Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Fatoração de Operadores Fracamente Compactos entre Espaços de Banach

por

Ariosvaldo Marques Jatobá [†]

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: **Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui**

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

Fatoração de Operadores Fracamente Compactos entre Espaços de Banach

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Ariosvaldo Marques Jatobá** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de agosto de 2005.

Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui.

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos.

Prof. Dr. Geraldo Márcio de A. Botelho.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecário: Maria Julia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Jatobá, Ariosvaldo Marques

J318f Fatoração de operadores fracamente compactos entre espaços de Banach / Ariosvaldo Marques Jatobá -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Jorge Túlio Mujica Ascui

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Banach, Espaços de. 2. Fatoração de operadores. 3. Operadores lineares. I. Ascui, Jorge Túlio Mujica. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Factorization of weakly compact operators between Banach spaces.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Banach space. 2. Factorization of operators. 3. Linear operators.

Área de concentração: Análise Funcional

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho (FAMAT-UFU)

Data da defesa: 05/08/2005

Dissertação de Mestrado defendida em 05 de agosto de 2005 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof ~~(a)~~. Dr (a). JORGE TÚLIO MUJICA ASCUI

Prof (a). Dr (a). MÁRIO CARVALHO DE MATOS

Prof (a). Dr (a). GERALDO MÁRCIO DE AZEVEDO BOTELHO

Aos meus pais
Almery e Antônio
À minha noiva Vanessa

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por ter dado-me esta oportunidade e guiado-me nesta dissertação. Sem ele nada disso teria sentido.

À minha noiva Vanessa Dias Vilela pela paciência, compreensão, apoio, dedicação e amor que sempre me deu. Além disso sou grato à meu cunhado Alex e seus pais Carlos e Adélia.

À meus pais Almery e Antônio. Meus irmãos José Lito, Joel, André, Toinho, Vanderval, Gilberto e à minhas queridas irmãs Jozélia, Girlaide e Oraide que sempre me incentivaram e apoiaram nesta caminhada.

À meu sobrinho Ilton e minhas sobrinhas Tatiele, Sabrina, Andréa, Joyce, Shirly e Clara pela alegria que sempre me proporcionam.

À minha família que fiz em Campinas, Marcelo, Vinícius , Weber e Helson. Aos meus companheiros José Antônio, Carlinhos, Rafael, Douvânio, Claiton, Nandão, Jeninho, galera do futebol, colegas de curso tanto do IMECC/UNICAMP quanto da FAMAT/UFU, dentre tantos outros que permanecerão em minha memória.

Aos professores do IMECC-UNICAMP e da FAMAT-UFU. Em especial meu orientador, Jorge Mujica, pela paciência, dedicação, orientação excelente e por toda ajuda que me concedeu com o seu imenso conhecimento matemático. E também em especial ao professor Geraldo Botelho que me proporcionou estudar Análise Funcional.

À Capes pelo apoio financeiro indispensável.

ABSTRACT

Our first aim is to prove an important caracterization of weakly compact sets in Banach spaces, the Eberlein-Šmulian Theorem which says that a subset K of a Banach space is weakly compact if and only if each sequence in K has a subsequence which converges weakly to an element of K.

We next prove an important caracterization of weakly compact operators between Banach spaces, the Gantmacher Theorem, which says that a continuous linear operator $T\colon E \longrightarrow F$ between Banach spaces is weakly compact if and only if its adjoint $T'\colon F' \longrightarrow E'$ is weakly compact.

Finally, we prove the principal result of this work, the Factorization Theorem of Davis, Figiel, Johnson and Pelczynski, which says that a continuous linear operator $T\colon E \longrightarrow F$ between Banach spaces is weakly compact if and only if T factors through a reflexive Banach space, i.e, there are a reflexive Banach space G and continuous linear operators $S\colon E \longrightarrow G$ and $L\colon G \longrightarrow F$ such that $T = L \circ S$. An application of this result is that an m-homogeneous continuous polynomial $P\colon E \longrightarrow F$ between Banach spaces is weakly compact if and only if there are a reflexive Banach space G, an m-homogeneous continuous polynomial $Q\colon E \longrightarrow G$ and a continuous linear operator $L\colon G \longrightarrow F$ such that $P = L \circ Q$.

RESUMO

Nosso primeiro objetivo é provar uma importante caracterização de conjuntos fracamente compactos em espaços de Banach, o Teorema de Eberlein-Šmulian, que diz que um subconjunto K de um espaço de Banach é fracamente compacto se, e somente se, toda seqüência em K tem uma subseqüência que converge fracamente para um elemento de K.

Em seguida nós provamos uma importante caracterização de operadores fracamente compactos entre espaços de Banach, o Teorema de Gantmacher, que diz que um operador linear contínuo $T: E \to F$ entre espaços de Banach é fracamente compacto se, e somente se, o seu adjunto $T': F' \to E'$ é fracamente compacto.

Finalmente, nós provamos o resultado principal deste trabalho, o Teorema de Fatoração de Davis, Figiel, Johnson e Pelczynski, que diz que, um operador linear contínuo $T: E \to F$ entre espaços de Banach é fracamente compacto se, e somente se, T fatora-se através de um espaço de Banach reflexivo, isto é, existem um espaço de Banach reflexivo G e operadores lineares contínuos $S: E \to G$ and $L: G \to F$ tais que $T = L \circ S$. Uma aplicação deste resultado é que um polinômio m-homogêneo contínuo $P: E \to F$ entre espaços de Banach é fracamente compacto se, e somente se, existem um espaço de Banach reflexivo G, um polinômio contínuo m-homogêneo $Q: E \to G$ e um operador linear contínuo $L: G \to F$ tais que $P = L \circ Q$.

CONTEÚDO

Introdução

A área do conhecimento matemático na qual este trabalho se insere é a Análise Funcional, na teoria de espaços de Banach.

Šmulian em 1940 mostrou que os subconjuntos fracamente compactos de um espaço de Banach são seqüencialmente fracamente compactos. Ele também fez algumas tentativas sobre a recíproca, assim como também Phillips (1943). A prova da recíproca foi feita por Eberlein em 1947. Em 1967 Whitley fez uma prova elementar do Teorema de Eberlein-Šmulian em seu artigo intitulado " *An elementary proof of the Eberlein-Šmulian theorem* ". É devido ao resultado de Eberlein-Šmulian, que existem vários estudos sobre os conjuntos fracamente compactos em espaços de Banach. Citamos dentre vários, um artigo de J. Lindenstrauss, intitulado " *Weakly compact sets-their topological properties and the Banach spaces they generate* " de 1972, e a monografia de K. Floret (1980), intitulada " *Weakly compact sets* ".

Schauder [6] provou que um operador linear contínuo $T\colon E \longrightarrow F$ entre espaços de Banach é compacto se, e somente, se seu adjunto $T'\colon F' \longrightarrow E'$ é compacto. Gantmacher [6] obteve um resultado análogo para operadores fracamente compactos. R. Ryan [13] obteve um resultado análogo para polinômios homogêneos. Várias aplicações do Teorema de fatoração de Davis, Figiel, Johnson e Pelczynski [4] existem, tais como a teoria de ideais de polinômios gerados por operadores fracamente compactos [2] e seção 3 em [4] sobre as técnicas de fatoração envolvendo bases.

Agora passaremos a um resumo da dissertação, que é dividida em cinco capítulos.

- O Capítulo 1 é dedicado às definições preliminares e alguns Teoremas clássicos da Análise Funcional. $L(E;F)$ denota o espaço vetorial de todas aplicações lineares contínuas. O espaço $L(E;\mathbb{K})$ é denotado por E', e é chamado de *dual topológico*, ou simplesmente dual de E. Os elementos de E' são chamados de *funcionais lineares contínuos*.

- O Capítulo 2 é dedicado ao estudo dos espaços de Banach reflexivos. Sabemos que a noção de compacidade desempenha um papel fundamental na solução de diversos problemas. Para resolver alguns destes problemas, introduzimos na seção 2.2 duas importantes topologias na teoria dos espaços de Banach, com menos abertos e, conseqüentemente, com mais compactos de forma a possibilitar a solução de diversos problemas. Essas topologias são a topologia fraca e a topologia fraca estrela. A primeira (a topologia fraca) está presente em todos os espaços normados, já a segunda (topologia fraca estrela) está presente somente nos espaços duais. Sabemos que a bola fechada unitária em um espaço normado E é compacta se, e somente se, E tem dimensão finita. Devido a Banach e Alaoglu, temos que bola fechada unitária de E' é compacta na topologia fraca estrela de E'. Na seção 2.2, nós daremos uma condição necessária e suficiente para um espaço de Banach E seja um espaço de Banach reflexivo: um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, a bola fechada unitária de E é compacta na topologia fraca.

- O Capítulo 3 é dedicado ao estudo dos conjuntos compactos para a topologia fraca. Nas seções 3.3 e 3.4, nós mostraremos que dado um espaço normado E e um subconjunto K de E, então K é compacto na topologia fraca se, e somente se, toda seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em K admite uma subseqüência, que converge fracamente para um ponto de K. Este resultado foi demonstrado por Eberlein e Šmulian.

- O Capítulo 4 é dedicado à caracterização dos operadores fracamente compactos entre espaços de Banach. Na seção 4.1 definimos o adjunto de um operador e estabelecemos condições necessárias e suficientes para que um operador seja fracamente compacto. Na seção 4.2 encontra-se o principal resultado deste capítulo: para um operador ser fracamente compacto é necessário e suficiente que o seu adjunto também seja fracamente compacto. Este resultado foi obtido por Gantmacher .

- O Capítulo 5 é dedicado ao estudo dos operadores fracamente compactos e polinômios m-homogêneos fracamente compactos entre espaços de Banach. O nosso principal resultado deste capítulo é o Teorema de fatoração de Davis, Figiel, Johnson e Pelczynski [4]: para um operador linear e contínuo entre espaços de Banach $T: E \to F$ ser fracamente compacto é necessário e suficiente que exista um espaço de Banach reflexivo G e operadores $S \in L(E;G)$ e $L \in L(G;F)$ tais que $T = L \circ S$. Na seção 5.2, nós mostramos que um polinômio m-homogêneo contínuo $P: E \to F$ é fracamente compacto se, e somente se, existem um espaço de Banach reflexivo G, um polinômio m-homogêneo $Q \in P(^m E;G)$ e um operador $w \in L(G;F)$ tais que $P = w \circ Q$. Aqui $P(^m E;G)$ denota o espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos contínuos de E em G.

CAPÍTULO 1

Definições Preliminares e Teoremas Clássicos da Análise Funcional

1.1 Espaços Normados

Sempre consideraremos espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.1.1. *Se E é um espaço vetorial, então uma função $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ é chamada de norma se verifica as seguintes propriedades:*

(a) $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in E$.

(b) $\|x\| = 0$ *se e somente se* $x = 0$.

(c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *para todos* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $x \in E$.

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todos* x, $y \in E$.

A desigualdade (d) é chamada de *desigualdade triangular.* O par $(E, \|.\|)$ é chamado de *espaço normado.* Com freqüência falaremos do espaço normado E em lugar do espaço normado $(E, \|.\|)$. E é chamado *espaço de Banach* se for completo com relação à métrica natural $d(x, y) = \|x - y\|$.

Proposição 1.1.2. *Sejam E e F espaços normados. Seja $T : E \to F$ aplicação linear. Então T é contínua se e só se existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|T(x)\| \leq c\,\|x\| \text{ para todo } x \in E.$$

Definição 1.1.3. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Dado uma aplicação linear $T : E \to F$, seja $\|T\|$ definida por*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Denotaremos por $L(E;F)$ espaço vetorial de todas as aplicações lineares contínuas

$$T : E \to F.$$

Proposição 1.1.4. *A função $T \to \|T\|$ é uma norma em $L(E;F)$. Se F é um é um espaço de Banach, então $L(E;F)$ também é um espaço de Banach.*

É claro que o valor absoluto define uma norma em $\mathbb{K}$, e que $\mathbb{K}$, munido dessa norma, é completo. O espaço $L(E;\mathbb{K})$ é denotado por E', e é chamado de *dual topológico*, ou simplesmente dual de E. Os elementos de E' são chamados de *funcionais lineares contínuos.*

Como conseqüência imediata desta Proposição, o dual de um espaço normado é sempre um espaço de Banach. Seja E um espaço normado. Dados $x' \in E'$ e $x \in E$, com frequência escreveremos

$$\langle x', x\rangle = x'(x).$$

1.2 Teorema de Hahn-Banach e Conseqüências

Teorema 1.2.1. (*Hahn-Banach*) *Seja E um espaço normado,e seja M_o um subespaço de E. Então para cada $\phi_o \in M_o{}'$, existe um $\phi \in E'$ tal que:*

(b) $\phi(x) = \phi_o(x)$ *para todo* $x \in M_o$;

(c) $\|\phi\| = \|\phi_o\|$.

Demonstração. Veja [6]. □

Temos os seguintes resultados conseqüente do Teorema de Hahn-Banach.

Corolário 1.2.2. *Seja E um espaço normado.*

(a) *Seja M_o um subespaço fechado de E. Se $x \notin M_o$, então existe um funcional $x' \in E'$ com $x'(x) = 1$ e $x'(y) = 0$ para todo $y \in M_o$.*

(b) *Para cada $x \neq 0$ em E, existe um $x' \in E'$ com $\|x'\| = 1$ e $x'(x) = \|x\|$.*

(c) *Para cada $x \in E$,*

$$\|x\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |x'(x)| .$$

Demonstração. Veja [6]. □

Definição 1.2.3. *Sejam E e F espaços normados e $T \in L(E;F)$.*

(a) *Dizemos que T é isomorfismo topológico entre E e F se T é bijetora, e sua inversa é contínua.*

(b) *Dizemos que T é isomorfismo isométrico entre E e F se T é bijetora, e $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.*

Definição 1.2.4. *Seja E um espaço normado, e seja $A \subset E$.*

(a) *A é dito equilibrado se $\lambda x \in A$ para todos $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq 1$.*

(b) *A é dito absorvente se para cada $x \in E$ existe $\delta > 0$ tal que $\lambda x \in A$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq \delta$.*

(c) *A é dito convexo se $\alpha x + \beta y \in A$ para todos $x, y \in A$ e $\alpha,\beta \geq 0$ com $\alpha + \beta = 1$.*

Definição 1.2.5. *Seja E um espaço normado. Uma função $p\colon E \to \mathbb{R}$ é chamada de seminorma se verifica as seguintes condições:*

(a) $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$.

(b) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$.

(c) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todos x, $y \in E$.

Temos que uma seminorma p é uma norma se $p(x) = 0$ implica $x = 0$.

Proposição 1.2.6. *Seja E um espaço normado, e seja p uma seminorma em E. Então o conjunto*

$$U_{p,\varepsilon} = \{x \in E : p(x) < \varepsilon\}$$

é convexo, equilibrado e absorvente, para cada $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Mostremos que $U_{p,\varepsilon}$ é convexo. Sejam $\alpha,\beta \geq 0$ com $\alpha + \beta = 1$, assim temos:

$$p(\alpha x + \beta y) \leq p(\alpha x) + p(\beta y) = \alpha p(x) + \beta p(y) \leq \varepsilon(\alpha + \beta) = \varepsilon$$

para todos x, $y \in U_{p,\varepsilon}$. Seja $\lambda \in \mathbb{K}$, então temos:

$$p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) \leq |\lambda|\, \varepsilon \leq \varepsilon \text{ sempre que } |\lambda| \leq 1,$$

portanto $U_{p,\varepsilon}$ é convexo, equilibrado e absorvente, para cada $\varepsilon > 0$. □

Como toda norma é uma seminorma, temos que as bolas

$$B(0;\varepsilon) = \{x \in E : \|x\| < \varepsilon\},$$

com $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças de zero que são convexas, equilibradas e abertas.

