

# Cálculo Variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Gabriel Loureiro de Lima e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de junho de 2004.

.....  
Profa. Dra.: Vera Lúcia Xavier Figueiredo  
Orientadora

.....  
Profa. Dra.: Sandra Augusta Santos  
Co-orientadora

Banca Examinadora

- 1.Profa. Dra.: Vera Lúcia Xavier Figueiredo
- 2.Profa. Dra.: Sueli Irene Rodrigues Costa
- 3.Profa. Dra.: Yuriko Yamamoto Baldin

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

# Cálculo Variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Gabriel Loureiro de Lima e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 14 de junho de 2004.



.....  
Prof.ª Dra.: Vera Lúcia Xavier Figueiredo  
Orientadora



.....  
Prof.ª Dra.: Sandra Augusta Santos  
Co-orientadora

## Banca Examinadora

1. Prof.ª Dra.: Vera Lúcia Xavier Figueiredo
2. Prof.ª Dra.: Sueli Irene Rodrigues Costa
3. Prof.ª Dra.: Yuriko Yamamoto Baldin

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

UNIDADE	78
Nº CHAMADA	
	F/UNICAMP
	L628c
V	EX
TOMBO, BC/	59809
PROC.	6-117-04
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11.000
DATA	
Nº CPD	

B, L Id 321982

### FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Lima, Gabriel Loureiro de

L628c Cálculo variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e  
desdobramentos / Gabriel Loureiro de Lima -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2004.

Orientadores : Vera Lúcia Xavier Figueiredo; Sandra Augusta Santos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cálculo das variações. 2. Funções convexas. 3. Lagrange, Equações de.  
I. Figueiredo, Vera Lúcia Xavier. II. Santos, Sandra Augusta. III. Universidade  
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação  
Científica. IV. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 14 de Maio de 2004 e aprovada pela Banca  
Examinadora composta pelos Profs. Drs.

*Vera Lúcia Xavier Figueiredo*

---

Prof (a). Dr (a). VERA LÚCIA XAVIER FIGUEIREDO

*Sueli Irene Rodrigues Costa*

---

Prof (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

*Yuriko Yamamoto Baldin*

---

Prof (a). Dr (a). YURIKO YAMAMOTO BALDIN

200114045

# Resumo

Este trabalho encaminha um estudo do cálculo variacional para compreender e situar seus problemas clássicos, reinterpretando-os, quando possível, em outros contextos e buscando desdobramentos. Foram abordados os problemas clássicos, os problemas isoperimétricos, as condições necessárias e as condições suficientes para a existência de extremos, a minimização de funcionais convexos e a teoria de Hamilton-Jacobi. Muitos exemplos foram incluídos com a finalidade de compreender a matemática envolvida e torná-la mais atraente. Para finalizar, foram apresentadas propostas de projetos, com as quais os professores podem abordar alguns conceitos fundamentais do cálculo variacional com seus alunos.

**Palavras-Chave:** cálculo variacional, multiplicadores de Lagrange, convexidade, Lagrangianas, Hamiltonianos, projetos.

# Abstract

This work presents a study of the variational calculus, focusing on the understanding and interpretation of its classical problems and related developments. The isoperimetric problems, the necessary and sufficient conditions for the existence of an extreme, an overview of the minimization of convex functionals, and aspects of the Hamilton-Jacobi theory are approached as well. Examples are included, along the whole text, to illustrate and provide better appreciation of the theoretical development. Finally, suggestions of student research projects concerning fundamental concepts of the variational calculus are presented.

**Key-words:** variational calculus, Lagrange multipliers, convexity, Lagrangians, Hamiltonians, student research projects.

# Agradecimentos

Às professoras Vera Figueiredo e Sandra Santos pela amizade, competência e dedicação durante a orientação deste trabalho.

A todos aqueles professores com os quais tive contato durante esses anos e que foram fundamentais para minha formação, em especial a professora Chéti, com quem aprendi a fazer pesquisa acadêmica.

Aos meus grandes amigos de curso e de vida: Antônio Noan, Carlos, Daniel, Ednei, Fernando Jorge, Guilherme, Haroldo, Paula, Renata, Wanessa e Tatiana.

Aos meus pais, minha irmã e a todos os meus familiares que sempre me apoiaram e me incentivaram durante todos esses anos.

Aos funcionários da secretaria de Pós- Graduação e da biblioteca pela atenção e empenho em ajudar sempre que necessário.

À Capes pelo apoio financeiro.

A MEUS PAIS



# Conteúdo

Apresentação	ix
<b>1 Problemas Clássicos</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Um pouco da história do cálculo variacional . . . . .	1
1.3 Formulação de alguns problemas . . . . .	6
1.4 Um lema básico do cálculo variacional . . . . .	10
1.5 A equação de Euler-Lagrange . . . . .	11
1.6 Integrabilidade da equação de Euler-Lagrange . . . . .	15
1.7 Geodésicas . . . . .	24
1.8 O problema da braquistócrona . . . . .	27
1.8.1 O problema clássico . . . . .	27
1.8.2 Braquistócrona com atrito . . . . .	33
1.9 Superfície de revolução de área mínima . . . . .	39
<b>2 Problemas Isoperimétricos</b>	<b>43</b>
2.1 Introdução . . . . .	43
2.2 Problemas isoperimétricos simples . . . . .	44
2.2.1 O problema de Dido . . . . .	47
2.2.2 Funcionais em forma paramétrica . . . . .	51
2.2.3 O problema de Kelvin . . . . .	52
2.3 Problemas isoperimétricos: caso geral . . . . .	54
2.3.1 Uma outra abordagem para o problema das geodésicas . . . . .	54
<b>3 Condições Necessárias para Extremos</b>	<b>57</b>
3.1 Introdução . . . . .	57
3.2 Algumas considerações preliminares . . . . .	57
3.3 Condições de Weierstrass e de Legendre . . . . .	60
3.4 Condição necessária de Jacobi . . . . .	62
3.5 Mais duas condições necessárias . . . . .	68
3.6 Exemplos . . . . .	69

3.7	Problemas variacionais com fronteiras móveis . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Condições Suficientes para Extremos</b>	<b>85</b>
4.1	Introdução . . . . .	85
4.2	Extremos fortes e fracos . . . . .	86
4.3	Campos . . . . .	87
4.4	Integral invariante de Hilbert . . . . .	91
4.5	Transformação da variação total . . . . .	94
4.6	Outros resultados preliminares . . . . .	95
4.7	Condições suficientes de Weierstrass e de Legendre . . . . .	101
4.8	Aplicações das condições suficientes . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Minimização de Funções Convexas</b>	<b>111</b>
5.1	Introdução . . . . .	111
5.2	Revisão de algumas definições e resultados . . . . .	111
5.3	Funções convexas . . . . .	115
5.4	Funções integrais convexas . . . . .	117
5.5	Funções [fortemente] convexas . . . . .	121
5.6	Aplicações . . . . .	124
5.6.1	Geodésicas em um cilindro . . . . .	125
5.6.2	Projétil de revolução com arrasto mínimo . . . . .	126
5.7	Funções convexas com restrições . . . . .	129
5.8	Dois exemplos de aplicações . . . . .	131
5.8.1	Cabo suspenso - o problema da catenária . . . . .	132
5.8.2	Minimizando o consumo de combustível de um foguete . . . . .	135
<b>6</b>	<b>Teoria de Hamilton Jacobi</b>	<b>139</b>
6.1	Introdução . . . . .	139
6.2	Forma canônica e sistemas Hamiltonianos . . . . .	140
6.3	Transformações canônicas . . . . .	144
6.4	A equação de Hamilton-Jacobi . . . . .	147
6.5	Soluções da equação de Hamilton-Jacobi . . . . .	153
6.6	Princípios variacionais de mecânica . . . . .	155
6.7	O método da separação aditiva . . . . .	159
<b>7</b>	<b>Projetos</b>	<b>167</b>
7.1	Introdução . . . . .	167
7.1.1	Exercícios preliminares . . . . .	169
7.2	Projeto sobre geodésicas . . . . .	172
7.2.1	Geodésicas na esfera . . . . .	173
7.2.2	Geodésicas em superfícies planificáveis . . . . .	178

7.2.3	Geodésicas em superfícies de revolução mais gerais . . . . .	181
7.3	Projeto sobre a braquistócrona . . . . .	183
7.3.1	Braquistócrona sem atrito . . . . .	184
7.3.2	Braquistócrona com atrito - situação 1 . . . . .	187
7.3.3	Braquistócrona com atrito - situação 2 . . . . .	188
<b>8</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>191</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>193</b>

# Apresentação

Na busca das origens do Cálculo Variacional somos remetidos aos antigos gregos, que já conheciam as propriedades isoperimétricas do círculo e da esfera, tais como “entre todas as curvas planas fechadas de mesmo comprimento, o círculo encerra a maior área” e “entre todas as superfícies fechadas de mesma área, a esfera encerra o maior volume”. No século XVI, expoentes como Pierre de Fermat e Isaac Newton investigaram problemas de origem física. O primeiro estabeleceu o princípio minimizante do raio da luz, e o segundo pesquisou a superfície de revolução de menor resistência, no contexto da balística. O desenvolvimento do Cálculo Variacional como disciplina matemática propriamente dita começou com os irmãos Bernoulli (Jacob I e Johannes I), inspirados pelo problema da braquistócrona (curva de tempo mínimo). Foi no século XVIII, com as contribuições de Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange que o Cálculo Variacional tornou-se uma ferramenta efetiva.

Naturalmente, a consolidação desta área de estudo vem ocorrendo paralelamente ao desenvolvimento da própria Matemática, alimentando-o e sendo sustentada por ele. Vale mencionar que três dos vinte e três problemas propostos por David Hilbert no Congresso Internacional de Matemática (Paris, 1900) estão relacionados ao Cálculo Variacional [24].

Neste trabalho os problemas clássicos do Cálculo Variacional servem como ponto de partida para o desenvolvimento da teoria. Estes problemas são abordados sob as perspectivas histórica, analítica, algébrica, geométrica e computacional. Neste sentido, são inicialmente apresentados no Capítulo 1 e revisitados ao longo do texto, à medida que os ingredientes teóricos são explicitados. Por exemplo, o problema das geodésicas é apresentado no Capítulo 1, e é retomado no Capítulo 2, no contexto dos problemas isoperimétricos, e no Capítulo 5, sob a ótica da convexidade. Além disso, no Capítulo 7 este problema é o tema de um dos projetos propostos.

Consideramos muito importante o professor apresentar exemplos práticos e de visualização aos alunos depois de formular uma teoria bem geral. Isso, em nossa opinião, facilita a compreensão e serve também como motivação para que o aluno ganhe autonomia para desenvolver, por conta própria, outros estudos a respeito do tema.

Procuramos incluir no texto diversos exemplos, tanto de aplicação direta quanto mais sofisticados além de ilustrações que auxiliam o encaminhamento e o acompa-

nhamento da teoria. A maioria das figuras foi produzida com o programa **Mathematica**. Outras foram escaneadas, conforme menção à fonte na legenda.

Sem dúvida, o recurso computacional disponível para a preparação deste trabalho agregou-lhe um diferencial com relação à dissertação [1], cujo objetivo foi fornecer, de maneira sistemática, um estudo do Cálculo Variacional clássico, aplicando-o a problemas relevantes da Física. A contribuição do presente texto é composta de duas partes. Na primeira, faz-se a compilação dos ingredientes teóricos necessários para compreender, situar e, quando possível, reinterpretar os problemas clássicos do Cálculo Variacional. Esta compilação está entremeada por exemplos e ilustrações para a teoria. Na segunda parte são encaminhadas propostas de projetos visando resgatar o problema da geodésica e o problema da braquistócrona com os olhares histórico, físico, geométrico, analítico e computacional. Este resgate procura engajar o estudante em um trabalho autônomo, na busca da compreensão e apropriação da matemática envolvida.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 1 são apresentados os problemas clássicos da geodésica, da braquistócrona e da superfície de revolução de área mínima, juntamente com uma introdução aos ingredientes básicos do Cálculo Variacional, com destaque à equação de Euler-Lagrange. Os problemas isoperimétricos são detalhados no Capítulo 2, em especial os problemas de Dido e Kelvin, e o caso mais geral. No Capítulo 3 são detalhadas as condições necessárias para a existência de extremos (de Weierstrass, de Legendre, de Jacobi, de Weierstrass-Erdmann, e a condição de diferenciabilidade de Hilbert). As condições suficientes para a existência de extremos são apresentadas no Capítulo 4, incluindo-se os resultados preliminares necessários. O Capítulo 5 trata da minimização de funções convexas, com as principais definições e resultados, e alguns exemplos aplicados. O Capítulo 6 contém um resumo da teoria de Hamilton-Jacobi, que permite resolver problemas variacionais mais complexos, e é utilizada em aplicações da Física, Química e Engenharia. Finalmente, o Capítulo 7 é dedicado aos projetos. Após uma breve introdução à filosofia do trabalho com projetos, e exercícios preliminares envolvendo problemas de otimização para funções de várias variáveis e multiplicadores de Lagrange, são encaminhadas duas propostas de projetos tendo como temas ‘Geodésicas’ e o ‘problema da braquistócrona’. Considerações finais e as referências bibliográficas consultadas concluem o texto.

# Capítulo 1

## Problemas Clássicos

### 1.1 Introdução

Neste primeiro capítulo apresentaremos alguns problemas clássicos do cálculo variacional: geodésicas, braquistócrona e superfície de revolução com área mínima. Além disso, trataremos também de alguns conceitos teóricos básicos do cálculo das variações, com destaque para a famosa equação de Euler-Lagrange que será a primeira ferramenta que nos possibilitará determinar candidatos a extremos de funcionais. Iniciaremos o capítulo apresentando uma nota histórica sobre os problemas de máximos e mínimos e sobre o cálculo variacional.

### 1.2 Um pouco da história do cálculo variacional

Os problemas que se referem a valores de máximos e mínimos são bem mais atrativos que outros problemas matemáticos de dificuldades comparáveis. Isso ocorre devido a uma razão muito simples: estes problemas idealizam nossos problemas cotidianos. Em várias situações queremos comprar um objeto com o menor preço possível, realizar o máximo de trabalho num determinado tempo, alcançar um objetivo realizando o menor esforço. Da mesma maneira, a natureza também é guiada por princípios de máximos e mínimos. Por esta razão os físicos têm estudado intensamente esses problemas. Podemos citar vários exemplos neste sentido: caminho percorrido pela

luz, movimento dos planetas, movimentos de líquidos e gases, caminho percorrido pelas ondas de rádio, e o próprio corpo humano, cujas traquéias trabalham com o mínimo esforço e máximo rendimento. Essas são as principais razões para o estudo desse tópico e do desenvolvimento de várias teorias para sua resolução.

Provavelmente, o problema de máximo e mínimo mais antigo de que se tenha notícia seja o de Dido. Dido, filha de um rei fenício, refugiou-se no norte da África depois que seu marido foi assassinado. Foi-lhe prometida a extensão de terra que ela pudesse cercar com o couro de um boi. Diz a lenda, que ela preparou com o couro uma longa e fina correia e cercou um terreno semi-circular beirando o mar Mediterrâneo. Essa é a lendária história da fundação de Cartago. A lenda de Dido é retratada na *Eneida* de Virgílio [43, p.48]. De acordo com [25], os mapas das cidades medievais européias mostram que normalmente elas também tinham a forma de semi-círculos. Em uma linguagem mais atual, o problema de Dido consiste em encontrar dentre todas as curvas planas de um dado comprimento, a que engloba a maior área. Podemos perceber com isso que máximos e mínimos têm despertado o interesse da humanidade já há muito tempo, uma vez que o problema de Dido data de 850 a.C.. O problema de Dido deu origem aos chamados problemas isoperimétricos, que estudaremos no capítulo 2. Problemas extremais aparecem ainda na geometria grega de Euclides, Arquimedes (287-212 a.C.) e Apolônio (262-190 a.C.) e em outras áreas da matemática, como álgebra e análise.

Por um longo tempo, cada problema extremal era resolvido individualmente. A partir do século XVII começam a ser desenvolvidos métodos gerais de resolução destes problemas. Matemáticos como Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1642-1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Louis Lagrange (1736-1813) criaram métodos que serviram de base para vários ramos da teoria de problemas extremais como programação matemática e cálculo de variações.

Como neste trabalho vamos focar nossa atenção no cálculo variacional, daremos mais alguns detalhes a respeito de seu surgimento e evolução como ramo da matemática. Os primeiros indícios de problemas típicos do cálculo variacional aparecem com os gregos, que tinham o conhecimento de que o círculo é a curva de um dado perímetro que engloba maior área. Como já vimos anteriormente, esse problema é conhecido como problema de Dido.

Em 1630, Galileu Galilei (1564-1643) formulou, parcialmente, o problema da braquistócrona quando comparou o tempo de descida por um segmento circular com os tempos correspondentes a descidas por polígonos inscritos e por outros arcos unindo os pontos dados.

Em 1686, Newton propôs o problema da superfície de revolução com resistência mínima: calcular a forma de uma superfície de revolução que atravessa uma massa de líquido oferecendo resistência mínima, que é um problema típico do cálculo variacional.

Porém, podemos dizer que o desenvolvimento do cálculo variacional começou, de fato, em junho de 1696 quando Johann Bernoulli (1667-1748) publicou no jornal científico *Acta Eruditorum* uma nota com o seguinte título: “Um novo problema que convido os matemáticos a resolver”. Este problema é a versão que conhecemos do **problema da Braquistócrona**: Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos dados em um plano vertical. O problema da braquistócrona consiste em encontrar a curva que uma partícula  $M$  precisa descrever para sair de  $A$  e chegar em  $B$  no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade. Johann Bernoulli propôs, em 1697, um método para resolvê-lo que dependia de uma analogia com o problema de determinar o caminho percorrido por um raio de luz em um meio com índice de refração variável. Esse método, no entanto, não era fácil de ser aplicado a outras situações.

Nesse mesmo ano, James Bernoulli (1654-1705), irmão de Johann, resolveu o proble-



ma de uma outra maneira, que lhe permitiu também resolver, em 1701, um problema isoperimétrico: os problemas isoperimétricos são aqueles nos quais queremos minimizar ou maximizar uma função impondo alguma restrição, como por exemplo que uma outra função se mantenha constante. Esse método desenvolvido por James era muito eficiente para a resolução de uma grande variedade de problemas de máximos e mínimos. Foi então que Leonhard Euler, aluno de Johann que estava muito envolvido com o trabalho dos irmãos Bernoulli, passou a estudar e a aperfeiçoar o método de James, até que em 1744 publicou *A method for discovering curved lines having a maximum or minimum property or the solution of the isoperimetric problem taken in its widest sense*. Uma das principais descobertas presentes neste trabalho é a equação diferencial

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0$$

que ganhou o nome de **equação de Euler**.

Com o passar do tempo, os matemáticos começaram a sugerir problemas de grande dificuldade e o método de Euler tornava-os ainda mais complicados. Então, em 1762 e 1770, Lagrange publicou um método analítico que permitia deduzir, de fato, qual a equação diferencial das curvas que minimizavam problemas mais gerais. Assim, uma grande variedade de problemas físicos e mecânicos puderam ser resolvidos. Esse método de Lagrange trocava a função  $y(x)$ , presente nas integrais a serem minimizadas, pela função  $y(x) + \delta y(x)$ . Euler prontamente adotou o método e as notações de Lagrange e chamou  $\delta y(x)$  de **variação** da função  $y(x)$  e  $\delta I$  de variação da integral. É por isso que esta nova teoria que estava sendo desenvolvida ganhou o nome de **cálculo das variações** ou **cálculo variacional**. Lagrange também reformulou o problema da braquistócrona e aplicou sua idéia para problemas mais gerais com fronteiras móveis e encontrou as **condições de transversalidade**.

Em 1786 Adrien-Marie Legendre (1752-1833) examinou a chamada **segunda variação**  $\delta^2 I$  de uma integral para encontrar um critério com o qual

pudesse distinguir se o candidato a extremo fornecia um máximo ou um mínimo. Com auxílio de uma transformação que não explicou de maneira conclusiva, encontrou as condições  $f_{y'y'} \geq 0$  para mínimos e  $f_{y'y'} \leq 0$  para máximos.

Em 1837 Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) reexaminou a transformação da segunda variação com a qual Legendre trabalhou e descobriu uma maneira de saber quando a condição de Legendre vai falhar ou ser satisfeita. A consequência mais importante desses estudos de Jacobi foi a descoberta dos **pontos conjugados** e sua importância na teoria do cálculo variacional.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) também teve grande importância no desenvolvimento do cálculo variacional. Ele encontrou uma condição necessária para extremos envolvendo sua função  $E(x, y, p, y')$ . Além disso, foi o primeiro a demonstrar uma condição suficiente com o auxílio da noção de **campo**.

O problema de encontrar curvas de comprimento mínimo (geodésicas) em uma superfície também pode ser formulado como um problema de cálculo variacional. Este problema foi proposto pela primeira vez pelos irmãos James e Johann Bernoulli. Euler encontrou uma equação diferencial para geodésicas. Continuando nesses estudos Carl Friedrich Gauss (1777-1855) introduziu, em 1825, o conceito de curvatura geodésica e Pierre Ossian Bonnet (1819-1892) definiu, em 1848, uma geodésica como sendo uma curva que possui curvatura geodésica nula. O problema das geodésicas também foi estudado detalhadamente por Gaston Darboux (1842-1917) em seu livro *Théorie des surfaces* de 1894.

Temos também contribuições importantes de David Hilbert (1862-1943) como, por exemplo, sua **condição de diferenciabilidade** para arcos extremais e sua modificação na demonstração da condição suficiente de Weierstrass, introduzindo sua **integral invariante**.

Também não podemos deixar de citar as contribuições de Willian Rowan Hamilton (1805-1865), que com seus estudos em sistemas dinâmicos desenvolveu a teoria

hamiltoniana, extremamente útil para a resolução de problemas variacionais envolvendo situações físicas e mecânicas.

No século XX destacamos os trabalhos de Oskar Bolza (1857-1942) e Jacques Hadamard (1865-1963). Bolza, por exemplo, deduziu uma quinta condição necessária para ocorrência de extremos.

Procuramos com esta seção dar uma idéia geral de como se desenvolveu o cálculo variacional que passaremos a estudar a partir da próxima seção.

Para esta seção tomamos como referências os textos de [3], [13], [17], [33], [38] e [41].

### 1.3 Formulação de alguns problemas

Nesta seção formularemos alguns problemas clássicos do cálculo variacional para que o leitor possa começar a compreender o tipo de situação com que trabalharemos e que tipo de ferramentas precisaremos ter.

#### 1. Curva plana de comprimento mínimo

Qual a curva plana ligando dois pontos fixos que tem o menor **comprimento** de arco?

Suponhamos dados os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , com  $x_1 < x_2$  e consideremos uma curva suave da forma

$$y = y(x), \quad y(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad y(x_2) = y_2 \quad (1.1)$$

ligando estes pontos. Sabemos que o comprimento do arco (1.1) é dado por

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad \text{onde} \quad y' = y'(x) = \frac{dy}{dx}. \quad (1.2)$$

Então nosso problema se resume a encontrar uma função  $y(x)$  tal que (1.2) assumo o menor valor possível.

## 2. Geodésicas

Dados dois pontos na superfície de uma esfera, qual o arco, em sua superfície, que liga os pontos dados e tem o menor **comprimento** possível? Generalizando este problema temos: dados dois pontos na superfície

$$g(x, y, z) = 0, \quad (1.3)$$

qual é a equação do arco pertencente a (1.3) e ligando esses pontos, que tem o menor comprimento?

Para formular este problema de maneira geral escrevemos a equação (1.3) na forma paramétrica, com parâmetros  $u$  e  $v$ . Isto é possível se forem satisfeitas as hipóteses do *teorema da função implícita*<sup>1</sup>, [29, p.?] um resultado de caráter local. Temos então

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v). \quad (1.4)$$

Em termos das diferenciais de  $u$  e  $v$ , o quadrado da diferencial do comprimento de arco pode ser escrito como

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv\right)^2 = \\ &P(u, v)(du)^2 + 2Q(u, v)dudv + R(u, v)(dv)^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde

$$P(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad (1.6)$$

---

<sup>1</sup>Seja  $U$  um aberto em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^p$  em  $U$ . Seja  $(a, b) = (a_1, \dots, a_{n-1}, b) \in U$  e assumamos que  $f(a, b) = 0$  mas  $D_n f(a, b) \neq 0$ . Então, existe uma bola aberta  $V$  em  $\mathbb{R}^{n-1}$  centrada em  $a$  e uma função  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^p$ , tal que  $g(a) = b$  e  $f(x, g(x)) = 0$  para todo  $x \in V$ .

$$R(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \quad (1.7)$$

$$Q(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}. \quad (1.8)$$

No caso em que as curvas  $u = cte$  são ortogonais a  $v = cte$  na superfície (1.3),  $Q$  é identicamente nulo.

Vamos fixar nossos pontos na superfície como sendo  $\psi(u_1, v_1)$  e  $\psi(u_2, v_2)$  com  $u_2 > u_1$ . Consideraremos arcos cujas equações são dadas por

$$v = v(u), \quad v(u_1) = v_1, \quad v(u_2) = v_2. \quad (1.9)$$

O comprimento do arco será dado, de acordo com (1.5) por

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{P(u, v) + 2Q(u, v)v' + R(u, v)v'^2} du, \quad (1.10)$$

onde  $v' = v'(u)$  denota a derivada  $\frac{dv}{du}$ . Novamente, nosso problema é encontrar uma função  $v(u)$  que minimize a integral (1.10).

### 3. Problema da Braquistócrona

Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos dados em um plano vertical. O problema da braquistócrona consiste em encontrar a curva que uma partícula  $M$  precisa descrever para sair de  $A$  e chegar em  $B$  no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade.

Vamos supor que os pontos  $A$  e  $B$  estejam no plano  $xy$ , que  $y$  seja o eixo vertical e  $x$  o eixo horizontal. Consideremos o caminho como sendo  $y = y(x)$ . Assumimos que a partícula tenha uma velocidade inicial  $v_1$  e que as coordenadas de  $A$  e  $B$  são, respectivamente,  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  com  $y(x_1) = y_1$  e  $y(x_2) = y_2$ .

Como a velocidade ao longo da curva é dada por  $v = \frac{ds}{dt}$ , o tempo total de

descida é

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v} dx. \quad (1.11)$$

Para calcular  $v$  como uma função das coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$ , usamos o fato de não estarmos considerando a presença do atrito no problema. Assim, o decréscimo da energia potencial é acompanhado por um igual acréscimo da energia cinética, isto é:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mg(y - y_1). \quad (1.12)$$

Portanto,  $v = \sqrt{2g(y - y_0)}$  onde  $y_0 = y_1 - (\frac{v_1^2}{2g})$  e então, o tempo de descida fica

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y-y_0}} dx. \quad (1.13)$$

Nosso problema então é escolher a função  $y(x)$  que minimiza (1.13).

#### 4. Superfície de revolução de área mínima

Dados dois pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  buscamos passar de um para o outro ao longo de um arco  $y = y(x)$  tal que a rotação desse arco sobre o eixo  $x$  gere uma superfície de revolução cuja área incluída em  $x_1 \leq x \leq x_2$  seja mínima.

Assumiremos que  $y_1 > 0$ ,  $y_2 > 0$  e  $y(x) \geq 0$  para todo  $x$  tal que  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

Buscamos então minimizar a integral

$$I = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1+y'^2} dx, \quad (1.14)$$

que é a área da superfície de revolução, através da escolha apropriada da função  $y = y(x)$  para a qual  $y(x_1) = y_1$  e  $y(x_2) = y_2$ .

Percebemos que nestes quatro problemas citados sempre chegamos em um novo problema que consiste em encontrar uma função que minimize uma integral. É

desse tipo de problema que trata o cálculo variacional, que começaremos abordar na seção seguinte.

A referência para esta seção foi [45].

## 1.4 Um lema básico do cálculo variacional

O lema a seguir é básico para o desenvolvimento da teoria do cálculo variacional.

**Lema 1** *Se  $x_1$  e  $x_2$ ,  $x_2 > x_1$ , são fixos e  $G(x)$  é uma função contínua particular para  $x_1 \leq x \leq x_2$  e se*

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x) dx = 0 \quad (1.15)$$

*para cada escolha da função diferenciável  $\eta(x)$  tal que*

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \quad (1.16)$$

*concluimos que*

$$G(x) = 0 \quad \forall x \text{ tal que } x_1 \leq x \leq x_2. \quad (1.17)$$

*Demonstração:*

A prova desse lema baseia-se na contrapositiva: mostra-se a existência de pelo menos uma função  $\eta(x)$  para a qual (1.15) não é satisfeita quando  $G(x)$  é tal que (1.17) não vale.

Suponhamos então que (1.17) não vale, isto é,  $\exists x'$ ,  $x_1 < x' < x_2$  tal que  $G(x') \neq 0$ . Sem perda de generalidade vamos supor que  $G(x') > 0$ . Pela continuidade de  $G$ , existe necessariamente uma vizinhança de  $x'$ , digamos,  $x'_1 \leq x \leq x'_2$  na qual  $G(x) > 0$  em toda vizinhança. Mas então (1.15) não vale para toda escolha permitida de  $\eta$ . Por exemplo, consideremos a função definida por

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x_1 \leq x \leq x'_1, \\ (x - x'_1)^2(x - x'_2)^2 & \text{para } x'_1 \leq x \leq x'_2, \\ 0 & \text{para } x'_2 \leq x \leq x_2. \end{cases} \quad (1.18)$$

Para esta função  $\eta$  particular (que é continuamente diferenciável e satisfaz (1.16)) a integral (1.15) fica:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x) dx = \int_{x'_1}^{x'_2} (x - x'_1)^2(x - x'_2)^2G(x) dx. \quad (1.19)$$

Como  $G(x) > 0$ , para  $x'_1 \leq x \leq x'_2$ , o lado direito de (1.19) é estritamente positivo, contradizendo a hipótese (1.15). O caso  $G(x') < 0$  é análogo e assim, o lema está demonstrado.  $\square$

Esta demonstração que fizemos pode ser adaptada caso precisemos pedir que  $\eta(x)$  possua derivada contínua de qualquer ordem. Neste caso, consideramos na demonstração  $\eta(x) = [(x - x'_1)(x'_2 - x)]^{k+1}$  no subintervalo  $x'_1 \leq x \leq x'_2$  e zero para o restante do intervalo  $x_1 \leq x \leq x_2$  e daí procedemos de maneira análoga à feita acima.

O texto desta e das próximas três seções foi escrito inspirado em [45].

## 1.5 A equação de Euler-Lagrange

Nesta seção iremos obter um resultado extremamente importante do cálculo variacional: a *equação de Euler-Lagrange*. Ela será a chave para começarmos resolver os problemas propostos na seção 3.

Assumiremos que existe uma função duas vezes diferenciável  $y = y(x)$  satisfazendo as condições  $y(x_1) = y_1$  e  $y(x_2) = y_2$  e que forneça um mínimo para a integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx. \quad (1.20)$$

Buscamos agora, responder à seguinte questão: Qual a equação diferencial satisfeita por  $y(x)$ ?



Sejam  $x_1, x_2, y_1, y_2$  dados,  $f$  uma função de  $x, y$  e  $y'$  duas vezes diferenciável com respeito a essas variáveis ou quaisquer combinações delas. Observe que cada integral dos problemas apresentados na seção 3 é um caso particular de (1.20).

Construíremos agora uma família de “funções comparação” de um parâmetro. Denotaremos essa família por  $Y(x)$  e a definimos por

$$Y(x) = y(x) + \epsilon\eta(x), \quad (1.21)$$

onde  $\eta(x)$  é uma função diferenciável arbitrária para a qual

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (1.22)$$

e  $\epsilon$  é parâmetro da família.

Note que o que fizemos foram variações na função  $y(x)$ , isto é, somamos a ela um número  $\epsilon$  multiplicado por uma outra função  $\eta(x)$ . Daí vem o nome *cálculo das variações*.

Assim, para cada função  $\eta(x)$  temos uma família, da forma (1.21), com um único parâmetro. E, para cada  $\eta(x)$  dada, cada valor de  $\epsilon$  designa um único membro dessa família. A condição (1.22) nos garante que  $Y(x_1) = y(x_1) = y_1$  e  $Y(x_2) = y(x_2) = y_2$ , isto é, todas as “funções comparação” possuem o mesmo ponto inicial e final da função  $y(x)$ . A principal vantagem de escolher essa família de funções da forma (1.21) é que, escolhida a função  $\eta(x)$ , a função  $y(x)$  (que estamos assumindo que minimiza (1.20)) é um membro dessa família  $Y(x)$ , quando escolhermos  $\epsilon = 0$  como parâmetro.

A separação de qualquer curva  $y = Y(x)$  com relação ao arco  $y(x)$  é dada por  $\epsilon\eta(x)$ . Para cada escolha permitida de  $\eta(x)$  é possível escolher uma vizinhança de  $\epsilon$ , digamos,  $-\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_0$  na qual o produto  $|\epsilon\eta(x)|$  é arbitrariamente pequeno para qualquer  $x$  entre  $x_1$  e  $x_2$ .

Se em (1.20) trocarmos  $y$  e  $y'$  por  $Y(x)$  e  $Y'(x)$ , respectivamente, obtemos:

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y') dx, \quad (1.23)$$

onde, para uma dada função  $\eta(x)$  essa integral é claramente uma função de  $\epsilon$ . O argumento  $Y'$  é dado, de acordo com (1.21), por:

$$Y' = Y'(x) = y'(x) + \epsilon\eta'(x). \quad (1.24)$$

Dessa maneira, quando  $\epsilon = 0$ , podemos trocar  $Y$  e  $Y'$  por  $y$  e  $y'$ , respectivamente. Então, a integral (1.23) é um mínimo com respeito a  $\epsilon$  para  $\epsilon = 0$ , o que está de acordo com o fato de  $y(x)$  ser o arco minimizador de (1.20). Isso mostra que a escolha de  $\eta(x)$  não importa.

Reduzimos então nosso problema inicial a um problema de minimização ordinária de cálculo diferencial com respeito à única variável  $\epsilon$ .

Do cálculo diferencial de uma variável sabemos que uma condição necessária para  $\epsilon = 0$  ser um mínimo de  $I$  é que a derivada primeira de  $I$  com relação a  $\epsilon$  se anule em  $\epsilon = 0$ , ou seja,

$$I'(0) = 0. \quad (1.25)$$

Precisamos então calcular a derivada de (1.23) em  $\epsilon = 0$ . Para isto precisamos de um resultado que nos permita derivar uma integral e então recorremos ao teorema seguinte, apresentado em [22, p.312].

**Teorema 1** *Considere uma função  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  e suponha que a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial p}(x, p)$  existe e é contínua em  $[a, b] \times [c, d]$ . Se a integral:*

$$F(p) = \int_a^b f(x, p) dx \quad (1.26)$$

*existe para todo  $p \in [c, d]$ , então  $F(p)$  é diferenciável e*

$$F'(p) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) dx. \quad (1.27)$$

*Demonstração:*

Vamos considerar

$$\frac{F(p) - F(p_0)}{p - p_0} = \int_a^b \left( \frac{f(x, p) - f(x, p_0)}{p - p_0} \right) dx. \quad (1.28)$$

Para o termo da direita aplicamos o Teorema do Valor Médio que nos dá  $\frac{\partial f}{\partial p}(x, \xi)$  com  $\xi$  dependendo de  $x$ . Subtraímos então  $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x, p_0) dx$  de ambos os lados e usando o fato de que para funções integráveis  $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$  temos

$$\left| \frac{F(p) - F(p_0)}{p - p_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x, p_0) dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial p}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial p}(x, p_0) \right| dx. \quad (1.29)$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial p}$  é contínua no compacto  $[a, b] \times [c, d]$ , ela é uniformemente contínua, isto é, para  $p - p_0$  suficientemente pequeno a diferença do lado direito de (1.29) pode ser majorada para todo  $x$  por um  $\delta$  arbitrariamente pequeno. Isso mostra que (1.29) está próximo de zero e que  $F$  é diferenciável, tendo (1.27) como derivada.  $\square$

Usando este resultado obtemos

$$\frac{dI}{d\epsilon} = I'(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right) dx \quad (1.30)$$

de (1.23) com o auxílio de (1.21) e (1.24).

Como para  $\epsilon = 0$  é equivalente trocarmos  $(Y, Y')$  por  $(y, y')$  temos, de acordo com (1.25) e (1.30), que  $I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0$ . Integrando por partes o segundo termo desta integral obtemos

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0 \quad (1.31)$$

devido a (1.22).

Como (1.31) precisa valer para toda  $\eta$  escolhida, usamos o Lema 1 e obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (1.32)$$

Essa equação é conhecida como **Equação de Euler-Lagrange** e é geralmente de segunda ordem. Sua solução, para qualquer problema do tipo dos enunciados na seção 3, nos dá uma função duas vezes diferenciável que fornece um mínimo (ou máximo) para a integral do problema. O integrando  $f(x, y, y')$  de (1.20) é conhecido como função lagrangiana ou, simplesmente, *lagrangiana*.

Devemos observar que a condição  $I'(0) = 0$  não é suficiente para termos um mínimo de  $I(\epsilon)$  quando  $\epsilon = 0$ . De fato, podemos ter também um ponto de máximo ou ponto de inflexão. Existem vários problemas nos quais não temos condições de saber se  $I'(0) = 0$  indica um máximo, mínimo ou ponto de inflexão. Chamamos então de **extremo** o valor de  $I(0)$  nestas três situações. A função  $y(x)$  que fornece um extremo para a integral  $I$  é chamada de **função extremal**. Então, a função  $y(x)$  que satisfaz a equação de Euler-Lagrange (1.32) e que satisfaz as condições iniciais é, por definição, uma função extremal para a integral.

Percebemos que a teoria desenvolvida até aqui ainda é bastante limitada. Para tentar contornar estas limitações foram desenvolvidas outras teorias ou teorias complementares, que aparecerão no decorrer deste trabalho.

## 1.6 Alguns casos de integrabilidade da equação de Euler-Lagrange

Com algumas hipóteses adicionais, obtemos os seguintes casos mais simples em que a equação de Euler-Lagrange é de fácil integração:

1. Se  $f$  é explicitamente independente da variável dependente  $y$ .

Se  $f$  é explicitamente independente da variável dependente  $y$ , então  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  e (1.32) se torna

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = C_1 \quad (1.33)$$

onde  $C_1$  é uma constante arbitrária.

Então nossa busca por uma função extremal foi reduzida à resolução de uma equação diferencial de primeira ordem envolvendo somente  $y'$  e  $x$ .

**Exemplo 1.1** Determinar as funções que, ligando  $A = (1, 3)$  e  $B = (2, 5)$ , são lagrangianas do funcional

$$J[y(x)] = \int_1^2 y'(x)(1 + x^2 y'(x)) dx.$$

A equação de Euler-Lagrange para este funcional fica

$$-\frac{d}{dx}[1 + 2x^2 y'] = 0$$

e, portanto, de (1.33) temos que

$$1 + 2x^2 y' = C$$

o que, integrando, nos dá

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2$$

com  $C_1 = \frac{1-C}{2}$ . A fim de se escolher qual hipérbole desta família passa pelos pontos dados, obtemos o sistema

$$3 = C_1 + C_2$$

$$5 = \frac{C_1}{2} + C_2$$

o que nos fornece  $C_1 = -4$  e  $C_2 = 7$  e assim, a lagrangiana procurada é

$$y(x) = 7 - \frac{4}{x}.$$

Agora, se além de não depender explicitamente de  $y$ ,  $f$  for explicitamente independente da variável independente  $x$ , a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y'}$  é uma função  $\phi$  de  $y'$  somente e, daí,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} (\phi(y')) = \phi' \left( \frac{dy}{dx} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Para valer para qualquer  $\phi$ ,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

e, portanto

$$\frac{dy}{dx} = C_2,$$

isto é,

$$y(x) = C_2 x + C_1.$$

Deste modo, quando  $f$  depende explicitamente só de  $y'$ , as funções extremais são necessariamente funções lineares de  $x$ . Isso mostra que a menor distância, no plano, entre dois pontos, é a linha reta (item 1 da seção 3).

**Exemplo 1.2** Encontrar as lagrangianas do funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

sujeito às condições de fronteira  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ , que fornece o comprimento de qualquer curva  $y(x)$  ligando  $(a, A)$  e  $(b, B)$ . É claro que o problema equivale a determinar o caminho mais curto entre esses pontos.

A equação de Euler-Lagrange para este caso fica

$$y''(x) = 0$$

e daí temos que

$$y(x) = C_1 x + C_2.$$

Colocando as condições de fronteira, obtemos como solução do problema a reta

$$y(x) = \frac{B - A}{b - a}(x - a) + A.$$

## 2. Se $y'$ independe de $x$ .

Supondo que  $y'$  independe de  $x$ , temos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) &= y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} y' = \\ &= -y' \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] - \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.34)$$

que sugere uma integral primeira óbvia da equação de Euler-Lagrange no caso em que  $f$  é explicitamente independente da variável independente  $x$ . Daí, como  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  neste caso, vemos que a equação de Euler-Lagrange (1.32) implica que o primeiro membro de (1.34) se anula e então

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) = 0 \quad \text{ou} \quad y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C_1, \quad (1.35)$$

onde  $C_1$  é uma constante arbitrária. Assim, a função extremal pode ser obtida com a resolução de uma equação diferencial de primeira ordem envolvendo  $y$  e  $y'$  somente.

**Exemplo 1.3** Determinar as lagrangianas do funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx$$

que ligam dois pontos dados  $(a, A)$  e  $(b, B)$  do semiplano superior.

O integrando deste funcional não depende explicitamente de  $x$ , e daí a equação de Euler-Lagrange se reduz a

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} - y' \frac{y'}{y\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

o que, simplificando, fica

$$y\sqrt{1+y'^2} = C_1,$$

onde  $C_1 = \frac{1}{C}$ . Integrando a última equação temos

$$(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2,$$

isto é, a família das circunferências com centro sobre o eixo  $Ox$ . Assim, o problema terá sempre uma solução e esta será única, por qualquer par de pontos (com abscissas distintas) do semiplano passando uma e só uma circunferência da família mencionada.

Se forem dados dois pontos  $(a, A)$  e  $(b, B)$  obteremos, de acordo com o que foi feito acima, o seguinte sistema de equações

$$(a + C_2)^2 + A^2 = C_1^2$$

$$(b + C_2)^2 + B^2 = C_1^2,$$

e então, podemos obter as constantes  $C_1$  e  $C_2$ . Para que as expressões para  $C_1$  e  $C_2$  se tornem mais simples vamos chamar

$$\alpha = \frac{b^2 - a^2 + B^2 - A^2}{a - b}.$$

Então teremos:

$$C_1 = \sqrt{B^2 + b^2 + \alpha b + \frac{\alpha^2}{4}}$$

e

$$C_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

Agora, note que se  $a = b$  o funcional não fará sentido se continuarmos pensando em  $y$  como função de  $x$ . Porém, se fizermos  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  o funcional em  $t$  fará sentido e poderemos obter a semi-reta perpendicular ao eixo  $Ox$  como solução. A figura 1.1 mostra a semi-circunferência solução para um par de pontos dados.



