Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Algumas contribuições na teoria fuzzy multívoca

Yurilev Chalco Cano†
Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: **Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar**
Co-Orientador: **Prof. Dra. María Dolores Jiménez Gamero**

†Este trabalho teve apoio financeiro da FAPESP.

Algumas contribuições na teoria fuzzy multívoca

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Yurilev Chalco Cano** e aprovada pela comissãojulgadora.

Campinas, 26 de fevereiro de 2004.

Prof. Dr. **Marko Antonio Rojas Medar**.
Orientador

Profa. Dra. **María Dolores Jiménez Gamero**.
Co-orientadora

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar

Profa. Dra. Rafaela Osuna Gómez

Prof. Dr. Antonio Rufian Lizana

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

Eu dedico este trabalho a meus pais Gustavo e Gladis, e a meus irmãos Yeremed, Ademir e Adilmer.

Resumo

Neste trabalho de tese apresentamos alguns resultados obtidos na teoria fuzzy multívoca. Numa primeira parte, apresentamos um novo tipo de aproximação de conjuntos fuzzy compactos.

Fazemos o estudo do espaço de conjuntos fuzzy compactos. Provamos que este espaço é um espaço quasilinear normado e portanto métrico. Depois, introduzimos a teoria de operadores quasilineares fuzzy. Neste contexto, a quasilinearidade substitui a linearidade da teoria clássica de análise. Assim, constroimos uma análise fuzzy consistente.

Damos um novo conceito de diferenciabilidade para multifunções fuzzy e estudamos suas propriedades. Finalizamos esta primeira parte com uma aplicação à dinâmica de populações.

Na segunda parte deste trabalho de tese, apresentamos resultados referente à "Lei forte de grandes números" e do "Teorema central de limite" para conjuntos aleatórios e variáveis aleatórias fuzzy.

Na última parte, introduzimos o conceito de processo fuzzy s-convexos, estudamos suas propriedades e obtemos alguns tipos de desigualdades como Hadamard e Jensen, as quais são importantes na teoria clássica de otimização.

Abstract

In this thesis work we presented some results obtained in the theory fuzzy-valued mapping. In a first part, we introduced one new type of approximation of compact fuzzy sets.

We make the study of the space of compact fuzzy sets. We proved that this space is a normed quasilinear space and therefore metric. Therefore, we introduced the theory of fuzzy quasilinear operators. In this context, the quasilinearity substitutes the linearity of the classic theory of analysis. So in this way, we build a consistent fuzzy analysis.

We give a new concept of differentiability for fuzzy-valued mappings and we studied its properties. We concluded this first part with an application to the dynamics of populations.

In the second part of this thesis work, we presented results with respect to the " Strong law of large number" and the " Central limit theorem" for random sets and for fuzzy random variables.

In the last part, we introduced the concept of s-convex fuzzy processes, we studied its properties and we obtain some types of inequalities as Hadamard and Jensen, which are important in the classic theory of optimization.

Agradecimentos

À Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo, Fapesp, pela bolsa de doutorado que me foi concedida entre abril de 2000 e março do 2004.

À Universidade Estadual de Campinas, Unicamp e ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC por ter permitido realizar meus estudos de Doutorado.

Ao professor doutor Marko Antonio Rojas Medar, pela orientação, confiança e amizade.

À minha co-orientadora María Dolores Jiménez Gamero, da Universidad de Sevilla, pela orientação, amizade e por ter permitido e facilitado a minha estadia na universidade de Sevilla-Espanha, a qual foi muito proveitosa para minha formação.

Ao Departamento de Estadística e Investigacón Operativa da Universidad de Sevilla, Facultad de Matemáticas, Sevilla - Espanha, aos professores e estudantes, pelas facilidades e apoio que recebe durante minha estadia nessa instituição.

À minha mãe e ao meu pai por tudo o apoio e carinho que recebe.

Ao meus irmãos pela força e carinho.

À Ruth Contreras pelo amor, carinho, compreensão, apoio e companhia.

Ao meu tio Walter Chalco pela força que sempre recebe.

Ao meus amigos Jones e Gimena, por terem sido minha família em Campinas.

À minha colega e amiga Marina T. Misukoshi pelo companheirismo, pelas várias horas de discusões de trabalho e pela nossa amizade.

Ao Prof. Rodney e ao grupo de biomatemática fuzzy do Imecc por terem compartilhado conmigo durante minha permanencia.

Ao meu colega e amigo Heriberto Román Flores da Universidad de Tarapaca - Chile, pelo apoio no desenvolvimento da minha tese.

À minha amiga Lucelina, pelo companheirismo e pela nossa amizade.

À Profa. Dra. Rafaela Osuna Gómez (Univ. de Sevilla), ao prof. Dr. Filidor Vilca Labra (Unicamp), professores que também colaboraram na minha tese.

A todos os professores do Imecc pelo ensino.

Aos amigos Peruanos, Colombianos, Brasileiros, Chilenos, Argentinos, Cubanos, Bolivianos, muito especialmente a Miguel Loayza, Norberto Maidana, Jorge Lopez, Roberto Carlos, Edson Arrazola, Sofia Pinzón, Everaldo, Erhan, Amauri, João Chela, Carlos Huaira, Vitaly e Karla, Marco e Carlos Arcos, Blanca Diaz, Paula, José María, Rita e Nicolas, Abdon, e tantos outros que fizeram a minha permanência em Campinas muito agradável.

À Cidinha, Ednaldo, Tania e Fátima, funcionários da secretaria de Pós-Graduação, pela colaboração e amizade.

Ao povo Brasileiro em geral por sua cultura e suas costumes.

CONTEÚDO

Introdução

Existe uma ampla classe de sistemas que, ao menos aparentemente, não podem ser governados por leis do tipo deterministas (ou não se conhecem estas leis) como acontece, por exemplo, com o comportamento humano, ou com o problema de modelar o comportamento das micropartículas (Mecânica quântica), cujas leis não são totalmente conhecidas, ou ainda mais, o que acontece com a dinâmica de populações, onde os parâmetros que caracterizam um indivíduo ou um grupo de indivíduos nem sempre podem ser avaliados ou medidos no sentido tradicional, são "incertezas"que somente podemos conjeturar intuitivamente. Assim, existe uma dificultade ao descrever sua evolução no tempo a partir de um estado inicial dado. Neste contexto, os métodos e técnicas matemáticas clássicas (tais como: as equações diferenciais, equações de diferenças, a teoria de probabilidades) não funcionam, devido a natureza intrínsicamente fuzzy (difuso, nebuloso) do problema, ou então se impõem condições e/ou restrições tão drásticas que, na maioria dos casos, termina desvirtuando a natureza da situação em estudo.

Uma maneira de descrever conceitos que envolvem incertezas, nebulosidades, surgiu, em 1965, a teoria de conjuntos fuzzy com o pioneiro trabalho de L. Zadeh [99]. Na mesma época começou-se a desenvolver a teoria multívoca, sendo as inclusões diferenciais (I.D., conceito que generaliza as equações diferenciais) e os conjuntos aleatórios (C.A., que generaliza o conceito de variável aleatória) os temas centrais dentro desta teoria. Estes dois conceitos, C.A. e I.D., envolvem algum tipo de incerteza, por exemplo, diferente das equações diferenciais, onde a velocidade é conhecida, nas inclusões diferencias a velocidade não é conhecida com precisão, mas sabemos que pertence algum conjunto compacto.

Ambas as teorias, conjuntos fuzzy e teoria multívoca, foram motivos de estudo de diversos autores, obtendo diversas aplicações no âmbito da matemática pura e aplicada, assim como na engenharia e ciências sociais.

Podemos dizer que estas teorias dão origem à teoria fuzzy multívoca, que surgiu na década de 80 com a introdução do conceito de variáveis aleatórias fuzzy, com a necessidade de desenvolver novas técnicas matemáticas para abordar problemas de natureza difusa ou não determinística. Esta teoria tem avançado de maneira significativa nos últimos anos devido, à diversidade e riqueza dos conceitos e técnicas que esta teoria tem e, por outro lado, às distintas e interessantes aplicações que possui.

Depois de surgir a teoria fuzzy multívoca, seria desejável poder administrar o melhor possível esta teoria, isto é, seria desejável obter uma série de ferramentas (definições, teoremas, ...) que permitam trabalhar de forma "análoga"a que se trabalha no caso clássico (levando em conta que em muitas ocasiões a utilização da teoria fuzzy multívoca, ainda que consiga refletir o melhor possível a realidade existente, terá uma maior dificuldade nos cálculos e incluso uma perda de precisão), mas quantificando e levando em conta a nebulosidade existente na situação em estudo.

Nesse sentido, neste trabalho de tese, apresentamos algumas contribuções à teoria fuzzy multívoca.

Cabe ressaltar, que fomos motivados pelo estudo de problemas de controle ótimo, onde os controles têm natureza fuzzy, pelas equações e inclusões diferencias fuzzy e pela teoria de probabilidade fuzzy. Não vamos a entrar em detalhar como surgem cada um destes temas, mas podemos dizer que são interessantes tanto do ponto de vista matemático assim como de suas aplicações.

Este trabalho de tese, está constituído por três partes. Na primeira parte, a qual chamamos de "Análise fuzzy", é dedicada ao estudo do espaço de conjuntos fuzzy compactos, que acreditamos seja o espaço adequado para desenvolver a teoria fuzzy multívoca.

Este espaço pode ser munido de métricas e assim podemos estudar seu comportamento topológico. Como um primeiro resultado, no Capítulo 2, apresentamos um novo tipo de aproximação de conjuntos fuzzy: usando a convolução de conjuntos fuzzy provamos que um conjunto fuzzy compacto pode ser aproximado por conjuntos fuzzy Lipchitz.

Como pode ser visto, este espaço não é um espaço vetorial (linear) o que dificulta o uso da análise clássica. Também, se definirmos um operador linear como no sentido clássico, este operador se reduz a uma função com valores não fuzzy, o que dificulta ainda mais ter um análise fuzzy consistente. Para contornar estes problemas, utilizamos o conceito de quasilinearidade para construir uma teoria de análise fuzzy análoga à teoria de análise clássica. Como pode ser visto no Capítulo 3, provamos que o espaço de conjuntos fuzzy compactos é um espaço quasilinear, definimos operadores quasilineares e obtemos resultados análogos aos de análise funcional clássica, por exemplo, expomos uma versão fuzzy do teorema de Banach-Steinhauss. Acreditamos que estes resultados representarão um papel importante na construção de uma análise fuzzy consistente.

Tendo introduzido o conceito de operadores quasilineares, pudemos discutir sobre a diferenciabilidade de multifunções fuzzy (funções que possuem valores conjuntos fuzzy), conceito que é bastante discutido na literatura pela importância dentro da análise, por exemplo, é uma ferramenta básica no contexto de equações diferenciais fuzzy. Assim, no Capítulo 4, propomos uma nova noção de diferenciabilidade para multifunções fuzzy, como uma generalização natural da idéia principal de cálculo diferencial clássico que consiste na aproximação local de uma função por um operador linear. Utilizamos para tal os operadores quasilineares os quais suprem os operadores lineares da teoria clássica.

Terminamos esta primeira parte fazendo uma aplição à dinâmica de populações. Aquí, nós apresentamos uma nova forma de estudar a dinâmica de populações, via inclusões diferenciais fuzzy. Consideramos as características de um indivíduo ou grupo de indivíduos como conjuntos fuzzy. Apresentamos o exemplo de expectativa de vida de um grupo de pessoas onde a pobreza, que tem natureza fuzzy, é um fator que contribui para o aumento da taxa de mortalidade dos indivíduos, obtemos suas soluções e analizamos a estabilidade destas.

A segunda parte deste trabalho de tese, é dedicado ao estudo da teoria de probabilidade fuzzy.

Como tínhamos dito anteriormente, conjuntos aleatórios (random set) é um dos temas centrais da teoria de análise multívoca, este conceito surgiu como uma generalização da teoria clássica de probabilidades, conceito que tem permitido abordar vários problemas relacionados, especificamente, com processo de predição (a partir de informação de tipo determinística).

Nos anos 80 surgiu o conceito de variável aleatória fuzzy, a qual generaliza as anteriores e permite modelar problemas de predição na presença de informação difusa.

No contexto clássico da teoria de probabilidades, uma ferramenta bastante utilizada é a lei forte de grandes números e, por outro lado, o teorema central do limite. Estes resultados foram adaptados e desenvolvidos no contexto fuzzy por diversos autores [6], [7], [22], [68].

No Capítulo 7 deste trabalho apresentamos um novo resultado referente a lei forte de grandes números para conjuntos aleatórios, que generaliza os resultados existente na literatura. Geralmente, este reultado foi provado para conjuntos aleatórios compactos usando a Métrica de Hausdorff, e para conjuntos aleatórios fechados tem-se usado outros tipos de topologia, que são mais fracas do que a gerada pela métrica de Hausdorff [6], [36], [37]. Nosso resultado é para conjuntos aleatórios fechados e usando a métrica de Haussdorff. Cabe ressaltar também, que em nosso resultado é usado uma técnica diferente das existentes na literatura.

No Capítulo 8, apresentamos uma lei forte de grandes números (LFGN) e um teorema central de limite (TCL) para variáveis aleatórias fuzzy. O TCL apresentado neste trabalho generaliza em alguns aspectos os resultados existentes na literatura [68], [95]. Entretanto, a LFGN que obtivemos, embora exista um resultado mais geral, tem a vantagem de apresentar uma prova muito mais simples.

Finalmente, na última parte deste trabalho, apresentamos o conceito de processos fuzzy s-convexos. Esta generalização foi feita motivados em desenvolver ferramentas para estudar otimização fuzzy, pois é conhecida a importância, na teoria clássica de otimização, do conceito de funções convexas e processos convexos. Assim, uma vez introduzidos os conceitos de processos fuzzy, estudamos suas propriedades, sua relação com função suporte e no último Capítulo apresentamos algumas desigualdades de tipo Hadamard e Jensen para processos fuzzy.

Temos a dizer que este trabalho tem sido acompanhado por pesquisadores que colaboraram na obtenção dos resultados e temos que agradecer a eles suas idéias, seu apoio. Por outro lado, os conceitos dados e os resultados obtidos, acreditamos sejam de utilidade para um melhor desenvolvimento da teoria fuzzy multívoca.

CAPÍTULO 1

Conceitos básicos da teoria fuzzy

Os conjuntos fuzzy* surgiram em 1965, com o pioneiro trabalho de L.A. Zadeh "fuzzy set"[99], como uma nova forma de representar conceitos que envolvem incertezas, como por exemplo:

Exemplo 1.1. *Descrever o conjunto dos números reais próximos do zero.*

Exemplo 1.2. *Descrever o conjunto dos pobres de uma cidade.*

A idéia é dar um grau de pertinência de um elemento ao conjunto em questão, para isto, Zadeh pensou em generalizar a função característica de um conjunto e assim ter o grau de pertinência no intervalo unitário. Em seguida, Goguen propôs generalizar a idéia de conjuntos fuzzy por conjuntos L-fuzzy, onde o intervalo $[0,1]$ é substituído por algum conjunto abstrato L. Até agora, só conjuntos $[0,1]$-fuzzy são considerados na prática, apesar do interesse teórico do conceito geral. Em 1990 Aubin [1] usa a escala $L=[0,\infty]$ para definir conjuntos fuzzy, esta idéia é motivada pela análise convexa. Recentemente, Dubois e Prade em [30] chamaram os conjuntos $[0,\infty]$-fuzzy por "Toll Sets"e investigaram como os conceitos básicos de conjuntos $[0,1]$-fuzzy é transferido a Toll sets.

*Fuzzy, que pode ser traduzido ao português como Nebuloso.

Neste capítulo são dados os conceitos básicos da teoria fuzzy. Iniciaremos com a definição de conjuntos fuzzy, segundo Zadeh e Aubin, logo teremos as operações entre conjuntos fuzzy e o Teorema de Representação, este último de muita importância pois com este resultado podemos relacionar os conjuntos clássicos e os conjuntos fuzzy. Tipos especiais de conjuntos fuzzy, como compactos, convexos e normais, serão dados. Discutiremos alguns aspectos sobre as operações algébricas e algumas métricas sobre o espaço de conjuntos fuzzy.

1.1 Conjuntos fuzzy

Consideremos um conjunto não vazio X, que será nosso conjunto universo. Um conjunto usual $A \subset X$ tem associado, de maneira natural, sua função caraterística $\chi_A : X \to \{0,1\}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & se \;\; x \notin A \\ 1 & se \;\; x \in A. \end{cases}$$

Generalizando este conceito temos a seguinte definição.

Definição 1.3. *(Zadeh [99]) Define-se um* **conjunto fuzzy** *u sobre X como qualquer aplicação $u : X \to [0,1]$, sendo $u(\cdot)$ a função grau de pertinência do conjunto fuzzy u.*

Note que $u(x) \in [0,1]$ representa o grau de pertinência de x ao conjunto em questâo, e assim por abuso de linguagem dizemos *Conjunto Fuzzy u*. Por outro lado, se $u(x) = 1$ diremos que x pertence totalmente a u; se $0 < u(x) < 1$ diremos que x pertence parcialmente a u e se $u(x) = 0$ temos que x não pertence a u.

Outra forma alternativa de definir os conjuntos fuzzy é a seguinte: Um conjunto usual $A \subset X$ tem associado de maneira natural sua função indicatriz $\Psi_A : X \to \{0, +\infty\}$ a qual é definida por

$$\Psi_A(x) = \begin{cases} 0 & se \;\; x \in A \\ +\infty & se \;\; x \notin A, \end{cases}$$

e reciprocamente. Assim, podemos definir um conjunto fuzzy como qualquer aplicação $u : X \to [0, +\infty]$. Esta generalização tem sido usada principalmente pela escola francesa (veja Aubin [1]).

Observemos que as duas definições implicam na convexificação do conjunto imagem, isto é,

$$co\{0,1\} = [0,1]$$

e

$$co\{0,+\infty\} = [0,+\infty],$$

onde coA denota a envoltura convexa do conjunto A.

Também é interessante observar que a primeira extensão é motivada pela teoria da medida e a segunda pela análise convexa.

É importante salientar que é possível encontrar uma função injetora $F : [0,1] \to [0,+\infty]$, e consequentemente como conjuntos $[0,1]$ e $[0,+\infty]$ podem ser identificados, porém, com as estruturas que são adotadas tal identifição não é possível, isto é, onde a soma e produto por escalares positivos se respeitem. Assim, as duas extensões mencionadas acima serão diferentes. Agora, cada uma destas generalizações é valida e tem suas vantagens e desvantagens.

Daqui para frente quando falamos de conjuntos fuzzy estamos nos referindo a conjuntos fuzzy no sentido da Definição 1.3 introduzida por Zadeh.

Exemplo 1.4. *Voltemos ao Exemplo 1.1. Neste caso, nosso conjunto universo será* $\mathbb{R}$. *Consideremos a aplicação*

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & se \;\; x \in [-1,1] \\ 0 & se \;\; x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

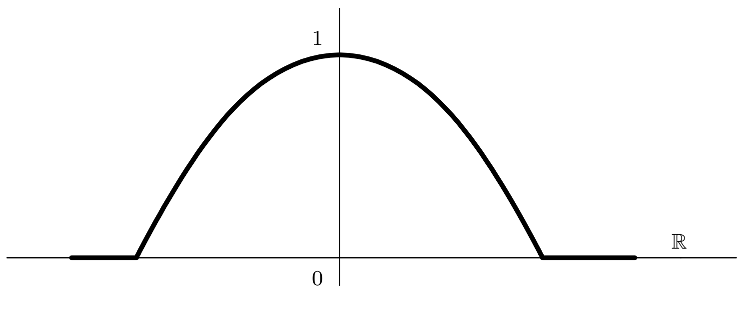

Figura 1.1: O conjunto fuzzy dos números reais próximos do zero.

É claro que $u(0) = 1$*, o qual significa que* $x = 0$ *pertence totalmente ao conjunto fuzzy* u *e cada vez que* x *esteja mais longe de zero seu grau de pertinência vai disminuindo simétricamente até anular-se fora do intervalo* $[-1, 1]$.

Com essa escolha se está aceitando que os elementos cuja distância a $x = 0$ *é maior do que* 1 *os consideramos definitivamente "longe" dele, isto é, "longe" de zero.*

É evidente que existe outros critérios diferentes de representar o mesmo conjunto fuzzy, por exemplo, definindo $u : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *como sendo* $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$*, também é uma função grau de pertinência do conjunto fuzzy dado.*

Logo, são infinitas as possíveis representações, mas a idéia central é que a função de pertinência tenha que refletir o melhor possível as características mais relevantes do conjunto fuzzy que desejamos representar.

Exemplo 1.5. *[12] Agora voltemos ao Exemplo 1.2. Para modelar a "pobreza", poderíamos utilizar qualquer indicador da mesma, como por exemplo, consumo de vitaminas, saneamento básico, qualidade de vida, etc. Vamos supor que a pobreza seja avaliada pelo nível de renda de cada indivíduo. Assim, se* $\mathbb{R}$ *é o conjunto de rendas e* $u : \mathbb{R} \to [0, 1]$*, então* $u(r)$ *indica o grau de pobreza do indivíduo com nível de renda* r*. Neste caso específico* u *pode ser representado por qualquer função decrescente que seja coerente com o fenômeno estudado. Seja, por exemplo,*

$$u(r) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^k & se \quad 0 < r < r_0 \\ 0 & se \quad r \geq r_0. \end{cases}$$

onde, k *é um parâmetro que fornece alguma característica do grupo,* r *é um parâmetro proporcional à renda do indivíduo e* r_0 *é a renda mínima a partir da qual os indivíduos não são mais diferenciados quanto à pobreza. Para maiores detalhes deste exemplo pode-se ver [12].*

1.2 Operações entre conjuntos fuzzy

Denotemos o conjunto de todas as funções características associadas aos subconjuntos de X por

$$\mathbf{2}^X := \{\chi_A \ / \ A \subset X\}.$$

Podemos dotar $\mathbf{2}^X$ com uma relação de ordem parcial $\leq$ como segue

$$\chi_A \leq \chi_B \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \forall x \in X : \chi_A(x) \leq \chi_B(x).$$

Claramente podemos ver que

$$\chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow A \subset B.$$

A seguir temos as propriedades de operações entre conjuntos, união, interseção, complemento, via a função característica. Isto, consequentemente, nos levará a definir as operações entre conjuntos fuzzy. Antes, denotaremos por $a \wedge b$ e $a \vee b$ o mínimo e o máximo, respectivamente, entre $a, b \in [0, 1]$.

Proposição 1.6. *Dados $\chi_A, \chi_B \in \mathbf{2}^X$ as seguintes propriedades são satisfeitas*

(a) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) \in \mathbf{2}^X$

(b) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) \in \mathbf{2}^X$

(c) $\chi_{A^C}(x) = 1 - \chi_A(x) \in \mathbf{2}^X$ *onde A^C denota o complemento de A.*

Demonstração: É uma consequência imediata da definição. ■

Agora procedemos a definir as operações entre conjuntos fuzzy, mais uma vez pensando como uma generalização do que acontece com a função característica acima descrito. Para isto denotemos a família de todos os conjuntos fuzzy sobre X por

$$\Im(X) = \{u \ / \ u : X \to [0, 1]\}.$$

Definição 1.7. *Uma relação de ordem parcial $\subseteq$ sobre $\Im(X)$ define-se como sendo*

$$u \subseteq v \Leftrightarrow u(x) \leq v(x), \ \ \forall x \in X$$

onde $u, v \in \Im(X)$.

Exemplo 1.8. *O seguinte gráfico é um exemplo da relação de ordem em $\Im(X)$.*

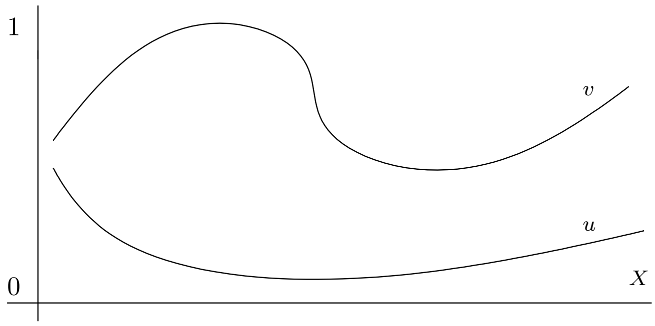

Figura 1.2: $u \subset v$

Definição 1.9. *Sejam u, v dois conjuntos fuzzy quaisquer de X. Então, a intersecção de u e v, denotado por $u \wedge v$, é definida por*

$$(u \wedge v)(x) = \inf\{u(x), v(x)\} \text{ para todo } x \in X$$

e a união de u e v, denotado por $u \vee v$, é definida por

$$(u \vee v)(x) = \sup\{u(x), v(x)\} \text{ para todo } x \in X.$$

Definição 1.10. *Seja u qualquer conjunto fuzzy de X. Então u^c, o complementar de u, é o conjunto fuzzy definido por*

$$u^c(x) = 1 - u(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Exemplo 1.11. *Seja $X = \{a, b, c, d\}$. Seja $u : X \to [0, 1]$ tal que*

$$u(a) = 0.3,\ u(b) = 0.9,\ u(c) = 0.4,\ u(d) = 0.6$$

e seja $v : X \to [0, 1]$ tal que

$$v(a) = 0.3,\ v(b) = 0.5,\ v(c) = 0.7,\ v(d) = 0.2.$$

Então,

$$(u \wedge v)(a) = 0.3,\ (u \wedge v)(b) = 0.5,\ (u \wedge v)(c) = 0.4,\ (u \wedge v)(d) = 0.2$$

e

$$(u \vee v)(a) = 0.3,\ (u \vee v)(b) = 0.9,\ (u \vee v)(c) = 0.7,\ (u \vee v)(d) = 0.6.$$

Também,

$$u^c(a) = 0.7,\ u^c(b) = 0.1,\ u^c(c) = 0.6,\ u^c(d) = 0.4.$$

1.3 Níveis de um conjunto fuzzy e o Teorema de Representação

Nesta seção define-se os níveis de um conjunto fuzzy, conceito que é bastante explorado para levar os conceitos e/ou estruturas matemáticas clássicas ao contexto fuzzy. Também, é dado o Teorema de Representação, conhecido como Teorema de Representação de Negoita e Ralescu, cuja importância é grande na teoria fuzzy, porque é através deste que pode-se relacionar a teoria clássica com a teoria fuzzy. Por exemplo, como veremos nos capítulos seguintes deste trabalho, uma maneira de definir e calcular a integral de uma multifunção fuzzy é usando o conceito de níveis e o Teorema de Representação.

Definição 1.12. *Sejam $u \in \Im(X)$ um conjunto fuzzy e $\alpha \in [0,1]$. Define-se o* **α-nível de** *u como sendo o conjunto*

$$[u]^\alpha = \{x \in X \ / \ u(x) \geq \alpha\}.$$

No caso em que X é um espaço topológico considera-se o 0-nível, chamado suporte do conjunto fuzzy u, como sendo

$$[u]^0 = \mathrm{supp}(u) := \overline{\{x \in X \ / \ u(x) > 0\}}, \tag{1.1}$$

onde $\overline{A}$, com $A \subset X$, denota o fecho de A. Neste trabalho consideraremos (1.1) se X for um espaço topológico.

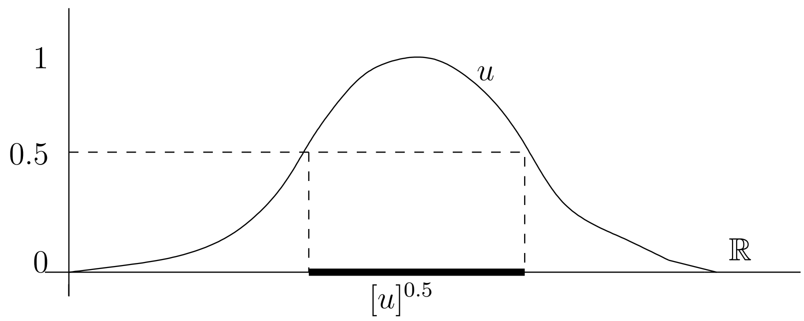

Figura 1.3: O 0.5-nível de um conjunto fuzzy.

Exemplo 1.13. *Sejam u, v conjuntos fuzzy sobre X como no Exemplo 1.11. Então*

$$[u]^\alpha = \begin{cases} X & se \quad 0 \leq \alpha \leq 0.3 \\ \{b,c,d\} & se \quad 0.3 < \alpha \leq 0.4 \\ \{b,d\} & se \quad 0.4 < \alpha \leq 0.6 \\ \{b\} & se \quad 0.6 < \alpha \leq 0.9 \\ \emptyset & se \quad 0.9 < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad e \quad [v]^\alpha = \begin{cases} X & se \quad 0 \leq \alpha \leq 0.2 \\ \{a,b,c\} & se \quad 0.2 < \alpha \leq 0.3 \\ \{b,c\} & se \quad 0.3 < \alpha \leq 0.5 \\ \{c\} & se \quad 0.5 < \alpha \leq 0.7 \\ \emptyset & se \quad 0.7 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Um forma equivalente de representar o suporte de um conjunto fuzzy é dada pela seguinte Proposição.

Proposição 1.14. *Seja X um espaço topológico e $u \in \Im(X)$, então*

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\leq 1} [u]^\alpha}.$$

Demonstração: Para sua demonstração ver [28]. ■

A seguir, apresentamos as principais propriedades de níveis de um conjunto fuzzy.

Proposição 1.15. *Sejam $u, v \in \Im(X)$, então*

(a) *$u = v$ se, e somente se, $[u]^\alpha = [v]^\alpha \;\; \forall\, \alpha \in [0,1]$;*

(b) *$[u]^0 \supset [u]^\alpha \supset [u]^\beta \;\; \forall\, 0 \leq \alpha \leq \beta$;*

(c) *Se u é semicontínua superior e $\alpha_n \uparrow \alpha \Rightarrow [u]^\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n}$;*

(d) *$[u]^\alpha \neq \emptyset \;\; \forall \alpha \in [0,1]$, é equivalente a $u(x) = 1$ para algum $x \in X$;*

(e) *$u \subseteq v \Leftrightarrow [u]^\alpha \subset [v]^\alpha \;\; \forall \alpha \in [0,1]$.*

Demonstração: Pode-se consultar [28], [55]. ■

Agora, uma pergunta interessante é: Dada uma família de subconjuntos não vazios de X, existe um conjunto fuzzy cujos níveis coincidem com a família dada?. A resposta é afirmativa para algumas famílias, isto é conhecido como Teorema de Representação ou Teorema de Representação de Negoita e Ralescu [61], cuja versão geral é a seguinte:

Teorema 1.16. *Sejam X um conjunto não vazio e $\{N_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ uma família de subconjuntos de X tais que* *(a)* $N_0 = X$;

(b) $\alpha \leq \beta \Rightarrow N_\beta \subset N_\alpha$;

(c) *Se* $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ..., \lim_{p\to\infty} \alpha_p = \alpha \Rightarrow N_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$;

Então existe um conjunto fuzzy $u : X \to [0,1]$, *definido por*

$$u(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] \;/\; x \in N_\alpha\},$$

tal que $[u]^\alpha = N_\alpha$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$.