Teorema 1.2.7. (*Gráfico Fechado*) *Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja $T\colon E \to F$ um aplicação linear cujo gráfico é fechado em $E \times F$. Então T é contínua.*
O gráfico de uma aplicação $T\colon E \to F$ é conjunto

$$Graf(T) = \{(x,y) \in E \times F : y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\}.$$

Demonstração. Veja [6]. □

Teorema 1.2.8. (*Banach-Steinhaus*) *Seja E um espaço normado, e seja A um subconjunto de E tal que $\phi(A)$ é limitado em $\mathbb{K}$ para cada $\phi \in E'$. Então A é limitado em E.*

Demonstração. Veja [6] □

CAPÍTULO 2

Caracterização dos Espaços Reflexivos

Neste capítulo definimos quando um espaço de Banach E é reflexivo. E introduziremos as duas topologias importantes na teoria dos espaços de Banach, que são a topologia fraca e a topologia fraca estrela. A primeira (a topologia fraca) está presente em todos os espaços normados, já a segunda (topologia fraca estrela) está presente somente nos espaços duais. E veremos que bola unitária dos duais são sempre compactas na topologia fraca estrela. O resultado central deste capítulo é: para que a bola unitária fechada de E seja compacta na topologia fraca é necessário e suficiente que E seja um espaço de Banach reflexivo.

2.1 Espaços Reflexivos

Definição 2.1.1. *Seja E um espaço normado, o dual do espaço de Banach E', denotado por E'' é chamado de bidual de E.*

Proposição 2.1.2. *Seja $J : E \to E''$ definido por*

$$J(x)(x') := \langle x', x \rangle \ \textit{para todos } x \in E \ , \ x' \in E'.$$

Então J é um isomorfismo isométrico entre E e um subespaço de E''.

Demonstração. Se $x \in E$, é fácil verificar que $J(x)$ é linear. Então dado $x' \in E'$, temos que

$$|J(x)(x')| = |\langle x', x \rangle| \leq \|x'\| \, \|x\| \,,$$

segue da Proposição 1.1.2 que $J(x) \in E''$ e que

$$\begin{aligned}\|J(x)\| &= \sup\{|J(x)(x')| \quad ; \|x'\| \leq 1\} = \sup\{|\langle x', x\rangle| \quad ; \|x'\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\ \|x'\|\,\|x\| \ ; \|x'\| \leq 1\} = \|x\|.\end{aligned}$$

Assim pela Proposição 1.1.2, $J : E \longrightarrow E''$ é linear e contínua e $\|J(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$. Agora, como

$$\|J(x)\| = \sup\{|J(x)(x')| \quad ; \|x'\| \leq 1\} = \sup\{|\langle x', x\rangle| \quad ; \|x'\| \leq 1\}$$

e tendo que pelo resultado conseqüente do Teorema de Hahn-Banach, para cada $x \in E$, existe um $x' \in E'$ com $\|x'\| = 1$ e $x'(x) = \|x\|$, temos $\|J(x)\| = \|x\|$. Portanto J é um isomorfismo isométrico entre E e $J(E)$. □

Definição 2.1.3. *Seja E um espaço de Banach, dizemos que E reflexivo se $J(E) = E''$.*

Observação 2.1.4. *Se E é um espaço normado, como E'' é sempre completo, E só poderá ser reflexivo se for Banach. Desta forma, uma condição necessária para J seja sobrejetora é que E seja um espaço de Banach.*

Exemplo 2.1.5. *Todo espaço normado E de dimensão finita é reflexivo, pois como a* $\dim E = \dim E''$ *e* $J : E \longrightarrow E''$ *é linear e injetora, temos:*

$$\dim E'' = \dim E = \dim Ker(J) + \dim J(E) = \dim J(E)$$

portanto $\dim E'' = \dim J(E)$ *assim temos que* $J(E) = E''$.

Teorema 2.1.6. *Um espaço de Banach E é reflexivo se e somente se E' é reflexivo.*

Demonstração. Suponhamos que E seja reflexivo. Mostremos que E' é reflexivo. Mostremos que $J_{E'}(E') = E'''$. Então seja $x''' \in E'''$ é preciso encontrar um $y' \in E'$ tal que $J_{E'}(y') = x'''$. Como temos que $x''' : E'' \longrightarrow \mathbb{K}$ e $J_E : E \longrightarrow E''$ tomemos $y' = x''' \circ J_E$. Logo $y' \in E'$ e como E é reflexivo temos $J_E(E) = E''$. Assim

$$J_{E'}(y')(J_E(x)) = J_E(x)(y') = \langle y', x\rangle = x''' \circ J_E(x) = x'''(J_E(x)) \text{ para todo } x \in E.$$

Portanto $J_{E'}(y') = x'''$.

Reciprocamente suponhamos que E' seja reflexivo e mostremos que $J_E(E) = E''$. Suponhamos que $J_E(E) \subsetneq E''$. Como pelo Proposição 2.1.2 J_E é um isomorfismo isométrico entre

E e $J_E(E)$, tendo que E é de Banach, temos que $J_E(E)$ é um subespaço de Banach de E'', logo $J_E(E)$ é fechado. Assim pelo corolário do Teorema de Hahn-Banach existe $x''' \in E'''$, $x''' \neq 0$ tal que

$$x'''(J_E(x)) = 0 \text{ para todo } x \in E. \tag{1}$$

Tendo que E' é reflexivo existe $x' \in E'$ tal que $J_{E'}(x') = x'''$ ou seja

$$x'''(y'') = J_{E'}(x')(y'') = y''(x') \text{ para todo } y'' \in E''. \tag{2}$$

Como $J_E(x) \in E''$, para todo $x \in E$, temos por (1) e (2):

$$0 = x'''(J_E(x)) = J_{E'}(x')(J_E(x)) = J_E(x)(x') = \langle x', x\rangle \text{ para todo } x \in E.$$

Portanto $x' = 0$. Assim temos que $x''' = J_{E'}(x') = J_{E'}(0) = 0$ absurdo, pois $x''' \neq 0$. Portanto temos que $J_E(E) = E''$ □

2.2 Topologia Fraca e Topologia Fraca Estrela

A topologia fraca de um espaço normado. Seja E um espaço normado e seja E' seu dual. A *topologia fraca* de E, que denotaremos por $\sigma(E, E')$ é a topologia em E que tem como base de vizinhanças de $x_o \in E$, os conjuntos

$$V(x_o, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \varepsilon) = \{x \in E : |\phi_j(x_o - x)| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, n\},$$

com $\varepsilon > 0$ e $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \in E'$ e $n \in \mathbb{N}$.

Dado A um subconjunto de E, denotaremos a *aderência* de A em $(E, \sigma(E, E'))$ por $\overline{A}^w$. E quando A for compacto em $(E, \sigma(E, E'))$, com freqüência diremos que A é *fracamente compacto* ou simplesmente A é w-compacto.

Em um espaço normado E dizemos que uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E converge fracamente se existe um $x \in E$ com

$$x'(x) = \lim_{n\to\infty} x'(x_n) \text{ para todo } x' \in E',$$

o ponto x é chamado de limite fraco da seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, denotaremos

$$x_n \xrightarrow{w} x.$$

Como conseqüência imediata, temos que toda seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E que converge para $x \in E$ ou seja $x_n \rightarrow x$, converge fracamente para x ou seja

$$x_n \overset{w}{\rightarrow} x,$$

pois como todo $x' \in E'$ é contínuo, temos que $x'(x_n) \rightarrow x'(x)$.

A topologia fraca estrela do dual de um espaço normado. Seja E um espaço normado e seja E' seu dual. A *topologia fraca estrela* de E', que denotaremos por $\sigma(E', E)$, é a topologia em E' que tem como base de vizinhanças de $x'_o \in E'$, os conjuntos

$$W^*(x'_o, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{\phi \in E' : |\langle x'_o - \phi, x_j \rangle| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, n\},$$

com $\varepsilon > 0$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ e $n \in \mathbb{N}$.

Dado B um subconjunto de E', denotaremos a aderência de B em $(E', \sigma(E', E))$ por $\overline{B}^{w^*}$. E quando B for compacto em $(E', \sigma(E', E))$, com freqüência diremos que B é fraco estrela compacto ou simplesmente B é w^*-compacto.

Dizemos que uma rede $(x'_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ em E' converge na topologia $\sigma(E', E)$ para $x'_o \in E'$ se para cada $x \in E$

$$\langle x'_\alpha, x \rangle \rightarrow \langle x'_o, x \rangle.$$

Denotamos

$$x'_\alpha \overset{w^*}{\rightarrow} x'_o.$$

O seguinte resultado mostra que E e E' com a topologia fraca e fraca estrela respectivamente são espaço topológicos de Hausdorff. Dizemos que um espaço topológico (F, τ) é de Hausdorff se dados $x, y \in F$ com $x \neq y$ existem U e V vizinhanças de x e y respectivamente em (F, τ) com $U \cap V = \emptyset$.

Proposição 2.2.1. *Seja E um espaço vetorial normado. Então $(E, \sigma(E, E'))$ e $(E', \sigma(E', E))$ são espaços topológicos de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam x , $y \in E$ com $x \neq y$, assim temos que $x - y \neq 0$, logo como E é um espaço vetorial normado, como conseqüência do Teorema de Hahn-Banach existe $\phi \in E'$ tal que $\phi(x - y) = \|x - y\| \neq 0$, assim $\phi(x) - \phi(y) \neq 0$, o que implica que $\phi(x) \neq \phi(y)$. Tome

$$\varepsilon = \frac{|\phi(x - y)|}{2} > 0,$$

assim $U(x, \phi, \varepsilon) = \{w \in E : |\phi(x-w)| < \varepsilon\}$ e $V(y, \phi, \varepsilon) = \{w \in E : |\phi(y-w)| < \varepsilon\}$ são vizinhanças de x e y respectivamente em $(E, \sigma(E, E'))$. Mostremos que

$$U(x, \phi, \varepsilon) \cap V(y, \phi, \varepsilon) = \emptyset.$$

Suponhamos que exista $z \in U(x, \phi, \varepsilon) \cap V(y, \phi, \varepsilon)$. Assim

$$|\phi(x-z)| < \varepsilon \text{ e } |\phi(y-z)| < \varepsilon.$$

Logo

$$2\varepsilon = |\phi(x-y)| \leq |\phi(x-z)| + |\phi(y-z)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Absurdo! Portanto $(E, \sigma(E; E'))$ é um espaço topológico de Hausdorff.
Sejam ψ, $\varphi \in E'$ com $\psi \neq \varphi$. Então existe um $x \in E$ tal que $\psi(x) \neq \varphi(x)$. Tome

$$\varepsilon = \frac{|\langle \psi - \varphi, x\rangle|}{2} > 0,$$

assim $U^*(\varphi, x, \varepsilon) = \{\theta \in E' : |\langle \varphi - \theta, x\rangle| < \varepsilon\}$ e $V^*(\psi, x, \varepsilon) = \{\theta \in E' : |\langle \psi - \theta, x\rangle| < \varepsilon\}$ são vizinhanças de φ e ψ respectivamente para $(E', \sigma(E', E))$ com $U^*(\varphi, x, \varepsilon) \cap V^*(\psi, x, \varepsilon) = \emptyset$.
Portanto $(E', \sigma(E', E))$ é espaço topológico de Hausdorff. □

Definição 2.2.2. *Dadas duas topologias τ_1 e τ_2 num conjunto X, diremos que τ_1 é mais fraca que τ_2 se $\tau_1 \subset \tau_2$.*

Seja E um espaço normado. Denotaremos τ_E, a topologia em E que tem como base de vizinhanças de $x_o \in E$, os conjuntos

$$B(x_o; \varepsilon) = \{x \in E : \|x_o - x\| < \varepsilon\},$$

com $\varepsilon > 0$.

Proposição 2.2.3. *Seja E um espaço normado. Então:*

(a) $\sigma(E, E') \subset \tau_E$

(b) $\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'') \subset \tau_{E'}$.

Demonstração. Para mostrar que $\sigma(E, E') \subset \tau_E$, mostremos que dados $x_o \in E$ e uma vizinhança U_{x_o} em $(E, \sigma(E, E'))$, existe uma vizinhança de x_o em (E, τ_E), ou seja

$$B(x_o; \delta) = \{x \in E : \|x_o - x\| < \delta\},$$

tal que $B(x_o; \delta) \subset U_{x_o}$. Seja então

$$U(x_o, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \varepsilon) = \{x \in E : |\phi_j(x_o - x)| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots n\},$$

uma vizinhança do x_o em $(E, \sigma(E, E'))$. Logo pela Proposição 1.1.2:

$$|\phi_j(x_o - x)| \leq c_j \|x_o - x\| \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots n.$$

Seja $c = max\{c_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$. Tomemos então $B\left(x_o, \frac{\varepsilon}{c}\right) = \left\{x \in E : \|x_o - x\| < \frac{\varepsilon}{c}\right\}$ a qual é uma vizinhança de x_o em (E, τ_E). Afirmamos que

$$B(x_o; \frac{\varepsilon}{c}) \subset U(x_o, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \varepsilon).$$

Seja $x \in B(x_o; \frac{\varepsilon}{c})$ então

$$|\phi_j(x_o - x)| \leq c_j \|x_o - x\| \leq c\|x_o - x\| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \text{ para todo } j = 1, 2, \ldots n.$$

Portanto $x \in U(x_o, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \varepsilon)$. Logo $\sigma(E, E') \subset \tau_E$.
Seja $x'_o \in E'$ e

$$W^*(x'_o, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{\psi' \in E' : |\langle x'_o - \psi', x_j\rangle| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots n\},$$

uma vizinhança de x'_o em $(E', \sigma(E', E))$. Definimos

$$\begin{aligned} \psi_j \colon E' &\to \mathbb{K} \\ \theta &\to \langle \psi_j, \theta\rangle = \langle \theta, x_j\rangle \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots n. \end{aligned}$$

Logo $\psi_j \in E''$ para cada $j = 1, 2, \ldots n$. Seja então

$$U(x'_o, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varepsilon) = \{\theta \in E' : |\psi_j(x'_o - \theta)| < \varepsilon \text{ com } j = 1, 2, \ldots n\},$$

a qual é uma vizinhança de x'_o em $(E', \sigma(E', E''))$. Mostremos que

$$U(x'_o, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varepsilon) \subset W^*(x'_o, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon).$$

Seja $\alpha \in U(x_o', \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varepsilon)$, então temos que $\alpha \in E'$ e

$$|\psi_j(x_o' - \alpha)| < \varepsilon \text{ para } j = 1, 2, \ldots n.$$

Assim, pela definicão dos ψ_j, para cada $j = 1, 2, \ldots n$, temos

$$\varepsilon > |\psi_j(x_o' - \alpha)| = |\langle x_o' - \alpha, x_j \rangle| \text{ para } j = 1, 2, \ldots n,$$

assim $\alpha \in W^*(x_o', x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon)$. Portanto pela parte (a) temos

$$\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'') \subset \tau_{E'}.$$

□

Observação 2.2.4. *Suponhamos que E seja espaço normado de dimensão finita, $dimE = k \geq 1$, verifiquemos que $\tau_E \subset \sigma(E', E)$. Sejam $x_o \in E$ e*

$$B(x_o; \delta) = \{x \in E : \|x_o - x\| < \delta\}.$$

Tomemos uma base $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ de E com $\|e_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, e seja $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\} \subset E'$ tal que:

$$\langle \phi_j, e_j \rangle = 1,$$
$$\langle \phi_j, e_m \rangle = 0 \quad (j \neq m).$$

Então considere

$$U\left(x_o, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k, \frac{\delta}{k}\right) = \left\{x \in E : |\phi_j(x_o - x)| < \frac{\delta}{k} \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots k\right\}.$$

Mostremos que $U\left(x_o, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k, \frac{\delta}{k}\right) \subset B(x_o; \delta)$. Seja $x \in U\left(x_o, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k, \frac{\delta}{k}\right)$. Escrevendo

$$x_o = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k \quad e \quad x = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_k e_k,$$

segue que

$$\|x_o - x\| = \left\|\sum_{j=1}^{k} (\alpha_j - \beta_j)\, e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j - \beta_j|\, \|e_j\| = \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j - \beta_j| = \sum_{j=1}^{k} |\phi_j(x_o - x)| < k \cdot \frac{\delta}{k} = \delta$$

ou seja $x \in B(x_o; \delta)$, segue que $\tau_E \subset \sigma(E, E')$. Portanto da Proposição 2.2.3, temos que $\sigma(E, E') = \tau_E$ se a dimensão de E é finita.

