq C_2$ q.t.p. em Q e $C_3 \geq |l_1|\widetilde{k}_1(C_1,C_2) + |l_2|\widetilde{k}_2(C_1,C_2)$, onde $\widetilde{k}_1$ e $\widetilde{k}_2$ são como em (6.6.24). Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2k}(Q)$, u_d, $v_d \in L^{2m}(Q)$, com k e m quaisquer inteiros tais que k, $m \geq 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (6.6.23) possui uma solução ótima.*

Capítulo 7

Problemas de Controle Para o Modelo de Solidificação 2

Aqui vamos demonstrar a existência de solução ótima para problemas de controle relacionados ao Modelo de Solidificação 2 e usar o formalismo de Dubovitskii e Milyutin para encontrar condições necessárias de otimalidade.

Neste capítulo vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado e de classe C^2, como nos primeiros capítulos, e também os espaços

$$\begin{aligned} E &:= W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q) \qquad \text{e} \\ \widetilde{E} &:= L^r(Q) \times L^l(Q) \times L^l(Q) \times L^l(Q) \times W_{\widetilde{r}}^2(\Omega) \times W_{\widetilde{l}}^2(\Omega) \times W_{\widetilde{l}}^2(\Omega) \times W_{\widetilde{l}}^2(\Omega), \end{aligned} \tag{7.0.1}$$

onde

$$r > 5/2, \quad l \geq r, \quad \widetilde{r} = \max\{2, 3r/5\} \quad \text{e} \quad \widetilde{l} = \max\{2, 3l/5\}. \tag{7.0.2}$$

Durante este capítulo vamos tratar de problemas de controle ótimo envolvendo o funcional $J : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} J(\tau, u, v, f) = \frac{\alpha_1}{2} \int_0^T \int_\Omega |\tau - \tau_d|^{2n} dxdt + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^T \int_\Omega |u - u_d|^{2m} dxdt \\ + \frac{\alpha_3}{2} \int_0^T \int_\Omega |v - v_d|^{2m} dxdt + \frac{\alpha_4}{2} \int_0^T \int_\Omega |w - w_d|^{2m} dxdt + \frac{N}{2} \int_0^T \int_\Omega |f|^{2s} dxdt, \end{aligned} \tag{7.0.3}$$

onde α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \geq 0$ e $N > 0$ são constantes, n, m e s são tais que n, m e $s \geq 1$, e $\tau_d \in L^{2n}(Q)$, u_d, v_d, $w_d \in L^{2m}(Q)$ são funções dadas.

7.1 Um Problema de Controle Simples

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$\min_{(\tau,u,v,w,f)\in Q} J(\tau,u,v,w,f), \tag{7.1.4}$$

onde o funcional J é dado por (7.0.3) e Q é dado pela restrição de igualdade

$$Q = \{(\tau,u,v,w,f) \in E : M(\tau,u,v,w,f) = 0\},$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido por

$$M(\tau,u,v,w,f) = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6,\varphi_7,\varphi_8),$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tau}{\partial t} - b\Delta\tau - l_1\frac{\partial u}{\partial t} - l_2\frac{\partial v}{\partial t} - l_3\frac{\partial w}{\partial t} - f = \varphi_1 \quad \text{em} \quad Q\\
&\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u + a_1uw(w-u+c_1\tau+d_1) + a_3uv(v-u+c_3\tau+d_3) = \varphi_2 \quad \text{em} \quad Q\\
&\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v + a_2vw(w-v+c_2\tau+d_2) + a_3uv(u-v-c_3\tau-d_3) = \varphi_3 \quad \text{em} \quad Q\\
&\frac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w + a_1uw(u-w-c_1\tau-d_1) + a_2vw(v-w-c_2\tau-d_2) = \varphi_4 \quad \text{em} \quad Q\\
&\frac{\partial\tau}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T)\\
&\tau-\tau_0=\varphi_5, \quad u-u_0=\varphi_6 \quad v-v_0=\varphi_7 \quad \text{e} \quad w-w_0=\varphi_8 \quad \text{em} \quad \Omega\times\{t=0\}.
\end{aligned} \tag{7.1.5}$$

Observação 7.1 *Observe que $M(\tau,u,v,w,f) = 0$ se, e somente se, (τ,u,v,w,f) é solução do problema (4.0.1). E observe também que pelas definições de E e $\widetilde{E}$ dadas em (7.0.1), o operador M acima está bem definido.*

A seguir mostraremos a existência de uma solução ótima do problema (7.1.4).

7.1.1 Existência de Solução Ótima

Para mostrar a existência de uma solução ótima do problema (7.1.4) precisaremos do seguinte resultado.

Lema 7.1 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes com b, k, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (7.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0, $w_0 \geq 0$ e $u_0+v_0+w_0 = 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $r \geq 2s$, então $U_{ad} \neq \emptyset$.*

Demonstração:

Seja $f \in L^r(Q)$, como $l \geq r$ por (7.0.2), então pelos Teoremas 4.1 e 4.2 e pelo Corolário 4.2 existe um único $(\tau,u,v,w) \in W^{2,1}_r(Q)\times W^{2,1}_l(Q)\times W^{2,1}_l(Q)\times W^{2,1}_l(Q)$. Logo, $(\tau,u,v,w,f) \in E$, com E dado por (7.0.1), e é solução do problema (4.0.1), ou seja, $M(\tau,u,v,w,f) = 0$.

Além disso, como $r \geq 2s$, temos que $f \in L^{2s}(Q)$. E como r, $l > 5/2$ temos que $W_r^{2,1}(Q) \subset L^{2n}(Q)$ e $W_l^{2,1}(Q) \subset L^{2m}(Q)$ com inclusão contínua. Logo, temos que $(\tau, u, v, w) \in L^{2n}(Q) \times L^{2m}(Q) \times L^{2m}(Q) \times L^{2m}(Q)$. Assim, $(\tau, u, v, w, f) \in U_{ad}$.

■

Teorema 7.1 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W_{\tilde{r}}^2(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W_{\tilde{l}}^2(\Omega)$, com $\tilde{r}$ e $\tilde{l}$ satisfazendo (7.0.2), são tais que $\frac{\partial \tau_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0$, $u_0, v_0, w_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2n}(Q)$ e u_d, v_d, $w_d \in L^{2m}(Q)$, com n e m quaisquer inteiros tais que n, $m \geq 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (7.1.4) possui uma solução ótima.*

Demonstração:

Primeiramente observemos que se $r \geq 2s$, então $U_{ad} \neq \emptyset$, pelo Lema 7.1.

Seja $\{(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n)\} \subset U_{ad}$ uma seqüência minimizante do funcional J.

Como $J(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n) \leq C$, pela estrutura de J temos que

$$\|f_n\|_{L^r(Q)} = \|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$$

e pelo Teorema 4.2 temos que

$$\|\tau_n\|_{W_r^{2,1}(Q)} + \|u_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} + \|v_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} + \|w_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} \leq C.$$

Podemos então tomar uma subseqüência de $\{f_n\}$ e de $\{(\tau_n, u_n, v_n)\}$, com $M(\tau_n, u_n, v_n, f_n) = 0$, que continuaremos denotando por $\{(\tau_n, u_n, v_n, f_n)\}$ tal que

$$\begin{array}{lll} f_n \rightharpoonup f & \text{fracamente em} & L^r(Q), \\ \tau_n \rightharpoonup \tau & \text{fracamente em} & W_r^{2,1}(Q), \\ u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em} & W_l^{2,1}(Q), \\ v_n \rightharpoonup v & \text{fracamente em} & W_l^{2,1}(Q), \\ w_n \rightharpoonup w & \text{fracamente em} & W_l^{2,1}(Q). \end{array}$$

Como $r, l > 5/2$, pelo Corolário 1.2, temos que $W_r^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ e $W_l^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ com inclusão contínua e compacta. Então,

$$\begin{array}{lll} \tau_n \to \tau & \text{fortemente em} & L^\infty(Q), \\ u_n \to u & \text{fortemente em} & L^\infty(Q), \\ v_n \to v & \text{fortemente em} & L^\infty(Q), \\ w_n \to w & \text{fortemente em} & L^\infty(Q). \end{array}$$

Mostremos agora que $M(\tau, u, v, w, f) = 0$, ou seja, que (τ, u, v, w, f) é solução do problema (4.0.1).

Primeiramente observemos que cada quíntupla $(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n)$ satisfaz o problema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_n}{\partial t} - b\Delta\tau_n &= l_1\frac{\partial u_n}{\partial t} + l_2\frac{\partial v_n}{\partial t} + l_3\frac{\partial w_n}{\partial t} + f_n \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial u_n}{\partial t} - k\Delta u_n &= -a_1u_nw_n(w_n - u_n + c_1\tau_n + d_1) - a_3u_nv_n(v_n - u_n + c_3\tau_n + d_3) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial v_n}{\partial t} - k\Delta v_n &= -a_2v_nw_n(w_n - v_n + c_2\tau_n + d_2) - a_3v_nu_n(u_n - v_n - c_3\tau_n - d_3) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial w_n}{\partial t} - k\Delta w_n &= -a_1u_nw_n(u_n - w_n - c_1\tau_n - d_1) - a_2v_nw_n(v_n - w_n - c_2\tau_n - d_2) \quad \text{em} \quad Q\\
\frac{\partial \tau_n}{\partial n} = \frac{\partial u_n}{\partial n} &= \frac{\partial v_n}{\partial n} = \frac{\partial w_n}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T)\\
\tau_n = \tau_0, \quad u_n = u_0, &\quad v_n = v_0 \quad \text{e} \quad w_n = w_0 \quad \text{em} \quad \Omega\times\{t=0\}.
\end{aligned}
\tag{7.1.6}
$$

Como $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $L^r(Q)$ temos que $f_n \to f$ no sentido das distribuições.

Como $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $W_r^{2,1}(Q)$ temos que

$$\tau_n \to \tau, \quad \frac{\partial \tau_n}{\partial t} \to \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad \text{e} \quad \Delta\tau_n \to \Delta\tau$$

no sentido das distribuições.

E como, $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ e $w_n \rightharpoonup w$ fracamente em $W_l^{2,1}(Q)$ temos que

$$u_n \to u, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \Delta u_n \to \Delta u$$

$$v_n \to v, \quad \frac{\partial v_n}{\partial t} \to \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \Delta v_n \to \Delta v \quad \text{e}$$

$$w_n \to w, \quad \frac{\partial w_n}{\partial t} \to \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \Delta w_n \to \Delta w,$$

respectivamente, no sentido das distribuições.

Finalmente, como $\tau_n \to \tau$, $u_n \to u$, $v_n \to v$ e $w_n \to w$ fortemente em $L^\infty(Q)$, temos que

$$
\begin{aligned}
a_1u_nw_n(w_n - u_n + c_1\tau_n + d_1) &\to a_1uw(w - u + c_1\tau + d_1),\\
a_3u_nv_n(v_n - u_n + c_3\tau_n + d_3) &\to a_3uv(v - u + c_3\tau + d_3),\\
a_2v_nw_n(w_n - v_n + c_2\tau_n + d_2) &\to a_2vw(w - v + c_2\tau + d_2),\\
a_3u_nv_n(u_n - v_n - c_3\tau_n - d_3) &\to a_3uv(u - v - c_3\tau - d_3),\\
a_1u_nw_n(u_n - w_n - c_1\tau_n - d_1) &\to a_1uw(u - w - c_1\tau - d_1) \quad \text{e}\\
a_2v_nw_n(v_n - w_n - c_2\tau_n - d_2) &\to a_2vw(v - w - c_2\tau - d_2),
\end{aligned}
$$

no sentido das distribuições.

Então, tomando o limite $n \to \infty$ nas quatro primeiras equações de (7.1.6) obtemos que (τ, u, v, w, f) satisfazem as quatro primeiras equações de (4.0.1) no sentido das distribuições. Mas como, $(\tau, u, v, w, f) \in W_r^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)\times L^r(Q)$, temos que (τ, u, v, w, f) satisfazem as quatro primeiras equações de (4.0.1) neste espaço.

