UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

PROCESSOS COGNITIVOS ENVOLVIDOS NA CONSTRUÇÃO DE ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

KARINA PEREZ GUIMARÃES

FEVEREIRO
2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

PROCESSOS COGNITIVOS ENVOLVIDOS NA CONSTRUÇÃO DE ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Autor: KARINA PEREZ GUIMARÃES
Orientador: ROSELY PALERMO BRENELLI

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida por KARINA PEREZ GUIMARÃES e aprovada pela Comissão Julgadora.
Data: 19/02/2004

Assinatura:..
Orientador

COMISSÃO JULGADORA:

____

____

____

____

2004

“Um pai - ainda que o mais pobre – tem sempre uma riqueza para deixar ao filho: o exemplo.”
(COELHO NETO)

Para Morvan e Isabel, pais queridos e exemplos de vida;
Érika e Cláudia, irmãs de todas as horas...

Para todas as crianças do nosso Brasil

FOI UM MOMENTO

Fernando Pessoa

Foi um momento
O em que pousaste
Sobre o meu braço,
Num movimento
Mais de cansaço
Que pensamento,
A tua mão
E a retiraste.
Senti ou não?

Não sei. Mas lembro
E sinto ainda
Qualque memória
Fixa e corpórea
Onde pousaste
A mão que teve
Qualquer sentido
Incomprendido,
Mas tão de leve!...

Tudo isto é nada,
Mas numa estrada
Como é a vida
Há muita coisa
Incompreendida...

Sei eu se quando
A tua mão
Senti pousando
Sôbre o meu braço,
E um pouco, um pouco,
No coração,
Não houve um ritmo
Nôvo no espaço?

Como se tu,
Sem o querer,
Em mim tocasses
Para dizer
Qualquer mistério,
Súbito e etéreo,
Que nem soubesses
Que tinha ser.

Assim a brisa
Nos ramos diz
Sem o saber
Uma imprecisa
Coisa feliz.

Não foi um momento, mas muitos momentos em que você não somente me orientou nas pesquisas, mas segurou em minha mão e me fez criar diferentes possibilidades de resolver as situações-problema propostas pela vida e o mais importante de tudo, me fez ter certeza de que escolhi o caminho certo: o ensino e a pesquisa em Educação.

Foram muitos, inúmeros, infinitos, etéreos momentos de aprendizagem e tenho certeza de que serão momentos para a vida toda...

Minha mais profunda admiração, carinho e meu imensurável agradecimento por ter tido a oportunidade de fazer Pós-Graduação sob sua orientação.

Obrigada pelo seu exemplo de educadora, querida ***Professora Doutora Rosely Palermo Brenelli.***

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho, meu carinho e meu sincero agradecimento a todas elas, em especial:

À querida ***Profa Dra. Rosely Palermo Brenelli,*** *pela sua imensurável dedicação, que com todo rigor científico me acompanhou durante todos esses anos com muito carinho, amizade e serenidade.*

À minha família, em especial aos meus pais, ***Morvan e Isabel,*** *às minhas irmãs,* ***Érika e Cláudia,*** *e à tia* ***Joana,*** *que sempre entenderam, cada um a sua maneira, minhas ausências e me incentivaram durante toda a realização deste estudo.*

Às professoras ***Dra. Orly Zucatto Mantovani de Assis*** *e* ***Dra. Márcia Regina F. de Brito,*** *pelas valiosas contribuições e sugestões ao trabalho no Exame de Qualificação.*

Às professoras ***Dra. Maria Lúcia Moro*** *e* ***Dra. Shiderlene Vieira de Almeida Lopes*** *pelo acolhimento carinhoso em Curitiba durante a visita de G. Vergnaud ao Brasil.*

A todos os ***graduandos e professores do Curso de Pedagogia e à direção da Faculdade Integrada de Mirassol (FAIMI)****, que entenderam minhas ausências e sempre colaboraram, cada um a sua maneira e fazendo o que estava ao alcance, para que eu pudesse desenvolver meus estudos de doutorado.*

Às ***crianças muito especiais, aos professores, funcionários, coordenadores e diretora da Escola Municipal Prof. Darcy Amâncio (Mirassol-SP)*** *pela participação na pesquisa e por terem me recebido tão carinhosamente, procurando garantir que os objetivos do trabalho pudessem ser atingidos.*

*Aos **funcionários da Pós-graduação da Faculdade de Educação da UNICAMP**, pela responsabilidade, atenção e carinho dedicados a mim neste período.*

*São tantos amigos que ficaria difícil um agradecimento para cada um, mas meu profundo carinho e obrigada de coração pelas diferentes e valiosas contribuições dos amigos **Ana Rosa, Fernando, Viviane, Érica, Marió, Lília, Adriana, Tânia, Lucimara, Neide, Gisela, Jean, Ricardo, Gabriela, Catarina, Alessandra, Carlos Eduardo, Luiz Antonio e Maria Aparecida.***

*Às grandes companheiras de ensino e pesquisa que muito me incentivaram e me acompanharam bem de perto na construção deste trabalho. Minha alma se alegra por poder compartilhar tão belas amizades: **Laura Lee Stochmanski, Cristiane Miziara Mussi, Fabiana Correia da Silva, Dras. Moema Cotrim Saes e Eliane Giachetto Saravali.***

*À grande companheira idealista, amiga sincera de todas as horas, **Tânia de Moura Paschoal** que, com sua paciência especial, sua compreensão incondicional, sua dedicação e alegria, não só me incentivou, como também me pegou no colo todas as vezes em que pensei em desistir.*

*A **Deus**, pela sua presença fiel, iluminando meus caminhos.*


Quero ser criança até o final: a criança é a fase criadora por excelência.
Jean Piaget

RESUMO

O objetivo central do presente estudo voltou-se para as relações existentes entre os níveis de construção da noção de multiplicação e os níveis de generalização e como estes intervêm no desempenho dos sujeitos em situações que envolvem resolução de problemas de estrutura multiplicativa antes e após serem submetidos a situações lúdicas com o jogo de argolas. A fundamentação teórica pautou-se na Epistemologia Genética de Jean Piaget, destacando os processos cognitivos envolvidos na construção do conhecimento matemático. A amostra constitui-se de 30 sujeitos, com idades entre 8 e 11 anos, de terceira e quarta séries do Ensino Fundamental, os quais foram selecionados a partir da Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa, sendo 10 crianças de cada nível de construção da noção de multiplicação. Também foram aplicadas a Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes, a Prova de Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa inspirados em Vergnaud (em duas fases: antes e após serem submetidos a situações lúdicas com o jogo de argolas) e as situações lúdicas com o jogo de argolas. A análise estatística dos resultados indicou que existe uma associação significativa entre os níveis de construção da noção de multiplicação apresentados pelos sujeitos (p-valor < 0,0001). Em relação ao desempenho dos sujeitos na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, pode-se afirmar que o percentual de acertos foi maior na Fase 2 (após situações lúdicas) para os sujeitos de níveis mais elevados de construção da noção de multiplicação e de generalização. Os resultados nos mostram que, para estar de posse da construção da noção de multiplicação (Nível III), é preciso o Nível II de generalização. As situações lúdicas, via jogo de argolas, nos permitem afirmar que as mesmas apresentaram situações diferenciadas das escolares envolvendo estruturas multiplicativas e favoreceram a melhora do desempenho, principalmente nos sujeitos de níveis mais elevados dos processos cognitivos envolvidos na construção das estruturas multiplicativas.

ABSTRACT

The main objective of the present study focused on already existent relations between the levels of construction of the notion of multiplication and the levels of generalization. It demonstrated how the two intervene in the performance of the subjects in situations involving multiplicative problem solving before and after being subjected to ludic situations with the ring game. Research was based on the Genetic Epistemology of Jean Piaget, emphasizing the cognitive processes involved in the construction of mathematical knowledge. The sample for the study was made up of thirty subjects between the ages of 8 and 11 from the third and fourth grades of elementary school. They were selected based on the Test of Multiplication and Multiplicative Associativity, being 10 children from each level of construction of the multiplication notion. Other tests were also given such as the Test of Generalization that Conducts to the Set of the Parts, the Structural Multiplicative Problem Solving Test inspired by Vergnaud (in two phases: before and after being subjected to ludic situations with the ring game) and ludic situations with the ring game. A statistical analysis of the results indicated that a significant association exists between the construction levels of the multiplicative notion presented by the subjects (p-value < 0.0001). In relation to the performance of the subjects in the multiplicative structure of problem solving, one can confirm that the percentage of correct answers was higher in Phase 2 (after ludic situations) for the subjects with higher levels of construction of the notion of multiplication and generalization. The results show us that to be at Level three in the construction of the notion of multiplication, one needs to be at Level two in generalization. The ludic situations through ring games allow us to confirm that they presented differentiated situations for the students involving multiplicative structures and favored the improvement in performance, mainly in the subjects with higher levels of congnitive processes involved in the construction of multiplicative structures.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS


Todo jardim começa com um sonho de amor, antes que qualquer árvore seja plantada, ou qualquer lago seja construído, é preciso que as árvores e os lagos tenham nascido dentro da alma. Quem não tem jardins por dentro, não planta jardins por fora. E nem passeia neles...
Rubem Alves

INTRODUÇÃO

Em meio a muitas outras questões que apresentam problemas no sistema educacional brasileiro, a Educação Matemática tem sido alvo de inúmeras pesquisas e discussões, nas quais se tem buscado reverter este quadro, a grande dificuldade em ensinar e aprender Matemática na escola.

A Matemática vem sendo apontada como uma das disciplinas que concentra grande número de dificuldades apresentadas pelas crianças em fase escolar, como pode ser visto em: Brenelli (1986), (1993), (1996); Carraher (1983); Kamii et al (1990), (1992), (1993) dentre outras.

Frente a este quadro a necessidade de repensar o ensino da Matemática emerge como fator fundamental para o sucesso escolar. Muitos estudos apresentam propostas interessantes que poderiam auxiliar a reverter esta situação, destacando-se as pesquisas fundamentadas na epistemologia genética de Jean Piaget que explica a construção gradual das estruturas lógico-matemáticas.

Convém destacar que o ensino não foi objeto de estudo das pesquisas de Jean Piaget, embora o autor se refira por vezes à Educação em alguns de seus escritos e reconheça a importância dos seus trabalhos à Educação: "Ainda que os nossos trabalhos não tenham nenhuma intenção pedagógica, parece difícil deixar de salientar o fato de que o conhecimento das reações escolares [...] possa ser de alguma utilidade para os educadores" (PIAGET, 1995, p.7).

Piaget (1998) critica e chama a atenção para o ensino da Matemática baseado na transmissão e verbalismo:

> *o triste paradoxo que nos apresenta o excesso de ensaios educativos contemporâneos é querer ensinar matemática moderna com métodos na verdade arcaicos, ou seja, essencialmente verbais e fundados exclusivamente na transmissão mais do que na reinvenção ou na redescoberta pelo aluno* (p.221).

As dificuldades enfrentadas pelos alunos em Matemática, muitas vezes, podem estar relacionadas a questões de ordem metodológica. Piaget (1971) salienta que:

chega-se por vezes a considerar a compreensão da matemática elementar com o indício de uma aptidão especial, dessa "bossa" para a Matemática cuja presença ou ausência se presumem possam então explicar os sucessos e os fracassos sem que se procure investigar se estes últimos não poderiam talvez decorrer do próprio método clássico do ensino (p.63).

Uma das possibilidades à disposição do educador pode ser encontrada nos jogos de regras. Considerados um meio eficiente, pois além de favorecer a construção do pensamento, possibilitam ao educador intervir, maximizando a aprendizagem dos alunos. Brenelli (1999) acredita que:

[como] as crianças muitas vezes apresentam resistências às atividades, o jogo pode ser utilizado como meio de vencê-las, porque nele a motivação e o interesse são intrínsecos. Entretanto, é necessário que o educador conheça e saiba aproveitar as oportunidades que um contexto lúdico tem (p.71).

Diante disso, parece ser pertinente a proposta de trabalho que privilegie o sentido da Matemática para as crianças, desafie seu raciocínio e facilite a aprendizagem, pois como afirmou Emerique (1999):

se os professores utilizassem o jogo como atividade voluntária, à qual não se pode obrigar ninguém e considerassem o lúdico como um recurso associado à motivação, talvez o exercício ou a tarefa se tornassem mais desafiantes, provocadores de curiosidade, e o dever de casa fosse percebido como um prazer de casa, permitindo maior envolvimento e compromisso com o desafio do conhecimento da realidade, de si mesmo e do outro, facilitando o aprender a aprender (p. 190).

.

Em sua dissertação de Mestrado, Guimarães (1998) buscou verificar em que medida uma intervenção pedagógica, via jogos de regras, poderia ser favorável à construção da noção de multiplicação. Os sujeitos foram 17 alunos de terceira série do ensino fundamental de uma escola cooperativa do interior de São Paulo. No pré e no pós-teste foram utilizadas as provas de abstração reflexiva "Construção de Múltiplos Comuns" (PIAGET et al., 1995) e as relativas à construção da multiplicação: "Multiplicação e Divisão Aritméticas" (GRANELL, 1983). O pré-teste constou também de uma prova de problemas e operações, usada com a finalidade de verificar se os conteúdos escolares eram conhecidos pelos sujeitos. Após a intervenção pedagógica realizada com os jogos "Argolas" e "Pega-Varetas", para os quais foram criadas situações-problema que envolviam multiplicação, a autora concluiu que a intervenção favoreceu a construção da noção de multiplicação e a evolução dos níveis de abstração reflexiva dos sujeitos na prova pesquisada.

Como se nota, a discussão a respeito da Educação Matemática é constante e, a esse respeito, o presente estudo procura contribuir a esse debate, principalmente no que concerne aos processos cognitivos envolvidos na construção das estruturas multiplicativas.

O objetivo central do presente estudo voltou-se para as relações existentes entre os níveis de construção da noção de multiplicação (PIAGET et al., 1986) e os níveis de generalização (PIAGET et al., 1984), e como estes intervêm no desempenho dos sujeitos em situações que envolvem resolução de problemas de estrutura multiplicativa, antes e após serem submetidos à aplicação das atividades lúdicas com o jogo de argolas. O propósito de se usar a situação de jogo é que esta oportunizaria às crianças a vivência de uma situação diferenciada da escolar, para poderem pensar em relações multiplicativas.

A fundamentação teórica pautou-se na Epistemologia Genética de Jean Piaget, cujo pressuposto central é de que o conhecimento se constrói a partir das trocas do sujeito com o meio. Frente a perturbações ou conflitos, o sujeito tende a reagir por meio e regulações contínuas, reorganizando suas estruturas cognitivas anteriores.

Além da teoria da equilibração proposta por Piaget, foram abordados, no presente estudo, os mecanismos de abstração reflexiva e generalização responsáveis pela construção do conhecimento lógico-matemático que constituem processos complementares que explicam a criação e extensão de novas formas e novos conteúdos.

Piaget et al. (1986) ressaltam a importância das estruturas multiplicativas, destacando a existência de quantificações implícitas em um maior número que na adição. Por meio dos processos de equilibração majorante, abstração reflexiva e generalização construtiva, pode-se inferir a construção das estruturas multiplicativas a partir das estruturas aditivas, uma vez que a reconstrução em um novo patamar superior ao anterior, construindo novas formas a partir das já existentes, é dada graças aos mecanismos de abstração reflexiva e generalização construtiva.

Nas situações-problema envolvidas nos jogos de regras, estes aspectos se encontram inter-relacionados, ocorrendo simultaneamente. A equilibração ocorre quando o sujeito, frente à situação-problema desencadeada pelo desafio do jogo, necessita criar estratégias eficazes orientadas ao êxito. A abstração reflexiva, mecanismo que, no processo geral de equilibração, é responsável pela elaboração de novas formas em relação aos conteúdos, é favorecida nas situações de jogos, possibilitando aos sujeitos a criação de novas estratégias a partir das anteriores não-eficazes para aquele momento. A generalização também está implicitamente ligada às situações de jogo, na medida em que as estratégias construídas são aplicadas em diferentes situações e também reelaboradas em outras. Tem-se, assim, um processo geral de equilibração permeando a atividade lúdica, com seus componentes indissociáveis: abstração reflexiva e generalização. Compreende-se a presença das diferentes modalidades de abstração reflexiva, empírica, pseudo-empírica e refletida e acompanhadas pelas formas de generalização extensiva e construtiva.

Em relação à Educação Matemática, área de interesse deste estudo, Piaget (1998) valoriza o papel da ação do sujeito para se chegar ao pensamento representativo, destacando o papel da abstração reflexiva neste processo:

> *a construção da matemática procede por abstrações reflexivas (no duplo sentido de uma projeção sobre novos planos e de uma reconstrução contínua precedendo as novas construções), e é deste processo fundamental que um número grande demais de ensaios educacionais apressados pretendem se abster, esquecendo que toda abstração procede a partir de estruturas mais concretas* (p.221).

Além da fundamentação teórica que sustenta nosso estudo, foi desenvolvida uma revisão da literatura, no que tange à Educação Matemática, em especial a construção da noção de multiplicação, e tantos autores que destacaram o papel do jogo de regras nesse contexto.

Em continuidade é apresentado o delineamento da pesquisa, os objetivos e a proposição do problema. A parte metodológica também é abordada, destacando as atividades realizadas na pesquisa a partir do referencial teórico piagetiano.

Para o estudo da generalização escolheu-se um experimento de Piaget et al. (1984) a respeito da Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes. O experimento engloba duas situações. Na situação I, o problema consiste em escolher figuras (entre quadrados e círculos, vermelhos e verdes, grandes e pequenos) como queira, desde que haja tantos quadrados como grandes. A situação II consiste em encontrar a figura que seja o contrário daquela apresentada pelo experimentador.

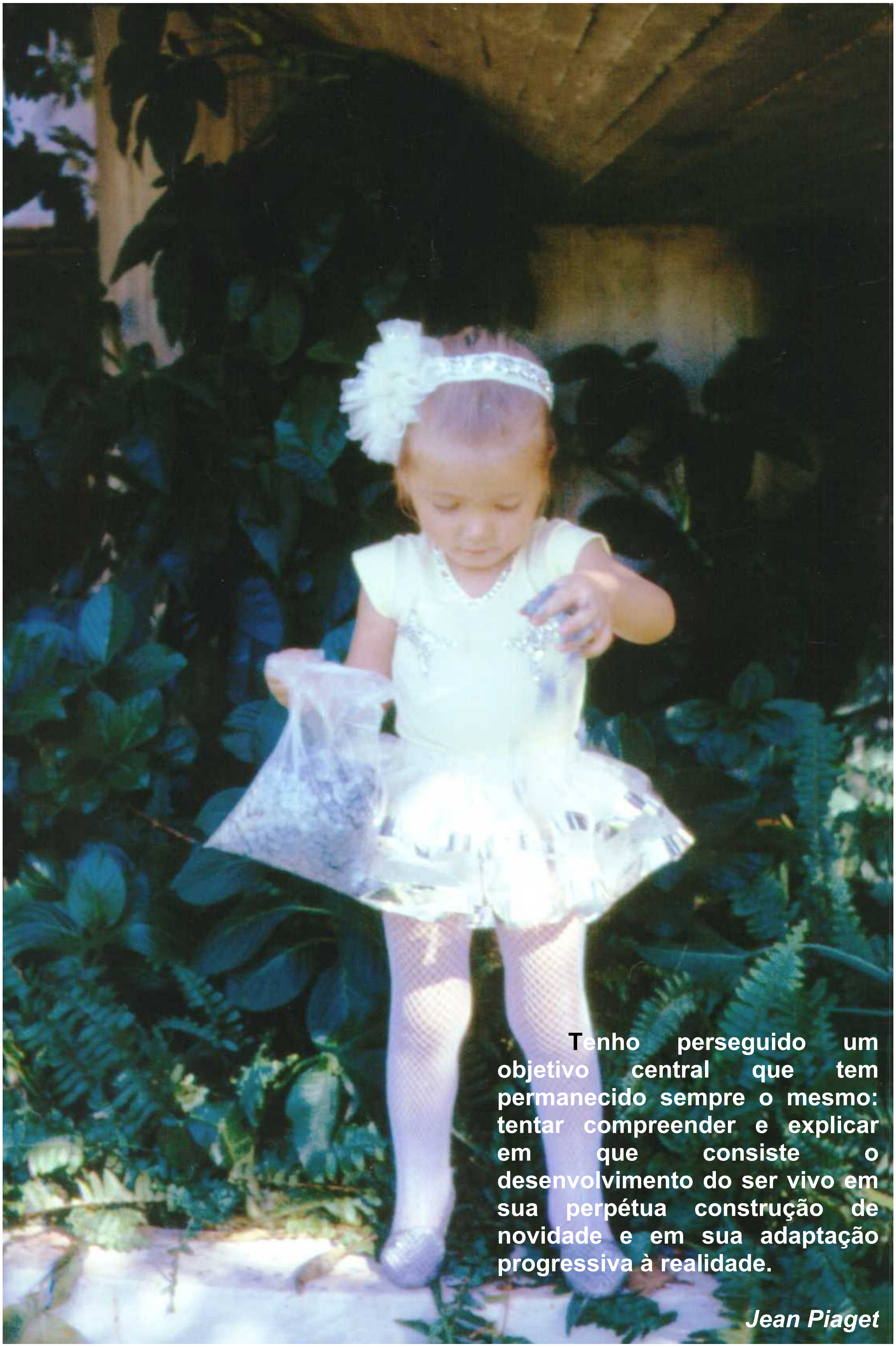
A construção da multiplicação foi verificada por meio da Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa (PIAGET et al., 1986). A prova engloba quatro situações que envolvem: multiplicação, associatividade, associatividade comutativa e repetição de correspondência injetivas. Em todas as situações, o sujeito preparará refeições para um animal a partir dos dados de base e especificidade de cada situação apontada pela experimentadora.

O desempenho dos sujeitos na resolução de problemas de estrutura multiplicativa do tipo isomorfismo de medidas foi verificado por meio de prova escrita, contendo problemas baseados nos estudos de Vergnaud (1991).

As atividades lúdicas, via jogo de argolas, objetivaram propor aos sujeitos uma situação diferenciada que envolvesse estruturas multiplicativas, que destacasse a correspondência de um para muitos, a correspondência de muitos para muitos, as operações aritméticas, as relações multiplicativas e noções do processo inverso (divisão). Três aspectos foram considerados nessas situações: a ação de jogar, a representação escrita e a explicação oral dos sujeitos.

A partir dos dados coletados, apresentamos a análise dos resultados, a análise dos protocolos dos sujeitos nas provas de construção da noção de multiplicação e generalização, para ilustrar os níveis encontrados nessas provas, e uma breve análise das situações lúdicas e da resolução dos problemas de estrutura multiplicativa.

O último capítulo traz a discussão dos resultados juntamente com as considerações finais e as implicações pedagógicas do presente estudo que julgamos interessantes, uma vez que “transformar os princípios da teoria piagetiana em ações educativas e pedagógicas é um desafio muito grande para muitos educadores” (CAMARGO DE ASSIS e MANTOVANI DE ASSIS, 2002, p.7).



Tenho perseguido um objetivo central que tem permanecido sempre o mesmo: tentar compreender e explicar em que consiste o desenvolvimento do ser vivo em sua perpétua construção de novidade e em sua adaptação progressiva à realidade.

Jean Piaget

1. PROCESSOS COGNITIVOS BÁSICOS ENVOLVIDOS NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

A teoria epistemológica de Jean Piaget tem se destacado no âmbito educacional; entretanto não foi essa a intenção do autor, ainda que tenha reconhecido a importância e a valiosa contribuição de seus estudos aos processos de ensino e de aprendizagem.

Esta repercussão deve-se ao fato da preocupação do autor com a construção do conhecimento, privilegiando a relação entre sujeito e conhecimento.

A fim de explicar esta relação, o autor remete-se à gênese do conhecimento, situando-a na ação do sujeito com o meio, desde o seu nascimento até a ação conceitualizada. Neste sentido, Piaget (1976) propõe a construção do conhecimento como resultado das interações do sujeito com o objeto de conhecimento.

Trata-se, portanto, de um novo paradigma, contestando os anteriores que se limitavam a

> *indagar se toda a informação cognitiva emana dos objetos e vem de fora informar o sujeito como o supunha o empirismo tradicional, ou se, pelo contrário, o sujeito está desde o início munido de estruturas endógenas que ele imporia aos objetos, conforme as diversas variedades de apriorismo ou de inatismo* (PIAGET, 1971, p.13).

O desenvolvimento da criança é concebido por Piaget (1976) a partir do sistema vivo, que é aberto e fechado simultaneamente. Entende-se como sistema aberto no sentido das trocas com o meio e fechado na medida em que constitui ciclos. Estes sistemas tendem ao equilíbrio, e esta busca está permeada por desequilíbrios e reequilibrações.

Sendo a equilibração o processo central e fundamental na construção do conhecimento, o estudo a que nos propomos realizar estará apoiado na abstração reflexiva e na generalização.

Por um lado, abordaremos a importância da abstração reflexiva para o processo de construção do conhecimento, uma vez que esta se constitui num dos aspectos do processo geral de equilibração e também num dos motores do desenvolvimento cognitivo (PIAGET, 1976).

Por outro lado, será focalizado também como a abstração reflexiva conduz a generalizações construtivas, numa perspectiva piagetiana, e suas relações com o conhecimento matemático. E finalmente, o papel do jogo de regras na construção do conhecimento, posto que o mesmo gera uma situação-problema que poderia favorecer processos cognitivos em crianças, desencadeando o processo de equilibração.

1.1 Processos Cognitivos na construção do conhecimento

Ao tratar do desenvolvimento intelectual, Piaget distingue quatro fatores imprescindíveis: a maturação interna, a experiência física, a transmissão social e a equilibração. Esta última é destacada pelo autor (*ibid*) como fator fundamental, responsável pelo equilíbrio entre os três outros fatores do desenvolvimento: “a equilibração sendo a compensação por reação do sujeito às perturbações exteriores ...” (p.31).

Dessa forma, passaremos a discorrer agora sobre os processos cognitivos responsáveis pela construção do conhecimento, destacando dentre eles a equilibração e seus mecanismos de abstração e generalização.

1.1.1 Equilibração

Ao tratar do desenvolvimento intelectual, Piaget (1976) determina a equilibração como um dos fatores responsáveis pelo mesmo.

A construção do conhecimento é explicada por Piaget (ibid) pelo processo de equilibração, que consiste na passagem de estados de menor equilíbrio para estados de maior equilíbrio, qualitativamente diferentes. O desencadeamento deste processo ocorre por meio dos desequilíbrios que provocarão reequilibrações, representando o progresso no desenvolvimento do conhecimento.

Os desequilíbrios podem ser resultantes de conflitos momentâneos ou podem ser inerentes à constituição dos objetos ou das ações do sujeito.

Pode-se identificar o otimismo do autor (Piaget, 1976), já que o sujeito busca se reequilibrar e superar o desequilíbrio, procurando, assim, uma equilibração majorante.

Neste sentido, o processo de equilibração, independente dos fins almejados pela ação e pelo pensamento, faz com que o sujeito busque novas formas de equilíbrio. Estas, por sua vez, são alcançadas provisoriamente, pois surgem novos problemas, possibilitando ao sujeito construir sobre as formas já existentes.

Deste modo, pode-se afirmar que a aprendizagem modifica a estrutura já existente, como ressaltou Lima (1984):

> *não se ensina nada, inteiramente, novo: toda 'aprendizagem' é a modificação de uma estrutura já existente e, por sua vez, modifica a forma de perceber a experiência. Raro é o mestre que indaga o que o aluno já sabe para, sobre esta subestrutura, propor a nova aprendizagem. Nada se aprende a partir da estaca zero! (p.35-6).*

Neste sentido, os desequilíbrios têm papel fundamental na medida em que provocam reequilibrações, fazendo com que o sujeito busque sempre uma equilibração majorante, a qual, por sua vez, tem caráter de construção e de maior coerência.

Piaget (1971) definiu o papel da experiência para a construção do conhecimento como estando relacionado ao desencadeamento do processo de equilibração, ao afirmar: "o papel da experiência não consiste, em uma primeira fase, senão em desmentir as previsões muito simples fundadas em operações de que dispunha o sujeito e o forçar a procurar previsões mais adequadas" (p.85).

A equilibração majorante resulta de regulações novas, mais ricas que as precedentes devido à abstração reflexiva. A cada nova realização surgem novas possibilidades inexistentes nos níveis precedentes.

O caráter construtivo do conhecimento fica, assim, evidenciado por Piaget (ibid), quando assevera que:

> *a construção de estruturas novas parece caracterizar um processo geral cujo poder seria constitutivo e não se reduziria a um método de acessibilidade: dos fracassos do reducionismo causal, no terreno das ciências do real, aos do reducionismo dedutivo quanto aos limites da formalização e às relações das*

estruturas superiores com as da lógica, assiste-se por toda parte a uma falência do ideal de dedução integral que implica a pré-formação, e isto graças a um construtivismo que aparece cada vez mais (p.107-8).

Como explica Bittencourt (1996), a posição epistemológica de Piaget (1971), tanto em relação ao conhecimento em geral quanto ao conhecimento matemático, é dialética, pois implica considerar os processos de desenvolvimento e de síntese:

a visão dialética implica a consideração dos processos de desenvolvimento, já bastante característicos do construtivismo, e de síntese, resultantes de negações e ultrapassagens, o que ocorre tanto em momentos de negação do conhecimento anterior, abundantes em matemática, quanto em momentos de construção por generalização, o que o autor considera uma extensão do processo dialético (p.78).

Piaget (1973) define a construção da Matemática como

um desenvolvimento endógeno, que procede por etapas, de tal natureza que as combinações que caracterizam qualquer uma delas sejam, por um lado, novas enquanto combinações e, por outro lado, só se exercem sobre elementos já dados na etapa precedente (p.298).

Por considerar a existência de uma relação de afinidade entre o desenvolvimento cognitivo e o desenvolvimento da Matemática, Piaget estudou as estruturas cognitivas do sujeito e as representações de três estruturas: algébricas, de ordem e topológicas.

A dinâmica dessas estruturas é explicada pelo grupo de transformações INRC, em que a coordenação das inversões, reciprocidade, correlações e transformações idênticas possibilita a construção de novos esquemas operatórios a partir dos 11-12 anos (PIAGET, 1980).

Para Piaget, os processos de equilibração majorante e seus mecanismos, abstração reflexiva e generalização construtiva, estão intrinsecamente relacionados ao processo de construção dos conhecimentos, especialmente no que diz respeito ao conhecimento matemático, área de interesse deste trabalho. Torna-se, portanto, necessário discorrer sobre estes processos.

O desenvolvimento cognitivo tem como propriedades as invariantes funcionais: os processos de organização e adaptação, presentes durante toda a vida. Estas propriedades consistem em funções independentes de conteúdo, pois se aplicam a todas as situações. A organização tem como função estruturar o sistema, possibilitando seu funcionamento, e a adaptação constitui o equilíbrio entre assimilação e acomodação.

Desse modo, entende-se que a assimilação consiste na integração do elemento novo a um esquema do sujeito. Já a acomodação engloba a necessidade de a assimilação considerar as particularidades dos elementos a assimilar, ou seja, é responsável pela modificação das estruturas pré-existentes para se ajustar ao que lhe é novo.

A atividade assimilativa possui quatro características comuns e presentes em todos os períodos de desenvolvimento: repetição, generalização, diferenciação e reciprocidade.

Para a teoria da equilibração, Piaget (1976) ressalta a importância de dois postulados. Quanto ao primeiro, afirma que: "todo esquema de assimilação tende a se alimentar, ou seja, incorporar os elementos que são exteriores e compatíveis com sua natureza (...)" (p.52). E quanto ao segundo postulado: "todo esquema de assimilação é obrigado a acomodar os elementos que assimila, ou seja, modificar-se de acordo com suas particularidades, sem perder a sua continuidade e os poderes de assimilação anteriores" (p.52).

A partir desses postulados, configuram-se três formas de equilibração: entre assimilação e acomodação; entre os subsistemas; e entre subsistemas e a totalidade que os engloba.

A equilibração entre assimilação e acomodação ocorre devido à interação inicial entre sujeito e objeto. São necessários não somente caracteres do objeto, mas também que o sujeito distinga os caracteres diferentes tendo a necessidade funcional das negações.

A segunda forma de equilibração assegura as interligações entre os subsistemas. Encontram-se os mesmos mecanismos, acrescentando a eles uma estrutura de intersecção que exige, por si própria, novas negações.

Na terceira forma ocorre o equilíbrio progressivo entre diferenciações e integrações, já que há uma integração do todo com as partes, cabendo à assimilação a função de integrar e à acomodação a de diferenciar.

Piaget (1976*)* afirma que as três formas de equilibração podem ocorrer espontânea e intuitivamente, por meio de tentativas sucessivas, eliminando os insucessos e retendo os êxitos.

Tratados até aqui os aspectos da equilibração, faz-se necessário destacar o papel e as causas dos desequilíbrios.

Os desequilíbrios, entendidos como as contradições que perturbam o sujeito, resultam da não correspondência entre afirmações e negações, e não de fatores internos ou externos.

Os desequilíbrios estão presentes em maior número nos estágios iniciais do desenvolvimento, devido à prevalência das afirmações sobre as negações. Nesses estágios, os aspectos positivos superam os negativos, pois os caracteres positivos são construídos a partir de observação direta, representam os dados imediatos e de fácil constatação. Assim, todas as formas de equilíbrio estão comprometidas com esta assimetria entre afirmações e negações.

A equilibração progressiva é, assim, indispensável ao desenvolvimento cognitivo e vai se aperfeiçoando a cada estágio em busca de um equilíbrio majorante. Pode-se evidenciar o importante papel das negações no processo de equilibração.

Para que os desequilíbrios possam ser superados e aconteça a equilibração majorante, ocorrem as regulações. Segundo Piaget (ibid): "a regulação ocorre quando a repetição A' de uma ação A é modificada pelos resultados desta, logo quando um efeito contrário dos resultados de A sobre seu novo desenvolvimento A'" (p.31). As regulações são, portanto, reações a perturbações. Para que elas ocorram, há dois processos: o proativo, que antecipa, e o retroativo, que encaminha para uma correção (feedback negativo) ou para um reforço (feedback positivo).

Embora as regulações sejam reações a perturbações, nem toda perturbação acarreta uma regulação. Isto pode ser observado em casos em que a perturbação provoca apenas uma repetição de ação, sem modificá-la, buscando ter mais êxito; ou quando o sujeito se interessa por um aspecto imprevisto da perturbação, trocando a direção de sua atividade.

Existem dois tipos de perturbações, segundo Piaget (1976): aquelas que se opõem às acomodações: resistência do objeto, obstáculos às assimilações recíprocas de esquemas ou de subsistemas; essas perturbações são as causas de insucessos ou erros, correspondendo às regulações que compreendem o feedback negativo. O segundo tipo de perturbação diz respeito às lacunas que deixam as necessidades insatisfeitas e ocorrem devido à insuficiente alimentação de um esquema; são fontes de desequilíbrios e correspondem às regulações que compreendem o feedback positivo.

Além disso, Piaget (ibid) conceitua dois tipos de regulações. As regulações automáticas presentes com maior freqüência no período sensório-motor, quando se trata de acomodações, fazendo com que haja pouca variação dos meios, e a não existência da tomada de consciência. Já as regulações ativas direcionam o sujeito a trocar de meios ou a fazer escolhas quando existirem outros, desencadeando a tomada de consciência, o que leva a representações ou conceituações das ações materiais.

Quanto à hierarquia, pode-se classificar as regulações em: regulações simples, regulações de regulações, auto-regulações. Quanto aos conteúdos temos: regulações de observáveis e de coordenações.

As regulações provocam as compensações, daí seu caráter construtivo. Como no caso da perturbação, nem toda regulação acarreta uma compensação. Piaget (1976) define compensação como "ação de sentido contrário a um efeito dado, que tende, portanto, para o anular ou neutralizar" (p.40).

As compensações que são provocadas pelas regulações por feedback negativo caracterizam-se por inversão (anulam a perturbação-negações completas) e por reciprocidade (diferenciação do esquema para acomodá-lo ao elemento perturbador-negações parciais).

Os processos de feedback positivo relacionam-se aos efeitos negativos e às suas compensações (regulações ativas). Nos casos em que a regulação não anula todas as perturbações ou não preenche as lacunas, surgem as "regulações das regulações" (papel de correção e reforço).

Como características das compensações reguladoras, pode-se citar: orientar-se em direção inversa ou recíproca da perturbação, quer para anulá-la (inversão), quer para neutralizá-la como perturbação (reciprocidade); compreender uma avaliação terminal dos seus êxitos ou insuficiências (caráter que está ligado com a própria fonte de regulações e às compensações, que tendem às conservações mediante transformações).

Dois modos podem explicar a equilibração majorante: as melhorias como resultantes do êxito das regulações compensadoras ou as novidades como resultantes do próprio mecanismo das regulações. Para assimilar e acomodar os elementos perturbadores é preciso uma extensão do esquema e, portanto, do sistema.

O equilíbrio é alcançado quando há correspondência exata entre afirmações e negações; logo, a construção das negações é necessária ao equilíbrio.

As estruturas das regulações compensadoras são responsáveis pela formação das negações, sendo que os feedbacks negativos anulam as perturbações ou as compensam por reciprocidade com as negações que comportam, e os feedbacks positivos compensam um "déficit", ou seja, uma "negação da negação".

Pode-se afirmar que a equilibração se volta para a compensação exata das negações e afirmações.

Convém ressaltar ainda que as noções de perturbação e compensação relacionam-se nos níveis em que se encontram. Portanto, o que pode ser perturbação em um nível, passa a ser variação externa em outro.

Piaget (1976) distingue três tipos de comportamentos referentes às modificações e compensações: as condutas α, β, e γ (alfa, beta e gama).

A conduta α ocorre no momento em que, perante um fato novo, o sujeito o ignora, o deforma ou o negligencia. Trata-se de condutas parcialmente compensadoras, sendo muito instável o equilíbrio e de campo restrito, há ausência de retroações e antecipações, o que ocasiona o predomínio das afirmações.

A conduta β supera a conduta α, mas continua parcialmente compensadora, possibilitando uma reorganização da estrutura e construções de negações parciais. Desta forma, esta conduta integra o elemento perturbador ao sistema, gerando um deslocamento do equilíbrio, sob múltiplas formas.

As variações possíveis são antecipadas na conduta γ, quando então a perturbação perde sua característica de "perturbação" e passa a ser uma variação do próprio sistema. A compensação completa desta conduta possibilita também um equilíbrio móvel e estável e uma correspondência entre afirmações e negações.

A equilibração cognitiva tem como ponto importante seu caráter de ultrapassagem, ou seja, não existe um ponto final, à medida que um conhecimento é alcançado, novos problemas surgem. Neste sentido, pode-se falar da necessidade de construção e ultrapassagem na busca de um equilíbrio cada vez melhor.

Piaget (1976) ilustra este caráter construtivo ao afirmar que o mesmo "consiste na elaboração de operações que incidem nas precedentes, de relações de regulações, de regulações de regulações etc., numa palavra, de formas que incidem nas formas anteriores e as englobam como conteúdo" (p.208).

Tal mecanismo, que permite ao sujeito reequilibrar-se por meio de uma reorganização, é a abstração reflexiva. Esta abstração é um dos processos por meio do qual o conhecimento se constrói, pois explica a passagem de um patamar a outro de desenvolvimento. Desta forma, como estamos tratando de processos cognitivos, passaremos a destacar agora a abstração reflexiva.

1.1.2 Abstração Reflexiva

Kesselring (1993), ao discutir a interação entre reflexão e abstração e tendo como referencial teórico a epistemologia genética de Piaget, define abstrair:

> *como isolar uma qualidade perceptível de um objeto ou isolar um aspecto dentro de um contexto. Quando abstraímos a tonalidade colorida de uma folha, retemos o seu verde individual. Para chegarmos ao conceito de 'verde' é necessário que demos um segundo passo: a generalização. O conceito de 'verde' representa toda uma classe de tonalidades de cor, que os mais diferentes objetos apresentam. Isolar e generalizar compõem, portanto, ambos os passos daquela abstração que leva à formação de conceitos empíricos (p.95).*

Existem dois tipos principais de abstrações: abstração empírica e abstração reflexiva, caracterizadas por Piaget et al. (1995). Estas abstrações encontram-se em todos os níveis de desenvolvimento, sendo as abstrações empíricas presentes em maior número nos primórdios do desenvolvimento, e as abstrações reflexivas predominantes nos estágios posteriores.

A abstração empírica retira as informações dos objetos ou das ações dos sujeitos sobre as características materiais dos objetos ou observáveis. Procedem de observáveis perceptíveis, escolhendo uns dados em detrimento de outros. No dizer do autor (ibid), este tipo de abstração*:* “se apóia sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da própria ação, tais como movimentos, empurrões etc.” (p.05).

Contudo, necessita de um instrumental para poder assimilar, o qual é construído anteriormente pelo sujeito, ou seja,

> *este tipo de abstração não poderia consistir em simples leituras, pois para abstrair a partir de um objeto qualquer propriedade como seu peso ou sua cor, é necessário utilizar de saída instrumento de assimilação (estabelecimento de relações, significações, etc.) oriundas de ‘esquemas’ [schèmes] sensório-motores ou conceptuais não fornecidos por este objeto, porém, construídos anteriormente pelo sujeito (PIAGET, ibid, p.05).*

Pode-se afirmar, assim, que, para ocorrer abstração empírica, é imprescindível a abstração reflexiva.

Oriunda da coordenação das ações que o sujeito exerce sobre os objetos, a abstração reflexiva diferencia-se da empírica pelo fato de centrar-se nas operações ou ações gerais do sujeito. Piaget (ibid) define este tipo de abstração como aquela que:

> *apóia-se sobre as formas e sobre todas as atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas etc.) para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas etc.) (p.06).*

Há dois aspectos inseparáveis envolvendo a abstração reflexiva. De um lado, o “reflexionamento”, como projeção (no sentido de espelhar) num patamar superior aquilo que foi tirado do patamar inferior. De outro lado, a “reflexão”, enquanto ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi transferido do inferior.

A abstração “pseudo-empírica” é vista como sendo um caso especial de abstração reflexiva, uma vez que “o sujeito age sobre os objetos, e estes objetos são modificados e enriquecidos, a leitura é feita em cima de observáveis variáveis” (PIAGET et al., 1995, p.274). Assim, para Piaget et al. (ibid):

> *quando um objeto é modificado pelas ações do sujeito e enriquecido por propriedades tiradas de suas coordenações (por exemplo, ao ordenar elementos de um conjunto), a abstração apoiada sobre tais propriedades é chamada 'pseudo-empírica' [pseudo-empirique] (p.274).*

No momento em que o sujeito consegue fazer coordenações, sem, no entanto, vê-las nos objetos, tem-se a abstração refletida. É, portanto, resultante de uma abstração reflexiva quando esta se torna consciente, independente do nível em que está.

Tanto a abstração empírica quanto a reflexiva, presentes em todos os níveis de desenvolvimento, caminham juntas, pois para o refinamento e objetividade da abstração empírica, é imprescindível a abstração reflexiva.

No período sensório-motor, a abstração empírica retira as informações dos objetos e das características materiais ou observáveis da ação e necessita, para que aconteça, de esquemas assimiladores. Fica para a abstração reflexiva retirar as informações das coordenações dos esquemas, responsabilizando-se pela elaboração dos quadros assimiladores.

Já no patamar superior de representação, são as abstrações pseudo-empíricas que apóiam a abstração reflexiva no engendramento de funções e operações. As reflexões, mais elementares no início, tornam-se cada vez maiores.

Piaget (ibid) afirma que o papel das abstrações pseudo-empíricas é fornecer "suporte e auxiliar as abstrações reflexionantes" (p.277), presentes desde os primórdios da representação e mais freqüentes no nível operatório-concreto, no qual o sujeito, "para efetuar uma composição operatória e para julgar seus resultados, tem necessidade de vê-las inseridas em objetos" (ibid, p.277).

Em relação à abstração refletida, por sua vez, pode-se afirmar que é mais freqüente no nível formal, embora também possa ocorrer em outros níveis. Neste caso, pode-se afirmar que a evolução das abstrações pseudo-empíricas e refletidas é "caracterizada por esta inversão de suas proporções, as primeiras, perdendo seu valor relativo (sem jamais, desaparecer, mesmo no homem de ciência), as segundas contrariamente, aumentando o seu (sem que, por isso, estejam ausentes nos níveis elementares)" (PIAGET, 1995, p.278).

Os reflexionamentos, no sentido de projeção, diferenciam-se conforme seu grau e natureza. Os patamares mais elementares dos reflexionamentos partem das ações sucessivas em direção a sua representação atual, isto é, do sensório-motor ao início da conceituação. Em um segundo patamar, as representações são reunidas num todo coordenado; trata-se da: “constituição (com ou sem narrativa) da seqüência das ações, do ponto de partida ao término” (PIAGET, ibid, p.275). O terceiro patamar corresponde ao das comparações, podendo ser reconstituída a ação como um todo e comparada a outras que podem ser análogas ou diferentes. Finalmente, no quarto patamar, encontram-se as reflexões sobre as reflexões caminhando para a meta-reflexão ou pensamento reflexivo.

A natureza dos reflexionamentos, inicialmente, consiste num “deslocamento dos observáveis em função de sua conceituação progressiva pela tomada de consciência, isto é, pela interiorização das ações” (PIAGET, ibid, p.276).