Proposição 2.2.5. *Sejam E e F espaços de Banach e $T\colon E \to F$ uma aplicação linear. Então $T\colon (E, \tau_E) \to (F, \tau_F)$ é contínuo se e somente se T é fracamente contínuo, ou seja $T\colon (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F'))$ é continuo.*

Demonstração. Suponhamos que $T\colon (E, \tau_E) \to (F, \tau_F)$ seja contínuo. Sejam $x_o \in E$ e

$$V(T(x_o), \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varepsilon) = \{y \in F : |\langle \varphi_j, T(x_o) - y\rangle| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots n\}$$

uma vizinhança de $T(x_o)$ em $(F, \sigma(F, F'))$. Agora para cada $j = 1, 2, \ldots n$, definimos:

$$\begin{aligned} \psi_j\colon E &\to \mathbb{K} \\ x &\to \langle \psi_j, x\rangle = \langle \varphi_j \circ T, x\rangle \end{aligned}$$

então temos que $\psi_j = \varphi_j \circ T$ é contínuo e linear, assim $\psi_j \in E'$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$. Seja

$$U(x_o, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varepsilon) = \{x \in E : |\psi_j(x_o - x)| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, n\},$$

a qual é uma vizinhança de x_o em $(E, \sigma(E, E'))$. Mostremos que

$$T(U(x_o, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varepsilon)) \subset V(T(x_o), \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varepsilon).$$

Seja $x \in U(x_o, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varepsilon)$, então:

$$\varepsilon > |\psi_j(x_o - x)| = |\langle \varphi_j \circ T, x_o - x\rangle| = |\langle \varphi_j, T(x_o) - T(x)\rangle| \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, n,$$

ou seja $T(x) \in V(T(x_o), \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varepsilon)$. Portanto $T\colon (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F'))$ é continua. Reciprocamente suponhamos que $T\colon (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F'))$ seja continuo, mostremos que T é contínuo. Como E e F são espaços de Banach. Seja $(x, y) \in \overline{Graf(T)}^{\tau}$, então existe uma seqüência

$$(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty} \in Graf(T) \text{ tal que } (x_n, y_n) \to (x, y).$$

Isto implica que

$$x_n \to x \text{ e } y_n = T(x_n) \to y.$$

Logo pelo Teorema do gráfico fechado é suficiente provar que $y = T(x)$. Como $x_n \to x$ e $T(x_n) \to y$, temos que

$$x_n \overset{w}{\to} x \quad \text{e} \quad T(x_n) \overset{w}{\to} y$$

como

$$T\colon\ (E,\sigma(E,E'))\to(F,\sigma(F,F'))$$

é contínua, então

$$T(x_n)\ \overset{w}{\to}\ T(x).$$

Como pela Proposição 2.2.1, $(F,\sigma(F,F'))$ é espaço topológico de Hausdorff, segue que o limite é único, ou seja $y=T(x)$. Portanto pelo Teorema do gráfico fechado T é contínua. □

Observação 2.2.6. *A Proposição acima também é válida considerando E e F quaisquer espaços normados.*

Seja X um espaço normado. Denotamos a bola unitária fechada em X por

$$B_X=\{x\in X:\|x\|\le 1\}.$$

O Teorema seguinte foi obtido por Banach no caso dos espaços de Banach separáveis; muitos o referem como Teorema de Banach-Alaoglu. Alaoglu obteve a seguinte versão em (1940).

Teorema 2.2.7. (*Banach-Alaoglu*) *Seja E um espaço normado. Então $B_{E'}$ é w^*-compacta.*

Demonstração. Veja [5] □

Teorema 2.2.8. (*Goldstine*) *Seja E um espaço normado e $J_E\colon E\to E''$ o mergulho natural. Então*

$$\overline{J_E(B_E)}^{w^*}=B_{E''}$$

Demonstração. Veja [5] □

Seja E espaço de Banach. A seguir estabeleceremos uma condição necessária e suficiente para que E seja um espaço de Banach reflexivo.

Teorema 2.2.9. *Um espaço de Banach E é reflexivo se somente se B_E é fracamente compacto, ou seja B_E é w-compacto.*

Demonstração. Suponhamos que E seja reflexivo, segue que

$$J_E\colon E\to E''$$

é bijetora. Provemos que $J_E\colon (E, \sigma(E, E')) \to (E'', \sigma(E'', E'))$ é um homeomorfismo. Temos que $J_E\colon (E, \tau_E) \to (E'', \tau_{E''})$ é linear e contínua. Segue da Proposição 2.2.5 que $J_E\colon (E, \sigma(E, E')) \to (E'', \sigma(E'', E'''))$ é contínua. Da Proposição 2.2.3 temos que

$$\sigma(E'', E') \subset \sigma(E'', E'''),$$

segue então que

$$J_E\colon (E, \sigma(E, E')) \to (E'', \sigma(E'', E'))$$

é contínua. Mostremos que $(J_E)^{-1} : (E'', \sigma(E'', E')) \to (E, \sigma(E, E'))$ é contínua na origem. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ em E' e considere

$$V(0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varepsilon) = \{x \in E : |\langle \varphi_j, x\rangle| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, n\},$$

a qual é uma vizinhança de zero para $(E, \sigma(E, E'))$. Seja então

$$U^*(0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varepsilon) = \{y'' \in E'' : |\langle y'', \varphi_j\rangle| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, n\},$$

a qual é uma vizinhança de zero para $(E'', \sigma(E'', E'))$. Mostremos que

$$(J_E)^{-1}(U^*(0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varepsilon)) \subset V(0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varepsilon).$$

Seja $y'' \in U^*(0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varepsilon) \subset E''$. Como $J_E(E) = E''$, existe um $x \in E$ tal que

$$J_E(x) = y'' \text{ e } |\langle y'', \varphi_j\rangle| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Assim temos

$$|\langle \varphi_j, x\rangle| = |\langle J_E(x), \varphi_j\rangle| = |\langle y'', \varphi_j\rangle| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Portanto $x = (J_E)^{-1}(y'') \in V(0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varepsilon)$. Portanto $(J_E)^{-1}$ é contínua na origem e como $(J_E)^{-1}$ é linear temos que $(J_E)^{-1} : (E'', \sigma(E'', E')) \to (E, \sigma(E, E'))$ é contínua. Logo $J_E\colon (E, \sigma(E, E')) \to (E'', \sigma(E'', E'))$ é um homeomorfismo.

Já sabemos que J_E é uma isometria, logo pelo fato de $J_E(E) = E''$ temos que $(J_E)^{-1}$ também é isometria. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu,

$$B_{E''} = \{x'' \in E'' : \|x''\| \leq 1\}$$

é w^*-compacto. E tendo que

$$(J_E)^{-1} : (E'', \sigma(E'', E')) \to (E, \sigma(E, E'))$$

é contínua, temos que $(J_E)^{-1}(B_{E''}) = B_E$ é w-compacto. Reciprocamente, suponhamos que B_E seja w-compacto e provemos que E é reflexivo. Sabemos que

$$J_E\colon\ (E, \sigma(E, E')) \to (E'', \sigma(E'', E'))$$

é contínua e como B_E é w-compacto, temos que $J_E(B_E)$ é w^*-compacto. Como, pela Proposição 2.2.1, $(E'', \sigma(E'', E'))$ é um espaço topológico de Hausdorff, temos que $J_E(B_E)$ é w^*-fechado. Assim pelo Teorema de Goldstine temos que

$$J_E(B_E) = \overline{J_E(B_E)}^{w^*} = B_{E''}.$$

Seja $y'' \in E''$, se $y'' = 0$ temos que $0 = J_E(0) \in J_E(E)$. Se $y'' \neq 0$ então

$$\frac{y''}{\|y''\|} \in B_{E''} = J_E(B_E) \subset J_E(E),$$

como $J_E(E)$ é um subespaço de E'' temos que $y'' \in J_E(E)$. Portanto $J_E(E) = E''$, ou seja E é reflexivo. $\square$

CAPÍTULO 3

Caracterização dos Conjuntos Fracamente Compactos

Neste capítulo, estudamos os conjuntos fracamente compactos. Nós sabemos que em um espaço normado E um subconjunto K é τ_E-compacto se e somente se K é seqüencialmente compacto, ou seja toda seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em K admite uma subseqüência que converge para um ponto de K. Mostraremos que dados um espaço normado E e um subconjunto K de E, então K é fracamente compacto se, e somente se, toda seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em K admite uma subseqüência que converge fracamente para um ponto de K. Este resultado foi obtido por Eberlein e Šmulian.

3.1 Conjuntos Fracamente Compactos

Definição 3.1.1. *Seja E um espaço normado.*

(*a*) *Dizemos que um subconjunto $K \subset E$ é relativamente fracamente compacto se $\overline{K}^w$ é fracamente compacto*

(*b*) *Dizemos que um subconjunto $K \subset E$ é seqüencialmente fracamente compacto se toda seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em K admite uma subseqüência que converge fracamente para um ponto de K.*

Seja K um conjunto fracamente compacto num espaço de Banach E. Se $x' \in E'$, então temos pela Proposição 2.2.5 e pela Observação 2.2.4 que $x' : (E, \sigma(E, E')) \rightarrow (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ é contínuo; então $x'(K)$ é um conjunto compacto nos escalares. Segue que $x'(K)$ é limitado para cada $x' \in E'$, ou seja

$$\sup_{k \in K} x'(k) < \infty, \textit{ para todo } \quad x' \in E'.$$

Portanto, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, K é limitado.

Além disso, como pela Proposição 2.2.1 $(E, \sigma(E, E'))$ é um espaço topológico de Hausdorff e K é w-compacto, temos que K é w-fechado. Como temos pela Proposição 2.2.3 que $\sigma(E, E') \subset \tau_E$, então K é τ_E-fechado.

Portanto concluímos que os conjuntos fracamente compactos de um espaço de Banach E são fechados e limitados na topologia da norma. Porém, ser fechado e limitado não implica ser fracamente compacto. Veja o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1.2. *B_E, para todo espaço noramdo E de dimensão infinita não-reflexivo. Temos que B_E é fechada e limitada. Como E não-reflexivo, pelo Teorema 2.2.9, temos que B_E não é fracamente compacta.*

3.2 Conjuntos Convexos

Temos que um subconjunto F w-fechado de um espaço de Banach E é τ_E-fechado. O seguinte resultado nos diz quando um subconjunto F τ_E-fechado de um espaço de Banach é w-fechado.

Proposição 3.2.1. *Seja E um espaço de Banach e F um subconjunto de E convexo, então: F é τ_E-fechado se e somente se F é w-fechado.*

Demonstração. Mostremos que se F é τ_E-fechado então F é w-fechado. Para isto mostremos que $\overline{F}^{w} \subset F = \overline{F}^{\tau_E}$. Suponhamos que exista um $x_o \in \overline{F}^{w} \backslash F$, então $B = \{x_o\}$ é convexo e τ_E-compacto. Logo F e B são dois subconjuntos convexos e disjuntos de E , com F τ_E-fechado e B τ_E-compacto. Então pelo Teorema de Hahn Banach para separação de convexos existem $x'_o \in E'$, e $\alpha > 0$ tais que

$$x'_o(x_o) < \alpha < x'_o(y), \quad \text{para todo } y \in F,$$

no caso real; e

$$\operatorname{Re} x'_o(x_o) < \alpha < \operatorname{Re} x'_o(y), \quad \text{para todo } y \in F,$$

no caso complexo. Tome

$$W = (x'_o)^{-1}(-\infty, \alpha)$$

no caso real e

$$W = (\operatorname{Re} x'_o)^{-1}(-\infty, \alpha)$$

no caso complexo. Então como $x'_o \in E'$, temos pela Proposição 2.2.5 que

$$x'_o \text{ e } \operatorname{Re} x'_o \colon \ (E, \sigma(E, E')) \to (K, \tau_K)$$

são contínuos. Portanto W é w-aberto. Temos que $x_o \in W$ e $W \cap F = \emptyset$, absurdo, pois $x_o \in \overline{F}^w$. Portanto $\overline{F}^w = F$, ou seja F é w-fechado. □

Definição 3.2.2. *Seja E um espaço normado, e seja $A \subset E$.*

(*a*) *Denotaremos por $co(A)$ a interseção de todos os subconjuntos convexos de E que contém A. Diremos que $co(A)$ é a envoltória convexa de A.*

(*c*) *Denotaremos por $\overline{co}(A)$ a interseção de todos os subconjuntos fechados convexos de E que contém A.*

Proposição 3.2.3. *Seja E um espaço normado e seja $A \subset E$. Então:*

(*a*) *$co(A)$ é o menor subconjunto convexo de E que contém A.*

(*c*) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}^{\tau_E}$.

Demonstração. Como temos que a interseção de convexos é convexo, temos que $co(A)$ é convexo e $A \subset co(A)$, segue que vale (*a*). Como $\overline{co}(A)$ é interseção de fechados e temos que $\overline{co}(A)$ é τ_E-fechado e convexo, segue pelo item (*a*) que $co(A) \subset \overline{co}(A)$, logo

$$\overline{co(A)}^{\tau_E} \subset \overline{\overline{co}(A)}^{\tau_E} = \overline{co}(A). \tag{1}$$

Temos que $\overline{co(A)}^{\tau_E}$ é τ_E-fechado e convexo, logo pela definição de $\overline{co}(A)$,

$$\overline{co}(A) \subset \overline{co(A)}^{\tau_E}. \tag{2}$$

De (1) e (2) temos que $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}^{\tau_E}$. □

Corolário 3.2.4. *Se E é um espaço de Banach e $A \subset E$, seja $x \in \overline{A}^{w}$. Então existe uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $co(A)$ tal que $x_n \to x$.*

Demonstração. Como $x \in \overline{A}^{w}$ e tendo que $A \subset \overline{co}(A)$ temos:

$$x \in \overline{A}^{w} \subset \overline{\overline{co}(A)}^{w}. \quad (1)$$

Como $\overline{co}(A)$ é convexo e τ_E-fechado pela Proposição 3.2.1 temos:

$$\overline{\overline{co}(A)}^{w} = \overline{\overline{co}(A)}^{\tau_E} = \overline{co}(A). \quad (2)$$

Como pela Proposição 3.2.3, $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}^{\tau_E}$, de (1) e (2) temos que:

$$x \in \overline{A}^{w} \subset \overline{\overline{co}(A)}^{w} = \overline{co}(A) = \overline{co(A)}^{\tau_E},$$

ou seja existe uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $co(A)$ tal que $x_n \to x$. □

3.3 Teorema de Šmulian

Nesta seção mostraremos o seguinte resultado: seja E um espaço de Banach, e seja $A \subset E$. Se A é *relativamente fracamente compacto* , então cada seqüência em A admite uma subseqüência que converge fracamente a um ponto de E. Este resultado foi obtido por Šmulian em 1940. Para provar este resultado, necessitaremos de uma Proposição e de um Lema auxiliar.

Definição 3.3.1. *Seja E um espaço normado.*

(a) *Dizemos que E é separável se existe um subconjunto enumerável D de E tal que D é denso em E, (isto é, para todo $x \in E$ e para todo $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$).*

(b) *Seja F um subconjunto de E'. Dizemos que F separa pontos de E se*

$$\langle x', x \rangle = 0 \text{ para cada } x' \in F \text{ então } x = 0.$$

Proposição 3.3.2. *Seja E um espaço normado separável, e seja $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável e denso de E. Então:*

(a) *Existe $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E'$ tal que $\|\phi_n\| = 1$ e $\phi_n(x) = \|x_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(*b*) *A aplicação*

$$\begin{aligned} T\colon E &\longrightarrow \ell_\infty \\ x &\longmapsto T(x) := (\phi_n(x))_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico entre E *e um subespaço de* ℓ_∞.

(c) $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ *separa os pontos de* E.

