

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação**  
**Departamento de Telemática**

# **Análise e Implementação de Metodologias de Jogos Nebulosos**

**Ivana de Farias Nascimento**

Orientador: Prof. Dr. Akebo Yamakami

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na área de Automação .

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Akebo Yamakami - FEEC/UNICAMP

Prof. Dra. Luiza Amália Pinto Cantão - UNESP/Sorocaba

Prof. Dr. Fernando José Von Zuben - FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Anésio dos Santos Jr. - FEEC/UNICAMP

**Dissertação de Mestrado**  
**Campinas - SP**  
**2004**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA (BAE)-UNICAMP.

N17a Nascimento, Ivana de Farias  
Análise e implementação de metodologias de jogos  
nebulosos / Ivana de Farias Nascimento.-Campinas,SP:[s.n.],  
2004.  
Orientador: Akebo Yamakami  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual  
de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação  
  
1. Teoria dos Jogos. 2. Lógica Difusa. 3. Leilões. 4.  
Sistemas de energia elétrica. 5. Programação não-linear.  
I. Yamakami, Akebo. II.Universidade Estadual de  
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação. III. Título

# Resumo

A Teoria de Jogos é uma ferramenta da teoria de decisão que auxilia na análise de problemas que têm características de interação estratégica dos indivíduos ou jogadores. Iteração estratégica se refere à situação em que as ações de uma parte - direta ou indiretamente - afetam as outras partes. Nesta dissertação são tratados os jogos não-cooperativos de soma nula e soma não nula nebulosos, onde as incertezas são representadas por números triangulares nebulosos. Para os jogos de soma nula nebulosos, são analisados dois modelos principais de resolução e, para os jogos de soma não nula nebulosos, uma nova metodologia de resolução é proposta baseada em um algoritmo iterativo, onde o problema não-linear nebuloso é resolvido através de uma seqüência de problemas de programação linear nebulosa. Resultados de simulação computacional são obtidos e analisados e uma aplicação real inspirada no mercado de energia elétrica é analisada e os resultados obtidos através da metodologia proposta são apresentados.

# Abstract

The Game Theory is a tool of decision theory that assists the analysis of problems that have characteristics of strategic interaction among the individuals. In this dissertation non-cooperative game of fuzzy zero-sum and nonzero-sum are dealt, where the uncertainties are represented by fuzzy triangular numbers. For the fuzzy zero-sum games, two main models of resolution are analyzed and for fuzzy nonzero-sum games, a new methodology of resolution is proposed based on an iterative algorithm, where the fuzzy nonlinear problem is solved through a sequence of fuzzy linear problems. Computational simulation results are gotten and analyzed and an example inspired by the energy market is solved through the proposed methodology.

Dedico esta dissertação a Deus, que guiou mais uma etapa da minha vida; à Nossa Senhora, pelas inúmeras intercessões neste trabalho e aos meus pais, meus maiores incentivadores na vida.

“...esquecendo-me das coisas que para trás ficam e avançando para as coisas que diante de mim estão, prossigo para o alvo, para o prêmio da soberana vocação de Deus em Cristo Jesus.”(Fp 3, 13-14)

# Agradecimentos

A Deus, por sua infinita misericórdia e por ser tão maravilhoso comigo.

Ao Prof. Dr. Akebo Yamakami, por ter sido um real orientador e fazer com que eu me sentisse capaz de realizar este trabalho.

Aos meus amados pais, José e Elisabete, por sempre acreditarem em mim e pela força e apoio dedicados em todas as circunstâncias.

Ao meu querido irmão Felipe, por todo o carinho despendido e por fazer a minha vida mais feliz. E ao meu tio-irmão, Lavoisier, por todo o incentivo.

Aos meus tios, Joaquim e Maria Helena, por todo apoio, carinho e compreensão e por estarem torcendo, sempre, para o meu sucesso.

Às minhas queridas amigas, Giselle e Virginia, por terem sido tão companheiras e confiantes nas boas e más situações vivenciadas neste período.

Às minhas queridas “irmãzinhas do coração”, Tatiane R. Bonfim, Adriane Bellé e Rubia Oliveira, por serem minhas amigas incondicionais e por estarem sempre ao meu lado, mesmo com o tempo de convivência reduzido.

À querida e maravilhosa Dra. Margareth Brigante, por ajudar na minha auto-compreensão e no melhor entendimento das pessoas ao meu redor, e por me fazer acreditar na existência de algo especial em todo o ser humano.

Às minhas queridas amigas de graduação, Amanda Romano e Vanessa Agapejev pela companhia nas horas de alto estresse e também nas badalações, e por terem ouvido todas as minhas lamentações e alegrias.

Ao meu querido amigo Marcos Rider, por estar sempre pronto a me ajudar, e por toda a

sua atenção e amizade.

À pessoa de Helder Knidel por ter estado ao meu lado em momentos difíceis, por me fazer enxergar que sou uma pessoa capaz e que possuo uma enorme força interior.

Aos amigos do LCA: Marina, Igor, Rosana, Jackeline, Paulo e aos do LBiC: Tiago, Wilfredo por terem sido tão companheiros. Aos amigos do DT: Edvaldo, Ricardo-Ceará, Fábio, Vinicius, Ricardo, Walter e Alessandro por me acolherem tão bem no meu novo departamento.

Aos meus amigos Alexandre Gonçalves e Luiz Bonani por todos os conselhos e por toda ajuda durante estes anos de convivência.

A todos os professores da FEEC que de alguma maneira contribuíram com o enriquecimento do meu conhecimento, em especial aos professores Dr. Paulo A. Valente Ferreira, por todas as dúvidas solucionadas, e ao Prof. Dr. Fernando José Von Zuben por ter me incentivado a pesquisa, por me fazer acreditar no meu potencial e por alimentar o meu sonho acadêmico.

Aos membros da banca pelas colaborações e contribuições a este trabalho.

Às secretárias Carmem, Flávia e Noêmia por toda a atenção. Aos vigilantes Fernando e Elisabete e em especial à funcionária Josefina por ter sido minha mãe na Faculdade de Engenharia Elétrica.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Aos que não citei, mas ajudaram na conclusão deste trabalho, meu muito obrigada.

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Motivação . . . . .	2
1.3 Objetivo . . . . .	3
1.4 Organização do trabalho . . . . .	3
<b>2 Teoria de Jogos</b>	<b>5</b>
2.1 Introdução . . . . .	5
2.2 Elementos e Representação de Jogos . . . . .	7
2.3 Tipos Básicos de Jogos . . . . .	12
2.3.1 Jogos de Soma Nula . . . . .	12
2.3.2 Jogos de Soma Não Nula . . . . .	18
2.3.3 Convergência do Algoritmo de Bazaraa Clássico . . . . .	22
2.4 Jogos Nebulosos . . . . .	27
2.5 Resumo . . . . .	28
<b>3 Jogos de Soma Nula Nebulosos</b>	<b>29</b>
3.1 Introdução . . . . .	29
3.2 Metodologia de Solução de Jogos de Soma Nula Nebulosos . . . . .	30



3.2.1	Modelagem dos JSNN . . . . .	30
3.3	Análise do Modelo . . . . .	32
3.3.1	Modelo de Campos . . . . .	32
3.3.2	Modelo de Maeda . . . . .	35
3.3.3	Análise Conjunta dos Modelos . . . . .	37
3.4	Implementação e Resultados . . . . .	38
3.4.1	Resultados . . . . .	38
3.5	Resumo . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Jogos de Soma Não Nula Nebulosos</b>	<b>44</b>
4.1	Introdução . . . . .	44
4.2	Metodologia de Solução de Jogos de Soma Não Nula Nebulosos . . . . .	44
4.2.1	Modelagem dos JSNNN . . . . .	45
4.3	Análise do Modelo . . . . .	47
4.3.1	Teoremas e Resultados dos Jogos Nebulosos . . . . .	51
4.4	Implementações e Resultados . . . . .	56
4.4.1	Resultados . . . . .	57
4.5	Aplicação . . . . .	63
4.5.1	Exemplos (Singh, 1999) . . . . .	66
4.5.2	Exemplo Proposto . . . . .	69
4.6	Considerações Gerais para os Resultados Obtidos . . . . .	81
4.7	Resumo . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>89</b>
5.1	Contribuições . . . . .	89
5.2	Extensões ou Trabalhos Futuros . . . . .	90
<b>A</b>	<b>Números Nebulosos</b>	<b>92</b>
<b>B</b>	<b>Programação Linear Nebulosa (PLN)</b>	<b>94</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação de um jogo na forma extensiva . . . . .	12
4.1	Jogo de dois geradores . . . . .	67
4.2	Resultados para os Geradores a Carvão . . . . .	74
4.3	Resultados para os Geradores a Óleo . . . . .	77
4.4	Resultados para os Geradores a Gás . . . . .	79
A.1	<i>Número Triangular Nebuloso.</i> . . . .	92

# Lista de Tabelas

2.1	Representação de um jogo na forma estratégica . . . . .	11
3.1	Resultados <i>Crisp</i> para os Exemplos . . . . .	39
3.2	Resultados para o Exemplo 1 . . . . .	39
3.3	Resultados para o Exemplo 2 . . . . .	40
3.4	Resultados para o Exemplo 3 . . . . .	41
3.5	Resultados para o Exemplo 4 . . . . .	42
4.1	Resultados para o Exemplo 1 . . . . .	58
4.2	Resultados para o Exemplo 2 . . . . .	59
4.3	Resultados para o Exemplo 3 . . . . .	60
4.4	Resultados para o Exemplo 4 . . . . .	62
4.5	Potência Instalada em Usinas no Brasil (MW) . . . . .	64
4.6	Decisões de saída de A e B . . . . .	67
4.7	Preços correspondentes às decisões de saída . . . . .	67
4.8	Rendimentos sem contratos de diferenças (Cfd) . . . . .	68
4.9	Rendimentos com contratos de diferenças (Cfd) de 30MW . . . . .	68
4.10	Rendimentos com contratos de diferenças (Cfd) de 10MW . . . . .	68
4.11	Custo de Produção para os diferentes Geradores ( $\$/MW$ ) . . . . .	69
4.12	Preços da Energia Contratada ( $R\$/MW$ ) . . . . .	70
4.13	Preços para os Geradores a Carvão . . . . .	70
4.14	Preços para os Geradores a Óleo . . . . .	70
4.15	Preços para os Geradores a Gás . . . . .	71

4.16 Resultados para os Geradores a Carvão sem Incertezas . . . . .	72
4.17 Resultados para os Geradores a Óleo sem Incertezas . . . . .	72
4.18 Resultados para os Geradores a Gás sem Incertezas . . . . .	73
4.19 Resultados para os Geradores a Carvão sem Contratos . . . . .	83
4.20 Resultados para os Geradores a Carvão com Contratos . . . . .	84
4.21 Resultados para os Geradores a Óleo sem Contratos . . . . .	85
4.22 Resultados para os Geradores a Óleo com Contratos . . . . .	86
4.23 Resultados para os Geradores a Gás sem Contratos . . . . .	87
4.24 Resultados para os Geradores a Gás com Contratos . . . . .	88

# Notação

$\mathbb{R}^m$	conjunto dos vetores reais com $m$ componentes
$\mathbb{R}^n$	conjunto dos vetores reais com $n$ componentes
$X$	conjunto das restrições pertencentes a variável $x$
$Y$	conjunto das restrições pertencentes a variável $y$
$\mu_i$	função de pertinência da $i$ -ésima restrição
$x$	valor da estratégia mista para o jogador 1
$y$	valor da estratégia mista para o jogador 2
$x^*$	valor ótimo da estratégia mista para o jogador 1
$y^*$	valor ótimo da estratégia mista para o jogador 2
$a_{i^*j}$	componente da matriz de pagamentos $A$ , onde a linha $i^*$ é ótima
$a_{ij^*}$	componente da matriz de pagamentos $A$ , onde a coluna $j^*$ é ótima
$a_{i^*j^*}$	componente da matriz de pagamentos $A$ , onde a linha $i^*$ e coluna $j^*$ são ótimas
$I_{m \times n}$	matriz identidade de $m$ linhas e $n$ colunas
$O_{m \times n}$	matriz nula (com componentes nulas) de $m$ linhas e $n$ colunas
$1_{m \times n}$	matriz com componentes iguais a 1 de $m$ linhas e $n$ colunas

$\tilde{a}_{ij}$	componente da matriz $\tilde{A}$
$\tilde{b}_i$	componente do vetor $\tilde{b}$
$\tilde{A}$	matriz com coeficientes nebulosos
$\tilde{I}_{m \times n}$	matriz identidade nebulosa de $m$ linhas e $n$ colunas
$\tilde{O}_{m \times n}$	matriz nula nebulosa (com componentes nulas) de $m$ linhas e $n$ colunas
$\tilde{1}_{m \times n}$	matriz nebulosa de componentes $\tilde{1} = (1, 1, 1)$ de $m$ linhas e $n$ colunas
$\lambda$	quantidade de incertezas inseridas no problema do jogador 1 (Maeda)
$\mu$	quantidade de incertezas inseridas no problema do jogador 2 (Maeda)
$\alpha$	maior grau de pertinência da decisão ótima
$\alpha_1$	valor de $\alpha$ para o problema do jogador 1
$\alpha_2$	valor de $\alpha$ para o problema do jogador 2
$\tilde{t}_i$	margem de tolerância para a restrição $i$
$\gtrsim$	símbolo de maior ou igual ( $\geq$ ), que representa a existência nebulosidade na restrição
$\lesssim$	símbolo de menor ou igual ( $\leq$ ), que representa a existência nebulosidade na restrição

# Lista de Abreviaturas

ANA	Agência Nacional de Águas
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
Cfd	Contratos de Diferenças
JSN	Jogos de Soma Nula
JSNN	Jogos de Soma Nula Nebulosos
JSNNN	Jogos de Soma Não Nula Nebulosos
MW	Mega-Watt
MWh	Mega-Watt hora
ONS	Operador Nacional do Sistema
PB	Programação Bilinear
PBN	Programação Bilinear Nebulosa
PL	Programação Linear
PLN	Programação Linear Nebulosa
PO	Pesquisa Operacional
TD	Teoria de Decisão
TJ	Teoria de Jogos

# Capítulo 1

## Introdução

Esta dissertação trata do desenvolvimento, análise e implementação de um algoritmo para a resolução dos jogos nebulosos. Neste capítulo, o trabalho será posicionado dentro do contexto científico, serão apresentadas as motivações que levaram ao desenvolvimento do trabalho, os principais objetivos serão descritos e, finalmente, será apresentada a organização do texto.

### 1.1 Introdução

A Teoria de Decisão (TD) fornece conceitos e técnicas analíticas com diferentes graus de formalização, que buscam ajudar o decisor a escolher o melhor ou mais apropriado conjunto de alternativas para uma determinada situação ou problema. A teoria de decisão pode ser aplicada em condições de certeza, risco e incerteza, oferecendo uma coleção de técnicas e procedimentos que revelam preferências introduzidas no modelo de decisão.

A Teoria de Jogos (TJ) é um ramo da Teoria de Decisão usada para analisar problemas caracterizados pela interação estratégica de indivíduos ou jogadores. Interação estratégica se refere à situação em que as ações de uma parte - direta ou indiretamente - afetam as outras partes.

Em 1928, John von Neumann publicou o primeiro trabalho sobre teoria de jogos. Neste trabalho a interação social foi reconhecida envolvendo elementos de competição e cooperação.



Depois deste trabalho inicial, muitos outros trabalhos foram desenvolvidos e inúmeras contribuições foram feitas nesta área, notadamente por John Nash.

Diversas são as aplicações da teoria de jogos, inclusive para a resolução de problemas reais, nas mais diversas áreas de pesquisa, principalmente na economia.

Sabe-se que, em situações reais, a determinação de dados com precisão é uma tarefa ilusória. A Teoria de Conjuntos Nebulosos é uma ferramenta de extrema importância para o tratamento das mais diversas incertezas em problemas reais. A fusão destas duas teorias, Teoria de Jogos e Teoria de Conjuntos Nebulosos, resulta na Teoria de Jogos Nebulosos.

Portanto, a aplicação da Teoria de Jogos Nebulosos na resolução de problemas reais permite a interação estratégica com incertezas nas mais diversas áreas do conhecimento.

## 1.2 Motivação

Atualmente com o mercado competitivo, é de extrema importância a resolução, de maneira rápida e eficiente, de problemas que envolvem um conjunto de alternativas como soluções, e dependendo da escolha feita os resultados obtidos podem afetar mais de uma parte, mais de um decisor, na situação geral.

A aplicação da teoria de jogos na resolução de problemas reais se torna uma ferramenta muito poderosa na área de Pesquisa Operacional (PO), pois, a partir de então, é possível resolver problemas com um certo grau de dificuldade, e com isso analisar as soluções e propor soluções para os grandes impasses. Também é possível identificar quais são os pontos críticos de tais problemas, além de inserir a possibilidade de simular comportamentos do mercado diante de situações que podem acontecer, e de posse de tais resultados é possível assumir medidas de precaução.

Por este motivo, a teoria de jogos é objeto de estudo desta pesquisa com o intuito de desenvolver técnicas e/ou algoritmos para a resolução dos problemas de decisão, mais precisamente dos jogos nebulosos.

## 1.3 Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é estudar a teoria de jogos nebulosos, sendo os problemas de enfoque: os jogos de soma nula nebulosos (JSNN) e os jogos de soma não nula nebulosos (JSNNN). Para os casos clássicos destes jogos, métodos de resolução já foram propostos. Mas quando incertezas são inseridas nos problemas, poucos são os trabalhos encontrados na literatura.

Portanto, este trabalho tem como objetivo principal o estudo dos jogos nebulosos. Modelos para a resolução de JSNN existentes na literatura são analisados e para os JSNNN é proposta uma metodologia de resolução baseada na decomposição do problema não-linear nebuloso.

A fim de atingir este objetivo, diversos exemplos da literatura são analisados e uma aplicação no mercado de energia, inspirada em (Singh, 1999), é proposta para a comprovação da eficiência do método.

## 1.4 Organização do trabalho

A dissertação está estruturada em 5 capítulos e 2 anexos, sendo que os capítulos apresentam os seguintes conteúdos:

### **Capítulo 1**

A TJ é posicionada, a motivação e o objetivo da pesquisa são apresentados e o seu conteúdo detalhado.

### **Capítulo 2**

São apresentados conceitos fundamentais da teoria de jogos. A seguir, são detalhados os tipos de jogos que serão estudados no decorrer do trabalho com as respectivas metodologias de resolução. Finalmente, uma revisão do estado da arte da teoria de jogos nebulosos é apresentada.

### **Capítulo 3**

Neste capítulo, os dois modelos principais de resolução dos jogos de soma nula nebulosos (JSNN) encontrados na literatura são apresentados: (Campos, 1989) e (Maeda, 2003). Cada uma das metodologias é descrita, implementada, analisada e os resultados obtidos para

exemplos retirados da literatura são apresentados.

#### **Capítulo 4**

São apresentados os jogos de soma não nula nebulosos (JSNNN), como também uma metodologia de solução para o problema de programação bilinear nebuloso (PBN). Esta metodologia é baseada em um método de decomposição, onde o problema não-linear nebuloso é resolvido através de uma seqüência de problemas de programação linear nebulosos (PLN). Resultados importantes sobre a convergência do algoritmo são apresentados, a proposta é testada em exemplos retirados da literatura e uma aplicação real inspirada no mercado de energia elétrica é apresentada, com soluções obtidas através da metodologia proposta.

#### **Capítulo 5**

É apresentada uma análise geral dos resultados obtidos durante todo o desenvolvimento do trabalho e são discutidas propostas de generalização das técnicas apresentadas e desenvolvidas. Perspectivas e propostas de trabalhos futuros são sugeridas.

Os anexos apresentam os seguintes conteúdos:

#### **Anexo 1**

São apresentadas as definições de números triangulares nebulosos e as principais operações com os números nebulosos.

#### **Anexo 2**

Neste anexo, são apresentados os princípios básicos de programação linear nebulosa, assim como algumas metodologias de resolução.

# Capítulo 2

## Teoria de Jogos

### 2.1 Introdução

Em muitas situações da vida do ser humano, a escolha de ações ou a tomada de decisões é necessária. Muitas decisões são tomadas intuitivamente, mas existem situações em que é preciso explorar mais intensamente as possibilidades que se apresentam, pois a maximização dos objetivos podem envolver ações não intuitivas.

A teoria de decisão fornece recursos e ferramentas para auxiliar no processo de tomada de decisão, dependendo do tipo de situação que se tem. De um ponto de vista abrangente, os problemas de tomada de decisão contêm os seguintes elementos:

- um decisor, que pode ser único ou uma organização, mas deve ter um interesse único;
- um conjunto de estados possíveis da natureza, sobre o qual o decisor não tem controle;
- um conjunto das ações possíveis a serem escolhidas pelo decisor;
- uma função objetivo que tenha um valor real e seja definida para qualquer conjuntos de estados e ações possíveis.

Para cada um desses diferentes elementos, considerações podem ser feitas. Ainda, é possível supor mais de um decisor para um problema de decisão, ou mais de uma função objetivo para se ter um problema de decisão multiobjetivo. Diferentes considerações do estado da

natureza podem ser considerados se a decisão é feita sob condições de incerteza, risco e certeza (J.L.Verdegay, 1994) .

- Incerteza: se cada ação tem como conseqüência um conjunto de estados possíveis de saída, onde as probabilidades destas saídas são completamente desconhecidas, ou sejam não se tem nenhuma informação dos estados da natureza;
- Risco: se cada ação pode produzir um conjunto de estados de saídas possíveis, onde cada um destes estados ocorre com uma probabilidade conhecida, ou seja, é conhecida a distribuição de probabilidade dos estados da natureza;
- Certeza: se cada ação é conhecida, o resultado desta ação é especificado.

Considerando estes aspectos é possível classificar os problemas de decisão em:

- *Otimização Monobjetiva*: apenas um decisor e um objetivo e se tem certeza do resultado quando tomada uma certa decisão;
- *Otimização Multiobjetiva*: um ou vários decisores com múltiplos objetivos, o resultado final é dado a partir de um compromisso de cooperativismo;
- *Teoria de Decisão*: um ou mais decisores, as soluções são obtidas através do cooperativismo considerando as incertezas da natureza ou mundo externo;
- *Teoria de Jogos*: dois ou mais decisores em conflito e as decisões são tomadas considerando incerteza em relação ao comportamento dos demais decisores.

A ênfase deste trabalho se dará junto aos problemas da Teoria de Jogos que serão tratados nos capítulos seguintes desta tese. A seguir, são apresentados os principais conceitos da Teoria de Jogos.

A vida é cheia de conflitos e competições. Exemplos não faltam para ilustrar este tipo de situação, tais como: empresas competindo por negócios, candidatos políticos competindo por votos, membros de um júri decidindo um veredicto, animais competindo por presas, leiloeiros

competindo em um leilão e muitas outras situações em que existem perdas e ganhos a curto ou a longo prazo.

Todas estas situações de competição citadas possuem uma característica básica: dependem de uma combinação de estratégias selecionadas pelos decisores para que haja algum tipo de saída.

Assim é possível dizer que a Teoria de Jogos é uma ferramenta que ajuda na compreensão de situações em que existe a interação por parte dos responsáveis pelas decisões, mais conhecidos como decisores.

Desde os anos 500 antes de Cristo, os primórdios da Teoria de Jogos já estavam presentes no Talmud, que era a principal base para a lei religiosa, civil e criminal. Mas somente em 1985 foi reconhecido que o Talmud antecipou a Teoria Moderna de Jogos Cooperativos. Apenas em 1928 von Neumann anunciou o teorema minimax. Mas as descobertas mais importantes no campo da economia que marcaram o século XX aconteceram em 1944, com o livro de John von Neumann e Oskar Morgenstern, intitulado, *Theory of Games and Economic Behavior*. Na década de 50, John Nash fez descobertas sobre os jogos cooperativos e não cooperativos e pontos de equilíbrio (Nash, 1953).

Desde o seu surgimento, mais de cinquenta anos se passaram e muitas descobertas e aplicações estão associadas a esta área de pesquisa. É possível aplicar a Teoria de Jogos como: Matemática, Ciência, Filosofia, Direito e como muitas outras formas.

Para uma maior compreensão da Teoria de Jogos é preciso definir os elementos que a compõem. A seguir, serão descritos os elementos de um jogo.

## **2.2 Elementos e Representação de Jogos**

Empresas competindo por negócios, leiloeiros competindo em um leilão são situações que podem ser formuladas como um jogo. Mas o que realmente é um jogo? Um jogo é uma situação, de conflito ou não, em que para a obtenção do resultado final existem regras a serem seguidas e ações a serem escolhidas.

Os elementos essenciais do jogo são: **jogadores, ações, informações, estratégias, pagamentos, resultados e equilíbrio.**

Os **jogadores** são os indivíduos que determinam as decisões. Cada jogador tem como objetivo maximizar o resultado com a escolha das ações.

Algumas vezes nas situações é importante explicitar a inclusão de indivíduos no modelo denominado não-jogadores, nas quais as ações são determinadas de uma maneira puramente mecânica. A Natureza (*Nature*) é um "não-jogador" que tem ações randômicas em pontos específicos no jogo com probabilidades também específicas. É possível afirmar diferentes realizações do jogo dependem diretamente dos movimentos randômicos executados no jogo.

Uma **ação** ou **movimento** feita pelo jogador  $i$ , é uma escolha que ele pode fazer. Logo, o **conjunto de possíveis ações** do jogador são todas as ações disponíveis para ele.

Uma **combinação de ações** é um conjunto ordenado de ações para cada um dos  $n$  jogadores do jogo. Depois de especificar as ações disponíveis para um dado jogador, se deve especificar quando estas podem ser utilizadas, ou seja, a **ordem das jogadas**.