Mostremos agora que τ, u, v e w satisfazem as condições iniciais e de fronteira do problema (4.0.1). Para isso consideremos $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R})$ tal que $\phi(x,T) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Multiplicando a primeira equação de (7.1.6) por ϕ e integrando em $\Omega \times (0,T)$ temos

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \tau_n}{\partial t}.\phi \, dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\tau_n.\phi \, dxdt = \int_0^T \int_\Omega \left(l_1 \frac{\partial u_n}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v_n}{\partial t} + l_3 \frac{\partial w_n}{\partial t} + f_n \right) \phi \, dxdt.$$

Usando integração por partes nas duas integrais do primeiro membro da igualdade acima, como $\tau_n = \tau_0$ para $t = 0$, $\phi(T) = 0$ e $\frac{\partial \tau_n}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$-\int_0^T \int_\Omega \tau_n \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dxdt - \int_\Omega \tau_0 \phi(0) dx + \int_0^T \int_\Omega \nabla\tau_n.\nabla\phi \, dxdt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega \left(l_1 \frac{\partial u_n}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v_n}{\partial t} + l_3 \frac{\partial w_n}{\partial t} + f_n \right) \phi \, dxdt.$$

Como $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $L^r(Q)$ e $r > 2$ temos que $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $L^2(Q)$. Como $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $W_r^{2,1}(Q)$ temos que $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $L^2(Q)$. Como $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $W_r^{2,1}(Q)$, com $r > 2$, e $\frac{\partial \tau_n}{\partial t} \to \frac{\partial \tau}{\partial t}$ no sentido das distribuições, então $\frac{\partial \tau_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \tau}{\partial t}$ fracamente em $L^2(Q)$. E como $\tau_n \rightharpoonup \tau$ fracamente em $W_r^{2,1}(Q)$, com $r > 2$, e $\nabla\tau_n \to \nabla\tau$ no sentido das distribuições, temos que $\nabla\tau_n \rightharpoonup \nabla\tau$ fracamente em $L^2(Q)$. De modo análogo, temos que $\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial t}$ e $\frac{\partial w_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial w}{\partial t}$ fracamente em $L^2(Q)$. Logo, tomando o limite $n \to \infty$ na igualdade anterior obtemos

$$-\int_0^T \int_\Omega \tau \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dxdt - \int_\Omega \tau_0 \phi(0) dx + \int_0^T \int_\Omega \nabla\tau.\nabla\phi \, dxdt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega \left(l_1 \frac{\partial u}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v}{\partial t} + l_3 \frac{\partial w}{\partial t} + f \right) \phi \, dxdt.$$

Agora, multiplicando a primeira equação de (4.0.1) por ϕ e fazendo as mesmas integrações por partes obtemos que

$$-\int_0^T \int_\Omega \tau \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dxdt - \int_\Omega \tau(0)\phi(0) dx + \int_0^T \int_\Omega \nabla\tau.\nabla\phi \, dxdt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tau}{\partial n} \phi \, dxdt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega \left(l_1 \frac{\partial u}{\partial t} + l_2 \frac{\partial v}{\partial t} + l_3 \frac{\partial w}{\partial t} + f \right) \phi \, dxdt.$$

Comparando as duas últimas igualdades obtemos

$$\int_\Omega \tau_0 \phi(0) dx = \int_\Omega \tau(0)\phi(0) dx + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tau}{\partial n} \phi \, dxdt,$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ tal que $\phi(x,T) = 0$ para todo $x \in \Omega$. De onde, concluimos que $\tau_0 = \tau(0)$ q.t.p em Ω e $\frac{\partial \tau}{\partial n} = 0$ q.t.p. em $\partial\Omega \times (0,T)$.

Do mesmo modo, obtemos que $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$ e $w(0) = w_0$ q.t.p em Ω e $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$ q.t.p. em $\partial\Omega \times (0,T)$.

Logo, $(\tau, u, v, w, f) \in E$ satisfaz o problema (4.0.1). Além disso, como $r = 2s$ e r, $l > 5/2$, temos que $\tau \in W_r^{2,1}(Q) \subset L^{2s}(Q)$, u, v, $w \in W_l^{2,1}(Q) \subset L^{2m}(Q)$ e $f \in L^r(Q) = L^{2s}(Q)$, de onde, $J(\tau, u, v, w, f) < \infty$. E portanto, $(\tau, u, v, w, f) \in U_{ad}$.

Como $(\tau, u, v, w, f) \in U_{ad}$, se mostrarmos que $\liminf_{n\to\infty} J(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n) \geq J(\tau, u, v, w, f)$ concluimos que (τ, u, v, w, f) é uma solução ótima do problema (7.1.4). Então mostremos esta desigualdade.

Pela estrutura de J temos que este é contínuo na norma de $L := L^{2n}(Q) \times L^{2m}(Q) \times L^{2m}(Q) \times L^{2m}(Q) \times L^{2s}(Q)$, de onde temos que J é semi-contínuo inferiormente na topologia da norma em L. Além disso J é convexo, então J é semi-contínuo inferiormente na topologia fraca de L, e portanto, J é sequencialmente semi-contínuo inferiormente na topologia fraca de L. Logo,

$$(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n) \rightharpoonup (\tau, u, v, w, f) \quad \text{fracamente em} \quad L,$$

implica que

$$\liminf_{n\to\infty} J(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n) \geq J(\tau, u, v, w, f).$$

Como $(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n)$ é uma seqüência minimizante de J obtemos que (τ, u, v, w, f) é uma solução ótima do problema (7.1.4).

■

Observação 7.2 *Para o funcional de custo dado por*

$$\begin{aligned} J[\tau, u, v; f] &:= \frac{\alpha_1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\tau(x,t) - \tau_d(x,t)|^{2k} dxdt + \frac{\alpha_2}{2}\int_0^T\int_\Omega |u(x,t) - u_d(x,t)|^{2m_1} dxdt \\ &+ \frac{\alpha_3}{2}\int_0^T\int_\Omega |v(x,t) - v_d(x,t)|^{2m_2} dxdt + \frac{\alpha_4}{2}\int_0^T\int_\Omega |w(x,t) - w_d(x,t)|^{2m_3} dxdt + \frac{N}{2}\int_0^T\int_\Omega |f(x,t)|^{2s} dxdt \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

temos que se $u_d \in L^{m_1}(Q)$, $v_d \in L^{m_2}(Q)$ e $w_d \in L^{m_3}(Q)$, com m_1, m_2, $m_3 \geq 1$ não todos iguais, então o lema e o teorema anteriores continuam valendo. Para demonstrar tais resultados basta repetir as demonstrações anteriores substituindo m por m_1, m_2 ou m_3 nos locais convenientes.

Observação 7.3 *Resultados análogos valem para o funcional de custo dado por*

$$\begin{aligned} J[\tau, u, v; f] &:= \frac{\alpha_1}{2}\int_\Omega |\tau(x,T) - \tau_d(x)|^{2k} dx + \frac{\alpha_2}{2}\int_\Omega |u(x,T) - u_d(x)|^{2m_1} dx \\ &+ \frac{\alpha_3}{2}\int_\Omega |v(x,T) - v_d(x)|^{2m_2} dx + \frac{\alpha_4}{2}\int_\Omega |w(x,T) - w_d(x)|^{2m_3} dx + \frac{N}{2}\int_0^T\int_\Omega |f(x,t)|^{2s} dxdt, \end{aligned} \tag{7.1.8}$$

ou seja, se $u_d \in L^{m_1}(\Omega)$, $v_d \in L^{m_2}(\Omega)$ e $w_d \in L^{m_3}(\Omega)$, com m_1, m_2, $m_3 \geq 1$ não necessariamente iguais, então o lema e o teorema anteriores continuam valendo. Também podemos demonstrar tais resultados repetindo as demonstrações anteriores, substituindo m por m_1, m_2 ou m_3 nos locais convenientes.

Agora estudaremos condições necessárias para que $(\tau, u, v, w, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (7.1.4).

7.1.2 Condição Necessária de Otimalidade

Para obtermos as condições necessárias para que $(\tau, u, v, w, f) \in E$, com E dado por (7.0.1), seja uma solução ótima do problema (7.1.4) precisamos calcular o cone das direções de descida do funcional $J(\cdot)$, o cone das direções tangentes de Q e os cones duais.

Para isso, consideremos uma solução ótima $(\tau, u, v, w, f) \in E$ do problema (7.1.4).

Para o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto (τ, u, v, w, f) e seu dual temos o seguinte resultado:

Lema 7.2 *O cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto $(\tau, u, v, w, f) \in E$ é dado por*

$$DC(J, (\tau, u, v, w, f)) = \{(\theta, x, y, z, h) : J'(\tau, u, v, w, f)(\theta, x, y, z, h) < 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$\begin{aligned}&[DC(J, (\tau, u, v, w, f))]^* \\ &= \{g_0 \in E' : g_0(\theta, x, y, z, h) = -\lambda J'(\tau, u, v, w, f)(\theta, x, y, z, h) < 0, \textit{ para algum } \lambda \geq 0\}.\end{aligned}$$

Demonstração:

Como J é um funcional convexo contínuo, então pelo Corolário 5.1, parte (i), temos que

$$DC(J, (\tau, u, v, w, f)) = \{(\theta, x, y, z, h) : J'(\tau, u, v, w, f)(\theta, x, y, z, h) < 0\}.$$

Como $J'(\tau, u, v, w, f) \in E^*$, $J'(\tau, u, v, w, f) \not\equiv 0$ e, pela parte anterior, $DC(J, (\tau, u, v, w, f)) = \{(\theta, x, y, z, h) : J'(\tau, u, v, w, f)(\theta, x, y, z, h) < 0\}$. Então pelo Teorema 5.5, temos que

$$\begin{aligned}[DC(J, (\tau, u, v, w, f))]^* &= \{-\lambda J'(\tau, u, v, w, f)(\theta, x, y, z, h) < 0 : \lambda \geq 0\} \\ &= \{g_0 \in E' : g_0(\theta, x, y, z, h) = -\lambda J'(\tau, u, v, w, f)(\theta, x, y, z, h) < 0, \text{ para algum } \lambda \geq 0\}.\end{aligned}$$

■

Observação 7.4 *O funcional $J(\cdot)$ é direcionalmente diferenciável em qualquer direção. Sua derivada direcional no ponto (τ, u, v, w, f) e na direção (θ, x, y, z, h) é dada por*

$$\begin{aligned}J'(\tau, u, v, w, f)(\theta, x, y, z, h) &= \alpha_1 n \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2n-1} \theta dx dt + \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u - u_d)^{2m-1} x dx dt \\ &+ \alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v - v_d)^{2m-1} y dx dt + \alpha_4 m \int_0^T \int_\Omega (w - w_d)^{2m-1} z dx dt + Ns \int_0^T \int_\Omega f^{2s-1} h dx dt.\end{aligned}$$

Falta somente calcular o cone tangente ao conjunto $Q = \{(\theta, x, y, z, h) \in E : M(\theta, x, y, z, h) = 0\}$ no ponto (τ, u, v, w, f) e seu dual. Mas para isso precisamos resultado enunciado a seguir, que é demonstrado de forma análoga ao Lema 6.3.

Lema 7.3 *(i) A aplicação $M(\cdot)$ é Gâteaux-diferenciável e sua derivada de Gâteaux no ponto (τ, u, v, w, f) é definida por*

$$M'_G(\tau, u, v, w, f)(\theta, x, y, z, h) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8),$$

se e somente se,

$$\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \theta}{\partial t} - b\Delta\theta - l_1\dfrac{\partial x}{\partial t} - l_2\dfrac{\partial y}{\partial t} - l_3\dfrac{\partial z}{\partial t} - h = \psi_1 & em & Q \\
\dfrac{\partial x}{\partial t} - k\Delta x - \dfrac{\partial F_1}{\partial \tau}\theta - \dfrac{\partial F_1}{\partial u}x - \dfrac{\partial F_1}{\partial v}y - \dfrac{\partial F_1}{\partial w}z = \psi_2 & em & Q \\
\dfrac{\partial y}{\partial t} - k\Delta y - \dfrac{\partial F_2}{\partial \tau}\theta - \dfrac{\partial F_2}{\partial u}x - \dfrac{\partial F_2}{\partial v}y - \dfrac{\partial F_2}{\partial w}z = \psi_3 & em & Q \\
\dfrac{\partial z}{\partial t} - k\Delta z - \dfrac{\partial F_3}{\partial \tau}\theta - \dfrac{\partial F_3}{\partial u}x - \dfrac{\partial F_3}{\partial v}y - \dfrac{\partial F_3}{\partial w}z = \psi_4 & em & Q \\
\dfrac{\partial \theta}{\partial n} = \dfrac{\partial x}{\partial n} = \dfrac{\partial y}{\partial n} = \dfrac{\partial z}{\partial n} = 0 & em & \partial\Omega \times (0, T) \\
\theta(0) = \psi_5,\ x(0) = \psi_6,\ y(0) = \psi_7,\ z(0) = \psi_8 & em & \Omega,
\end{array}\right. \tag{7.1.9}$$

onde $F_1(\tau, u, v, w) = -a_1uw(w - u + c_1\tau + d_1) - a_3uv(v - u + c_3\tau + d_3)$,
$F_2(\tau, u, v, w) = -a_2vw(w - v + c_2\tau + d_2) - a_3uv(u - v - c_3\tau - d_3)$ *e*
$F_3(\tau, u, v, w) = -a_1uw(u - w - c_1\tau - d_1) - a_2vw(v - w - c_2\tau - d_2)$.
(ii) A aplicação $M(\cdot)$ é estritamente diferenciável e o operador $M'(\tau, u, v, w, f) = M'_G(\tau, u, v, w, f)$ é sobrejetivo.

Vamos finalmente calcular o cone tangente ao conjunto $\mathcal{Q}$ no ponto (τ, u, v, w, f).

Lema 7.4 *O cone tangente ao conjunto $\mathcal{Q}$ no ponto (τ, u, v, w, f) é o subespaço vetorial*

$$TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, w, f)) = \{(\theta, x, y, z, h) \in E : M'(\tau, u, v, w, f)(\theta, x, y, z, h) = 0\}$$

e seu cone dual é dado por

$$[TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, w, f))]^* =$$
$$\{g_1 \in E^* : g_1(\theta, x, y, z, h) = 0 \text{ para todo } (\theta, x, y, z, h) \in TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, w, f))\}.$$

Demonstração:

Pelo lema anterior temos que M é estritamente diferenciável em (τ, u, v, w, f) e $M'(\tau, u, v, w, f) : E \to E$ é uma aplicação sobrejetora. Então, pelo Teorema de Lyusternik, isto é, Teorema 5.3, o conjunto

$$\mathcal{Q} = \{(\theta, x, y, z, h) \in E : M(\theta, x, y, z, h) = 0\}$$

tem no ponto (τ, u, v, w, f) um espaço tangente dado por

$$TC(\mathcal{Q}, (\tau, u, v, w, f)) = \ker M'(\tau, u, v, w, f)$$

$$= \{(\theta, x, y, z, h) \in E : M'(\tau, u, v, w, f)(\theta, x, y, z, h) = 0\}.$$

Observemos agora que o cone $TC(\mathcal{Q},(\tau,u,v,w,f))$ é um subespaço vetorial do espaço E, pois $M'(\tau,u,v,w,f)$ é um operador linear já que o sistema 7.1.9 é linear em (θ,x,y,z,h). Então, pelo Teorema 5.4,

$$[TC(\mathcal{Q},(\tau,u,v,w,f))]^* = \{g_1 \in E^* : g_1(\theta,x,y,z,h) = 0,\ \forall(\theta,x,y,z,h) \in E\}.$$

∎

Vejamos agora um resultado sobre condição necessária de otimalidade para o problema de otimização (7.1.4).