Patamares posteriores englobam, em sua maior parte, abstração como se fossem reflexão, já que a generalização possibilita o reflexionamento dos observáveis de patamares anteriores sobre os novos. Pode-se dizer, dessa forma, que existe uma diferença de grau e também qualitativa em todo novo patamar, ficando à união da reflexão e do reflexionamento não somente a responsabilidade da passagem de patamares, mas também a própria formação dos mesmos.

Trata-se, portanto, de um processo espiral que busca formas cada vez mais elaboradas, como afirmam Piaget et al. (ibid):

> *todo reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devido à reflexão. Há, assim, pois, uma alternância ininterrupta de reflexionamentos → reflexões → reflexionamentos; e (ou) de conteúdos → formas → conteúdos reelaborados → novas formas, etc., de domínios cada vez mais amplos, sem fim e, sobretudo, sem começo absoluto (p.277).*

Isto posto, é importante destacarmos agora os processos de abstração, generalização e suas relações com o conhecimento matemático.

1.1.3 Abstração e Generalização: Conhecimento Matemático

O desenvolvimento da abstração reflexiva engendra a formação de novas formas em relação aos conteúdos, o que pode originar a elaboração das estruturas lógico-matemáticas.

Ferreiro (2001) evidencia a origem do conhecimento matemático para Piaget quando afirma que:

> *a solução dada por Piaget à origem do conhecimento matemático é particularmente interessante: a experiência lógico-matemática não procederia por abstração das propriedades que a ação introduz nos objetos [...] Contudo, sem o objeto – que participa 'deixando-se fazer' – tampouco a experiência seria possível (p.137).*

As estruturas numéricas e aritméticas e a lógica são construídas por meio dos processos de abstração reflexiva. Uma vez que essas estruturas não são determinadas *a priori*, elas podem ser apreendidas por meio da interação do sujeito com o objeto de conhecimento.

Assim, segundo Prat,

> *abstrair o conteúdo da realidade empírica e expressá-la através da linguagem aritmética implica em organizar e categorizar mentalmente tal realidade, coordenando suas propriedades tanto qualitativas com quantitativas. Esta abstração supõe um longo processo de elaboração ao final do qual, a criança será capaz de agir real ou mentalmente com propriedades quantitativas, reconhecendo mas prescindindo das qualitativas. Será nesse momento que a utilização do sistema simbólico matemático adquirirá o valor comunicativo e representacional do conjunto de valores, relações e transformações que como tal pretende evocar (1996, p.21).*

Piaget e Inhelder (1975) pesquisaram a origem das estruturas fundamentais de classificação e seriação operatórias, sintetizando o conceito de número. Esta pesquisa resulta na obra *A gênese das estruturas lógicas elementares,* que com mais uma série de outras pesquisas completam a construção da Matemática estudada por Piaget e seus colaboradores.

Neste sentido, Bittencourt (1996) assinala:

> *partindo da hipótese de que as raízes dessas operações devem ser procuradas nas ações e não na percepção ou na linguagem, suas pesquisas evidenciam um processo em etapas, caracterizado pela coordenação e diferenciação progressivas entre compreensão e extensão, o que ocorre através de progressos tanto ascendentes quanto descendentes e de mecanismos de antecipação. Percorrendo, portanto, basicamente o caminho: ações materiais/regulações com interiorização das ações/operações, apresenta um bom exemplo do processo global de construção de estruturas (p.81).*

Desse modo, partindo-se da concepção construtivista piagetiana, o ensino da Matemática deveria orientar-se para as potencialidades, limitações, erros dos alunos, pois o conhecimento vai se construindo junto com o sujeito.

O aluno é, portanto, considerado sujeito dos processos de ensino e de aprendizagem, sendo totalmente ativo nesta construção. Esta perspectiva construtivista vem opor-se à concepção empirista do conhecimento, que considera a aprendizagem como aquisição do conhecimento pronto, externo ao sujeito e realizada basicamente pela repetição e memorização. Como ilustra Ferreiro (2001):

> *Piaget opõe uma concepção segundo a qual o objeto não está dado no ponto de partida, mas se constrói a partir de um organismo que não é criado pelo sujeito, mas que é a condição mesma de sua existência; a evidência racional não é produto direto da experiência nem uma forma a priori do espírito: é o resultado de processos de reequilibração sucessivos, em virtude de um processo histórico e dialético; a objetividade não está dada no ponto de partida: é uma realização, uma conquista, não um impor-se do objeto sobre o sujeito, mas um equilíbrio entre ambos, que envolve um máximo de atividade da parte do sujeito, um sujeito que é sempre ator e nunca mero espectador (p.138).*

Um outro aspecto a se considerar é que, para Piaget, a Matemática tem caráter estrutural, tendo como base o raciocínio lógico. Para o autor, a Matemática não se limita à lógica.

A ênfase é dada no processo e não somente nos resultados como no ensino tradicional. Piaget (1980) define a Matemática como sendo um “sistema de construções que se apóiam igualmente nos seus pontos de partida nas coordenações das ações e das operações do sujeito, e procedendo por uma sucessão de abstrações reflexivas de níveis cada vez mais elevados” (p.339).

O papel atribuído por Piaget à Matemática em relação aos outros conhecimentos é fundamental, uma vez que qualquer conhecimento supõe a presença de um quadro de natureza lógico-matemática. Sob esse olhar, a Epistemologia Genética piagetiana possibilita então a explicação da Matemática.

A escola tem cada vez mais evidenciado o fracasso dos alunos em relação à Matemática. Em relação às crianças que não aprendem esta disciplina, Piaget (apud LIMA,1999) coloca como hipótese:

> *que as pretensas aptidões que diferenciam os ‘bons alunos’, em Matemática, em Física etc., supondo nível de inteligência igual, consistem sobretudo na*

possibilidade de adaptar-se ao tipo de ensino que se lhes dá, ao passo que os 'maus-alunos', nestas disciplinas, mas que têm bom êxito em outras, estão, de fato, inteiramente, aptos para dominar as questões que parecem não entender, conquanto procurem chegar a isto por caminhos diferentes, porque o que eles não entendem são as 'lições' fornecidas e não a disciplina em questão. É bem possível, em particular, e verificamos estes fatos, em numerosos casos, que o insucesso escolar, em tal ou qual aspecto, refira-se à passagem muito rápida da estrutura qualitativa dos problemas (por simples raciocínios lógicos, mas sem introdução imediata de relações numéricas e de leis métricas), para a forma quantitativa ou matemática (no sentido de equações já elaboradas) utilizada, normalmente, pela Física (PIAGET apud LIMA, 1999, p.103).

A partir da tomada de consciência de uma certa ação ou operação concreta, o sujeito poderá refletir e projetar em um novo plano decorrente do precedente, generalizando e superando as estruturas anteriores. Nesse sentido, intervêm os processos de generalização construtiva na elaboração do conhecimento matemático.

Foram tratados, até aqui, os aspectos relevantes da teoria da equilibração, destacando o caráter construtivo do conhecimento, e o papel das abstrações reflexivas nesta construção. Esses aspectos são, de acordo com a teoria piagetiana, fundamentais na construção do conhecimento matemático. Assim sendo, resta discorrer agora sobre os processos de generalização, em especial a construtiva, uma vez que esta última apresenta um caráter complementar e indissociável das abstrações reflexivas.

Piaget et al. (1984) diferenciam dois tipos de generalizações: a generalização indutiva e a construtiva. A generalização indutiva está relacionada com a abstração empírica e

parte dos conteúdos observáveis contidos nos objetos, portanto abstrações empíricas, e que se remete a eles para averiguar sua validade das relações observadas, com o fim de estabelecer seu grau de generalidade e sacar dele previsões posteriores (trata-se de encontrar explicações para razões, o que nos levaria a superar o observável) (p. 8).

Sendo de forma extensiva, a generalização indutiva procede de alguns a todos e volta-se apenas aos observáveis constatados nos objetos.

Já a generalização construtiva está relacionada à abstração reflexiva, fundamentando-se na operação do sujeito a seus produtos; é de natureza compreensiva e extensiva, conduzindo à produção de novas formas e inclusive, às vezes, de novos conteúdos. Estes novos conteúdos surgem das formas, pois não são dados empiricamente observáveis. Ao contrário da generalização indutiva, em que há somente assimilação de novos conteúdos observáveis a um esquema já existente, a generalização construtiva não permanece puramente extensiva, pois apresenta maior riqueza, que diz respeito aos sistemas novos que a generalização construtiva elabora. No dizer de Piaget et al*.* (1984), "a generalização construtiva não consiste em assimilar os conteúdos novos a formas já constituídas, mas sim em engendrar novas formas e novos conteúdos, é dizer, novas organizações estruturais" (p.188).

Desse modo, a generalização construtiva manifesta-se em compreensão nos casos de diferenciações e integrações, pois apresentam propriedades novas. Para este processo de construção do novo a partir do que é conhecido, a generalização construtiva utiliza-se de diferenciações e integrações, pois não existe uma simples sobreposição das novidades, mas sim uma derivação em parte do que já é conhecido. Este enriquecimento provocado por esta generalização não se completa nunca, estando, portanto, em constante progresso em termos de compreensão e extensão. Pode-se afirmar, assim, que a atuação desta generalização é como um mecanismo condutor da criação das novidades, tanto no que concerne aos conteúdos quanto no que se refere às formas.

Piaget et al. (1984) distinguiram dois tipos de diferenciações ou variações: as extrínsecas e as intrínsecas. As variações intrínsecas são determinadas por deduções necessárias a partir do significado desta propriedade, ou seja, por meio da abstração reflexiva. Por exemplo, as variações intrínsecas são responsáveis pela união das subclasses a uma classe maior, que é o todo. Já as variações extrínsecas são produzidas por constatações, ou seja, por abstrações empíricas.

Considerando as variações extrínsecas como importantes para se chegar às intrínsecas, toda generalização orienta-se em busca das diferenciações ou variações intrínsecas.

A integração também implica em uma generalização, podendo ser dos seguintes tipos: integrações totalizantes completivas, integrações totalizantes sintetizantes e as integrações coordenadoras.

Piaget et al. (1984) definiram a integração totalizante como sendo:

um sistema total em que as propriedades, enquanto sistema, são outras diferentes das dos subsistemas que reúne, já que estas últimas resultam de variações intrínsecas do sistema total, sendo que este último agrega as estruturas de que procedem certas características novas que as enriquecem (p.196).

As integrações totalizantes completivas dizem respeito às generalizações que integram uma estrutura mais pobre a uma mais rica, vindo a construir um agregado de novas operações. As integrações totalizantes sintetizantes aplicam o conceito à estrutura comum a várias noções e estruturas consideradas heterogêneas anteriormente. Já as integrações coordenadoras consistem em reunir os subsistemas em uma totalidade e surgem das variações extrínsecas.

Embora os dois tipos de integrações sejam distintos, eles são complementares, pois as completivas constituem o núcleo central das generalizações construtivas e "constituem sem dúvida a condição prévia das sintetizantes, já que é necessário construir as estruturas que estão por comparar-se e sintetizar-se" (PIAGET, ibid, p.199).

A evolução psicogenética das generalizações explica a construção do conhecimento exógeno por uma construção endógena por meio dos níveis de tomada de consciência. Num primeiro momento, o sujeito, interagindo com os objetos, somente registra os observáveis dos mesmos como sendo resultados exteriores da ação, devido à abstração reflexiva. Em seguida, ocorre o desenvolvimento material da ação e das variações do objeto de forma mais numerosa, podendo reunir-se entre elas. Por fim, a tomada de consciência das coordenações internas das ações possibilita o conhecimento das propriedades menos imediatas dos objetos, resultantes dos processos de abstração reflexiva.

Ao se tratar da Matemática, Henriques (1984) ressalta: "todos os objetos matemáticos são, em efeito, formas de diferentes graus, providos do processo de abstração reflexiva que implica aspectos de generalização" (p.211).

Ao citar a Matemática, o autor (ibid) conceitua uma generalização operatória no sentido atuante por esta:

se tratar da passagem de instrumentos cognoscitivos mais fracos a instrumentos mais fortes, da integração de estruturas mais pobres em mais ricas: se entende que as estruturas delas se tratam de estruturas cognoscitivas que não supõem a tematização explícita, que nos daria objetos de pensamento reflexivo (p.212).

O caráter construtivo da Matemática consiste em uma busca indefinida de novas formas a partir das já existentes. Com base no que pôde ser observado nesta revisão da literatura, podemos afirmar que o jogo de regras ocupa um importante lugar como meio para favorecer a construção do conhecimento matemático.

Dessa maneira, no presente trabalho, utilizar-se-á o jogo de argolas como um instrumento que poderá possibilitar aos sujeitos situações-problema que exijam, para sua resolução, as estruturas multiplicativas, sendo, pois, um meio diferente daquele convencional usado pela escola, tais como: algoritmos, lápis e papel. O sujeito, no jogo, terá oportunidade de executar a ação, observá-la e refletir sobre ela e, a partir daí, representá-la.

Brito (2001b) aponta que:

> *a aquisição de cada conceito particular em níveis cada vez mais complexos e abrangentes é entendida como um processo de construção e não como um processo aditivo de recepção. Assim, a cada nível de formação conceitual corresponde uma série de operações mentais (operações cognitivas) que podem ser inferidas a partir da realização de algumas atividades e de maneira como o conceito é usado (p.81).*

Além disso, Macedo et al. (1997) salientam as construções desencadeadas no sujeito pelo ato de jogar (pelas ações do jogo), ao explicitar que as ações presentes nos jogos possibilitam:

> *compreender melhor, fazer melhores antecipações, ser mais rápido, cometer menos erros ou errar por último, coordenar situações, ter condutas estratégicas, etc. são chaves para o sucesso. Para ganhar é preciso ser habilidoso, estar atento, concentrado, ter boa memória, saber abstrair, relacionar as jogadas todo o tempo. Por isso, o jogo de regras é um jogo de significados em que o desafio é superar a si mesmo ou ao outro (p.135).*

Também intimamente ligado à ação de jogar está o aspecto afetivo. As situações lúdicas permitem à criança ter prazer na aquisição do conhecimento e o aspecto afetivo pode ser manifestado, já que o jogo se insere numa prática que possibilita a espontaneidade.

Brenelli (1996) destaca este aspecto ao asseverar que:

> *jogar é estar interessado, não pode ser uma imposição, é um desejo. O sujeito quer participar do desafio, da tarefa. Perder ou ganhar no jogo é mais importante para ele mesmo do que como um membro de um grupo. Isto porque é o próprio*

jogador que se lança desafios, desejando provar seu poder e sua força mais para si mesmo que para os outros (p.27).

Desse modo, considerando os pressupostos teóricos apresentados anteriormente, este estudo volta-se para o desenvolvimento dos processos cognitivos envolvidos na construção do conhecimento matemático, especificamente para a construção das estruturas multiplicativas, já que Piaget et al. (1986) assinalam a complexidade do desenvolvimento das multiplicações, ressaltando a existência de quantificações implícitas em maior número que na adição, e por extensão, a construção das estruturas multiplicativas a partir das estruturas aditivas.

Parte-se, então, no capítulo seguinte, para as estruturas multiplicativas.

É necessário que os conhecimentos que a criança adquire sejam construídos por ela mesma em relação direta com as operações que é capaz de fazer sobre a realidade; com as relações que está em condições de captar, compor e transformar; com os conceitos que constrói progressivamente.

Gerard Vergnaud

2. AS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Embora a multiplicação possa parecer uma adição de adições por apresentar um mesmo resultado, trata-se de uma composição diferenciada dado o caráter de simultaneidade. Piaget et al. (1986) diferenciam três estágios ao exemplificar 3x4=12:

> *em primeiro lugar o 'todo' (aqui 12, que permanece o mesmo se invertermos 3x4 ou 4x3); em segundo lugar vêm seus subconjuntos, que denominamos "partes": trata-se de três classes de 4 elementos cada uma; em terceiro lugar vêm pois os 'elementos' ou unidades que são em número de 4 para cada 'parte' e desempenham o papel de 'contido' para uma delas* (p.72).

Neste sentido, pode-se afirmar que, na multiplicação, as "partes" precisam ser iguais e conter o mesmo número de elementos iguais entre si, mas que na adição não é preciso nenhuma destas igualdades para se obter a solução do todo.

Para estudar as etapas de formação da multiplicação, bem como as diferenciações da adição, Piaget (ibid) propõe um experimento sobre multiplicação e associatividade multiplicativa. Neste experimento são propostas quatro situações distintas que envolvem multiplicação, associatividade, associatividade comutativa e repetição das correspondências injetivas.

Todas essas situações envolvem as variáveis multiplicando, multiplicador e produto. O problema envolve a preparação de refeições para dois animais (carneiro e pato), de acordo com os dados fornecidos e os objetivos de cada situação. Como essa prova será empregada para a seleção dos sujeitos, será descrita nos procedimentos para coleta de dados.

Pode-se dizer, segundo Piaget (ibid), que o sistema multiplicativo engloba duas exigências a mais que o sistema aditivo. A primeira:

> *implica ajustamentos em três ordens (em oposição às parcelas que não se ajustam mas se acrescentam): os contidos constituídos pelos 'elementos' de base e que se inserem nas 'partes' (ou pacotes, etc.) que lhes servem de 'continentes'; finalmente o 'todo' enquanto reunião das partes tornadas 'contidas' em relação a ele. Portanto, é em termos de continentes e de contidos que é preciso conceber psicologicamente as noções de multiplicandos e de multiplicadores: em 4x3=12 o multiplicando 3 é o contido de cada um dos 4 multiplicadores (relações ignoradas*

das parcelas que são da mesma ordem, salvo no caso da associatividade, mas então sob formas bem menos sistemáticas) (p.83).

E a segunda exigência é a "possibilidade, para um mesmo todo, de modificar os elementos /e/ (ou g) por partes /p/ e o número destas, em outras palavras de modificar a distribuição das partes e elementos dentro do mesmo todo" (PIAGET et al., 1986, p.83).

Com isso, é possível verificar a maior mobilidade e riqueza do sistema multiplicativo perante o sistema aditivo.

Piaget e Inhelder (1975) ressaltam que "(...) as estruturas aditivas e multiplicativas de classes constituem uma só e grande organização operatória, apesar das diferenças figurais e das diferenças aparentes de complexidade" (p.241).

Interessante destacar que um número é uma reunião aditiva de unidades e a correspondência termo a termo entre duas coleções envolve uma multiplicação (PIAGET e SZEMINSKA, 1975, p.233). Em se tratando da noção de inclusão de classes, os mesmos autores afirmam que:

> *na inclusão lógica de uma classe em outra provoca na criança, no decorrer das duas primeiras fases da construção do número, uma dificuldade sistemática devido à falta de composição aditiva que não lhe permite considerar simultaneamente as partes e o todo (p.254).*

Em relação à adição:

> *é uma operação reversível. Portanto, ela não o é apenas em seus começos, como na primeira fase, quando a criança não compreende que uma totalidade B dissociada em duas partes A e A' continua a ser a mesma totalidade. A operação aditiva se constitui, ao contrário, quando, por um lado, as parcelas são reunidas num todo, mas também, por outro lado, quando esse todo é considerado como invariante por qualquer que seja a distribuição de suas partes (p.259).*

Em se tratando das operações aritméticas, o raciocínio utilizado nas adições centra-se em unir e separar objetos, ao passo que, na multiplicação, estão envolvidas: correspondência de um para muitos, relações entre as variáveis, distribuição, divisão e divisões ao meio (NUNES e BRYANT, 1997).

Na correspondência de um para muitos, os autores (ibid) ressaltam que "há algumas continuidades entre estas situações multiplicativas e situações aditivas" (p.143). Entretanto colocam quatro diferenças para as situações multiplicativas. A primeira delas diz respeito à relação multiplicativa ser constante entre dois conjuntos e servir de base para o conceito de proporção. Como segunda diferença, tem-se a replicação sendo usada para manter invariável a proporção:

> *replicação não é como unir, em que qualquer quantidade pode ser acrescentada a um conjunto. Replicação envolve somar a cada conjunto a unidade correspondente para o conjunto de modo que a correspondência invariável um-para-muitos seja mantida* (NUNES e BRYANT, 1997, p.144).

A terceira diferença está no fato de que, independente da replicação realizada, a proporção permanece constante. E, por fim, o fator escalar mantém a proporção constante quando aplicado a cada conjunto, podendo ser definido como: "se refere ao número de replicações aplicadas a ambos conjuntos mantendo a proporção constante" (ibid*,* p.144).

Em se tratando das relações entre as variáveis (co-variação) no sentido de número no raciocínio multiplicativo, é possível verificar situações em que duas (ou mais) variáveis co-variam devido a uma convenção ou causa. Após o entendimento da correspondência um para muitos, é necessário a construção de conceitos que possibilitem lidar com momentos que envolvam relações entre duas variáveis. Neste sentido, as novidades

> *referem-se a frações de unidades de medida−que aparecem nestas situações porque as variáveis, ao contrário dos conjuntos, são quantidades contínuas−, e a um tipo novo de sentido de número que expressa a relação entre as duas variáveis, um fator, uma função ou uma quantidade intensiva (NUNES e BRYANT, ibid, p.147).*

A distribuição propõe ao raciocínio multiplicativo uma outra visão nas relações parte-todo, pois há três fatores a se considerar: "o total, o número de receptores e a quota; sendo que há uma relação inversa entre o número de receptores e a quota" (ibid).

Conforme o que foi afirmado, não se pode considerar que a multiplicação é uma adição repetida e a divisão uma subtração repetida, mas sim que

> *há certamente ligações entre raciocínio aditivo e multiplicativo, e o cálculo de multiplicação e divisão pode ser feito através de adição e subtração repetidas. Porém, diversos conceitos novos emergem no raciocínio multiplicativo, que não são necessários na compreensão das situações aditivas (NUNES e BRYANT, 1997, p.151).*

Estudos (PIAGET e SZEMINSKA, 1975; BRYANT, 1974; FRYDMAN e BRYAN, 1998; STEFFE, 1994; BRYANT e col., 1992) mostram que a correspondência um-para-muitos pode ser explorada em sala de aula pelas crianças antes mesmo de poderem resolver problemas quantitativos. Dessa forma, o uso de amostras de materiais manipulativos permite ao sujeito formar um modelo de pensamento que auxiliará o raciocínio na busca do problema. No momento em que esta correspondência um-para-muitos simples é dominada pela criança, é possível fornecer-lhe problemas nos quais esta compreensão não está explícita e, portanto, mais complexos (produto cartesiano). Com isso, como afirmam Nunes e Bryant (1997), "elas precisam descobrir que esta é uma forma de abordar o problema analisando a própria situação" (p.163). Este fato possibilita compreender melhor a correspondência um-para-muitos.

A generalização está diretamente ligada à abstração, podendo juntas explicar a construção do conhecimento proposto por Piaget et al. (1984). No caso da construção da multiplicação, esta depende da generalização construtiva a partir da adição.

Piaget (1971) mostra esta construção das estruturas multiplicativas a partir da adição e sua relação com a generalização quando afirma que:

> *a partir dos 7 a 8 anos o sujeito é capaz de elaborar estruturas multiplicativas tão bem quanto aditivas, a saber, tabelas com registros duplos (matrizes) comportando classificações segundo dois critérios ao mesmo tempo, correspondências seriais ou seriações duplas (por exemplo), folhas de árvore seriadas na vertical conforme seu tamanho e na horizontal conforme seus matizes (mais ou menos escuros). Contudo, trata-se no caso mais de sucesso em relação à questão proposta ("dispor as figuras o melhor possível", sem sugestão sobre a disposição a encontrar) do que de uma utilização espontânea da estrutura* (p.43).

Para estudar a generalização, o presente estudo escolheu a Prova da Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes (PIAGET et al., 1984), a qual será explicitada nos procedimentos da coleta de dados.

Outro aspecto importante a se considerar quando se pensa em Educação Matemática é a contribuição dos trabalhos de Vergnaud, os quais têm colaborado muito para as pesquisas piagetianas nesta área.

A teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1983) tem se destacado nos processos de aquisição da aritmética e da álgebra elementar, da geometria e de outras áreas. Neste sentido, o autor (ibid), além de estabelecer uma psicogênese a curto prazo, preocupa-se com a "evolução de concepções e práticas do indivíduo ou de um grupo de indivíduos face a novas situações" (VERGNAUD apud FRANCHI, 1999, p.161).

Os princípios da teoria dos campos conceituais procuram relacionar competências e concepções construídas a partir da situação, além de problemas teóricos e práticos da constituição dessas competências e concepções.

Vergnaud (apud FRANCHI, 1999) utiliza os conceitos de esquemas e de invariantes operatórios para explicar as competências matemáticas. Neste sentido,

> *o conceito de esquema é particularmente bem adaptado para designar e analisar classes de situação para as quais o sujeito dispõe em seu repertório, a um momento dado de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação. Mas ele é igualmente válido para a descoberta e invenção em situação de resolução de problemas. Muitos esquemas são evocados sucessivamente e mesmo simultaneamente em uma situação nova para o sujeito* (p.166).

Segundo Vergnaud (1990), os conceitos-em-ato caracterizam-se por serem conceitos tidos como pertinentes, enquanto teorema-em-ato por ser uma proposição tida como verdadeira.

Franchi (1999) aponta que "os teoremas assumem a forma de proposições possíveis de serem avaliadas como verdadeiras ou falsas em um certo domínio, tomadas como instrumento operatório na atividade do sujeito" (p.171), enquanto os "conceitos-em-ato ou categorias-em-ato são representados por meio de propriedades e relações e explicitados na forma de funções proposicionais" (p.171).

As estruturas multiplicativas podem ser explicadas pelo campo conceitual, o qual envolve, concomitantemente, o conjunto das situações que englobam uma ou mais multiplicações ou divisões, conceitos e teoremas que possibilitam a análise das situações: proporção simples e múltipla, função linear e n-linear, relação escalar, quociente e produto de dimensões, etc.

A proporcionalidade é assinalada no modelo multiplicativo de Vergnaud, o que possibilita a extensão deste modelo para situações multiplicativas complexas e para diferentes campos numéricos.

Além disso, os elementos teóricos que fazem parte da estrutura multiplicativa devem também ser considerados, como afirma Franchi (1999):

> *a condição característica da multiplicação chamada trivial, ou seja, redutível à adição reiterada da mesma parcela – e as informações advindas do ato de ensinar essa operação – devem integrar-se ao exame teórico dos elementos que integram sua estrutura* (p.188).

Quando se fala no ensino da multiplicação, a partir de material concreto, tem-se como conseqüência considerar o multiplicando como uma medida e o multiplicador como um operador simples sem dimensão física. Como resultado disso, os números utilizados no multiplicador e multiplicando não são os mesmos nas etapas do ensino da multiplicação. Inicialmente o multiplicador traz números de apenas um dígito, enquanto o multiplicando pode ser de mais de um dígito. Em relação aos números decimais, ocorre o mesmo, os números com vírgula inicialmente só aparecem no multiplicando.

Vergnaud (1991) aponta que a propriedade comutativa da multiplicação possibilita a inversão do multiplicador e multiplicando, mas que é preciso considerar que as crianças tendem a abstrair o que representam os números. Já a propriedade distributiva passa a ser necessária no momento em que se introduz dois dígitos no multiplicador. A dificuldade da criança está na decomposição aditiva do multiplicador, e não na propriedade distributiva em si. Para ilustrar tal afirmação, o autor citado (1991) afirma que ao multiplicar 43 vezes 12, a criança apresenta dificuldade em entender que o 12 é igual a 10 mais dois.

Em relação às dificuldades encontradas na multiplicação, Vergnaud (ibid) destaca três categorias.

A primeira categoria corresponde às multiplicações mais simples, nas quais o multiplicador só tem um dígito, mas as multiplicações implicam desde o princípio o “vai um”. Essa situação já consiste em uma dificuldade na adição, manifestando-se também na multiplicação.

A segunda categoria de dificuldade encontra-se na multiplicação pela base, sendo que, para facilitar, pode-se utilizar o material multibase.

Por fim, a decomposição aditiva do multiplicador e a distributividade da multiplicação em relação à adição, destacando dois tipos de composição aditiva

(36=30+6) e multiplicativa (36=(3x10)+6), constituem a terceira categoria de dificuldade.

Convém ressaltar que as dificuldades estão presentes também quando se coloca zero ou números decimais no multiplicador devido a duas razões fundamentais:

> *1) Multiplicar por um número com vírgula, é dizer, por um número de vezes no inteiro, supõe que um se encontra em presença de um problema multiplicativo bastante complexo (isomorfismo de medidas contínuo-contínuo, por exemplo).*
> *2) A regra operatória da multiplicação por um número com vírgula supõe um encadeamento de transformações multiplicativas que não necessariamente são bem compreendidas pela criança* (1991, p.154).

Além dessas considerações, Vergnaud (ibid) analisa também em seus trabalhos os problemas que envolvem estruturas multiplicativas. Duas categorias de relações multiplicativas são definidas: a primeira, que envolve uma multiplicação, e a segunda, que inclui uma divisão. Tais categorias podem envolver uma relação quaternária, a qual Vergnaud (ibid) denomina isomorfismo de medidas, ou uma relação ternária, denominada produto de medidas.

O isomorfismo de medidas e o produto de medidas incluem diferentes tipos de multiplicação e divisão, os quais diferem em grau de complexidade. Para ilustrar estas categorias, convém analisá-las segundo Vergnaud (ibid).

O isomorfismo de medidas caracteriza-se por apresentar uma relação quaternária entre quatro quantidades, sendo duas quantidades medidas de um determinado tipo, e as demais medidas de outro tipo (Por exemplo: 1) Tenho 3 bandejas de iogurtes. Há 4 iogurtes em cada bandeja. Quantos iogurtes tenho?).

O produto de medidas consiste em uma relação ternária entre três quantidades, sendo uma o produto das outras duas, no plano numérico e dimensional. Por exemplo: 1) 3 meninos e 4 meninas querem dançar. Cada menino quer dançar com cada menina e cada menina com cada menino. Quantos pares serão possíveis?; 2) Querem fabricar bandeirinhas com tela de duas cores diferentes (roxo e azul). As bandeirinhas devem ter três partes. Quantas bandeirinhas diferentes podem ser fabricadas?.

Para resolver esses problemas, pode-se utilizar a forma de relação do quadro cartesiano, já que é a noção de produto cartesiano que possibilita explicar a estrutura de produto de medida. Pode-se dizer que as crianças somente entendem o produto de medidas quando analisam com dupla proporcionalidade. Vergnaud (1991)[1] salienta que "as relações multiplicativas servem para um conjunto de composições numéricas (multiplicações, divisões, regra de três simples e compostas, etc.) mas também para a compreensão das dimensões" (p.218).

É interessante destacar ainda os princípios que Vergnaud (ibid) definiu para auxiliar o professor no ensino das representações e soluções de problemas complexos em aritmética:

> *fazer a criança pensar sobre as perguntas do enunciado e sobre as perguntas intermediárias; introduzir informações inúteis e omitir as necessárias; levar a criança a estabelecer várias representações operatórias das informações necessárias; estabelecer o vínculo entre as diferentes representações; recorrer a reconstruções materiais parecidas com a situação do enunciado e estabelecer os vínculos entre a situação material e as representações que se dão* (p.249).

Os trabalhos de Piaget sobre abstração reflexiva, generalização construtiva e estruturas multiplicativas contribuem para este exame teórico de Vergnaud, pois juntos podem explicar as estratégias utilizadas pelos sujeitos no jogo de argolas, uma vez que este apresenta uma série de situações-problema que envolvem as estruturas multiplicativas.

[1] Todos os exemplos, esquemas e definições foram retirados da obra de Gerard Vergnaud (1991) – El nino, las matemáticas y la realidad: problemas de la ensenanza de las matemáticas en la escuela primária, relacionada nas Referências Bibliográficas deste trabalho.

O pesquisador não somente é quem sabe acumular dados mensurados, mas sobretudo quem nunca desiste de questionar a realidade sabendo que qualquer conhecimento é apenas recorte.

Pedro Demo

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Ao se considerar os problemas que envolvem o sistema educativo brasileiro, pode-se citar as dificuldades de aprendizagem dos alunos, a insuficiente formação dos professores, os conteúdos desvinculados da realidade, dentre outros. Em relação aos processos de ensino e de aprendizagem, pesquisas recentes têm enfatizado a importância de se utilizar jogos de regras como recurso metodológico que pode favorecer o desenvolvimento e a aprendizagem de crianças.

A revisão bibliográfica desenvolvida nesta pesquisa norteou-se conforme o objetivo do trabalho proposto, que, de uma maneira geral, busca a construção de estruturas multiplicativas e suas relações com os processos cognitivos. Desta forma, a literatura apresentada neste capítulo aponta estudos que envolvem: construção das estruturas multiplicativas, bem como estudos que versam sobre o emprego de jogos como recurso metodológico utilizado na escola.

3.1 A Matemática na escola

Muitos são os estudos que refletem sobre as dificuldades de aprendizagem da matemática encontradas no âmbito escolar. Esses estudos apontam alguns fatores relacionados ao baixo rendimento em matemática, dentre eles os de ordem pedagógica (CARRAHER, 1983; RABELO, 1995), afetiva (GUILHERME, 1983), cognitiva (KAMII, 1992, 1993; SASTRE & MORENO, 1980) e motora (OLIVEIRA, 1996; SOUZA et al., 1996).

Os trabalhos de Piaget e seus seguidores, dentre outros, os do Brasil têm contribuído para a compreensão do raciocínio matemático. Assim sendo, torna-se necessário retomar o papel da psicologia educacional na formação dos professores, idéia esta apoiada por Brito (2001a):

> *nos cursos de formação de professores de matemática (incluindo aqui cursos que formam professores das séries iniciais da escola elementar), a disciplina psicologia educacional deveria abandonar o caráter geral que tem assumido e tratar de forma fecunda o desenvolvimento do pensamento matemático, a aprendizagem dos*

conteúdos da matemática e as formas mais eficazes de ensinar esta disciplina, levando a um aumento das atitudes positivas em relação à matemática e às demais ciências exatas e tecnológicas (p.64).

Fini et al. (1996) estudaram as variáveis que podem afetar os resultados de crianças em provas de matemática e em que medida a compreensão das questões envolvidas interferiam na avaliação escrita dessa disciplina. Para tanto, selecionaram trinta crianças de segunda série de uma escola pública para resolverem uma prova de matemática envolvendo 9 situações, das quais 5 eram problemas verbais aritméticos. Na correção da prova, foram computados erros de adição, subtração, multiplicação, divisão, entendimento do problema e os exercícios deixados em branco. Dentre as variáveis cognitivas pesquisadas incluíam-se: a tendência operatória, tendência à criatividade, psicomotricidade, compreensão de leitura, leitura e leitura + compreensão de leitura.

Verificaram que os erros nas tarefas de matemática podem ser melhor explicados pela variável leitura mais compreensão. Desta forma, a dificuldade de leitura apresentou-se como variável significativa no desempenho em matemática, embora tenham aparecido também as variáveis leitura e compreensão, leitura, compreensão e psicomotricidade.

Silva (1990), investigando as relações entre processos de cognição e o fracasso escolar, destacou o papel da abstração reflexiva como responsável pelo desenvolvimento das estruturas cognitivas. Para este autor, a escola, aparentemente, não oferece os meios necessários para que os processos de abstração reflexiva sejam favorecidos.

A importância de se trabalhar com a problematização em Educação Matemática é ressaltada por Mendonça (1993), que afirmou que o pensamento e a ação possibilitam a atribuição de significados às experiências de vida, podendo, ainda, desenvolver o conhecimento matemático. Por meio da problematização, o professor elabora perguntas geradoras que possibilitam ao aluno processar, pela teorização, modelos matemáticos.

Em estudo posterior, Mendonça (1996) pesquisou a intensidade dos algoritmos nas séries iniciais ligada a fatores de pressão estrutural, histórica e social. Tais fatores podem limitar e impedir que os professores reflitam, discutam e pesquisem outras formas para se realizar o cálculo de operações aritméticas básicas.

Desta forma, Mendonça (1996) destaca a importância de se estabelecer uma reflexão permanente sobre as formas de calcular, analisando-as sob diferentes pontos de vista, e também de se desenvolver uma atitude de investigação, buscando conhecer os recursos de cálculo que os alunos possuem.

O domínio de procedimentos não se faz suficiente, mas é necessário pensar matematicamente, ou seja, entender a situação-problema, assinalaram Nunes & Bryant (1997). Desta forma, os procedimentos devem ser transformados em ferramentas de pensamento.

Compartilhando desta idéia, Perrenoud (2000) ressalta a importância da situação-problema, ao apontar que: "uma verdadeira situação-problema obriga a transpor um obstáculo graças a uma aprendizagem inédita, quer se trate de uma simples transferência, de uma generalização ou da construção de um conhecimento inteiramente novo" (p.31).

Em se tratando do sucesso ou fracasso em matemática, pode-se citar David & Lopes (1998) que estudaram as características do aluno de sucesso/fracasso em matemática. Para tal, foram feitas observações em sala de aula e das situações entre professores e alunos. Constatou-se que, quando os professores fazem uso de formas de pensamento flexível, os mesmos podem contribuir para o sucesso em Matemática. Neste sentido, é imprescindível adotar em sala de aula uma postura que venha a incentivar habilidades de resolução de problemas e formas de pensamento autônomo e flexível.

Para eles (DAVID & LOPES, 1998),

> *a compreensão supõe o domínio da linguagem simbólica específica da matemática e a associação do símbolo como um procedimento ou o conceito que ele representa, ou ainda com outros conceitos mais gerais a ele relacionados, conforme a situação (p.34).*

Carraher et al. (1988) acreditam que "a liberdade de pensar e organizar diferentes formas de solução é essencial para que o aluno recrie um modelo matemático em ação" (p.181).

Neste sentido, é fecundo provocar desequilíbrios que realmente despertem o interesse e a vontade dos educandos em superá-los, pois, como afirma Perrenoud (2000):

> *deparar-se com o obstáculo é, em um primeiro momento, enfrentar o vazio, a ausência de qualquer solução, até mesmo de qualquer pista ou método, sendo levado à impressão de que jamais se conseguirá alcançar soluções. Se ocorre a devolução do problema, ou seja, se os alunos apropriam-se dele, sua mente põe-se em movimento, constrói hipóteses, procede a explorações, propõe tentativas 'para ver'* (p.31).

Quando um estudante fracassa em Matemática, pode ser porque esta criança percebe apenas uma forma de resolver um determinado tipo problema. Toledo (1997) define este quadro, ao se referir à multiplicação:

> muitos alunos imaginam que a multiplicação (ou mesmo qualquer outra) só pode ser realizada pelo método que aprendem na escola. Isso os leva a crer que a matemática é uma coleção de regras que têm de ser obedecidas, pois do contrário 'não dá' (p.133).

Os professores poderiam não só considerar as diferentes estratégias de resolução adotadas pelas crianças, mas também incentivá-las. Desta forma, o fracasso relacionado à Matemática poderia ser revertido, já que "não é possível culpar as crianças de seus fracassos na escola: a escola precisa descobrir o conhecimento dessas crianças e expandi-lo" (ibid, p.167).

D'Ambrósio (1996) chama a atenção para a necessidade de organizar um currículo baseado em coisas modernas: "não é de se estranhar que o rendimento esteja cada vez mais baixo em todos os níveis. Os alunos não podem agüentar coisas obsoletas e inúteis, além de desinteressantes para muitos" (p.59).

Faz-se necessário que o ensino da Matemática esteja repleto de significado, como afirma Brousseau (apud CHARNAY, 1996):

> *o sentido de um conhecimento matemático se define: não só pela coleção de situações em que este conhecimento é realizado como teoria matemática, não só pela coleção de situações em que o sujeito o encontrou como meio de solução; mas também pelo conjunto de concepções que rejeita, de erros que evita, de economias que procura, de formulações que retoma, etc* (p.37).

Desse modo, é importante que a escola encoraje a criança a inventar seu próprio procedimento, pois o uso de algoritmos pode produzir respostas certas, já que estas, muitas vezes, podem não ser entendidas e nem fazer sentido para a criança.

Assim, é necessário que haja processos de ensino e de aprendizagem da Matemática que tenham realmente importância para a criança:

> *é preciso que seja possível ao aluno estabelecer um sistema de relações entre a prática vivenciada e a construção e estruturação do vivido, produzindo conhecimento. Novamente a ação transformadora do professor é ressaltada no sentido de desencadear um processo de ensino que valorize o 'fazer matemática', ou seja, o fazer com compreensão* (GRANDO, 2000, p.20).

Esta necessidade da escola repensar o processo de aprendizagem significativa em matemática também foi ressaltada por Brito (2001b):

> *a escola deve sintetizar o ensino de conceitos de forma a adequá-los à capacidade cognitiva dos estudantes, estruturando-o de acordo com os princípios de inclusão nas classes, dependência entre os conceitos e as relações entre eles. Além disso, tais atividades podem ser formuladas levando em consideração os seguintes atributos definidores dos conceitos: aprendibilidade, utilidade, validade, generalidade, importância, estrutura, perceptibilidade de exemplos e numerosidade de exemplos, sendo estes atributos os determinantes da maneira como se dará a aprendizagem* (p.83).

Caroll & Porter (1997) enumeram alguns aspectos utilizados que podem estimular a criação de novas estratégias pela criança: tempo para exploração dos seus métodos próprios; materiais concretos para dar suporte ao pensamento da criança; apresentação de problemas em contextos significativos; troca de idéias sobre as estratégias entre os pares.

O desempenho em operações aritméticas de adição e subtração em crianças de segunda a quarta séries do ensino fundamental de uma escola pública foi analisado por Batista (1999). Por meio de uma avaliação pedagógica aplicada no início de ano num total de 185 sujeitos, realizando 930 contas, verificou-se um grande percentual de erros nas operações solicitadas. Foram ressaltadas cinco categorias de erros: (1) reprodução errada da proposta, (2) erros na contagem, (3) erros na montagem da conta, (4) erros no "vai um" da soma e (5) erros específicos da subtração.

Concluiu-se que a falta de compreensão do valor posicional dos algarismos no sistema de numeração decimal permite explicar os erros na montagem da conta, erros no “vai um” da soma e erros específicos da subtração.

Dockrell & McShane (1992) destacam a possibilidade dos erros em relação à Matemática serem cometidos por qualquer criança, mas tais erros podem ser passageiros; quando não são superados, podem gerar dificuldade de aprendizagem.

Existem diferentes tipos de dificuldades relacionadas ao número. As primeiras referem-se às operações numéricas básicas de contar, somar e subtrair (HUGLES apud DOCKRELL & MCSHANE, 1992). O desenvolvimento de operações posteriores baseia-se nestas habilidades iniciais, o que pode propiciar maiores dificuldades para as crianças. Trabalhar com os números graficamente, dificuldade bastante comum, ocasiona versões erradas das regras, principalmente em relação ao “vai um” e ao valor posicional do número.

Dentre os procedimentos incorretos utilizados pelas crianças, podem ser citados: tirar de zero para subtrair um número mais alto de um mais baixo, mas sem tirar da coluna à esquerda do zero; tirar o dígito mais abaixo do mais alto, sem se preocupar com o que está em cima; tirar de zero sem seguir tirando a menos que zero seja parte de um dez situado à esquerda do número de cima; escrever com resposta o dígito baixo de uma coluna quando seria o dígito de cima (BROW & BURTON apud DOCKRELL & MCSHANE, 1992).

Outro fator que apresenta dificuldade para as crianças é a ausência de relação entre os procedimentos aritméticos da escola com os problemas da vida real e vice-versa. Carraher (1988) mostrou, em seus estudos, que crianças que trabalhavam com cálculo diariamente e dominavam estas tarefas, quando submetidas aos mesmos cálculos, mas como representação formal destes problemas, não obtinham o mesmo desempenho. Ocorreu também o contrário: crianças que dominavam estas habilidades formalmente na escola não conseguiram lidar com isso na vida real, pois não estabeleciam nenhuma relação entre ambos.

Para chegar a tais considerações, Carraher (ibid) estudou crianças e adolescentes com idades entre 9 e 15 anos, freqüentadores de 3ª a 8ª séries do Ensino Fundamental. Aplicaram-se dois testes, sendo um informal e outro formal.

O teste informal constituiu-se por problemas verbais de Matemática, baseados no contexto de transações comerciais em que viviam as crianças. Já o teste formal envolveu problemas relacionados às operações aritméticas representadas graficamente e problemas sobre a forma escolar.

Frente a essa constatação, o professor deve buscar situações de ensino que se relacionem à realidade do educando, como ilustra Toledo (1997):

> ensinar matemática depende muito mais da capacidade do professor de encontrar um caminho em meio à experiência que seus alunos trazem para a sala do que da execução de um plano extremamente minucioso e elaborado. É necessário, portanto, que esse profissional visualize a matemática permeando o cotidiano *(p.302).*

Morgado (1993) afirma que, segundo a perspectiva construtivista, a construção das operações de multiplicação e divisão deveria somente ser introduzida após a consolidação da aprendizagem das operações de adição e subtração e do sistema de base dez. Ressalta, ainda, as estratégias utilizadas pelas crianças na resolução oral da multiplicação e divisão, assim como as dificuldades mais comuns enfrentadas por elas.

Em relação à multiplicação, as estratégias adotadas são: adição repetida, que consiste em somar ao multiplicando o número de vezes indicadas pelo multiplicador: (4x3=4+4+4=12); e produto cartesiano, que representa a compreensão da operação de multiplicação, na qual a criança encontra o produto de duas quantidades, sem reduzir nenhuma delas a um operador.

Quanto à divisão, há duas estratégias que também podem ser comparadas às estratégias de multiplicação. Em um primeiro momento, o sujeito utiliza a subtração repetida, ou seja, subtrai do dividendo o número de vezes indicado pelo divisor (20:5=20-5=15-5=10-5=5, logo são 5). A segunda estratégia trata da repartição de quantidades, que consiste em constatar o número de vezes que o divisor é contido pelo dividendo.