O conjunto de **informações** do jogador é o seu conhecimento, em um instante particular, dos valores possíveis das ações de cada um dos jogadores. Se este conjunto tem muitos elementos, o jogador pode encontrar dificuldade em qual informação utilizar e conseqüentemente, qual ação escolher.

O conjunto de informações inclui não apenas as distinções entre os valores das ações, mas também o conhecimento das ações previamente tomadas, então o conjunto de informações se modifica no decorrer do jogo.

A **estratégia** do jogador  $i$  é uma ação escolhida em cada instante do jogo, dentre o conjunto de ações, dada pelo conjunto de informações. A **combinação de estratégias** é um conjunto ordenado de estratégias, uma para cada um dos  $n$  jogadores no jogo.

Pode haver uma certa confusão em relação ao que é estratégia e ao que é ação. O conjunto de informações inclui qualquer conhecimento do jogador sobre as ações anteriores de outros jogadores, enquanto a estratégia diz a ele como reagir às ações dos outros jogadores.

O conceito de estratégia é muito útil porque a ação escolhida por uma jogador depende das ações anteriores do meio em que ele está inserido ou dos jogadores.

O **pagamento** de um jogador é o resultado recebido após o jogo ter sido encerrado e todas as estratégias terem sido escolhidas pelos jogadores.

O **resultado** de um jogo é um conjunto de elementos escolhidos entre os valores das ações, pagamentos e outras variáveis, depois do jogo ter sido concluído.

Um dos mais importantes elementos do jogo é o **equilíbrio**. Para prever o resultado do jogo, o decisor foca nas combinações de estratégias possíveis, desde que a iteração de diferentes estratégias dos jogadores determinem o que está acontecendo.

O **equilíbrio** é um conjunto de estratégias em que cada elemento consiste na melhor estratégia para cada um dos  $n$  jogadores no jogo. As estratégias de equilíbrio são escolhidas pelos jogadores, que tentam maximizar seus rendimentos individuais, dentre as muitas possibilidades do conjunto de estratégias que são obtidas através da escolha arbitrária de uma ação por um jogador. Equilíbrio pode ser entendido de maneiras distintas na teoria de jogos e na economia. Em um modelo geral de equilíbrio, por exemplo, um equilíbrio é um conjunto de resultados obtidos através do melhor comportamento de cada um dos indivíduos na economia. Na teoria de jogos, um conjunto de valores pode ser um conjunto de estratégias que geram uma saída.

Para encontrar o equilíbrio não é necessário apenas especificar os jogadores, estratégias e pagamentos porque além desses elementos é necessário decidir o que é a "melhor estratégia" significa. Logo, o conceito de equilíbrio ou solução pode ser definido como:

**Conceito de solução ou equilíbrio** é regra que define o equilíbrio baseado no conjunto de estratégias possíveis e as funções de pagamento.

O conceito de solução não garante a unicidade do equilíbrio, logo este é o maior dos problemas na Teoria de Jogos. Frequentemente o conceito de solução empregado nos leva a ter mais de um equilíbrio em um mesmo jogo. Em outras vezes, o jogo não possui equilíbrio e não existe justificativa para o jogador adotar uma estratégia mais do que outra.

A descrição de um jogo deve incluir no mínimo jogadores, estratégias e pagamentos. Os jogadores, ações e resultados se referem coletivamente às **regras do jogo**, e o objetivo do jogador é usar essas regras do jogo para determinar o equilíbrio.

No decorrer dos capítulos deste trabalho, onde diferentes tipos de jogos serão apresentados,



o conceito de equilíbrio e as formas de como determiná-lo serão descritos mais detalhadamente.

Na Teoria de Jogos existem algumas distinções entre os diversos tipos de jogos, por exemplo: jogos cooperativos, não-cooperativos e jogos de soma nula e não nula.

Os jogos cooperativos permitem que os jogadores formem coalisões para compartilhar decisões, informações e pagamentos objetivando que o resultado final do jogo seja melhor para todas as partes envolvidas, no caso, os jogadores. Já os jogos não-cooperativos caracterizam-se pela não existência de possibilidades de comunicação, correlação ou compromisso exceto aqueles que são explicitados nas regras do jogo.

Um jogo pode ser representado de duas maneiras diferentes, que são: forma estratégia ou extensiva.

A forma estratégica de um jogo consiste na lista de ações para todos os jogadores e os seus pagamentos associados.

Existe diferenças grandes para se resolver jogos com 2 jogadores e jogos com 3 ou mais jogadores. A metodologia de resolução são diferentes e a complexidade de implementação sofrem um considerável acréscimo de dificuldade quando se quer resolver jogos com 3 ou  $n$  jogadores. Devido à essa extensão possível do tratamento dos diversos tipos de jogos, limitaremos o estudo aos jogos com 2 jogadores.

A representação estratégica de um jogo com 2 jogadores é dada através de uma matriz  $m \times n$ , onde:

- $m$  corresponde as linhas da matriz que representam as estratégias do jogador 1;
- $n$  corresponde as colunas da matriz que representam as estratégias do jogador 2.

A primeira entrada da *célula* da matriz corresponde ao pagamento referente a uma estratégia do jogador 1 e a segunda entrada ao pagamento de uma estratégia do jogador 2.

É importante ressaltar que  $m$  e  $n$ , as dimensões da matriz de pagamento de um jogo de 2 jogadores podem assumir valores iguais ou diferentes. No exemplo a seguir, cada jogador possui duas estratégias, ou seja,  $m = n = 2$ . O conjunto de ações do jogador 1 é dado por  $\{N, E\}$  e do jogador 2  $\{A, R\}$ . As matrizes de pagamento do jogador 1 e 2, são representadas

a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

**Exemplo 2.2.1.** *Disputa de mercado*

		<i>Jogador 2</i>	
		<i>A</i>	<i>R</i>
<i>Jogador 1</i>	<i>N</i>	$(0,4)$	$(0,4)$
	<i>E</i>	$(2,2)$	$(-4,-4)$

*Tabela 2.1: Representação de um jogo na forma estratégica*

Neste jogo, o jogador 1 é um candidato em potencial para entrar no mercado. Se o jogador 1 ficar de fora do mercado (N = Não entrar), então o Jogador 2 monopoliza e ganha 4. Se o jogador 1 entrar no mercado (E = Entrar) então o jogador 2 pode concordar (A) e então o mercado é dividido entre os dois e cada um ganha 2, ou o jogador 2 pode retaliar (R = Retaliar) causando um guerra de preços e os dois perdem 4.

A forma extensiva de um jogo é representada através de uma árvore, mais conhecida como árvore de decisão. Nesta representação, é possível estabelecer com precisão os conceitos de movimento, escolha, estratégia de informação, jogo, saída e pagamento. A seguir, a figura 2.1 ilustra a representação extensiva do jogo que foi representado na tabela 2.1.

Neste tipo de representação, o jogo é finalizado quando algum jogador alcança o nó terminal da árvore. Cada nó terminal é uma saída e cada jogador atribui um valor à saída.

Os nós da árvore, exceto os nós terminais, representam os pontos de escolha. Estes são pontos nos quais o jogador pode escolher um movimento. Os nós que surgem de cada escolha são os movimentos.

Neste trabalho, jogos não-cooperativos na forma matricial serão objetivo de estudo, sendo estes de soma nula ou de soma não nula. Suas definições serão apresentadas a partir da seção 2.3.1.

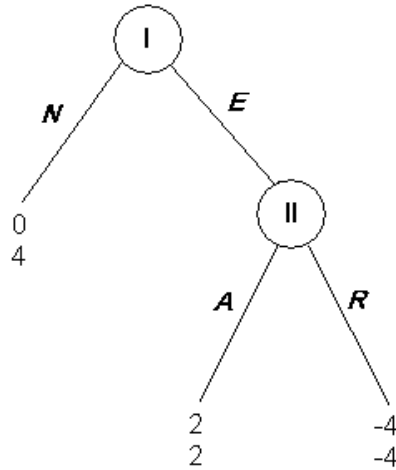


Figura 2.1: Representação de um jogo na forma extensiva

## 2.3 Tipos Básicos de Jogos

Como citado anteriormente, o estudo deste trabalho se dará em jogos não-cooperativos. Estes, por sua vez, podem ser do tipo: jogos de soma nula e jogos de soma não nula. Estes tipos de jogos são os principais encontrados na literatura. A seguir, a descrição de cada um deles, juntamente com a modelagem de cada tipo de jogo.

### 2.3.1 Jogos de Soma Nula

Os jogos de soma nula são aqueles em que os objetivos dos jogadores são diametralmente opostos, ou seja, o que um ganha, o outro perde.

Os jogadores são racionais, ou seja, estão sempre querendo obter o máximo resultado a seu favor. Em se tratando de situações cotidianas, nenhuma empresa, por exemplo, quer disputar um mercado onde somente haja possibilidade de perdas, todos querem lucro máximo. A partir desses conceitos, o jogador 1 procurará minimizar seus rendimentos, enquanto o jogador 2, irá maximizar seus rendimentos.

Quando o jogo é disputado/jogado apenas uma vez, é possível adotar a lógica apresentada

acima porque caso fosse jogado mais de uma vez, o resultado e os jogadores poderiam adotar outras lógicas para obter um resultado maximizado. Então, é razoável que o jogador 1 tente assegurar perdas mínimas contra qualquer comportamento do jogador 2. Logo, o jogador 1 necessita escolher qualquer linha  $i$  da matriz de pagamentos  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , cuja a maior entrada da linha  $i$  escolhida é menor que qualquer entrada de uma linha qualquer da matriz. Na linguagem matemática, esta afirmação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{V} = \max_j a_{i^*j} \leq \max_j a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

Adotando a mesma maneira de jogar, o jogador 2 deve assegurar seus ganhos contra qualquer decisão do jogador 1. Logo, o jogador 2 deve escolher qualquer coluna  $j$  da matriz  $A$ , onde a menor entrada desta coluna  $j$  escolhida é maior que qualquer outra entrada de uma coluna qualquer da matriz. Matematicamente, temos:

$$\underline{V} = \min_i a_{ij^*} \geq \min_i a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

As expressões 2.1 e 2.2 são chamadas de níveis de seguridade dos jogadores.

Quando as jogadas são pré-determinadas em um jogo, tem-se que o jogador 1 escolhe uma linha e repassa ao jogador 2 para que este faça a escolha da coluna. É inquestionável que o jogador 1 deve escolher o nível de seguridade como sendo a melhor alternativa. Já, para o jogador 2 o melhor resultado é dado por:

$$a_{i^*j^*} = \max_j a_{i^*j} = \bar{V} = \min_i \max_j a_{ij} \quad j = 1 \dots, n \quad (2.3)$$

Von Neumann, em 1928, determinou o equilíbrio de um jogo de soma nula. *Se o jogo tiver um equilíbrio, então,  $\bar{V} = \underline{V} = V$ .*

Para um melhor entendimento, considere o exemplo seguinte.

**Exemplo 2.3.1.** *Seja a matriz de pagamentos  $A$ :*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \end{pmatrix},$$

*Procurando o equilíbrio do jogo, temos:*

		Jogador 2			Mínimo
		1	2	3	
Jogador 1	1	-3	-2	6	-3
	2	2	0	2	<b>0</b>
	3	5	-2	-4	-4
Máximo		5	<b>0</b>	6	

Os valores  $\bar{V}$  e  $\underline{V}$  são iguais, logo o jogo tem equilíbrio, e o resultado do jogo é  $\bar{V} = \underline{V} = 0$ . As estratégias descritas acima são denominadas na literatura de *estratégias puras* e é possível afirmar que o jogo tem ponto de sela e é igual a 0. Lembrando que o que é positivo para um jogador é negativo para o outro. Assim, se para jogador 1 é minimizado os rendimentos, para o jogador 2 deve-se maximizar os rendimentos.

Quando os valores ( $\bar{V}$  e  $\underline{V}$ ) são diferentes, ou seja, o jogo não possui ponto de sela, ou seja, ponto de equilíbrio e é preciso recorrer ao conceito de estratégias mistas.

A estratégia mista para um jogador é a distribuição de probabilidade no espaço de suas estratégias puras. Equivalentemente, é uma variável randômica, onde os valores são as estratégias puras dos jogadores. A seguir, são representados os espaços de estratégias mistas dos jogadores 1 e 2, respectivamente:

$$X = \{x \in R^m : x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\} \quad (2.4)$$

$$Y = \{y \in R^n : y \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1\} \quad (2.5)$$

O valor do jogo com estratégias mistas é dado por:

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = x^T A y \quad (2.6)$$

As definições apresentadas a seguir são generalizações das estratégias puras.

**Definição 2.3.1.** O vetor  $x^*$  é chamado de nível de seguridade para o jogador 1, no jogo com matriz de pagamentos  $A$ , se a seguinte desigualdade for verdadeira para qualquer  $y$ :

$$\bar{V}_m = \max x^{*T} A y \leq \max x^T A y, x \in X \quad (2.7)$$

De forma análoga, o nível de segurança para o jogador 2 é definido por:

$$\underline{V}_m = \min x^T A y^* \geq \min x^T A y, y \in Y \quad (2.8)$$

Um teorema importante é o Teorema Minimax, descrito a seguir:

**Teorema 2.3.1.** *Em qualquer jogo matricial  $A$ , os níveis de segurança dos jogadores com estratégias mistas coincidem, ou seja,*

$$\bar{V}_m(A) = \min_X \max_Y x^T A y = \max_Y \min_X x^T A y = \underline{V}_m(A) \quad (2.9)$$

Existem mais de uma maneira para se determinar o equilíbrio de um jogo. Pode ser através de uma resolução gráfica, ou com a ajuda da programação linear. Neste trabalho, será utilizada a abordagem da programação linear.

## Programação Linear

Quando as matrizes de pagamento têm grandes dimensões, a maneira mais fácil de se resolver um jogo de soma nula é converter o jogo em um problema de programação linear. Esta transformação requer mais que a aplicação do teorema *minimax* e o uso das definições dos valores  $\bar{V}$  e  $\underline{V}$ .

Primeiramente, é preciso considerar a estratégia mista ótima, dada por:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j, \quad (2.10)$$

e a estratégia  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  é ótima se

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \geq \underline{V} = v, \quad (2.11)$$

para todas as estratégias do oponente  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Esta inequação deve ser mantida, isto é, para cada estratégia pura do jogador 2 onde  $y_{ij} = 1$  e o resto zero. Substituindo estes valores, tem-se:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \geq v \quad (2.12)$$

Com isso, esta inequação implica em  $n$  inequações. A primeira inequação pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^n y_j \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \right) \geq \sum_{j=1}^n y_j v = v, \quad \text{desde que } \sum_{j=1}^n y_j = 1. \quad (2.13)$$

Esta formulação impõe que o conjunto das  $n$  inequações seja equivalente à inequação original imposta para todas as estratégias  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Para completar o problema de programação linear é preciso inserir as seguintes restrições de igualdade e as condições de não negatividade das componentes do vetor de estratégias que são probabilidade.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m = 1 \quad (2.14)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.15)$$

A solução que satisfaz o problema de Programação Linear é a estratégia mista ótima. A função objetivo deste PL é dada com a maximização de um valor e as restrições têm de ser maior ou igual ao valor a ser maximizado. Logo, o problema de programação linear é dado por:

$$\max \quad v$$

sujeito a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &\geq v \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &\geq v \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Este problema por ser escrito da seguinte forma:

$$\max \quad v$$

sujeito a

$$Ax \geq v \quad (2.17)$$

$$\sum_i x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

$$i = 1, \dots, m$$

Se aplicarmos a mesma metodologia para o jogador 2, é possível ter o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad w \\
 & \text{sujeito a} \\
 & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_n \leq w \\
 & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_n \leq w \\
 & \quad \quad \quad \vdots \\
 & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq w \\
 & y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1 \\
 & y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Como no caso da formulação (2.16), o problema (2.18) pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{aligned}
 & \min \quad w \\
 & \text{sujeito a} \\
 & A^T y \leq w \\
 & \sum_j y_j = 1 \\
 & y_j \geq 0 \\
 & j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Considerando  $v, w > 0$ , é possível considerar a seguinte substituição de variáveis:

$$u_i = \frac{x_i}{v}, \quad i = 1, \dots, m \tag{2.20}$$

$$s_j = \frac{y_j}{w}, \quad j = 1, \dots, n \tag{2.21}$$

Logo,

$$v = \frac{\sum_i x_i}{\sum_i u_i}, \quad i = 1, \dots, m \tag{2.22}$$

$$w = \frac{\sum_j y_j}{\sum_j s_j}, \quad j = 1, \dots, n \tag{2.23}$$

Sabendo que

$$\sum_i x_i = 1 \tag{2.24}$$

$$\sum_j y_j = 1 \tag{2.25}$$



Então,

$$v = \frac{1}{\sum_i u_i}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.26)$$

$$w = \frac{1}{\sum_j s_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.27)$$

Logo, os problemas (2.17) e (2.19) podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \min \quad \sum_i u_i \\ & \text{sujeito a} \end{aligned}$$

$$Au \geq 1 \quad (2.28)$$

$$u_i \geq 0$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$\max \quad \sum_j s_j$$

sujeito a

$$A^T s \leq 1 \quad (2.29)$$

$$s_j \geq 0$$

$$j = 1, \dots, n$$

Resolvendo os problemas de programação linear (2.16) e (2.18), é possível encontrar a estratégia mista para os jogadores 1 e 2, respectivamente.

No capítulo 3, os jogos de soma não nula serão tratados com a programação linear, mas incluindo as incertezas no problema. Estas incertezas serão representadas através dos números triangulares nebulosos provenientes da Teoria de Conjuntos Nebulosos.

### 2.3.2 Jogos de Soma Não Nula

Os jogos de soma não nula são considerados uma extensão natural dos jogos matriciais (jogos de soma nula), denominados jogos bimatriciais, e descrevem situações que o resultado do processo de decisão não é, necessariamente, aquele em que um jogador ganha é o que o outro perde.

Um jogo bimatricial é composto por duas matrizes de dimensão,  $m \times n$ ,  $A = \{a_{ij}\}$  e  $B = \{b_{ij}\}$ , onde o par de entradas  $(a_{ij}, b_{ij})$  denota o resultado correspondente a um par particular de decisões feitas pelos jogadores.

Partindo da utilização dos jogos em ambiente de competição como, por exemplo, o mercado financeiro de um país, as economias mundias e o comércio entre partes diferentes, não existirá cooperação entre os jogadores que são racionais, ou seja, querem sempre maximizar seus rendimentos.

Um par de estratégias é um ponto de equilíbrio se este ponto for um ponto de sela e se não existir incentivo para um desvio unilateral de um dos jogadores.

A seguir, é apresentada a definição do equilíbrio de um jogo de soma não nula:

**Definição 2.3.2.** *Um par de estratégias  $i^*, j^*$  constitui uma solução não cooperativa (Nash) de equilíbrio para um jogo bimatricial  $(A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\})$  se o seguinte par de desigualdades são satisfeitas para todo  $i = 1, \dots, m$  e todo  $j = 1, \dots, n$ :*

$$a_{i^*j^*} \leq a_{ij^*} \quad (2.30)$$

$$b_{i^*j^*} \leq b_{i^*j} \quad (2.31)$$

*O par  $(a_{i^*j^*}, b_{i^*j^*})$  é conhecido como o resultado não cooperativo (Nash) de um jogo bimatricial.*

Caso não exista equilíbrio no jogo de soma não nula de estratégias puras é preciso recorrer às estratégias mistas como definidas em (2.4), (2.5) e no teorema (2.3.1), apresentadas anteriormente.

**Definição 2.3.3.** *O par  $\{x^* \in X, y^* \in Y\}$ , onde  $x^*$  é um vetor com  $m$  componentes e  $y^*$  é um vetor com  $n$  componentes, é uma solução de equilíbrio não cooperativa para um jogo bimatricial com estratégias mistas, se as seguintes desigualdades satisfizerem para todo  $x \in X$  e  $y \in Y$ :*

$$x^{*T}Ay^* \leq x^T Ay^*, x \in X \quad (2.32)$$

$$x^{*T}By^* \leq x^{*T}By, y \in Y \quad (2.33)$$

*Aqui, o par  $(x^{*T}Ay^*, x^{*T}By^*)$  é conhecido como resultado não cooperativo de equilíbrio de um jogo bimatricial com estratégias mistas.*

O equilíbrio de um jogo de soma não nula pode ser obtido usando o algoritmo de Lemke-Howson (Lemke e Howson, 1964), mas também é possível estabelecer uma relação com a programação não-linear, que será discutida na seção seguinte.

## Programação Não-Linear

Um método geral para a obtenção de uma solução para um jogo bimatricial é transformá-lo em um problema de programação não-linear. Na verdade, é um problema de programação bilinear que pode ser tratado utilizando as técnicas desenvolvidas para a resolução de problemas não-lineares. A seguir, a formulação matemática de um jogo bimatricial (Mangasarian e Stone, 1964) e (Basar e Olsder, 1982).

**Definição 2.3.4.** *O par de estratégias  $\{x^*, y^*\}$  constitui uma solução de equilíbrio de Nash para um jogo bimatricial  $(A, B)$  se e somente se,  $\{x^*, y^*, p^*, q^*\}$ , onde  $p^*$  e  $q^*$  são constantes, é a solução do seguinte problema de programação bilinear*

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x^T(A + B)y + p + q \\
 \text{sujeito a} \quad & \\
 & Ay \geq -pl_m \\
 & B^T x \geq -ql_n \\
 & x^T l_m = 1 \\
 & y^T l_n = 1 \\
 & x \geq 0 \\
 & y \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde  $l_m = (1, 1, \dots, 1)^T$  com  $m$  linhas e  $l_n = (1, 1, \dots, 1)^T$  com  $n$  linhas.

Este problema tem sido investigado na literatura exaustivamente por mais de vinte anos. Os primeiros métodos de solução foram propostos por (Mangasarian e Stone, 1964), que resolvia o problema usando o método de gradiente projetado e (Balinski, 1961) usava técnicas de pontos extremos.

Algoritmos de otimização global foram propostos por (Falk, 1973), (Konno, 1976), (Gallo e Ülkücü, 1977), (Sherali e Shetty, 1980), (Thieu, 1988) e (Al-Khayaal, 1992).

Grande parte das propostas citadas anteriormente possuem um alto nível de dificuldade para implementação, sem mencionar que muitas delas precisam de um tempo alto de convergência. Tendo em vista uma abordagem prática e com *baixo* custo computacional, adotaremos a de (Bazaraa e Shetty, 1979). Apesar da facilidade de implementação, este algoritmo de (Bazaraa e Shetty, 1979) não garante uma convergência global, mas sim que o ponto encontrado é de Kuhn-Tucker.

Em (Bazaraa e Shetty, 1979) o problema de programação bilinear considerado é dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi(u, v) = c^T u + v^T H u + d^T v \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & u \in D = \{u \in \mathfrak{R}^m : Au \geq a, \quad u \geq 0\} \\ & v \in E = \{v \in \mathfrak{R}^n : Bv \geq b, \quad v \geq 0\} \end{aligned} \tag{2.35}$$

onde:  $A$  é uma matriz  $m \times n$ ,  $B$  é uma matriz  $m \times n$ ,  $H$  é uma matriz  $n \times n$ ,  $a, b, c, d$  são vetores de dimensão  $m, m, n$  e  $n$ , respectivamente. Sem perda de generalidade, é considerado que os poliedros  $D$  e  $E$  são não vazios.

O algoritmo iterativo proposto por (Bazaraa e Shetty, 1979) é composto pela solução de dois problemas de programação linear, descritos a seguir:

**Algoritmo 2.3.1.** *Algoritmo de Bazaraa Clássico*

1. *Inicialização* Selecione  $x_1 \in \mathfrak{R}^m$  e  $y_1 \in \mathfrak{R}^n$ . Faça  $k = 1$ , e vá para *Passo Principal*.

2. *Passo Principal*

(a) *Passo1:* Resolva o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min \quad & d^T y + x_k^T H y \\ \text{s.a.} \quad & y \in Y \end{aligned} \tag{2.36}$$

Seja  $\hat{y}$  a solução ótima. Faça  $y_{k+1}$  como especificado abaixo e vá para *Passo2*.

$$y_{k+1} = \begin{cases} y_k, & \text{se } \phi(x_k, \hat{y}) = \phi(x_k, y_k) \\ \hat{y}, & \text{se } \phi(x_k, \hat{y}) < \phi(x_k, y_k) \end{cases}$$

(b) *Passo2*: Resolva o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + x^T H y_{k+1} \\ \text{s.a.} \quad & x \in X \end{aligned} \tag{2.37}$$

Seja  $\hat{x}$  a solução ótima. Faça  $x_{k+1}$  como especificado abaixo e vá para *Passo3*.

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k, & \text{se } \phi(\hat{x}, y_{k+1}) = \phi(x_k, y_{k+1}) \\ \hat{x}, & \text{se } \phi(\hat{x}, y_{k+1}) < \phi(x_k, y_{k+1}) \end{cases}$$

(c) *Passo3*: Se  $x_{k+1} = x^k$  e  $y_{k+1} = y^k$ , pare, com  $(x^k, y^k)$  sendo um ponto de Kuhn-Tucker. Caso contrário, atualize  $k \leftarrow k + 1$ , e vá para *Passo1*.

onde  $X$  e  $Y$  são as restrições pertencentes a  $x$  e  $y$ , respectivamente.

### 2.3.3 Convergência do Algoritmo de Bazaraa Clássico

Em (Bazaraa e Shetty, 1979) é apresentado um algoritmo iterativo para a resolução de problemas de programação bilinear, onde as restrições são conjuntos fechados poliedrais.

Este algoritmo consiste na resolução iterativa de dois problemas de programação linear, e o mesmo termina quando as soluções dos problemas na iteração vigente são iguais às soluções da iteração passada. Bazaraa afirma que o ponto encontrado é um ponto de Kuhn-Tucker.