Teorema 7.2 *Seja $(\tau,u,v,w,f) \in E = W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$ uma solução ótima do problema (7.1.4), com r e l satisfazendo (7.0.2). Se $r \geq 2s$, então existem funções $(\theta,p,q,g) \in W_{2s}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q)$ satisfazendo o sistema adjunto*

$$\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial\theta}{\partial t} - b\Delta\theta = \dfrac{\partial F_1}{\partial\tau}p + \dfrac{\partial F_2}{\partial\tau}q + \dfrac{\partial F_3}{\partial\tau}g + \alpha_1 n(\tau-\tau_d)^{2n-1} & em\ Q \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t} - k\Delta p = -l_1\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \dfrac{\partial F_1}{\partial u}p + \dfrac{\partial F_2}{\partial u}q + \dfrac{\partial F_3}{\partial u}g + \alpha_2 m(u-u_d)^{2m-1} & em\ Q \\ -\dfrac{\partial q}{\partial t} - k\Delta q = -l_2\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \dfrac{\partial F_1}{\partial v}p + \dfrac{\partial F_2}{\partial v}q + \dfrac{\partial F_3}{\partial v}g + \alpha_3 m(v-v_d)^{2m-1} & em\ Q \\ -\dfrac{\partial g}{\partial t} - k\Delta g = -l_3\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \dfrac{\partial F_1}{\partial w}p + \dfrac{\partial F_2}{\partial w}q + \dfrac{\partial F_3}{\partial w}g + \alpha_3 m(v-v_d)^{2m-1} & em\ Q \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n} = \dfrac{\partial p}{\partial n} = \dfrac{\partial q}{\partial n} = \dfrac{\partial g}{\partial n} = 0 \quad em\ \partial\Omega\times(0,T) & \\ \theta = p = q = g = 0 \quad em\ \Omega\times\{t=T\}, & \end{array} \tag{7.1.10}$$

onde $F_1(\tau,u,v,w) = -a_1uw(w-u+c_1\tau+d_1) - a_3uv(v-u+c_3\tau+d_3)$,
$F_2(\tau,u,v,w) = -a_2vw(w-v+c_2\tau+d_2) - a_3uv(u-v-c_3\tau-d_3)$ e
$F_3(\tau,u,v,w) = -a_1uw(u-w-c_1\tau-d_1) - a_2vw(v-w-c_2\tau-d_2)$, como no problema (7.1.9), e o controle é dado por

$$f = -\left(\frac{|\theta|}{sN}\right)^{\frac{1}{2s-1}} sgn\theta, \qquad q.t.p.\ em\ t \in [0,T].$$

Observação 7.5 *Antes de demonstrarmos o teorema acima observemos que, procedendo como nas demonstrações da Proposição 2.1 e dos Teoremas 4.2 e 4.3 para o problema (7.1.10), temos que se $\tau_d \in L^{4n-2}(Q)$ e u_d, v_d, $w_d \in L^{4m-2}(Q)$, então o problema (7.1.10) possui solução única $(\theta,p,q,g) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$. Se além disso, $\tau_d \in L^{n'}(Q)$ e u_d, v_d, $w_d \in L^{m'}(Q)$, com $n' > 4n-2$ e $m' > 4m-2$, então por argumentos do tipo bootstrapping mostra-se que o problema (7.1.10) possui solução mais regular, dependendo da regularidade dos dados iniciais.*

Demonstração:

Primeiramente, observemos que:

- Como J é um funcional convexo contínuo, então pelo Corolário 5.1, parte (i), J é regularmente de descida em (τ,u,v,w,f) e tem direções de descida $DC(J,(\tau,u,v,w,f))$ dadas pelo Lema 7.2 ;

- Q tem direções tangentes $TC(Q,(\tau,u,v,w,f))$ dadas pelo Lema 7.4. E como $TC(Q,(\tau,u,v,w,f))$ é convexo (pois é um subespaço vetorial de E^*), Q é regular em (τ,u,v,w,f).

Como $J(\cdot)$ assume um mínimo local no ponto $(\tau,u,v,w,f)\in Q$, com direções de descida $DC(J,(\tau,u,v,w,f))$, e Q é regular em (τ,u,v,w,f), com direções tangentes $TC(Q,(\tau,u,v,w,f))$. Então, segue do Teorema de Dubovitskii e Milyutin (Teorema 5.1) que existem formas lineares contínuas $g_0\in[DC(J,(\tau,u,v,w,f))]^*$ e $g_1\in[TC(Q,(\tau,u,v,w,f))]^*$, não simultaneamente nulas, tais que,

$$g_0+g_1=0. \tag{7.1.11}$$

Seja $h\in L^r(Q)$ um controle arbitrário e seja $(\varphi,x,y,z,h)\in E$ solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-b\Delta\varphi=l_1\dfrac{\partial x}{\partial t}+l_2\dfrac{\partial y}{\partial t}+l_3\dfrac{\partial z}{\partial t}+h & \text{em} & Q\\
\dfrac{\partial x}{\partial t}-k\Delta x=\dfrac{\partial F_1}{\partial\tau}\varphi+\dfrac{\partial F_1}{\partial u}x+\dfrac{\partial F_1}{\partial v}y+\dfrac{\partial F_1}{\partial w}z & \text{em} & Q\\
\dfrac{\partial y}{\partial t}-k\Delta y=\dfrac{\partial F_2}{\partial\tau}\varphi+\dfrac{\partial F_2}{\partial u}x+\dfrac{\partial F_2}{\partial v}y+\dfrac{\partial F_2}{\partial w}z & \text{em} & Q\\
\dfrac{\partial z}{\partial t}-k\Delta z=\dfrac{\partial F_3}{\partial\tau}\varphi+\dfrac{\partial F_3}{\partial u}x+\dfrac{\partial F_3}{\partial v}y+\dfrac{\partial F_3}{\partial w}z & \text{em} & Q\\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=\dfrac{\partial x}{\partial n}=\dfrac{\partial v}{\partial n}=\dfrac{\partial z}{\partial n}=0 & \text{em} & \partial\Omega\times(0,T)\\
\varphi(0)=x(0)=y(0)=z(0)=0 & \text{em} & \Omega,
\end{array}\right. \tag{7.1.12}$$

onde $F_1(\tau,u,v,w)=-a_1uw(w-u+c_1\tau+d_1)-a_3uv(v-u+c_3\tau+d_3)$,
$F_2(\tau,u,v,w)=-a_2vw(w-v+c_2\tau+d_2)-a_3uv(u-v-c_3\tau-d_3)$ e
$F_3(\tau,u,v,w)=-a_1uw(u-w-c_1\tau-d_1)-a_2vw(v-w-c_2\tau-d_2)$, como no problema (7.1.9).

Neste caso, temos que $M'(\tau,u,v,w,f)(\varphi,x,y,z,h)=0$, e portanto, $(\varphi,x,y,z,h)\in TC(Q,(\tau,u,v,w,f))$. Logo, $g_1(\varphi,x,y,z,h)=0$, e portanto, $g_0(\varphi,x,y,z,h)=0$. Por outro lado, como $g_0\in[DC(J,(\tau,u,v,w,f))]^*$, pelo Lema 7.2, existe $\lambda\geq 0$ tal que $g_0(\varphi,x,y,z,h)=-\lambda J'(\tau,u,v,w,f)(\varphi,x,y,z,h)$

$$\begin{gathered}
-\lambda\alpha_1 n\int_0^T\int_\Omega(\tau-\tau_d)^{2n-1}\varphi dxdt-\lambda\alpha_2 m\int_0^T\int_\Omega(u-u_d)^{2m-1}xdxdt\\
-\lambda\alpha_3 m\int_0^T\int_\Omega(v-v_d)^{2m-1}ydxdt-\lambda\alpha_4 m\int_0^T\int_\Omega(w-w_d)^{2m-1}zdxdt\\
-\lambda Ns\int_0^T\int_\Omega f^{2s-1}hdxdt=0.
\end{gathered}$$

Observemos que $\lambda\neq 0$. Pois, caso contrário, teríamos que $g_0\equiv 0$, e pela igualdade (7.1.11), teríamos também $g_1\equiv 0$. O que contradiz o Teorema de Dubovitskii e Milyutin. Então, multiplicando a igualdade anterior por $1/\lambda$ obtemos

$$\begin{gathered}
-\alpha_1 n \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2n-1} \varphi dxdt - \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u - u_d)^{2m-1} x dxdt \\
-\alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v - v_d)^{2m-1} y dxdt - \alpha_4 m \int_0^T \int_\Omega (w - w_d)^{2m-1} z dxdt \\
-Ns \int_0^T \int_\Omega f^{2s-1} h dxdt = 0.
\end{gathered} \tag{7.1.13}$$

Encontremos agora o controle ótimo f.

Seja (θ, p, q, g) uma solução do problema adjunto (7.1.10), que possui solução única pela Observação 7.5. E seja (φ, x, y, z, h) solução do problema (7.1.12). Multiplicando a primeira equação do problema (7.1.10) por φ, a segunda por x, a terceira por y, a quarta por z, integrando cada uma delas em $\Omega \times (0, T)$ e somando-as obtemos

$$\begin{aligned}
&-\alpha_1 nk \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2n-1} \varphi dxdt - \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u - u_d)^{2m-1} x dxdt \\
&-\alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v - v_d)^{2m-1} y dxdt - \alpha_4 m \int_0^T \int_\Omega (w - w_d)^{2m-1} z dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + b\Delta\theta + \frac{\partial F_1}{\partial \tau} p + \frac{\partial F_2}{\partial \tau} q + \frac{\partial F_3}{\partial \tau} g \right) \varphi dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial t} + k\Delta p - l_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial u} p + \frac{\partial F_2}{\partial u} q + \frac{\partial F_3}{\partial u} g \right) x dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial q}{\partial t} + k\Delta q - l_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial v} p + \frac{\partial F_2}{\partial v} q + \frac{\partial F_3}{\partial v} g \right) y dxdt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial g}{\partial t} + k\Delta g - l_3 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial w} p + \frac{\partial F_2}{\partial w} q + \frac{\partial F_3}{\partial w} g \right) z dxdt.
\end{aligned}$$

Integrando o segundo membro da igualdade acima por partes e usando que (φ, x, y, z, h) é solução do problema (7.1.12), temos

$$\begin{gathered}
-\alpha_1 n \int_0^T \int_\Omega (\tau - \tau_d)^{2n-1} \varphi dxdt - \alpha_2 m \int_0^T \int_\Omega (u - u_d)^{2m-1} x dxdt \\
-\alpha_3 m \int_0^T \int_\Omega (v - v_d)^{2m-1} y dxdt - \alpha_4 m \int_0^T \int_\Omega (w - w_d)^{2m-1} z dxdt \\
= - \int_0^T \int_\Omega h\theta \; dxdt.
\end{gathered}$$

Agora, usando a igualdade (7.1.13) no primeiro membro da igualdade acima, obtemos

$$Ns \int_0^T \int_\Omega f^{2s-1} h dxdt = - \int_0^T \int_\Omega h\theta \; dxdt.$$

Como $h \in L^{2s}(Q)$ é arbitrário, a última igualdade implica que $Nsf^{2s-1} = -\theta$, q.t.p. em Q. E portanto,

$$f = -\left(\frac{|\theta|}{Ns} \right)^{\frac{1}{2s-1}} sgn\theta, \quad \text{q.t.p. em } Q.$$

■

Observação 7.6 *Procedendo como nas demonstrações da Proposição 2.1, isto é, utilizando o Teorema de Leray-Schauder, e dos Teoremas 4.2 e 4.3 para o sistema (7.1.12) obtemos que para todo* $h \in L^r(Q)$, *o problema (7.1.12) possui solução única* $(\theta, x, y, z) \in W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q)$, *e portanto em* $(\theta, x, y, z, h) \in E$ *satisfaz (7.1.12).*

Observação 7.7 *Do mesmo modo como foi demonstrado o teorema anterior mostra-se que para o funcional de custo dado por (7.1.7), na Observação 7.2, as condições de otimalidade são: Se* $(\tau, u, v, w, f) \in U_{ad}$ *é uma solução ótima para o problema funcional de custo dado por (7.1.7), então existem* (θ, p, q, g) *satisfazendo o problema*

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \theta}{\partial t} - b\Delta\theta &= \frac{\partial F_1}{\partial \tau}p + \frac{\partial F_2}{\partial \tau}q + \frac{\partial F_3}{\partial \tau}g + n\alpha_1(\tau - \tau_d)^{2n-1} \quad em \quad Q\\
-\frac{\partial p}{\partial t} - k\Delta p &= -l_1\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial u}p + \frac{\partial F_2}{\partial u}q + \frac{\partial F_3}{\partial u}g + m_1\alpha_2(u - u_d)^{2m_1-1} \quad em \quad Q\\
-\frac{\partial q}{\partial t} - k\Delta q &= -l_2\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial v}p + \frac{\partial F_2}{\partial v}q + \frac{\partial F_3}{\partial v}g + m_2\alpha_3(v - v_d)^{2m_2-1} \quad em \quad Q\\
-\frac{\partial g}{\partial t} - k\Delta g &= -l_3\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial w}p + \frac{\partial F_2}{\partial w}q + \frac{\partial F_3}{\partial w}g + m_3\alpha_4(w - w_d)^{2m_3-1} \quad em \quad Q\\
\frac{\partial \theta}{\partial n} &= \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial q}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \quad em \quad \partial\Omega \times (0,T)\\
\theta &= 0, \quad p = 0, \quad q = 0 \quad e \quad g = 0 \quad em \quad \Omega \times \{t = T\},
\end{aligned}$$

onde $F_1(\tau, u, v, w) = -a_1uw(w - u + c_1\tau + d_1) - a_3uv(v - u + c_3\tau + d_3)$,
$F_2(\tau, u, v, w) = -a_2vw(w - v + c_2\tau + d_2) - a_3uv(u - v - c_3\tau - d_3)$ *e*
$F_3(\tau, u, v, w) = -a_1uw(u - w - c_1\tau - d_1) - a_2vw(v - w - c_2\tau - d_2)$, *como no problema (7.1.9), e o controle é dado por*

$$f = -\left(\frac{|\theta|}{sN}\right)^{\frac{1}{2s-1}} sgn\theta, \qquad q.t.p. \ em \ t \in [0,T].$$