Demonstração: Para a prova veja-se [61] pag. 27. ■

No Exemplo de aplicação a seguir, veremos uma forma de levar conceitos e propriedades da teoria clássica ao contexto fuzzy via o Teorema 1.16.

Exemplo 1.17. *Seja* $X = \mathbb{R}^n$ *o espaço Euclidiano n-dimensional. Define-se a soma de Minkowski por*

$$A + B := \{a + b \;/\; a \in A \text{ e } b \in B\}$$

para todo $A, B \subset X$. *Denotemos por* $\mathbb{F}(X)$ *a família de todos os conjuntos fuzzy* $u : X \to [0,1]$ *semicontínua superior. Então, dados* $u, v \in \mathbb{F}(X)$, *a família* $\{[u]^\alpha + [v]^\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ *satisfaz as condições do Terorema de Representação, pelo que existe um único conjunto fuzzy* w *tal que* $[w]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$. *Assim, podemos definir a soma de dois conjuntos fuzzy* u, v *sobre o espaço* $\mathbb{F}(X)$ *como sendo o único conjunto fuzzy* $w := u + v \in \mathbb{F}(X)$ *tal que* $[w]^\alpha = [u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$.

Como vemos, uma operação algébrica (soma) pode-se definir no espaço $\mathbb{F}(X)$ *usando o Teorema 1.16.*

1.4 Tipos especiais de conjuntos fuzzy

Nesta seção definimos alguns tipos especiais de conjuntos fuzzy que serão de utilidade em nosso trabalho.

Definição 1.18. *Um conjunto fuzzy* $u \in \Im(X)$ *é chamado* **normal** *se*

$$\exists x \in X : \; u(x) = 1.$$

Exemplo 1.19. *Dado um subconjunto $A \subset X$, sua função característica χ_A é um conjunto fuzzy normal.*

Definição 1.20. *Seja X um espaço vetorial. Um conjunto fuzzy $u \in \Im(X)$ é chamado* **convexo** *se o conjunto $[u]^\alpha$ é convexo para todo $\alpha \in [0,1]$.*

Exemplo 1.21. *Um conjunto fuzzy τ é chamado trapezoidal se existe $a < b < c < d \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\tau(x) := \begin{cases} 0 & se \;\; x \in]-\infty, a] \cup [d, \infty[, \\ \frac{x-a}{b-a} & se \;\; x \in [a,b], \\ \frac{x-d}{c-d} & se \;\; x \in [c,d], \\ 1 & se \;\; x \in [b,c]. \end{cases}$$

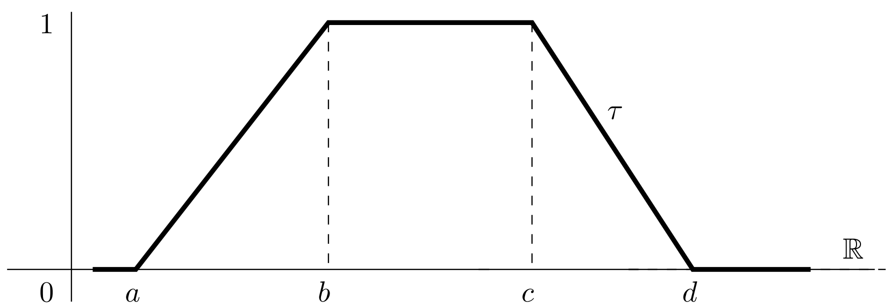

Figura 1.4: Conjunto fuzzy trapezoidal

Agora, para $\alpha \in [0,1]$ temos que

$$\begin{aligned} [\tau]^\alpha &= [b\alpha + (1-\alpha)a \; , \; c\alpha + (1-\alpha)d] \\ &= b\alpha + c\alpha + (1-\alpha)[a,d]. \end{aligned}$$

Então, $\eta \in \Im(\mathbb{R})$ é um conjunto fuzzy convexo.

Proposição 1.22. *Seja X um espaço vetorial. Um conjunto fuzzy $u \in \Im(X)$ é convexo se, e somente se,*

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\},$$

para todo $x, y \in [u]^0$ e todo $\lambda \in [0,1]$.

Demonstração: A prova acha-se em [54]. ■

Exemplo 1.23. *Se $u : X \to [0,1]$ é uma função convexa, i.e., se satifaz a relação*

$$\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in [0,1] : u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y),$$

então esta é um conjunto fuzzy convexo, mas a recíproca não é sempre válida como prova a seguinte figura.

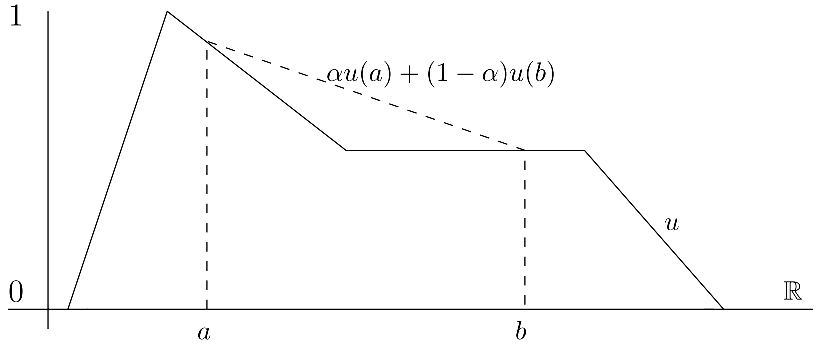

Figura 1.5: Um conjunto fuzzy convexo que não é uma função convexa.

Definição 1.24. *Seja X um espaço topológico. Um conjunto fuzzy $u \in \Im(X)$ é chamado* **compacto** *se $[u]^\alpha$ é compacto para todo $\alpha \in [0,1]$.*

Exemplo 1.25. *Um conjunto fuzzy triangular η é dado por*

$$\eta(x) := \begin{cases} 0 & se\ \ x \in]-\infty, a] \cup [c, \infty[\\ \frac{x-a}{b-a} & se\ \ x \in [a,b] \\ \frac{x-c}{b-c} & se\ \ x \in [b,c], \end{cases}$$

onde $a < b < c \in \mathbb{R}$.

Agora, para $\alpha \in [0,1]$ temos que

$$\begin{aligned} [\eta]^\alpha &= [b\alpha + (1-\alpha)a\ ,\ b\alpha + (1-\alpha)c] \\ &= b\alpha + (1-\alpha)[a,c]. \end{aligned}$$

Então, $\eta \in \Im(\mathbb{R})$ é um conjunto fuzzy compacto.

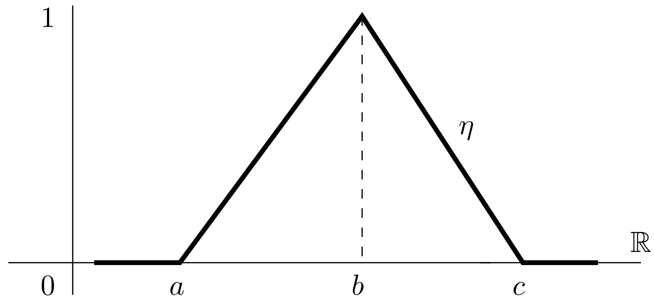

Figura 1.6: Conjunto fuzzy triangular

Proposição 1.26. *Seja X um espaço topológico. Um conjunto fuzzy $u \in \Im(X)$ é compacto se, e somente se, o suporte $[u]^0$ é compacto e $u : X \to [0,1]$ é semicontínua superior.*

Demonstração: Basta saber que um subconjunto fechado de um compacto é compacto. ∎

Existem outras caracterizações de conjuntos convexos e compactos que veremos mais na frente. Agora, um resultado muito utilizado é a seguinte versão particular do Teorema de Representação de Negoita e Ralescu.

Teorema 1.27. *([28]) Sejam X um espaço topológico e $\{N_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ uma família de subconjuntos de X tais que*

(*a*) *N_α é compacto para todo $\alpha \in [0,1]$*

(*b*) *$\alpha \leq \beta \Rightarrow N_\beta \subset N_\alpha$;*

(*c*) *Se $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ..., \lim_{p\to\infty} \alpha_p = \alpha \Rightarrow N_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$;*

Então existe um conjunto fuzzy $u : X \to [0,1]$, definido por

$$u(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] \;/\; x \in N_\alpha\},$$

tal que $[u]^\alpha = N_\alpha$ para todo $\alpha \in (0,1]$ e $[u]^0 \subset N_0$.

Demonstração: Para sua demonstração pode-se consultar [28].

Exemplo 1.28. *Consideremos $X = \mathbb{R}^n$ o espaço Euclidiano n-dimensional e denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a familia de todos os conjuntos fuzzy compactos de $\mathbb{R}^n$. Dados $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$*

a família $\{[u]^\alpha + [v]^\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$*, onde* $[u]^\alpha + [v]^\alpha$ *é a soma de Minkowski como no Exemplo 1.17, satisfaz as condições do Teorema 1.27, pelo que existe um único conjunto fuzzy* w *tal que* $[w]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$*. Assim, dado dois conjuntos fuzzy* $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *podemos definir a soma* $u + v$ *como sendo o único conjunto fuzzy* $w := u + v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *e teríamos que* $[w]^\alpha = [u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$*.*

Por outro lado, da mesma forma que a soma, podemos definir o producto por um escalar sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *através dos níveis de um conjunto fuzzy. Para isto, define-se*

$$\lambda A := \{\lambda a \ / \ a \in A\},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $A \subset X$*, e considera-se a família* $\{\lambda[u]^\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ *que também satisfaz as condições do Teorema de Representação.*

No Capítilo 3 estudaremos o espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *que é um espaço quasilinear.*

1.5 Operações algébricas sobre $\Im(X)$

É claro que se $u, v \in \Im(X)$, então não podemos esperar que as operações algébricas usuais entre funções sejam as adequadas sobre o espaço $\Im(X)$, se desejamos obter novamente um elemento de $\Im(X)$, já que, por exemplo, se somarmos ponto a ponto como é usual entre funções pode ocorrer que $(u+v)(x) = u(x) + v(x) \notin [0, 1]$. Agora como nos Exemplos 1.17 e 1.28, algumas classes de conjuntos fuzzy de X, como $\mathbb{F}(X)$ e $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, pode-se dotar de uma soma entre conjuntos fuzzy usando o Teorema de Representação de Negoita e Ralescu.

Mas, como definir a soma para o espaço $\Im(X)$?, a resposta a este problema passa pelo chamado Princípio de Extensão de Zadeh (ver [62], [73], [99]), o qual diz o seguinte: Se X_1, X_2 e Y são conjuntos não vazios e $f : X_1 \times X_2 \to Y$ é qualquer aplicação, então esta pode ser extendida ao contexto fuzzy como sendo

$$\hat{f} : \Im(X_1) \times \Im(X_2) \to \Im(Y),$$

onde

$$\hat{f}(u_1, u_2)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2)\in f^{-1}(y)} u_1(x_1) \wedge u_2(x_2) & \textit{se} \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \textit{se} \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

para cada $y \in Y$.

Para definir a soma e multiplicação por escalar sobre $\Im(X)$ usa-se o principio de extensão. Para isto precisa-se que o espaço universo possua uma estrutura linear.

Definição 1.29. *Seja X um espaço vetorial. Se consideramos $f : X \times X \to X$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, então esta induz uma soma sobre $\Im(X)$ tal que*

$$(u+v)(x) = \sup_{x_1+x_2=x} u(x_1) \wedge v(x_2),$$

para todo $x \in X$. Análogamente, se $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \Im(X)$ e consideramos $f : X \to X$ como sendo $f(x) = \lambda x$ então, usando o principio de extensão, temos o produto λu sobre $\Im(X)$ dado por

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\frac{x}{\lambda}) & se \quad \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(x) & se \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

O que justifica a definição das operações algébricas na forma como estabeleceu-se anteriormente, via o Principio de Extensão, é a relação com as operações de níveis como mostra a seguinte proposição.

Proposição 1.30. *Sejam X um espaço de Banach real, $u, v \in \mathcal{F}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, $u + v \in \mathcal{F}(X)$ e $\lambda u \in \mathcal{F}(X)$ são tais que:*

$$[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha \qquad [\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha,$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Demonstração: *Ver [28].* ■

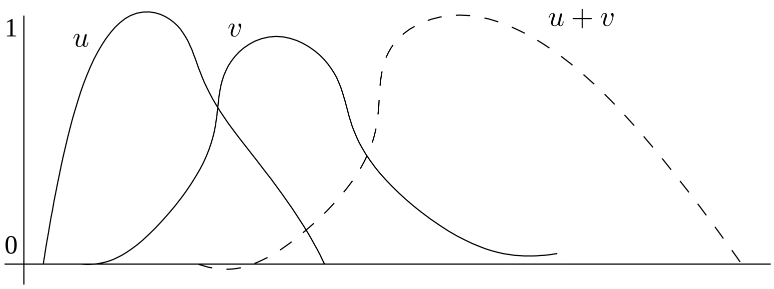

Figura 1.7: A soma de dois conjuntos fuzzy.

Note que no Exemplo 1.28 tinhamos visto que a família $\{[u]^\alpha + [v]^\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ satisfaz o Teorema de Representação e assim podemos ter uma soma sobre $\mathcal{F}(X)$, e segundo a Proposição anterior temos que esta forma de definir a soma coincide com a definição usando o Princípio de Extensão. Esta relação é fundamental, pois aproveitando a estrutura vetorial de X define-se a soma e o produto por escalar sobre $\mathcal{F}(X)$.

Exemplo 1.31. *Consideremos o conjunto fuzzy triangular η como no Exemplo 1.25 e o conjunto fuzzy trapezoidal τ como no Exemplo 1.21. Então*

$$\begin{aligned}
(\eta+\tau)(x) &= \sup_{x_1+x_2=x} \eta(x_1)\wedge\tau(x_2)\\
&= \sup\{\alpha\in[0,1] \ / \ x\in[\eta]^\alpha+[\tau]^\alpha\}\\
&= \sup\{\alpha\in[0,1] \ / \ x\in[2\alpha b+2(1-\alpha)a \ , \ \alpha(b+c)+(1-\alpha)(c+d)] \ \}\\
&= \begin{cases} 0 & se \ \ x\in]-\infty,2a]\cup[d+c \ , \infty[;\\ \frac{x-2a}{2b-2a} & se \ \ x\in[2a \ , 2b];\\ \frac{x-(d+c)}{b-d} & se \ \ x\in[b+c \ , d+c];\\ 1 & se \ \ x\in[2b,b+c]. \end{cases}
\end{aligned}$$

1.6 O espaço métrico $\mathcal{F}(X)$

Exitem muitas métricas sobre o espaço $\mathcal{F}(X)$ e a maioria destas são uma extensão da métrica de Hausdorff. Assim, nesta seção definimos a mética de Hausdorff, damos algumas propriedades e definiremos as métricas mais usuais no contexto fuzzy.

Seja (X,d) um espaço métrico. Denotaremos por $K(X)$ a classe de todos os subconjuntos compactos e não vazios de X, isto é,

$$K(X) := \{A\subset X \ / \ A \text{ é compacto e não vazio }\};$$

e por $K_C(X)$ a classe de todos os subconjuntos compactos, convexos e não vazios de X,isto é,

$$K_C(X) := \{A\in K(X) \ / \ A \text{ é convexo}\}.$$

A métrica de Hausdorff H sobre $K(X)$ é definida por

$$H(A,B) := \max\{d(A,B) \ , d(B,A)\},$$

onde

$$d(A,B) := \sup_{a\in A} d(a,B) \quad \text{e} \quad d(a,B) := \inf\{d(a,b) \ / \ b \in B\},$$

para todo $A, B \in K(X)$.

Exemplo 1.32. *Consideremos X como sendo o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^2$ e sejam $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| + |y| \leq 2\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|(x,y) - (1,0)\| \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|(x,y) - (-1,0)\| \leq 1\}$. Então, temos que $d(A,B) = \sqrt{5}-1$ e $d(B,A) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Por tanto, $H(A,B) = \sqrt{5}-1$.*

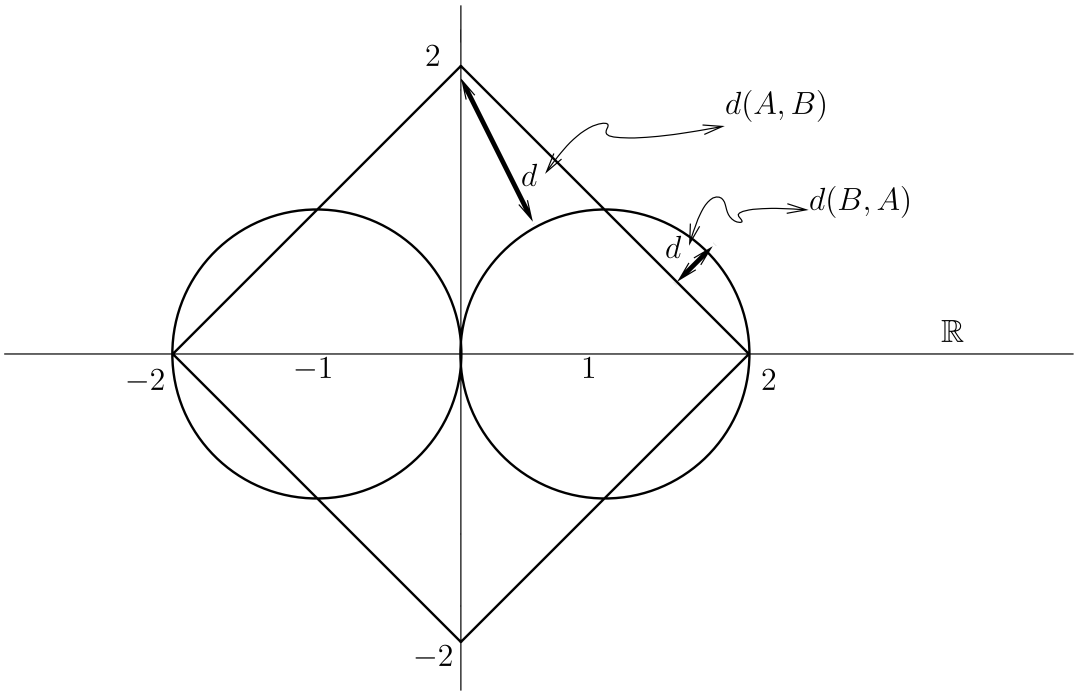

Figura 1.8: A distância de Hausdorff.

A seguir veremos sobre a completitude e separabilidade do espaço métrico $(K(X), H)$. Daqui na frente consideraremos X como sendo um espaço de Banach.

Proposição 1.33. *O espaço métrico $(K(X), H)$ é completo e separável. Alem disso, $K_C(X)$ é um subespaço fechado de $K(X)$.*

Demonstração: A sua demonstração pode-se achar em [21], ver também [53]. ■

Na seguinte Proposição damos algumas propriedades da métrica de Hausdorff.

Proposição 1.34. *Se* $A, A_1, B, B_1 \in K(X)$ *então*

(a) $H(tA, tB) = tH(A, B)$ *para todo* $t \geq 0$*;*

(b) $H(A + A_1, B + B_1) \leq H(A, B) + H(A_1, B_1)$*;*

(c) $H(A + C, B + C) = H(A, B)$ *para todo* $A, B \in K_C(X)$ *e* $C \in K(X)$*.*

Demonstração: Para sua demonstração consultar [14] e [69]. ■

Agora procedemos a introduzir algumas métricas sobre o espaço de todos os conjuntos fuzzy compactos $\mathcal{F}(X)$. Para isto denotemos por $\mathcal{F}_C(X)$ a família de conjuntos fuzzy compactos e convexos, isto é,

$$\mathcal{F}_C(X) := \{u \in \mathcal{F}(X) \ / \ u \text{ é convexo}\}.$$

Podemos extender H para $\mathcal{F}(X)$ como segue: A métrica do supremo definida por

$$D(u, v) := \sup_{\alpha \in [0,1]} H([u]^\alpha, [v]^\alpha)$$

para todo $u, v \in \mathcal{F}(X)$.

A L_p-métrica D_p é a classe de métricas para $1 \leq p < \infty$ definida por

$$D_p(u, v) := \left(\int_0^1 H([u]^\alpha, [v]^\alpha) d\alpha \right)^{1/p}$$

para todo $u, v \in \mathcal{F}(X)$.

Exemplo 1.35. *Consideremos o conjunto fuzzy triangular* η *com suporte* $supp(\eta) = [-1, 1]$ *e o conjunto fuzzy* u *definido por*

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & se \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & se \quad x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} D(u, \eta) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} H([u]^\alpha, [\eta]^\alpha) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} H\left([-\sqrt{1-\alpha}, \ \sqrt{1-\alpha} \ ], \ [-(1-\alpha), \ (1-\alpha)] \right) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} |\sqrt{1-\alpha} - (1-\alpha)| \\ &= 1/4. \end{aligned}$$

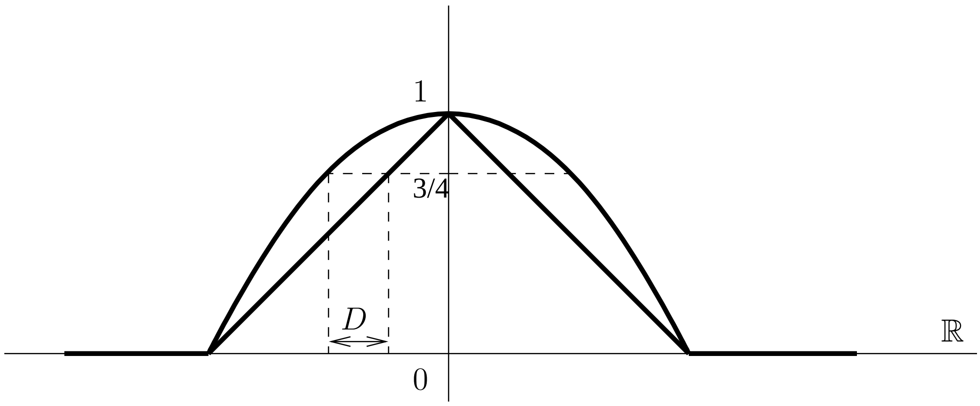

Figura 1.9: A métrica do supremo D.

Agora, usando a L_1-métrica D_1 temos que

$$\begin{aligned} D_1(u,\eta) &= \int_0^1 H([u]^\alpha, [\eta]^\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^1 H\big(\ [-\sqrt{1-\alpha},\ \sqrt{1-\alpha}\ \ ],\ [-(1-\alpha),\ (1-\alpha)]\ \big)\, d\alpha \\ &= \int_0^1 |\sqrt{1-\alpha} - (1-\alpha)| d\alpha \\ &= 1/6. \end{aligned}$$

A seguir, vejamos o que acontece com a completitude e a separabilidade do espaço $\mathcal{F}(X)$.

Proposição 1.36. *$(\mathcal{F}(X), D)$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Pode-se ver a Proposição 7.2.2 em [28]. ■

Como vimos, o espaço métrico dos conjuntos fuzzy compactos com a métrica do supremo D é completo, mas esta não é separável como veremos no exemplo a seguir. Porem, este espaço $\mathcal{F}(X)$ é separável com a L_p-métrica, mas perde a completitude.

Exemplo 1.37. *Seja $t \in (0,1]$ e considere a seguinte família de funções $u_t : \mathbb{R} \to [0,1]$, defnidas por:*

$$u_t(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \notin [0,1] \\ t & se \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & se \quad\quad x = 1. \end{cases}$$

Observemos que $[u_t]^0 = [0,1]$, $\forall t$, *mas se* $\alpha \in (0,1]$, *então*

$$[u_t]^\alpha = \begin{cases} [0,1] & se \quad \alpha \in (0,t] \\ \{1\} & se \quad \alpha \in (t,1]. \end{cases}$$

Logo, não é difícil ver que se $t_1 \neq t_2$ *então* $D(u_{t_1}, u_{t_2}) = 1$. *Isto nos diz que o espaço* $(\mathcal{F}(X), D)$ *não é separável.*

Proposição 1.38. *Para* $1 \leq p < \infty$, $(\mathcal{F}(X), D)$ *é um espaço métrico separável.*

Demonstração: Veja as Proposição 7.1.2 e 7.3.3 em [28]. ∎

Existem distintas métricas, como as dadas anteriormente, com as quais subecpaçõs de $\mathcal{F}(X)$ são completos e separáveis, pode-se ver [28].

1.7 Função suporte fuzzy

É conhecido a impotância do conceito de função suporte de um conjunto em análise. Este conceito foi generalizado ao contexto fuzzy por Puri e Ralescu [63]. Desde então esta ferramenta, função suporte fuzzy, bem sendo bastante utilizada com sucesso na teoria fuzzy, ver por exemplo [70], [74].

Nesta seção apresentamos o conceito de função suporte fuzzy e serão dadas suas propriedades principais.

Consideremos, nesta seção, o espaço de Banach Real X com norma $\|\cdot\|$, X^* seu dual topológico com norma $\|\cdot\|_*$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto real canônico entre X e X^*.

Definição 1.39. *Seja* A *um subconjunto não vazio de* X. *A* **função suporte** *de* A *é a função* $\sigma(A,\cdot)$ *definida em* X^* *com valores em* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *dada por*

$$\sigma(K, x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle \ / \ x \in K\}$$

Observação 1.40. *Se* $X = \mathbb{R}^n$, *seu dual é o mesmo* $\mathbb{R}^n$. *Assim, se* $A \subset \mathbb{R}^n$ *então*

$$\sigma(A, x) = \sup\{\langle x, y\rangle \ / \ y \in A\}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *é o produto interno usual em* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.41. *Seja $\mathcal{B}[\mathbf{0},1]$ a bola unitária centrada em $\mathbf{0} \in X$. Então a função suporte de $\mathcal{B}[\mathbf{0},1]$, $\sigma(\mathcal{B}[\mathbf{0},1],.)$, é definida como a função norma do dual, isto é,*

$$\sigma(\mathcal{B}[\mathbf{0},1],x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle \ / \ \|x\| \leq 1\} = \|x^*\|_*$$

para todo $x^* \in X^*$, e esta é contínua. Se $X = \mathbb{R}^n$, $\sigma(\mathcal{B}[\mathbf{0},1],x) = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, onde $\|.\|$ é a norma usual em $\mathbb{R}^n$.

Já que a função suporte é positivamente homogênea, isto é,

$$\sigma(A, \lambda x^*) = \lambda\sigma(A, x^*), \quad \forall\lambda \geq 0,$$

então a função suporte de um conjunto está completamente determinada na bola unitária $\mathcal{B}^*[\mathbf{0},1]$ de X^*, isto é, dado um subconjunto $A \subset X$ a sua função suporte é uma aplicação $\sigma(A,\cdot) : \mathcal{B}^*[\mathbf{0},1] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida, para cada $x^* \in \mathcal{B}^*[\mathbf{0},1]$, por

$$\sigma(A, x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle \ / \ x \in A\}.$$

Definição 1.42. *Seja $u \in \mathcal{F}(X)$, então definimos a* **função suporte fuzzy** *de u como uma aplicação $S_u : [0,1] \times \mathcal{B}^*[\mathbf{0},1] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que*

$$S_u(\alpha, x^*) = \sigma([u]^\alpha, x^*), \quad \forall(\alpha, x^*) \in [0,1] \times \mathcal{B}^*[\mathbf{0},1].$$

Proposição 1.43. *Sejam u, v conjuntos fuzzy sobre X. Então a função suporte $S_u(\cdot,\cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $S_u(\alpha, \lambda x^*) = \lambda S_u(\alpha, x^*) \ \ \forall\lambda \geq 0.$

(b) $S_u(\alpha, x_1^* + x_2^*) \leq S_u(\alpha, x_1^*) + S_u(\alpha, x_2^*)$ *para todo* $x_1^*, x_2^* \in \mathcal{B}^*[\mathbf{0},1]$.

(c) $S_{\lambda u}(\cdot,\cdot) = \lambda S_u(\cdot,\cdot) \ \ \forall\lambda \geq 0.$

(d) Para $u, v \in \mathcal{F}(X)$ *temos que* $S_{u+v}(\cdot,\cdot) = S_u(\cdot,\cdot) + S_v(\cdot,\cdot)$.

(e) Se $u \subseteq v$, *então* $S_u(\alpha, x^*) \leq S_v(\alpha, x^*) \quad \forall(\alpha, x^*) \in [0,1] \times \mathcal{B}^*[\mathbf{0},1]$. *Em particular, se* $u, v \in \mathcal{F}_C(X)$ *então*

$$u \subseteq v \Longleftrightarrow S_u(\alpha, x^*) \leq S_v(\alpha, x^*) \ \ \forall(\alpha, x^*) \in [0,1] \times \mathcal{B}^*[\mathbf{0},1].$$

Demonstração: Pode-se consultar [28]. ■

CAPÍTULO 2

Convolução e aproximação de conjuntos fuzzy

Em muitas situações é necessário a aproximação de um conjunto fuzzy normal compacto por conjuntos fuzzy com algumas propriedades adicionais, como por exemplo, conjuntos fuzzy contínuos ou conjuntos fuzzy Lipschitz, ver [28].

Nesse sentido, Colling e Kloeden [26] provaram que conjuntos fuzzy normais, compactos e convexos sobre $\mathbb{R}^n$ podem ser aproximados por conjuntos fuzzy contínuos na D-métrica. Também, em [70] Rojas-Medar, Bassanezi e Román-Flores provaram que o espaço de conjuntos fuzzy normais, compactos, convexos sobre $\mathbb{R}^n$, com a aplicação de nível Lipschitz é um subespaço denso no espaço de conjuntos fuzzy normais, compactos, convexos, com a aplicação de nível contínua em relação à D-métrica, o mesmo resultado é generalizado para espaços de Banach com aplicações que ajudam na caracterização da compacidade no espaço dos conjuntos fuzzy (ver [74]).