O Algoritmo de Bazaraa Clássico foi descrito na seção 2.3.2. Para um maior embasamento teórico, a seguir apresentamos a prova de que este algoritmo converge para um ponto de Kuhn-Tucker.

**Prova 2.3.1.** *Seja o seguinte problema de programação bilinear:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi(x, y) = c^T x + x^T H y + d^T y \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & x \in X \\ & y \in Y \end{aligned} \tag{2.38}$$

Considerando que os conjuntos poliedrais limitados  $X$  e  $Y$  são da forma:

$$\begin{aligned} X &:= \{x : Ax \leq b\} \\ Y &:= \{y : By \leq c\} \end{aligned}$$

Então, o problema bilinear pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \phi(x, y) &= c^T x + x^T H y + d^T y \\ \text{sujeito a} & \\ x \in X &:= \{x : Ax \leq b\} \\ y \in Y &:= \{y : By \leq c\} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Considerando uma forma mais geral do problema, é possível reescrever os conjuntos  $X$  e  $Y$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X &:= \{x : g(x) \leq 0\} \\ Y &:= \{y : h(y) \leq 0\} \end{aligned}$$

Finalmente, o problema bilinear pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \phi(x, y) &= c^T x + x^T H y + d^T y \\ \text{sujeito a} & \\ x \in X &:= \{x : g(x) \leq 0\} \\ y \in Y &:= \{y : h(y) \leq 0\} \end{aligned} \tag{2.40}$$

A função lagrangeana é dada pela expressão:

$$l(x, y, \mu, \beta) = \phi(x, y) + \mu^T g(x) + \beta^T h(y)$$

Para que o ponto  $(x_k = x^*, y_k = y^*)$  seja ponto de Kuhn-Tucker do problema é preciso que existam  $\mu \geq 0$  e  $\beta \geq 0$  tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\begin{aligned} \mu_i g_i(x^*) &= 0, \quad \text{para } \forall i \\ \beta_j h_j(y^*) &= 0, \quad \text{para } \forall j \\ \nabla_x l(x^*, y^*, \mu, \beta) &= 0 \\ \nabla_y l(x^*, y^*, \mu, \beta) &= 0 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\nabla_x l(x^*, y^*, \mu, \beta) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nabla g^T(x^*)\mu = c + y^{*T}H + \nabla g^T(x^*)\mu = 0 \\ \nabla_y l(x^*, y^*, \mu, \beta) &= \frac{\partial \phi}{\partial y} + \nabla h^T(y^*)\beta = d + x^{*T}H + \nabla h^T(y^*)\beta = 0\end{aligned}$$

De posse destas informações não é possível concluir que o ponto  $(x_k = x^*, y_k = y^*)$  obtido pelo Algoritmo de Bazaraa Clássico é ponto de Kuhn-Tucker.

No Algoritmo de Bazaraa Clássico, o problema de programação bilinear é decomposto em dois problemas de programação linear onde ao final do processo iterativo, a solução do problema bilinear é a união das soluções dos dois problemas de PL.

Como no algoritmo  $x_{k+1} = x^*$  e  $y_{k+1} = y^*$  são soluções dos problemas de programação linear, tem-se que:

$$\begin{aligned}x^* &= \arg \min \phi(x, y) = c^T x + x^T H y \\ \text{sujeito a} & & (2.42)\end{aligned}$$

$$x \in X := \{x : g(x) \leq 0\}$$

$$\begin{aligned}y^* &= \arg \min \phi(x, y) = d^T y + x^T H y \\ \text{sujeito a} & & (2.43)\end{aligned}$$

$$y \in Y := \{y : h(y) \leq 0\}$$

Escrevendo e analisando as condições de Kuhn-Tucker para os problemas (2.42) e (2.43), no ponto citado anteriormente temos, respectivamente:

$$\begin{aligned}\mu_i g_i(x^*) &= 0, \quad \text{para } \forall i \\ \nabla_x(x^*, y^*, \mu) &= c + y^{*T}H + \nabla g^T(x^*)\mu = 0\end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}\beta_j h_j(y^*) &= 0, \quad \text{para } \forall j \\ \nabla_y(x^*, y^*, \beta) &= d + x^{*T}H + \nabla h^T(y^*)\beta = 0\end{aligned} \quad (2.45)$$

Como o ponto  $x_{k+1} = x^*$  é solução do problema (2.42) e  $y_{k+1} = y^*$  é solução do problema (2.43) então através das condições de Kuhn-Tucker é possível afirmar que existe um  $\mu \geq 0$  tal que satisfaz as condições (2.44) e que existe um  $\beta \geq 0$  tal que satisfaz as condições (2.45).

Observe que as condições (2.44) e (2.45) são exatamente as condições de Kuhn-Tucker para o problema de programação bilinear (2.38).

Logo, é possível afirmar que o Algoritmo de Bazarra Clássico converge para um ponto de Kuhn-Tucker.

Através do teorema enunciado a seguir, afirma-se que o algoritmo sempre convergirá para um ponto no interior ou no contorno do conjunto das restrições do problema, conjunto este compacto.

**Teorema 2.3.2.** *Bolzano-Weierstrass*

Toda função que é contínua em uma região fechada e limitada (conjunto compacto)  $\Omega \subset \mathbb{R}_n$  possui um valor máximo e um valor mínimo no interior ou no contorno de  $\Omega$ .

Sabe-se que a função objetivo do problema é uma função contínua e o conjunto das restrições é um conjunto fechado e limitado, ou seja, compacto. Logo, é possível afirmar que o algoritmo vai convergir para um ponto, e este será um ponto de Kuhn-Tucker, como mostrado anteriormente.

Portanto, é possível afirmar que o Algoritmo de Bazarra Clássico converge para um ponto de Kuhn-Tucker.

Os jogos de soma não nula podem ser resolvidos através do algoritmo apresentado acima. No entanto, é preciso que sejam feitas algumas transformações para reescrever o problema (2.34) na forma (2.35). Sejam elas:

$$u = \begin{pmatrix} y \\ p \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ q \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} A + B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

onde  $x$  e  $y$  têm as dimensões  $m \times 1$  e  $n \times 1$ , respectivamente e  $p, q$  são escalares.

Reescrevendo o problema (2.34), temos:



$$\begin{aligned}
& \min \quad v^T H u \\
& \text{sujeito a} \\
& \quad A_m u \geq 0 \\
& \quad B_m v \geq 0 \\
& \quad v^T C_m \geq 0 \\
& \quad u^T D_m \geq 0 \\
& \quad v^T E_m = 1 \\
& \quad u^T F_m = 1
\end{aligned} \tag{2.46}$$

onde:

$$\begin{aligned}
A_m &= \begin{pmatrix} A & 1_{m \times 1} & 0_{m \times 1} \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} B^T & 0_{n \times 1} & 1_{n \times 1} \end{pmatrix}, \quad C_m = \begin{pmatrix} I_{m \times m} \\ 0_{2 \times m} \end{pmatrix}, \\
D_m &= \begin{pmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{2 \times n} \end{pmatrix}, \quad E_m = \begin{pmatrix} 1_{m \times 1} \\ 0_{2 \times 1} \end{pmatrix}, \quad F_m = \begin{pmatrix} 1_{n \times 1} \\ 0_{2 \times 1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Considerando o Algoritmo (2.3.1), os problemas de programação linear (2.47) e (2.48) são resolvidos iterativamente através de técnicas clássicas, como o Simplex.

$$\begin{array}{ll}
\min \quad v^T H u & \min \quad v^T H u \\
\text{sujeito a} & \text{sujeito a} \\
A_m u \geq 0 & B_m v \geq 0 \\
u^T D_m \geq 0 & v^T C_m \geq 0 \\
u^T F_m = 1 & v^T E_m = 1
\end{array} \tag{2.47} \tag{2.48}$$

Através do Algoritmo (2.3.1) é possível determinar o ótimo local do problema de programação bilinear. Este algoritmo não garante que o ponto encontrado no final do procedimento seja um ótimo global, já que para isso a condição de Kuhn-Tucker é necessária, mas não suficiente (Bazaraa e Shetty, 1979). Portanto, é possível que, mesmo com as condições de Kuhn-Tucker sendo satisfeitas, o algoritmo termine antes da função objetivo ser igual a zero. Neste caso, seria necessário o algoritmo ter um mecanismo de reinicialização e que o mesmo seja executado até a função objetivo ser reduzida a zero, ou um valor muito próximo

de zero. Mesmo com a utilização desta técnica de reinicialização não é possível garantir que o algoritmo seja finalizado com o valor da função objetivo seja nula.

Esta metodologia de resolução será usada no capítulo 4, onde incertezas serão inseridas nos problemas de programação bilinear, ou seja, nos jogos de soma não nula.

## 2.4 Jogos Nebulosos

Os jogos nebulosos surgiram da união de duas técnicas: a teoria de jogos e a teoria de conjuntos nebulosos.

A Teoria dos conjuntos nebulosos surgiu em 1965, quando Zadeh publicou um trabalho intitulado *Fuzzy Sets* (Zadeh, 1965), surgindo, assim, uma maneira poderosa e conveniente de tratar as incertezas sem precisar recorrer aos conceitos estocásticos.

Na tentativa de reproduzir mais fielmente muitas situações de conflito, é que a incerteza foi introduzida nos coeficientes da matriz de pagamentos dos jogos clássicos, surgindo assim, os jogos nebulosos.

O primeiro trabalho sobre jogos nebulosos foi o de (Butnariu, 1978), onde uma discussão heurística e um confronto da teoria de jogos clássica com a nebulosa são apresentados. A diferença entre estes dois tipo de jogos é que para os jogos clássicos a possibilidade de escolha de uma estratégia é a mesma para cada jogador. Já, nos jogos nebulosos, cada estratégia pertence a um conjunto nebuloso.

Este trabalho de Butnariu foi a base para inúmeros artigos sobre os jogos nebulosos. Trabalhos como (Butnariu, 1980), (Sakawa e Nishizaki, 1994) e (Tsurumi et al., 2001) apresentaram conceitos relevantes dos jogos cooperativos nebulosos.

(Nishizaki e Sakawa, 2000) transformam problemas de otimização em jogos nebulosos, maximizando objetivos nebulosos e determinando a existência ou não de coalisões prioritárias.

Por fim, (Dhingra e Rao, 1995) combinam os conceitos de jogos cooperativos e teoria de conjuntos nebulosos para resolver problemas de otimização multiobjetivo.

(Nicolas e Grabisch, 1995) propõem que os jogos matriciais não cooperativos baseados em estratégias minimax sejam estendidos para jogos com estratégias baseadas em t-normas

e t-conormas. Já (Dengfeng e Chuntian, 2002) apresentam os jogos nebulosos matriciais restritos não cooperativos. Os métodos de resolução destes jogos se baseiam em programação multiobjetivo, mas, através da metodologia de Zimmermann (Apêndice B), o jogo pode ser resolvido através de técnicas de programação linear.

Inúmeros trabalhos tratam os jogos nebulosos cooperativos, mas quando pesquisamos sobre os jogos nebulosos não-cooperativos, poucos trabalhos são encontrados na literatura. Diante desta constatação, surgiu a idéia de pesquisar os jogos de soma não nula nebulosos para propor metodologias de resolução e tentar aplicá-los em problemas reais.

Os jogos de soma nula nebulosos serão descritos no capítulo 3, e os de soma não nula nebulosos no capítulo, 4. Análise de metodologias já existentes, bem como a proposta de novas metodologias serão feitas no decorrer deste trabalho.

## 2.5 Resumo

Este capítulo abordou primeiramente a Teoria de Jogos clássica. Conceitos, definições e teoremas foram apresentados para um maior entendimento por parte do leitor sobre esta teoria, a qual fornece ferramentas poderosas na tomada de decisões. Os jogos de soma nula e não nula foram apresentados, juntamente com a metodologia de resolução de cada um deles.

Em um segundo instante, quando as incertezas são introduzidas nos jogos clássicos, tem-se os Jogos Nebulosos. Uma visão geral e restrita do que existe na literatura foi descrita, lembrando que maiores detalhes sobre os jogos de soma nula e não nula nebulosos será feita no decorrer deste trabalho.

# Capítulo 3

## Jogos de Soma Nula Nebulosos

### 3.1 Introdução

A teoria de jogos é uma ferramenta importante para a compreensão das situações em que existe interações de decisores. Muitas situações que podem ser resolvidas com os conceitos da teoria de jogos são reais.

A determinação de dados em casos reais é uma tarefa ilusória. Existe uma grande dificuldade na determinação exata destes e muitas vezes existem imprecisões que alteram prejudicialmente os resultados, já que uma escolha errônea pode ser feita.

Uma tentativa de suprir as dificuldades encontradas na determinação dos dados imprecisos, que neste trabalho será o coeficiente das matrizes de pagamentos dos jogadores, é a utilização da Teoria de Conjuntos Nebulosos.

A união da Teoria de Jogos e da Teoria de Conjuntos Nebulosos resulta na Teoria de Jogos Nebulosos.

Neste capítulo, os jogos de soma nula com incertezas, ou seja, os jogos de soma nula nebulosos serão descritos. As incertezas estarão representadas através dos números nebulosos triangulares. Na literatura, dois trabalhos descrevem este jogos. São eles: (Campos, 1989) e (Maeda, 2003). Os modelos propostos por Campos e Maeda serão descritos, implementados, analisados e resultados serão apresentados a fim de se determinar a melhor metodologia para a resolução dos jogos de soma nula nebulosos.

## 3.2 Metodologia de Solução de Jogos de Soma Nula Nebulosos

Os jogos de soma nula são aqueles em que os jogadores possuem objetivos diametralmente opostos, ou seja, o que um perde o outro ganha. Os jogos de soma nula nebulosos (JSNN) possuem a mesma definição, a diferença está nos coeficientes da matriz de pagamentos. Nos jogos nebulosos, as incertezas estão representadas através dos coeficientes da matriz de pagamentos e estes não são números reais, mas sim números nebulosos.

Neste trabalho apenas os JSNN com coeficientes nebulosos triangulares serão estudados. É possível, utilizar outros tipos de números nebulosos, como os trapezoidais.

A matriz de pagamentos de um JSNN pode ser representada por:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

onde  $\tilde{a}_{ij} = (a, e_a, d_a)_{LR}$ :  $a$  é o valor modal,  $e_a$  é a dispersão à esquerda e  $d_a$  a dispersão à direita. As operações com os números nebulosos estão descritas no apêndice A.

### 3.2.1 Modelagem dos JSNN

A modelagem de um JSNN não difere muito do jogos de soma nula clássico apresentada na seção 2.3.1.

Supondo que os jogadores são racionais e que o jogador 1 quer minimizar as suas perdas ( $v$ ) e o jogador 2 quer maximizar os lucros ( $w$ ), temos uma formulação semelhante à dada pelos problemas (2.16) e (2.18), exceto pelos coeficientes que são números triangulares nebulosos. Por este motivo, as restrições devem ser tratadas especialmente. A seguir, é apresentada a formulação dos JSNN com estratégias mistas para os jogadores 1 e 2, respectivamente:

$$\begin{array}{ll}
\max & v \\
\text{sujeito a} & \\
& \sum_i \tilde{a}_{ij} x_i \gtrsim v \\
& x_1 + \dots + x_m = 1 \quad (3.1) \\
& x_i \geq 0 \\
& i = 1, \dots, m \\
& j = 1, \dots, n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\min & w \\
\text{sujeito a} & \\
& \sum_j \tilde{a}_{ij} y_j \lesssim w \\
& y_1 + \dots + y_n = 1 \quad (3.2) \\
& y_j \geq 0 \\
& i = 1, \dots, m \\
& j = 1, \dots, n
\end{array}$$

Se considerarmos  $v, w > 0$  é possível fazer um paralelo com a teoria clássica, logo define-se:

$$u_i = \frac{x_i}{v}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

$$s_j = \frac{y_j}{w}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

Então,

$$v = \frac{\sum_i x_i}{\sum_i u_i}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5)$$

$$w = \frac{\sum_j y_j}{\sum_j s_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

Sabendo que

$$\sum_i x_i = 1 \quad (3.7)$$

$$\sum_j y_j = 1 \quad (3.8)$$

é possível reescrever os problemas (3.1) e (3.2) da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll}
\min & \sum_i u_i \\
\text{sujeito a} & \\
& \sum_i \tilde{a}_{ij} u_i \gtrsim 1 \\
& u_i \geq 0 \quad (3.9) \\
& i = 1, \dots, m \\
& j = 1, \dots, n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\max & \sum_j s_j \\
\text{sujeito a} & \\
& \sum_j \tilde{a}_{ij} s_j \lesssim 1 \\
& s_j \geq 0 \quad (3.10) \\
& i = 1, \dots, m \\
& j = 1, \dots, n
\end{array}$$

A resolução destes problemas de programação linear nebulosa (PLN) está vinculada a técnicas especiais para o tratamento destes problemas. A descrição das principais técnicas de resolução de PLN existentes na literatura são apresentadas no apêndice B.

### 3.3 Análise do Modelo

Na literatura, existem dois modelos principais de resolução para os jogos de soma nula nebulosos. São eles o modelo de Campos (Campos, 1989) e o modelo de Maeda (Maeda, 2003). Na seção 3.2.1, a modelagem matemática utilizada pelos dois modelos foi apresentada. A seguir, é apresentada uma descrição de cada uma das metodologias.

#### 3.3.1 Modelo de Campos

O modelo de Campos (Campos, 1989) foi um dos primeiros trabalhos existentes na literatura que considerou incertezas nos coeficientes dos jogos de soma nula. Como já citado, as incertezas estão presentes na matriz de pagamentos  $A$ .

Campos define o jogo nebuloso como:  $G = (S_1, S_2, \tilde{A})$  onde  $S_1$  e  $S_2$  são conjuntos de estratégias e  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$  é uma matriz  $m \times n$  de números triangulares nebulosos (matriz de pagamentos). Estes jogos são denominados jogos matriciais nebulosos.

Para a resolução do JSNN, Campos utiliza a programação linear traçando um paralelo com a programação linear nebulosa. Na verdade, na teoria clássica existe um par de problemas primal-dual. De acordo com o teorema de dualidade, eles têm o mesmo valor das funções objetivo no ótimo. Quando as incertezas estão presentes nos problemas, esta característica não pode ser garantida.

A formulação dos JSNN com estratégias mistas se assemelham muito à formulação clássica, exceto pela representação da matriz de pagamentos e, conseqüentemente, das restrições.

Logo, os problemas para os jogadores 1 e 2, são representados, respectivamente, pelos problemas (3.1) e (3.2). Traçando um paralelo com a teoria clássica e fazendo as mudanças descritas na seção anterior, os problemas são representados por (3.9) e (3.10).

Campos resolve os problemas de PLN com a ajuda de uma metodologia auxiliar baseada no

ranqueamento de números nebulosos. Com isso, os problemas são reescritos e resolvidos através de metodologias clássicas da programação linear. A seguir, é apresentada uma descrição desta metodologia.

Considere o seguinte PLN:

$$\begin{aligned} & \max \quad c^T x \\ & \text{sujeito a} \\ & \quad \tilde{a}_i x \lesssim \tilde{b}_i \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

O decisor conhece o valor impreciso  $\tilde{a}_i$  e  $\tilde{b}_i$  de cada restrição, e ele pode permitir alguma violação nas restrições. Esta violação pode ser expressa através de uma função de pertinência

$$\mu^i : N(\mathfrak{R}) \rightarrow [0, 1] \tag{3.12}$$

a qual mede a adequação entre os valores  $\tilde{a}_i$  e  $\tilde{b}_i$ , através dos números nebulosos  $\tilde{t}_i$ . Estes expressam a margem de tolerância do decisor. Logo, a resolução do problema (3.11) consiste na substituição de cada conjunto nebuloso da restrição por um conjunto convexo:

$$\tilde{a}_i x \lesssim \tilde{b}_i + \tilde{t}_i(1 - \alpha) \tag{3.13}$$

onde a relaxação  $\lesssim$  é definida pelo decisor, lembrando que é preciso preservar o ranqueamento entre os números nebulosos.

Portanto, o problema (3.11) reescrito tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \max \quad c^T x \\ & \text{sujeito a} \\ & \quad \tilde{a}_i x \lesssim \tilde{b}_i + \tilde{t}_i(1 - \alpha) \\ & \quad x \geq 0 \\ & \quad \alpha \in (0, 1]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Campos sugere cinco métodos de ranqueamento de números nebulosos, sendo eles:

$$[\underline{a}_i + \bar{a}_i + a_i]x \leq [\underline{b}_i + \bar{b}_i + b_i] + [\underline{t}_i + \bar{t}_i + t_i](1 - \alpha) \tag{3.15}$$

$$[\underline{a}_i + \bar{a}_i + 2a_i]x \leq [\underline{b}_i + \bar{b}_i + 2b_i] + [\underline{t}_i + \bar{t}_i + 2t_i](1 - \alpha) \tag{3.16}$$



$$[ka_i + (1 - k)\underline{a}_i]x \leq kb_i + (1 - k)\underline{b}_i + [kt_i + (1 - k)\underline{t}_i](1 - \alpha) \quad (3.17)$$

$$a_i x \leq b_i + t_i(1 - \alpha) \quad (3.18)$$

$$[a_i + \bar{a}_i]x \leq b_i + \bar{b}_i + [t_i + \bar{t}_i](1 - \alpha) \quad (3.19)$$

Logo, os problemas de resolução dos JSNN possuem uma forma geral para cada um dos jogadores, como segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & z_1 = \sum_i u_i \\ \text{sujeito a} \quad & Bu \geq c - d(1 - \alpha) \\ & u \geq 0 \\ & \alpha \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & z_2 = \sum_j s_j \\ \text{sujeito a} \quad & sB^T \leq c + e(1 - \alpha) \\ & s \geq 0 \\ & \alpha \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Estes problemas não constituem um par primal-dual. Os valores das funções objetivo não são iguais. Entretanto, é possível obter uma solução para o jogo com as incertezas estabelecidas no problema.

Campos analisa da seguinte maneira: *Se considerarmos  $\lambda = 1 - \alpha$  com  $\alpha \in (0, 1]$  nos problemas (3.20) e (3.21), é evidente que, com o aumento dos valores de  $\lambda$ ,  $z_1$  e  $z_2$  decrescem e crescem, respectivamente. Então, faz sentido adotar  $v(\lambda) = \frac{1}{z_1(\lambda)}$  e  $w(\lambda) = \frac{1}{z_2(\lambda)}$ .*

Com esta metodologia de resolução proposta, a solução para os jogadores é obtida quando  $v(1) = w(1)$ . Estes valores podem ser vistos como *valor nebuloso* o que está em concordância com as incertezas assumidas previamente por cada jogador.

A seguir, é apresentada a descrição da metodologia de resolução proposta por Campos através de um algoritmo.

**Algoritmo 3.3.1.** *Algoritmo do Modelo de Campos*

1. *Passo 1 - Inicialização Apresentação dos dados iniciais:*  $\tilde{A}, \tilde{b}_i = (1, 1, 1)$ ,  $p_i$  e  $q_i$ .

2. *Passo 2: Escolher a opção de ranqueamento de números nebulosos.*
3. *Passo 3: Dependendo da opção escolhida, obter:  $A, b, p, q$ .*
4. *Passo 4: Resolver o problema de programação linear para o Jogador 1.*
5. *Passo 5: Obter  $v$  e  $x$ .*
6. *Passo 6: Resolver o problema de programação linear para o Jogador 2.*
7. *Passo 7: Obter  $w$  e  $y$ .*
8. *Passo 8: Obter o valor do jogo.*
9. *Passo 9: Apresentar solução do jogo:  $x, y$  e valor do jogo.*

### 3.3.2 Modelo de Maeda

(Maeda, 2003) apresenta os conceitos de estratégias de equilíbrio para os jogos de soma nula nebulosos e também caracteriza o equilíbrio de Nash de uma família de jogos bimatrixiais paramétricos.

Como em (Campos, 1989), as incertezas são consideradas através dos números nebulosos triangulares, com a pequena diferença de que os números nebulosos devem ser simétricos, ou seja, a dispersão à esquerda e à direita são iguais.

Seja o número triangular nebuloso  $\tilde{a}$  definido por  $\tilde{a} = (m, h, h)_{LR}$ , onde  $m$  é o valor modal e  $h$  é o valor da dispersão.

O modelo de Maeda explora o fato da matriz  $\tilde{A}$  ser composta por números triangulares simétricos visando definir condições necessárias e suficientes para a determinação de uma estratégia de equilíbrio para o jogo nebuloso. Para isso transforma o jogo de soma nula nebuloso em uma família de jogos bimatrixiais parametrizados.

Seja  $A(\lambda) \equiv A + (1 - 2\lambda)H$ ,  $A(\mu) \equiv A + (1 - 2\mu)H$ , onde  $A$  é a matriz com os valores modais,  $H$  é a matriz das dispersões e  $\lambda$  e  $\mu$  são parâmetros do jogo, a definição do equilíbrio é dada por:

**Definição 3.3.1.** *Seja  $\lambda, \mu \in [0, 1]$  números reais. A estratégia  $(x^*, y^*) \in X \times Y$  é dito ser um equilíbrio de Nash para o jogo  $\Gamma(\lambda, \mu)$  se*

$$x^T A(\lambda) y^* \leq x^{*T} A(\lambda) y^* \quad \forall x \in X, \quad (3.22)$$

$$x^{*T} A(\mu) y^* \leq x^{*T} A(\mu) y \quad \forall y \in Y. \quad (3.23)$$

Apesar da matriz  $\tilde{A}$  ser composta por números nebulosos, as incertezas são realmente determinadas no modelo de Maeda através dos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$ . A formulação dos JSNN com estratégias mistas segue a mesma lógica da teoria clássica, sendo que para o jogador 1, a matriz  $\tilde{A}$  é substituída pela matriz  $A(\mu)$  e, para o jogador 2, por  $A(\lambda)$ . Sendo assim, é possível escrever os dois problemas de PLN da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \min \quad \sum_i u_i \\ & \text{sujeito a} \\ & \sum_i a_{ij}(\mu) u_i \geq 1 \\ & u_i \geq 0 \\ & i = 1, \dots, m \\ & j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & \max \quad \sum_j s_j \\ & \text{sujeito a} \\ & \sum_j a_{ij}(\lambda) s_j \leq 1 \\ & s_j \geq 0 \\ & i = 1, \dots, m \\ & j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para a resolução destes problemas, deve-se aplicar qualquer método de resolução para problemas de programação linear, já que a formulação acima é de um PL sem incertezas, ou seja, clássico e que os parâmetros são determinados previamente.