Morgado (ibid) aponta como incorreções mais freqüentes:

> *I. Dificuldades na generalização de números com mais de um dígito, das propriedades destas operações.*
> *II. Dificuldades na execução da multiplicação com dois ou mais algarismos no multiplicador ou no multiplicando.*
> *III. Dificuldades na execução da divisão com dois ou mais algarismos no divisor ou no dividendo.*

IV. Dificuldades na compreensão da divisão com resto (p.74).

Neste sentido, cabe ao professor propor atividades que desafiem os alunos a construírem e desenvolverem estratégias mais avançadas, tais como: jogos de regras, cálculo mental e solução de problemas.

Pode-se citar aqui o trabalho com jogos de regras de Guimarães (1998), no qual a autora propôs uma intervenção pedagógica com os jogos pega-varetas e argolas, a fim de possibilitar a construção da noção de multiplicação e sua relação com a abstração reflexiva. Foram estudados 17 sujeitos de uma classe de terceira do ensino fundamental de uma escola cooperativa de São José do Rio Preto – SP.

Constatou-se o avanço expressivo das crianças após serem submetidas à intervenção com jogos no que concerne à multiplicação. Confirmou-se que o registro escrito deve ser iniciado assim que o aluno dominar composição e decomposição numérica, o sistema de base dez e as propriedades das operações.

Segundo Henriques (1984), a aprendizagem da tabuada, segundo a visão dos professores, pode ser atribuída às dificuldades das crianças:

> *cada vez que tive oportunidade de discutir com professores de quarto e quinto anos de escolaridade as dificuldades encontradas pelos seus alunos na aritmética, todos, sem exceção, sublinharam que a aprendizagem da tabuada colocava à maior parte das crianças enormes problemas* (p.157).

Neste sentido, os problemas enfrentados pelas crianças para aprenderem a tabuada da multiplicação estariam relacionados aos fatores motivacionais do ensino habitual da tabuada de multiplicação. Para estudar uma forma diferente de ensino deste conteúdo, Henriques (ibid) propõe tabelas de multiplicação com diferentes exercícios sobre a distributividade da multiplicação relativa à adição para crianças do quinto ano. Constatou-se que a experiência foi agradável e positiva para alunos e professores.

Além disso, a distributividade pode ser entendida no quinto ano, o que não ocorre ainda com as crianças de segundo e terceiro anos, como afirma este autor:

> *quando se propõe aos alunos do segundo e terceiro anos de escolaridade as tabelas de multiplicação na ordem habitual – o que é infelizmente o caso de muitos países –, o que se passa, na melhor das hipóteses, é que as crianças estabelecem uma relação aditiva entre certas fórmulas: 3x3=9 e 3x4=, isto é mais três, o que faz*

> *doze. Mas o mais freqüente é que cada fórmula seja aprendida de forma isolada, algo que se revela fastidioso e difícil para a memória* (HENRIQUES, 1984, p.164).

A interdependência entre as interações sociais de crianças e suas construções cognitivas individuais de aprendizagem de aritmética básica foi estudada por Moro (1999), tendo como objetivo constatar a elaboração de estruturas aditivas em suas relações psicogenéticas com as multiplicativas e possibilitar avanços nesse processo de compreensão. Os sujeitos da pesquisa (N=7) com idades entre 6,2 a 7,4 anos, alunos de primeira série do ensino fundamental de escola pública de Curitiba, formaram duas tríades por sorteio aleatório. Durante duas sessões foi oferecida uma seqüência de tarefas aos sujeitos. Os resultados mostraram que existem aspectos precoces da divisão (repartir) e também da multiplicação (compor coleções equivalentes); entretanto,

> *para a progressão da sua conceitualização, dificuldades de elaboração de relações existem em ambas, referentes exatamente a inferências específicas, relativas a coordenações complexas de esquemas relativos a grandezas, a seus operadores e ao que ali resulta, mesmo quando há o apoio concreto para tais coordenações* (ibid*,* p. 26).

Em seus estudos sobre os processos que possibilitam a construção da noção de multiplicação e divisão aritméticas, Granell (1983) descobriu que a multiplicação é mais dificilmente compreendida pelas crianças, pois exige maior complexidade que a adição.

Para sua pesquisa, propôs uma série de situações envolvendo noções de multiplicação e divisão aritméticas que variavam em grau de complexidade. Em uma brincadeira de comprar e vender, na qual, frente a uma série de objetos comestíveis, com preços entre um a nove pesetas, o sujeito deveria resolver as atividades de compra propostas pelo experimentador com o auxílio de uma caixa contendo moedas.

Nas situações de multiplicação, o pesquisador colocava os objetos do mesmo tipo a serem comprados, e a criança, o valor em dinheiro. Já na situação de divisão, com uma quantidade de dinheiro, a criança dizia quantos objetos de determinado tipo podia comprar e também quais outros objetos do mesmo tipo ainda era possível comprar.

Diante das dificuldades dessa construção, a criança desenvolve estratégias que Granell (1983) divide em quatro condutas de evolução, tanto na multiplicação quanto na divisão.

Em se tratando da multiplicação, inicialmente a criança não consegue estabelecer correspondência múltipla. Em seguida surge uma correspondência múltipla de forma intuitiva, não tendo ainda quantificação exata. Somente na conduta III alcança-se o resultado correto, mas por meio de procedimentos aditivos sem antecipação das ações. Por sua vez, a antecipação das ações é possível na conduta IV, sendo condição fundamental para a compreensão da multiplicação.

Quanto à noção de divisão aritmética, num primeiro momento a criança não admite a possibilidade de fazer outras antecipações com conjuntos equivalentes. A tentativa de utilizar conjuntos equivalentes pode ser notada na conduta II, entretanto o número de conjuntos e o número de elementos de cada conjunto não possuem uma compensação exata. A solução correta é obtida por meio de tentativas sistemáticas na conduta IV, quando o sujeito toma consciência das relações de reciprocidade entre as variáveis.

Em relação à divisão, Moro (1999) destaca que "[...] as realizações precoces de dividir aparecem em termos de partição, apoiadas em relações aditivas presentes como as de adição unitária um a um, iterada, com correspondência bi-unívoca, até esgotar-se a coleção a distribuir" (p.3).

Dentro da Educação Matemática, um outro aspecto que vem despertando a atenção de pesquisadores e educadores é a resolução de problemas. Estudos têm sido realizados (FLEVARES e PERRY, 2001; JOHNSON-RITTLE, SIEGLER e ALIBALI, 2001; BLOTE, GURG e KLEIN, 2001; dentre outros) no sentido de se obter alternativas para a resolução de problemas nos diferentes níveis de ensino. Muitas vezes, os problemas não têm sido explorados de maneira adequada pelos professores, impedindo a oportunidade de se estimular a construção do conhecimento pelos alunos.

As tendências didáticas dos professores de Ciências e Matemática e o contraste destas com a prática em sala de aula foram investigadas por Coelho (1992). Para tanto, o pesquisador realizou observações de aulas, serviu-se de descrições dos professores e de análise documental. Notou, na prática docente, a presença da pseudocientificidade e a centralização do ensino no papel do professor, o que sugere relações autoritárias que não colaboram para a construção do conhecimento.

Ao estudar os processos de ensino e de aprendizagem na Educação Matemática, principalmente na resolução de problemas, Onuchic (1999) ressalta:

> *resolver problemas é um bom caminho para se ensinar matemática. Entretanto os problemas não têm desempenhado bem seu papel no ensino, pois na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como uma forma de aplicação de conhecimentos anteriormente adquiridos pelos alunos* (p.211).

.

Um especial modelo de ensino de resolução de problemas por meio de atividades computacionais planejadas para facilitar aprendizagem dos alunos em Matemática é investigado por Aldana (1990). Utilizando-se de estudo de caso, pesquisou seis sujeitos do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio. Este autor constatou a superação das deficiências aritméticas e aprendizagem de novos conceitos por parte dos alunos, mas mostrou que a superação foi um processo lento e gradual, diretamente dependente da mediação do professor.

Calsas (1999) também propôs uma intervenção psicopedagógica com problemas verbais aritméticos, englobando relações multiplicativas quaternárias em cinco crianças de 4.ª série do ensino fundamental. Os problemas selecionados para a intervenção envolveram isomorfismo de medidas, correspondência de um para muitos e co-variação de variáveis, repetição de medidas e grupos múltiplos. Os sujeitos utilizaram formas de representação por meio de material de desenhos ou de outros cálculos. Os resultados mostraram modificações na utilização de estratégias de resolução de problemas e uma maior quantidade de acertos. O autor concluiu que os algoritmos escolares foram utilizados pelas crianças sem que elas tivessem entendido, e que, após a intervenção psicopedagógica, os algoritmos passaram a ser representados de forma mais adequada.

A partir do baixo desempenho na resolução de problemas matemáticos no ensino fundamental e tendo como hipótese que a competência para a interpretação de textos relacionados com a Matemática poderia contribuir para esse quadro, Rabelo (1995) apresenta um outro trabalho de produção e interpretação de textos matemáticos com alunos de primeira a quarta séries do ensino fundamental durante quatro anos.

Para isso, foi criado um ambiente escolar favorável à construção da competência na leitura, interpretação e produção de vários tipos de textos. A matemática pôde ser encarada de uma nova maneira, ou seja, por meio de textos matemáticos envolvendo curiosidades matemáticas, história da Matemática, pensadores e personalidades da Matemática, dentre outros. Constatou-se que a experiência vivenciada com os textos matemáticos, pelos alunos, possibilitou o avanço dos mesmos na resolução de problemas.

As diferentes estratégias utilizadas pelas crianças para resolverem um determinado problema, assim como os diferentes raciocínios, devem ser discutidos entre as crianças. Neste sentido, Gil (1993) lembra que, no início do ensino fundamental, os alunos já possuem um senso matemático que não é considerado e relacionado com o que eles realizam na escola.

A resolução de problemas verbais aritméticos foi investigada por Taxa (1996). Para isso, problemas de estrutura multiplicativa de Vergnaud (1991) foram utilizados analisando a construção de uma correta representação mental, as abstrações e a utilização de material concreto.

Para tal intento, foram selecionadas sessenta crianças de primeira a quarta séries do ensino fundamental com idades entre sete e doze anos, distribuídas em três grupos (N=20): 1) sujeitos que não aprenderam multiplicação na escola; 2) sujeitos que estavam aprendendo multiplicação e 3) sujeitos que já tinham aprendido multiplicação, conforme informações dos professores. No pré e pós-testes, foram aplicadas as provas piagetianas de conservação, classificação e seriação. A investigação sobre a resolução de problemas verbais aritméticos envolveu sete problemas do tipo escolar (sendo quatro de multiplicação e três de adição e subtração), apresentados com material concreto correspondente.

Constatou-se evolução nas crianças ao resolverem problemas em diferentes níveis de escolaridade. Evolução esta que pode ser explicada a partir da interação da criança com a estrutura conceitual do problema e com a escolha dos procedimentos que indicam maior flexibilidade e abstração dos sujeitos.

Em estudo posterior, Taxa (2001) analisou o desempenho escolar em matemática, o processo de abstração, as operações combinatórias e a solução de problemas aritméticos de estrutura multiplicativa. Para compor a amostra foram selecionados 132 sujeitos de terceira série do ensino fundamental da rede pública do interior de São Paulo. Tendo como base o desempenho satisfatório e insatisfatório em matemática, dois subgrupos foram compostos (N=32), os quais foram submetidos a avaliações de desenvolvimento cognitivo quanto à noção de múltiplos, à noção de idéia do acaso e probabilidade e à solução de problemas aritméticos.

Constatou-se que os sujeitos com melhor desempenho em Matemática correspondiam àqueles que apresentaram níveis mais elevados de abstração e tendência de progresso em operações combinatórias. Neste sentido, o professor, ao estimular as diferentes estruturas de resolução de problemas, favoreceria a troca de idéias intervindo com questões que suscitassem o raciocínio do aluno. Como afirma Von Glasersfeld (apud MORO, 2000), "o conhecimento não é mercadoria transferível, nem a comunicação seu meio de transporte, cabe ao professor guiar os alunos na organização conceitual dos objetivos experienciados. Deve ele então saber onde os alunos estão e onde devem chegar" (p.133).

As relações existentes entre a flexibilidade de pensamento e a criatividade, evidenciadas durante os procedimentos de solução de problemas, foram pesquisadas por Lima (2001). Para tal, foram pesquisados 307 alunos de sexta, sétima e oitava séries de uma escola pública de Campinas, que responderam a um questionário de caracterização e a um teste de matemática. Com os resultados do teste de matemática, selecionou-se o melhor desempenho de cada série; esses alunos selecionados foram, então, submetidos ao teste de Rorschach e a uma bateria de testes aritméticos, algébricos e geométricos a fim de investigar a flexibilidade do pensamento.

A partir da análise dos protocolos, concluiu-se que os sujeitos de sexta e sétima séries não eram capazes de solucionar os problemas e que os alunos de oitava série resolviam os problemas apenas com a ajuda do experimentador, embora o teste de Rorschach tivesse mostrado características de criatividade. Deste modo, o componente da Matemática, flexibilidade de pensamento, foi evidenciado como característica de criatividade.

Buscando verificar se o sujeito é capaz de proceder inversamente, ou seja, se é capaz de formular um problema por meio de linguagem escrita, tendo como base a operação dada em que falta um de seus termos (estado final, transformação ou estado inicial), um estudo interessante foi desenvolvido por Prat (1996).

Participaram da pesquisa 75 crianças com idades entre 7 e 11 anos, sendo 15 por grupo de idades. A situação-problema consistiu em solicitar da criança a formulação por escrito de três problemas, partindo-se de três operações de somar, tendo cada uma delas a incógnita destacada em um termo diferente da operação. Os resultados apontaram que um conhecimento adquirido não se generaliza automaticamente a outros contextos operacionais. É preciso uma construção intelectual utilizando novas operações mentais do sujeito.

Lopes (2002) investigou as relações entre a construção dialética das operações de adição e de subtração e a resolução de problemas aditivos. Para isso foram selecionados 22 sujeitos de terceira, quarta e quinta séries do Ensino Fundamental de uma escola pública de Curitiba – PR. Ela constatou que existem relações entre o processo dialético construtivo das operações de adição e subtração e a resolução de problemas aditivos, uma vez que os procedimentos mais complexos e mais elaborados, assim como os maiores percentuais de respostas corretas, só foram alcançados pelos sujeitos que obtiveram níveis evoluídos de construção dialética.

Diante do exposto anteriormente, principalmente no que tange aos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, o jogo surge como possibilidade metodológica a ser utilizada em sala de aula, visando ao favorecimento da construção de conhecimentos pelo educando, principalmente do conhecimento lógico-matemático. É necessário abordarmos agora pesquisas que investigam o uso de jogos na educação, destacando também os jogos na Matemática.

3.2 Jogo de Regra e Educação

A importância do jogo para o homem vem sendo destacada há muito tempo. Huizinga (1980) conceitua o jogo como sendo:

> uma atividade ou ocupação voluntária exercida dentro de determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente

> obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da vida cotidiana *(p.33).*

O jogo sempre está presente desde o início de nossa vida e se estende por toda ela, constituindo-se em um processo de constante desestruturação e estruturação, como salienta Knappe (1998):

> *o jogo implica necessariamente a ação, o inter-relacionamento e a improvisação à partir da espontaneidade, a curiosidade e a aceitação do risco, dentro de um processo espiralado contínuo de desestruturação/estruturação. Jogo, assim entendido, não é só próprio dos primeiros anos de vida, como de todo o processo de crescimento e aprendizado vital em qualquer fase da vida* (p.33-34).

O aumento da capacidade da criança participar de jogos em grupos ocorre paralela a sua capacidade de descentrar e coordenar diferentes pontos de vista, sendo o jogo de regras uma atividade lúdica do ser socializado (PIAGET, 1994).

Ao tratar do jogo, Brougère (1998) considera três possíveis relações entre jogo e educação. A primeira delas diz respeito à recreação, pois, sendo o jogo responsável pelo relaxamento, proporciona ao aluno melhor aproveitamento e atenção. A segunda diz respeito ao interesse que a criança apresenta pelo jogo e que deveria ser muito bem explorado. E, por fim, o jogo é um meio pelo qual o pedagogo pode explorar a personalidade infantil, podendo ser útil ao ensino e à orientação do educando.

A importância dos jogos para o ensino da matemática é apontada por Macedo et al. (1997) quando afirmam que “no que diz respeito à matemática na perspectiva escolar, o jogo de regras possibilita à criança construir relações quantitativas ou lógicas: aprender a raciocinar e demonstrar, questionar o como e o porquê dos erros e acertos” (p.151).

As relações entre os jogos e a resolução de problemas, ressaltando os jogos de estratégia como desencadeadores de estratégias análogas ao processo de resolução de problemas, foram estabelecidas por Corbalán (1996). O autor (ibid) define etapas para elaboração de estratégias de um jogo: familiarização com o jogo; exploração inicial (procura de estratégias de resolução); aplicação da estratégia (seleção de posições ganhadoras, valorização das conjecturas etc.); e reflexão sobre o processo desencadeado.

Tendo como hipótese que o jogo poderia auxiliar na resolução de problemas heurísticos em Matemática, Kraus (1982) realizou dois estudos sobre o uso de resolução de problemas heurísticos nos jogos envolvendo Matemática. Para tal intento, foram formados dois grupos. O primeiro grupo foi composto por 10 alunos que tinham experiência em resolução de problemas e freqüentavam curso de pós-graduação em Matemática. O segundo grupo era formado por 20 alunos de oitava série que apresentavam experiência limitada em resolução de problemas, com pouca ou nenhuma instrução nesta área. Os dois grupos foram submetidos a sessões de uma variação do jogo Nim[2]. Os resultados mostraram, por meio de análises estatísticas, que nos dois estudos os sujeitos utilizaram uma grande variedade de resolução de problemas heurísticos durante o jogo, os quais podem ser classificados: dedução por síntese, dedução por análise, sistemático ensaio e erro, procurando padrões, revisando trabalhos anteriores, usando um problema relacionado, usando representações figurais e metas intermediárias. Constatou-se que é possível existir um vínculo entre a resolução de problemas em Matemática e jogos envolvendo Matemática.

O uso de jogos de regras na escola é destacado por Petty & Passos (1996). Elas analisam os jogos Ta-te-ti[3] e o Tangram[4], demonstrando as possibilidades de serem utilizados na prática pedagógica. Argumentam em favor de sua importância:

> *por um lado trabalha com o interesse e a atenção, desafia o raciocínio e estimula uma postura ativa da criança. Por outro, representa uma real possibilidade de conhecer como pensa – por meio das estratégias adotadas e quais as dificuldades que encontra – por meio de erros cometidos para tentar atingir os objetivos do jogo* (p.74)

Para o professor poder explorar as situações lúdicas, faz-se necessário conhecer como a criança raciocina e constrói o conhecimento.

A psicologia educacional vem enriquecer este conhecimento para o professor, uma vez que esclarece pontos importantes sobre o desenvolvimento e

[2] O jogo Nim envolve retiradas alternadas de quantidades. Trabalha com os conceitos de divisibilidade e múltiplos dos números, além do cálculo mental.
[3] O jogo Ta-te-ti consiste em alinhar três peças antes que o adversário o faça.
[4] O jogo Tangram tem como objetivo a construção de uma figura conforme o modelo dado, utilizando as sete peças do jogo.

a aprendizagem. Brito (2001a) aponta a necessidade da psicologia educacional estar presente na formação dos professores ao afirmar que o professor "deve ter profundo conhecimento das teorias da aprendizagem e suas relações com as teorias do desenvolvimento, entendendo a evolução destes conceitos (aprendizagem e desenvolvimento) ao longo da evolução da psicologia" (p.50).

O conteúdo do jogo precisa estar adequado às possibilidades da criança, despertando seu interesse, podendo, assim, estimulá-la a criar maneiras diferentes de jogá-lo.

Jesus & Fini (2001) ressaltam que:

> *o trabalho com jogos matemáticos pode ser realizado com diversas intenções. Mas, quando se pensa em aquisição de conhecimento deve-se ter bem claro que tipo de jogos usar, em qual momento deve ser inserido na sala de aula e a maneira de fazer a intervenção* (p.132).

Neste sentido, Kamii e DeVries (1990) reiteram a importância dos jogos em grupos para os processos de aprendizagem, assim como no desenvolvimento da cooperação e da autonomia. As autoras (ibid) afirmam que existem alguns critérios para se escolher um bom jogo, e, dentre eles, há a idéia de que o jogo é interessante quando consegue: "propor alguma coisa interessante e desafiadora para as crianças resolverem; permitir que as crianças possam se auto-avaliar quanto a seu desempenho; permitir que todos os jogadores possam participar ativamente do começo ao fim do jogo" (p.5-6).

A importância do jogo na escola é defendida por Macedo (1993) ao afirmar que este:

> *pode significar para a criança uma experiência fundamental de entrar na intimidade do conhecimento, da construção de respostas por um trabalho lúdico, simbólico e operatório integrados. Porque pode significar para a criança que conhecer é um jogo de investigação, por isso de produção de conhecimento, onde se pode ganhar, perder, tentar novamente, usar as coisas, ter esperanças, sofrer com paixão, conhecer com amor, amor pelo conhecimento e talvez de considerar as situações de aprendizagem de uma forma mais digna, mais filosófica, mais espiritual, superior* (p.167).

O valor educacional e cultural dos jogos matemáticos também foi estudado por Barta & Shaelling (1998). Os autores destacaram a criação e aplicação dos jogos matemáticos como facilitadores do processo de aprendizagem.

A intervenção pedagógica por meio de jogos nas aulas de Matemática foi apontada por Jesus (1999). O objetivo do autor (ibid) foi investigar o papel da intervenção pedagógica com domínio matemático em relação ao desenvolvimento e atitudes do aluno ante a Matemática. Para isso foram compostos dois grupos: experimental (N=53) e controle (N=51), envolvendo 104 alunos com idades entre onze e treze anos de duas escolas públicas. O autor constatou que os sujeitos mostraram diferenças significativas de desenvolvimento entre o grupo experimental e o grupo controle e também diferenças na média de pontuação da escala de atitudes entre os grupos.

Rabioglio (1995) propôs uma intervenção pedagógica com o jogo "Pega-varetas"[5] a fim de analisar a relação jogo-escola. Os sujeitos estudados foram adultos, professores e alunos de pré-escola (entre quatro e nove anos) e primeiras séries do ensino fundamental. Constatou o grande potencial didático envolvido no jogo, bem como o interesse do aluno, que assim consegue relacionar seus conhecimentos de aluno aos conteúdos escolares pertinentes.

O uso de jogos de regras na sala de aula foi investigado por Abreu (1993). Em seu estudo, analisou a construção do sistema de resolução do jogo "Senha"[6] pelas crianças, levando em consideração os níveis de compreensão para este jogo propostos por Piaget. Tendo como critério o desenvolvimento cognitivo e características afetivas, foram selecionados 16 sujeitos com idades entre cinco e onze anos de uma escola particular de São Paulo. Constatou que as situações-problema relacionadas ao universo infantil destacadas nas intervenções são úteis ao contexto pedagógico, pois envolvem os conteúdos escolares.

O jogo de regras "Senha" também foi estudado por Piantavini & Brenelli (2000), com o objetivo de propor uma intervenção pedagógica para favorecer a construção de possíveis pelos sujeitos. Para isso utilizaram duas intervenções psicopedagógicas distintas, sendo uma voltada à estrutura do jogo e outra a

[5] O jogo Pega-varetas tem como objetivo resgatar o maior número de varetas e marcar o maior número de pontos, sendo que cada cor de vareta corresponde a uma pontuação específica.

[6] O jogo Senha consiste em esconder alguma coisa (palvra, número, figura, etc) e propor ao outro jogador que a descubra.

situações problematizadoras. Os sujeitos foram divididos em dois grupos experimentais e um grupo controle, tendo 16 elementos em cada um deles. No pré e pós-testes, foi utilizada a Prova dos Possíveis (Arranjos Espaciais e Eqüidistância). Os grupos experimentais passaram pelas intervenções, sendo cada grupo submetido a um tipo diferente de intervenção. Os pesquisadores constaram que a intervenção possibilitou construções significativas aos sujeitos no que concerne aos possíveis, destacando a importância da intervenção, no sentido de propor desafios cognitivos que levem o sujeito a analisar os procedimentos utilizados, superando, assim, as deficiências dos processos de ensino e de aprendizagem.

A função psicopedagógica dos jogos de regras no relacionamento intragrupal é priorizada por Gimenes (1996). Utilizando o jogo "Quilles"[7], propõe situações lúdicas que envolvem situações sociais vividas, verificando as noções de regras, espaço, tempo, acaso e causa. Constatou-se, assim, que o jogo de regras favorece o relacionamento intragrupal.

O jogo de regras, do ponto de vista psicogenético, é destacado por Ortega, Silva & Fiorot (2000). A partir do jogo das "Quatro-Cores"[8], os autores investigaram a relação entre o fazer e o compreender nas situações-problema implícitas no jogo. Os sujeitos da pesquisa (N=50) eram alunos de duas escolas particulares do Espírito Santo, com idades entre 6 e 14 anos. Divididos em cinco grupos com 10 elementos cada um, segundo as idades (6, 8, 10, 12 e 14 anos), foi solicitado que juntassem quatro figuras, demarcadas em regiões, variando em grau de complexidade e tendo como regra utilizar quatro cores no máximo e não juntar as regiões limítrofes com a mesma cor. Também foram elaboradas questões referentes às estratégias de solução de problemas utilizadas pelos sujeitos.

Constataram que, embora as crianças consigam resolver as situações de jogo no plano do fazer, é somente mais tarde que conseguem compreender a

---

[7] O "Quilles" é constituído por um tabuleiro com lugares marcados para colocar nove pinos de madeira e uma haste com uma bola presa por um barbante. O jogador deve lançar a bola a fim de derrubar o maior número de pinos e assim o maior número de pontos.

[8] O jogo "Quatro-Cores" tem por objetivo pintar uma região utilizando somente quatro cores de maneira que as regiões vizinhas não possuam as mesmas cores.

estrutura do problema. Ou seja, pode-se falar numa tomada de consciência a partir de uma idade mais avançada.

Outros aspectos, tais como a socialização, a comunicação, o emocional e o cognitivo, podem ser enfocados em atividades lúdicas. Souza (2000) destaca as contribuições do lúdico, ao afirmar que:

> *compreender e aplicar este instrumento, o lúdico, assim, como fazer uso de seus inumeráveis benefícios, auxiliará no processo da construção do conhecimento da criança ou adolescente, bem como solucionar aos conflitos internos que podem acarretar em um bloqueio na aprendizagem* (p.22).

Os jogos de regras em diferentes contextos escolares também foram enfocados por Barreto (1996), Costa (1991), Lola (1995), Melo (1993) e Petty (1995), citados por Guimarães (1998) em estudo anterior. Tais autores concluíram que os jogos apresentam grande potencial para o desenvolvimento cognitivo e moral dos educandos, como ressalta Petty (1995):

> *promover o desenvolvimento do raciocínio das crianças por meio de situações em que jogos de regras são instrumentos para exercitar e estimular um pensar com lógica e critério, porque interpretar informações, buscar soluções, levantar hipóteses e coordenar diferentes pontos de vista são condições para jogar* (p.2).

Dada a importância dos jogos de regras na prática educativa, convém assinalar, a seguir, trabalhos que versam sobre o jogo e a Educação Matemática, área de interesse deste estudo.

O papel metodológico do jogo na aprendizagem da Matemática é focalizado por Grando (1995). Dentre os aspectos estudados, englobam-se as concepções, relações e funções da utilização dos jogos na Matemática; uma visão crítica a respeito do ensino desta área de conhecimento; e as possibilidades psicopedagógicas (competição, criatividade, raciocínio, desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, seriedade e aspecto sócio-cultural).

Constatou-se a situação caótica vivida pelo ensino da Matemática, predominando a quantidade de conteúdos ao invés da qualidade, sem uma metodologia de ensino adequada para a compreensão dos alunos. Como os jogos de regras apresentam um tipo de linguagem compatível à criança, Grando (1995) ressalta que os jogos de estratégia e/ou construção de conceitos, juntamente com os exercícios de conceitos matemáticos já aprendidos, podem auxiliar na transformação desse cenário atual do ensino da Matemática.

Em outro estudo, Grando (2000) amplia sua pesquisa anterior (1995), ao investigar os processos desencadeados na construção de conceitos e habilidades matemáticas por meio de uma intervenção pedagógica via jogos de regras. Fizeram parte da amostra oito alunos de sexta série do ensino fundamental, com idades entre onze e doze anos, com os quais foram realizadas atividades de intervenção pedagógica via jogos de regras envolvendo a Matemática. Os resultados apontam que o processo desencadeado durante as situações de jogo são responsáveis pela construção dos procedimentos e conceitos matemáticos.

Pesquisando crianças com idades entre sete e doze anos, Azevedo (1993) analisou as possíveis contribuições dos jogos e materiais pedagógicos para a construção dos conceitos fundamentais da Matemática. Partindo do aporte teórico piagetiano para explicar o processo de abstração das crianças na construção destes conceitos, propôs linhas metodológicas para a intervenção via jogos.

Os efeitos de uma intervenção psicopedagógica por meio do processo de "solicitação do meio"[9] na compreensão do conhecimento aritmético e no comportamento operatório de crianças com dificuldades de aprendizagem foram verificados por Zaia (1996). Os procedimentos utilizados pelos sujeitos e os procedimentos da própria intervenção também foram analisados. As provas piagetianas para o Pensamento Operatório Concreto foram utilizadas a fim de verificar o nível de desenvolvimento operatório dos oito sujeitos com idades entre dez e treze anos, freqüentadores de segunda a quarta séries do ensino fundamental. As sessões de intervenção (N=25) envolveram jogos de regras que privilegiavam: a construção das noções de conservação de quantidades contínuas e descontínuas, classificação e seriação; os mecanismos operatórios aditivos e as operações aritméticas.

---

[9] Desenvolvido por Mantovani de Assis (1976).

Dentre tais jogos, pode-se citar: Kalah[10], Tira e Põe[11], Jogo dos Bombons[12], Cara a cara[13] etc.

A intervenção psicopedagógica possibilitou o avanço no desenvolvimento dos sujeitos que demonstraram, também, atitudes fundamentadas no respeito mútuo e reciprocidade, podendo tal intervenção ser recomendada para crianças que apresentam dificuldades de aprendizagem.

O uso de jogos é um recurso favorável ao trabalho com o cálculo mental, como afirma Parra (1996). Os jogos estimulam a autonomia do aluno em relação ao seu raciocínio na busca de soluções para as situações-problema do jogo. A autora aponta que:

> *um dos primeiros requisitos é que os alunos comecem a tomar consciência dos procedimentos que utilizam; eles necessitam saber o que é que sabem (no sentido de ter disponível este conhecimento) e como podem apoiar-se no que sabem para obter outros resultados* (ibid, p.216).

Esta idéia é compartilhada por Petty (apud GRANDO, 2000) quando considera que:

> *jogar é uma das atividades em que a criança pode agir e produzir seus próprios conhecimentos [...] a idéia será sempre considerá-los (os jogos) como uma possibilidade de exercitar ou estimular a construção de conceitos e noções também exigidos para a realização de tarefas escolares. Neste sentido, o jogo serve para trabalhar conceitos que, quando excluídos de seu contexto, são muito abstratos, muito complicados para as crianças entenderem* (p.62).

O registro de pontos durante as jogadas possibilita ao professor acompanhar como seu aluno está pensando e como utiliza os conteúdos escolares para resolver a situação-problema do jogo. Kamii & Joseph (1994)

---

[10] O jogo Kalah é composto por um tabuleiro retangular de madeira em que existem 14 buracos, sendo seis de cada lado e dois buracos maiores situados nos extremos dos mesmos denominados oásis. O objetivo do jogo é colocar, no decorrer do mesmo, o maior número de pedras no próprio oásis, ou seja, obter maior quantidade de pedras que o adversário.

[11] Pode ser jogado com a cartela cheia ou vazia e pode-se optar pelo uso ou não dos dados de sinal e cores. Os jogadores jogam o dado e retiram ou colocam o número de fichas em suas cartelas. Vence quem esvaziar ou encher sua cartela primeiro.

[12] Cada jogador fica com seis bombons e coloca outros seis dentro da caixa. Quando sair o sinal de +, deve pegar na caixa a quantidade indicada pelo dado, e quando sair o sinal de -, pega dentre os seus bombons a quantidade indicada e coloca dentro da caixa. Registra a operação feita e o resultado. Vence aquele que juntar os 12 bombons fora da caixa primeiro.

consideram o registro de pontos como um momento fundamental e altamente significativo para a criança:

> *escrever para saber quem está ganhando no jogo é muito diferente do que escrever numa folha de papel apenas por obediência ao professor. Escrever de uma maneira que possa ser compreensível para o professor é muito diferente do que escrever 'corretamente' do ponto de vista daquilo que foi convencionado em matemática* (p.187-8).

Ao pesquisar jogos de regras, Brenelli (1986) propôs uma análise das coordenações existentes entre os observáveis de um jogo (jogo de "Cores e Pontos" do "Quips"[14]) proposto pelo experimentador e outro proposto pela criança. A partir do contexto individual e grupal, foram analisadas a elaboração, a execução e a prática das regras propostas pelo experimentador e a compreensão das noções implícitas na situação. Além disso, verificou-se a influência da idade, o nível operatório e os desempenhos dos sujeitos em duas situações de jogos.

Para isso 30 sujeitos foram selecionados, com idades entre cinco e nove anos freqüentadores do pré (Educação Infantil) à terceira série do ensino fundamental de escola pública de Campinas. Dentre as situações-problema do jogo, destacaram-se as relativas às noções de conservação, seriação e classificação. A idade e o nível operatório dos sujeitos proporcionaram-lhes melhor desempenho no jogo. Neste sentido, verificou-se que o jogo de regras auxilia no desenvolvimento cognitivo e social da criança, sendo um meio de exercitar a cooperação e operação.

Posteriormente, Brenelli (1993) analisou a influência de uma intervenção pedagógica por meio de jogos no comportamento operatório e na compreensão do conhecimento aritmético de crianças com dificuldades de aprendizagem.

Os sujeitos do estudo eram alunos de terceira série do ensino fundamental de escolas públicas, com idades entre oito e onze anos, divididos em dois grupos: experimental e controle. Para o pré e pós-teste, foram utilizadas as provas operatórias de conservação, inclusão e seriação; e as provas de conhecimento

---

[13] Os jogadores escondem uma carta com um personagem. Cada um tem que adivinhar qual a cara que o outro pegou.

[14] O jogo é composto por quatro cartelas, 84 fichas coloridas e dois dados, sendo um de pontos e outro de cores. As cartelas contêm desenhos coloridos diferentes, com 21 orifícios nos quais as fichas deverão ser colocadas. O jogo trabalha cor e quantidade.

aritmético (noção de soma, problemas de subtração, formalização de equações e multiplicação e divisão aritméticas, valor posicional da numeração).

Os jogos “Quilles”[15] e “Cilada”[16] foram utilizados na intervenção. Constatou-se um progresso significativo em relação à operatoriedade e à aquisição das noções aritméticas envolvidas nos sujeitos do grupo experimental.

Ampliando os trabalhos anteriores (BRENELLI, 1986/1993), que focalizavam a intervenção pedagógica via jogos para pequenos grupos, Brenelli (1999) propôs um estudo sobre intervenção para a classe toda. O problema de tal estudo consistiu em verificar em que medida a intervenção com jogos de regras realizada pelo professor em nível coletivo poderia favorecer o desenvolvimento operatório das crianças.

Os sujeitos da pesquisa (N=55) eram de segunda série do Ensino Fundamental da rede pública de Campinas, sendo divididos em dois grupos: experimental (segunda série A =30) e controle (segunda série B=25). O nível operatório foi avaliado em pré e pós-testes por provas piagetianas: conservação de quantidades discretas, inclusão hierárquica de classes e duas provas de classificação multiplicativa (matrizes).

Enquanto o grupo experimental passou por pré e pós-testes, tendo a intervenção com os jogos: Imagem e Ação[17], Cilada, Senha, Quilles, Sopa de Letras, Cara a Cara, Passa Letra[18], Resta Um[19], o grupo controle fez somente o pré e o pós-testes. A intervenção ocorreu durante seis meses, sendo as atividades propostas durante duas horas, uma vez por semana.

---

15 O “Quilles” é constituído por um tabuleiro com lugares marcados para colocar nove pinos de madeira e uma haste com uma bola presa por um barbante. O jogador deve lançar a bola a fim de derrubar o maior número de pinos e assim o maior número de pontos.

16 O “Cilada” possibilita a formação de diferentes quebra-cabeças.

17 Trata-se de um jogo de tabuleiro, no qual o objetivo é percorrer o tabuleiro, sendo que os jogadores devem adivinhar a palavra. São seis categorias possíveis de palavras: objeto, ação, difícil, lazer, todos.

18 O jogo Passa-letra tem por objetivo descobrir as palavras dos adversários, eliminando-os do jogo, e permanecer com sua palavra desconhecida dos demais até o final da partida.

19 O jogo é constituído por um tabuleiro com cavidades, com 32 ou 36 peças para ocupar essas cavidades. O objetivo é fazer com que reste somente uma peça sobre o tabuleiro.

Constatou-se que os sujeitos do grupo experimental apresentaram progressos significativos ao serem submetidos ao trabalho de intervenção com j jogos em sala de aula, principalmente quando comparados ao grupo controle. Já o nível de operatoriedade do grupo controle, no pós-teste, era o mesmo que o nível do grupo experimental no pré-teste. Desse modo, pode-se afirmar que as atividades lúdicas favorecem o desencadeamento dos processos responsáveis pela construção do pensamento operatório nos sujeitos (BRENELLI, 1999).

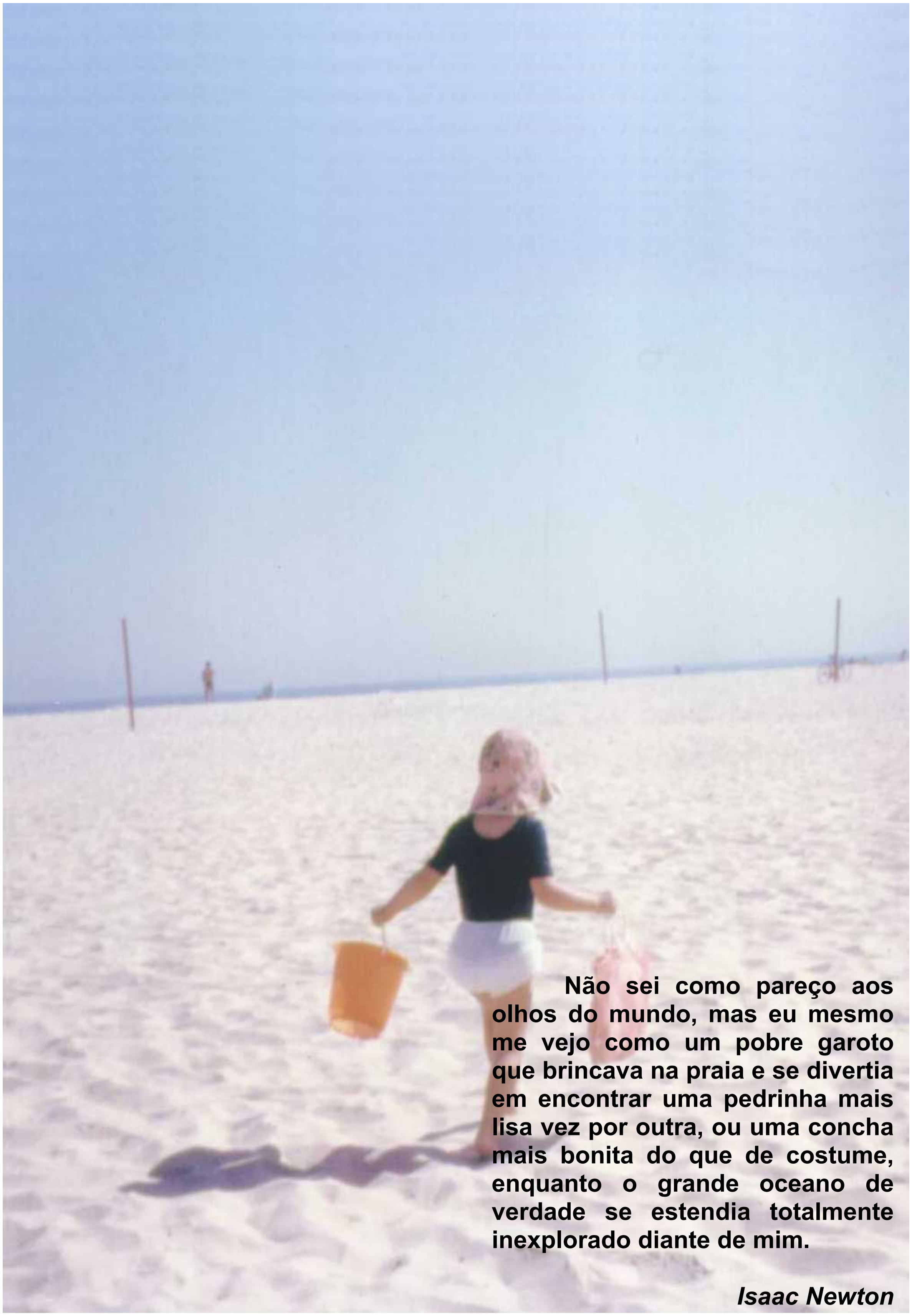
A intervenção, via jogos de regras, também foi trabalhada por Pauleto (2001). O objetivo do autor era analisar um programa escolar onde se introduziu jogos de regras, a fim de favorecer a construção e o desenvolvimento em operações, problema e aritmética elementar em crianças de segunda série do Ensino Fundamental de uma escola pública. Para tanto, foram estudados 52 sujeitos, sendo 28 pertencentes à classe experimental, na qual foi realizada a intervenção utilizando jogos, e 24 sujeitos pertencentes à classe controle.

Os sujeitos realizaram um pré-teste e dois pós-testes compostos por: 10 operações de adição, 10 de subtração, 4 problemas de adição e 9 de subtração e a compreensão do valor posicional da numeração. Após a análise quantitativa dos dados e breve análise qualitativa da intervenção, pôde-se afirmar que a intervenção pedagógica foi favorável na direção dos melhores desempenhos dos sujeitos de classe experimental nas tarefas propostas.

O lúdico pode contribuir imensamente para a construção dos conhecimentos, uma vez que proporciona situações concretas e valoriza a relação professor-aluno na sala de aula. Como afirma Bicudo (1985):

> brincando com os objetos, a criança os agrupa, compara, analisa, submete-os a tratamentos diversos, emparelha, estabelece correspondência, reúne, separa, ordena de acordo com diferentes critérios. O professor, observando, informa-se sobre a pesquisa do aprendiz e as suas estruturas cognitivas. Situações concretas tornam a comunicação mais objetiva. A interação professor-aluno, por ser diferenciada, torna-se produtiva *(p.68).*

A importância da escola fazer parte da vida do aluno por meio da idéia de um laboratório de matemática foi estudada por Aguiar (1999). Este laboratório seria um espaço para problematização dos assuntos vistos em sala de aula, utilizando jogos e projetos, além de outras atividades que levem à continuidade do desenvolvimento das habilidades e dos conhecimentos científicos.



Não sei como pareço aos olhos do mundo, mas eu mesmo me vejo como um pobre garoto que brincava na praia e se divertia em encontrar uma pedrinha mais lisa vez por outra, ou uma concha mais bonita do que de costume, enquanto o grande oceano de verdade se estendia totalmente inexplorado diante de mim.

Isaac Newton

4. DELINEAMENTO DA PESQUISA

4.1 Problema e Justificativa

A Matemática, de acordo com a perspectiva piagetiana, caracteriza-se em ser um processo de construção relacionado ao desenvolvimento endógeno, procedendo por etapas, de tal forma que as combinações características de cada etapa sejam novas formas enquanto combinações e se exercem sobre elementos dados na etapa anterior (PIAGET, 1973). Para este processo, são necessárias a abstração reflexiva e a generalização construtiva, uma vez que a reconstrução de um patamar a outro superior está ligada às abstrações reflexivas e às generalizações construtivas, visto que estas são responsáveis pelas construções de novas formas a partir das já existentes, atuando como mecanismos condutores da criação das novidades em relação aos conteúdos e às formas.

Neste sentido, a construção das estruturas multiplicativas está diretamente ligada a esses processos, na medida em que, por meio da coordenação e diferenciação progressivas entre compreensão e extensão, elas podem ser construídas a partir das estruturas aditivas já existentes.

Segundo Piaget et al. (1986), o desenvolvimento da multiplicação é muito mais complexo que o da adição:

> *em seu princípio, a multiplicação parece reduzir-se a uma adição de adições, mas estas são sintetizadas numa composição simultânea ao invés de serem efetuadas sucessivamente. Assim 3x4=12 pode ser reduzido a 3+3+3+3 ou 4+4+4, cada uma dessas parcelas adicionadas às outras comportando ela mesma uma adição interna pois 3=1+1+1 e 4 =1+1+1+1. Todavia, observa-se logo a diferença seguinte. No caso da multiplicação 3x4=12 é preciso distinguir três estágios (...) em primeiro lugar há o 'todo' (aqui 12, permanece o mesmo se invertermos 3x4 ou 4x3), em segundo lugar vêm seus subconjuntos, que denominamos 'partes" (termo substituído algumas vezes por 'continentes' ou 'pacotes'): trata-se de três classes de 4 elementos cada uma; em terceiro lugar vêm pois os "elementos" ou unidades que são em número de 4 para cada 'parte' e desempenham o papel de 'contido' para cada uma delas* (p.72).