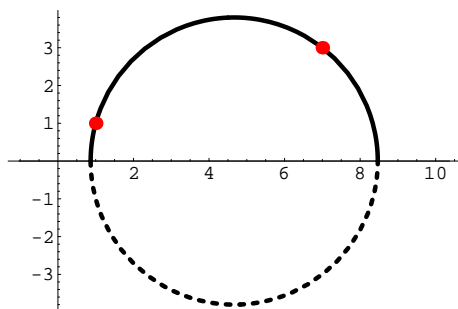


Figura 1.1: Semi-circunferência solução para o par de pontos  $(a, A) = (1, 1)$  e  $(b, B) = (7, 3)$ .

**Observação:** O exemplo 1.3 pode ser visto sob a seguinte perspectiva: dados dois pontos  $(a, A)$  e  $(b, B)$  do semi-plano superior  $y > 0$ , definimos a distância entre eles a partir da métrica cuja expressão para o elemento de comprimento de arco é

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \quad (1.36)$$

Com esta noção de distância, a função minimizante do funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx, \quad (1.37)$$

ou, mais geralmente, do funcional

$$J[y] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y} dt \quad (1.38)$$

corresponderá um arco de comprimento mínimo conectando os pontos dados. De acordo com a análise feita anteriormente, estas curvas serão arcos de semi-circunferências centradas na reta  $y = 0$  quando  $a \neq b$  e segmentos de reta contidos nas semi-retas  $x = cte$  quando  $a = b$ . O efeito do denominador no elemento de comprimento de arco (1.36), ou equivalentemente, nos funcionais (1.37) e (1.38) em comparação com o funcional do exemplo 1.2 é remover os pontos da reta  $y = 0$  e fazer com que a distância entre  $(a, A)$  fixo e  $(b, B)$

aumente arbitrariamente à medida que  $B$  se aproxima de zero. Com a terminologia geométrica adequada, diz-se que os pontos sobre a reta  $y = 0$  são **pontos no infinito**. Além disso, com a noção de distância introduzida por (1.36) podemos interpretar as semi-circunferências centradas em  $y = 0$  e as semi-retas verticais  $x = cte$  como “retas”, com um modelo consistente para a geometria plana denominado **semi-plano de Poincaré**, em homenagem a Jules Henri Poincaré (1860-1934), seu idealizador. Neste modelo, dada uma ‘reta’  $q$  e um ponto  $A$  fora dela, podem ser traçadas infinitas ‘retas’ passando por  $A$  e que não cruzam  $q$  em nenhum ponto.

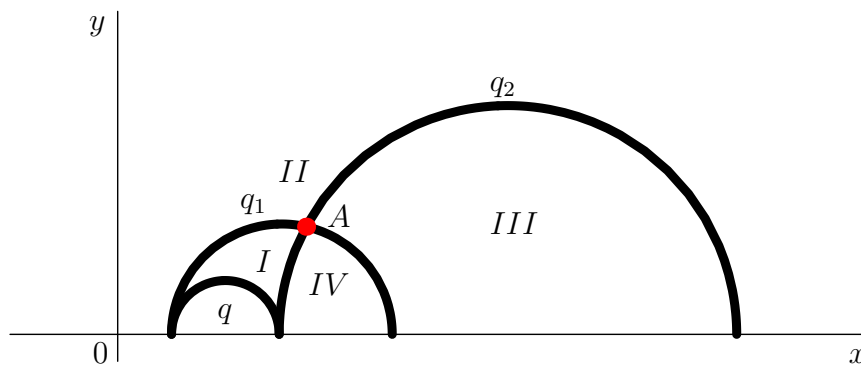


Figura 1.2: Esquema mostrando retas e retas paralelas na geometria de Lobachevsky, segundo o modelo de Poincaré.

Na figura 1.2, o ‘feixe de paralelas’ à reta  $q$ , passando pelo ponto  $A$ , está localizado na região delimitada pelas ‘retas’  $q_1$  e  $q_2$  (chamadas **paralelas-limite**, pois têm em comum com  $q$  apenas os pontos no infinito) e compreendida pelos ângulos  $II$  e  $IV$ . O semi-plano de Poincaré é um modelo para a geometria não euclidiana hiperbólica de Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856).

3. Se  $f$  não depende de  $y'$ .

Se  $f$  não depende de  $y'$ , a equação de Euler-Lagrange se reduz a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0,$$

que por não depender de constantes indeterminadas, será compatível com as condições de fronteira  $y(a) = A$  e  $y(b) = B$  apenas em casos excepcionais.

**Exemplo 1.4** Determinar as lagrangianas do funcional

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} y(2x - y) dx$$

com as condições de fronteira  $y(0) = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

Neste caso, a equação de Euler-Lagrange se reduz a

$$2x - 2y = 0,$$

isto é, a

$$y = x,$$

relação que satisfaz as condições de fronteira e neste caso, o funcional pode, eventualmente, assumir um extremo. Agora, ao mudar as condições de fronteira, por exemplo, tomando  $y(0) = 0$  e  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , o problema se tornará insolúvel, já que essas condições de fronteira são incompatíveis com  $y = x$ .

4. Se  $f$  é linear em relação a  $y'$ .

Suponha que  $f$  é linear em relação a  $y'$ , isto é,

$$f(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'.$$

Neste caso, a equação de Euler-Lagrange será

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

isto é, uma equação diferencial fornecendo, como o caso anterior, uma relação funcional que satisfará excepcionalmente as condições de fronteira. No caso particular em que numa região  $D$  do plano  $xOy$  se cumprir

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

a função

$$f(x, y, y') = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

será uma diferencial total e, logo, o valor do funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y') dx = \int_{(a,A)}^{(b,B)} (Mdx + Ndy)$$

não dependerá do caminho de integração. Em outras palavras,  $J[y(x)]$  assumirá o mesmo valor para qualquer  $y(x)$  admissível e então o problema variacional se torna sem sentido.

**Exemplo 1.5** Considere o funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b (y^2 + 2xyy') dx,$$

com as condições de fronteira  $y(a) = A$  e  $y(b) = B$  e com  $f$  linear em relação a  $y'$ .

Como, para este funcional

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

e

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y,$$

temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

e, portanto,  $(y^2 + 2xyy')dx$  é uma diferencial total. Assim, a respectiva integral não depende do caminho de integração  $y(x)$  ligando os pontos  $(a, A)$  e  $(b, B)$  e assim, o problema variacional não apresenta nenhum interesse.

Para os cinco exemplos desta seção tomamos como referência a apresentação de [27].

## 1.7 Geodésicas

Nesta seção focalizaremos o problema das geodésicas, que já foi introduzido na seção 3 e será resolvido aqui de maneira bem detalhada.

1. Voltaremos agora ao problema apresentado no item 2 da seção 3: qual é o arco de menor comprimento ligando dois pontos de uma dada superfície? Tal arco é chamado **geodésica** da superfície. O caso especial no plano, proposto no item 1 da seção 3 já foi resolvido na seção 6 (a solução é a linha reta). De acordo com (1.10) a função integrando para este problema é

$$f = \sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2} \quad (1.39)$$

onde  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são funções dadas nas coordenadas  $u$ ,  $v$  da superfície. De (1.32) com  $u$  e  $v$  fazendo os papéis de  $x$  e  $y$  respectivamente, a equação de Euler-Lagrange para (1.39) fica

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial v} + 2v' \frac{\partial Q}{\partial v} + v'^2 \frac{\partial R}{\partial v}}{2\sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}} - \frac{d}{du} \left( \frac{Q + Rv'}{\sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}} \right) = 0. \quad (1.40)$$

No caso especial onde  $P$ ,  $Q$  e  $R$  dependem explicitamente só de  $u$ , (1.40) fica

$$\frac{Q + Rv'}{\sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2}} = C_1 \quad (1.41)$$

onde  $C_1$  é uma constante arbitrária. No caso  $Q = 0$ , que ocorre quando as curvas  $u = cte$  na superfície são ortogonais às curvas  $v = cte$ ,  $v$  pode ser expresso diretamente, em termos de  $u$ , pela seguinte integral

$$v(u) = C_1 \int \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{R^2 - C_1^2 R}} du. \quad (1.42)$$

Obtemos esta integral usando que  $v' = \frac{dv}{du}$  e que  $P$  e  $R$  são funções de  $u$  somente. A constante de integração em (1.42) e a constante  $C_1$  são determinadas

de acordo com as condições do problema, impondo-se que (1.42) passe pelos pontos dados.

2. Ainda supondo que  $Q = 0$ , mas agora assumindo que  $P$  e  $R$  são funções que dependem explicitamente só de  $v$ , obtemos, de acordo com (1.35) e (1.39), que

$$\frac{Rv'^2}{\sqrt{P + Rv'^2}} - \sqrt{P + Rv'^2} = C_1, \quad (1.43)$$

e como  $v' = \frac{dv}{du}$ , segue que

$$u(v) = C_1 \int \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{P^2 - C_1^2 P}} dv. \quad (1.44)$$

3. Iremos considerar agora um caso particular: a geodésica ligando dois pontos na superfície de uma esfera. Descreveremos a posição dos dois pontos na esfera usando a *colatitude*  $v$  e a *longitude*  $u$ . Então

$$x = a \sen v \cos u; \quad y = a \sen v \sen u; \quad z = a \cos v, \quad (1.45)$$

onde  $a$  é o raio da esfera e  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 \leq v \leq \pi$ .

De (1.6), (1.7), (1.8) temos que  $P = a^2 \sen^2 v$ ,  $R = a^2$  e  $Q = 0$ . Então, como  $Q = 0$  e  $P$  e  $R$  são funções que dependem explicitamente só de  $v$ , usamos (1.44) para obter

$$u = C_1 \int \frac{dv}{\sqrt{a^2 \sen^4 v - C_1^2 \sen^2 v}} dv = -\arcsen \frac{\cot v}{\sqrt{(a/C_1)^2 - 1}} + C_2. \quad (1.46)$$

Fazendo uma manipulação trigonométrica neste último resultado obtemos

$$a(\sen C_2) \sen v \cos u - a(\cos C_2) \sen v \sen u - \frac{a \cos v}{\sqrt{(a/C_1)^2 - 1}} = 0, \quad (1.47)$$

que é a equação da geodésica definida implicitamente  $f(u, v) = 0$ .

Usando então (1.45) vemos que as geodésicas da esfera estão no plano

$$x \sen C_2 - y \cos C_2 - \frac{z}{\sqrt{(a/C_1)^2 - 1}} = 0 \quad (1.48)$$

que passa no centro da esfera. Assim, o resultado é familiar: o arco de menor comprimento ligando dois pontos na superfície de uma esfera é a intersecção da esfera com o plano contendo os pontos dados e o centro da esfera, o chamado **arco do grande círculo**.

4. Iremos agora obter a geodésica de uma superfície de revolução qualquer. Para isto, consideremos a superfície  $S$

$$y^2 + z^2 = [g(x)]^2 \quad (1.49)$$

gerada pela rotação da curva  $y = g(x)$  com  $g \geq 0$  sobre o eixo  $x$ . Uma parametrização conveniente para esta superfície é:

$$x = u, \quad y = g(u) \cos v, \quad z = g(u) \sin v \quad (1.50)$$

com  $0 < v < 2\pi$ ;  $a < u < b$ , ou seja, estamos considerando esta parametrização de um aberto  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < v < 2\pi, a < u < b\}$  em  $S$ . Percebemos também que (1.50) satisfaz (1.49). De (1.6), (1.7), (1.8) e (1.49) temos que  $P = 1 + [g'(u)]^2$ ;  $R = [g(u)]^2$ ,  $Q = 0$ , e portanto, as funções  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  dependem só de  $u$  explicitamente. Aplicamos então o resultado (1.42) que nos dá:

$$v(u) = C_1 \int \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{R^2 - C_1^2 R}} du = C_1 \int \frac{\sqrt{1 + [g'(u)]^2}}{g(u) \sqrt{[g(u)]^2 - C_1^2}} du \quad (1.51)$$

e temos agora uma expressão que nos permite encontrar as geodésicas de qualquer superfície gerada pela rotação de uma curva em torno do eixo  $x$ .

No último capítulo deste texto iremos apresentar algumas sugestões de projetos que podem ser trabalhados com os alunos. Nestes projetos iremos complementar o estudo das geodésicas através de visualizações e construções usando o **Mathematica**.

A referência básica para esta seção foi o texto de [45].

## 1.8 O problema da braquistócrona

Nesta seção iremos apresentar de maneira bem detalhada o problema mais famoso do cálculo variacional. Apresentaremos também uma variação do problema envolvendo atrito, além de fazermos uso de recurso computacionais para o estudo do problema. Já vimos anteriormente que o problema da Braquistócrona foi proposto por *Johann Bernoulli* em 1696. Na seção 4, vimos que o problema consiste em: dados dois pontos  $A$  e  $B$  em um plano vertical, encontrar a curva que uma partícula  $M$  precisa seguir para sair de  $A$  e chegar em  $B$  no menor tempo possível. Supomos que a partícula esteja sujeita somente à ação da força da gravidade.

### 1.8.1 O problema clássico

Com os casos vistos na seção 1.6 temos condições de resolver este problema. Da seção 1.4, sabemos que o integrando

$$f = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_0}} \quad (1.52)$$

da integral (1.13) é explicitamente independente da variável independente  $x$ . Podemos então usar o resultado apresentado no item 2 da seção 1.6 que fornece

$$y' \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - f = C_1. \quad (1.53)$$

De (1.52) obtemos:

$$\frac{y'^2}{\sqrt{(y - y_0)(1 + y'^2)}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_0}} = C_1. \quad (1.54)$$

Resolvendo (1.54) para  $y' = \frac{dy}{dx}$ , integrando ambos os lados da expressão resultante e escrevendo  $C_1$  como uma constante arbitrária  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{2a}}$  temos:

$$x = \int \frac{\sqrt{y - y_0}}{\sqrt{2a - (y - y_0)}} dy. \quad (1.55)$$



Para resolver esta integral substituímos

$$y - y_0 = 2a \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.56)$$

e com isso (1.55) fica

$$x = 2a \int \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} d\theta = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) + x_0, \quad (1.57)$$

onde  $x_0$  é a constante de integração.

Reescrevendo (1.56) e combinando com (1.57) temos

$$x = x_0 + a(\theta - \operatorname{sen} \theta), \quad y = y_0 + a(1 - \cos \theta) \quad (1.58)$$

para as equações paramétricas da requerida curva que faz com que a partícula desça mais rápido.

Reconhecemos estas equações como sendo as de uma cicloide gerada pelo movimento de um ponto fixo em uma circunferência de um círculo de raio  $a$  que rola no lado positivo de uma dada linha  $y = y_0$ .

Essa resolução do problema da Braquistócrona mostrada acima foi feita utilizando a teoria do cálculo das variações. Mas, como já sabemos, na época em que o problema foi proposto muitas soluções foram apresentadas. A mais importante foi a de *James Bernoulli* (1654-1705) que deu origem a um novo ramo de pesquisa na matemática: o cálculo variacional. Mas, muitas dessas soluções eram extremamente interessantes e geniais, como é o caso da proposta por *Johann Bernoulli*, que é uma mistura de física e geometria. Apresentaremos agora, como curiosidade, um esquema dessa solução de *Johann Bernoulli*.

1. Desça a partícula por onde descer, quando ela tiver descido uma altura  $h$ , sua velocidade será  $\sqrt{2gh}$  (**Lei da Queda Livre**). Não sabemos, neste momento, qual é a direção dessa velocidade.
2. Pelo **Princípio de Fermat**, sabemos que a luz viaja de um ponto para outro no menor tempo possível.

3. Sabemos também, pelo **fenômeno da refração**, que a luz tem uma velocidade diferente conforme o meio em que se propaga (veja figura 1.3). Se tivermos dois meios distintos, nos quais a luz se propaga com velocidades  $v_1$ ,  $v_2$ , a lei de refração nos dá

$$\frac{\text{sen } \mu_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \mu_2}{v_2} = \text{cte} = K. \quad (1.59)$$

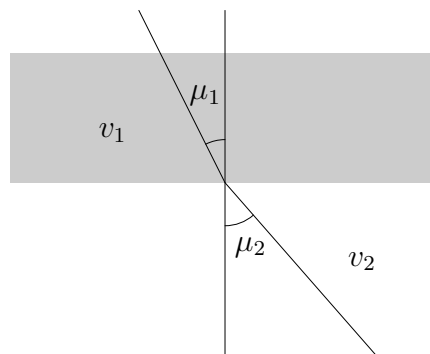


Figura 1.3: Esquema para o fenômeno da refração da luz.

4. Imaginemos um meio óptico formado por lâminas  $l_1, l_2, \dots, l_n$  horizontais e finas tais que a velocidade da luz em cada lâmina é  $v_1, v_2, \dots, v_n$  conforme mostra a figura 1.4. Então, um raio de luz que parte de  $A$  e chegue a  $B$ , seguirá uma trajetória como a indicada na figura 1.4, de modo que

$$\frac{\text{sen } \mu_j}{v_j} = K. \quad (1.60)$$

E esse caminho percorrido pelo raio de luz é o que fornece tempo mínimo para ir de  $A$  a  $B$  com as velocidades indicadas.

5. Neste problema, sabemos que a velocidade, depois da partícula descer uma altura  $h$  é  $\sqrt{2gh}$ . Então, o caminho que dá o tempo mínimo será o caminho

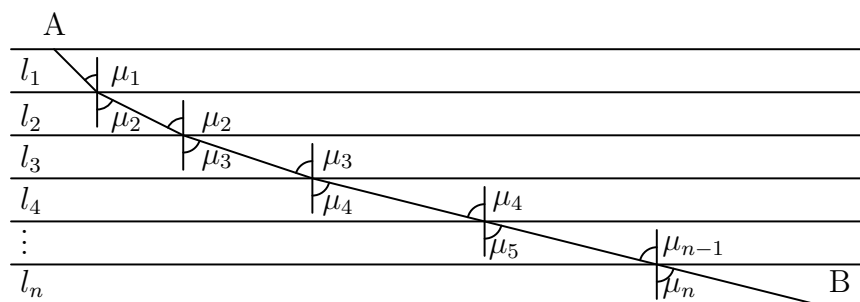


Figura 1.4: Meio óptico e a trajetória descrita por um raio de luz partindo de  $A$  e chegando em  $B$ .

seguido por um raio de luz num meio tal que a velocidade da luz varie continuamente com a descida  $h$  e seja precisamente  $\sqrt{2gh}$ . Mas, sabemos que, para este caminho, teremos

$$\frac{\text{sen } \mu}{\sqrt{2gh}} = K, \quad (1.61)$$

sendo  $\mu$  o ângulo que tal caminho faz com a vertical (veja figura 1.5).

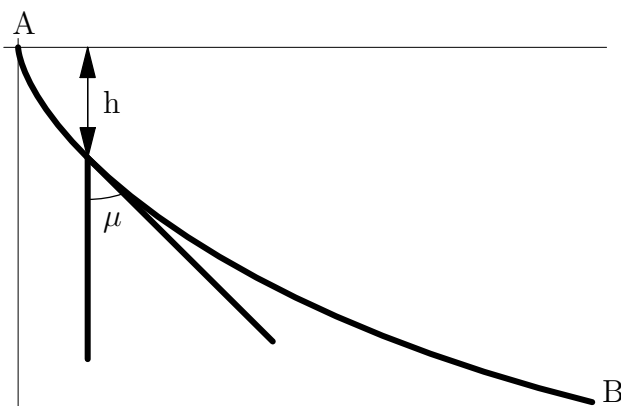


Figura 1.5: Ângulo que o caminho descrito pelo raio de luz faz com a vertical.

6. Assim, a curva que dá o caminho de tempo mínimo compatível com a velocidade indicada em cada altura,  $v = \sqrt{2gh}$  é a que satisfaz (1.61).

Vamos, agora, ver que a cicloide é a curva que satisfaz esta condição. A

equação da cicloide é  $x = r\alpha - r \sin \alpha$ ,  $y = r \cos \alpha - r$ . Logo,

$$\frac{dx}{d\alpha} = r - r \cos \alpha, \quad \frac{dy}{d\alpha} = -r \sin \alpha. \quad (1.62)$$

Por outro lado,

$$\tan \mu = \frac{dx}{dy} = \frac{1 - \cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\tan \frac{\alpha}{2}$$

e, portanto,

$$\tan \mu = -\tan \frac{\alpha}{2}. \quad (1.63)$$

Assim,

$$\mu = \left| \frac{\alpha}{2} \right|. \quad (1.64)$$

Também,

$$v = \sqrt{2gr(1 - \cos \alpha)} = 2\sqrt{gr} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (1.65)$$

Assim, de fato,

$$\frac{\sin \mu}{v} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gr}} = \frac{1}{2\sqrt{gr}} = cte = K, \quad (1.66)$$

onde  $K$  não depende de  $\alpha$ . Portanto, a cicloide tem a propriedade que procuramos e assim, ela é a solução do problema da Braquistócrona, como já havíamos obtido na resolução variacional do problema.

Acreditamos que é de suma importância o professor apresentar aos alunos várias formas de resolver um mesmo problema, mostrando maneiras alternativas e de que formas um determinado problema era resolvido na época em que foi proposto. Assim, os alunos poderão perceber o porquê do desenvolvimento de novas teorias, novos campos de pesquisa na matemática e quais as importâncias desse desenvolvimento. No caso deste problema da Braquistócrona, é interessante questionar também a idéia intuitiva que a maioria das pessoas têm: o caminho que minimiza o tempo de descida de uma partícula a um ponto dado, num plano inclinado é a linha reta. É realmente surpreendente que a resposta do problema seja um arco de cicloide e não uma reta

como a intuição sugere. Levando em conta este fato, é interessante calcular o tempo de descida pela cicloide e pela reta, com a mesma velocidade, para validar a solução encontrada pelos métodos apresentados nesta seção. É isto que faremos agora.

Vamos tomar os pontos  $A = (0, 0)$ ,  $B = (\pi, 2)$ ,  $C = (2\pi, 1)$  num plano inclinado e considerar  $g = 10m/s^2$ . Iremos calcular o tempo que uma partícula leva para ir de  $A$  a  $B$  por uma reta e por um arco de cicloide. Em seguida, faremos o mesmo para os pontos  $A$  e  $C$ . Para calcular os tempos precisaremos calcular a integral (1.13), que pode também ser escrita como

$$t = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (1.67)$$

Primeiro Caso: avaliar o tempo que uma partícula leva para ir de  $A$  a  $B$  num plano inclinado pela reta  $y = \frac{2}{\pi}x$  e pelo arco de cicloide  $x = \theta - \sin \theta$ ,  $y = 1 - \cos \theta$ . Para a reta, a integral fica

$$t = \int_0^\pi \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}}{\sqrt{\frac{40x}{\pi}}} dx = 1.17769, \quad (1.68)$$

e para o arco de cicloide

$$t = 0.993459. \quad (1.69)$$

Segundo Caso: fazendo os mesmos cálculos só que agora para os pontos  $A$  e  $C$ , para a reta  $y = \frac{x}{2\pi}$  e para o mesmo arco de cicloide obtemos para a reta

$$t = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}}}{\sqrt{\frac{10x}{\pi}}} dx = 2.84529 \quad (1.70)$$

e para o arco de cicloide

$$t = 1.57859. \quad (1.71)$$

Por (1.68), (1.69), (1.70) e (1.71) podemos perceber que, de fato, a descida é mais

rápida pelo arco de cicloide confirmando assim nossas respostas encontradas anteriormente. Para estes cálculos consideramos  $g = 10m/s^2$ .

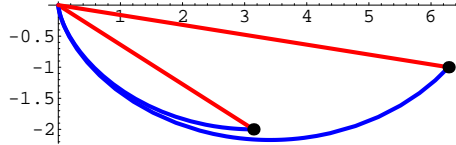


Figura 1.6: Os dois segmentos de reta e os dois arcos de cicloide considerados, visualizados simultaneamente.

### 1.8.2 Braquistócrona com atrito

É interessante também, apresentar uma aplicação prática do problema estudado e, neste caso da Braquistócrona apresentado anteriormente, não estamos em uma situação cotidiana onde o atrito e a resistência do ar devem ser levados em consideração. Vamos estudar então, o que acontece se tivermos o atrito sendo considerado. (Não consideraremos o atrito cinético porque seu efeito no problema é muito pequeno.)

Vamos tomar a origem como sendo o ponto inicial e orientar o eixo  $y$  como sendo positivo para baixo. Queremos encontrar a “curva de descida mais rápida” começando em  $(0, 0)$  e chegando a um ponto arbitrário  $(a, b)$ . Na figura 1.7 temos um esquema das forças agindo na partícula.

Para um ponto  $(x, y)$  na curva, os vetores tangentes e normais podem ser escritos em termos do comprimento de arco  $s$  como

$$T = \frac{dx}{ds}\hat{i} + \frac{dy}{ds}\hat{j} \quad (1.72)$$

e

$$N = -\frac{dy}{ds}\hat{i} + \frac{dx}{ds}\hat{j}. \quad (1.73)$$

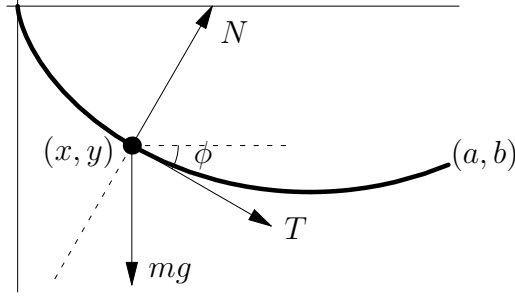


Figura 1.7: Esquema das forças agindo na partícula.

As forças de gravidade e de atrito são dadas por

$$F_g = mg\hat{j} \quad e \quad F_{atr} = -\mu(F_g N)T = -\mu mg \frac{dx}{ds} T \quad (1.74)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito.

Então, as componentes na direção de  $T$  são

$$F_g T = mg \frac{dy}{ds} \quad e \quad F_{atr} T = -\mu mg \frac{dx}{ds}. \quad (1.75)$$

Escrevendo a **Primeira Lei de Newton** usando essas componentes temos

$$m \frac{dv}{dt} = mg \frac{dy}{ds} = -\mu mg \frac{dx}{ds} \quad (1.76)$$

e fazendo a substituição  $\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{ds}$  em (1.76) e depois integrando com relação a  $s$  temos:

$$\frac{1}{2} v^2 = g(y - \mu x) \quad ou \quad v = \sqrt{2g(y - \mu x)} \quad (1.77)$$

e então aplicando a regra da cadeia para  $v = \frac{ds}{dt}$  e usando a fórmula do comprimento de arco para  $\frac{ds}{dx}$  para resolver para  $\frac{dx}{dt}$  como função de  $x$ , podemos obter o tempo total

$$t(x, y, y') = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2g(y - \mu x)}} dx. \quad (1.78)$$

Escrevendo a equação de Euler-Lagrange para (1.78) obtemos

$$(1 + (y')^2)(1 + \mu y') + 2(y - \mu x)y'' = 0 \quad (1.79)$$

que através de duas substituições e uma integração por frações parciais se reduz a

$$\frac{(1 + (y')^2)}{(1 + \mu y')^2} = \frac{C}{y - \mu x} \quad (1.80)$$

para alguma constante  $C$  não negativa.

Então, substituímos  $y'$  por  $\cot(\frac{\theta}{2})$  em (1.80) e obtemos uma solução paramétrica para nossa curva. Denotando a parametrização da cicloide por  $x_c(\theta) = \rho(\theta - \sin \theta)$  e  $y_c(\theta) = \rho(1 - \cos \theta)$  a nova curva de descida mais rápida para o problema da Braquistócrona é dada por

$$x(\theta) = x_c(\theta) + \mu\rho(1 - \cos \theta) \quad e \quad y(\theta) = y_c(\theta) + \mu\rho(\theta + \sin \theta). \quad (1.81)$$

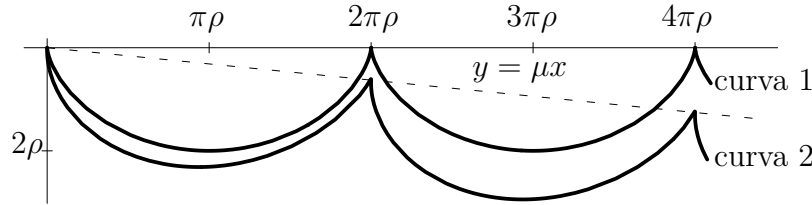


Figura 1.8: Comparação entre a cicloide (curva 1) e a curva solução da Braquistócrona com atrito (curva 2).

As parametrizações em (1.81) e para a cicloide em (1.56) são válidas para  $0 \leq \theta \leq \theta_f$  onde  $\rho$  e  $\theta_f$  precisam ser tais que a curva passe pelo ponto final  $(a, b)$ .

A figura 1.8 mostra uma comparação entre a cicloide e a nova curva que obtemos no caso em que consideramos o atrito.

Para construirmos a figura 1.9 precisamos determinar  $\rho$  e  $\theta$  para que a curva termine no ponto desejado. Para isto, impomos que  $x(\theta, \rho) = 3$  e  $y(\theta, \rho) = 0.3$ . Este é um sistema não-linear que não é simples de ser resolvido diretamente. Uma forma eficiente de resolvê-lo é fazer uma estimativa gráfica da solução via interseção de curvas de nível. Estas curvas de nível devem ser consideradas numa região  $[\theta_0, \theta_f] \times [\rho_0, \rho_f]$  que nos permita visualizar a interseção desejada e assim, obter uma estimativa inicial



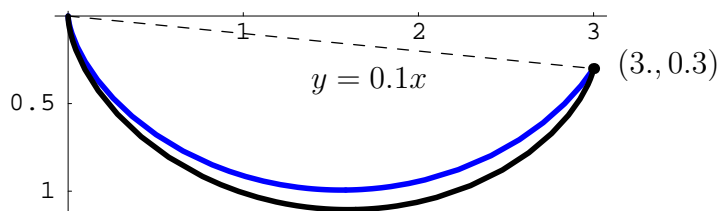


Figura 1.9: Comparação entre a cicloide sem atrito e a curva solução da Braquistócrona com coeficiente de atrito  $\mu = 0.1$ .

para  $\theta$  e  $\rho$ . Feita esta estimativa, usamos um método numérico (como, por exemplo, o método de Newton, que é apresentado em [35]) para refinar tal solução. Desta maneira, obtemos  $\rho$  e  $\theta$  desejados. Daí, usando (1.81) no funcional (1.78) obtemos o tempo de descida pela curva solução do problema com coeficiente de atrito  $\mu = 0.1$ . Este tempo é  $t = 0.7654$ , o que significa que a descida por essa curva é 20.3% mais lenta que pela cicloide sem atrito, já que o tempo de descida pela cicloide sem atrito é de  $t = 0.63623$ . Se substituirmos  $x_c(\theta)$  e  $y_c(\theta)$  no funcional (1.78) obteríamos qual seria o tempo de descida pela cicloide, ainda considerando  $\mu = 0.1$ . Esse tempo é 0.77439, o que mostra que a descida pela cicloide com atrito é 21.7% mais lenta que pela cicloide sem atrito. Essas comparações mostram que, de fato, ao levarmos em consideração o atrito, a cicloide deixa de ser a curva de descida mais rápida. Neste caso, o mais rápido é descer pela curva (1.81).

Nesta figura 1.9 temos uma comparação melhor entre a curva mais rápida deste problema com coeficiente de atrito  $\mu = 0.1$  (curva 2) e a cicloide sem atrito (curva 1). Note que a cicloide fica acima da nova curva solução.

Embora este novo modelo leve em consideração o atrito, ele ainda não descreve o problema de maneira fiel à realidade. Isto porque não leva em consideração o atrito de Coulomb<sup>2</sup> [40]. Se considerarmos o atrito de Coulomb, e levarmos em

<sup>2</sup>As forças de atrito de Coulomb resultam da interação entre corpos que estão em contato. Têm orientações opostas às forças aplicadas na direção do possível movimento. A expressão para tais forças foi obtida por Coulomb como sendo  $F = \mu N$ , onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito e  $N$  é a força

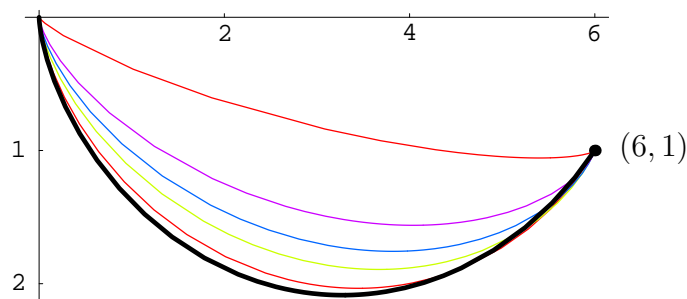


Figura 1.10: Ilustração mostrando curvas soluções da Braquistócrona com diferentes coeficientes de atrito. A curva que está abaixo de todas é a cicloide ( $\mu = 0$ ) ( $t = 0.855871$ ), as que estão acima da cicloide representam as curvas mais rápidas de descida considerando  $\mu = 0.04$  ( $t = 0.912734$ ),  $\mu = 0.08$  ( $t = 0.992069$ ),  $\mu = 0.1$  ( $t = 1.04977$ ),  $\mu = 0.12$  ( $t = 1.13532$ ),  $\mu = 0.16$  ( $t = 1.80516$ ), nesta ordem, da cicloide para cima. Os valores de  $t$  entre parênteses correspondem ao tempo de descida pela curva considerada.

consideração que

$$\cos \phi = \frac{dx}{ds},$$

teremos que a força normal para este caso é

$$N = mg \cos \phi + mv \frac{d\phi}{dt}.$$

Também é interessante notar que, neste caso com o atrito de Coulomb, quanto maior o coeficiente de atrito, mais a curva de descida mais rápida se aproxima de uma reta. Além disso, a cicloide fica sempre abaixo das curvas com atrito. É exatamente isto que mostra a figura 1.10. Para a construção dessa figura, fizemos um raciocínio análogo ao feito na construção da figura 1.9. Esta situação com o atrito de Coulomb é tratada de maneira detalhada em [2]. Exploraremos um pouco mais desta situação nos projetos apresentados no último capítulo deste texto. Para os cálculos dos tempos apresentados nesta subseção utilizamos  $g = 32.174 \text{ ft/s}^2 = 9.8 \text{ m/s}^2$  para podermos comparar com os resultados apresentados em [23].

---

de interação entre os corpos, que é normal ao plano definido pelo contato dos mesmos.

Essa abordagem do problema da Braquistócrona e suas variações utilizando ferramentas computacionais é interessante porque possibilita que os alunos verifiquem suas intuições matemáticas e passem a explorar questões sobre as quais nunca haviam pensado anteriormente. Se houver tempo durante as aulas, o professor pode fazer alguns ensaios com seus alunos utilizando esferas de metal e ciclóides de papelão para que o problema possa ser concretizado e os alunos possam visualizar melhor a situação com a qual estão trabalhando. Alguns exemplos destas atividades podem ser encontrados em [21]. A ciclóide é uma curva muito especial, não é somente braquistócrona. Tem outras propriedades muito interessantes. Vejamos algumas delas:

1. A área por baixo da ciclóide é exatamente três vezes a área do círculo que lhe dá origem;
2. O comprimento da ciclóide é 4 vezes o do diâmetro do círculo que lhe dá origem;
3. A ciclóide é **tautócrona**, isto é, é a curva de tempos iguais.

Essa propriedade, descoberta por *Huygens* explica que se conseguirmos construir um pêndulo tal que o peso descreva um arco de ciclóide, então não importa que a amplitude seja maior ou menor. O seu período será sempre o mesmo. Assim, se construirmos um relógio de pêndulo com esta característica, mesmo que a amplitude variar, o pêndulo continuará marcando o tempo corretamente.

Em [21], encontramos diversas atividades que podem ser feitas pelo professor com seus alunos a fim de facilitar a visualização dessas propriedades da ciclóide. Trabalharemos um pouco mais com essas propriedades da ciclóide nos projetos do último capítulo deste texto.

Nossas referências para esta seção foram os textos de [21], [23], [2] e [45].

## 1.9 Superfície de revolução de área mínima

O objetivo desta seção é dar uma visão geral do problema da superfície de revolução de área mínima.

Já vimos na seção 3 que o problema da superfície de revolução de área mínima consiste em: dados dois pontos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  buscamos passar de um para o outro ao longo de um arco  $y = y(x)$ , cuja rotação sobre o eixo  $x$  gera uma superfície de revolução cuja área incluída em  $x_1 \leq x \leq x_2$  seja mínima.

Assumimos que  $y_1 > 0$ ,  $y_2 > 0$  e que  $y(x) \geq 0$  para todo  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Minimizaremos então a integral

$$I = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1.82)$$

que é a área da superfície de revolução através da escolha apropriada de  $y = y(x)$  para o qual  $y_1 = y(x_1)$  e  $y_2 = y(x_2)$ .

O integrando de (1.82) é explicitamente independente de  $x$  e então podemos usar os resultados da seção 6 para obter a integral primeira da equação de Euler-Lagrange.

Com (1.82) a equação (1.35) fica

$$\frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - y\sqrt{1 + y'^2} = C_1 \quad (1.83)$$

e daí obtemos diretamente que

$$x = -C_1 \int \frac{1}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} dy = -C_1 \cosh^{-1} \frac{y}{C_1} + C_2 \quad (1.84)$$

ou ainda, se escrevermos  $C_1 = -b$ ,  $C_2 = a$  e  $b$  positivo, (1.84) fica

$$y = b \cosh \frac{x - a}{b}. \quad (1.85)$$

A equação (1.85) representa uma curva chamada **catenária** e a correspondente superfície de revolução sobre o eixo  $x$  é chamada **catenóide de revolução**. Precisamos ajustar as constantes arbitrárias  $a$  e  $b$  para que a catenária passe por  $(x_1, y_1)$ ,

$(x_2, y_2)$ . Vamos ver agora quando isto é possível.

Escolhemos uma família de catenárias na qual cada membro passe pelo ponto  $(x_1, y_1)$ .

Então, cada membro da família é dado por

$$y_1 = b \cosh \frac{x_1 - a}{b}. \quad (1.86)$$

O problema é então decidir, se existir, qual dessas catenárias passa pelo segundo ponto  $(x_2, y_2)$ . Na figura 1.11 são mostradas várias catenárias passando por  $(x_1, y_1)$ .

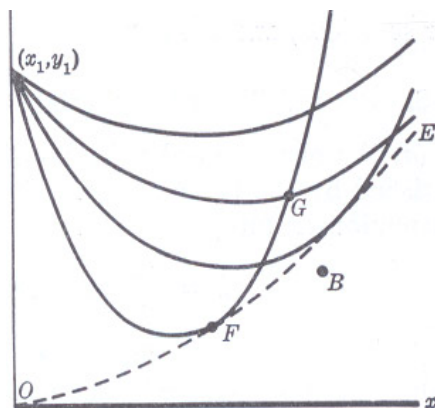


Figura 1.11: Ilustração extraída de [45, p. 31] mostrando catenárias passando por  $(x_1, y_1)$ .

Tomando esta figura como base faremos algumas afirmações sem provar:

1. cada membro da família definido por (1.85) e (1.86) é tangente a curva tracejada  $OE$ , a envoltória da família;
2. nenhum membro da família passa por um ponto  $B$  que é separado de  $(x_1, y_1)$  pela envoltória;
3. um, e somente um, membro passa por um dado ponto  $F$  na envoltória do qual é ponto de tangência;
4. através de qualquer ponto  $G$  não separado de  $(x_1, y_1)$  pela envoltória passam dois membros da família.

Com essa discussão, percebemos que a catenária nem sempre é solução do problema. Se, por exemplo, o ponto  $(x_2, y_2)$  está em  $B$ , nenhum membro de (1.85) passará por ele e concluímos que a superfície de revolução de área mínima não é gerada por nenhuma curva da forma  $y = y(x)$ , onde  $y(x)$  é duas vezes diferenciável. Pode-se mostrar que, neste caso, a área mínima é gerada por linhas quebradas cujos três segmentos são dados por  $x = x_1$  ( $0 \leq y \leq y_1$ )  $y = 0$  ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ) e  $x = x_2$  ( $0 \leq y \leq y_2$ ). Essa solução é chamada **solução descontínua de Goldschmidt**. Em [44] é feito um estudo bem detalhado a respeito da existência ou não da catenária como solução deste problema. Aqui, não estudamos este problema com tantos detalhes porque a teoria que temos até este ponto é ainda bastante limitada para isto. Para esta seção tomamos como referência principal a apresentação de [45]. No capítulo seguinte estudaremos uma outra situação do cálculo variacional: os problemas isoperimétricos.



## Capítulo 2

# Problemas Isoperimétricos

### 2.1 Introdução

Conforme já citamos no capítulo 1, um dos problemas de otimização mais antigo de que se tem notícia é o **Problema de Dido** (850 a.C.). Este problema pertence à classe dos chamados **Problemas Isoperimétricos**. Os problemas isoperimétricos são aqueles nos quais queremos minimizar ou maximizar uma integral impondo alguma restrição, como por exemplo que uma outra integral se mantenha constante. Isto ficará mais claro nas próximas seções deste capítulo.

Os problemas isoperimétricos começaram a ser estudados já há muito tempo. Na inacabada obra de **Descartes** (1596-1650), *Regulae ad Directionem Ingenii*, encontramos passos iniciais no estudo desse tipo de problema. É nesta obra que Descartes começa a pensar numa maneira de mostrar que o perímetro de um círculo é maior que o de qualquer outra figura de mesma área, que é o dual de um dos problemas isoperimétricos clássicos. Mas Descartes não chegou a mostrar o que desejava. Para ele, bastava provar o fato para algumas figuras particulares e daí concluir, por indução que o mesmo vale para todas as demais figuras. É o chamado **Pensamento Indutivo**. Mas, sabemos que não podemos concluir nada apenas estudando algumas figuras particulares. É preciso que seja feita uma demonstração geral do fato. Duzentos anos depois da morte de Descartes, o físico **Lord Rayleigh** (1842-1919)



investigou os tons das membranas. Os tambores são normalmente de forma circular, mas podem ser construídos com qualquer forma. Lord Rayleigh comparou os tons principais de membranas de diferentes formas, porém de igual área e sujeitas às mesmas condições físicas. De todas as membranas estudadas, a circular é a que possui tom principal mais forte. Note que se trata de um problema isoperimétrico, porque queremos obter um tom principal mais forte impondo que as membranas tenham todas a mesma área.

Estes são alguns exemplos que ilustram a importância desses problemas, que têm merecido atenção dos matemáticos há muito tempo. Atualmente, existem ferramentas mais avançadas que permitem estudá-los com maior rigor e precisão. Veremos, a partir da próxima seção, que o cálculo variacional é uma dessas ferramentas que auxiliam no estudo dos problemas isoperimétricos. Este texto introdutório foi escrito tendo como referências [33] e [41].