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo e tomemos $x_n \in E$, logo segue do Corolário do Teorema de Hahn-Banach que existe $\phi_n \in E'$ tal que

$$\|\phi_n\| = 1 \text{ e } \phi_n(x_n) = \|x_n\|.$$

Portanto vale (a). Mostremos o item (b). É claro que T está bem definido e é linear, mostremos que T é contínuo. Como $\|\phi_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_{l_\infty} &= \|(\phi_n(x))_{n=1}^{\infty}\|_{l_\infty} = \sup\{|\phi_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \sup\{\|\phi_n\|\,\|x\| : n \in \mathbb{N}\} = \|x\| \ \ \forall\, x \in E, \end{aligned}$$

logo pela Proposição 1.1.2 T é contínuo. Mostremos que

$$\|T(x)\|_{l_\infty} = \|x\| \ \ \forall\, x \in E.$$

Pelo que mostramos anteriormente basta mostrar:

$$\|x\| \leq \|T(x)\|_{l_\infty} \ \ \forall\, x \in E.$$

Seja $x \in E$, então $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\tau_E}$, logo existe, para simplificar a notação, uma seqüencia $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x_j \to x$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, como $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E'$, para j suficientemente grande, temos:

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x_j - x\| + \|x_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|x_j\| = \frac{\varepsilon}{2} + \phi_j(x_j) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\phi_j(x_j) - \phi_j(x) + \phi_j(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\phi_j(x_j) - \phi_j(x)| + |\phi_j(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \|T(x)\|_{l_\infty} = \varepsilon + \|T(x)\|_{l_\infty}. \end{aligned}$$

Portanto $\|T(x)\|_{l_\infty} = \|x\|\ \forall\ x \in E$. Assim temos que T é um isomorfismo isométrico entre E e o subespaço $T(E)$ de ℓ_∞. Logo

$$\|x\| = \|T(x)\|_{l_\infty} = \sup\{|\langle \phi_n, x\rangle| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Assim se $\langle \phi_n, x\rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\|x\| = 0$, logo $x = 0$. Portanto $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ separa os pontos de E □

Lema 3.3.3. *Se K é um conjunto fracamente compacto num espaço de Banach E e E' contém um subconjunto enumerável que separa pontos de E, então $\left(K, \sigma(E,E')_{|K}\right)$ é metrizável.*

Demonstração. Suponhamos que K seja w-compacto. Seja $D = \{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável de elementos não nulos de E' que separa pontos de E. Defina:

$$\begin{aligned} d\colon\, & E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & d(x,y) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x'_n(x-y)|}{\|x'_n\|}. \end{aligned}$$

É claro que d está bem definida e $d(x,y) \geq 0$. Se $d(x,y) = 0$ então $x'_n(x-y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como D separa pontos de E temos que $x = y$. Mostremos a desigualdade triangular. Sejam x, y e z em E, logo

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x'_n(x-z)|}{\|x'_n\|} = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x'_n(x-y) + x'_n(y-z)|}{\|x'_n\|} \\ &\leq \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x'_n(x-y)| + |x'_n(y-z)|}{\|x'_n\|} \\ &= \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x'_n(x-y)|}{\|x'_n\|} + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x'_n(y-z)|}{\|x'_n\|} \\ &= d(z,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Portanto d é uma métrica em E. Mostremos que a métrica d em K define a topologia fraca em K, ou seja aplicação identidade:

$$id_K\colon \left(K, \sigma(E,E')_{|K}\right) \to (K, \tau_d)$$

é um homeomorfismo. Mostremos que id_K é continua. Dados $x \in K$ e $\varepsilon > 0$. devemos encontrar uma vizinhança U_x de x em $\left(K, \sigma(E,E')_{|K}\right)$ tal que

$$U_x \subset \{k \in K : d(x,k) < \varepsilon\}.$$

Sejam $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$ e $N > 0$ um número natural tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ onde } M = \sup\left\{\|k\| : k \in K\right\},$$

e seja $r = \min\left\{\|x_n'\| : n = 1, 2, \ldots, N\right\}$. Tomemos então $\lambda = \delta \cdot r$ e seja

$$U\left(x, x_1', x_2', \ldots, x_N', \lambda\right) = \left\{y \in K : \left|x_n'\left(x - y\right)\right| < \lambda \text{ para cada } n = 1, 2, \ldots N\right\}.$$

Seja $y \in U\left(x, x_1', x_2', \ldots, x_N', \lambda\right)$, assim:

$$\begin{aligned} d\left(x, y\right) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{\left|x_n'\left(x-y\right)\right|}{\|x_n'\|} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\left|x_n'\left(x-y\right)\right|}{\|x_n'\|} \\ &< \frac{\lambda}{r} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|x - y\| \\ &\leq \frac{\delta \cdot r}{r} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $U\left(x, x_1', x_2', \ldots, x_N', \lambda\right) \subset \left\{k \in K : d\left(x, k\right) < \varepsilon\right\}$, logo

$$id_K \colon \left(K, \sigma\left(E, E'\right)_{|K}\right) \to \left(K, \tau_d\right)$$

é contínua. Seja $F \subset K$ um conjunto w-fechado em K, como K é w-compacto temos que F é w-compacto em K. Portanto, como $id_K \colon \left(K, \sigma\left(E, E'\right)_{|K}\right) \to \left(K, \tau_d\right)$ é contínua, temos que $id_K\left(F\right) = F$ é τ_d-compacto e conseqüentemente F é τ_d-fechado. Assim

$$id_K \colon \left(K, \sigma\left(E, E'\right)_{|K}\right) \to \left(K, \tau_d\right)$$

é um homeomorfismo. Portanto a topologia fraca em K é metrizável. □

Agora temos condições de demonstrar o seguinte Teorema.

Teorema 3.3.4. (*Šmulian*) *Seja E um espaço de Banach, e seja $A \subset E$. Se A é relativamente fracamente compacto, então cada seqüência em A admite uma subseqüência que converge fracamente a um ponto de E.*

Demonstração. Seja $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em A. Seja

$$\left[a_n\right] = \overline{span\left\{\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}\right\}}^{\tau_E}.$$

Como $\left[a_n\right]$ é τ_E-fechado e convexo, temos pela Proposição 3.2.1 que $\left[a_n\right]$ é w-fechado. Temos que $\left[a_n\right]$ é um espaço de Banach separável, segue que

$$\overline{A \cap \left[a_n\right]}^{w} \subset \overline{A}^{w} \quad \text{e} \quad \overline{A \cap \left[a_n\right]}^{w} \subset \overline{\left[a_n\right]}^{w} = \left[a_n\right] \;.$$

Como $\overline{A}^{w}$ é w-compacto, temos que $\overline{A \cap [a_n]}^{w}$ é w-compacto. Assim $\overline{A \cap [a_n]}^{w}$ é fracamente compacto no espaço de Banach separável $[a_n]$, logo pela Proposição 3.3.2, temos que existe um subconjunto enumerável de $[a_n]'$ que separa pontos de $[a_n]$. E assim pelo Lema 3.3.3, segue que $\overline{A \cap [a_n]}^{w}$ é metrizável na topologia fraca de $[a_n]$. Como compacto e seqüencialmente compacto são equivalentes em espaços métricos, $\overline{A \cap [a_n]}^{w}$ é um subconjunto seqüencialmente fracamente compacto de $[a_n]$. Em particular, a seqüência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ admite subseqüência fracamente convergente, ou seja: existe uma subseqüência $\left(a_{n_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ e existe $a \in E$ tais que

$$a_{n_j} \overset{w}{\to} a \text{ em } [a_n].$$

Assim temos:

$$\lim_{j\to\infty} x'\left(a_{n_j}\right) = x'(a) \text{ para todo } x' \in [a_n]'.$$

Portanto

$$\lim_{j\to\infty} x'\left(a_{n_j}\right) = x'(a) \text{ para todo } x' \in E'.$$

Logo toda seqüência em A admite uma subseqüência que converge fracamente a um ponto de E. □

3.4 Teorema de Eberlein

Agora nesta seção mostraremos que se cada seqüência em A admite uma subseqüência que converge fracamente a um ponto de E, então A é relativamente fracamente compacto. Este resultado foi obtido por Eberlein em 1947. Antes de provar este resultado, necessitaremos de dois lemas auxiliares.

Lema 3.4.1. *Seja E um espaço de Banach, e seja $A \subset E$. Se cada seqüência em A admite uma subseqüência que converge fracamente a um ponto de E então A é limitado em E.*

Demonstração. Seja $\phi \in E'$ e seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em A. Então por hipótese existe uma subseqüência $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ da seqüência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que:

$$a_{n_j} \overset{w}{\to} a \in E.$$

Como $\phi \in E'$, então pela Proposição 2.2.5 e pela Observação 2.2.4, temos que:

$$\phi : (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$$

é contínuo. Logo, como $a_{n_j} \overset{w}{\to} a$, temos que:

$$\phi(a_{n_j}) \to \phi(a)$$

em $\mathbb{K}$. Assim temos que seqüência $(\phi(a_n))_{n=1}^{\infty}$ em $\phi(A)$ admite um subseqüência que converge para um ponto de $\mathbb{K}$, logo $\phi(A)$ é um conjunto relativamente seqüencialmente compacto em $\mathbb{K}$, então $\overline{\phi(A)}$ é compacto em $\mathbb{K}$. Então $\phi(A)$ é limitado em $\mathbb{K}$. Como $\phi \in E'$ é arbitrário, temos que $\phi(A)$ é limitado em $\mathbb{K}$ para cada $\phi \in E'$. Portanto pelo Teorema de Banach-Steinhaus A é limitado em E. □

Lema 3.4.2. *Se F é um subespaço de E''de dimensão finita, então existe um conjunto finito D de $B_{E'}$ tal que para todo x'' em F temos*

$$\frac{\|x''\|}{2} \leq \max\{|x''(x')| : x' \in D\}.$$

Demonstração. Como a dimensão de F é finita, temos que B_F é compacta na topologia da norma e tendo que

$$B_F \subset \bigcup_{x'' \in B_F} \{y'' \in F : \|x'' - y''\| < \frac{1}{4}\},$$

temos que existem $x''_1, x''_2, ..., x''_n$ em B_F tais que $B_F \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} B\left(x''_j; \frac{1}{4}\right)$, ou seja: dado $x'' \in B_F$ existe $x''_j \in B_F$ tal que $\left\|x'' - x''_j\right\| < \frac{1}{4}$, ou seja

$$\left|(x'' - x''_j)(x')\right| < \frac{1}{4} \text{ para todo } x' \in B_{E'}. \tag{1}$$

Então escolhemos $D = \{x'_1, x'_2, ..., x'_n\} \subset B_{E'}$ tal que

$$\left\langle x''_j, x'_j \right\rangle > \frac{3}{4}, \quad j = 1, 2, ..., n\ . \tag{2}$$

Então sempre que $x'' \in B_F$,por (1) e (2) existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que

$$\left\langle x'', x'_j \right\rangle = \left\langle x''_j, x'_j \right\rangle + \left\langle x'' - x''_j, x'_j \right\rangle > \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

logo temos que

$$\frac{\|x''\|}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \left|\left\langle x'', x'_j \right\rangle\right| \leq \max\{|x''(x')| : x' \in D\}.$$

Portanto para todo $x'' \in F$ temos que

$$\frac{\|x''\|}{2} \leq \max\{|x''(x')| : x' \in D\}.$$

□

Agora temos condições de demonstrar o seguinte Teorema.

Teorema 3.4.3. *(Eberlein) Seja E um espaço de Banach, e seja $A \subset E$. Se cada seqüência em A admite uma subseqüência que converge fracamente a um ponto de E, então A é relativamente fracamente compacto.*

Demonstração. Precisamos mostrar que A é *relativamente fracamente compacto*, ou seja $\overline{A}^{w}$ é w-compacto. Como temos que a aplicação canônica $J : E \to E''$ é um isomorfismo isométrico entre E e $J(E)$, podemos sempre identificar E com um subespaço de E''. Então considerando $A \subset E''$, temos que A é um conjunto limitado em E'', pois pelo Lema 3.4.1 A é limitado em E. Então temos que $\overline{A}^{w^*}$ é limitado e w^*-compacto em E'', pois temos que $\overline{A}^{w^*} \subset k \cdot B_{E''}$ para certo $k > 0$. Como pelo Teorema de Alaoglu temos que $B_{E''}$ é w^*-compacto em E'', e tendo que a aplicação (linear bijetiva)

$$x \in (E'', \sigma(E'', E')) \to kx \in (E'', \sigma(E'', E'))$$

é continua, temos que $k \cdot B_{E''}$ é w^*-compacto em E''. Logo $\overline{A}^{w^*}$ é w^*-compacto em E''.

Suponhamos que $\overline{A}^{w^*} \subset E$, como $\sigma(E, E') = \sigma(E'', E')_{|E}$, segue que $\overline{A}^{w^*} = \overline{A}^{w}$. Assim $\overline{A}^{w}$ é w-compacto, pois $\overline{A}^{w^*}$ é w^*- compacto em E''. Então para mostrar que $\overline{A}^{w}$ é w-compacto basta mostrar que $\overline{A}^{w^*} \subset E$. Mostremos que $\overline{A}^{w^*} \subset E$. Seja $x'' \in \overline{A}^{w^*}$ e seja $x'_1 \in B_{E'}$, então temos que

$$V_{x'',1} = \{y'' \in E'' : |(x'' - y'')(x'_1)| < 1\}$$

é uma vizinhança de x'' em $(E'', \sigma(E'', E'))$, assim:

$$V_{x'',1} \cap A \neq \emptyset,$$

ou seja existe um $a_1 \in A$ tal que

$$|(x'' - a_1)(x'_1)| < 1 \,.$$

Considere $F_1 = span\{x'', x'' - a_1\}$, como $F_1 \subset E''$ e tem dimensão finita, pelo Lema 3.4.2 existem $x'_2, ..., x'_{n(2)}$ em $B_{E'}$ tais que para todo $y'' \in F_1$ temos:

$$\frac{\|y''\|}{2} \leq \max\{ \ |y''(x'_k)| : 1 \leq k \leq n(2) \ \}.$$

Agora tendo que $V_{x'',\frac{1}{2}} = \{y'' \in E'' : \max\limits_{1\leq k\leq n(2)} |(x''-y'')(x'_k)| < \frac{1}{2}\}$ é uma vizinhança de x'' em $(E'', \sigma(E'', E'))$, temos que

$$V_{x'',\frac{1}{2}} \cap A \neq \emptyset,$$

ou seja existe um $a_2 \in A$ tal que

$$|(x''-a_2)(x'_k)| < \frac{1}{2} \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq n(2).$$

Considere $F_2 = span\{x'', x''-a_1, x''-a_2\}$. Como $F_2 \subset E''$ e tem dimensão finita, pelo Lema 3.4.2 existem $x'_{n(2)+1}, ..., x'_{n(3)}$ em $B_{E'}$ tais que para todo $y'' \in F_2$ temos:

$$\frac{\|y''\|}{2} \leq \max\{|\ y''(x'_k)| : 1 \leq k \leq n(3)\ \}.$$

Agora tendo que $V_{x'',\frac{1}{3}} = \{y'' \in E'' : \max\limits_{1\leq k\leq n(3)} |(x''-y'')(x'_k)| < \frac{1}{3}\}$ é uma vizinhança de x'' em $(E'', \sigma(E'', E'))$, temos que

$$V_{x'',\frac{1}{3}} \cap A \neq \emptyset,$$

ou seja existe um $a_3 \in A$ tal que

$$|(x''-a_3)(x'_k)| < \frac{1}{3} \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq n(3).$$

Considere $F_3 = span\{x'', x''-a_1, x''-a_2, x''-a_3\}$. Como $F_3 \subset E''$ e tem dimensão finita, pelo Lema 3.4.2 existem $x'_{n(3)+1}, ..., x'_{n(4)}$ em $B_{E'}$ tais que para todo $y'' \in F_3$ temos:

$$\frac{\|y''\|}{2} \leq \max\{\ |\ y''(x'_k)| : 1 \leq k \leq n(4)\ \}.$$

Agora tendo que $V_{x'',\frac{1}{4}} = \{y'' \in E'' : \max\limits_{1\leq k\leq n(4)} |(x''-y'')(x'_k)| < \frac{1}{4}\}$ é uma vizinhança de x'' em $(E'', \sigma(E'', E'))$, temos que

$$V_{x'',\frac{1}{4}} \cap A \neq \emptyset,$$

ou seja existe um $a_4 \in A$ tal que

$$|(x''-a_4)(x'_k)| < \frac{1}{4} \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq n(4).$$