O autor coloca uma diferença importante que existe entre adição e multiplicação:

> *no caso da multiplicação (e isto é particularmente evidente se a apresentamos sob a forma de uma adição de adições), as 'partes' devem ser iguais entre si e conter o mesmo número de 'elementos' iguais entre si. No caso da adição simples, ao contrário, a determinação do todo não exige a igualdade nem das 'partes' nem mesmo dos elementos (...). A multiplicação é pois mais complexa e comporta quantificações implícitas mais numerosas, donde o interesse em estudar as etapas de sua formação no curso de suas diferenciações da adição* (p.73).

Pode-se afirmar, assim, que a multiplicação é construída a partir da adição, começando por adições sucessivas, por meio dos processos de abstração reflexiva e generalização construtiva, as quais geram novas formas e resultam na multiplicação.

Considerando essas características e as complexidades relativas às resoluções de problemas de estrutura multiplicativa, como apontadas por Vergnaud (1991), pode-se colocar, por um lado, um primeiro problema, norteador da presente investigação: **"O desempenho dos alunos, na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, difere em função dos diferentes níveis de construção da noção de multiplicação e de generalização?"**

Por outro lado, como foi verificado na revisão bibliográfica, os jogos de regras constituem meios favoráveis para o processo de construção dos conhecimentos pelos sujeitos, em especial no que diz respeito ao conhecimento matemático. Isto porque as situações-problema propostas durante o jogo podem desencadear os processos de equilibração majorante e seus mecanismos de abstração reflexiva e generalização construtiva.

Dando prosseguimento ao trabalho realizado durante o mestrado (GUIMARÃES, 1998), no qual se pôde destacar no jogo de argolas situações que desencadeavam a operação de multiplicação, optou-se por utilizar este mesmo jogo, a fim de melhor esclarecer o papel das atividades lúdicas no desempenho dos sujeitos na resolução de problemas de estrutura multiplicativa.

Assim sendo, e apoiando-se nos trabalhos de Vergnaud (1991), Nunes e Bryant (1997), Carraher et al. (1988), Lopes (2002), dentre outros que enfatizam a necessidade das situações escolares viabilizarem diferentes representações na solução de problemas complexos em aritmética, parte-se do princípio que o jogo oportunizaria aos sujeitos resolverem os problemas utilizando diferentes maneiras de representação quer nos registros das jogadas, quer na elaboração de procedimentos partindo da ação sobre os objetos.

Isso posto, um outro problema pode ser apresentado: **"Os sujeitos, após a oportunidade de criarem outras formas de representações, via jogo de argolas, que ensejam situações de resoluções de problemas de estrutura multiplicativa, apresentariam melhores desempenhos na resolução escrita dos problemas de estrutura multiplicativa?"**

4.2 Objetivos

1. Verificar a correspondência entre os níveis de generalização apresentados pelos sujeitos na prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes (PIAGET et al., 1984) e os diferentes níveis de construção da noção de multiplicação obtidos na Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa (PIAGET et al., 1986).

2. Analisar a relação existente entre os níveis de multiplicação obtidos na Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa de Piaget e o desempenho dos sujeitos em problemas de estrutura multiplicativa antes e após serem submetidos à aplicação do jogo de argolas.

3. Analisar a relação existente entre os níveis de generalização e os desempenhos dos sujeitos em problemas de estrutura multiplicativa antes e após serem submetidos à aplicação do jogo de argolas.

4. Verificar o papel da atividade lúdica que envolve relações multiplicativas no desempenho de sujeitos na resolução de problemas de estrutura multiplicativa.

4.3 Método

4.3.1 Dados Demográficos dos Sujeitos

Foram analisados 30 alunos de terceira e quarta séries do Ensino Fundamental de uma escola pública de Mirassol. O número de sujeitos da amostra (n=30) foi obtido mediante a aplicação individual da Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa (Piaget et al., 1986) a todos os alunos de duas classes de quarta séries e uma classe de terceira série. Dentre todos esses sujeitos avaliados, escolheu-se aleatoriamente os 30 sujeitos da amostra para a constituição de três grupos compostos cada um por 10 sujeitos segundo os diferentes níveis evolutivos quanto à noção de multiplicação. O Quadro 1, a seguir, apresenta a descrição dos sujeitos envolvendo a série escolar, a idade e os níveis de construção da noção de multiplicação. A descrição detalhada dos três níveis propostos por Piaget (ibid) será apresentada na análise dos resultados.

QUADRO 1: Caracterização dos Sujeitos

<table>
<tr><th>NÍVEIS DE MULTIPLIÇÃO</th><th>SUJEITOS</th><th>SÉRIE</th></tr>
<tr><td>III</td><td>GAB (9; 4)
RIC (9;10)
APA (10;0)
JES (10;3)
MAR (10;3)
MUR (10;6)
PRI (10;6)
VIV (10;7)
NAY (11;0)
THA (11;2)</td><td>Quarta
n=10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">II</td><td>BEA (9;6)
JOS (10;1)
NAT (10;2)
GUH (10;4)
LAU (10;7)
MCA (10;8)
DAE (10; 8)
TAT (10;10)</td><td>Quarta
n=8</td></tr>
<tr><td>JOA (9;8)
LUI (9;10)</td><td>Terceira
n=2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td>FRA (10;4)
GIS (10;5)
KLI (10;10)</td><td>Quarta
n=3</td></tr>
<tr><td>GUI (8;8)
ANG (9;1)
FEL (9;1)
LAY (9;3)
MAT (9;6)
BIA (9;7)
REG (9;10)</td><td>Terceira
n=7</td></tr>
</table>

A correspondência entre níveis de construção da noção de multiplicação e série escolar encontra-se sistematizada na Tabela 1 a seguir.

TABELA 1 - Nível de Construção da Noção de Multiplicação dos Sujeitos e Série Escolar

NÍVEIS DE MULTIPLICAÇÃO	Quantidade de sujeitos	Série
III	10	Quarta
II	08	Quarta
	02	Terceira
I	03	Quarta
	07	Terceira

Conforme se pode observar no quadro anterior, todos os sujeitos (N=10) do nível III de multiplicação estão cursando a quarta série do Ensino Fundamental. A maioria dos sujeitos (N=8) do nível II de multiplicação também são alunos de quarta série, sendo apenas dois de terceira série. E finalmente, o nível I de multiplicação é o que mais apresenta alunos de terceira série (N=07), tendo ainda três sujeitos de quarta série.

Deste modo, vê-se que dos 30 sujeitos participantes da pesquisa, 21 são alunos de quarta série e nove de terceira série.

TABELA 2: Comparação entre os Níveis de Multiplicação das Séries Selecionadas

Resultado do Teste de Kolmogorov-Smirnov para 2 x n – amostras independentes

Tamanho da primeira amostra	21.000
Tamanho da segunda amostra	9.000
Desvio máximo (bilateral)	0,6349
Valor crítico(.05) =	0.5418
Valor crítico(.01) =	0.6494
P (bilateral) =	< 0.05
Qui-Quadrado (unilateral) =	10.1587
Graus de Liberdade	2
P (unilateral)	< 0.0062

(Teste Kolmogorov-Smirnov para 2xn-amostras independentes)

A análise estatística, conforme o Teste de Kolmogorov-Smirnov para 2 x n – amostras independentes (Tabela 2), mostrou que houve evidência de diferença significativa para a distribuição das séries entre os níveis de multiplicação.

Convém destacar que a série e o gênero dos sujeitos não serão considerados como variáveis no presente estudo, uma vez que apenas vêm caracterizar os dados demográficos dos sujeitos.

O Quadro 2 ilustra a composição da amostra de acordo com o gênero dos participantes da pesquisa.

QUADRO 2: Gênero dos Sujeitos

GÊNERO	SUJEITOS	SÉRIE
Masculino	RIC (9;10) KLI (10;0) MAR (10;3) GUH (10;4) MUR (10;6) THA (11;2)	Quarta
	GUI (8;8) FEL (9;1) MAT (9;6) JOA (9;8) LUI (9;10)	Terceira
Feminino	APA (9;1) GAB (9;4) BEA (9;7) JOS (10;1) NAT (10;2) JES (10;3) FRA (10;4) GIS (10;5) PRI (10;6) LAU (10;7) VIV (10;7) MCA (10;8) DAE (10;8) TAT (10;10) NAY (11;0)	Quarta
	ANG (9;1) LAY (9;3) BIA (9;7) REG (9;10)	Terceira

O Quadro 2 indica 11 sujeitos de sexo masculino (seis meninos de quarta série e cinco de terceira série) e 19 sujeitos de sexo feminino (quinze meninas de quarta série e quatro de terceira série).

TABELA 3: Comparação entre séries e gêneros

GÊNERO Frequency Percent Row Pct Col Pct	SÉRIE Quarta	 Terceira	 Total
fem	15 50.00 78.95 71.43	4 13.33 21.05 44.44	19 63.33
masc	6 20.00 54.55 28.57	5 16.67 45.45 55.56	11 36.67
Total	21 70.00	9 30.00	30 100.00

p-valor=0.2252 (teste Exato de Fisher)

A tabela acima mostra que, segundo o Teste Exato de Fisher (p-valor=0,2252), não houve evidência de diferença significativa para a distribuição das séries entre os gêneros.

4.3.2 Materiais

Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa

(PIAGET et al., 1986, p.72-88)

Em todas as situações de prova, foram utilizados mini-brinquedos (um pato e uma galinha) e um punhado de grãos idênticos.

Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa

(VERGNAUD, 1991, p.197-211)

Folha de sulfite contendo seis problemas de estrutura multiplicativa do tipo isomofismo de medidas, lápis grafite e borracha.

Prova da Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes

(PIAGET et al., 1984, p.11-29)

Para esta prova, foram utilizados quadrados e círculos de cartolina, grandes e pequenos, vermelhos e verdes, sendo oito classes de n elementos cada uma.

Jogo de Argolas

(GUIMARÃES, 1998)

Composto por nove hastes de madeira coloridas (verde, azul, vermelho, rosa, amarelo, branco, marrom, laranja e preto) fixadas em uma base quadrada, indicando pontos que variam de um a nove; conjunto de argolas; conjunto de fichas confeccionadas em papel cartão com as respectivas cores das hastes.

4.3.3 Procedimento de coleta de dados

Após a escolha da escola, foram selecionados os sujeitos participantes do estudo. A experimentadora combinou com a coordenação da escola e os respectivos professores das turmas os horários e dias em que poderia realizar o trabalho, assim como participou aos alunos da pesquisa a ser desenvolvida.

A coleta de dados iniciou-se em junho e terminou em dezembro de 2002. Durante este período foram feitas 5 sessões com cada sujeito, sendo uma para cada fase da coleta de dados. Cada sessão teve duração de aproximadamente 40 minutos.

O Quadro 3, a seguir, apresenta a distribuição das sessões realizadas:

QUADRO 3: Atividades realizadas nas sessões

Sessões	Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa	Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes	Prova de Matemática (Fase 1)	Prova de Matemática (Fase 2)	Jogo de Argolas
Sessão 1	X				
Sessão 2			X		
Sessão 3		X			
Sessão 4					X
Sessão 5				X	

O procedimento de coleta de dados obedeceu a cinco etapas:

1) Seleção dos sujeitos: Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa (PIAGET et al., 1986, p.72-88).

2) Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa (VERGNAUD, 1991, p.197-211). Fase 1 antes da aplicação do jogo.

3) Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes (PIAGET et al. 1984, p.11-29).

4) Realização do Jogo de Argolas.

5) Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa (VERGNAUD, 1991, p.197-211). Fase 2 após a realização do jogo.

É importante registrar que as sessões se desenvolveram tranqüilamente, as crianças participaram mostrando grande interesse nas atividades propostas, principalmente na aplicação do jogo de argolas.

Primeira Etapa: Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa

(PIAGET et al., 1986, p.72-88)

A experimentadora aplicou, individualmente, aos sujeitos a prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa para verificar o nível de construção da noção de multiplicação (PIAGET et al., 1986).

Os resultados desta prova permitiram selecionar 30 sujeitos, sendo 10 sujeitos do Nível I, 10 sujeitos do Nível II e 10 sujeitos do Nível III.

A prova envolveu quatro situações, sendo que para as situações I, III e IV houve como dados de base:

G (galinha) come 3 grãos de uma vez (=1 pacote C)

P (pato) come 2 grãos de uma vez (=1 pacote P)

<u>Situação 1: Multiplicação (4x3=?x?)</u>

A situação I envolveu a multiplicação. A experimentadora coloca, para a galinha (G)[20], 4 pacotes de 3 grãos. Pede-se ao sujeito que prepare, para o pato (P), a quantidade de grãos, levando em consideração o dado de base (P come 2 grãos de uma vez).

"Você poderia preparar, para o pato, a mesma quantidade de grãos?"

"Explique-me o que você fez."

20 A partir de agora utilizaremos a letra G para a galinha e P para o pato.

Situação 2: Associatividade (2x(4x3)=(2x4)x3)

A situação 2 envolve associatividade e tem como dado de base: P e G comem três grãos de uma vez.

A experimentadora prepara, para C, duas refeições de 4 pacotes e pede ao sujeito que prepare, para P, a quantidade necessária para comer em uma única refeição.

> *"Agora o pato e o galinha comem três grãos de uma vez. Eu preparei duas refeições, o almoço e o jantar com quatro pacotes em cada refeição para a galinha. Você poderia preparar, para o pato, a quantidade necessária para ele comer em uma só refeição?"*

Num segundo momento, a experimentadora prepara, para G, duas refeições de 4 pacotes e pede para a criança preparar, para P, outro tanto de grãos, arranjado igualmente em duas refeições:

> *"Agora vou preparar duas refeições de quatro pacotes para a galinha. Eu gostaria que você preparasse, para o pato, outro tanto de grãos, mas ele comeria igualmente em duas refeições."*

Após a constituição do conjunto de grãos P, é solicitado à criança um julgamento concernente à igualdade dos conjuntos de grãos G e P.

> *"Você acha que as comidas do pato e da galinha são o mesmo tanto? Como você sabe?"*

A seguir, os grãos de P são colocados num monte e é pedido à criança para preparar, para P, a quantidade necessária para uma única refeição a partir dos grãos desse monte.

> *"Agora eu gostaria que você preparasse, para o pato, a quantidade necessária para uma só refeição usando os grãos deste monte."*
>
> *"Explique-me o que você fez."*

Situação 3: Associatividade Comutativa (2x4x3)=(3x?x2)

Na situação 3, é trabalhada a associatividade comutativa. A experimentadora prepara, para G, duas refeições de 4 pacotes com 3 grãos cada e pede-se à criança que prepare, para P, outro tanto de grãos, mas para 3 refeições e respeitando o dado de base inicial:

"Eu preparei, para a galinha, duas refeições com quatro pacotes de três grãos cada uma. Gostaria que você preparasse, para o pato, outro tanto de grãos, mas em três refeições. Agora o pacote do pato é de dois grãos."

"Fale-me como você fez."

Situação 4: Repetição de Correspondências Injetivas

A situação 4 envolve a repetição de correspondências injetivas. A experimentadora e a criança pegam simultaneamente um pacote C (=3 grãos), um outro pacote P (=2 grãos), por seis vezes repetidas:

"Nós vamos pegar ao mesmo tempo: um pacote para a galinha e um pacote para o pato até dar seis vezes."

Os dois conjuntos de grãos são a seguir escondidos. Pede-se à criança que julgue se os dois conjuntos contêm um número igual de grãos, e que avalie, numericamente, a diferença entre as duas coleções:

"Você acha que os dois conjuntos têm o mesmo tanto de grãos?"

"Como você sabe? Qual tem mais? Quanto a mais? Explique-me como você faz."

Este julgamento é generalizado a um número N (muito grande) não-realizado de repetições da mesma ação.

"Se nós ficássemos colocando os grãos como nós fizemos antes, o que você acha que aconteceria?"

"Como você sabe?"

Todas as situações desta prova incluem as variáveis de classes da multiplicação: "elementos"= número de grãos por pacote (multiplicando); "partes" ou continentes"= número de pacotes (multiplicador); e o "todo"= número de grãos em sua totalidade (produto).

Segunda Etapa: Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa

(VERGNAUD, 1991, p.197-211)

A experimentadora aplicou, individualmente, aos sujeitos a Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa, composta por 6 problemas de estrutura multiplicativa (Ver Anexo A).

Esta prova teve por objetivo observar os procedimentos de resolução escrita de problemas utilizados pelos sujeitos.

Os problemas propostos aos sujeitos foram desenvolvidos a partir dos trabalhos de Vergnaud (1991), com relação aos problemas de estrutura multiplicativa, os quais envolvem multiplicação e divisão.

A experimentadora leu os problemas ao sujeito para evitar que problemas de leitura pudessem interferir nos resultados.

Terceira Etapa: Prova da Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes

(PIAGET et al. 1984, p.11-29)

Para verificar o nível de generalização em que se encontravam os sujeitos foi utilizada a Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes (PIAGET et al. 1984, p.11-29). A experimentadora aplicou a prova, individualmente, nos 30 sujeitos. O experimento envolveu duas situações.

Situação 1:

Na situação 1, o material é apresentado à criança pela experimentadora:

"Você poderia falar para mim o que são essas coisas que temos aqui?

Após a criança ter explorado o material, é solicitado que escolha as figuras como queira, mas que haja tantos (ou muito da mesma coisa) quadrados quanto grandes.

"Você pode escolher as figuras como quiser, mas precisa ter tantos quadrados quanto grandes."

"Você poderia colocar para mim um número igual de quadrados e de grandes?"

Pede-se então, que encontre, posteriormente, outras soluções possíveis para o mesmo problema.

"Você tem outra idéia para fazer a mesma coisa?"

"Teria outro jeito?"

"Mostre-me todas as formas possíveis de fazer isso."

Caso o sujeito apresentasse dificuldade, fazia-se uma segunda pergunta em uma situação que sugerisse imediatamente a resposta. Nesta situação, a experimentadora colocava quatro quadrados grandes vermelhos e um círculo grande verde e solicitava:

"Você pode encontrar para mim um número igual de círculos e de vermelhos?"

<u>Situação 2:</u>

Na situação 2, apresenta-se ao sujeito um quadrado grande e verde e é solicitado que encontre uma figura que seja seu contrário.

"Você poderia achar para mim uma figura que seria contrária a esta?

Depois da resposta, pede-se outros contrários:

"Mostre-me outros contrários. Teria outra figura contrária?"

Por fim, pede-se qual é o mais contrário:

"Eu gostaria que você me mostrasse qual é o mais contrário."

"Existe alguma diferença entre os contrários?"

Caso o sujeito mostrasse inicialmente e somente o círculo pequeno vermelho, perguntava-se:

"Por que só há esta figura que seja o contrário?"

"Como você me explicaria?"

Quarta Etapa: Realização do Jogo de Argolas

(GUIMARÃES, 1998)

O jogo de argolas foi realizado individualmente pelos sujeitos, com uma média de cinco partidas por sujeito. Esta fase teve como objetivo propor situações-problema que envolviam estruturas multiplicativas.

Regra

Os jogadores ficam atrás de uma linha demarcada no chão e arremessam argolas em direção ao alvo. Quando o jogador encaixa a argola, marca pontos, sendo que, em cada jogada, pode fazer vários arremessos.

Os alvos coloridos apresentam o valor de pontos conforme sua cor:

Alvo Verde: 01 ponto

Alvo Rosa: 02 pontos

Alvo Amarelo: 03 pontos

Alvo Azul: 04 pontos

Alvo Vermelho: 05 pontos

Alvo Preto: 06 pontos

Alvo Marrom: 07 pontos

Alvo Laranja: 08 pontos

Alvo Branco: 09 pontos

Atividades propostas:

A) Aprendizagem do jogo

Esta situação tem como objetivo propiciar ao sujeito o conhecimento das peças que compõem o jogo: as hastes e seus respectivos valores, as argolas, as fichas e as regras. A experimentadora mostrava as peças do jogo e perguntava:

"Você já viu este jogo?"

"Você sabe como se joga?"

"Quem ganha o jogo?"

Após combinarem as regras, o jogo começava. Em cada jogada, o jogador arremessava 5 argolas, prosseguindo até perfazer duas jogadas. Após cada jogada, contava-se os pontos seguidos de registros espontâneos.

Exemplo: O sujeito acertou três argolas no alvo vermelho (cinco pontos); então, para cada argola, ele deveria pegar um montinho de cinco fichas vermelhas. A experimentadora dizia: *"Você conseguiu acertar três argolas no alvo vermelho, como você pode fazer para pegar as fichas vermelhas?" "Como você sabe? Mostre-me como você fez."* Assim se procedia durante o jogo.

B) Situações-problema com o Jogo de Argolas

Apesar de o jogo possibilitar o conhecimento físico, dada a natureza do presente trabalho, a experimentadora centrou-se nas questões relativas à aritmética, principalmente em relação à noção de multiplicação. As situações-problema propostas durante as atividades lúdicas foram inspiradas em Guimarães (1998) e Vergnaud (1991). Buscou-se criar situações-problema que ilustrassem os problemas de estrutura multiplicativa do tipo isomorfismo de medidas apontados por Verganud (1991).

Além dos problemas colocados no decorrer do jogo, os sujeitos eram solicitados a realizar diferentes representações gráficas das ações, com o objetivo de favorecer diferentes procedimentos gráficos, sem que os algoritmos fossem as únicas formas de representação.

a) Correspondência de um para muitos

A experimentadora criava situações para que o sujeito realizasse correspondência entre as hastes e o respectivo valor das fichas (correspondência de um para muitos):

"Uma argola sua caiu na haste de número cinco; quantas fichinhas você pegaria para mostrar os pontos que tirou?"

Assim se procedia com todas as hastes, seguidas de representação gráfica: *"Como você marcaria usando lápis e papel?"*

b) Correspondência muitos para muitos

Nesta atividade, o sujeito era solicitado a fazer correspondência de muitos para muitos.

"Duas argolas caíram na haste que indica três pontos. Como você mostraria isso usando as fichinhas para dizer quantos pontos tirou?"

"Mostre o que você fez usando lápis e papel."

"Teria alguma outra forma de você mostrar o que fez?

c) Operações aritméticas

Durante a contagem de pontos, eram privilegiadas as operações aritméticas. Conforme os sujeitos acertavam os alvos, a experimentadora solicitava que contassem seus pontos e pegassem as fichas correspondentes.

"Você acertou uma argola no alvo de dois pontos e três argolas no alvo de três pontos. Quantos pontos você fez?" "Mostre-me como você fez." "Quantas vezes você tem de pegar as fichinhas para cada alvo?"

Posteriormente, a experimentadora solicitava o registro gráfico ao sujeito: *"Como você poderia mostrar o que você fez usando lápis e papel?"*

Caso o sujeito fizesse a representação gráfica utilizando símbolos ou desenhos, a experimentadora sugeria:

"Como você faria a mesma coisa usando a Matemática?", "Tem algum outro jeito?" "Mostre-me como você fez."

Caso o sujeito tivesse utilizado a Matemática inicialmente, outras formas de representação eram solicitadas:

"Será que você poderia representar o que você fez de outro jeito? Como?" "Mostre-me o que você fez."

Em relação às noções multiplicativas, era colocado:

"De quantas maneiras eu consigo fazer doze pontos?", "Tenho 5 argolas. Cada argola caiu no alvo de três pontos. Quantos pontos eu fiz?"

A experimentadora solicitava que os sujeitos pegassem as fichas correspondentes e que registrassem:

"*Como poderíamos marcar os pontos usando lápis e papel? Como você faz?" E se a gente usasse a Matemática, como ficaria? Como você sabe?"*

d) Relações multiplicativas

Nesta situação, a noção de multiplicação foi solicitada em questões mais elaboradas, envolvendo as variáveis da operação de multiplicação (multiplicando, multiplicador e produto). Situações colocadas pelo experimentador são listadas abaixo:

"*Vamos fazer de conta que eu fiz quatro acertos no alvo de dois pontos. Quantos acertos você tem de fazer no alvo de quatro pontos, para conseguir marcar o mesmo número de pontos?"*

Sugeriu-se ao sujeito que verificasse com as fichas, as argolas e os alvos:

"Se eu fizer duas jogadas e acertar três argolas no alvo de seis pontos em cada jogada, e você fizer três jogadas, quantas argolas tem de acertar em cada jogada no mesmo alvo preto para fazer o mesmo número de pontos?"

"Num jogo de argolas, que tinha alvos com valor até 12 pontos, um aluno de outra escola acertou 15 argolas no alvo de 12 pontos. Quantos pontos ele conseguiu marcar no final do jogo?"

Em seguida a cada questão, solicitava-se a representação gráfica:

"Como você mostraria o que fez usando lápis e papel? Há outro jeito?"

e) Processo Inverso - Divisão

Esta situação centrou-se no processo inverso. Situações colocadas pela experimentadora são listadas abaixo:

"Fiz 12 pontos em três jogadas. Quantos pontos fiz em cada jogada?"

"Uma menina da sua classe quer fazer 15 pontos em 3 partidas. Quantos pontos ela tem que fazer em cada partida?"

"Três argolas em um alvo marcam 300 pontos. Acertei 8 argolas neste alvo. Quantos pontos eu fiz?"

"Acertei 12 argolas em um alvo. Cada 3 argolas marcam 18 pontos. Quantos pontos eu fiz?"

Após cada questão, pedia-se ao sujeito para representar com fichinhas e, em seguida, com lápis e papel o que ele fez:

"Mostre-me o que você fez usando as fichinhas."

"Mostre-me o que você fez usando lápis e papel." "Há algum outro jeito?" "E se você usasse a matemática?"

Quinta Etapa: Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa
(VERGNAUD, 1991, p.197-211)

O objetivo desta fase foi a reaplicação dos problemas de estrutura multiplicativa, a fim de verificar os procedimentos de resolução escrita utilizados pelos sujeitos após as atividades lúdicas.

A experimentadora aplicou individualmente os problemas, mas desta vez, além de lê-los ao sujeito, solicitava que, após terem resolvido, os sujeitos explicassem em voz alta o que haviam feito.

4.3.4 Procedimento de Análise dos Resultados

A análise dos resultados foi realizada em oito etapas:

1ª Etapa: foi feita a análise dos dados referentes à prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa proposta por Piaget et al. (1986), a fim de identificar os sujeitos participantes da pesquisa, sendo 10 sujeitos de cada nível de construção da noção de multiplicação;

2ª Etapa: realizou-se a análise dos dados referentes à prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes (PIAGET et al., 1984);

3ª Etapa: verificou-se a relação entre os níveis de construção da noção de multiplicação e os níveis de generalização dos sujeitos;

4ª Etapa: efetuou-se a análise do desempenho dos sujeitos na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa (VERGNAUD, 1991) nas duas fases de aplicação;

5ª Etapa: analisou-se as relações entre os níveis de construção da noção de multiplicação e desempenho na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa nas duas fases;

6ª Etapa: realizou-se as relações entre os níveis de generalização e desempenho na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa;

7ª Etapa: analisou-se as situações lúdicas que envolviam estruturas multiplicativas propostas na aplicação do jogo de argolas;

8ª Etapa: analisou-se a Resolução Escrita dos Problemas de Estrutura Multiplicativa apresentada pelos sujeitos antes e após o jogo.

Convém destacar que essas etapas não foram desenvolvidas isoladamente, mas sim tendo como base a relação existente entre elas. Isso porque o objetivo central do presente estudo foi buscar as relações entre os níveis de construção da noção de multiplicação, níveis de generalização e desempenho em problemas de estrutura multiplicativa.

A metodologia utilizada foi a análise descritiva por meio de medidas de posição e dispersão para variáveis contínuas e tabelas de freqüência para variáveis categóricas.

Para verificar associações ou comparar proprções foi utilizado o teste Exato de Fisher e o Teste de Kolmogorov-Smirnov. Para comparação de variáveis contínuas ou ordenáveis entre dois grupos independentes foi aplicado o teste de Mann-Whitney. Para comparação de variáveis contínuas ou ordenáveis entre três grupos independentes foi aplicado o teste de Kruskal-Wallis. Para comparação de avaliações realizadas em dois momentos na mesma unidade amostral foi utilizado o teste de Wilcoxon para amostras relacionadas. O nível de significância adotado para os testes estatísticos foi de 5%.

Seguem abaixo os parâmetros utilizados na análise de cada atividade realizada com os sujeitos.

Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa:

Os critérios utilizados para analisar os resultados desta prova foram os mesmos desenvolvidos por Piaget et al. (1986). Os sujeitos foram categorizados de acordo com os seguintes níveis:

Nível I: corresponde aos sujeitos que consideram uma variável por vez, manipulando-as uma de cada vez e negligenciando-as quando passam a uma outra. Com isso, há três conseqüências: a falta de coordenações que levariam às relações continente/contido (compensações), a pouca coerência e o número de contradições que o sujeito não percebe. Neste nível, as multiplicações simples não são realizadas.

Há uma tentativa de relacionar as variáveis, iniciando a relação de continente a conteúdo entre os pacotes (p) e os grãos (g). Mesmo tendo certas soluções exatas, ainda não há compensação, ou seja, não identificam a noção de “menos grãos por pacote significa mais pacotes”.

Nível II: os sujeitos deste nível apresentam uma ausência de instrumentos operatórios de antecipação multiplicativa, entretanto compreendem os ajustamentos de que as relações ultrapassam as simples somas. Neste nível há a ausência da antecipação que possibilitaria transformar os “continentes” (pacotes) em “multiplicadores” e os contidos (grãos) em “multiplicandos”. Surgem as vicarianças quantitativas. O desempenho do sujeito deste nível é alcançado por meio de tateios e constatações sucessivas.

Nível III: os sujeitos apresentam a antecipação que possibilita aos sujeitos realizarem raciocínios em que os continentes se tornam multiplicadores e os contidos, multiplicandos.

Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa (Isomorfismo de Medidas)

Para analisar os resultados quanto ao desempenho dos sujeitos na resolução dos seis problemas de estrutura multiplicativa propostos, foram elaborados critérios de correção que envolvem categorias de procedimentos relativos aos acertos e erros, atribuindo-se a cada etapa uma pontuação que varia entre 0 a 3 pontos. Estes critérios[21] encontram-se organizados no quadro a seguir:

[21] O protocolo de correção encontra-se em anexo, considerando a aplicação dos problemas em duas fases. (Anexo B)

QUADRO 4: Critérios de Avaliação da Resolução de Problemas

Problema	Pontuação	Critérios
1	 3,0 2,0 1,0 0,0	**I)** Acertou o problema: **a)** Procedimento Multiplicativo **b)** Procedimentos Variados (adição suc.) **II)** Raciocínio correto e erro no resultado **III)** Erros de raciocínio (adição)
2	 3,0 2,0 1,0 0,0	**I) A**certou o problema: **a)** Procedimento Multiplicativo **b)** Procedimentos Variados **II)** Raciocínio correto e erro no resultado (vírgula, valor posicional, cálculo) **III)** Erros de raciocínio
3	 3,0 2,0 1,0 0,0	**I)** Acertou o problema: **a)** Procedimento Multiplicativo com predomínio de reversibilidade, operação: divisão **b)** Procedimentos variados **II)** Raciocínio correto e erro no resultado (cálculo) **III)** Erros de raciocínio
4	 3,0 2,0 1,0 0,0	**I)** Acertou o problema: **a)** Procedimentos que exigem interdependência Multiplicação/divisão presentes **b)** Procedimentos Variados **II)** Raciocínio correto e erro no resultado (cálculo, vírgula) **III)** Erros de raciocínio (aplicação de operações Que não pertencem ao problema enunciado)
5	 3,0 1,0 0,0	**I)** Acertou a resposta: **a)** Procedimento de interdependência Multiplicação/divisão, reversibilidade completa **II)** Raciocínio correto e erro no resultado (cálculo) **III)** Erros de raciocínio (aplicação de operações Que não pertencem ao problema enunciado)
6	 3,0 2,0 1,0 0,0	**I)** Acertou o problema: **a)** Procedimentos que exigem interdependência **b)** Procedimentos Variados (estimativa) **II)** Raciocínio correto e erro no resultado (cálculo) **III)** Erros de raciocínio

Esses critérios foram criados a partir da análise de todos os tipos de resoluções realizadas pelos sujeitos na solução dos mesmos. Foram elencados diferentes tipos de resoluções e a partir daí criadas as diferentes categorias. Como o objeto de estudo da pesquisa são as estruturas multiplicativas, foi considerada pontuação máxima para os sujeitos que acertaram o problema utilizando procedimento multiplicativo.

Ilustraremos, em anexo (Anexo C), exemplos de diferentes resoluções realizadas pelos sujeitos em relação ao problema 2.

Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes

Os níveis de generalização foram os mesmos adotados por Piaget et al. (1984), os quais são citados a seguir:

Nível I: corresponde aos sujeitos que acreditam ser possível somente comparações entre as propriedades similares. Neste nível, os sujeitos realizam divisões homogêneas, isto é, baseadas segundo um único e mesmo critério (forma, volume ou cor). Os sujeitos não fazem divisões heterogêneas, isto é, não relacionam simultaneamente duas divisões homogêneas. Ainda neste nível não há possibilidade de intersecções intencionais, não descobrem que se pode estabelecer uma hierarquia conforme o número de diferenças e não existem novos contrários.

Nível II: corresponde aos sujeitos que, embora apresentem relações corretas nos problemas de classificação e de diferenças, recorrem inicialmente a disjunções falsas para, em seguida, corrigirem. Há uma maior compreensão das soluções de identidade, mas ainda incompletas e insuficientes para as intersecções e por meio de tentativa e erro.

Em relação aos contrários, estes ainda não se realizam de modo extensivo, apenas compreensivo. No final deste nível, apresentam intersecções explicitamente justificadas.

Nível III: o sujeito é capaz de antecipar a combinação que origina o conjunto das partes e pode perceber o grupo INRC, pois diferencia as inversões e reciprocidades.

Jogo de Argolas:

A análise do jogo de argolas centrou-se nas situações-problema relativas a:

a) Correspondência de um para muitos;

b) Correspondência de muitos para muitos;

c) Operações aritméticas;

d) Relações multiplicativas;

e) Noções do processo inverso – divisão.

Para estas situações três aspectos foram analisados: a ação de jogar, a representação escrita e a explicação oral.


Ninguém sabe tudo, ninguém ignora tudo. Todos sabemos alguma coisa, todos ignoramos alguma coisa, por isso aprendemos sempre.
Paulo Freire

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para atender aos objetivos do presente estudo, realizou-se uma análise quantitativa e qualitativa dos dados.

1ª Etapa: Resultado na Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa

A prova Multiplicação e Associatividade Multiplicativa (PIAGET et al., 1984) é composta (conforme discutido anteriormente) por quatro situações que envolvem a construção da noção de multiplicação. Mediante a análise proposta por Piaget (p.82-83 deste estudo), os 30 sujeitos foram categorizados em três níveis. A seguir, o Quadro 5 mostra os sujeitos e seus respectivos níveis de construção na Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa. Para ilustrar estes níveis, seguem exemplos de cada um deles.

QUADRO 5: Sujeitos da Pesquisa

NÍVEIS DE MULTIPLICAÇÃO	SUJEITOS
III Multiplicação construída, antecipação presente, continentes-multiplicadores e contidos-multiplicandos.	GAB (9;4) RIC (9;10) APA (10;0) JES (10;3) MAR (10;3) MUR (10;6) PRI (10;6) VIV (10;7) NAY (11;0) THA (11;2)
II Ausência de antecipações multiplicativas, os êxitos obtidos por meio de tateios e constatações sucessivas. Presença de vicarianças quantitativas.	BEA (9;6) JOA (9;8) LUI (9;10) JOS (10;1) NAT (10;2) GUH (10;4) LAU (10;7) MCA (10;8) DAE (10; 8) TAT (9;10)
I Há ausência de coordenações entre as variáveis: cada uma é considerada isoladamente – insucesso nas multiplicações simples.	GUI (8;8) ANG (9;1) FEL (9;1) LAY (9;3) MAT (9;6) BIA (9;7) REG (9;10) FRA (10;4) GIS (10;5) KLI (10;10)

O Nível I corresponde aos sujeitos que consideram uma variável por vez, manipulando uma de cada vez e negligenciam-na quando passam a uma outra. Com isso, ocorrem três conseqüências: a falta de coordenações que levaria às relações continente/contido (compensações); a pouca coerência; e o número de contradições que o sujeito não percebe. Neste nível, as multiplicações simples não são realizadas.

Há tentativas de relacionar as variáveis, iniciando a relação entre continente e conteúdo, entre pacotes (p) e grãos (g). Mesmo alcançando certas soluções exatas, ainda não há compensação, ou seja, não identificam a noção de “menos grãos por pacote significa mais pacotes”. Para ilustrar este nível, citamos o protocolo de GIS (10;5):

GIS (10;5) Na situação 1, a experimentadora perguntou: *Você poderia preparar, para o pato, a mesma quantidade de grãos?* Separa os grãos de 2 em 2 e faz um monte de 8 grãos. *Ele está comendo o mesmo tanto?* Faz que não com a cabeça. *Não? Por quê? Explique-me o que você pensou.* **Ah, porque ele tem 4 a mais, porque ela come um saco que vem 3 e ele que vem 2.** *E tem jeito deles comerem o mesmo tanto de grãos?* **Tem, é só pôr mais quatro aqui.** Aponta para o monte de grãos do pato. *Então como você faz?* Separa 4 grãos e coloca-os junto ao montinho dos grãos do pato. *E agora?* **Tá igual.**

Na situação 2, cada pacote contém 3 grãos. A experimentadora, após preparar duas refeições de quatro pacotes em cada uma para a galinha, solicita ao sujeito: *Agora o pato e a galinha comem pacotes de três grãos. Eu preparei duas refeições, o almoço e o jantar com quatro pacotes em cada refeição para a galinha. Você poderia preparar, para o pato, a quantidade necessária para ele comer em uma só refeição?* **Eu pego só esse aqui oh!, só um monte.** Aponta para uma das refeições da galinha. *Mas ele tem que comer em uma só refeição. Como você faz?* **Ele tem que comer tudo junto só no almoço.** *E como você faz?* **É só juntar tudo isso aí ele come.** Aponta os montinhos de grãos da galinha. *Então como você faz para eu ver?* Separa os grãos de um em um e forma três fileiras de grãos e pára. *Aí tem o mesmo tanto?* Continua colocando mais grãos nas três fileiras e pára novamente. *Tem o mesmo tanto?* **Tem.** *Tem certeza?* Olha para os montes da galinha e do pato e os conta mentalmente. Coloca mais um grão no meio do pato dela. *Tem o mesmo tanto?* Fez que sim com a cabeça. *Então eles estão comendo o mesmo tanto?* Confirma com a cabeça.

Na situação 3, a experimentadora prepara, para a galinha, duas refeições de 4 pacotes com 3 grãos cada e pede à criança que prepare, para o pato, outro tanto de grãos, mas para 3 refeições e respeitando o dado de base inicial. *Eu preparei, para a galinha, duas refeições com quatro pacotes de três grãos cada uma. Gostaria que você preparasse, para o pato, outro tanto de grãos, mas em três refeições. Agora o pacote do pato é de dois grãos.* **Fica igual ao seu.** *Então como é que você faz?* Separa os grãos e faz 2 montinhos iguais aos da galinha. *Eles estão comendo o mesmo tanto?* **Estão.** *Estão? Tem certeza?* **Sim.** *Então fala pra mim o que você pensou.* **Ah, eu peguei 4 sacos de 3 que ele vai comer no almoço e 4 saco de 3 que ele vai comer na janta.** *Então você pegou 4 sacos de 3 para o almoço e 4 sacos de 3 para o jantar. É isso?* **É.**

Na situação 4, a experimentadora e a criança pegam simultaneamente um pacote C (=3 grãos), o outro pacote P (=2 grãos), por seis vezes repetidas. *Nós vamos pegar ao mesmo tempo: um pacote para a galinha e um pacote para o pato até dar seis vezes.* Os dois conjuntos de grãos são a seguir escondidos. Pede-se à criança que julgue se os dois conjuntos contêm um número igual de grãos, e que avalie, numericamente, a diferença entre as duas coleções. *Você acha que os dois conjuntos têm o mesmo tanto de grãos?* **Não, a sua galinha come mais.** *Por quê?* **Porque ela tá comendo mais que o pato.** *Como assim?* **Tá comendo um grão a mais.** Mas nós não pegamos junto? **Pegamos.** *E a minha galinha está comendo um grão a mais?* **Tá.** *Por quê?* **Porque ela tá comendo um grão a mais que ele, porque o pacote dela vem um grão a mais.** *Dá pra saber quantos grãos a minha galinha comeu a mais que seu pato?* **Ela come 6 a mais, porque você pegou seis montinhos de 3, né? E eu peguei 6 montinhos de 2. Aí, em cada um desse aí ela tem um a mais e o meu tem um a menos.** *Se a gente continuasse a fazer isso, minha galinha ia comer sempre mais que seu pato?* **Não.** *O que ia acontecer?* **Podia acontecer que eles podiam comer o mesmo tanto.**

O Nível II engloba os sujeitos que apresentam uma ausência de instrumentos operatórios de antecipação multiplicativa, mas que compreendem os ajustamentos em que as relações ultrapassam as simples somas. Neste nível há a ausência da antecipação que possibilitaria transformar os "continentes" (pacotes) em "multiplicadores" e os contidos (grãos) em "multiplicandos". Surgem as vicarianças quantitativas. O desempenho do sujeito deste nível é alcançado por meio de tateios e constatações sucessivas. O protocolo de DAE (10;8), a seguir, exemplifica este nível:

> **DAE (10;8)** Na situação 1, a experimentadora perguntou: *Você poderia preparar, para o pato, a mesma quantidade de grãos?* Balança a cabeça afirmando que pode e começa a separar os grãos, colocando dois a dois quatro vezes. *Eles estão comendo o mesmo tanto de grãos?* **Não.** *Você pode me explicar?* **O pato tá comendo 4 grãos menos que ela.** *E tem um jeito dos dois comerem o mesmo tanto?* Faz que sim com a cabeça. *Como é que você faz?* Coloca mais duas vezes 2 grãos. *E agora?* **Agora tá comendo o mesmo tanto.** *Como você poderia me explicar?* **Porque se ela come 3, então tem que dividir, tirar 1 dela e colocar nos dois.** Aponta os grãos da galinha e depois os do pato. *Então você tem que tirar 1 grão do pacote da galinha, ir formando pacote de 2 grãos com estes grãos para o seu pato?* Afirma que sim balançando a cabeça.
>
> Na situação 2, cada pacote contém 3 grãos. A experimentadora, após preparar duas refeições de quatro pacotes em cada uma para a galinha, solicita ao sujeito: *Agora o pato e a galinha comem pacotes de três grãos. Eu preparei duas refeições, o almoço e o jantar com quatro pacotes em cada refeição para a galinha. Você poderia preparar, para o pato, a quantidade necessária para ele comer em uma só refeição?* **Acho que não.** *Será que não tem um jeito? O seu pato tem que comer no final do dia o mesmo tanto que a minha galinha, só que a minha galinha come duas refeições e seu pato só come uma refeição. O pacote do pato também é de 3 grãos. Tem jeito de eles comerem o mesmo tanto no fim do dia?* **Tem.** Separa os grãos de 3 em 3 e forma um único monte. *E agora, eles estão comendo o mesmo tanto?* **Sim. Ele está comendo só no almoço o mesmo tanto que a galinha.** *Tem certeza? Então me fala como você pensou.* **Porque tenho que juntar este com este** (aponta o almoço e o jantar da galinha) **e vai dar o que ele comeu só no almoço.** Aponta os grãos do pato. *Você juntou este tanto e este tanto (aponta os grãos da galinha) e vai dar o que ele comeu só no almoço? Aponta os grãos do pato. É isso?* Faz que sim com a cabeça.
>
> Na situação 3, a experimentadora prepara, para a galinha, duas refeições de 4 pacotes com 3 grãos cada e pede à criança que prepare, para o pato, outro tanto de grãos, mas para 3 refeições e respeitando o dado de base inicial. *Eu preparei, para a galinha, duas refeições com quatro pacotes de três grãos cada uma. Gostaria que você preparasse, para o pato, outro tanto de grãos, mas em três refeições. Agora o pacote do pato é de dois grãos.* **O mesmo tanto que ela?** *O mesmo tanto que a galinha, mas em três refeições.* Separa os grãos de 3 em 3 e faz 2 montes. **É isso?** Mexe a cabeça afirmativamente.
>
> Na situação 4, a experimentadora e a criança pegam simultaneamente um pacote C (=3 grãos), o outro pacote P (=2 grãos), por seis vezes repetidas. *Nós vamos pegar ao mesmo tempo: um pacote para a galinha e um pacote para o pato até dar seis vezes.* Os dois conjuntos de grãos são a seguir escondidos. Pede-se à criança que julgue se os dois conjuntos contêm um número igual de grãos, e que

avalie, numericamente, a diferença entre as duas coleções. *Você acha que os dois conjuntos têm o mesmo tanto de grãos?* **A galinha comeu mais.** *Como é que você sabe?* **O seu comeu de 3.** *E você consegue dizer quantos a mais minha galinha comeu?* **Seis vezes.** *Como você sabe?* **Como você falou que ia fazer 6 vezes e ela comeu um a mais 6 vezes.** *E se a gente continuasse fazendo isso, você acha que minha galinha ia comer sempre a mais que seu pato?* **Sim.** *Como você sabe?* **Porque ela sempre come um a mais.**

No nível III, os sujeitos apresentam a antecipação que possibilita aos sujeitos fazerem raciocínios em que os continentes se tornam multiplicadores e os contidos multiplicandos. O exemplo de JES (10;3), a seguir, ilustra as respostas apresentadas pelos sujeitos deste nível de multiplicação.