Observação 7.8 *Também de modo análogo, mostra-se que para o funcional de custo dado por (7.1.8), na Observação 7.3, as condições de otimalidade são: Se* $(\tau, u, v, w, f) \in U_{ad}$ *é uma solução ótima para o problema funcional de custo dado por (7.1.8), então existem* (θ, p, q, g) *satisfazendo o problema*

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \theta}{\partial t} - b\Delta\theta &= \frac{\partial F_1}{\partial \tau}p + \frac{\partial F_2}{\partial \tau}q + \frac{\partial F_3}{\partial \tau}g \quad em \quad Q\\
-\frac{\partial p}{\partial t} - k\Delta p &= -l_1\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial u}p + \frac{\partial F_2}{\partial u}q + \frac{\partial F_3}{\partial u}g \quad em \quad Q\\
-\frac{\partial q}{\partial t} - k\Delta q &= -l_2\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial v}p + \frac{\partial F_2}{\partial v}q + \frac{\partial F_3}{\partial v}g \quad em \quad Q\\
-\frac{\partial g}{\partial t} - k\Delta g &= -l_3\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial w}p + \frac{\partial F_2}{\partial w}q + \frac{\partial F_3}{\partial w}g \quad em \quad Q\\
\frac{\partial \theta}{\partial n} &= \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial q}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \quad em \quad \partial\Omega \times (0,T)\\
\theta(T) &= n\alpha_1(\tau - \tau_d)^{2n-1} \quad em \quad \Omega\\
p(T) &= m_1\alpha_2(u - u_d)^{2m_1-1} + nl_1\alpha_1(\tau - \tau_d)^{2n-1} \quad em \quad \Omega\\
q(T) &= m_2\alpha_3(v - v_d)^{2m_2-1} + nl_2\alpha_1(\tau - \tau_d)^{2n-1} \quad em \quad \Omega\\
g(T) &= m_3\alpha_4(w - w_d)^{2m_3-1} + nl_3\alpha_1(\tau - \tau_d)^{2n-1} \quad em \quad \Omega,
\end{aligned}$$

onde $F_1(\tau,u,v,w) = -a_1uw(w-u+c_1\tau+d_1) - a_3uv(v-u+c_3\tau+d_3)$,
$F_2(\tau,u,v,w) = -a_2vw(w-v+c_2\tau+d_2) - a_3uv(u-v-c_3\tau-d_3)$ *e*
$F_3(\tau,u,v,w) = -a_1uw(u-w-c_1\tau-d_1) - a_2vw(v-w-c_2\tau-d_2)$, *como no problema (7.1.9), e o controle é dado por*

$$f = -\left(\frac{|\theta|}{sN}\right)^{\frac{1}{2s-1}} sgn\theta, \quad q.t.p. \ em \ t \in [0,T].$$

7.2 Um Problema com Restrição sobre o Controle

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$\min_{(\tau,u,v,w,f)\in\mathcal{Q}} J(\tau,u,v,w,f), \tag{7.2.14}$$

onde o funcional J é dado por (7.0.3) e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, sendo $\mathcal{Q}_1$ dado pela restrição de desigualdade

$$\mathcal{Q}_1 = \{(\tau,u,v,w,f) \in E : \|f\|_{L_{2s}(Q)} \leq C_1 \text{ q.t.p. em } Q\}$$

e $\mathcal{Q}_2$ dado pela restrição de igualdade

$$\mathcal{Q}_2 = \{(\tau,u,v,w,f) \in E : M(\tau,u,v,w,f) = 0\},$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido, como na seção anterior, por

$$M(\tau,u,v,w,f) = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6,\varphi_7,\varphi_8),$$

se, e somente se, (τ,u,v,w,f) é solução do sistema (7.1.5) com $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6,\varphi_7,\varphi_8)$. Lembremos que $M(\tau,u,v,w,f) = 0$ se, e somente se, (τ,u,v,w,f) é solução do problema (4.0.1).

Antes de demonstrarmos a existência de controle ótimo para este problema, mostremos que o conjunto admissível, U_{ad}, é não vazio.

Lema 7.5 *Suponha que* b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 *e* d_2 *são constantes com* b, k, a_1, $a_2 > 0$, *e* $\tau_0 \in W^2_{\tilde{r}}(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{\tilde{l}}(\Omega)$, *com* $\tilde{r}$ *e* $\tilde{l}$ *satisfazendo (7.0.2), são tais que* $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0, $w_0 \geq 0$ *e* $u_0+v_0+w_0 = 1$. *Além disso, suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *é um domínio aberto, limitado e de classe* C^2. *Se* $r \geq 2s$, *então* $U_{ad} \neq \emptyset$.

Demonstração:

Seja $f \in L^r(Q) \subset L^{2s}(Q)$, pois $r \geq 2s$, tal que $\|f\|_{L_{2s}(Q)} \leq C_1$. Então, pelo Teorema 4.1, Teorema 4.2 e Corolário 4.2, como $l \geq r$ por (7.0.2), existe único $(\tau,u,v,w) \in W^{2,1}_r(Q) \times W^{2,1}_l(Q) \times W^{2,1}_l(Q) \times W^{2,1}_l(Q)$. Logo, $(\tau,u,v,w,f) \in E$, com E dado por (7.0.1), e é solução do problema (4.0.1), ou seja, $M(\tau,u,v,w,f) = 0$.

Além disso, como r, $l > 5/2$ temos que $W^{2,1}_r(Q) \subset L^{2n}(Q)$ e $W^{2,1}_l(Q) \subset L^{2m}(Q)$ com inclusão contínua. Logo, temos que $(\tau,u,v,w) \in L^{2n}(Q)\times L^{2m}(Q)\times L^{2m}(Q)\times L^{2m}(Q)$. Assim, $(\tau,u,v,w,f) \in U_{ad}$.

∎

Agora mostremos a existência de uma solução ótima do problema (7.2.14).

7.2.1 Existência de Solução Ótima

Teorema 7.3 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (7.0.2), são tais que $\frac{\partial \tau_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0, $w_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2n}(Q)$, u_d, v_d, $w_d \in L^{2m}(Q)$, com n, $m \geq 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (7.2.14) possui uma solução ótima.*

Demonstração:

Primeiramente observemos que, como $r = 2s$, temos que $U_{ad} \neq \emptyset$, pelo Lema 7.5.

Seja $\{(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n)\} \subset U_{ad}$ uma seqüência minimizante do funcional J.

Como $J(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n) \leq C$, pela estrutura de J temos que

$$\|f_n\|_{L^r(Q)} = \|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$$

e pelo Teorema 4.2 temos que

$$\|\tau_n\|_{W^{2,1}_r(Q)} + \|u_n\|_{W^{2,1}_l(Q)} + \|v_n\|_{W^{2,1}_l(Q)} + \|w_n\|_{W^{2,1}_l(Q)} \leq C,$$

pois $l \geq r$. Podemos então tomar uma subseqüência que por simplicidade continuaremos denotando por $\{(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n)\}$ tal que

$$\begin{array}{lll} f_n \rightharpoonup f & \text{fracamente em} & L^r(Q), \\ \tau_n \rightharpoonup \tau & \text{fracamente em} & W^{2,1}_r(Q), \\ u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em} & W^{2,1}_l(Q), \\ v_n \rightharpoonup v & \text{fracamente em} & W^{2,1}_l(Q) \text{ e} \\ w_n \rightharpoonup w & \text{fracamente em} & W^{2,1}_l(Q). \end{array}$$

Observemos que $f_n \rightharpoonup f$ em $L^{2s}(Q)$ e $\|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De onde, $\|f\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$.

Agora, repetindo a demonstração do Teorema 7.1, mostra-se que $M(\tau, u, v, w, f) = 0$ e $J(\tau, u, v, w, f) < \infty$. De onde, temos que $(\tau, u, v, w, f) \in U_{ad}$. E obtemos também que (τ, u, v, w, f) é uma solução ótima do problema (7.2.14).

■

Na próxima seção estudaremos condições necessárias para que $(\tau, u, v, w, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (7.2.14).

7.2.2 Condição Necessária de Otimalidade

Para obtermos as condições necessárias para que $(\tau, u, v, w, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (7.2.14) precisamos calcular o cone das direções de descida do funcional $J(\cdot)$, o cone das direções factíveis de Q_1, o cone das direções tangentes de Q_2 e os cones duais.

Para isso, consideremos uma solução ótima $(\tau, u, v, w, f) \in E$ do problema (7.2.14).

Lembremos que o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto (τ, u, v, w, f) e seu dual são dados pelo Lema 7.2. E o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ, u, v, w, f) e seu dual são dados pelo Lema 7.4.

Falta calcular o cone das direções factíveis associado a restrição de desigualdade Q_1 e seu dual. Observemos que podemos utilizar a Proposição 5.3 e o Teorema 5.6 para tais cálculos, pois Q_1 pode ser escrito como $Q_1 = \{(\tau, u, v, w, f) \in E : F \leq 0\}$, onde F é o funcional dado por $F = \|f\|_{L^{2s}(Q)} - C_1$. Então, procedendo de maneira totalmente análoga à da demonstração do Lema 6.6, mostra-se que:

Lema 7.6 *O cone de direções factíveis de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, w, f) \in E$ é dado por*

$$FC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))$$
$$= \{\lambda(\theta - \tau, x - u, y - v, z - w, h - f) : \lambda > 0 \ e \ (\theta, x, y, z, h) \in E \ tal \ que \ \|h\|_{L^{2s}(Q)} < C_1\} \neq \emptyset$$

e seu cone dual é dado por

$$[FC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))]^*$$
$$= \{G_1 \in L^{r'}(Q) : \textstyle\int_Q G_1 h \ dxdt \geq \int_Q G_1 f \ dxdt, \ \forall \ h \in L^r(Q) \ tal \ que \ \|h\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1\},$$

onde r' é tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Vejamos agora um resultado sobre condição necessária de otimalidade para o problema de otimização (7.2.14).

Teorema 7.4 *Seja $(\tau, u, v, w, f) \in E = W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$ é uma solução ótima do problema (7.2.14), onde r e l satisfazem (7.0.2). Se $r \geq 2s$, então existem funções $(\theta, p, q, g) \in W_{2s}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q)$ que satisfaz o sistema adjunto (7.1.10). Além disso, existe $G_1 \in [FC(Q_1, (\tau, u, v, f))]^* = \{G_1 \in L^{r'}(Q) : \int_Q G_1(h - f) \ dxdt \geq 0, \ \forall \ h \in L^r(Q) \ tal \ que \ \|h\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_1\}$ tal que*

$$\int_0^T \int_\Omega \left(N s f^{2s-1} + \theta\right) h \ dxdt = \int_0^T \int_\Omega G_1 h \ dxdt,$$

para todo $h \in L^r(Q)$.

Demonstração:

Primeiramente, observemos que:

- Como J é um funcional convexo contínuo, então pelo Corolário 5.1, parte (i), J é regularmente de descida em (τ, u, v, w, f) e tem direções de descida $DC(J, (\tau, u, v, w, f))$ dadas pelo Lema 7.2;
- Q_1 tem direções factíveis $FC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))$ dadas pelo Lema 7.6. E como $FC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))$ é convexo (é fácil verificar pela própria caracterização de Q_1), Q_1 é regular em (τ, u, v, w, f);

- Q_2 tem direções tangentes $TC(Q_2,(\tau,u,v,w,f))$ dadas pelo Lema 7.4. Como $TC(Q_2,(\tau,u,v,w,f))$ é convexo (pois é um subespaço vetorial de E'), Q_2 é regular em (τ,u,v,w,f).

Como $J(\cdot)$ assume um mínimo local no ponto $(\tau,u,v,w,f)\in Q=Q_1\cap Q_2$, J tem direções de descida $DC(J,(\tau,u,v,w,f))$ neste ponto, Q_1 é regular em (τ,u,v,w,f), com direções factíveis $FC(Q_1,(\tau,u,v,w,f))$ e Q_2 é regular em (τ,u,v,w,f), com direções tangentes $TC(Q_2,(\tau,u,v,w,f))$. Então, segue do Teorema de Dubovitskii e Milyutin (Teorema 5.1) que existem formas lineares contínuas $g_0\in[DC(J,(\tau,u,v,w,f))]^*$, $g_1\in[FC(Q_1,(\tau,u,v,w,f))]^*$ e $g_2\in[TC(Q_2,(\tau,u,v,w,f))]^*$, não simultaneamente nulas, tais que,

$$g_0+g_1+g_2=0. \tag{7.2.15}$$

Seja $h\in L^r(Q)$ um controle arbitrário e seja $(\varphi,x,y,z,h)\in E$ solução do sistema (7.1.12). Neste caso, temos que $M'(\tau,u,v,w,f)(\varphi,x,y,z,h)=0$, e portanto, $(\varphi,x,y,z,h)\in TC(Q_2,(\tau,u,v,w,f))$. Logo, $g_2(\varphi,x,y,z,h)=0$.