## 2.2 Problemas isoperimétricos simples

O chamado **problema isoperimétrico simples** consiste na determinação dos extremos do funcional

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (2.1)$$

no domínio das funções  $y = y(x) \in C^1[x_1, x_2]$  satisfazendo às condições

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx = l \quad (2.2)$$

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{e} \quad y(x_2) = y_2 \quad (2.3)$$

onde  $l$  é um número dado.

Assumimos que as funções  $f$  e  $g$  são continuamente diferenciáveis até a segunda ordem, inclusive, em relação a  $x, y, y'$  para  $x_1 \leq x \leq x_2$  e quaisquer  $y, y'$ .

Denotamos por  $y(x)$  a função extremal e introduzimos uma família  $Y(x)$  de “funções comparação”. Porém, aqui não podemos expressar  $Y(x)$  como sendo simplesmente

uma família de um parâmetro, porque qualquer mudança no valor desse parâmetro alteraria o valor de  $J$ , que deve ser mantido constante, de acordo com (2.2). Assim, introduzimos uma família com dois parâmetros

$$Y(x) = y(x) + \epsilon_1 \eta_1(x) + \epsilon_2 \eta_2(x) \quad (2.4)$$

onde  $\eta_1(x)$  e  $\eta_2(x)$  são funções diferenciáveis arbitrárias tais que

$$\eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = 0 = \eta_2(x_1) = \eta_2(x_2). \quad (2.5)$$

A condição (2.5) assegura que  $Y(x_1) = y(x_1) = y_1$  e  $Y(x_2) = y(x_2) = y_2$ , como desejamos, para todos os valores dos parâmetros  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ .

Trocando  $y(x)$  por  $Y(x)$  em (2.1) e (2.2) obtemos

$$I(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y') dx \quad (2.6)$$

e

$$J(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{x_1}^{x_2} g(x, Y, Y') dx. \quad (2.7)$$

É claro que  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  não são independentes, já que  $J$  é mantido constante. Então, de (2.7), segue que há uma relação funcional entre  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  dada por

$$J(\epsilon_1, \epsilon_2) = cte. \quad (2.8)$$

Sendo  $y(x)$  a atual função extremal temos, devido a (2.4), que (2.6) é um extremo com respeito aos valores de  $\epsilon_1, \epsilon_2$  que satisfaz (2.8) quando  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ , para uma escolha arbitrária, consistente com (2.5), das funções  $\eta_1$  e  $\eta_2$ .

O procedimento feito acima reduz nosso problema isoperimétrico simples ao já conhecido problema de encontrar as condições para as quais a função  $I(\epsilon_1, \epsilon_2)$  possui um extremo sobre a restrição (2.8). Para resolver esse problema usamos o **Método dos Multiplicadores de Lagrange** que é adaptado ao caso dos funcionais pelo teorema seguinte.

**Teorema 2 - Teorema de Euler** *Qualquer ponto crítico  $y = y(x)$  de*

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

*no domínio das funções sujeitas às condições*

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx = l, \quad y(x_1) = y_1 \quad e \quad y(x_2) = y_2$$

*e que não for ponto crítico do funcional  $J[y]$  será, ao se escolher convenientemente o número  $\lambda$  (multiplicador de Lagrange), um ponto crítico para*

$$I^* = \int_{x_1}^{x_2} f^*(x, y, y') dx, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

*e onde  $f^* = f + \lambda g$ .*

Assim, para resolver o problema isoperimétrico simples introduzimos a função de  $\epsilon_1, \epsilon_2$

$$I^* = I(\epsilon_1, \epsilon_2) + \lambda J(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{x_1}^{x_2} f^*(x, Y, Y') dx \quad (2.9)$$

onde, de acordo com (2.1) e (2.2),

$$f^* = f + \lambda g. \quad (2.10)$$

A constante  $\lambda$  é chamada **multiplicador de Lagrange**. Seu valor é determinado de acordo com as condições de cada problema ao qual o método é aplicado. Segundo o Teorema de Euler e os resultados acima, quando  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ , devemos ter

$$\frac{\partial I^*}{\partial \epsilon_1} = \frac{\partial I^*}{\partial \epsilon_2} = 0. \quad (2.11)$$

De (2.9) e (2.4) segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^*}{\partial \epsilon_j} &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon_j} + \frac{\partial f^*}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \epsilon_j} \right\} dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial Y} \eta_j + \frac{\partial f^*}{\partial Y'} \eta_j' \right\} dx \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sabemos que quando  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  podemos trocar  $(Y, Y')$  por  $(y, y')$  e temos então que

$$\frac{\partial I^*}{\partial \epsilon_j} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial y} \eta_j + \frac{\partial f^*}{\partial y'} \eta_j' \right\} dx \quad j = 1, 2 \quad (2.13)$$

devido a (2.11). Integrando por partes o segundo termo do integrando de (2.13) e usando (2.5) obtemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta_j \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f^*}{\partial y'} \right) \right\} dx = 0 \quad j = 1, 2. \quad (2.14)$$

Devido ao lema 1 do capítulo 1, temos que estas relações de (2.14) se resumem à equação diferencial

$$\frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f^*}{\partial y'} \right) = 0, \quad (2.15)$$

que é a equação de Euler-Lagrange, a ser satisfeita pela função  $y(x)$ , que fornece um extremo para (2.1) sob a condição de (2.2) ser mantido com um valor fixo.

A solução da equação (2.15) é uma função que envolve três quantidades indeterminadas, duas constantes de integração e o multiplicador de Lagrange  $\lambda$ . Se a solução de um dado problema isoperimétrico do tipo discutido acima existe, essas quantidades podem ser determinadas usando as condições  $y(x_1) = y_1$ ,  $y(x_2) = y_2$  e o fato que a integral  $J$  de (2.2) é um valor constante. Para esta parte teórica nossas referências básicas são [27] e [45]. Resolveremos agora um dos mais famosos problemas isoperimétricos simples, o problema de Dido.

### 2.2.1 O problema de Dido

Já falamos um pouco sobre o Problema de Dido anteriormente. Vamos agora resolvê-lo lembrando que o problema é o seguinte: Determinar a curva fechada de comprimento  $2l$  que delimita a região plana de área máxima.

É claro que a curva que estamos procurando deve ser convexa, já que, caso contrário, poderia-se aumentar a área da região delimitada sem modificar o perímetro fazendo a substituição de qualquer arco côncavo  $BCD$  pelo seu simétrico em relação a uma

secante (veja figura 2.1). Assim, é conveniente abordar primeiro o problema de encontrar a linha  $y = y(x)$ ,  $y(-a) = y(a) = 0$  de comprimento  $l$ ,  $l > 2a$ , que delimita junto com o segmento  $-a \leq x \leq a$  a região de área máxima.

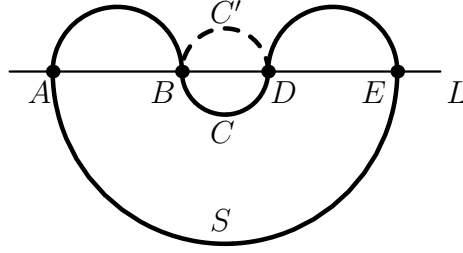


Figura 2.1: Ilustração mostrando que a curva solução do problema deve ser convexa.

Assim, temos que encontrar o máximo de

$$I[y(x)] = \int_{-a}^a y(x) dx \quad (2.16)$$

no domínio das funções para as quais  $y(-a) = y(a) = 0$ ,

$$J[y(x)] = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = l \quad (l > 2a). \quad (2.17)$$

Consideramos então a função  $f^* = f + \lambda g = y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$  e o funcional

$$I^* = \int_{-a}^a f^*(x) dx = \int_{-a}^a \left[ y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right] dx. \quad (2.18)$$

Escrevemos então sua equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f^*}{\partial y'} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + C_1 \quad (2.19)$$

de onde vem que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2}} \quad (2.20)$$

e integrando temos

$$(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = \lambda^2. \quad (2.21)$$

Logo, a curva procurada é um arco de circunferência de centro  $(-C_1, -C_2)$  e raio  $\lambda$ . Vamos então determinar essas constantes usando as condições de fronteira  $y(-a) = y(a) = 0$  e a restrição  $J[y(x)] = l$ . Assim, de

$$C_2^2 = \lambda^2 - (C_1 - a)^2 \quad (2.22)$$

e

$$C_2^2 = \lambda^2 - (C_1 + a)^2 \quad (2.23)$$

vem que  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \sqrt{\lambda^2 - a^2}$  e então

$$y = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2} \quad (2.24)$$

e

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}. \quad (2.25)$$

A condição  $J[y(x)] = l$  leva a

$$l = \int_{-a}^a \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx = 2\lambda \arcsen \frac{a}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{a}{\lambda} = \sen \frac{l}{2\lambda}. \quad (2.26)$$

A raiz  $\lambda = \lambda_0$  da equação (2.26) é o valor procurado de  $\lambda$ . Então,  $C_2 = \sqrt{\lambda_0^2 - a^2}$ . Precisamos agora ver se  $\lambda_0$  existe. De fato, tendo reduzido  $\frac{a}{\lambda} = \sen \frac{l}{2\lambda}$  (mediante a substituição  $\frac{l}{2\lambda} = t$ ) à forma  $\sen t = \frac{2a}{l}t$ , bastará observar que, em virtude de  $\frac{2a}{l} < 1$ , o gráfico de  $y = \sen t$  e a reta  $y = \frac{2a}{l}t$  se cortarão num ponto distinto da origem, ou seja,  $\lambda_0$  existe.

Daí, concluímos facilmente que a solução do problema inicial é o arco de circunferência com extremidades  $(-a, 0)$  e  $(a, 0)$ , centro  $(0, \sqrt{\lambda_0^2 - a^2})$  e raio  $\lambda_0$ . Dependendo do comprimento  $l$  da curva, a solução para o problema será um arco de circunferência menor ou um arco de circunferência maior. É exatamente isto que mostra a figura 2.2. Se as extremidades forem livres, a curva solução será um semi-círculo. É nessa situação que o problema de Dido é retratado na *Eneida* de Virgílio [43, p.48].

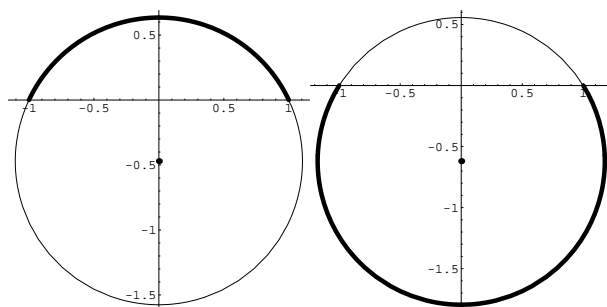


Figura 2.2: Ilustração mostrando que, dependendo do comprimento da curva, a solução do problema pode ser um arco de circunferência maior ou menor.

O problema de Dido está relacionado a um fenômeno que podemos observar facilmente. Se no interior de uma película de água e sabão flutuar um fio preso pelas suas extremidades  $a$  e  $b$  (figura 2.3), então este adquirirá, ao atingir sua posição de equilíbrio estável, a forma de um arco de circunferência. Isto ocorre, segundo [25], porque na posição de equilíbrio a energia potencial tem que ser mínima. Mas a energia potencial da superfície líquida é diretamente proporcional a sua área. Assim, no estado de equilíbrio estável, a área da película líquida se torna a menor possível e, portanto, a área sem líquido se torna a maior possível, adquirindo então a forma de semi-círculo (ver figura 2.4). Em [25] são abordados vários problemas envolvendo películas de sabão.

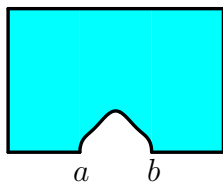


Figura 2.3: Ilustração mostrando um fio, preso por suas extremidades, flutuando no interior de uma película de sabão.

Devemos destacar também que, para os problemas isoperimétricos, vale a chamada **Lei da Reciprocidade** que diz os pontos críticos de (2.1) no domínio das funções sujeitas à condição (2.2) coincidem com os pontos críticos de  $J[y(x)]$  no domínio das

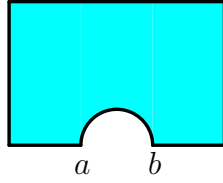


Figura 2.4: Ao atingir o equilíbrio, o fio procura tornar a área líquida da película a menor possível formando uma semi-circunferência.

funções para as quais  $I[y(x)] = cte$ .

Pela Lei da Reciprocidade, decorre da solução do problema de Dido, que de todos os contornos delimitando uma região de área dada, o de menor comprimento será circular.

Esta abordagem do problema de Dido foi feita com base na referência [27]. A seguir apresentaremos um pouco mais de resultados teóricos para que possamos resolver outro exemplo de problema isoperimétrico simples.

### 2.2.2 Funcionais em forma paramétrica

Se o domínio de um funcional compreender curvas que não podem ser dadas como  $y = y(x)$ , será necessário recorrer à representação paramétrica destas, a saber

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.27)$$

com  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  continuamente diferenciáveis e satisfazendo à condição

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \neq 0. \quad (2.28)$$

Nestas condições, um funcional de aspecto

$$I_c = \int_c f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt \quad (2.29)$$

onde  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ , não dependerá da parametrização adotada se, e somente se, o integrando  $f$  não depender explicitamente de  $t$  e for homogêneo de grau 1 em  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ , isto é, se

$$f(t, x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = kf(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad k > 0. \quad (2.30)$$



Se uma curva  $\tilde{C}$ , parametrizada por (2.27) for um extremal do funcional (2.29) na classe das funções suaves ligando dois pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ , então  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  obedecerão às equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (2.31)$$

A fim de resolvê-las, deve-se caracterizar a parametrização adotada impondo um vínculo a  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ . Por exemplo, se impusermos  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ , significa que estamos usando como parâmetro o comprimento de arco.

Como um recurso adicional, é interessante também apresentarmos a Equação de Euler-Lagrange na forma de Weierstrass, que é

$$\frac{1}{r} = \frac{f_{xy} - f_{yx}}{f_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (2.32)$$

onde  $r$  é o raio de curvatura da solução e  $f_1$  a função

$$f_1 = \frac{f_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{f_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2} = \frac{f_{\dot{x}\dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}}. \quad (2.33)$$

Para o desenvolvimento desta seção tomamos como referências básicas os textos de [27] e [45].

A seguir, usando esta teoria de funcionais na forma paramétrica, resolveremos o Problema de Kelvin.

### 2.2.3 O problema de Kelvin

Admitindo que sobre o plano  $xy$  se distribui uma massa de densidade contínua  $\mu(x, y)$  e dada uma curva suave por partes  $C$  com extremidades  $P_1, P_2$ , encontrar a curva de comprimento fixo  $l$  que une  $P_1$  a  $P_2$  e delimita, junto com  $C$ , a região  $D$  de maior massa possível.

Definindo-se a função

$$V(x, y) = \int \mu(x, y) dx, \quad (2.34)$$

usamos a fórmula de Green para escrever a massa como

$$\int \int_D \mu(x, y) dx dy = \int \int_D \frac{\partial V}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} V dy \quad (2.35)$$

onde  $\Gamma$  é o contorno constituído por uma curva  $L$  de extremidades  $P_1$  e  $P_2$  e pela curva dada  $C$ . Denotaremos por  $K$  o valor conhecido da integral curvilínea calculada ao longo de  $C$  e admitiremos que  $L$  esteja na forma paramétrica

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad \text{para} \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (2.36)$$

Podemos escrever então

$$\int \int_D \mu(x, y) dx dy = \int_{t_0}^{t_1} V(x, y) \dot{y} dt + k. \quad (2.37)$$

Assim, reduzimos nosso problema a determinar o máximo do funcional

$$J_L = \int_{t_0}^{t_1} V(x, y) \dot{y} dt \quad (2.38)$$

no domínio das curvas sujeitas à restrição

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = l. \quad (2.39)$$

Consideremos então a função  $F = V\dot{y} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  e escrevemos sua equação de Euler-Lagrange na forma de Weierstrass. Para isso calculamos  $F_{x\dot{y}} = \frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $F_{y\dot{x}} = 0$ ,  $F_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{\lambda\dot{y}^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$  e  $F_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{\lambda}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$  e daí, a equação de Euler-Lagrange na forma de Weierstrass fica

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (2.40)$$

Se levarmos em conta a definição de  $V(x, y)$ , esta equação tem a forma

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu(x, y)}{\lambda}, \quad (2.41)$$

onde  $r$  é o raio de curvatura do arco que maximiza o funcional (2.38).

No caso particular em que  $\mu(x, y) = cte$ , a curvatura será constante, isto é, qualquer arco que maximize (2.38) será um arco de circunferência.

Para a resolução deste problema tomamos como base a apresentação feita por [27].

## 2.3 Problemas isoperimétricos: caso geral

No caso mais geral, o problema isoperimétrico consiste em encontrar o extremo de um funcional

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx \quad (2.42)$$

no domínio das funções sujeitas às condições

$$y_k(x_0) = y_k^0 \quad y_k(x_1) = y_k^1, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.43)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} g_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = l_i \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.44)$$

onde  $l_i$  são números dados.

Seguindo a idéia que usamos no caso do problema isoperimétrico simples, iremos introduzir uma família de “funções comparação”  $Y(x)$  com  $m+1$  parâmetros e aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange. Concluiremos daí que a função  $y(x)$  que fornece um extremo para (2.42) precisa satisfazer o sistema de equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f^*}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f^*}{\partial y'_k} \right) = 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (2.45)$$

onde

$$f^* = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i \quad (2.46)$$

e as constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  são multiplicadores indeterminados cujos valores são encontrados de acordo com as condições dadas em cada problema.

### 2.3.1 Uma outra abordagem para o problema das geodésicas

Sabemos que a distância entre dois pontos dados no espaço, medida ao longo de um arco suave  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  ligando esses pontos, é dada pela integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (2.47)$$

onde  $t_1, t_2$  são os valores de  $t$  que correspondem aos pontos dados. Se queremos que o arco da menor distância entre esses pontos esteja na superfície

$$G(x, y, z) = 0, \quad (2.48)$$

então analisamos as funções que fornecem um extremo para a integral (2.47) com respeito às funções continuamente diferenciáveis  $x, y, z$  que satisfazem (2.48) e que são determinadas em  $t = t_1$  e  $t = t_2$ .

Definimos então a função

$$f^* = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \mu(t)G(x, y, z). \quad (2.49)$$

Assim, para (2.49) o sistema de equações de Euler-Lagrange fica:

$$\mu \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{f} \right) = 0, \quad \mu \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{f} \right) = 0, \quad \mu \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{z}}{f} \right) = 0 \quad (2.50)$$

onde, para simplificar, estamos denotando  $f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{ds}{dt}$ .

Isolando a função  $\mu(t)$  em (2.50) temos o seguinte par de equações

$$\frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{f} \right)}{\frac{\partial G}{\partial x}} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{f} \right)}{\frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{z}}{f} \right)}{\frac{\partial G}{\partial z}}, \quad (2.51)$$

que, juntamente com a equação da superfície dada (2.48), determina as equações da geodésica.

Vamos aplicar (2.51) ao problema da geodésica em uma esfera, já resolvido no primeiro capítulo utilizando outros meios. Escrevemos então

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad (2.52)$$

para (2.48) ( $a$  é o raio da esfera). Temos então  $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial G}{\partial y} = 2y$ ,  $\frac{\partial G}{\partial z} = 2z$  e assim, as equações (2.51) ficam

$$\frac{f_{\ddot{x}} - \dot{x}\dot{f}}{2xf^2} = \frac{f_{\ddot{y}} - \dot{y}\dot{f}}{2yf^2} = \frac{f_{\ddot{z}} - \dot{z}\dot{f}}{2zf^2}. \quad (2.53)$$

Igualando os dois primeiros membros de (2.53) juntamente com os dois últimos temos o seguinte par de equações

$$\frac{y\ddot{x} - x\dot{y}}{y\dot{x} - x\dot{y}} = \frac{\dot{f}}{f} = \frac{z\ddot{y} - y\ddot{z}}{z\dot{y} - y\dot{z}} \quad (2.54)$$

ou, ignorando o membro central,

$$\frac{\frac{d}{dt}(y\dot{x} - x\dot{y})}{y\dot{x} - x\dot{y}} = \frac{\frac{d}{dt}(z\dot{y} - y\dot{z})}{z\dot{y} - y\dot{z}}. \quad (2.55)$$

E daí integrando obtemos

$$\frac{\dot{x} + C_1\dot{z}}{x + C_1z} = \frac{\dot{y}}{y}. \quad (2.56)$$

Uma segunda integração nos dá

$$x - C_2y + C_1z = 0 \quad (2.57)$$

que é a equação de um plano passando pelo centro da esfera, cuja intersecção com a esfera é o **arco do grande círculo** que já obtivemos como geodésica da esfera no capítulo 1.

Para esta seção também tomamos como referências básicas os textos de [27] e [45].

Para essa abordagem das geodésicas a referência utilizada foi [27].

# Capítulo 3

## Condições Necessárias para Extremos

### 3.1 Introdução

Até agora a única condição que temos para estudar extremos de funcionais é a Equação de Euler-Lagrange, que como já vimos, é uma condição necessária para a ocorrência de extremos. Neste capítulo apresentaremos outras condições necessárias e daremos exemplos de como trabalhar com essas condições.

Estudaremos as condições necessárias de **Weierstrass**, de **Legendre**, de **Jacobi** e a **condição da diferenciabilidade de Hilbert**. Além disso definiremos **pontos conjugados** e a **equação de Jacobi**.

A teoria apresentada neste capítulo será fundamental para o estudo das condições suficientes para a ocorrência de extremos de funcionais, que será feito no capítulo 4.

### 3.2 Algumas considerações preliminares

Antes de enunciarmos e demonstrarmos as condições necessárias daremos algumas definições que serão utilizadas durante o capítulo.

Primeiramente, definiremos a **classe dos arcos admissíveis** da forma

$$y = y(x) \quad x_1 \leq x \leq x_2 \tag{3.1}$$

para os quais a integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (3.2)$$

tem um valor bem definido. Daí então, nosso problema se converterá em encontrar, dentre todos os arcos admissíveis unindo os pontos  $(x_1, y(x_1))$  e  $(x_2, y(x_2))$ , aquele que minimiza a integral (3.2). Para definirmos esta classe dos arcos admissíveis, assumimos que existe uma região  $R$  formada pelos conjuntos de valores  $(x, y, y')$  para os quais o integrando de (3.2) é contínuo e tem derivada contínua de todas as ordens. Estes conjuntos de  $(x, y, y')$  no interior de  $R$  são chamados de **conjuntos admissíveis**. Um arco (3.1) é chamado de **arco admissível** se ele é contínuo e tem uma curva tangente contínua exceto, possivelmente, em um número finito de “bicos”, e se o conjunto de valores  $(x, y(x), y'(x))$  são todos admissíveis de acordo com a definição dada acima. Para um arco admissível, o intervalo  $x_1 \leq x \leq x_2$  pode sempre ser subdividido em um número finito de intervalos nos quais, em cada um,  $y(x)$  é contínua e tem derivada contínua. Em um ponto  $x$  onde a curva tem um “bico” a derivada  $y'(x)$  tem dois valores denotados por  $y'(x-0)$  e  $y'(x+0)$ . Sabemos que se  $y(x)$  fornece um extremo para (3.2) então, a equação de Euler-Lagrange é satisfeita. Consequentemente temos que

$$f_{y'} = \int_{x_1}^x f_y dx + c \quad (3.3)$$

onde  $c$  é uma constante.

Um **extremal** é, por definição, um arco admissível com derivadas primeira e segunda contínuas satisfazendo a equação de Euler-Lagrange e (3.3). Ao longo de um extremal a equação de Euler-Lagrange pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = f_{y'x} + f_{y'y} y' + f_{y'y'} y'' - f_y = 0 \quad (3.4)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem.

A partir deste momento passaremos a usar a notação  $E_{ab}$  que indica um arco  $E$  ligando os pontos  $a$  e  $b$ . Se um arco  $E_{34}$  varia tal que seus pontos finais descrevem

simultaneamente duas curvas  $C$  e  $D$  veja figura (3.1), então a diferencial do valor da integral  $I$  ao longo deste arco é

$$dI(E_{34}) = f(x, y, p)dx + (dy - pdx)f_{y'}(x, y, p)|_3^4 \quad (3.5)$$

em cada posição na qual o arco é um extremal ( $p$  é a inclinação de  $E_{34}$ ).

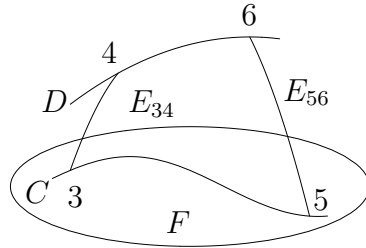


Figura 3.1: Ilustração do arco  $E_{34}$  cuja variação faz com que seus pontos finais descrevam as curvas  $C$  e  $D$ .

Para uma demonstração desse fato veja [3]. Este resultado vale também em cada posição onde as equações de Euler-Lagrange e (3.3) são satisfeitas. As diferenciais  $dx$ ,  $dy$  em (3.5) são aquelas das curvas  $C$  e  $D$  nos pontos 3 e 4 da figura acima e os valores inseridos por  $p$  na diferença indicada são as inclinações de  $E_{34}$  nesses dois pontos. Definiremos agora mínimo forte e mínimo fraco para um funcional. Uma curva  $y = y(x)$  é um **mínimo forte** para o funcional  $I[y]$  se existe algum  $\delta > 0$  tal que  $I[y] \leq I[z]$  para todas as curvas  $z = z(x)$  tais que  $|z(t) - y(t)| \leq \delta$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Uma curva  $y = y(x)$  é um **mínimo fraco** para o funcional  $I[y]$  se existem  $\delta > 0$  e  $\sigma > 0$  tal que  $I[y] \leq I[z]$  para todas as curvas  $z = z(x)$  tais que  $|z(t) - y(t)| \leq \delta$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  e  $|z'(t) - y'(t)| \leq \sigma$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Uma definição análoga vale para máximos.

Estamos assim em condições de enunciar e demonstrar as condições necessárias de Weierstrass e de Legendre. É o que faremos na próxima seção.

Para o desenvolvimento desta seção tomamos como base os textos apresentados em [3], [5] e [8].



### 3.3 Condições de Weierstrass e de Legendre

Antes de enunciar a condição de Weierstrass precisamos definir a **função excesso de Weierstrass**. Esta função é dada por

$$E(x, y, y', Y') = f(x, y, Y') - f(x, y, y') - (Y' - y')f_{y'}(x, y, y'), \quad (3.6)$$

onde  $Y$  é uma função qualquer  $Y(x)$  diferenciável. Note que  $E(x, y, y', Y')$  é a função  $f(x, y, Y')$  menos os dois primeiros termos da expansão de  $f(x, y, Y')$ , pela Fórmula de Taylor, em potências de  $(Y' - y')$ .

**Teorema 3 - Condição Necessária de Weierstrass** *Em todo elemento  $(x, y, y')$  do arco minimizador de (3.2),  $E_{12} := y = y(x)$ , a condição*

$$E(x, y, y', Y') \geq 0 \quad (3.7)$$

*precisa ser satisfeita para todo conjunto admissível  $(x, y, Y')$  diferente de  $(x, y, y')$ .*

*Demonstração:*

Escolha um ponto 3 arbitrário no arco minimizador  $E_{12}$  e um segundo ponto 4 nesse arco, tão próximo de 3 tal que não haja nenhum “bico” de  $E_{12}$  entre eles (veja figura 3.2).

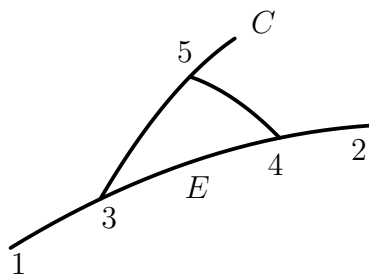


Figura 3.2: Ilustração geométrica da idéia usada na demonstração.

Pelo ponto 3 passamos uma curva arbitrária  $C$ , de equação  $y = Y(x)$ . O ponto 4 pode ser unido a um ponto móvel 5 em  $C$  por uma família a um-parâmetro de arcos

$E_{54}$  contendo o arco  $E_{34}$  como um membro quando o ponto 5 está na posição do ponto 3. Essa família pode ser facilmente construída. Considere, por exemplo,

$$y(x, a) = y(x) + \frac{Y(a) - y(a)}{x_4 - a}(x_4 - x). \quad (3.8)$$

Para  $x = x_4$  todos esses arcos passam pelo ponto 4, e para  $x = a$  eles interceptam a curva  $C$ . Para  $a = x_3$ , a família contém o arco extremal  $E_{34}$ , já que na intersecção do ponto 3 de  $E_{34}$  e  $C$  temos  $Y(x_3) - y(x_3) = 0$  e a equação da família se reduz à equação  $y = y(x)$  do arco  $E_{34}$ . Se a integral  $I(E_{12})$  é um mínimo então é claro que, como o ponto 5 se move ao longo de  $C$  para o ponto 3, a integral

$$I(C_{35} + E_{54}) = \int_{x_3}^{x_5} f(x, Y, Y') dx + I(E_{54}) \quad (3.9)$$

não pode ter valor menor que o inicial  $I(E_{54})$ , que ocorre quando 5 está no ponto 3. Evidentemente, no ponto 3, a diferencial dessa integral com respeito a  $x_5$  precisa ser não negativa.

A diferencial de  $I(E_{54})$  em (3.9) na posição  $E_{34}$  é dada por (3.5) quando a curva  $D$  da fórmula é trocada pelo ponto fixo 4, no qual  $dx_4 = dy_4 = 0$ .

Como a derivada da primeira integral da expressão (3.9) com respeito ao seu limite superior é o valor de seu integrando nesse limite, segue que quando 5 está em 3, temos para a diferencial de  $I(C_{35} + E_{54})$  o seguinte valor no ponto 3:

$$f(x, Y, Y')dx - f(x, y, y')dx - (dy - y'dx)f_{y'}(x, y, y'). \quad (3.10)$$

As diferenciais nesta expressão pertencem ao arco  $C$  e satisfazem a equação  $dy = Y'dx$  e no ponto 3, a ordenada de  $C$  e  $E$  são iguais e, portanto, a diferencial de (3.9) é dada por

$$[f(x, y, Y') - f(x, y, y') - (Y' - y')f_{y'}(x, y, y')]dx \quad (3.11)$$

no ponto 3. Como esta diferencial precisa ser positiva ou zero para um ponto 3 arbitrário e o arco  $C$  passa por ele, isto é, para todo  $(x, y, y')$  em  $E_{12}$  e todo elemento

admissível  $(x, y, Y')$ , temos demonstrada a condição necessária de Weierstrass.  $\square$

**Observação:** Para um elemento  $(x, y, y'(x-0))$  em um “bico” do arco minimizador a prova feita acima não se aplica, pois daí, sempre haverá um “bico” entre o elemento e o ponto 4 a ser escolhido em  $E_{12}$ . Mas, de acordo com [3], pode-se modificar a prova para daí fazer uso de um ponto 4 precedendo o “bico” e conseguir o resultado desejado para o elemento em questão.

**Corolário 3.1 - Condição Necessária de Legendre** *Em todo elemento  $(x, y, y')$  para um arco minimizador  $E_{12} := y = y(x)$  a condição*

$$f_{y'y'}(x, y, y') \geq 0 \quad (3.12)$$

*precisa ser satisfeita.*

*Demonstração:*

O coeficiente de  $dx$  na expressão (3.11) é a função excesso de Weierstrass, que com auxílio da fórmula de Taylor, pode ser expressa na forma

$$E(x, y, y', Y') = \frac{1}{2}(Y' - y')^2 f_{y'y'}(x, y, y' + \theta(Y' - y')) \quad (3.13)$$

com  $0 < \theta < 1$ . Se considerarmos  $Y'$  tão próximo de  $y'$  quanto possível, obtemos diretamente o resultado desejado e, portanto, a condição necessária de Legendre está demonstrada.  $\square$

Para esta seção, nossa referência básica foi [3].

### 3.4 Condição necessária de Jacobi

Antes de enunciarmos a condição de Jacobi, precisaremos fazer algumas considerações teóricas. Começaremos definindo elemento regular e pontos conjugados.

**Definição 3.1** O elemento  $(x_0, y_0, y'_0)$  é chamado um **elemento regular** se  $f_{y'y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$  e é chamado **elemento singular** se  $f_{y'y'}(x_0, y_0, y'_0) = 0$ . Um extremal é chamado de **extremal regular** se ele consiste apenas de elementos regulares.

Um ramo de pesquisa atual muito importante na matemática é a **geometria riemanniana**, na qual os conceitos de geodésicas e curvaturas, diretamente relacionados, são fundamentais. Dada uma variedade  $M$  e um ponto  $p$  em  $M$ , considere o subespaço, de dimensão dois,  $\sigma$  do espaço tangente a  $M$  em  $p$ . A curvatura  $K$  da variedade  $M$  em  $p$ , segundo  $\sigma$ , indica quão rapidamente “se afastam” as geodésicas que saem de  $p$  e são tangentes a  $\sigma$  (para maiores detalhes consulte [7]). Para formalizar precisamente esta velocidade de afastamento das geodésicas, a equação de Jacobi e a teoria dos pontos conjugados são fundamentais. Assim, podemos perceber a importância da teoria que estamos estudando em áreas atuais de pesquisas na matemática.

**Definição 3.2** Dizemos que o ponto  $a^*$  é um ponto conjugado de  $a$  se a equação

$$-\frac{d}{dx}((f_{y'y'}(x, y, y'))v') + [f_{yy}(x, y, y') - \frac{d}{dx}(f_{yy'}(x, y, y'))]v = 0 \quad (3.14)$$

tem solução  $v > 0$  no intervalo  $(a, a^*)$  com  $v(a) = v(a^*) = 0$ .

Para simplificar (3.14) escrevemos

$$Q(x) = f_{yy}(x, y, y') - \frac{d}{dx}f_{yy'}(x, y, y') \quad (3.15)$$

e

$$P(x) = f_{y'y'}(x, y, y') \quad (3.16)$$

e daí, (3.14) fica

$$\frac{d}{dx}(P(x)v') + Q(x)v = 0. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) é chamada de **Equação de Jacobi**.

Para que esta definição fique mais clara, daremos dois exemplos nos quais determinaremos os pontos conjugados de um certo ponto  $a$ .

**Exemplo 3.1** Determinar, se existir, um ponto conjugado para  $a = 0$  no caso em que  $P(x) = 1$  e  $Q(x) = -1$ .

Se  $P(x) = 1$  e  $Q(x) = -1$  a equação (3.17) fica  $-v'' - v = 0$ . Uma solução para esta equação é  $v(x) = \sin x$ , pois  $v'(x) = \cos x$ ,  $v''(x) = -\sin x$  e daí  $\sin x - \sin x = 0$ . Temos que  $v(0) = 0$  e queremos achar um ponto  $a^*$  no qual  $v(a^*) = 0$ , isto é,  $\sin a^* = 0$ . Isto ocorre em  $a^* = \pi$  e, portanto,  $\pi$  é um ponto conjugado de 0. Faremos uma interpretação geométrica deste exemplo após a apresentação da condição necessária de Jacobi.

**Exemplo 3.2** Determinar, se existir, um ponto conjugado para  $a = 0$  no caso em que  $P(x) = 1$  e  $Q(x) = 1$ .

Neste caso, a equação (3.17) fica

$$-v'' + v = 0, \quad (3.18)$$

cuja solução é da forma  $v(x) = e^{\lambda x}$ . Substituindo esta solução em (3.18) obtemos  $\lambda = \pm 1$  e, portanto, a solução geral de (3.18) é  $v(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ . Assim,  $v(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$  e, portanto,  $v(x) = C_1(e^x - e^{-x})$ . Queremos achar um ponto  $a^*$  tal que  $v(a^*) = 0$ , isto é,  $C_1(e^{a^*} - e^{-a^*}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$  ou  $a^* = 0$  e, assim, não existe ponto conjugado para  $a = 0$ .

Daremos agora algumas definições e resultados que facilitarão a demonstração da condição necessária de Jacobi.

Assumiremos que o funcional  $I[y]$  é definido em um subconjunto aberto  $Y$  de um espaço linear normado  $S$ . Se  $y_0 \in Y$ ,  $h \in S$ , então  $y_0 + h \in Y$  para todo  $h$  tal que  $\|h\| < \delta$  para algum  $\delta > 0$  e  $I[y_0 + th]$  será definido para todo  $t \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeno.

**Definição 3.3** A função  $\delta I[h]$  é chamada de **primeira variação de Gâteaux** para  $I[y]$  em  $y = y_0$  se, para  $t \in \mathbb{R}$ , existe

$$\delta I[h] = \left. \frac{d}{dt} I[y_0 + th] \right|_{t=0} \quad (3.19)$$

para todo  $h \in S$ .

**Definição 3.4** A função  $\delta^2 I[h]$  é chamada de **segunda variação de Gâteaux** para  $I[y]$  em  $y = y_0$  se, para  $t \in \mathbb{R}$ , existe

$$\delta^2 I[h] = \left. \frac{d^2}{dt^2} I[y_0 + th] \right|_{t=0} \quad (3.20)$$

para todo  $h \in S$ .

**Definição 3.5** Para um dado espaço de funções  $\Sigma \subset S$ ,  $H \subset S$  é chamado **espaço de variações admissíveis** de  $\Sigma$  se, para todo  $y \in \Sigma$  e  $h \in H$ ,  $y + h \in \Sigma$ .

**Definição 3.6** O subconjunto  $H^* \subset S$  é um **espaço linear de variações admissíveis** de  $\Sigma \subset S$  se:

1. para todo  $y \in \Sigma$  e todo  $h \in H^*$ ,  $y + h \in \Sigma$ ;
2. para todo  $h, k \in H^*$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda h + \mu k \in H^*$ .

**Teorema 4** Se  $I[y]$  assume um mínimo (máximo) relativo em  $y = y_0$  em  $\Sigma$ ,  $\Sigma$  admite um espaço linear de variações admissíveis  $H^*$  e se  $\frac{d^2}{dt^2}I[y_0+th]$  existe próximo de  $t = 0$  e é contínua em  $t = 0$  para todo  $h \in S$  então, é necessário que

$$\delta I[h] = 0 \text{ e } \delta^2 I[h] \geq 0 \text{ (} \leq 0 \text{)} \quad (3.21)$$

para todo  $h \in H^*$ .

*Demonstração:* ver [36].

**Lema 2** Se  $f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0$  para todo  $x \in [a, b]$  e se  $(a, b)$  possui um ponto conjugado de  $a$ , então, é possível encontrar uma função  $h \in H^*$  tal que

$$\delta^2 I[h] < 0. \quad (3.22)$$

*Demonstração:* ver [36].

**Teorema 5 - Condição necessária de Jacobi** Para um extremal regular  $y = y_0 \in C^2[a, b]$  fornecer um mínimo para  $I[y]$ , é necessário que  $(a, b)$  não possua pontos conjugados de  $a$ .

*Demonstração:*

Sabemos que se  $y = y_0$  fornece um mínimo para  $I[y]$ , então, pelo teorema 4 é necessário que  $\delta^2 I[h] \geq 0$  para todo  $h \in H^*$ .

Pelo corolário 3.1, é necessário que  $f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0$ . Como  $y = y_0$  é um extremal regular temos que  $f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0$ .

Agora, se  $(a, b)$  possui um ponto conjugado de  $a$ , então, pelo lema 2, é possível encontrar  $h \in H^*$  tal que  $\delta^2 I[h] < 0$  o que é uma contradição. Assim, a condição necessária de Jacobi está demonstrada.  $\square$

Apresentaremos agora algumas definições que nos permitirão fazer uma interpretação geométrica do **exemplo 3.1** e conectá-lo ao problema da geodésica na esfera.

**Definição 3.7** Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica de  $M$ . Um campo de vetores<sup>1</sup>  $J$  ao longo de  $\gamma$  é um **campo de Jacobi** se satisfaz a equação de Jacobi para  $x \in [0, a]$ .

**Definição 3.8** Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica de  $M$ . O ponto  $\gamma(x_0)$  é **conjugado** de  $\gamma(0)$  ao longo de  $\gamma$ , com  $x_0 \in [0, a]$ , se existe um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$ , não identicamente nulo, com  $J(0) = 0 = J(x_0)$ .

Consideremos então  $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \quad x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  a esfera unitária de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Seja  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow S^n$  uma geodésica de  $S^n$ , parametrizada pelo comprimento de arco, ligando os pontos antípodas  $\gamma(0)$  e  $\gamma(\pi)$ . Seja  $w(x)$  um campo paralelo ao longo de  $\gamma$  com  $\langle w(x), \gamma'(x) \rangle = 0$  e  $\|w(x)\| = 1$ . Então, o campo  $J$  ao longo de  $\gamma$  dado por

$$J(x) = \operatorname{sen} x w(x), \quad x \in [0, \pi]$$

é um campo de Jacobi, já que satisfaz a equação de Jacobi como vimos no exemplo 3.1. Este campo satisfaz a condição  $J(0) = J(\pi) = 0$ . Portanto, ao longo de qualquer geodésica  $\gamma$  de  $S^n$ , o ponto antípoda  $\gamma(\pi)$  é conjugado de  $\gamma(0)$ . Assim, a condição necessária de Jacobi falha e, portanto, a geodésica não minimiza o comprimento da curva passando pelos pontos antípodas. Essa é uma interpretação geométrica do exemplo 3.1 que mostra a importância da teoria dos pontos conjugados. A referência para esta interpretação geométrica foi [7].

A teoria desta seção foi desenvolvida com base no texto [36] e os exemplos seguem a apresentação de [44].

---

<sup>1</sup>Para maiores detalhes sobre campos de vetores veja o capítulo 4 deste texto.



### 3.5 Mais duas condições necessárias

Nesta seção apresentaremos mais duas condições necessárias para a ocorrência de extremos de funcionais. Estas condições não são tão práticas de serem aplicadas como as apresentadas nas seções anteriores.

Sabemos que se  $y(x)$  fornece um mínimo para o funcional  $I[y]$  então a equação de Euler-Lagrange precisa ser satisfeita, o que já vimos que é equivalente a (3.3) valer para alguma constante  $c$ . Observe que o segundo membro de (3.3) é uma função contínua de  $x$  em todo ponto do arco minimizador  $E_{12} := y = y(x)$ . Assim, o primeiro membro também precisa ser contínuo e daí então, temos o seguinte resultado:

**Corolário 3.2 - Condição necessária de Weierstrass-Erdmann.** Em um “bico”  $(x, y)$  do arco minimizador  $E_{12}$  a condição

$$f_{y'}(x, y, y'(x - 0)) = f_{y'}(x, y, y'(x + 0)) \quad (3.23)$$

precisa valer.

Além disso, podemos demonstrar o seguinte resultado:

**Corolário 3.3 - Condição da diferenciabilidade de Hilbert.** Próximo de um ponto do arco minimizador  $E_{12}$  onde  $f_{y'y'}$  é diferente de zero, o arco sempre tem uma segunda derivada contínua  $y''(x)$ .