Neste Capítulo, apresentamos um novo tipo de aproximação, usando o conceito de convolução entre conjuntos fuzzy que introduzimos na primeira seção. Esta aproximação generaliza os resultados citados anteriormente de dois maneiras:

a) Consideramos o espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ de conjuntos fuzzy compactos e normais, sem nemhuma condição de convexidade;

b) Provamos a densidade de conjuntos fuzzy compactos, normais e Lipchitz em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ com respeito à D-métrica.

Por simplicidade todos os nossos resultados são considerados em $\mathbb{R}^n$, mas eles podem ser extendidos a um espaço de Banach real, reflexivo e separável X. Isto, porque o principal argumento utilizado é a compacidade da bola unitária em $\mathbb{R}^n$, e assim é suficiente considerar a topologia fraca sobre X e usar o mesmos argumentos.

Este Capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2.1, introduzimos o conceito de Convolução de conjuntos fuzzy e damos algumas notações; na Seção 2.2 apresentamos nossos resultados principais sobre a aproximação de conjuntos fuzzy e na Seção 2.3 provamos algumas relações entre convolução de números fuzzy e a integral de Choquet. Também daremos alguns exemplos.

Os resultados deste Capítulo foram publicados em [78].

2.1 Convolução de conjuntos fuzzy

Nesta seção introduzimos o conceito de Convolução de conjuntos fuzzy, como veremos, é uma nova forma de somar conjuntos fuzzy. Na verdade, é uma maneira de reescrever a soma de dois conjuntos fuzzy compactos. Também, daremos algumas propriedades e provaremos alguns resultados que serão de muita utilidade para provar nosso resultado principal, a aproximação de conjuntos fuzzy compactos normais por conjuntos fuzzy Lipchitz.

Como tinhamos visto no Capítulo 1, $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ denota a família de todos os conjuntos fuzzy compactos e normais, isto é,

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \to [0,1] \ / \ u \ \text{ é compacto e normal } \}.$$

Por outro lado, consideremos o subespaço fechado $\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ de todos os conjuntos fuzzy compactos convexos e normais, isto é,

$$\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \ / \ u \text{ é convexo}\}.$$

A seguinte definição foi dada em [87] em outro contexto.

Definição 2.1. *Sejam $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Então, definimos a* **convolução**, *$u \bigtriangledown v$, de u e v como*

$$(u \bigtriangledown v)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{u(y) \wedge v(x-y)\},$$

onde o simbolo $\wedge$ denota o mínimo sobre o intevalo $[0,1]$.

A definição anterior é bem conhecida em análise convexa, ver [79], [87]. Agora, um resultado usual é o seguinte:

Proposição 2.2. *Se $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, então $u \bigtriangledown v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Além disso,*

$$[u \bigtriangledown v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha,$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Demonstração: A prova é análoga às apresentadas em [79], [87]. ■

Observação 2.3. *Devido à Proposição 2.2, usando a convolução, podemos rescrever sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ as operações de soma e produto escalar por*

$$\begin{aligned} u + v &= u \bigtriangledown v \\ (\lambda \cdot u)(x) &= \begin{cases} u(\frac{x}{\lambda}) & se \;\; \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(x) & se \;\; \lambda = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

e, com tais definições, obtemos que $[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$ e $[\lambda \cdot u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha$, para todo $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in [0,1]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (para maiores detalhes sobre soma de níveis de funções ver [70], [87], [89]).

2.2 Densidade e convolução

Em geral, é conhecido que o espaço de funções lipschitz é um subespaço denso das funções contínuas com respeito à métrica uniforme. Nesta seção provaremos um tipo diferente de densidade, especificamente, provaremos que o espaço de funções Lipchitz é um subespaço denso do $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$.

Lembremos que $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é chamado Lipschitz (sobre seu suporte) com constante $M \in \mathbb{R}^+$ se $| u(x) - u(y) | \leq M \parallel x - y \parallel$ para cada $x, y \in [u]^0 = \mathrm{supp}(u)$.

Denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a família de todos os conjuntos fuzzy Lipschitz $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \ / \ u \text{ é Lipchitz } \}.$$

Observação 2.4. *Seja $A \in K(\mathbb{R}^n)$. Então $\chi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.*

O seguinte resultado é provado similarmente como em [87].

Teorema 2.5. *Sejam $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Se $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ então $u \bigtriangledown v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Primeiro, observemos que

$$\mathrm{supp}(u \bigtriangledown v) = \mathrm{supp}(u) + \mathrm{supp}(v).$$

Como,

$$(u \bigtriangledown v)(x) = \sup\{h_y(x) = u(y) \wedge v(x-y) \ / \ y \in \mathrm{supp}(u)\}, \tag{2.1}$$

então, para cada $y \in \mathrm{supp}(u)$, a função $h_y : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ é Lipschitz com constante M, pois

$$\begin{aligned} | h_y(x) - h_y(z) | &= | u(y) \wedge v(x-y) - u(y) \wedge v(z-y) | \\ &\leq | v(x-y) - v(z-y) | \\ &\leq K \parallel x - z \parallel . \end{aligned}$$

Finalmente, para provar que $u \bigtriangledown v$ é Lipschitz com constante M notemos que

$$h_y(z) - M \parallel x - z \parallel \leq h_y(x) \leq h_y(z) + M \parallel x - z \parallel,$$

e então, tomando supremo com respeito a y obtemos que

$$(u \bigtriangledown v)(z) - M \parallel x - z \parallel \leq (u \bigtriangledown v)(x) \leq (u \bigtriangledown v)(z) + M \parallel x - z \parallel ,$$

isto é,

$$| (u \bigtriangledown v)(x) - (u \bigtriangledown v)(z) | \leq M \parallel x - z \parallel .$$

Isto completa a prova. ∎

Observação 2.6. *Notemos que em [87] as funções u e v são consideradas com valores em $\overline{\mathbb{R}}$ e são Lipschitz sobre todo o domínio. Em nosso caso estamos trabalhando com funções com valores em $[0,1]$ as quais são Lipschitz só sobre seu suporte. Por outro lado, é importante observarmos que em (2.1) poderíamos supor, sem perda de generalidade, que $y \in supp(u)$ e, simultaneamente, $x - y \in supp(v)$. É claro que em qualquer outro caso temos $h_y(x) = 0$.*

Exemplo 2.7. *Consideremos a função $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & se \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & se \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & se \quad x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Então podemos ver que u não é uma função Lipschitz. Mas, se consideramos

$$v(x) = \begin{cases} x & se \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & se \quad x \notin [0,1], \end{cases}$$

temos que $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Agora,

$$[u]^\alpha = \begin{cases} [0,1] & se \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{2}, 1\right] & se \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

e

$$[v]^\alpha = [\alpha, 1], \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

Assim,

$$\begin{aligned} [u \bigtriangledown v]^\alpha &= \begin{cases} [0,1] + [\alpha, 1] & se \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{2}, 1\right] + [\alpha, 1] & se \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} [\alpha, 2] & se \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \left[\alpha + \frac{1}{2}, 2\right] & se \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, usando a seguinte formula

$$(u \bigtriangledown v)(x) = \sup\{\alpha \;/\; x \in [u \bigtriangledown v]^\alpha\},$$

obtemos que

$$(u \bigtriangledown v)(x) = \begin{cases} x & se \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & se \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ x - \frac{1}{2} & se \quad 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ 1 & se \quad \frac{3}{2} \leq x \leq 2, \end{cases}$$

é uma função Lipschitz com constante $M = 1$.

Nosso resultado principal nesta seção é o seguinte.

Teorema 2.8. *Para cada $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ existe uma sequência $(v_p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que $D(v_p\ , u) \leq 1/p$ para $p = 1, 2, \ldots ..$*

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ quaisquer. Denotemos por $\mathcal{B}[\mathbf{0}, 1/p]$ a bola fechada com raio $1/p$ centrada na origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Então, já que $\mathcal{B}[\mathbf{0}, 1/p]$ é compacta, temos que $\chi_{B[\mathbf{0},1/p]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ para cada $p \in \mathbb{N}$.

Agora, tomando $v_p := \ u \bigtriangledown \chi_{\mathcal{B}[\mathbf{0}\ ,1/p]}$, pelo Teorema 2.5, temos que $v_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\quad \forall p$. Além disso, utilizando propriedades da métrica de Hausdorff H e propriedades de nível de um conjunto fuzzy, para cada $\alpha \in [0, 1]$, temos que

$$\begin{aligned}
H([v_p]^\alpha, [u]^\alpha) &= H([u \bigtriangledown \chi_{\mathcal{B}[\mathbf{0}\ ,1/p]}]^\alpha\ , [u]^\alpha) \\
&= H([u]^\alpha + [\chi_{\mathcal{B}[\mathbf{0}\ ,1/p]}]^\alpha\ , [u]^\alpha) \\
&= H([u]^\alpha + \mathcal{B}[\mathbf{0}\ , 1/p]\ , [u]^\alpha + \{\mathbf{0}\}) \\
&\leq H(\mathcal{B}[\mathbf{0}\ , 1/p]\ , \{\mathbf{0}\}) \\
&= 1/p.
\end{aligned}$$

Assim, tomando o supremo em α, obtemos que $D(v_p\ , u) \leq 1/p$, para cada p, e a prova está completa. ■

Corolário 2.9. *$(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), D)$ é um subespaço denso de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$.*

Demonstração: É uma consequência imediata do Teorema anterior. ■

Observação 2.10. *Em um contexto mais restrito, Colling e Kloeden [26], usando técnicas totalmente diferentes, provaram que os conjuntos fuzzy contínuos são densos em $\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ com respeito à D-métrica.*

Observação 2.11. *Em [70] e [74] Rojas-Medar, Bassanezi e Román-Flores, usando os polinômios de Berstein multívoco, provaram que os conjuntos fuzzy com a aplicação de nível $\alpha \to [u]^\alpha$ Lipschitz são densos na classe de conjuntos fuzzy onde a aplicação de nível $\alpha \to [u]^\alpha$ é contínua.*

2.3 Convolução e integral de Choquet

Nesta seção, como uma aplicação de convolução de conjuntos fuzzy, provaremos a aditividade da integral de Choquet (ver [75]) sobre a classe $\mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ de números fuzzy em relação às medidas fuzzy algébricamente aditivas sobre $\mathbb{R}$.

Definição 2.12. *Seja Σ um σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma medida fuzzy sobre Σ é uma função $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ tal que*

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $A, B \in \Sigma,\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

Definição 2.13. *Uma medida fuzzy μ é chamada algebricamente aditiva sobre intervalos se*

$$\mu(I + J) = \mu(I) + \mu(J),$$

onde I, J são intervalos compactos e $I + J$ é definido por

$$I + J = [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d].$$

Exemplo 2.14. *(Medidas exteriores em $\mathbb{R}$). Para cada conjunto A de números reais consideremos a família enumerável $\{I_n\}$ de intervalos abertos que cobrem A, isto é, uma família para o qual $A \subseteq \bigcup I_n$, e para cada tal família consideremos a soma dos comprimentos do intervalo da família, isto é, $\sum l(I_n)$, onde $l(I_n)$ denota o comprimento do intervalo I_n. Definimos a medida exterior $m^*(A)$ de A como o ínfimo de todas tais somas, isto é,*

$$m^*(A) = \inf_{A \subseteq \bigcup I_n} \sum l(I_n).$$

Da definição de m^* segue imediatamente que $m^*(\emptyset) = 0$ e que se $A \subseteq B$, então $m^*(A) \leq m^*(B)$.

Portanto m^* é uma medida fuzzy definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Além disso, já que $m^*(I) = l(I)$ para qualquer intervalo limitado, então m^* é uma medida fuzzy algebricamente aditiva sobre $\mathbb{R}$. De fato, se $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ são dois intervalos limitados, então depois de alguns *cálculos provamos que* $I + J = [a + c, b + d]$*, e*

$$\begin{aligned} m^*(I+J) &= (b+d)-(a+c) \\ &= (b-a)+(d-c) \\ &= m^*(I)+m^*(J). \end{aligned}$$

Definição 2.15. *Seja* μ *uma medida fuzzy sobre* $\mathbb{R}$ *e* $f \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$*. Então, define-se a integral de Choquet de* f *com respeito a* μ *como*

$$(C)\int f d\mu = \int_0^1 \mu(\{x/\ f(x) \geq \alpha\})d\alpha = \int_0^1 \mu([f]^\alpha)d\alpha.$$

Teorema 2.16. *Seja* μ *uma medida fuzzy algebricamente aditiva sobre* $\mathbb{R}$ *e* $f, g \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$*. Então,*

$$(C)\int (f \bigtriangledown g)d\mu = (C)\int f d\mu + (C)\int g d\mu$$

$$(C)\int (\lambda \cdot f)d\mu = \lambda(C)\int f d\mu\ .$$

Demonstração: Se $f, g \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ então, devido à Proposição 2.2, $[f \bigtriangledown g]^\alpha$,$[f]^\alpha$ e $[g]^\alpha$ são intervalos limitados, convexos e fechados, para todo $\alpha \in [0, 1]$. Além disso,

$$[f \bigtriangledown g]^\alpha = [f]^\alpha + [g]^\alpha\ ,\ \forall\ \alpha \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Assim, devido a (2.2),

$$\begin{aligned} \mu([f \bigtriangledown g]^\alpha) &= \mu([f]^\alpha + [g]^\alpha) \\ &= \mu([f]^\alpha) + \mu([g]^\alpha) \end{aligned}$$

$\forall\ \alpha \in [0, 1]$.

Consequentemente,

$$\begin{aligned} (C)\int (f \bigtriangledown g)d\mu &= \int_0^1 \mu([f \bigtriangledown g]^\alpha)d\alpha \\ &= \int_0^1 \{\mu([f]^\alpha) + \mu([g]^\alpha)\}d\alpha \\ &= (C)\int f d\mu + (C)\int g d\mu. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\mu([\lambda \cdot f]^\alpha) = \mu(\lambda[f]^\alpha) = \lambda\mu([f]^\alpha).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(C)\int(\lambda \cdot f)d\mu &= \int_0^1 \mu([\lambda \cdot f]^\alpha)d\alpha \\ &= \int_0^1 \lambda\mu([f]^\alpha)d\alpha \\ &= \lambda\,(C)\int f d\mu.\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.17. *Se consideramos* u *e* v *como no Exemplo 2.7 e* $\mu = m^*$*, então temos que* $u, v \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ *e*

$$\begin{aligned}m^*([u \bigtriangledown v]^\alpha) &= \begin{cases} 2-\alpha & se \quad 0 \le \alpha \le \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}-\alpha & se \quad \frac{1}{2} < \alpha \le 1. \end{cases} \\ m^*([u]^\alpha) &= \begin{cases} 1 & se \quad 0 \le \alpha \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & se \quad \frac{1}{2} < \alpha \le 1 \end{cases} \\ m^*([v]^\alpha) &= 1-\alpha\ , \ \ \forall\, \alpha \in [0,1].\end{aligned}$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned}(C)\int(u \bigtriangledown v)d\mu &= \int_0^1 m^*([u \bigtriangledown v]^\alpha d\alpha \\ &= \int_0^{1/2}(2-\alpha)d\alpha + \int_{1/2}^1(3/2-\alpha)d\alpha \\ &= \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(C)\int u d\mu + (C)\int v d\mu &= \int_0^1 m^*([u]^\alpha)d\alpha + \int_0^1 m^*([v]^\alpha)d\alpha \\ &= \left[\int_0^{1/2} d\alpha + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2}d\alpha\right] + \left[\int_0^1(1-\alpha)d\alpha\right] \\ &= \frac{5}{4}\ .\end{aligned}$$

Observação 2.18. *Em [75] foi estudado a convergência de nível e a* Γ*-convergência de funções e suas relações. Em [76] são estabelecidas as condições minimais para a continuidade de medidas fuzzy com respeito à convergencia de Hausdorff sobre* $K(\mathbb{R}^n)$*. Estes trabalhos devem ser o ponto de partida para estudar a continuidade da integral de Choquet e as integrais não aditivas (ver [29]) com relação à convergência de nível de funções.*

CAPÍTULO 3

Espaço Quasilinear Fuzzy e Aplicações

Em [9] Assev apresenta uma nova forma de estudar o espaço de subconjuntos e o espaço de multifunções, enfraquecendo a exigência de linearidade na construção da análise funcional linear. Assev introduz os conceitos de espaços quasilineares e operadores quasilineares as quais nos permitem considerar espaços lineares e não lineares de subconjuntos e multifunções sob um mesmo ponto de vista. Ele estabelece propriedades e teoremas que são a contraparte "quasilinear" de alguns resultados em análise funcional linear e calculo diferencial em espaços de Banach. Este trabalho nos motivou para extender a noção de espaços quasilineares ao contexto fuzzy.

Neste Capítulo temos o propósito de apresentar o conceito de espaços quasilineares fuzzy e introduzir a teoria de operadores quasilineares fuzzy. Apresentaremos algumas propriedades sobre espaços quasilineares, bem como algumas proposições e teoremas relativos à teoria de operadores quasilineares fuzzy. Por exemplo, expomos a versão fuzzy do teorema de Banach-Steinhauss e introduzimos uma teoria de dualidade para operadores quasilineares fuzzy. Também apresentamos alguns resultados relacionados às inclusões diferenciais fuzzy. Outra aplicação desta nova teoria será dado no próximo capítulo, onde estudamos o cálculo diferencial fuzzy. Acreditamos que estes resultados representarão um papel importante na construção de uma análise fuzzy consistente.

Este capítulo está organizado como segue. Na Seção 3.1 damos os conceitos de espaços quasilineares normados e operadores quasilineares que foram introduzidos por Assev em [9]. Na Seção 3.2 estudamos o espaço quasilinear $\mathcal{F}(X)$ (espaço de todos os conjuntos fuzzy compactos definidos sobre X), suas métricas associadas a quasinormas e damos alguns resultados de convergência. Também estudamos operadores quasilineares definidos entre dois espaços quasilineares fuzzy, obtendo resultados que são análogos aos de análise funcional: a relação entre operadores quasilineares e a continuidade e o teorema de Banach-Steinhauss. Na Seção 3.3 estudamos os operadores quasilineares fuzzy, os quais são operadores sobre um espaço vetorial normado tomando valores em um espaço quasilinear fuzzy. Usando o Teorema de Representação devido a Negoita e Ralescu, definimos o adjunto de um operador quasilinear fuzzy. Finalmente, na Seção 3.4 obtemos alguns resultados sobre inclusões diferenciais fuzzy.

Os resultados deste Capítulo serão publicados em [42].

3.1 Espaços quasilineares

Definição 3.1. *Um conjunto $\mathcal{X}$ é chamado* ***espaço quasilinear*** *se uma relação de ordem parcial $\leqslant$, uma operação de soma algebrica $+$ e uma operação de multiplicação por números reais $\cdot$, são definidas sobre este e as seguintes propriedades são verificadas para quaisquer $x, y, z, v \in \mathcal{X}$ e números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

(q.1) $x \leqslant x$;

(q.2) $x \leqslant y,\ y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;

(q.3) $x \leqslant y,\ y \leqslant x \Rightarrow x = y$;

(q.4) $x + y = y + x$;

(q.5) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

(q.6) existe um elemento $\theta \in \mathcal{X}$, chamado elemento neutro, tal que $x + \theta = x$;

(q.7) $\alpha\cdot(\beta\cdot x) = (\alpha\cdot\beta)\cdot x$;

(q.8) $\alpha\cdot(x + y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y$;

(q.9) $1\cdot x = x$;

(q.10) $0\cdot x = \theta$;

(q.11) $(\alpha + \beta)\cdot x \leqslant \alpha\cdot x + \beta\cdot x$;

(q.12) $x \leqslant y$ *e* $z \leqslant v \Rightarrow x + z \leqslant y + v$;

(q.13) $x \leqslant y \Rightarrow \alpha \cdot x \leqslant \alpha \cdot y$.

Um elemento $x^{'} \in \mathcal{X}$ *é chamado* ***inverso*** *de* $x \in \mathcal{X}$, *se* $x + x^{'} = \theta$.

Notemos que, se um elemento $x^{'}$ existe, então este é único. Se cada elemento $x \in \mathcal{X}$ possui inverso $x^{'}$, então a relação de ordem em $\mathcal{X}$ está determinada pela igualdade e consequentemente $\mathcal{X}$ é um espaço linear (vetorial) com escalares em $\mathbb{R}$.

Definição 3.2. *Seja* $\mathcal{X}$ *um espaço quasilinear. A função real* $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *é chamada* **norma** *se as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer* $x, y \in \mathcal{X}$ *e qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$*:*
(n.1) $x \neq \theta \Rightarrow \|x\|_{\mathcal{X}} > 0$;
(n.2) $\|x + y\|_{\mathcal{X}} \leq \|x\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{\mathcal{X}}$;
(n.3) $\|\alpha \cdot x\|_{\mathcal{X}} = |\alpha| \; \|x\|_{\mathcal{X}}$;
(n.4) $x \leqslant y \Rightarrow \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \|y\|_{\mathcal{X}}$;
(n.5) se para qualquer $\epsilon > 0$, *existe um elemento* $x_\epsilon \in \mathcal{X}$ *tal que*

$$x \leqslant y + x_\epsilon \text{ e } \|x_\epsilon\|_{\mathcal{X}} \leq \epsilon \Rightarrow x \leqslant y.$$

Um espaço quasilinear $\mathcal{X}$ *com norma definida sobre este é chamado* ***espaço quasilinear normado***.

Se qualquer $x \in \mathcal{X}$ possui um elemento inverso $x^{'} \in \mathcal{X}$, então o conceito de um espaço quasilinear normado conincide com o conceito de um espaço linear real normado.

De agora em diante, denotaremos $(-1) \cdot x$ por $-x$.

Seja $\mathcal{X}$ um espaço quasilinear normado. A métrica de Hausdorff sobre $\mathcal{X}$ é definida por

$$H_{\mathcal{X}}(x, y) = \inf\{r \geq 0 \; / \; x \leqslant y + a_1^r, \;\; y \leqslant x + a_2^r, \;\; \|a_i^r\|_X \leqslant r, \; i = 1, 2\}.$$

Já que $x \leqslant y + (x - y)$ e $y \leqslant x + (y - x)$, a quantidade $H_{\mathcal{X}}(x, y)$ está definida para cada $x, y \in X$, e $H_{\mathcal{X}}(x, y) \leq \|x - y\|_{\mathcal{X}}$. Temos que a função $H_{\mathcal{X}}(x, y)$ satisfaz todos os axiomas de uma métrica.

A prova do seguinte Lema é uma consequência da definição da métrica de Hausdorff e dos axiomas de espaços quasilineares.

Lema 3.3. *As operações de soma* $+$, *a de multiplicação por um número real e a norma* $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ *são contínuas com respeito à métrica de Hausdorff* $H_{\mathcal{X}}$.

Um exemplo interessante de espaço quasilinear normado é o seguinte: Seja X um espaço linear real normado. Como tinhamos denotado na seção 1.6, $K(X)$ é o espaço de todos os subconjuntos fechados, limitados e não vazios de X.

As operações de soma algébrica e a multiplicação por um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ são dados por

$$A + B = \{a + b \;/\; a \in A,\; b \in B\}, \quad \alpha A = \{\alpha a \;/\; a \in A\}.$$

O espaço $K(X)$, com a relação de ordem parcial dada pela inclusão e as operações de soma e produto escalar definidas acima, satisfazem as condições $(q.1) - (q.13)$. A norma em $K(X)$ é dado por $\|A\|_K = \sup_{a\in A} \|a\|$. Consequentemente $K(X)$ e $K_C(X)$ são espaços quasilineares normados. Neste caso a métrica de Hausdorff é definida como usualmente

$$H(A, B) = \inf\{r \geq 0/ \; A \subset B + r\mathcal{B}[\mathbf{0}, 1],\; B \subset A + r\mathcal{B}[\mathbf{0}, 1]\},$$

onde $\mathcal{B}[x, 1]$ é a bola fechado de raio 1 centrada em $x \in X$, $\mathcal{B}[x, r] = \{y \in X/ \;\; \|x - y\| \leq r\}$.

Definição 3.4. *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dois espaços quasilineares. Uma aplicação $\Gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é chamada **operador quasilinear** se satisfaz as seguintes condições:*
(O.1) $\Gamma(\lambda x) = \lambda\Gamma(x), \;\; \forall\lambda \in \mathbb{R}$,
(O.2) $\Gamma(x + y) \leqslant \Gamma(x) + \Gamma(y), \;\; \forall x, y \in \mathcal{X}$,
(O.3) $x \leqslant y \Rightarrow \Gamma(x) \leqslant \Gamma(y)$.

*Um operador quasilinear $\Gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é chamado **limitado** se existe um $k > 0$ tal que*

$$\|\Gamma(x)\|_{\mathcal{Y}} \leq k\|x\|_{\mathcal{X}}, \;\; \forall x \in \mathcal{X}.$$

Denotaremos por $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ o espaço de todos os operadores quasilineares e limitados de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$. Escrevemos $\Gamma_1 \leqslant \Gamma_2$ se $\Gamma_1(x) \leqslant \Gamma_2(x), \;\; \forall x \in \mathcal{X}$. A multiplicação por um número real é definido sobre $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ pela equação $(\lambda\Gamma)(x) = \lambda\Gamma(x)$. Além disso, a soma algébrica sobre $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é definido por $(\Gamma_1 + \Gamma_2)(x) = \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)$. Com estas operações, $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é um espaço quasilinear.

Uma norma sobre $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é dado por

$$\|\Gamma\|_L = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|\Gamma(x)\|_{\mathcal{Y}}.$$

Consequentemente, $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é um espaço quasilinear normado.

3.2 Espaço quasilinear fuzzy

Seja X um espaço de Banach. Lembremos que $\mathcal{F}(X)$ denota o espaço de todos os conjuntos fuzzy compactos e $\mathcal{F}_C(X)$ o espaço de todos os conjuntos fuzzy compactos e convexos.

Uma relação de ordem parcial $\subseteq$ sobre $\mathcal{F}(X)$ é definido (ver seção 1.2) por

$$u \subseteq v \Leftrightarrow u(x) \leq v(x), \quad \forall x \in X \Leftrightarrow [u]^\alpha \subset [v]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0,1], \tag{3.1}$$

As operações de soma algébrica e multiplicação por um número real $\lambda \in \mathbb{R}$ sobre $\mathcal{F}(X)$ são definidos (veja a Seção 1.5) por

$$(u+v)(x) = \sup_{y \in Y} \min\{u(y), v(x-y)\} \quad \text{e} \quad (\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\frac{x}{\lambda}) & \text{se } \lambda \neq 0, \\ \chi_{\{0\}}(x) & \text{se } \lambda = 0, \end{cases}$$

respectivamente. Com tais definições obtemos que $[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$ e $[\lambda u]^\alpha = \lambda [u]^\alpha$, para todo $u, v \in \mathcal{F}(X)$, $\alpha \in [0,1]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

O espaço $\mathcal{F}(X)$ com a soma, multiplicação por um número real e a relação de ordem parcial definida em (3.1) é um espaço quasilinear com elemento neutro $\chi_{\{0\}}$.

Podemos considerar diversas normas sobre $\mathcal{F}(X)$, tais como

$$\|u\|_\infty = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \|[u]^\alpha\|_K$$

e

$$\|u\|_1 = \int_0^1 \|[u]^\alpha\|_K d\alpha.$$

A métrica de Hausdorff que provém da norma $\|\cdot\|_\infty$, é dado por

$$D(u,v) = \inf\{r \geq 0/\ u \subseteq v + w_1^r,\ v \subseteq u + w_2^r,\ w_i \in \mathcal{F}(X),\ \|w_i^r\|_\infty \leq r,\ i = 1,2\},$$

ou equivalentemente,

$$D(u,v) = \inf\{r \geq 0/\ u \subseteq v + r\omega,\ v \subseteq u + r\omega\},$$

onde $\omega \in \mathcal{F}(X)$ é o conjunto fuzzy compacto definido por

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathcal{B}[\mathbf{0}, 1], \\ 0 & \text{se } x \notin \mathcal{B}[\mathbf{0}, 1]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Também, podemos escrever D como segue,

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} H([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Para a norma $\| \cdot \|_1$, a métrica de Hausdorff associada é dada por

$$D_1(u, v) = \inf\{r \geq 0/\ u \subseteq v + w_1^r,\ v \subseteq u + w_2^r,\ w_i \in \mathcal{F}(X),\ \|w_i^r\|_1 \leq r,\ i = 1, 2\}.$$

Usando o α-nível de u e v, D_1 pode ser equivalentemente expressado como

$$D_1(u, v) = \int_0^1 H([u]^\alpha, [v]^\alpha) d\alpha.$$

O espaço $\mathcal{F}(X)$ extende $K(X)$ no sentido que, para cada $A \in K(X)$, sua função característica χ_A pertence a $\mathcal{F}(X)$. Claramente se $A, B \in K(X)$, então

$$D(\chi_A, \chi_B) = D_1(\chi_A, \chi_B) = H(A, B).$$

Daqui em diante, o espaço $\mathcal{F}(X)$ com a norma $\| \cdot \|_{\mathcal{F}(X)}$ (onde $\| \cdot \|_{\mathcal{F}(X)}$ é uma das normas dadas anteriormente ou quaisquer outra), será chamado **espaço quasilinear fuzzy normado**. A métrica de Hausdorff que provém da norma $\| \cdot \|_{\mathcal{F}(X)}$ será denotado por $D(\cdot\ , \cdot)$.

Lema 3.5. *Seja $\mathcal{F}(X)$ um espaço quasilinear fuzzy normado e sejam $u_0,\ v_0,\ u_n,\ v_n,\ z_n \in \mathcal{F}(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

(*a*) *Suponhamos que $u_n \to u_0$ e $v_n \to v_0$. Se $u_n \subseteq v_n$, $\forall n \geq n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, então $u_0 \subseteq v_0$;*

(*b*) *Suponhamos que $u_n \to u_0$ e $z_n \to u_0$. Se $u_n \subseteq v_n \subseteq z_n$, $\forall n \geq n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, então $v_n \to u_0$;*

(*c*) *Suponhamos que $u_n + v_n \to u_0$ e $v_n \to \chi_{\{0\}}$, então $u_n \to u_0$.*

Demonstração: (a) Se $u_n \to u_0$ e $v_n \to v_0$, então para qualquer $\epsilon > 0$ existe um N tal que para quaisquer $n \geq N$ existem elementos $a_n^\epsilon, b_n^\epsilon \in \mathcal{F}(X)$, com $\|a_n^\epsilon\|_{\mathcal{F}(X)} \leq \epsilon$ e $\|b_n^\epsilon\|_{\mathcal{F}(X)} \leq \epsilon$, tais que

$$u_0 \subseteq u_n + a_n^\epsilon \quad \text{e} \quad v_n \subseteq v_0 + b_n^\epsilon.$$

Desta maneira,

$$u_0 \subseteq v_0 + a_n^\epsilon + b_n^\epsilon$$

para $n \geq N$.