Como $g_0\in[DC(J,(\tau,u,v,w,f))]^*$, pelo Lema 7.2, existe $\lambda\geq 0$ tal que $g_0(\varphi,x,y,z,h)=-\lambda J'(\tau,u,v,w,f)(\varphi,x,y,z,h)$. Então, usando esta caracterização de $g_0(\varphi,x,y,z,h)$ e o fato de que $g_2(\varphi,x,y,z,h)=0$ na igualdade (7.2.15), temos que

$$\begin{aligned}\lambda\alpha_1 n\int_0^T\int_\Omega(\tau-\tau_d)^{2n-1}\varphi dxdt+\lambda\alpha_2 m\int_0^T\int_\Omega(u-u_d)^{2m-1}xdxdt\\ +\lambda\alpha_3 m\int_0^T\int_\Omega(v-v_d)^{2m-1}ydxdt+\lambda\alpha_4 m\int_0^T\int_\Omega(w-w_d)^{2m-1}zdxdt\\ +\lambda Ns\int_0^T\int_\Omega f^{2s-1}hdxdt=-g_1(\varphi,x,y,z,h).\end{aligned} \tag{7.2.16}$$

Antes de continuarmos a demonstração, mostremos que $\lambda\neq 0$.

Se $\lambda=0$, pela igualdade (7.2.15) temos que $g_1+g_2=0$.

Agora, $g_1\in[FC(Q_1,(\tau,u,v,w,f))]^*$, logo $g_1(\varphi,x,y,z,h)=g_1(h)$. Então, para todo $(\varphi,x,y,z,h)\in W_r^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)\times L^r(Q)$, temos que

$$g_2(\varphi,x,y,z,h)=g_2(h)=-g_1(h).$$

Mas para cada $h\in L^r(Q)$, existe único $(\varphi,x,y,z)\in W_r^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)$, solução do sistema (7.1.12). Logo, $(\varphi,x,y,z,h)\in TC(Q_2,(\tau,u,v,w,f))$, e portanto,

$$g_2(h)=g_2(\varphi,x,y,z,h)=0,$$

pois $g_2\in[TC(Q_2,(\tau,u,v,w,f))]^*$. Assim temos que $g_2\equiv 0$ e $g_1=-g_2\equiv 0$. O que contradiz o Teorema de Dubovitskii e Milyutin. E portanto, $\lambda\neq 0$.

Observemos agora que podemos supor que $\lambda=1$, para isso basta multiplicar (7.2.16) por $1/\lambda$ e continuar denotando g_1/λ por g_1. Assim, obtemos

$$\begin{gathered}\alpha_1 n\int_0^T\int_\Omega(\tau-\tau_d)^{2n-1}\varphi dxdt+\alpha_2 m\int_0^T\int_\Omega(u-u_d)^{2m-1}xdxdt\\+\alpha_3 m\int_0^T\int_\Omega(v-v_d)^{2m-1}ydxdt+\alpha_4 m\int_0^T\int_\Omega(w-w_d)^{2m-1}zdxdt\\+Ns\int_0^T\int_\Omega f^{2s-1}hdxdt=-g_1(h).\end{gathered}\tag{7.2.17}$$

Encontremos agora o controle ótimo f.

Seja (θ,p,q,g) uma solução do problema adjunto (7.1.10), que possui solução única pela Observação 7.5. E seja (φ,x,y,z,h) solução do problema (7.1.12). Multiplicando a primeira equação do problema (7.1.10) por φ, a segunda por x, a terceira por y e a quarta por z, integrando cada uma delas em $\Omega\times(0,T)$ e procedendo exatamente como na parte final da demonstração do Teorema 7.2, obtemos

$$\begin{gathered}-\alpha_1 n\int_0^T\int_\Omega(\tau-\tau_d)^{2n-1}\varphi dxdt-\alpha_2 m\int_0^T\int_\Omega(u-u_d)^{2m-1}xdxdt\\-\alpha_3 m\int_0^T\int_\Omega(v-v_d)^{2m-1}ydxdt-\alpha_4 m\int_0^T\int_\Omega(w-w_d)^{2m-1}zdxdt\\=-\int_0^T\int_\Omega h\theta\, dxdt.\end{gathered}$$

Agora, usando a igualdade (7.2.17) no primeiro membro da igualdade acima temos

$$Ns\int_0^T\int_\Omega f^{2s-1}hdxdt-g_1(h)=-\int_0^T\int_\Omega h\theta\, dxdt,$$

mas pelo Lema 7.6, obtemos que

$$\int_0^T\int_\Omega\left(Nsf^{2s-1}+\theta\right)h\, dxdt=\int_0^T\int_\Omega G_1hdxdt,$$

para todo $h\in L^r(Q)$.

■

7.3 Mais um Problema com Restrição sobre o Controle

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$\min_{(\tau,u,v,w,f)\in\mathcal{Q}} J(\tau,u,v,w,f),\tag{7.3.18}$$

onde o funcional J é dado por (7.0.3) e $\mathcal{Q}=\mathcal{Q}_1\cap\mathcal{Q}_2$, sendo $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ são dados pelas restrições

$$\begin{gathered}\mathcal{Q}_1=\{(\tau,u,v,w,f)\in E:|f|\le C_3 \text{ q.t.p. em } Q\},\quad \text{e}\\ \mathcal{Q}_2=\{(\tau,u,v,w,f)\in E:M(\tau,u,v,w,f)=0\},\end{gathered}$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido, como nas seções anteriores, por

$$M(\tau, u, v, w, f) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8),$$

se, e somente se, (τ, u, v, w, f) é solução do sistema (7.1.5) com $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8)$. Lembremos que $M(\tau, u, v, w, f) = 0$ se, e somente se, (τ, u, v, w, f) é solução do problema (4.0.1).

Segue diretamente dos Teoremas 4.1 e 4.2 e do Corolário e 4.2 o seguinte resultado:

Lema 7.7 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes com b, k, a_1, $a_2 > 0$. Suponha também que $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (7.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e u_0 ,v_0, $w_0 \leq 0$ e $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $r \geq 2s$, então $U_{ad} \neq \emptyset$.*

Agora mostremos a existência de uma solução ótima do problema (7.1.4).

7.3.1 Existência de Solução Ótima

Teorema 7.5 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (7.0.2), são tais que $\frac{\partial\tau_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0, $w_0 \geq 0$ e $u_0 + v_0 + w_0 = 1$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2n}(Q)$, u_d, v_d, $w_d \in L^{2m}(Q)$, com n e m quaisquer inteiros tais que n, $m \geq 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (7.3.18) possui uma solução ótima.*

Demonstração:

Primeiramente observemos que $U_{ad} \neq \emptyset$ pelo Lema 7.7, pois $r = 2s$.

Seja $\{(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n)\} \subset U_{ad}$ uma seqüência minimizante do funcional J.

Primeiramente observemos que $|f_n| \leq C_3$ q.t.p. em Q para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\|f_n\|_{L^\infty(Q)} \leq C_3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De onde, temos que existe subseqüência, que continuaremos denotando por f_n tal que

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{fraco* em } L^\infty(Q).$$

Logo, $\|f\|_{L^\infty(Q)} \leq C_3$. E assim,

$$|f| \leq C_3 \quad \text{q.t.p. em } Q.$$

Consideremos agora a subseqüência $(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n)$ obtida acima.

Como $J(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n) \leq C$, pela estrutura de J e pelo Teorema 4.2 temos que

$$\|f_n\|_{L^r(Q)} + \|\tau_n\|_{W^{2,1}_r(Q)} + \|u_n\|_{W^{2,1}_l(Q)} + \|v_n\|_{W^{2,1}_l(Q)} + \|w_n\|_{W^{2,1}_l(Q)} \leq C,$$

já que $l \geq r$. Podemos então tomar uma subseqüência de $\{(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n)\}$, com

$M(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n) = 0$, que continuaremos denotando por $\{(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n)\}$ tal que

$$\begin{array}{lll} f_n \rightharpoonup f & \text{fracamente em} & L^r(Q), \\ \tau_n \rightharpoonup \tau & \text{fracamente em} & W_r^{2,1}(Q), \\ u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em} & W_l^{2,1}(Q), \\ v_n \rightharpoonup v & \text{fracamente em} & W_l^{2,1}(Q) \text{ e} \\ w_n \rightharpoonup w & \text{fracamente em} & W_l^{2,1}(Q). \end{array}$$

Repetindo a demonstração do Teorema 7.1 com esta nova subseqüência obtemos que $M(\tau, u, v, w, f) = 0$ e $J(\tau, u, v, w, f) < \infty$, logo $(\tau, u, v, w, f) \in U_{ad}$. E obtemos também que (τ, u, v, w, f) é uma solução ótima do problema (7.3.18).

■

Na próxima seção veremos condições necessárias para que $(\tau, u, v, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (7.3.18).

7.3.2 Condição Necessária de Otimalidade

Para encontrarmos condições necessárias para que $(\tau, u, v, w, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (7.3.18) não podemos proceder como na demonstração do Teorema 7.4. Pois, neste caso, $int Q_1 = \emptyset$ já que $Q_1 \subset L^{2s}(Q)$ com $2s < \infty$, e então, não poderemos utilizar o Teorema de Dubovitskii e Milyutin (Teorema 5.1). Aqui precisaremos do Teorema 5.7, que é uma generalização do Teorema de Dubovitskii e Milyutin.

Para obtermos as condições necessárias para que $(\tau, u, v, w, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (7.3.18) precisaremos do cone das direções de descida do funcional $J(\cdot)$, e dos cones das direções tangentes a Q_1 e Q_2 e seus duais.

Lembremos que o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto $(\tau, u, v, w, f) \in E$ e seu dual são dados pelo Lema 7.2. E o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ, u, v, w, f) e seu dual são dados pelo Lema 7.4. Finalmente, procedendo como na demonstração do Lema 6.8, obtemos o seguinte resultado para o cone de direções tangentes de Q_1 no ponto (τ, u, v, w, f) e seu dual.

Lema 7.8 *O cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, w, f) \in E$ é dado por*

$$TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f)) = \{(\theta, x, y, z, h) \in E : h(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = C_3\} \text{ e}$$
$$h(x,t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = -C_3\}\}.$$

E seu cone dual é dado por

$$[TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))]^* = \{G_1 \in L^{\frac{r}{r-1}}(Q) : G_1(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = C_3\},$$
$$G_1(x,t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = -C_3\} \text{ e}$$
$$G_1(x,t) = 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } |f(x,t)| < C_3\}\}.$$

Vejamos agora um resultado sobre condição necessária de otimalidade para o problema de otimização (7.3.18).

Teorema 7.6 *Seja* $(\tau, u, v, w, f) \in E = W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$ *uma solução ótima do problema (7.3.18), com* r *e* l *satisfazendo (7.0.2). Se* $r \geq 2s$*, então existem funções* $(\theta, p, q, g) \in W_{2s}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q)$ *satisfazendo o sistema adjunto (7.1.10). Além disso, existe* $G_1 \in L^{\frac{2s}{2s-1}}(Q)$ *satisfazendo:*

$$G_1(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = C_3\},$$
$$G_1(x,t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = -C_3\} \text{ e}$$
$$G_1(x,t) = 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } |f(x,t)| < C_3\},$$

tal que

$$\int_0^T \int_\Omega \left(Nsf^{2s-1} + \theta\right) h \, dxdt = -\int_0^T \int_\Omega G_1 h dxdt,$$

para todo $h \in L^r(Q)$.

Demonstração:

Suponha que $J(\cdot)$ assume um mínimo local no ponto $(\tau, u, v, w, f) \in \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$. Pelo Lema 7.2, J tem direções de descida $DC(J, (\tau, u, v, w, f))$, e pelos Lemas 7.4 e 7.8, $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ tem direções tangentes $TC(\mathcal{Q}_1, (\tau, u, v, w, f))$ e $TC(\mathcal{Q}_2, (\tau, u, v, w, f))$, respectivamente, em (τ, u, v, w, f). Além disso, o cone $DC(J, (\tau, u, v, w, f))$ é aberto, pois os cones de descida sempre o são.

Para podermos usar o Teorema 5.7 ainda precisamos mostrar que: os cones $DC(J, (\tau, u, v, w, f))$, $TC(\mathcal{Q}_1, (\tau, u, v, w, f))$ e $TC(\mathcal{Q}_2, (\tau, u, v, w, f))$ são convexos, os cones $TC(\mathcal{Q}_i, (\tau, u, v, w, f))$, $i = 1, 2$, são fechados, o cone $TC(\mathcal{Q}_1, (\tau, u, v, w, f)) \cap TC(\mathcal{Q}_2, (\tau, u, v, w, f))$ está contido no cone tangente $TC(\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2, (\tau, u, v, w, f))$ associado ao conjunto das restrições de igualdade $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ e os cones duais $[TC(\mathcal{Q}_i, (\tau, u, v, w, f))]^*$, $i = 1, 2$, formam um sistema de cones de mesmo sentido.

Mostremos então tais fatos:

i) Primeiramente observemos que os cones $DC(J, (\tau, u, v, w, f))$, $TC(\mathcal{Q}_1, (\tau, u, v, w, f))$ e $TC(\mathcal{Q}_2, (\tau, u, v, w, f))$ são convexos;

De fato, pelo Lema 7.2 o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto (τ, u, v, w, f) é dado por $DC(J, (\tau, u, v, w, f)) = \{(\varphi, x, y, z, h) : J'(\tau, u, v, w, f)(\varphi, x, y, z, h) < 0\}$. Agora, como $J'(\tau, u, v, w, f)(\cdot)$ é linear em (φ, x, y, z, h), temos que $DC(J, (\tau, u, v, w, f))$ é convexo.