*Demonstração:*

Seja  $(x, y, y')$  um conjunto de valores em  $E_{12}$  nos quais  $f_{y'y'}$  é diferente de zero e suponha que  $(x + \Delta x, y + \Delta y, y' + \Delta y')$  também está em  $E_{12}$  e que não há “bico” entre eles. Se denotarmos os valores de  $f_{y'}$  correspondentes a estes dois conjuntos por  $f_{y'}$  e  $f_{y'} + \Delta f_{y'}$ , então, com o auxílio da Fórmula de Taylor, com resto de Lagrange,

obtemos que existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f_{y'}}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} [f_{y'}(x + \Delta x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - f_{y'}(x, y, y')] = \\ &= f_{y'x}(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y, y' + \theta \Delta y') + f_{y'y}(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y, y' + \theta \Delta y') \frac{\Delta y}{\Delta x} + \\ &\quad + f_{y'y'}(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y, y' + \theta \Delta y') \frac{\Delta y'}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nesta expressão, o primeiro membro  $\frac{\Delta f_{y'}}{\Delta x}$  tem o limite definido  $f_y$  quando  $\Delta x$  se aproxima de zero, porque a integral de (3.3) tem  $f_y$  como derivada e os primeiros dois termos do segundo membro de (3.24) tem também limites bem definidos. Daí, segue que o último termo precisa ter um único limite, e como  $f_{y'y'} \neq 0$  isto é verdade somente se  $y'' = \lim \frac{\Delta y'}{\Delta x}$  existe. A derivada  $f_{y'y'}$  é diferente de zero próximo do elemento  $(x, y, y')$  no subarco de  $E_{12}$ . Consequentemente, a equação de Euler-Lagrange pode ser resolvida para  $y''$  e daí segue que  $y''$  precisa ser contínua perto de cada elemento  $(x, y, y')$  do tipo descrito no corolário.  $\square$

Esta seção foi desenvolvida tendo como referência básica [3].

## 3.6 Exemplos

Nesta seção faremos alguns exemplos de como aplicar as condições necessárias vistas ao longo do capítulo. Um dos exemplos que apresentaremos servirá para mostrar que de fato essas condições são apenas necessárias.

**Exemplo 3.3** Verificar, utilizando as condições de Weierstrass, Legendre e Jacobi, se a função  $y$  dada pode ser função minimizadora do funcional dado:

$$I[y] = \int_0^1 [(y')^2 + (y')^3] dx \quad (3.25)$$

com  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = k$  e a função  $y = kx$ .

Para este problema a função de Weierstrass 3.6 com  $Y' = p$  fica

$$E(x, y, y', p) = (p^2 + p^3) - (k^2 + k^3) - (p - k)k(2 + 3k) = (p - k)^2(1 + p + 2k) \quad (3.26)$$

e daí  $E < 0$  para todo  $p < -(2k + 1)$ . Assim, a condição de Weierstrass não é satisfeita e  $y = kx$  não pode ser um mínimo forte para o funcional (3.25).

Agora,

$$f_{y'y'} = 2 + 6y' = 2 + 6k \quad (3.27)$$

para a função dada  $y = kx$ . Como,  $f_{y'y'} = 2 + 6k \geq 0 \iff k > -\frac{1}{3}$ . Assim, a condição de Legendre é satisfeita se  $k > -\frac{1}{3}$  e  $y = kx$  é um candidato a mínimo nesta região. Reciprocamente, a condição de Legendre  $f_{y'y'} \geq 0$  não é satisfeita para todo  $x \in [a, b]$  se  $k < -\frac{1}{3}$ . Assim,  $y = kx$  não minimiza  $I[y]$  para  $k < -\frac{1}{3}$ .

Para  $y = kx$  temos

$$P = f_{y'y'}(x, y, y') = 2 + 6k \quad (3.28)$$

e

$$Q = f_{yy}(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{yy'}(x, y, y') = 0. \quad (3.29)$$

Neste caso, a solução da Equação de Jacobi é  $h(x) = c_1x + c_0$ . Agora,  $h(0) = 0$  requer que  $c_0 = 0$  e assim qualquer  $h(x)$  não trivial não tem pontos conjugados em  $(a, b)$ . Portanto a condição necessária de Jacobi é satisfeita e então  $y = kx$  é um candidato a mínimo de (3.25), o que conclui este exemplo.

**Exemplo 3.4** Considere o funcional

$$I[y] = \int_0^b \frac{[(y')^2 - y^2]}{2} dx \quad (3.30)$$

com  $y(0) = 0$  e  $y(b) = 0$ .

Como  $f_{y'y'} = 1$ , a condição de Legendre é satisfeita para todo  $x \in [0, b]$ . Os extremais para este problema são  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ , com  $C_1 = 0$  para que  $y(0) = 0$ . A outra condição requer que  $C_2 \sin b = 0$  e daí  $y = 0$  é um extremal admissível. Para

$b \neq n\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  ele é único. Nesse caso,  $I[y] = 0$  para o único extremal. Então, a condição de Legendre nos diz que  $y = 0$  é um candidato a mínimo do funcional (3.30). Vamos verificar agora se, de fato,  $y = 0$  fornece um mínimo para (3.30). Seja  $h(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ . Considerando o extremal  $y = 0$ , a diferença  $I[y + \epsilon h] - I[y]$  será dada por

$$I\left[\epsilon \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)\right] = \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^b \left[ \frac{\pi^2}{b^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{b}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{b}\right) \right] dx = \frac{\epsilon^2}{4b} (\pi^2 - b^2). \quad (3.31)$$

O lado direito é negativo para  $b > \pi$ . Assim, o único extremal admissível  $y(x) = 0$  que satisfaz a condição de Legendre não fornece um mínimo para  $I[y]$ . Para o caso,  $b = n\pi$ ,  $n \geq 2$ , os mesmos cálculos mostram que  $y = 0$  ainda não é um mínimo.

Este exemplo mostra que a condição de Legendre é, de fato, apenas necessária, pois o funcional satisfaz a condição mas não minimiza o funcional.

**Exemplo 3.5** Vamos considerar agora o mesmo funcional (3.30) do exemplo anterior só que agora sob a ótica das condições de Weierstrass-Erdmann e de diferenciabilidade de Hilbert.

Para este funcional, temos  $f_{y'} = y'$  e, portanto, pela condição de Weierstrass-Erdmann, a continuidade de  $f_{y'}$  em um “bico” de um extremal requer que  $y'_+ = y'_-$ . Em outras palavras,  $y'$  é contínua em cada um dos “bicos” possíveis e assim  $y(x)$  precisa ser suave.

Observe também que, para este funcional,  $f_{y'y'} = 1$  e daí, as condições de Weierstrass-Erdmann e da Diferenciabilidade de Hilbert combinadas nos garantem que um extremal desse funcional é pelo menos de classe  $C^2$ .

**Exemplo 3.6** Vamos voltar agora ao primeiro problema que analisamos no capítulo 1: qual a curva plana, ligando dois pontos fixos, que tem o menor comprimento de arco? Vejamos o que nos dizem as condições necessárias deste capítulo quando elas são aplicadas a este problema.

Vamos considerar os pontos  $A = (1, 0)$  e  $B = (3, 4)$  tais que  $y(1) = 0$  e  $y(3) = 4$ . O funcional a ser minimizado é

$$I[y] = \int_1^3 \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (3.32)$$

Resolvendo a equação de Euler-Lagrange para este funcional obtemos a reta  $y = 2x - 2$  como extremo do funcional (3.32) que satisfaz as condições  $y(1) = 0$  e  $y(3) = 4$  dadas. Escrevendo a função de Weierstrass 1.6 com  $Y' = p$  para este funcional temos

$$E(x, y, y', p) = \sqrt{1 + p^2} - \sqrt{1 + y'^2} - (p - y') \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (3.33)$$

e levando agora em consideração nosso extremo temos

$$E(x, y, y', p) = \sqrt{1 + p^2} - \sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5}(p - 2). \quad (3.34)$$

Agora se impomos que  $E(x, y, y', p) \geq 0$  obtemos, através de alguns cálculos simples, que esta desigualdade vale para todo  $p$  e assim, para este extremal a Condição Necessária de Weierstrass é sempre válida e, portanto, a reta  $y = 2x - 2$  é um candidato a mínimo forte do funcional (3.32).

Temos também para este funcional

$$f_{y'y'} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{1 + y'^2} - \frac{y'^2}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad (3.35)$$

que avaliada no extremal  $y = 2x - 2$  fica  $f_{y'y'} = \frac{\sqrt{5}}{25} > 0$  e, portanto, a Condição Necessária de Legendre também é satisfeita.

Vamos ver agora o que nos diz a Condição de Jacobi. Temos aqui

$$P(x) = f_{y'y'} = \frac{\sqrt{5}}{25} \quad (3.36)$$

e

$$Q(x) = f_{yy} - \frac{d}{dx} f_{y'y'} = 0. \quad (3.37)$$

Assim, a equação de Jacobi fica

$$-\frac{d}{dx}(P(x)v') - Q(x)v = 0 \iff \frac{d}{dx} \left( \frac{\sqrt{5}}{25} v' \right) = 0 \iff v(x) = c_1 x + c_0. \quad (3.38)$$

Impondo a condição  $v(1) = 0$  obtemos  $c_1 = -c_0$  e, portanto,  $v(x) = -c_0 x + c_0$ . Seja  $a^*$  ponto conjugado de 1. Então  $v(a^*) = -c_0 a^* + c_0 = 0 \iff a^* = 1$ . Assim, não existe ponto conjugado para 1 e, portanto, a condição de Jacobi é satisfeita .

Logo, as condições necessárias vistas neste capítulo nos dizem que a reta  $y(x) = 2x - 2$  é um candidato a mínimo forte de (3.32).

Os exemplos apresentados no decorrer desta seção foram desenvolvidos seguindo a apresentação de [44].

### 3.7 Condições necessárias para problemas variacionais com fronteiras móveis

Nesta seção, iremos deduzir condições necessárias para problemas variacionais cujas fronteiras são móveis. Iremos estudar este problema para dois tipos de funcionais e apresentar alguns exemplos.

Vamos continuar considerando o funcional

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx.$$

Procuraremos seus extremantes na classe das funções reais diferenciáveis, definidas no intervalo  $[a, b]$ , com variações mais gerais que as consideradas anteriormente. Para isso, vamos estudar a família de curvas  $y = \phi(x, \lambda)$  com  $\lambda \in [0, 1]$  em que  $\phi(x, 0) = y(x) \in D^1[a, b]$  e  $x$  variando no intervalo  $[a(\lambda), b(\lambda)]$ . Estamos supondo que as curvas  $\phi(x, \lambda)$  são definidas em  $[a - \epsilon, b + \epsilon] \times [0, 1]$ , tendo derivadas contínuas até segunda ordem.

Adotando a notação  $A_\lambda = (a(\lambda), \phi(a(\lambda), \lambda))$  com  $A_\lambda = A$  para  $\lambda = 0$  e  $B_\lambda =$

$(b(\lambda), \phi(b(\lambda), \lambda))$ , com  $B_\lambda = B$  se  $\lambda = 0$ , vamos assumir que  $A_\lambda$  e  $B_\lambda$  descrevem curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  respectivamente, de classe  $C^1$  tal que, para cada  $\lambda$  temos  $\phi(x, \lambda)$  e  $\gamma_1$  transversais em  $A_\lambda$  e  $\phi(x, \lambda)$  e  $\gamma_2$  transversais a  $B_\lambda$  (veja figura 3.3).

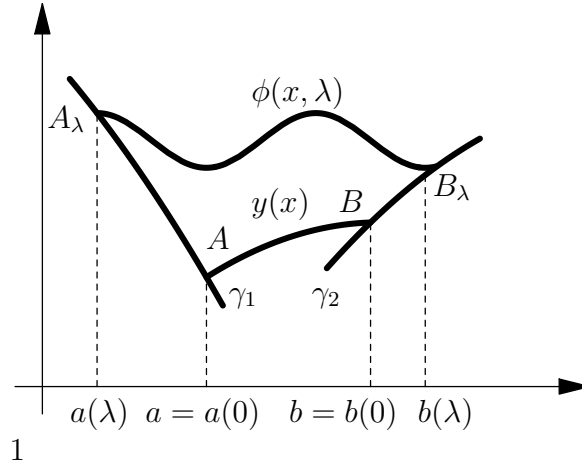


Figura 3.3: Ilustração geométrica da situação que estamos considerando.

Sendo  $m_{A_\lambda}$  e  $m_{B_\lambda}$  os coeficientes angulares das retas tangentes a  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , respectivamente, temos

$$m_A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\phi(a(\lambda), \lambda) - \phi(a(0), 0)}{a(\lambda) - a(0)}.$$

Mas

$$\phi(a(\lambda), \lambda) - \phi(a(0), 0) = (a(\lambda) - a(0))\phi_x(\bar{a}, \bar{\lambda}) + \lambda\phi_\lambda(\bar{a}, \bar{\lambda}),$$

onde  $\bar{a} = a(\bar{\lambda})$ , para algum  $\bar{\lambda} \in [0, 1]$ . Temos então

$$\frac{a(\lambda) - a(0)}{\lambda} \frac{\phi(a(\lambda), \lambda) - \phi(a(0), 0)}{a(\lambda) - a(0)} = \frac{a(\lambda) - a(0)}{\lambda} \phi_x(\bar{a}, \bar{\lambda}) + \phi_\lambda(\bar{a}, \bar{\lambda}). \quad (3.39)$$

Fazendo  $\lambda \rightarrow 0$ , vemos que

$$\left. \frac{d}{d\lambda}(a(\lambda)) \right|_{\lambda=0}$$

existe e

$$\left. \frac{d}{d\lambda}(a(\lambda)) \right|_{\lambda=0} [\phi_x(a, 0) - m_A] + \phi_\lambda(a, 0) = 0. \quad (3.40)$$

Analogamente,

$$\left. \frac{d}{d\lambda}(b(\lambda)) \right|_{\lambda=0}$$

existe e

$$\left. \frac{d}{d\lambda}(b(\lambda)) \right|_{\lambda=0} [\phi_x(b, 0) - m_B] + \phi_\lambda(b, 0) = 0. \quad (3.41)$$

Vamos introduzir agora a seguinte notação

$$\phi_\lambda(x, 0) = \delta y(x)$$

$$\left. \frac{d(a(\lambda), \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \delta y_A$$

$$\left. \frac{da(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \delta x_A$$

ao longo de  $\gamma_1$  e, analogamente,

$$\left. \frac{d(b(\lambda), \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \delta y_B$$

$$\left. \frac{db(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \delta x_B$$

ao longo de  $\gamma_2$ .

Se em (3.39) fizermos  $\lambda \rightarrow 0$  obtemos

$$\delta y_A = \delta x_A y'(a) + \delta y(a) \quad (3.42)$$

e, de maneira análoga,

$$\delta y_B = \delta x_B y'(b) + \delta y(b). \quad (3.43)$$

Estamos considerando o funcional  $J$  definido sobre os elementos da família  $\phi(x, \lambda)$ , tomando  $\lambda$  como variável, isto é:

$$I(\lambda) = J(\phi(x, y))$$

e, queremos calcular  $I'(0)$  onde  $f = f(x, \phi(x, \lambda), \phi_x(x, \lambda))$ . Temos então, com o auxílio da *Regra de Leibniz* e da *Regra da Cadeia*

$$I'(0) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \left[ \frac{df}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} dx + \left. \frac{db(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} f \Big|_{x=b} - \left. \frac{da(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} f \Big|_{x=a}$$



$$= \int_a^b \left[ \frac{\partial f \delta y(x)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y(x) \right] dx + \delta x_B f(b, y(b), y'(b)) - \delta x_A f(a, y(a), y'(a)). \quad (3.44)$$

Integrando por partes a expressão

$$\int_a^b f_{y'} \frac{d}{dx} \delta y(x) dx = f_{y'} \delta y(x) \Big|_a^b - \int_a^b \delta y(x) \frac{d}{dx} f_{y'} dx,$$

substituindo em (3.44) e, usando as igualdades (3.42) e (3.43) obtemos

$$I'(0) = \int_a^b \left[ f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] \delta y(x) dx + (\delta x(f - y' f_{y'}) + \delta y f_{y'}) \Big|_a^b \quad (3.45)$$

que é chamada de **Primeira Variação Geral de J**.

Podemos observar que, no caso em que as extremidades são fixas, temos  $\delta x_A = \delta x_B = \delta y_A = \delta y_B = 0$  e, então obtemos um resultado já conhecido

$$(\delta J)_y(0) = I'(0) = \int_a^b \left[ f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] \delta y(x) dx.$$

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são dadas pelas equações

$$\gamma_1 : y = f(x)$$

$$\gamma_2 : y = g(x)$$

então,  $\delta y_A$  e  $\delta y_B$  estarão relacionadas com  $\delta x_A$  e  $\delta x_B$  pelas equações

$$\delta y_A = f'(a) \delta x_A$$

$$\delta y_B = g'(b) \delta x_B$$

pois,

$$f'(a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\phi(a(\lambda), \lambda) - \phi(a(0), 0)}{a(\lambda) - a(0)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{[\phi(a(\lambda), \lambda) - \phi(a(0), 0)]/\lambda}{[a(\lambda) - a(0)]/\lambda} = \frac{\delta y_A}{\delta x_A}$$

e, analogamente

$$g'(b) = \frac{\delta y_B}{\delta x_B}.$$

Então, podemos escrever a primeira variação geral de  $J$  na forma

$$\begin{aligned} I'(0) = & \int_a^b \left[ f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] \delta y(x) dx + \\ & + \delta x_B [f_{y'}(g'(x) - y'(x)) + f]_{x=b} + \delta x_A [f_{y'}(f'(x) - y'(x)) + f]_{x=a} \end{aligned}$$

e, supondo que  $y = y(x)$  é ponto estacionário para  $J$ , devemos ter  $I'(0) = 0$ . A equação de Euler-Lagrange deve ser satisfeita e as quantidades  $\delta x_A$  e  $\delta x_B$  são independentes e, portanto, obtemos as seguintes condições necessárias

$$[f_{y'}(g'(x) - y'(x)) + f]_{x=b} = 0 \quad (3.46)$$

$$[f_{y'}(f'(x) - y'(x)) + f]_{x=a} = 0 \quad (3.47)$$

chamadas **Equações de Transversalidade**.

**Exemplo 3.7** Determinar a distância da parábola  $y = x^2$  à reta  $y = x - 5$ .

O problema consiste em minimizar o funcional “comprimento de arco”

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

com a condição de que os pontos extremos estejam sobre as curvas dadas por  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x - 5$ . Escrevendo as equações de transversalidade para este caso temos

$$\left[ \sqrt{1 + y'^2} + (2x - y') \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=a} = 0 \quad (3.48)$$

$$\left[ \sqrt{1 + y'^2} + (1 - y') \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=b} = 0. \quad (3.49)$$

Por outro lado, resolvendo a equação de Euler-Lagrange, obtemos extremantes da forma  $y(x) = k_1x + k_2$  e, como as condições de transversalidade  $y(a) = f(a)$  e  $y(b) = g(b)$  devem ser satisfeitas, obtemos

$$k_1a + k_2 = a^2 \quad (3.50)$$

$$k_1b + k_2 = b - 5. \quad (3.51)$$

De (3.48) e (3.49) segue

$$\sqrt{1 + k_1^2} + (2a - k_1) \frac{k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}} = 0 \quad (3.52)$$

$$\sqrt{1 + k_1^2} + (1 - k_1) \frac{k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}} = 0. \quad (3.53)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (3.50), (3.51), (3.52) e (3.53), obtemos  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = 3/4$ ,  $a = 1/2$  e  $b = 23/8$  fornecendo então o extremal  $y(x) = -x + 3/4$ .

Assim, a distância será dada por

$$d = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

**Teorema 6** - Se o funcional  $J(y)$  tem a forma

$$J(y) = \int_a^b A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

onde  $A(x, y) \neq 0$  nas extremidades, as condições de transversalidade são do tipo

$$y'(a) = -\frac{1}{f'(a)} \quad e \quad y'(b) = -\frac{1}{g'(b)},$$

isto é, as condições de transversalidade se reduzem a condições de ortogonalidade.

*Demonstração:*

Consideremos a equação para um dos extremos (para o outro a demonstração é análoga)

$$[f + (f' - y')f_{y'}]_{x=a} = 0.$$

Para  $f = A(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$ , temos

$$\left[ A(x, y)\sqrt{1 + y'^2} + \frac{A(x, y)y'}{\sqrt{1 + y'^2}}(f' - y') \right]_{x=a} = 0$$

ou ainda,

$$\left[ \frac{A(x, y)(1 + f'y')}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=a} = 0.$$

Mas,  $A(x, y) \neq 0$  para  $x = a$ , o que implica em

$$[1 + f'y']_{x=a} = 0$$

ou seja,

$$y'(a) = -\frac{1}{f'(a)},$$

demonstrando assim o teorema.  $\square$

**Exemplo 3.8** Voltando ao problema da Braquistócrona, vamos considerar novamente o funcional

$$J(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

tal que  $y_0 = y(0) = 0$  e  $(b, y_1)$  está sobre uma reta vertical  $x = b$ . Neste caso, na equação

$$[\delta x(f - y'f_{y'})]_a^b + [\delta y f_{y'}]_a^b = 0$$

temos  $\delta x = 0$ ,  $\delta y_A = 0$  e, portanto, a equação fica

$$\left[ \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=b} = 0$$

e, daí

$$y'(b) = 0.$$

Por outro lado, os extremantes são ciclóides dadas pelas equações paramétricas

$$x = \frac{k_1}{2}(2t - \sin 2t) + k_2$$

$$y = \frac{k_1}{2}(1 - \cos 2t).$$

Levando em consideração que  $y(0) = 0$ , obtemos  $k_2 = 0$  e fazendo a mudança de parâmetros  $2t = \tau$ , temos

$$x(\tau) = \frac{k_1}{2}(\tau - \operatorname{sen} \tau)$$

$$y(\tau) = \frac{k_1}{2}(1 - \cos \tau).$$

Usando, agora, a condição de transversalidade  $y'(b) = 0$ , vem

$$y'(b) = \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=b} = \left[ \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dx} \right]_{x=b} = \frac{\frac{k_1}{2} \operatorname{sen} \tau}{\frac{k_1}{2}(1 - \cos \tau)} = 0$$

o que implica em

$$\frac{k_1}{2} \operatorname{sen} \tau = 0$$

com  $0 \leq \tau \leq 2\pi$  e logo  $\tau = \pi$ , temos

$$b = \frac{k_1}{2}\pi \quad \text{e} \quad k_1 = \frac{2b}{\pi}.$$

Assim, um extremo para o funcional  $J$  será tomado somente sobre a cicloide dada pelas equações

$$x(\tau) = \frac{2b}{\pi}(\tau - \operatorname{sen} \tau)$$

$$y(\tau) = \frac{2b}{\pi}(1 - \cos \tau)$$

com  $0 \leq \tau \leq 2\pi$ .

Vamos agora estudar os problemas com fronteiras móveis para funcionais do tipo

$$J(y, z) = \int_a^b f(x, y, z, y', z') dx.$$

Estaremos interessados em determinar extremantes de  $J$  com extremidades móveis, sobre duas superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$ . Suponhamos que a curva procurada seja dada por

$$f(x) = (x, y(x), z(x))$$

e consideremos a família de curvas definida por

$$G(x, \lambda) = (x, \phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda))$$

com  $\lambda \in [0, 1]$  e tal que

$$G(x, 0) = (x, \phi(x, 0), \psi(x, 0)) = f(x).$$

Vamos supor também que, para cada  $\lambda$ ,  $G(x, \lambda)$  tenha derivadas de segunda ordem contínuas e adotar a notação

$$A_\lambda = (a(\lambda), \phi(a(\lambda), \lambda), \psi(a(\lambda), \lambda))$$

$$B_\lambda = (b(\lambda), \phi(b(\lambda), \lambda), \psi(b(\lambda), \lambda))$$

$$A_0 = A \text{ e } B_0 = 0.$$

Nestas condições, o funcional  $J$ , definido sobre os elementos  $G(x, \lambda)$  passa a ser função apenas de  $\lambda$ , isto é

$$I(\lambda) = J(G(x, \lambda)) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x, \phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda), \phi_x(x, \lambda), \psi_x(x, \lambda)) dx$$

para o qual vamos calcular  $I'(0)$  de maneira análoga a que fizemos no caso anterior e usando a mesma notação. Feito isso, obtemos

$$\begin{aligned} I'(0) = & \int_a^b \left[ f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right] \delta y(x) dx + \int_a^b \left[ f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} \right] \delta z(x) dx + \\ & + \delta x (f - y' f_{y'} - z' f_{z'}) \Big|_a^b + \delta y f_{y'} \Big|_a^b + \delta z f_{z'} \Big|_a^b \end{aligned}$$

que é a **Primeira Variação Geral de J**.

Considerando que a curva dada pelas equações  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$  é um extremante de  $J$ , as integrais acima se anulam e então, obtemos a condição geral

$$\delta x (f - y' f_{y'} - z' f_{z'}) \Big|_a^b + \delta y f_{y'} \Big|_a^b + \delta z f_{z'} \Big|_a^b = 0.$$

**Observação:** Se o ponto  $A = (a, y(a), z(a))$  está fixo e  $B$  varia sobre uma curva de equações  $y = \phi(x)$  e  $z = \psi(x)$ , temos

$$\delta y_B = \phi'(b)\delta x_B$$

$$\delta z_B = \psi'(b)\delta x_B$$

e, então a condição

$$\delta x_B(f - y'f_{y'} - z'f_{z'})|_{x=b} + \delta y_B f_{y'}|_{x=b} + \delta z_B f_{z'}|_{x=b} = 0 \quad (3.54)$$

se transforma em

$$[f + (\psi' - y')f_{y'} + (\psi' - z')f_{z'}]_{x=b} \delta x_B = 0$$

e, pela arbitrariedade de  $\delta x_B$  obtemos

$$[f + (\phi' - y')f_{y'} + (\psi' - z')f_{z'}]_{x=b} = 0.$$

**Observação** - Suponhamos que  $A$  esteja fixo e que  $B$  move-se sobre uma superfície de equação  $z = g(x, y)$ . Então,  $\delta z = f_x \delta x + f_y \delta y$  e a condição (3.54) se reduz à

$$[f - y'f_{y'} - z'f_{z'} + g_x f_{z'}]_{x=b} \delta x_B + [f_{y'} + f_{z'} g_y]_{x=b} \delta y_B = 0$$

e, como  $\delta x_B$  e  $\delta y_B$  são independentes, obtemos

$$[f - y'f_{y'} - z'f_{z'} + g_x f_{z'}]_{x=b} = 0$$

$$[f_{y'} + f_{z'} g_y]_{x=b} = 0.$$

**Exemplo 3.9** Achar a distância do ponto  $B = (1, 1, 1)$  à esfera unitária de raio 1.

O problema consiste em minimizar o funcional

$$J(y(x), z(x)) = \int_a^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx$$

com a condição do ponto  $A = (a, y(a), z(a))$  estar sobre a esfera. Sabemos, pelas equações de Euler-Lagrange, que os extremantes de  $J$  são do tipo

$$y = k_1x + k_2 \quad \text{e} \quad z = k_3x + k_4 \quad (3.55)$$

e, como a reta em questão deve passar por  $B$ , temos

$$k_1 + k_2 = 1 \quad \text{e} \quad k_3 + k_4 = 1. \quad (3.56)$$

Pela observação anterior, as condições de transversalidade têm a forma

$$\left[ \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \left[ \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - z' \right] \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right]_{x=a} = 0 \quad (3.57)$$

$$\left[ \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \frac{-y'}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right]_{x=a} = 0. \quad (3.58)$$

Substituindo (3.55) em (3.57) e (3.58) e notando que  $z(a) = \sqrt{1 - a^2 - y(a)}$  (já que  $A$  está sobre a esfera), temos

$$z(a) - k_3a = 0 \quad \text{e} \quad k_1z(a) - k_3y(a) = 0 \quad (3.59)$$

e como

$$y(a) = k_1a + k_2 \quad \text{e} \quad z(a) = k_3a + k_4 \quad (3.60)$$

obtemos de (3.56), (3.59) e (3.60) os valores  $k_1 = k_3 = 1$  e  $k_2 = k_4 = 0$  e então, o extremante de  $J$  terá as equações

$$y = x$$

$$z = x.$$

Como  $A$  está sobre a esfera, devemos ter

$$a^2 + a^2 + a^2 = 1$$

ou seja,

$$a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Se

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

então

$$J(y, z) = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \sqrt{3} \, dx = \sqrt{3} - 1.$$

Se

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

então

$$J(y, z) = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \sqrt{3} \, dx = \sqrt{3} + 1$$

e, portanto, podemos concluir que a distância de  $B$  até a esfera é  $\sqrt{3} - 1$ .

A referência básica para esta seção foi o texto de [1].

No próximo capítulo apresentaremos as condições suficientes que nos permitirão classificar com precisão o tipo de extremo obtido.

# Capítulo 4

## Condições Suficientes para Extremos

### 4.1 Introdução

Com a teoria desenvolvida até aqui temos condições de encontrar extremos de um funcional, mas não conseguimos saber se este extremo é de fato um mínimo, máximo ou ponto de inflexão. Isto ocorre porque as condições de ocorrência de extremos que temos até agora são todas apenas necessárias.

Nos problemas que resolvemos ao longo dos capítulos 1, 2 e 3 foi relativamente simples classificar os extremos mesmo tendo somente condições necessárias. Porém, existem problemas em que pode se tornar complicado classificar um extremo usando apenas essas condições. Neste capítulo apresentaremos elementos da teoria de campos e daí partiremos para enunciar e demonstrar condições suficientes que nos permitirão afirmar com toda segurança qual o tipo de extremo encontrado para determinado problema. Procuramos incluir vários exemplos no decorrer do capítulo para que a teoria possa ser ilustrada e melhor compreendida.

## 4.2 Extremos fortes e fracos

No início do capítulo 3 já definimos máximos e mínimos fortes e fracos. Retomaremos estas definições, só que agora de maneira mais formal utilizando a linguagem necessária para o desenvolvimento do capítulo.

**Notação** - A partir desta seção adotaremos a seguinte notação:

$C^n(x, y)$ : espaço das funções contínuas no intervalo  $(x, y)$  que possuem derivadas contínuas, até ordem  $n$  neste intervalo ( $n = 1, 2, \dots$ );

$C^n(U)$ : espaço das funções contínuas no conjunto  $U$  que possuem derivadas contínuas, até ordem  $n$  neste conjunto ( $n = 1, 2, \dots$ );

$C(U)$ : espaço das funções contínuas no conjunto  $U$ .

Assumimos que o funcional  $I[y]$  está definido em um subconjunto aberto de um espaço linear normado  $S$ . Os funcionais com os quais estamos trabalhando no cálculo variacional estão normalmente em  $C^1[a, b]$ , que é um espaço de funções que possui uma norma bem definida. Dependendo do tipo de norma introduzida, diferentes conceitos são obtidos. A aplicação

$$\|f\|_w = \max_{[a,b]} |f(x)| \quad (4.1)$$

está bem definida em  $C^1[a, b]$  e satisfaz as condições necessárias para definir uma norma. Essa norma definida em (4.1) é chamada **norma fraca** e denotaremos o espaço linear **fracamente normado**  $C^1[a, b]$  por  $C_w^1[a, b]$ .

Também a aplicação

$$\|f\| = \max_{[a,b]} |f(x)| + \sup_{[a,b]} |f'(x)| \quad (4.2)$$

está bem definida em  $C^1[a, b]$  e satisfaz as condições necessárias para definir uma norma. Essa norma definida em (4.2) é chamada **norma forte** e denotaremos o espaço linear **fortemente normado**  $C^1[a, b]$  por  $C_s^1[a, b]$ . Definiremos a seguir vi-

zinhanças fracas e fortes.

**Definição 4.1** Uma  $\delta$ -vizinhança  $N_w^\delta(y_0)$  de  $y = y_0(x) \in C_w^1[a, b]$ , isto é, o conjunto dos pontos  $\{(x, y) \mid x \in [a, b], |y - y_0(x)| < \delta\}$  é chamada de  **$\delta$ -vizinhança fraca** de  $y = y_0(x)$ .

**Definição 4.2** Uma  $\delta$ -vizinhança  $N_s^\delta(y_0)$  de  $y = y_0(x) \in C_s^1[a, b]$ , isto é, o conjunto dos pontos  $\{(x, y, y') \mid x \in [a, b], |y - y_0(x)| < \delta, |y' - y_0'(x)| < \delta\}$  é chamada de  **$\delta$ -vizinhança forte** de  $y = y_0(x)$ .

**Definição 4.3** A função  $y_0 \in \Sigma$  fornece um **mínimo relativo forte** para  $I[y]$  em  $\Sigma$ , onde  $\Sigma$  denota o espaço de funções, se  $I[y] - I[y_0] \geq 0$  para todas as funções  $y \in \Sigma$  para as quais  $y \in N_w^\delta(y_0)$ , para algum  $\delta > 0$ .

**Definição 4.4** A função  $y_0 \in \Sigma$  fornece um **mínimo relativo fraco** para  $I[y]$  em  $\Sigma$ , onde  $\Sigma$  denota o espaço de funções, se  $I[y] - I[y_0] \geq 0$  para todas as funções  $y \in \Sigma$  para as quais  $y \in N_s^\delta(y_0)$ , para algum  $\delta > 0$ .

Na próxima seção introduziremos um estudo introdutório da teoria de campos.

Para estas definições tivemos como referência básica o texto [36].

## 4.3 Campos

Iniciaremos agora um pequeno estudo sobre teoria de campos, no qual veremos resultados fundamentais para a compreensão e demonstração das condições suficientes para ocorrência de extremos. Já falamos um pouco sobre campos ao tratar, no capítulo 3, dos campos de Jacobi.

Podemos definir campo da seguinte forma: considere uma família a 1-parâmetro

de extremas, isto é, soluções suaves da equação de Euler-Lagrange. Pedimos que não haja duas curvas correspondentes a diferentes valores do parâmetro passando pelo mesmo ponto de um certo domínio simplesmente conexo  $A$  no plano  $xy$  e que não haja nenhum ponto de  $A$  pelo qual não passe nenhuma curva dessa família de soluções da equação. Então, essas curvas irão associar a cada ponto  $(x, y)$  de  $A$  um vetor  $(1, y')$ , onde  $y'$  é a inclinação do extremal passando por  $(x, y)$ . A coleção de todas essas direções associadas aos pontos de  $A$  é chamada de **campo em  $A$** . De maneira mais formal, esta definição fica:

**Definição 4.5** Seja  $A$  um domínio limitado e simplesmente conexo no plano  $xy$ . A função vetorial  $(1, \phi(x, y))$  define um campo  $F = \{(1, \phi(x, y)) \mid (x, y) \in A\}$  em  $A$  para  $I[y]$  se  $\phi_x, \phi_y \in C(A)$  e se cada solução de  $y' = \phi(x, y)$  em  $A$  é um extremal de  $I[y]$ . A função  $\phi(x, y)$  é a **função inclinação do campo no ponto  $(x, y)$** . Esta função é tal que  $y' = \phi(x, y)$ .

**Definição 4.6** O extremal  $y = y_0(x) \in C^1[a, b]$ ,  $y(a) = y_a$ ,  $y(b) = y_b$  de  $I[y]$  está incluído em um campo  $F$  de  $I[y]$  se:

1. O campo  $F$  é definido em um domínio simplesmente conexo  $A$  que contém  $N_w^\delta(y_0)$  para algum  $\delta > 0$ .
2. A função  $y = y_0(x)$  é uma solução em  $A$  de  $y' = \phi(x, y)$ .

**Lema 3** Se  $y = Y(x, c)$  representa uma família a 1-parâmetro de soluções da equação de Euler-Lagrange em  $S = \{(x, c) \mid A < x < B, c_1 < c < c_2\}$  tal que  $Y(x, c_0) = y_0(x)$  para algum  $c_0 \in (c_1, c_2)$ ,  $Y, Y'', Y'_c, Y_c \in C(S)$  e  $Y_c(x, c_0) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b] \subset (A, B)$ , então  $y = y_0(x)$ ,  $x \in [a, b]$  está incluído em um campo.

*Demonstração:*

Sejam  $\eta_0 = y_0(x_0)$ ,  $x_0 \in [a, b]$  e

$$S' = \{(x, y, c) \mid A < x < B, c_1 < c < c_2, -\infty < y < \infty\}.$$

Então,  $y - Y(x, c) \in C^1(S')$ ,  $\eta_0 - Y(x_0, c_0) = 0$  e  $Y_c(x_0, c_0) \neq 0$ .

Assim, pelo teorema da função implícita, existe em  $S'$  um paralelepípedo aberto  $P = \{(x, y, c) \mid |x - x_0| < \alpha_0, |y - \eta_0| < \beta_0, |c - c_0| < \gamma_0\}$  tal que em  $P_0 = \{(x, y) \mid |x - x_0| < \alpha_0, |y - \eta_0| < \beta_0\}$  podemos resolver  $y - Y(x, c) = 0$  unicamente para  $c$ , isto é, obter  $c$  como uma função  $c^*$  de  $x$  e  $y$ , ou seja,  $c = c^*(x, y)$ ,  $(x, y) \in P_0$  e  $|c - c_0| < \gamma_0$  para  $(x, y) \in P_0$ ,  $c^*(x, y) \in C^1(P_0)$ . Então  $c^*(x, Y(x, c)) \equiv c$ . Repetimos então o mesmo argumento para cada  $x_0 \in [a, b]$  e obtemos uma cobertura aberta de  $y = y_0(x)$  de  $[a, b]$  por retângulos. Pelo Teorema de Heine-Borel<sup>1</sup>, um número finito desses retângulos, digamos,  $P_1, P_2, \dots, P_n$  cobrirá  $y = y_0(x)$  em  $[a, b]$ . Seja  $P = \bigcup_{k=1}^n P_k$ . Então, existe um  $N_w^\delta(y_0) \subset P$ . Escolhemos a enumeração destes retângulos  $P_k$  de tal maneira que os retângulos com índices consecutivos se interceptam. Como  $c = c^*(x, y)$  é unicamente determinado em cada  $P_k$ , os valores de  $c^*(x, y)$  tem que coincidir nas porções em que os retângulos se interceptam (veja figura 4.1) e segue que  $c = c^*(x, y) \in C^1(N_w^\delta(y_0))$ .

Mostremos agora que  $(1, \phi(x, y))$  define um campo em  $N_w^\delta(y_0)$ , onde  $\phi(x, y) = Y'(x, c^*(x, y))$ .

Primeiramente

$$\phi(x, y) = Y'(x, c^*(x, y)) \in C^1(N_w^\delta(y_0)),$$

$$\phi_x(x, y) = Y''(x, c^*(x, y)) + Y'_c(x, c^*(x, y))c_x^*(x, y) \in C^1(N_w^\delta(y_0)),$$

$$\phi_y(x, y) = Y'(x, c^*(x, y))c_y^*(x, y) \in C^1(N_w^\delta(y_0)).$$

Agora

$$\phi(x, Y(x, c)) = Y'(x, c^*(x, Y(x, c))) = Y'(x, c)$$

---

<sup>1</sup>Se  $B \subset \mathbb{R}^n$  é limitado e fechado e se  $U$  é uma cobertura aberta de  $B$ , então, existe uma subcobertura finita de  $U$  para  $B$ .

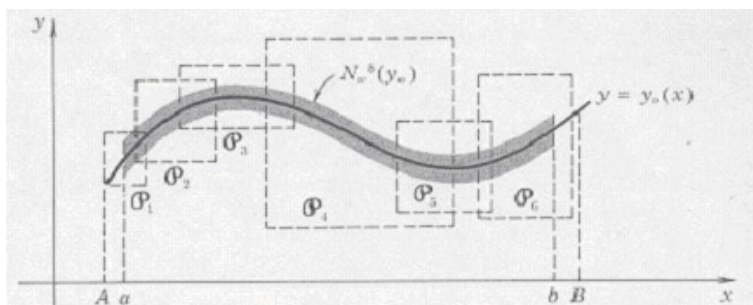


Figura 4.1: Ilustração da idéia usada na demonstração, extraída de [36, p. 135]

já que  $c^*(x, Y(x, c)) \equiv c$ . Assim, a família 1-paramétrica de extremais  $y = Y(x, c)$  é uma família 1-paramétrica de soluções  $y' = \phi(x, y)$ . Finalmente,  $y_0(x) = Y(x, c_0)$  por hipótese. Então,  $\phi(x, y)$  satisfaz todas as condições estabelecidas nas definições 4.5 e 4.6 e o resultado está demonstrado.  $\square$

Para tornar o lema mais claro, vamos ilustrá-lo com um exemplo:

**Exemplo 4.1** Considere o seguinte funcional

$$I[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4.3)$$

com as condições  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 1$ .

Suponha que estamos querendo minimizar este funcional. O extremal para este problema é  $y = y_0(x) \equiv x$ , e daí então,  $y = Y(x, c) = x + c$  é uma família a 1-parâmetro de soluções da equação de Euler-Lagrange  $y'' = 0$ .

Portanto,  $Y(x, 0) = x + 0 = x$  ( $c_0 = 0$  neste caso). Deste modo,  $Y(x, c) = x + c$ ,  $Y''(x, c) = 0$ ,  $Y_c(x, c) = 1$ ,  $Y'_c(x, c) = 0$  são contínuas e  $Y_c(x, c) = 1 \neq 0$ . Assim,  $y = x$ ,  $x \in [0, 1]$  está incluído em um campo  $F = \{(1, 1)\}$  já que  $\phi(x, y) = 1$ .

$y = Y(x, c) = cx + c - 1$  é outra família 1-parâmetro de soluções da equação de Euler-Lagrange e  $Y(x, 1) = x$  ( $c_0 = 1$  neste caso). Como  $Y(x, c) = cx + c - 1$ ,  $Y''(x, c) = 0$ ,  $Y_c(x, c) = x + 1$  e  $Y'_c(x, c) = 1$  são contínuas e como  $Y_c(x, c) = x + 1 \neq 0$  para todo

$x > -1$ , vemos que  $y = x$ ,  $x \in [0, 1]$  está também incluído em um campo definido por  $(1, (y + 1)/(x + 1))$ ,  $x > -1$ , já que  $c^*(x, y) = (y + 1)/(x + 1)$ , temos  $\phi(x, y) = Y'(x, c^*(x, y)) = (y + 1)/(x + 1)$  neste caso.

Este exemplo, além de ilustrar o lema anterior, mostra que o extremo pode ser incluído em um campo de várias maneiras. Ou seja, o campo não é único, há pelo menos um campo no qual o extremo está incluído. É isto que o lema 3 nos garante.

Seja  $y = y_0(x)$  o extremo de um funcional,  $y = y_1(x) \in C^1[a, b]$ ,  $y_1(a) = y_0(a)$ ,  $y_1(b) = y_0(b)$ , assumamos que  $\|y_0 - y_1\|_w < \delta$ , isto é,  $y_1 \in N_w^\delta(y_0)$  e considere a variação total

$$\Delta I = I[y_1] - I[y_0] = \int_a^b [f(x, y_1(x), y_1'(x)) - f(x, y_0(x), y_0'(x))] dx. \quad (4.4)$$

Se estamos interessados em descobrir que tipo de extremo  $y_0(x)$  fornece para  $I[y]$ , precisamos avaliar qual o sinal de  $\Delta I$  em (4.4). Precisamos então, encontrar uma maneira fácil de estudar este sinal. É isto que faremos a partir da próxima seção.