JES (10; 3) Na situação I, o sujeito observa a experimentadora colocando os 4 pacotes de 3 grãos para a galinha. *Você poderia preparar, para o pato, a mesma quantidade de grãos?* **O mesmo número de grãos?** O sujeito começa a separar os grãos dois a dois e os coloca perto do pato formando seis grupos de dois grãos. *Explique-me o que você fez.* **Ah, eu fiz quatro vezes três igual a doze, aí eu fiz o mesmo tanto, como ele come a cada dois grãos** Mostra os seis grupos de dois grãos. *Então aí tem doze?* O sujeito olha novamente para os grãos: **Tem.**

Na situação 2, cada pacote contém 3 grãos. A experimentadora, após preparar duas refeições de quatro pacotes em cada uma para a galinha, solicita ao sujeito: *Agora o pato e a galinha comem pacotes de três grãos. Eu preparei duas refeições, o almoço e o jantar com quatro pacotes em cada refeição para a galinha. Você poderia preparar, para o pato, a quantidade necessária para ele comer em uma só refeição?* O sujeito inicia colocando os grãos de dois em dois. Após a intervenção da experimentadora, destacando os novos dados de base, o sujeito coloca um grão de cada vez nas fileiras que já montadas e que estavam faltando. Depois conta o número de fileiras dos grãos. *Explique-me o que você fez.* **Como aqui tem 12** (aponta para uma das refeições da galinha)**, eu fiz vezes dois, então é 24.** *E aqui?* Experimentadora aponta para os grãos do pato. **Aqui tudo tem 24.** Num segundo momento, a experimentadora prepara, para a galinha, duas refeições de 4 pacotes e pede para a criança preparar, para o pato, o mesmo tanto de grãos, arranjados igualmente em duas refeições. *Agora vou preparar duas refeições de quatro pacotes para a galinha. Eu gostaria que você preparasse, para o pato, outro tanto de grãos, mas ele comeria igualmente em duas refeições.* O sujeito coloca as fileiras com três grãos em cada uma delas, fazendo as duas refeições solicitadas. *Você acha que as comidas do pato e da galinha são o mesmo tanto?* **Eles comeram o mesmo tanto, comeu igual.** *Como você sabe?* **Aqui tem 12 e 12, então 24** (apontando para os grãos do experimentador) **e 24 também** (aponta para o seu monte). Ainda nessa situação, os grãos de P são colocados num monte e pede-se à criança para preparar, para o pato, a quantidade necessária para uma única refeição a partir dos grãos desse monte. *Agora eu gostaria que você preparasse, para o pato, a quantidade necessária para uma só refeição usando os grãos deste monte.* O sujeito separa os grãos de três em três e vai montando as fileiras. Ao terminar conta o número total de grãos afirmando que os dois comerão o mesmo tanto.

Na situação 3, a experimentadora prepara, para a galinha, duas refeições de 4 pacotes com 3 grãos cada e pede à criança que prepare, para o pato, outro tanto de grãos, mas para 3 refeições e respeitando o dado de base inicial. *Eu preparei, para a galinha, duas refeições com quatro pacotes de três grãos cada uma. Gostaria que você preparasse, para o pato, outro tanto de grãos, mas em três refeições. Agora o pacote do pato é de dois grãos.* O sujeito olha para o lado, fica pensando, separa um monte de grãos e começa a colocá-los dois a dois em fileiras: **Três refeições?** *Sim, em três refeições.* **Pronto.** *Fale-me como você fez.* **Eu peguei 24, fui ver quanto que dava vezes três para dar 24, porque no seu tem 24.** Então você fez em três refeições e deu quanto? **Deu 8 em cada.**

Na situação 4, a experimentadora e a criança pegam simultaneamente um pacote C (=3 grãos), o outro pacote P (=2 grãos), por seis vezes repetidas. *Nós vamos pegar ao mesmo tempo: um pacote para a galinha e um pacote para o pato até dar seis vezes.* Os dois conjuntos de grãos são a seguir escondidos. Pede-se à criança que julgue se os dois conjuntos contêm um número igual de grãos, e que avalie, numericamente, a diferença entre as duas coleções*. Você acha que os dois conjuntos têm o mesmo tanto de grãos?* **Não.** *Como você sabe? Explique-me como você faz.* **Porque ela (galinha) tá comendo de 3 e ele (pato) de 2.** *Qual tem mais?* **A galinha.** *Quanto a mais?* **Acho que é seis grãos a mais, se tirasse seis grãos da galinha ficaria igual.** *Se nós ficássemos colocando os grãos como nós fizemos antes, o que você acha que aconteceria?* **Ela sempre vai ter mais.** *Como você sabe?* **Porque ela come de três.**

O exemplo de JES (10;3) mostra como os sujeitos desse nível de multiplicação resolvem as situações da prova proposta. Pode-se observar que JES (10;3) utiliza multiplicação para resolver e explicar todas as situações-problema envolvidas nessa prova, mostrando já ter o domínio da multiplicação.

2ª Etapa: Resultado da Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes

Para atender aos objetivos do presente estudo apresentaremos os resultados relativos aos níveis de generalização em que se encontravam os sujeitos. Foi aplicada a prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes (PIAGET et al., 1984). As respostas apresentadas pelos sujeitos foram categorizadas segundo os Níveis I, II e III propostos por Piaget et al.(ibid) e encontram-se organizadas no Quadro 6 a seguir:

QUADRO 6: Níveis de Generalização obtidos na Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes

NÍVEIS	SUJEITOS
III Antecipação da combinação que origina o conjunto das partes, diferencia inversões e reciprocidades	
II Soluções de identidade incompletas e insuficientes para as intersecções, obtidas por tentativa e erro.	GAB (9,4) RIC (9,10) APA (10,0) JOS (10,1) NAT (10,2) JES (10,3) MAR (10,3) PRI (10,6) MUR (10,6) VIV (10,7) NAY (11,0) THA (11,2)
I Divisões homogêneas baseadas num único critério (forma, volume ou cor). Dificuldade em lidar com as negações dificultando as divisões heterogêneas.	GUI (8,8) ANG (9,1) FEL (9,1) LAY (9,3) BEA (9,6) BIA (9,7) JOA (9,8) REG (9,10) LUI (9,10) GUH (10,4) FRA (10,4) GIS (10,5) LAU (10,7) MCA (10,8) DAE (10,8) TAT (10,10) KLI (10,10) MAT (9;6)

Conforme assinala o Quadro 6, os sujeitos deste estudo apresentaram respostas correspondentes aos Níveis I e II de generalização, não sendo encontrado nenhum sujeito com Nível III de generalização.

No que se refere ao Nível I, divisões homogêneas baseadas em um único critério (forma, volume ou cor), pode-se afirmar que dos 30 sujeitos (conforme Quadro 6), 18 apresentaram soluções que podem ser incluídas no Nível I. Eles obtinham os grupos com o mesmo tanto, mas pautavam-se somente em um critério apresentado pela figura. O exemplo a seguir mostra soluções deste nível:

> **JOA (9;8)** Pega algumas figuras na mão, separa os círculos grandes, em seguida, separa os quadrados grandes, primeiro todos os verdes e depois todos os vermelhos, contando-os mentalmente. Coloca a mão nos dois conjuntos de quadrado e diz: **Esse aqui são os grandes, esses aqui 5 e 5 grandes**. Aponta os quadrados grandes verdes e vermelhos. **E esses aqui são 5 e 5 grandes**. Aponta os círculos grandes verdes e vermelhos. *Tem outro jeito de fazer isso?* **Acho que não.**

Os sujeitos deste nível não compararam extensivamente as classes quadrados e grandes e vermelhos que correspondem a divisões heterogêneas, portanto realizam somente divisões homogêneas.

Em relação às figuras contrárias, os sujeitos consideravam somente uma diferença por vez das figuras; entretanto não chegavam à mais contrária, considerando os três critérios ao mesmo tempo.

Pode-se observar estas respostas nos exemplos a seguir:

> **MCA (10; 8)** Pega um círculo pequeno e verde. **Não são iguais, porque esse é um círculo e esse é um quadrado.** *Eu gostaria que você me mostrasse qual é o mais contrário.* Pega o círculo verde e grande e diz: **Esse é o mais contrário. Acho que é o círculo porque é círculo, verde e grande.**

> **TAT (10;10)** Pega um círculo grande vermelho. **Porque essa é quadrada e essa é redonda**. Aponta as figuras. *Mostre-me outros contrários.* Pega um quadrado pequeno vermelho: **Ela é mais pequena.** *Tem alguma outra figura contrária?* Ao pegar um círculo pequeno e verde diz: **Porque é mais pequeno que essa aí.** *Tem mais alguma outra contrária?* **Não.** *Eu gostaria que você me mostrasse qual é a mais contrária.* **Essa.** Pega um círculo grande vermelho. **Ela não tem quatro pontas e é redonda.**

Os exemplos de MCA (10; 8) e TAT (10; 10) caracterizam a dificuldade dos sujeitos deste nível em lidar com as negações. MCA (10; 8) apresenta como a mais contrária uma figura que tem a mesma forma e cor, destacando como justificativa as semelhanças entre as figuras (cor e tamanho). TAT (10;10) coloca uma figura que tem diferentes formas e cores, mas do mesmo tamanho. Entretanto, ao justificar, apenas destaca a diferença da forma.

Segundo Piaget et al. (1984), “está claro que esa dificultad para manejar las negaciones desempeña cierto papel en la incapacidad inicial para construir divisiones heterogéneas ya que inclyuem dos negaciones” (p.17).

Já no Nível II, soluções de identidade incompletas e insuficientes para as intersecções e por tentativa e erro, pode-se afirmar que: dos 30 sujeitos (conforme

Quadro 6), 12 apresentaram soluções deste nível de generalização. Apesar de apontarem grupos de figuras que continham o mesmo tanto de uma maneira mais criteriosa que os de Nível I, ainda estas soluções eram incompletas e insuficientes e foram obtidas por tentativa e erro.

Os exemplos de soluções realizadas por estes sujeitos podem ser verificadas nos exemplos de RIC (9;10) e JES (10;3) a seguir:

> **RIC (9;10)** Começa a separar as figuras. Pega os círculos vermelhos grandes nas mãos e os coloca sobre os círculos verdes grandes. Depois coloca alguns quadrados verdes grandes sobre os círculos grandes já separados. Conta novamente os quadrados pequenos. Junta os quadrados grandes que restavam entre vermelhos e verdes e coloca sobre eles, alguns quadrados pequenos. Sobraram os círculos pequenos verdes e vermelhos e também um quadro vermelho pequeno. *Então aqui tem o mesmo número de grandes e quadrados?* **É.** *Então fala para mim, como você fez?* **Eu separei; tinha 5 cada um; tinha 9 pequenos; tinha 29 ao todo; todos que eu coloquei aqui. Aí eu quis fazer em dois montes; mas 29 não dá para dividir pra 2, então sobrou 1; então deu 28; 28÷2=14.** *Então aqui tem 14 grandes e aqui 14 quadrados?* **Tem.** *Você tem outra idéia?* Ele pára; olha para o lado esquerdo; pensa; parece contar com os dedos; coça nariz com a mão direita e continua pensando. Pega e solta um quadradinho vermelho; depois pega novamente e o separa do monte dos quadrados, colocando-o à sua esquerda. Separa novamente todos os quadrados do monte dos quadrados, pegando-os na mão, contando 1 a 1. Faz o mesmo com o monte dos grandes. Conta com o dedo indicador da mão direita apontando as figuras. *Tem ou não outras maneiras?* **Acho que não.**

> **JES (10;3)** Começa a procurar a figura utilizando ambas as mãos no monte separado pela experimentadora, retira um círculo. *O círculo é contrário?* **É.** *Tem outra que seja contrária?* Coloca a mão na boca, pensa alguns instantes e com a mão esquerda, retira o quadrado grande e vermelho. **Tem o vermelho, é contrário, é diferente na cor.** *Tem outra figura contrária?* Retira agora um quadrado pequeno, aponta com o dedo indicador o pequeno e depois o quadrado grande. **Quadradinho pequeno e quadrado grande.** *Tem outra figura contrária?* Pega o quadradinho verde pequeno e compara novamente com o quadrado grande e verde da experimentadora. **Tem outro?** Pega o círculo verde pequeno e depois o círculo pequeno vermelho. *Dessas figuras, qual é a mais contrária?* Pega o círculo grande e vermelho. **É esse.** *Esse é o mais contrário?* Pára, pensa e pega o círculo vermelho pequeno. **Não, é esse.** *Você pode me explicar?* **Porque ele é vermelho, pequeno e redondo.**

O comportamento apresentado pelos sujeitos da pesquisa na Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes (PIAGET et al., 1984) diz respeito aos Níveis I e II de generalização. No Nível III, o sujeito é capaz de diferenciar inversões e reciprocidades, sendo capaz de antecipar a combinação que origina o conjunto das partes. Neste nível de generalização não foi classificado nenhum sujeito. Cabe lembrar que este nível, segundo Piaget et al. (1984), supõe de forma subjacente uma estrutura de natureza lógica formal. Estes resultados nos conduzem a inferir que o pensamento dos sujeitos estudados nesta pesquisa não se encontra ainda organizado neste nível estrutural.

3ª Etapa: Relação entre os níveis de construção de multiplicação e níveis de generalização

A fim de atender ao primeiro objetivo proposto no presente estudo que se orientou em verificar se existe correspondência entre os níveis de construção da noção de multiplicação apresentados pelos sujeitos (Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa) e os níveis de generalização (Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes), foi construído o Quadro 7:

QUADRO 7: Relação entre os Níveis de Construção da Noção de Multiplicação e Níveis de Generalização

Níveis de Generalização⇒ **Níveis de Multiplicação ⇓**	I Divisões homogêneas baseadas num único critério (forma, volume ou cor). Dificuldade em lidar com as negações dificultando as divisões heterogêneas	II Solução de identidade incompletas e insuficientes para as intersecções, obtidas por tentativa e erro	III Antecipação da combinação que origina o conjunto das partes, diferencia inversões e reciprocidades
III Multiplicação construída, antecipação presente, continentes-multiplicadores e contidos-multiplicandos		GAB (9,4) RIC (9,10) APA (10,0) JES (10,3) MAR (10,3) MUR (10,6) PRI (10,6) VIV (10,7) NAY (11,0) THA (11,2)	
II Ausência de antecipações multiplicativas, os êxitos obtidos por meio de tateios e constatações sucessivas. Presença de vicarianças quantitativas	BEA (9,6) JOA (9,8) LUI (9,10) GUH (10,4) LAU (10,7) DAE (10,8) MCA (10,8) TAT (10,10)	JOS (10,1) NAT (10,2)	
I Há ausência de coordenações entre as variáveis: cada uma é considerada isoladamente – insucesso nas multiplicações simples.	GUI (8,8) ANG (9,1) FEL (9,1) LAY (9,3) BIA (9,7) MAT (9;6) REG (9,10) FRA (10,4) GIS (10,5) KLI (10,10)		

Pode-se observar pelo Quadro 7 que dos 30 sujeitos do presente estudo, 10 apresentam Nível I de construção da noção de multiplicação e Nível I de generalização; oito apresentam Nível II de construção da noção de multiplicação e Nível I de generalização; dois sujeitos apresentam Nível II de construção da noção de multiplicação e Nível II de generalização e 10 sujeitos apresentam Nível III de multiplicação e Nível II de generalização.

A seguir apresentaremos o tratamento estatístico na Tabela 4:

TABELA 4: Níveis de generalização e Níveis de Construção da Noção de Multiplicação dos Sujeitos

Resultado do Teste de Kolmogorov-Smirnov para 2 x n – amostras independentes

Tamanho da primeira amostra	18.000
Tamanho da segunda amostra	12.000
Desvio máximo (bilateral)	0,8333
Valor crítico(.05) =	0.5068
Valor crítico(.01) =	0.6075
P (bilateral) =	< 0.01
Qui-Quadrado (unilateral) =	20.0000
Graus de Liberdade	2
P (unilateral)	< 0.0001

(Teste Kolmogorov-Smirnov para 2xn-amostras independentes, p-valor<**0.0001**)

A análise estatística, conforme o Teste de Kolmogorov-Smirnov (p-valor<0.0001), mostrou que há evidência de associação entre os níveis de generalização e os níveis de construção da noção de multiplicação.

Para atender aos objetivos dois, três e quatro da presente pesquisa, pretende-se verificar as relações entre:

- desempenho na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa e níveis de construção da noção de multiplicação antes e após serem submetidos às atividades lúdicas;
- relações entre desempenho na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa e níveis de generalização antes e após serem submetidos às atividades lúdicas;
- o papel das atividades lúdicas no desempenho dos sujeitos na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa;

Para tal verificação, passaremos aos resultados obtidos pelos sujeitos na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa (caracterizando os resultados nas Fases 1 e 2).

4ª Etapa: Resultado da Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa – Fases 1 e 2

A prova utilizada nesta etapa, composta por seis problemas de estrutura mutliplicativa do tipo isomorfismo de medidas, teve por objetivo verificar o desempenho dos sujeitos na resolução escrita de problemas de estrutura multiplicativa. Foram aplicadas duas provas idênticas, sendo uma antes, designada Fase 1, e outra, após a aplicação do jogo de argolas, designada Fase 2.

A análise desta etapa centrou-se nas duas aplicações da referida prova. Os problemas receberam pontuação máxima de 3 pontos e mínima de 0 pontos cada um. As pontuações obtidas no total variaram entre 0 e 18 pontos. Foi considerada pontuação 3 pontos para as resoluções que acertavam o problema utilizando as estruturas multiplicativas. Para os sujeitos que utilizaram em suas resoluções procedimentos variados, como, por exemplo, adições sucessivas, a pontuação foi de 2 pontos. A pontuação 1 ponto foi definida para os sujeitos que iniciaram o raciocínio corretamente, mas não chegaram ao resultado correto devido a diferentes tipos de erros (cálculo, valor posicional, vírgula). E finalmente, os sujeitos que cometeram erros de raciocínio, como, por exemplo, aplicando operações que não pertenciam ao que se pedia no problema enunciado, não conseguiram marcar pontos (0 pontos). A descrição dos critérios de avaliação na resolução de cada um dos problemas encontra-se nos procedimentos de análise dos resultados (p.84) do presente trabalho.

A tabela seguinte descreve a pontuação em cada problema na Fase 1[22], obtida pelos sujeitos da presente pesquisa.

[22] Fase 1- Resolução antes da aplicação do jogo

TABELA 5: Pontuação obtida na Resolução dos Problemas de Estrutura Multiplicativa – Fase 1

Sujeitos	Pontuação obtida pelos sujeitos (Fase 1)						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**T. Pontos**
ANG (9,1)	3	1	3	0	0	0	**7**
BIA (9,7)	3	1	0	1	0	0	**5**
FEL (9,1	2	0	3	0	0	0	**5**
FRA (10,4)	3	1	3	3	0	0	**10**
GIS (10,5)	3	0	3	0	0	0	**6**
GUI (8,8)	3	0	0	0	0	0	**3**
KLI (10,0)	3	0	3	0	0	0	**6**
LAY (9,3)	3	1	3	0	0	0	**7**
MAT (9,6)	0	0	0	0	0	0	**0**
REG (9,10	3	0	0	0	0	0	**3**
BEA (9,6)	3	0	3	0	0	0	**6**
DAE (11,8)	3	3	0	3	0	0	**9**
GUH (10,4)	3	0	3	0	0	0	**6**
JOA (9,8)	3	0	3	3	0	0	**9**
LAU (10,7)	3	1	3	3	0	0	**10**
LUI (9,10)	3	0	3	0	0	0	**6**
MCA (10,8)	3	1	3	3	0	0	**10**
TAT (10,10)	3	1	3	0	0	0	**7**
JOS (10,1)	3	2	3	0	3	0	**11**
NAT (10,2)	3	0	3	0	0	0	**6**
APA (10,0)	3	0	0	0	0	0	**3**
GAB (9,4)	3	1	2	3	0	0	**9**
JES (10,3)	3	2	3	3	2	0	**13**
MAR (8,0)	3	0	3	0	0	0	**6**
MUR (10,6)	3	0	3	3	0	0	**9**
NAY (11,0)	3	1	1	3	0	0	**8**
PRI (10,6)	3	0	3	3	0	0	**9**
RIC (9,10)	3	1	3	3	3	0	**13**
THA (11,2)	3	1	3	0	0	0	**7**
VIV (10,7)	3	1	3	0	0	0	**7**
Total	**86**	**19**	**69**	**34**	**8**	**0**	**216**

Pode-se observar na Tabela 5 o desempenho de sujeitos em cada problema. É possível afirmar que alguns problemas como o cinco e o seis apresentaram maiores dificuldades para as crianças nesta fase de resolução.

Considerando-se a pontuação total de cada sujeito, foi possível construir a Tabela 6, que mostra o desempenho global dos sujeitos relativo à resolução escrita de problemas de estrutura multiplicativa.

TABELA 6: Desempenho Global na Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa na Fase 1

Sujeitos	Porcentagem de Acertos (Global)
ANG (9,1)	38,8%
BIA (9,7)	27,7%
FEL (9,1)	27,7%
FRA (10,4)	55,5%
GIS (10,5)	33,3%
GUI (8,8)	16,6%
KLI (10,0)	33,3%
LAY (9,3)	38,8%
MAT (9,6)	0%
REG (9,10)	16,6%
BEA (9,6)	33,3%
DAE (11,8)	50,0%
GUH (10,4)	33,3%
JOA (9,8)	50,0%
LAU (10,7)	55,5%
LUI (9,10)	33,3%
MCA (10,8)	55,5%
TAT (10,10)	38,8%
JOS (10,1)	61,1%
NAT (10,2)	33,3%
APA (10,0)	16,6%
GAB (9,4)	50,0%
JES (10,3)	72,2%
MAR (8,0)	33,3%
MUR (10,6)	50,0%
NAY (11,0)	44,4%
PRI (10,6)	50,0%
RIC (9,10)	72,2%
THA (11,2)	38,8%
VIV (10,7)	38,8%

Convém agora destacarmos os resultados obtidos pelos sujeitos na Fase 2[23], relativos à resolução escrita de problemas de estrutura multiplicativa, os quais se encontram organizados na Tabela 7.

[23] Fase 2 – Aplicação dos problemas após as atividades propostas com o jogo de argolas.

TABELA 7: Pontuação obtida na Resolução Escrita dos Problemas de Estrutura Multiplicativa – Fase 2

Sujeitos	Pontuação obtida pelos sujeitos (Fase 2)						
	1	2	3	4	5	6	Total de Pontos
ANG (9,1)	2	3	2	0	0	0	**7**
BIA (9,7)	2	0	0	0	0	0	**2**
FEL (9,1	2	0	3	0	0	0	**5**
FRA (10,4)	3	0	3	0	0	0	**6**
GIS (10,5)	3	0	3	0	0	0	**6**
GUI (8,8)	3	1	0	0	0	0	**4**
KLI (10,0)	3	1	3	0	0	0	**7**
LAY (9,3)	3	1	3	0	0	0	**7**
MAT (9,6)	3	0	3	0	0	0	**6**
REG (9,10	3	0	0	0	0	0	**3**
BEA (9,6)	3	0	3	0	0	0	**6**
DAE (11,8)	3	1	3	0	0	0	**7**
GUH (10,4)	3	3	3	0	0	0	**9**
JOA (9,8)	3	0	3	0	0	0	**6**
LAU (10,7)	3	2	3	0	0	0	**8**
LUI (9,10)	3	0	2	0	0	0	**5**
MCA (10,8)	3	2	3	0	0	0	**8**
TAT (10,10)	3	3	3	3	0	0	**12**
JOS (10,1)	3	0	3	1	0	0	**7**
NAT (10,2)	3	3	3	0	0	0	**9**
APA (10,0)	3	1	3	0	0	0	**7**
GAB (9,4)	3	3	3	3	3	0	**15**
JES (10,3)	3	2	3	3	3	2	**16**
MAR (8,0)	3	3	3	3	2	0	**14**
MUR (10,6)	3	3	3	0	2	0	**11**
NAY (11,0)	3	0	3	0	0	0	**6**
PRI (10,6)	3	1	3	3	3	0	**13**
RIC (9,10)	3	1	3	3	3	0	**13**
THA (11,2)	3	3	3	3	3	0	**15**
VIV (10,7)	3	2	3	3	3	0	**14**
Total	**87**	**39**	**79**	**25**	**22**	**2**	**254**

A Tabela 7 mostra o desempenho dos sujeitos em cada problema na Fase 2. Os problemas cinco e seis apresentam as maiores dificuldades para as crianças nesta fase, embora possa ser verificada uma melhora no desempenho não só destes, mas em todos os problemas de uma maneira geral.

Considerando-se a pontuação total de cada sujeito nesta segunda aplicação de Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa, foi possível construir a Tabela 8, na qual é apresentado o desempenho global dos sujeitos.

TABELA 8: Desempenho Global na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa – Fase 2

Sujeitos	Porcentagem de Acertos (Global)
ANG (9,1)	38,8%
BIA (9,7)	11,1%
FEL (9,1)	27,7%
FRA (10,4)	33,3%
GIS (10,5)	33,3%
GUI (8,8)	22,2%
KLI (10,0)	38,8%
LAY (9,3)	38,8%
MAT (9,6)	33,3%
REG (9,10)	16,6%
BEA (9,6)	33,3%
DAE (11,8)	38,8%
GUH (10,4)	50,0%
JOA (9,8)	33,3%
LAU (10,7)	44,4%
LUI (9,10)	27,7%
MCA (10,8)	44,4%
TAT (10,10)	66,6%
JOS (10,1)	38,8%
NAT (10,2)	50,0%
APA (10,0)	38,8%
GAB (9,4)	83,3%
JES (10,3)	88,8%
MAR (8,0)	77,7%
MUR (10,6)	61,1%
NAY (11,0)	33,3%
PRI (10,6)	72,2%
RIC (9,10)	72,2%
THA (11,2)	83,3%
VIV (10,7)	77,7%

O desempenho global dos sujeitos na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa nas duas fases encontra-se organizada na Tabela 9.

TABELA 9: Desempenho Geral dos Sujeitos na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa – Fase 1 e 2

Sujeitos	Porcentagem de Acertos (Global) Fase 1	Porcentagem de Acertos (Global) Fase 2
ANG (9,1)	38,8%	38,8%
BIA (9,7)	27,7%	11,1%
FEL (9,1	27,7%	27,7%
FRA (10,4)	55,5%	33,3%
GIS (10,5)	33,3%	33,3%
GUI (8,8)	16,6%	22,2%
KLI (10,0)	33,3%	38,8%
LAY (9,3)	38,8%	38,8%
MAT (9,6)	0%	33,3%
REG (9,10	16,6%	16,6%
BEA (9,6)	33,3%	33,3%
DAE (11,8)	50,0%	38,8%
GUH (10,4)	33,3%	50,0%
JOA (9,8)	50,0%	33,3%
LAU (10,7)	55,5%	44,4%
LUI (9,10)	33,3%	27,7%
MCA (10,8)	55,5%	44,4%
TAT (10,10)	38,8%	66,6%
JOS (10,1)	61,1%	38,8%
NAT (10,2)	33,3%	50,0%
APA (10,0)	16,6%	38,8%
GAB (9,4)	50,0%	83,3%
JES (10,3)	72,2%	88,8%
MAR (8,0)	33,3%	77,7%
MUR (10,6)	50,0%	61,1%
NAY (11,0)	44,4%	33,3%
PRI (10,6)	50,0%	72,2%
RIC (9,10)	72,2%	72,2%
THA (11,2)	38,8%	83,3%
VIV (10,7)	38,8%	77,7%

Vê-se, assim, nas Tabelas 5, 6, 7, 8 e 9 os resultados dos sujeitos nas duas fases de resolução de problemas de estrutura multiplicativa, a fim de poder atender aos objetivos dois e três do presente estudo.

5ª Etapa: Relação entre Níveis de Construção da Multiplicação e Desempenho na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa – Fase 1 e Fase 2

Atendendo ao segundo objetivo da pesquisa, qual seja, analisar a relação existente entre os níveis de multiplicação obtidos na Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa de Piaget e o desempenho dos sujeitos em problemas de estrutura multiplicativa antes e após serem submetidos à aplicação do jogo de argolas, foi construída a tabela seguinte que mostra a porcentagem global de acertos dos sujeitos nas duas fases de resolução de problemas e os níveis de construção da noção de multiplicação dos sujeitos.

TABELA 10: Desempenho na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 1 - Fase 2) e Níveis de Construção da Noção de Multiplicação obtidos na Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa.

Sujeitos	Porcentagem de Acertos (Global) Fase 1	Porcentagem de Acertos (Global) Fase 2	Nível de Construção da Noção de Multiplicação
ANG (9,1)	38,8%	38,8%	I
BIA (9,7)	27,7%	11,1%	I
FEL (9,1	27,7%	27,7%	I
FRA (10,4)	55,5%	33,3%	I
GIS (10,5)	33,3%	33,3%	I
GUI (8,8)	16,6%	22,2%	I
KLI (10,0)	33,3%	38,8%	I
LAY (9,3)	38,8%	38,8%	I
MAT (9,6)	0%	33,3%	I
REG (9,10	16,6%	16,6%	I
BEA (9,6)	33,3%	33,3%	II
DAE (11,8)	50,0%	38,8%	II
GUH (10,4)	33,3%	50,0%	II
JOA (9,8)	50,0%	33,3%	II
LAU (10,7)	55,5%	44,4%	II
LUI (9,10)	33,3%	27,7%	II
MCA (10,8)	55,5%	44,4%	II
TAT (10,10)	38,8%	66,6%	II
JOS (10,1)	61,1%	38,8%	II
NAT (10,2)	33,3%	50,0%	II
APA (10,0)	16,6%	38,8%	III
GAB (9,4)	50,0%	83,3%	III
JES (10,3)	72,2%	88,8%	III
MAR (8,0)	33,3%	77,7%	III
MUR (10,6)	50,0%	61,1%	III
NAY (11,0)	44,4%	33,3%	III
PRI (10,6)	50,0%	72,2%	III
RIC (9,10)	72,2%	72,2%	III
THA (11,2)	38,8%	83,3%	III
VIV (10,7)	38,8%	77,7%	III

A tabela a seguir mostra a média geral entre o desempenho dos sujeitos na prova de multiplicação e associatividade multiplicativa nas duas fases realizadas.

TABELA 11: Relação entre Desempenho na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 1 e Fase 2) e Níveis de Construção da Noção de Multiplicação obtidos na Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa (média geral)

Sujeitos	Média global de acertos (Fase 1)	Média global de acertos (Fase 2)	Nível de Construção da noção de multiplicação
10	28,83%	29,39%	I
10	44,41%	42,73%	II
10	46,63%	68,84%	III

Para comparar o percentual de acertos nas duas fases de aplicação de Prova de Matemática com os níveis de construção da noção de multiplicação foi utilizado o teste de Kruskal-Wallis. Comparando o percentual de acertos na Fase 1 (variável pa1) entre os níveis de multiplicação, tem-se:

TABELA 12: Comparação do percentual de acertos na Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa-Fase 1 (Teste de Kruskal-Wallis)

NMULT	N	Média	D. Padrão	Mínimo	Mediana	Máximo	p-valor*	Diferenças	
I	10	28.83	15.21	0.00	30.50	55.50			
II	10	44.41	11.12	33.30	44.40	61.10			
III	10	46.63	16.83	16.60	47.20	72.20	**0.0309**	I e II	I e III

teste de Kruskal-Wallis

Com base na análise estatística, pode-se afirmar que houve uma evidência de diferença significativa entre os níveis de multiplicação para o percentual de acertos na Fase 1. O Nível I é diferente do II e do III. Os Níveis II e III são iguais.

Comparando o percentual de acertos na Fase 2 (variável pa2) entre os níveis de multiplicação, tem-se:

TABELA 13: Comparação do percentual de acertos na Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa – Fase 2 (Teste de Kruskal-Wallis)

NMULT	N	Média	D. Padrão	Mínimo	Mediana	Máximo	p-valor*	Diferenças	
I	10	29.39	9.80	11.10	33.30	38.80			
II	10	42.73	11.13	27.70	41.60	66.60		I e II	
III	10	68.84	18.92	33.30	74.95	88.80	0.0004	I e III	II e III

teste de Kruskal-Wallis

Com base na análise estatística, pode-se afirmar que houve evidência de diferença significativa entre os níveis de multiplicação para o total de pontos na Fase 2. O Nível I é diferente do II e do III e o Nível II é diferente do Nível III.

Para comparar as duas fases da aplicação de provas de resolução de problemas de estrutura multiplicativa foi aplicado o teste de Wilcoxon para amostras relacionadas. A variável dif12 é a diferença entre a Fase 2 e a Fase 1, conforme ilustra a tabela abaixo:

TABELA 14: Comparação das duas Fases de Aplicação da Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa com os Níveis de Construção da Noção de Multiplicação

NMULT	Variável	N	Média	dp	Mínimo	Mediana	Máximo	p-valor*
I	PA1	10	28.83	15.21	0.00	30.50	55.50	
	PA2	10	29.39	9.80	11.10	33.30	38.80	
	Dif12	10	0.56	14.67	-22.20	0.00	33.30	1.0000
II	PA1	10	44.41	11.12	33.30	44.40	61.10	
	PA2	10	42.73	11.13	27.70	41.60	66.60	
	Dif12	10	-1.68	16.61	-22.30	-8.35	27.80	0.8867
III	PA1	10	46.63	16.83	16.60	47.20	72.20	
	PA2	10	68.84	18.92	33.30	74.95	88.80	
	Dif12	10	22.21	18.70	-11.10	22.20	44.50	0.0117

* teste de Wilcoxon para amostras relacionadas

A partir da análise estatística pode-se dizer que houve evidência de diferença significativa apenas para o Nível III. O percentual de acertos na Fase 2 foi maior que na Fase 1 para crianças com este nível.

Passaremos agora a analisar as relações existentes entre os níveis de generalização e o desempenho dos sujeitos na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa.

6ª Etapa: Relação entre Níveis de Generalização e Desempenho na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa – Fase 1 e Fase 2

Para atender ao terceiro objetivo do estudo que se propõe a analisar a relação existente entre os níveis de generalização e o desempenho dos sujeitos em problemas de estrutura multiplicativa antes e após serem submetidos à aplicação do jogo de argolas, foi construída a Tabela 15, na qual é apresentada a porcentagem global de acertos dos sujeitos nas duas fases de aplicação de provas e os níveis de generalização dos sujeitos.

TABELA 15: Relação entre Desempenho na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 1 e Fase 2) e Níveis de Generalização obtidos na Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes

Sujeitos	Porcentagem de Acertos (Global) Fase 1	Porcentagem de Acertos (Global) Fase 2	Nível de Generalização
ANG (9,1)	38,8%	38,8%	I
BIA (9,7)	27,7%	11,1%	I
FEL (9,1	27,7%	27,7%	I
FRA (10,4)	55,5%	33,3%	I
GIS (10,5)	33,3%	33,3%	I
GUI (8,8)	16,6%	22,2%	I
KLI (10,0)	33,3%	38,8%	I
LAY (9,3)	38,8%	38,8%	I
MAT (9,6)	0%	33,3%	I
REG (9,10	16,6%	16,6%	I
BEA (9,6)	33,3%	33,3%	I
DAE (11,8)	50,0%	38,8%	I
GUH (10,4)	33,3%	50,0%	I
JOA (9,8)	50,0%	33,3%	I
LAU (10,7)	55,5%	44,4%	I
LUI (9,10)	33,3%	27,7%	I
MCA (10,8)	55,5%	44,4%	I
TAT (10,10)	38,8%	66,6%	I
JOS (10,1)	61,1%	38,8%	II
NAT (10,2)	33,3%	50,0%	II
APA (10,0)	16,6%	38,8%	II
GAB (9,4)	50,0%	83,3%	II
JES (10,3)	72,2%	88,8%	II
MAR (8,0)	33,3%	77,7%	II
MUR (10,6)	50,0%	61,1%	II
NAY (11,0)	44,4%	33,3%	II
PRI (10,6)	50,0%	72,2%	II
RIC (9,10)	72,2%	72,2%	II
THA (11,2)	38,8%	83,3%	II
VIV (10,7)	38,8%	77,7%	II

A tabela a seguir mostra a média geral entre o desempenho dos sujeitos na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa nas duas fases realizadas e os níveis de generalização.

TABELA 16: Relação entre Desempenho na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 1 e Fase 2) e Níveis de Generalização obtido na Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes (média geral)

Sujeitos	Média de acertos (global) Fase 1	Média de acertos (global) Fase 2	Nível de Generalização
18	35,44%	35,13%	I
12	46,73%	64,77%	II

Para comparar o percentual de acertos nas duas fases de aplicação de Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa com os níveis de generalização foi utilizado o teste de Mann-Whitney. Comparando o percentual de acertos na fase 1 (variável pa1) entre os níveis de generalização, tem-se:

TABELA 17: Comparação do percentual de acertos na Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes-Fase 1 (Teste de Mann-Whitney)

NGEN	N	Média	D. Padrão	Mínimo	Mediana	Máximo	p-valor*
I	18	35.44	14.90	0.00	33.30	55.50	
II	12	46.73	16.34	16.60	47.20	72.20	0.0827

* teste de Mann-Whitney

Pode-se observar na tabela acima que não houve evidência de diferença significativa entre os níveis de generalização para o percentual de acertos na Fase 1.

TABELA 18: Comparação do percentual de acertos na Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes-Fase 2 (Teste de Mann-Whitney)

NGEN	N	Média	D. Padrão	Mínimo	Mediana	Máximo	p-valor*
I	18	35.13	12.49	11.10	33.30	66.60	
II	12	64.77	19.72	33.30	72.20	88.80	0.0004

* teste de Mann-Whitney

Já comparando o percentual de acertos na Fase 2 (variável pa2) entre os níveis de generalização, os dados mostram que houve evidência de diferença significativa entre os níveis de generalização para o total de pontos, sendo que o Nível I obteve menor percentual de acertos.

Para comparar as duas fases da aplicação de Provas de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa e níveis de generalização foi aplicado o teste de Wilcoxon para amostras relacionadas. Comparando o percentual de acertos das duas fases em cada nível de generalização, tem-se:

TABELA 19: Comparação das duas fases de aplicação da Prova de Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa com os Níveis de Generalização

NGEN	N	Média	D. Padrão	Mínimo	Mediana	Máximo	p-valor*
I -PA1	18	35.44	14.90	0.00	33.30	55.50	
PA2	18	35.13	12.49	11.10	33.30	66.60	
Dif12	18	-0.31	14.69	-22.20	0.00	33.30	0.7793
II- PA1	12	46.73	16.34	16.60	47.20	72.20	
PA2	12	64.77	19.72	33.30	72.20	88.80	
Dif12	12	18.04	21.22	-22.30	19.45	44.50	0.0264

* teste de Wilcoxon para amostras relacionadas

Conforme ilustra o quadro anterior, houve evidência de diferença significativa apenas para o Nível II; o percentual de acertos na Fase 2 foi maior que na Fase 1 para crianças com este nível de generalização.

Com base na análise estatística do desempenho dos sujeitos em Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa antes e após as atividades lúdicas, em relação aos níveis de construção da noção de multiplicação e aos níveis de generalização, podemos discutir alguns aspectos importantes em relação aos processos cognitivos envolvidos na construção das estruturas multiplicativas.

O Nível III de construção da noção de multiplicação possibilita aos sujeitos realizarem antecipações e estarem de posse da noção de multiplicação, enquanto os sujeitos dos Níveis I e II ainda se encontram em processos construtivos. Deste modo podemos explicar o fato das situações-problema, via jogo de argolas, terem influenciado mais os sujeitos do Nível III de construção da noção de multiplicação e Nível II de generalização, uma vez que foi por meio do processo de tomada de consciência de suas ações no jogo que se mostraram capazes de construir novos conteúdos e novas formas, o que constitui a generalização construtiva. Macedo (1994) destaca este aspecto ao afirmar que: “a intervenção é favorável, mas depende do nível de desenvolvimento da criança quanto àquela noção” (p.134).

O Nível II de generalização possibilita aos sujeitos agirem de modo compreensivo, mas não extensivo ainda. Existe uma compreensão maior das identidades, mas que ainda não são suficientes e completas para as intersecções, pois são, ainda, por meio de tentativa e erro. Os Níveis I e II de generalização apresentados pelos sujeitos constituem processos construtivos da generalização, sem ainda alcançar o Nível III, conforme comprovamos no presente trabalho.

Pode-se inferir que as abstrações reflexivas possibilitaram extrair da coordenação das ações o imprescindível para que os sujeitos dos níveis mais elevados pudessem construir coordenações inferenciais, possibilitando ligar e interpretar dados de observação.

O progresso das abstrações, que, como destacamos, são necessárias na situação da construção da noção de multiplicação, parece também explicar a generalização construtiva. No entanto, para ter melhor êxito no jogo nas situações mais complexas e nos problemas de estrutura multiplicativa de grau de maior dificuldade, é preciso que ambos os processos estejam presentes: abstração reflexiva e generalização construtiva.

Passaremos, a seguir, a uma breve análise das situações lúdicas a fim de atender ao quarto objetivo do presente trabalho, qual seja, verificar o papel da atividade lúdica que envolve relações multiplicativas no desempenho de sujeitos na resolução de problemas de estrutura multiplicativa

7ª Etapa: Breve análise das situações lúdicas propostas via jogo de argolas

Os níveis de construção da noção de multiplicação e os níveis de generalização dos sujeitos estudados fornecem condições para a compreensão das situações-problema envolvidas no jogo de argolas. As situações lúdicas são importantes para a discussão do desempenho dos sujeitos na resolução de problemas nas duas fases de aplicação.

As situações-problema propostas aos sujeitos no jogo favoreceram diferentes possibilidades de representações e até mesmo melhoraram as suas resoluções escritas na prova de resolução de problemas de estrutura multiplicativa em uma segunda aplicação.

Foram disponibilizados papéis, lápis de cor e fichas coloridas conforme as cores correspondentes aos alvos para que os sujeitos pudessem apresentar suas resoluções.

Após as partidas de aprendizagem do jogo, foram simuladas situações lúdicas propostas aos sujeitos em forma de problema. A experimentadora leu a situação, solicitando que o sujeito explicasse como poderia resolvê-lo. O sujeito deveria representar por escrito, depois utilizando os alvos e as argolas e por último utilizando as fichas. Desta forma três aspectos foram considerados: ação de jogar, a resposta escrita e a explicação oral.

A solução por meio de algoritmos somente não subsidia de maneira precisa se o sujeito compreendeu o que fez quando resolveu o problema. Desta forma, o presente estudo propõe-se a analisar brevemente as situações-problema desencadeadas pelo jogo de argolas que envolviam resoluções de problemas de estrutura multiplicativa. Em seguida a essa etapa, faremos uma breve análise das resoluções de problemas dos sujeitos antes e após as atividades lúdicas.

A) Aprendizagem do Jogo

Para a aprendizagem do jogo realizaram-se duas partidas. A experimentadora apresentou o jogo aos sujeitos, perguntando se conheciam, se sabiam como jogá-lo e suas regras. O início do jogo se deu após o esclarecimento das regras. A maioria dos sujeitos já conhecia o jogo de argolas e suas regras.

A ordem dos jogadores foi determinada com todos os sujeitos de maneira aleatória, adotando "par ou ímpar" como critério. Este aspecto mostra que os sujeitos encontram-se, em relação à prática das regras, no "estágio da cooperação nascente". Piaget (1994) esclarece que, neste estágio, a criança consegue diferenciar e coordenar seu ponto de vista com os demais jogadores, sendo capaz de manter uma relação de reciprocidade social.

O vencedor do jogo foi determinado a partir dos registros e das fichinhas. Os sujeitos procederam contando os pontos por meio da adição ou da multiplicação, conforme os alvos e valores acertados. Também se utilizaram do cálculo mental, uma vez que os valores acertados nos alvos eram baixos.

Os jogos de regras apresentam importante papel no desenvolvimento social, moral e intelectual das crianças. O jogo propicia a interação social, que, por sua vez, possibilita a cooperação e o respeito mútuo, possibilitando a descentração e a coordenação de diferentes pontos de vista, como afirma Brenelli (1996):

> *por ser troca entre iguais, favorece a cooperação, tal como ocorre no jogo de regras, que pode favorecer condições para que as descentrações ocorram a caminho das coordenações interindividuais, na medida em que haja um mínimo de entendimento mútuo* (p.150).

O exemplo de GIS (10; 5) (M:I; G:I) a seguir ilustra uma das sessões de aprendizagem do jogo realizadas pelos sujeitos:

GIS (10;8) (M:I;G:I). Na primeira jogada, acertou uma argola no alvo amarelo (3 pontos). *Como você faz?* **Vou marcar primeira jogada, segunda jogada, terceira jogada.** Pega 3 fichas amarelas e põe embaixo da primeira jogada, depois escreve 3 pontos*. Tem outro jeito de marcar?* **Tem.** Escreve 3 pontos e põe 3 risquinhos.

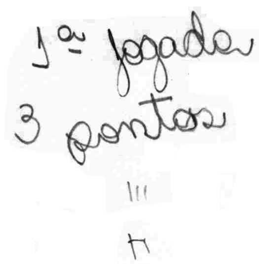


Figura 1: Registro espontâneo de GIS no jogo de argolas (1ª jogada).