Pelo Lema 7.8 o cone de direções tangentes de $\mathcal{Q}_1$ no ponto $(\tau, u, v, w, f) \in E$ é dado por

$$TC(\mathcal{Q}_1, (\tau, u, v, w, f)) = \{(\theta, x, y, z, h) : h(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = C_3\} \text{ e}$$
$$h(x,t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = -C_3\}\},$$

logo é convexo.

E pelo Lema 7.4 o cone de direções tangentes de Q_2 no ponto $(\tau, u, v, w, f) \in E$ é o subespaço vetorial $TC(Q_2, (\tau, u, v, w, f)) = \{(\theta, x, y, z, h) : M'(\tau, u, v, w, f)(\theta, x, y, z, h) = 0\}$, logo é convexo.

ii) Agora observemos que os cones $TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))$ e $TC(Q_2, (\tau, u, v, w, f))$ são fechados;

Pelo Lema 7.4, o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ, u, v, w, f) é dado por $TC(Q_2, (\tau, u, v, w, f)) = \{(\varphi, x, y, z, h) \in E : M'(\tau, u, v, w, f)(\varphi, x, y, z, h) = 0\}$, que é fechado em E.

E pelo lema 7.8 o cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, w, f) \in E$ é dado por $TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f)) = \{\lambda(\theta, x, y, z, h) : h(x,t) \leq 0$ q.t.p em $\{(x,t)$ tal que $f(x,t) = C_3\}$ e $h(x,t) \geq 0$ q.t.p. em $\{(x,t)$ tal que $f(x,t) = -C_3\}\}$, que é fechado em E.

iii) Mostremos que o cone $TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f)) \cap TC(Q_2, (\tau, u, v, w, f))$ está contido no cone tangente $TC\left(Q, (\tau, u, v, w, f)\right)$ associado ao conjunto das restrições de igualdade $Q = Q_1 \cap Q_2$;

Para isso seja $(\varphi, x, y, z, h) \in TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f)) \cap TC(Q_2, (\tau, u, v, w, f))$. Precisamos mostrar que $(\varphi, x, y, z, h) \in TC(Q_1 \cap Q_2, (\tau, u, v, w, f))$.

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $r(\varepsilon) \in E$, com $\|r(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon)$, tal que

$$(\tau, u, v, w, f) + \varepsilon(\varphi, x, y, z, h) + r(\varepsilon) \in Q_1 \cap Q_2.$$

Como $(\varphi, x, y, z, h) \in TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))$, por definição existe $r_1(\varepsilon) \in E$, com $\|r_1(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon)$, tal que

$$(\varphi_\varepsilon, x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon, h_\varepsilon) := (\tau, u, v, w, f) + \varepsilon(\varphi, x, y, z, h) + r_1(\varepsilon) \in Q_1$$

e como $(\varphi, x, y, z, h) \in TC(Q_2, (\tau, u, v, w, f))$, por definição existe $r_2(\varepsilon) \in E$, com $\|r_2(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon)$, tal que

$$(\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{x}_\varepsilon, \widetilde{y}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon) := (\tau, u, v, w, f) + \varepsilon(\varphi, x, y, z, h) + r_2(\varepsilon) \in Q_2.$$

Tomemos h_ε definido acima. Resolvendo o problema (4.0.1) encontremos φ'_ε, x'_ε, y'_ε e z'_ε tais que $M(\varphi'_\varepsilon, x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h_\varepsilon) = 0$. Então temos que, $(\varphi'_\varepsilon, x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h_\varepsilon) \in Q_1 \cap Q_2$. Além disso, temos que

$$(\varphi'_\varepsilon, x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h_\varepsilon) = (\tau, u, v, w, f) + \varepsilon(\varphi, x, y, z, h) + r(\varepsilon),$$

para algum $r(\varepsilon) \in E$.

Precisamos mostrar que $\|r(\varepsilon)\|_E = o(\varepsilon)$.

Usando desigualdade triangular e estabilidade do problema (4.0.1), temos que

$$\|r(\varepsilon)\|_E = \|(\varphi'_\varepsilon, x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h_\varepsilon) - (\tau, u, v, w, f) - \varepsilon(\varphi, x, y, z, h)\|_E$$

$$\leq \|(\varphi'_\varepsilon, x'_\varepsilon, y'_\varepsilon, z'_\varepsilon, h_\varepsilon) - (\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{x}_\varepsilon, \widetilde{y}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon)\|_E + \|(\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{x}_\varepsilon, \widetilde{y}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon) - (\tau, u, v, w, f) - \varepsilon(\varphi, x, y, z, h)\|_E$$

$$\leq \|\varphi'_\varepsilon - \widetilde{\varphi}_\varepsilon\|_{W^{2,1}_{2s}(Q)} + \|x'_\varepsilon - \widetilde{x}_\varepsilon\|_{W^{2,1}_{2m}(Q)} + \|y'_\varepsilon - \widetilde{y}_\varepsilon\|_{W^{2,1}_{2m}(Q)} + \|z'_\varepsilon - \widetilde{z}_\varepsilon\|_{W^{2,1}_{2m}(Q)} + \|h_\varepsilon - \widetilde{h}_\varepsilon\|_{L^{2s}(Q)} + \|r_2(\varepsilon)\|_E$$

$$\leq C\|h_\varepsilon - \widetilde{h}_\varepsilon\|_{L^{2s}(Q)} + \|r_2(\varepsilon)\|_E \leq C\|(\varphi_\varepsilon, x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon, h_\varepsilon) - (\widetilde{\varphi}_\varepsilon, \widetilde{x}_\varepsilon, \widetilde{y}_\varepsilon, \widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{h}_\varepsilon)\|_E + \|r_2(\varepsilon)\|_E$$

$$\leq C\|(\varphi_\varepsilon, x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon, h_\varepsilon) - (\tau, u, v, w, f) - \varepsilon(\varphi, x, y, z, h)\|_E$$

$$+C\|(\tau,u,v,w,f)+\varepsilon(\varphi,x,y,z,h)-(\widetilde{\varphi}_\varepsilon,\widetilde{x}_\varepsilon,\widetilde{y}_\varepsilon,\widetilde{z}_\varepsilon,\widetilde{h}_\varepsilon)\|_E+\|r_2(\varepsilon)\|_E$$

$$\leq C\|r_1(\varepsilon)\|_E+(C+1)\|r_2(\varepsilon)\|_E=o(\varepsilon).$$

Logo, $(\varphi,x,y,z,h)\in TC(Q_1\cap Q_2,(\tau,u,v,w,f))$, e assim,
$TC(Q_1,(\tau,u,v,w,f))\cap TC(Q_2,(\tau,u,v,w,f))\subset TC(Q_1\cap Q_2,(\tau,u,v,w,f))$.

iv) Finalmente, mostremos que os cones duais $[TC(Q_i,(\tau,u,v,w,f))]^*$, $i=1,2$, formam um sistema de cones de mesmo sentido;

Seja $M>0$ e sejam $g_i\in[TC(Q_i,(\tau,u,v,w,f))]^*$, para $i=1,2$, tais que $\|g_1+g_2\|_{E'}\leq M$. Precisamos mostrar que existem M_1, $M_2>0$ tais que $\|g_i\|_{E'}\leq M_i$, para $i=1,2$.

Procedendo como na demonstração do Lema 6.8 obtemos que se $g_1\in[TC(Q_1,(\tau,u,v,w,f))]^*$, então $g_1(\varphi,x,y,z,h)=\psi(h)$, com $\psi\in(L^r(Q))'$. E como $g_2\in[TC(Q_2,(\tau,u,v,w,f))]^*\subset E'$, então $g_2(\varphi,x,y,z,h)=\phi_1(\varphi)+\phi_2(x)+\phi_3(y)+\phi_4(z)+\phi_5(h)$, com $\phi_1\in\left(W_r^{2,1}(Q)\right)'$, ϕ_2, ϕ_3, $\phi_4\in\left(W_l^{2,1}(Q)\right)'$ e $\phi_5\in(L^r(Q))'$.

Então, temos que

$$M\geq\|g_1+g_2\|_{E'}$$

$$\geq C\left[\|\phi_1\|_{(W_r^{2,1}(Q))'}+\|\phi_2\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}+\|\phi_3\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}+\|\phi_4\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}+\|\psi+\phi_5\|_{(L^r(Q))'}\right].$$

De onde, já temos que $\|\phi_1\|_{(W_r^{2,1}(Q))'}, \|\phi_2\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}, \|\phi_3\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}, \|\phi_4\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}\leq M/C$.

Agora dado $h\in L^r(Q)$ existe $(\varphi,x,y,z)\in W_r^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)\times W_l^{2,1}(Q)$ tal que $M'(\tau,u,v,w,f)(\varphi,x,y,z,h)=0$. Logo, $g_2(\varphi,x,y,z,h)=\phi_1(\varphi)+\phi_2(x)+\phi_3(y)+\phi_4(z)+\phi_5(h)=0$, então,

$$|\phi_5(h)|\leq|\phi_1(\varphi)|+|\phi_2(x)|+|\phi_3(y)|+|\phi_4(z)|$$
$$\leq\|\phi_1\|_{(W_r^{2,1}(Q))'}\|\varphi\|_{W_r^{2,1}(Q)}+\|\phi_2\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}\|x\|_{W_l^{2,1}(Q)}+\|\phi_3\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}\|y\|_{W_l^{2,1}(Q)}$$
$$+\|\phi_4\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}\|z\|_{W_l^{2,1}(Q)}\leq\frac{M}{C}\left[\|\varphi\|_{W_r^{2,1}(Q)}+\|x\|_{W_l^{2,1}(Q)}+\|y\|_{W_l^{2,1}(Q)}+\|z\|_{W_l^{2,1}(Q)}\right]$$
$$\leq CM\|h\|_{L^r(Q)}.$$

Como $h\in L^r(Q)$ é arbitrário obtemos que $\|\phi_5\|_{(L^r(Q))'}\leq CM$, e portanto,

$$\|g_2\|_{E'}\leq C\left[\|\phi_1\|_{(W_r^{2,1}(Q))'}+\|\phi_2\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}+\|\phi_3\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}+\|\phi_4\|_{(W_l^{2,1}(Q))'}+\|\phi_5\|_{(L^r(Q))'}\right]$$

$$\leq CM=:M_2.$$

Finalmente, temos que

$$\|g_1\|_{E'}\leq C[\|\psi\|_{(L^r(Q))'}\leq C\left[\|\psi+\phi_5\|_{(L^r(Q))'}+\|\phi_5\|_{(L^r(Q))'}\right]\leq CM=:M_1.$$

Portanto os cones $[TC(Q_i,(\tau,u,v,w,f))]^*$, $i=1,2$, formam um sistema de cones de mesmo sentido.

Como todas as hipóteses do Teorema 5.7 são satisfeitas segue deste teorema que existem formas lineares contínuas $g_0 \in [DC(J, (\tau, u, v, w, f))]^*$, $g_1 \in [TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))]^*$ e $g_2 \in [TC(Q_2, (\tau, u, v, w, f))]^*$, não simultaneamente nulas, tais que,

$$g_0 + g_1 + g_2 = 0. \tag{7.3.19}$$

Agora, procedendo como na demonstração do Teorema 7.4 , mas utilizando a equação (7.3.19) no lugar de (7.2.15) o Lema 7.8 no lugar de 7.6, temos que existe $G_1 \in L^{\frac{r}{r-1}}(Q)$ satisfazendo:

$$\begin{gathered} G_1(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = C_3\}, \\ G_1(x,t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } f(x,t) = -C_3\} \text{ e} \\ G_1(x,t) = 0 \text{ q.t.p. em } \{(x,t) \text{ tal que } |f(x,t)| < C_3\}, \end{gathered}$$

tal que

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\lambda N s f^{2s-1} + \theta\right) h \, dxdt = -\int_0^T \int_\Omega G_1 h dxdt,$$

para todo $h \in L^r(Q)$.

■

7.4 Um Problema de Controle com Restrição na Temperatura

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$\min_{(\tau,u,v,w,f)\in\mathcal{Q}} J(\tau, u, v, w, f), \tag{7.4.20}$$

onde o funcional J é dado por (7.0.3) e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, sendo $\mathcal{Q}_1$ dado pela restrição de desigualdade

$$\mathcal{Q}_1 = \{(\tau, u, v, w, f) \in E : C_1 \leq \tau \leq C_2 \text{ q.t.p. em } Q\}$$

e $\mathcal{Q}_2$ dado pela restrição de igualdade

$$\mathcal{Q}_2 = \{(\tau, u, v, w, f) \in E : M(\tau, u, v, w, f) = 0\},$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido, como nas seções anteriores, por

$$M(\tau, u, v, w, f) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8),$$

se, e somente se, (τ, u, v, w, f) é solução do sistema (7.1.5) com $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8)$. Lembremos que $M(\tau, u, v, w, f) = 0$ se, e somente se, (τ, u, v, w, f) é solução do problema (4.0.1).

Antes de demonstrarmos a existência de controle ótimo para este problema, mostremos que o conjunto admissível, U_{ad}, é não vazio.

Lema 7.9 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes com b, k, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\tilde{r}}(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{\tilde{l}}(\Omega)$, com $\tilde{r}$ e $\tilde{l}$ satisfazendo (7.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e u_0 ,v_0, $w_0 \geq 0$, $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ e $C_1 \leq \tau_0 \leq C_2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado de classe C^2. Se $r \geq 2s$, então $U_{ad} \neq \emptyset$.*

Demonstração:

Seja $\tau \in W^{2,1}_r(Q)$ solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau = 0 &\qquad \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \partial\tau/\partial n = 0 &\qquad \text{em } \partial\Omega \times (0,T) \\ \tau = \tau_0 &\qquad \text{em } \Omega \times \{t=0\}. \end{aligned}$$

Pelo princípio de máximo para equações parabólicas temos que $\tau(x,t) \geq \min\{\tau_0(x) : x \in \Omega\} \geq C_1$ e $\tau(x,t) \leq \max\{\tau_0(x) : x \in \Omega\} \leq C_2$. Logo $C_1 \leq \tau \leq C_2$.