Neste estudo tivemos por base as referências [36] e [3].

## 4.4 Integral invariante de Hilbert

Nesta seção estaremos interessados em obter algum resultado que torne simples a análise do sinal de  $\Delta I$  em (4.4).

Para o que faremos agora, assumimos que o extremal  $y = y_0(x)$  está incluído em um campo  $F$ , ou seja, uma função vetorial  $(1, \phi(x, y))$  está definida em  $N_w^\delta(y_0)$  e  $\phi(x, y)$  satisfaz as condições estabelecidas anteriormente.

Se  $y = y_1(x) \in N_w^\delta(y_0)$ , então, em cada ponto  $(x, y_1(x))$  de  $y = y_1(x)$  há uma inclinação associada  $y_1'(x) = \phi(x, y_1(x))$  que é a inclinação do campo e a inclinação  $y_1'(x)$  da curva  $y = y_1(x)$  (veja figura 4.2).

Assim, a expressão

$$h(x, y_1, y_1') = f(x, y_1, \phi(x, y_1)) +$$



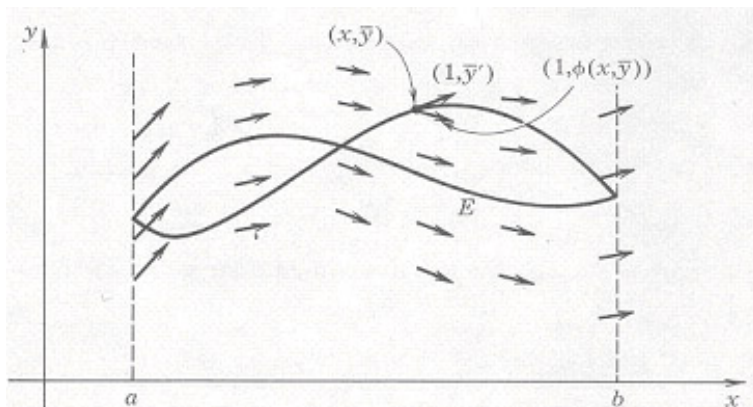


Figura 4.2: Ilustração extraída de [36, p. 138] com as inclinações da curva e do campo.

$$- \phi(x, y_1) f_{y'}(x, y_1, \phi(x, y_1)) + y_1' f_{y'}(x, y_1, \phi(x, y_1)) \quad (4.5)$$

é definida para todo ponto da curva  $y = y_1(x) \in N_w^\delta(y_0)$

Demonstraremos agora um resultado de *David Hilbert* (1862 - 1943), que será a chave para o estudo do sinal da variação total.

**Teorema 7** *Se o extremal  $y = y_0(x)$  está incluído em um campo  $(1, \phi(x, y))$  que cobre  $N_w^\delta(y_0)$ , então a integral*

$$U[y_1] = \int_a^b h(x, y_1(x), y_1'(x)) dx \quad (4.6)$$

é independente de  $y = y_1(x) \in C^1[a, b]$  e depende somente de  $y_1(a)$  e  $y_1(b)$  ao longo de  $y_1(x) \in N_w^\delta(y_0)$  e  $f \in C^2(R)$ , onde  $R$  denota o domínio

$$R = \{(x, y, y') \mid A < x < B, |y - y_0(x)| < \delta, -\infty < y' < \infty, [a, b] \subset (A, B)\}.$$

A integral  $U[y_1]$  em (4.6) é chamada de **Integral invariante de Hilbert**.

*Demonstração:*

Devido ao que assumimos sobre  $\phi$ ,  $y_1$  e  $f$ , a integral  $U[y_1]$  existe.

Sejam  $P(x, y) = f(x, y, \phi(x, y)) - \phi(x, y) f_{y'}(x, y, \phi(x, y))$  e  $Q(x, y) = f_{y'}(x, y, \phi(x, y))$ .

Então, ao longo de qualquer curva suave  $y = y_1(x) \in N_w^\delta(y_0)$

$$\int_a^b h(x, y_1(x), y_1'(x)) dx = \int_a^b [P(x, y_1(x)) + Q(x, y_1(x))y_1'(x)] dx \quad (4.7)$$

fica

$$\int_a^b h(x, y_1(x), y_1'(x)) dx = \int_{(a, y_1(a))}^{(b, y_1(b))} (P(x, y)dx + Q(x, y)dy), \quad (4.8)$$

essa integral sendo uma integral de linha.

Se mostrarmos que  $P_y(x, y) - Q_x(x, y) = 0$  para todo  $(x, y)$  em  $N_w^\delta(y_0)$  então a invariância de  $U[y_1]$  é estabelecida (devido ao que sabemos sobre campos conservativos).

Temos  $P_y = f_y + f_{y'}\phi_y - \phi_y f_{y'} - \phi[f_{y'y} + f_{y'y'}\phi_y]$  e  $Q_x = f_{y'x} + f_{y'y'}\phi_x$ .

E assim,  $P_y - Q_x = f_y - f_{y'x} - f_{y'y}\phi - f_{y'y'}[\phi\phi_y + \phi_x]$ .

Em cada ponto  $(x, y)$  em  $N_w^\delta(y_0)$  há uma inclinação  $y' = \phi(x, y)$  associada, tal que  $(x, y, \phi(x, y))$  é um elemento de um extremal unicamente determinado  $y = y(x)$  que satisfaz  $y'(x) = \phi(x, y(x))$ . Então

$$y''(x) = \phi_x(x, y(x)) + \phi_y(x, y(x))y'(x) = \phi_x(x, y(x)) + \phi_y(x, y(x))\phi(x, y(x)).$$

Como  $y = y(x)$  é também uma solução da equação de Euler-Lagrange, isto é

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - f_{y'x}(x, y(x), y'(x)) - f_{y'y}(x, y(x), y'(x))y'(x) - f_{y'y'}(x, y(x), y'(x))y''(x) = 0$$

temos em cada ponto  $(x, y)$  em  $N_w^\delta(y_0)$  que  $P_y(x, y) - Q_x(x, y) = 0$ .

Assim, existe uma função  $W = W(x, y) \in C^1(N_w^\delta(y_0))$  tal que  $W_x(x, y) = P(x, y)$  e  $W_y(x, y) = Q(x, y)$  e, conseqüentemente

$$\int_a^b h(x, y_1(x), y_1'(x)) dx = \int_{(a, y_1(a))}^{(b, y_1(b))} dW(x, y_1(x)) = W(b, y_1(b)) - W(a, y_1(a)), \quad (4.9)$$

isto é,  $U[y_1]$  é independente do caminho e depende somente das coordenadas dos pontos inicial e final, demonstrando assim o teorema.  $\square$

Na seção seguinte, utilizaremos este teorema para fazer uma transformação na variação total e finalmente obter uma maneira fácil de estudar o seu sinal. Continuamos tendo como referência básica para esta seção o texto [36].

## 4.5 Transformação da variação total

Vimos na seção anterior que  $U[y_1]$  como definido no teorema 7 é independente de  $y = y_1(x)$  ao longo de  $y = y_1(x) \in N_w^\delta(y_0)$  e depende somente das coordenadas dos pontos inicial e final. Em particular,

$$U[y_1] = U[y_0] \text{ se } y_1(a) = y_0(a), \quad y_1(b) = y_0(b). \quad (4.10)$$

Tomemos agora  $U[y]$  para  $y = y_0(x)$ . Então,  $y_1'(x) = y_0'(x)$ ,  $\phi(x, y_0(x)) = y_0'(x)$  e obtemos

$$U[y_0] = \int_a^b [f(x, y_0, y_0') - y_0' f_{y'}(x, y_0, y_0') + y_0' f_{y'}(x, y_0, y_0')] dx. \quad (4.11)$$

Portanto,

$$U[y_0] = \int_a^b f(x, y_0(x), y_0'(x)) dx = I[y_0] \quad (4.12)$$

e então podemos escrever a variação total da seguinte forma

$$\Delta I = I[y_1] - I[y_0] = I[y_1] - U[y_0] = I[y_1] - U[y_1], \quad (4.13)$$

logo

$$\int_a^b [f(x, y_1, y_1') - f(x, y_1, \phi(x, y_1)) + (\phi(x, y_1) - y_1') f_{y'}(x, y_1, \phi(x, y_1))] dx. \quad (4.14)$$

Aqui, é assumido que  $y = y_1(x) \in N_w^\delta(y_0)$  e  $y_1(a) = y_0(a)$ ,  $y_1(b) = y_0(b)$ .

Se introduzirmos a função  $E$  de Weierstrass, a variação total pode ser escrita da seguinte forma

$$\Delta I = \int_a^b E(x, y_1(x), \phi(x, y_1(x)), y_1'(x)) dx \quad (4.15)$$

e daí temos o resultado a seguir:

**Teorema 8** *Se o extremal  $y = y_0(x)$  está incluído em um campo  $F$  que cobre  $N_w^\delta(y_0)$  e se*

$$E(x, y_1, \phi(x, y_1), y'_1) \geq 0 \quad (4.16)$$

*para todos  $(x, y_1) \in N_w^\delta(y_0)$  e todos  $-\infty < y'_1 < \infty$ , então,  $y = y_0(x)$  fornece um mínimo relativo forte para  $I[y]$  (Para um máximo relativo forte, a condição é  $E(x, y_1, \phi(x, y_1), y'_1) \leq 0$ ).*

*Demonstração:*

$$\Delta I = \int_a^b E(x, y_1(x), \phi(x, y_1(x)), y'_1(x)) dx = I[y_1] - I[y_0] \geq 0, \quad (4.17)$$

o que encerra a demonstração.  $\square$

## 4.6 Outros resultados preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que necessitaremos para demonstrar as condições suficientes. Demonstrados estes resultados, as condições suficientes estarão automaticamente demonstradas.

**Lema 4** *Se  $(x_0, y_0, y'_0)$  é um elemento regular e se  $f \in C^2(R_0)$  onde  $R_0$  é definido como sendo o domínio tridimensional*

$$R_0 = \{(x, y, p) \mid |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta, |y' - y'_0| < \gamma\}, \quad (4.18)$$

*então, existe um paralelepípedo aberto  $P_0$  definido por*

$$P_0 = \{(x, y, p) \mid |x - x_0| < \alpha_0, |y - y_0| < \beta_0, |p - p_0| < \delta_0\} \quad (4.19)$$

*tal que a equação de Euler-Lagrange pode ser transformada por meio de  $p = f_{y'}(x, y, y')$  no sistema de equações diferenciais ordinárias*

$$y' = \Phi(x, y, p), \quad p' = \Psi(x, y, p) \quad (4.20)$$

*onde  $\Phi, \Psi \in C^1(P_0)$*

*Demonstração:*

Introduza  $p = f_{y'}(x, y, y')$ . Seja  $(x_0, y_0, y'_0)$  um elemento regular e  $P_0$  o domínio definido por (4.19). Seja  $S$  o seguinte domínio 4-dimensional

$$S = \{(x, y, y', p) \mid |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta, |y' - y'_0| < \gamma, |p - p_0| < \delta\}$$

onde  $p_0 = f_{y'}(x_0, y_0, y'_0)$ .

Assumimos que  $f(x, y, y') \in C^2(R_0)$ . Então:

$$f_{y'}(x, y, y') - p \in C^1(S)$$

$$f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) - p_0 = 0$$

$$f_{y'y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0.$$

Assim, pelo teorema da função implícita, existe em  $S$  um paralelepípedo aberto

$$P = \{(x, y, y', p) \mid |x - x_0| < \alpha_0, |y - y_0| < \beta_0, |y' - y'_0| < \gamma_0, |p - p_0| < \delta_0\}$$

tal que, em  $P_0$ , podemos resolver  $f_{y'}(x, y, y') - p = 0$  unicamente para  $y'$

$$y' = \Phi(x, y, p) \tag{4.21}$$

onde  $|y' - y'_0| < \gamma_0$  para  $(x, y, p) \in P_0$  e onde  $\Phi \in C^1(P_0)$ .

Assim, se definirmos

$$\Psi(x, y, p) = f_y(x, y, \Phi(x, y, p)) \tag{4.22}$$

então,  $\Psi \in C^1(R_0)$ , já que  $f \in C^2(R_0)$  e  $\Phi \in C^1(P_0)$ .

Pela equação de Euler-Lagrange temos

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} f_{y'}|_{y'=\Phi(x,y,p)} = f_{yy'}(x, y, y')|_{y'=\Phi(x,y,p)} \tag{4.23}$$

e obtemos então que a equação de Euler-Lagrange pode ser escrita como o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dy}{dx} = \Phi(x, y, p), \quad \frac{dp}{dx} = \Psi(x, y, p) \tag{4.24}$$

com  $\Phi, \Psi \in C^1(P_0)$ , demonstrando assim o lema 4.  $\square$

**Teorema 9** *Seja  $A < a, B > b$  e assumamos que o extremal  $y = y_0(x) \in C^1(A, B)$  é regular em  $(A, B)$ . Se  $f \in C^2(R)$  onde*

$$R = \{(x, y, y') \mid A < x < B, |y - y_0| < \alpha_1, |y' - y'_0| < \beta_1\}, \quad (4.25)$$

*existe um domínio*

$$D = \{(x, y, p) \mid a_1 < x < b_1, |y - y_0| < \delta, |p - p_0| < \delta\}, \quad (4.26)$$

*para algum  $\delta > 0$ , onde  $p_0(x) = f_{y'}(x, y_0, y'_0)$  e  $A < a_1 < a, B > b_1 > b$  tal que a equação de Euler-Lagrange pode ser transformada por meio de  $p = f_{y'}(x, y, y')$  no sistema de equações diferenciais ordinárias*

$$y' = \Phi(x, y, p), \quad p' = \Psi(x, y, p) \quad (4.27)$$

*onde  $\Phi, \Psi \in C^1(D)$ .*

*Demonstração:*

Por hipótese, para todo  $x_0 \in (A, B)$ ,  $(x_0, y_0(x_0), y'_0(x_0))$  é um elemento regular. Assim, pelo lema 4, existe um paralelepípedo aberto, como definido em (4.19), tal que vale (4.20) e  $\Phi, \Psi \in C^1(P_0)$ . Vamos agora aplicar o mesmo argumento para cada ponto do intervalo  $[a, b]$  e seu correspondente elemento de  $y = y_0(x)$  e obter, desta maneira, uma cobertura aberta do conjunto compacto  $y = y_0(x), p = p_0(x), x \in [a, b]$  por paralelepípedos (veja figura 4.3).

Pelo teorema de Heine-Borel, um número finito desses paralelepípedos, digamos,  $P_1, P_2, \dots, P_n$  cobre este conjunto compacto. Seja  $P = \bigcup_{k=1}^n P_k$ , e assumamos sem perda de generalidade que os  $P_k$  são enumerados de maneira que os paralelepípedos consecutivos se interceptam. Como temos um número finito de paralelepípedos e paralelepípedos consecutivos se interceptam, existe um domínio  $D$ , como o definido

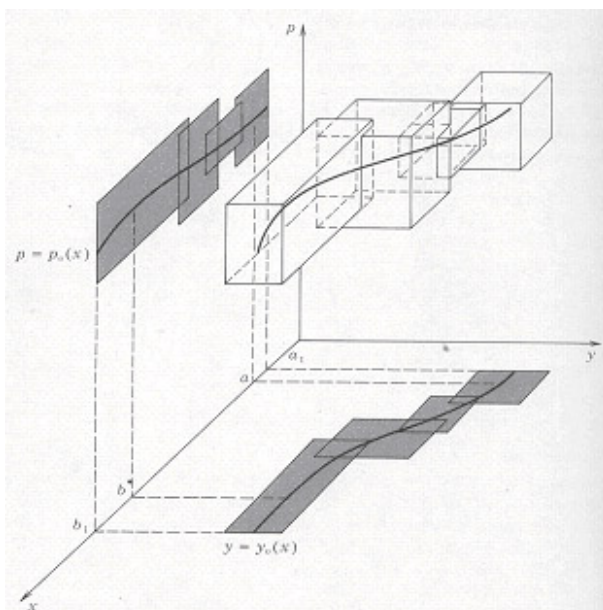


Figura 4.3: Ilustração extraída de [36, p. 60] mostrando a idéia usada durante a demonstração.

por (4.26) tal que  $D \subset P$ . Como  $\Phi, \Psi$  são unicamente definidos em cada paralelepípedo da cobertura aberta, segue que  $\Phi$  e  $\Psi$  precisam coincidir na porção comum de  $P_{k-1}$  e  $P_k$ . Assim,  $\Phi, \Psi \in C^1(D)$  e o teorema está demonstrado.  $\square$

**Teorema 10** *Se  $(a, b]$  não possui um ponto conjugado para  $a$ , então existe um  $\Delta > 0$  tal que  $(a - \Delta, b]$  não possui ponto conjugado para  $a - \Delta$ .*

*Demonstração:*

Suponha que não exista um  $\Delta > 0$  tal que  $(a - \Delta, b]$  não possua ponto conjugado para  $a - \Delta$ . Então, denotando por  $x_1^* = \varphi(x_1)$  o ponto conjugado de um ponto  $x_1$ , com  $\varphi$  contínua numa vizinhança de  $x_1$ , temos  $\varphi(a - \Delta_n) \leq b$  para  $\{\Delta_n\} \rightarrow 0$ , e assim, pela continuidade de  $\varphi$  na vizinhança de  $a - \Delta_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(a - \Delta_n) = \varphi(a) \leq b$  e desse modo existiria um ponto conjugado  $a^*$  de  $a$ , o que contradiz nossas hipóteses e, portanto, o teorema está demonstrado.  $\square$

**Teorema 11** *Se  $y = y_0(x) \in C^1(A, B)$  é um extremal regular em  $[a, b] \subset (A, B)$ , se  $f \in C^3(R)$ , onde*

$$R = \{(x, y, y') \mid A < x < B, |y - y_0(x)| < \alpha_1, |y' - y'_0(x)| < \beta_1\} \quad (4.28)$$

*e se não há ponto conjugado de  $a$  em  $[a, b]$ , então  $y = y_0(x)$ ,  $x \in [a, b]$  está incluído em um campo  $F$ .*

*Demonstração:*

Seja  $p_0(x) = f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x))$ . De acordo com o teorema 9, existe um domínio  $D = \{(x, y, p) \mid a_1 < x < b_1, |y - y_0| < \delta, |p - p_0| < \delta\}$  onde  $A < a_1 < a < b < b_1 < B$ ,  $\delta > 0$  e onde a equação de Euler-Lagrange pode ser trocada por

$$y' = \Phi(x, y, p), \quad p' = \Psi(x, y, p) \quad (4.29)$$

tal que  $\Phi, \Psi \in C^1(D)$ .

Seja  $(x_0, \lambda, c) \in D$ . Então, (4.29) tem uma única solução  $y = y(x, \lambda, c)$ ,  $p = p(x, \lambda, c)$  que satisfaz as condições iniciais  $y(x_0, \lambda, c) = \lambda$ ,  $p(x_0, \lambda, c) = c$  e  $y', p', y_\lambda, y_c, p_\lambda$  e  $p_c$  são contínuas ao longo da solução em  $D$  (ver [9]).

Como  $(a, b]$  não possui um ponto conjugado para  $a$ , existe um  $\Delta > 0$ , onde  $0 < \Delta < a - a_1$  tal que  $a - \Delta$  não tem ponto conjugado em  $(a - \Delta, b]$  (de acordo com o teorema 9).

Vamos agora determinar as soluções de (4.29) tais que

$$y(a - \Delta) = y_0(a - \Delta)$$

$$p(a - \Delta) = c$$

com  $(a - \Delta, y_0(a - \Delta), c) \in D$ , isto é,  $|c - p_0(a - \Delta)| < \Delta$ .

Denotamos essas soluções por  $y = Y(x, c)$ ,  $p = P(x, c)$ . Obtivemos então uma família a 1-parâmetro de soluções da equação de Euler-Lagrange que passa pelo



ponto  $(a - \Delta, y_0(a - \Delta))$  e contém o extremal  $y = y_0(x)$  para  $c_0 = p_0(a - \Delta)$ .

Como

$$Y(a - \Delta, c) = y_0(a - \Delta)$$

para todo  $c$ , temos

$$Y_c(x, c)_{x=a-\Delta} = 0$$

e, em particular

$$Y_c(x, c - 0)_{x=a-\Delta} = 0.$$

Como  $\eta = Y_c(x, c_0)$  é uma solução da equação de Jacobi, e como, por hipótese  $(a - \Delta)^* > b$  temos

$$Y_c(x, c_0) \neq 0 \quad \text{para } a - \Delta < x \leq b \quad (4.30)$$

e, em particular, para todo  $x \in [a, b]$ .

Vamos agora demonstrar que  $y = Y(x, c)$  satisfaz as hipóteses do lema 3 para  $x \in (\alpha, \beta)$  onde  $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$  e  $c_1 < c < c_2$ , onde  $\alpha, \beta, c_1, c_2$  serão determinadas posteriormente.

Como  $\Phi, \Psi \in C^1(D)$ , as soluções  $y = Y(x, c)$ ,  $p = P(x, c)$  são funções contínuas de  $c$ , ao longo de  $D$ , e, em particular

$$|Y(x, c) - y_0(x)| + |P(x, c) - P(x, c_0)| \leq |c - c_0|e^{k(x-a+\Delta)}, \quad (4.31)$$

onde  $y_0(x) = Y(x, c_0)$ . Para a compreensão de (4.31) veja [9]. Seja  $0 < \Delta_1 < b_1 - b$  e seja

$$|c - c_0| < \delta e^{-k(b_1 - \Delta_1 + \Delta - a)}. \quad (4.32)$$

De (4.31) e (4.32) obtemos

$$|Y(x, c) - y_0(x)| < \delta$$

para todo  $x \in (a - \Delta, b_1 - \Delta_1)$  e

$$|P(x, c) - P(x, c_0)| < \delta$$

para todo  $x \in (a - \Delta, b_1 - \Delta_1)$ . Assim, se tomarmos

$$c_1 = c_0 - \delta e^{-k(b_1 - \Delta_1 - a + \Delta)}$$

e

$$c_2 = c_0 + \delta e^{-k(b_1 - \Delta_1 - a + \Delta)}$$

então  $y = Y(x, c) \in D$ ,  $p = P(x, c) \in D$  para todo  $a - \Delta < x < b_1 - \Delta_1$  e  $c_1 < c < c_2$ .

Seja  $\alpha_0 = a - \Delta$ ,  $\beta_0 = b_1 - \Delta_1$  e  $S = \{(x, c) \mid \alpha_0 < x < \beta_0, c_1 < c < c_2\}$ . Então  $Y$ ,  $Y_c$ ,  $P$ ,  $P_c \in C(S)$  (veja [9]) e assim:

$$Y'_c = \frac{\partial}{\partial c}[\Phi(x, Y(x, c), P(x, c))] = \Phi_y Y_c + \Phi_p P_c \in C(S).$$

$$Y'' = \frac{d}{dx}[\Phi(x, Y(x, c), P(x, c))] = \Phi_x + \Phi_y Y' + \Phi_p P' = \Phi_x + \Phi_y \Phi + \Phi_p \Psi \in C(S).$$

Então,  $Y$ ,  $Y''$ ,  $Y_c$ ,  $Y'_c \in C(S)$ .

Por (4.30),  $Y_c(x, c_0) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b]$  e assim, pelo lema 3,  $y = y_0(x)$  está incluído em um campo  $F$  em  $[a, b]$ , demonstrando assim o teorema.  $\square$

Nossa referência básica para o texto desta seção foi [36].

## 4.7 Condições suficientes de Weierstrass e de Legendre

Finalmente, nesta seção, já estamos em condições de enunciar as condições suficientes de Weierstrass e de Legendre que são, na verdade, um resumo dos resultados obtidos nas seções anteriores.

Seja o funcional

$$I[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (4.33)$$

no domínio das funções sujeitas às condições de fronteira

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (4.34)$$

**Teorema 12 - Condição suficiente de Weierstrass** *Para que uma curva  $Y$  seja um extremante fraco do funcional (4.33) com as condições de fronteira (4.34) basta que se cumpram as seguintes três condições:*

1.  *$Y$  é uma solução da equação de Euler-Lagrange para (4.33) satisfazendo as condições de fronteira (4.34).*
2. *Pode-se incluir  $Y$  num campo, o que acontecerá, por exemplo, ao se cumprir a condição necessária de Jacobi.*
3. *A função  $E(x, y, \phi(x, y), y')$  conserva o mesmo sinal para as coordenadas  $x, y$  de pontos suficientemente próximos de  $Y$  e quaisquer valores de  $y'$  próximos de  $\phi(x, y)$ .*

*Cumpridas estas três condições,  $Y$  será um maximante se  $E \leq 0$  e um minimante se  $E \geq 0$ .*

*Para que  $Y$  seja um extremante forte do funcional (4.33) bastará que se cumpram as condições 1, 2 e*

- 3'. *A função  $E(x, y, \phi(x, y), y')$  conserva o mesmo sinal para as coordenadas  $x, y$  de pontos de uma vizinhança de  $Y$  e para quaisquer valores atribuídos a  $y'$ .*

*Cumpridas estas três condições,  $Y$  será um maximante se  $E \leq 0$  e um minimante se  $E \geq 0$ .*

*Demonstração:*

Decorre diretamente dos resultados demonstrados nas seções anteriores.  $\square$

**Teorema 13 - Condição suficiente de Legendre** *Para que uma função  $\tilde{y}(x)$  seja um **extremante fraco** do funcional (4.33) no domínio das funções sujeitas às condições (4.34), basta que além das condições 1 e 2 de Weierstrass se cumpram para qualquer  $x$ ,  $a \leq x \leq b$  e  $y = \tilde{y}(x)$  a relação  $f_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ , implicando que  $\tilde{y}(x)$  é um **minimante**, ou,  $f_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$ , implicando que  $\tilde{y}(x)$  é um **maximante**. Para que  $\tilde{y}(x)$  seja um **extremante forte** de (4.33) com as condições (4.34) basta que, em lugar da condição 3' de Weierstrass, se cumpra para as coordenadas  $x$ ,  $y$  dos pontos de uma vizinhança de  $\tilde{y}(x)$  e para qualquer valor atribuído a  $y'$ , a relação  $f_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$  significando que  $\tilde{y}(x)$  é um **minimante**, ou, a relação  $f_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$  significando que  $\tilde{y}(x)$  é um **maximante**.*

*Demonstração:*

Decorre diretamente dos resultados demonstrados nas seções anteriores.  $\square$

Esta seção foi escrita inspirada no texto [36].

## 4.8 Aplicações das condições suficientes

Nesta seção faremos alguns exemplos de como aplicar as condições suficientes estudadas.

**Exemplo 4.2** - Qual a curva plana ligando dois pontos fixos  $A = (1, 0)$ ,  $B = (3, 4)$  satisfazendo às condições  $y(1) = 0$ ,  $y(3) = 4$  que tem o menor comprimento de arco?

Este problema já foi estudado de forma bem detalhada nos capítulos 1 e 3. Aqui

iremos nos preocupar apenas em aplicar a condição suficiente de Legendre.

Já sabemos que o extremal para este problema é  $y(x) = 2x - 2$  e que  $f_{y'y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)}$ , ou seja  $f_{y'y'} > 0$  para qualquer  $y'$ . Isto significa que a condição necessária de Legendre é satisfeita para qualquer  $y'$ .

No capítulo 3 vimos que não existe ponto conjugado para 1 em  $[1, 3]$  e, portanto, a condição necessária de Jacobi também é satisfeita, isto é,  $y(x) = 2x - 2$  está incluído em um campo.

Assim,  $y(x) = 2x - 2$  satisfaz às três condições da condição suficiente de Legendre e então,  $y(x) = 2x - 2$  é um mínimo forte para  $I[y]$ .

### Exemplo 4.3 - Problema da Braquistócrona

Este problema já foi considerado no capítulo 1. Sabemos que o funcional associado a ele é

$$I[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y-y_0}} dx. \quad (4.35)$$

Suponha aqui que  $y_0 = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = a$  e daí o funcional fica

$$I[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx, \quad (4.36)$$

e então colocamos as condições de fronteira

$$y(0) = 0 \quad e \quad y(a) = y_1. \quad (4.37)$$

Vamos estudar agora o comportamento deste funcional.

Resolvendo a equação de Euler-Lagrange para este funcional (como já fizemos no capítulo 1) obtemos a seguinte família de cicloides:

$$x = C(t - \operatorname{sen} t) + C_2$$

$$y = C(1 - \cos t).$$

Impondo a condição de fronteira  $y(0) = 0$  teremos  $C_2 = 0$  e portanto:

$$x = C(t - \operatorname{sen} t)$$

$$y = C(1 - \cos t).$$

Pelo ponto  $B = (a, y_1)$  passará uma certa cicloide

$$x = R(t - \operatorname{sen} t)$$

$$y = R(1 - \cos t)$$

com  $R$  determinado de modo único ao se impor a restrição  $a < 2\pi R$ .

Vejamos agora se há algum ponto conjugado para 0 em  $(0, a)$ . Se fizermos  $y(t) = 0$ , obtemos  $t = 2\pi$  e daí  $a^* = x(2\pi) = Rt - R\operatorname{sen} t = 2\pi R$  e então,  $a^* = 2\pi R$  é ponto conjugado de 0. Mas, como impusemos que  $a < 2\pi R$ , temos que  $(0, a)$  não possui ponto conjugado e, portanto, para qualquer  $y_1 > 0$ , existe uma região compreendendo o arco  $OB$  na qual a família de cicloides com centro na origem formará um campo.

Além disso,

$$f_{y'y'}(x, y, y') = \frac{1}{\sqrt{y}(1 + y'^2)^{3/2}} > 0$$

para qualquer valor atribuído a  $y'$ .

Então, pela condição suficiente de Legendre, a cicloide

$$x = R(t - \operatorname{sen} t)$$

$$y = R(1 - \cos t)$$

será um minimante forte para o funcional (4.36). Isto prova que, de fato, a cicloide é solução do problema da Braquistócrona, validando o resultado encontrado e discutido no capítulo 1.

**Exemplo 4.4 - O problema de Euler** - Determinar a força mínima  $P$ , que aplicada à extremidade de uma barra elástica vertical na direção longitudinal, provoca a flexão desta.

Vamos supor que a barra seja cilíndrica e que seu comprimento seja  $l$ ,  $E$  o módulo de Young <sup>2</sup> [40, p.267] para o seu material e  $I$  o momento de inércia da seção transversal em relação a uma reta passando pela sua linha média.

É conveniente escolher um referencial com o eixo  $Ox$  vertical, orientado para cima e de modo que o ponto de apoio da barra coincida com a origem.

Se  $\rho$  denotar o raio de curvatura da barra deformada e  $\Phi$  o ângulo constituído pela tangente à sua linha média e o eixo  $Ox$ , então, em virtude da **Lei de Euler-Bernoulli** o potencial da barra associado às forças de flexão será

$$U_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{1}{\rho^2} dS. \quad (4.38)$$

Por outro lado, a diminuição do potencial provocada pela deformação da barra será

$$U_2 = Pl - P \int_0^l \cos \varphi dS. \quad (4.39)$$

Logo, se considerarmos nulo o potencial da barra não deformada, esta adquirirá, após a deformação, o potencial

$$U = U_1 - U_2 = \int_0^l \left( \frac{1}{2} EI \frac{1}{\rho^2} + P \cos \varphi \right) dS - Pl. \quad (4.40)$$

Levando em consideração que  $\rho = \frac{dS}{d\varphi}$  e que, ao se examinarem apenas pequenas deformações,

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

---

<sup>2</sup>A razão entre a tensão e a deformação é constante para qualquer material, no caso de a tensão não ser muito grande. No caso de deformação de somente uma dimensão devido à tensão, esta razão é denominada **módulo de Young**.

podemos escrever

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EI \left( \frac{d\varphi}{dS} \right)^2 - P\varphi^2 \right] dS \approx \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EI \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - P\varphi^2 \right] dx.$$

Um sistema mecânico adquirindo na posição de equilíbrio a menor energia potencial possível conduz o problema à análise do comportamento do funcional

$$J[\varphi] = \int_0^l \left[ EI \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - P\varphi^2 \right] dx = \int_0^l [EI\varphi'^2 - P\varphi^2] dx. \quad (4.41)$$

Vamos então escrever e resolver a equação de Euler-Lagrange associada a este funcional. Temos  $f(x, \varphi, \varphi') = EI\varphi'^2 - P\varphi^2$  e daí a equação de Euler-Lagrange fica

$$EI\varphi'' + P\varphi = 0$$

que pode ser escrita como

$$\varphi'' + \alpha^2\varphi = 0 \quad (4.42)$$

onde

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}.$$

Resolvendo (4.42) obtemos

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \cos \alpha x. \quad (4.43)$$

Levando-se mais uma vez em consideração que se examinam pequenas deformações se poderá escrever  $\tan \varphi \approx \varphi$ , donde, dado que  $\tan \varphi = y'$  resulta

$$y'(x) = C_1 \operatorname{sen} \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

e, portanto,

$$y(x) = -\frac{C_1 \cos \alpha x}{\alpha} + \frac{C_2 \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} + C. \quad (4.44)$$

O fato da base da barra permanecer na origem das coordenadas é equivalente à condição de fronteira  $y(0) = 0$  de onde vem que  $C_1 = C = 0$  e então

$$y(x) = \frac{C_2}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x \quad (4.45)$$



e esta função  $y(x)$  é uma solução da equação de Euler-Lagrange que satisfaz às condições de fronteira.

Vejam agora o que ocorre com  $f_{\varphi'}(x, \varphi, \varphi')$ . Temos

$$f_{\varphi'} = 2EI\varphi'$$

e, portanto,

$$f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') = 2EI > 0 \quad (4.46)$$

sempre e, assim, um arco do tipo

$$y(x) = \frac{C_2}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x$$

deixará de ser um minimante apenas se não satisfizer à condição de Jacobi (porque daí o arco não estará incluído em um campo). Em, particular, a linha média da barra não deformada não será um minimante se a equação de Jacobi

$$EIz'' + Pz = 0 \quad \text{ou} \quad z'' + \alpha^2 z = 0$$

admitir uma solução não trivial satisfazendo à condição  $z(0) = 0$  e se anulando no intervalo  $(0, l)$ . Como a solução geral da equação de Jacobi para este caso é

$$z = A \operatorname{sen} \alpha x,$$

a fim de que uma solução não trivial se anule em  $(0, l)$  é necessário que

$$l > \frac{\pi}{\alpha}.$$

Quer dizer, deve-se cumprir

$$P \geq \frac{\pi^2}{l^2} EI,$$

de onde a força crítica de Euler se dá por

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{l^2} EI \quad (4.47)$$

e a esta força corresponde à flexão da barra

$$y(x) = \frac{lC_2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{l}x. \quad (4.48)$$

Estes exemplos foram desenvolvidos inspirados em [27].

No próximo capítulo, desenvolveremos a teoria sobre minimização de funções convexas, que consiste em outra importante ferramenta para a resolução de problemas variacionais.



# Capítulo 5

## Minimização de Funções Convexas

### 5.1 Introdução

Neste capítulo veremos que é relativamente simples minimizar funções convexas. Utilizaremos as *Variações de Gâteaux*, definidas no capítulo 3, para caracterizar a convexidade de uma função  $J$  em um subconjunto  $S$  de um espaço linear  $Y$ . Daí então, a função convexa será automaticamente minimizada por um  $y \in S$  no qual a variação de Gâteaux se anula. Após desenvolvermos a teoria e darmos alguns exemplos diretos, que servirão apenas para nos familiarizarmos com os novos conceitos, partiremos para os exemplos mais interessantes: exemplos de aplicação destes conceitos em problemas físicos (projétil de revolução com arrasto mínimo, problema da catenária, minimização do consumo de combustível de um foguete) e geométricos (geodésicas em um cilindro). Trabalharemos, também, com problemas com restrições convexas e aplicações destes problemas.

Para todo o desenvolvimento deste capítulo tomamos como referência básica o texto de [42].

### 5.2 Revisão de algumas definições e resultados

Nesta seção faremos uma revisão de algumas definições e resultados já conhecidos que serão importantes no desenvolvimento do capítulo.

Para  $d = 1, 2, 3, \dots$ , seja  $\mathbb{R}^d$  denotando o espaço euclidiano real  $d$ -dimensional. Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Resultado 5.1** Quando  $D$  contém uma vizinhança de um ponto  $x_0$  extremal de  $f$ , na qual  $f$  tem derivadas parciais  $f_{x_j}, j = 1, 2, \dots, d$  contínuas, então para cada vetor  $u \in \mathbb{R}^d$  unitário, a derivada direcional

$$\partial_u f(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + \epsilon u) - f(x_0)}{\epsilon} \right] = \left. \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0.$$

**Definição 5.1** O vetor gradiente  $\nabla f$  é definido por

$$\nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_d})$$

e, então  $\partial_u f(x_0)$  pode ser expresso por

$$\partial_u f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot u,$$

onde o ponto denota o produto escalar.

**Resultado 5.2** Em um ponto  $x_0$  extremal temos

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

**Definição 5.2** A função  $f$  é dita **convexa** em  $D$  quando ela tem derivadas parciais contínuas em  $D$  e satisfaz a desigualdade

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in D. \quad (5.1)$$

Observe que (5.1) também pode ser expresso como: para cada  $x \in D$

$$f(x + v) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot v, \quad (5.2)$$

com  $x+v \in D$ . Podemos dizer também que uma função escalar  $f(y) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$  é dita convexa se, para todo par de pontos  $z$  e  $w$ , temos

$$f(\lambda w + (1 - \lambda)z) \leq \lambda f(w) + (1 - \lambda)f(z)$$

para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Em uma dimensão, é fácil perceber a idéia geométrica da convexidade: o gráfico, entre dois pontos  $z$  e  $w$ , de uma função convexa está sempre abaixo do segmento de reta unindo  $(z, f(z))$  e  $(w, f(w))$  (veja a figura 5.1).

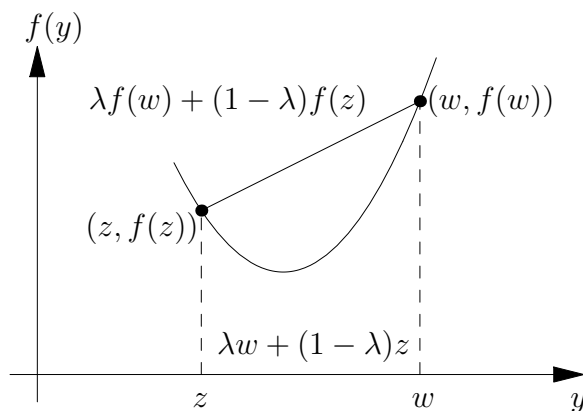


Figura 5.1: Idéia geométrica da convexidade em uma dimensão.

**Resultado 5.3** Quando  $f$  é uma função convexa em  $D$ , então ela assume um valor mínimo em cada um de seus pontos extremais em  $D$ .

Observe que uma função convexa não precisa ter um ponto extremal (estacionário), mas quando  $x_0$  é estacionário e  $f$  é convexa, então,  $\nabla f(x_0) = 0$  e, portanto,  $f(x) \geq f(x_0)$ , isto é,  $x_0$  é um mínimo de  $f$ .

**Resultado 5.4** Quando  $f$  é **estritamente convexa** em  $D$ , isto é, (5.1) vale em cada  $x_0 \in D$  com a igualdade ocorrendo se, e somente se,  $x = x_0$ , então  $f$  pode ter no máximo um ponto estacionário e, portanto, pode ter no máximo um ponto de mínimo no interior de  $D$ .

**Definição 5.3** Dizemos que um espaço de funções  $Y$  é um **espaço linear** se a soma de funções em  $Y$  e o produto dessas funções por escalares ainda pertencem a este espaço  $Y$ .

Seja agora  $J$  uma função de valores reais definida sobre um subconjunto  $S$  de um espaço linear  $Y$ .

**Proposição 5.1** *Se as funções  $J$  e  $G_1, G_2, \dots, G_n$  são definidas em  $S$ , e para certas constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $y_0$  minimiza  $\tilde{J} = J + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_n G_n$  em  $S$  [unicamente], então  $y_0$  minimiza  $J$  em  $S$  [unicamente] quando colocamos a restrição  $G_{y_0} = \{y \in S : G_j(y) = G_j(y_0), j = 1, 2, \dots, n\}$ .*

*Demonstração:*

Para cada  $y \in S$ :

$$\tilde{J}(y) = J(y) + \sum_{j=1}^n \lambda_j G_j(y) \geq \tilde{J}(y_0) = J(y_0) + \sum_{j=1}^n \lambda_j G_j(y_0);$$

mas quando  $y \in G_{y_0}$ , então  $J(y) \geq J(y_0)$ , já que os termos envolvidos em  $G_j$  têm os mesmos valores em cada lado da desigualdade. [A unicidade é claramente preservada].

Assim, o resultado está demonstrado.  $\square$

A partir daqui usaremos a seguinte notação: quando  $f = f(x, y, z) \in C([a, b] \times \mathbb{R}^2)$  e  $y \in C^1[a, b]$ , então  $f[y(x)] = f(x, y(x), y'(x))$ .

**Proposição 5.2** *Se  $f = f(x, y, z)$  e  $g = g(x, y, z)$  são contínuas e existe uma*

função  $\lambda \in C[a, b]$ , para a qual  $y_0$  minimiza [unicamente]

$$\tilde{F}(y) = \int_a^b \tilde{f}[y(x)] dx$$

em  $D \subset C^1[a, b]$ , onde  $\tilde{f} = f + \lambda g$ , então  $y_0$  minimiza [unicamente]

$$F(y) = \int_a^b f[y(x)] dx$$

em  $D$  sobre a restrição

$$\lambda(x)g[y(x)] \leq \lambda(x)g[y_0(x)], \quad \forall x \in [a, b]. \quad (5.3)$$

*Demonstração:*

Se  $y \in D$ , então,

$$\tilde{F}(y) = F(y) + \int_a^b \lambda(x)g[y(x)] dx \geq \tilde{F}(y_0),$$

e então,

$$F(y) - F(y_0) \geq \int_a^b \lambda(x)(g[y_0(x)] - g[y(x)]) dx \geq 0$$

quando (5.3) vale.

Também, se  $F(y) = F(y_0)$  sobre as condições (5.3), então

$$\int_a^b \lambda(x)(g[y_0(x)] - g[y(x)]) dx = 0$$

e  $\tilde{F}(y) = \tilde{F}(y_0)$  [a unicidade é possível se, e somente se,  $y = y_0$ ]

Portanto, a proposição está demonstrada.  $\square$

## 5.3 Funções convexas

Nesta seção introduziremos o conceito de funções convexas via variação de Gâteaux.

Para isto começaremos relembrando a definição de variação de Gâteaux.



**Definição 5.4** Seja  $J$  uma função de valores reais em um subconjunto de um espaço linear  $Y$ . Para  $y, v \in Y$ , a **variação de Gâteaux** de  $J$  em  $y$  na direção  $v$  é dada por :

$$\delta J(y; v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(y + \epsilon v) - J(y)}{\epsilon}$$

quando o limite existe.