A seguir, a descrição da metodologia de resolução de Maeda através de um algoritmo.

**Algoritmo 3.3.2.** *Algoritmo do Modelo de Maeda*

1. **Passo 1 - Inicialização** Determinar as matrizes  $A$  com os valores modais e  $H$  com as dispersões dos números triangulares nebulosos.
2. **Passo 2** Escolher os parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$ .
3. **Passo 3** Calcular as matrizes  $A(\lambda)$  e  $A(\mu)$ .
4. **Passo 4** Resolver o problema de programação linear para o jogador 1 (3.24).
5. **Passo 5** Obter  $x$ .

6. *Passo 6* Resolver o problema de programação linear para o jogador 2 (3.25).

7. *Passo 7* Obter  $y$ .

8. *Passo 8* Calcular o valor do jogo ( $x^{*T}A(\lambda)y^*$  e  $x^{*T}A(\mu)y^*$ ).

9. *Passo 9* Apresentar soluções:  $x$ ,  $y$  e valor do jogo.

### 3.3.3 Análise Conjunta dos Modelos

Apesar dos modelos de Campos (Campos, 1989) e de Maeda (Maeda, 2003) possuírem formulações matemáticas muito semelhantes, a diferença nestes modelos está em como as incertezas são consideradas. A seguir, as características de cada um dos modelos.

No modelo de Campos, os dados necessários para aplicação da metodologia proposta são as matrizes  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{t}_i$  e o método de rankeamento. As incertezas são tratadas através dos métodos de rankeamento de números nebulosos; é possível utilizar qualquer tipo de número nebuloso triangular na matriz de pagamentos. Campos não determina qualquer tipo de equilíbrio, só diz que o valor do jogo pode ser determinado quando  $v(\alpha) = w(\alpha)$ . O parâmetro  $\tilde{t}_i$  representa a margem de tolerância das incertezas inseridas no jogo.

Já no modelo de Maeda, os dados necessários são as matrizes  $A$  e  $H$ , e os parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$ . As incertezas são tratadas através de uma parametrização da matriz de pagamentos, através de  $\lambda$  e  $\mu$ ; somente números nebulosos triangulares simétricos são usados neste modelo. Maeda define três tipos de conceitos de estratégias de equilíbrio para os jogos de soma nula nebulosos e investiga suas propriedades. É mostrado que os conjuntos de todas as estratégias minimax coincidem com os conjuntos das estratégias de equilíbrio de Nash de uma família de jogos bimatriciais parametrizados com a matriz de pagamentos com elementos reais. Devido a esta parametrização, o modelo de Maeda é mais geral que o de Campos, pois qualquer incerteza pode ser inserida através dos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$ . Quando se tem  $\lambda = \mu$  no modelo de Maeda diretamente tem-se o modelo de Campos.

No modelo de Campos, as incertezas estão inseridas não só nos coeficientes das restrições, mas também nos níveis de tolerâncias para cada uma das restrições.

## 3.4 Implementação e Resultados

Nas implementações os modelos apresentados possuem semelhanças, ou seja, foram usados muitos comandos em comum e as implementações foram desenvolvidas em Matlab<sup>®</sup>, por motivo de maior praticidade e conhecimento, por parte do candidato, desta linguagem de programação. Os problemas de programação linear foram resolvidos através de um comando *lp*. Para o modelo de Campos, como era necessário a escolha do método de ranqueamento, foram feitas para cada uma das escolhas, uma função para a determinação da matriz  $A$  e dos parâmetros  $p$  e  $q$  e após isso o PL era resolvido e a solução obtida. Já, no modelo de Maeda com a escolha dos valores dos parâmetros, determinava-se as matrizes  $A(\lambda)$ ,  $A(\mu)$  e aplicava-se a função *lp* para a resolução dos PLs, obtendo-se a solução.

A seguir, alguns exemplos com os respectivos resultados obtidos através das duas metodologias.

### 3.4.1 Resultados

Nesta seção, serão apresentados alguns exemplos com os respectivos resultados. Os exemplos apresentados aqui foram retirados da literatura, particularmente de (Thie, 1988) e de (Maeda, 2003). Para estes exemplos as soluções clássicas eram conhecidas, mas não existia incertezas nas matrizes de pagamento. Então, mediante este fato, surgiu a curiosidade de investigação e possibilidade de descobrimento de novas soluções com a inserção de incertezas, através dos números nebulosos.

Para todos os exemplos, foram usados

$$t_1 = (0.10; 0.08; 0.11)_{LR}$$

$$t_2 = (0.15; 0.14; 0.17)_{LR}$$

$$b_i = (1; 1; 1)_{LR}$$

As soluções clássicas dos exemplos apresentados em seguida são:

Exemplo	$x$	$y$
1	(0.4286; 0.5714)	(0.2857; 0.7143)
2	(1; 0; 0; 0)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)
3	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)
4	(0.7895; 0.2105)	(0.2105; 0.7895)

Tabela 3.1: Resultados *Crisp* para os Exemplos

**Exemplo 3.4.1.** 1- A matriz nebulosa de pagamentos é dada por:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (-3, 0.5, 0.5) & (1, 0.5, 0.5) \\ (2, 0.5, 0.5) & (-1, 0.5, 0.5) \end{pmatrix}$$

Campos			Maeda			
Mét. de Ranqueamento	$x$	$y$	$\lambda$	$\mu$	$x$	$y$
1	(0.4286; 0.5714)	(0.2857; 0.7143)	0.1	0.1 – 0.3	(0.4286; 0.5714)	(0.2857; 0.7143)
2	(0.4286; 0.5714)	(0.2857; 0.7143)	0.2	0.1 – 0.4	(0.4286; 0.5714)	(0.2857; 0.7143)
3	(0.4286; 0.5714)	(0.2857; 0.7143)	0.3	0.1 – 0.3	(0.4286; 0.5714)	(0.2857; 0.7143)
4	(0.4286; 0.5714)	(0.2500; 0.7500)	0.4	0.1 – 0.3	(0.4286; 0.5714)	(0.2857; 0.7143)
5	(0.4286; 0.5714)	(0.2857; 0.7143)	0.4	0.4	(0.3000; 0.7000)	(0.1737; 0.8263)
			0.5	0.1 – 0.3	(0.4286; 0.5714)	(0.2857; 0.7143)
			0.5	0.5	(0.3333; 0.6667)	(0.1682; 0.8318)

Tabela 3.2: Resultados para o Exemplo 1

Os resultados apresentados na tabela 3.2 verificam que ambos os modelos com as incertezas convergem para a solução clássica. É preciso ressaltar que o Modelo de Maeda não admite a inserção de incertezas muito grandes, ou seja, os parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  devem ser pequenos, no intervalo de  $[0.1 - 0.5]$  para  $\lambda$  e  $[0.1 - 0.3]$  para  $\mu$ . Já, o modelo de Campos, independentemente do método de ranqueamento de números nebulosos escolhido, as soluções obtidas são idênticas às do modelo clássico.

**Exemplo 3.4.2.** 2- A matriz nebulosa de pagamentos é dada por:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (4, 0.5, 0.5) & (2, 0.5, 0.5) & (5, 0.5, 0.5) & (2, 0.5, 0.5) \\ (2, 0.5, 0.5) & (1, 0.5, 0.5) & (-1, 0.5, 0.5) & (-20, 0.5, 0.5) \\ (3, 0.5, 0.5) & (2, 0.5, 0.5) & (4, 0.5, 0.5) & (2, 0.5, 0.5) \\ (-16, 0.5, 0.5) & (10, 0.5, 0.5) & (16, 0.5, 0.5) & (1, 0.5, 0.5) \end{pmatrix}$$

Observando os resultados contidos na tabela 3.3, conclui-se que ambos convergem para a mesma solução, apesar de uma pequena variação no caso de Campos em relação ao caso

Campos			Maeda			
Método	$x$	$y$	$\lambda$	$\mu$	$x$	$y$
1	(0; 0; 0.9444; 0.0556)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)	0.1	0.1 - 1	(0; 0; 1; 0)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)
			0.2	0.1 - 1	(0; 0; 1; 0)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)
2	(0; 0; 0.9444; 0.0556)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)	0.3	0.1 - 1	(0; 0; 1; 0)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)
			0.4	0.1 - 1	(0; 0; 1; 0)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)
3	(0; 0; 0.9444; 0.0556)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)	0.5	0.1 - 1	(0; 0; 1; 0)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)
			0.6	0.1 - 1	(0; 0; 1; 0)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)
4	(0; 0; 0.9444; 0.0556)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)	0.7	0.1 - 1	(0; 0; 1; 0)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)
			0.8	0.1 - 1	(0; 0; 1; 0)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)
5	(0; 0; 0.9444; 0.0556)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)	0.9	0.1 - 1	(0; 0; 1; 0)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)
			1.0	0.1 - 1	(0; 0; 1; 0)	(0; 0.1111; 0; 0.8889)

Tabela 3.3: Resultados para o Exemplo 2

clássico. Quando se compara as soluções obtidas pelos modelos de Campos e Maeda com a solução no caso *crisp* é possível notar que a solução para o jogador 1 ( $x$ ) não é a mesma. Analisando as duas soluções para o caso clássico, percebe-se que o valor do jogo  $x^T A y$  é o mesmo para as soluções:  $x = (1, 0, 0, 0); y = (0; 0.1111; 0; 0.8889)$  e  $x = (0, 0, 1, 0); y = (0; 0.1111; 0; 0.8889)$ , possibilitando afirmar que as soluções são equivalentes.

**Exemplo 3.4.3.** 3- A matriz nebulosa de pagamentos é dada por:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (-1, 0.5, 0.5) & (1, 0.5, 0.5) & (2, 0.5, 0.5) & (0, 0.5, 0.5) \\ (4, 0.5, 0.5) & (-2, 0.5, 0.5) & (-3, 0.5, 0.5) & (2, 0.5, 0.5) \\ (0, 0.5, 0.5) & (3, 0.5, 0.5) & (1, 0.5, 0.5) & (-2, 0.5, 0.5) \end{pmatrix}$$

Método	Campos		Maeda			
	$x$	$y$	$\lambda$	$\mu$	$x$	$y$
1	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)	0.1	0.1 – 0.8	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)
			0.2	0.1 – 0.8	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)
2	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)	0.3	0.1 – 0.8	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)
			0.4	0.1 – 0.8	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)
3	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)	0.5	0.1 – 0.8	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)
			0.6	0.1 – 0.8	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)
4	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)	0.7	0.1 – 0.8	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)
			0.8	0.1 – 0.8	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)
5	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)	0.9	0.1 – 0.8	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)
			1.0	0.1 – 0.8	(0.6667; 0.2593; 0.0741)	(0.0741; 0.4444; 0; 0.4815)

Tabela 3.4: Resultados para o Exemplo 3



Os resultados do exemplo 3 apresentados na tabela 3.4 comprovam mais uma vez que os modelos analisados neste capítulo resolvem os jogos de soma nula nebulosos. Os modelos de Campos e Maeda convergem para a mesma solução que no caso clássico, possibilitando concluir que as incertezas inseridas no exemplo são perfeitamente compatíveis e aceitáveis.

**Exemplo 3.4.4.** *4-* A matriz nebulosa de pagamentos é dada por:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (180, 5, 5) & (156, 6, 6) \\ (90, 10, 10) & (180, 5, 5) \end{pmatrix}$$

Método	Campos		Maeda			
	$x$	$y$	$\lambda$	$\mu$	$x$	$y$
			0.1	0.1 - 1	(0.7875; 0.2125)	$\approx$ (0.21; 0.79)
1	(0.7895; 0.2105)	(0.2105; 0.7895)	0.2	0.1 - 1	(0.7880; 0.2120)	$\approx$ (0.21; 0.79)
			0.3	0.1 - 1	(0.7885; 0.2115)	$\approx$ (0.21; 0.79)
2	(0.7895; 0.2105)	(0.2105; 0.7895)	0.4	0.1 - 1	(0.7890; 0.2110)	$\approx$ (0.21; 0.79)
			0.5	0.1 - 1	(0.7895; 0.2105)	$\approx$ (0.21; 0.79)
3	(0.7888; 0.2112)	(0.2112; 0.7888)	0.6	0.1 - 1	(0.7899; 0.2101)	$\approx$ (0.21; 0.79)
			0.7	0.1 - 1	(0.7904; 0.2096)	$\approx$ (0.21; 0.79)
4	(0.7895; 0.2105)	(0.2105; 0.7895)	0.8	0.1 - 1	(0.7908; 0.2092)	$\approx$ (0.21; 0.79)
			0.9	0.1 - 1	(0.7912; 0.2088)	$\approx$ (0.21; 0.79)
5	(0.7906; 0.2094)	(0.2094; 0.7906)	1	0.1 - 1	(0.7917; 0.2083)	$\approx$ (0.21; 0.79)

Tabela 3.5: Resultados para o Exemplo 4

Este exemplo é o mesmo apresentado em (Maeda, 2003). Os resultados apresentados comprovam a eficiência de ambos os modelos e mostra, mais uma vez, a estabilidade do método de Maeda. As soluções foram muito próximas divergindo apenas em algumas casas decimais, mas se caso houvesse arredondamento essas seriam as mesmas para todos os métodos de ranqueamento do Modelo de Campos.

Em uma análise geral dos exemplos e resultados apresentados anteriormente, conclui-se que ambos os modelos são adequados para a resolução dos jogos de soma nula nebulosos. O modelo de Campos apresentou mais soluções diferentes daquelas já conhecidas pelo modelo clássico. Em (Maeda, 2003), o autor afirma que o seu modelo é mais geral que o de Campos, porque admite a inserção de qualquer incerteza e de quantidades diferentes de incertezas para cada um dos jogadores. Vale mencionar, ainda, que no trabalho original, (Maeda, 2003) apresenta a definição de equilíbrio para os JSNN.

## 3.5 Resumo

Este capítulo apresentou detalhadamente duas metodologias propostas na literatura para a determinação da solução dos jogos de soma nula nebulosos, onde as incertezas são números nebulosos triangulares.

A metodologia de Campos foi a primeira que surgiu na literatura para resolução destes tipos de jogos e as incertezas são tratadas através dos métodos de ranqueamento de números nebulosos. Já o modelo de Maeda determina o equilíbrio dos JSNN e as incertezas são tratadas através de uma parametrização da matriz de pagamentos. O modelo de Maeda é mais geral do que o modelo de Campos.

# Capítulo 4

## Jogos de Soma Não Nula Nebulosos

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, é proposta uma metodologia de solução dos jogos de soma não nula nebulosos através da resolução dos problemas de programação bilinear nebuloso (PBN). O problema de PBN é resolvido utilizando um algoritmo iterativo composto pela solução de dois problemas de programação linear nebulosos. As incertezas são adicionadas ao problema de PBN utilizando a teoria de conjunto nebulosos, através dos números triangulares nebulosos (Nascimento et al., 2004).

Um problema do mercado de energia é apresentado como aplicação, onde se tem dois geradores concorrendo para a produção de uma determinada quantidade de energia e as incertezas estão nos preços (Nascimento e Yamakami, 2004).

### 4.2 Metodologia de Solução de Jogos de Soma Não Nula Nebulosos

Nos jogos de soma não nula nebulosos (JSNNN), diferentemente dos jogos de soma nula, os jogadores podem obter ganhos/perdas iguais ou diferentes.

No capítulo 2, seção 2.3.2, os jogos de soma não nula clássicos foram descritos. Os jogos

tratados aqui, neste capítulo, são jogos de soma não nula nebulosos, em que as incertezas são tratadas através dos números triangulares nebulosos.

Seja o número triangular nebuloso  $\tilde{a} = (a, e_a, d_a)$ , onde  $a$  representa o valor modal,  $e_a$  a dispersão à esquerda e  $d_a$  a dispersão à direita.

Logo, as matrizes de pagamento de um JSNNN podem ser representadas da seguinte maneira:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1n} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{m1} & \tilde{b}_{m2} & \dots & \tilde{b}_{mn} \end{pmatrix}$$

### 4.2.1 Modelagem dos JSNNN

A formulação dos jogos de soma não nula nebulosos segue o mesmo modelo que no caso clássico e apenas difere em relação às matrizes,  $A$  e  $B$  que passam a ser  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ .

Seguindo a formulação dada no modelo clássico, o problema nebuloso pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T(\tilde{A} + \tilde{B})y + p + q \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & \tilde{A}y \geq -pl_m \\ & \tilde{B}^T x \geq -ql_n \\ & x^T l_m = 1 \\ & y^T l_n = 1 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Em (4.1), tem-se um problema de programação bilinear com coeficientes nebulosos. Ao aplicar a mesma abordagem de resolução apresentada em 2.3.2, é preciso reescrever o problema (4.1) numa forma que possibilite a aplicação do algoritmo de Bazaraa modificado. Então, seja:

$$u_f = \begin{pmatrix} y \\ p \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_f = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ q \end{pmatrix} \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{A} + \tilde{B} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{\mathbf{I}} \end{pmatrix}$$

onde  $x = [m \times 1]$ ,  $y = [n \times 1]$ ,  $p, q$  são escalares. Os vetores  $u_f$  e  $v_f$  denotam os vetores das variáveis de decisão do problema bilinear nebuloso.

Com as modificações propostas anteriormente, o problema (4.1) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & v_f^T \tilde{H} u_f \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & A_f u_f \geq \tilde{\mathbf{0}} \\ & B_f v_f \geq \tilde{\mathbf{0}} \\ & v_f^T E_f = \tilde{\mathbf{1}} \\ & u_f^T F_f = \tilde{\mathbf{1}} \\ & v_f^T C_f \geq \tilde{\mathbf{0}} \\ & u_f^T D_f \geq \tilde{\mathbf{0}} \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde:  $\tilde{\mathbf{1}} = (1, 0, 0)_{LR}$ ,  $\tilde{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)_{LR}$  e a matriz  $\tilde{\mathbf{I}}$  é a matriz identidade nebulosa, nomenclatura definida e usada apenas neste trabalho.

Exemplo: Matriz Identidade Nebulosa de ordem 2

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{1}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{1}} \end{pmatrix}$$

As matrizes do problema (4.2) são expressas por:

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{\mathbf{1}}_{m \times 1} & \tilde{\mathbf{0}}_{m \times 1} \end{pmatrix}, \quad B_f = \begin{pmatrix} \tilde{B}^T & \tilde{\mathbf{0}}_{n \times 1} & \tilde{\mathbf{1}}_{n \times 1} \end{pmatrix}, \quad C_f = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{I}}_{m \times m} \\ \tilde{\mathbf{0}}_{2 \times m} \end{pmatrix}, \\ D_f &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{I}}_{n \times n} \\ \tilde{\mathbf{0}}_{2 \times n} \end{pmatrix}, \quad E_f = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{1}}_{m \times 1} \\ \tilde{\mathbf{0}}_{2 \times 1} \end{pmatrix}, \quad F_f = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{1}}_{n \times 1} \\ \tilde{\mathbf{0}}_{2 \times 1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como o algoritmo (2.3.1) é iterativo, a resolução do problema de programação bilinear nebuloso se transforma na resolução de problemas de programação linear nebulosos em que os

coeficientes da função objetivo, da matriz de coeficientes tecnológicos (matriz  $A$ ) e do vetor de recursos (vetor  $b$ ) são números triangulares nebulosos. Portanto, os problemas a serem resolvidos a cada iteração são:

$$\begin{array}{ll}
 \min & u_f^T \tilde{H} v_f \\
 \text{sujeito a} & \\
 & A_f u_f \geq \tilde{0} \\
 & u_f^T D_f \geq \tilde{0} \\
 & u_f^T F_f = \tilde{1}
 \end{array} \quad (4.3)
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min & u_f^T \tilde{H} v_f \\
 \text{sujeito a} & \\
 & B_f v_f \geq \tilde{0} \\
 & v_f^T C_f \geq \tilde{0} \\
 & v_f^T E_f = \tilde{1}
 \end{array} \quad (4.4)$$

Os problemas (4.3) e (4.4) correspondem à representação mais geral de problemas de programação linear nebulosa.

### 4.3 Análise do Modelo

Nesta seção, uma metodologia para a resolução dos problemas de programação linear nebulosa representados por (4.3) e (4.4) será apresentada. De uma maneira geral, estes problemas podem ser representados por:

$$\begin{array}{ll}
 \max & \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \\
 \text{sujeito a} & \\
 & \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j < \tilde{b}_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{array} \quad (4.5)$$

onde os seguintes elementos nebulosos são considerados, ressaltando que  $F(R)$  é o conjunto dos números nebulosos:

- para cada linha (restrição)  $\exists \mu_i \in F(R)$  tal que  $\mu_i : R \rightarrow [0, 1], i = 1, \dots, m$ , a qual define o número nebuloso do lado direito;
- para cada  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ ,  $\exists \mu_{ij} \in F(R)$  tal que  $\mu_{ij} : R \rightarrow [0, 1]$ , define os números nebulosos da matriz de tecnologia (matriz  $A$ );
- para cada  $j = 1, \dots, n$   $\exists \mu_j \in F(R)$  tal que  $\mu_j : R \rightarrow [0, 1]$ , define os números nebulosos da função objetivo, e

- para cada coluna  $\exists \mu_i \in F(R)$  tal que  $\mu^i : F(R) \rightarrow [0, 1]$ , dado  $\forall x \in \mathfrak{R}^n$  o grau de realização do número nebuloso  $\tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 + \dots + \tilde{a}_{in}x_n, i = 1, \dots, m$ , com respeito à  $i$ -ésima restrição, que é a adequação entre este número nebuloso e o correspondente  $\tilde{b}_i$  com respeito à  $i$ -ésima restrição. Este grau de realização do número nebuloso significa quanto a solução encontrada foi violada em seus limites.

Em (Cadenas e Verdegay, 1995), existe uma proposta para resolução deste problema de programação linear nebulosa, que será utilizada neste trabalho.

Para resolver o problema (4.5), é preciso usar o modelo auxiliar descrito a seguir:

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{j=1}^n g_1(\tilde{c}_j)x_j \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \sum_{j=1}^n g_2(\tilde{a}_{ij})x_j < g_2(\tilde{b}_i) + g_2(\tilde{t}_i)(1 - \alpha) \\
 & x_j \geq 0, \\
 & i = 1, \dots, m \\
 & j = 1, \dots, n \\
 & \alpha \in [0, 1].
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde  $g_1$  e  $g_2$  são funções de ranqueamento, necessitando ser diferentes e  $g_2$  deve ser necessariamente linear.

Em (Cadenas e Verdegay, 1995), é sugerido que para a função  $g_1$  seja usado o índice de Adamo e para a função  $g_2$ , o índice de Yager.

No trabalho (Cadenas e Verdegay, 1995) o problema de programação linear nebulosa é de maximizar, logo a índice de Adamo é definido de tal maneira que seja coerente com a formulação. Como, aqui, o problema a ser resolvido possui uma função objetivo onde deseje-se minimizar, e considerando que  $\tilde{u}$  é um número triangular nebuloso da forma  $\tilde{u} = (u - e_u = \underline{u}, u, u + d_u = \bar{u})$ , logo temos que o índice de Adamo pode ser escrito da seguinte forma:

$$g_1(\tilde{u}) = \underline{u} - \lambda(\underline{u} - e_u)$$

Já a função de ranqueamento  $g_2$  é definida por:

$$g_2(\tilde{u}) = \frac{1}{3}(e_u + d_u + u)$$

Portanto, o problema (4.6) que resolve (4.5) pode ser escrito como:

$$\min \sum_{j=1}^n (\underline{c} - \lambda(\underline{c} - e_c))x_j$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{3} (e_{a_{ij}} + d_{a_{ij}} + a_{ij}) x_j < \frac{1}{3} (e_{b_i} + b_{a_i} + b_i) + \frac{1}{3} (e_{t_i} + d_{t_i} + t_i) (1 - \alpha), \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\alpha \in [0, 1].$$

(4.7)

A seguir, o significado das novas incógnitas e parâmetros do problema de programação linear nebuloso (4.6):

$\alpha$ , na formulação de (Zimmermann, 1985) representa o resultado de maior grau de pertinência da decisão ótima. Considerando que  $x$ , a variável de decisão do problema, satisfaz as restrições e a função objetivo, é possível dizer que:

$$\alpha = \max \min \{ \mu_R(x), \mu_0(x) \}$$

onde  $R$  representa o conjunto das restrições e  $0$  a função objetivo. Por  $\alpha$  representar o grau de pertinência, pertence ao intervalo  $[0, 1]$ .

Esta incógnita dá idéia de risco associado, ou seja, se  $\alpha$  estiver muito próximo de 1, as violações das restrições não são muito grandes, enquanto que, para valores pequenos de  $\alpha$ , há uma possibilidade bem maior das restrições serem violadas.

O parâmetro  $\tilde{t}_i$ , conforme (Carlsson e Korhonen, 1986), significa uma tolerância definida pelo decisor, que exprime a rigidez com que o problema é visto. Em (Campos, 1989),  $\tilde{t}_i$  é definido como as margens de tolerância estabelecidas pelos jogadores, para cada restrição. Quando este valor é definido pelo decisor, implicitamente se estabelece o risco associado à decisão final.