Já que

$$\|a_n^\epsilon + b_n^\epsilon\|_{\mathcal{F}(X)} \leq \|a_n^\epsilon\|_{\mathcal{F}(X)} + \|b_n^\epsilon\|_{\mathcal{F}(X)} \leq 2\epsilon,$$

de (n.5) segue que $u_0 \subseteq v_0$. As demonstrações de (b) e (c) são análogas. ∎

Lema 3.6. *Sejam $\mathcal{F}(X)$ e $\mathcal{F}(Y)$ dois espaços quasilineares fuzzy. Se $\Psi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ é um operador quasilinear, então $\Psi(\chi_{\{0\}}) = \chi_{\{0\}}$.*

Demonstração: Usando (q.10) obtemos $0 \cdot \chi_{\{0\}} = \chi_{\{0\}}$. Logo, como Ψ é um operador quasilinear, de (O.1) temos que $\Psi(\chi_{\{0\}}) = \Psi(0 \cdot \chi_{\{0\}}) = 0 \cdot \Psi(\chi_{\{0\}}) = \chi_{\{0\}}$. ∎

Lema 3.7. *Um operador quasilinear $\Psi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ é limitado se, e somente se, este é contínuo em $\chi_{\{0\}} \in \mathcal{F}(X)$.*

Demonstração: Primeiramente suponhamos que o operador Ψ é limitado. Então existe um $k > 0$ tal que

$$\|\Psi(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} \leq k\|u\|_{\mathcal{F}(X)}, \quad \forall u \in \mathcal{F}(X).$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, se

$$D(u, \chi_{\{0\}}) = \|u\|_{\mathcal{F}(X)} < \delta = \epsilon/k,$$

então

$$D(\Psi(u), \Psi(\chi_{\{0\}})) = \|\Psi(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} \leq k\|u\|_{\mathcal{F}(X)} < k\delta = \epsilon,$$

e consequentemente Ψ é contínua em $\chi_{\{0\}}$. Agora, suponhamos que Ψ é um operador quasilinear contínuo em $\chi_{\{0\}} \in \mathcal{F}(X)$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $D(u, \chi_{\{0\}}) = \|u\|_{\mathcal{F}(X)} < \delta$ implica

$$D(\Psi(u), \Psi(\chi_{\{0\}})) = D(\Psi(u), \chi_{\{0\}}) = \|\Psi(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} < \epsilon.$$

Assim, para quaisquer $u \in \mathcal{F}(X)$,

$$\left\|\Psi\left(\frac{\delta u}{2\|u\|_{\mathcal{F}(X)}}\right)\right\|_{\mathcal{F}(Y)} = \frac{\delta}{2\|u\|_{\mathcal{F}(X)}}\|\Psi(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} < \epsilon,$$

então,

$$\|\Psi(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} < \frac{2\epsilon}{\delta}\|u\|_{\mathcal{F}(X)},$$

e portanto Ψ é limitado. ■

Lema 3.8. *Seja $\Psi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ um operador quasilinear fuzzy. Se Ψ é contínuo em $\chi_{\{0\}} \in \mathcal{F}(X)$, então Ψ é uniformemente contínuo sobre $\mathcal{F}(X)$.*

Demonstração: Suponhamos que Ψ é contínuo em $\chi_{\{0\}}$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $\|u\|_{\mathcal{F}(X)} < \delta$, então $\|\Psi(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} < \epsilon$. Dado $u_0 \in \mathcal{F}(X)$, se $D(u, u_0) < \delta$, então existem $w_1, w_2 \in \mathcal{F}(X)$ tais que

$$\|w_i\|_{\mathcal{F}(X)} \leq \delta, \quad i = 1, 2, \quad \text{e} \quad u \subseteq u_0 + w_1 \ , \quad u_0 \subseteq u + w_2.$$

Como Ψ é um operador quasilinear, segue que

$$\Psi(u) \subseteq \Psi(u_0) + \Psi(w_1) \;\; \text{e} \;\; \Psi(u_0) \subseteq \Psi(u) + \Psi(w_2).$$

Já que $\|w_i\|_{\mathcal{F}(X)} < \delta$, então $\|\Psi(w_i)\|_{\mathcal{F}(Y)} < \epsilon$, $i = 1, 2$, e desta maneira $D(\Psi(u), \Psi(u_0)) < \epsilon$.
■

Exemplo 3.9. *Sejam X e Y dois espaços de Banach. Se $f : X \to Y$ é uma função, sua Extensão de Zadeh (ver [62], [73]), $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$, é definido por*

$$\hat{f}(u)(x) = \begin{cases} \sup\limits_{y \in f^{-1}(x)} u(y) & \mathit{se} \quad f^{-1}(x) \neq \emptyset, \\ \\ 0 & \mathit{se} \quad f^{-1}(x) = \emptyset. \end{cases}$$

Se f é contínua, então $\hat{f}$ está bem definida (ver [73]) e

$$[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha), \quad \forall \alpha \in [0,1], \;\; \forall u \in \mathcal{F}(X).$$

Agora, suponhamos que f é linear. Então, $\hat{f}$ é um operador quasilinear fuzzy e da continuidade de f segue que $\hat{f}$ é limitado. Consequentemente, do Lema 3.7 e Lema 3.8, $\hat{f}$ é uniformemente contínua.

O espaço $L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ de todos os operadores quasilineares e limitados de $\mathcal{F}(X)$ em $\mathcal{F}(Y)$, com a norma definida por

$$\|\Psi\|_L = \sup_{\|u\|_{\mathcal{F}(X)}=1} \|\Psi(u)\|_{\mathcal{F}(Y)},$$

é um espaço quasilinear normado.

A seguir são dados algumas propriedades de operadores quasilineares limitados.

Lema 3.10. (a) *Qualquer elemento* $\Psi \in L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ *satisfaz a condição de Lipschitz com constante* $\|\Psi\|_L$*;*

(b) *Se* $\Psi_1 \in L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ *e* $\Psi_2 \in L(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(Z))$*, então o operador* $\Psi = \Psi_2 \circ \Psi_1$ *está no espaço* $L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Z))$*.*

Demonstração: Já que $\Psi \in L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ então

$$\begin{aligned} \|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{\mathcal{F}(Y)} &\leq \|\Psi(u-v)\|_{\mathcal{F}(Y)} \\ &\leq \|\Psi\|_L \|u-v\|_{\mathcal{F}(X)}. \end{aligned}$$

Portanto Ψ é Lipchitz com constante $\|\Psi\|_L$.

Agora para provarmos a parte (b), tomemos $u, v \in \mathcal{F}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ quaisquer. Então, se $\Psi_1 \in L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$, de $(O.1)$ e $(O.2)$ da Definição 3.4, temos que

$$\Psi_1(\lambda u + v) \subseteq \lambda \Psi_1(u) + \Psi_1(v). \tag{3.3}$$

Mas, $\Psi_2 \in L(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(Z))$, então, da condição $(O.1)$, $(O.2)$ e $(O.3)$ da Definição de operador quasilinear e de (3.3), temos que

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda u + v) &= \Psi_2 \circ \Psi_1(\lambda u + v) \\ &= \Psi_2(\Psi_1(\lambda u + v)) \\ &\subseteq \Psi_2(\lambda \Psi_1(u) + \Psi_1(v)) \\ &\subseteq \lambda \Psi_2(\Psi_1(u)) + \Psi_2(\Psi_1(v)) \\ &= \lambda \Psi_2 \circ \Psi_1(u) + \Psi_2 \circ \Psi_1(v). \end{aligned}$$

Além disso, se $u \subseteq v$ então

$$\Psi_2 \circ \Psi_1(u) = \Psi_2(\Psi_1(u)) \subseteq \Psi_2(\Psi_1(v)).$$

Donde segue que $\Psi = \Psi_2 \circ \Psi_1$ é um operador quasilinear. Agora, como Ψ_1 e Ψ_2 são limitados, existem $k_1, k_2 > 0$ tais que,

$$\|\Psi_1(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} \leq k_1 \|u\|_{\mathcal{F}(X)}, \quad \forall u \in \mathcal{F}(X)$$

e

$$\|\Psi_1(v)\|_{\mathcal{F}(Z)} \leq k_2 \|v\|_{\mathcal{F}(Y)}, \quad \forall v \in \mathcal{F}(Y).$$

Segue daí que,

$$\begin{aligned} \|\Psi_2 \circ \Psi_1(u)\|_{\mathcal{F}(Z)} &\leq k_2 \|\Psi_1(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} \\ &\leq k_1 k_2 \|u\|_{\mathcal{F}(X)}, \quad \forall u \in \mathcal{F}(X), \end{aligned}$$

e assim Ψ é limitado. Portanto, $\Psi \in L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Z))$. ■

Das propriedades de limite temos o seguinte resultado.

Lema 3.11. *Suponhamos que a sequência $\{\Psi_n\} \in L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ converge em cada ponto $u \in \mathcal{F}(X)$. Então*

$$\Psi(u) = \lim_{n \to +\infty} \Psi_n(u)$$

é um operador quasilinear.

Demonstração: É imediata das propriedades de limite. ■

Definimos a função $\varphi_\omega : [0, +\infty) \to \mathcal{F}(Y)$ por $\varphi_\omega(t) = t\omega$, onde $\omega = \chi_{\mathcal{B}[\mathbf{0},1]}$, é a função característica da bola fechada de raio 1 centrada em $0 \in Y$. Esta função satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} u &\subseteq \varphi_\omega(\|u\|_{\mathcal{F}(Y)}), \\ t \leq s &\Rightarrow \varphi_\omega(t) \subseteq \varphi_\omega(s), \\ \varphi_\omega(t+s) &= \varphi_\omega(t) + \varphi_\omega(s). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Lema 3.12. *O operador $\Theta : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$, definido por*

$$\Theta(u) = \varphi_\omega(\|u\|_{\mathcal{F}(X)})$$

pertence a $L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$.

Demonstração: Sejam $u, v \in \mathcal{F}(X)$ tais que $u \subseteq v$, então $\|u\|_{\mathcal{F}(X)} \leq \|v\|_{\mathcal{F}(X)}$. Por (3.4), temos que

$$\varphi_\omega(\|u\|_{\mathcal{F}(X)}) \subseteq \varphi_\omega(\|v\|_{\mathcal{F}(X)})$$

e

$$\varphi_\omega(\|u+v\|_{\mathcal{F}(X)}) \subseteq \varphi_\omega(\|u\|_{\mathcal{F}(X)}) + \varphi_\omega(\|v\|_{\mathcal{F}(X)}).$$

Também temos que $\varphi_\omega(\|\lambda u\|_{\mathcal{F}(X)}) = |\lambda|\varphi_\omega(\|u\|_{\mathcal{F}(X)})$. Já que, $\omega = -\omega = (-1)\omega$, segue que

$$\varphi_\omega(\|\lambda u\|_{\mathcal{F}(X)}) = \lambda\varphi_\omega(\|u\|_{\mathcal{F}(X)}).$$

Consequentemente, $\Theta(u)$ é um operador quasilinear de $\mathcal{F}(X)$ em $\mathcal{F}(Y)$. Agora,

$$\begin{aligned} \|\Theta(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} &= \|\varphi_\omega(\|u\|_{\mathcal{F}(X)})\|_{\mathcal{F}(Y)} \\ &= \| \, \|u\|_{\mathcal{F}} \, \omega\|_{\mathcal{F}} \\ &= \|\omega\|_{\mathcal{F}(Y)}\|u\|_{\mathcal{F}(X)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\Theta \in L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$. ■

Observação 3.13. (a) $\|\Theta\|_L = 1$;

(b) *Se* $\|\Psi\|_L \leq \|\Theta\|_L$, *então* $\Psi \leqslant \Theta$;

(c) $\Psi \leqslant \|\Psi\|_L \cdot \Theta$.

A métrica de Hausdorff sobre $L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ é dada por

$$\begin{aligned} H_L(\Psi_1, \Psi_2) \ = \inf\{ \ & r \geq 0 \ / \ \Psi_1 \leqslant \Psi_2 + \Psi_1^r, \ \Psi_2 \leqslant \Psi_1 + \Psi_2^r, \\ & \Psi_i^r \in L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)), \ \|\Psi_i^r\|_L \leq r, \ i = 1, 2\}, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$H_L(\Psi_1, \Psi_2) = \inf\{r > 0 : \Psi_1 \leqslant \Psi_2 + r\Theta \ , \ \Psi_2 \leqslant \Psi_1 + r\Theta\}.$$

Teorema 3.14. *Se* $(\mathcal{F}(Y), D)$ *é um espaço métrico completo, então o espaço quasilinear normado* $(L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)), H_L)$ *é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y))$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um N tal que para quaisquer $n, m \geq N$ existem $\Psi_\epsilon^{n,m}, \Psi_\epsilon^{m,n}$ satisfazendo

$$\Psi_n \leqslant \Psi_m + \Psi_\epsilon^{n,m}, \;\; \Psi_m \leqslant \Psi_n + \Psi_\epsilon^{m,n}, \;\; \|\Psi_\epsilon^{n,m}\|_L \leq \epsilon, \;\; \|\Psi_\epsilon^{m,n}\|_L \leq \epsilon.$$

Consequentemente, $D(\Psi_n(u), \Psi_m(u)) \leq \epsilon\|u\|_{\mathcal{F}(X)}$, para quaisquer $u \in \mathcal{F}(X)$. Assim, a sequência $\{\Psi_n(u)\}$ é de Cauchy sobre $\mathcal{F}(Y)$. Agora, já que $\mathcal{F}(Y)$ é completo, existe um elemento $\Psi(u) \in \mathcal{F}(Y)$ tal que

$$\Psi(u) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(u).$$

Do Lema 3.11, temos que Ψ é um operador quasilinear de $\mathcal{F}(X)$ em $\mathcal{F}(Y)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\Psi_n(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} &\leq \|\Psi_m(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} + \|\Psi_\epsilon^{n,m}(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} \\ &\leq (\|\Psi_m\|_L + \epsilon)\|u\|_{\mathcal{F}(X)}, \end{aligned}$$

para quaisquer $n, m \geq N$. Fixando $m \geq N$ e considerando o limite quando $n \to \infty$ obtemos que

$$\|\Psi(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} \leq (\|\Psi_m\|_L + \epsilon)\|u\|_{\mathcal{F}(X)}.$$

Portanto, $\Psi \in L(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y))$.

Agora provamos que $\{\Psi_n\}$ converge para Ψ no espaço quasilinear $L(\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y))$, pois

$$\begin{aligned} D(\Psi_n(u), \Psi(u)) &\leq D(\Psi_n(u), \Psi_m(u)) + D(\Psi_m(u), \Psi(u)) \\ &\leq \epsilon\|u\|_{\mathcal{F}(X)} + D(\Psi_m(u), \Psi(u)) \end{aligned}$$

para $n, m \geq N$, tomando o limite quando $m \to \infty$ obtemos que

$$D(\Psi_n(u), \Psi(u)) \leq \epsilon\|u\|_{\mathcal{F}(X)} \;\; \forall n \geq N.$$

Desta maneira, temos que

$$\Psi_n \leqslant \Psi + \epsilon\Theta, \;\; \Psi \leqslant \Psi_n + \epsilon\Theta \;\; \forall n \geq N,$$

e finalmente $H_L(\Psi, \Psi_n) \leq \epsilon$, $\forall n \geq N$. ■

O seguinte resultado é análogo ao Teorema de Banach-Steinhaus.

Teorema 3.15. *Suponhamos que* $(\mathcal{F}(X), D)$ *é um espaço métrico completo. Seja* $\{\Psi_i\}_{i\in I}$ *uma família de elementos em* $L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ *tais que*

$$\sup_{i\in I} \|\Psi_i(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} < \infty, \quad \forall u \in \mathcal{F}(X).$$

Então,

$$\sup_{i\in I} \|\Psi_i\|_L < \infty,$$

ou equivalentemente, existe um $c > 0$ *tal que*

$$\|\Psi_i(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} \leq c\|u\|_{\mathcal{F}(X)}, \quad \forall u \in \mathcal{F}(X), \ \forall i \in I.$$

Demonstração: Para cada $n \geq 1$, definimos o conjunto

$$Z_n = \{u \in \mathcal{F}(X) \ / \ \|\Psi_i(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} \leq n, \ \forall i \in I\}.$$

Já que Ψ_i é uniformemente contínua $\forall i \in I$, então Z_n é fechado em $\mathcal{F}(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = \mathcal{F}(X)$. Consequentemente, usando o Lema de Baire (ver [20]) obtemos que $intZ_{n_0} \neq \emptyset$, para algum $n_0 \geq 1$, e assim existem $u_0 \in \mathcal{F}(X)$ e $r > 0$ tais que $\mathcal{B}[u_0, r] \subset Z_{n_0}$. Portanto,

$$\|\Psi_i(v)\|_{\mathcal{F}(Y)} \leq n_0, \quad \forall v \in \mathcal{B}[u_0, r], \quad \forall i \in I.$$

Agora, se $\|u\|_{\mathcal{F}(X)} \leq r$, então $u_0 + u \in \mathcal{B}[u_0, r]$. Como $u \subseteq (u_0 + u) - u_0$, segue que

$$\Psi_i(u) \subseteq \Psi_i(u_0 + u) - \Psi_i(u_0), \quad \forall i \in I,$$

e desta maneira,

$$\|\Psi_i(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} \leq \|\Psi_i(u_0 + u)\|_{\mathcal{F}(Y)} + \|\Psi_i(u_0)\|_{\mathcal{F}(Y)} \leq 2n_0, \quad \forall i \in I.$$

Por outro lado, para qualquer $u \in \mathcal{F}(X)$,

$$\left\| \frac{ru}{\|u\|_{\mathcal{F}(X)}} \right\|_{\mathcal{F}(X)} = r,$$

portanto,

$$\|\Psi_i(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} \leq \frac{2n_0}{r} \|u\|_{\mathcal{F}(X)}, \quad \forall i \in I.$$

$\blacksquare$

Lema 3.16. *Suponhamos que* $(\mathcal{F}(X), D)$ *é um espaço métrico completo. Seja* $\{\Gamma_i\}_{i\in I}$ *uma família de operadores quasilineares e limitados,* $\Gamma_i : \mathcal{F}(X) \to K(Y)$, $\forall i \in I$*, tal que a família* $\{\Gamma_i(u)\}_{i\in I}$ *é limitada em* Y *para cada* $u \in \mathcal{F}(X)$*. Então, a aplicação* $R : \mathcal{F}(X) \to K(Y)$ *definida por*

$$R(u) = \overline{\cup_{i\in I}\Gamma_i(u)}$$

é um operador quasilinear e limitado.

Demonstração: Sejam $u, v \in \mathcal{F}(X)$ tais que $u \subseteq v$. Então,

$$R(u) = \overline{\cup_{i\in I}\Gamma_i(u)} \subset \overline{\cup_{i\in I}\Gamma_i(v)} = R(v).$$

Além disso, dados $u, v \in \mathcal{F}(X)$,

$$\begin{aligned} R(u+v) &= \overline{\cup_{i\in I}\Gamma_i(u+v)} \\ &\subset \overline{\cup_{i\in I}(\Gamma_i(u)+\Gamma_i(v))} \\ &\subset \overline{\cup_{i\in I}\Gamma_i(u)} + \overline{\cup_{i\in I}\Gamma_i(v)} \\ &= R(u)+R(v). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$R(\lambda u) = \overline{\cup_{i\in I}\Gamma_i(\lambda u)} = \overline{\cup_{i\in I}\lambda\Gamma_i(u)} = \lambda\, \overline{\cup_{i\in I}\Gamma_i(u)} = \lambda R(u),$$

para qualquer $u \in \mathcal{F}(X)$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $R : \mathcal{F}(X) \to K(Y)$ é um operador quasilinear.

Agora, provaremos que R é limitado. Definamos $\Psi_i : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ por $\Psi_i(u) = \chi_{\{\Gamma_i(u)\}}$. Já que Γ_i é um operador quasilinear limitado para cada $i \in I$, segue que Ψ_i é um operador quasilinear para cada $i \in I$. Agora,

$$\sup_{i\in I}\|\Psi_i(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} = \sup_{i\in I}\|\chi_{\Gamma_i(u)}\|_{\mathcal{F}(Y)} = \sup_{i\in I}\|\Gamma_i(u)\|_K < \infty.$$

Então, pelo Teorema 3.15, existe um $c > 0$ tal que

$$\|\Gamma_i(u)\|_K = \|\Psi_i(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} \le c\|u\|_{\mathcal{F}(X)}, \quad \forall u \in \mathcal{F}(X), \ \ \forall i \in I,$$

e portanto,

$$\|R(u)\|_K = \|\overline{\cup_{i\in I}\Gamma_i(u)}\|_K \le c\|u\|_{\mathcal{F}(X)}, \quad \forall u \in \mathcal{F}(X).$$

Consequentemente, R é limitado. ■

Denotemos por $\mathcal{F}(X)^{\otimes}$ o espaço $L(\mathcal{F}(X), K(\mathbb{R}))$ e por $co\mathcal{F}(X)^{\otimes}$ o espaço quasilinear $L(\mathcal{F}(X), K_C(\mathbb{R}))$. Um operador quasilinear Γ de $\mathcal{F}(X)$ a $K(\mathbb{R})$ será chamado **funcional quasilinear**.

Seja $\Psi \in L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$. Então, para cada $\Gamma \in \mathcal{F}(Y)^{\otimes}$ podemos associar um elemento $\Phi \in \mathcal{F}(X)^{\otimes}$ sob a regra $\Phi(u) = (\Gamma \circ \Psi)(u)$. Consequentemente, o operador $\Psi^{\otimes} : \mathcal{F}(Y)^{\otimes} \to \mathcal{F}(X)^{\otimes}$ dado por $\Psi^{\otimes}(\Gamma) = \Gamma \circ \Psi$ está bem definido.

Proposição 3.17. *Seja* $\Psi \in L(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$. *Então,*
(a) $\Psi^{\otimes} \in L(\mathcal{F}(Y)^{\otimes}; \mathcal{F}(X)^{\otimes})$.
(b) $\|\Psi^{\otimes}\|_L = \|\Psi\|_L$.

Demonstração: (a) Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}(Y)^{\otimes}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} \Psi^{\otimes}(\Gamma_1 + \Gamma_2)(u) &= (\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Psi(u)) \\ &= \Gamma_1(\Psi(u)) + \Gamma_2(\Psi(u)) \\ &= (\Psi^{\otimes}(\Gamma_1) + \Psi^{\otimes}(\Gamma_2))(u). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\Psi^{\otimes}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \leqslant \Psi^{\otimes}(\Gamma_1) + \Psi^{\otimes}(\Gamma_2).$$

Também temos que,

$$\Psi^{\otimes}(\alpha\Gamma)(u) = \alpha\Gamma(\Psi(u)) = \alpha\Psi^{\otimes}(\Gamma)(u),$$

e desta maneira $\Psi^{\otimes}(\alpha\Gamma) = \alpha\Psi^{\otimes}(\Gamma)$.

Agora, suponhamos que $\Gamma_1 \leqslant \Gamma_2$. Então,

$$\Psi^{\otimes}(\Gamma_1)(u) = \Gamma_1(\Psi(u)) \leqslant \Gamma_2(\Psi(u)) = \Psi^{\otimes}(\Gamma_2)(u),$$

e assim $\Psi^{\otimes}(\Gamma_1) \leqslant \Psi^{\otimes}(\Gamma_2)$. Portanto, o operador $\Psi^{\otimes} : \mathcal{F}(X)^{\otimes} \to \mathcal{F}(Y)^{\otimes}$ é quasilinear.

Por outro lado,

$$\|\Psi^{\otimes}(\Gamma)\|_L = \sup_{\|u\|_{\mathcal{F}(X)}=1} \|\Gamma(\Psi(u))\|_K \leq \|\Gamma\|_L \|\Psi\|_L,$$

então, o operador quasilinear $\Psi^{\otimes}$ é limitado e $\|\Psi^{\otimes}\|_L \leq \|\Psi\|_L$.

(b) Devemos provar que $\|\Psi^{\otimes}\|_L \geq \|\Psi\|_L$. O elemento $\Gamma_0(u) = [-\|u\|_{\mathcal{F}}, \|u\|_{\mathcal{F}}]$ está no espaço $\mathcal{F}(Y)^{\otimes}$ e $\|\Gamma_0\|_L = 1$. Então

$$\begin{aligned}
\|\Psi^{\otimes}\|_L &= \sup_{\|\Gamma\|_L=1} \|\Psi^{\otimes}(\Gamma)\|_L \geq \|\Psi^{\otimes}(\Gamma_0)\|_L \\
&= \sup_{\|u\|_{\mathcal{F}(X)}=1} \|\Gamma_0(\Psi(u))\|_K \\
&= \sup_{\|u\|_{\mathcal{F}(X)}=1} \|\Psi(u)\|_{\mathcal{F}(Y)} = \|\Psi\|_L,
\end{aligned}$$

e portanto $\|\Psi^{\otimes}\|_L \geq \|\Psi\|_L$. ■

3.3 Operador quasilinear fuzzy

Sejam X e Y dois espaços lineares normados. Então, espaço $\mathcal{L}(X, Y)$, de todos os operadores lineares de X em Y, é também um espaço linear normado. Portanto, o espaço quasilinear normado $K(\mathcal{L}(X, Y))$ está bem definido. Cada elemento $T \in K(\mathcal{L}(X, Y))$ define uma multifunção quasilinear $\Gamma(x) = Tx = \overline{\{Ax : \ A \in T\}}$ de X em $K(Y)$.

Definição 3.18. *Diremos que um elemento $\Gamma \in L(X, K(Y))$ pussui um **representação linear** se existe um elemento $T \in K(\mathcal{L}(X, Y))$ tal que*

$$\Gamma(x) = Tx = \overline{\{Ax \ ; \ A \in T\}}.$$

O seguinte resultado, provado em [9], é importante e necessário para definir o adjunto de um operador quasilinear.

Teorema 3.19. *Suponhamos que $\Gamma \in L(X^*, K_C(\mathbb{R}))$. Então existe um único subconjunto convexo fechado e limitado $F \subset X$ tal que para qualquer $x^* \in X^*$*

$$\Gamma(x^*) = \langle F, x^* \rangle = \overline{\{\langle f, x^* \rangle \ ; \ f \in F\}}.$$

Corolário 3.20. *Se X é um espaço linear normado completo e reflexivo, então qualquer operador qusilinear limitado $\Gamma : X \to K_C(\mathbb{R})$ possui uma representação linear.*

Sejam X e Y dois espaço lineares normados. Uma aplicação $\Gamma : X \to \mathcal{F}(Y)$ é chamada **operador quasilinear fuzzy** se Γ satisfaz (O.1) e (O.2),isto é,

$\Gamma(\lambda x) = \lambda\Gamma(x) \quad \forall x \in X \ , \forall \lambda \in \mathbb{R};$

$\Gamma(x_1 + x_2) \subseteq \Gamma(x_1) + \Gamma(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X,$

já que (O.3) é imediatamente satisfeita.

Seja $\Gamma : X \to \mathcal{F}(Y)$ um operador quasilinear fuzzy limitado. Então, para qualquer $\alpha \in [0,1]$, a aplicação de nível $\Gamma_\alpha : X \to K(Y)$, definida por

$$\Gamma_\alpha(x) = [\Gamma(x)]^\alpha,$$

é um operador quasilinear limitado.

Definição 3.21. *Diremos que uma multifunção fuzzy $\Gamma : X \to \mathcal{F}(Y)$ possui uma representação linear se, para cada $\alpha \in [0,1]$, a aplicação de nível Γ_α possui uma representação linear.*

O seguinte resultado segue imediatamente do Corolario 3.20

Proposição 3.22. *Seja X um espaço linear normado completo e reflexivo. Então cada operador quasilinear fuzzy limitado $\Gamma : X \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ possui uma representação linear.*

Sejam X, Y dois espaços lineares normados e seja $\Gamma : X \to K(Y)$ um operador quasilinear limitado. Então existe um único operador quasilinear limitado $\Gamma^\otimes : Y^* \to K_C(X^*)$ tal que $\langle \Gamma(x), y^* \rangle = \langle x, \Gamma^\otimes(y^*) \rangle$, para todo $x \in X$ e $y^* \in Y^*$ (ver [9]). O operador $\Gamma^\otimes \in L(Y^*, K(X^*))$ é chamado **o adjunto** do operador $\Gamma \in L(X, K(Y))$. Consequentemente, dado um operador quasilinear fuzzy limitado $\Gamma : X \to \mathcal{F}(Y)$, para cada $\alpha \in [0,1]$ existe um operador $\Gamma^\otimes_\alpha : Y^* \to K(X^*)$, o adjunto de Γ_α, tal que

$$\langle \Gamma_\alpha(x), y^* \rangle = \langle x, \Gamma^\otimes_\alpha(y^*) \rangle$$

para quaisquer $x \in X$ e $y^* \in Y^*$.

O seguinte resultado generaliza o conceito de adjunto de um operador $\Gamma \in L(X, \mathcal{F}(Y))$.

Teorema 3.23. *Sejam X e Y dois espaços lineares normados. Seja $\Gamma : X \to \mathcal{F}(Y)$ um operador quasilinear fuzzy limitado. Então existe um único conjunto fuzzy $\Gamma^\otimes(y^*) : X^* \to [0,1]$ tal que*

$$[\Gamma^\otimes(y^*)]^\alpha = \Gamma^\otimes_\alpha(y^*),$$

para todo $\alpha \in [0,1]$ e $y^* \in Y^*$.