Quando  $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$  temos para  $A = (x, y, z)$ ,  $B = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$  que

$$\delta f(A, B) = \nabla f(A) \cdot B,$$

onde  $\delta f$  é a primeira variação de Gâteaux de  $f$ . Além disso,  $f$  é convexa se

$$f(A + B) - f(A) \geq \nabla f(A) \cdot B = \delta f(A, B) \quad (5.4)$$

e estritamente convexa quando a igualdade vale se, e somente se,  $B = 0$ . Podemos observar então, que a minimização de uma função convexa  $f$  pode ser particularmente simples de ser estabelecida, já que um ponto  $A$  no qual  $\nabla f(A) = 0$  claramente minimiza  $f$ . A desigualdade (5.4) sugere a seguinte definição:

**Definição 5.5** Uma função de valores reais  $J$  definida em um conjunto  $S$  de um espaço linear  $Y$  é dita [**estritamente**] **convexa** em  $S$  se quando  $y$  e  $y + v \in S$  então  $\delta J(y; v)$  é definida e

$$J(y + v) - J(y) \geq \delta J(y; v)$$

[com igualdade valendo se, e somente se,  $v = 0$ ].

**Proposição 5.3** Se  $J$  e  $\tilde{J}$  são funções convexas em um conjunto  $S$ , então, para cada  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c^2 J$  e  $J + \tilde{J}$  também são convexas. Além disso, essas funções podem ser estritamente convexas se  $J$  for estritamente convexa (para  $c \neq 0$ ).

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} (c^2 J + \tilde{J})(y + v) - (c^2 J + \tilde{J})(y) &= c^2(J(y + v) - J(y)) + (\tilde{J}(y + v) - \tilde{J}(y)) \geq \\ &= c^2 \delta J(y; v) + \delta \tilde{J}(y; v) = \delta(c^2 J + \tilde{J})(y; v) \end{aligned}$$

se  $y, y + v \in S$ . Isto estabelece a convexidade de  $J + \tilde{J}$  (quando  $c^2 = 1$ ) e de  $c^2 J$  (quando  $\tilde{J} = 0$ ). Além disso, quando  $J$  é estritamente convexa e  $c \neq 0$ , então a desigualdade precisa ser estrita, exceto no caso trivial  $v = 0$ .  $\square$

**Proposição 5.4** *Se  $J$  é [estritamente] convexa em  $S$ , então cada  $y_0 \in D$  para o qual  $\delta J(y_0; v) = 0 \quad \forall \quad y_0 + v \in S$ , minimiza [unicamente]  $J$  em  $D$ .*

*Demonstração:*

Se  $y \in D$ , então com  $v = y - y_0$

$$J(y) - J(y_0) = J(y_0 + v) - J(y_0) \geq \delta J(y_0; v) = 0$$

[com a igualdade se, e somente se  $v = 0$ ].

Assim,  $J(y) \geq J(y_0)$  [com igualdade se, e somente se  $y = y_0$ ] e esse é o resultado desejado.  $\square$

## 5.4 Funções integrais convexas

Nesta seção daremos início ao estudo de resultados que nos permitirão estabelecer a convexidade de funcionais e, desta forma, começar a resolver problemas variacionais sob a óptica da convexidade.

Se  $f = f(x, y, z)$  e suas derivadas parciais  $f_y$  e  $f_z$  são definidas e contínuas em  $[a, b] \times \mathbb{R}^2$ , então a função integral

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx = \int_a^b f[y(x)] dx$$

tem, para  $\forall y, v \in C^1[a, b]$ , a variação de Gâteaux

$$\delta F(y; v) = \int_a^b (f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x)) dx \quad (5.5)$$

onde usamos a abreviação genérica

$$f[y(x)] = f(x, y(x), y'(x)) \quad (5.6)$$

e então  $f_y[y(x)] = f_y(x, y(x), y'(x))$  e  $f_z[y(x)] = f_z(x, y(x), y'(x))$ . Assim, a convexidade de  $f$  requer que,  $\forall y, y + v \in C^1[a, b]$ ,

$$f(y + v) - f(y) \geq \delta f(y; v)$$

ou que

$$\int_a^b (f[y(x) + v(x)] - f[y(x)]) dx \geq \int_a^b (f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x)) dx.$$

Daí segue a desigualdade entre os integrandos da última expressão, isto é, para cada  $x \in (a, b)$

$$f[y(x) + v(x)] - f[y(x)] \geq f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x), \quad (5.7)$$

ou de (5.6)

$$f(x, y + v, z + w) - f(x, y, z) \geq f_y(x, y, z)v + f_z(x, y, z)w, \quad (5.8)$$

$\forall (x, y, z), (x, y + v, z + w) \in (a, b) \times \mathbb{R}^2$ , onde temos incorporadas as abreviações  $y = y(x)$ ,  $v = v(x)$ ,  $z = y'(x)$ ,  $w = v'(x)$ . A desigualdade (5.8) diz que  $f$  é convexa quando  $x$  é fixo, conforme irá estabelecer a definição seguinte.

**Definição 5.6** A função  $f = f(x, y, z)$  é [fortemente] convexa em  $S \subset \mathbb{R}^3$  se  $f$  e suas derivadas parciais  $f_y$  e  $f_z$  são definidas e contínuas nesse conjunto e se elas satisfazem a desigualdade

$$f(x, y + v, z + w) - f(x, y, z) \geq f_y(x, y, z)v + f_z(x, y, z)w, \quad (5.9)$$

$\forall (x, y, z)$  e  $(x, y + v, z + w) \in S$  [com a igualdade em  $(x, y, z)$  somente se  $v = 0$  ou  $w = 0$ ].

Observe que a variável  $x$  é fixada nessa definição de convexidade. Só trabalhamos com as derivadas parciais de  $f$  com relação às variáveis  $y$  e  $z$ . É claro que se  $f$  é convexa em  $\mathbb{R}^3$  então também é convexa no sentido da definição (5.6). Devemos observar que convexidade estrita implica convexidade forte, e que, em geral, convexidade forte é mais fraca que convexidade estrita. O significado de convexidade forte será visto a seguir.

**Teorema 14** *Seja  $D$  um domínio em  $\mathbb{R}^2$  e para  $a_1$  e  $b_1$  dados, seja o conjunto  $S = \{y \in C^1[a, b] : y(a) = a_1, y(b) = b_1; (y(x), y'(x)) \in D\}$ . Se  $f(x, y, z)$  é [fortemente] convexa em  $[a, b] \times D$ , então,*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

é [estritamente] convexa em  $S$ . Assim, cada  $y \in S$  para o qual

$$\frac{d}{dx} f_z[y(x)] = f_y[y(x)]$$

em  $(a, b)$ , minimiza [unicamente]  $f$  em  $S$ .

*Demonstração:*

Quando  $y, y + v \in S$ , a desigualdade (5.9) mostra que em cada  $x \in (a, b)$

$$f[y(x) + v(x)] - f[y(x)] \geq f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x) \quad (5.10)$$

[com a igualdade somente se  $v(x)$  ou  $v'(x) = 0$  pois então  $v(x)v'(x) = 0$ ].

Integrando (5.10) temos

$$\int_a^b (f[y(x) + v(x)] - f[y(x)]) dx \geq \int_a^b (f_y[y(x)]v(x) + f_z[y(x)]v'(x)) dx,$$

ou, com (5.5) e (5.6)

$$F(y + v) - F(y) \geq \delta F(y; v),$$

e, então,  $F$  é convexa.

Além disso, na presença de (5.10), a igualdade entre as integrais, representada por essa última função  $F$  é possível somente quando a igualdade vale quase-sempre em (5.10). Para maiores detalhes veja [42]. [Se  $f(x, y, z)$  é fortemente convexa isso se torna possível somente se o produto

$$v(x)v'(x) = \frac{1}{2}(v^2(x))' \equiv 0;$$

então  $v^2(x) = cte = v^2(a) = 0$  quando  $y$  e  $y + v \in S$ . Portanto,  $v = 0$  e então  $F$  é estritamente convexa.] Finalmente de (5.5), cada  $y$  para o qual

$$\frac{d}{dx}f_z[y(x)] = f_y[y(x)]$$

em  $(a, b)$ , nos dá

$$\delta F(y; v) = \int_a^b \frac{d}{dx} (f_z[y(x)]v(x)) dx = f_z[y(x)]v(x) \Big|_a^b = 0$$

quando  $y, y + v \in S$ . Então, pela proposição (5.4),  $y$  minimiza [unicamente]  $F$  em  $S$ .  $\square$

Quando  $y$  não aparece explicitamente, isto é, quando  $f = f(x, z)$  somente (ou  $f = f(z)$ ), então  $f_y \equiv 0$  e para um intervalo  $I$ ,  $f(x, z)$  será [fortemente] convexa em  $[a, b] \times I$  se, para cada  $x \in [a, b]$

$$f(x, z + w) - f(x, z) \geq f_z(x, w)w \quad \forall z, z + w \in I \quad (5.11)$$

[com igualdade em  $z$  se, e somente se  $w = 0$ ]. Com isso podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 15** *Seja  $I$  um intervalo e seja  $S$  o conjunto  $S = \{y \in C^1[a, b] : y(a) = a_1, y(b) = b_1; y'(x) \in I\}$ . Então, se  $f$  é [fortemente] convexa em  $[a, b] \times I$ , cada  $y \in S$  que forneça  $f_z(x, y'(x)) = cte$  em  $(a, b)$  minimiza [unicamente]*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y'(x)) dx$$

em  $S$ .

*Demonstração:*

Segue imediatamente de (5.11) considerando  $f_y \equiv 0$  no enunciado e na demonstração do teorema 14.  $\square$

**Corolário 5.1** *Se  $f = f(z)$  é [estritamente] convexa em  $I$  e*

$$m = \frac{b_1 - a_1}{b - a} \in I,$$

então  $y_0(x) = m(x - a) + a_1$  *minimiza [unicamente]*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y'(x)) dx$$

em  $S$ .

*Demonstração:*

Se  $y'_0(x) = m \in I$ , então  $y_0 \in S$  e  $f_z(y'_0(x)) = f_z(m)$  é constante em  $(a, b)$ . Assim, o teorema 15 é aplicável.  $\square$

## 5.5 Funções [fortemente] convexas

Para podermos aplicar os resultados da seção anterior vamos precisar que as funções sejam [fortemente] convexas. Nesta seção, iremos estudar técnicas para identificar tal convexidade.

Vamos começar com o caso simples  $f = f(x, z)$ , onde como já vimos, a desigualdade da definição de convexidade forte de  $f(x, z)$  em  $[a, b] \times I$  é dada por (5.11). A proposição seguinte irá relacionar a ocorrência de (5.11) com uma condição simples sobre  $f_{zz}$  o que irá facilitar muito nosso trabalho.

**Proposição 5.5** *Se  $f = f(x, z)$  e  $f_{zz}$  são contínuas em  $[a, b] \times I$  e para cada  $x \in [a, b]$ ,  $f_{zz}(x, z) > 0$  (exceto, possivelmente, em um conjunto finito de valores de  $I$ ), então  $f(x, z)$  é fortemente convexa em  $[a, b] \times I$ .*

*Demonstração:*

Para  $x \in [a, b]$  fixo, seja  $g(z) = f(x, z)$  e assim,  $g''(z) = f_{zz}(x, z) > 0$  em  $I$  exceto, possivelmente em um conjunto finito de valores de  $I$ . Então, integrando por partes para  $z, \xi \in I$  dados e distintos,

$$g(\xi) - g(z) = \int_z^\xi g'(t) dt = (\xi - z)g'(z) + \int_z^\xi g''(t) dt > (\xi - z)g'(z),$$

onde a última integral é estritamente positiva por hipótese, independente se  $z < \xi$  ou  $\xi < z$ .

Então, com  $w = \xi - z$ , retomando a definição de  $g$ , concluímos que

$$f(x, z + w) - f(x, z) > f_z(x, z)w,$$

quando  $w \neq 0$  e isto estabelece a convexidade forte de  $f(x, z)$ .  $\square$

Faremos agora alguns exemplos para percebermos como aplicar este último resultado.

**Exemplo 5.1** A função

$$f(x, z) = \text{sen}^3 x + z^2$$

é fortemente convexa em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  já que

$$f_{zz}(x, z) = 2 > 0.$$

**Exemplo 5.2** Para  $r \neq 0$ ,

$$f(x, z) = \sqrt{r^2 + z^2}$$

é fortemente convexa em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , pois  $\forall z \in \mathbb{R}$

$$f_z(x, z) = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

e, portanto,

$$f_{zz}(x, z) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{z^2}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} > 0.$$

**Exemplo 5.3** A função

$$f(x, z) = x^2 + (\text{sen } x)z^2$$

com

$$f_{zz}(x, z) = 2(\text{sen } x)$$

torna-se convexa somente quando  $\text{sen } x \geq 0$ , isto é, em  $[0, \pi] \times \mathbb{R}$  e fortemente convexa somente quando  $\text{sen } x > 0$ , isto é em  $(0, \pi) \times \mathbb{R}$ .

Apresentaremos agora alguns fatos que podem ser úteis na resolução de problemas utilizando convexidade. Deixaremos as demonstrações destes fatos a cargo do leitor.

**Fato 5.1** - A soma de uma função [fortemente] convexa com outra(s) função(ões) convexa(s) é também [fortemente] convexa.

**Fato 5.2** - O produto de uma função [fortemente] convexa  $f(x, y, z)$  por uma função contínua  $[p(x) > 0]$   $p(x) \geq 0$  é também uma função [fortemente] convexa no mesmo conjunto.



**Fato 5.3** -  $f(x, y, z) = \alpha(x) + \beta(x)y + \gamma(x)z$  é (somente) convexa para quaisquer funções contínuas  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**Fato 5.4** - Cada função [fortemente] convexa  $f(x, z)$  (ou  $f(x, y)$ ) é também [fortemente] convexa quando considerada como uma função  $\tilde{f}(x, y, z)$  em um conjunto apropriado.

**Exemplo 5.4** A função

$$f(x, y, z) = -2(\text{sen } x)y + z^2$$

é a soma de uma função fortemente convexa  $z^2$  (fato 5.4) com a função convexa  $-2(\text{sen } x)y$  (fato 5.3) e, assim,  $f$  é fortemente convexa em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  (fato 5.1).

Similarmente,

$$g(x, y, z) = -2(\text{sen } x)y + z^2 + x^2\sqrt{1 + y^2}$$

é a soma de uma função fortemente convexa  $f(x, y, z)$  com a função convexa  $x^2\sqrt{1 + y^2}$  (fato 5.2) e, então  $g(x, y, z)$  é também fortemente convexa em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ .

## 5.6 Aplicações

Nesta seção resolveremos dois problemas práticos usando a teoria de minimização de funções convexas. O primeiro problema trata das geodésicas em um cilindro e o segundo é um problema físico, que trata da minimização do arrasto no caso de um projétil de revolução.

### 5.6.1 Geodésicas em um cilindro

Para encontrar as geodésicas na superfície de um cilindro circular de raio unitário, usaremos naturalmente as coordenadas cilíndricas  $(\theta, z)$  mostradas na figura 5.2 para denotar um ponto típico.

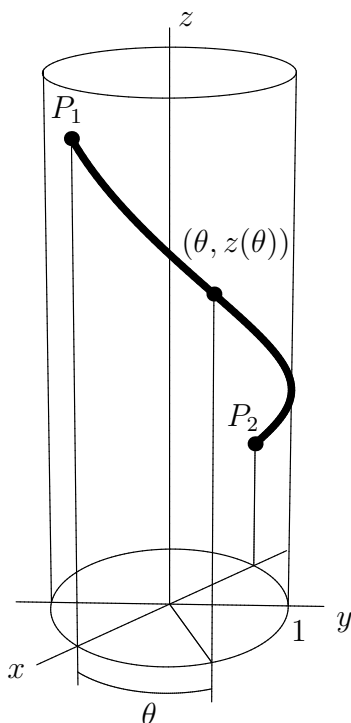


Figura 5.2: Coordenadas cilíndricas usadas no problema e a curva geodésica.

É óbvio que a geodésica unindo os pontos  $P_1 = (\theta_1, z_1)$ ,  $P_2 = (\theta_2, z_2)$  é simplesmente o segmento vertical conectando-os. Então, vamos considerar o caso em que  $P_2 = (\theta_2, z_2)$  com  $\theta_2 \neq \theta_1$ . Podemos supor que  $0 < \theta_2 - \theta_1 \leq \pi$  e considerar as curvas que podem ser representadas como o gráfico de uma função

$$z \in S = \{z \in C^1[\theta_1, \theta_2] : z(\theta_j) = z_j, \quad j = 1, 2\}.$$

As coordenadas espaciais de uma tal curva são

$$(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta, z(\theta)),$$

e então, quando  $z \in S$ , a curva resultante tem comprimento

$$L(z) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 + z'(\theta)^2} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + z'(\theta)^2} d\theta. \quad (5.12)$$

Com uma mudança de variável trivial, o integrando de (5.12) corresponde à função do exemplo 5.2 da seção 5, que é fortemente convexa. Então, pelo corolário 5.1 concluímos que:

*Entre as curvas que admitem representação como o gráfico de uma função  $z \in S$ , o comprimento mínimo é dado unicamente <sup>1</sup> por aquela representada pela função*

$$z_0(\theta) = z_1 + m(\theta - \theta_1)$$

para

$$m = \frac{z_1 - z_2}{\theta_1 - \theta_2}$$

que descreve uma hélice circular ligando os pontos dados.

### 5.6.2 Projétil de revolução com arrasto mínimo

Um dos primeiros problemas resolvidos via idéias variacionais foi proposto por *Newton* em seu *Principia* em 1686. Consistia em encontrar o modelo da parte dianteira de um projétil de revolução que sofresse o mínimo de arrasto (resistência) quando ele se movesse na água, com uma velocidade unitária constante e na direção de seu eixo.

Iremos adotar as coordenadas e geometria mostradas na figura 5.3 e assumir que a pressão (resistência) em um ponto da superfície da parte dianteira do projétil é

---

<sup>1</sup>Dados dois pontos em um cilindro existem infinitas hélices (geodésicas) ligando-os, mas apenas uma delas minimiza o comprimento de arco.

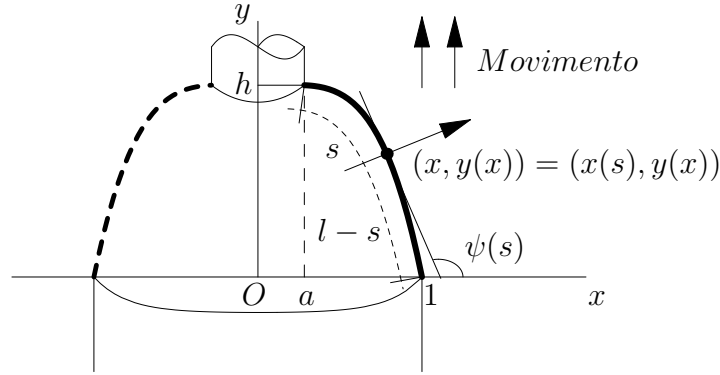


Figura 5.3: Ilustração mostrando as coordenadas e a geometria adotadas no problema.

proporcional à raiz quadrada da componente normal de sua velocidade. Então, se  $\psi$  denota o ângulo entre o eixo  $x$  positivo e a tangente a um ponto da curva meridional de comprimento  $l$  cuja rotação determina a superfície da dianteira, desejamos minimizar

$$\int_0^l \cos^2(\pi - \psi(s)) 2\pi x(s) \cos \psi(s) ds. \quad (5.13)$$

Como  $\cos \psi(s) = x'(s)$  quando  $1 + y'(x)^2 = \sec^2 \psi(s)$ , queremos minimizar

$$F(y) = \int_a^1 x(1 + y'(x)^2)^{-1} dx \quad (5.14)$$

em  $S = \{y \in C^1[a, 1] : y(a) = h, y(1) = 0, y(x) \geq 0\}$ , onde supomos que as constantes positivas  $a < 1$  e  $h$  são dadas ( $a = 0$  é excluído por razões que serão vistas adiante).

Agora, se

$$f(x, z) = \frac{x}{1 + z^2},$$

então

$$f_z(x, z) = \frac{-2zx}{(1 + z^2)^2}$$

e para  $x > 0$

$$f_{zz}(x, z) = \frac{2x(3z^2 - 1)}{(1 + z^2)^3} > 0,$$

quando  $|z| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

De conhecimentos físicos esperamos que  $y' \leq 0$ , e, pela proposição 5.5,  $f(x, z)$  é fortemente convexa em  $[a, 1] \times \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ . Assim, pelo teorema 15, sabemos que se

$$y_0 \in S' = \{y \in S : y'(x) \leq -1/\sqrt{3}, \quad x \in [a, 1]\}$$

então

$$f_z(x, y'(x)) = \frac{-2xy'(x)}{(1 + y'^2(x))^2} = cte = \frac{\sqrt{2}}{c},$$

para uma constante positiva  $c$ , então  $y_0$  minimiza  $f$  em  $S'$ . Fazendo  $u = 1 + y'^2(x)$  obtemos

$$u^2 - 2c^2x^2u + 2c^2x^2 = 0.$$

Resolvendo para  $u$ , temos

$$u = c^2x^2 \pm cx(c^2x^2 - 2)^{1/2},$$

provando que  $c^2a^2 \geq 2$  (o que exclui  $a = 0$ ). Então,

$$-\sqrt{2}cxy'(x) = u^2 - 2c^2x^2(u - 1)$$

e assim,

$$y'(x) = -\sqrt{2}cx[(c^2x^2 - 1) \mp cx(c^2x^2 - 2)^{1/2}]. \quad (5.15)$$

Integrando (5.15) e incorporando a condição de fronteira  $y(1) = 0$  temos

$$y(x) = 2^{-3/2}c \left\{ c^2(1 - x^4) - 2(1 - x^2) \mp 4c \int_x^1 t^2(c^2t^2 - 2)^{1/2} dt \right\}, \quad (5.16)$$

onde  $c$  será determinado, se possível, para satisfazer  $y(a) = h$  quando  $y'(x) \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ . Dependendo das constantes particulares é possível considerar somente um dos sinais de (5.16). Na prática, é mais fácil escolher  $c > 2$  e então determinar os valores de  $a$  e  $h = y(a)$ , o que pode ser feito por integração numérica de (5.16), mantendo  $y'(x) \leq \frac{-1}{\sqrt{3}}$ .

Cada solução não trivial obtida fornece um modelo de parte dianteira do projétil de revolução que ocasionará arrasto mínimo, no conjunto admissível  $S'$ . Isso é usado para torpedos e mísseis que se movem em um meio no qual a Lei de Newton para a resistência possa ser assumida.

## 5.7 Funções convexas com restrições

A convexidade também pode ser uma vantagem para minimizar funções  $J$  quando estas são consideradas restritas a um outro conjunto de funções  $G$  (como nos problemas isoperimétricos). É isso que vamos estudar nesta seção através de resultados teóricos e exemplos aplicados.

Levando em consideração o *teorema dos Multiplicadores de Lagrange* estabelecemos o seguinte resultado:

**Teorema 16** *Se  $D$  é um domínio em  $\mathbb{R}^2$ , tal que para alguma constante  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $f(x, y, z)$  e  $\lambda_j g_j(x, y, z)$  são convexas em  $[a, b] \times D$  [e pelo menos uma dessas funções é fortemente convexa neste conjunto], seja*

$$\tilde{f} = f + \sum_{j=1}^N \lambda_j g_j. \quad (5.17)$$

Então, cada solução  $y_0$  da equação diferencial

$$\frac{d}{dx} \tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)] \quad (5.18)$$

em  $(a, b)$  minimiza [unicamente]

$$F(y) = \int_a^b f[y(x)] dx \quad (5.19)$$

em

$$S = \{y \in C^1[a, b] : y(a) = y_0(a), y(b) = y_0(b); (y(x), y'(x)) \in D\}$$

considerando as restrições

$$G_j(y) = \int_a^b g_j[y(x)] dx = G_j(y_0), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.20)$$

*Demonstração:*

Por construção e pelo fato 5.1, a função  $\tilde{f}(x, y, z)$  é [fortemente] convexa em  $[a, b] \times D$  e então, pelo teorema 14,  $y_0$  minimiza [unicamente]

$$\tilde{F}(y) = \int_a^b \tilde{f}[y(x)] dx = F(y) + \sum_{j=1}^N \lambda_j G_j(y)$$

em  $S$  e daí é só aplicar a proposição 5.1 demonstrando o resultado desejado.  $\square$

Veremos agora exemplos de como trabalhar com este resultado. Começaremos com um exemplo mais simples e terminaremos o capítulo apresentando, na próxima seção, dois exemplos aplicados.

**Exemplo 5.5** - Minimizar

$$F(y) = \int_a^b (y'(x))^2 dx$$

em  $S = \{y \in C^1[0, 1]; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0\}$ , quando  $y$  está restrito ao conjunto

$$\left\{ y \in C^1[0, 1] : \quad G(y) = \int_0^1 y(x) dx = 1 \right\}.$$

Primeiramente observemos que  $f(x, y, z) = z^2$  é fortemente convexa, enquanto  $g(x, y, z) = y$  é somente convexa em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ . Assim, fazemos

$$\tilde{f}(x, y, z) = z^2 + \lambda y$$

e queremos encontrar  $\lambda$  tal que  $\lambda g(x, y, z)$  é convexa quando a equação diferencial

$$\frac{d}{dx} \tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)] \quad (5.21)$$

tem solução  $y_0 \in S$  para a qual  $G(y_0) = 1$ . Agora, como  $g$  é linear em  $y$  e  $z$ ,  $\lambda g(x, y, z) = \lambda y$  é convexa para cada  $\lambda$  real. Neste nosso exemplo, (5.21) fica

$$\frac{d}{dx}(2y'(x)) = \lambda \quad \text{ou} \quad y''(x) = \frac{\lambda}{2} \quad (5.22)$$

e daí a solução geral de (5.22) é

$$y(x) = c_1x + c_2 + \frac{\lambda x^2}{4}.$$

As condições de fronteira  $y(0) = 0 = c_2$  e  $y(1) = 0 = c_1 + \frac{\lambda}{4}$  nos dão

$$y_0(x) = -\frac{\lambda}{4}x(1-x) \quad (5.23)$$

que está em  $S$ .

O teorema 16 nos garante que (5.23) minimiza  $F$  em  $S$  sobre as restrições  $G(y) = G(y_0)$ . Agora, precisamos escolher  $\lambda$  de maneira que  $G(y_0) = 1$ . Então,

$$G(y_0) = 1 = -\frac{\lambda}{4} \int_0^1 x(1-x) dx = -\frac{\lambda}{24}$$

e, portanto,

$$\lambda = -24.$$

Assim, a solução do problema é

$$y_0(x) = 6x(x-1).$$

## 5.8 Dois exemplos de aplicações

Nesta seção iremos apresentar duas aplicações físicas desta teoria de minimização de funções convexas sujeitas a restrições.



### 5.8.1 Cabo suspenso - o problema da catenária

Para determinar a forma que um longo cabo inextensível assume, devido ao seu peso, quando ele está suspenso por suas extremidades, em alturas iguais, como mostra a figura 5.4, utilizamos o sistema de coordenadas mostrado e o *Princípio de Bernoulli* que diz que a forma assumida pelo fio será a que minimiza a energia potencial do sistema.

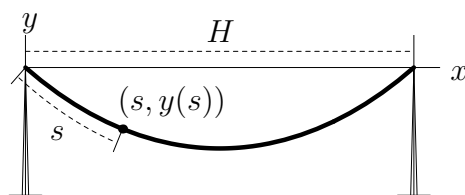


Figura 5.4: Ilustração da situação - problema considerada.

Supomos que o cabo tem comprimento  $L$ , peso por unidade de comprimento  $W$  e que os suportes são separados por uma distância  $H < L$ . Então, utilizando o comprimento de arco  $s$ , ao longo do cabo, como variável independente, a forma do cabo será especificada por uma função  $y \in C^1[0, 1]$  com  $y(0) = y(L) = 0$ , a qual tem associada a ela a energia potencial dada por

$$F(y) = W \int_0^L y(s) ds.$$

Além disso, para que a distância entre os dois suportes seja obedecida, a função  $y$  precisa satisfazer a restrição

$$G(y) = \int_0^L \sqrt{1 - y'^2(s)} ds = \int_0^L dx(s) = H,$$

onde  $x(s)$  denota a posição horizontal de um ponto em uma distância  $s$  ao longo do cabo e, assim, obtemos  $x'^2(s) + y'^2(s) = 1$ . Claro que  $|y'(s)| \leq 1$  e se  $|y'(s_1)| = 1$ , então o cabo precisa ter uma ponta (uma protuberância) em  $s_1$ .

Agora  $f(s, y, z) = Wy$  é somente convexa em  $[0, L] \times \mathbb{R}^2$ , enquanto  $g(s, y, z) =$

$-\sqrt{1-z^2}$  é fortemente convexa em  $[0, L] \times \mathbb{R} \times (-1, 1)$ . Então, pelo fato 5.1, a função  $\tilde{f}(s, y, z) = Wy - \lambda\sqrt{1-z^2}$  é fortemente convexa quando  $\lambda > 0$ . Assim, pelo teorema 16, para  $\lambda > 0$ , buscamos uma solução  $y$  para a equação diferencial

$$\frac{d}{ds} \tilde{f}_z[y(s)] = \tilde{f}_y[y(s)]$$

em  $(0, L)$  que esteja em

$$S = \{y \in C^1[0, L] : y(0) = y(L) = 0, |y'(s)| < 1 \ \forall s \in (0, L)\}.$$

Para este exemplo, a última equação diferencial fica

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\lambda y'(s)}{\sqrt{1-y'^2(s)}} \right) = W$$

ou

$$\frac{\lambda y'(s)}{\sqrt{1-y'^2(s)}} = s + c, \quad (5.24)$$

onde trocamos a constante  $\lambda$  por  $W\lambda$  e introduzimos uma nova constante  $c$ . Podemos supor que  $y$  é simétrico sobre  $L/2$ , o que está de acordo com nossa intuição física sobre a forma assumida pelo cabo. Se tomarmos

$$l = \frac{L}{2}$$

segue que  $y'(l) = 0$ , e então, de (5.24),  $c = -l$ . Devemos lembrar também que precisamos determinar somente  $y$  em  $[0, l]$ , onde esperamos que  $y' \leq 0$ .

Então, de (5.24) temos que

$$y'^2(s) = \frac{(s-l)^2}{\lambda^2 + (s-l)^2}$$

em  $[0, l]$  e daí, com  $y(0) = 0$

$$y(s) = \int_0^s \frac{(t-l)}{\sqrt{\lambda^2 + (t-l)^2}} dt = \sqrt{\lambda^2 + (t-l)^2} \Big|_0^s$$

ou

$$y(s) = \sqrt{\lambda^2 + (l-s)^2} - \sqrt{\lambda^2 + l^2} \quad (5.25)$$

em  $[0, l]$ . Agora, podemos supor que  $\lambda > 0$ , porém, temos que satisfazer a relação de restrição

$$\int_0^L \sqrt{1 - y'^2(s)} ds = H$$

ou com a simetria assumida

$$\int_0^l \sqrt{1 - y'^2(s)} ds = \frac{H}{2}. \quad (5.26)$$

Substituindo (5.25), (5.26) fica

$$\int_0^l \sqrt{1 - \frac{(l-s)^2}{\lambda^2 + (l-s)^2}} ds = \int_0^l \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (l-s)^2}} ds = \frac{H}{2},$$

ou com a substituição trigonométrica  $(l-s) = \lambda \tan \theta$ , pedimos que para  $\alpha = \arctan \frac{l}{\lambda}$

$$h(\alpha) = \cot \alpha \int_0^\alpha \sec \theta d\theta = \frac{H}{2l} = \frac{H}{L}.$$

Agora,

$$h(\alpha) = \frac{(\log(\sec \alpha + \tan \alpha))}{\tan \alpha}$$

é contínua e positiva em  $(0, \frac{\pi}{2})$  e, então, pela *Regra de L'Hospital* com  $\alpha \rightarrow 0$  e  $\alpha \rightarrow \pi/2$ , os limites dão

$$\frac{\sec \alpha}{\sec^2 \alpha} = 0 \quad \text{e} \quad 1$$

respectivamente. Então, pelo *Teorema do Valor Intermediário*,  $h$  assume cada valor em  $(0, 1)$  pelo menos uma vez em  $(0, \pi/2)$ . Assim, existe  $\alpha \in (0, \pi/2)$  para o qual

$$h(\alpha) = \frac{H}{L}$$

e, para esse  $\alpha$ ,

$$\lambda = l \cot \alpha > 0,$$

o que nos daria o  $y(s)$  procurado.

A curva resultante é definida parametricamente em  $[0, l]$  por

$$y(s) = \sqrt{\lambda^2 + (l-s)^2} - \sqrt{\lambda^2 + l^2}$$

$$x(s) = \int_0^s \sqrt{1 - y'^2(t)} dt = \frac{H}{2} - \lambda \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{l-s}{\lambda} \right)$$

o que corresponde à bem conhecida **catenária**.

Dentre todas as curvas de comprimento  $L$  unindo os suportes, a catenária será a que dará energia potencial mínima e representará então a forma final do cabo.

### 5.8.2 Minimizando o consumo de combustível de um foguete

Um foguete de massa  $m$  é acelerado verticalmente para cima da superfície da Terra (que assumimos estacionária), a uma altura  $h$  em um tempo  $T$ , por uma força  $mu$  de seu motor, onde  $u$  é a aceleração do foguete. Se supusermos que  $h$  é bem pequeno,  $m$  e  $g$ , onde  $g$  é a aceleração gravitacional, permanecem constantes durante o vôo. Desejamos, então, controlar o impulso para minimizar o consumo de combustível medido por

$$F(u) = \int_0^T u^2(t) dt \quad (5.27)$$

para um dado tempo  $T$  de vôo.

Ainda que  $T$  possa variar posteriormente, consideremos primeiro o problema no qual  $T$  é fixo. Usamos a *Segunda Lei de Movimento de Newton* para concluir que no tempo  $t$ , o foguete na altura  $y = y(t)$  tem obrigatoriamente a aceleração

$$\ddot{y} = u - g. \quad (5.28)$$

Impondo as condições iniciais  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$  e  $y(T) = h$ , então

$$y(T) = \int_0^T \dot{y}(t) dt,$$

e daí, integrando por partes obtemos

$$y(T) = \int_0^T (T-t)\ddot{y}(t) dt - (T-t)\dot{y}(t) \Big|_0^T.$$

De (5.28) e usando as condições iniciais segue que

$$h = y(T) = \int_0^T (T-t)u(t) dt - \frac{gT^2}{2}.$$

Assim,

$$G(u) = \int_0^T (T-t)u(t) dt = h + \frac{gT^2}{2} = K \quad (5.29)$$

e então, minimizaremos  $F$  em  $S = \{u \in C[0, T], u \geq 0\}$  levando em consideração a restrição (5.29).

De acordo com o teorema 16, introduzimos uma constante  $\lambda$  e observamos que o integrando modificado fica

$$\tilde{f}(t, u, z) = u^2 + \lambda(T-t)u$$

que é fortemente convexo para todo  $\lambda$ , já que o segundo termo é linear em  $u$ . Além disso,  $\tilde{f}_z \equiv 0$ . Então, a equação de Euler-Lagrange para esta nova função fica

$$\tilde{f}_u[u(t)] = 0 = 2u(t) + \lambda(T-t).$$

Um  $u_0 \in S$  que satisfaz esta equação é da forma

$$u_0(t) = -\frac{\lambda}{2}(T-t),$$

onde  $\lambda \leq 0$  será obtido de

$$K = \int_0^T (T-t)u_0(t) dt = -\frac{\lambda}{2} \int_0^T (T-t)^2 dt = -\frac{\lambda T^3}{6}$$

ou

$$-\lambda = \frac{6K}{T^3}$$

e então obtemos

$$u_0(t) = \frac{3K(T-t)}{T^3}. \quad (5.30)$$

Observe que de (5.29) e (5.30) segue que

$$F(u_0) = \int_0^T u_0^2(t) dt = \frac{9K^2}{T^6} \int_0^T (T-t)^2 dt = \frac{3K^2}{T^3} =$$

$$\frac{3(2h + gT^2)^2}{4T^3} = 3 \left( \frac{h^2}{T^3} + \frac{gh}{T} + \frac{g^2T}{4} \right),$$

e podemos usar cálculos simples para minimizar esta expressão com respeito a  $T$  e então obter o tempo ótimo de vôo

$$T_0 = \left( \frac{6h}{g} \right)^{1/2}.$$



# Capítulo 6

## Teoria de Hamilton Jacobi

### 6.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos uma nova forma de resolver problemas variacionais: a Teoria de Hamilton Jacobi. Esta teoria é de grande importância no cálculo variacional, já que possibilita a resolução de problemas mais complexos de maneira relativamente rápida e muito elegante. Ao longo do tempo, físicos e químicos têm utilizado amplamente esta teoria em problemas aplicados importantes, conforme veremos no decorrer do capítulo.

Nosso estudo se iniciará com a forma canônica da equação de Euler-Lagrange e os sistemas Hamiltonianos. Em seguida estudaremos as transformações canônicas, a equação de Hamilton Jacobi, suas soluções, os princípios variacionais de mecânica e encerraremos o capítulo estudando um método para resolver a equação de Jacobi. Procuraremos durante o texto apresentar exemplos para que os conceitos vistos possam ficar mais claros para o leitor.

As referências básicas para esse capítulo são os textos [\[27\]](#) e [\[44\]](#).



## 6.2 Forma canônica da equação de Euler-Lagrange e sistemas Hamiltonianos

No capítulo 1 apresentamos a equação de Euler-Lagrange. Vamos agora estudar uma outra maneira de escrever esta mesma equação.

Denotaremos, a partir deste momento, a derivada de  $f(x, y, y')$  com respeito a  $y'$  por  $p$ , isto é

$$p = f_{y'}(x, y, y'). \quad (6.1)$$

Trabalhando então com  $(x, y, p)$  ao invés de  $(x, y, y')$ , resolvemos (6.1) para  $y'$  em termos de  $p$ ,  $x$  e  $y$  e escrevemos

$$y' = v(x, y, p). \quad (6.2)$$

Introduzimos, então, a **função Hamiltoniana**

$$H(x, y, p) = py' - f(x, y, y'). \quad (6.3)$$

Usando (6.1) e (6.2), podemos escrever (6.3) como

$$H(x, y, p) = py' - f(x, y, y') = pv(x, y, p) - f(x, y, v(x, y, p)). \quad (6.4)$$

A relação (6.4) é chamada de **transformada de Legendre**.

Mais adiante, aparecerão as vantagens de trabalharmos com a quantidade  $p$  ao invés de  $y'$  e, assim, desenvolver o cálculo variacional em termos da Hamiltoniana (ao invés da Lagrangiana) com o auxílio da transformada de Legendre. Primeiramente, vamos escrever a equação de um funcional suave  $\hat{y}(x)$  em termos da Hamiltoniana.

**Teorema 17** *Em termos da Hamiltoniana  $H(x, y, p)$ , o extremal suave  $\hat{y}(x)$  de Lagrangiana  $f(x, y, y')$  e  $\hat{p}(x) = f_{y'}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) \equiv \hat{f}'_y(x)$  satisfaz o sistema Hamiltoniano*

$$\hat{y}' = \hat{H}_p \quad e \quad \hat{p}' = -\hat{H}_y \quad (6.5)$$

onde  $\hat{f}(x) = f(x, \hat{y}(x), \hat{p}(x))$ .

*Demonstração:*

Basta calcular  $\hat{H}_p$ ,  $\hat{H}_y$  e daí

$$\begin{aligned}\hat{H}_p &= \hat{v} + \hat{p}\hat{v}_p - \hat{f}_{y'}\hat{v}_p = \hat{v} = \hat{y}' \\ \hat{H}_y &= \hat{p}\hat{v}_y - \hat{f}_y - \hat{f}_{y'}\hat{v}_y = -\hat{f}_y = -\frac{d}{dx}[\hat{f}_{y'}] = -\hat{p}'\end{aligned}$$

e assim, o resultado está demonstrado.  $\square$

O sistema Hamiltoniano (6.5) é conhecido como **forma canônica da equação de Euler-Lagrange** e as variáveis  $\{y, p\}$  são chamadas de **variáveis canônicas**.

Devido ao teorema 17, a forma canônica da equação de Euler-Lagrange também é um condição necessária para a ocorrência de extremos. Assim, para obtermos um candidato a extremal podemos, ao invés de resolver a equação de Euler-Lagrange, resolver o sistema Hamiltoniano (6.5). Veremos agora um exemplo de como trabalhar com o sistema hamiltoniano.

**Exemplo 6.1** O problema do **oscilador harmônico** envolve o seguinte funcional a ser minimizado

$$\int \frac{1}{2}[m(y')^2 - ky^2] dx,$$

isto é, a Lagrangiana para este caso é

$$\frac{1}{2}[m(y')^2 - ky^2].$$

Vamos escrever a equação de Euler-Lagrange e a equação na forma canônica para este problema e comparar os resultados obtidos.

A equação de Euler-Lagrange para este funcional fica

$$f_y - \frac{d}{dx}(my') = 0 \Leftrightarrow my'' + ky = 0. \quad (6.6)$$

Para este problema temos

$$f_{y'} = my' = p$$

e, portanto,

$$y' = \frac{p}{m} = v(x, y, p).$$

Assim, a Hamiltoniana para este funcional fica

$$H(x, y, p) = pv(x, y, p) - f(x, y, v(x, y, p)) = \frac{1}{2} \left[ \frac{p^2}{m} + ky^2 \right]$$

e daí, pelo teorema 17,

$$H_p = \frac{p}{m} = y' \tag{6.7}$$

e

$$-H_y = -ky = p' \Leftrightarrow -p' = ky. \tag{6.8}$$

Agora, usando (6.7) e (6.8) temos que

$$y'' = -\frac{ky}{m}$$

e, portanto

$$my'' + ky = 0. \tag{6.9}$$

Vemos então que a equação (6.9) é exatamente igual a equação (6.6) obtida pela equação de Euler-Lagrange na forma que já estávamos habituados. Isso irá sempre acontecer. Neste exemplo,  $p$  é o momento e  $H$  é a energia total da massa em movimento. Esse é o caso de uma lagrangiana associada a um sistema dinâmico de partículas.

Geralmente, sempre que a evolução de um fenômeno dinâmico é caracterizada por duas variáveis  $y(x)$  e  $p(x)$  e governada pelo sistema de equações diferenciais ordinárias (6.5) para algum  $H = H(x, y, p)$ , o sistema dinâmico é chamado de **sistema Hamiltoniano**. Esses sistemas aparecem naturalmente na modelagem de

fenômenos dinâmicos não necessariamente relacionados a mecânica newtoniana ou ao cálculo variacional. Assim, a teoria de sistemas hamiltonianos também pode encontrar aplicações em outras áreas além do cálculo das variações. Devido a uma convenção em sistemas dinâmicos de partículas,  $p$  e  $H$  são frequentemente relacionados ao momento e à energia do sistema que está sendo modelado.