$\lambda$  é o parâmetro associado à função de ranqueamento de Adamo e representa o grau de otimismo-pessimismo do decisor, afirma (Ibáñez e Muñoz, 1989). Se o decisor estiver em uma situação favorável e for otimista preferirá obter o melhor resultado possível, logo  $\lambda = 1$ , caso contrário, se o decisor for pessimista,  $\lambda = 0$ . Caso a situação não seja favorável a ele, as



condições são invertidas, ou seja, para uma pessoa otimista  $\lambda = 0$  e para uma pessimista  $\lambda = 1$ .

Aplicando a metodologia descrita anteriormente, os problemas de programação linear que resolvem o jogo de soma não nula nebuloso para os jogadores 1 e 2, são descritos por:

$$\begin{aligned} & \min G_1(v^T \tilde{H})u \\ \text{sujeito a} & \\ & G_2(\tilde{a})u \geq G_2(\tilde{0}) + G_2(\tilde{t}_1)(1 - \alpha) \\ & G_2(\tilde{d})u \geq G_2(\tilde{0}) + G_2(\tilde{t}_2)(1 - \alpha) \\ & G_2(\tilde{f})u = G_2(\tilde{1}) + G_2(\tilde{t}_3)(1 - \alpha) \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} & \min G_1(u^T \tilde{H})v \\ \text{sujeito a} & \\ & G_2(\tilde{b})v \geq G_2(\tilde{0}) + G_2(\tilde{t}_1)(1 - \alpha) \\ & G_2(\tilde{c})v \geq G_2(\tilde{0}) + G_2(\tilde{t}_2)(1 - \alpha) \\ & G_2(\tilde{e})v = G_2(\tilde{1}) + G_2(\tilde{t}_3)(1 - \alpha) \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde  $t_2 = t_3 = (0, 0, 0)_{LR}$ ,  $G_1$  e  $G_2$  são uma representação generalizada das funções de ranqueamento  $g_1$  e  $g_2$ , ou seja,  $G_1 = \sum g_1$  e  $G_2 = \sum g_2$ . Estes valores definidos de  $t_2$  e  $t_3$  significa que as restrições correspondentes a estas tolerâncias são *crisp*/clássicas.

A seguir, um algoritmo do modelo de resolução dos JSNNN.

**Algoritmo 4.3.1.** *Algoritmo Proposto*

1. **Passo 1 - Inicialização:** Determinar as matrizes  $A$  e  $B$  com as respectivas matrizes de incertezas, e os pontos iniciais para as variáveis de decisão  $x$  e  $y$ .
2. **Passo 2:** Determinar as variáveis de decisão do problema convertido  $u$  e  $v$ , determinar as matrizes  $H$ ,  $H_e$  e  $H_d$ .
3. **Passo 3:** Inicializar os lucros (condições de parada),  $k = 0$  e número de iterações.
4. **Passo 4:** Resolver o problema de programação linear para o jogador 1 (4.8).
5. **Passo 5:** Obter  $u$

6. *Passo 6: Resolver o problema de programação linear para o jogador 2 (4.9).*
7. *Passo 7: Obter  $v$*
8. *Passo 8: Se a diferença entre os lucros (valor da função objetivo) for menor que uma tolerância ou número de iterações maior que um máximo, PARAR e ir para Passo 9. Caso contrário, volte ao Passo 4.*
9. *Passo 9: Quando o algoritmo parar, apresentar as soluções  $x, y, p, q, \alpha_1$  e  $\alpha_2$ .*

### 4.3.1 Teoremas e Resultados dos Jogos Nebulosos

Os jogos nebulosos tratados neste trabalho apresentam as incertezas em suas matrizes de pagamento. Estas incertezas, por sua vez, são representadas por números triangulares nebulosos. Nesta seção, apresentaremos alguns resultados obtidos quando adotamos números triangulares nebulosos com dispersões simétricas e nulas.

A motivação para a consideração de números triangulares com dispersões simétricas e nulas partiu do pressuposto de que se queria mostrar que dependendo do tipo de incertezas que são inseridas nos modelos teria-se o modelo clássico e os resultados para este tipo de problema poderiam ser obtidos através dos algoritmos clássicos.

Definem-se os números nebulosos triangulares da seguinte forma  $\tilde{a} = (a, e, d)_{LR}$ , onde  $a$  representa o valor modal,  $e$  a dispersão à esquerda e  $d$  a dispersão à direita. Então, o número triangular nebuloso é representado por  $\tilde{a} = (a, a - e, a + d)$ . Quando as dispersões à esquerda e à direita são nulas, o número triangular nebuloso se transforma em um número real na forma clássica ( $\tilde{a} = (a, 0, 0)_{LR} = (a, a - 0, a + 0) = (a, a, a)$ ).

A seguir, resultados importantes para os jogos de soma não nula nebulosos com matrizes  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  tendo como elementos números triangulares nebulosos com dispersões simétricas e nulas.

#### **Teorema 4.3.1. Teorema para os JSNNN**

*Seja o jogo de soma não nula nebuloso, onde as incertezas das matrizes  $\tilde{A}, \tilde{B}$  são números triangulares nebulosos com dispersões simétricas e nulas. Quando se utiliza a metodologia de*

resolução do algoritmo iterativo, os problemas de programação linear nebuloso se reduzem a problemas de programação linear clássicos.

**Demonstração 4.3.1.** *Seja o problema de programação bilinear nebuloso da forma:*

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x^T(\tilde{A} + \tilde{B})y + p + q \\
 \text{sujeito a} \quad & \\
 & \tilde{A}y \geq -pl_m \\
 & \tilde{B}^T x \geq -ql_n \\
 & x^T l_m = 1 \\
 & y^T l_n = 1 \\
 & x \geq 0 \\
 & y \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde as matrizes  $\tilde{A}, \tilde{B}$  são da seguinte forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (a_{11}, 0, 0) & (a_{12}, 0, 0) & \dots & (a_{1n}, 0, 0) \\ (a_{21}, 0, 0) & (a_{22}, 0, 0) & \dots & (a_{2n}, 0, 0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}, 0, 0) & (a_{m2}, 0, 0) & \dots & (a_{mn}, 0, 0) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} (b_{11}, 0, 0) & (b_{12}, 0, 0) & \dots & (b_{1n}, 0, 0) \\ (b_{21}, 0, 0) & (b_{22}, 0, 0) & \dots & (b_{2n}, 0, 0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_{m1}, 0, 0) & (b_{m2}, 0, 0) & \dots & (b_{mn}, 0, 0) \end{pmatrix},$$

Sabendo que cada número triangular nebuloso das matrizes é:  $(a_{ij}, a_{ij}-0, a_{ij}+0) = (a_{ij}, a_{ij}, a_{ij})$  e reescrevendo os problemas para que sejam depois resolvidos pelo algoritmo de Bazaraa (Bazaraa e Shetty, 1979) e aplicando a metodologia de Cadenas (Cadenas e Verdegay, 1995), teremos:

Na função objetivo:

$$g_1(\tilde{c}_{ij}) = c_{ij} - \lambda(c_{ij} - c_{ij}) = c_{ij}$$

E nas restrições, adotando  $t_i = (0, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_{ij} &\leq \widetilde{b}_{ij} + \widetilde{t}_{ij}(1 - \alpha) \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{a_{ij} + a_{ij} + a_{ij}}{3} &\leq \frac{b_{ij} + b_{ij} + b_{ij}}{3} + \frac{0 + 0 + 0}{3}(1 - \alpha) \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{3a_{ij}}{3} &\leq \frac{3b_{ij}}{3} + 0(1 - \alpha) \Rightarrow \\
a_{ij} &\leq b_{ij}
\end{aligned}$$

Os coeficientes que eram números triangulares nebulosos se reduziram a números reais e as restrições que possuíam coeficientes nebulosos de ambos os lados, também tiveram os números nebulosos reduzidos a números reais. Então, o problema de programação linear nebuloso se resume a um problema de programação bilinear, descrito por:

$$\begin{aligned}
\min \phi(x, y) &= c^T x + x^T H y + d^T y \\
\text{sujeito a} & \\
x &\in X \\
y &\in Y
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Sabe-se que este tipo de problema pode ser resolvido através da aplicação do algoritmo de Bazaraa. Portanto, a resolução de um problema de programação bilinear nebuloso, em que os coeficientes nebulosos são números triangulares nebulosos simétricos com dispersões nulas, se resume à resolução de um problema de programação bilinear clássico.

Para os jogos de soma nula nebulosos, as incertezas estão na matriz de pagamentos  $A$ . Se considerarmos na teoria clássica, um jogo de soma não nula com  $A = -B$  tem-se o seguinte colorário apresentado em (Basar e Olsder, 1982), que estabelece uma equivalência direta entre os jogos de soma nula de dois jogadores e os programas de programação linear.

**Colorário 4.3.1.** (Basar e Olsder, 1982) O par  $\{x^*, y^*\}$  constitui uma solução de equilíbrio de estratégias mistas para um jogo de soma nula de dois jogadores se, e somente se,  $\{x^*, y^*, p^*, q^*\}$  é solução do problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
& \min \quad p + q \\
& \text{sujeito a} \\
& \quad \tilde{A}y \geq -pl_m \\
& \quad \tilde{A}^T x \leq ql_n \\
& \quad x^T l_m = 1 \\
& \quad y^T l_n = 1 \\
& \quad x \geq 0 \\
& \quad y \geq 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Considerando um jogo de soma não nula nebuloso em que  $\tilde{B} = -\tilde{A}$ , observa-se que este se reduz ao de um jogo de soma nula clássico. Seja o seguinte teorema:

**Teorema 4.3.2.** *Seja um jogo de soma não nula nebuloso, em que  $\tilde{B} = -\tilde{A}$ , com números triangulares nebulosos de dispersões simétricas e nulas. Este jogo se reduz a um jogo de soma nula clássico podendo ser resolvido por métodos clássicos.*

**Demonstração 4.3.2.** *Seja o problema de programação bilinear nebuloso da forma:*

$$\begin{aligned}
& \min \quad x^T(\tilde{A} + \tilde{B})y + p + q \\
& \text{sujeito a} \\
& \quad \tilde{A}y \geq -pl_m \\
& \quad \tilde{B}^T x \geq -ql_n \\
& \quad x^T l_m = 1 \\
& \quad y^T l_n = 1 \\
& \quad x \geq 0 \\
& \quad y \geq 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Como  $\tilde{B} = -\tilde{A}$ , então as matrizes podem ser escritas da forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (a_{11}, 0, 0) & (a_{12}, 0, 0) & \dots & (a_{1n}, 0, 0) \\ (a_{21}, 0, 0) & (a_{22}, 0, 0) & \dots & (a_{2n}, 0, 0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}, 0, 0) & (a_{m2}, 0, 0) & \dots & (a_{mn}, 0, 0) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -(a_{11}, 0, 0) & -(a_{12}, 0, 0) & \dots & -(a_{1n}, 0, 0) \\ -(a_{21}, 0, 0) & -(a_{22}, 0, 0) & \dots & -(a_{2n}, 0, 0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{m1}, 0, 0) & -(a_{m2}, 0, 0) & \dots & -(a_{mn}, 0, 0) \end{pmatrix},$$

Reescrevendo o problema 4.1, temos:

$$\begin{aligned} & \min \quad p + q \\ & \text{sujeito a} \\ & \quad \tilde{A}y \geq -pl_m \\ & \quad \tilde{A}^T x \leq ql_n \\ & \quad x^T l_m = 1 \\ & \quad y^T l_n = 1 \\ & \quad x \geq 0 \\ & \quad y \geq 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Observando o problema resultante descrito acima, é possível observar que o problema de programação bilinear nebulosa se reduziu a um problema de programação linear nebulosa. Logo, aplicando a metodologia de Cadenas para as restrições, como descrita no apêndice B, teremos o problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
& \min \quad p + q \\
& \text{sujeito a} \\
& Ay \geq -pl_m \\
& A^T x \leq ql_n \\
& x^T l_m = 1 \\
& y^T l_n = 1 \\
& x \geq 0 \\
& y \geq 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

*Este problema é descrito pelo (Corolário 4.3.1). Portanto, a resolução de um jogo de soma não-nula nebuloso, onde as incertezas são representadas por números triangulares nebulosos simétricos e de dispersões nulas, se resume a resolução de um um jogo de soma nula.*

## 4.4 Implementações e Resultados

As implementações referentes aos jogos de soma não nula nebulosos foram desenvolvidas também em Matlab<sup>®</sup>. E como já citado no capítulo anterior, esta linguagem foi definida pela facilidade com que o candidato tinha em desenvolver os modelos neste ambiente de programação. Funções auxiliares foram criadas para o tratamento das diferentes partes no algoritmo principal. Entre elas, as principais são:

**lpfuzzy**: os parâmetros de entrada desta função são os coeficientes da função objetivo, a matriz de pagamentos nebulosa e os coeficientes do lado direito das inequações ( $b_i$ ). O índice de Adamo é aplicado aos coeficientes da função objetivo, já o índice de Yager é aplicado a matriz de pagamentos e aos  $b_i$ 's. Em seguida,  $c$ ,  $A$  e  $b$  crisp são passados como parâmetros para a função do Matlab  $lp$ , responsável pela resolução dos problemas de programação linear.

**solveYmodfuzzy** e **solveZmodfuzzy**: estas funções têm como parâmetros de entrada  $u$ ,  $\tilde{B}$  e  $\tilde{H}$  e  $v$ ,  $\tilde{A}$  e  $\tilde{H}$ , respectivamente. Operações para se determinar  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{A}$  e  $\tilde{b}$  para PL Nebuloso são feitas e depois estes dados são passados como parâmetros para função **lpfuzzy**. A saída

destas funções são:  $v$ ,  $\alpha_1$  e  $u$ ,  $\alpha_2$ .

`solveBilinearFuzzyBazaraa`: função principal, em que os dados do problema bilinear nebuloso são fornecidos. O algoritmo proposto é executado com auxílio das funções descritas anteriormente.

A seguir, alguns exemplos modificados em relação a inserção de incertezas, com os respectivos resultados foram retirados de fontes da literatura como (Basar e Olsder, 1982), (Mangasarian e Stone, 1964) e (Campos, 1989).

#### 4.4.1 Resultados

Para os exemplos e resultados apresentados a seguir foram usados os seguintes valores:

$$\text{Índice de Adamo } \lambda = 0.5$$

$$t_1 = (0.01; 0.01; 0.01)$$

$$x_T = y_T = (0.4; 0.6)$$

$$x_M = y_M = (0.1667; 0.1667; 0.1667; 0.1667; 0.1667; 0.1667)$$

$$x_C = y_C = (0.5; 0.5)$$

**Exemplo 4.4.1.** (Basar e Olsder, 1982) As matrizes de pagamentos são:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A solução deste problema no caso clássico é:  $x = y = (0.5; 0.5)$ . As incertezas introduzidas são simétricas e podem ser divididas em 4 casos. São eles:

**Caso 1:**

$$A_e = A_d = B_e = B_d = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

**Caso 2:**

$$A_e = A_d = B_e = B_d = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$



**Caso 3:**

$$A_e = A_d = B_e = B_d = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 0.75 \end{pmatrix}$$

**Caso 4:**

$$A_e = A_d = B_e = B_d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
<i>Caso 1</i>	(0.495; 0.495)	(0.495; 0.495)	-0.5675	-1.4750	2.8694e - 019	2.8694e - 019
<i>Caso 2</i>	(0.495; 0.495)	(0.495; 0.495)	-0.4850	-1.4750	2.8518e - 019	2.8518e - 019
<i>Caso 3</i>	(0.495; 0.495)	(0.495; 0.495)	-0.4025	-1.4750	2.8273e - 019	2.8273e - 019
<i>Caso 4</i>	(0.495; 0.495)	(0.495; 0.495)	-0.3200	-1.4750	2.7905e - 019	2.7905e - 019

*Tabela 4.1: Resultados para o Exemplo 1*

Os resultados obtidos neste exemplo para todos os casos são muito próximos dos resultados do problema clássico. As diferenças estão nos valores de  $p$  e  $q$ . A incógnita  $p$  tem uma maior variação e através dos valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  é possível notar que todas as incertezas inseridas nos problemas foram aceitas e incorporadas ao problema.

**Exemplo 4.4.2.** (*Basar e Olsder, 1982*) As matrizes  $A_c$  e  $B_c$  são as mesmas do exemplo anterior, mas as matrizes de incertezas são geradas aleatoriamente e dividem-se em 4 casos.

**Caso 1:** Incertezas aleatórias, de 5%.

$$A_e = \begin{pmatrix} 0.03 & 0 \\ 0.08 & -0.01 \end{pmatrix} \quad A_d = \begin{pmatrix} 0.03 & 0 \\ 0.05 & -0.04 \end{pmatrix}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 0.06 & 0.08 \\ 0 & 0.03 \end{pmatrix} \quad B_d = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.01 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

**Caso 2:** Incertezas aleatórias, de 10%.

$$A_e = \begin{pmatrix} 0.10 & 0 \\ 0.02 & -0.04 \end{pmatrix} \quad A_d = \begin{pmatrix} 0.08 & 0 \\ 0.13 & -0.01 \end{pmatrix}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 0.26 & 0.15 \\ 0 & 0.06 \end{pmatrix} \quad B_d = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.08 \\ 0 & 0.03 \end{pmatrix}$$

**Caso 3:** Incertezas aleatórias, de 15%.

$$A_e = \begin{pmatrix} 0.09 & 0 \\ 0.29 & -0.05 \end{pmatrix} \quad A_d = \begin{pmatrix} 0.12 & 0 \\ 0.02 & -0.08 \end{pmatrix}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 0.39 & 0.20 \\ 0 & 0.07 \end{pmatrix} \quad B_d = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.02 \\ 0 & 0.08 \end{pmatrix}$$

**Caso 4:** Incertezas aleatórias, de 20%.

$$A_e = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 0.28 & -0.15 \end{pmatrix} \quad A_d = \begin{pmatrix} 0.12 & 0 \\ 0.38 & -0.15 \end{pmatrix}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 0.37 & 0.36 \\ 0 & 0.13 \end{pmatrix} \quad B_d = \begin{pmatrix} 0.07 & 0.30 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Os resultados obtidos são:

	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
<i>Caso 1</i>	(0.4975; 0.4925)	(0.4844; 0.5056)	-0.6483	-1.4498	2.9468e - 019	2.8655e - 019
<i>Caso 2</i>	(0.4876; 0.5024)	(0.4958; 0.4942)	-0.6239	-1.4593	2.8790e - 019	2.9271e - 019
<i>Caso 3</i>	(0.5046; 0.4854)	(0.5008; 0.4892)	-0.6476	-1.4524	2.8462e - 019	2.8250e - 019
<i>Caso 4</i>	(0.5002; 0.4898)	(0.5081; 0.4819)	-0.6486	-1.4635	2.8027e - 019	2.8498e - 019

Tabela 4.2: Resultados para o Exemplo 2

Como no exemplo anterior, os resultados obtidos neste exemplo são muito próximos do caso sem incertezas. Existe uma variação na incógnita  $p$ , já que no clássico  $p = 0.5$  e  $q = 1.5$ . Todas as incertezas são incorporadas ao problema.

**Exemplo 4.4.3.** (Mangasarian e Stone, 1964) As matrizes de pagamentos são:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1.0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0.02 & -0.08 & -0.18 & -0.32 & -0.50 \\ 0 & 0.02 & 0 & -0.06 & -0.16 & -0.30 \\ 0 & 0.06 & 0.08 & 0.06 & 0 & -0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.16 & 0.18 & 0.16 & 0.10 \\ 0 & 0.14 & 0.24 & 0.30 & 0.32 & 0.30 \\ 0 & 0.16 & 0.32 & 0.42 & 0.48 & 0.50 \end{pmatrix}$$

A solução clássica deste jogo é:  $x = (0.5; 0; 0; 0; 0; 0.5)$  e  $y = (0; 0; 0.5; 0.5; 0; 0)$ . Como no exemplo (4.4.1), aqui também serão analisados 4 casos, descritos a seguir.

**Caso 1:**  $A_e = A_d = 0.25 * I_{m \times m}$

**Caso 2:**  $A_e = A_d = 0.5 * I_{m \times m}$

**Caso 3:**  $A_e = A_d = 0.75 * I_{m \times m}$

**Caso 4:**  $A_e = A_d = I_{m \times m}$

Os resultados são:

	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
Caso 1	(0.5; 0; 0; 0; 0; 0.5)	(0; 0; 0.5; 0.5; 0; 0)	-0.5833	0.0000	1	1
Caso 2	(0.5; 0; 0; 0; 0; 0.5)	(0; 0; 0.5; 0.5; 0; 0)	-0.5000	0.0000	1	1
Caso 3	(0.5; 0; 0; 0; 0; 0.5)	(0; 0; 0.5; 0.5; 0; 0)	-0.4167	0.0000	1	1
Caso 4	(0.5; 0; 0; 0; 0; 0.5)	(0; 0; 0.5; 0.5; 0; 0)	-0.3333	0.0000	1	1

Tabela 4.3: Resultados para o Exemplo 3

As soluções obtidas para este exemplo foram iguais ao caso clássico para as variáveis  $x$  e  $y$ . No caso clássico  $p = -0.5$ , os resultados obtidos para  $p$  com incertezas estão próximos do valor clássico nos casos 1, 2 e 3. A variável  $q$  apresentou o mesmo valor nos 4 casos, valor este bem diferente do caso clássico que é  $-0.12$ .

As incertezas do parâmetro  $\tilde{t}_1$  não foram incorporadas aos problemas. Esta conclusão é dada através dos valores  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  que são iguais a 1.

**Exemplo 4.4.4.** (Mangasarian e Stone, 1964) As matrizes  $A_c$  e  $B_c$  são as mesmas do exemplo anterior, mas as matrizes de incertezas são geradas aleatoriamente e dividem-se em 4 casos.

**Caso 1:** Incertezas aleatórias, de 5%.

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.02 & 0.04 \\ 0.01 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0.02 & 0.02 & 0 & 0 & 0.01 & 0.01 \\ 0.03 & 0.02 & 0.02 & 0.01 & 0 & 0.01 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.02 & 0.01 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.02 & 0.01 & 0.02 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.02 \\ 0.03 & 0.01 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0.01 \\ 0.02 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.02 & 0 & 0.02 & 0.01 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 \end{pmatrix}, \quad B_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

**Caso 2:** Incertezas aleatórias, de 10%.

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0.01 & 0 & 0.02 & 0.07 & 0.03 \\ 0.01 & 0 & 0.01 & 0.03 & 0.04 & 0.03 \\ 0.01 & 0.02 & 0 & 0.02 & 0.02 & 0.06 \\ 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0.01 \\ 0.02 & 0.03 & 0.02 & 0.01 & 0 & 0.01 \\ 0.05 & 0.02 & 0.03 & 0 & 0.01 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.01 & 0.03 & 0.05 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0.01 & 0.03 \\ 0.03 & 0.01 & 0 & 0.02 & 0.02 & 0.04 \\ 0.02 & 0.02 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0.02 \\ 0.05 & 0.03 & 0.04 & 0.01 & 0 & 0.01 \\ 0.07 & 0.01 & 0.03 & 0.03 & 0.01 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.01 & -0.01 & -0.02 & -0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.02 & 0.00 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.02 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \end{pmatrix}, \quad B_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & -0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 & 0.02 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.02 & 0.03 & 0.03 & 0.04 \end{pmatrix}$$

**Caso 3:** Incertezas aleatórias, de 15%.

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0.01 & 0.03 & 0.07 & 0.05 & 0.11 \\ 0.01 & 0 & 0.01 & 0.05 & 0.09 & 0 \\ 0.05 & 0.01 & 0 & 0.02 & 0.03 & 0.09 \\ 0 & 0.05 & 0.01 & 0 & 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0.05 & 0.02 & 0.01 & 0 & 0.02 \\ 0.08 & 0.09 & 0.07 & 0.04 & 0.01 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_d = \begin{pmatrix} 0 & 0.03 & 0.05 & 0.01 & 0.06 & 0.09 \\ 0.01 & 0 & 0.01 & 0.05 & 0.05 & 0.07 \\ 0.06 & 0.02 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.03 \\ 0.07 & 0.02 & 0.03 & 0 & 0.03 & 0.03 \\ 0.10 & 0.03 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.05 & 0.00 & 0.06 & 0.03 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.01 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & -0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.02 & 0.02 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0.02 & 0.04 & 0.03 & 0.02 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0.01 & 0 & 0.04 \end{pmatrix}, \quad B_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.01 & -0.01 & -0.03 & -0.04 \\ 0 & 0 & 0 & -0.01 & -0.02 & -0.00 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0 & -0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.02 & 0.02 & 0.04 & 0.03 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 & 0.06 & 0.04 & 0.05 \end{pmatrix}$$

**Caso 4:** Incertezas aleatórias, de 20%.

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.08 & 0.06 & 0.11 & 0.15 \\ 0.01 & 0 & 0.03 & 0 & 0.07 & 0.04 \\ 0.02 & 0.03 & 0 & 0.03 & 0.05 & 0.06 \\ 0.08 & 0.07 & 0.01 & 0 & 0.03 & 0.01 \\ 0.04 & 0.05 & 0.05 & 0 & 0 & 0.03 \\ 0.13 & 0.08 & 0.10 & 0.01 & 0.04 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_d = \begin{pmatrix} 0 & 0.01 & 0.02 & 0.03 & 0.15 & 0.13 \\ 0.00 & 0 & 0.04 & 0.07 & 0.07 & 0.13 \\ 0.06 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.07 \\ 0.08 & 0 & 0.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0.08 & 0.08 & 0.04 & 0.01 & 0 & 0.01 \\ 0.20 & 0.15 & 0.11 & 0.06 & 0.01 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.01 & -0.01 & -0.01 & -0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.03 & -0.05 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0.01 & 0.03 & 0.01 & 0.01 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0.04 & 0.01 & 0.06 \\ 0 & 0.01 & 0.01 & 0.02 & 0.01 & 0.07 \end{pmatrix}, \quad B_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.02 & -0.02 & -0.01 & -0.06 \\ 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & -0.06 \\ 0 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0 & -0.01 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0.01 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0.04 & 0.02 & 0.04 & 0.05 \\ 0 & 0.02 & 0.01 & 0.05 & 0.02 & 0.03 \end{pmatrix}$$

	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
<i>Caso 1</i>	(0.5; 0; 0; 0; 0; 0.5)	(0; 0; 0.5; 0.5; 0; 0)	-0.66	0.0000	1	1
<i>Caso 2</i>	(0.5; 0; 0; 0; 0; 0.5)	(0; 0; 0.5; 0.5; 0; 0)	-0.66	0.0000	1	1
<i>Caso 3</i>	(0.49; 0; 0.01; 0; 0; 0.51)	(0; 0; 0.49; 0.51; 0; 0)	-0.64	0.0000	1	1
<i>Caso 4</i>	(0.49; 0; 0.01; 0; 0; 0.49)	(0; 0; 0.49; 0.51; 0; 0)	-0.64	0.0000	1	1

*Tabela 4.4: Resultados para o Exemplo 4*

Os resultados obtidos para os casos 1 e 2 são iguais ao caso clássico em relação às variáveis  $x$  e  $y$ . Nos casos 3 e 4, as soluções são um pouco diferentes das clássicas. O valor de  $p$  é bem diferente do valor clássico e as incertezas não são incorporadas aos problemas ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ).