Na segunda jogada acertou uma argola no alvo de 5 e no de 7. **Eu marquei os dois (5 e 7). Eu posso somar os dois. Eu ponho 12 aqui.** Escreve embaixo da segunda jogada. *Tem outro jeito?* **Eu vou pôr aqui 5 do vermelho e 7 do marrom.** *Como você sabe que são 12?* **Porque 5 + 7 dá 12.** Pega as fichas correspondentes. Tem outro jeito? Faz a marcação com risquinhos.

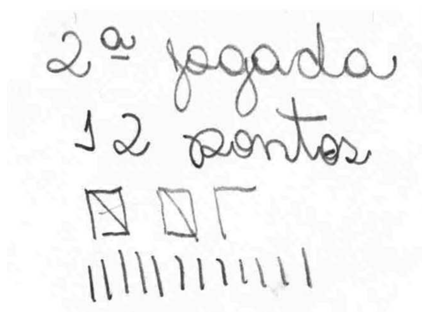


Figura 2: Registro espontâneo de GIS no jogo de argolas (2ª jogada).

Na terceira jogada, GIS não acertou nenhuma argola.

Figura 3: Registro espontâneo de GIS no jogo de argolas (3ª jogada).

Na quarta jogada acertou 1 no amarelo. *Como você faz?* Pega 3 fichinhas amarelas e registra 3 pontos com os risquinhos.

Figura 4: Registro espontâneo de GIS no jogo de argolas (4ª jogada).

Na quinta jogada acerta 1 argola no alvo de 6 pontos. Procede da mesma forma para registrar os pontos.

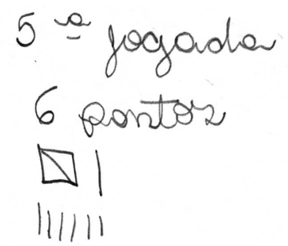


Figura 5: Registro espontâneo de GIS no jogo de argolas (5ª jogada).

O exemplo de GIS (10; 5) (M:I; G:I) apresenta as diferentes formas de registro espontâneo, desde a representação mais simples por meio de símbolos (risquinhos) até a representação da operação de adição para somar os pontos no final da partida, o que pode ser explicado por seu Nível I de construção da noção de multiplicação e I de generalização. O registro espontâneo possibilita à criança utilizar seus próprios meios de raciocínio, como podemos observar no registro de GIS (M:I; G:I).

A seguir, passaremos a analisar as situações-problema propostas no Jogo de Argolas.

B) Situações-problema com o Jogo de Argolas

a) Correspondência de um para muitos

Nunes e Bryant (1997), ao destacarem o aparecimento precoce nas crianças dos pontos de partida para a compreensão de conceitos como multiplicação e divisão, afirmam que o desenvolvimento da correspondência faz parte das idéias iniciais das crianças sobre multiplicação. O desenvolvimento da correspondência de um para um (termo a termo) viabiliza a construção das correspondências de um para muitos.

Deste modo, estes dois tipos de correspondência são fundamentais para a construção das estruturas multiplicativas e pode-se dizer que este último tipo de correspondência é imprescindível para a construção da noção de proporção.

A correspondência de um para muito é apontada por Nunes e Bryant (1997) como sendo fator invariável da situação, mas com diferenças substanciais do tipo de invariável presente no raciocínio aditivo. Afirmam que:

> (...) a correspondência de um para muitos é a base para um novo conceito matemático, o conceito de proporção. A fim de manter constante, por exemplo, a correspondência "1-carro-para-4-rodas", cada vez que acrescentamos um carro para o conjunto de rodas, devemos acrescentar 4 rodas para o conjunto de rodas – ou seja, somamos números diferentes de objetos a cada conjunto. Isso contrasta com a situação aditiva na qual, para manter constante a diferença entre dois conjuntos, somamos o mesmo número de objetos a cada conjunto *(p.143).*

Assim como nas situações lúdicas, envolvendo correspondências, os problemas de estrutura multiplicativa do tipo isomorfismo de medidas, utilizados neste estudo, engendram o domínio da correspondência de um para um (termo a termo) e de correspondência de um para muitos, o que favorece a construção das estruturas multiplicativas.

Para esta etapa das atividades lúdicas, foram propostas situações-problema durante as jogadas que possibilitassem aos sujeitos estabelecerem correspondência de um para muitos, isto é, corresponder cada alvo ao respectivo valor em pontos (fichas).

O exemplo abaixo, de PRI (10;6) (M:III; G:II), mostra a correspondência de um para muitos quando o sujeito, ao pegar as fichas correspondentes ao valor do alvo, vai relacionando esses valores:

> Na primeira jogada PRI acertou uma argola no alvo marrom (7pontos). *Uma argola sua caiu no alvo marrom Como você faz?* **Sete.** Pega 7 peças marrons, marca 7 no papel (com lápis vermelho) e põe as sete fichas na frente do 7.
> Na segunda jogada, acertou uma argola no alvo marrom de 7 pontos, uma no preto de 6 pontos, uma no laranja de 8 pontos e uma no branco de 9. **6 com 8 com 7 com 9 dá 30.** *Como você sabe?* **Porque 6 com 6 é 12 + 1 do 7 é 13. Ali 8 e 9, 8 com 8 dá 16 com 1 que sobrou do 9 dá 17. Aí 17 com 13, 7 e 3 dá 10 e vai 1 e os restos do 1 dá 30.** *E como você me mostra com as fichas?* **Eu pego 8**

> **fichas laranjas, 9 de branca, 6 do pretinho e 7 do marrom.** Põe todas as fichas no papel juntas na frente do 30.

A importância dessa situação para a construção da noção de multiplicação ocorre na medida em que possibilita ao sujeito relacionar cada alvo ao seu respectivo valor em pontos e quantidade em fichas. Os sujeitos podem perceber que, apesar dos alvos de valores mais elevados serem mais difíceis, os mesmos valem por mais acertos nos alvos menores, como, por exemplo, ao invés de acertar quatro argolas no alvo de dois pontos ou duas argolas no alvo de quatro pontos, acertar somente uma no de oito daria a mesma quantidade em pontos.

b) Correspondência de muitos para muitos:

Estas situações possibilitam ao sujeito refletir sobre sua ação ao se deparar com situações que envolvem multiplicação, quando, por exemplo, acertar mais de uma argola no mesmo alvo, podendo, assim, favorecer a construção dessa noção.

Conforme os sujeitos acertavam os alvos no decorrer das jogadas, a experimentadora propunha questões que trabalhassem a correspondência de muitos para muitos. As questões eram respondidas pelos sujeitos que utilizavam diferentes formas de representação.

O exemplo de ANG (9; 1) (M:I; G:I), a seguir, mostra como isso foi trabalhado.

> **ANG (9; 1) (M:I; G:I)** Acertou três argolas no alvo rosa que vale 2 pontos. *Explique-me sua jogada, como você faz para saber quantos pontos marcou?* **Eu acertei três vezes no de 2, então peguei 6 fichinhas rosas.** *Como você sabe que são 6?* **Porque é 2+2+2 que dá 6, 3 vezes no de 2 dá 6.**

O exemplo de ANG (9; 1) (M:I; G:I) mostra que, apesar de em sua fala utilizar a multiplicação: **Eu acertei 3 vezes no de 2, então peguei 6 fichinhas rosas...**, também justificou utilizando a adição: **Porque é 2+2+2 que dá 6, 3 vezes no de 2 dá 6...**

C) Operações Aritméticas:

As operações aritméticas foram solicitadas na contagem de pontos. Ao acertarem os alvos, a experimentadora intervinha pedindo que os sujeitos contassem seus pontos e pegassem as fichas correspondentes. Além disso, eram solicitados também para mostrarem os pontos com as argolas e os alvos e a fazerem a representação gráfica utilizando lápis e papel.

Convém destacar que para todos os sujeitos da amostra (N=30) foram feitas as mesmas questões, levando em consideração os acertos nos diferentes alvos, ou seja, o número de pontos alcançados por eles.

O protocolo de GIS (10; 5) (M:I; G:I), a seguir, serve como exemplo para ilustrar as operações aritméticas:

> GIS (10;8). No final a experimentadora perguntou: *Quem está ganhando o jogo?* **Não sei.** *Você? Quanto você marcou?* **"24. 3+12+0+3+6.** Foi falando e contando no dedo*. Quem está ganhando?* **Eu não sei quantos pontos você fez***. Tem algum jeito de saber?* **Tem, contando os seus pontos.** Conta os pontos da experimentadora da mesma forma. **20, eu tô ganhando, mas tem a quinta jogada sua e você pode ganhar ainda.** *Quanto eu tenho que fazer para ganhar?* **É só fazer no alvo que tem o ponto maior.** *Qual?* **9.** *Como você me mostra no papel quantos pontos fez?* Faz a adição somando todos os seus pontos.

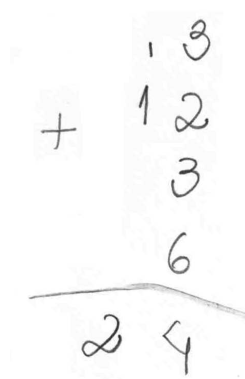


Figura 6: Registro espontâneo de GIS na contagem dos pontos obtidos no jogo de argolas.

O registro escrito de GIS mostra que ainda não está utilizando a multiplicação, uma vez que acertou 2 argolas no alvo de 3 pontos e no final realiza somente adição. Além disso, acredita que, para ganhar o jogo da experimentadora, que tem 20 pontos, deve acertar no maior alvo, não percebendo que qualquer acerto no alvo de 5 ou maior que 5 poderia significar a mesma coisa. GIS não percebe as diferentes possibilidades da experimentadora marcar 4 pontos, até mesmo utilizando dois acertos no mesmo alvo, ou seja, não está utilizando a multiplicação. Podemos explicar o exemplo de GIS pelos níveis em que se encontra de construção da noção de multiplicação (Nível I) e de generalização. Em relação à noção de multiplicação, os sujeitos deste nível apresentam dificuldades em realizar multiplicações simples e não fazem ainda compensações. Já em relação à generalização, não percebem que podem estabelecer diferentes formas de se ganhar o jogo acreditando ser possível somente um critério, o número maior dos alvos.

Dentro das operações aritméticas, também foram criadas outras situações-problema que favorecessem a construção da noção de multiplicação. Os protocolos de GUI (8; 8) (M:I; G:I), GIS (10; 5) (M:I; G:I), PRI (10; 6) (M:III; G:II), NAY (11; 0) (M:III; G:II) e FRA (10; 4) (M:I; G:I), apresentados a seguir, ilustram estas situações.

De quantas maneiras eu consigo fazer 12 pontos?

GUI (8,8) (M:I; G:I) Fica pensando. **4+4+4.** *Dá 12?* **Dá.** Escreve no papel. *Tem outro jeito?* **3+3+3+3.** Escreve no papel. *Tem outro jeito?* **2+2+2+2+2. 5 no 2 dá 12.** Tem outro jeito? **1+1+1+1... até 12.** *Tem outro jeito?* **Não.** *E no jogo, como você poderia me mostrar?* **Teria que acertar 3 vezes no 4 ou 5 vezes no 2 ou 12 vezes no 1. 12+12+12+12.** Mostra apontando as quatro maneiras.

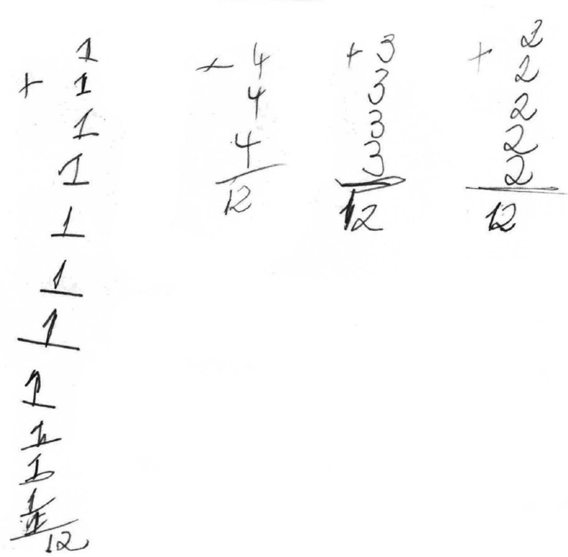


Figura 7: Diferentes maneiras de fazer 12 pontos efetuadas por GUI.

GIS (10; 5) (M:I; G:I) Vai falando e pegando as argolas. **Pegando 2 argolas no de 6.** *Tem outro jeito?* **4 no de 3, porque também vai dar 12.** *Como você sabe?* **Porque eu somei 3+3+3+3.** *Tem outro jeito?* **Tem. Pego 3 argolas e coloco no de 4.** Mostra no dedo 4, 8, 12, fazendo correspondência de um para muitos, 1 dedo para 4 pontos. *Tem outro jeito?* **Tem 4 no de 2. Porque 6x2 dá 12 e também 2+2+2+2+2+2 dá 12.** *Tem outro jeito?* **Acho que não.** *Como você faria usando lápis e papel?*

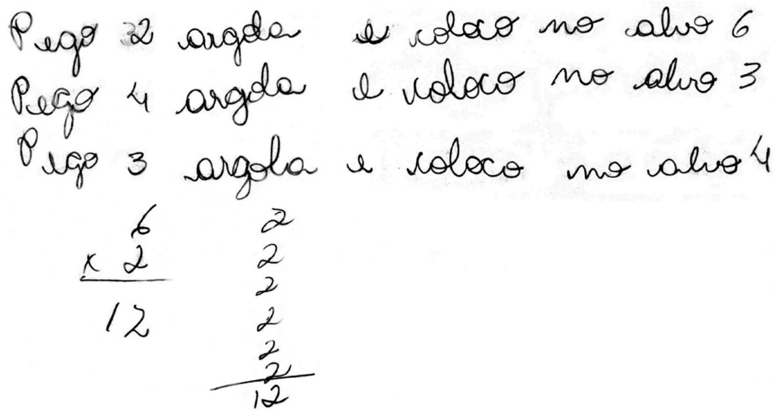


Figura 8: Diferentes maneiras de fazer 12 pontos efetuadas por GIS.

PRI (10; 6) (M:3; G:2) Escreve a conta e fala de todas as maneiras. **3x4 dá 12, 2x6 no 6, 4x3 o inverso daqui.** Mostra a primeira maneira, 3x4. Procede com os demais valores**. 6 vezes no 2, 5 não dá, 12 vezes no 1.** Vai pensando em todos os alvos e falando que não dá. **Acho que é isto, 5 maneiras**. *E com as fichas, como você me mostra?* Pega todas as maneiras das fichas corretamente. *Como você me mostraria utilizando lápis e papel?* Escreve as 5 maneiras no papel:

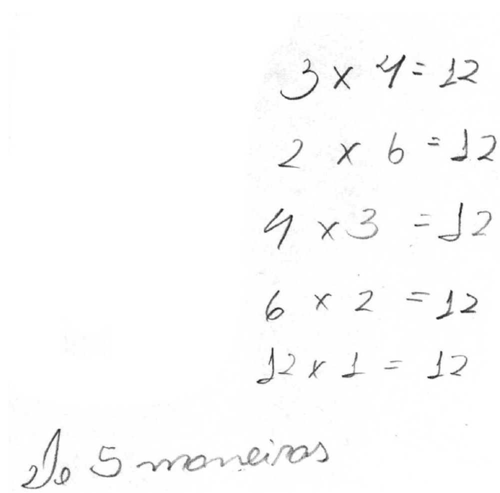


Figura 9: Diferentes maneiras de fazer 12 pontos efetuadas por PRI.

Os protocolos de GUI e GIS nos mostram ainda que suas resoluções, baseadas nos procedimentos aditivos, são comprovadas pelos níveis iniciais em que se encontram de noção de multiplicação e de generalização. Convém destacar ainda que os dois sujeitos apresentaram diferentes maneiras de obter 12 pontos, mas não concluíram as cinco maneiras possíveis, como o fez PRI. O exemplo de PRI mostra um procedimento um tanto quanto mais evoluído, uma vez que, ao utilizar a multiplicação, consegue descobrir todas as maneiras possíveis de marcar 12 pontos.

Podemos perceber nesses exemplos a diferença existente no protocolo de PRI (10; 6) (M:III; G:II) em relação aos outros dois sujeitos. É possível mostrar o domínio da noção de multiplicação alcançado por PRI que se encontra no Nível III desta construção, no qual o sujeito constrói a multiplicação e é capaz de realizar antecipações. Deste modo PRI não só registra no papel, como também faz uso da noção de multiplicação ao explicar para a experimentadora seu procedimento. Podemos dizer também que o Nível III de multiplicação corresponde ao Nível II de generalização (conforme análise estatística), o que também vem esclarecer mais a resolução de PRI.

Estas situações-problema envolvendo as operações aritméticas com enfoque em noções da construção da multiplicação permitem aos sujeitos avançarem nestas construções.

Outra situação-problema da categoria operações aritméticas propostas aos sujeitos foi a seguinte:

> **Tenho 5 argolas. Cada argola caiu no alvo de 3 pontos. Quantos pontos eu fiz?**
>
> **NAY (11; 0) (M:III; G:II)** Registra no papel 3x5 =15. *Como você poderia me mostrar isso no jogo?* **Eu colocava 5 argolas no 3.** *E com as fichas, como você poderia me mostrar?* **Pegaria 15 destes quadradinhos amarelos.**

Figura 10: Resolução de NAY nas operações aritméticas.

FRA (10;4) (M:1; G:I) Fica pensando. **15.** *Como você sabe?* **Porque eu fiz 3+3+3 até dá 5, aí deu 15.** *Como você me mostraria usando lápis e papel?* Faz a adição sucessiva. **Tinha que catar no amarelo.** *Como assim?* **Tinha que acertar 5 argolas no amarelo.** *E com as fichinhas, como você faria?* **15 fichas amarelas.**

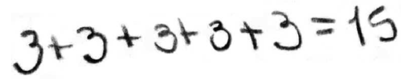


Figura 11: Resolução de FRA nas operações aritméticas.

Enquanto FRA (10;4) ainda está utilizando a adição sucessiva para resolver o que lhe foi solicitado, NAY (11;0) já resolve utilizando a multiplicação, mostrando os procedimentos de acordo com seus níveis de construção da noção de multiplicação e de generalização, conforme analisamos nos casos anteriores.

D) Relações Multiplicativas

Estas situações envolveram questões mais elaboradas, nas quais a noção de multiplicação foi enfocada de uma maneira mais complexa. Os exemplos a seguir mostram estas questões, e para ilustrar os procedimentos dos sujeitos, serão apresentados a seguir os protocolos de JES (10; 3) (M:III; G:II), REG (9; 10) (M:I;G:I), PRI (10; 6) (M:III; G:II), GAB (9;4) (M:III; G:II), FEL (9; 1) (M:I;G:I) e LUI (9;10) (M:II;GI).

Vamos fazer de conta que eu fiz 4 acertos no alvo de 2 pontos. Quantos pontos você tem que fazer no alvo de 4 pontos para conseguir marcar o mesmo número de pontos?

REG (9;10) (M:I;G:I) Começa colocando as argolas nos alvos. Em seguida escreve no papel a adição. Faz 2+2+2+2=8. **No 4 para dar o mesmo tanto?** É. **2. Acerto 2 no 4.** Faz no papel a adição. Põe as argolas nos alvos. *E com as fichas como você me mostraria?* **Eu pego 2+2+2+2. Dá 8. Para eu chegar no mesmo tanto, eu pego 4+4 dá 8.**

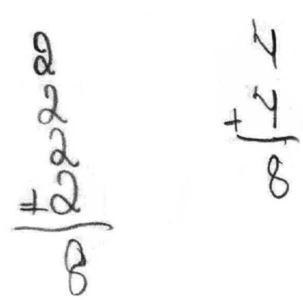


Figura 12: Relações Multiplicativas efetuadas por REG.

JES (10; 3) (M:III; G:II) Duas vezes. Porque 2x4 é 8 e 4x2 é igual a 8. Tem outro jeito? Pegou as fichas e dividiu 2 em 2. *Teria algum outro jeito de fazer isso?* **Tem.** Juntou 4 peças e 4 outras peças. **Tem 4+4=8.** *E sem usar a matemática?* **Tem com a matemática: 2+2+2+2=8.** *E sem a matemática?* **Só com a ficha.** *E sem ser na ficha?* **Só se for risquinho.** Sorriu. *Então como fica?* Faz 4 conjuntos de 2 risquinhos e depois 2 conjuntos de 4 risquinhos.

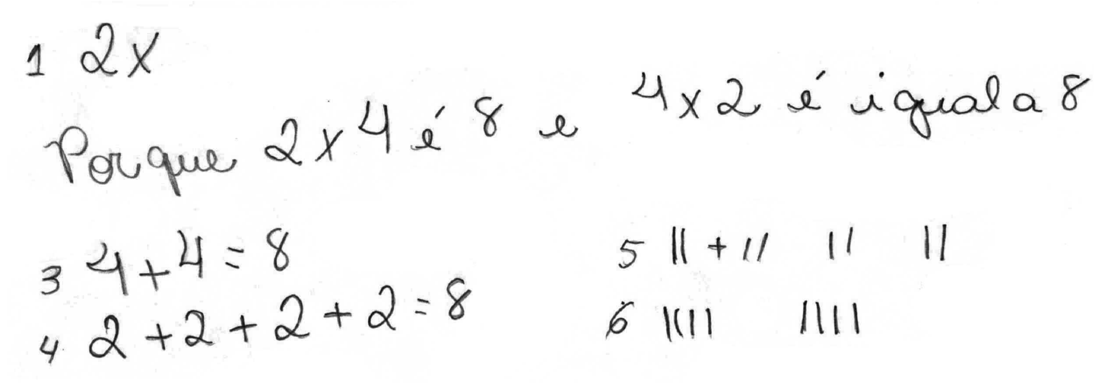


Figura 13: Relações Multiplicativas efetuadas por JES.

Os procedimentos de REG e JES diferem quanto ao uso da multiplicação. REG utiliza-se da adição sucessiva, enquanto JES faz antecipações antes mesmo da experimentadora pedir para representar de diferentes formas no papel.

Esta situação se assemelha às situações da prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa, na qual os animais devem comer o mesmo tanto de grãos, mas seus pacotes têm diferentes quantidades de grãos.

A resolução de REG corrobora com seu nível de construção de multiplicação e de generalização, assim como os demais sujeitos exemplificados até aqui, resolvendo a situação-problema por meio da adição. Da mesma forma, os procedimentos de JES também confirma os níveis em que se encontra.

A outra situação-problema colocada aos sujeitos foi a seguinte:

Se eu fizer 2 jogadas e acertar 3 argolas no alvo de 6 pontos em cada jogada, e você fizer 3 jogadas, quantas argolas tem de acertar em cada jogada no mesmo alvo preto para fazer o mesmo número de pontos?

PRI (10; 6) (M:III; G:II) Vai dar 18 e 18. Você fez 2 jogadas e acertou 3 argolas no alvo de 6 pontos em cada. Você fez 36. Então se eu tenho que jogar 3 jogadas... Pensa. *Como você sabe que é 18?* **Porque 6, 12, 18.** Faz a conta 36 dividido por 6 no papel. **Você 36 no total e tudo no 6. Acho melhor eu fazer 36 dividido por 3.** Faz a conta no papel. **Ah! Agora caiu a ficha. Eu tenho que fazer 12, 12, 12 que dá 36. 36 é o total de pontos, não vai ser em 3 jogadas? Então 12, 12 e 12.** *Então, quantas argolas?* **Então 2 em cada jogada. Porque em**

2 eu vou fazer 12. *E com as argolas?* **Eu tenho 3 tacadas, na primeira duas no preto, na segunda 2, dá 12 e 12, 24 e na terceira duas no preto dá 36.**

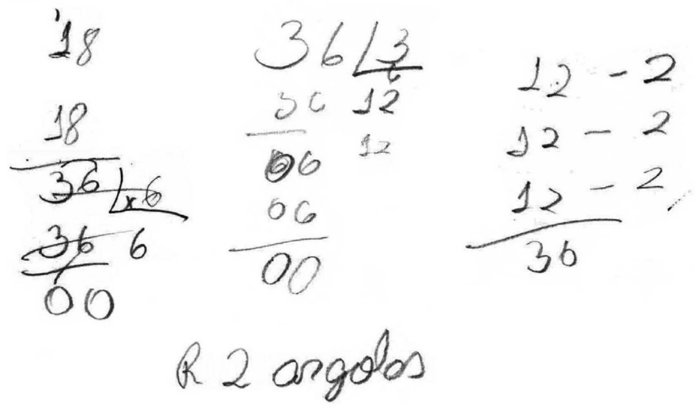


Figura 14: Relações Multiplicativas efetuadas por PRI

GAB (9; 4) (M:III; G:II) Peraí. Deixa eu tentar com as argolas. Tem que dar 6 x 6 é 36 pontos. Lê novamente em voz alta. Põe 2 argolas no alvo preto. **Dá 12.** Põe mais 2 no alvo preto. **24. 36.** *Como você sabe?* **Na primeira jogada eu acerto 2 que dá 12, na segunda acerta mais 2 que dá 24 (conta em voz alta) e na terceira mais 12 que dá 36. Então 2 argolas em cada jogada.** *E como você me mostraria isso no papel?* Faz 2x6 = 12 e 2x3 = 6. *É isso?* **Não. Deixa eu pegar aqui que é mais fácil. Pega 3 conjuntos de 2 fichas marrons. Eu acertei 2 na primeira, 2 na segunda e 2 na terceira.** Escreve no papel. *Como você descobriu que era 12 em cada jogada.? Que conta você pensou?* Faz no papel 36 dividido por 3. **Dá 12. Eu pego, pra mim saber. Para eu descobrir, eu faço 6 vezes 1 que não dá aí 6 vezes 2 dá 12.**

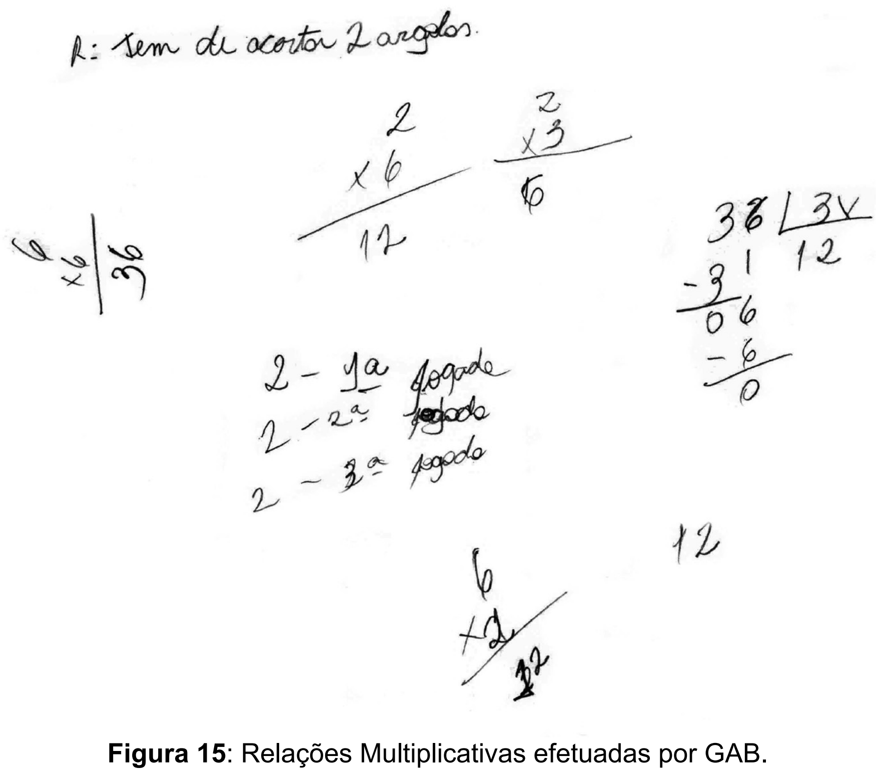


Figura 15: Relações Multiplicativas efetuadas por GAB.

Os protocolos de PRI e GAB comprovam mais uma vez, agora em situações diferentes, os protocolos anteriores, mostrando a correspondência entre os níveis de construção da noção de multiplicação e os níveis de generalização e como os sujeitos dos diferentes níveis resolvem as situações-problema propostas no jogo de argolas.

Para finalizar as relações multiplicativas, apresentaremos a última situação-problema que envolveu uma multiplicação com números mais elevados e exigiu um nível de abstração maior do sujeito, já que os alvos propostos e a quantidade de argolas eram hipotéticos.

Num jogo de argolas, que tinha alvos com valores até 12 pontos, um aluno de outra escola acertou 15 argolas no alvo de 12. Quantos pontos ele conseguiu marcar no final do jogo?

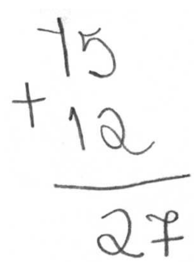


Figura 16: Relações Multiplicativas incorretas efetuadas por FEL.

FEL não conseguiu resolver a situação-problema ao utilizar a adição (não sucessiva), mas apenas serviu-se dos números do enunciado. Este fato também foi observado na resolução dos problemas de estrutura multiplicativa no presente estudo, principalmente na primeira fase (antes do jogo de argolas). O sujeito utiliza os números que aparecem no enunciado e realiza uma técnica qualquer que já saiba fazer. Estes resultados também foram encontrados por Guimarães e Silva (2003). É importante relembrar também que FEL se encontra nos níveis mais elementares de construção da noção de multiplicação e de generalização, o que poderia explicar seu procedimento incorreto.

O protocolo de LUI (9;10) (M:II; G:I) revela que ele tenta utilizar a multiplicação com números maiores, no entanto ainda não domina a técnica, pois, ao invés de somar os resultados, faz subtração.

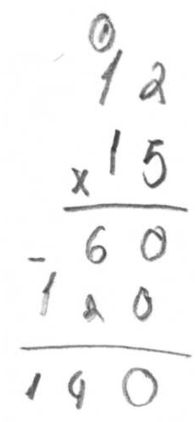


Figura 17: Relações multiplicativas efetuadas por LUI.

Podemos inferir que a multiplicação solicitada exigia o domínio da técnica operatória para se multiplicar números mais elevados, o que pode ter ocasionado uma dificuldade a mais para esses dois sujeitos.

D) Processo Inverso – Divisão

A experimentadora colocou várias situações que focalizaram o processo inverso, ou seja, com a divisão. Os exemplos, a seguir, ilustram estas situações-problema:

Fiz 12 pontos em 3 jogadas. Quantos pontos fiz em cada jogada?

PRI (10; 6) (M:III; G:II) 4. *Como você sabe?* **12 dividido por 3** dá 4. *Tem que fazer a conta?* Tem. Faz a conta. **Se você quiser tirar a prova real faz 3x4 vai dar 12**. *Como você me mostra no jogo?* Vai falando e colocando: uma argola em cada jogada no 4. **4 vai dar 8, vai dar 12.** *E com as fichas?* Pega 3 grupos de 4 fichas.

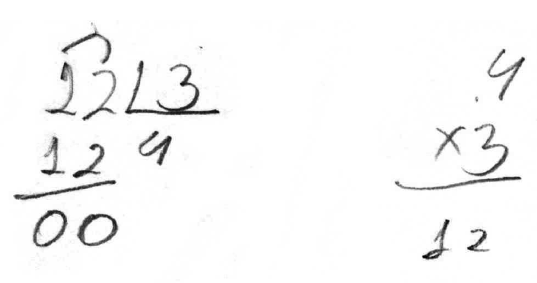


Figura 18: Resolução do processo inverso efetuada por PRI.

Uma menina da sua classe quer fazer 15 pontos em 3 partidas. Quantos pontos ela tem que fazer em cada partida?

DAE (10; 8) (M:II; G:I) Escreve 5 pontos. *Como você sabe?* **Porque eu faço 3x5 dá 15.** Faz no papel a multiplicação. *Tem outro jeito?* **Eu fazer 5x3**. Mostra no papel. *Tem outro jeito?* **Jogando ali**. Aponta o jogo. **Põe 1 argola no 5, acerta de novo dá 10 ou eu jogando no 7 e no 8.** Mas são em partidas**. No 9, no 4 e no 2, também dá 15.** Mas tem que acertar o mesmo valor em cada partida. **Tem só o 5.** *Tem outro jeito de mostrar no papel?* **Fazendo a conta de vezes.** *Tem outro jeito sem ser com matemática e argolas?* **Só se eu contar pauzinhos**. Faz 5 pauzinhos + 5 pauzinhos + 5 pauzinhos=15. *E se fosse com as fichas? Como você mostraria?* Pega 3 montes de fichas vermelhas, põe em cima do papel e faz sinal de + e de = com lápis e escreve 15.

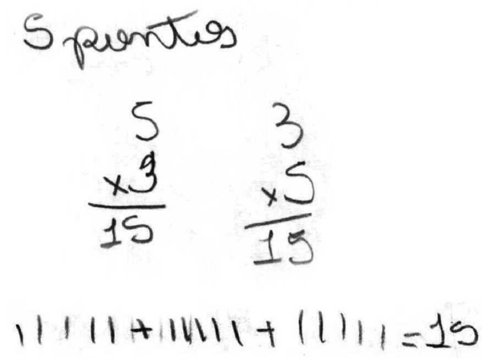


Figura 19: Resolução do processo inverso efetuada por DAE.

As duas situações-problema citadas anteriormente envolviam uma divisão simples. No entanto podemos notar a diferença dos procedimentos adotados por PRI e por DAE. PRI faz antecipação e explica a utilização da divisão, conforme o esperado para os níveis em que se encontra. Já DAE resolve a questão, mas ainda não utiliza a divisão e sim a multiplicação, mostrando seu processo de construção conforme seus níveis.

Finalmente as duas últimas situações do processo inverso envolvem um raciocínio mais elaborado, por exigirem a divisão, a multiplicação e a noção de proporção. Estas situações se assemelham ao que foi solicitado aos sujeitos na Prova de Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa (VERGNAUD, 1991).

Três argolas em um alvo marcam 300 pontos. Acertei 8 argolas neste alvo. Quantos pontos eu fiz?

REG (9;10) Faz 8x300. **Eu não sei quanto é 8x3.** *Tem um jeito de descobrir?* **Pode fazer pauzinho?** Pode. Faz de 3 em 3 e conta os grupos e depois as unidades. *Como você me mostraria isso no jogo?* **Eu ia tacar 8 vezes no...** (pensa e lê novamente). **Eu jogava 3 vezes no número, aí dava 300. Aí eu peguei o 8 e fiz vezes 300, deu 2.400.**

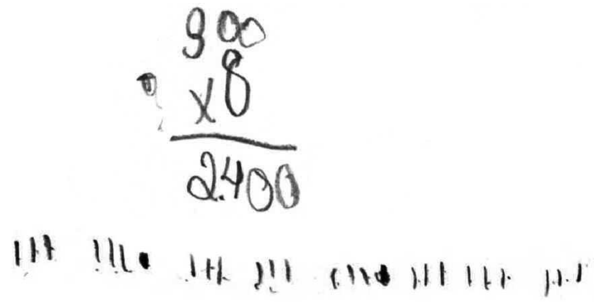


Figura 20: Resolução incorreta do processo inverso efetuada por REG.

MUR (19; 6) (M:III; G:II) 100 em cada alvo. *Como você sabe?* **Porque é só pegar 100+100+100 é igual a 300.** *E quantos pontos eu fiz então?* **800.** *Como você sabe?* **Porque é como se fosse pegar 100+100, 8 vezes 100.** *E no jogo, como seria?* **Faz de conta que o 5 é 100, aí eu acertei três vezes. Eu preciso de 8 argolas no 100.** *E nas fichas?* Pega 8 fichas vermelhas. **Cada uma vale 100, igual a cor do alvo.**

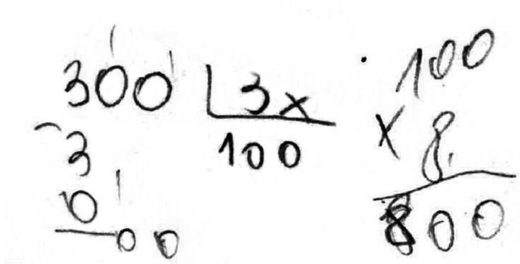


Figura 21: Resolução do processo inverso efetuada por MUR.

O exemplo de REG mostra que ela negligencia o valor de uma argola considerando a pontuação de 3 (300) igual ao de uma argola, portanto multiplica pelo número de argolas acertadas no alvo. Já MUR resolve a questão da proporção, alcançando o êxito nesta situação.

Convém destacar que a noção de proporção, assim como a de razão, fração e função apresentam maior dificuldade para as crianças (VERGNAUD, 1991).

A diferença dessa situação para a seguinte é que essa envolve números maiores e alvos hipotéticos, enquanto a seguinte é uma situação-problema de igual dificuldade com a diferença de haver números menores.

Acertei 12 argolas em um alvo. Cada 3 argolas marcam 18 pontos. Quantos pontos eu fiz?

THA (11,2) (M:III; G:II) Faz 4x18. *Como você sabe?* **Porque 4x3 dá 12. Aí 4x18 dá 72.** *E no jogo, como você me explicaria?* **Põe uma no 9, uma no 1,uma no 8.** *E se esse 18 fosse num alvo só?* **Acho que não dá.** *E com as fichas?* **Pega 8 laranjas, 9 brancas e 1 verde.**

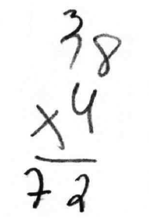


Figura 22: Resolução do processo inverso efetuada por THA.

O protocolo de THA ilustra que antes da multiplicação ela fez o cálculo mental para descobrir quantas vezes ela precisaria multiplicar o 18, já que lhe foi fornecido a pontuação de 3 argolas e não de uma. Esta antecipação é característica dos níveis em que THA se encontra, podendo assim explicar seu procedimento.

Tratando-se da importância da situação lúdica como um meio favorável à construção do conhecimento, podemos contextualizar esta afirmação por meio dos protocolos apresentados a seguir, os quais registram a resolução escrita de problemas de estrutura multiplicativa dos sujeitos antes e depois da aplicação das atividades lúdicas.

Passaremos a apresentar a seguir uma breve análise do desempenho das crianças na Prova de Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa.

8ª Etapa: Análise da Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa

Para atender ao quarto objetivo do estudo, que buscou verificar o papel da atividade lúdica que envolve relações multiplicativas no desempenho de sujeitos na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, apresentaremos agora uma breve análise da Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa.

A categoria mais importante para introduzir a multiplicação utilizada na escola envolve uma relação quaternária entre quatro quantidades, sendo duas de medidas de um determinado tipo e o resto de outro tipo. Trata-se do isomorfismo de medidas proposto por Vergnaud (1991).

Os seis problemas de estrutura multiplicativa, inspirados em Vergnaud (1991) e selecionados para o presente estudo, encontram-se nesta categoria. Estes problemas apresentam diferentes graus de dificuldade, mas todos podem ser representados por um esquema análogo que mostra a existência de quatro quantidades colocadas em relação.

Convém destacar que, na aplicação da segunda fase desta prova, foi solicitado aos sujeitos que explicassem o que haviam feito para resolverem os problemas de estrutura multiplicativa.

Passaremos então a ilustrar os problemas com alguns exemplos de resolução utilizada pelos sujeitos. Os problemas um e dois são resolvidos, em princípio, por uma multiplicação, o problema três por uma divisão e os problemas quatro, cinco e seis por uma regra de três, representando exemplos mais complexos da mesma relação quaternária (ver Anexo A).

Nos problemas um e dois encontramos a diferença entre números inteiros e números decimais. O problema um trata da introdução da multiplicação como adição reiterada (3 bandejas de 4 iogurtes são 4 iogurtes, mais 4 iogurtes, mais 4 iogurtes).

Os protocolos de MAT (9; 6) (M:I; G:I), a seguir, ilustram as resoluções utilizadas por ele antes do jogo (Fase 1) e após as atividades lúdicas (Fase 2).

1) Tenho 3 bandejas de iogurtes. Cada bandeja tem 4 potinhos de iogurtes. Quantos potinhos de iogurtes eu tenho?

MAT (9; 6) (M:I; G:I) - Fase 1

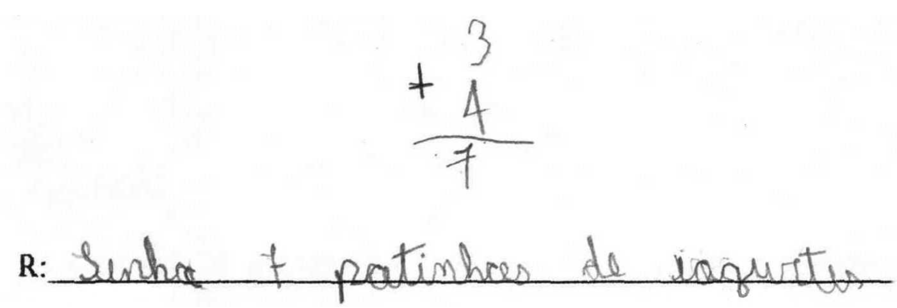


Figura 23: Resolução incorreta efetuada por MAT nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 1).

MAT (9; 6) (M:I;G:I) – Fase 2

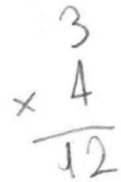


Figura 24: Resolução efetuada por MAT nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 2).

Pode-se observar que, na primeira fase, MAT (9; 6) (M:I; G:I) não consegue resolver corretamente o problema, fazendo uma adição com os números apresentados no enunciado. Os estudos de Guimarães e Silva (2003) destacam que, embora, muitas vezes, as crianças saibam realizar corretamente o algoritmo, apresentam dificuldades ao interpretar o que está sendo destacado no problema, utilizando então os números apresentados no enunciado para desenvolver uma técnica operatória qualquer que já domine, como ilustra o caso de MAT (9; 6).

Convém ressaltar também aqui a questão do cálculo numérico e do cálculo relacional. Para MAT acertar o problema, não basta o cálculo numérico, mas também o cálculo relacional, ou seja, é preciso selecionar os dados do problema e a relação necessária entre esses dados para a solução do problema.

Na segunda fase, MAT (9; 6) resolve corretamente a situação utilizando a multiplicação e, quando solicitado a explicar o que fez, também usa a multiplicação ao afirmar que: “**eu tinha quatro potinhos em cada bandeja, então eu fiz vezes.”**

O segundo problema exigia explicações adicionais para que o sujeito compreendesse que o preço de 3,5 metros do tecido é o preço de um metro, mais o preço de um metro, mais o preço de um metro, mais o preço de 0,5 metro, ou seja, é o mesmo que multiplicar o preço de um metro por 3,5. Desta forma, este problema envolve um grau maior de dificuldade que o anterior, além de envolver número decimal.

Os exemplos de NAT (10; 2) (M:II; GII) e MUR (10; 6) (M:III; GII) mostram que na Fase 1 apresentaram resoluções incorretas, utilizando os números do enunciado, conforme ilustram o
s protocolos seguintes:

2) Minha mãe quer fazer uma roupa e o tecido que ela quer custa R$ 24,80 o metro e ela precisa de 3,5m. Quanto vai pagar?

NAT (10; 2) (M:II; GII) Fase 1

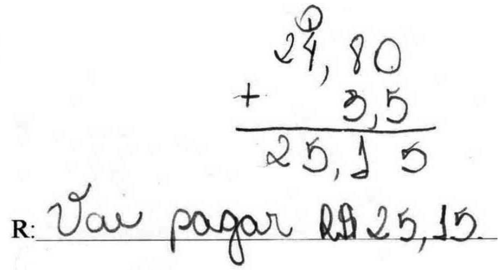


Figura 25: Resolução incorreta efetuada por NAT nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 1).

MUR (10; 6) (M:III; GII) Fase 1

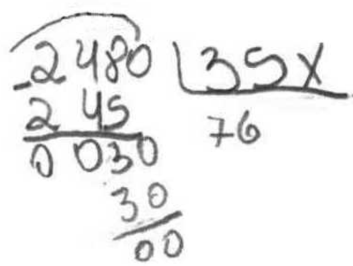


Figura 26: Resolução incorreta efetuada por MUR nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 1).

Na segunda fase, os procedimentos de resolução deste problema ilustraram uma grande evolução, conforme observamos a seguir:

2) Minha mãe quer fazer uma roupa e o tecido que ela quer custa R$24,80 o metro e ela precisa de 3,5m. Quanto vai pagar?

NAT (10; 2) (M:II; G:II) Fase 2

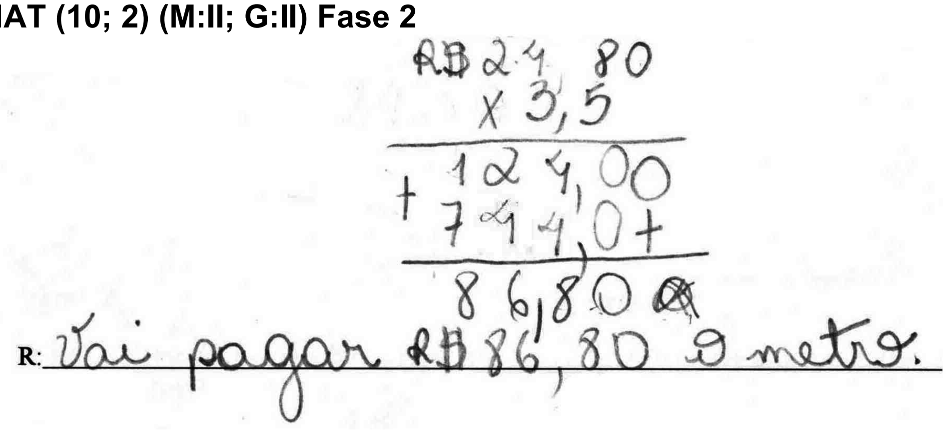


Figura 27: Resolução efetuada por NAT nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 2).