Tomando $-2m_i = c_i\tau + d_i$, para $i = 1,2,3$ (aqui c_i, d_i, para $i = 1,2,3$, são os mesmos do problema (7.1.5)). Como $r > 5/2$, temos que $W^{2,1}_r(Q) \subset L^\infty(Q)$, logo $m_i \in L^\infty(Q)$, para $i = 1,2,3$. Então, pelos Teoremas 3.2 e 3.4 e pelo Corolário 3.2 existe único $(u,v,w) \in W^{2,1}_l(Q) \times W^{2,1}_l(Q) \times W^{2,1}_l(Q)$.

Tomando

$$f = \frac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau - l_1\frac{\partial u}{\partial t} - l_2\frac{\partial v}{\partial t} - l_3\frac{\partial w}{\partial t},$$

como $l \geq r$, temos que $f \in L^r(Q)$. Logo, $(\tau,u,v,w,f) \in E$, é solução do problema (4.0.1), ou seja $M(\tau,u,v,w,f) = 0$, e $C_1 \leq \tau \leq C_2$ q.t.p. em Q.

Além disso, como $r \geq 2s$, temos que $L^r(Q) \subset L^{2s}(Q)$, e como l, $r > 5/2$, temos que $W^{2,1}_r(Q)$, $W^{2,1}_l(Q) \subset L^\infty(Q)$. De onde, $J(\tau,u,v,w,f) < \infty$. Assim, $(\tau,u,v,w,f) \in U_{ad}$.

■

Agora mostremos a existência de uma solução ótima do problema (7.4.20).

7.4.1 Existência de Solução Ótima

Teorema 7.7 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\tilde{r}}(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{\tilde{l}}(\Omega)$, com $\tilde{r}$ e $\tilde{l}$ satisfazendo (7.0.2), são tais que $\frac{\partial\tau_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0, $w_0 \geq 0$, $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ e $C_1 \leq \tau_0 \leq C_2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2n}(Q)$, u_d, v_d e $w_d \in L^{2m}(Q)$, com n, $m \geq 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (7.4.20) possui uma solução ótima.*

Demonstração:

Primeiramente observemos que, como $r = 2s$, temos que $U_{ad} \neq \emptyset$, pelo Lema 7.9.

Seja $\{(\tau_n,u_n,v_n,w_n,f_n)\} \subset U_{ad}$ uma seqüência minimizante do funcional J. Como $J(\tau_n,u_n,v_n,w_n,f_n) \leq C$, pela estrutura de J temos que

$$\|f_n\|_{L^r(Q)} = \|f_n\|_{L^{2s}(Q)} \leq C$$

e pelo Teorema 4.2 temos que

$$\|\tau_n\|_{W_r^{2,1}(Q)} + \|u_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} + \|v_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} + \|v_n\|_{W_l^{2,1}(Q)} \leq C$$

pois $l \geq r$. Podemos então tomar uma subseqüência que continuaremos denotando por $\{(\tau_n, u_n, v_n, w_n, f_n)\}$ tal que

$$\begin{array}{rcc} f_n \rightharpoonup f & \text{fracamente em} & L^r(Q), \\ \tau_n \rightharpoonup \tau & \text{fracamente em} & W_r^{2,1}(Q), \\ u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em} & W_l^{2,1}(Q), \\ v_n \rightharpoonup v & \text{fracamente em} & W_l^{2,1}(Q) \text{ e} \\ w_n \rightharpoonup w & \text{fracamente em} & W_l^{2,1}(Q). \end{array}$$

Pelo Corolário 1.2 temos que $W_r^{2,1}(Q), W_l^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$ com inclusão contínua e compacta, então

$$\begin{array}{rcc} \tau_n \to \tau & \text{fortemente em} & L^\infty(Q), \\ u_n \to u & \text{fortemente em} & L^\infty(Q), \\ v_n \to v & \text{fortemente em} & L^\infty(Q) \text{ e} \\ w_n \to w & \text{fortemente em} & L^\infty(Q). \end{array}$$

Como $\tau_n \to \tau$ em $L^\infty(Q)$, ou seja, $\|\tau - \tau_n\|_{L^\infty(Q)} \to 0$ quando $n \to \infty$, e como $C_1 \leq \tau_n \leq C_2$ q.t.p. em Q, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $C_1 \leq \tau \leq C_2$ q.t.p. em Q.

Para mostrar que $M(\tau, u, v, w, f) = 0$, ou seja, que (τ, u, v, w, f) é solução do problema (4.0.1) e assim concluirmos que $(\tau, u, v, w, f) \in U_{ad}$, basta repetir a parte correspondente da demonstração do Teorema 7.1. E repetindo a parte final da demonstração do mesmo teorema, mostra-se que (τ, u, v, w, f) é uma solução ótima do problema (7.4.20).

∎

Na próxima seção estudaremos condições necessárias para que $(\tau, u, v, w, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (7.4.20).

7.4.2 Condição Necessária de Otimalidade

Para obtermos as condições necessárias para que $(\tau, u, v, w, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (7.4.20) precisamos calcular o cone das direções de descida do funcional $J(\cdot)$, o cone das direções factíveis de Q_1, o cone das direções tangentes de Q_2 e os cones duais.

Para isso, consideremos uma solução ótima $(\tau, u, v, w, f) \in E$ do problema (7.4.20).

Lembremos que o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto (τ, u, v, w, f) e seu dual são dados pelo Lema 7.2. E o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ, u, v, w, f) e seu dual são dados pelo Lema 7.4.

Precisamos agora calcular o cone das direções factíveis associado a restrição de desigualdade Q_1 e seu dual. Observemos que podemos utilizar a Proposição 5.3 e o Teorema 5.6 para tais cálculos, pois Q_1 pode ser escrito como $Q_1 = \{(\tau, u, v, w, f) \in E : F \leq 0\}$, onde F é o funcional dado por $F = -sup\ ess(\tau - C_2).sup\ ess(C_1 - \tau)$. Então, utilizando tais resultados e procedendo de modo análogo à demonstração do Lema 7.10 obtemos o resultado enunciado a seguir.

Lema 7.10 *O cone de direções factíveis de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, w, f) \in E$ é dado por*

$$FC(Q_1, (\tau, u, v, w, f)) = \{\lambda(\theta - \tau, x - u, y - v, z - w, h - f) : \lambda > 0 \ e \ (\theta, x, y, z, h) \in intQ_1\} \neq \emptyset$$

e seu cone dual é dado por

$$[FC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))]^* = \{g_1 \in (W_r^{2,1}(Q))' : g_1(\theta) \geq g_1(\tau), \ \forall\, \theta \in W_r^{2,1}(Q) \ tal \ que \ C_1 \leq \theta \leq C_2\}.$$

Vejamos agora um resultado sobre condição necessária de otimalidade para o problema de otimização (7.4.20).

Teorema 7.8 *Seja $(\tau, u, v, w, f) \in E = W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$ é uma solução ótima do problema (7.4.20), com r e l satisfazendo (7.0.2). Se $r \geq 2s$, então existem funções $(\theta, p, q, g) \in W_{2s}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q)$ que satisfaz o sistema adjunto (7.1.10). Além disso, existe $g_1 \in [TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))]^* = \{g \in (W_r^{2,1}(Q))' : g(\theta) \geq g(\tau), \ \forall\, \theta \in W_r^{2,1}(Q) \ tal \ que \ C_1 \leq \theta \leq C_2\}$ tal que*

$$\int_0^T \int_\Omega \left(Nsf^{2s-1} + \theta\right) h \ dxdt = g_1(\varphi),$$

para todo (φ, x, y, z, h) solução do sistema (7.1.12).

Para demonstrar este teorema basta repetir a demonstração do Teorema 7.4, mas utilizando o Lema 7.10 no lugar do Lema 7.6. Obtendo assim o resultado desejado.

7.5 Um Problema de Controle com Restrição no Gradiente da Temperatura

Procedendo para o problema descrito a seguir de maneira análoga ao que foi feito para o problema (7.4.20) obteremos resultados semelhantes.

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$\min_{(\tau,u,v,w,f)\in\mathcal{Q}} J(\tau,u,v,w,f), \tag{7.5.21}$$

onde o funcional J é dado por (7.0.3) e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$, sendo $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ dados pelas restrições

$$\mathcal{Q}_1 = \{(\tau,u,v,w,f) \in E : |\nabla\tau| \leq C_3 \text{ q.t.p. em } Q\}, \quad \text{e}$$
$$\mathcal{Q}_2 = \{(\tau,u,v,w,f) \in E : M(\tau,u,v,w,f) = 0\},$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido, como nas seções anteriores, por

$$M(\tau,u,v,w,f) = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6,\varphi_7,\varphi_8),$$

se, e somente se, (τ,u,v,w,f) é solução do sistema (7.1.5) com $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6,\varphi_7,\varphi_8)$. Lembremos que $M(\tau,u,v,w,f) = 0$ se, e somente se, (τ,u,v,w,f) é solução do problema (4.0.1).

Antes de demonstrarmos a existência de controle ótimo para este problema, também é necessário demonstrar que o conjunto admissível, U_{ad}, é não vazio.

Lema 7.11 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes com b, k, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (7.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0, $w_0 \geq 0$, $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ e $|\nabla\tau_0| \leq C_3$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $r \geq 2s$, então $U_{ad} \neq \emptyset$.*

Demonstração:

Para demonstrar este lema, basta tomar $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(Q)$ satisfazendo $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $|\nabla\tau_0| \leq C_3$ q.t.p em Ω e repetir a demonstração do Lema 7.9 para obter que $(\tau,u,v,w,f) \in U_{ad}$.

■

7.5.1 Existência de Solução Ótima

Utilizando o Lema 7.11 e de modo análogo como foi demonstrada a existência de uma solução ótima do problema (6.5.21), demonstra-se a existência de uma solução ótima do problema (7.5.21), que é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 7.9 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (7.0.2), são tais que $\frac{\partial\tau_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w_0}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0, $w_0 \geq 0$, $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ e $|\nabla\tau_0| \leq C_3$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2n}(Q)$, u_d, v_d, $w_d \in L^{2m}(Q)$, com n e m quaisquer inteiros tais que n, $m \geq 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (7.5.21) possui uma solução ótima.*

Na próxima seção estudaremos condições necessárias para que $(\tau,u,v,w,f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (7.5.21).

7.5.2 Condição Necessária de Otimalidade

Para demonstrarmos condições necessárias para que $(\tau, u, v, w, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (7.5.21) não podemos proceder como na demonstração do Teorema 7.8. Pois, neste caso, $intQ_1 = \emptyset$, então Q_1 não é uma restrição de desigualdade e sim de igualdade, logo não poderemos utilizar o Teorema de Dubovitskii e Milyutin (Teorema 5.1). Aqui precisaremos do Teorema 5.7, como na demonstração do Teorema 7.6.

Para obtermos as condições necessárias para que $(\tau, u, v, w, f) \in E$ seja uma solução ótima do problema (7.5.21) precisaremos do cone das direções de descida do funcional $J(\cdot)$, e dos cones das direções tangentes de Q_1 e Q_2 e os cones duais.

Para isso, consideremos uma solução ótima $(\tau, u, v, w, f) \in E$ do problema (7.5.21). Lembremos que o cone de direções de descida associado ao funcional $J(\cdot)$ no ponto (τ, u, v, w, f) e seu dual são dados pelo Lema 7.2. E o cone tangente ao conjunto Q_2 no ponto (τ, u, v, w, f) e seu dual são dados pelo Lema 7.4. Para o cone de direções tangentes de Q_1 no ponto (τ, u, v, w, f) temos o resultado a seguir, que é demonstrado de forma análoga ao Lema 6.12.

Lema 7.12 *O cone de direções tangentes de Q_1 no ponto $(\tau, u, v, w, f) \in E$ é dado por*

$$\begin{aligned} & TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f)) \\ = & \{(\theta, x, y, z, h) \in E : \langle \nabla\tau(x,t), \nabla\theta(x,t)\rangle \leq 0 \text{ para quase todo } (x,t) \text{ tal que } |\nabla\tau(x,t)| = C_3\}, \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Agora procedendo de forma análoga à demonstração do Lema 6.13 obtemos o resultado dado a seguir sobre o cone dual de $TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))$.

Lema 7.13 $[TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))]^* \subset [W_r^{2,1}(Q)]'$, *isto é, para cada $g_1 \in [TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))]^*$ existe única $\psi_1 \in [W_r^{2,1}(Q)]'$ tal que $g_1(\theta, x, y, z, h) = \psi_1(\theta)$, para todo $(\theta, x, y, z, h) \in E$.*

Vejamos agora um resultado sobre condição necessária de otimalidade para o problema de otimização (7.5.21).

Teorema 7.10 *Seja $(\tau, u, v, w, f) \in E = W_r^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times L^r(Q)$ uma solução ótima do problema (7.5.21), com r e l satisfazendo (7.0.2). Se $r \geq 2s$, então existem funções $(\theta, p, q, g) \in W_{2s}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q) \times W_{2m}^{2,1}(Q)$ satisfazendo ao sistema adjunto (7.1.10). Além disso, existe $g_1 \in [TC(Q_1, (\tau, u, v, w, f))]^* \subset [W_r^{2,1}(Q)]'$ tal que*

$$\int_0^T \int_\Omega \left(Nsf^{2s-1} + \theta\right) h \, dxdt = -g_1(\varphi),$$

para todo (φ, x, y, z, h) solução de (7.1.12).