Demonstração: Dada a família $\{\Gamma_\alpha^\otimes(y^*)\}_{\alpha\in[0,1]}$, temos que ela satisfaz as condições do Teorema de Representação devido a Negoita e Ralescu (ver [61], [70] ou Capítulo 1 deste trabalho). De fato,

i) Por definição, segue que $\Gamma_\alpha^\otimes(y^*) \in K(X^*)$, para todo $\alpha \in [0,1]$;

ii) Seja $\alpha \leq \beta$, então

$$\begin{aligned}
\langle x, \Gamma_\beta^\otimes(y^*)\rangle &= \langle \Gamma_\beta(x), y^*\rangle \\
&\subset \langle \Gamma_\alpha(x), y^*\rangle \\
&= \langle x, \Gamma_\alpha^\otimes(y^*)\rangle, \quad \forall x \in X,
\end{aligned}$$

e portanto $\Gamma_\beta^\otimes(y^*) \subset \Gamma_\alpha^\otimes(y^*)$;

iii) Consideremos a sequência $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq ...$, tal que $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \alpha$, então

$$\cap_{i\geq 1}\Gamma_{\alpha_i}(x) = \Gamma_\alpha(x).$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
\langle x, \cap_{i\geq 1}\Gamma_{\alpha_i}^\otimes(y^*)\rangle &= \langle x, (\cap_{i\geq 1}\Gamma_{\alpha_i})^\otimes(y^*)\rangle \\
&= \langle \cap_{i\geq 1}\Gamma_{\alpha_i}(x), y^*\rangle \\
&= \langle \Gamma_\alpha(x), y^*\rangle \\
&= \langle x, \Gamma_\alpha^\otimes(y^*)\rangle.
\end{aligned}$$

Do Teorema de Representação, existe um único conjunto fuzzy $\Gamma^\otimes(y^*) : X^* \to [0,1]$ tal que

$$[\Gamma^\otimes(y^*)]^\alpha = \Gamma_\alpha^\otimes(y^*).$$

■

Definição 3.24. *Seja $\Gamma : X \to \mathcal{F}(Y)$ um operador quasilinear fuzzy limitado. O adjunto de Γ é o operador $\Gamma^\otimes \in L(Y^*, \mathcal{F}(X^*))$ tal que*

$$[\Gamma^\otimes(y^*)]^\alpha = \Gamma_\alpha^\otimes(y^*),$$

para todo $\alpha \in [0,1]$ e $y^* \in Y^*$.

3.4 Inclusões diferenciais fuzzy

A seguinte definição de inclusão diferencial fuzzy foi introduzida por Zhu e Rao em [98], no mesmo trabalho, eles obtiveram resultados relacionados a existência de soluções. Nesta Seção, consideraremos X como sendo um espaço de Banach, J um intervalo em $\mathbb{R}$ e denotamos por $C(J, X)$ o conjunto de todas as funções contínuas definidas sobre J com valores em X.

Definição 3.25. *Seja $\Gamma : X \to \mathcal{F}(X)$ uma multifunção fuzzy. Seja $\alpha : X \to [0, 1]$ uma função. Chama-se **inclusão diferencial fuzzy** ao seguinte problema: achar $x \in C(J, X)$ tal que*

$$\dot{x}(t) \in [\Gamma(x(t))]^{\alpha(x(t))}. \tag{3.5}$$

Se $\Gamma : X \to \mathcal{F}(X)$ é um operador quasilinear fuzzy, então o problema (3.5) é chamado **inclusão diferencial quasilinear fuzzy**.

Suponhamos que o operador quasilinear e limitado $\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ possui uma representação linear, isto é, para cada $\alpha \in [0, 1]$ existe um conjunto compacto T^α no espaço de matrizes $n \times n$ tal que $\Gamma_\alpha(x) = T^\alpha x = \{Ax \ / \ A \in T^\alpha\}$. Então, existe um operador quasilinear e limitado $\Gamma^\otimes : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, o adjunto de Γ, tal que $\Gamma^\otimes_\alpha$ possui repressentação linear $T^{\alpha\otimes} = \{A \ / \ A^* \in T^\alpha\}$ para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Seja $\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um operador quasilinear fuzzy e seja $\Gamma^\otimes : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ o adjunto de Γ. A inclusão diferencial fuzzy

$$\dot{x}(t) \in -[\Gamma^\otimes(x(t))]^{\alpha(x(t))}$$

é chamada inclusão diferencial fuzzy adjunto de (3.5).

A seguir daremos alguns resultados previos que serão usados no resultado principal desta Seção, um tipo de linarização para o problema (3.5).

Proposição 3.26. *Suponhamos que o operador quasilinear fuzzy $\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ possui uma representação linear. Então, Γ é contínuo.*

Demonstração: É imediata. ∎

Denotemos por $\mathcal{F}^C(X)$ (ver [70]) o subespaço de $\mathcal{F}(X)$ cujos elementos u são tal que a aplicação $\alpha \to [u]^\alpha$ é H-contínua sobre $[0,1]$, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|\alpha - \beta| < \delta \Rightarrow H([u]^\alpha, [u]^\beta) < \epsilon$$

Já que $[0,1]$ é um espaço métrico compacto, a aplicação $\alpha \to [u]^\alpha$ é uniformemente contínua.

Proposição 3.27. *Seja $\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}^C(\mathbb{R}^n)$ um operador quasilinear com representação linear. Suponhamos que $\alpha : X \to [0,1]$ é contínua. Então, a aplicação $\overline{\Gamma} : X \to \mathcal{F}^C(X)$, definida por $\overline{\Gamma}(x) = [\Gamma(x)]^\alpha$, é conínua.*

Demonstração: Suponhamos que $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^n$. Então

$$\begin{aligned} H(\overline{\Gamma}(x_n), \overline{\Gamma}(x)) &= H\left([\Gamma(x_n)]^{\alpha(x_n)}, [\Gamma(x)]^{\alpha(x)}\right) \\ &\leq H\left([\Gamma(x_n)]^{\alpha(x_n)}, [\Gamma(x)]^{\alpha(x_n)}\right) + H\left([\Gamma(x)]^{\alpha(x_n)}, [\Gamma(x)]^{\alpha(x)}\right) \\ &\leq D(\Gamma(x_n), \Gamma(x)) + H\left([\Gamma(x)]^{\alpha(x_n)}, [\Gamma(x)]^{\alpha(x)}\right) \to 0. \qquad \square \end{aligned}$$

■

Teorema 3.28. *Suponhamos que o operador quasilinear fuzzy $\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}^C(\mathbb{R}^n)$ possui uma representação linear e que $\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ é contínua. Além disso, seja $x(t)$ uma solução da inclusão diferencial fuzzy (3.5). Então, existe uma função mensurável com valores matrizes $A : J \to \bigcup_{t \in J} T^{\alpha(x(t))}$ tal que $x(t)$ é uma solução absolutamente contínua da equação diferencial ordinaria linear $\dot{x} = A(t)x$. Aquí J é o intervalo sobre o qual $x(t)$ está defnida.*

Demonstração: Definimos a multifunção $\bar{\Gamma} : \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ por

$$\bar{\Gamma}(x) = [F(x)]^{\alpha(x)}.$$

Denotemos por $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ / \ y \in \bar{\Gamma}(x)\}$ o gráfico da multifunção $\bar{\Gamma}$. Então G é um conjunto fechado (Proposition 3.27). Definimos a multifunção $P : G \to K(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ por

$$P(x,y) = \{A \in \cup_{t \in J} T^{\alpha(x(t))} \ / \ Ax = y\}.$$

Provaremos que P tem gráfico fechado. Suponhamos que $(x_n, y_n) \to (x,y)$ em G, $A_n \to A$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ com $A_n x_n = y_n$. Tomando limite em $n \to \infty$ temos que $Ax = y$. Além disso,

$P(x,y)$ é limitada. Consequentemente P é semicontínua superior. Seja H uma multifunção dada por $H(t) = P(x(t), \dot{x}(t))$. H é mensurável, pois para qualquer conjunto aberto $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, da semicontinuidade superior de P segue que $\{(x,y) \ / \ P(x,y) \subset U\}$ é um subconjunto aberto. Consequentemente, $\{t \in J \ / \ \ H(t) \subset U\}$ é mensurável. Portanto, P possui uma seleção mensurável $A : J \to \cup_{t\in J} T_{\alpha(x(t))}$, $A(t) \in H(t)$, tal que $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ para quasi todo $t \in J$. ■

Exemplo 3.29. *Consideremos a multifunção fuzzy* $\Gamma : (0,1) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ *definida, para cada* $x \in (0,1)$*, por um conjunto fuzzy triangular isóceles com suporte* $[-x, x]$*. Então, para cada* $\alpha \in [0,1]$ *a aplicação de nível é*

$$\Gamma_\alpha(x) = [\Gamma(x)]^\alpha = (1-\alpha)[-1,1]x.$$

Consequentemente, Γ *é um operador quasilinear fuzzy e possui representação linear. Consideremos a função* $\alpha : \mathbb{R} \to [0,1]$ *definida por*

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x < 0 \\ 1-x & se \quad x \in [0,1] \\ 0 & se \quad x > 1 \end{cases},$$

então a inclusão diferencial fuzzy (3.5) tem a seginte forma

$$\dot{x} \in [-1,1]x^2. \tag{3.6}$$

Se adicionamos a condição inicial $x(0) = x_0$*, então, cada solução de (3.6) é uma solução da equação diferencial*

$$\dot{x} = ax^2, \qquad x(0) = x_0, \tag{3.7}$$

com $a \in [-1,1]$*. Assim, o conjunto de soluções de (3.6) com* $J = [0,1)$ *é dado por*

$$\left\{ -\frac{x_0}{at-1} \quad / \ a \in [-1,1] \right\}.$$

Observemos que se Γ *é um operador quasilinear fuzzy e possui uma representação linear, então podemos obter todas as soluções da inclusão diferencial fuzzy resolvendo a equação diferencial (3.7).*

Exemplo 3.30. *Consideramos* $\Gamma : (0,1) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ *definido por*

$$\Gamma(x)(t) = \begin{cases} \frac{2t}{x} & se \quad 0 \leq t \leq \frac{x}{2} \\ 1 & se \quad \frac{x}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & se \quad t \notin [0,1] \end{cases}$$

Então,

$$[\Gamma(x)]^{\alpha} = \left[\frac{\alpha x}{2}, 1\right],$$

para cada $\alpha \in [0,1]$. *Assim,* Γ *não é um operador quasilinear fuzzy e não possui uma representação linear. Consideramos* $\alpha : \mathbb{R} \to [0,1]$ *como no Exemplo 3.29. Então, a inclusão diferencial fuzzy é dada por*

$$\dot{x} \in \left[\frac{(1-x)x}{2}, 1\right]. \tag{3.8}$$

Para obter uma solução de (3.8), com a condição inicial $x(0) = x_0$*, podemos usar a técnica de seleções de uma multifunção: como por exemplo, a função* $f(x) = \frac{x}{2}$ *é uma seleção de* $F(x) = \left[\frac{(1-x)x}{2}, 1\right]$. *Consequentemente, uma solução de (3.8) é dada por* $x(t) = x_0 e^{t/2}$. *Neste caso, não podemos determinar facilmente todas as soluções de (3.8) como no Exemplo 3.29, onde as soluções da inclusão diferencial fuzzy são obtidas resolvendo a equação diferencial (3.7).*

CAPÍTULO 4

Diferenciabilidade de multifunções fuzzy e estabilidade de uma inclusão diferencial fuzzy

O conceito de diferenciabilidade para multifunções fuzzy foi estudada por muitos autores sob diferentes pontos de vista. Por exemplo, o conceito de $H-$diferenciabilidade, devido a Puri e Ralescu [64], foi estudado e aplicado por diversos matemáticos no contexto de equações diferenciais fuzzy, podemos citar Ding e Kandel [27], Kaleva [46, 47] e Seikkala[88]. Goetschel e Voxman [34] introduziram a noção de derivada para aplicações fuzzy de uma variável, onde consideraram os números fuzzy em um espaço linear topológico e então definiram diferenciação de aplicações fuzzy de uma variável de modo natural, como a definição de uma função a valores reais. Syau [97] estende tal definição para aplicações fuzzy com várias variáveis. Sob outro ponto de vista de diferenciabilidade, os conceitos de Fréchet diferenciabilidade (ver De Blasi [14]) e Gâteaux diferenciabilidade (ver Ibrahim [41]) para multifunções foram estendidas ao contexto fuzzy por Diamond e Kloeden [28] e Román-Flores e Rojas-Medar [72].

Como é conhecido, a idéia principal de cálculo diferencial clássico consiste na aproximação local de uma função por um operador linear. Neste Capítulo propomos uma nova noção de diferenciabilidade para multifunções fuzzy, utilizando os operadores quasilineares fuzzy os quais suprem os operadores lineares da teoria clássica. Introduzimos e estudamos a teoria de espaços quasilineares e operadores quasilineares em [42], inspirados nos conceitos de espaços quasilineares e operadores quasilineares dado por Assev em [9].

Além da introdução do novo conceito de diferenciabilidade, apresentamos também algumas propriedades, exemplos e regras de cálculo.

Zhu and Rao [98] introduziram a noção de inclusão diferencial fuzzy e apresentam alguns resultados de existência de soluções. Este trabalho nos motivou a desenvolver algumas idéias relativos a estabilidade de uma inclusão diferencial fuzzy e como uma aplicação de nosso resultado provamos um teorema sobre estabilidade de uma inclusão diferencial fuzzy usando a nossa definição de diferenciabilidade. No próximo Capítulo apresentamos uma aplicação à Biologia (ver também [24]).

O Capítulo está organizado como segue. Na Seção 4.1, relembramos alguns resultados sobre espaços quasilineares e operadores quasilineares, introduzimos os conceitos de diferenciabilidade de Fréchet e Gâteaux para multifunções fuzzy e damos algumas propriedades referentes às mesmas. Na Seção 4.2 apresentamos algumas regras de cálculo e na última Seção damos algumas aplicações sobre estabilidade de inclusões diferenciais fuzzy (ver também [24]).

Os resultados deste Capítulo serão publicados em [43].

4.1 Diferenciabilidade de multifunções fuzzy

Nesta Seção extendemos as noções de diferenciabilidade de Fréchet e Gâteaux para o contexto de multifunções fuzzy, usando o conceito de operadores quasilineares fuzzy.

Primeiramente, lembremos alguns conceitos e resultados que foram dados no Capítulo 3 (ver também [42]).

Aquí X e Y são espaços de Banach. Uma aplicação $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ é chamada multifunção fuzzy (também conhecida como função fuzzy).

Definição 4.1. *Uma multifunção fuzzy $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ chama-se* ***operador quasilinear***

se as seguintes condições são satisfeitas:

$$F(\lambda x) = \lambda F(x) \quad \forall x \in X \;, \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

$$F(x_1 + x_2) \subseteq F(x_1) + F(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X. \tag{4.2}$$

Uma multifunção fuzzy $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ é chamada **limitada** se existe um número $k > 0$ tal que $\|F(x)\| \leq k\|x\|$ para qualquer $x \in X$.

Um resultado relevante sobre operadores quasilineares é o seguinte.

Teorema 4.2. *O operador quasilinear $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ é limitado se, e somente se, é contínuo no ponto $\mathbf{0} \in X$. A continuidade de F em $\mathbf{0}$ implica na continuidade uniforme sobre X.*

Demonstração: A sua demonstração acha-se em [42]. ■

4.1.1 Fréchet diferenciável

Definição 4.3. *Uma multifunção fuzzy $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ é chamada* ***Fréchet diferenciável*** *em $x_0 \in X$ se existe um operador quasilinear e limitado $\mathcal{D}^F_{x_0}(F) : X \to \mathcal{F}_C(Y)$ tal que*

$$D(F(x), F(x_0) + \mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x - x_0)) = o(\|x - x_0\|).$$

O operador quasilinear $\mathcal{D}^F_{x_0}(F)$ é chamado a derivada de Fréchet de F em x_0.

Exemplo 4.4. *Seja $X = \mathbb{R}$. Consideremos a multifunção fuzzy $F : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ definida por*

$$F(x)(y) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}(y - x^2) & se \quad 0 \leq y \leq x^2 \\ \frac{1}{x^2}(y + x^2) & se \quad -x^2 \leq y \leq 0 \\ 0 & caso\ contrário, \end{cases}$$

se $x \neq 0$, e $F(0) = \chi_{\{0\}}$. Então,

$$[F(x)]^\alpha = \left[-(1-\alpha)x^2, (1-\alpha)x^2\right]$$

para cada $\alpha \in [0,1]$. Agora,

$$\begin{aligned} D(F(x), F(0) + \chi_{\{0\}}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} H\left(\left[-(1-\alpha)x^2, (1-\alpha)x^2\right], \{0\} + \{0\}\right) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left|(1-\alpha)x^2\right| = \left|x^2\right|. \end{aligned}$$

Logo, F é Fréchet diferenciável em $x = 0$ e $\mathcal{D}^F_0(F)(x) = \chi_{\{0\}}$.

A seguir estabelecemos a unicidade da derivada de Fréchet.

Teorema 4.5. *Suponhamos que a multifunção fuzzy F é Fréchet diferenciável em x_0, então a Fréchet derivada é única.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{D}^F_{x_0}(F)$ e $\overline{\mathcal{D}^F_{x_0}(F)}$ derivadas de F em x_0. Então, usando as propriedades da métrica D (ver Capítulo 1), temos que

$$\begin{aligned} & D(\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x-x_0), \overline{\mathcal{D}^F_{x_0}(F)}(x-x_0)) \\ = \; & D(F(x_0)+\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x-x_0), F(x_0)+\overline{\mathcal{D}^F_{x_0}(F)}(x-x_0)) \\ \leq \; & D(F(x), F(x_0)+\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x-x_0)) \\ & +D(F(x), F(x_0)+\overline{\mathcal{D}^F_{x_0}(F)}(x-x_0)) \\ = \; & o(\|x-x_0\|). \end{aligned}$$

Desta maneira, $D(\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x-x_0), \overline{\mathcal{D}^F_{x_0}(F)}(x-x_0)) = o(\|x-x_0\|)$ para todo $x \in X$. Isto prova que $\mathcal{D}^F_{x_0}(F) = \overline{\mathcal{D}^F_{x_0}(F)}$. ■

Proposição 4.6. *Uma multifunção fuzzy $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ é constante se, e somente se, para cada $x_0 \in X$, $\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x) = \chi_{\{\theta\}}$ $\forall x \in X$.*

Demonstração: Primeiramente suponhamos que F é constante, isto é, $F(x) = u \; \forall x$. Então, para qualquer $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} D\left(F(x), F(x_0)+\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x-x_0)\right) &= D\left(u, u+\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x-x_0)\right) \\ &= D\left(\chi_{\{\mathbf{0}\}}, \mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x-x_0)\right) \\ &= o(\|x-x_0\|). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x-x_0) = \chi_{\{\mathbf{0}\}}$ $\forall x \in X$. Reciprocamente, se

$$\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x-x_0) = \chi_{\{\mathbf{0}\}} \;\; \forall x \in X,$$

então para qualquer $x \in X$

$$\begin{aligned} D\left(F(x), F(x_0)+\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x-x_0)\right) &= D(F(x), F(x_0)) \\ &= o(\|x-x_0\|), \end{aligned}$$

donde segue que $F(x) = F(x_0) \equiv u$. ■

Proposição 4.7. *Seja $F : X \to \mathcal{F}_C(Y)$ um operador quasilinear e limitado. Então F é Fréchet diferenciável em $\mathbf{0} \in X$ e $\mathcal{D}^F_{\mathbf{0}}(F) = F$.*

Demonstração: É suficiente observar que $F(\mathbf{0}) = \chi_{\{\mathbf{0}\}}$ quando F é quasilinear. ■

Teorema 4.8. *Se $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ é diferenciável em x_0, então F é contínua em x_0.*

Demonstração: Suponhamos que $x_i \to x_0$, então

$$\begin{aligned} D(F(x_i), F(x_0)) &\leq D(F(x_i), F(x_0) + \mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x_i - x_0)) \\ &\quad + D(F(x_0), F(x_0) + \mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x_i - x_0)) \\ &= o(\|x_i - x_0\|) + \|\mathcal{D}^F_{x_0}(F)\|_{\mathcal{F}} \|x_i - x_0\| \to 0 \end{aligned}$$

quando $i \to \infty$. O teorema está provado. ■

Seja $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ uma multifunção fuzzy. A multifunção de nível $F_\alpha : X \to K(Y)$, para $\alpha \in [0, 1]$, é definida por

$$F_\alpha(x) = [F(x)]^\alpha .$$

O resultado a seguir estabelece a relação entre a derivada de F e a derivada da multifunção de nível associada.

Proposição 4.9. *Se F é Fréchet diferenciável em x_0, então a multifunção de nível F_α é diferenciável em x_0 para cada $\alpha \in [0, 1]$ e*

$$\mathcal{D}^F_{x_0}(F_\alpha) = \left[\mathcal{D}^F_{x_0}(F)\right]^\alpha .$$

Demonstração: Seja $\alpha \in [0, 1]$ arbitrário. Então

$$\begin{aligned} & H\left([F(x)]^\alpha, [F(x_0)]^\alpha + \left[\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x - x_0)\right]^\alpha\right) \\ = \ & H\left([F(x)]^\alpha, \left[F(x_0) + \mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x - x_0)\right]^\alpha\right) \\ \leq \ & D(F(x), F(x_0) + \mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x - x_0)) \\ = \ & o(\|x - x_0\|). \end{aligned}$$

Consequentemente, a Proposição está provada. ■

Observemos que a recíproca da Proposição é falsa. O seguinte exemplo prova este fato.

Exemplo 4.10. *Consideremos a multifunção fuzzy* $F : (-1/2, 1/2) \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ *definida através de seus níveis por:*

$$F_\alpha(t) = \begin{cases} [-t, 1+t] & se \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ [-1/2, 1] & se \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

para $-1/2 < t < 0$ *e* $F(t) = \chi_{\{[0,1]\}}$ *para* $0 \leq t < 1/2$. *Cada multifunção de nível* F_α *é diferenciável em* $t = 0$ *com derivada*

$$\mathcal{D}_0^F(F_\alpha)(t) = \begin{cases} [-1, 1]t & se \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \{t\} & se \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

Observemos que F *não é Fréchet diferenciável, pois a seguinte inclusão não é verdadeira*

$$\mathcal{D}_0^F(F_\beta)(1) \subset \mathcal{D}_0^F(F_\alpha)(1)$$

$\forall\ 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1.$

4.1.2 Gâteaux diferenciável

Definição 4.11. *Uma multifunção fuzzy* $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ *é* ***Gâteaux diferenciável*** *em* $x_0 \in X$ *se existe um operador quasilinear e limitado* $\mathcal{D}^G_{x_0}(F) : X \to \mathcal{F}_C(Y)$ *tal que, para todo* $z \in X$

$$D(F(x_0 + tz), F(x_0) + t\mathcal{D}^G_{x_0}(F)(z)) = o(t) \ \ quando \ \ t \to +0.$$

$\mathcal{D}^G_{x_0}(F)(z)$ *é chamada* ***derivada de Gâteaux*** *de* F *em* x_0.

Teorema 4.12. *Suponhamos que a multifunção fuzzy* F *é Gâteaux diferenciável em* x_0, *então a derivada de Gâteaux é única.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{D}^G_{x_0}(F)$ e $\overline{\mathcal{D}^G_{x_0}(F)}$ derivadas de Gateâux de F em x_0. Então, das propriedades da métrica do supremo D, segue que

$$\begin{aligned} D(\mathcal{D}^G_{x_0}(\Gamma)(tz), \overline{\mathcal{D}^G_{x_0}(F)}(tz)) &= D(F(x_0) + \mathcal{D}^G_{x_0}(F)(tz), F(x_0) + \overline{\mathcal{D}^G_{x_0}(F)}(tz)) \\ &\leq D(F(x_0 + tz), F(x_0) + \mathcal{D}^G_{x_0}(F)(tz)) \\ &\quad + D(F(x_0 + tz), F(x_0) + \overline{\mathcal{D}^G_{x_0}(F)}(tz)) \\ &= o(t) \ \text{quando} \ t \to +0 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$D(\mathcal{D}^G_{x_0}(F)(z), \overline{\mathcal{D}^G_{x_0}(F)}(z)) = o(t) \ \text{ quando } \ t \to +0.$$

Portanto, $\mathcal{D}^G_{x_0}(F)(z) = \overline{\mathcal{D}^G_{x_0}(F)}(z)$ para todo $z \in X$. ■

A relação entre Fréchet derivada e Gâteaux derivada é dada no seguinte Teorema.

Teorema 4.13. *Suponhamos que a multifunção fuzzy $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ é Fréchet diferenciável em $x_0 \in X$. Então, F é Gâteaux diferenciável e*

$$\mathcal{D}^G_{x_0}(F) = \mathcal{D}^F_{x_0}(F).$$

Demonstração: De fato, temos que

$$\begin{aligned} & D(F(x_0+tz), F(x_0) + t\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(z)) \\ = \ & D(F(x_0+tz), F(x_0) + \mathcal{D}^F_{x_0}(F)(tz)) \\ = \ & o(t\|z\|) = o(t) \ \text{ quando } \ t \to +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, o Teorema está provado. ■

A seguir veremos que a diferenciabilidade definida aqui implica na diferenciabilidade dada em [72]. Antes, apresentamos alguns conceitos preliminares.

Uma multifunção $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ é semicontínua superior em x_0 se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} D^*(F(x), F(x_0)) < \epsilon$$

quando $\|x - x_0\| < \delta$, onde

$$D^*(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} h^*([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

e

$$h^*(A, B) = \inf_{r \geq 0} \{r \geq 0 \ / \ A \subset B + r\mathcal{B}[\mathbf{0}, 1]\}.$$

Além disso, F é chamada homogênea se $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ para $\lambda \geq 0$ e $x \in X$. Para mais detalhes ver [72].

Definição 4.14. *Uma multifunção fuzzy $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ é De Blasi diferenciável em $x_0 \in X$ se existe uma multifunção fuzzy semicontínua superior e homogênea $\mathbb{D}^F_{x_0}(F) : X \to \mathcal{F}_C(Y)$ tal que*

$$D(F(x_0 + x), F(x_0) + \mathbb{D}^F_{x_0}(F)(x)) = o(\|x\|).$$

A multifunção fuzzy $\mathbb{D}^F_{x_0}(F)$ é chamada De Blasi derivada de F em x_0.

Definição 4.15. *Uma multifunção fuzzy $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ é Ibrahim-Gâteaux diferenciável em $x_0 \in X$ se existe uma multifunção fuzzy semicontínua superior e homogênea $\mathbb{D}^G_{x_0}(F) : X \to \mathcal{F}_C(Y)$ tal que, para todo $z \in X$*

$$D(F(x_0 + tz), F(x_0) + t\mathbb{D}^G_{x_0}(F)(z)) = o(t) \ \ \textit{quando} \ \ t \to +0.$$

$\mathbb{D}^F_{x_0}(F)$ é chamada Ibrahim-Gâteaux derivada de F em x_0.

Logo, podemos ver que se $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ é Fréchet diferenciável em x_0 (Gâteaux diferenciável), então F é De Blasi diferenciável em x_0 (Ibrahim - Gâteaux diferenciável, respectivamente) e $\mathcal{D}^F_{x_0}(F)(x) = \mathbb{D}^F_{x_0}(F)(x)$ ($\mathcal{D}^G_{x_0}(F)(x) = \mathbb{D}^G_{x_0}(F)(x)$ respectivamente).

4.2 Regras de cálculo

Primeiramente estabelecemos algumas relações algébricas básicas com respeito a derivada.

Teorema 4.16. *Sejam F_1 e F_2 multifunções fuzzy de X em $\mathcal{F}(Y)$. Se F_1 e F_2 são Fréchet diferenciáveis em $x_0 \in X$, então a aplicação $F = \lambda F_1 + \beta F_2$ com $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, é Fréchet diferenciável em x_0, e*

$$\mathcal{D}^F_{x_0}(\lambda F_1 + \beta F_2) = \lambda \mathcal{D}^F_{x_0}(F_1) + \beta \mathcal{D}^F_{x_0}(F_2).$$

Demonstração: Observemos que

$$
\begin{aligned}
& D(F(x), F(x_0) + (\lambda \mathcal{D}^F_{x_0}(F_1) + \beta \mathcal{D}^F_{x_0}(F_2))(x - x_0)) \\
= \;& D((\lambda F_1 + \beta F_2)(x), (\lambda F_1 + \beta F_2)(x_0) + \lambda \mathcal{D}^F_{x_0}(F_1)(x - x_0) + \beta \mathcal{D}^F_{x_0}(F_2)(x - x_0)) \\
= \;& D(\lambda F_1(x) + \beta F_2(x), \lambda F_1(x_0) + \beta F_2(x_0) + \lambda \mathcal{D}^F_{x_0}(F_1)(x - x_0) + \beta \mathcal{D}^F_{x_0}(F_2)(x - x_0)) \\
\leq \;& D(\lambda F_1(x), \lambda F_1(x_0) + \lambda \mathcal{D}^F_{x_0}(F_1)(x - x_0)) \\
& + D(\beta F_2(x), \beta F_2(x_0) + \beta \mathcal{D}^F_{x_0}(F_2)(x - x_0)) \\
\leq \;& |\lambda| o(\|x - x_0\|) + |\beta| o(\|x - x_0\|) \\
= \;& o(\|x - x_0\|).
\end{aligned}
$$

Isto prova o Teorema $\blacksquare$.