Assim construímos uma seqüência $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset A$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$

$$|(x''-a_j)(x'_k)| < \frac{1}{j} \quad \text{para } x'_k \in B_{E'} \text{ e } 1 \leq k \leq n(j). \tag{1}$$

Como por hipótese cada seqüência em A admite uma subseqüência que converge fracamente a um ponto de E, então a seqüência $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ admite uma subseqüência, digamos $(a_{j_s})_{s=1}^{\infty}$, que converge fracamente para $x \in E$, ou seja

$$a_{j_s} \xrightarrow{w} x \in E \text{ o que é equivalente a } \langle x', a_{j_s}\rangle \to \langle x', x\rangle \quad \forall\, x' \in E'. \tag{2}$$

Agora considerando $(a_{j_s})_{s=1}^{\infty} \subset E''$, temos que $x'' - a_{j_s} \xrightarrow{w^*} x'' - x$, ou seja

$$x'' - x \in \overline{F}^{w^*} \text{ onde } F = span\{x'', x'' - a_1, x'' - a_2, x'' - a_3, ...\}. \tag{3}$$

Pela construção dos x_i' em $B_{E'}$ e dos $a_i \in A$ temos:

$$\frac{\|y''\|}{2} \leq \sup_m \{|y''(x_m')|\} \quad \text{para todo } y'' \in F. \tag{4}$$

Mostremos que (4) é válida para todo $y'' \in \overline{F}^{w^*}$. Seja $y'' \in \overline{F}^{w^*}$. Então existe uma rede $(y_\alpha'')_{\alpha\in\Omega} \subset F$ tal que

$$y_\alpha'' \xrightarrow{w^*} y'' \text{ o que é equivalente a } \langle\, y_\alpha'', x'\rangle \to \langle\, y'', x'\rangle \ \forall x' \in E'\,.$$

Como $y_\alpha'' \in F\ \forall\ \alpha \in \Omega$, temos por (4) que

$$\frac{|\langle y_\alpha'', x'\rangle|}{2} \leq \frac{\|y_\alpha''\|}{2} \leq \sup_m \{|y_\alpha''(x_m')|\} \quad \forall \alpha \in \Omega \quad \text{e}\ \forall\ x' \in B_{E'}.$$

Portanto, como $\langle y_\alpha'', x'\rangle \to \langle y'', x'\rangle\ \forall\ x' \in E'$, temos:

$$\frac{|\langle y'', x'\rangle|}{2} \leq \sup_m \{|y''(x_m')|\} \quad \forall\ x' \in B_{E'}.$$

Logo

$$\frac{\|y''\|}{2} \leq \sup_m \{|y''(x_m')|\} \text{ para todo } y'' \in \overline{F}^{w^*}.$$

Assim, como $x'' - x \in \overline{F}^{w^*}$, temos:

$$\frac{\|x'' - x\|}{2} \leq \sup_m \{|(x'' - x)\,(x_m')|\}\ . \tag{5}$$

Agora dado $\varepsilon > 0$ e fixando m, temos por (1) e (2):

$$\begin{aligned}
|(x'' - x)\,(x_m')| &= |x''(x_m') - x_m'(a_{j_s}) + x_m'(a_{j_s}) - x(x_m')| \\
&= |(x'' - a_{j_s})(x_m') + x_m'(a_{j_s}) - x_m'(x)| \\
&\leq |(x'' - a_{j_s})(x_m')| + |x_m'(a_{j_s}) - x_m'(x)| < \frac{1}{p} + \varepsilon
\end{aligned}$$

sempre que $m \leq n(p)$ e $p \leq j_s$. Assim temos que $\sup\limits_{m}\{\ |(x'' - x)(x'_m)|\ \} = 0$. Portanto temos em (5), que $\|x'' - x\| = 0$, logo $x'' = x \in E$, assim temos que $\overline{A}^{w^*} \subset E$. Portanto $\overline{A}^{w}$ é w-compacto. □

Então a partir dos resultados feitos por Šmulian e Eberlein temos o seguinte Teorema.

Teorema 3.4.4. *[Eberlein e Šmulian] Seja E um espaço de Banach, e seja $A \subset E$. Então A é relativamente fracamente compacto se, e somente se, cada seqüência em A admite uma subseqüência que converge fracamente a um ponto de E. Em particular , um subconjunto de um espaço de Banach é fracamente compacto se. e somente se, ele é seqüencialmente fracamente compacto.*

Demonstração. Segue do Teorema 3.3.4 e Teorema 3.4.3. □

CAPÍTULO 4

Operadores Fracamente Compactos entre Espaços de Banach

Nesta capítulo consideraremos E, F espaços de Banach. Definiremos os operadores fracamente compactos e o adjunto de um operador. E estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que um operador seja fracamente compacto. O principal resultado deste capítulo é que para um operador ser fracamente compacto é necessário e suficiente que o seu respectivo adjunto também seja fracamente compacto. Este resultado foi obtido por Gantmacher.

4.1 Adjunto de um Operador entre Espaços de Banach

Nesta seção serão apresentados algumas definições e estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que um operador seja fracamente compacto.

Definição 4.1.1. *Sejam E e F espaços de Banach. Seja $T \in L(E;F)$ e $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. O operador T é fracamente compacto se $\overline{T(B_E)}^w$ é w-compacto.*

Se T é fracamente compacto, então dado um conjunto $U \subset E$ limitado, $\overline{T(U)}^w$ é w-compacto.

Proposição 4.1.2. *Seja $T \in L(E;F)$. As seguinte condições são equivalentes:*

(a) *T é fracamente compacto.*

(b) *Para toda seqüência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, a seqüência $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ admite uma subseqüência fracamente convergente.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema de Eberlein-Smulian 3.4.4 □

Definição 4.1.3. *O adjunto T' de um operador linear $T \in L(E;F)$ é operador linear*

$$\begin{aligned} T' \colon F' &\longrightarrow E' \\ y' &\longmapsto T'(y') = y' \circ T \,. \end{aligned}$$

Lema 4.1.4. *A aplicação $T \to T'$ é um isomorfismo isométrico de $L(E;F)$ em $L(F';E')$.*

Demonstração. Claramente temos que a aplicação $T \to T'$ é linear. Temos que o funcional linear $y' \circ T$ é contínuo quando $y' \in F'$ e $T \in L(E;F)$,então $T'(y') = y' \circ T \in E'$. Como conseqüência do Teorema de Hahn-Banach temos:

$$\|x\|_E = \sup_{x' \in B_{E'}} |x'(x)| \;,$$

onde $B_{E'} = \{x' \in E' : \|x'\| \leq 1\}$. Portanto

$$\|T(x)\|_F = \sup_{y' \in B_{F'}} |\langle y', T(x) \rangle| \;,$$

então

$$\begin{aligned} \|T'\|_{L(F';E')} &= \sup_{y' \in B_{F'}} \|T'(y')\|_{E'} = \sup_{y' \in B_{F'}} \|y' \circ T\|_{E'} \\ &= \sup_{y' \in B_{F'}} \left\{ \sup_{x \in B_E} |\langle y', T(x) \rangle| \right\} \\ &= \sup_{x \in B_E} \left\{ \sup_{y' \in B_{F'}} |\langle y', T(x) \rangle| \right\} \\ &= \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F = \|T\| \,. \end{aligned}$$

Isto mostra que a aplicação $T \to T'$ é um isomorfismo isométrico. □

Lema 4.1.5. *Seja $T \in L(E;F)$. Então*

$$T'\colon (F', \sigma(F', F)) \to (E', \sigma(E', E))$$

é contínuo.

Demonstração. Sejam $x'_o \in F'$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em E, $\varepsilon > 0$ e tomemos:

$$V(T'(x'_o), x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{x' \in E' : |(T'(x'_o) - x')(x_j)| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, n\}$$

uma vizinhança de $T'(x'_o)$ em $(E', \sigma(E', E))$. Tomemos então:

$$U(x'_o, T(x_1), \ldots, T(x_n), \varepsilon) = \{y' \in F' : |\langle (x'_o - y'), T(x_j)\rangle| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, n\},$$

que é uma vizinhança de x'_o em $(F', \sigma(F', F))$. Mostremos que

$$T'(U(x'_o, T(x_1), \ldots, T(x_n), \varepsilon)) \subset V(T'(x'_o), x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon).$$

Seja $y' \in T'(U(x'_o, T(x_1), \ldots, T(x_n), \varepsilon))$, ou seja $y' = T'(x')$ onde $x' \in U(x'_o, T(x_1), \ldots, T(x_n), \varepsilon$
Então:

$$|(T'(x'_o) - y')(x_j)| = |(T'(x'_o - x'))(x_j))| = |\langle (x'_o - x'), T(x_j)\rangle| < \varepsilon \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Portanto $T'\colon (F', \sigma(F', F)) \to (E', \sigma(E', E))$ é contínuo. □

Lema 4.1.6. *Se $T \in L(E;F)$ e $U \in L(F;G)$ então $(U \circ T)' = T' \circ U'$. O adjunto da identidade de $L(E;E)$ é a identidade de $L(E';E')$.*

Demonstração. Para $z' \in G'$ e $x' \in E'$ temos:

$$\begin{aligned}(U \circ T)'(z') &= z' \circ (U \circ T) = (z' \circ U) \circ T = U'(z') \circ T \\ &= (T' \circ U')(z').\end{aligned}$$

Seja $I\colon E \to E$ a identidade. Então:

$$I'(x') = x' \circ I = x'.$$

Portanto I' é a identidade de $L(E';E')$. □

Lema 4.1.7. *Seja $T \in L(E;F)$ e $J_E\colon E \to E''$ o mergulho natural. Então*

$$T''(J_E(x)) = J_F(T(x)) \text{ para todo } x \in E.$$

Demonstração. Sejam $x' \in E'$, então pelas definições de adjunto, J_E e J_F temos:

$$\begin{aligned} T''(J_E(x))(x') &= (J_E(x) \circ T')(x') = T'(x'(x)) = (x' \circ T)(x) = \langle x', T(x) \rangle \\ &= J_F(T(x))(x'). \end{aligned}$$

□

Observação 4.1.8. *Temos como conseqüência que* $T''(x) = T(x)$ *se* $x \in E$.

O próximo resultado nos dá uma condição necessária e suficiente para que um operador linear $T \in L(E; F)$ seja fracamente compacto.

Teorema 4.1.9. *Um operador linear* $T \in L(E; F)$ *é fracamente compacto se somente se* $T''(E'') \subset J_F(F)$ *onde* $J_F \colon F \to F''$ *é o mergulho natural.*

Demonstração. Suponhamos que T seja fracamente compacto. Seja $B_{E''}$ a bola unitária fechada de E''. Temos pelo Lema 4.1.5 que

$$T'' \colon (E'', \sigma(E'', E')) \to (F'', \sigma(F'', F')) \tag{1}$$

é contínuo, e pelo Lema 4.1.7 temos:

$$T''(J_E(x)) = J_F(T(x)) \text{ para todo } x \in E\,. \tag{2}$$

Assim por (1) e (2),

$$\begin{aligned} T''\left(\overline{J_E(B_E)}^{w^*}\right) &\subseteqq \overline{T''(J_E(B_E))}^{w^*} = \overline{J_F(T(B_E))}^{w^*} \\ &\subseteqq \overline{J_F\left(\overline{T(B_E)}^{w}\right)}^{w^*}, \end{aligned} \tag{3}$$

como T é fracamente compacto, temos $\overline{T(B_E)}^{w}$ w-compacto. Tendo que:

$$J_F \colon (F, \sigma(F, F')) \to (F'', \sigma(F'', F'))$$

é contínua, temos que $J_F\left(\overline{T(B_E)}^{w}\right)$ é w^*-compacto, logo $J_F\left(\overline{T(B_E)}^{w}\right)$ é w^*-fechado, portanto $J_F\left(\overline{T(B_E)}^{w}\right) = \overline{J_F\left(\overline{T(B_E)}^{w}\right)}^{w^*}$. Logo temos em (3):

$$T''\left(\overline{J_E(B_E)}^{w^*}\right) \subseteqq J_F\left(\overline{T(B_E)}^{w}\right) \subseteqq J_F(F),$$

como pelo Teorema de Goldstine $\overline{J_E(B_E)}^{w^*} = B_{E''}$ temos:

$$T''(B_{E''}) \subseteqq J_F(F).$$

Como T'' é linear e $J_F(F)$ é subespaço de F'' temos:

$$T''(E'') \subset J_F(F).$$

Reciprocamente suponhamos que $T''(E'') \subset J_F(F) = F$, identificaremos F com um subespaço de F'', e mostremos que T é fracamente compacto. Como pelo Lema 4.1.5 temos que T'': $(E'', \sigma(E'', E')) \to (F'', \sigma(F'', F'))$ é contínua e pelo Teorema de Alaoglu $B_{E''}$ é w^*-compacto então temos que

$$T''(B_{E''}) \text{ é } w^*\text{-compacto}. \tag{4}$$

Pelo Lema 4.1.7 temos:

$$T(B_E) = T''(B_E) \subseteq T''(B_{E''}) \subset F. \tag{5}$$

De (4) e (5) temos que $\overline{T(B_E)}^{w^*}$ é w^*-compacto e $\overline{T(B_E)}^{w^*} \subset F$, logo como $\sigma(F, F') = \sigma(F'', F')_{|F}$, temos $\overline{T(B_E)}^{w}$ é w-compacto. Portanto T é fracamente compacto. □

Corolário 4.1.10. *Se E ou F é um espaço reflexivo, então todo operador $T \in L(E; F)$ é fracamente compacto.*

Demonstração. Se F é reflexivo, então $J_F(F) = F''$, assim

$$T''(E'') \subset F'' = J_F(F),$$

e se E é reflexivo, então $J_E(E) = E''$, e utilizando o Lema 4.1.7 temos:

$$T''(E'') = T''(J_E(E)) = J_F(T(E)) \subset J_F(F)..$$

Portanto em ambos os casos, pelo Teorema 4.1.9 temos que T é fracamente compacto. □

Definição 4.1.11. *A topologia uniforme em $L(E; F)$ é a topologia métrica de $L(E; F)$ induzida pela norma*

$$\|T\|_{L(E;F)} = \sup_{x \in B_E} \|T(x)\| .$$

Corolário 4.1.12. *O conjunto dos operadores fracamente compactos é fechado na topologia uniforme de $L(E;F)$.*

Demonstração. Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de operadores fracamente compactos, e seja $T_n \to T$. Mostremos que T é fracamente compacto. Pelo Lema 4.1.4, temos que aplicação $T \to T'$ é um isomorfismo isométrico, segue que

$$T_n'' \to T'' \Longrightarrow \|T_n'' - T''\| \to 0 .$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$, T_n é fracamente compacto, temos pelo Teorema 4.1.9 que

$$T_n''(E'') \subset J_F(F) \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja, para cada $x'' \in E''$, temos que $T_n''(x'') \in J_F(F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $J_F(F)$ é fechado em F'' com a topologia da métrica e

$$|(T_n'' - T'')(x'')| \leq \|T_n'' - T''\| \, \|x''\| \ ,$$

temos que $T_n''(x'') \to T''(x'')$. Portanto $T''(x'') \in J_F(F)$, assim pelo Teorema 4.1.9 T é fracamente compacto. □

Teorema 4.1.13. *Sejam T, $U \in L(E;F)$ fracamente compactos, $W \in L(F;G)$, $V \in L(G;E)$ e α, $\beta \in K$. Então:*

(a) $(\alpha T + \beta U)$ é fracamente compacto.

(b) TV e WT são fracamente compactos.

Demonstração. Temos $(\alpha T + \beta U)'' = \alpha T'' + \beta U''$. Utilizando (1) = Teorema 4.1.9, (2) =Lema 4.1.6 e (3) =Lema 4.1.7 temos:

$$(\alpha T + \beta U)''(E'') = (\alpha T'' + \beta U'')(E'') \overset{1}{\subseteq} \alpha J_F(F) + \beta J_F(F) \subseteq J_F(F) \ ,$$

$$(TV)''(G'') \overset{2}{=} (T''V'')(G'') \subseteq T''(E'') \overset{1}{\subseteq} J_F(F) \ ,$$

$$(WT)''(E'') \overset{2}{=} (W''T'')(E'') \overset{1}{\subseteq} W''(J_F(F)) \overset{3}{=} J_G[W(F)] \subseteq J_G(G) \ .$$

Portanto, pelo Teorema 4.1.9, $(\alpha T + \beta U)$, TV e WT são fracamente compactos. □

4.2 Teorema de Gantmacher

Nesta seção faremos o principal resultado deste capítulo. O resultado foi obtido por Gantmacher o qual é; para um operador ser fracamente compacto é necessário e suficiente que o seu respectivo adjunto também seja fracamente compacto. Antes de provar este resultado, necessitamos de um lema auxiliar.