**Exemplo 4.4.5.** *Maeda (2003) onde  $\tilde{A} = -\tilde{B}$  e a matriz de pagamentos é dada por:*

$$A_c = \begin{pmatrix} 180 & 156 \\ 90 & 180 \end{pmatrix}, \quad A_e = A_d = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x^* = (0.7800; 0.2100)$$

$$y^* = (0.2113; 0.7887)$$

$$p^* = -163.0010$$

$$q^* = -163.3100$$

$$\alpha_1^* = 0$$

$$\alpha_2^* = 0$$

Para este exemplo, as soluções obtidas através do algoritmo proposto são muito próximas das soluções obtidas no exemplo (3.4.4), o que mostra que o algoritmo proposto pode ser utilizado para a resolução de jogos de soma nula e não nula nebulosos.

## 4.5 Aplicação

Os serviços públicos de energia elétrica de todo o mundo estão sendo submetidos a mudanças radicais nas estruturas reguladoras e no mercado. Uma tendência deste processo de reestruturação é promover a participação de agentes privados no processo de produção de energia, que historicamente esteve sob o controle do estado.

Esta mudança está se tornando factível pelos avanços na tecnologia de produção. Historicamente, geração é naturalmente um monopólio imposto pelo tamanho da planta (tamanho da usina), a qual é cada vez maior com o aumento da demanda. Entretanto, inovações tecnológicas estão tornando turbinas a gás mais eficientes, juntamente com o declínio natural do preço do gás e também com a redução dos custos para a construção de novas plantas. Como consequência disso, o mundo experimentou um enorme crescimento na construção de plantas com capacidade pequena, as quais possuem preços baratos e são mais eficientes.

Todas essas mudanças abriram uma maneira de competição na geração. Diversos mercados ao redor do mundo como: Chile, Inglaterra, Argentina, Colômbia, Nova Zelândia e algumas regiões dos Estados Unidos, em particular a Califórnia, entraram no processo de privatização e/ou reestruturação. (Kelman et al., 2001)

No caso do Brasil não é diferente, pois o setor energético vêm passando por diversas mudanças e reestruturações para que seja possível estabelecer competição entre os geradores e compradores. O Sistema Interligado Nacional é um sistema hidrotérmico de grande porte, com forte predominância de usinas hidroelétricas e com múltiplos proprietários. O Sistema Interligado Nacional é formado pelas empresas das regiões Sul, Sudeste, Centro-Oeste, Nordeste e parte da região Norte.

O Operador Nacional do Sistema Elétrico concentra sua atuação sobre o Sistema Interligado Nacional, que ao final de 2002 correspondia a uma capacidade geradora instalada de 72.843 MW, distribuídos entre os diferentes tipos de geração. A tabela abaixo ilustra a potência instalada em usinas - MW:

Tipo de Geração	Produção	%
Hidroelétricas	57.534	78,98
Térmicas	7.002	9,61
Nuclear	2.007	2.76
Itaipu 50 %	6.300	8.65
Total	72.843	100

Tabela 4.5: Potência Instalada em Usinas no Brasil (MW)

A maior parte da capacidade instalada é composta por usinas hidroelétricas, que se distribuem em 12 diferentes bacias hidrográficas nas diferentes regiões.

Desde meados da década de 70, o sistema eletroenergético brasileiro é operado de forma coordenada, visando obter ganhos sinérgicos a partir da interação dos agentes. A operação coordenada visa minimizar os custos globais de produção de energia elétrica, contemplando restrições intra e extra-setoriais e aumentando a confiabilidade do atendimento.

Em períodos de condições hidrológicas desfavoráveis, as usinas térmicas contribuem para o atendimento ao mercado como um todo, e não apenas aos consumidores de sua empresa proprietária. Assim, a participação complementar das usinas térmicas no atendimento do mercado consumidor exige interconexão e integração dos agentes.

Com o atual processo de desverticalização e privatização das empresas, o número de agentes aumentou significativamente, bem como o nível de competição entre eles. Ainda assim

a otimização do uso dos recursos de geração e transmissão disponíveis se impõe, pelos benefícios que é capaz de produzir, tanto para os agentes setoriais como para o conjunto dos consumidores. A exploração coordenada dos recursos hidro e termoeletricos permite que se maximize a disponibilidade e a confiabilidade do suprimento, com redução dos custos para os consumidores.

Em 2002, o Operador Nacional cumpriu sua missão institucional de orquestrar os recursos colocados à sua disposição pelas empresas de geração e transmissão, harmonizando a otimização econômica do despacho hidrotérmico com a segurança operativa das redes de transmissão. A situação de recursos hídricos inferiores à média histórica, exigiu do ONS uma gestão cuidadosa dos reservatórios das usinas hidrelétricas, compatibilizando o uso múltiplo da água na produção de energia, navegação, abastecimento e questões ambientais, o que demandou grande interação com a ANEEL, ANA, organismos federais e estaduais, e também com os agentes associados.

A participação da geração térmica na produção total de energia chegou a alcançar 9,02% com o despacho das usinas nos níveis de geração indicados pela estratégia de otimização dos recursos existentes.

Mas, onde se contextualiza a teoria de jogos no mercado de energia? Os jogos não-cooperativos, motivo de estudo ao decorrer deste trabalho, são a fundação para alguns modelos clássicos de oligopólio, ou seja, modelos onde uma minoria de grandes empresas controlam o mercado de energia. O estudo de oligopólios é essencial para o estudo do mercado de energia.

Existem dois modelos básicos de oligopólio que são: o duopólio de Cournot e o duopólio de Bertrand. O primeiro modelo envolve duas empresas que produzem a mesma quantidade de um certo produto e devem decidir o preço da produção. A estratégia de cada firma é maximizar seu rendimento sem tomar conhecimento da decisão de seu oponente. Já, no modelo de Bertrand cada empresa escolhe o preço no qual está disposta a produzir.

Em (Singh, 1999), o mercado de energia é definido como a habilidade do participante no mercado em aumentar preços acima do nível de competição restringindo a saída ou a entrada. Neste trabalho, Singh ilustra o mercado de energia como um modelo simples de Cournot, onde existe a competição entre dois geradores e pode ou não haver contratos de diferenças.



Singh afirma que a teoria de jogos pode ser usada para o estudo dos efeitos dos *contratos de diferenças* no incentivo ao aumento de preços. O propósito dos contratos de diferenças é isolar o fornecedor contra as variações de preços no mercado durante um determinado período. Existem dois tipos de contratos de diferenças que são: *one-way* ou *two-way*.

O contrato do tipo *one-way* é similar aos contratos financeiros de opção. Inclui uma taxa de opção em adição ao preço corrente e depende da quantidade contratada. Diferentes pagamentos podem ser feitos caso o preço da bolsa aumente acima do preço corrente. Já os contratos do tipo *two-way* são similares aos contratos financeiros de futuro, em que são definidos preços em termos do preço de leilão que depende do preço corrente e da quantidade contratada.

O mercado de energia em (Singh, 1999) foi modelado por um jogo do dilema do prisioneiro, onde exemplos fictícios de termoelétricas serão estudados com a inclusão de incertezas. Neste trabalho generalizou-se o uso de qualquer tipo de jogos nebulosos no mercado de energia elétrica, com o objetivo maior de mostrar uma das inúmeras aplicações desta teoria, a teoria de jogos nebulosos.

#### 4.5.1 Exemplos (Singh, 1999)

(Singh, 1999) utiliza um exemplo simples de Cournot com dois geradores ( $A$  e  $B$ ) e uma carga, como mostrado na figura (4.1), para enfatizar como os contratos de diferenças incentivam o aumento dos preços.

Cada um dos geradores tem um custo de  $\$10\backslash\text{MWh}$  e uma saída máxima de 75MW. A decisão estratégica para os geradores é escolher a carga que maximize os rendimentos. O preço é determinado pela curva de demanda, como mostrado na figura 4.1. Cada gerador pode escolher entre dois tipos de carga: um nível alto de 75MW ou um nível baixo de 20MW, como mostrado na tabela a seguir (4.6).

Na tabela (4.6), o valor destacado igual a 75 representa o valor da quantidade de energia a ser produzida pelos geradores caso o Gerador A escolha a estratégia *Alta* e o Gerador B

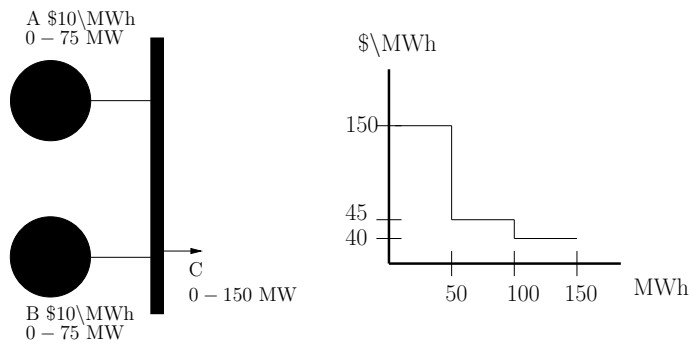


Figura 4.1: Jogo de dois geradores

Saída (MW)		Gerador B		
		Alta	Baixa	
Gerador A	Alta	75	75	Saída de A
		75	20	Saída de B
	Baixa	20	20	Saída de A
		75	20	Saída de B

Tabela 4.6: Decisões de saída de A e B

escolha a estratégia *Baixa*.

Preço (\$/MW)		Gerador B	
		Alta	Baixa
Gerador A	Alta	40	45
	Baixa	45	150

Tabela 4.7: Preços correspondentes às decisões de saída

Para o cálculo do lucro máximo líquido, Singh utiliza as seguintes expressões:

$$L_l = Q * P - C * Q \quad (4.16)$$

$$L_{lc} = Q * P - C * Q - (Q_c - Q)(P - P_{ec}) \quad (4.17)$$

onde  $L_l$  é o lucro líquido,  $Q$  é a quantidade produzida (MWh),  $Q_c$  é a quantidade de energia contratada,  $P$  é o preço do MWh (\$/MWh),  $P_{ec}$  é o preço da energia contratada e  $C$  é o custo de produção.

A equação (4.16) representa o lucro líquido nos cenários em que não existe contratos de diferenças, já a equação (4.17) representa o lucro líquido nas situações com contratos.

(Singh, 1999) exemplifica os contratos de diferenças com duas quantidades de saída que são: 30MW e 10MW e o preço da energia para os dois contratos é de \$40/MWh.

Ao aplicarmos as equações (4.16) e (4.17), são obtidas as seguintes tabelas de rendimentos ou lucros líquidos e em negrito estão representadas as soluções ótimas:

Rendimento (\$)		Gerador B		
		Alta	Baixa	
Gerador A	Alta	2250	2625	Rendimento de A
		2250	700	Rendimento de B
	Baixa	700	<b>2800</b>	Rendimento de A
		2625	<b>2800</b>	Rendimento de B

Tabela 4.8: Rendimentos sem contratos de diferenças (Cfd)

Rendimento (\$)		Gerador B		
		Alta	Baixa	
Gerador A	Alta	<b>2250</b>	2475	Rendimento de A
		<b>2250</b>	550	Rendimento de B
	Baixa	550	-500	Rendimento de A
		2475	-500	Rendimento de B

Tabela 4.9: Rendimentos com contratos de diferenças (Cfd) de 30MW

Rendimento (\$)		Gerador B		
		Alta	Baixa	
Gerador A	Alta	<b>2250</b>	2575	Rendimento de A
		<b>2250</b>	650	Rendimento de B
	Baixa	650	1700	Rendimento de A
		2575	1700	Rendimento de B

Tabela 4.10: Rendimentos com contratos de diferenças (Cfd) de 10MW

Na seção seguinte, serão apresentados os exemplos fictícios das termoelétricas, onde serão empregados os conceitos e algoritmos desenvolvidos no decorrer deste trabalho para a resolução de tais problemas.

### 4.5.2 Exemplo Proposto

A aplicação apresentada nesta seção é um exemplo fictício em que existem dois geradores, onde cada um deles produz no mínimo 100MW e no máximo 250MW, sendo que a produção conjunta varia entre 200MW a 500MW. Os geradores são distribuídos em três categorias que são determinadas pelo combustível utilizado para a geração de energia elétrica, ou seja: carvão, óleo ou gás.

As incertezas do exemplos estão inseridas nas matrizes de preços, que estão divididas em:

- ou os dois geradores produzem uma certa quantidade de energia a um determinado preço;
- ou cada gerador tem seu próprio preço para uma dada quantidade de energia.

A quantidade de energia convertida por cada gerador é a mesma, independente do tipo de combustível usado, e a única variação entre os diferentes casos é a matriz de preços (ou matriz de pagamentos). Essas quantidades estão representadas nas seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 150 \\ 180 & 250 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 100 & 130 \\ 200 & 250 \end{pmatrix}$$

Cada tipo de gerador tem um custo para a produção de cada MW. Os custos estão determinados na tabela 4.11:

Tipo de Gerador	Custo de produção (\$/MW)
Carvão	R\$15,00
Óleo	R\$30,00
Gás	R\$20,00

Tabela 4.11: Custo de Produção para os diferentes Geradores (\$/MW)

Como no exemplo de (Singh, 1999), nos 3 casos desta aplicação podem existir ou não contratos de diferenças (Cfd). Se caso existir Cfd, então a quantidade de energia contratada é de 150MW e o preço dessa energia é determinado pela tabela 4.12:

Tipo de Combustível	Preço da Energia Contratada (R\$/MW)	
	Geradores com Preços Iguais	Geradores com Preços Diferentes
Carvão	120,00	100,00
Óleo	250,00	230,00
Gás	150,00	130,00

Tabela 4.12: Preços da Energia Contratada (R\$/MW)

As matrizes de preços ou de pagamentos para os geradores são:

Carvão X Carvão					
Preços Iguais			Preços Diferentes		
Gerador A = Gerador B			Gerador A		Gerador B
120	135		160	130	170 150
135	90		115	95	100 105

Tabela 4.13: Preços para os Geradores a Carvão

Óleo X Óleo					
Preços Iguais			Preços Diferentes		
Gerador A = Gerador B			Gerador A		Gerador B
250	225		300	270	280 250
225	190		250	210	230 200

Tabela 4.14: Preços para os Geradores a Óleo

Gás X Gás					
Preços Iguais			Preços Diferentes		
Gerador A = Gerador B		Gerador A	Gerador B		
150	170	165	150	155	140
170	130	125	130	120	100

Tabela 4.15: Preços para os Geradores a Gás

As incertezas inseridas nesta aplicação seguem o mesmo modelo dos exemplos apresentados na seção 4.4.1, ou seja, as incertezas são simétricas e são sempre da forma

$$\text{valor} = \text{incerteza} * I_{m \times m} \quad (4.18)$$

$$\text{Incerteza Total} = I_{m \times m} + \text{valor} \quad (4.19)$$

Como o objetivo dos geradores é de maximização dos lucros líquidos, o problema de programação bilinear que resolve um jogo de soma não nula nebuloso com este objetivo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & x^T(\tilde{A} + \tilde{B})y - p - q \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & \tilde{A}y \leq pl_m \\ & \tilde{B}^T x \leq ql_n \\ & x^T l_m = 1 \\ & y^T l_n = 1 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Os resultados apresentados para cada um dos geradores, nas tabelas (4.16), (4.17) e (4.18) são os problemas resolvidos com incertezas nulas, ou seja, o problema clássico, considerando as incertezas de tolerância ( $\tilde{t}_i$ ). As matrizes de lucros para cada um dos geradores não serão apresentadas aqui, mas podem ser obtidas através das equações (4.19). Mesmo quando são resolvidos os exemplos com incertezas nulas, o valor do parâmetro  $\tilde{t}_1$  é mantido, por isso os valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são diferentes de 1.

Carvão X Carvão						
SEM CONTRATOS						
Preços Iguais						
Incertezas	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
0	(0,1)	(0.5072, 0.4928)	18.909	17.512	0	0
Preços Diferentes						
0	(0,1)	(1,0)	20.000	17.676	0	1
COM CONTRATOS						
Preços Iguais						
0	(1,0)	(0,1)	19.504	23.250	1	0
Preços Diferentes						
0	(0,1)	(1,0)	20.750	22.084	0	0

Tabela 4.16: Resultados para os Geradores a Carvão sem Incertezas

Óleo X Óleo						
SEM CONTRATOS						
Preços Iguais						
Incertezas	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
0	(0,1)	(1,0)	40.000	25.457	0	1
Preços Diferentes						
0	(0,1)	(1,0)	45.000	28.747	0	1
COM CONTRATOS						
Preços Iguais						
0	(0,1)	(1,0)	49.000	28.172	0	1
Preços Diferentes						
0	(1,0)	(0,1)	36.852	47.000	1	0

Tabela 4.17: Resultados para os Geradores a Óleo sem Incertezas

A seguir, foram introduzidas incertezas nas matrizes de pagamento. As incertezas adicionadas aos problemas são em valores absolutos, os valores de  $x$  correspondem aos valores das estratégias mistas para o Jogador 1 e os valores de  $y$  representam as estratégias mistas do Jogador 2. As matrizes de lucro líquido para cada gerador dependem da quantidade de energia, que pode ser a matriz A ou B (jogador 1 e 2, respectivamente) e depende de qual gerador será escolhido: carvão, óleo ou gás.

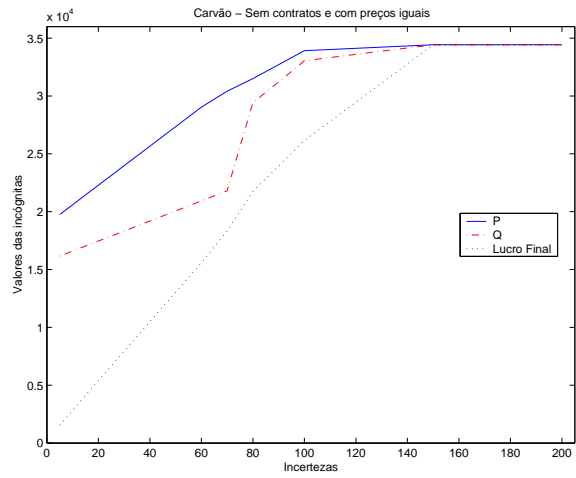
Gás X Gás						
SEM CONTRATOS						
Preços Iguais						
Incertezas	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
0	(0,1)	(0.2778,0.7222)	27.500	25.278	0	1
Preços Diferentes						
0	(1,0)	(0,1)	19.003	20.000	1	0
COM CONTRATOS						
Preços Iguais						
0	(0,1)	(1,0)	30.500	16.525	0	1
Preços Diferentes						
0	(1,0)	(0,1)	19.768	24.500	1	0

Tabela 4.18: Resultados para os Geradores a Gás sem Incertezas

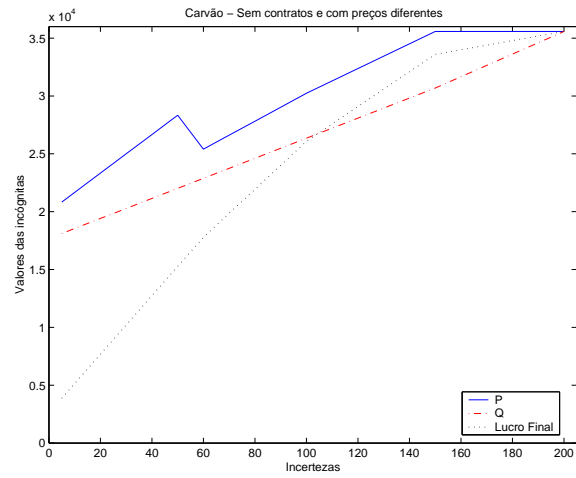
As soluções obtidas através da aplicação do algoritmo proposto são apresentadas nas tabelas (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.23) e (4.24). É importante ressaltar que foi possível calcular o Lucro Líquido de cada gerador de posse das matrizes de pagamento, da quantidade de energia e de preço, e com isso resolver os exemplos propostos.

É importante ressaltar que no exemplo com geradores a carvão, os dois utilizam o carvão como combustível para a produção de energia elétrica. Este princípio também é válido para os demais geradores.

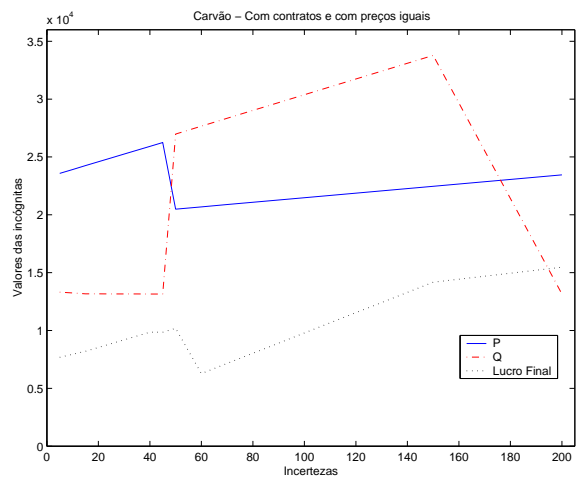




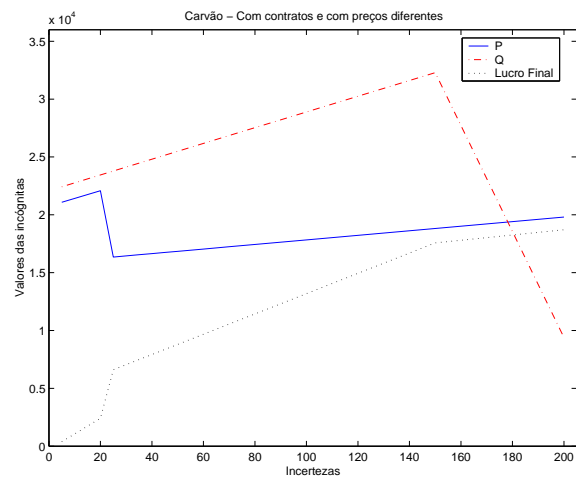
(a) Sem contratos e preços iguais



(b) Sem contratos e preços diferentes



(c) Com contratos e preços iguais



(d) Com contratos e preços diferentes

Figura 4.2: Resultados para os Geradores a Carvão

Os resultados obtidos para o gerador a carvão no modelo sem contratos (4.19) e com incertezas foram os seguintes: os valores de  $x$  (estratégia mista do Jogador 1) são iguais aos clássicos para os valores de  $5 - 70$ , e os valores de  $y$  são sempre divergentes da solução do problema clássico. Quanto se tem o valor de  $80$  na incerteza, a estratégia de  $x$  passa a ser  $(1, 0)$  e o valor de  $y$  também sofre mudanças. Nas incertezas de  $150$  e  $200$ , o problema não é resolvido, pois as soluções obtidas pelo algoritmo são as mesmas das inicializações.

À medida que as incertezas são inseridas no problema, os valores de  $p$  vão aumentando. Já a variável  $q$  teve o seguinte comportamento: nas incertezas de  $5 - 20$  a solução obtida é menor que a clássica; para os valores de  $70 - 80$  a variável sofre um salto, ou seja, de  $21.796$  passa a valer  $29.426$ , devido à mudança de estratégia por parte do jogador 2.

Os valores obtidos para o parâmetro  $\alpha$  com incertezas de  $5 - 60$  são iguais ao caso clássico, o que significa que todas as incertezas são aceitas no problema. Observando os gráficos (4.2(a)) e (4.2(b)) é possível verificar que não existe grandes mudanças e as curvas estão sempre crescendo com o aumento das incertezas inseridas no problema.

Na mesma tabela (4.19) observa-se os resultados apresentados para o gerador a carvão, só que agora os preços da energia são diferentes para cada gerador. Para as variáveis  $x$  e  $y$  e os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , os resultados obtidos com as incertezas de  $5 - 50$  são iguais ao caso sem incertezas. Os valores de  $p$ ,  $q$  e lucro final estão sempre aumentando na medida que as incertezas também aumentam.

Quando acontece uma troca de estratégia para o Jogador 1, ou seja, o valor de  $x$  passa de  $(0, 1)$  para  $(1, 0)$ , o valor de  $p$  sofre uma redução, como pode ser observado no gráfico dos valores de incertezas entre  $50$  e  $60$ .

A partir dos valores de incertezas iguais a  $60$ , os dois jogadores (geradores) têm como estratégias  $(1, 0)$  e os valores de  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , ou seja, todas as incertezas ( $\tilde{t}_1$ ) estão sendo consideradas na resolução do problema. Como no modelo de preços iguais, para incertezas no valor de  $150$  e  $200$  o problema não é resolvido.