Observação 4.17. *O Teorema 4.16 é também válido se supormos que F_1 e F_2 são Gâteaux diferenciáveis em x_0.*

Teorema 4.18. *Uma multifunção fuzzy $F : X \to \mathcal{F}_C(Y)$ é Gâteaux diferenciável em x_0 se, e somente se, a função suporte $S_{F(x)}(\alpha, x^*)$ é Gâteaux diferenciável em x_0 e $\mathcal{D}^G_{x_0}(S_{F(x)})$ é uma função suporte. Além disso, neste caso*

$$\mathcal{D}^G_{x_0}(S_{F(x)})(\alpha, x^*) = S_{\mathcal{D}^G_{x_0}(F)(x)}(\alpha, x^*).$$

Demonstração: Supnhamos que F é diferenciável em x_0 e $z \in X$. Então

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{t} \| S_{F(x_0 + t.z)}(\alpha, x^*) - S_{F(x_0)}(\alpha, x^*) - t.S_{\mathcal{D}^G_{x_0}(F)(z)}(\alpha, x^*) \| \\
= \;& \frac{1}{t} \| S_{F(x_0 + t.z)}(\alpha, x^*) - S_{F(x_0) + t.\mathcal{D}^G_{x_0}(F)(z)}(\alpha, x^*) \| \\
\leq \;& \frac{1}{t} D(F(x_0 + t.z), F(x_0) + t.\mathcal{D}^G_{x_0}(F)(z)) \|(\alpha, x^*)\| \\
= \;& \frac{o(t)}{t} \to 0 \quad \text{quando } \; t \to +0.
\end{aligned}
$$

Desta maneira, a função suporte $S_{F(x)}(\alpha, x^*)$ é Gâteaux diferenciável em x_0 e

$$\mathcal{D}^G_{x_0}(S_{F(x)}(\alpha, x^*)) = S_{\mathcal{D}^G_{x_0}(F(x))}(\alpha, x^*).$$

Recíprocamente, suponhamos que $S_{F(x)}(\alpha, x^*)$ é diferenciável em x_0 e $\mathcal{D}^G_{x_0}(S_{F(x)})(\alpha, x^*) = S_\Lambda(\alpha, x^*)$. Então para qualquer $z \in X$

$$
\begin{aligned}
& D(F(x_0 + t.z), F(x_0) + t.\Lambda) \\
= & \max_{\|(\alpha,x^*)\|=1} \|S_{F(x_0+t.z)}(\alpha, x^*) - S_{F(x_0)+t.\Lambda}(\alpha, x^*)\| \\
= & \max_{\|(\alpha,x^*)\|=1} \|S_{F(x_0+t.z)}(\alpha, x^*) - S_{F(x_0)}(\alpha, x^*) - t.S_\Lambda(\alpha, x^*)\| \\
= & \; o(t)
\end{aligned}
$$

quando $t \to +0$. Portanto, o Teorema está provado.

4.3 Estabilidade de inclusões diferenciais fuzzy

Dados $F : X \to \mathcal{F}(X)$ uma multifunção fuzzy, $\alpha : X \to [0, 1]$ uma função e J um intervalo em $\mathbb{R}$,Como na Seção 3.4 deste trabalho, temos o seguinte problema (ver [98]): encontrar $x \in C(J, X)$ tal que

$$x'(t) \in [F(x(t))]^{\alpha(x(t))} \tag{4.3}$$

Temos que (4.3) é chamada inclusão diferencial fuzzy.

Consideremos a inclusão diferencial fuzzy (4.3), com a condição $F(\mathbf{0}) = \chi_{\{\mathbf{0}\}}$. Diremos que o ponto de equilíbrio $x = \mathbf{0}$ de (4.3) é **Lyapunov-estável** se as seguintes condições são satisfeitas;

(a) Existe um $\delta_0 > 0$ tal que se $\|x(t_0)\| < \delta_0$, então existe uma solução $x(t)$ com condição inicial $x(t_0)$, definida para qualquer $t > t_0$;

(b) Para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $0 < \delta_1 \leq \delta_0$ tal que se $\|x(t_0)\| < \delta_1$, então $\|x(t)\| < \epsilon$ para qualquer $t \geq t_0$.

Um ponto de equilíbrio $x = \mathbf{0}$ Lyapunov-estável é **assintoticamente estável** se existe um número positivo $\delta_2 \leq \delta_0$ tal que se $\|x(t_0)\| < \delta_2$, então $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

O resultado a seguir será fundamental para provar nosso Teorema referente a estabilidade de uma inclusão diferencial fuzzy.

Teorema 4.19. *Suponhamos que a multifunção $F : X \to K_C(X)$ é homogênea e semi-contínua superior. Também, suponhamos que qualquer solução $x(t)$ da inclusão diferencial $x' \in F(x)$ tende a $\mathbf{0}$ quando $t \to \infty$. Seja $G : X \to K_C(X)$ uma multifunção semicontínua superior, com $\|G(x)\| = o(\|x\|)$ quando $\|x\| \to 0$. Então, existem $\sigma > 0$, $k > 0$ e $\delta > 0$ tais que para qualquer solução $x(t)$ da inclusão diferencial $x' \in F(x) + G(x)$ com $\|x(0)\| < \delta$ a seguinte desigualdade é satisfeita*

$$\|x(t)\| \leq k\|x(0)\| \exp(-\sigma t)$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Ver [52]. ■

Teorema 4.20. *Suponhamos que $\mathbf{0}$ é um ponto de equilíbrio da inclusão diferencial fuzzy (4.3). Além disso, suponhamos que a multifunção fuzzy $F : X \to \mathcal{F}(X)$ é diferenciável em $\mathbf{0}$ e que existe um número $\delta_0 > 0$ tal que qualquer solução $x(t)$ de (4.3) está definida sobre o intervalo $[0, +\infty)$ se $\|x(0)\| \leq \delta_0$. Se para algum $\alpha \in [0, 1]$ o ponto de equilíbrio $x = \mathbf{0}$ da inclusão diferencial quasilinear*

$$x' \in [\mathcal{D}^F_{\mathbf{0}}(F)(x)]^\alpha \tag{4.4}$$

é assintoticamente estável, então este ponto é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o problema (4.3), isto é, existem $\sigma > 0$, $k > 0$ e $\delta > 0$ tais que qualquer solução $x(t)$ de (4.3) satisfaz a desigualdade

$$\|x(t)\| \leq k\|x(0)\| \exp(-\sigma t)$$

para todo $t \geq 0$ se $\|x(0)\| < \delta$.

Demonstração: Como F é diferenciável em $\mathbf{0}$, então existe a aplicação $\widetilde{\mathcal{D}^F_{\mathbf{0}}(F)} : X \to K_C(X)$ definida por

$$\widetilde{\mathcal{D}^F_{\mathbf{0}}(F)}(x) = [\mathcal{D}^F_{\mathbf{0}}(F)(x)]^\alpha,$$

para todo $x \in X$, a qual é homogênea e uniformemente contínua. Também, já que a ponto de equilibrio $x = \mathbf{0}$ da inclusão diferencial quasilinear (4.4) é asintoticamente estável, então qualquer solução $x(t)$ de (4.4) tende a $\mathbf{0}$ quando $t \to \infty$.

Agora, denotemos por $\bar{F}(x) = [F(x)]^{\alpha(x)}$, então

$$\begin{aligned}
\|\bar{F}(x)\| &= H([F(x)]^{\alpha(x)}, \mathbf{0}) \\
&\leq D(F(x), \chi_{\{\mathbf{0}\}}) \\
&\leq D(F(x), \mathcal{D}_{\mathbf{0}}^{F}(F)(x)) + D(\mathcal{D}_{\mathbf{0}}^{F}(F)(x), \chi_{\{\mathbf{0}\}}) \\
&\leq o(\|x\|) + \|\mathcal{D}_{\mathbf{0}}^{F}(F)\|_{\mathcal{F}}\|x\| \\
&= o(\|x\|) \text{ quando } \|x\| \to 0.
\end{aligned}$$

Desta maneira, devido ao Teorema 4.19, existem $\sigma > 0$, $k > 0$ e $\delta > 0$ tal que qualquer solução $x(t)$ de (4.3) satisfaz a desigualdade

$$\|x(t)\| \leq k\|x(0)\| \exp(-\sigma t)$$

para todo $t \geq 0$ se $\|x(0)\| < \delta$. Assim, o Teorema está provado. ■

CAPÍTULO 5

Dinâmica de população via inclusões diferenciais fuzzy

Os modelos determinísticos formulados para estudos de dinâmica populacional consideram, invariavelmente, parâmetros constantes ou temporais, obtidos como médias de situações analisadas. Tais modelos não contemplam tipos de subjetividades que são inerentes ao processo de variação populacional. Os indivíduos são considerados homogêneos e todos possuem as mesmas características de evolução. Entretanto, na realidade, quando analisamos cada elemento de uma comunidade, verificamos que o indivíduo ou um grupo de indivíduos possuem características diferenciadas dos restantes que podem influenciar na dinâmica da população. Neste caso, devemos considerar as variáveis de estado diferenciadas segundo a pertinência destas características. Por outro lado, a dinâmica populacional pode ser também influenciada por características independentes das variáveis de estado: habitação, lazer, salário, ambiente de trabalho, violência etc. O valor específico destas características nem sempre podem ser avaliados ou medidos no sentido tradicional são "incertezas" que somente podemos conjecturar intuitivamente.

Assim sendo, quando fazemos análises de modelos biológicos mais realistas devemos contemplar as incertezas próprias do fenômeno estudado.

Consideremos o modelo determinístico descrito por uma equação diferencial

$$x' = f(t, x). \tag{5.1}$$

Dado (5.1), podemos inserir a incerteza ou ruído, introduzindo um parâmetro u na dinâmica, ou seja,

$$x' = f(t, x, u) \tag{5.2}$$

A priori existem duas aproximações distintas para (5.2).

1) Se a natureza dessas incertezas for aleatória, então o problema determinístico nos leva a uma equação diferencial estocástica. Neste caso, devido à complexidade das equações resultantes aos modelos estocásticos, geralmente, faz-se a inserção de ruídos de forma linear em u, isto é, assumindo que o ruido entra na dinâmica linearmente, com uma distribuição probabilística

$$x' = f(t, x) + g(t, x)u \tag{5.3}$$

Neste caso, u é denominado ruído branco, proveniente da diferencial estocástica do movimento Browniano.

2) Se o ruído não possui estrutura probabilística, ou tal estrutura não pode ser avaliada a priori, então poderá ser mais apropriado a utilização dos sistemas variacionais fuzzy ou das inclusões diferenciais fuzzy para a formulação dos modelos matemáticos.

Suponhamos que U seja um conjunto compacto de funções suficientemente regulares, então (5.2) pode ser escrito como a seguinte inclusão diferencial

$$x' \in F(t, x) = \{f(t, x, u)/u \in U\} \tag{5.4}$$

Notemos que no modelo determinístico (5.1), a velocidade é conhecida para cada (t, x), enquanto que na inclusão diferencial (5.4), a velocidade não é dada, mas sabemos que está no conjunto $F(t, x)$, gerando a incerteza.

Em [49], Krivan considera o ruído u desconhecido e limitado, tendo natureza determinística, isto é,

$$F(t, x) = h(t, x, c[-1, 1])$$

e tomando uma métrica de "verossemelhança" para se avaliar o quanto uma solução é melhor do que outra.

Analisando as metodologias propostas por May para o ruído de natureza aleatória [57], a teoria de inclusões diferenciais e a proposta por Krivan [49], consideramos que uma razoável generalização do problema (5.1), para modelar sistemas dinâmicos com incertezas, é substituir no modelo (5.4), a multifunção F por uma multifunção fuzzy, isto é, $F(t,x)$ é um conjunto fuzzy para cada (t,x). Isto nos levou a utilizar o conceito de inclusão diferencial fuzzy formulado por Zhu e Rhao [98] que consideram as inclusões diferenciais dadas pelos níveis que dependem da variável de estado x.

Neste Capítulo, estudamos um modelo com variação proporcional, usando a teoria de inclusões diferenciais fuzzy e analisamos a estabilidade dos estados de equilíbrio, utilizando o conceito de diferenciabilidade de multifunções fuzzy [43].

5.1 Dinâmica populacional com ruído

Seja $x(t)$ a densidade de uma população no tempo t e consideremos os modelos clássicos de crescimento exponencial e o logístico, isto é,

$$f(x) = rx \qquad , \qquad f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

Na biologia populacional teórica existem duas fontes de perturbações do tipo (5.3), são os ruído demográfico (aptidões individuais distintas) e o ruído ambiental (variações abióticas). Nisbet e Gurney propuseram a seguinte aproximação para o ruído demográfico:

$$g(x) = \sqrt{(b(x) + d(x))\,x}$$

onde $b(x)$ e $d(x)$ são as razões de natalidade e mortalidade instantâneas, respectivamente.

Em populações com grande densidade o ruído demográfico é menos significante e, neste caso, é mais natural considerar apenas o ruído nos parâmetros. Consideremos que somente a taxa de crescimento r é afetado. Assim, para o modelo exponencial temos:

$$x' = rx + xu = x(r+u) \tag{5.5}$$

e para o modelo logístico

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) + x\left(1 - \frac{x}{k}\right) = x\left(1 - \frac{x}{k}\right)(r+u)$$

Suponhamos ainda que o ruído seja limitado por uma constante $c > 0$, então podemos considerar a seguinte inclusão diferencial

$$x' \in f(x) + cg(x)[-1;1]. \tag{5.6}$$

Um estudo detalhado do problema (5.6) é feito em [49].

Baseado nos conceitos anteriores e na naturalidade de incerteza da constante r, introduzimos um novo modelo para o problema exponencial, onde tomaremos a constante r como um conjunto fuzzy u. Este conjunto fuzzy deve representar a nebulosidade de alguma característica da população que perturbe a sua variação.

Sejam $x(t)$ a densidade da população no instante t e $\alpha : \mathbb{R} \to [0;1]$ uma função, consideraremos as inclusões diferenciais do tipo

$$x' \in [u.x]^{\alpha(x)}, \tag{5.7}$$

onde

u é um conjunto fuzzy;

$u.x$ é o produto escalar no espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Na inclusão diferencial fuzzy (5.7) temos que a multifunção fuzzy $F : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ é dada por $F(x) = u.x$.

F é um operador quasilinear e limitado e portanto diferenciável em $x = 0$. Também temos que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio ($F(\mathbf{0}) = \chi_{\{\mathbf{0}\}}$) da inclusão diferencial fuzzy (5.7).

A seguir daremos uma aplicação relativa a (5.7) e os resultados referentes a estabilidade de Lyapunov (ver [43]) serão utilizadas para análise da estabilidade do ponto $x = \mathbf{0}$.

Exemplo 1 (expectativa de vida)

Suponhamos que A seja um conjunto de operários com $x(t)$ indivíduos no instante t. Consideraremos o problema de expectativa de vida dos elementos de A, supondo que a pobreza seja um fator que contribui para o aumento da taxa de mortalidade dos indivíduos.

Para modelar a "pobreza ", poderíamos utilizar qualquer indicador da mesma, como por exemplo, consumo de vitaminas, saneamento básico, renda, etc. Em [12] é feito um estudo completo do modelo diferencial para a esperança de vida de um grupo de trabalhadores, usando o salário (renda) como fator de incerteza na taxa de mortalidade

$$x'(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2.u(r))x(t).$$

Neste caso, o conjunto fuzzy que avalia o grau de pertinência da pobreza foi definido por

$$u(r) = \begin{cases} [1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2]^k & se \quad 0 < r < r_0 \\ 0 & se \quad r \geq r_0, \end{cases}$$

onde, k é um parâmetro que fornece alguma característica do grupo, r é um parâmetro proporcional à renda do indivíduo e r_0 é a renda mínima a partir da qual os indivíduos não são mais diferenciados quanto à pobreza e portanto, não mais influênciam na taxa de mortalidade.

Definimos $\alpha : \mathbb{R} \to [0; 1]$ por

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ x^k & se \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & se \quad x > 1 \end{cases}$$

Estamos considerando o modelo normalizado, isto é, $x = 1$ é a população total de indivíduos.

Considerando (5.7), temos a seguinte inclusão diferencial

$$x' \in -[(\lambda_1 + \lambda_2.u)x]^{\alpha(x)}, \tag{5.8}$$

onde

λ_1 é a taxa de mortalidade natural (obtida em um grupo que dispõe de condições satisfatórias de sobrevivência);

$\lambda_2.u$ indica a influência da pobreza no aumento da taxa de mortalidade do grupo;

u é o conjunto fuzzy dos pobres de acordo com a renda r.

Notemos que se $r \geq r_0$, então $u(r) = 0$ e (5.8) se reduz ao modelo determinístico

$$x' = -\lambda_1 x.$$

Agora para $r \leq r_0$,

$$\begin{aligned}
[u]^{\alpha(x)} &= \{r \ / \quad u(r) \geq \alpha(x)\} \\
&= \left\{ r \ / \quad \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^k \geq x^k \right\} \\
&= r_0[0; \sqrt{1-x}].
\end{aligned}$$

Logo, a inclusão diferencial fuzzy (5.8), para $0 < x \leq 1$, é equivalente à inclusão diferencial

$$x' \in -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \left[0; \sqrt{1-x}\right],$$

ou

$$x' \in -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}\,[0;1] \tag{5.9}$$

Observação 5.1. *Podemos ver que a inclusão diferencial (5.9) é semelhante à do problema (5.6). Por isso, esta nova idéia de enfocar os problemas de dinâmica de população, usando as inclusões diferenciais fuzzy, é uma boa generalização das já estudadas.*

Para achar soluções de (5.9), uma das técnicas é encontrar seleções da multifunção, isto é, obter funções f tal que $f(x) \in G(x)\ \forall x$. Logo, as soluções de (5.9) são aquelas que resolvem a equação diferencial (ver [1])

$$x' = f(x).$$

Assim, para a multifunção $G(x) = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \left[0; \sqrt{1-x}\right]$ em (5.9), temos que:

$$f_1(x) = \min_{m\in[0,1]} \{-\lambda_1 x - \left(\lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}\right) m / \ m \in [0;1]\} = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}$$

$$f_2(x) = \max_{m\in[0,1]} \{-\lambda_1 x - \left(\lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}\right) m / \ m \in [0;1]\} = -\lambda_1 x,$$

e toda $f(x) \in G(x)$ é tal que $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$. Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x (1-x) \\
f_4(x) &= -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}\,\left|sin(1/x^2)\right|
\end{aligned}$$

são elementos de $G(x)$.

Para cada $f(x) \in G(x)$ temos uma solução do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Neste caso, temos que o conjunto atingível (ver [49]) é dado por

$$R(t) = [x_1(t); x_2(t)] \, .$$

onde

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 r_0)x_0}{[(\lambda_1 + \lambda_2 r_0) - \lambda_2 r_0 x_0]e^{(\lambda_1+\lambda_2 r_0)t} + \lambda_2 r_0 x_0}; \\ x_2(t) &= x_0 e^{-\lambda_1 t}; \end{aligned}$$

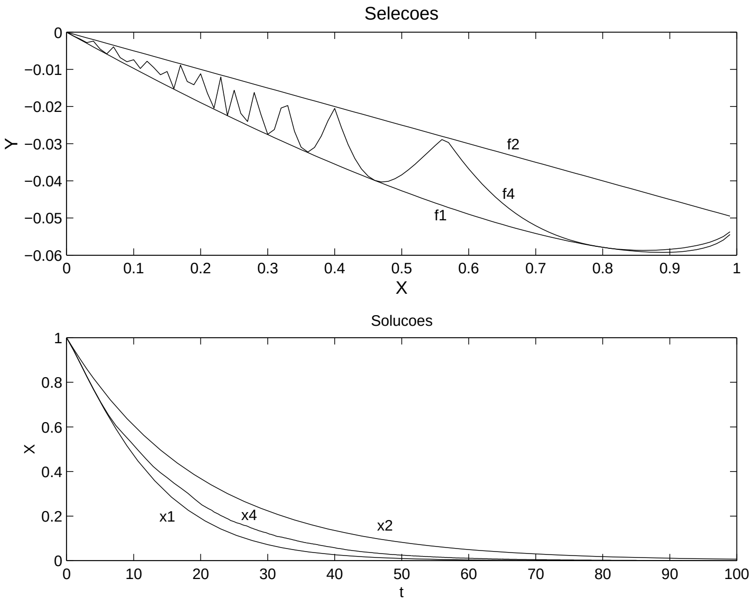

Figura 5.1: Gráfico das seleções e do conjunto atingível para $\lambda_1 = 0.05$, $\lambda_2 = 0.001$ e $r_0 = 50$.

Temos que $x = 0$ é assintoticamente estável para o problema (5.8), pois:

(1) Nessa inclusão diferencial fuzzy temos que $F(x) = -(\lambda_1 + \lambda_2 u)x$ e portanto $x = 0$ é uma solução de equilíbrio ($F(0) = \chi_{\{0\}}$);

(2) F é um operador quasilinear e limitado. Segue, da Proposição 3.5 em [43] (ver também o Capítulo 4), que F é Fréchet diferenciável e $\mathcal{D}_0^F(F)(x) = -(\lambda_1 + \lambda_2 u)x$.

Provaremos que $x = 0$ é assintoticamente estável, para algum $\alpha \in [0;1]$, da inclusão diferencial quasilinear fuzzy

$$x' \in [\mathcal{D}_0(F)(x)]^\alpha. \tag{5.10}$$

Tomemos $\alpha = (\frac{1}{2})^k$, então (5.10) é dado por

$$x' \in -\left(\lambda_1 + \lambda_2 r_0 \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) x \tag{5.11}$$

1. As soluções de (5.11) são do tipo $x(t) = x(0)\exp(-(\lambda_1 + a\lambda_2 r_0)t)$, com $a \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e existem para todo $t \geq 0$.
2. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 = \epsilon$ tal que $\|x(t)\| = \|x(0)\exp(-(\lambda_1 + a\lambda_2 r_0)t)\| \leq \|x(0)\| \ \forall t > 0$.
3. $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

Segue dai que $x = 0$ é assintoticamente estável para a inclusão (5.10). Logo, pelo Teorema 5.2 em [43], temos que $x = 0$ é assintoticamente estável para a inclusão diferencial fuzzy (5.8), isto é, existem $\sigma > 0$, $k > 0$ e $\delta > 0$ tais que qualquer solução $x(t)$ de (5.8) satisfaz a desigualdade

$$\|x(t)\| \leq k\,\|x(0)\|\exp(-\sigma t)$$

para todo $t \geq 0$ se $\|x(0)\| < \delta$.

Conclusão: Dado $f(x) = rx$, suponhamos que r é perturbado por um conjunto fuzzy U obtendo assim, a multifunção fuzzy $F(x) = (r + U)x$. Desta forma, se $0 \in [U]^1$, temos que $f(x) \in [F(x)]^\alpha, \forall \alpha \in [0,1]$. Então, para qualquer $\alpha(x)$ temos que

$$\begin{cases} x' & \in & rx + [U]^{\alpha(x)} \\ X(0) & = & X_0, \end{cases}$$

isto é, a solução determinística sempre está no conjunto solução da inclusão diferencial.

CAPÍTULO 6

Conjuntos aleatórios

O estudo de multifunções, isto é, funções que possuem valores conjuntos, se inicia na década de 30, juntamente com inclusões diferenciais. Na década de 40, Robbins em [84], [85], introduz o conceito de conjuntos aleatórios (multifunções mensuráveis). Porém, até os anos 70 não se achava nenhuma aplicação desta versão de variáveis aleatórias, fazendo com que Kendall [50] e Matherom [58] introduzissem uma teoria geral de conjuntos aleatórios para estudar objetos geométricos. Desde então, esta teoria tem sido estudada e aplicada por diversos matemáticos em áreas distintas, tais como geometria integral e estocástica (ver [50], [58]), economia matemática (ver [21], [31]) e otimização (ver [8]).

Neste Capítulo daremos os fundamentos básicos de conjuntos aleatórios, que será pré-requisito para um de nossos resultados principais deste trabalho, a "Lei forte de grandes números para conjuntos aleatórios fechados", que será apresentado no próximo Capítulo.

Este Capítulo esta organizado como segue: na primeira Seção daremos o conceito de multifunções mensuráveis e suas principais propriedades. Na Seção 6.2 apresentaremos a versão da integral de uma multifunção segundo Aumann e na Seção 6.3 apresentamos a teoria de conjuntos aleatórios.

6.1 Multifunções Mensuráveis

Nesta seção daremos a definição de mutifunções mensuráveis, algumas propriedades e caracterizações.

Dado Y um espaço topológico denotaremos por $2^Y \setminus \emptyset$ a família de todos os subconjuntos não vazios de Y e por $\mathcal{C}(Y)$ a família de todos os subconjuntos fechados e não vazios de Y.

Definição 6.1. *Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e Y um espaço de Banach. A multifunção $F : \Omega \to 2^Y \setminus \emptyset$ é dita $\mathcal{A}$-mensurável, se $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para cada aberto B em Y.*

Observemos que para testar a mensurabilidade de uma multifunção F é necessário representar $F^{-1}(B)$ como a união enumerável de A_i, com $A_i \in \mathcal{A}$. Será que a utilização de tal argumento de enumerabilidade fica bem mais fácil se Y for separável?. Isto em parte é verdade, vejamos a seguinte proposição onde $\mathcal{A}$-mensurável pode ser expressado em termos da função distância.

Proposição 6.2. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e Y um espaço de Banach separável. Então $F : \Omega \to 2^Y \setminus \emptyset$ é mensurável se, e somente se, $d(x, F(.))$ é mensurável para cada $x \in Y$.*

Demonstração: Seja $\{x_i \in Y : i \geq 1\}$ tal que $\overline{\{x_i \in Y \ / \ i \geq 1\}} = Y$, então dado $x \in Y$,

$$d(x, F(.)) = \lim_{k \to \infty} d(x_k, F(.))$$

para alguma subseqüência (x_k) de (x_i).

Para provar esta proposição basta considerar $x \in \{x_i \in Y : i \geq 1\}$. Agora,

$$F^{-1}(\mathcal{B}(x_i, r)) = \{w \in \Omega \ / \ F(w) \cap \mathcal{B}(x_i, r) \neq \emptyset\} = \{w \in \Omega \ / \ d(x_i, F(w)) < r\} = A_r.$$

Como um aberto $B \neq \emptyset$ em Y é a união de tais $\mathcal{B}(x_i, r)$ e $d(x_i, F(.))$ é mensurável se, e somente se, $A_r \in \mathcal{A}$ para cada $r > 0$. Então a proposição está verificada. ∎

Definição 6.3. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, Y um espaço de Banach e $F : \Omega \to 2^Y \setminus \emptyset$ uma multifunção. Uma aplicação $f : \Omega \to Y$ satisfazendo a relação*

$$f(w) \in F(w) \quad \forall w \in \Omega$$

é chamada **seleção de** F. *No caso que a aplicação* f *seja mensurável, será chamada de* **seleção mensurável de F**.

Teorema 6.4. *(Seleção mensurável) Sejam* $(\Omega, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável,* Y *um espaço de Banach separável e* $F : \Omega \to \mathcal{C}(Y)$ *uma multifunção mensurável. Então existe uma seleção mensurável de* F.

Demonstração: Seja $\{x_n\}_{n\geq 1}$ um subconjunto denso enumerável de Y. A idéia da prova, é construir uma seqüência de aplicações mensuráveis $f_k : \Omega \to Y, \quad k \geq 0$ tomando valores em $\{x_n\}$, que converge uniformemente para uma seleção f de F, obtendo f é mensurável. Iremos construir tal seqüência através da indução.

Para cada $w \in \Omega$, seja $n \geq 1$ o menor inteiro tal que

$$F(w) \cap \mathcal{B}(x_n, 1) \neq \emptyset,$$

e definimos $f_0 : \Omega \to Y$ por

$$f_0(w) = x_n.$$

Logo, $f_0(\cdot)$ é mensurável e além disso

$$\forall w \in \Omega \quad , \quad d(f_0(w), F(w)) < 1.$$

Suponhamos que já constroimos aplicações mensuráveis

$$f_k : \Omega \to \{x_n\}_{n\geq 1} \qquad k = 0, ..., m$$

satisfazendo

$$\forall\, 0 \leq k \leq m \quad \forall w \in \Omega \quad d(f_k(w), F(w)) < \frac{1}{2^k} \tag{6.1}$$

e

$$\forall\, 0 \leq k < m-1 \qquad d(f_k(w), f_{k+1}(w)) < \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{6.2}$$

Agora, para cada n seja

$$S_n = \{w \in \Omega \ / \ f_m(w) = x_n\}$$

observemos que os conjuntos S_n são mutuamente disjuntos, e

$$\bigcup_{n\geq 1} S_n = \Omega$$

além disso, (6.1) implica que

$$\forall w \in S_n \quad , \quad F(w) \cap \mathcal{B}(x_n, 2^{-(m+1)}) \neq \emptyset.$$

Fixemos $w \in \Omega$ e seja n tal que $w \in \Omega$. Considere o menor inteiro r tal que

$$F(w) \cap \mathcal{B}(x_n, 2^{-m}) \cap \mathcal{B}(x_r, 2^{-(m+1)}) \neq \emptyset,$$

e defina

$$f_{m+1}(w) = x_r.$$

Então

$$d(f_m(w), f_{m+1}(w)) \leq 2^{-m} + 2^{-(m+1)} < 2^{-m+1}$$

além disso

$$d(f_{m+1}(w), F(w)) < 2^{-(m+1)}$$

assim, é possível definir uma aplicação mensurável

$$f_{m+1} : \Omega \to \{x_n\}_{n \geq 1}$$

onde (6.1), (6.2) são satisfeitas quando m é substítuido por $m+1$. De (6.2) segue que $\forall w \in \Omega$, $(f_n(w))_{n \geq 1}$ é uma seqüência de Cauchy no espaço de Banach Y, deste modo existe uma aplicação $f : \Omega \to Y$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(w) = f(w).$$

De (6.2) temos que $f_n \to f$ uniformemente, implicando que f é mensurável. Agora de (6.1) tem-se que

$$d(f(w), F(w)) = 0$$

daí f é uma seleção mensurável de F. ■

Corolário 6.5. *Sobre as condições do teorema anterior, existe uma seqüência (f_n) de seleções mensuráveis de F tais que*

$$F(w) = \overline{\{f_n(w); n \geq 1\}}$$

em Ω.

Demonstração: Para cada $n, k \geq 1$, consideremos a multifunção $G_{nk} : \Omega \to 2^Y \setminus \emptyset$ definida por

$$G_{nk} = \begin{cases} \overline{F(w) \cap B(x_n, \frac{1}{k})} & \text{se } F(w) \cap B(x_n, \frac{1}{k}) \neq \emptyset \\ F(w) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, G_{nk} possui valores fechados e isto se prova que ele é mensurável. Aplicando o Teorema anterior obtemos o resultado. ■

Denotemos por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a σ-algebra gerada pelo produto $A \times B$, onde $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ é a Borel σ-algebra de Y).