Lema 4.2.1. *Um operador $T \in L(E; F)$ é fracamente compacto se e somente se*

$$T' \colon \left(F', \sigma\left(F', F\right)\right) \to \left(E', \sigma\left(E', E''\right)\right)$$

é contínuo.

Demonstração. Suponhamos que T seja fracamente compacto, então, pelo Teorema 4.1.9, para cada $x'' \in E''$ existe $y \in F$ tal que

$$T''\left(x''\right) = J_F\left(y\right) \ ,$$

assim temos:

$$x''\left(T'\left(y'\right)\right) = T''\left(x''\right)\left(y'\right) = J_F\left(y\right)\left(y'\right) = \langle y', y\rangle \qquad \forall\, y' \in F'. \tag{1}$$

Seja $(y'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma rede em F' e suponhamos que $y'_\alpha \overset{w^*}{\to} y' \in F'$, ou seja

$$y'_\alpha\left(y\right) \longrightarrow y'\left(y\right) \text{ para cada } y \in F. \tag{2}$$

Mostremos que $T'\left(y'_\alpha\right) \overset{w}{\to} T'\left(y'\right)$, ou seja

$$x''\left(T'\left(y'_\alpha\right)\right) \to x''\left(T'\left(y'\right)\right) \quad \text{para cada } x'' \in E''.$$

Seja $x'' \in E''$. Então existe $y \in F$ tal que, por (1) e (2), temos:

$$x''\left(T'\left(y'_\alpha\right)\right) = \langle y'_\alpha, y\rangle \to y'\left(y\right) = x''\left(T'\left(y'\right)\right),$$

assim temos que $T'\left(y'_\alpha\right) \overset{w}{\to} T'\left(y'\right)$. Então, dados $y' \in F'$ e uma rede $(y'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ em F' tais que $y'_\alpha \overset{w^*}{\to} y'$, temos que $T'\left(y'_\alpha\right) \overset{w}{\to} T'\left(y'\right)$. Portanto

$$T' \colon \left(F', \sigma\left(F', F\right)\right) \to \left(E', \sigma\left(E', E''\right)\right)$$

é contínua. Reciprocamente suponhamos que $T' \colon (F', \sigma(F', F)) \to (E', \sigma(E', E''))$ seja contínua e mostremos que $T''(E'') \subset J_F(F)$. Sejam $x''_o \in E''$ e $(y'_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ uma rede em F'. Suponhamos que $y'_\alpha \overset{w^*}{\to} y' \in F'$, como $T' \colon (F', \sigma(F', F)) \to (E', \sigma(E', E''))$ é contínua, temos que $T'(y'_\alpha) \overset{w}{\to} T'(y')$, ou seja para $x''_o \in E''$ temos:

$$T''(x''_o)(y'_\alpha) = x''_o(T'(y'_\alpha)) \to x''_o(T'(y')) = T''(x''_o)(y').$$

Assim segue que

$$T''(x''_o) : (F', \sigma(F', F)) \to \mathbb{K}$$

é um funcional linear contínuo, assim $T''(x''_o) \in (F', \sigma(F', F))' = F = J_F(F)$. Portanto $T''(E'') \subset J_F(F)$, assim pelo Teorema 4.1.9 T é fracamente compacto. □

Agora temos condições de demonstrar o seguinte Teorema.

Teorema 4.2.2. (*Gantmacher*) *Um operador $T \in L(E; F)$ é fracamente compacto se e somente se T' é fracamente compacto.*

Demonstração. Suponhamos que T seja fracamente compacto. Como pelo Teorema de Alaoglu temos que $B_{F'}$ é w^*-compacto e pelo Lema 4.2.1 que

$$T' \colon (F', \sigma(F', F)) \to (E', \sigma(E', E''))$$

é contínua, segue que:

$$T'(B_{F'}) \text{ é } w\text{-compacto.}$$

Portanto $\overline{T'(B_{F'})}^{w} = T'(B_{F'})$ é w-compacto, ou seja T' é fracamente compacto. Suponhamos que T' seja fracamente compacto , assim pelo Lema 4.2.1 temos:

$$T'' \colon (E'', \sigma(E'', E')) \to (F'', \sigma(F'', F''')) \tag{1}$$

contínua. Como pelo Teorema de Goldstine $\overline{J_E(B_E)}^{w^*} = B_{E''}$ e utilizando o Lema 4.1.7 temos:

$$T''(B_{E''}) = T''\left(\overline{J_E(B_E)}^{w^*}\right) \overset{(1)}{\subset} \overline{T'' J_E(B_E)}^{w} = \overline{J_F T(B_E)}^{w}. \tag{2}$$

Como B_E é convexo e tendo que $J_F T$ é linear, temos que $J_F T(B_E)$ é convexo. Portanto $\overline{J_F T(B_E)}^{w} = \overline{J_F T(B_E)}^{\tau_{F''}}$. Assim de (2) temos:

$$T''(B_{E''}) = \overline{J_F T(B_E)}^{w} = \overline{J_F T(B_E)}^{\tau_{F''}} \subseteq J_F(F).$$

Portanto $T''(E'') \subseteq J_F(F)$ e pelo Teorema 4.1.9 temos que T é fracamente compacto. □

CAPÍTULO 5

Fatoração de Operadores e Polinômios Fracamente Compactos

Neste capítulo definimos quando um operador fatora-se através de um espaço de Banach reflexivo. E o resultado central deste capítulo é: para um operador entre espaços de Banach ser fracamente compacto é necessário e suficiente que ele fatore-se através de um espaço de Banach reflexivo. Este resultado foi obtido por Davis, Figiel, Johnson e Pelczynski [4]. E veremos uma aplicação deste resultado na fatoração de polinômios m-homogêneos fracamente compactos.

5.1 Fatoração de Operadores Fracamente Compactos

Neste seção mostraremos que todo operador fracamente compacto entre espaços de Banach fatora-se através de um espaço reflexivo. Para mostrar este resultado precisaremos de alguns resultados preliminares. Começamos com a seguinte definição.

Definição 5.1.1. *Seja $T\colon E \to F$ um operador entre espaços de Banach. Dizemos que T fatora-se através de um espaço de Banach reflexivo se existem um espaço de Banach reflexivo R e operadores $S \in L(E; R)$ e $L \in L(R; F)$ tais que $T = L \circ S$.*

Observação 5.1.2. *Seja $T\colon E \to F$ um operador entre espaços de Banach que fatora-se através de um espaço de Banach reflexivo. Então existem um espaço de Banach reflexivo R e operadores $S \in L(E;R)$ e $L \in L(R;F)$ tais que $T = L \circ S$. Como R é um espaço de Banach reflexivo temos pelo Corolário* 4.1.10 *que S e L são fracamente compactos e logo pelo Teorema* 4.1.13, *temos que $T = L \circ S$ é fracamente compacto.*

Lema 5.1.3. *Seja $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de espaços de Banach e seja ℓ_2 o espaço de Banach das seqüências númericas $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ converge. Denotamos o espaço de todas as seqüências*

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \text{ tais que } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^2 < \infty$$

por $(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_2$. Então:

(a) A aplicação

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_n)_{n=1}^{\infty} &\mapsto \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

é uma norma em $(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_2$.

(b) $\left((\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_2, \|\cdot\|_2\right)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Pelo fato de ℓ_2 ser um espaço normado, temos que $\|\cdot\|_2$ é uma norma em $(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_2$. Provemos que $\left((\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_2, \|\cdot\|_2\right)$ é um espaço de Banach. Seja $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_2$, temos

$$x^n = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots\right) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então como $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(x^n - x^m)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}\right\|_j^2\right)^{1/2} < \varepsilon \text{ sempre que } n, m > N\,. \tag{1}$$

Então segue que para cada $j = 1, 2, \dots$,

$$\left\|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}\right\|_j < \varepsilon \text{ sempre que } n, m > N\,. \tag{2}$$

Logo fixado j em (2), temos que a seqüência

$$\left(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \xi_j^{(3)} \dots\right)$$

é de Cauchy em X_j. Como X_j é um espaço de Banach, existe $\xi_j \in X_j$ tal que

$$\xi_j^{(n)} \longrightarrow \xi_j \text{ quando } n \to \infty.$$

Então definimos:

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \ ,$$

e mostremos que $x \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2$ e que $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ converge para x em $\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2, \|\cdot\|_2\right)$. De (1) nós temos que para $n, m > N$

$$\sum_{j=1}^{k} \left\|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}\right\|_j^2 < \varepsilon^2 \ , \ k = 1, 2, 3, \dots \tag{3}$$

Fazendo $m \to \infty$ em (3),

$$\sum_{j=1}^{k} \left\|\xi_j^{(n)} - \xi_j\right\|_j^2 < \varepsilon^2 \text{ para } \ n > N \ \text{ e } k = 1, 2, 3, \dots \tag{4}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (4),

$$\|(x^n - x)\|_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\|\xi_j^{(n)} - \xi_j\right\|_j\right)^2 < \varepsilon^2 \text{ sempre que } n > N \ , \tag{5}$$

ou seja $x^n \to x$ em $\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2, \|\cdot\|_2\right)$. Temos de (5) que $x^n - x \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2$, logo

$$\|x\|_2 \leq \|(x^n - x)\|_2 + \|x^n\|_2 < \infty \ .$$

Portanto $x \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2$. □

Proposição 5.1.4. *O dual de* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2$ *é* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n'\right)_2$,*ou seja o dual de* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2$ *é isometricamente isomorfo a* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n'\right)_2$.

Demonstração. Dado $y = (x_n')_{n=1}^{\infty}$ em $\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n'\right)_2$, definimos $\phi_y \colon \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2 \to \mathbb{K}$ por

$$\phi_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n', x_n \rangle \ \text{ para todo } x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ em } \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2 .$$

Temos que

$$\|y\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n'\|_{X_n'}^2\right)^{1/2} < \infty \ ,$$

onde $\|x_n'\|_{X_n'} = \sup\{|x_n'(x_n)| : \|x_n\|_n \leq 1\}$ e $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(\|x_n\|_n)^2\right)^{1/2} < \infty$. Logo $(\|x_n\|_n)_{n=1}^{\infty}$ e $\left(\|x_n'\|_{X_n'}\right)_{n=1}^{\infty}$ estão em ℓ_2. Então pela desigualdade de Hölder, e pelo fato de $x_n' \in X_n'$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
|\phi_y(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n', x_n\rangle\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x_n', x_n\rangle| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n'\|_{X_n'} \cdot \|x_n\|_n \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n'\|_{X_n'}^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty}(\|x_n\|_n)^2\right)^{1/2} \\
&= \|y\|_2 \cdot \|x\|_2 .
\end{aligned}$$

Segue que $\phi_y \in \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}X_n\right)_2\right)'$ e $\|\phi_y\| \leq \|y\|_2$. Reciprocamente, provaremos que dado $\phi \in \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}X_n\right)_2\right)'$, existe $y \in \left(\sum_{n=1}^{\infty}X_n'\right)_2$ tal que $\phi_y = \phi$ e $\|y\|_2 \leq \|\phi\|$. Seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\left(\sum_{n=1}^{\infty}X_n\right)_2$ e $e_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ com 1 na $n-$ésima coordenada, então

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x - \sum_{j=1}^{n}x_j e_j\right\|_2 = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}x_j e_j\right\|_2 = 0.$$

Portanto $x = \sum_{j=1}^{\infty}x_j e_j$ para todo x em $\left(\sum_{n=1}^{\infty}X_n\right)_2$. Seja então $\phi \in \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}X_n\right)_2\right)'$, temos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
X_n &\xmapsto{\pi_n} \left(\sum_{n=1}^{\infty}X_n\right)_2 \xmapsto{\phi} K \\
x_n &\longmapsto \phi \circ \pi_n(x_n) = \phi(x_n e_n) .
\end{aligned}$$

Assim temos que $\phi \circ \pi_n \in X_n'$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$x_n' = \phi \circ \pi_n.$$

Portanto, para $x^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ temos que

$$\phi(x^n) = \sum_{j=1}^{n}\phi(x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n}\phi \circ \pi_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n}\left\langle x_j', x_j\right\rangle .$$

Para $0 < \theta < 1$ fixado, existe $y_j \in B_{X_j}$ tal que

$$\left\langle x_j', y_j\right\rangle \geq \theta\left\|x_j'\right\|_{X_j'} .$$

Tomemos:

$$x_j = \left\langle x'_j, y_j \right\rangle \cdot y_j \ ,$$

e seja $x^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, assim temos que

$$\begin{aligned}\phi\left(x^n\right) &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle x'_j, x_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left\langle x'_j, y_j \right\rangle \cdot \left\langle x'_j, y_j \right\rangle \\ &\geq \theta^2 \sum_{j=1}^{n} \left\| x'_j \right\|_{X'_j}^2 .\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\phi\left(x^n\right) \leq \|\phi\| \cdot \|x^n\|_2 &= \|\phi\| \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \left\langle x'_j, y_j \right\rangle \right|^2 \cdot \|y_j\|_j^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|\phi\| \left(\sum_{j=1}^{n} \left\| x'_j \right\|_{X'_j}^2 \cdot \|y_j\|_j^4 \right)^{1/2} \\ &\leq \|\phi\| \left(\sum_{j=1}^{n} \left\| x'_j \right\|_{X'_j}^2 \right)^{1/2} .\end{aligned}$$

Logo temos

$$\theta^2 \sum_{j=1}^{n} \left\| x'_j \right\|_{X'_j}^2 \leq \phi\left(x^n\right) \leq \|\phi\| \left(\sum_{j=1}^{n} \left\| x'_j \right\|_{X'_j}^2 \right)^{1/2} ,$$

ou seja

$$\theta^2 \sum_{n=1}^{n} \left(\left\| x'_j \right\|_{X'_j}^2 \right)^{1/2} \leq \|\phi\| .$$

Fazendo $\theta \to 1$ temos

$$\sum_{n=1}^{n} \left(\left\| x'_j \right\|_{X'_j}^2 \right)^{1/2} \leq \|\phi\| .$$

Como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário, segue que $y = \left(x'_1, x'_2, x'_3, \ldots\right) \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} X'_n\right)_2$, $\phi_y = \phi$ e $\|y\|_2 \leq \|\phi\|$.

Se definimos

$$\begin{aligned}T\colon \left(\sum_{n=1}^{\infty} X'_n \right)_2 &\to \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \right)_2 \\ y &\longmapsto T\left(y\right) = \phi_y,\end{aligned}$$

então T é linear e sobrejetiva, e $\|T\left(y\right)\| = \|y\|_2$ para cada $y \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} X'_n\right)_2$. $\square$

Definição 5.1.5. *Seja E um espaço normado e seja $A \subset E$ um conjunto absorvente. O funcional de Minkowski de A é a função $p_A \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$p_A(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\}.$$

Proposição 5.1.6. *Seja E um espaço normado e sejam A e B subconjuntos absorventes de E tais que $A \subset B$ e $\lambda > 0$. Então:*

(a) $p_A(x) \geq p_B(x)$ *para cada* $x \in E$.

(b) $p_{\lambda A}(x) = \frac{1}{\lambda} p_A(x)$ *para cada* $x \in E$.

Demonstração. Como $A \subset B$, então para $\alpha > 0$ temos $\alpha A \subset \alpha B$, assim temos que se $x \in \alpha A$, então $x \in \alpha B$. Portanto $p_A(x) \geq p_B(x)$ para cada $x \in E$. Temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} p_A(x) &= \frac{1}{\lambda} \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\}\\ &= \inf\left\{\frac{\alpha}{\lambda} > 0 : x \in \alpha A\right\}\\ &= \inf\left\{\frac{\alpha}{\lambda} > 0 : x \in \frac{\alpha}{\lambda}(\lambda A)\right\}\\ &= \inf\{\mu > 0 : x \in \mu(\lambda A)\}\\ &= p_{\lambda A}(x).\end{aligned}$$

□

Proposição 5.1.7. *Seja E um espaço normado e seja A um subconjunto convexo, equilibrado e absorvente de E. Então:*

(a) p_A *é uma seminorma em* E.