Na tabela (4.20), são apresentados ainda resultados do gerador a carvão, mas agora adotando o modelo de contratos de diferenças.

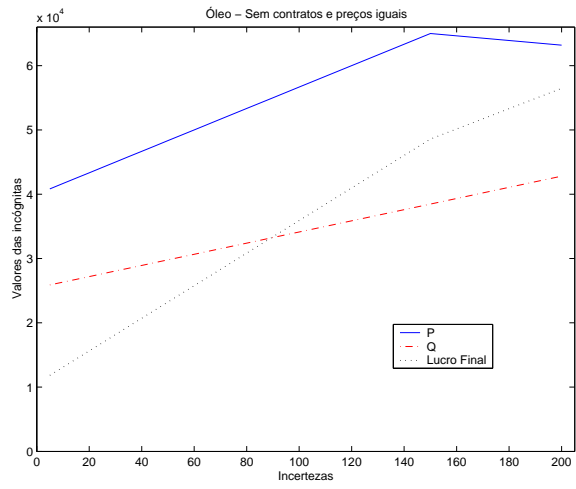
Os resultados obtidos para preços iguais só são iguais aos do clássico quando as incertezas

assumem valores iguais ou maiores que 40 para as variáveis  $x$  e  $y$ , divergindo nos valores de  $p$ ,  $q$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Para os valores de incertezas de 45 e 50, ocorre um grande decréscimo no valor de  $p$  e acréscimo do valor de  $q$ , o que representa a mudança de solução para uma das estratégias, que passa a ser igual ao do caso sem incertezas.

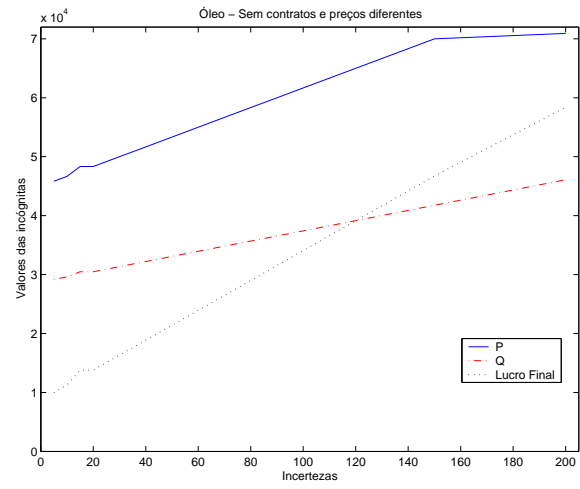
Diferentemente dos casos já relatados aqui neste trabalho, o lucro final sofre um decréscimo entre os valores 50 e 60, após isso os valores do lucro final continuam aumentando até alcançarem o patamar de 15.500, aproximadamente.

Analisando ainda os resultados para o modelo de contrato, mas com preços diferentes tem-se: em nenhum dos casos em que as incertezas foram consideradas foi possível obter soluções coerentes quando comparadas as do caso clássico, ou seja, sem incertezas. Nos valores de incertezas de 20 e 25, houve um salto no valor  $p$  pela provável mudança de  $\alpha_1$  e o lucro sempre aumenta à medida que as incertezas inseridas no problemas também aumentam.

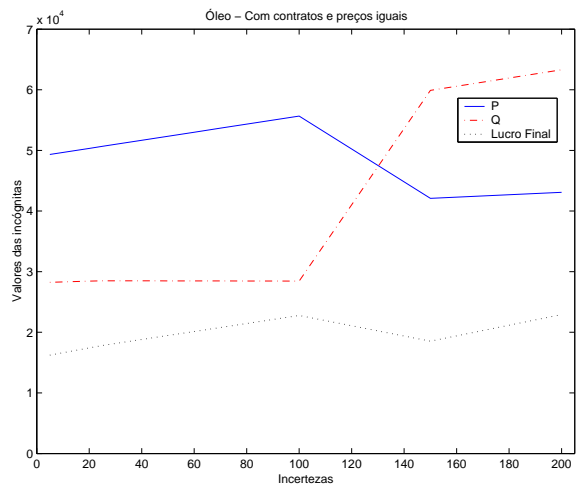
De maneira geral, os resultados obtidos para o gerador a carvão apresentaram divergências quando estes são comparados aos resultados do caso clássico. Este não foi um exemplo *estável* sendo que as divergências retratadas foram mais evidentes no modelo com contratos de diferenças.



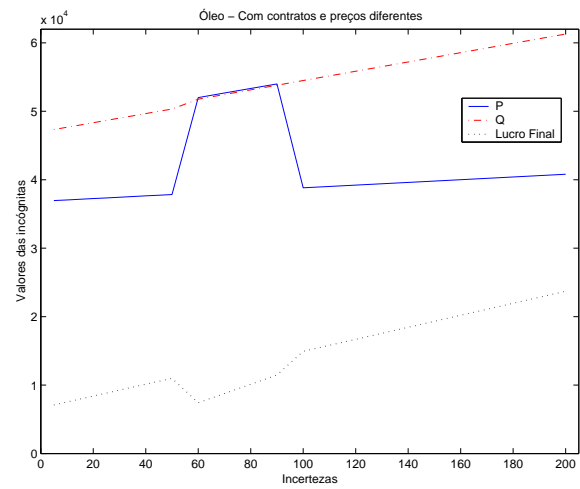
(a) Sem contratos e preços iguais



(b) Sem contratos e preços diferentes



(c) Com contratos e preços iguais



(d) Com contratos e preços diferentes

Figura 4.3: Resultados para os Geradores a Óleo

Todos os resultados obtidos para o gerador a óleo no modelo sem contratos de diferenças (Tabela (4.21)) são coerentes quando comparados aos resultados do caso clássico. Para incertezas de valor igual a 200 o problema não é resolvido, pois a solução obtida é igual às inicializações do programa. Estas observações são válidas para os casos em que os preços são iguais ou diferentes.

Na tabela (4.22) tem-se os resultados para o gerador a óleo, adotando agora os contratos de diferenças. Para todas as incertezas inseridas no problemas, as soluções obtidas são iguais ao do caso sem incertezas exceto para incertezas de valores 150 e 200, onde  $x$  e  $y$  possuem valores iguais ao caso clássico, mas os valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  se invertem causando o decréscimo no valor de  $p$  e aumento no valor de  $q$ , como pode ser observado no gráfico (4.3(c)).

Quando os preços são diferentes, para as incertezas de 5 – 50 as soluções obtidas são iguais aos do caso clássico. Em incertezas no intervalo de 60 – 90, ocorre uma mudança na solução de  $x$ , de (1, 0) passa a ser (0, 1). No valor 100, a solução volta para (1, 0) permanecendo neste valor inclusive para as incertezas 150 e 200.

As mudanças nos valores das estratégias do jogador 1 causaram mudanças nos valores de  $p$  nos valores (50–60) e (90–100) com aumento e redução, respectivamente. Também acontecem mudanças no valor do parâmetro  $\alpha_1$  nos mesmo intervalos. Na mudança de estratégia do intervalo 50 – 60, houve uma redução no lucro final, que de 11.000 foi para 7.500, podendo ser observado no gráfico (4.3(d)).

De maneira geral, os resultados obtidos através do algoritmo proposto para o gerador a óleo foram coerentes com as soluções obtidas no caso clássico.

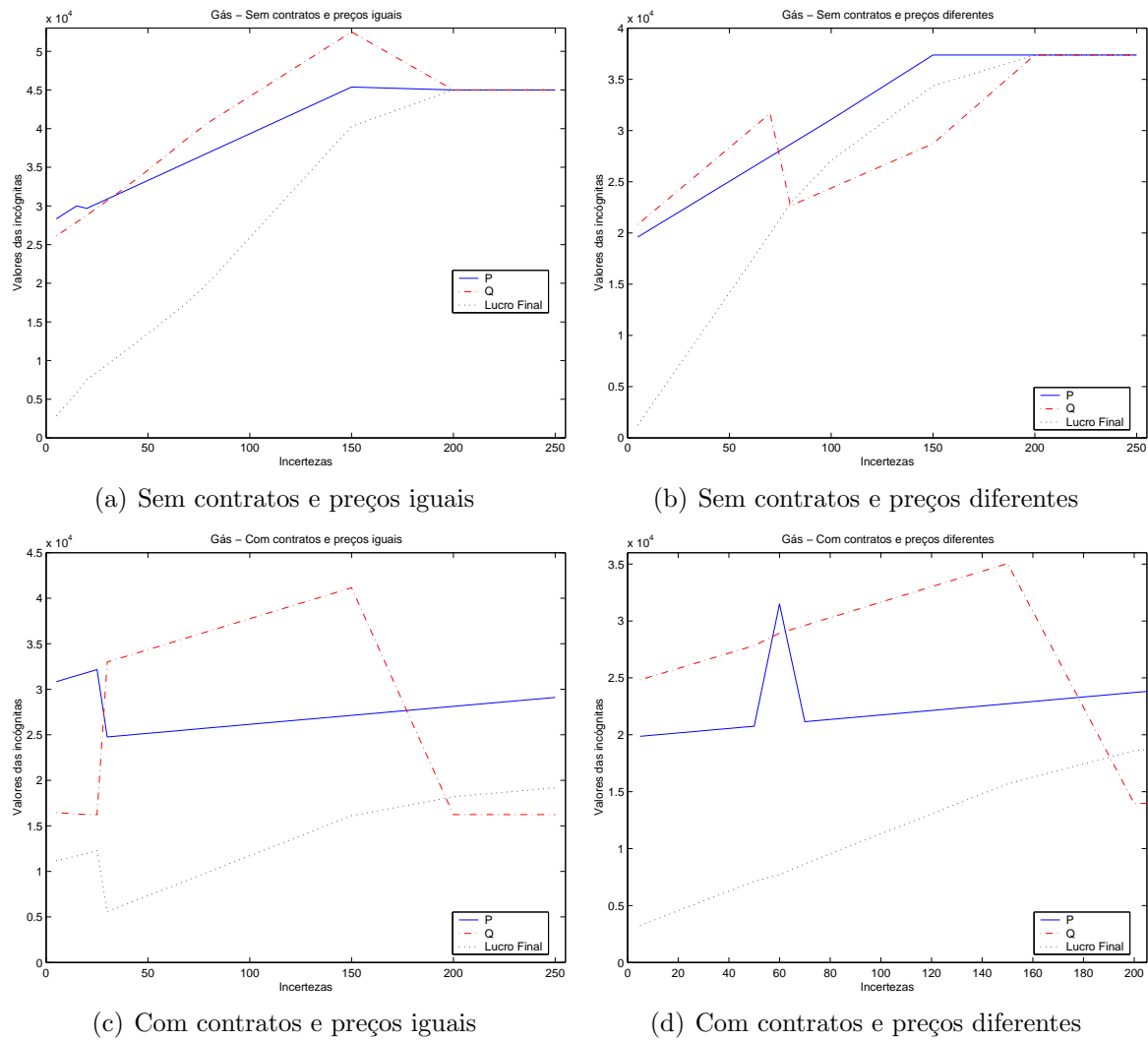


Figura 4.4: Resultados para os Geradores a Gás

As soluções da tabela (4.24) são para o gerador a gás. No modelo sem contratos e preços iguais as soluções obtidas para os valores de incertezas 5, 10 e 15 são muito próximas quando comparadas ao caso clássico. Mas, as soluções encontradas para os outros valores de incertezas são divergentes das soluções do caso com incertezas nulas. O problema não foi resolvido para as incertezas 200 e 250, ou seja, as soluções obtidas são as inicializações do programa.

Ainda observando os resultados do caso sem contratos, mas com preços diferentes, as soluções encontradas no intervalo de incertezas de 5 – 70 são iguais ao caso clássico. Quando o valor de incerteza é igual a 80 ocorre uma mudança na estratégia do jogador 2, o que reflete na redução do valor de  $q$ .

Para valores de incertezas iguais a 150, 200 e 250 as soluções obtidas são as mesmas da inicialização. De maneira similar aos resultados já observados neste trabalho, os valores do lucro final aumentam à medida que os valores das incertezas também aumentam.

Para o exemplo com contratos e preços iguais, os valores das estratégias dos jogadores são iguais aos do caso sem incertezas no intervalo de 5 – 100, a diferença se apresenta nos valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ : até a incerteza de valor 25 é igual ao caso clássico e após isso os valores são invertidos, ocasionando redução nos valores de  $p$ ,  $q$  e lucro final (Gráfico 4.4(c)).

Para valores de incertezas iguais a 200 e 250 o valor da estratégia de  $x$  se iguala ao valor de  $y$ , ocorrendo mudanças no valor de  $\alpha_2$  novamente. Esta mudança de estratégia ocasiona decaimento no valor de  $q$  que de 41.148 passa a 16.233, redução esta bastante brusca.

Nos preços diferentes, ainda no modelo de contratos, os valores das soluções com incertezas são idênticas ao caso clássico, exceto para o valor 60, onde ocorre uma mudança na estratégia do jogador 1 e no valor do parâmetro  $\alpha_1$ . Devido a estas mudanças, houve aumento no valor de  $p$  entre 50 – 60, e logo em seguida uma redução de 60 – 70, mudanças estas que podem ser observadas no gráfico (4.4(d)).

Os valores das estratégias do jogador 2 também sofrem alterações nos valores de incertezas 200 e 250.

As observações gerais que podem ser retiradas deste exemplo é que as soluções convergiram para valores iguais aos do caso clássico de maneira geral, e não houve muitas mudanças ao longo das simulações.

Para os três exemplos inspirados no mercado de energia, foi possível encontrar soluções próximas ou iguais quando comparadas ao caso clássico. É importante ressaltar que os exemplos proposto são jogos não-cooperativos. Esta conclusão é possível quando observa-se as soluções obtidas para os jogadores que são estratégias diferentes, afirmando assim o compromisso que existe com eles próprios de maximização dos seus rendimentos.

## 4.6 Considerações Gerais para os Resultados Obtidos

Como observado na seção anterior, os resultados obtidos para todos os geradores foram compatíveis com as soluções já conhecidas do caso clássico. É importante ressaltar que apesar que não se ter obtido resultados diferentes dos conhecidos para estes exemplos, a obtenção de resultados diferentes refletiria na possibilidade da existência de outras soluções para o modelos com a introdução de pequenas modificações, no caso, a introdução das incertezas através dos números nebulosos.

Para todos os gráficos gerados observa-se que o lucro máximo sempre tende a crescer, por dois motivos: o primeiro deles é que se trata de um problema de maximização. E o segundo é o critério de parada do algoritmo, que tem como o valor da função objetivo na iteração anterior e na vigente. Com a inserção de incertezas, o valor da função objetivo do problema de programação bilinear tende a assumir valores maiores e iguais nas iterações, e com isso se distanciar de um valor próximo a zero, a medida que as incertezas aumentam. É importante ressaltar que este fato acontece porque não existe um mecanismo de *re-start* deste critério de parada.

A aplicação da teoria de jogos no mercado de energia elétrica pode ser visto com um eficiente mecanismo de decisão para a simulação dos preços do mercado. Em um momento de escassez de água nos reservatórios das usinas hidrelétricas, é possível identificar que seria mais vantajoso usar a energia elétrica gerada pelas termoelétricas do que usar a energia das hidroelétricas, esta atitude pode evitar a ocorrência um desastre ambiental, e também de um encarecimento ainda maior da preço da energia.

## 4.7 Resumo

Neste capítulo, foi apresentada um metodologia de resolução dos jogos de soma não nula nebulosos baseada na decomposição do problema não-linear em uma sequência de problemas de programação linear. Exemplos retirados da literatura foram apresentados para a demonstração da metodologia.

O algoritmo proposto não garante que a solução encontrada para o problema não-linear



seja a melhor, mas é uma solução boa, já que não se tem garantia de convergência global. É importante ressaltar que o algoritmo resolve os problemas de programação bilinear que possuem os conjuntos de restrições que são poliedrais limitados.

É sabido que a teoria têm inúmeras aplicações de problemas reais. Problemas do mercado de energia com incertezas nos preços dos geradores, inspirados em (Singh, 1999), foram escolhidos para exemplificar a metodologia proposta. Os resultados obtidos, de maneira geral, demonstram que cada um dos jogadores pretende maximizar seus próprios interesses.

Carvão X Carvão							
SEM CONTRATOS							
Preços Iguais							
Incertezas	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	lucro final
5	(0,1)	(1,0)	19753	16158	0	0	1545.85
10	(0,1)	(1,0)	20597	16592	0	0	2823.51
15	(0,1)	(1,0)	21441	17025	0	0	4101.18
20	(0,1)	(1,0)	22285	17459	0	0	5378.85
25	(0,1)	(1,0)	23129	17893	0	0	6656.51
30	(0,1)	(1,0)	23973	18326	0	0	7934.18
35	(0,1)	(1,0)	24817	18760	0	0	9211.85
40	(0,1)	(1,0)	25661	19194	0	0	10489.51
45	(0,1)	(1,0)	26505	19627	0	0	11767.18
50	(0,1)	(1,0)	27349	20061	0	0	13044.85
60	(0,1)	(1,0)	29037	20928	0	0	15600.18
70	(0,1)	(1,0)	30417	21796	0	1	18315.49
80	(1,0)	(0.2783, 0.7217)	31503	29426	1	0	21763.61
90	(1,0)	(0.2459, 0.7541)	32710	31205	1	0	23938.98
100	(1,0)	(0.2126, 0.7874)	33918	33047	1	0	26152.84
150	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)	34425	34425	1	1	34425
200	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)	34425	34425	1	1	34425
Preços Diferentes							
5	(0,1)	(1,0)	20833	18110	0	1	3871.99
10	(0,1)	(1,0)	21667	18543	0	1	5138.99
15	(0,1)	(1,0)	22500	18977	0	1	6405.99
20	(0,1)	(1,0)	23333	19411	0	1	7672.99
25	(0,1)	(1,0)	24167	19844	0	1	8939.99
30	(0,1)	(1,0)	25000	20278	0	1	10206.99
35	(0,1)	(1,0)	25833	20712	0	1	11473.99
40	(0,1)	(1,0)	26667	21145	0	1	12740.99
45	(0,1)	(1,0)	27500	21579	0	1	14007.99
50	(0,1)	(1,0)	28333	22013	0	1	15274.99
60	(1,0)	(1,0)	25404	22880	0	0	17779.69
70	(1,0)	(1,0)	26611	23747	0	0	19854.36
80	(1,0)	(1,0)	27819	24615	0	0	21929.02
90	(1,0)	(1,0)	29026	25482	0	0	24003.69
100	(1,0)	(1,0)	30233	26349	0	0	26078.36
150	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)	35575	30686	0	0	33600.49
200	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)	35575	35575	0	0	35575

Tabela 4.19: Resultados para os Geradores a Carvão sem Contratos

Carvão X Carvão							
COM CONTRATOS							
Preços Iguais							
Incertezas	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	lucro final
5	(0,1)	(1,0)	23583	13313	0	1	7679.49
10	(0,1)	(1,0)	23917	13242	0	1	7941.49
15	(0,1)	(1,0)	24250	13170	0	1	8203.49
20	(0,1)	(1,0)	24583	13167	0	1	8533.49
25	(0,1)	(1,0)	24917	13164	0	1	8863.49
30	(0,1)	(1,0)	25250	13160	0	1	9193.49
35	(0,1)	(1,0)	25583	13157	0	1	9523.49
40	(1,0)	(0,1)	25917	13154	0	1	9853.49
45	(1,0)	(0,1)	26250	13150	0	1	9853.49
50	(1,0)	(0,1)	20491	26983	1	0	10183.49
60	(1,0)	(0,1)	20688	27663	1	0	6277.13
70	(1,0)	(0,1)	20886	28343	1	0	7154.46
80	(1,0)	(0,1)	21083	29023	1	0	8031.80
90	(1,0)	(0,1)	21280	29703	1	0	8909.13
100	(1,0)	(0,1)	21478	30383	1	0	9786.46
150	(1,0)	(0,1)	22464	33783	1	0	14173.13
200	(1,0)	(0,1)	23451	13150	1	1	15472.16
Preços Diferentes							
5	(0,1)	(0,1)	21083	22425	0	0	386.49
10	(0,1)	(0,1)	21417	22766	0	0	1060.49
15	(0,1)	(0,1)	21750	23106	0	0	1734.49
20	(0,1)	(0,1)	22083	23447	0	0	2408.49
25	(1,0)	(0,1)	16351	23788	1	0	6603.87
30	(1,0)	(0,1)	16449	24128	1	0	7043.20
35	(1,0)	(0,1)	16548	24469	1	0	7482.53
40	(1,0)	(0,1)	16647	24810	1	0	7921.87
45	(1,0)	(0,1)	16745	25150	1	0	8361.20
50	(1,0)	(0,1)	16844	25491	1	0	8800.53
60	(1,0)	(0,1)	17041	26171	1	0	9677.87
70	(1,0)	(0,1)	17239	26851	1	0	10555.20
80	(1,0)	(0,1)	17436	27531	1	0	11432.53
90	(1,0)	(0,1)	17633	28211	1	0	12309.87
100	(1,0)	(0,1)	17831	28891	1	0	13187.20
150	(1,0)	(0,1)	18817	32291	1	0	17573.87
200	(1,0)	(1,0)	19804	9383.3	1	1	18705.49

Tabela 4.20: Resultados para os Geradores a Carvão com Contratos

Óleo X Óleo							
SEM CONTRATOS							
Preços Iguais							
Incertezas	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	lucro final
5	(0,1)	(1,0)	40833	25891	0	1	11831.99
10	(0,1)	(1,0)	41667	26324	0	1	13098.99
15	(0,1)	(1,0)	42500	26758	0	1	14365.99
20	(0,1)	(1,0)	43333	27192	0	1	15632.99
25	(0,1)	(1,0)	44167	27625	0	1	16899.99
30	(0,1)	(1,0)	45000	28059	0	1	18166.99
35	(0,1)	(1,0)	45833	28493	0	1	19433.99
40	(0,1)	(1,0)	46667	28926	0	1	20700.99
45	(0,1)	(1,0)	47500	29360	0	1	21967.99
50	(0,1)	(1,0)	48333	29794	0	1	23234.99
60	(0,1)	(1,0)	50000	30661	0	1	25768.99
70	(0,1)	(1,0)	51667	31528	0	1	28302.99
80	(0,1)	(1,0)	53333	32396	0	1	30836.99
90	(0,1)	(1,0)	55000	33263	0	1	33370.99
100	(0,1)	(1,0)	56667	34130	0	1	35904.99
150	(0,1)	(1,0)	65000	38467	0	1	48574.99
200	(0.5, 0.5)	(1,0)	63175	42804	0	1	56463.16
Preços Diferentes							
5	(0,1)	(1,0)	45833	29181	0	1	9996.99
10	(0,1)	(1,0)	46667	29614	0	1	11263.99
15	(0,1)	(1,0)	48333	30482	0	1	13797.99
20	(0,1)	(1,0)	48333	30482	0	1	13797.99
25	(0,1)	(1,0)	49167	30915	0	1	15064.99
30	(0,1)	(1,0)	50000	31349	0	1	16331.99
35	(0,1)	(1,0)	50833	31783	0	1	17598.99
40	(0,1)	(1,0)	51667	32216	0	1	18865.99
45	(0,1)	(1,0)	52500	32650	0	1	20132.99
50	(0,1)	(1,0)	53333	33084	0	1	21399.99
60	(0,1)	(1,0)	55000	33951	0	1	23933.99
70	(0,1)	(1,0)	56667	34818	0	1	26467.99
80	(0,1)	(1,0)	58333	35686	0	1	29001.99
90	(0,1)	(1,0)	60000	36553	0	1	31535.99
100	(0,1)	(1,0)	61667	37420	0	1	34069.99
150	(0,1)	(1,0)	70000	41757	0	1	46739.99
200	(0.5, 0.5)	(1,0)	70925	46094	0	1	58388.16

Tabela 4.21: Resultados para os Geradores a Óleo sem Contratos

Óleo X Óleo							
COM CONTRATOS							
Preços Iguais							
Incertezas	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	lucro final
5	(0,1)	(1,0)	49333	28237	0	1	16227.99
10	(0,1)	(1,0)	49667	28301	0	1	16625.99
15	(0,1)	(1,0)	50000	28366	0	1	17023.99
20	(0,1)	(1,0)	50333	28431	0	1	17421.99
25	(0,1)	(1,0)	50667	28495	0	1	17819.99
30	(0,1)	(1,0)	51000	28492	0	1	18149.99
35	(0,1)	(1,0)	51333	28489	0	1	18479.99
40	(0,1)	(1,0)	51667	28485	0	1	18809.99
45	(0,1)	(1,0)	52000	28482	0	1	19139.99
50	(0,1)	(1,0)	52333	28479	0	1	19469.99
60	(0,1)	(1,0)	53000	28472	0	1	20129.99
70	(0,1)	(1,0)	53667	28465	0	1	20789.99
80	(0,1)	(1,0)	54333	28459	0	1	21449.99
90	(0,1)	(1,0)	55000	28452	0	1	22109.99
100	(0,1)	(1,0)	55667	28445	0	1	22769.99
150	(0,1)	(1,0)	42097	59896	1	0	18538.30
200	(0,1)	(1,0)	43084	63296	1	0	22924.96
Preços Diferentes							
5	(1,0)	(0,1)	36951	47333	1	0	7101.99
10	(1,0)	(0,1)	37049	47667	1	0	7533.99
15	(1,0)	(0,1)	37148	48000	1	0	7965.99
20	(1,0)	(0,1)	37247	48333	1	0	8397.99
25	(1,0)	(0,1)	37345	48667	1	0	8829.99
30	(1,0)	(0,1)	37444	49000	1	0	9261.99
35	(1,0)	(0,1)	37543	49333	1	0	9693.99
40	(1,0)	(0,1)	37641	49667	1	0	10125.99
45	(1,0)	(0,1)	37740	50000	1	0	10557.99
50	(1,0)	(0,1)	37839	50333	1	0	10989.99
60	(0,1)	(0,1)	52000	51767	0	0	7422.66
70	(0,1)	(0,1)	52667	52447	0	0	8769.32
80	(0,1)	(0,1)	53333	53127	0	0	10115.99
90	(0,1)	(0,1)	54000	53807	0	0	11462.66
100	(1,0)	(0,1)	38825	54487	1	0	14927.58
150	(1,0)	(0,1)	39812	57887	1	0	19314.25
200	(1,0)	(0,1)	40799	61287	1	0	23700.91