MUR (10; 6) (M:III; G:II) Fase 2

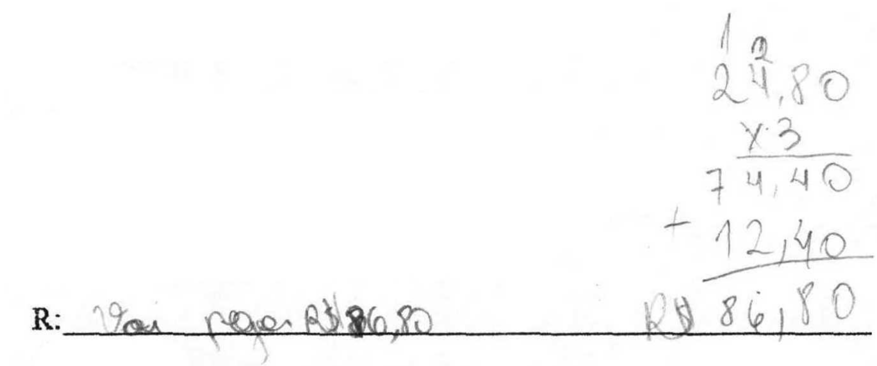


Figura 28: Resolução efetuada por MUR nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 2).

NAT (10; 2) utiliza corretamente o algoritmo da multiplicação ao confirmar sua explicação: **“fiz 24,80 vezes 3,5. Eu peguei o 24,80 vezes o metro, aí eu multipliquei e sobrou dois zeros e eu cortei um e deixou o outro, contei uma, duas** (mostra os números) **e coloquei a vírgula.”** Entretanto quando NAT escreve a resposta do problema, confunde-se colocando que pagará R$86,80 o metro, mostrando que ainda apresenta dificuldade com a unidade de medida.

Já MUR (10; 6), apesar de se utilizar da multiplicação, ainda recorre a uma adição para completar a quantidade de metros necessária. Pode-se inferir que o número decimal apresentou uma dificuldade para MUR (10; 6), apesar dele já estar utilizando o algoritmo da multiplicação. Vale lembrar que MUR (10; 6), para fazer seu registro, utilizou também a divisão, uma vez que para chegar ao valor de 0,5 m de tecido precisou fazer o cálculo do preço de metade de um metro para poder finalmente adicionar este valor ao custo de 3 metros de tecido, para então chegar ao resultado final de 3,5m de tecido. Ao ser solicitado a explicar o que pensou, MUR (10; 6) destaca que: **“eu fiz 3 vezes 24,80 mais metade que é 12,40, dá 86,40.”**

O protocolo de MUR (10; 6) corrobora com os estudos de Toledo (1997) que destacam que os professores devem considerar e incentivar diferentes estratégias de resolução utilizadas pelas crianças. Neste sentido Caroll e Porter (1997), conforme destacado na revisão bibliográfica do presente estudo, sugerem como forma de possibilitar a criação de novas estratégias pelas crianças: tempo para explorar seus métodos próprios; materiais concretos; problemas em contextos significativos; troca de idéias e estratégias entre as crianças.

A dificuldade encontrada pelos sujeitos em relação a este problema pode ser explicada quando observamos as incorreções mais freqüentes apontadas por Morgado (1993): dificuldade da criança em generalizar números com mais de um dígito, as propriedades da operação e a dificuldade em realizar a multiplicação de números com dois ou mais algarismos no multiplicador ou multiplicando, o que também foi observado nas situações-lúdicas, quando os sujeitos precisavam multiplicar 12x15.

A divisão simples com números inteiros foi solicitada no terceiro problema. O sujeito precisaria buscar o valor unitário por meio de uma operação de divisão.

Os protocolos de DAE (10; 8) mostram os procedimentos de resolução antes e depois da aplicação do jogo de argolas.

3) Paguei R$12,00 por 3 garrafas de vinho. Quanto custou uma garrafa?

DAE (10; 8) (M:II;GI) **– Fase 1**

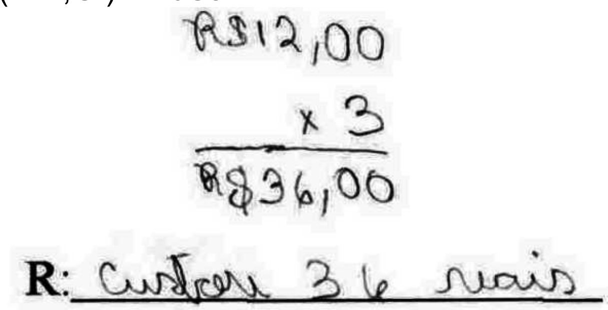


Figura 29: Resposta incorreta efetuada por DAE nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 1).

DAE (10; 8) (M:II; GI) – Fase 2

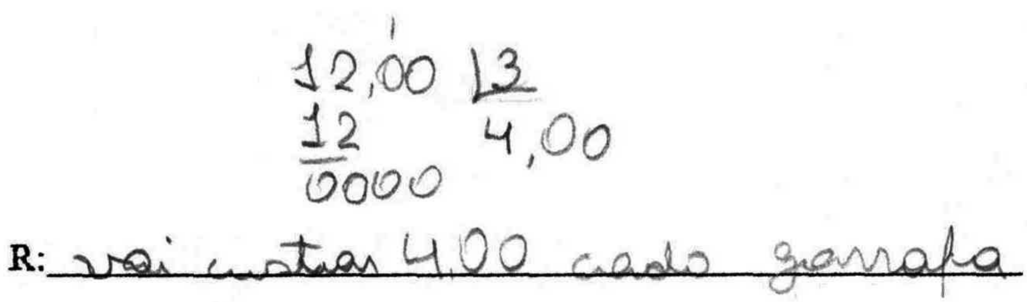


Figura 30: Resolução efetuada por DAE nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 2).

Pode-se notar que, como ocorreu nos exemplos anteriores, na primeira fase DAE (10; 8) recorreu a uma multiplicação ao invés da divisão, sem se dar conta de que o preço de uma garrafa de vinho foi maior que o preço pago por três das mesmas garrafas. Já na segunda fase, apresentou o algoritmo da divisão, acertando o valor de cada garrafa de vinho e explicou seu procedimento: **“se nas argolas dava este tanto, se eu fizer 3x4 dá 12. Então aí também dá.”** Este fato mostra como o jogo pode ter favorecido os processos de abstração reflexiva e generalização dos procedimentos utilizados no jogo, possibilitando, assim, a construção da noção de multiplicação.

No quarto problema, exigia-se a multiplicação, mas, para resolvê-lo, o sujeito precisaria descobrir inicialmente o preço de uma garrafa, já que lhe era fornecido o preço de 12 garrafas. Uma outra saída seria descobrir quantas caixas de garrafas compraria e depois multiplicar pelo preço de cada caixa. Este problema exigia, assim, uma regra de três e envolvia noção de proporção.

4) Comprei 12 garrafas de vinho. Cada caixa com 3 garrafas custa R$19,50. Quanto paguei?

THA (11; 2) (M:III; GII) – Fase 1

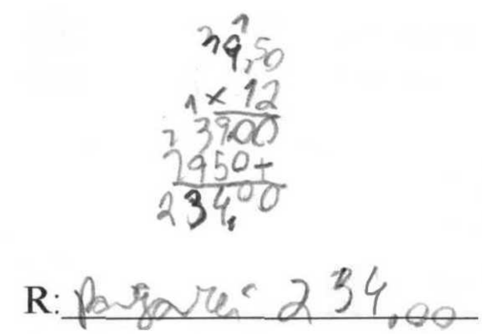


Figura 31: Resolução incorreta efetuada por THA nos Problemas de Estruturas Multiplicativas (Fase 1).

TAT (10; 10) (M:III; GII) – Fase 1

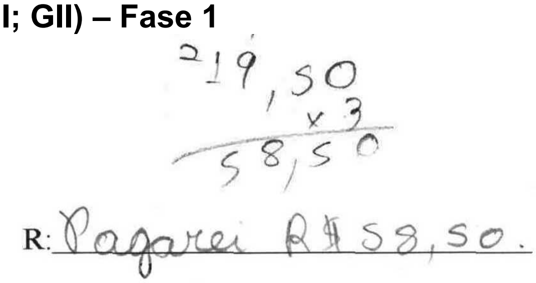


Figura 32: Resolução incorreta efetuada por TAT nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 2).

Os exemplos de THA (11; 2) e TAT (10; 10) mostram que, na primeira fase, negligenciaram a informação dada, o preço de uma caixa com três garrafas. THA

(11;2) ignorou a proporção, considerando o preço fornecido o de uma garrafa. TAT (10;10), apesar de utilizar a multiplicação, não interpreta corretamente o enunciado. Convém destacar que este problema apresenta um grau maior de complexidade para a criança que os anteriores devido à necessidade da regra de três. Retomamos aqui a questão do cálculo numérico e do cálculo relacional levantada por Vergnaud. É preciso que o sujeito identifique as relações existentes no enunciado e não somente saiba fazer o cálculo numérico.

Na segunda fase, THA (11; 2) e TAT (10; 10) conseguem utilizar corretamente o algoritmo considerando a proporção, como ilustram os protocolos abaixo:

4) Comprei 12 garrafas de vinho. Cada caixa com 3 garrafas custa R$19,50. Quanto paguei?

THA (11; 2) (M:III; GII) - Fase 2

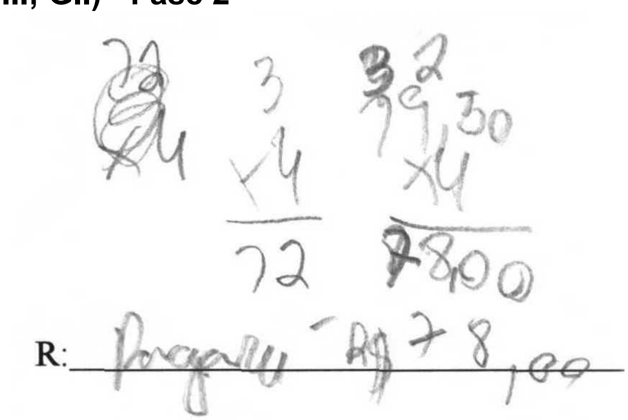


Figura 33: Resolução efetuada por THA nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 2).

TAT (10; 10) (M:II;GI) – Fase 2

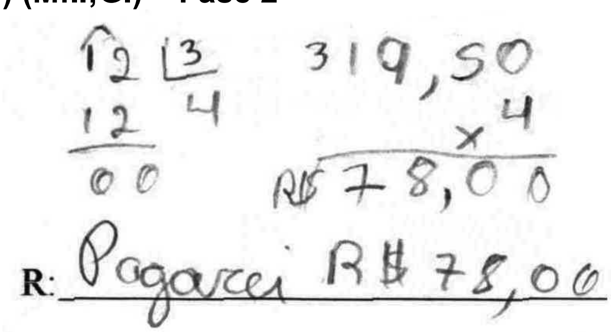


Figura 34: Resolução efetuada por THA nos Problemas de Estruturas Multiplicativa (Fase 2).

Pode-se observar que THA (11;2), para descobrir a quantidade de caixas, utilizou a multiplicação e TAT (10;10) fez a divisão, mas em seguida os dois sujeitos utilizaram o algoritmo da multiplicação.

Ao explicar o que havia pensado, THA (11;2) justifica seu procedimento afirmando que: "**porque 4 vezes 3 dá 12, aí 4 vezes 19,50 dá 88 reais. Ah! 4 vezes 9 dá 36 e não 46".** Fala ao conferir a conta. Então quanto dá? "**78. Ele vai gastar 78 reais."**

TAT (10;10) justifica seu procedimento da seguinte maneira: **"peguei 12 e dividi por 3 para saber quantas caixas ia dar pra comprar. Aí eu peguei 19,50 e multipliquei por 4."**

O quinto problema também envolveu a idéia da proporção, mas desta vez a divisão não era exata. Foi fornecido ao sujeito o peso de três novelos de lã e solicitado o peso de oito destes novelos. Para ser resolvido pelos sujeitos, era necessária também a regra de três, apresentando um grau maior de dificuldade para as crianças. O exemplo de THA (11;2) mostra que, na Fase 1, a proporção é negligenciada:

5) Três novelos de lã pesam 200 gramas. Preciso de 8 novelos para fazer uma blusa. Quanto pesará esta blusa?

THA (11; 2) (M:III; G:II) – Fase 1

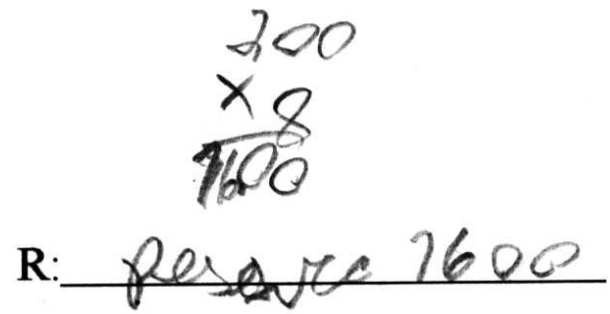


Figura 35: Resolução incorreta efetuada por THA nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 1).

Na fase 2, THA (11; 2) considera o peso de cada novelo, fazendo divisão para em seguida multiplicar este peso pelos oito novelos necessários para fazer a blusa, conforme se observa no protocolo seguinte:

THA (11; 2) (M:III;G:II) – Fase 2

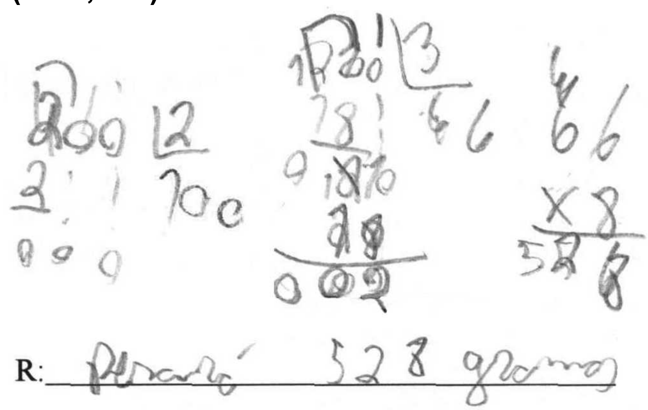


Figura 36: Resolução efetuada por THA nos Problemas de Estrutura Multiplicativa (Fase 2).

Ao explicar seu procedimento, THA (11; 2) destaca que: **"Eu pensei que era 200 por 2. Ah é 3! Faz 200 por 3. Dá 66 g um novelo."** Então quanto pesará a blusa? **"Pego 66 vezes 8. Dá 528."**

O sexto problema exigia também uma regra de três, entretanto tratava-se de um raciocínio mais complexo, uma vez que também envolvia números decimais. Este problema não será considerado na análise, uma vez que não foi resolvido pelas crianças (conforme Tabelas 6 e 8). Pode-se inferir que o grau de complexidade do mesmo exige um nível mais elevado de generalização que não foi encontrado em nenhum dos sujeitos pesquisados, conforme explicitado anteriormente.

Ao analisar os problemas de estrutura multiplicativa, Vergnaud (1991) destaca a importância da distinção das diferentes classes e suas análises. Estas devem voltar-se para auxiliar a criança a reconhecer a estrutura dos problemas e para encontrar o procedimento que a levará à solução. As dificuldades representadas pelas noções de razão, proporção, fração e função não devem ser subestimadas, mas devem ser alvos de precauções didáticas importantes desde o ensino elementar.

A prática educativa deve estar voltada para estes aspectos, como afirmou Taxa (2001):

> na perspectiva piagetiana, a prática docente dos professores deve estar comprometida primeiramente com um estudo aprofundado de como o sujeito constrói conhecimento; considerando o funcionamento cognitivo, a trajetória de construção das estruturas e o saber inicial do aluno em relação a conteúdos voltados à multiplicação organizados na escola *(p.52)*.

Para Taxa (2001), a compreensão da leitura e o desenvolvimento conceitual sobre a operação em jogo podem interferir na escolha adequada da operação para a solução do problema. Destaca ainda a autora que os dados do enunciado ligados ao contexto, a familiaridade dos alunos com os termos e o tamanho dos números também podem ser fatores importantes a serem considerados.

As soluções corretas apresentadas na Fase 2 podem ter sido favorecidas pelas situações lúdicas vivenciadas pelos sujeitos, via jogo de argolas, uma vez que estes destacam situações-problema que envolvem as estruturas multiplicativas, podendo favorecer os processos de equilibração por permitirem aos sujeitos realizar abstração reflexiva e generalização.

A partir da apresentação dos protocolos de resolução dos problemas dos sujeitos podemos pontuar aspectos importantes para o nosso estudo.

Inicialmente, gostaríamos de considerar o desempenho global dos sujeitos nas duas fases da Prova de Resolução dos Problemas de Estruturas Multiplicativas e os níveis de construção da noção de multiplicação. Podemos afirmar (conforme análise estatística) que houve evidência de diferença significativa entre os níveis de multiplicação para o percentual de acerto na Fase 1 (p-valor=0,0309), sendo destacado o Nível I diferente do II e do III; e os Níveis II e III como iguais. Na Fase 2 (após as situações lúdicas), também houve diferença significativa entre os Níveis de multiplicação para o total de pontos (p-valor=0,0004), sendo o Nível I diferente do II e do III e o Nível II diferente do III. Quando comparamos as duas fases (teste de Wilcoxon), só há evidência de diferença significativa para o Nível III de construção de multiplicação.

Ao relacionarmos os níveis de generalização e o desempenho global dos sujeitos nas duas Fases de resolução escrita de problemas de estrutura multiplicativa, a análise estatística mostrou que não houve diferença significativa entre os níveis de generalização na Fase 1 de resolução de Problemas de Estruturas Multiplicativas (p-valor=0,0827), mas houve diferenças significativas entre os níveis de generalização na Fase 2 e de Resolução de Problemas de Estruturas Multiplicativas (p-valor=0,0004). Quando comparamos as fases, houve diferença significativa apenas para o Nível II de generalização (p-valor=0,0264).

Os resultados nos mostraram que as situações lúdicas foram mais favoráveis aos sujeitos de Nível III de construção da noção de multiplicação e Nível II de generalização. Isso pode ser explicado pelo fato dos sujeitos destes níveis já apresentarem o domínio da multiplicação, ou seja, estão de posse da noção de multiplicação, podendo ser mais propensos aos processos cognitivos envolvidos, como, por exemplo, a abstração reflexiva, a generalização e a tomada de consciência.

Os sujeitos que se encontram nos Níveis I e II de construção da noção de multiplicação ainda estão em processo dessa construção, assim como os de Nível I de generalização. Desse modo, podemos inferir que os sujeitos do Nível III de construção da noção de multiplicação e os do Nível II de generalização foram os que mais se beneficiaram com as situações lúdicas, uma vez que essas situações tiveram o propósito de ser uma forma diferenciada (em relação à escola) de se trabalhar as estruturas multiplicativas.

É possível observarmos os protocolos de resolução de problemas apresentados anteriormente e verificar a diferença dos procedimentos utilizados pelos sujeitos, principalmente os de nível mais elevado.

As situações-problema envolvidas no jogo de argolas foram criadas com base no que era solicitado nas provas de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa (PIAGET et al, 1986), Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes (PIAGET et al, 1984) e Resolução Escrita de Problemas de Estrutura Multiplicativa (VERGNAUD, 1991).

O objetivo destas situações-problema era favorecer os processos cognitivos em crianças, desencadeando o processo de equilibração majorante, destacando as abstrações reflexivas e a generalização construtiva para explicar a construção das estruturas multiplicativas, já que estas são de nível mais elevado que as estruturas aditivas.

Se admitirmos que as atividades lúdicas permitem evolução, pode-se afirmar que dois fatores indispensáveis para a construção do conhecimento estiveram presentes: a ação dos sujeitos ao jogar e a interação com a experimentadora.

O papel da interação social relacionada aos trabalhos piagetianos, principalmente no que tange à abstração reflexiva, é corroborado por Castro (2001), ao afirmar que:

> *o fator social na abstração é importante: pois, na investigação, obriga-nos a uma abstração mais coordenada, mais aprofundada, já que precisamos satisfazer também a inteligência do outro e dar as nossas explicações. Então, não vamos cair nessa armadilha de que abstrair é alguma coisa que nós fazemos só intimamente, o que seria, ou uma fase posterior, ou o começo de uma abstração, que depois poderá ser exteriorizada. O fator social, pois, indica a importância da "conversa" na escola, do diálogo entre as crianças que permite a troca de experiências e amplia a reflexão* (p.13).

A melhora do desempenho dos sujeitos de Nível III de noção de multiplicação e II de generalização pode então ser explicada pelos processos de equilibração e abstração reflexiva, já que esta última é responsável pela construção de novas formas e pela generalização construtiva.

Convém destacarmos também que, embora não tenha sido nosso objetivo analisar o grau de complexidade dos problemas, ou analisá-los individualmente, os problemas mais difíceis foram solucionados pelos sujeitos de níveis mais elevados.

O desempenho dos sujeitos não está relacionado a níveis mais elevados de processos cognitivos, mas quando se trata de compreensão, é preciso alcançar estes níveis, como comprovou Lopes (2002) ao estudar a resolução de problemas aditivos:

> *os procedimentos mais complexos e mais elaborados, bem como os maiores percentuais de respostas escritas corretas, só foram possíveis para aqueles sujeitos que atingiram níveis mais evoluídos na prova de problema de igualação e construção de diferenças* (p. 14).

Foram criadas situações que buscavam partir da ação à representação, desencadeando os processos de construção do conhecimento em relação à multiplicação. Ao explicar suas ações e representações, o sujeito poderia tomar consciência de seus erros, transformando-os em observáveis e ocasionando a busca de procedimentos novos a fim de melhorar seus registros e jogadas.

Nesse sentido Macedo (2000) afirma que:

> *em outras palavras defendemos a idéia de que jogar favorece e enriquece o processo de aprendizagem, na medida em que o sujeito é levado a refletir, fazer previsões e inter-relacionar objetos e eventos, bem como contribui para fornecer informações a respeito do pensamento infantil, o que é fundamental para o profissional que pretende auxiliar na superação das eventuais dificuldades* (p.27).

Assim, o jogo de argolas, utilizado neste estudo, teve como propósito constituir uma atividade diferenciada das atividades escolares, a fim de provocar o desencadeamento dos processos cognitivos envolvidos na construção das estruturas multiplicativas.

Neste sentido, Moura (1997) ressalta que:

> *colocar o aluno diante de situações de jogos pode ser uma boa estratégia para aproximá-lo dos conteúdos culturais a serem veiculados na escola, além de poder estar promovendo o desenvolvimento de novas estruturas cognitivas* (p.80).

Finalizando a análise dos resultados, é necessário salientar o papel da aprendizagem subordinada ao desenvolvimento. Como afirmam Inhelder, Bovet, e Sinclair (1977):

> *(...) a aprendizagem das estruturas cognitivas não consiste nem em colocar simplesmente em jogo condutas operatórias previamente adquiridas, nem em transformá-las totalmente. Aprender é proceder a uma síntese indefinidamente renovada entre a continuidade e a novidade* (p.263).


A mente que se abre a uma idéia jamais voltará a seu tamanho original.
Albert Einstein

6. DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A gênese do conhecimento é explicada por Piaget como fruto do processo de equilibração. A partir da interação do sujeito com o meio, esse processo é desencadeado por meio de desequilíbrios que suscitarão reequilibrações, possibilitando, assim, o progresso na construção do conhecimento.

Neste sentido, os desequilíbrios exercem a função motivacional, pois exigem que o sujeito saia do estado atual de construção e busque direções novas por meio de compensações.

O papel da escola, partindo dessa concepção, deveria se voltar ao oferecimento de desafios à criança a fim de provocar o desencadeamento do processo de construção do conhecimento lógico-matemático.

Neste sentido, a escola precisa ter claro a concepção de conhecimento e a compreensão dos processos de aprendizagem que possibilitam a produção de novos conhecimentos.

Piaget (2000) definiu o conhecimento como sendo essencialmente construção ao afirmar que:

> *o caráter próprio da vida é ultrapassar-se continuamente e, se procurarmos o segredo da organização racional na organização vital, inclusive em suas superações, o método consiste então em procurar compreender o conhecimento para sua própria construção, o que nada tem de absurdo, pois o conhecimento é essencialmente construção* (p.409).

O conhecimento, portanto, não deve ser entendido como exterior ao sujeito, trazido pelo professor, mas sim como um processo dialético que emerge do próprio sujeito de acordo com suas diferentes formas de agir sobre o mundo. A aprendizagem, de acordo com essa concepção, passa a ter, além de capacidade de assimilar conteúdos, a capacidade de transformar, ou seja, de construir novas formas possíveis de assimilar conteúdos. A aprendizagem é função do desenvolvimento, de esquemas e estruturas construídas, que se generalizam conforme se aplicam ativamente as novas formas.

Para que ocorra uma reorganização com novas combinações de elementos retirados do nível anterior, o sujeito utiliza o mecanismo de abstração reflexiva com seus aspectos inseparáveis de “reflexionamento”, como projeção (no sentido de espelhar) sobre um patamar superior do que foi retirado do nível inferior, e de "reflexão", enquanto ato mental de reorganização e reconstrução sobre o patamar superior.

O desenvolvimento da abstração reflexiva ocasiona a formação de novas formas em relação aos conteúdos, podendo originar, assim, a elaboração das estruturas lógico-matemáticas.

Juntamente com a abstração reflexiva, o mecanismo de generalização constitui papel fundamental na elaboração do conhecimento, uma vez que a partir da tomada de consciência o sujeito poderá refletir e projetar em um novo plano decorrente do anterior, generalizando e superando as estruturas anteriores. Desta forma, os processos de generalização construtiva intervêm junto à abstração reflexiva na elaboração do conhecimento matemático.

Considerando estes pressupostos teóricos que valorizam o papel do meio como desencadeador da construção do conhecimento e tendo o sujeito como responsável por esta construção, o problema do presente estudo norteou-se para investigar duas questões: "**1) o desempenho dos alunos, na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, difere em função dos diferentes níveis de construção da noção de multiplicação e de generalização?; 2) os sujeitos, após a oportunidade de criarem outras formas de representações, via jogo de argolas, que ensejam situações de resolução de problemas de estrutura multiplicativa, apresentariam melhores desempenhos na resolução escrita dos problemas de estrutura multiplicativa?"**

Passaremos a discutir agora os resultados alcançados com o presente estudo, apoiando-se na teoria psicogenética de Piaget, em especial nos processos de abstração reflexiva e generalização que constituem partes do processo central de equilibração.

Em relação ao primeiro objetivo proposto que consistiu em verificar a correspondência entre os níveis de generalização apresentados pelos sujeitos na Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes (PIAGET et al., 1984) e os diferentes níveis de construção da noção de multiplicação obtidos na Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa (PIAGET et al., 1986), constatou-se que, a partir da análise estatística, há evidência de associação entre os níveis de generalização e os níveis de construção da noção de multiplicação.

Pode-se afirmar, com base na análise dos resultados, que enquanto os Níveis I e II de construção da noção de multiplicação concentram níveis de generalização I, o Nível III de construção da noção de multiplicação concentra o Nível II de generalização, comprovando que para a construção da noção de multiplicação é necessário Nível II de generalização. No momento em que afirmamos ter verificado uma associação significativa entre os níveis de generalização e os níveis de construção da noção de multiplicação apresentados pelos sujeitos, é possível afirmar que existe uma interdependência entre estes dois processos, confirmando asserções da teoria piagetiana.

Interessa-nos salientar que o nível III de generalização não foi encontrado em nenhum dos sujeitos estudados. Este nível permite ao sujeito diferenciar as inversões e reciprocidades, sendo capaz, assim, de antecipar a combinação que origina o conjunto das partes.

Pode-se afirmar, segundo Piaget (1984), que este nível de generalização supõe (de forma subjacente) uma estrutura de natureza lógica-formal, o que nos leva a inferir que os sujeitos pesquisados ainda não possuem o pensamento organizado neste nível estrutural.

Em relação ao segundo objetivo do presente estudo, que procura analisar a relação existente entre os níveis de multiplicação obtidos na Prova de Multiplicação e Associatividade Multiplicativa de Piaget e o desempenho dos sujeitos em problemas de estrutura multiplicativa antes e após serem submetidos à aplicação do jogo de argolas, pôde-se constatar que o Nível III de construção da noção de multiplicação (multiplicações construídas, antecipação presente, continentes-multiplicadores e contidos-multiplicandos) apresenta evidência de diferença significativa conforme análise estatística (teste de Wilcoxon para amostras relacionadas). O percentual de acertos na Fase 2 foi maior que na Fase 1 para os sujeitos deste nível de construção da noção de multiplicação.

Enquanto na Fase 1 de Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa o Nível I de construção da noção de multiplicação é diferente do Nível II e do Nível III, e esta diferença não aparece quando comparamos Níveis II com III de construção da noção de multiplicação (conforme teste de Kruskal-Wallis), na Fase 2 houve diferença significativa entre os níveis de multiplicação, sendo o Nível I diferente do Nível II e III, e o Nível II diferente do Nível III de construção da noção de multiplicação.

Podemos afirmar, com base na análise estatística, que a aplicação do jogo de argolas mostrou-se mais eficaz em sujeitos que apresentaram Nível III de construção da noção de multiplicação, uma vez que estes alcançaram maior percentual de acertos na Fase 2 de Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa, o que revela que estes sujeitos podem ter sido favorecidos pelas atividades lúdicas, via jogos de argolas, uma vez que as mesmas objetivaram desencadear processos que favorecessem a construção da noção de multiplicação por meio de situações-problema no decorrer das jogadas.

Isso também pôde ser observado com os níveis de generalização obtidos pelos sujeitos na Prova de Generalização que Conduz ao Conjunto das Partes e o desempenho dos sujeitos nos problemas de estrutura multiplicativa. Desta forma temos o terceiro objetivo do estudo alcançado, o qual consistiu em analisar a relação existente entre os níveis de generalização e desempenho dos sujeitos em problemas de estrutura multiplicativa antes e após serem submetidos à aplicação do jogo de argolas.

Ao compararmos as duas fases de aplicação da Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa, somente os sujeitos de Nível II de generalização apresentaram diferença significativa do total de acertos após a aplicação das situações lúdicas.

Enquanto na Fase 1 a análise estatística revelou que não houve evidência de diferença significativa entre os níveis de generalização para o percentual de acertos, na Fase 2 houve evidência de diferença significativa entre os níveis de generalização para o total de pontos, sendo que o Nível I de generalização apresentou o menor percentual de acertos

Conforme apontamos anteriormente, o desempenho dos sujeitos na Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa obteve diferença significativa após as atividades lúdicas para os níveis mais elevados de construção da noção de multiplicação (Nível III) e de generalização (Nível II).

Podemos afirmar que os Níveis I e II de construção da noção de multiplicação caracterizam os processos construtivos da multiplicação, enquanto o Nível III apresenta a presença dessa construção, uma vez que o sujeito consegue realizar antecipações. Deste modo, as situações lúdicas podem ter sido mais eficazes para os sujeitos que apresentaram Nível III de construção da noção de multiplicação e Nível II de generalização, pois o processo de tomada de consciência pode ter favorecido este fato, uma vez que, ao tomar consciência de suas ações, o sujeito é capaz de construir novas formas e novos conteúdos, caracterizando, assim, a generalização construtiva. Neste caso, é possível afirmar que o jogo foi propício para permitir aos sujeitos outra forma de explicitar e compreender as relações multiplicativas, já que, além das situações propostas ao jogar, o sujeito representava (com o jogo) o que havia pensado utilizando os alvos, as argolas e as fichas (pontos), e também representava graficamente suas resoluções, possibilitando o pensar sobre sua ação, o que acaba por favorecer os processos de equilibração e tomada de consciência.

Para os sujeitos dos demais níveis, podemos inferir que a melhora do desempenho na Fase 2 poderia ter sido conseguida caso fosse realizada uma intervenção pedagógica via jogo de argolas que durasse mais tempo. Cabe aqui destacar a relação entre desenvolvimento e aprendizagem defendida por Piaget, ao considerar a aprendizagem subordinada ao desenvolvimento. Inhelder, Bovet e Sinclair (1977) apontaram que a intervenção é favorável, mas dependente do nível de desenvolvimento em relação àquela noção.

Neste sentido, Macedo (1994) esclarece:

> *em outras palavras, a aprendizagem depende do desenvolvimento. Exercícios, discussões, estabelecimento de conflitos, etc., contribuem para o desenvolvimento das estruturas, mas não têm o poder de estabelecê-las sem levar em conta as possibilidades prévias da criança. Ou seja, há um efeito desencadeador, que otimiza o desenvolvimento, mas com a condição deste ser valorizado o tempo todo* (p.134).

Ao estudar os problemas de estrutura multiplicativa, Vergnaud (1991) destaca a importância das diferentes classes e suas análises. Estas devem voltar-se para auxiliar a criança a reconhecer a estrutura dos problemas e a encontrar o procedimento que a levará à solução. As dificuldades representadas pelas noções de razão, proporção, fração e função não devem ser subestimadas, pois devem ser alvo de precauções didáticas importantes desde o ensino elementar.

A prática educativa precisa estar voltada para estes aspectos, como afirmou Taxa (2001):

> *na perspectiva piagetiana, a prática docente dos professores deve ser comprometida primeiramente com um estudo aprofundado de como o sujeito constrói conhecimento; considerando o funcionamento cognitivo, a trajetória de construção das estruturas e o saber inicial do aluno em relação a conteúdos voltados à multiplicação organizados na escola* (p.52).

Um dos aspectos que merece destaque aqui é a discussão das resoluções incorretas dos sujeitos, principalmente na Fase 1 (antes das situações lúdicas) quando utilizaram outras operações com os números do enunciado, sem se preocupar muitas vezes com a incoerência dos resultados, como, por exemplo, DAE (10; 8) – Fase 1, que encontrou o preço de uma garrafa de vinho sendo maior que o preço de três garrafas.

Vergnaud (1991) atenta para este fato, ao evidenciar que o tipo e a posição da incógnita do problema podem apresentar maior ou pior êxito na busca da solução do mesmo. Novamente a ausência do cálculo relacional explica este procedimento, DAE não consegue fazer as relações necessárias para chegar à solução.

A compreensão da leitura e o desenvolvimento conceitual sobre a operação em jogo podem interferir na escolha adequada da operação para a solução do problema (TAXA, 2001). A autora (ibid) destaca ainda que os dados do enunciado ligados ao contexto, a familiaridade dos alunos com os termos e o tamanho dos números podem ser fatores importantes a serem considerados.

Os enganos cometidos pelas crianças relacionados às dificuldades de leitura ao tentarem solucionar problemas foram destacados também por Fini, (2002) ao afirmar que:

> *o aluno ainda pode tentar traduzir os problemas, rapidamente em símbolos numéricos, sem pensar com cuidado sobre o enunciado. Isto pode levar o sujeito a enganos, mesmo quando sabe ler e pode entender as palavras. Ao tentar transformar os dados do problema em símbolos numéricos, registrando os números e cálculos, pode deixar de levar em conta as relações em pauta* (p.69) .

Este fato também foi observado por Guimarães e Silva (2003) ao proporem uma avaliação do rendimento escolar do ano de 2002 para aproximadamente 1.300 crianças de terceiras e quartas séries do Ensino Fundamental das escolas municipais de Mirassol-SP. Foram aplicadas quatro avaliações: Produção de Texto, Língua Portuguesa, Matemática e Conhecimentos Gerais (História, Geografia e Ciências). Destacaremos somente a avaliação de Matemática, área de interesse neste estudo. A avaliação de Matemática contou com 10 questões que envolviam conteúdos ministrados pelos professores durante o ano letivo, inclusive a multiplicação. Os resultados da avaliação mostraram que:

> *os alunos, em sua maioria, dominam os algoritmos, ou seja, sabem executar as operações, entretanto nem sempre conseguem saber em quais situações utilizá-las. Os problemas que solicitavam um raciocínio que não exigia uma operação explicitamente, também foram alvos de dificuldades para os aluno* (p.362).

Deste modo, não podemos deixar de destacar o papel do ensino que está sendo oferecido em relação às representações dos sujeitos. Pode-se inferir que um ensino pautado em regras e sinais sem significado para as crianças pode intervir em suas formas de representação. Entretanto, não pretendemos ignorar o uso de sinais convencionais, reconhecemos sua importância, mas alertamos para a necessidade da compreensão de sua utilização, ao invés de meras repetições.

A ênfase dada pelos professores à técnica operatória para a solução do algoritimos foi constatada também por Ewbank (2003), quando a autora propôs verificar, analisar e compreender os processos de ensino que envolvem a noção de multiplicação em crianças de 3ª série do Ensino Fundamental e no nível de pós-alfabetização, na Educação de Jovens e Adultos.

Outras pesquisas revisadas anteriormente também apontam para este fato, destacando o fracasso em Matemática como resultado de diferentes fatores. Dentre eles, podemos citar o não oferecimento de meios necessários pela escola para que os processos de abstração sejam favorecidos, como ressaltou Silva (1990); a intensidade do uso de algoritmos nas séries iniciais do ensino fundamental apontada por Mendonça (1996); a ausência de relação entre os procedimentos aritméticos utilizados pela escola com os problemas da vida real e vice-versa estudada por Carraher (1988); dentre outros.

As soluções corretas apresentadas na Fase 2 de resolução de problemas de estrutura multiplicativa podem ser explicadas pelas situações lúdicas vivenciadas pelos sujeitos, via jogo de argolas, uma vez que estas destacavam situações-problema envolvendo as estruturas multiplicativas que poderiam favorecer os processos de equilibração, abstração reflexiva e generalização.

Passaremos a discutir agora o quarto objetivo do estudo que buscou verificar o papel da atividade lúdica que envolvia relações multiplicativas no desempenho dos sujeitos na resolução de problemas de estrutura multiplicativa.

Os jogos de regras serviram de inspiração para muitos trabalhos fundamentados na teoria psicogenética de Piaget. Segundo Brenelli (2002), o jogo de regras serve como:

> *meio tanto para compreender a estruturação cognitiva de crianças, num dado momento de construção, como também para favorecer os processos construtivos do pensamento, a aprendizagem de conteúdos lógico-matemáticos e escolares, em geral (p.177).*

Muitas pesquisas e estudos têm enfatizado as relações existentes entre jogo de regras e construção do conhecimento, principalmente de noções lógicas e aritméticas, sugerindo, assim, implicações pedagógicas para aplicação do professor ou do psicopedagogo, conforme já mencionamos anteriormente. De um modo geral, estes trabalhos mostraram que as situações-problema geradas pelas atividades, via jogos de regras, constituem um meio favorável ao desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem de crianças.

Os jogos exercem papel fundamental no desenvolvimento da criança. Macedo (2000) corrobora essa idéia ao explicitar que:

> *quando a criança joga e é acompanhada por um profissional que propõe análises de sua ação, descobre a importância da antecipação, do planejamento e do pensar antes de agir. Por sentir-se desafiada a vencer, aprende a persistir, aprimora-se e melhora seu desempenho, não mais apenas como uma solicitação externa, mas principalmente como um desejo próprio de autosuperação (p.25).*

As situações lúdicas propostas pela experimentadora podem ter favorecido a melhora do desempenho dos sujeitos nos Problemas de Estrutura Multiplicativa na Fase 2. Podemos afirmar que a ação dos sujeitos sobre os objetos, no caso, o jogo de argolas, juntamente com a interação com a experimentadora podem ter permitido a construção do conhecimento.

Os processos de equilibração, abstração reflexiva e generalização construtiva estiveram presentes nas ações de jogar, como a abstração reflexiva conduz a generalizações construtivas, fundadas nas operações dos sujeitos, sua natureza extensiva e compreensiva simultaneamente, gera, novas formas, até mesmo novos conteúdos. Deste modo, é via abstração reflexiva que os sujeitos podem ter passado para um plano novo, no qual reorganizam o que foi trazido do anterior.

As perturbações são fundamentais na medida em que há compensação pelo sujeito como forma de regulação, ou seja, a reação à perturbação é fundamental para o desenvolvimento. O jogo de regras pode representar uma perturbação para a criança e contribuir assim para seu desenvolvimento, como destaca Brenelli (1996):

> *quando a criança modifica sua maneira de jogar ou modifica seus procedimentos nas atividades propostas durante o jogo significa que as perturbações não foram anuladas, mas compensadas, na tentativa de se acomodarem às situações exigidas pelo jogo* (p.161).

Esses processos puderam ser notados nas atividades lúdicas com o jogo de argolas, uma vez que se objetivou criar situações que partiam da ação à representação, desencadeando os processos de construção do conhecimento voltados aos conteúdos da multiplicação.

As situações lúdicas solicitavam correspondência de um para muitos, correspondência de muitos para muitos, operações aritméticas, relações multiplicativas e o processo inverso (divisão). Para todas essas etapas, além da ação do sujeito, o mesmo deveria explicar oralmente o que pensou, mostrando com o jogo e depois representando graficamente.

Os procedimentos utilizados pelos sujeitos, ao iniciarem o jogo, voltavam-se para os tateios empíricos, não mostrando preocupação em realizar antecipações. Durante as situações-problema propostas pela experimentadora, os sujeitos começaram a antecipar suas jogadas. Brenelli (2002) compartilha esta idéia, colocando o jogo como um espaço para pensar, pois: “nele a criança organiza e pratica as regras, elabora estratégias e cria procedimentos a fim de vencer as situações-problema desencadeadas pelo contexto lúdico" (p.78).

A invenção de novos procedimentos para ter mais êxito no jogo viabiliza a construção de possibilidades e necessidades. Este aspecto remete-nos à construção dos possíveis, que depende da equilibração e a relação entre abstração reflexiva e generalização construtiva, uma vez que a abstração reflexiva conduz à generalização construtiva, conforme discutimos anteriormente.

A tomada de consciência foi favorecida no momento em que a experimentadora solicitava a explicação das ações do sujeito, a representação com materiais do jogo (argolas, alvos e fichas) e a representação escrita.

As situações que suscitavam a explicação das jogadas possibilitavam aos sujeitos a tomada de consciência de seus erros, uma vez que estes eram transformados em observáveis. Este processo provocava nos sujeitos a busca de novos procedimentos a fim de melhorar suas próximas jogadas e representações. Neste sentido, Piaget (1977) afirma que: "o mecanismo da tomada de consciência é um processo de conceituação que reconstrói e depois ultrapassa, no plano da semiotização e da representação, o que era adquirido no plano dos esquemas de ação" (p.204).

A passagem da ação à compreensão, ou seja, a tomada de consciência pôde ser favorecida pelas situações-problema propostas no jogo de argolas, uma vez que as diferentes situações propostas aos sujeitos devem ter favorecido o aumento de seus êxitos.

Outro aspecto relevante que pretendemos discutir é o interesse dos sujeitos em participar das atividades propostas pelo jogo, o que foi vivenciado durante todo o processo de coleta de dados.

Torna-se importante ressaltar o papel dos aspectos afetivos na atividade do sujeito. Segundo Piaget (1995), a afetividade constitui aspecto indissociável da inteligência, pois ela impulsiona o sujeito a realizar as atividades propostas. Como destaca o autor, (1995) "é por isto que, por exemplo, os escolares alcançam um rendimento infinitamente melhor quando se apela para seus interesses e quando os conhecimentos propostos correspondem às suas necessidades" (p.37).

Deste modo, podemos inferir que as atividades lúdicas propostas via jogo de argolas contemplaram este aspecto, uma vez que consistiram em situações diferenciadas das escolares, pois a resolução de problemas era inseri em um contexto lúdico provido de significado para os sujeitos, ao invés de simples exercício das operações aritméticas aprendidas.

Pode-se dizer, assim, que as atividades lúdicas, via jogo de argolas, podem ter favorecido o desencadeamento dos processos cognitivos que nos propusemos a estudar neste trabalho, corroborando com pesquisas e trabalhos anteriores que enfatizam a contribuição, em todos os sentidos, dos jogos de regras, principalmente quando pensamos em resgatar o prazer pela aprendizagem escolar. Macedo (2000) ilustra esta idéia ao afirmar que:

> *manter o espírito lúdico é essencial para o jogador entregar-se ao desafio da "caminhada" que o jogo propõe. Como conseqüência do jogar, há uma construção gradativa da competência para questionar e analisar as informações existentes. Assim, quem joga pode efetivamente desenvolver-se* (p.24).

Implicações Pedagógicas

Diante do exposto no presente trabalho, torna-se importante discutir agora algumas implicações pedagógicas para o ensino de Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

É preciso repensar e transformar as formas de atuação da escola, pois, como afirma Becker (2003), "a escola não deveria ensinar qualquer coisa antes de aprender o que o aluno traz consigo" (p.71). O aluno traz em sua bagagem muitos conteúdos vivos que poderão legitimar os conteúdos escolares.

O professor que deseja exercitar sua competência precisa assumir o papel de autor, como definiu Carneiro (2003):

> *professor autor é aquele que cria para si próprio, a seu modo, uma pedagogia livre e criativa, se colocando a cada momento desprovido de todas as certezas com curiosidade, disponibilizando o desejo de saber, abrindo mão de sua onipotência, permitindo assim, que surja o desejo do outro, para que juntos criem um conhecimento* (p.307).

Para isto, o professor precisará aprender como o homem constrói suas estruturas cognitivas, ou seja, suas coordenações de ações, sua capacidade de simbolizar, suas operações concretas e formais, tendo a construção do conhecimento como um processo de ultrapassagem.