Para demonstrar este Teorema basta repetir a demonstração do Teorema 7.6 usando os Lemas 7.12 e 7.13 no lugar do Lema 7.8.

7.6 Um Problema com Restrições sobre o Controle e sobre a Temperatura

Nesta seção trabalharemos com o seguinte problema de otimização

$$\min_{(\tau,u,v,w,f)\in Q} J(\tau,u,v,w,f), \tag{7.6.22}$$

onde o funcional J é dado por (7.0.3) e $Q = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$, sendo Q_1 e Q_2 dados pelas restrições de desigualdade

$$Q_1 = \{(\tau,u,v,w,f) \in E : C_1 \leq \tau \leq C_2 \text{ q.t.p. em } Q\} \text{ e}$$
$$Q_2 = \{(\tau,u,v,w,f) \in E : \|f\|_{L^{2s}(Q)} \leq C_3 \text{ q.t.p. em } Q\},$$

respectivamente, com $C_3 \geq |l_1|\widetilde{k}_1(C_1,C_2) + |l_2|\widetilde{k}_2(C_1,C_2) + |l_3|\widetilde{k}_3(C_1,C_2)$, onde $\widetilde{k}_1$, $\widetilde{k}_2$ e $\widetilde{k}_3$ são como em (7.6.23) na demonstração do Lema 6.14. E Q_3 é dado pela restrição de igualdade

$$Q_3 = \{(\tau,u,v,w,f) \in E : M(\tau,u,v,w,f) = 0\},$$

sendo $M : E \to \widetilde{E}$ um operador definido, como nas seções anteriores, por

$$M(\tau,u,v,w,f) = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6,\varphi_7,\varphi_8),$$

se, e somente se, (τ,u,v,w,f) é solução do sistema (7.1.5) com $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6,\varphi_7,\varphi_8)$. Lembremos que $M(\tau,u,v,w,f) = 0$ se, e somente se, (τ,u,v,w,f) é solução do problema (4.0.1).

Para este problema trataremos somente da existência de controle ótimo, mas não das condições necessárias de otimalidade. Neste problema a dificuldade de se demonstrar a existência de controle ótimo para é verificar que o conjunto admissível, U_{ad}, é não vazio. Então, agora vamos fazer tal verificação.

Lema 7.14 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes com b, k, a_1, $a_2 > 0$. Suponha também que $\tau_0 \in W^2_{\widetilde{r}}(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W^2_{\widetilde{l}}(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (7.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0, $w_0 \geq 0$, $u_0 + v_0 + w_0 = 1$, $C_1 \leq \tau_0 \leq C_2$ q.t.p. em Q e $C_3 \geq |l_1|\widetilde{k}_1(C_1,C_2) + |l_2|\widetilde{k}_2(C_1,C_2) + |l_3|\widetilde{k}_3(C_1,C_2)$, onde $\widetilde{k}_1$, $\widetilde{k}_2$ e $\widetilde{k}_3$ são como em (7.6.23). Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $r \geq 2s$, então $U_{ad} \neq \emptyset$.*

Demonstração:

Seja $\tau \in W^{2,1}_r(Q)$ solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial t} - b\Delta\tau = 0 \qquad & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \partial\tau/\partial n = 0 \qquad & \text{em } \partial\Omega \times (0,T) \\ \tau = \tau_0 \qquad & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Pelo princípio de máximo para equações parabólicas temos que $\tau(x,t) \geq \min\{\tau_0(x) : x \in \Omega\} \geq C_1$ e $\tau(x,t) \leq \max\{\tau_0(x) : x \in \Omega\} \leq C_2$. Logo $C_1 \leq \tau \leq C_2$.

Pelos Teoremas 3.2 e 3.4 e pelo Corolário 3.2 temos que existe único $(u,v,w) \in W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q) \times W_l^{2,1}(Q)$ solução do problema (3.0.1) com $-2m_i = c_i\tau + d_i$, para $i = 1,2,3$, sendo c_i, d_i os mesmos do problema (7.1.5), para $i = 1,2,3$, e, além disso, u, v e w satisfazem

$$\|u\|_{W_l^{2,1}(Q)} \leq \overline{k}_1(C_1,C_2), \quad \|v\|_{W_l^{2,1}(Q)} \leq \overline{k}_2(C_1,C_2) \text{ e } \quad \|w\|_{W_l^{2,1}(Q)} \leq \overline{k}_3(C_1,C_2).$$

Como $l \geq r \geq 2s$, das estimativas anteriores e da inclusão contínua $W_l^{2,1}(Q) \subset W_{2s}^{2,1}(Q)$, temos

$$\|u\|_{W_{2s}^{2,1}(Q)} \leq \widetilde{k}_1(C_1,C_2), \quad \|v\|_{W_{2s}^{2,1}(Q)} \leq \widetilde{k}_2(C_1,C_2) \quad \text{e} \quad \|w\|_{W_{2s}^{2,1}(Q)} \leq \widetilde{k}_3(C_1,C_2). \tag{7.6.23}$$

Tomando $f = -l_1\frac{\partial u}{\partial t} - l_2\frac{\partial v}{\partial t} - l_3\frac{\partial w}{\partial t}$ temos que $f \in L^{2s}(Q)$, $(\tau,u,v,w,f) \in E$ é solução do problema (4.0.1) e

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{2s}(Q)} \leq \left\| l_1\frac{\partial u}{\partial t} + l_2\frac{\partial v}{\partial t} + l_3\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^{2s}(Q)} &\leq |l_1|\|u\|_{W_{2s}^{2,1}(Q)} + |l_2|\|v\|_{W_{2s}^{2,1}(Q)} + |l_3|\|w\|_{W_{2s}^{2,1}(Q)} \\ &\leq |l_1|\widetilde{k}_1(C_1,C_2) + |l_2|\widetilde{k}_2(C_1,C_2) + |l_3|\widetilde{k}_3(C_1,C_2) \leq C_3.\end{aligned}$$

Logo, $(\tau,u,v,w,f) \in U_{ad}$.

■

7.6.1 Existência de Solução Ótima

Usando o Lema 7.14, de modo análogo como foi demonstrada a existência de uma solução ótima do problema (7.4.20), demonstra-se a existência de uma solução ótima do problema (7.6.22), que é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 7.11 *Suponha que b, l_1, l_2, l_3, k, a_1, c_1, d_1, a_2, c_2 e d_2 são constantes com b, k, a_1, $a_2 > 0$, e $\tau_0 \in W_{\widetilde{r}}^2(\Omega)$, u_0, v_0, $w_0 \in W_{\widetilde{l}}^2(\Omega)$, com $\widetilde{r}$ e $\widetilde{l}$ satisfazendo (7.0.2), são tais que $\partial\tau_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial w_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, u_0, v_0, $w_0 \geq 0$, $u_0 + v_0 + w_0 = 1$, $C_1 \leq \tau_0 \leq C_2$ q.t.p. em Q e $C_3 \geq |l_1|\widetilde{k}_1(C_1,C_2) + |l_2|\widetilde{k}_2(C_1,C_2) + |l_3|\widetilde{k}_3(C_1,C_2)$, onde $\widetilde{k}_1$, $\widetilde{k}_2$ e $\widetilde{k}_3$ são como em (7.6.23). Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Assuma também que $\tau_d \in L^{2n}(Q)$, u_d, v_d e $w_d \in L^{2m}(Q)$, com n e m quaisquer inteiros tais que n, $m \geq 1$. Se $r = 2s$, então o problema de otimização (7.6.22) possui uma solução ótima.*

Capítulo 8

Conclusões

Neste trabalho conseguimos atingir nosso objetivo, que era generalizar os resultados Hoffman e Jiang em [9] para dois modelos de solidificação de ligas metálicas envolvendo duas e três funções campo de fase, respectivamente. E além de generalizarmos o problema de controle tratado por Hoffman e Jiang para cada um deste modelos, também tratamos alguns problemas de controle envolvendo diferentes restrições tanto no controle, quanto no estado. Para cada um destes problemas de controle foi discutida a existência de controle ótimo e, utilizando o formalismo de Dubovitskii e Milyutin, foi possível encontrar condições necessárias de otimalidade.

A partir deste trabalho nosso próximo objetivo é estudar o modelo solidificação envolvendo três funções campos de fase apresentado em [13] e [14] e generalizar pelo menos alguns do resultados obtidos aqui. O sistema que estudaremos é o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau &= l_1\frac{\partial u}{\partial t} + l_2\frac{\partial v}{\partial t} + l_3\frac{\partial w}{\partial t} + f \\
\frac{\partial u}{\partial t} - k_1\left(w\Delta u - u\Delta v\right) - k_3\left(v\Delta u - u\Delta v\right) &= -a_1 uw(w - u + c_1\tau + d_1) - a_3 uv(v - u + c_3\tau + d_3) \\
\frac{\partial v}{\partial t} - k_2\left(w\Delta v - v\Delta w\right) - k_3\left(u\Delta v - v\Delta u\right) &= -a_2 vw(w - v + c_2\tau + d_2) - a_3 uv(u - v - c_3\tau - d_3) \\
\frac{\partial w}{\partial t} - k_1\left(u\Delta w - w\Delta u\right) - k_2\left(v\Delta w - w\Delta v\right) &= -a_1 uw(u - w - c_1\tau - d_1) - a_2 vw(v - w - c_2\tau - d_2) \\
\frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T) \\
\tau = \tau_0, \quad u = u_0, \quad v = v_0 \quad &\text{e} \quad w = w_0 \quad \text{em} \quad \Omega\times\{t=0\},
\end{aligned}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e de classe C^2, $T \in \mathbb{R}$ finito e $Q = \Omega \times (0,T)$. E n representa o vetor unitário normal exterior à $\partial\Omega$.

As funções campo de fase u, v e w distinguem entre três subdomínios sólidos com cristalizações distintas e um subdomínio líquido em Q e τ representa a temperatura. Aqui b, k_1, k_2, k_3, a_1, a_2 e a_3 são constantes positivas, l_1, l_2, l_3 são constantes de mesmo sinal, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2 e d_3 são constantes arbitrárias e f é uma função dada. As condições iniciais u_0, v_0 e w_0 serão tomadas adequadamente.

Para estudar tal sistema o primeiro passo será estudar o sistema simplificado dado por:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \tau}{\partial t} - b\Delta\tau = l_1' \frac{\partial u}{\partial t} + l_2' \frac{\partial v}{\partial t} + f \\
\frac{\partial u}{\partial t} - k_1\Delta u - (k_3 - k_1)\,(v\Delta u - u\Delta v) = -a_1 u(1-u-v)(1-2u-v+c_1\tau+d_1) - a_3 uv(v-u+c_3\tau+d_3) \\
\frac{\partial v}{\partial t} - k_2\Delta v - (k_3 - k_2)\,(u\Delta v - v\Delta u) = -a_2 v(1-u-v)(1-2v-u+c_2\tau+d_2) - a_3 vu(u-v-c_3\tau-d_3) \\
\frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\
\tau = \tau_0, \quad u = u_0, \quad \text{e} \quad v = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \{t=0\},
\end{gathered}
$$

onde $l_1' = l_1 - l_3$ e $l_2' = l_2 - l_3$.

O problema acima é obtido do anterior substituindo w por $1-u-v$, pois $u+v+w=1$ q.t.p. em Q, uma vez que $u_0+v_0+w_0=1$ em Ω por razões físicas e somando a segunda terceira e quarta equações do primero problema obtemos que $\partial(u+v+w)/\partial t = 0$.

Bibliografia

[1] R. Adams, Sobolev Spaces. Academic Press, 1975.

[2] G. Caginalp, An analysis of phase field model of a free boundary, Arch. Rat. Mech. Anal. 92, pág.205-245, 1986.

[3] G. Caginalp, Phase field computations of single-needle crystals, crystal growth and motion by mean curvature, SIAM J. Sci. Comput. 15 (1), pág. 106-126, 1994.

[4] G. Caginalp e J. Jones, A derivation and analisys of phase field models of thermal alloys, Annal. Phys. 237, pág. 66-107, 1995.

[5] G. Caginalp, Stefan e Hele-Shaw, type models as asymption limits of the phase-field equations, Phys. Rev. A 39 (11), pág. 5887-5896, 1989.

[6] G. J. Fix, Phase field meyhods for free boundary problems em A. Fasano, M. Primicerio (Eds) Free Boundary Problems: Theory and Applications, Pitman, Boston, pág. 580-589, 1983.

[7] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice Hall, 1964.

[8] I. V. Girsanov, Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol.67, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[9] K. Hoffman e L. Jiang, Optimal Control of a Phase Field Model for Solidification. Numer. Funct. Anal. and optimiz., 13, pág. 11 a 27, 1992.

[10] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translations of Mathematical Monographs, Volume 23, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.

[11] J. L. Lions, Control of Distributed Singular Systems. Gauthier-Villars, 1985.

[12] V. P. Mikhaylov, Partial Differential Equations. Mir Publishers, Moscow, 1978.

[13] I. Steinbach, F. Pezzolla, B. Nestler, M. SeeBelger, R. Prieler, G.J. Schimitz, J.L.L. Rezende, A phase field concept for multiphase systems. Physica D, vol.94, 1996, pp.135-147.

[14] I. Steinbach, F. Pezzolla, A generalized field method for multiphase transformations using interface fields. Physica D, vol.134, 1999, pp.385-393.

[15] S. Walczak, Some properties of cones in normed spaces and their application to investigating extremal problems. Journal of optimization theory and applications, vol.42, nº 4, 1984, pág. 561 a 582.