Tabela 4.22: Resultados para os Geradores a Óleo com Contratos

Gás X Gás							
SEM CONTRATOS							
Preços Iguais							
Incertezas	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	lucro final
5	(0,1)	(0.2612,0.7388)	28333	26139	0	1	2868.16
10	(0,1)	(0.2444,0.7556)	29167	27016	0	1	4359.65
15	(0,1)	(0.2273,0.7727)	30000	27909	0	1	5863.64
20	(1,0)	(0.2099,0.7901)	29680	28818	1	0	7518.22
25	(1,0)	(0.1923,0.8077)	30283	29744	1	0	8492.68
30	(1,0)	(0.1744,0.8256)	30887	30686	1	0	9475.48
35	(1,0)	(0.1562,0.8438)	31491	31646	1	0	10466.80
40	(1,0)	(0.1378,0.8622)	32094	32623	1	0	11466.86
45	(1,0)	(0.1190,0.8810)	32698	33619	1	0	12475.85
50	(1,0)	(0.1,0.9)	33302	34633	1	0	13493.99
60	(1,0)	(0.0610,0.9390)	34509	36720	1	0	15558.62
70	(1,0)	(0.0207,0.9793)	35716	38886	1	0	17662.62
80	(1,0)	(0,1)	36924	40833	1	0	20166.99
90	(1,0)	(0,1)	38131	42500	1	0	23040.99
100	(1,0)	(0,1)	39338	44167	1	0	25914.99
150	(1,0)	(0,1)	45375	52500	1	0	40284.99
200	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)	45000	45000	1	1	45000.00
250	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)	45000	45000	1	1	45000.01
Preços Diferentes							
5	(1,0)	(0,1)	19607	20833	1	0	1236.99
10	(1,0)	(0,1)	20210	21667	1	0	2673.99
15	(1,0)	(0,1)	20814	22500	1	0	4110.99
20	(1,0)	(0,1)	21418	23333	1	0	5547.99
25	(1,0)	(0,1)	22021	24167	1	0	6984.99
30	(1,0)	(0,1)	22625	25000	1	0	8421.99
35	(1,0)	(0,1)	23229	25833	1	0	9858.99
40	(1,0)	(0,1)	23832	26667	1	0	11295.99
45	(1,0)	(0,1)	24436	27500	1	0	12732.99
50	(1,0)	(0,1)	25040	28333	1	0	14169.99
60	(1,0)	(0,1)	26247	30000	1	0	17043.99
70	(1,0)	(0,1)	27454	31667	1	0	19917.99
80	(1,0)	(1,0)	28662	22651	0	0	22931.16
90	(1,0)	(1,0)	29869	23518	0	0	25005.83
100	(1,0)	(1,0)	31076	24385	0	0	27080.50
150	(0.5, 0.5)	(1,0)	37375	28722	0	0	34347.99
200	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)	37375	37375	0	0	37375
250	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)	37375	37375	0	0	37375

Tabela 4.23: Resultados para os Geradores a Gás sem Contratos

Gás X Gás							
COM CONTRATOS							
Preços Iguais							
Incertezas	$x$	$y$	$p$	$q$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	lucro final
5	(0,1)	(1,0)	30833	16454	0	1	11176.99
10	(0,1)	(1,0)	31167	16382	0	1	11438.99
15	(0,1)	(1,0)	31500	16311	0	1	11700.99
20	(0,1)	(1,0)	31833	16240	0	1	11962.99
25	(0,1)	(1,0)	32167	16236	0	1	12292.99
30	(0,1)	(1,0)	24767	32988	1	0	5578.05
35	(0,1)	(1,0)	24866	33328	1	0	6016.71
40	(0,1)	(1,0)	24964	33668	1	0	6455.38
45	(0,1)	(1,0)	25063	34008	1	0	6894.05
50	(0,1)	(1,0)	25162	34348	1	0	7332.71
60	(0,1)	(1,0)	25359	35028	1	0	8210.05
70	(0,1)	(1,0)	25556	35708	1	0	9087.38
80	(0,1)	(1,0)	25754	36388	1	0	9964.71
90	(0,1)	(1,0)	25951	37068	1	0	10842.05
100	(0,1)	(1,0)	26148	37748	1	0	11719.38
150	(0,1)	(1,0)	27135	41148	1	0	16106.05
200	(1,0)	(1,0)	28122	16233	1	1	18194.99
250	(1,0)	(1,0)	29108	16233	1	1	19181.66
Preços Diferentes							
5	(1,0)	(0,1)	19867	24833	1	0	3246.99
10	(1,0)	(0,1)	19965	25167	1	0	3678.99
15	(1,0)	(0,1)	20064	25500	1	0	4110.99
20	(1,0)	(0,1)	20163	25833	1	0	4542.99
25	(1,0)	(0,1)	20261	26167	1	0	4974.99
30	(1,0)	(0,1)	20360	26500	1	0	5406.99
35	(1,0)	(0,1)	20459	26833	1	0	5838.99
40	(1,0)	(0,1)	20557	27167	1	0	6270.99
45	(1,0)	(0,1)	20656	27500	1	0	6702.99
50	(1,0)	(0,1)	20755	27833	1	0	7134.99
60	(0,1)	(0,1)	31500	28930	0	0	7696.32
70	(1,0)	(0,1)	21149	29610	1	0	8668.33
80	(1,0)	(0,1)	21347	30290	1	0	9545.66
90	(1,0)	(0,1)	21544	30970	1	0	10422.99
100	(1,0)	(0,1)	21741	31650	1	0	11300.33
150	(1,0)	(0,1)	22728	35050	1	0	15686.99
200	(1,0)	(1,0)	23715	13967	1	1	18607.32
250	(1,0)	(1,0)	24701	13967	1	1	19593.99

Tabela 4.24: Resultados para os Geradores a Gás com Contratos

# Capítulo 5

## Conclusões

Este capítulo visa apresentar, de forma sucinta, as diversas contribuições deste trabalho e propor algumas possíveis perspectivas de projetos a serem desenvolvidos como complemento desta dissertação.

### 5.1 Contribuições

Este trabalho abordou o estudo das técnicas baseadas na teoria de jogos para resolução de problemas de decisão. Exemplos retirados da literatura foram analisados e uma aplicação no mercado de energia foi estudada.

Os jogos de soma nula (JSN) podem ser descritos através de problemas de programação linear (PL). Quando incertezas são inseridas e/ou consideradas em tais problemas, é necessário resolver problemas de programação linear nebulosa (PLN). Os modelos analisados no Capítulo 3 deste trabalho foram:

- (Campos, 1989) onde os PLN's são resolvidos através de funções de ranqueamento de números nebulosos;
- (Maeda, 2003) onde as incertezas são parametrizadas.

Os resultados obtidos através da aplicação dos dois métodos foram muito próximos dos resultados no caso clássico e é possível afirmar que o método de Maeda é mais generalizado



que o modelo de Campos.

No capítulo 4 os JSNNN foram estudados, analisados e uma nova metodologia de resolução foi proposta. Na teoria clássica, os jogos de soma não nula são formalizados através de um problema de programação bilinear (PB) ((Mangasarian e Stone, 1964) e (Basar e Olsder, 1982)). Inúmeras técnicas para resolução de PB's existem na literatura, mas estas têm alto custo computacional. Em (Bazaraa e Shetty, 1979) um algoritmo iterativo de resolução de PL's é proposto para a resolução de PB's.

Com a inserção de incertezas no PB, este é transformado em um problema de programação bilinear nebuloso (PBN), onde a metodologia anterior é modificada e aplicada ao novo problema.

Os resultados obtidos para os exemplos retirados da literatura foram muito próximos aos resultados no caso clássico e para demonstrar que a metodologia pode ser aplicada em problemas reais, um problema do mercado de energia foi apresentado e os resultados foram analisados. Para este caso, os resultados obtidos demonstraram de forma clara que os exemplos são não-cooperativos e que cada jogador ou gerador quer defender os próprios interesses.

Em resumo, os principais resultados obtidos no desenvolvimento deste trabalho são enumerados a seguir:

- análise dos modelos já existentes na literatura para a resolução dos jogos de soma nula nebulosos;
- proposta de uma metodologia de resolução para os jogos de soma não nula nebulosos baseada em um algoritmo iterativo;
- aplicação da metodologia a um exemplo do mercado de energia.

## 5.2 Extensões ou Trabalhos Futuros

Existem vários tópicos relacionados ao tema deste trabalho cuja abordagem pode ser esboçada e vir a complementá-los, tais como:

- aplicação de outras funções de rankeamento para os coeficientes nebulosos da função objetivo e das restrições do PBN;
- aplicação da metodologia proposta para resolução de outros tipos de problemas, como por exemplo: disputa do mercado de clientes por empresas aéreas;
- extensão do algoritmo iterativo proposto para resolução de qualquer tipo de PBN;
- implementação de um sistema multi-agente, onde a metodologia proposta pudesse ser aplicada e fosse possível resolver confrontos de 2 em 2 jogadores;
- definição de um equilíbrio para os JSNNN;
- estudar casos em que ocorre aprendizado à medida que se vai jogando (jogos com vários estados de aprendizado), ou seja, jogos iterativos.

# Apêndice A

## Números Nebulosos

Os números nebulosos triangulares são definidos da seguinte forma  $\tilde{a} = (a, e, d)_{LR}$ , onde  $a$  representa o valor modal,  $e$  a dispersão à esquerda e  $d$  a dispersão à direita, veja figura A.1.

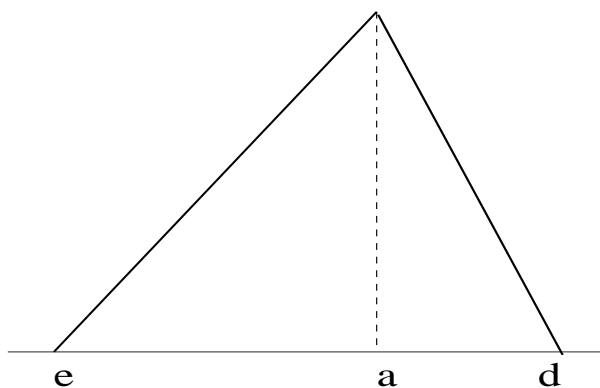


Figura A.1: *Número Triangular Nebuloso.*

Sejam os números triangulares nebulosos  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  da seguinte forma:  $\tilde{a} = (a, e_a, d_a)_{LR}$  e  $\tilde{b} = (b, e_b, d_b)_{LR}$ . As operações básicas utilizadas neste trabalho são descritas a seguir, maiores detalhes ver (Dubois e Prade, 1980) e (Pedrycz e Gomide, 1998).

As principais operações com os números nebulosos são:

1. **Adição:**  $(a, e_a, d_a)_{LR} \oplus (b, e_b, d_b)_{LR} = (a + b, e_a + e_b, d_a + d_b)_{LR}$
2. **Subtração:**  $(a, e_a, d_a)_{LR} - (b, e_b, d_b)_{RL} = (a - b, e_a + e_b, d_a + d_b)_{LR}$

3. Simetria:  $-(a, e_a, d_a)_{LR} = -(a, d_a, e_a)_{RL}$

4. Multiplicação por um escalar:

(a) Se  $c$  é positivo:  $c(a, e_a, d_a)_{LR} = (ca, ce_a, cd_a)_{LR}$

(b) Se  $c$  é negativo:  $c(a, e_a, d_a)_{LR} = (ca, -cd_a, -ce_a)_{LR}$

5. Multiplicação de números nebulosos:

(a) Se  $M > 0, N > 0$ :

$$(a, e_a, d_a)_{LR} \otimes (b, e_b, d_b)_{LR} \approx (ab, ae_b + be_a, ad_b + bd_a)_{LR}$$

(b) Se  $M > 0, N < 0$ :

$$(a, e_a, d_a)_{LR} \otimes (b, e_b, d_b)_{LR} \approx (ab, ae_a - bd_b, ad_a - be_b)_{LR}$$

(c) Se  $M < 0, N > 0$ :

$$(a, e_a, d_a)_{LR} \otimes (b, e_b, d_b)_{LR} \approx (ab, be_a - ad_b, bd_a - ae_b)_{LR}$$

(d) Se  $M < 0, N < 0$ :

$$(a, e_a, d_a)_{LR} \otimes (b, e_b, d_b)_{LR} \approx (ab, -bd_a - ad_b, -be_a - ae_b)_{LR}$$

6. Divisão:

(a)  $(a, e_a, d_a)_{LR} / (b, e_b, d_b)_{LR} \approx \left( \frac{a}{b}, \frac{d_b a + e_a b}{b^2}, \frac{e_b a + d_a b}{b^2} \right)_{LR}$

Neste trabalho, as operações com números nebulosos triangulares mais utilizadas são a soma e a subtração.

# Apêndice B

## Programação Linear Nebulosa (PLN)

Um trabalho importante na área de tomada de decisão considerando as incertezas como sendo números nebulosos foi de (Bellman e Zadeh, 1970).

A partir de então, muitas descobertas foram feitas nesta área surgindo, assim, as mais diversas metodologias de resolução de problemas de programação matemática nebulosa.

A programação linear pode ser considerada como um tipo especial de modelo de decisão: o espaço de decisão é definido pelas restrições; o objetivo é definido pela função objetivo e o tipo de decisão é definido em um ambiente de certeza. O modelo clássico de um problema de programação linear (PL) é do tipo:

$$\begin{aligned} & \max \quad c^T x \\ & \text{sujeito a} \\ & \quad Ax \leq b \\ & \quad x \geq 0 \\ & \quad c, x \in \mathfrak{R}^n \\ & \quad A \in \mathfrak{R}^{m \times n} \end{aligned} \tag{B.1}$$

É possível considerar um PL em um ambiente com incertezas, levando à programação linear nebulosa (PLN). Considerando que existem incertezas, então o decisor não quer maximizar ou minimizar a função objetivo e sim, deseja alcançar alguns níveis de aspiração para a função objetivo e para as restrições.

As restrições podem ser imprecisas da seguinte maneira: os símbolos matemáticos  $\leq$  não significam estritamente menor no sentido matemático, mas pequenas violações são aceitas. Os coeficientes da matriz  $A$  e dos vetores  $b$  e  $c$  podem ter características nebulosas (números nebulosos).

O papel das restrições podem ser diferentes do que na programação linear clássica, onde a violação de uma restrição pode gerar um solução infactível. O decisor pode aceitar pequenas violações nas restrições, mas pode dar diferentes graus de importância a estas violações das restrições. A PLN oferece inúmeras maneiras para o tratamento das incertezas nos problemas de programação linear.

A primeira versão da PLN, ainda hoje a mais divulgada, corresponde às incertezas nos recursos, considerando que as situações expressas pelas restrições correspondem a uma estimativa prudente dos valores disponíveis, ou à possibilidade da flexibilização de alguma violação para as restrições.

Os modelos admitem que os valores dos termos independentes  $b$  em (B.1) podem ser ligeiramente ultrapassados, com insatisfação crescente, e sem ultrapassar uma certa tolerância  $p_i$  em cada restrição  $i$ . A definição de um conjunto impreciso pode ser dada por  $\tilde{A}_i = \{x \text{ satisfaz a restrição } i\}$  com funções de pertinência definida por:

$$\mu_i(x, \tilde{A}_i) = \begin{cases} 1 & \text{se, } (Ax)_i < b_i \\ \mu[(Ax)_i - b_i] & \text{se, } b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 0 & \text{se, } (Ax)_i > b_i + p_i \end{cases}$$

onde  $\mu \rightarrow [0, 1]$  é uma função monótona não crescente.

A extensão do conceito de admissibilidade corresponde a substituir o conjunto  $X$  pelo conjunto impreciso  $\tilde{X} = x \text{ é admissível}$ :

$$\tilde{X} = \tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \dots \cap \tilde{A}_m$$

sendo que o grau de admissibilidade da solução  $x$  é dado por:

$$\mu(x, \tilde{X}) = \min\{\mu_1(x, \tilde{A}_1), \mu(x, \tilde{A}_2), \dots, \mu_m(x, \tilde{A}_m)\}$$

Esta situação pode representar as seguintes formulações nos PLN:

$$Ax \leq \tilde{b} \quad \text{ou} \quad Ax \lesssim b$$

onde, o primeiro caso significa que se representa incertezas nos recursos e, no segundo, que as restrições são flexíveis.

Em muitos dos métodos de resolução para os PLN's, é preciso que o decisor defina uma meta  $b_0$  e uma tolerância  $p_0$ , que permitem exprimir as aspirações de decisão e rigidez do decisor, respectivamente.

A seguir, descreve-se sucintamente alguns modelos existentes na literatura.

### Modelo de Zimmermann

Neste modelo, a função objetivo é transformada em uma restrição do problema, representada matematicamente por:

$$c^T x \gtrsim b_0$$

A decisão ótima é a intersecção entre o conjunto dos valores de  $x$  que satisfazem as restrições e o conjunto dos valores de  $x$  que satisfazem a função objetivo, a decisão ótima a ser escolhida será representada por:

$$\alpha = \max_x \min\{\mu_R(x), \mu_0(x)\} \tag{B.2}$$

A determinação de  $x$  e de  $\alpha$  pode ser feita se todos os valores dos graus de pertinência das restrições forem maiores que  $\alpha$ . Por outro lado, procura-se o maior  $\alpha$  que satisfaça essas condições e esteja no intervalo  $[0, 1]$ . Todas essas considerações podem ser resumidas no seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \max \quad \alpha \\ & \text{sujeito a} \\ & \mu_i(x) \geq \alpha, \quad i = 0, \dots, m \\ & x \geq 0 \\ & 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned} \tag{B.3}$$

onde  $\mu_i$  é definida por:

$$\mu_i(x, \tilde{A}_i) = \begin{cases} 1 & \text{se, } (Ax)_i < b_i \\ 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{p_i} & \text{se, } b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 0 & \text{se, } (Ax)_i > b_i + p_i \end{cases}$$

A solução ótima do problema é  $x$  e o valor de  $\alpha$  dá idéia do risco associado, ou seja, se  $\alpha$  estiver próximo de 1, as violações das restrições não são muito grandes, enquanto que, para valores pequenos de  $\alpha$ , a possibilidade é elevada das restrições serem violadas.

Maiores informações sobre este modelo é possível encontrar em (Zimmermann, 1985).

### Modelo de Verdegay

Neste modelo (Verdegay, 1995), o decisor participa explicitamente da decisão no final do processo. O modelo permite que as restrições sejam relaxadas de acordo com um parâmetro  $\alpha$ , que corresponde ao grau de satisfação mínimo do conjunto de restrições. O problema de PL a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} & \max \quad c^T x \\ & \text{sujeito a} \\ & Ax \leq b + (1 - \alpha)p \qquad \qquad \qquad \text{(B.4)} \\ & x \geq 0 \\ & 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

A idéia deste modelo consiste em resolver o problema anterior para os vários valores de  $\alpha$  e apresentar uma lista de soluções ao decisor, que escolherá a *solução ótima*, em face dos valores da função objetivo. Se existir em diferentes decisores é possível que escolhas diferentes sejam feitas, de acordo com a percepção de risco de cada decisor e do nível de aspiração para a função objetivo.

### Modelo de Carlsson e Korhonen

O modelo de (Carlsson e Korhonen, 1986) propõe um método de resolução que permite trabalhar com um problema em que as incertezas estão presentes nos recursos, função objetivo e na matriz de coeficientes tecnológicos, ou seja a matriz  $A$ .



O PLN que representa este problema é:

$$\begin{aligned} & \max \quad \tilde{c}^T x \\ & \text{sujeito a} \\ & \quad \tilde{A}x \leq \tilde{b} \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Em todos os casos, supõe-se uma variação paramétrica. A partir dos valores  $c_i$ ,  $b_j$  e  $a_{ij}$  admite-se uma variação paramétrica conjunta até os respectivos limites:  $q_i$ ,  $p_j$  e  $r_{ij}$ , ou seja:

$$\tilde{c}_i = c_i + (1 - \alpha)q_i \tag{B.6}$$

$$\tilde{b}_j = b_j + (1 - \alpha)p_j \tag{B.7}$$

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + (1 - \alpha)r_{ij} \tag{B.8}$$

A substituição dos coeficientes em B.5 estabelece um problema parametrizado, que pode ser resolvido através da abordagem de (Verdegay, 1995). Resolvendo para vários valores de  $\alpha$ , apresenta-se um lista ao decisor e este escolhe a *solução ótima* de acordo com o risco que ele está disposto a correr.

Alguns dos modelos de resolução dos PLN foram descritos neste Apêndice. Muitos outros existem, mas não são ênfase deste trabalho.

# Bibliografia

- Al-Khayaal, F. A. (1992). Generalized bilinear programming: Part I. Models, applications and linear programming relaxation. *European Journal of Operational Research*, 60:306–314.
- Balinski, M. (1961). An algorithm for finding all vertices of convex polyedral sets. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 9:72–88.
- Basar, T. e Olsder, G. J. (1982). *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press.
- Bazaraa, M. S. e Shetty, C. (1979). *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons.
- Bellman, R. E. e Zadeh, L. (1970). Decision making in a fuzzy environments. *Management Sci.*, 17:141–148.
- Butnariu, D. (1978). Fuzzy games: A description of the concept. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:181–192.
- Butnariu, D. (1980). Stability and shapley value for an n-persons fuzzy game. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:63–72.
- Cadenas, J. e Verdegay, J. (1995). PROBO: an interactive system in fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 76:319–332.
- Campos, L. (1989). Fuzzy linear programming models to solve fuzzy matrix games. *Fuzzy Sets and Systems*, 32:275–289.

- Carlsson, C. e Korhonen, P. (1986). A parametric approach to fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 20:17–30.
- Dengfeng, L. e Chuntian, C. (2002). Fuzzy multiobjective programming methods for fuzzy constrained matrix games with fuzzy numbers. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 10(4):385–400.
- Dhingra, A. e Rao, S. (1995). A cooperative fuzzy game theoretic approach to multiple objective design optimization. *European Journal of Operational Research*, 83:547–567.
- Dubois, D. e Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems*. Academic Press.
- Falk, J. (1973). A linear max-min problem. *Mathematical Programming*, 5:169–188.
- Gallo, G. e Ülkücü, A. (1977). Bilinear programming: An exact algorithm. *Mathematical Programming*, 12:173–194.
- Ibáñez, L. M. C. e Muñoz, A. G. (1989). A subjective approach for ranking fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 29:145–153.
- J.L.Verdegay (1994). *Fuzzy Optimization*, chapter Fuzzy Optimization: Models, Methods and Perspectives, páginas 39–72. Studies in Fuzziness, 2. Physica-Verlag.
- Kelman, R., Barroso, L. A. N., e Pereira, M. V. (2001). Market power assessment and mitigation in hydrothermal systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16(3):354–359.
- Konno, H. (1976). A cutting plane algorithm for solving bilinear programs. *Mathematical Programming*, 11:14–22.
- Lemke, C. E. e Howson, J. (1964). Equilibrium points of bi-matrix games. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 12:413–423.
- Maeda, T. (2003). On characterization of equilibria strategy of two-person zero-sum games with fuzzy payoffs. *Fuzzy Sets and Systems*, 139:283–296.

- Mangasarian, O. e Stone, H. (1964). Two-person nonzero-sum games and quadratic programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 9:348–355.
- Nascimento, I. F. e Yamakami, A. (2004). Jogos de soma não nula nebulosos: uma proposta de resolução. In *Anais do XXXVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, São João del-Rei, MG, Brasil. (em publicação).
- Nascimento, I. F., Yamakami, A., e Gomide, F. (2004). An algorithm to solve fuzzy games. In *Proceedings of the X Internacional Conference on Industrial Engineering Management*, Florianópolis, SC, Brasil. (em publicação).
- Nash, J. (1953). Two-person cooperative games. *Econometrica*, 21:128–140.
- Nicolas, J. M. e Grabisch, M. (1995). Matrix games: a fuzzy approach. In *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 4, páginas 2261–2266.
- Nishizaki, I. e Sakawa, M. (2000). Solutions based on fuzzy goals in fuzzy linear programming games. *Fuzzy Sets and Systems*, 115:105–119.
- Pedrycz, W. e Gomide, F. (1998). *An introduction to fuzzy sets*. The MIT Press.
- Sakawa, M. e Nishizaki, I. (1994). A lexicographical solution concept in an n-person cooperative fuzzy game. *Fuzzy Sets and Systems*, 61:265–275.
- Sherali, H. e Shetty, C. (1980). A finitely convergent algorithm for bilinear programming problems using polar cuts and disjunctive face cuts. *Mathematical Programming*, 19:14–31.
- Singh, H. (1999). Introduction to game theory and its application in electric power systems. *IEEE Computer Applications in Power*, 12(4):18–22.
- Thie, P. R. (1988). *An introduction to linear programming and game theory*. John Wiley.
- Thieu, T. (1988). A note on the solution of bilinear programming problems by reduction to concave minimization. *Mathematical Programming*, 41:249–260.

- Tsurumi, M., Tanino, T., e Inuiguchi, M. (2001). A shapley function on a class of cooperative fuzzy games. *European Journal of Operational Research*, 129:596–618.
- Verdegay, J. (1995). Fuzzy optimization: models, methods and perspectives. In *Proceedings of the Sixth IFSA World Congress*, volume 1, páginas 21–28.
- Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.
- Zimmermann, H. J. (1985). *Fuzzy Set Theory and Its Application*. Kluwer Academic Publishers.