O papel do professor passa a ser, então, de um eterno pesquisador, buscando incansavelmente novas formas de ensinar, estudando como seu aluno constrói seus conhecimentos, para que possa contribuir na formação de indivíduos criativos e transformadores. Azzi e Silva (2000) compartilham essa idéia, destacando o papel do professor como pesquisador:

> *quando falamos que todo professor precisa ser um pesquisador, na verdade estamos assumindo que a percepção do professor a respeito de seu próprio papel precisa ser alterada, ou melhor, o professor precisa reconhecer-se como sujeito ativo e capaz de transformar a sua realidade. Para tanto, é preciso que todo professor seja despertado (e formado) na direção de enfrentar o contexto educacional através de um olhar questionador, sistemático, consistente e fundamentado – características inerentes ao trabalho do pesquisador* (p.146).

Piaget (1971) também ressalta essa idéia ao afirmar que:

> *o princípio fundamental dos métodos ativos só se pode beneficiar com a história das ciências e assim pode ser expresso: compreender é inventar, ou reconstruir através da reinvenção, e será preciso curvar-se ante tais necessidades se o que se pretende, para o futuro, é moldar indivíduos capazes de produzir ou de criar, e não apenas repetir* (p.17).

Em relação ao papel do professor enquanto pesquisador, o próprio Piaget nos anos 70 chamou a atenção para este fato, como afirmam Parrat-Dayan e Tryphon (1998):

> *enfim, nos anos 70, Piaget pede ao professor não apenas para estimular a cooperação, para escolher um bom material e situações interessantes, mas também para que ele mesmo se torne um pesquisador. Por outro lado, isso é indispensável para construir dispositivos suscetíveis de formular problemas úteis para a criança e, por outro, para organizar contra-exemplos que estimulem a reflexão da criança e suscitem nela a necessidade de controlar soluções apressadas demais. Tornar-se um pesquisador ajudará o professor a conhecer as etapas do desenvolvimento e a provocar na criança a necessidade de observação* (p.21-22).

A teoria piagetiana fornece um referencial teórico que pode embasar e dar sustentação à prática pedagógica, voltada para a compreensão da Matemática, como destaca Taxa (2001):

a compreensão do processo de abstração, da tomada de consciência e o da própria equilibração pode servir de bússola diante da elaboração de um currículo que favoreça atividades de aprendizagem que provoquem ou suscitem conflitos e contradições nos alunos e sob os quais se possam elaborar estruturas pedagógicas efetivas (p.32).

O papel do sujeito cognoscente assume enorme valia na teoria piagetiana, uma vez que o conhecimento implica em uma construção gradual apoiada nas ações do sujeito em seu meio.

A escola precisa estar atenta a esse aspecto, propiciando situações enriquecedoras em todas as áreas do conhecimento, pois segundo Castro (2001):

a ação deve ser acompanhada por abstrações e simbolizações, e a dificuldade se acentua nas atividades de simbolização: falar ou representar visualmente (desenho, modelagem, montagem, dramatização, etc.). É de extraordinária fecundidade a integração entre agir, falar e pensar, que funciona como um caldo de cultura valioso para o desenvolvimento. (p.17).

É preciso que o professor faça uma reflexão sobre sua prática docente, levando em conta esses aspectos discutidos até aqui.

Deste modo, corroborando com tais idéias, Macedo (2003) destaca nove desafios ao professor para que este tenha um prática docente reflexiva:

1) *Atualizar compreensões e procedimentos sobre a escola e a prática docente: como ensinar (e aprender) pela lógica da inclusão?*
2) *Desenvolver novas habilidades e competências de ensino: como ensinar em uma escola para todos?*
3) *Ensinar em um contexto mais investigativo do que transmissivo: como articular presente, passado e futuro?*
4) *Desejar aprender e não apenas ensinar: como praticar uma formação contínua e variegada?*
5) *Tratar a prática e reflexão como formas interdependentes de conhecimento: como assumir uma prática reflexiva?*
6) *Assumir prática e reflexão nos termos da Lei de Tomada de Consciência de Piaget (1974-1978 a): como interiorizar e exteriorizar conhecimentos e saberes?*
7) *Assumir prática e reflexão como processos mediados e recursivos: com quem realizar e compartilhar nossa formação e experiência docente?*
8) *Sobre o antes, o depois e o durante uma ação ou reflexão: quando praticar e refletir?*
9) *A docência como profissão: como superar a idéia de que ensinar é uma "simples" ocupação?* (p.94).

Um recurso bastante útil ao educador, conforme já foi demonstrado neste trabalho, é a utilização dos jogos de regras na sua prática educativa. Brenelli (1999), ao se remeter ao papel do jogo, afirma que o mesmo:

> *constitui um meio favorável para promover o desenvolvimento e a aprendizagem das crianças. Trata-se de um objeto cujo nível de conhecimento é o da ação dependente da compreensão, daí o caráter operativo que desencadeia o jogo de regras, sendo o aspecto operativo, em detrimento do aspecto figurativo, o condutor da operatoriedade* (p.86) .

Assim, o jogo de regras pode constituir-se em um recurso útil para os processos de ensino e de aprendizagem na escola. Neste sentido Guimarães e Brenelli (2001) apontam que:

> *Na análise dos meios, os erros e lacunas podem ser percebidos, tornando possível a construção de estratégias novas. Mudar os meios significa realizar uma regulação ativa que envolva escolhas deliberadas e conscientes, possibilitando ao sujeito encontrar caminhos diferentes para alcançar seus objetivos, quando os anteriores se constituíram insuficientes* (p.205).

Compreende-se que o professor, ao trabalhar com jogos de regras em sala de aula, exerce um papel de mediador entre o jogo e a criança, sendo responsável pela análise prévia do jogo, a fim de detectar situações-problema que favoreçam o interesse pelo jogo e possibilitem desencadear conflitos, a fim de que o sujeito seja capaz de assimilá-los como tais. Para isso, o sujeito recorrerá à elaboração de meios capazes de superar as situações-problema, caracterizando, assim, uma intervenção pedagógica que promova a construção do conhecimento.

Macedo et al. (2000) destacaram a contribuição da intervenção pedagógica por meio de jogos para a generalização. Conforme o referido autor afirmou, a fim de que os educandos generalizem o que aprenderam no jogo para as situações escolares, é necessário que se observe:

> *a discussão desencadeada a partir de uma situação de jogo, mediada por um profissional, vai além da experiência e possibilita a transposição das aquisições para outros contextos. Isto significa considerar que as atitudes adquiridas no contexto de jogos tendem a tornar-se propriedade do aluno, podendo ser generalizada para ouros âmbitos, em especial, para as situações de sala de aula* (p. 23).

Corroborando com essas idéias, Souza (1996) destaca também o papel da intervenção para o educador ou psicopedagogo, ao exemplificá-la como sendo: "(...) uma fala, um assinalamento, uma interpretação são exemplos de intervenções, com a finalidade de desvelar um padrão de relacionamento, uma relação com o mundo e, portanto, com o conhecimento" (p.115).

Fica, portanto, ressaltada a importância de um trabalho com jogos de regras para o ensino da Matemática, pois:

> *é durante este processo que são garantidas algumas estruturas matemáticas, desejadas numa situação de intervenção com jogos para o ensino da matemática. A sistematização possibilita evidenciar para o sujeito o conceito que ele está trabalhando, as relações que esta percebendo, as regularidades que podem ser observadas, a constatação de suas hipóteses e a possível aplicação de tais idéias a outras situações* (GRANDO, 2000, p. 49).

É fundamental que o professor, ao utilizar jogos para o ensino da Matemática, tenha claros os conceitos que quer trabalhar, desenvolvendo para isso atividades lúdicas que garantam o desencadear do processo de equilibração, possibilitando a construção das estruturas apropriadas à multiplicação.

A utilização do jogo de regras, com situações-problema que solicitam a utilização da multiplicação e de qualquer outro conteúdo que queira ser trabalhado pelo educador, poderá contribuir não só para a prática escolar como também para o diagnóstico e o trabalho do psicopedagogo. Neste sentido Macedo (1997) afirma que:

> *à psicopedagogia que tem o jogo como um de seus instrumentos, poderia ser definida como uma forma de tratamento que resgata, prepara ou aprofunda, no presente, as condições para o trabalho escolar de criança, promovendo, igualmente, competências importantes para o seu trabalho profissional no futuro* (p. 153).

O professor precisa ter consciência da importância das atividades lúdicas na construção do conhecimento. O jogo deve ser utilizado pelo professor de maneira correta. Isto só ocorrerá se o professor entender bem a questão da ação, representação e explicação ilustrada nesta pesquisa, caso contrário o jogo será utilizado como algo em que a criança realiza quando não tem nada para fazer.

Além de jogar, é fundamental perguntar à criança o que ela aprendeu com o jogo. A criança precisa saber que está aprendendo com o jogo e assim poder fazer a ponte com os conteúdos escolares.

O jogo, quando utilizado corretamente, permite a tomada de consciência, imprescindível para a construção do conhecimento. Para a criança, mais importante do que resolver o problema, é ter a oportunidade de explicar ao professor como o fez .

As situações-problema propostas pelo jogo podem favorecer a reflexão da criança sobre sua ação e a representação da mesma, fazendo com que o simples ato mecânico de resolver os problemas dê uma pausa para a reflexão, o que possibilitaria a tomada de consciência. A interpretação correta do problema pela criança nem sempre é possível, vai depender do nível de partida, ou seja, do nível em que a criança estava. Piaget (1977) chamou de pré-condições para o processo de aprendizagem. A presente pesquisa vem confirmar isto de modo indireto.

Outro aspecto importante a ser ressaltado aqui é a questão da individualização do ensino como sendo uma das alternativas para a aprendizagem significativa das crianças. Entende-se esta individualização como um processo em que o educador possa intervir durante suas aulas com todos seus alunos, atendendo às necssidades individuais. Independente do número de alunos em sala de aula, esta proposta busca garantir o desenvolvimento das potencialidades de cada aluno. Para tal, a sala de aula poderia ser dividida em pequenos grupos, de forma que cada grupo realize uma atividade diferente de acordo com o palnejamento do professor para sua turma. Os grupos mudariam de propostas a fim de que cada aluno passasse por todas as atividades.

Deste modo, o educador poderia dar uma atenção especial para cada grupo, podendo realizar intervenções, propondo desafios conforme o nível de aprendizagem em que cada educando se encontra. É claro que esta organização, a princípio, é bastante difícil e pode parecer impraticável. No entanto, além dos conteúdos poderem ser melhor aprendidos, o desenvolvimento da autonomia também é privilegiado, uma vez que os alunos podem fazer suas escolhas conforme suas preferências e necessidades, respeitando seu ritmo individual .

É inegável a contribuição da teoria piagetiana à Educação, como apontamos com mais esta pesquisa. Seria importante que a escola pudesse ter acesso a toda obra piagetiana e a sua vasta contribuição, como destacaram Parrat-Dayan e Tryphon (1998):

> *o vínculo entre pedagogia e psicologia é sem dúvida estreito e pôde ser apreendido de maneiras diferentes no curso do tempo. No entanto, gostaríamos de reter, da concepção piagetiana da pedagogia, a idéia de que para compreender é preciso criar, criar os instrumentos que nos permitirão compreender o mundo. E, para criar, um espaço de liberdade é necessário, um espaço que apenas o self-government e o trabalho em grupo podem oferecer* (p.23).

Ao final deste trabalho, sabemos que muitas questões continuam abertas a discussão e pesquisa. O presente trabalho acredita ter contribuído de modo relevante à obra piagetiana, uma vez que mostra que os processos cognitivos de generalização e construção da multiplicação são interdependentes, ou seja, os níveis de generalização e multiplicação se relacionam. Resta-nos admitir que a busca não cessa por aqui, muitas outras pesquisas e estudos serão imprescindíveis, pois há sempre muito mais a se buscar, a se dizer, discutir e escrever. Como afirma o filósofo Platão (427-347 a.C.): "Vale a pena refletir muitas vezes sobre as coisas belas".

Nosso trabalho nos faz refletir que, como educadores e pesquisadores, precisamos considerar os processos inerentes à construção do conhecimento segundo o construtivismo piagetiano. Cabe à escola, portanto, repensar os processos de ensino e de aprendizagem a que se propõe realizar, como sugere Castro (2001):

> *Devemos, pois, redefinir conceitos e pensar em termos novos, ou melhor, em significações diferentes para os termos tradicionais da didática – o aluno, o professor, o que se ensina, como se ensina, por que e para que ensinar – formulando novos conceitos sobre tais elementos didáticos. Tal redefinição poderá exigir um novo conceito de "conteúdo", que não será apenas matemática, história ou geografia, ou dos objetivos atribuídos à escola. Dar-se-ia mais importância a atividades que ensinem a pensar ou a incentivar o uso do pensamento pelo aluno. O ensino não se confundiria com a aquisição de informações, mas com a construção de conhecimento e com o desafio ao pensamento. A teoria, que espero seja um dia formulada, poderá ajudar o professor se conseguir deixar claros os princípios nos quais se baseia: os mesmos do* ***construtivismo piagetiano.*** *Deixamos a sugestão para quem se interessar por ela* (p.19).

Este trabalho mostra a importância de situações diferenciadas daquelas costumeiramente trabalhadas na escola, constituindo o jogo de regras em uma dessas possibilidades que o professor pode lançar mão em sua prática pedagógica, caso queira contribuir para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem voltados para a formação de indivíduos moral e intelectualmente autônomos, capazes de criar e transformar a sociedade em que vivemos em uma sociedade cada vez mais humana.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, A. R. *O jogo de regras no contexto escolar:* uma perspectiva construtivista. 1993. 144 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo.

AGUIAR, M. *Uma idéia para o laboratório de matemática*. 1999. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

ALDANA, L.M. *Um modelo computacional para a resolução de problemas*. 1990. 520 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

AZEVEDO, M.V.R. *Influência dos jogos e materiais pedagógicos na construção dos conceitos em matemática*. 1993. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

AZZI, G. R.; SILVA, S. H. S. A importância de um novo olhar do professor para os alunos – Um primeiro passo na busca de melhores resultados no processo ensino-aprendizagem. SISTO, F. F. (org.) *Leituras de psicologia para formação de professores*. Petrópolis: Vozes, 2000, p.135-147.

BARRETO, M. L. *Interação social e desenvolvimento cognitivo*: um estudo com crianças em jogos em grupo e atividades livres no 'playground'. 1996. 269 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

BARTA, J.; SCHAELLING, D. Games we play: connecting mathematics and culture in the classroom. *Teaching Children Mathematics*, ano 4, v.7, 1998, p.388-393.

BATISTA, C.G. Fracasso escolar: análise de erros em operações matemáticas. In: *Zetetiké*. Campinas: Faculdade de Educação - UNICAMP-CEMPEM, v.3, n.4, 1999, p.41-72.

BECKER, F. *Relações cognitivos na escola*. PROEPRE 20 anos. XX Encontro Nacional de Professores do PROEPRE. Campinas: Faculdade de Educação – LPG – Unicamp, 2003, p. 65-72.

BELL, A. et al. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: elements of a descriptive theory. *Journal for research in Mathematics Education*, v.20, n.5, p.434-449, 1989.

BICUDO, M. A. *Educação Matemática*. São Paulo: Moraes, 1985.

BITTENCOURT, J. A. A epistemologia genética e o ensino da matemática. In: *Zetetiké*. Campinas, v.4, n.6, p.75-85, 1996.

BRENELLI, R. P. *Observáveis e coordenações em um jogo de regras*: influência do nível operatório e interação social. 1986. 236 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

BRENELLI, R. P. *Intervenção pedagógica, via jogos Quilles e Cilada, para favorecer a construção de estruturas operatórias e noções aritméticas em crianças com dificuldades de aprendizagem.* 1993. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

BRENELLI, R. P. *O jogo como espaço para pensar*: a construção de noções lógicas e elementares. Campinas, SP: Papirus, 1996, 358 p.

BRENELLI, R. P. Jogos de regras em sala de aula: um espaço para construção operatória. SISTO, F. F. (org.). *O cognitivo, o social e o afetivo no cotidiano escolar*. Campinas: Papirus, 1999, p. 69-88.

BRENELLI, R. P. Piaget e a afetividade. SISTO, F. F. (org.) *Leituras de psicologia para formação de professores*. Petrópolis: Vozes, 2000, p.105-116.

BRENELLI, R. P. Espaço lúdico e diagnóstico em dificuldades de aprendizagem: contribuição do jogo de regras. 2. ed. SISTO, F. F. (org.). *Dificuldades de aprendizagem no contexto psicopedagógico*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002, p.167-189.

BRITO, M. R. (2001a). Contribuições da Psicologia Educacional à Educação Matemática. In: BRITO, M. R. (org.). *Psicologia da educação matemática*: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, p.49-167, 2001.

BRITO, M. R. (2001b). Aprendizagem significativa e a formação de conceitos na escola. (2001) In: BRITO, M. R. (org.). *Psicologia da educação matemática*: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, p.69-84, 2001.

BROUGÈRE, G. *Jogo e Educação*. Tradução Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998. 218 p.

BRYANT, P. E. *Perception and Understanding in Young Children*. London: Methuen, 1974. 195 p.

BRYANT, P. E.; MORGADO, L.; NUNES, T. Children's understanding of multiplication. *Procedings of the the Annual Conference of the Psycology of Mathematics Education*, Tokio, august. 1992.

CALSAS, G. C. Construção de uma intervenção psicopedagógica para o ensino de aritmética elementar: problemas multiplicativos. *Educação, escola e autonomia*. XVI Encontro Nacional de Professores do PROEPRE. Campinas: Faculdade de Educação – LPG-UNICAMP, p.142-143, 1999.

CAMARGO DE ASSIS, M.; MANTOVANI DE ASSIS, O. Z. (orgs.) *PROEPRE 20 anos. XX Encontro Nacional de Professores do PROEPRE*. Campinas: Faculdade de Educação – LPG – Unicamp, 2003, p.449.

CAMARGO, R. L. *A intervenção pedagógica e o desenvolvimento do raciocínio lógico*: o uso de jogos e atividades específicas para a construção das estratégias lógicas elementares. PROEPRE 20 anos. XX Encontro Nacional de Professores do PROEPRE. Campinas: Faculdade de Educação – LPG – Unicamp, 2003, p.333.

CARNEIRO, C. R. *O prazer e a autoria*: atributos de uma professora. PROEPRE 20 anos. XX Encontro Nacional de Professores do PROEPRE. Campinas: Faculdade de Educação – LPG – Unicamp, 2003, p.307-308.

CAROLL, W. E PORTER, D. Invented strategies can develop meaningful mathematical procedures. Teaching Children Mathematics, março, 1997.

CARRAHER, T. et al. *Na vida dez, na escola zero*. 10. ed. São Paulo: Cortez, 1988, 182 p.

CARRAHER, T. N. & SCHLIEMANN, A. L. Fracasso escolar: uma questão social. *Cadernos de Pesquisa*. São Paulo, n. 45, p.3-19, 1983.

CASTRO, A. A. D. *Um olhar construtivista sobre a educação*. MANTOVANI DE ASSIS, O. Z. et al. (orgs). Campinas: Vieiras, 2001, 139 p.

CASTRO, A. D. Educação e epistemologia genética. In: SISTO, F. F. (org.) *Atuação psicopedagógica e aprendizagem escolar*. Campinas, SP: Papirus, p.17-33, 1996.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, C. & SAIZ, I. (orgs.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Tradução Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, p.36-47, 1996.

CHATEAU, J. *O jogo e a criança*. Tradução Guido de Almeida. São Paulo: Summus, 1987, 139 p.

COELHO, M. M. *Escola Pública de 1.º grau: tendências didáticas do ensino de ciência e matemática.* 1992. 2. v. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

CORBALÁN, F. *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Editorial Síntesis, 1996, 271 p.

CORREA, J. A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não-computacionais. In: Novaes, M. H.; Brito, M. L. F. (orgs.) *Psicologia na Educação*: Articulação entre Pesquisa, Formação e Prática Pedagógica. Coletâneas da ANPEPP, vol.1, n.5. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pesquisa e Pós-graduação em Psicologia / Xenon Editora e Produtora Cultural, p.151-165, 1996.

COSTA, E. E. M. *O jogo com regras e a construção do pensamento operatório: um estudo com crianças pré-escolares*. 1991. 230 f. Tese (Doutorado em Psicologia) – Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996, 121 p.

DAVID, M. M. M. S. & LOPES, M. P. Professores que explicitam a utilização de formas de pensamento flexível podem estar contribuindo para o sucesso em matemática de alguns de seus alunos. In: *Zetetiké*, Campinas, v.6, n.9, p.31-44, 1998.

DIAZ, M. V. & POBLETE, A. Resolucion de problemas, evaluacion y enseñanza del calculo. *Zetetiké*, Campinas, v.3, n.4, p.51-60, 1995.

DOCKRELL, J. & MCSHANE, J. *Dificultades de aprendizaje en la infancia. Un enfoque cognitivo*. Barcelona: Paidós, 1992, 244 p.

EMERIQUE, P. S. Isto e aquilo: jogo e "ensinagem" matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.) *Pesquisa em Educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, p.185-198, 1999.

EWBANK, M. S. A. *O ensino de um mesmo conteúdo para crianças e adultos*: a multiplicação. PROEPRE 20 anos. XX Encontro Nacional de Professores do PROEPRE. Campinas: Faculdade de Educação – LPG – Unicamp, 2003, p.141-146.

FERREIRO, E. *Atualidade de Jean Piaget*. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001, 143 p.

FINI, L. D. T. Aritmética no ensino fundamental: análise psicopedagógica. SISTO, F. F. (org.). *Dificuldades de aprendizagem no contexto psicopedagógico*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002, p. 60-78.

FINI, L. D. T. et al. Avaliação escrita de matemática: em busca de explicação. *Zetetiké,* Campinas, v.4, n.6, p.25-43, 1996.

FLAVELL, J. H. *A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget*. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1992, 479 p.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, S. D. A. et al. (1999). *Educação Matemática*: uma introdução. São Paulo: EDUC, p.155-175, 1999.

FRYDMAN, O.; BRYANT, P. E. Sharing and understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development*, v.3, p.323-39, 1988.

GILL, A. J. Multiple estrategies: product of reasoning and communication. *Arithmetic Teacher*, v.40, p.7, 1993.

GIMENES, B. P. *O jogo de regras nos jogos da vida: sua função psicopedagógica na sociabilidade e afetividade de pré-adolescentes institucionalizados segundo Piaget*. 1996. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. 2000. 224 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

GRANDO, R. C. *O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática*. 1995. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

GRANELL, C. G. Processos cognoscitivos en el aprendizage de la multiplicación. In: MONTSERRAT, Moreno (y equipo del Imipae). *La pedagogia Operatória*. Barcelona: Laia Editorial, p.129-147, 1983.

GUILHERME, M. *A ansiedade matemática como um dos fatores geradores de problemas de aprendizagem matemática*. 1983. 93 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

GUIMARÃES, K. P. e SILVA, F. C.. *Projeto Avaliação do Rendimento Escolar de Mirassol* (AREM/2002). PROEPRE 20 anos. XX Encontro Nacional de Professores do PROEPRE. Campinas: Faculdade de Educação – LPG – Unicamp, 2003. p.362-363.

GUIMARÃES, K. P. *Abstração reflexiva e construção da noção de multiplicação, via jogos de regras: em busca de relações*. 1998. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

GUIMARÃES, K. P. & BRENELLI, R. P. Abstração reflexiva e construção da noção de multiplicação. In: BRITO, M. R. (org) *Psicologia da educação matemática*: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001. 280 p.

HENRIQUES, G. Generalizacion operativa y generalizacion formal en matemáticas. In: PIAGET, J. et al. *Investigaciones sobre la generalización*. México: Premia, p.211-220, 1984.

HUIZINGA, J. *Homo ludens*. São Paulo: Perspectiva, 1980. 236 p.

INHELDER, B; BOVET, M; SINCLAIR, H. *Aprendizagem e Estruturas do Conhecimento*. Tradução de Maria Aparecida Rodrigues Cintra e Maria Yolanda Rodrigues Cintra, São Paulo: Saraiva, 1977, p. 282.

JESUS, M. A. S. *Jogos na Educação Matemática: análise de uma proposta para 5.ª série do Ensino Fundamental*. 1999. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

JESUS, M. A. S.; FINI, L. D. T. Uma proposta de aprendizagem significativa de matemática através de jogos. In: BRITO, M. R. (org). *Psicologia da educação matemática*: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, p.129-145, 2001.

KAMII, C. *A criança e o número*: implicações da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. Tradução Regina A. de Assis. Campinas, SP: Papirus, 1992, 124 p. (Ed. original: 1982).

KAMII, C.; DeCLARK, G. *Reinventando a aritmética*: implicações da teoria de Piaget. Tradução Elenisa Curt. Campinas, SP: Papirus, 1992, 307 p. (Ed. original: 1985).

KAMII, C.; DeVRIES, R. *Jogos em grupo na educação infantil*: implicações da teoria de Piaget. Tradução Maria Célia Dias Carrasqueira. São Paulo: Trajetória Cultural, 1990, 355 p. (Ed. original: 1980).

KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. *Aritmética*: novas perspectivas, implicações na teoria de Piaget. Tradução Marcelo C. T. Lellis, Marta R., Jorge J. de Oliveira. Campinas, SP: Papirus, 1993, 210 p.

KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. *Desvendando a aritmética*: implicações na teoria de Piaget. Tradução Marta Rabiogio e Camilo F. Ghorayeb. Campinas, SP: Papirus, 1993.

KESSELRING, T. *Jean Piaget*. Tradução Antônio Estêvão Algayer e Fernando Becker. Petrópolis, RJ: Vozes, 1993, 286 p.

KNAPPE, P. P. *Mais do que um jogo*: teoria e prática do jogo em psicoterapia. São Paulo: Ágora, 1998.

LIMA, L. *A construção do homem segundo Piaget*: uma teoria da Educação. São Paulo: Summus, 1984, 149 p.

LIMA, L. *Piaget*: sugestões para educadores. Petrópolis, RJ: Vozes, 1999, 254 p.

LIMA, V. S. *Solução de problemas: habilidades matemáticas, flexibilidade de pensamento e criatividade*. 2001. 215 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

LIMA, V. S. *A construção de conceitos e as habilidades matemáticas*: solucionando problemas. PROEPRE 20 anos. XX Encontro Nacional de Professores do PROEPRE. Campinas: Faculdade de Educação – LPG – Unicamp, 2003. p.253-267.

LOLA, M. Teaching math. problem solving skills. *Teaching Prek-8*, v.25, n.6, p.24-25, 1995.

LOPES, S. V. A. *Relações entre a abstração reflexiva e o conhecimento aritmético de adição e subtração em crianças do ensino fundamental*. 1997. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

LOPES, S. V. A. *A contribuição dialética da adição e subtração e a resolução de problemas aditivos*. 189 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

LUKE, C. The repeated addition model of multiplication and children's performance on mathematical word problems. Special Issues: multiplication and division. *Journal of Mathematical Behavior*, v.7, n.3, p. 217-226, 1988.

MACEDO, I. Para uma psicopedagogia construtivista. In: ALENCAR, E. S. (org) *Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem*. São Paulo: Cortez, p.121-140, 1992.

MACEDO, I. *A importância dos jogos de regras para a construção do conhecimento na escola*. São Paulo, 1993. (Texto mimeografado).

MACEDO, L. *Ensaios construtivistas*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994, 170 p.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. *Quatro cores, senha e dominó*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997, 167 p.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. *Aprender com jogos e situações-problema*. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000, 116 p.

MACEDO, L. *A prática docente como forma de construção, emancipação e reflexão*. PROEPRE 20 anos. XX Encontro Nacional de Professores do PROEPRE. Campinas: Faculdade de Educação – LPG – Unicamp, 2003, p.85-97.

MANTOVANI DE ASSIS, O. Z. *A solicitação do meio e a construção das estruturas lógicas elementares na criança*. 1976. 169 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MANTOVANI DE ASSIS, O. Z. *Uma nova metodologia em educação pré-escolar*. São Paulo: Pioneira, 1979. 55 p. (Série Caderno da Educação).

MELO, M. E. C. *A construção de regras no jogo infantil: um estudo em aulas de educação física da primeira e segunda série do primeiro grau*. 1993. 103 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MENDONÇA, M. C. D. A. *A problematização: um caminho a ser percorrido em Educação Matemática*. 1993. 309 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MENDONÇA, M. C. D. A. A intensidade dos algoritmos nas séries iniciais: uma imposição sócio-histórica-estrutural ou opção valiosa? *Zetetiké*, Campinas, v.4, n.5, p.55-76, 1996.

MORENO, M. et al. *La pedagogia operatoria*: un enfoque constructivista de la educación. Tradução Carmem Campoy Scriptori. Barcelona; Laia Editorial, 1987. 375 p.

MORGADO, L. M. A. Word problems. The construction of multiplicative structures. (s.t.), 1991.

MORGADO, L. M. A. *O ensino da aritmética*: perspectiva construtivista. Coimbra: Livraria Almedina, 1993, 116 p.

MORO, M. L. F. Iniciação em matemática e construções operatório-concreta; alguns fatos e suposições. *Cadernos de Pesquisa*, São Paulo, n.45, p.20-24,1983.

MORO, M. L. F. Aprendizagem construtivista de estruturas aditivas e multiplicativas na iniciação matemática. Simpósio Desenvolvimento Lógico-matemático*: Compreensão, Representação e Resolução de Problemas e Operações Aritméticas. Campinas, 1999. (Texto mimeografado).*

MORO, M. L. F. Implicações da epistemologia genética de Piaget para a Educação. In: PLACCO, V. M. N. S. (org). Psicologia & Educação*: revendo contribuições. São Paulo: EDUC, 2000.*

MOURA, M. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. In: KISHIMOTO, T. T. M. (org) Jogo, brinquedo, brincadeira e educação*. São Paulo: Cortez, 1997, 183 p.*

NUNES, T. & BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997, 244 p.

OLIVEIRA, G. C. Contribuições da psicomotricidade para a superação das dificuldades de aprendizagem. In: SISTO, F. F. et al. (orgs.) *Atuação psicopedagógica e aprendizagem escolar*. Petrópolis, RJ: Vozes, p.175-195, 1996.

ONUCHIC, L. D. L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, A. V. (org). *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, p.199-218, 1999.

ORTEGA, A. C.; SILVA, L. C. M.; FIOROT, M. A. O jogo de quatro cores em um contexto psicogenético. In: *Psicopedagogia*: avanços teóricos e práticos. Escola-Família-aprendizagem. V Congresso Brasileiro de Psicopedagogia, São Paulo, 2000.

PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, C. & SAIZ, I. (orgs.) *Didática da matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, p.186-235, 1996.

PARRA, C. & SAIZ, I. (orgs.) *Didática da matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, 258 p.

PARRAT-DAYAN, S.; TRYPHON, A. Introdução. Piaget, J. *Sobre a Pedagogia*: textos inéditos. Tradução Cláulia Berliner. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998. p. 7-23.

PAULETO, C. R. P. *Jogos de regras como Meio de Intervenção na Construção do Conhecimento Aritmético em Adição e Subtração*. 2001. 120 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PERRENOUD, P. *Dez novas competências para ensinar*: convite à viagem. Tradução Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000, 192 p.

PETTY, A. L. S. *Ensaio sobre o valor pedagógico dos jogos de regras: uma perspectiva construtivista*. 1995. 133 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo.

PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. Algumas reflexões sobre jogos de regras. In: SISTO, F. F. (org.). *Atuação psicopedagógica e aprendizagem escolar*. Campinas, Papirus, p.163-174, 1996.

PIAGET, J. *Psicologia e pedagogia*. Tradução Dirceu A. Lindoso e Rosa M. R. da Silva. Rio de Janeiro/São Paulo: Forenese, 1970, 184 p. (Ed. original: 1969).

PIAGET, J. *Para onde vai a educação?* Tradução Ivette Braga. Rio de Janeiro: Livraria José Olympio, 1971, 80 p. (Ed. Original: 1948).

PIAGET, J. Como as crianças formam conceitos matemáticos. In: MORSE, W. e WINGO, G. (org.). *Leituras de Psicologia Educacional*. Tradução Duarte Moreira Leite. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1973. (Ed. original: 1953).

PIAGET, J.; INHELDER, B. *A psicologia da criança*. Tradução Octávio Mendes Cajado. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1974, 137 p. (Ed. original: 1966).

PIAGET, J.; INHELDER, B. A gênese das estruturas lógicas elementares*. Tradução Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar, 1975, 354 p.*

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. Tradução Christiano M. Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar, 1975, 331 p. (Ed. original: 1941).

PIAGET, J. *A equilibração das estruturas cognitivas: problema central do desenvolvimento*. Tradução Marion M. dos S. Penna. Rio de Janeiro: Zahar, 1976, 228 p. (Ed. original: 1975).

PIAGET, J. et al. *A tomada de consciência*. Tradução Edson Braga de Souza. São Paulo: Melhoramentos/Edusp, 1977. (Ed. original: 1974).

PIAGET, J. et al. *Fazer e Compreender*. Tradução Christina Larrondé de Paula Leite. São Paulo: Melhoramentos/EDUSP, 1978a, 186 p. (Ed. original: 1974).

PIAGET, J. et al. *A formação do símbolo na criança*: imitação, jogo e sonho, imagem e representação. Tradução Álvaro Cabral e Christiano Monteiro Oiticica, 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1978b, 370 p. (Ed. original: 1964).

PIAGET, J. et al. *Investigaciones sobre la generalización*. México: Premia, 1984, 220 p.

PIAGET, J. et al. O possível e o necessário. *Evolução dos necessários na criança*. Tradução. Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, 1986, 220 p. (Ed. original: 1983).

PIAGET, J. et al. *Notas sobre o ensino de matemática*. Tradução Corinta M. Geraldi. MANTOVANI DE ASSIS, O. Z. (org.). VI Encontro Nacional de Professores do PROEPRE, Águas de Lindóia, 1989. (Texto mimeografado).

PIAGET, J. et al. *O juízo moral na criança*. Tradução Elzon Lenardon, São Paulo: Summus, 1994, 302 p. (Ed. original: 1932).

PIAGET, J. et al. *Seis estudos de psicologia*. Tradução Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva. Rio de Janeiro: Forense, 1995a. 136 p. (Ed. original: 1964).

PIAGET, J. et al. *Abstração reflexionante. Relações lógico-elementares e ordem das relações espaciais*. Tradução Fernando Becker e Petronilha B. G. da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995, 292 p. (Ed. original 1977).

PIAGET, J. Biologia e Conhecimento. Tradução de Francisco M. Guimarães. Petrópolis, RJ: Vozes, 3. e., 1996. 423 p.

PIANTAVINI, F. N. O. & BRENELLI, R. P. O jogo de regras Senha e a construção de possíveis implicações psicopedagógicas e educacionais. *Psicopedagogia*. Avanços teóricos e práticos. Escola-Família-aprendizagem. Anais do V Congresso Brasileiro de Psicopedagogia, São Paulo. 2000.

PRAT, M. D. Os problemas não formulados. In: MANTOVANI DE ASSIS, O. Z. (org.). *XII Encontro Nacional de Professores do PROEPRE*, Águas de Lindóia, p.20-26, 1996.

RABELO, E. H. *Produção e interpretação de textos matemáticos*: um caminho para um melhor desempenho na resolução de problemas. 1995. 209 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

RABIOGLIO, M. B. *Jogar: um jeito de aprender: análise do pega-varetas e da relação jogo-escola*. 1995. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.

RODRIGUES, V. *Resolução de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática*. 1992. 183

f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade do Estado de São Paulo, Rio Claro.

SASTRE, G.; MORENO, M. *Descubrimiento y construcción de conocimientos: uma experiência de pedagogia operatória*. Barcelona, Gedisa, 1980. (Série Investigaciones en Psicologia y Educación).

SILVA, G. A. *Processo de cognição e fracasso escolar*. 1990. 205 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SOUZA, M. E. A contribuição do lúdico no atendimento psicopedagógico. In: *Psicopedagogia. Avanços teóricos e práticos. Escola-Família-aprendizagem*. Anais do V Congresso Brasileiro de Psicopedagogia, 2000.

SOUZA, M. T. C. et al. Congruências entre desempenho psicomotor e operatório. In: SISTO, F. F. (org.). *Atuação psicopedagógica e aprendizagem escolar*. Petrópolis, RJ: Vozes, p.77-94, 1996.

SOUZA, M. T. C. Intervenção psicopedagógica: como e o que planejar? In: SISTO, F. F. (org.). *Atuação psicopedagógica e aprendizagem escolar*. Petrópolis, RJ: Vozes, p.113-126, 1996.

STEFFE, L. Children’s multiplying schemes. In: HAREL, G.; CONFREY, J. (eds.). *The Development of Multiplicative Reasonig in the Learning of Mathematics*, Albany, N.Y.: StateUniversity of New York Press, 1994. p.3-40.

TAXA, F. O. S. *Estudo sobre a resolução de problemas verbais aritméticos nas séries iniciais*. 1996. 190 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

TAXA, F. O. S. *Problemas multiplicativos e processo de abstração em crianças na 3.ª série do Ensino Fundamental*. 2001. 220 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

TOLEDO, M. & TOLEDO, M. *Didática de matemática*: como dois e dois: a construção da matemática. São Paulo: FTD, 1997, 335 p.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: RESH, R.; LANDAU, M. (orgs.). *Aquisitions of mathematics concepts and processes*. New York, Academic Press, p.127-174, 1983.

VERGNAUD, G. La tthéorie des champs conceptuals. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, RDM, 10 (2.3). Grenoble, 1990.

VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad; problems de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* Tradução Luís O. Segura. México: Trillas, 1991. 275 p.

ZAIA, L. L. *A solicitação do meio e a construção das estruturas operatórias em crianças com dificuldades de aprendizagem*. 1996. 255 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

ZUNINO, D. L. *A matemática na escola*: aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995, 191 p.

ANEXO A

Prova de Resolução de Problemas de Estrutura Multiplicativa

NOME: ____
SÉRIE: ________________ ANIVERSÁRIO: ________________

1) Tenho 3 bandejas de iogurtes. Cada bandeja tem 4 potinhos de iogurtes. Quantos potinhos de iogurtes eu tenho?

R:____
( ) difícil ( )fácil

2) Minha mãe quer fazer uma roupa e o tecido que ela quer custa R$ 24,80 o metro e ela precisa de 3,5m. Quanto vai pagar?

R:____
( ) difícil ( )fácil

3) Paguei R$12,00 por 3 garrafas de vinho. Quanto custou uma garrafa?

R:____
( ) difícil ( )fácil

4) Comprei 12 garrafas de vinho. Cada caixa com 3 garrafas custa R$19,50. Quanto pagarei?

R:____
( ) difícil ( ) fácil

5) Três novelos de lã pesam 200 gramas. Preciso de 8 novelos para fazer uma blusa. Quanto pesará esta blusa?

R:____

( ) difícil ( )fácil

6) Em uma corrida de fórmula-1 são percorridos 247,760 quilômetros. Um carro gasta 6,785 litros a cada 100 quilômetros. Quanto este carro gastará de gasolina nesta corrida?

R:____

( ) difícil ( )fácil

Qual problema você achou mais difícil?
R: ____

Qual problema você achou mais fácil?
R: ____

ANEXO B

Protocolo de correção dos problemas

Sujeito: Idade: M: G: Fase:

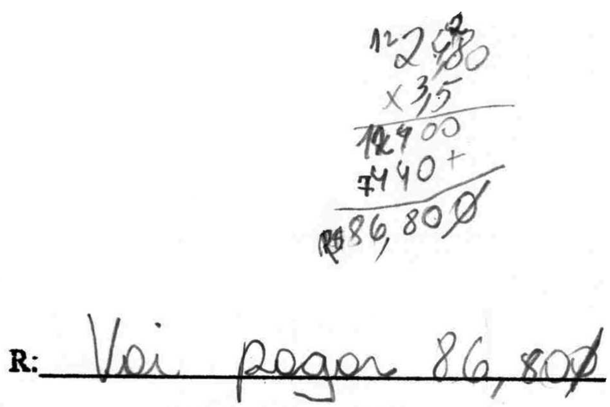
Problema	Pontuação	Critérios
		I) Acertou o problema:
	3,0	**a)** Procedimento Multiplicativo
1	2,0	**b)** Procedimentos Variados (adição suc.)
	1,0	**II)** Raciocínio correto e erro no resultado
	0,0	**III)** Erros de raciocínio (adição)
		I) Acertou o problema:
	3,0	**a)** Procedimento Multiplicativo
2	2,0	**b)** Procedimentos Variados
	1,0	**II)** Raciocínio correto e erro no resultado (vírgula, valor posicional, cálculo)
	0,0	**III)** Erros de raciocínio
		I) Acertou o problema:
	3,0	**a)** Procedimento Multiplicativo com predomínio de reversibilidade, operação: divisão
3	2,0	**b)** Procedimentos variados
	1,0	**II)** Raciocínio correto e erro no resultado (cálculo)
	0,0	**III)** Erros de raciocínio
		I) Acertou o problema:
	3,0	**a)** Procedimentos que exigem interdependência Multiplicação/divisão presentes
	2,0	**b)** Procedimentos Variados
4	1,0	**II)** Raciocínio correto e erro no resultado (cálculo, vírgula)
	0,0	**III)** Erros de raciocínio (aplicação de operações Que não pertencem ao problema enunciado)
		I) Acertou a resposta:
	3,0	**a)** Procedimento de interdependência Multiplicação/divisão, reversibilidade completa
5	1,0	**II)** Raciocínio correto e erro no resultado (cálculo)
	0,0	**III)** Erros de raciocínio (aplicação de operações Que não pertencem ao problema enunciado)
		I) Acertou o problema:
	3,0	**a)** Procedimentos que exigem interdependência
6	2,0	**b)** Procedimentos Variados (estimativa)
	1,0	**II)** Raciocínio correto e erro no resultado (cálculo)
	0,0	**III)** Erros de raciocínio
Total de pontos:		

ANEXO C

Para ilustrarmos os critérios de correção, apresentaremos exemplos de diferentes resoluções referentes ao problema 2.

2) Minha mãe quer fazer uma roupa e o tecido que ela quer custa R$ 24,80 o metro e ela precisa de 3,5m. Quanto vai pagar?

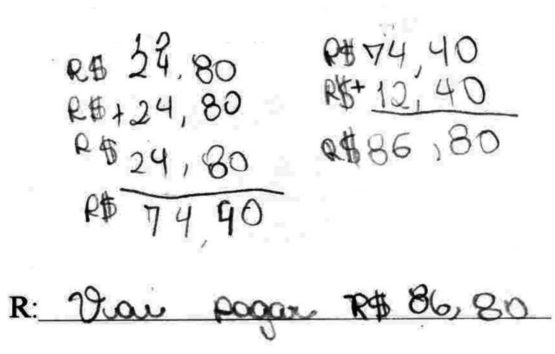
GAB (9;4)(M:III,G:II) acertou o problema utilizando procedimento multiplicativo. (valor=3,0 pontos)



O protocolo de GAB mostra a utilização da multiplicação para chegar ao resultado correto, descobrindo o valor necessário para comprar 3,5m de tecido.

Dentre os procedimentos variados (valor=2,0 pontos), podemos exemplificar o protocolo de JES a seguir:

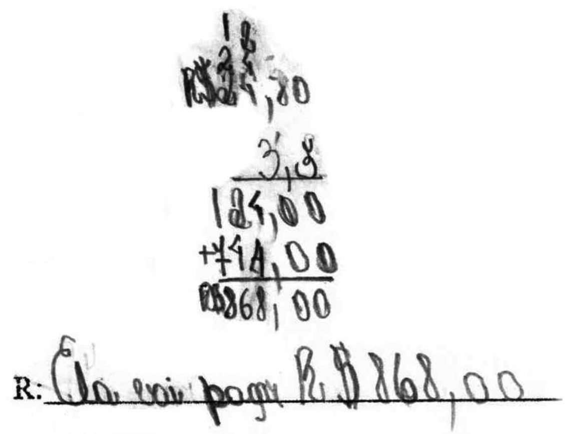
JES (10;3)(M:III,G:II)



Para resolver o problema, faz uso da adição sucessiva (24,80+24,80+24,80) e soma o resultado com o valor de meio metro (12,40) ao invés de multiplicar 24,80 por 3,5.

O valor um ponto foi obtido pelos sujeitos que iniciaram o raciocínio corretamente, mas cometeram erro no resultado, tais como: vírgula, valor posicional e cálculo.

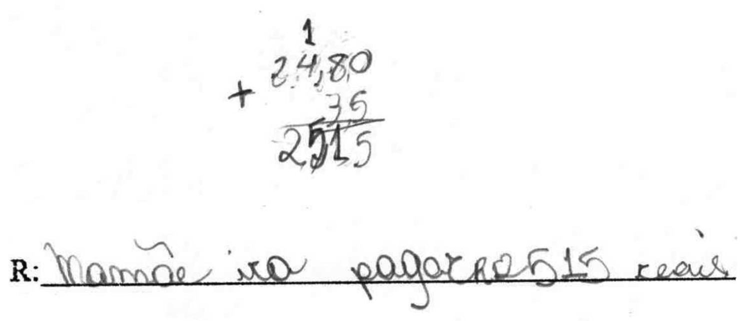
LAY (9;3)(M:I,G:I)



Observa-se que LAY inicia corretamente o raciocínio, mas ao colocar a vírgula, não conclui corretamente a solução do problema.

Finlamente para os sujeitos que cometeram erros no raciocínio não marcaram nenhuma pontuação (0 pontos), ilustraremos o protocolo de GUI:

GUI (8;8)(M:I,G:I)



GUI retira os dados do problema e realiza uma adição, mostrando ainda não fazer o cálculo relacional.