**Definição 6.1** Quando a variável independente  $x$  não aparece explicitamente, um sistema de equações diferenciais ordinárias é chamado de **sistema autônomo**.

Os sistemas dinâmicos autônomos possuem algumas propriedades especiais. Temos, por exemplo, a seguinte lei de conservação de energia:

**Teorema 18** *Se a hamiltoniana não depende de  $x$  explicitamente, isto é,  $H = H(y, p)$ , e se o par  $\{\bar{y}(x), \bar{p}(x)\}$  é uma solução do sistema Hamiltoniano (6.5), então,  $\bar{H}(x) = H(\bar{y}(x), \bar{p}(x))$  é uma constante, isto é,  $\bar{H}(x) = H_0$  para alguma constante  $H_0$ .*

*Demonstração:*

Este resultado segue diretamente de

$$\frac{d\bar{H}}{dx} = \bar{H}_y \bar{y}' + \bar{H}_p \bar{p}' = \bar{H}_y \bar{H}_p + \bar{H}_p (-\bar{H}_y) = 0$$

e, portanto

$$\bar{H}(x) = H_0$$

para alguma constante  $H_0$ , demonstrando assim o teorema.  $\square$

Como  $H$  se refere, geralmente, à energia do sistema dinâmico, o teorema 18 implica que a energia do sistema é conservada. Assim, um sistema dinâmico com hamiltoniana não dependendo explicitamente de  $x$  é chamado **sistema conservativo**.

No exemplo 6.1 temos um sistema conservativo, pois

$$H(x, y, p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{p^2}{m} + ky^2 \right].$$

### 6.3 Transformações canônicas

Nesta seção iremos estudar um tipo de mudança de variáveis, que chamaremos de transformação canônica e com isso, começar a desenvolver uma maneira de simplificar nossas resoluções dos problemas.

Pelo exemplo 6.1, a equação de movimento para o oscilador harmônico simples pode ser dada na forma do sistema Hamiltoniano

$$-p' = ky = H_{y'}$$

$$y' = \frac{p}{m} = H_p$$

com

$$H = \frac{1}{2} \left[ \frac{p^2}{m} + ky^2 \right].$$

Suponha, agora, que desejamos trabalhar com um novo conjunto de variáveis  $Y$  e  $P$  ao invés de  $y$  e  $p$ , onde

$$Y = h(x, y, p), \quad P = g(x, y, p). \quad (6.10)$$

Escrevemos, então, o sistema Hamiltoniano em termos de  $Y$  e  $P$  e obtemos assim um novo sistema de equações diferenciais ordinárias. Por exemplo, a mudança de variáveis

$$Y = p, \quad P = -y \quad (6.11)$$

transforma o sistema Hamiltoniano em

$$Y' = kP, \quad -P' = \frac{Y}{m}. \quad (6.12)$$

O sistema (6.12) é um sistema Hamiltoniano com uma nova Hamiltoniana

$$H^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{Y^2}{m} + kP^2 \right]. \quad (6.13)$$

Uma mudança de variáveis da forma (6.10) nem sempre preserva a estrutura de um sistema Hamiltoniano de equações diferenciais. Por exemplo, a mudança de variáveis

$$Y = e^y, \quad P = p \quad (6.14)$$

transforma o sistema Hamiltoniano em

$$Y' = \frac{1}{m}PY, \quad -P' = K \ln Y \quad (6.15)$$

que não é um sistema Hamiltoniano, pois (6.15) não deriva de

$$H(x, y, p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{p^2}{m} + ky^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{P^2}{m} + K(\ln Y)^2 \right],$$

já que se houvesse uma Hamiltoniana  $H^*$  para a qual

$$H_P^* = \frac{PY}{m}$$

e

$$H_Y^* = K \ln Y,$$

teríamos

$$H^* = KY(\ln Y - 1) + h(P)$$

para alguma função  $h$  da variável  $P$  somente. Agora,

$$H_P^* = \frac{dh}{dP}$$

precisa ser uma função de  $P$  somente. A primeira relação de (6.15) requer então

$$H_P^* = \frac{PY}{m} = \frac{dh}{dP}$$

o que não é possível para qualquer função  $h(P)$ . Daí segue que (6.15) não é um sistema Hamiltoniano.

Uma transformação do tipo de (6.10) é chamada **transformação canônica** se ela transforma um sistema Hamiltoniano (nas variáveis  $y, p$ ) em outro sistema Hamiltoniano (nas novas variáveis  $Y$  e  $P$ ). Em outras palavras, **uma transformação canônica preserva a estrutura Hamiltoniana do sistema de equações diferenciais ordinárias**. Então, a transformação (6.11) é canônica e a (6.14) não.

**Exemplo 6.2** Vamos considerar a seguinte mudança de variáveis

$$Y = \frac{1}{2} \left[ ky^2 + \frac{p^2}{m} \right] \quad (6.16)$$

$$P = Q(y, p) \left[ \sqrt{mk} \sin^{-1} \left( \frac{y}{Q} \right) - kx \right] \quad (6.17)$$

para o oscilador harmônico simples, onde

$$Q(y, p) = \sqrt{y^2 + \frac{p^2}{mk}}. \quad (6.18)$$

Para reescrever o sistema Hamiltoniano em termos das novas variáveis  $Y$  e  $P$  diferenciamos ambos os lados de (6.16) e (6.17) com respeito a  $x$  e obtemos

$$Y' = kyy' + \frac{1}{m}pp' = ky \left( \frac{p}{m} \right) + \frac{p}{m}(-ky) = 0 \quad (6.19)$$

$$P' = Q' \left[ \sqrt{mk} \sin^{-1} \left( \frac{y}{Q} \right) - kx \right] + Q \left[ -k + \frac{\sqrt{mk} Qy' - yQ'}{Q^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{Q^2}}} \right]. \quad (6.20)$$

Com

$$Q' = \frac{yy' + \frac{pp'}{mk}}{Q} = 0,$$

a expressão para  $P'$  fica

$$P' = -kQ + \frac{\sqrt{mk}Qy'}{\sqrt{Q^2 - y^2}} = kQ \left[ m \frac{y'}{p} - 1 \right] = 0 \quad (6.21)$$

onde a expressão do oscilador harmônico simples foi utilizada em (6.21). Então, a transformação dada por (6.16) e (6.17) não só é canônica, como o sistema transformado é tão simples que a solução é trivial

$$Y = Y_0, \quad P = P_0. \quad (6.22)$$

A solução do sistema original segue então diretamente de (6.16), (6.17) e (6.22):

$$y^2 + \frac{p^2}{mk} = \frac{2Y_0}{k}, \quad P_0 = \sqrt{\frac{2Y_0}{k}} \left[ \sqrt{mk} \sin^{-1} \left( \frac{y}{\sqrt{\frac{2Y_0}{k}}} \right) - kx \right]$$

ou

$$y = \sqrt{\frac{2Y_0}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} x + \mu \right), \quad p = \sqrt{2Y_0 m} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} x + \mu \right) \quad (6.23)$$

onde

$$\mu = \frac{P_0}{\sqrt{2mY_0}}.$$

Esse exemplo e toda a discussão feita nesta seção sugerem um método diferente e indireto para resolver a equação de Euler-Lagrange de um problema variacional ou sistemas Hamiltonianos: encontrar uma transformação canônica que transforma um dado sistema Hamiltoniano em outro sistema Hamiltoniano de forma particularmente simples. Se o novo Hamiltoniano não depende das variáveis canônicas novas (e velhas), isto é,  $H^*(x, Y, P) \equiv H^*(x)$  então temos  $Y = Y_0$  e  $P = P_0$ .

## 6.4 A equação de Hamilton-Jacobi

Nesta seção iremos apresentar a famosa equação de Hamilton-Jacobi e continuar desenvolvendo o método indireto, citado na seção anterior, de resolver os sistemas Hamiltonianos.



Para encontrarmos uma transformação canônica especial que forneça um novo sistema Hamiltoniano  $Y' = P' = 0$ , iremos trabalhar com uma versão variacional do problema. O problema variacional aqui será para as variáveis  $y$  e  $p$ .

$$J[y, p] = \int_a^b [py' - H(x, y, p)] dx = \int_a^b \bar{f}(x, y, p, y', p') dx. \quad (6.24)$$

O funcional  $J[y, p]$  é obtido de

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

expressando  $f(x, y, y')$  em termos de  $H(x, y, p)$  pela transformada de Legendre (6.4).

Temos então, a seguinte equação de Euler-Lagrange para  $J[y, p]$

$$\frac{d}{dx}[\bar{f}_{y'}] = \bar{f}_y, \quad \frac{d}{dx}[\bar{f}_{p'}] = \bar{f}_p$$

ou

$$p' = -H_y, \quad 0 = y' - H_p \quad .$$

Isto demonstra o seguinte teorema

**Teorema 19** *As soluções do sistema Hamiltoniano (6.5) são os extremais de  $J[y, p]$  em (6.24).*

Similarmente, o sistema Hamiltoniano transformado

$$-P' = H_y^*, \quad Y' = H_p^* \quad (6.25)$$

são as equações de Euler-Lagrange de

$$\bar{J}[Y, P] = \int_a^b [PY' - H^*(x, Y, P)] dx. \quad (6.26)$$

Podemos usar (6.10) para expressar o integrando de (6.26) em termos de  $y$  e  $p$  para obter

$$\bar{J}[Y, P] = \int_a^b G(x, y, p, y', p') dx. \quad (6.27)$$

Não é necessário que  $G(x, y, p, y', p')$  e  $\bar{f}(x, y, p, y', p') = py' - H(x, y, p)$  sejam idênticos para o sistema (6.5) se transformar em (6.26) por meio de uma transformação canônica (6.10). É suficiente que (6.24) e (6.26) tenham os mesmos extremos.

**Definição 6.2** Os integrandos  $f(x, z, z')$  e  $G(x, z, z')$  de

$$J_F[z] = \int_a^b f(x, z, z') dx, \quad J_G[z] = \int_a^b G(x, z, z') dx$$

são **variacionalmente equivalentes** se, para alguma função  $\varphi(x, z) \in C^2$  temos

$$f(x, z, v) = G(x, z, v) + \varphi_x(x, z) + \varphi_z(x, z) \cdot v$$

Com  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  e  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , o vetor  $\varphi_z = (\varphi_{z_1}, \varphi_{z_2}, \dots, \varphi_{z_n})$  é o gradiente no espaço  $z$  e  $\varphi_z \cdot v$  é o produto escalar de duas quantidades vetoriais.

**Teorema 20** *Se  $f$  e  $G$  são variacionalmente equivalentes então elas geram os mesmos extremos.*

*Demonstração:*

A conclusão segue de

$$\begin{aligned} J_F[z] &= \int_a^b f(x, z, z') dx = \int_a^b [G(x, z, z') + \varphi_x(x, z) + \varphi_z(x, z)z'] dx = \\ &= [\varphi(x, z(x))]_a^b + J_G[z] = [\varphi(b, B) - \varphi(a, A)] + J_G[z]. \end{aligned}$$

O termo  $\varphi(b, B) - \varphi(a, A)$  não afeta a forma da equação de Euler-Lagrange de  $J_F[z]$ .

Assim,  $J_F$  e  $J_G$  têm os mesmos extremos.  $\square$

Para a Lagrangiana  $\bar{f}(x, y, p, y', p') = py' - H(x, y, p)$  associada ao sistema Hamiltoniano (6.5), temos  $z = (z_1, z_2) = (y, p)$ . Suponha que  $G(x, y, p, y', p')$  é a Lagrangiana do sistema Hamiltoniano transformado (6.25) expresso em termos de  $(x, y, p)$

com a ajuda da transformação canônica (6.10). Para  $G$  e  $\bar{f}$  terem o mesmo sistema hamiltoniano (6.5) como equações de Euler-Lagrange, é suficiente que  $G$  e  $\bar{f}$  sejam variacionalmente equivalentes, isto é

$$\bar{f}(x, y, p, y', p') = G(x, y, p, y', p') + \varphi_x(x, y, p) + y' \varphi_y(x, y, p) + p' \varphi_p(x, y, p)$$

para alguma função  $\varphi = \varphi(x, y, p) \in C^2$ . Da expressão  $\bar{f} = py' - H(x, y, p)$  e  $G(x, y, p, y', p') = PY' - H^*$ , a relação entre  $\bar{f}$  e  $G$  pode ser escrita como

$$py' - H(x, y, p) = PY' - H^*(x, Y, P) + \varphi_x + \varphi_y y' + \varphi_p p'$$

ou

$$pdy - Hdx = PdY - H^*dx + d\varphi. \quad (6.28)$$

A forma de (6.28) sugere que se tomarmos  $y$  e  $Y$  como as primeiras variáveis (ao invés de  $y$  e  $p$ ) com (6.10) reescrito tal que  $p = \tilde{g}_1(x, y, Y)$  e  $P = \tilde{g}_2(x, y, Y)$ , tomamos

$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_Y dY$$

tal que (6.28) se torna

$$(p - \varphi_y)dy - (P + \varphi_Y)dY - (H - H^* + \varphi_x)dx = 0. \quad (6.29)$$

A equação (6.29) é satisfeita se

$$p = \varphi_y, \quad (6.30)$$

$$-P = \varphi_Y, \quad (6.31)$$

$$H^* = H + \varphi_x. \quad (6.32)$$

Dado  $\varphi(x, y, Y)$ , (6.30) pode ser resolvida para um dado  $Y$  em termos de  $x$ ,  $y$  e  $p$ . O resultado pode ser usado para eliminar  $Y$  do lado direito de (6.31). Teremos então  $Y$  e  $P$  em termos de  $x$ ,  $y$  e  $p$ ; eles determinam a forma de  $h$  e  $g$  em (6.10). Por esta

razão,  $\varphi$  é chamada de **função geradora** da transformação (6.10). Assumimos que (6.10) possa ser invertida, isto é, que podemos escrever

$$y = \bar{h}(x, Y, P), \quad p = \bar{g}(x, Y, P). \quad (6.33)$$

As relações inversas (6.33) servirão para eliminar  $y$  e  $p$  do lado direito de (6.32) para uma dada  $H^*$  como função de  $x$ ,  $Y$  e  $P$ . A transformação (6.10) induzida pela função geradora  $\varphi(x, y, Y)$  é canônica porque, por construção,  $J_G$  associado com  $H^*$  tem os mesmos extremais que  $J_G$  associado com uma dada Hamiltoniana  $H$ . Vamos resumir esta discussão com o seguinte teorema

**Teorema 21** *Se, com  $p = \varphi_y$  e  $P = -\varphi_Y$ , a função  $\varphi(x, y, Y) \in C^2$  induz uma transformação (6.10) que pode ser invertida para  $y$  e  $p$  dados em termos de  $x$ ,  $Y$  e  $P$ , então a transformação é canônica. Ela transforma o sistema Hamiltoniano (6.5) em outro, com seu Hamiltoniano  $H^*$  dado por  $H + \varphi_x$  (expresso em termos de  $x$ ,  $Y$  e  $P$ ).*

Pedimos que a função  $\varphi$  seja de classe  $C^2$  para podemos inverter (6.30) e (6.31).

Se quisermos, podemos tomar  $y$  e  $P$  como as variáveis primárias (ao invés de  $y$  e  $Y$ ) e escrever (6.28) como

$$pdy - Hdx = d(PY) - YdP - H^*dx + d\varphi = d\psi - YdP - H^*dx,$$

onde  $\psi = PY + \varphi$ , ou

$$(p - \psi_y)dy + (Y - \psi_P)dP - (H - H^* + \psi_x)dx = 0. \quad (6.34)$$

A equação (6.34) é satisfeita por

$$p = \psi_y; \quad (6.35)$$

$$Y = \psi_P; \quad (6.36)$$

$$H^* = H + \psi_x. \quad (6.37)$$

As primeiras duas relações determinam  $P$  e  $Y$  em termos de  $y$  e  $p$  e fixam as formas de  $h$  e  $g$  em (6.10). O Hamiltoniano  $H^*$  é dado por (6.37) e pelas relações inversas (6.33).

Para uma solução simples do sistema transformado, gostaríamos de um novo Hamiltoniano  $H^*$  independente de  $Y$  e  $P$ . De fato, seria útil que  $H^* = 0$ , pois, daí, com  $y$  e  $Y$  sendo as variáveis primárias e  $H^* = 0$ , (6.31) ficaria

$$H(x, y, p) + \varphi_x(x, y, Y) = 0$$

ou com (6.30)

$$H(x, y, \varphi_y(x, y, Y)) + \varphi_x(x, y, Y) = 0. \quad (6.38)$$

A equação (6.38) é uma equação diferencial parcial não linear de primeira ordem para a função desconhecida  $\varphi(x, y, Y)$ . Note que  $Y$  não aparece explicitamente em (6.38) e a solução  $\varphi$  é determinada somente como uma função de  $x$  e  $y$  pela equação (6.38) com  $Y$  carregado como um parâmetro.

Para um dado Hamiltoniano  $H(x, y, p)$  a equação diferencial

$$H(x, y, \varphi_y) + \varphi_x = 0 \quad (6.39)$$

é chamada **equação de Hamilton-Jacobi** para o correspondente sistema Hamiltoniano.

Resumimos essa nossa discussão através do resultado seguinte.

**Teorema 22** *A equação de Hamilton-Jacobi (6.39) determina a função geradora  $\varphi(x, y, Y)$  e, com isso, a transformação canônica especial (6.30) e (6.31) para a solução do sistema Hamiltoniano (6.5). A solução de (6.5) é obtida pela resolução de (6.31), isto é,  $P = \varphi_Y(x, y, Y)$  para  $y$  obtendo  $y = \hat{y}(x, Y, P)$  e então, usando esse resultado em (6.30) obtemos  $p = \hat{p}(x, Y, P)$  onde  $Y$  e  $P$  são duas constantes arbitrárias.*

Não nos preocuparemos aqui com resultados teóricos que garantam a existência da solução da equação de Hamilton-Jacobi; discutiremos um pouco sobre a solução da equação e seu correspondente sistema Hamiltoniano.

## 6.5 Soluções da equação de Hamilton-Jacobi

Para a transformação (6.10) induzida por  $\varphi(x, y, Y)$  ser invertível, a solução da equação de Hamilton-Jacobi precisa depender do parâmetro  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ . Note que  $\varphi(x, y, Y)$  é determinada para uma função arbitrária de  $Y$ .

Se  $H$  é independente de  $x$  tomamos  $\varphi = \Phi(y, Y) - E_x$ , onde  $E$  é uma constante que geralmente depende dos parâmetros  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , isto é,  $E = E(Y)$ . Em termos de  $\Phi(y, Y)$  a equação de Hamilton-Jacobi se torna

$$H(y, \Phi_y) = E. \quad (6.40)$$

Para um escalar  $y$ , a equação de Hamilton-Jacobi (6.40) é uma equação diferencial ordinária com  $E$  como parâmetro. Ela é muito mais simples de ser resolvida que a equação de Hamilton-Jacobi original, que é uma equação diferencial parcial.

**Exemplo 6.3** Voltemos a considerar o exemplo do oscilador harmônico simples.

Já vimos que a Hamiltoniana para este problema é

$$H = \frac{1}{2} \left[ ky^2 + \frac{p^2}{m} \right].$$

Como  $H$  não depende de  $x$ , podemos trabalhar com a forma reduzida (6.40) e obter

$$mky^2 + \Phi_y^2 = 2mY \quad (6.41)$$

onde temos  $E = Y (= Y_1)$ , pois  $y$  é um escalar (e, assim,  $Y$  também). A equação diferencial ordinária separável para  $\Phi$  (6.41) pode ser escrita como

$$\Phi_y = \sqrt{2mY - mky^2} \quad \text{ou} \quad \Phi = \int^y \sqrt{2mY - mky^2} dy,$$

isto é,

$$\varphi(x, y, Y) = \int^y \sqrt{2mY - mky^2} dy - Yx.$$

Segue de (6.30), (6.31) e (6.32) que

$$p = \varphi_y = \sqrt{2mY - mky^2}, \quad (6.42)$$

$$P = -\varphi_Y = -m \int^y \frac{1}{\sqrt{2mY - mky^2}} dy + x = x - \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{k}{2Y}} y \right) \quad (6.43)$$

e

$$-H^* = Y - H(y, \Phi_y) = Y - \frac{1}{2} \left( ky^2 + \frac{p^2}{m} \right) = 0. \quad (6.44)$$

A relação (6.44) é simplesmente uma integral primeira da equação de movimento (equação de Euler-Lagrange) para o problema

$$Y = \frac{1}{2} \left( ky^2 + \frac{p^2}{m} \right). \quad (6.45)$$

Para verificar que, de fato, temos os resultados desejados iremos calcular  $P'$  e  $Y'$ .

$$Y' = kyy' + \frac{p}{m}p' = ky \left( \frac{p}{m} \right) + \frac{p}{m}(-ky) = 0$$

$$P' = 1 - \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\sqrt{\frac{k}{2Y}} y'}{\sqrt{\frac{1-ky^2}{2Y}}} = 1 - \sqrt{m} \frac{\frac{p}{m}}{\sqrt{2Y - ky^2}} = 0,$$

onde usamos o sistema Hamiltoniano (6.7), (6.8), (6.9) para eliminar  $y'$  e  $p'$ . A solução do problema original pode, então, ser obtida de (6.43) e do fato de  $P$  ser uma constante arbitrária, isto é,

$$y(x) = \sqrt{\frac{2Y}{k}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} [x - P] \right), \quad (6.46)$$

onde  $Y$  também é uma constante arbitrária.

## 6.6 Princípios variacionais de mecânica

Uma das áreas de aplicação mais importantes do cálculo variacional é a mecânica clássica: o estudo da evolução de fenômenos dinâmicos envolvendo objetos que podem ser idealizados como partículas ou corpos rígidos.

O estado de um fenômeno é caracterizado por um número de variáveis dinâmicas, suas posições e velocidades. A evolução de um fenômeno é determinada por um sistema de equações diferenciais ordinárias governando essas variáveis dinâmicas. Essas equações diferenciais apropriadas podem ser deduzidas de leis físicas (como, por exemplo, as Leis de Newton) postuladas para o fenômeno.

Nesta seção, estaremos interessados em um método alternativo de obter essas equações que governam o movimento usando algum princípio variacional para o fenômeno. Um desses princípios variacionais mais utilizados em mecânica clássica é o **princípio de Hamilton**, que apresentaremos a seguir juntamente com outros princípios importantes.

### O princípio de Hamilton-Ostrogradsky

Suponha que sobre um sistema de  $n$  pontos  $M_k(x_k, y_k, z_k)$  de massa  $m_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) sujeito a  $m \leq n$  vínculos holônomos<sup>1</sup>

$$\psi_j(x, y, z, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (6.47)$$

atuam certas forças

$$F_k(X_k, Y_k, Z_k) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

que admitem um potencial

$$U = U(x_k, y_k, z_k, t)$$

---

<sup>1</sup>Vínculo que pode ser expresso por um número de equações entre as coordenadas generalizadas do sistema e o tempo.



tal que

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k}.$$

A energia cinética do sistema será dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2). \quad (6.48)$$

Nestas condições, considera-se a classe dos movimentos cinematicamente possíveis, isto é, compatíveis com os vínculos (6.47), que levam o sistema de uma configuração  $A$  no instante  $t = t_0$  a uma configuração  $B$  no instante  $t = t_1$ . Segundo o princípio de Hamilton-Ostrogradsky, o movimento real do sistema passando da posição  $A$  à posição  $B$ , durante o intervalo de  $t_0$  a  $t_1$ , torna estacionária a integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt, \quad (6.49)$$

quer dizer, para este movimento  $\delta J = 0$ .

Trata-se assim, de um problema variacional no domínio dos sistemas de  $3n$  funções  $X_k(t)$ ,  $Y_k(t)$ ,  $Z_k(t)$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) definidas em  $[t_0, t_1]$ , com valores dados nas extremidades deste intervalo e sujeitas aos vínculos (6.47), isto é, um problema com extremidades fixas e restrições.

O emprego dos métodos dos multiplicadores de Lagrange introduz a função auxiliar

$$F = T + U + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \varphi_j$$

e o respectivo sistema de equações de Euler-Ostrogradsky

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k - X_k - \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} &= 0 \\ m_k \ddot{y}_k - Y_k - \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} &= 0 \\ m_k \ddot{z}_k - Z_k - \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k} &= 0, \end{aligned}$$

um sistema de equações diferenciais que descreve o movimento do sistema.

### O princípio de Lagrange

No caso particular em que os vínculos  $\phi_j$  e o potencial  $U$  não dependem do tempo, o sistema conserva a sua energia total, quer dizer,  $T - U = cte$ .

O princípio de Lagrange estipula que no domínio dos movimentos cinematicamente possíveis e satisfazendo à condição  $T - U = h = cte$ , que conduzem o sistema da posição  $A$  no instante  $t_0$  à posição  $B$  num certo instante  $t$ , a integral

$$\int_{t_0}^t 2T dt \quad (6.50)$$

se torna estacionária.

Este princípio se formula em termos de um problema variacional com vínculos  $\phi_j(x, y, z) = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), com a restrição não-holônoma suplementar  $T - U = h$  e uma extremidade variável.

### O princípio de Jacobi

Se explicitarmos o tempo de (6.50), chegaremos ao princípio de Jacobi, que diz que a trajetória  $\gamma$  que conduz um sistema holônomo conservativo de uma posição  $A$  a uma posição  $B$  torna estacionária a integral

$$\int_{\gamma} \sqrt{2(U + h)} ds. \quad (6.51)$$

Agora que estabelecemos estes três princípios devemos observar que: o funcional (6.49) representa a ação no sentido de Hamilton, o funcional (6.50) representa a ação no sentido de Lagrange e o funcional (6.51) a ação no sentido de Jacobi. Os

princípios mecânicos aqui estudados são chamados de **princípios da ação estacionária** ou, as vezes, **princípios da ação mínima**. Os possíveis extremos dos funcionais mencionados serão sempre um mínimo. Vejamos agora um exemplo de aplicação destes princípios.

**Exemplo 6.4** - Deduzir, do princípio da ação mínima, o movimento de um ponto sobre o qual atua apenas a força da gravidade.

Para resolver este problema iremos admitir que a massa do ponto seja igual a 1 e que o eixo  $O_y$  aponta para cima. Podemos escrever então que

$$U = -gy. \quad (6.52)$$

Pelo princípio de Jacobi, qualquer trajetória cinematicamente possível  $\gamma$  deve tornar a integral

$$J = \int_{\gamma} \sqrt{2(U+h)} ds \quad (6.53)$$

estacionária. Reescrevendo (6.53) usando (6.52) obtemos

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(h-gy)} \sqrt{1+y'^2} dx. \quad (6.54)$$

A equação de Hamilton-Jacobi para este funcional fica

$$\varphi_x - \sqrt{2h - 2gy - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = 0,$$

ou seja,

$$(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2 = 2(h - gy).$$

Admitindo a integral geral

$$\varphi = Ax + \int \sqrt{2h - 2gy - A^2} dy = Ax - \frac{1}{3g}(2h - 2gy - A^2)^{3/2} + B,$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias, decorre que a equação da Lagrangiana de (6.54) será

$$x + \frac{A}{g}(2h - 2gy - A^2)^{1/2} = C$$

ou

$$y = \frac{h}{g} - \frac{A^2}{2g} - \frac{g}{2A^2}(x - C)^2,$$

onde  $A$  e  $C$  são constantes indeterminadas. Isto segue do fato da Lagrangeana ser dada pela relação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A} = \frac{C}{2}.$$

Em particular, passarão pela origem, isto é, satisfarão a condição  $y(0) = 0$ , as trajetórias parabólicas da família monoparamétrica

$$y = -\frac{g}{2A^2}x^2 + \frac{\sqrt{2h - A^2}}{A}x.$$

## 6.7 O método da separação aditiva

Com o que vimos até aqui já pudemos perceber que a equação de Hamilton-Jacobi não necessariamente simplifica o processo de obtenção de um extremal para uma dada Lagrangiana. Com as equações de Hamilton-Jacobi tínhamos que resolver um conjunto de equações diferenciais ordinárias e, agora, temos que resolver a equação de Hamilton-Jacobi que é uma equação diferencial parcial. Em geral, equações diferenciais parciais são muito mais difíceis de serem resolvidas do que equações diferenciais ordinárias. Porém, há uma classe, não trivial, muito importante de problemas nos quais a solução da equação de Hamilton-Jacobi é praticamente direta. Essa classe de problemas tem a característica particular de  $\varphi(x, y, Y)$  ser uma soma de funções, cada uma envolvendo somente uma componente de  $y$ .

Por simplicidade, vamos limitar nossa discussão para sistemas conservativos, isto é, nos quais  $H$  não depende explicitamente de  $x$ . Nesse caso, podemos considerar

$$\varphi(x, y, Y) = \phi(y, Y) - E(Y)x$$

e trabalhar com a equação de Hamilton-Jacobi reduzida (6.40) e obter

$$H(y, \phi_y) = H(y_1, y_2, \dots, y_n, \phi_1, \dots, \phi_n) = E, \quad (6.55)$$

onde  $\phi_k = \frac{\partial \phi}{\partial y_k}$ . Para muitos Hamiltonianos, a solução da equação (6.55) é da forma

$$\phi(y, Y) = \phi_1(y_1, Y) + \phi_2(y_2, Y) + \dots + \phi_n(y_n, Y), \quad (6.56)$$

onde  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  assume o papel de um parâmetro. Em outros casos, somente uma das variáveis  $\{y_k\}$  é aditivamente separada em  $\phi(y, Y)$ .

Para ver quando é possível termos uma solução aditivamente separada da equação de Hamilton-Jacobi, consideramos o caso no qual  $H$  depende de  $y_1$  e  $\phi_1$  somente através de uma combinação  $h_1(y_1, \phi_1)$ . Então

$$H(y, \phi_y) = H(h_1(y_1, \phi_1), y_2, \dots, y_n, \phi_2, \dots, \phi_n). \quad (6.57)$$

Para este caso, buscamos uma solução para  $\phi$  da forma

$$\phi(y, Y) = \phi_1(y_1, Y) + \tilde{\phi}(y_2, \dots, y_n, Y), \quad (6.58)$$

isto é, (6.40) se torna

$$H(h_1(y_1, \phi_1), y_2, \dots, y_n, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_n) = E. \quad (6.59)$$

A equação (6.59) precisa ser válida para todo  $y_1$  enquanto todos os outros  $y_k$  são mantidos fixos. Quando  $y_1$  muda, somente  $h_1(y_1, \phi_1)$  é efetuado em  $H$ . E daí, segue que  $h_1(y_1, \phi_1(y_1))$  precisa ser independente de  $y_1$ , isto é,

$$h_1(y_1, \dot{\phi}_1) = a_1(Y),$$

onde o ponto indica a diferenciação com respeito ao argumento (neste caso  $y_1$ ) e  $a_1$  é um parâmetro constante. A equação (6.59) agora se torna

$$H(a_1, y_2, \dots, y_n, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_n) = E.$$

Se  $y_2$  e  $\tilde{\phi}_2$  também só aparecem em  $H$  na combinação  $h_2(y_2, \tilde{\phi}_2)$ , o mesmo argumento usado acima nos dá que a variável  $y_2$  também precisa ser aditivamente separada em  $\phi(y, Y)$ , isto é,

$$\phi(y, Y) = \phi_1(y_1, Y) + \phi_2(y_2, Y) + \bar{\phi}(y_3, \dots, y_n, Y)$$

com  $\phi_1$  e  $\phi_2$  determinados pela equação diferencial ordinária

$$h_k(y_k, \dot{\phi}_k) = a_k(Y) \quad (k = 1, 2), \quad (6.60)$$

já que (6.40) se torna uma equação diferencial parcial para  $\bar{\phi}(y_3, \dots, y_n, Y)$

$$H(a_1, a_2, y_3, \dots, y_n, \bar{\phi}_3, \dots, \bar{\phi}_n) = E. \quad (6.61)$$

E agora, é evidente que uma solução de (6.40) na forma (6.56) é possível se  $H$  depender de todos os  $y_k$  e  $\phi_k$  somente através de  $n$  combinações  $h_k(y_k, \phi_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**Exemplo 6.5** - O movimento de uma partícula no espaço sujeita à ação de um campo uniforme na direção  $y_3$ . (Um exemplo de tal sistema é o movimento de uma partícula de massa  $m$  sujeita à gravidade  $g$ .)

Pelo princípio de Hamilton, a Lagrangiana para este sistema é

$$F = \frac{1}{2}m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2) - mgy_3.$$

A Hamiltoniana correspondente é

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + mgy_3,$$

onde  $p_k = \frac{y_k}{m}$ . Como  $H$  não depende de  $t$  a equação de Hamilton-Jacobi reduzida (6.40) é apropriada para este problema e obtemos então

$$\left[ mgy_3 + \frac{1}{2m}\phi_3^2 \right] + \left[ \frac{1}{2m}\phi_2^2 \right] + \left[ \frac{1}{2m}\phi_1^2 \right] = E. \quad (6.62)$$

A equação (6.62) é da forma  $h_1(y_1, \phi_1) + h_2(y_2, \phi_2) + h_3(y_3, \phi_3) = E$ . Daí, segue que  $\phi$  pode ser tomado na forma (6.56) com

$$\phi_{k,k} = a_k \quad (k = 1, 2)$$

e

$$\phi_{3,3}^2 + 2m^2gy_3 + a_1^2 + a_2^2 = 2mE.$$

Essas relações podem ser integradas para obtermos

$$\phi_k = a_k(y_k - y_{k_0}) \quad (k = 1, 2) \quad (6.63)$$

$$\int_{y_{3_0}}^{y_3} \sqrt{2mE - a_1^2 - a_2^2 - 2m^2yz} dz. \quad (6.64)$$

As constantes de integração são escolhidas para que  $y_k(0) = y_{k_0}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Os parâmetros  $a_1$ ,  $a_2$  e  $E$  podem ser renomeados para  $Y_1, Y_2$  e  $Y_3$ , respectivamente, para ser consistente com o que foi desenvolvido nas seções anteriores. Com (6.63) e (6.64), obtemos para (6.30) e (6.31)  $p_1 = Y_1$ ,  $p_2 = Y_2$ ,

$$\begin{aligned} p_3 &= -mgy_3 + R(y_3, Y) \\ -P_k &= y_k - Y_k \int_{y_{3_0}}^{y_3} \frac{1}{R(z, Y)} dz \quad (k = 1, 2) \\ -P_3 &= -t + m \int_{y_{3_0}}^{y_3} \frac{1}{R(z, Y)} dz \end{aligned}$$

onde

$$R(y_3, Y) = \sqrt{2mY_3 - Y_1^2 - Y_2^2 - 2m^2gy_3}.$$

As condições iniciais  $y_k(0) = y_{k_0}$  são equivalentes a  $P_3 = 0$  e  $P_k = -y_{k_0}$ , ( $k = 1, 2$ ) e, então, as relações acima nos dão

$$m \int_{y_{3_0}}^{y_3} \frac{1}{R(z, Y)} dz = \left[ -\frac{1}{mg} R(z, Y) \right]_{y_{3_0}}^{y_3} = t \quad (6.65)$$

$$y_k = y_{k_0} + \frac{Y_k}{m} t \quad (k = 1, 2). \quad (6.66)$$

A equação (6.65) pode ser simplificada para obtermos

$$y_3(t) = y_{30} + \frac{1}{m}R(y_{30}, Y)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

As três constantes indeterminadas  $Y_1, Y_2$  e  $Y_3$ , que são as componentes de  $Y$ , são obtidas ao colocarmos as condições iniciais  $\dot{y}_k(0) = v_{k0}$ , ( $k = 1, 2, 3$ ).

Para este exemplo, a abordagem do problema pela teoria de Hamilton-Jacobi ficou desnecessariamente complicada, já que se usarmos a equação de Euler-Lagrange obteremos uma solução quase direta. Mas este não é sempre o caso, principalmente para problemas envolvendo movimento planar em um campo de força central. O exemplo mais conhecido desse tipo de problema é o movimento de um planeta em torno do Sol (ignorando o efeito de outros planetas).

**Exemplo 6.6** - Movimento planar de uma partícula sujeita à ação de um campo de força central caracterizado por  $V(y) \equiv V(r)$ , onde  $r$  é a distância radial da origem do referencial.

Em coordenadas polares  $(r, \theta)$ , no plano do movimento, a Hamiltoniana para este problema é

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 \right) + V(r)$$

que segue do princípio de Hamilton e da transformada de Legendre. Como  $H$  é independente de  $t$ , então a equação de Hamilton-Jacobi reduzida (6.40) também se aplica a este problema

$$H(r, \theta, \phi_r, \phi_\theta) = \frac{1}{2m} [\phi_r^2 + 2mV(r)] + \frac{1}{2mr^2} \phi_\theta^2 = E$$

com a função geradora dada por  $\varphi(t, r, \phi, Y_1, Y_2) = \phi(r, \theta, Y_1, Y_2) - Et$ . Notemos que  $\theta$  e  $\phi_\theta$  aparecem em  $H$  somente na combinação  $(\phi_\theta)^2$  e podemos igualar a uma constante  $a_\theta^2$ .



Devemos também observar que  $H$  não depende de  $\theta$  explicitamente. Neste caso, chamamos a coordenada  $\theta$  de coordenada cíclica. Para uma coordenada cíclica podemos escrever

$$\phi(r, \theta, Y) = \bar{\phi}(r, Y) + a_\theta \theta$$

e transformar (6.40) em

$$r^2[\bar{\phi}_r^2 + 2mV(r)] + a_\theta^2 = 2mEr^2.$$

Essa equação pode ser rearranjada para escrevermos

$$\bar{\phi}_r = \sqrt{2mY_1 - 2mV(r) - \frac{Y_2^2}{r^2}} \equiv R(r, Y),$$

onde identificamos  $Y_2 = a_\theta$  e  $Y_1 = E$  e, então

$$\bar{\phi}(r, Y) = \int_{r_0}^r R(\xi, Y) d\xi + \beta_r,$$

onde  $r_0 = r(t = 0)$  e  $\beta_r$  é uma constante de integração que não interfere no movimento da partícula e que pode ser obtida. Nesse caso, temos

$$\varphi(t, r, \theta, Y) = Y_2 \theta - Y_1 t + \int_{r_0}^r R(\xi, Y) d\xi.$$

Por (6.42), (6.43) e (6.44) obtemos

$$p_r = R(r, Y),$$

$$p_\theta = a_\theta = Y_2,$$

$$-P_r = -t + \int_{r_0}^r \frac{m}{R(\xi, Y)} d\xi,$$

$$-P_\theta = \theta - \int_{r_0}^r \frac{Y_2}{R(\xi, Y)\xi^2} d\xi.$$

O estado inicial da partícula  $r(0) = r_0$  e  $\theta(0) = \theta_0$  requer que  $P_r = 0$  e  $P_\theta = \theta_0$ . A expressão para  $P_r$  torna-se então uma equação para  $t$  como uma função de  $r$

$$t = \int_{r_0}^r \frac{m}{R(\xi, Y)} d\xi = \int_{r_0}^r \frac{m}{\sqrt{2mY_1 - 2mV(\xi) - \frac{p_\theta^2}{\xi^2}}} d\xi. \quad (6.67)$$

A expressão para  $P_\theta$  nos dá  $\theta$  como uma função de  $r$

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^r \frac{p_\theta}{\xi^2 R(\xi, Y)} d\xi, = \int_{r_0}^r \frac{p_\theta}{\xi^2 \sqrt{2mY_1 - 2mV(\xi) - \frac{p_\theta^2}{\xi^2}}} d\xi, \quad (6.68)$$

onde podemos escrever  $p_\theta$  para  $Y_2$ . Em outras palavras, a nova coordenada canônica  $Y_2$  é agora identificada como sendo o momento angular da partícula e o resultado  $Y_2' = 0$ , garantido por nossa escolha de  $\varphi$ , implica que: **O momento angular de uma partícula em movimento sujeita à ação de uma força central é conservado.**

As equações (6.67) e (6.68) dão a solução geral do problema. A equação (6.68) dá a relação entre  $r$  e  $\theta$ , isto é, a equação da trajetória. Já a equação (6.67) nos dá a distância  $r$  como uma função implícita do tempo  $t$ , que pode ser explicitada para obtermos  $r$  como função de  $t$  explicitamente.

A segunda lei de Kepler para o movimento planetário é um caso particular desse resultado.

Para movimentos planetários, temos que  $V(r) = \frac{-c_0}{r}$  e, do que foi feito acima sabemos que a equação geral da trajetória é

$$\theta = \int \frac{a_\theta}{r^2 \sqrt{2mE + 2m\frac{c_0}{r} - \frac{a_\theta^2}{r^2}}} dr.$$

Integrando esta expressão obtemos

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\left(\frac{a_\theta}{r}\right) - \left(\frac{mc_0}{a_\theta}\right)}{\sqrt{2mE + \frac{m^2 c_0^2}{a_\theta^2}}} + cte,$$

tomando a origem de  $\theta$  tal que  $cte = 0$  e chamando

$$p = \frac{a_\theta^2}{mc_0}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2Ea_\theta^2}{mc_0^2}} \quad (6.69)$$

podemos escrever a equação da trajetória como

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta. \quad (6.70)$$

Essa é a equação de uma seção cônica. De (6.69) vemos que se  $E \leq 0$  então a excentricidade  $e \leq 1$ , isto é, a órbita é uma elipse e o movimento é finito.

De acordo com as fórmulas da geometria analítica, o semi-eixo maior e o semi-eixo menor da elipse são dados, respectivamente, por

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{c_0}{2}|E|,$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{(1 - e^2)}} = \frac{a_\theta^2}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Os focos da elipse serão dados por

$$r_{min} = \frac{p}{(1 + e)} = a(1 - e),$$

$$r_{max} = \frac{p}{(1 - e)} = a(1 + e).$$

Assim, obtivemos para a órbita do movimento uma equação que descreve uma elipse. Ela corresponde à **primeira lei de Kepler** para movimentos planetários. Obteríamos o mesmo resultado através da equação de Euler-Lagrange ou pelas equações de movimento da mecânica Newtoniana. Porém, seria muito mais trabalhoso. Para este exemplo, além de [44] tomamos como referência [28].

# Capítulo 7

## Projetos

### 7.1 Introdução

Os trabalhos de J. Dewey [15] e W. H. Kilpatrick [26] são pioneiros no uso de projetos no ensino, e preconizavam, já na primeira década do século vinte, que o aluno se tornasse “ator da sua formação, por intermédio de aprendizagens concretas e significativas para si” ([4, p.193]).

O ensino e a aprendizagem do Cálculo vem se beneficiando com várias iniciativas envolvendo o uso de projetos no ensino. Costa e Grou apresentam as primeiras reflexões sobre o uso de projetos no ensino de Cálculo de uma e várias variáveis na Universidade Estadual de Campinas [10, 11]. Segundo estas autoras ([10, p.10], “...os procedimentos utilizados em experiências desta natureza estão baseados em fatores que transcendem ao Cálculo: envolvimento, iniciativa e entusiasmo de alunos e professores.”