(b) $\{x \in E : p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E : p_A(x) \leq 1\}$.

(c) Se A *é* τ_E*-fechado então* $A = \{x \in E : p_A(x) \leq 1\}$.

Demonstração. Temos da definição que $p_A(x) \geq 0$ para cada $x \in E$. Mostremos que $p_A(\lambda x) = |\lambda| \cdot p_A(x)$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$. Isto é claro quando $\lambda = 0$. Se $\lambda \neq 0$, então, como A é equilibrado, temos que

$$\lambda A = |\lambda|\, A \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Assim temos

$$\begin{aligned} p_A(\lambda x) &= \inf\{\alpha > 0 : \lambda x \in \alpha A\} \\ &= \inf\{\alpha > 0 : |\lambda| x \in \alpha A\} \\ &= \inf\left\{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha}{|\lambda|} A\right\} \\ &= \inf\{|\lambda| \beta > 0 : x \in \beta A\} \\ &= |\lambda| \cdot p_A(x). \end{aligned}$$

Provemos que

$$p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y) \text{ para todos } x, y \in E.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existem α, β, com

$$p_A(x) \leq \alpha < p_A(x) + \varepsilon, \qquad p_A(y) \leq \beta < p_A(y) + \varepsilon, \tag{1}$$

tais que $x \in \alpha A$ e $y \in \beta A$. Como A é convexo, segue que

$$x + y \in \alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} A + \frac{\beta}{\alpha+\beta} A\right) \subset (\alpha+\beta) A, \tag{2}$$

pois $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$. Logo de (1) e (2) temos que

$$\begin{aligned} p_A(x+y) &= \inf\{\delta > 0 : (x+y) \in \delta A\} \\ &\leq \alpha + \beta \\ &< p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ para todos $x, y \in E$. Portanto temos que p_A é uma seminorma em E. Provemos (b). De

$$x \in A \Rightarrow x \in 1A \Rightarrow p_A(x) \leq 1,$$

segue que $A \subset \{x \in E : p_A(x) \leq 1\}$.

Seja $x \in E$ tal que $p_A(x) < 1$, então existe $\alpha > 0$ tal que $p_A(x) \leq \alpha < 1$ e $x \in \alpha A$. Como A é equilibrado e $|\alpha| < 1$, temos que $x \in \alpha A \subset A$. Portanto $\{x \in E : p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E : p_A(x) \leq 1\}$.

Seja agora A fechado. Temos de (b) que $A \subset \{x \in E : p_A(x) \leq 1\}$. Se $p_A(x) < 1$, por (b) $x \in A$. Se $p_A(x) = 1$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_n > 0$ tal que

$$p_A(x) = 1 \leq \alpha_n < 1 + \frac{1}{n} \text{ com } x \in \alpha_n A. \tag{3}$$

Temos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x = \alpha_n a_n \text{ com } a_n \in A \text{ e } \alpha_n > 0.$$

Logo a seqüência $\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$. Segue de (3) que

$$\frac{x}{\alpha_n} \longrightarrow x \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Assim temos que $x \in \overline{A}^{\tau_E} = A$, pois A é fechado. Portanto $A = \{x \in E : p_A(x) \leq 1\}$. $\square$

Definição 5.1.8. *Seja E um espaço normado. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em E são ditas equivalentes se existem constantes $a,b > 0$ tais que*

$$a \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \|x\|_1 \text{ para todo } x \in E.$$

Lema 5.1.9. *Seja W um subconjunto convexo, equilibrado e limitado de um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o funcional de Minkowski do conjunto*

$$U_n = 2^n W + 2^{-n} B_X$$

é uma norma equivalente a $\|\cdot\|$.

Demonstração. Como W é limitado, temos que $\|w\| \leq k$ para todo $w \in W$. Logo $W \subset kB_X$. Assim temos

$$2^{-n} B_X \subseteq U_n = 2^n W + 2^{-n} B_X \subseteq \left(k2^n + 2^{-n}\right) B_X \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Logo pela parte (a) da Proposição 5.1.6 temos

$$p_{2^{-n}B_X}(x) \geq p_{U_n}(x) \geq p_{(k2^n+2^{-n})B_X}(x) \text{ para todos } x \in X \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Pela parte (b) da Proposição 5.1.6 segue que

$$2^n p_{B_X}(x) \geq p_{U_n}(x) \geq \frac{1}{(k2^n + 2^{-n})} p_{B_X}(x) \text{ para todos } x \in X \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Como temos que B_X é τ_X-fechado e $U_n = 2^n W + 2^{-n} B_X$ para cada $n \in \mathbb{N}$ é convexo, equilibrado e absorvente, pela Proposição 5.1.7 segue que

$$B_X = \{x \in X : p_{B_X}(x) \leq 1\} \text{ e } p_{U_n} \text{ é uma seminorma para cada } n \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

Mostremos que p_{U_n} é uma norma equivalente a $\|\cdot\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja $x \in X$ e suponhamos que $x \neq 0$. Como $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$, segue de (2) que

$$p_{B_X}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} p_{B_X}(x) \leq 1 \Rightarrow p_{B_X}(x) \leq \|x\|.$$

Assim segue de (1) que

$$\frac{1}{(k2^n + 2^{-n})} \|x\| \leq \frac{1}{(k2^n + 2^{-n})} p_{B_X}(x) \leq p_{U_n}(x) \leq 2^n p_{B_X}(x) \leq 2^n \|x\|,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto

$$\frac{1}{(k2^n + 2^{-n})} \|x\| \leq p_{U_n}(x) \leq 2^n \|x\| \text{ para todo } x \in X \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Logo p_{U_n} é uma norma equivalente a $\|\cdot\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Denotaremos $p_{U_n} = \|\cdot\|_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definição 5.1.10. *Para cada $x \in X$, definimos $|||x||| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{1/2}$ e consideremos os seguintes subconjuntos de X:*

$$Y = \{x \in X : |||x||| < \infty\} \text{ e } C = B_Y = \{x \in Y : |||x||| \leq 1\}.$$

Finalmente, seja $j \colon Y \hookrightarrow X$ a inclusão de Y em X.

O seguinte lema dá uma condição necessária e suficiente para que o subconjunto Y de X seja um espaço de Banach reflexivo. Será de grande contribuição para mostrarmos o resultado principal deste capítulo.

Lema 5.1.11. (*W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pelczynski*) *Seja W um subconjunto convexo, equilibrado e limitado de um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Então:*

(i) $W \subset C = B_Y$.

(ii) $(Y, |||\cdot|||)$ é um espaço de Banach e $j \colon (Y, |||\cdot|||) \hookrightarrow (X, \|\cdot\|)$ é contínua.

(iii) $j'' \colon Y'' \to X''$ *é injetora e* $(j'')^{-1}(X) = Y$.

(iv) Y *é reflexivo se, e somente se* W *é relativamente fracamente compacto.*

Demonstração. Seja $w \in W$, então $2^n w \in 2^n W \subseteq U_n = 2^n W + 2^{-n} B_X$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\|2^n w\|_n \leq 1 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Logo $\|w\|_n^2 \leq \frac{1}{2^{2n}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o que implica que

$$|||w||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|w\|_n^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}\right)^{1/2} < 1.$$

Portanto está provado (i).

(ii) Provemos que $|||\cdot||| \colon Y \to \mathbb{R}$ é uma norma. É claro que

$$|||x||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{1/2} \geq 0,$$

pois $\|x\|_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se

$$|||x||| = 0 \Rightarrow \|x\|_n = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0.$$

Logo $|||x||| = 0$ se e somente se $x = 0$.

Sejam $x \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Segue que

$$\begin{aligned} |||\lambda x||| &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda x\|_n^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^2 \|x\|_n^2\right)^{1/2} \left(|\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{1/2} \\ &= |\lambda| \cdot |||x|||. \end{aligned}$$

Sejam $x, y \in Y$. Segue do fato de ℓ_2 ser um espaço normado que

$$\begin{aligned} |||x+y||| &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x+y\|_n^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|x\|_n + \|y\|_n)^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y\|_n^2\right)^{1/2} = |||x||| + |||y|||. \end{aligned}$$

Portanto $(Y, |||\cdot|||)$ é um espaço normado.

Para mostrar que $(Y, |||\cdot|||)$ é espaço de Banach, consideramos a seguinte seqüência de espaços de Banach

$$(X, \|\cdot\|_n)_{n=1}^{\infty},$$

pois, pelo Lema 5.1.9, para todo $n \in \mathbb{N}$ a norma $\|\cdot\|_n$ é equivalente a $\|\cdot\|$. Denotamos $X_n = (X, \|\cdot\|_n)$. Logo pelo Lema 5.1.3, segue que $\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2, \|\cdot\|_2\right)$ é um espaço de Banach.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi \colon (Y, |||\cdot|||) &\to \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2, \|\cdot\|_2\right) \\ y &\longmapsto \varphi(y) := (j(y), j(y), j(y), \ldots). \end{aligned}$$

Logo $\|\varphi(y)\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|j(y)\|_n^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y\|_n^2\right)^{1/2} = |||y|||$ para todo $y \in Y$. Então temos que φ é um isomorfismo isométrico entre $(Y, |||\cdot|||)$ e $\varphi(Y)$. Assim para mostrar que $(Y, |||\cdot|||)$ é espaço de Banach, mostremos que $\varphi(Y)$ é um subespaço fechado de

$$\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2, \|\cdot\|_2\right).$$

Seja $x \in \overline{\varphi(Y)}^{\|\cdot\|_2}$. Então existe um seqüência $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ em $\varphi(Y)$ que converge para x em $\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2, \|\cdot\|_2\right)$. Digamos que $x = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$. Temos que

$$\varphi(Y) = \{z = (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n = x_1 \in Y \text{ para cada } n = 1, 2, \ldots\}.$$

Logo para cada n temos:

$$x^n = \left(\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \ldots\right) \text{ onde } \eta_j^{(n)} = \eta_1^{(n)} \text{ para } j = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Como $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ em $\varphi(Y)$ converge para x, dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\|x^n - x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \eta_j^{(n)} - \eta_j \right\|_j^2\right)^{1/2} < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq N.$$

Logo, para cada $j = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left\| \eta_j^{(n)} - \eta_j \right\|_j < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq N.$$

Segue que, para cada j fixo, a seqüência

$$\left(\eta_j^{(1)}, \eta_j^{(2)}, \eta_j^{(3)}, \ldots\right)$$

é uma seqüência que converge para η_j em X_j. Ou seja

$$\begin{array}{ll} \text{Para } j=1 \text{ temos que } \eta_1^{(n)} \to & \eta_1 \text{ quando } n \to \infty. \\ \text{Para } j=2 \text{ temos que } \eta_2^{(n)} \to & \eta_2 \text{ quando } n \to \infty. \\ \qquad\qquad\vdots & \vdots \end{array}$$

De (1) temos que $\left(\eta_1^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\eta_2^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty} = \ldots = \left(\eta_j^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty} = \ldots$, e como X_j é um espaço de Banach e o limite é único, segue que

$$\eta_1 = \eta_j \text{ para } j = 1, 2, \ldots$$

Portanto $x = (\eta_1, \eta_1, \ldots) \in \varphi(Y)$. Portanto $\varphi(Y)$ é fechado em $\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2$. Portanto $(Y, |||\cdot|||)$ é espaço de Banach. Como $j = \pi_1 \circ \varphi$, onde π_1 é a projeção de $\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2$ na primeira coordenada, temos que j é contínua.

(iii) Mostremos que $j'' \colon Y'' \to X''$ é injetora e $(j'')^{-1}(X) = Y$. Pela Proposição 5.1.4, temos que $Z = \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_2$, $Z' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} X'_n\right)_2$ e $Z'' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} X''_n\right)_2$. Como para cada n, $j = \pi_n \circ \varphi$, temos:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X \\ & Z \arrow[ur, "\pi_n"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y' & & X' \arrow[ll, "j'"'] \arrow[dl, "\pi'_n"] \\ & Z' \arrow[ul, "\varphi'"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y'' \arrow[rr, "j''"] \arrow[dr, "\varphi''"'] & & X'' \\ & Z'' \arrow[ur, "\pi''_n"'] & \end{tikzcd}$$

$$\varphi'' \colon Y'' \to \left(\sum_{n=1}^{\infty} X''_n\right)_2 .$$

Portanto, para cada $y'' \in Y''$, temos $\varphi''(y'') = (j''(y''), j''(y''), \ldots) \in Z''$. Como φ é uma isometria então φ'' é isometria e portanto $j'' \colon Y'' \to X''$ é injetora e $(j'')^{-1}(X) = Y$.

(iv) Mostremos que Y é reflexivo se, e somente se W é relativamente fracamente compacto. Suponhamos que Y seja reflexivo. Então, pelo Teorema 2.2.9, temos que $C = B_Y$ é fracamente compacta, como por (i), $W \subset B_Y$. Logo, $\overline{W}^w$ é w-compacto.

Reciprocamente, se $\overline{W}^w$ é w-compacto, mostremos que Y é reflexivo. Antes mostremos:

Passo1:

$$\overline{B_Y}^{w^*} = j''(B_{Y''}).$$

Temos pelo Teorema de Alaoglu que $B_{Y''}$ é w^*-compacto. Por (ii) temos que j é contínua e $j'' \in L(Y'', X'')$, segue então do Lema 4.1.5 que

$$j'' \colon (Y'', \sigma(Y'', Y')) \to (X'', \sigma(X'', X'))$$

é contínua. Então $j''(B_{Y''})$ é w^*-compacto em X''. Como $(X'', \sigma(X'', X'))$ é um espaço topológico de Hausdorff, segue que $j''(B_{Y''})$ é w^*-fechado. Temos pelo Teorema de Goldstine que $\overline{B_Y}^{w^*} = B_{Y''}$. Como $B_Y = j''(B_Y) \subset j''(B_{Y''})$, temos

$$\overline{B_Y}^{w^*} \subset \overline{j''(B_{Y''})}^{w^*} = j''(B_{Y''}). \tag{2}$$

Seja $x'' \in j''(B_{Y''})$, logo $x'' = \langle j'', y'' \rangle$ com $y'' \in B_{Y''} = \overline{B_Y}^{w^*}$. Existe uma rede $(y''_\alpha)_{\alpha \in I}$ em B_Y tal que $y''_\alpha \stackrel{w^*}{\to} y''$. Como

$$j'' \colon (Y'', \sigma(Y'', Y')) \to (X'', \sigma(X'', X'))$$

é contínua, temos $\langle j'', y''_\alpha \rangle \stackrel{w^*}{\to} \langle j'', y'' \rangle = x''$. Como $(j''(y''_\alpha))_{\alpha \in I}$ está em $j''(B_Y) = B_Y$, temos que $x'' \in \overline{B_Y}^{w^*}$. Portanto de (2) concluímos que $\overline{B_Y}^{w^*} = j''(B_{Y''})$.

Passo 2: Tendo que $\overline{W}^w$ é w-compacto, então conjunto

$$A = 2^n \overline{W}^w + 2^{-n} B_{X''} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

é w^*-fechado em X''.

Seja n fixado e seja $z \in \overline{A}^{w^*}$. Então existe uma rede $(z_\alpha)_{\alpha \in I}$ em A tal que

$$z_\alpha \stackrel{w^*}{\to} z.$$

Escrevemos

$$z_\alpha = 2^n y_\alpha + 2^{-n} x''_\alpha \text{ com } y_\alpha \in \overline{W}^w \text{ e } x''_\alpha \in B_{X''} \text{ para cada } \alpha \in I.$$

Como $B_{X''}$ é w^*-compacto, a rede $(x''_\alpha)_{\alpha \in I}$ admite uma subrede $\left(x''_{\phi(j)}\right)_{j \in J}$ tal que

$$x''_{\phi(j)} \stackrel{w^*}{\to} x'' \in B_{X''}.$$

Assim

$$2^n y_{\phi(j)} = z_{\phi(j)} - 2^{-n} x''_{\phi(j)} \stackrel{w^*}{\to} z - 2^{-n} x''. \tag{3}$$

Como W é convexo e $\sigma(X, X') = \sigma(X'', X')_{|X}$, temos que $2^n \overline{W}^w = 2^n \overline{W}^{w^*}$ é w^*-fechado. Segue de (3) que

$$z - 2^{-n} x'' \in 2^n \overline{W}^w.$$

Portanto

$$z = \left(z - 2^{-n} x''\right) + 2^{-n} x'' \in 2^n \overline{W}^w + 2^{-n} B_{X''} = A,$$

ou seja A é w^*-fechado.