Teorema 6.6. *(Teorema de Caracterização) Sejam $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, Y espaço de Banach separável e $F : \Omega \to 2^Y \setminus \emptyset$ uma multifunção à valores fechados. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(a) *F é mensurável;*

(b) *$F^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ para cada fechado C em Y;*

(c) *Para cada $x \in Y$ a aplicação $d(x, F(.))$ é mensurável;*

(d) *O gráfico de F pertence a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*

Demonstração: $(a) \Leftrightarrow (b)$. Com efeito, seja C um fechado em Y. Definamos conjuntos fechados por

$$C_n = \{x \in Y : d(x, C) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Assim,

$$Y \setminus C = \bigcup_{n \geq 1} C_n,$$

daí

$$C = \bigcap_{n \geq 1} (Y \setminus C_n).$$

Como F é mensurável , $F^{-1}(Y \setminus C_n) \in \mathcal{A}$. Portanto,

$$F^{-1}(C) = \bigcap_{n \geq 1} F^{-1}(Y \setminus C_n) \in \mathcal{A}.$$

Reciprocamente, se V é un conjunto aberto em Y, definamos conjuntos fechados por

$$C_n = \left\{ x \in Y \;/\; d(x, Y \setminus V) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Assim,

$$V = \bigcup_{n \geq 1} F^{-1}(C_n).$$

Já que $F^{-1}(C_n) \in \mathcal{A}$,

$$F^{-1}(V) = \bigcup_{n \geq 1} F^{-1}(C_n) \in \mathcal{A}.$$

$(a) \Leftrightarrow (c)$ segue da proposição anterior.

Omitimos a prova de $(c) \Leftrightarrow (d)$, pois se precisamos de outros resultados, assim recomendamos ver [32] para a demonstração. ■

A seguir vejamos a relação entre continuidade e mensurabilidade de multifunções. Antes lembremos os conceitos de continuidade.

Definição 6.7. *Uma multifunção $F : \Omega \to 2^Y \setminus \emptyset$ é chamada* **semicontinua superiormente**, *denotado por scs, se $F^{-1}(A)$ é fechado em Ω quando $A \subset Y$ é fechado. Também F é chamada de ϵ-δ-scs se para cada $\epsilon > 0$ e cada $w_0 \in \Omega$ existe $\delta = \delta(w_0, \epsilon) > 0$ tais que*

$$F(w) \subset F(w_0) + \mathcal{B}(\mathbf{0}, \epsilon)$$

para cada $w \in \mathcal{B}(w_0, \delta) \cap \Omega$.

Definição 6.8. *Uma multifunção $F : \Omega \to 2^Y \setminus \emptyset$ é chamada* **semicontínua inferiormente**, *denotado por sci, se $F^{-1}(V)$ é aberto em Ω quando $V \subset Y$ é aberto. F é chamada de ϵ-δ-sci se para cada $\epsilon > 0$ e cada $w_0 \in \Omega$ existe um $\delta = \delta(w_0, \epsilon) > 0$ tal que*

$$F(w_0) \subset F(w) + \mathcal{B}(\mathbf{0}, \epsilon)$$

para cada $w \in \mathcal{B}(w_0, \delta) \cap \Omega$.

Notemos que *scs* (*sci*) conincide com a ϵ-δ-*scs* (ϵ-δ-*sci*, respectivamente) se a multifunção tiver valores compactos.

Proposição 6.9. *(Continuidade e mensurabilidade) Sejam Ω um espaço métrico e $\mathcal{A}$ a σ-álgebra de Borel em Ω, Y um espaço de Banach separável e $F : \Omega \to \mathcal{C}(Y)$. Se F é scs ou sci, então F é mensurável.*

Demonstração: Suponhamos que F é *scs*. Então, dado um fechado C em Y, se obtemos que $F^{-1}(C)$ é fechado em Ω. Portanto, F é mensurável.

Analogamente, se F é *sci*, então dado um aberto V em Y, obtemos que $F^{-1}(V)$ é aberto em Ω. Portanto F é mensurável. ∎

Teorema 6.10. *(função suporte) Sejam $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, Y um espaço de Banach separável e $F : \Omega \to 2^Y \setminus \emptyset$ uma multifunção mensurável com valores fechados. Então esta tem função suporte mensurável, isto é, para cada $x^* \in Y^*$ a função*

$$w \mapsto \sigma(F(\cdot), x^*)$$

é mensurável.

Demonstração: Ver [32]. ∎

A recíproca do Teorema 6.10 é verdadeira se o dual de Y é separável e F tem valores convexos e limitados.

6.2 Integral de Multifunções

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida completo σ-finita e Y um espaço de Banach separável com norma $\|.\|$.

Denotemos por

$$L^1(\Omega, Y, \mu) = \left\{ f : \Omega \to Y \text{ mensurável } \ / \ \int_\Omega \|f\| d\mu < \infty \right\}.$$

Nesta seção daremos a definição e algumas propriedades da integral de uma multifunção F de Ω sobre os subconjuntos fechados e não vazios de Y.

Denotemos por $\mathbb{S}^1_F$ o conjunto de todas as seleções integráveis de F:

$$\mathbb{S}^1_F = \{ f \in L^1(\Omega, Y, \mu) \ / \ f(w) \in F(w) \text{ em quase todo } \Omega \}.$$

Aumann [10] sugeriu a seguinte definição de integral para multifunções.

Definição 6.11. *A* **integral** *de F em Ω é o conjunto de integrais de seleções integráveis de F,isto é,*

$$\int_{\Omega} F d\mu = \left\{ \int_{\Omega} f d\mu \ / \ f \in \mathbb{S}_F^1 \right\}.$$

Da definição segue imediatamente que a integral de F, $\int_{\Omega} F d\mu$, é convexa quando F tem valores convexos.

Definição 6.12. *Uma multifunção $F : \Omega \to 2^Y \setminus \emptyset$ é chamada limitadamente integrável se existe uma função não-negativa $g \in L^1(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$ tal que*

$$F(w) \subset g(w)\mathcal{B}(\mathbf{0}, 1)$$

em quase todo Ω.

Pela Definição 6.12 concluimos que se F é limitademente integrável, então cada seleção mensurável de F é um elemento de $\mathbb{S}_F^1$ devido ao teorema de Lebesgue. Assim, quando F é mensurável, limitadamente integrável e possui valores fechados, temos que a integral de F é um conjunto não vazio.

A integral de multifunções ser convexa e fechada são propriedes importantes no âmbito da teoria de análise. Assim, devido a um resultado clássico dado por Lyapunov, quando $Y = \mathbb{R}^n$ a integral de qualquer multifunção é convexa, mesmo que os valores da multifunção não sejam convexos, e além disso é fechada quando a multifunção é limitadamente integrável e possui valores fechados. Na realidade o próprio Aumann prova que a integral é compacta sob essas condições.

Definição 6.13. *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Diremos que $A \in \mathcal{A}$ é um átomo para a medida μ, se cada vez que*

- $\mu(A) > 0$
- $B \in \mathcal{A}$ *e* $B \subset A$

então

$$\mu(B) = 0 \quad ou \quad \mu(B) = \mu(A).$$

Uma medida μ se diz não atômica quando esta não possui átomos.

Teorema 6.14. *Seja $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ uma multifunção. Se μ é não-atômica, então $\int_\Omega F d\mu$ é convexa.*

Demonstração: Ver [3]. ■

Teorema 6.15. *(Aumann) Seja $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ uma multifunção limitadamente integrável com valores fechados. Então $\int F d\mu$ é compacta.*

Demonstração: Ver [3]

Usando a definição é quase impossível calcular a integral de uma multifunção, porém, fazendo uso da função suporte é possivel calcular algumas integrais de uma maneira fácil.

Proposição 6.16. *Consideremos a multifunção $F : \Omega \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma\left(\int_\Omega F d\mu \ , x\right) = \int \sigma(F(w), x) d\mu.$$

Demonstração: Ver [3] ■

Como mencionamos acima, é possível calcularmos algumas integrais fazendo uso da Proposição 6.16. Para isso é suficiente construir a função suporte $\sigma(F(w), x)$, e integrarmos esta função com respeito a w para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, usando o Teorema de Hörmander e o valor da integral da função suporte, obtida anteriormente, obtemos a $\int_\Omega F d\mu$. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 6.17. *Seja A um conjunto convexo, compacto não vazio em $\mathbb{R}^n$, então*

$$\int_{t_1}^{t_2} A dt = (t_1 - t_2)A. \quad t_2 > t_1.$$

Com efeito, pela proposição anterior temos que, para cada $\psi \in \mathbb{R}^n$

$$\sigma\left(\int_{t_1}^{t_2} A dt, \psi\right) = \int_{t_1}^{t_2} \sigma(A, \psi) dt = \sigma(A, \psi)(t_2 - t_1)$$

Agora, como A é convexo, então $\int_{t_1}^{t_2} A dt$ é convexo. Logo, pelo teorema de Hörmander, se tem que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} A dt &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle x, \psi \rangle \le \sigma\left(\int_{t_1}^{t_2} A dt, \psi\right), \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle x, \psi \rangle \le \sigma(A, \psi)(t_2 - t_1), \quad \forall \in \mathbb{R}^n\} \\ &= (t_2 - t_1)\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \langle x, \psi \rangle \le \sigma(A, \psi), \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^n\} \\ &= (t_2 - t_1)A. \end{aligned}$$

6.3 Conjuntos aleatórios

Nesta Seção $\mathbb{R}^n$ é o espaço Euclidiano n-dimensional. Denotaremos por $\mathcal{C}_C(\mathbb{R}^n)$ a família de todos os subconjuntos fechados e convexos de $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\mathcal{C}_C(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \ / \ A \text{ é convexo } \}.$$

Definição 6.18. *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Então, qualquer multifunção $X : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ mensurável é chamada* **Conjunto aleatório**.

Quando X tem valores fechados (compactos) se diz que X é um **conjunto aleatório fechado** *(compacto, respectivamente).*

Dado um conjunto aleatório $X : \Omega \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, denotaremos por $\overline{co}X$ a multifunção $\overline{co}X : \Omega \to \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$\overline{co}X(\omega) = \overline{co}\{X(\omega)\},$$

onde $\overline{co}\{X(\omega)\}$ denota a envoltória convexa e fechada do conjunto $X(\omega)$.

Proposição 6.19. *Seja $X : \Omega \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ um conjunto aleatório. Então $\overline{co}X : \Omega \to \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^n)$ é um conjunto aleatório.*

Demonstração: Ver [6], [37]. ■

Teorema 6.20. *Seja $X : \Omega \to K_C(\mathbb{R}^n)$ uma multifunção. Então, X é um conjunto aleatório se, e somente se, $\sigma(X(\cdot), y)$ é uma variável aleatória para cada $y \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: É uma consequência do Teorema 6.10. ■

Como nos capítulos anteriores, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ temos que $\|A\| = \sup_{a \in A} \|a\|$, onde $\|a\|$ denota a norma do vector $a \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 6.21. *Se $X : \Omega \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ então $\|X\|$ é uma variável aleatória.*

Demonstração: Ver [6] ou [35]. ■

Dado um conjunto aleatório $X : \Omega \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, denotemos por $\mathcal{A}_X$ a menor σ-algebra contendo todos os conjuntos $X^{-1}(B)$ com $B \subset \mathbb{R}^n$ fechado.

Definição 6.22. *Sejam* $X_1, X_2 : \Omega \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ *conjuntos aleatórios. Dizemos que* X_1 *e* X_2 *são* **independentes** *se* $\mathcal{A}_{X_1}$ *e* $\mathcal{A}_{X_2}$ *são independentes.*

Definição 6.23. *Sejam* $X_1, X_2 : \Omega \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ *conjuntos aleatórios. Dizemos que* X_1 *e* X_2 *são* **identicamente distribuidos** *se*

$$P\{X_1^{-1}(B)\} = P\{X_2^{-1}(B)\},$$

para todo fechado $B \subset \mathbb{R}^n$.

A seguir definimos a esperança de um conjunto aleatório, usando a integral de Aumann para multifunções.

Definição 6.24. *Seja* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *um espaço de probabilidade. A* **esperança** *de um conjunto aleatório* $X : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$, *denotado por* $E(X)$, *é definido por*

$$E(X) = \left\{E(f) \ / \ f \in \mathbb{S}_X^1\right\},$$

onde $E(f)$ *denota o esperado da variável aleatória* f *e*

$$\mathbb{S}_X^1 = \{f \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n, P) \ / \ f(\omega) \in X(\omega) \ e \ E(\|f\|) < \infty\}.$$

CAPÍTULO 7

Lei forte de grandes números para conjuntos aleatórios fechados

A lei forte de grandes números foi bem estabelecida para funções mensuráveis tomando valores em vários espaços diferentes. Neste Capítulo apresentamos uma lei forte de grandes números (LFGN) para conjuntos aleatórios de $\mathbb{R}^p$.

A primeira LFGN para conjuntos aleatórios foi provada por Artstein e Vitale [7] para conjuntos aleatórios compactos de $\mathbb{R}^p$ independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.). Este resultado foi estendido para conjuntos aleatórios compactos i.i.d. de um espaço de Banach separável por Puri e Ralescu [67], Giné, Hahn e Zinn [35] e Hiai [37]. Nesses trabalhos, a LFGN foi estabelecida com a distância de Hausdorff e supondo que os conjuntos aleatórios são integralmente limitados.

Artstein e Hart [6], motivados por um problema de optimização que surge em processos de distribuição sob incertezas, estabelecem a LFGN para conjuntos aleatórios fechados de $\mathbb{R}^p$. Este resultado foi estendido para conjuntos aleatórios fechados em espaços de Banach por Hiai [37] e Hess [36]. A condição de integrabilidade sobre os conjuntos aleatórios assumidas nestes trabalhos é que a esperaça é não vazia. Esta condição é mais fraca que a de integralmente limitada e assim, a covergência nestes trabalhos (a convergência de Kuratowski em

Artstein e Hart [6], a convergência de Mosco em Hiai [37] e a convergência na topologia de Wijsman em Hess [36]) são mais fortes que a convergência com a distância de Hausdorff.

Neste Capítulo consideramos conjuntos aleatórios fechados i.i.d. de $\mathbb{R}^p$ e provamos que se estes são integralmente limitados, então a LFGN é satifeita com a distância de Hausdorff. Consequentemente, nosso resultado é uma generalização do feito por Artstein e Vitale [7], pois consideramos conjuntos aleatórios fechados e não necessariamente limitados e é um resultado mais forte de aquele dado por Artstein e Hart [6], pois consideramos uma condição mais forte sobre a condição de integrabilidade dos conjuntos aleatórios fechados.

O Capítulo está organizado como segue: Na Seção 7.1 provamos alguns resultados que devem ser usados para a prova de nosso resultado principal, a LFGN para conjuntos aleatórios fechados, que será dado na Seção 7.2.

Este Capítulo será publicado em [44].

7.1 Resultados preliminares

Para provar a nossa versão da LFGN procederemos de uma forma, em certo modo, similar à teoria clássica para variáveis aleatórias. Especificamente, dado uma sequência de conjuntos aleatórios fechados e não vazios de $\mathbb{R}^p$, $X_1, X_2, ...$, construimos a sequência $Y_1, Y_2, ...$ por "truncamento" do conjunto aleatório. Então provamos dois fatos: primeiro, que $Y_1, Y_2, ...$ satisfazem a LFGN, e segundo, que podemos trocar $X_1, X_2, ...$ por $Y_1, Y_2, ...$ sem mudar a forma assintótica.

Nesta Seção daremos resultados que devem ser usados na prova do LFGN.

Sejam $X_1, X_2, ...$ uma sequência de conjuntos aleatórios fechados e não vazios de $\mathbb{R}^p$, i.i.d. e tal que $E\{\|X_1\|_H\} < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & \text{se } X_n \subset \mathcal{B}[\mathbf{0}; n], \\ \{0\}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde

$$\mathcal{B}[\mathbf{0}; n] = \{x \in \mathbb{R}^p \ / \ \|x\| \leq n\}.$$

Logo, $Y_1, Y_2, ...$ é uma sequência de conjuntos aleatórios compactos não vazios e independentes de $\mathbb{R}^p$ com

$$E\left\{\|Y_n\|_H\right\} \leq E\left\{\|X_1\|_H\right\} < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lema 7.1. *Sejam $X_1, X_2, ...$ uma sequência de conjuntos aleatórios fechados e não vazios de $\mathbb{R}^p$, i.i.d. com $E\left\{\|X_1\|_H\right\} < \infty$. Então*

$$H\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}, \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{n}\right) \to 0, \quad q.t.p.$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração: Temos que

$$H\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}, \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i, \tag{7.1}$$

onde $W_i = I(Y_i \neq X_i)\|X_i\|_H$ e

$$I(A) = \begin{cases} 1, & \text{se vale } A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $E\left\{\|X_1\|_H\right\} < \infty$,

$$\sum_{i\geq 1} P(W_i > 0) = \sum_{i\geq 1} P(\|X_i\|_H > i) < \infty,$$

e consequentemente, pelo Lema 1 em Rohatgi ([86], página 266), temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i \to 0, \quad q.t.p. \tag{7.2}$$

quando $n \to \infty$. O resultado segue das inequações (7.1) e (7.2). ∎

Lema 7.2. *Seja $X_1, X_2, ...$ uma sequência de conjuntos aleatórios fechados e não vazios de $\mathbb{R}^p$, i.i.d. com $E\left\{\|X_1\|_H\right\} < \infty$. Então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que*

(a) *$\forall\, x \in E(\overline{co}X_n)$, existe $y = y(x) \in E(\overline{co}Y_n)$ satisfazendo $\|x - y\| < \varepsilon$, $\forall n \geq M$.*

(b) *$\forall\, y \in E(\overline{co}Y_n)$, existe $x = x(y) \in E(\overline{co}X_n)$ satisfazendo $\|x - y\| < \varepsilon$, $\forall n \geq M$.*

Demonstração: Seja

$$Z_n = \begin{cases} 1, & \text{se } X_n \subset \mathcal{B}[\mathbf{0}; n] \ \Leftrightarrow \ \overline{co}X_n \subset \mathcal{B}[\mathbf{0}; n], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dado $x \in E(\overline{co}X_n)$, existe $f \in \mathbb{S}^1_{\overline{co}X_n}$ tal que $x = E(f)$. Para $y = E(g)$ com $g = Z_n f$, como $g \in \mathbb{S}^1_{\overline{co}Y_n}$, então $y \in E(\overline{co}Y_n)$.

Agora, temos que

$$E(f) = E(Z_n f) + E\{(1 - Z_n)f\} = E(g) + E\{(1 - Z_n)f\},$$

e consequentemente,

$$\|x - y\| = \|E\{(1 - Z_n)f\}\| \leq E\{\|X_n\|_H I(\|X_n\|_H > n)\}. \tag{7.3}$$

Como $E\{\|X_n\|_H\} < \infty$, então $\forall \varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$E\{\|X_n\|_H I(\|X_n\|_H > n)\} < \varepsilon, \ \ \forall n \geq M.$$

Isto juntamente com (7.3) completa a prova da parte (a).

Agora, para $y \in E(\overline{co}Y_n)$, existe $g \in \mathbb{S}^1_{\overline{co}Y_n}$ tal que $y = E(g)$. Seja $x = E(f)$ com $f = Z_n g + (1 - Z_n)h$, para algum $h \in \mathbb{S}^1_{\overline{co}X_n}$. Já que $f \in \mathbb{S}^1_{\overline{co}X_n}$ então $x \in E(\overline{co}X_n)$. Logo, nos temos que

$$\|x - y\| = \|E\{(1 - Z_n)h\}\| \leq E\{\|X_n\|_H I(\|X_n\|_H > n)\}. \tag{7.4}$$

Raciocinando assim como antes, o resultado da parte (b) segue de (7.4) e do fato do que $E\{\|X_n\|_H\} < \infty$. ■

Lema 7.3. *Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de conjuntos aleatórios não vazios de $\mathbb{R}^p$, i.i.d. com $E\{\|X_1\|_H\} < \infty$. Então*

$$H\left(\frac{E(\overline{co}Y_1) + E(\overline{co}Y_2) + \ldots + E(\overline{co}Y_n)}{n}, E(\overline{co}X_1)\right) \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração: Sejam $x \in E(\overline{co}X_1)$ e $\varepsilon > 0$ fixos. Pelo Lema 7.2 parte (a), existe $\hat{y}_m \in E(\overline{co}Y_m)$ tal que $\|x - \hat{y}_m\| < \varepsilon$, $\forall m \geq M$, para algum $M \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $n \geq M$. Seja $\hat{y} = (y_1 + ... + y_{M-1} + \hat{y}_M + ... + \hat{y}_n)/n$, para $y_j \in E(\overline{co}Y_j)$ arbitrario, $i = 1, 2, ..., M-1$, e seja $\Psi_n = \{E(\overline{co}Y_1) + E(\overline{co}Y_2) + ... + E(\overline{co}Y_n)\}/n$. Então,

$$\begin{aligned} \inf_{y \in \Psi_n} \|x - y\| &\leq \|x - \hat{y}\| \\ &\leq \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{j=1}^{M-1} \|x - y_j\| + \tfrac{n-M+1}{n}\varepsilon \\ &\leq \tfrac{2(M-1)}{n} E\left\{\|X_1\|_H\right\} + \tfrac{n-M+1}{n}\varepsilon \leq 2\varepsilon, \end{aligned} \tag{7.5}$$

para qualquer $n \geq M_0 = \max\{M, M_1\}$, onde $M_1 = 2(M-1)E\left\{\|X_1\|_H\right\}/\varepsilon$.

Agora para $y \in \Psi_n$ fixo, usando o Lema 7.2 parte (b) e procedendo de maneira análoga ao anaálise da prova da parte (a), temos que

$$\inf_{x \in E(\overline{co}X_1)} \|x - y\| \leq 2\varepsilon, \tag{7.6}$$

para qualquer $n \geq M_0$. Finalmente, o resultado segue de (7.5) e de (7.6). ■

7.2 Uma LFGN para conjuntos aleatórios fechados

Teorema 7.4. *Seja $X_1, X_2, ...$ uma sequência de conjuntos aleatórios fechados e não vazios de $\mathbb{R}^p$, i.i.d. com $E\left\{\|X_1\|_H\right\} < \infty$. Então*

$$H\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}, E\{\overline{co}X_1\}\right) \to 0, \quad q.t.p.$$

quando $n \to \infty$.

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} H\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}, E\{\overline{co}X_1\}\right) &\leq H\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}, \frac{Y_1 + ... + Y_n}{n}\right) + \\ &H\left(\frac{Y_1 + ... + Y_n}{n}, \frac{\overline{co}Y_1 + ... + \overline{co}Y_n}{n}\right) + \\ &H\left(\frac{\overline{co}Y_1 + ... + \overline{co}Y_n}{n}, \frac{E\{\overline{co}Y_1\} + ... + E\{\overline{co}Y_n\}}{n}\right) + \\ &H\left(\frac{E\{\overline{co}Y_1\} + ... + E\{\overline{co}Y_n\}}{n}, E\{\overline{co}X_1\}\right). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Para provar o resultado devemos demonstrar que cada termo no lado direito de (7.7) converge para 0 q.t.p. quando $n \to \infty$.

Primeiro, pelo Lema 7.1 temos que

$$H\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}, \frac{Y_1 + ... + Y_n}{n}\right) \to 0, \quad a.s.$$

quando $n \to \infty$.

Segundo, pelo Lema de Shapley-Folkman (ver Arrow e Hahn [5]) temos que

$$H\left(\frac{Y_1 + ... + Y_n}{n}, \frac{\overline{co}Y_1 + ... + \overline{co}Y_n}{n}\right) \leq \frac{\sqrt{p}}{n} \max_{1\leq i\leq n} \|Y_i\|_H. \tag{7.8}$$

Como $\|Y_i\|_H \leq \|X_i\|_H$, $\forall i$, e $E\left\{\|X_1\|_H\right\} < \infty$, o lado direito de (7.8) converge a 0 q.t.p. quando $n \to \infty$ (ver por exemplo o Lema 1 em Babu [11]).

Terceiro, Pelo Teorema 20 em Lyashenko [56], para provar que

$$H\left(\frac{\overline{co}Y_1 + ... + \overline{co}Y_n}{n}, \frac{E\{\overline{co}Y_1\} + ... + E\{\overline{co}Y_n\}}{n}\right) \to 0, \quad q.t.p.$$

quando $n \to \infty$ é suficiente ver que

$$\sum_{i\geq 1} \frac{E\left[H^2\left(\overline{co}Y_i, E\{\overline{co}Y_i\}\right)\right]}{i^2} < \infty, \tag{7.9}$$

e que todo os $E\{\overline{co}Y_i\}$ sejam limitados, $\forall i$.

Todo $E\{\overline{co}Y_i\}$ é limitado pois

$$\|E\{\overline{co}Y_i\}\|_H \leq E\{\|Y_i\|_H\} \leq E\{\|X_1\|_H\} < \infty, \quad \forall i. \tag{7.10}$$

Como $H\left(\overline{co}Y_i, E\{\overline{co}Y_i\}\right) \leq \|\overline{co}Y_i\|_H + \|E\{\overline{co}Y_i\}\|_H$, temos

$$\sum_{i\geq 1} \frac{E\left[H^2\left(\overline{co}Y_i, E\{\overline{co}Y_i\}\right)\right]}{i^2} \leq \sum_{i\geq 1} \frac{E\left\{\|\overline{co}Y_i\|_H^2\right\}}{i^2} +$$
$$2\sum_{i\geq 1} \frac{\|E\{\overline{co}Y_i\}\|_H E\left\{\|\overline{co}Y_i\|_H\right\}}{i^2} + \sum_{i\geq 1} \frac{\|E\{\overline{co}Y_i\}\|_H^2}{i^2}.$$

De (7.10),

$$\sum_{i\geq 1} \frac{\|E\{\overline{co}Y_i\}\|_H E\left\{\|\overline{co}Y_i\|_H\right\}}{i^2} < \infty$$

e

$$\sum_{i\geq 1}\frac{\|E\{\overline{co}Y_i\}\|_H^2}{i^2}<\infty.$$

Já que $\|\overline{co}Y_i\|_H \leq i$, $\forall i$ e $\sum_{i\geq k} 1/i^2 \leq 2/k$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1}\frac{E\left\{\|\overline{co}Y_i\|_H^2\right\}}{i^2} &\leq \textstyle\sum_{i\geq 1}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{(k+1)^2}{i^2}P\left(k\leq \|X_1\|_H<k+1\right)\\
&= \sum_{k\geq 1}k^2P\left(k-1\leq \|X_1\|_H<k\right)\sum_{i\geq k}\frac{1}{i^2}\\
&\leq 2\sum_{k\geq 1}kP\left(k-1\leq \|X_1\|_H<k\right)\\
&\leq 2E\left\{\|X_1\|_H\right\}+1<\infty.
\end{aligned}$$

e portanto (7.9) está verificado.

Finalmente, pelo Lema 7.3

$$H\left(\frac{E(\overline{co}Y_1)+E(\overline{co}Y_2)+...+E(\overline{co}Y_n)}{n},E(\overline{co}X_1)\right)\to 0,$$

quando $n\to\infty$. Isto completa a prova. ■

CAPÍTULO 8

LFGN e o TCL para variáveis aleatórias fuzzy

Em muitas situações reais as incertezas de dados provém de duas fontes: do mecanismo aleatório e da incerteza dos resultados. As variáveis aleatórias fuzzy foram introduzidas por Puri e Ralescu em [65] e são ferramentas satisfatórias para modelar tais situações. As variáveis aleatórias Fuzzy (vaf's) generalizam os conceitos de variáveis aleatórias bem como os de conjuntos aleatórios.

Para utilizar esta ferramenta para análise estatística de dados inexatos, vários autores estenderam alguns resultados clássicos sobre variáveis aleatórias para vaf. Em particular, a preocupação é com a ação assintótica da soma de vaf. Neste sentido, a lei forte de grandes números (LFGN) clássica foi estendida por Arstein em [7] para conjuntos aleatórios e por Colubi [22] para vaf. Embora, o resultado em [22] é uma LFGN mais geral para vaf da que apresentamos aqui, a nossa versão tem a vantagem de apresentar uma prova muito mais simples. Nosso resultado é basicamente uma generalização do resultado apresentado em [6] para conjuntos aleatórios.

Outro resultado clássico de grande importância para variáveis aleatórias é o teorema central de limite (TCL). Weil, em [95], prova o TCL para conjuntos aleatórios. Extensões para vaf podem ser encontradas em [51] e [68]. Neste Capítulo provamos o TCL que estende o resultado apresentado em [51] e consideramos condições diferentes daquelas dadas em [68].

O nosso TCL estende [51] em dois aspectos: em [51] os autores trabalham com o espaço de conjuntos fuzzy compactos convexos com aplicação de nível Lipchitz, o qual é um espaço separável mas não é completo (ver [70]), enquanto mostramos que basta trabalharmos com conjuntos fuzzy compactos com aplicação de nível contínua para provarmos o TCL para vaf's.

Nós também gostaríamos de salientar que a condição que impomos nas vaf para obtermos o TCL, a continuidade da aplicação de nível, é diferente do assumido em [68], a convexidade dos níveis dos conjuntos fuzzy. Nenhum destas suposições requer o outro. A diferença nas condições assumidas é devido à forma como é vista a não separabilidade do espaço métrico de conjuntos fuzzy envolvida. Para resolver esta dificultade, em [68] os autores identificaram isometricamente vaf (que tem níveis compactos convexos) com um processo empírico e então aplicaram os resultados obtidos em [94]. Nossa abordagem é semelhante ao que foi usado em [95].

Os argumentos principais que foram utilizados nos trabalhos [7] e [95], são o Teorema de Shapley e Folkman, que generalizamos ao contexto fuzzy, e o resultado dado em Mourier [59], que aplicamos diretamente usando o Teorema de imersão dado em [70]. Este Teorema de imersão será nossa ferramenta principal.

O Capítulo está organizado como segue. Na Seção 8.1, depois de introduzirmos algumas notações, discutiremos o Teorema de imersão. Na Seção 8.2 apresentamos o conceito de vaf e estabelecemos algumas propriedades. Na última Seção expomos nossos resultados principais.

Este Capítulo será publicado em [45].

8.1 Notações e o Teorema de imersão

Como tinhamos visto nos Capítulos anteriores, $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ denota a família dos conjuntos fuzzy compactos sobre $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$, a família de todos os conjuntos fuzzy compactos e convexos, é um subespaço fechado de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$ é um espaço métrico, onde D é a métrica de supremo (uma extensão da métrica de Hausdorff), isto é, dado $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a distância entre u e v é dado por

$$D(u,v) = \sup_{\alpha\in[0,1]} H([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

A seguir daremos notações de algumas classes de conjuntos fuzzy os quais serão úteis.