O uso de projetos no ensino de Cálculo visa dar um caráter mais flexível à ementa rígida de uma disciplina obrigatória dos cursos de Ciências Exatas e Engenharias. Os artigos [12] e [19] relacionam aspectos históricos e físicos ao tema a ser trabalhado, e aliam modelagem matemática à ferramenta computacional para resgatar os conceitos de Cálculo. Indo além, os projetos podem também promover uma maior integração entre as diferentes áreas do conhecimento na medida em que os alunos compreendem

a repercussão destes conhecimentos na sociedade e na cultura. Como exemplo de tais atividades convida-se o leitor a conhecer os trabalhos [20] e [32], que exploram temas ambientais, como a questão do lixo na Universidade, e curvas de nível e o vazamento de um navio petroleiro.

Os projetos desenvolvidos por alunos ingressantes na Universidade que cursam a disciplina de Cálculo de uma variável podem ser um importante instrumento capaz de fazer a transição do ensino médio para o ensino superior e mostrar a relevância do Cálculo neste processo transitório [37, p.127].

Pretende-se neste capítulo explorar o recurso didático do projeto por meio do estabelecimento de uma ponte, agora entre o Cálculo e o Cálculo Variacional. Neste sentido, este capítulo se inicia com uma seção de exercícios preliminares envolvendo problemas de máximos e mínimos de várias variáveis utilizando o Teorema de Lagrange.

A seguir são apresentadas duas sugestões de projetos envolvendo tópicos clássicos do cálculo variacional explorados sob os olhares analítico, geométrico, histórico, computacional e físico. Estes projetos destinam-se potencialmente para estudantes de final de graduação e de pós-graduação. A primeira proposta trabalha com geodésicas e a segunda com o problema da Braquistócrona. Elas envolvem uma abordagem teórica dos assuntos e também possibilitam que os alunos visualizem, por meio de programas computacionais com recursos gráficos, algébricos e simbólicos, alguns resultados vistos na teoria.

Vale ressaltar que os recursos computacionais colaboram para a compreensão do caráter local das soluções dos problemas variacionais sob consideração. Resultados de existência (e unicidade) de solução nem sempre favorecem a construção e visualização efetiva deste objeto matemático. Tanto no caso das geodésicas quanto no problema da braquistócrona, os recursos gráficos, numéricos e algébricos, aliados ao conhecimento dos conceitos envolvidos e dos pré-requisitos, proporcionam um

conjunto de ferramentas para se levantar conjecturas e buscar elementos para comprová-las ou verificar que não são válidas. À medida que o computador simplifica os procedimentos algébricos e favorece a visualização gráfica, pode fornecer subsídios para ousarmos mais e irmos mais longe, indagando, explorando e buscando para além do que já foi construído e apreendido.

### 7.1.1 Exercícios preliminares

**Pré-requisitos:** Máximos e mínimos em várias variáveis [16] e Teorema de Lagrange, que será enunciado a seguir.

**Teorema dos Multiplicadores de Lagrange** (caso geral com  $m$  restrições de igualdade em  $\mathbb{R}^n$ )

Sejam  $f, g_1, \dots, g_m$  funções de classe  $C^1$  de  $n$  variáveis e seja  $\mathbf{x}^*$  um extremo (máximo ou mínimo) local de  $f$  no conjunto viável

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\mathbf{x}) = k_1, \dots, g_m(\mathbf{x}) = k_m\}.$$

Suponha que  $\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}^*)$  são vetores linearmente independentes (condição de regularidade em  $\mathbf{x}^*$ ). Então existem números reais  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$  (multiplicadores de Lagrange) tais que  $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$  é um ponto crítico da função Lagrangeana

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 (g_1(\mathbf{x}) - k_1) - \dots - \lambda_m (g_m(\mathbf{x}) - k_m).$$

1. Dentre os pontos do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

onde  $a > b$ , prove que aqueles que estão mais próximos da origem se acham sobre o plano  $x = 0$ .

2. Considere a reta de equação  $y = x - 5$  e a curva  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ . Encontre o ponto  $(r, s)$  na reta e o ponto  $(t, u)$  na curva que realizam a distância mínima entre a reta e a curva, seguindo as seguintes etapas:
- Faça um esboço da situação para compreender o problema.
  - Formule matematicamente o problema: *minimizar o quadrado da distância entre os pontos, sujeito aos pontos pertencerem, respectivamente, às curvas dadas*, definindo a função objetivo e os vínculos. Note que as funções envolvidas possuem quatro variáveis:  $(r, s, t, u)$ .
  - Utilize a restrição “ $(r, s)$  pertence à reta” para reduzir a dimensão do problema, que passa a ter três variáveis e um único vínculo.
  - Resolva o sistema de Lagrange resultante e analise o(s) resultado(s) obtido(s).
  - Faça um novo esboço para visualizar a solução encontrada e validá-la graficamente.
3. Defina duas elipses disjuntas em  $\mathbb{R}^2$  e encontre os pontos que realizam a distância mínima entre ambas. Como roteiro, baseie-se nas etapas do item anterior, mas observe que neste caso o problema permanece com quatro variáveis e duas restrições.

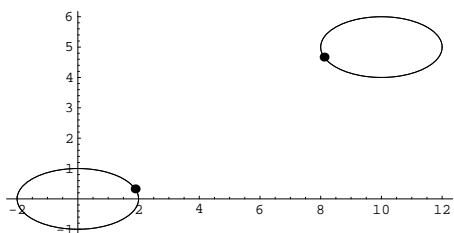


Figura 7.1: Ilustração para a situação problema sugerida no item 3, com as soluções demarcadas

Este problema e o anterior estão propostos em [18].

4. O problema a seguir foi inspirado na abordagem presente em [41]. Utilizando o método dos Multiplicadores de Lagrange, podemos demonstrar duas desigualdades extremamente importantes em análise matemática: a **desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii** e a **desigualdade de Hölder**. A desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii foi demonstrada em  $\mathbb{R}^n$  por Cauchy em 1821, por Bunyakovskii para integrais em 1859 e por Schwarz para integrais duplas em 1885. Ela estabelece o seguinte: para números arbitrários  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  temos a seguinte desigualdade:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2} (b_1^2 + \dots + b_n^2)^{1/2}.$$

Já a desigualdade de Hölder foi demonstrada por Hölder em 1889 e estabelece que para números não negativos  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  e para  $p > 1$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$  vale a seguinte desigualdade:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{1/p} (b_1^q + \dots + b_n^q)^{1/q}.$$

Com o auxílio dessas desigualdades podemos demonstrar importantes resultados de análise matemática, principalmente sobre normas.

Agora, trabalhando com problemas de máximos e mínimos em várias variáveis:

- (a) Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii. Sugestão: com base na desigualdade, escolha a *função objetivo* adequada e trabalhe com a *restrição*  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = B^2$
- (b) De maneira análoga, demonstre a desigualdade de Hölder. Sugestão: leve em consideração o fato de esta desigualdade valer para números não negativos, e adapte a idéia usada em 4a.
- (c) Definimos a **norma euclidiana** de  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  por

$$\|z\|_2 = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_n^2}.$$



Demonstre que esta norma satisfaz a desigualdade triangular

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Sugestão: utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii.

(d) Mostre que a **norma-p**,

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p},$$

$p > 1$  satisfaz a desigualdade triangular. Sugestão: utilize a desigualdade de Hölder.

5. Nos itens anteriores trabalhou-se com problemas de máximos e mínimos de várias variáveis. O cálculo variacional aparece então, como uma continuação desta teoria para problemas mais gerais. Comprove isto fazendo uma pequena nota histórica sobre a evolução dos problemas de máximos e mínimos e seus métodos de resolução. Uma boa referência para isto é o [capítulo 1 deste texto] e [41].

## 7.2 Projeto sobre geodésicas

Por dois pontos quaisquer sobre uma superfície, há infinitos caminhos na superfície que os ligam. Se existir uma curva de menor comprimento entre estes dois pontos, então ela é denominada uma **linha geodésica** (ou **geodésica**).

De acordo com [25], o primeiro artigo sobre o menor caminho entre dois pontos numa superfície geral, *De Linea Brevissima in Superficie Quacunque Duo Quaelibet Puncta Jungente (On the Shortest Line on the Arbitrary Surface Connecting Any Two Points Whatsoever)*, foi publicado por Euler em 1732.

Este projeto tem por objetivo traçar um panorama das geodésicas com os elementos teóricos desenvolvidos no texto.

### 7.2.1 Geodésicas na esfera

Esta parte do projeto tem por objetivo revisar conceitos de Geometria Analítica, Cálculo de várias variáveis, Análise, Cálculo variacional e Geometria Diferencial relacionados ao tema das Geodésicas.

**Pré-requisitos:** coordenadas esféricas [16], equação de plano [46], distância geodésica [34], teorema da Função Implícita [30], comprimento de arco [capítulo 1 deste texto], equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 deste texto], geodésicas sob o ponto de vista da geometria diferencial [34].

#### Geodésicas via Geometria Analítica

1. Como a superfície da Terra pode ser considerada esférica, o problema de determinar qual o menor caminho entre dois pontos em uma esfera sempre teve grande destaque. Faça uma pesquisa e encontre exemplos que ilustrem a importância dessa idéia. Uma sugestão seria pesquisar sobre a cartografia e as grandes navegações.
2. As cidades de Dallas (*Latitude, Longitude*) =  $(32^\circ N, 97^\circ O)$  e Nagasaki (*Latitude, Longitude*) =  $(32^\circ N, 180^\circ L)$  estão sobre o mesmo paralelo. Utilizando coordenadas esféricas localize-as na superfície da Terra. Suponha o raio da Terra 6375km.
3. Determine a equação do plano  $P_1$  que passa pelas duas cidades e é paralelo ao eixo  $z$ . Visualize este plano juntamente com a superfície da Terra e as duas cidades.

4. Determine a equação do plano  $P_2$  que passa pelas duas cidades e pelo centro da Terra. Visualize-o juntamente com a superfície da Terra e as duas cidades.
5. Obtenha a curva interseção do plano  $P_1$  com a superfície da Terra.
6. Obtenha a curva interseção do plano  $P_2$  com a superfície da Terra.

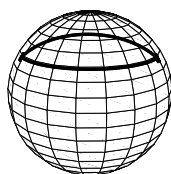


Figura 7.2: O caminho mais curto entre Dallas e Nagasaki (arco de cima) e a linha de rumo (loxodromia) obtida no item 5.

7. Utilizando produto interno de vetores calcule a distância, na superfície da Terra, entre as duas cidades considerando as curvas obtidas em 5 e 6. Atenção! Neste cálculo, considere sempre o menor dos arcos de círculo entre as duas cidades.
8. Compare os resultados obtidos em 7.

Uma maneira popular (e mais antiga) de descrever geodésicas é chamá-las de curvas de menor distância entre dois pontos numa superfície. Isto é verdade certamente para o plano, onde as geodésicas são segmentos de retas, que dão a menor distância entre quaisquer dois de seus pontos. Mas vejamos o que ocorre com a superfície esférica. Pode-se estabelecer que a menor distância entre dois pontos  $P$  e  $Q$  na esfera é ao longo de uma geodésica, que neste caso é um grande círculo formado pela interseção da esfera com o plano que passa por  $P$ ,  $Q$  e o centro da esfera (veja figura 7.3).

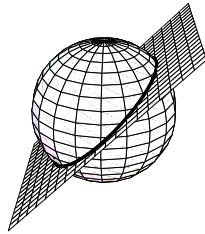


Figura 7.3: Um grande círculo na superfície da Terra.

Mas existem dois arcos de grande círculo entre dois de seus pontos e somente um deles é a curva de menor distância, exceto quando  $P$  e  $Q$  são os pontos finais de um diâmetro, denominados pontos antípodas, quando ambos os arcos têm o mesmo comprimento. Este exemplo da esfera também mostra que nem sempre é verdade que por dois pontos passa uma única geodésica: quando  $P$  e  $Q$  são pontos antípodas qualquer grande círculo por  $P$  e  $Q$  é uma geodésica [39, p.140].

9. Escolha duas cidades na superfície da Terra que não estão no mesmo paralelo e nem no mesmo meridiano. Tente visualizar o menor dos arcos do grande círculo que passa pelas cidades escolhidas. Isto é sempre possível? Por que? Qual o resultado de análise que nos permite afirmar algo a este respeito? Dê um exemplo mostrando um caso onde a visualização desta curva não é possível. Sugestão: tenha em mente o Teorema da Função Implícita.

### Geodésicas via Cálculo Variacional

10. Queremos estabelecer que o caminho mais curto entre dois pontos na esfera é um arco do grande círculo pensando nesse problema como um problema de minimizar o comprimento de um arco ligando dois pontos. Escreva a expressão que fornece o comprimento de arco entre dois pontos dados em uma esfera.
11. O problema de encontrar o menor caminho entre os dois pontos dados na esfera se transforma então no problema de minimizar a integral obtida em

10. A área da matemática que trata deste tipo de problema é o **Cálculo Variacional**. Tente resolver este problema da mesma maneira que resolveria um problema usual de máximo e mínimo. Quais as dificuldades encontradas? Sugestão: comece pensando em encontrar pontos críticos.
12. Enuncie e demonstre algum teorema que forneça uma maneira de derivarmos uma integral e assim poderemos calcular os pontos críticos do problema que estamos considerando. Sugestão: veja o [capítulo 1 deste texto] e [22]
13. Utilizando o resultado obtido em 12 é possível encontrar os pontos críticos para este problema. Com base nisto, tente encontrar uma condição necessária para uma curva  $y = y(x)$  ser um extremal do problema, isto é, ser uma curva candidata a minimizar a integral desejada. O objetivo deste item é chegar na famosa **Equação de Euler-Lagrange**.
14. Com base no que foi feito em 13 encontre uma curva candidata a extremo do problema considerado. Com isso será possível obter um arco de grande círculo como geodésica. Sugestão: consulte o [capítulo 1 deste texto] e estude detalhadamente a seção que trata da Equação de Euler-Lagrange.

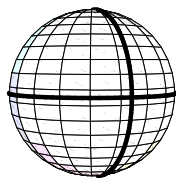


Figura 7.4: Um meridiano e o equador da esfera.

15. Com base no que foi visto no decorrer do projeto, discuta o caráter local das geodésicas, justificando-o. Note que esta resolução do problema via cálculo variacional não nos dá os meridianos e o equador da esfera como geodésicas (ver figura 7.4).

## 16. Algo mais: Geodésicas via Geometria Diferencial e Física

- (a) **Equilíbrio de um fio elástico sobre uma superfície:** imagine um fio elástico colocado sobre uma superfície e fixado em dois pontos. Ao adquirir a forma do caminho mais curto entre estes pontos, este fio se põe em equilíbrio e este equilíbrio é estável (isto é, se o tirarmos desta posição, alargamos este fio, e o mesmo tenderá a reduzir-se, tomando novamente a posição inicial). É possível obter o seguinte resultado: para que um fio elástico sobre uma superfície esteja em equilíbrio é necessário que em qualquer ponto deste fio a normal principal coincida com a normal à superfície [31, p.56]. Podemos então dar uma definição de geodésicas levando em consideração este resultado.

**Definição 7.1** Uma geodésica numa superfície é uma curva tal que em cada um de seus pontos, a normal principal coincide com a normal à superfície [31].

- i. Prove que uma curva numa superfície para a qual o plano osculador<sup>1</sup> passa, em cada um de seus pontos, pela normal à superfície neste ponto, é uma geodésica [31, p.56] [25, p.116].
  - ii. Mostre que um arco de grande círculo satisfaz à definição de geodésica dada acima [31, p.57].
  - iii. Encontre um método de obter os meridianos e o equador da esfera como geodésica. Sugestão: uma boa referência para isto é [34] que trata o problema via geometria diferencial.
- (b) **Princípio de Hertz:** Um ponto que se move em um plano por inércia descreve uma linha reta (o primeiro princípio de Newton).

---

<sup>1</sup>Seja  $\alpha(s)$  uma curva. O plano gerado pelos vetores  $\alpha'(s)$  (vetor tangente à curva) e  $\eta(s)$  (vetor normal à curva) é chamado de **plano osculador**.

Um ponto que se move por uma superfície sem ação de qualquer força externa, descreve uma geodésica.

- Mostre que, no caso da esfera, um ponto em sua superfície, se não sofre ação de qualquer força externa, se move por um grande círculo [31, p.62].

### 7.2.2 Geodésicas em superfícies planificáveis

Esta parte do projeto tem o objetivo de apresentar ou revisar o conceito de isometria, que pode ser muito útil no traçado de geodésicas. Este conceito pode simplificar consideravelmente o estudo das geodésicas de certas superfícies.

**Pré-requisitos:** isometria [34], equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 deste texto], condições necessárias de Legendre e de Jacobi [capítulo 3 deste texto], minimização de funções convexas [capítulo 5 deste texto].

1. Dê a definição de isometria.
2. Demonstre que se  $S$  e  $S'$  são *superfícies regulares*,  $N : S \rightarrow S'$  é uma isometria e  $\alpha$  é uma geodésica em  $S$ , então  $N(\alpha)$  é uma geodésica em  $N(S) = S'$ . Sugestão: consulte [6].
3. Considere um cilindro circular de raio 1. Usando as equações de Euler-Lagrange obtenha os candidatos a geodésicas: retas, hélices circulares e, em particular, círculos (veja figura 7.5). Veja que estes candidatos devem satisfazer as condições necessárias de Legendre e de Jacobi.
4. O cilindro e o plano são localmente isométricos. Construa uma isometria do cilindro no plano. Prove que, de fato, a expressão encontrada é uma isometria.

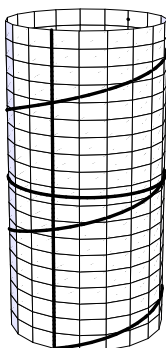


Figura 7.5: Curvas candidatas a geodésicas no cilindro.

5. Usando os resultados de 2 e 4 visualize as geodésicas no cilindro.
6. Obtenha, novamente, a hélice circular como geodésica do cilindro só que agora analisando, sob o ponto de vista da convexidade, o integrando a ser estudado. Sugestão: uma boa referência para este tópico é o [capítulo 5 deste texto].
7. O plano e o cone também são localmente isométricos. Construa uma isometria local entre eles e mostre que é, de fato, uma isometria.
8. Levando em consideração 2 e 7 visualize as geodésicas no cone.

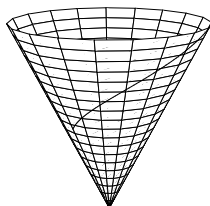


Figura 7.6: Trecho de uma geodésica no cone.

9. O problema a seguir foi retirado de [42]. Considere o cone circular mostrado na figura 7.7. Para encontrar curvas geodésicas da forma  $\theta = \theta(r)$  unindo pontos



$(r_1, \theta_1)$  e  $(r_2, \theta_2)$  assumimos, sem perda de generalidade, que  $r_1 > r_2 > 0$ ,  $\theta_1 = 0$  e  $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ .

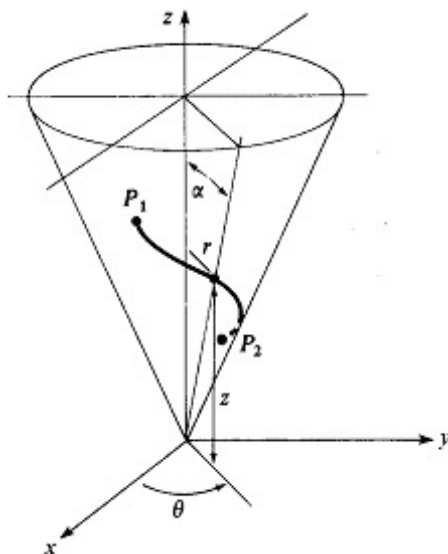


Figura 7.7: Ilustração extraída de [42, p. 86] mostrando o cone considerado no problema 9.

(a) Suponha que  $\theta \in C^1[r_1, r_2]$ . Derive a função comprimento de arco  $L(\theta)$ .

Ela é convexa?

(b) Quando  $\theta_2 \neq 0$ , prove que  $L(\theta)$  é minimizada unicamente em

$$D = \{\theta \in C^1[r_1, r_2] : \theta(0) = 0, \theta(r_2) = \theta_2\},$$

por  $\theta = b \sec^{-1}(r_1/c)$ , desde que a constante  $c$  possa ser escolhida tal que  $\theta(r_2) = \theta_2$ .

(c) O que acontece quando  $\theta_2 = 0$ ?

10. **Desdobramento: outras superfícies planificáveis** - Crie uma nova superfície planificável, faça um estudo análogo ao que foi feito no decorrer desta parte do projeto e inclua alguns aspectos novos. Boas sugestões de superfícies

planificáveis e algumas aplicações interessantes podem ser encontradas nos seguintes sites:

[www.javaview.de](http://www.javaview.de)

[www.ime.unicamp.br/~calculo/modulos/intcil](http://www.ime.unicamp.br/~calculo/modulos/intcil).

O primeiro site contém, dentre outros materiais, geodésicas em diversas superfícies poliedrais. Já o segundo site é um módulo animado sobre interseções de cilindros. A respeito de geodésicas em superfícies poliedrais uma outra boa referência é [31] que, além disso, trabalha também com a idéia mecânica de geodésica como linha de tensão mínima.

### 7.2.3 Geodésicas em superfícies de revolução mais gerais

**Pré-requisitos:** equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 deste texto], parametrizações de superfícies de revoluções gerais [capítulo 1 deste texto], Relação de Clairaut [27], problemas isoperimétricos [capítulo 2 deste texto].

O objetivo desta seção é discutir um pouco sobre as geodésicas em superfícies de revolução mais gerais, analisar alguns resultados teóricos e algumas consequências interessantes.

1. Obtenha, via equações de Euler-Lagrange, as equações das geodésicas de uma superfície de revolução geral.
2. Escolha alguma superfície mais simples, como, por exemplo o cilindro, e tente visualizar, sob a ótica de 1 suas geodésicas. Isto é sempre possível? Quais as dificuldades encontradas? Compare-as com as observadas no item 9 da seção 7.2.1.

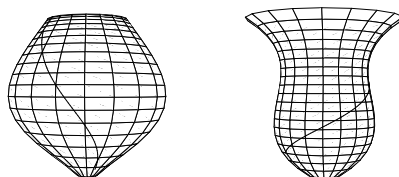


Figura 7.8: Geodésicas em superfícies de revolução mais gerais.

3. Considere superfícies de revolução parametrizadas por

$$x = f(v) \cos u, \quad y = f(v) \sin u, \quad z = g(v).$$

Discuta sob que condições os meridianos e os paralelos desta superfície de revolução são geodésicas. Sugestão: pesquise sobre plano de simetria e a relação deste com as geodésicas. Veja, por exemplo, [31, p.61].

4. Pesquise em livros de geometria diferencial o que diz a **Relação de Clairaut**. Demonstre esta relação a partir do que foi feito em 3. Sugestão: esta abordagem é apresentada na obra [6].
5. Usando a Relação de Clairaut mostre que qualquer geodésica de um parabolóide de revolução

$$z = x^2 + y^2$$

que não seja um meridiano, se auto intercepta um número infinito de vezes. Visualize isto usando o **Mathematica**. Sugestão: uma boa referência para este item é [6], já que o autor explora de maneira detalhada este problema.

## 6. Desdobramento - Problemas Isoperimétricos e Teorema de Clairaut

- (a) Consulte o capítulo 2 deste texto para formalizar a definição de Problema Isoperimétrico.

- (b) O problema isoperimétrico mais famoso é o Problema de Dido. Pesquise a história deste problema, escreva seu enunciado e resolva-o com base no Teorema de Lagrange, sem utilizar conceitos do cálculo variacional. Sugestão: pense como nos problemas de máximos e mínimos com restrições trabalhados nos exercícios preliminares.
- (c) Resolva agora o mesmo problema só que utilizando a equação de Euler-Lagrange e os conceitos abordados no capítulo 2 deste texto.
- (d) O problema das geodésicas também pode ser tratado como um problema isoperimétrico. Obtenha o arco de grande círculo como geodésica da esfera utilizando esta idéia. Sugestão: minimize o comprimento do arco ligando dois pontos na esfera levando em consideração que o arco minimizador deve estar na superfície  $G(x, y, z) = 0$ . Este problema é tratado na seção 3 do capítulo 2 deste texto.
- (e) Utilizando as idéias usadas no item 6d demonstre o seguinte teorema:  
**Teorema de Clairaut** *Em qualquer ponto de uma dada geodésica sobre uma superfície de revolução, o produto do raio do paralelo pelo seno do ângulo constituído pela geodésica e o meridiano é o mesmo* (veja figura 7.9). Este problema é abordado de maneira detalhada em [27].

### 7.3 Projeto sobre a braquistócrona

Este projeto tem por objetivo explorar de maneira detalhada o problema mais famoso do cálculo variacional que é a Braquistócrona. Abordaremos o problema da maneira tradicional como aparece nos livros de cálculo variacional e, em seguida, faremos duas outras abordagens mais realísticas, levando em consideração o atrito envolvido na situação. Estas abordagens mais reais se baseiam em [23] e [2].

O enunciado do problema da Braquistócrona é o seguinte:

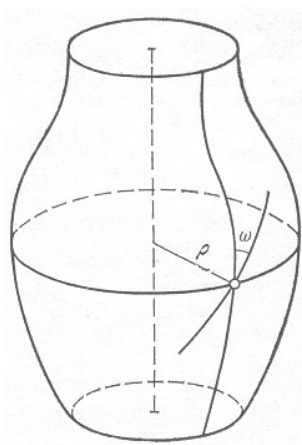


Figura 7.9: Ilustração extraída de [27, p. 139] mostrando o ângulo citado no enunciado do Teorema de Clairaut.

*Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos dados em um plano vertical. Encontrar a curva que uma partícula  $M$ , se movendo no caminho  $AMB$ , precisa descrever para sair de  $A$  e chegar em  $B$  no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade.*

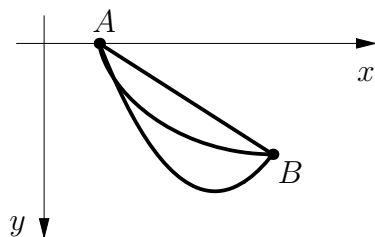


Figura 7.10: Ilustração mostrando três dos possíveis caminhos que a partícula  $M$  pode percorrer para ir de  $A$  até  $B$ .

### 7.3.1 Braquistócrona sem atrito

Nesta subseção trataremos do problema da Braquistócrona da maneira usual como aparece nos livros de cálculo variacional. Ainda não estaremos considerando o atrito e, portanto, trata-se de uma situação menos realista.

**Pré-requisitos:** equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 deste texto], Lei de Snell e Princípio do Menor Caminho da Luz [capítulo 1 deste texto], campos de extremais [capítulo 4 deste texto], condições suficientes para extremos [capítulo 4 deste texto].

1. Qual o resultado que você espera encontrar para este problema?
2. O problema da Braquistócrona é de fundamental importância na história do cálculo variacional. Faça uma pesquisa abordando a origem deste problema, os matemáticos que se empenharam em resolvê-lo, os métodos de resolução estudados e com isso ilustre a importância deste problema para o cálculo variacional.
3. Faça um modelo teórico do problema usando as leis da física e obtenha um funcional a ser minimizado.
4. Obtenha, via equação de Euler-Lagrange, um candidato a mínimo para o funcional encontrado em [3](#).
5. A solução encontrada em [4](#) concorda com o que você respondeu em [1](#)?
6. Escolha alguns pontos  $A$  e  $B$  e, com o auxílio do **Mathematica**, compare o tempo de descida pela reta, pela cicloide e por alguma outra curva que você escolher.
7. O problema da Braquistócrona também pode ser resolvido utilizando princípios de ótica, como a *lei de Snell* e o *princípio do menor caminho da luz*. Modele e resolva este problema sob este ponto de vista. Uma referência para esta abordagem é o capítulo 1 deste texto.
8. Mostre que a solução do problema da Braquistócrona, isto é a cicloide, está incluída em um campo de extremais. Sugestão: veja [\[42, pp.284-286\]](#).

9. Usando o que foi obtido no item 8, mostre que a cicloide satisfaz as condições suficientes de Legendre, e portanto, é, de fato, a solução do problema da Braquistócrona. Sugestão: uma boa referência para este item é o [capítulo 4 deste texto].
10. **Algo Mais: Propriedades da Cicloide.** A cicloide além da propriedade de ser Braquistócrona tem também outras propriedades interessantes, já mencionadas no capítulo 1 deste texto e que são encaminhadas a seguir.
- (a) Mostre que a área delimitada por um arco de cicloide e o eixo das abcissas é igual a três vezes a área do círculo que gerou a cicloide.
- (b) Existe alguma relação entre o comprimento da cicloide e o diâmetro do círculo que a gerou? Qual é essa relação? Demonstre-a.

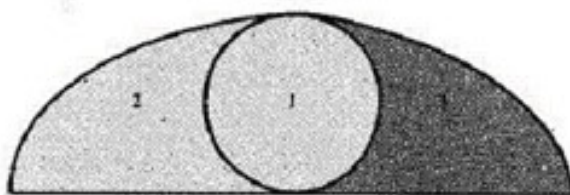


Figura 7.11: Ilustração extraída de [21, p. 170] mostrando um arco de cicloide, o círculo que o gerou e a área delimitada entre o arco de cicloide e o eixo das abcissas.

- (c) Tente fazer uma simulação no **Mathematica** mostrando que a cicloide é também *tautócrona*, isto é, se pusermos uma cicloide para cima, como na figura 7.12, e deixarmos cair duas bolinhas por ela abaixo, uma do ponto  $M$  e outra de  $N$  (veja figura 7.12), elas chegarão ao ponto mais baixo da cicloide, o ponto  $P$ , ao mesmo tempo. Cite uma possível aplicação desta propriedade.

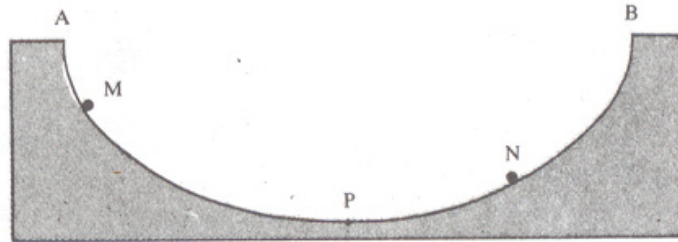


Figura 7.12: Ilustração extraída de [21, p. 164] mostrando uma bolinha partindo do ponto  $M$  e outra do ponto  $N$  na ciclóide.

### 7.3.2 Braquistócrona com atrito - situação 1

Nesta parte do projeto começaremos a considerar o atrito no Problema da Braquistócrona. Isto fará com que o problema fique mais próximo da situação real. Porém, esta é ainda uma abordagem simplificada, que foi inspirada em [23].

**Pré-requisitos:** equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 deste texto], problema da Braquistócrona com atrito [23].

1. Até agora o problema da Braquistócrona foi considerado sem atrito. Levando em consideração a abordagem presente em [23], inclua o atrito neste problema e o formule.
2. Utilizando a equação de Euler-Lagrange obtenha um candidato a solução para este problema.
3. Faça uma comparação, utilizando o **Mathematica**, entre as curvas soluções encontradas no item 2 e no caso do problema sem atrito.
4. Utilizando o **Mathematica** construa uma tabela comparando o tempo de descida pela curva solução com o tempo de descida por outras curvas. Explique detalhadamente seus procedimentos para o cálculo do tempo.



5. O que acontece com a curva solução à medida que o coeficiente de atrito aumenta? Visualize esta situação no **Mathematica**.
6. Este modelo leva em consideração todos os fatores acrescentados quando o atrito é envolvido no problema? Por que?

### 7.3.3 Braquistócrona com atrito - situação 2

Nesta subseção do projeto abordaremos o problema da Braquistócrona com atrito, só que agora de maneira mais realista, levando em consideração o *atrito de Coulomb* conforme a abordagem presente em [2].

**Pré-requisitos:** equação de Euler-Lagrange [capítulo 1 deste texto], problema da Braquistócrona com atrito de Coulomb [2].

1. Como o problema da Braquistócrona deveria ser modelado para descrever, de fato, a situação de maneira mais real? Qual resultado físico deve ser levado em consideração? Sugestão: referências para este item são a [seção 8 do capítulo 1 deste texto] e [2].
2. Produza sua versão da figura 7.13, obtendo e verificando os resultados necessários para construir essa figura. Bons apoios para este item são a [seção 8 do capítulo 1 deste texto] e [2].
3. O que deve ocorrer com os tempos de descida à medida que o coeficiente de atrito cresce? E com a curva solução?
4. Faça uma simulação no **Mathematica** para comparar o tempo entre as curvas soluções com diversos coeficientes de atrito e a cicloide sem atrito. Escolha outras duas curvas e compare também com as curvas soluções. Sugestão: para calcular os tempos tenha por base os cálculos feitos em [2] e observe que tudo

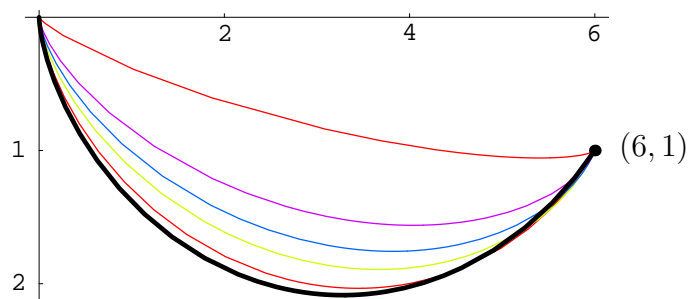


Figura 7.13: Ilustração mostrando uma comparação entre as curvas soluções da Braquistócrona com atrito a medida que o coeficiente de atrito aumenta. A curva que está abaixo de todas é a cicloide ( $\mu = 0$ ). Da cicloide para cima, os coeficientes de atrito aumentam.

está dependendo do  $\phi$  final, isto é, do  $\phi$  que faz com que a curva termine no ponto desejado.

5. Escreva um mini-artigo relatando os principais conceitos trabalhados e aprendidos no decorrer deste projeto.



# Capítulo 8

## Considerações finais

Neste trabalho o Cálculo Variacional foi abordado sob a perspectiva dos problemas clássicos. Tais problemas serviram de ponto de partida, sugerindo uma forma e uma ordem mais ou menos natural de abordar os elementos teóricos necessários para um tratamento analítico cuidadoso. Para complementar o panorama sobre o Cálculo Variacional e situá-lo na pesquisa atual em Matemática sugerimos a leitura do artigo [24], no qual o autor destaca a potencialidade do caminho aberto pelos problemas clássicos e quanto ainda há por ser explorado do ponto de vista teórico. Questões como a suavidade das soluções dos problemas variacionais, mesmo aqueles advindos da natureza, de caráter geométrico ou físico, bem como a própria existência de soluções revelaram-se intrigantes, desafiando pesquisadores a construir contra-exemplos não triviais para problemas ‘geometricamente razoáveis’. Este é o caso do problema proposto pelo matemático japonês Kakeya e do contra-exemplo de Besicovitch, de 1927 (cf. [24]). Vale ressaltar que o possível caráter analítico das soluções dos problemas regulares propicia a investigação em diversas linhas, como por exemplo na teoria das singularidades ou na teoria de Morse (Marston Morse, 1892–1977). Também não podemos deixar de mencionar os ingredientes indispensáveis da análise funcional no desenvolvimento de métodos para encontrar soluções generalizadas de problemas variacionais.

A elaboração de propostas de projetos envolvendo o conteúdo apresentado nesta

dissertação possibilitou novas vivências educativas, tanto para o orientando quanto para as orientadoras. Neste processo de revisita do texto e criação das propostas houve um amadurecimento e maior domínio do conteúdo trabalhado, ampliando a confiança para ir além. Como fonte inspiradora para outros projetos sugerimos o livro de Hildebrandt & Tromba [25]. Trata-se de um material valioso para o aprofundamento das idéias subjacentes ao Cálculo Variacional, e que transita dos problemas clássicos a tópicos de pesquisa atual, contextualizados historicamente.

Naturalmente, o caráter desafiador que permeia o trabalho com projetos fez-se presente no planejamento e na elaboração das propostas sugeridas nesta dissertação. A construção efetiva das geodésicas em superfícies de revolução, por exemplo, não é uma tarefa simples. Ao deparar com esta questão vivencia-se a lacuna entre os resultados de existência (e unicidade) e a exibição da solução. Para o problema da braquistócrona, por sua vez, recursos auxiliares, como estimativa gráfica da solução de sistemas não lineares via interseção de curvas de nível convenientes, seguida de um método numérico para refinar tal solução, podem ser bastante úteis para o estabelecimento das constantes determinantes e específicas das curvas a serem traçadas e cujo tempo de percurso se deseja calcular.

Ao propiciar a descoberta, a metodologia de ensino com projetos integrada com a ferramenta computacional favorece a produção de conhecimento pelos envolvidos. O material disponível em <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambienteensino/mostra>, por exemplo, registra uma experiência vivida pela equipe do Cálculo com Aplicações no segundo semestre de 1999. Gostaríamos que as propostas sugeridas neste trabalho inspirassem outras iniciativas nesta linha, com integração dos participantes e compartilhamento de vivências e saberes.

# Bibliografia

- [1] F.F. ARAGON, *Cálculo Variacional e Aplicações*, Tese de Mestrado, Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, UNICAMP, Campinas, Brasil, 1980.
- [2] N. ASHBY, W. E. BRITTIN, W. F. LOVE & W. WYSS, Brachistochrone With Coulomb Friction, *American Journal of Physics*, Vol. 43, No. 10, (October 1975), 902-905.
- [3] G.A. BLISS, *Calculus of Variations*, The Mathematical Association of America, Illinois, 1925.
- [4] J. P. BOUTINET, *Antropologia do Projecto*, Lisboa: Instituto Piaget, 1990.
- [5] C. CARATHÉODORY, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, 3ed, Chelsea Publishing Company, New York, 1989.
- [6] M. P. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [7] M. P. DO CARMO, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [8] L. CESARI, *Optimization - Theory and Applications Problems with Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [9] E.A. CODDINGTON & N. LEVINSON *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

- [10] S. COSTA & M. A. GROU, Ensino de cálculo - uma questão de envolvimento. Relatório Técnico 06, Campinas, Unicamp, 1992, 11 pág.
- [11] S. COSTA & M. A. GROU, La enseñanza del cálculo - una cuestión de involucramiento, *Revista Educación Matemática*, 7 (1) pp.100-107, 1995.
- [12] S. COSTA, M. A. GROU & V. L. X. FIGUEIREDO, Mechanical curves - a kinematic Greek look through the computer, *International Journal of Mathematical Education and Technology*, 30 (3) pp.459-468, 1999.
- [13] R. COURANT & H. ROBBINS, *What is Mathematics ?*, 4ed, Oxford University Press, New York, 1947.
- [14] R. COURANT & F. JOHN, *Introduction to Calculus and Analysis*, Volume Two, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [15] J. DEWEY, *Democracy and Education*, New York: Mac Millan, 1916.
- [16] C. H. EDWARDS, JR & D. E. PENNEY, *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 3, Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1997.
- [17] H. EVES, *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp, Campinas SP, 1997.
- [18] V. L. X. FIGUEIREDO, M. P. MELLO & S. A. SANTOS, *Cálculo com Aplicações: Atividades Computacionais e Projetos*, em preparação, 2004.
- [19] V. L. X. FIGUEIREDO, M. P. MELLO & S. A. SANTOS, "Com a mão na cumbuca", XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia - COBENGE 2001, Trabalho completo em CD-Rom (7 pág.).
- [20] V. L. X. FIGUEIREDO & S. A. SANTOS, *Relato de Experiência - O Computador no Ensino de Cálculo: o problema do lixo na Unicamp e outras aplicações*, Zetetiké, v.5, n.7, p.111-128, 1997.

- [21] M. GUZMÁN, *Atividades Matemáticas*, Gradiva Publicações Ltda, Lisboa, 1990.
- [22] E. HAIRER & G. WANNER, *Analysis by its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1995.
- [23] L. HAWS & T. KISSER, Exploring the Brachistochrone Problem, *The American Mathematical Monthly*, 4 (1995) 328-336.
- [24] S. HILDEBRANDT, The Calculus of Variations Today, *The Mathematical Intelligencer*, 11 (4) pp.50-60, 1989.
- [25] S. HILDEBRANDT & A. TROMBA, *The parsimonious universe: shape and form in the natural world*, New York: Springer Verlag, 1996.
- [26] W. H. KILPATRICK, The project method, *Teachers College Bulletin*, pp.3-18, 1918.
- [27] M.L. KRASNOV, G.I. MAKARENKO & A.I. KISELIOV, *Cálculo Variacional*, Editora Mir, Moscou, 1984.
- [28] L. D. LANDAU & E. M. LIFSHITZ, *Course of Theoretical Physics: volume 1 mechanics*, Pergamon Press, Grã-Bretanha, 1976.
- [29] S. LANG, *Analysis I* Addison-Wesley, New York, 1968.
- [30] E. L. LIMA, *Curso de Análise vol.2*, Projeto Euclides, IMPA, 1999.
- [31] L. A. LIUSTÉRNİK, *Líneas más Cortas, Problemas de Variaciones*, Editora Mir, Moscou, 1979.
- [32] M. P. MELLO & S. A. SANTOS, *Mancha Negra: reflexões sobre um projeto no ensino de Cálculo*, Zetetiké, v.10, n.17/18, Jan/Dez. 2002.
- [33] G. POLYA, *Matemáticas y Razonamiento Plausible*, Editora Tecnos S.A., Madrid, 1966.



- [34] P. R. RODRIGUES, *Introdução às Curvas e Superfícies*, Editora da Universidade Federal Fluminense, Niterói - RJ, 2001.
- [35] M. A. G. RUGGIERO & V. L. R. LOPES, *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*, Makron Books do Brasil Editora Ltda, São Paulo, 1996.
- [36] H. SAGAN, *Introduction to the Calculus of Variations*, McGraw-Hill Book Company, EUA, 1969.
- [37] A. J. SOUZA JR., Trabalho com projetos: saberes docentes em movimento. In: G. A. Cicillini & S. V. Nogueira (orgs.) *Educação Escolar: Políticas, saberes e práticas pedagógicas*, Uberlândia: EDUFU, 2002, pp.117-136.
- [38] J. STILLWELL, *Mathematics and its History*, Springer, New York, 1989.
- [39] D. J. STRUIK, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, New York, 1961.
- [40] K. R. SYMON, *Mecânica*, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1996.
- [41] V.M. TIKHOMIROV, *Stories about Maxima and Minima*, American Mathematical Society, Mathematical Association of America, 1990.
- [42] J.L. TROUTMAN, *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1983.
- [43] VIRGÍLIO - tradução Manuel Odorico Mendes, *Eneida*, Atena Editora, São Paulo, 1956.
- [44] F.Y.M. WAN, *Introduction to the Calculus of Variations and its Applications*, Chapman & Hall, EUA, 1995.

- [45] R. WEINSTOCK, *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering*, Dover Publications, New York, 1974.
- [46] C. WEXLER, *Analytic Geometry: a Vector Approach*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1961.