Provemos agora que Y é reflexivo. Seja $y \in B_Y$. Então temos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|y\|_n^2\right)^{1/2} \leq 1,$$

logo $\|y\|_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $2^n W + 2^{-n} B_X = U_n \subseteq \overline{U_n}^w$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pela Proposição 5.1.6 temos

$$p_{\overline{U_n}^{\tau X}}(y) \leq \|y\|_n \leq 1 \;\forall n \in \mathbb{N}\,,$$

ou seja $y \in \overline{U_n}^{\tau X} = \overline{U_n}^w = \left\{x \in X : p_{\overline{U_n}^{\tau X}}(y) \leq 1\right\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Segue que

$$y \in \overline{2^n W + 2^{-n} B_X}^w \subseteq 2^n \overline{W}^w + 2^{-n} B_X \subseteq 2^n \overline{W}^w + 2^{-n} B_{X''} \;\forall n \in \mathbb{N},$$

pois U_n é convexo, $\forall n \in \mathbb{N}$, adição e multiplicação por escalar são contínuas. Portanto

$$B_Y \subseteq 2^n \overline{W}^w + 2^{-n} B_{X''} \;\forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pelos passos 1 e 2, temos:

$$j''(B_{Y''}) = \overline{B_Y}^{w^*} \subseteq \overline{2^n \overline{W}^w + 2^{-n} B_{X''}}^{w^*} = 2^n \overline{W}^w + 2^{-n} B_{X''} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto

$$j''(B_{Y''}) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(2^n \overline{W}^w + 2^{-n} B_{X''}\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X + 2^{-n} B_{X''}\right) = X.$$

Segue de (iii) que

$$B_{Y''} = (j'')^{-1} \circ j''(B_{Y''}) \subseteq (j'')^{-1}(X) = Y\,.$$

Portanto temos que $Y'' \subseteq Y$, ou seja Y é reflexivo. □

Agora como conseqüência do lema, mostraremos que todo operador fracamente compacto entre espaços de Banach fatora-se através de um espaço de Banach reflexivo.

Corolário 5.1.12. *Sejam Z, X espaços de Banach e $T \in L(Z;X)$. Se T é fracamente compacto então, T fatora-se através de um espaço reflexivo.*

Demonstração. Como B_Z é um conjunto convexo, equilibrado e absorvente e limitado. E tendo que $T \in L(Z;X)$, segue que $T(B_Z)$ é convexo, equilibrado e limitado, e Logo tomando $W = T(B_Z)$ no Lema 5.1.11, temos que existe um espaço de Banach reflexivo Y e $W = T(B_Z) \subset B_Y$. Logo temos que $T(Z) \subset Y$. Considerando os operadores $(j)^{-1} \circ T\colon Z \to Y$ e $j\colon Y \to X$, temos a fatoração para T. □

A partir deste resultado temos o seguinte Teorema.

Teorema 5.1.13. *Um operador $T \in L(E;F)$ é fracamente compacto se, e somente se, T fatora-se através de um espaço reflexivo.*

Demonstração. A demonstração segue da Observação 5.1.2 e do Corolário 5.1.12. □

5.2 Fatoração de Polinômios m-homogêneos Fracamente Compactos

O objetivo central desta seção é mostrar que um polinômio m-homogêneo $P \in P(^mE;F)$ contínuo é fracamente compacto se, e somente se, existem um espaço de Banach reflexivo G, um polinômio m-homogêneo $Q \in P(^mE;G)$ e um operador $w \in L(G;F)$ tais que $P = w \circ Q$. Aqui $P(^mE;G)$ denota o espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos contínuos de E em G.

Definição 5.2.1. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m$ e Y espaços vetoriais. Dizemos que uma aplicação*

$$A\colon X_1 \times \ldots \times X_m \to Y$$

é m-linear (multilinear) se é linear em cada variável, ou seja

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \lambda y_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) = A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m) + \lambda A(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_m)$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Se $X_1, \ldots, X_m$ são espaços normados, o espaço $X_1 \times \ldots \times X_m$ também é normado, munido da norma

$$\|(x_1, \ldots, x_m)\| = \max_{1 \leq i \leq m} \|x_i\| ,$$

e se $X_1, \ldots, X_m$ e Y são espaços normados, denotaremos por $L(X_1, \ldots, X_m; Y)$ o espaço vetorial de todas as aplicações m-lineares contínuas. E quando $X_1 = X_2 = \ldots = X_m = E$, denotamos por $L(^mE;Y)$. $L(^mE;Y)$ é normado com a norma natural. Observe que quando $m = 1$, temos $L(E;Y)$.

Definição 5.2.2. *Sejam X e Y espaços normados. Uma aplicação $P\colon X \to Y$ é dita um polinômio m-homogêneo se existe uma aplicação m-linear $A\colon X^m \to Y$ tal que $P(x) = A(x, \ldots, x)$, ou simplesmente $P(x) = A(x^m)$ para todo $x \in X$.*

Exemplo 5.2.3. *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ e $P \colon \ell_p \to \mathbb{K}$ dada por*

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \quad \textit{com } x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p.$$

Afirmamos que P é um polinômio 2-homogêneo. De fato, tomemos

$$\begin{aligned} A \colon \ell_p \times \ell_p &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto A(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j , \end{aligned}$$

com $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p$. Claramente temos que A é bilinear e $A(x, x) = P(x)$ para todo $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p$. Portanto P é 2-homogêneo.

Vamos denotar por $P(^mX; Y)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos contínuos de X em Y. $P(^mX; Y)$ é um espaço normado com norma natural. Quando $Y = \mathbb{K}$, denotaremos $P(^mX)$.

Proposição 5.2.4. *Sejam X, Y e Z espaços normados e $m \in \mathbb{N}$. Sejam $P \in P(^mX; Y)$, $T \in L(Z; X)$ e $S \in L(Y; Z)$. Então $P \circ T \in P(^mZ; Y)$ e $S \circ P \in P(^mX; Z)$.*

Demonstração. Como P é um polinômio m-homogêneo, existe uma aplicação $B \colon X^m \to Y$ m-linear tal que $P(x) = B(x^m)$ para cada $x \in X$. Seja $C_1 \colon Z^m \to Y$ dada por

$$C_1(z_1, \ldots, z_m) := B(T(z_1), \ldots, T(z_m)),$$

para cada $(z_1, \ldots, z_m) \in Z^m$, então fácil ver que C_1 é m-linear e

$$(P \circ T)(z) = P(T(z)) = B(T(z), \ldots, T(z)) = C_1(z^m),$$

para cada $z \in Z$. Portanto $P \circ T \in P(^mZ; Y)$. Agora seja $C_2 \colon X^m \to Z$ dado por

$$C_2(x_1, \ldots, x_m) : = S(B(x_1, \ldots, x_m)),$$

para cada $(x_1, \ldots, x_m) \in X^m$. Então C_2 é m-linear e

$$(S \circ P)(x) = S(P(x)) = S(B(x, \ldots, x)) = C_2(x^m),$$

para cada $x \in X$. Portanto $S \circ P \in P(^mX; Z)$.

□

Definição 5.2.5. *Sejam E e F espaços normados. Um polinômio m-homogêneo $P \in P(^mE;F)$ é um polinômio fracamente compacto se $\overline{P(B_E)}^w$ é um subconjunto fracamente compacto de F.*

Vejamos o seguinte resultado para polinômios fracamente compactos.

Proposição 5.2.6. *Seja $P \in P(^mE;F)$. As seguinte condições são equivalentes:*

(a) P é um polinômio fracamente compacto.

(b) Para toda seqüência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, a seqüência $(P(x_n))_{n=1}^{\infty}$ admite uma subseqüência fracamente convergente.

Demonstração. Segue diretamente do Teorema de Eberlein-Smulian 3.4.4 □

No próxima proposição denotamos operadores lineares contínuos com letras minúsculas para diferenciar dos polinômios.

Proposição 5.2.7. *Sejam P e Q polinômios fracamente compactos em $P(^mE;F)$. Sejam $t \in L(F;H)$ e $u \in L(G;E)$. Então*

(a) $P + Q$ é fracamente compacto.

(b) A composição $t \circ P \circ u$ é fracamente compacto.

Demonstração. (a) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $B_E \subset E$. Como P é fracamente compacto, segue da Proposição 5.2.6 que $(P(x_n))_{n=1}^{\infty}$ admite uma subseqüência fracamente convergente, ou seja existe

$$P\left(x_{n_j}\right) \xrightarrow{w} y_1 \in F, \tag{1}$$

e como $\left(x_{n_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ está em B_E e Q é fracamente compacto, temos pela Proposição 5.2.6 que existe uma subseqüência

$$Q\left(x_{n_{j_k}}\right) \xrightarrow{w} y_2 \in F. \tag{2}$$

Então segue de (1) e (2) que

$$P + Q\left(x_{n_{j_k}}\right) \xrightarrow{w} y_1 + y_2 \in F.$$

Portanto, pela Proposição 5.2.6, temos que $P + Q$ é fracamente compacto.

(*b*) Seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ em B_G. Como $u \in L(G;E)$, temos que $(u(a_n))_{n=1}^{\infty}$ é limitada em E. Como P é fracamente compacto pela Proposição 5.2.6, existe uma subseqüência

$$P \circ u\left(a_{n_j}\right) \xrightarrow{w} y \in F, \tag{3}$$

e como $t \in L(F;H)$, pela Proposição 2.2.5, temos que

$$t\colon (F, \sigma(F,F')) \to (H, \sigma(H,H')),$$

é continua. Segue de (3) que $t \circ P \circ u\left(a_{n_j}\right) \xrightarrow{w} t(y) \in H$. Portanto pela Proposição 5.2.6, temos que $t \circ P \circ u$ é fracamente compacto. □

O Próximo Teorema foi obtido por R. Ryan [13] utilizando produtos tensoriais. Christopher Boyd provou no Teorema 2.10 [3] uma generalização deste resultado para espaços localmente convexos.

Teorema 5.2.8. *Seja E um espaço de Banach e seja $m \in \mathbb{N}$. Então existem um espaço de Banach $Q(^mE)$ e um polinômio $\delta_m \in P(^mE;Q(^mE))$ com a seguinte propriedade universal: Para cada espaço de Banach F e cada polinômio $P \in P(^mE;F)$, existe um único operador $T_P \in L(Q(^mE);F)$ tais que $P = T_P \circ \delta_m$.*

Demonstração. Ver Teorema 2.4 em [11]. □

O proximo resultado foi obtido por R. Ryan [13] e também por Mujica em [11].

Proposição 5.2.9. *Sejam E e F espaços de Banach, seja $m \in \mathbb{N}$. Então um polinômio $P \in P(^mE;F)$ é w-compacto se e somente se o correspondente operador $T_P \in L(Q(^mE);F)$ é fracamente compacto.*

Demonstração. Veja Proposição 3.4 em [11]. □

Sabemos da seção anterior que um operador $T : E \to F$ entre espaços de Banach é fracamente compacto se, e somente se, ele fatora-se através de um espaço reflexivo, ou seja existem um espaço de Banach reflexivo G e operadores $v \in L(E;G)$ e $w \in L(G;F)$ tais que $T = w \circ v$. Temos da Proposição 5.2.4 que existem duas possibilidades para fatoração de um polinômio P, sendo $P = Q \circ u$ ou $P = u \circ Q$, onde u é um operador linear contínuo e Q é um polinômio. O seguinte resultado mostra que para um polinômio ser fracamente compacto é necessário e suficiente que ele fatore-se através de um espaço de Banach reflexivo. Este resultado é uma aplicação do Teorema 5.1.13.

Teorema 5.2.10. *Sejam E e F espaços de Banach. Seja $P \in P(^mE;F)$. Então P é fracamente compacto se, e somente se, existe um espaço de Banach reflexivo, G, um operador $w \in L(G;F)$ e um polinômio $Q \in P(^mE;G)$ tais que $P = w \circ Q$.*

Demonstração. Suponhamos que $P = w \circ Q$, onde G é um espaço Banach reflexivo, $w \in L(G;F)$ e $Q \in P(^mE;G)$. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $B_E \subset E$. Então temos que $\{Q(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é limitada em G. Sendo G um espaço Banach reflexivo, pelo Teorema 2.2.9 segue que $\{Q(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é w-compacta. Logo pelo Teorema 3.4.4 temos que existe uma subseqüência

$$Q\left(x_{n_j}\right) \overset{w}{\to} y_o \in G. \tag{1}$$

Como $w \in L(G;F)$, temos pela Proposição 2.2.5 que

$$w\colon\ (G, \sigma(G,G')) \to (F, \sigma(F,F'))$$

é continua. Logo de (1) temos que $P\left(x_{n_j}\right) = w\left(Q\left(x_{n_j}\right)\right) \overset{w}{\to} w(y_o)$ em F, logo pela Proposição 5.2.6 P é fracamente compacto.

Reciprocamente, suponhamos que P seja fracamente compacto. Então pelo Teorema 5.2.8, temos que existem um espaço de Banach $Q(^mE)$, um polinômio $\delta_m \in P(^mE;Q(^mE))$ e um único operador $T_P \in L(Q(^mE);F)$ tais que $P = T_P \circ \delta_m$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\delta_m"'] & F \\ Q(^mE) \arrow[ur, "T_P"'] & \end{tikzcd}$$

Como P é fracamente compacto, pela Proposição 5.2.9 temos que T_P é fracamente compacto. Portanto pelo Teorema 5.1.13 existem um espaço de Banach reflexivo G e operadores $v \in L(Q(^mE);G)$ e $w \in L(G;F)$ tais que $T_P = w \circ v$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\delta_m"'] & F \\ Q(^mE) \arrow[ur, "T_P"'] \arrow[dr, "v"'] & \\ & G \arrow[uu, "w"'] \end{tikzcd}$$

Logo temos pela Proposiçao 5.2.4 que

$$Q = v \circ \delta_m \in P(^m E; G).$$

Segue que

$$P = T_P \circ \delta_m = w \circ v \circ \delta_m = w \circ Q.$$

$\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] Jatobá, A. M., *O Método da fatoração para operadores Fracamente compactos.* Relatório T. Científico, FAMAT/UFU, 2002.

[2] Botelho, G., *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators* Note Mat. 24 2005.

[3] Boyd, C., *Preduals of the Space of Holomorphic Functions on a Fréchet Space.* Ph.D. Thesis, Universit College, Dublin, 1992.

[4] Davis, W. J., Figiel, T., Johnson, W. B., and Pelczynski, A., *Factoring Weakly Compact Operators.* J. Funct. Anal., 17, 311 – 327, 1974.

[5] Diestel, J., *Sequences and Series in Banach Spaces.* Springer-Verlag New York, Berlin Heidelberg, Tokyo, 1984.

[6] Dunford, N. and Schwartz, J. T., *Linear Operators - Part I: General Theory.* Wiley Classics Library, Wiley-Interscience, 1988.

[7] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Nova Iorque, John Wiley e Sons 1978.

[8] Mujica, J., *Notas de Aula de Espaços Vetoriais Topológicos.* IMECC-UNICAMP.

[9] Mujica, J., *Notas de Aula de Topologia Geral.* IMECC-UNICAMP, 2003.

[10] Mujica, J., *Notas de Aula de Análise Funcional.* IMECC-UNICAMP.

[11] Mujica, J., *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., 324, (1991), 867 – 887

[12] Pombo Jr. Dinamérico, *Introdução à Analise Funcional*, EdUFF, Niterói/RJ, 1999.

[13] R. Ryan, *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*, Ph.D. Thesis, Trinity College, Dublin, 1980.