Definição 8.1. *Seja $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um conjunto fuzzy.*

(*a*) *Diremos que u é um conjunto fuzzy com* **nível contínuo** *se a aplicação $\alpha \to [u]^\alpha$ é H-contínua, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$|\alpha - \beta| < \delta \Rightarrow H([u]^\alpha, [u]^\beta) < \epsilon.$$

(*b*) *Diremos que u é um conjunto fuzzy com* **nível Lipchitz** *se existe uma constante $L \geq 0$, tal que*

$$H([u]^\alpha, [u]^\beta) \leq L|\alpha - \beta|,$$

para todo $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Neste Capítulo consideraremos os seguintes subespaços de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$

$\mathcal{F}^C(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \ / \ u \text{ tem nível contínuo}\}$;

$\mathcal{F}^L(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \ / \ u \text{ tem nível Lipchitz}\}$;

$\mathcal{F}^C_C(\mathbb{R}^n) := \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}^C(\mathbb{R}^n)$;

$\mathcal{F}^L_C(\mathbb{R}^n) := \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}^L(\mathbb{R}^n)$.

Para cada $A \in K(\mathbb{R}^n)$ denotaremos por co$A$ a envoltória convexa de A.

Proposição 8.2. *Seja $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Então a família $(\mathrm{co}[u]^\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ satisfaz*

(*a*) $\mathrm{co}[u]^\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$, $\forall\, \alpha \in [0,1]$;

(*b*) *se $\alpha \leq \beta$ então $\mathrm{co}[u]^\alpha \supset \mathrm{co}[u]^\beta$; e*

(*c*) *para todo $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_n, ...$ tal que $\alpha_n \uparrow \alpha$, $\mathrm{co}[u]^\alpha = \bigcap_{n=1}^\infty \mathrm{co}[u]^{\alpha_n}$.*

Demonstração: Os items (a) e (b) são imediatos. Para provar (c), seja $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_n, ...$ tal que $\alpha_n \uparrow \alpha$, então $[u]^\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty}[u]^{\alpha_n}$ e portanto $\mathrm{co}[u]^\alpha = \mathrm{co}\bigcap_{n=1}^{\infty}[u]^{\alpha_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{co}[u]^{\alpha_n}$. Isto completa a prova. ■

Da Proposição 8.2 segue que a família $(\mathrm{co}[u]^\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ satisfaz as condições do teorema de representação de Negoita e Ralescu (ver o primeiro Capítulo), e portanto existe um conjunto fuzzy, $\mathrm{co}(u)$, tal que

$$[\mathrm{co}(u)]^\alpha = \mathrm{co}[u]^\alpha, \qquad \forall\alpha \in [0,1].$$

Note que se $u \in \mathcal{F}^C(\mathbb{R}^n)$, então $\mathrm{co}(u) \in \mathcal{F}_C^C(\mathbb{R}^n)$, pois $H(\mathrm{co}A, \mathrm{co}B) \leq H(A,B)$, $\forall\ A, B \in K(\mathbb{R}^n)$.

Uma consequência das últimas considerações sobre $\mathrm{co}[u]$ nos leva ao seguinte resultado.

Corolário 8.3. *Sejam* $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, *então* $\mathrm{co}(u+v) = \mathrm{co}(u) + \mathrm{co}(v)$.

8.1.1 O teorema de imersão

Como tinhamos dito na introdução deste Capítulo, a ferramenta principal para provarmos a nossa versão para a LFGN e o TCL para vaf's é a extensão do Teorema de imersão de Minkowski dado em [70]. A seguir, apresentamos este Teorema e discutimos algumas de suas consequências.

Denotemos por $C([0,1]\times S^{n-1})$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas sobre $[0,1]\times S^{m-1}$ munido com a métrica usual d_∞,

$$d_\infty(f,g) = \max_{z\in[0,1]\times S^{m-1}} |f(z) - g(z)|,$$

e denotemos por $\|\cdot\|_\infty$ a sua norma associada.

Puri e Ralescu em [66], provaram que existe uma imersão isométrica $j : \mathcal{F}_C^L(\mathbb{R}^n) \to C([0,1]\times S^{n-1})$. Por outro lado, $(\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n), D)$ não é separável, propriedade que é interesante na teoria de integração, mas $(\mathcal{F}_C^L(\mathbb{R}^n), D)$ é separável. Dasafortunadamente, $(\mathcal{F}_C^L(\mathbb{R}^n), D)$ não é um subespaço completo de $(\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n))$.

Já que $\mathcal{F}_C^L(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{F}_C^C(\mathbb{R}^n)$ e $(\mathcal{F}_C^C(\mathbb{R}^n), D)$ é um subespaço fechado de $(\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n), D)$, e portanto completo, a pergunta que surge é: será que j pode ser estendida à classe $\mathcal{F}_C^C(\mathbb{R}^n)$?. A resposta é afirmativa, como mostra o seguinte teorema.

Teorema 8.4. *A aplicação $j : \mathcal{F}_C^L(\mathbb{R}^n) \to C([0,1] \times S^{n-1})$ definida por $j(u) = S_u$ é positivamente homogênea, aditiva e também uma isometria.*

Demonstração: Ver [70]. ■

Como uma consequência imediata do Teorema de 8.4, o espaço métrico $(\mathcal{F}_C^C(\mathbb{R}^n), D)$ é separável. Em [70] os autores também provaram que $\mathcal{F}_C^C(\mathbb{R}^n)$ é o subespaço maximal completo e separável de $\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ que pode ser imerso em $C([0,1] \times S^{n-1})$ via a isometria j.

Sejam $u, v \in \mathcal{F}_C^C(\mathbb{R}^n)$, do Teorema 8.4 segue que

$$\begin{aligned} D(u,v) &= \sup\{|S_u(\alpha,z) - S_v(\alpha,z)| \ / \ (\alpha,z) \in [0,1] \times S^{n-1}\} \\ &= \|S_u - S_v\|_\infty , \end{aligned}$$

e assim,

$$\|u\| = \sup\{|S_u(\alpha,z)| \ / \ (\alpha,z) \in [0,1] \times S^{n-1}\} = \|S_u\|_\infty .$$

8.2 Variáveis aleatórias fuzzy

Definição 8.5. *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Uma* **variável aletória fuzzy** *(vaf) X é uma função Borel mensurável $X : \Omega \to (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$, no sentido que $X^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$, onde $\mathcal{S}$ é a σ-algebra gerado pelos abertos do espaço métrico $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$.*

Podemos ver que a vaf generaliza o conceito de conjuntos aleatórios compactos, basta identificar cada conjunto aleatório com sua função característica.

A seguir damos algumas propriedades de vaf.

Proposição 8.6. *Seja $X : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma vaf. Então*

(a) $coX : \Omega \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$, onde $coX(\omega) = co\{X(\omega)\}$, é uma vaf;

(b) $[X]^\alpha : \Omega \to K(\mathbb{R}^n)$, onde $[X]^\alpha(\omega) = [X(\omega)]^\alpha$, é um conjunto aleatório para cada $\alpha \in [0,1]$;

(c) $\|X\| : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória.

Demonstração: Para a demonstração consultar [51]. ■

Seja $X : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma vaf. Diremos que X é **integralmente limitada** se $[X]^\alpha$ é um conjunto aleatório integralmente limitado para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Proposição 8.7. *Seja $X : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma vaf integralmente limitada, então existe um único conjunto fuzzy $v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$[v]^\alpha = \int_\Omega [X]^\alpha dP = E([X]^\alpha) \tag{8.1}$$

para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Demonstração: Dada a família $\{\int_\Omega [X]^\alpha dP\}_{\alpha\in[0,1]}$ temos que esta satisfaz as condições do teorema de representação (ver [65]). Logo existe um conjunto fuzzy $v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz a relação (8.1). ■

Definição 8.8. *Seja $X : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma vaf integralmente limitada. Então a* **esperança** *de X, denotado por $\mathbb{E}(X)$, é o único conjunto fuzzy $v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$[\mathbb{E}(X)]^\alpha = [v]^\alpha = E([X]^\alpha).$$

Como uma consequência do resultado obtido por Aumann (ver [10]) temos que se P é não atómica, então $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(coX)$.

Proposição 8.9. *Seja $X : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma vaf integralmente limitada. Então a função suporte fuzzy $S_X(\alpha, \psi)$ é uma variável aleatória para todo $(\alpha, \psi) \in [0, 1] \times S^{n-1}$ e*

$$S_{\mathbb{E}(X)} = E(S_X).$$

Demonstração: É uma consequência do Teorema 6.9. ■

8.3 Resultados principais

Como tinhamos dito na introdução, para provar a nossa versão da LFGN e TCL para vaf's necessitamos, além do Teorema de imersão, generalizar ao contexto fuzzy o Teorema de Shapley e Folkman (ver [5]). Assim, primeiramente damos esta generalização.

Proposição 8.10. *Sejam* $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ *com* $\|u_i\| < M$, $1 \leq i \leq n$, *para algum número positivo e constante* $M \in \mathbb{R}$. *Se* $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$, *então*

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{a_n}, \text{co}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{a_n}\right)\right) \leq a_n^{-1}\sqrt{m}M, \qquad \forall n.$$

Em particular, se $a_n^{-1} \to 0$, *então*

$$\lim_{n\to\infty} D\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{a_n}, \text{co}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{a_n}\right)\right) = 0.$$

Demonstração: Como $[u_i]^\alpha \in K(\mathbb{R}^m)$ e $\|[u_i]^\alpha\| \leq \|u_i\| < M$, $i = 1, 2, ...n$, da Proposição em [7] temos que

$$\begin{aligned} H\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{[u_i]^\alpha}{a_n}, \text{co}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{[u_i]^\alpha}{a_n}\right)\right) &\leq a_n^{-1} H\left(\sum_{i=1}^{n}[u_i]^\alpha, \text{co}\left(\sum_{i=1}^{n}[u_i]^\alpha\right)\right) \\ &\leq a_n^{-1}\sqrt{m}M, \end{aligned}$$

e portanto

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{a_n}, \text{co}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{a_n}\right)\right) \leq a_n^{-1}\sqrt{m}M.$$

■

8.3.1 Lei forte de grandes números

Teorema 8.11. *Seja* X_i, $i = 1, 2, ...$ *uma sequência de vaf's independentes e identicamente distribuidas em* $\mathcal{F}^C(\mathbb{R}^m)$ *com* $\mathbb{E}\|X_1\| < \infty$ *e* $T_n = X_1 + ... + X_n$. *Então*

$$\lim_{n\to\infty} D\left(\frac{T_n}{n}, \mathbb{E}(\text{co}X_1)\right) = 0 \quad q.t.p.$$

Demonstração: Seja $Y_i = \text{co}X_i$, $1 \leq i \leq n$, e $R_n = Y_1 + ... + Y_n$. Como $\mathbb{E}\|\text{co}X_1\| = \mathbb{E}\|Y_1\| = \mathbb{E}\|S_{Y_1}\|_\infty < \infty$, pela desigualdade triangular temos que

$$D\left(\frac{T_n}{n}, \mathbb{E}X_1\right) \leq D\left(\frac{T_n}{n}, \frac{R_n}{n}\right) + D\left(\frac{R_n}{n}, \mathbb{E}Y_1\right). \tag{8.2}$$

Da Proposição 8.10 e do Lema 1 em [11],

$$D\left(\frac{T_n}{n}, \frac{R_n}{n}\right) \leq n^{-1}\sqrt{m}\max_{i\leq n}\|X_i\| \to 0 \quad q.t.p., \tag{8.3}$$

quando $n \to \infty$.

Já que $\mathbb{E}S_{Y_i}(\alpha, z) = S_{\mathbb{E}Y_i}(\alpha, z)$, usando a isometria entre Y_i e seu processo suporte $S_{Y_i}(\alpha, z)$, temos

$$D\left(\frac{R_n(w)}{n}, \mathbb{E}Y_1\right) = \left\| S_{\frac{R_n(w)}{n}} - S_{\mathbb{E}Y_1} \right\|_\infty, \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{8.4}$$

Agora, de (8.4) e da LFGN em $C([0,1] \times S^{m-1})$ (ver [59]),

$$D\left(\frac{R_n}{n}, \mathbb{E}Y_1\right) \to 0 \quad q.t.p., \tag{8.5}$$

quando $n \to \infty$. Finalmente, o resultado segue de(8.2), (8.3) and (8.5). ■

8.3.2 Teorema central do limite

Para cada vaf X em $\mathcal{F}_C^C(\mathbb{R}^m)$, seja Ψ_X a covariância do processo estocástico $S_X(\alpha, z)$,

$$\Psi_X\{(\alpha, z), (\beta, g)\} = \mathbb{E}\{S_X(\alpha, z) - S_{\mathbb{E}X}(\alpha, z)\}\{S_X(\beta, g) - S_{\mathbb{E}X}(\beta, g)\}.$$

Teorema 8.12. *Sejam X_i, $i = 1, 2, ...$ vaf's independentes e identicamente distribuidas em $\mathcal{F}^C\mathbb{R}^m$ com $\mathbb{E}\|X_1\|^2 < \infty$ e $T_n = X_1 + ... + X_n$. Então*

$$\sqrt{n}D\left(\frac{T_n}{n}, \mathbb{E}\mathrm{co}X_1\right) \longrightarrow \|Z\|, \quad \textit{em distribuição,}$$

quando $n \to \infty$, onde Z é uma variável Gaussian centrada em $C([0,1] \times S^{m-1})$ com covariância $\Psi_{\mathrm{co}X_1}$.

Demonstração: Pela desigualdade triangular e seguindo a notação da prova do Teorema 8.11, temos que

$$\sqrt{n}D\left(\frac{T_n}{n}, \mathbb{E}X_1\right) \leq \sqrt{n}D\left(\frac{T_n}{n}, \frac{R_n}{n}\right) + \sqrt{n}D\left(\frac{R_n}{n}, \mathbb{E}Y_1\right). \tag{8.6}$$

Da Proposição 8.10 e do Lema 1 em [11],

$$\sqrt{n}D\left(\frac{T_n}{n}, \frac{R_n}{n}\right) \leq \sqrt{m}\left(\frac{\max_{1\leq i\leq n}\|X_i\|^2}{n}\right)^{1/2} \to 0 \quad a.s., \tag{8.7}$$

quando $n \to \infty$.

Do Teorema 8.4,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n}D\left(\tfrac{R_n}{n}, \mathbb{E}Y_1\right) &= \sqrt{n}\left\| S_{\frac{R_n}{n}} - S_{\mathbb{E}Y_1} \right\|_\infty \\
&= \left\| \tfrac{1}{\sqrt{n}} \textstyle\sum_{i=1}^n \left(S_{Y_i} - \mathbb{E}S_{Y_1}\right) \right\|_\infty .
\end{aligned} \tag{8.8}
$$

Agora, para aplicar o TCL em $C([0,1]\times S^{m-1})$ (Corolário 7.17 em [4]), temos que provar duas condições. Primeiro temos que verificar que

$$\int_0^1 h^{\frac{1}{2}}(t)dt < \infty, \tag{8.9}$$

onde

$$h(t) = \log N(t), \quad t > 0,$$

e $N(t)$ é o número mínimo de esferas com raio t que cobrem $[0,1] \times S^{m-1}$ com a métrica e sobre $[0,1] \times S^{m-1}$, definida por

$$e\{(\alpha, z), (\beta, g)\} = |\alpha - \beta| + \|z - g\| .$$

Como um cubo de dimensão 2 podemos cobrir com $(2k)^m$ cubos de lado $1/k$, então $[0,1] \times S^{m-1}$ podemos cobrir com $(2k)^{m+1}$ esferas de raio $1/k$, e assim

$$N(t) \leq K_m t^{-1}, \quad t > 0$$

onde K_m é uma constante. Portanto, a integral (8.9) é finita.

Agora verificaremos a segunda condição,

$$|S_{Y_1}(\alpha, z) - S_{Y_1}(\beta, g)| \leq Me\{(\alpha, z), (\beta, g)\}.$$

onde M é uma variável aleatória não negativa com segundo momento finito. Esta condição se satisfaz, pois

$$
\begin{aligned}
|S_{Y_1}(\alpha, z) - S_{Y_1}(\beta, g)| &= |S_{Y_1}\{(\alpha, z) - (\beta, g)\}| \\
&\leq \|S_{Y_1}\| \, e\{(\alpha, z), (\beta, g)\}.
\end{aligned}
$$

Logo, pelo TCL em $C([0,1] \times S^{m-1})$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \{S_{Y_i} - \mathbb{E}(S_{Y_1})\} \longrightarrow Z, \quad \text{em distribuição,} \tag{8.10}$$

quando $n \to \infty$, onde Z é uma variável Gaussian centrada em $C([0,1] \times S^{m-1})$ com covariância Ψ_{X_1}.

Finalmente, como a aplicação $(\alpha, z) \to \|(\alpha, z)\|$, $(\alpha, z) \in [0,1] \times S^{m-1}$, é contínua, o resultado segue de(8.6), (8.7), (8.8) e (8.10). $\blacksquare$

CAPÍTULO 9

Procesos fuzzy s-convexos

Em 1967, Rockafellar [80] introduz a noção de processos convexos (ver também [79]), que são multifunções cujos gráficos são cones convexos e fechados. Por exemplo, estes podem ser vistos como a versão multívoca de um operador linear e contínuo. As derivadas de algumas multifunções são processos convexos e fechados, que é uma propriedade desejável para uma derivada (ver [2]). Uma propriedade importante de processos convexos é que é possível achar a transposta de um processo convexo e fechado e usar os benefícios da teoria de dualidade, e como é conhecido, estes fatos são usuais na teoria de otimização (ver por exemplo [15], [81], [82], [83], [16]).

A extensão desta noção para o contexto fuzzy foi feita por Matłoka [60]. Recentemente, Syan, Low and Wu [96] observaram que a definição de Matłoka é muito estrita. Portanto, eles dão outra definição que estende a definição de Matłoka. Em 2000 os autores introduziram o conceito de multifunção fuzzy M-convexa [23], observamos que o conceito de multifunção fuzzy 1-convexa coincide com a definição de processos fuzzy convexos dado em [96] (ver Teorema 3.4, p. 195 em [96]) para o caso M=1.

Em 1978, Breckner introduz o conceito de funções s-convexas como uma generalização de funções convexas [17], e em 1993 estuda a versão multívoca [18]. Observemos que processos convexos são um caso particular de multifunções s-convexas. Também, no mesmo trabalho [18], Breckner prova um fato importante: a relação de multifunções s-convexas e a s-convexidade da função suporte. Outros trabalhos relacionados com este tema são [19],[91] [92], [93].

Neste Capítulo, introduzimos a versão fuzzy da definição de Breckner, e esta generalização será chamada processo fuzzy s-convexo. Além disso, devemos provar a sua relação com a função suporte e estudamos suas propriedades.

O Capítulo está organizado como segue: Na primeira Seção introduzimos algumas notações, definições e resultados preliminares. Na Seção 9.2 estabelecemos nossos resultados principais e finalmente na Seção 9.3 provamos algumas propriedes algébricas e a conexão com a integral média fuzzy.

Este Capítulo foi publicado em [25].

9.1 Definições e notações

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço Euclidiano n-dimensional. Seja $s \in]0,1]$ e seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que para todo $a \in [0,1]$ e todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ a seguinte inequação se cumpre

$$f((1-a)x + ay) \leq (1-a)^s f(x) + a^s f(y). \tag{9.1}$$

Estas funções são chamadas s-convexas e foram introduzidas por Breckner em [17], onde também é possível achar exemplos de funções s-convexas.

Denotemos por $P(\mathbb{R}^n)$ o família de todos os subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^n$, em [18] Breckner generaliza a noção de s-convexidade para multifunções $F : \mathbb{R}^m \to P(\mathbb{R}^n)$, ele diz que F é s-convexa se a seguinte relação se verifica

$$(1-a)^s F(x) + a^s F(y) \subset F((1-a)x + ay) \tag{9.2}$$

para todo $a \in [0,1]$ e todo $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Agora, lembremos algumas notações e conceitos dados nos Capítulos anteriores que serão de utilidade neste Capítulo.

$\Im(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço de todos os conjuntos fuzzy não vazios sobre $\mathbb{R}^n$. Um conjunto fuzzy u é chamado convexo [54] se

$$u(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geq \min\{u(y_1), u(y_2)\},$$

para todo $y_1, y_2 \in$ supp $(u) = \overline{\{y \ / \ u(y) > 0\}}$ e $\lambda \in]0,1[$.

A soma e multiplicação por um escalar é definido via o Principio de Extensão por

$$(u+v)(y) = \sup_{y_1,y_2 : y_1+y_2=y} \min\{u(y_1), v(y_2)\}$$

e

$$(\lambda u)(y) = \begin{cases} u(\frac{y}{\lambda}) & se \quad \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(y) & se \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Uma relação de ordem $\subseteq$ é dada por

$$u \subseteq v \Leftrightarrow u(y) \leq v(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

A interseção de dois conjuntos fuzzy u, v, denotado por $u \wedge v$, é definido por

$$(u \wedge v)(y) = \min\{u(y), v(y)\}.$$

Qualquer aplicação $F : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$ será chamada **processo fuzzy**. Para cada $\alpha \in [0,1]$ definimos a multifunção $F_\alpha : \mathbb{R}^m \to P(\mathbb{R}^n)$ por

$$F_\alpha(x) = [F(x)]^\alpha.$$

Um processo fuzzy $F : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$ é chamado convexo se satisfaz a seguinte relação

$$F((1-a)x_1 + ax_2)(y) \geq \sup_{y_1,y_2 : (1-a)y_1+ay_2=y} \min\{F(x_1)(y_1), F(x_2)(y_2)\}, \qquad (9.3)$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, $a \in]0,1[$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Esta noção de processo fuzzy convexo foi recentemente introduzida em [96].

A seguir introduzimos a definição de processos fuzzy s-convexos. Esta definição é uma generalização da noção de s-convexidade para multifunções (9.2).

Definição 9.1. *Seja $s \in]0,1]$. Um processo fuzzy $F : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$ é chamado* **processo fuzzy s-convexo**, *se para todo $a \in]0,1[$ e para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$ satisfaz a condição*

$$(1-a)^s F(x) + a^s F(y) \subseteq F((1-a)x + ay).$$

Observação 9.2. *Usualmente processos fuzzy 1-convexos são simplemente chamados processos fuzzy convexos (see [96]).*

Exemplo 9.3. *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função s-convexa. Consideramos $F : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R})$ definida por*

$$F(x) := \chi_{[f(x),\infty[},$$

onde χ_A denota a função característica de A.

Como f é s-convexa, então temos que

$$[f((1-a)x+ay),\infty[\ \supset [(1-a)^s f(x),\infty[\quad +[a^s f(y),\infty[$$

para todo $a \in]0,1[$ e $x, y \in \mathbb{R}^m$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} F((1-a)x+ay) &= \chi_{[f(((1-a)x+ay),\infty[} \\ &\supseteq \chi_{\{(1-a)^s[f(x),\infty[\}} + \chi_{\{a^s[f(y),\infty[\}} \\ &= (1-a)^s\chi_{[f(x),\infty[} + a^s\chi_{[f(y),\infty]} \\ &= (1-a)^s F(x) + a^s F(y). \end{aligned}$$

Desta maneira, F é um processos fuzzy s-convexo.

9.2 Resultados principais

Nesta Seção, apresentamos algumas propriedades de processos fuzzy s-convexos e damos duas caracterizações: primeiro usando a função de pertinência e depois usando o conceito de função suporte fuzzy.

Teorema 9.4. *Seja $F : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy. F é um processo fuzzy s-convexo se, e somente se,*

$$F(ax_1+(1-a)x_2)(y) \geq \sup_{y_1,y_2:a^s y_1+(1-a)^s y_2=y} \min\{F(x_1)(y_1), F(x_2)(y_2)\} \tag{9.4}$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, $a \in]0,1[$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Suponhamos que F é um processo fuzzy s-convexo. Seja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, $a \in]0,1[$ e $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Então, da Definição 9.1, da soma e multiplicação escalar sobre

$\Im(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}
& F(ax_1+(1-a)x_2)(y) \\
\geq\ & (a^sF(x_1)+(1-a)^sF(x_2))(y) \\
=\ & \sup_{y_1,y_2:y_1+y_2=y} \min\{a^sF(x_1)(y_1),(1-a)^sF(x_2)(y_2)\} \\
=\ & \sup_{y_1,y_2:y_1+y_2=y} \min\left\{F(x_1)\left(\frac{y_1}{a^s}\right),F(x_2)\left(\frac{y_2}{(1-a)^s}\right)\right\} \\
=\ & \sup_{y_1,y_2:a^sy_1+(1-a)^sy_2=y} \min\{F(x_1)(y_1),F(x_2)(y_2)\}.
\end{aligned}$$

Assim, a relação (9.4) é satisfeita.

Reciprocamente, suponhamos que a relação (9.4) se satisfaz. Então, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, $a \in]0,1[$ e $y \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned}
& F(ax_1+(1-a)x_2)(y) \\
\geq\ & \sup_{y_1,y_2:a^sy_1+(1-a)^sy_2=y} \min\{F(x_1)(y_1),F(x_2)(y_2)\} \\
=\ & \sup_{y_1,y_2:y_1+y_2=y} \min\left\{F(x_1)\left(\frac{y_1}{a^s}\right),F(x_2)\left(\frac{y_2}{(1-a)^s}\right)\right\} \\
=\ & (a^sF(x_1)+(1-a)^sF(x_2))(y),
\end{aligned}$$

o qual implica que F é s-convexo. ■

Proposição 9.5. *Seja $F : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy tal que*

(1) $F(x_1+x_2) \supseteq F(x_1)+F(x_2)\ \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}^m$;

(2) $F(ax) = a^sF(x)\ \forall a>0,\ \forall x \in \mathbb{R}^m$.

Então, F é um processo fuzzy s-convexo.

Demonstração: Seja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, $a \in]0,1[$ e $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Então, da adição e multiplicação escalar sobre $\Im(\mathbb{R}^n)$, e das condições (1) e (2), temos que

$$\begin{aligned}
& F(ax_1 + (1-a)x_2)(y) \\
\geq\ & (F(ax_1) + F((1-a)x_2))(y) \\
=\ & \sup_{y_1, y_2 : y_1 + y_2 = y} \min\{F(ax_1)(y_1), F((1-a)x_2)(y_2)\} \\
=\ & \sup_{y_1, y_2 : a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{F(ax_1)(a^s y_1), F((1-a)x_2)((1-a)^s y_2)\} \\
=\ & \sup_{y_1, y_2 : a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{(a^s F(x_1))(a^s y_1), ((1-a)^s F(x_2))((1-a)^s y_2)\} \\
=\ & \sup_{y_1, y_2 : a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{F(x_1)(y_1), F(x_2)(y_2)\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$F(ax_1 + (1-a)x_2)(y) \geq \sup_{y_1, y_2 : a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{F(x_1)(y_1), F(x_2)(y_2)\}$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, $a \in]0,1[$ e $y \in \mathbb{R}^n$, isto é, F satisfaz a relação (9.4) do Teorema 9.4. Portanto, F é um processo fuzzy s-convexo. ■

Proposição 9.6. *Um processo fuzzy $F : \mathbb{R}^m \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ é s-convexo se, e somente se, F_α é uma multifunção s-convexa para todo $\alpha \in [0,1]$.*

Demonstração: É uma consequencia das propriedades de nível de um conjunto fuzzy. ■

Teorema 9.7. *Seja $F : \mathbb{R}^m \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy. F é um processo fuzzy s-convexo se, e somente se, $S(F(\cdot), (\alpha, \psi))$ é s-côncava para todo (α, ψ), isto é,*

$$S(F(ax_1 + (1-a)x_2), (\alpha, \psi)) \geq a^s S(F(x_1), (\alpha, \psi)) + (1-a)^s S(F(x_2), (\alpha, \psi)).$$

Demonstração: Suponhamos que F é um processo fuzzy s-convexo. Seja $(\alpha, \psi) \in [0,1] \times \mathbb{R}^m$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e $a \in]0,1[$ arbitrarios. Então, da Proposição 9.6 e das propriedades da função suporte, temos que

$$\begin{aligned}
S(F(ax_1 + (1-a)x_2), (\alpha, \psi)) &= \sigma(F_\alpha(ax_1 + (1-a)x_2), \psi) \\
&\geq \sigma(a^s F_\alpha(x_1) + (1-a)^s F_\alpha(x_2), \psi) \\
&= a^s \sigma(F_\alpha(x_1), \psi) + (1-a)^s \sigma(F_\alpha(x_2), \psi).
\end{aligned}$$

Consequêntemente,

$$S(F(ax_1 + (1-a)x_2), (\alpha, \psi)) \geq a^s S(F(x_1), (\alpha, \psi)) + (1-a)^s S(F(x_2), (\alpha, \psi)).$$

Portanto, $S(F(\cdot), (\alpha, \psi))$ é s-concava.

Para provar a recíproca é suficiente ver que

$$S(F(ax_1 + (1-a)x_2), (\alpha, \psi)) \geq S(a^s F(x_1) + (1-a)^s F(x_2), (\alpha, \psi))$$

para todo $(\alpha, \psi) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$, que é uma consequência das propriedades da função suporte de um conjunto fuzzy. ■

9.3 Aplicações

Nesta Seção, apresentamos resultados sobre operações de processos fuzzy s-convexos e estudamos a s-convexidade da integral média.

Definição 9.8. *Sejam $F_1, F_2 : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$ processos fuzzy.*

(1) *A intersecção de F_1 e F_2, denotado por $F_1 \cap F_2 : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$, é definido por*

$$(F_1 \cap F_2)(x) = F_1(x) \wedge F_2(x).$$

(2) *A soma de F_1 e F_2, denotado por $F_1 + F_2 : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$, é definido por*

$$(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x).$$

(3) *A multiplicação por escalar λ, denotado por $\lambda F_1 : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$, é definido por*

$$(\lambda F)(x) = \lambda(F(x)).$$

Proposição 9.9. *Sejam $F_1, F_2 : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$ processos fuzzy s-convexos. Então, $F_1 \cap F_2$ é um processo fuzzy s-convexo.*

Demonstração: Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, $a \in]0,1[$ e $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Então,

$$\begin{aligned}
& ((F_1 \cap F_2)(ax_1 + (1-a)x_2))\,(y) \\
= \;& (F_1(ax_1 + (1-a)x_2) \wedge F_2(ax_1 + (1-a)x_2))\,(y) \\
= \;& \min\{F_1(ax_1 + (1-a)x_2)(y), F_2(ax_1 + (1-a)x_2)(y)\} \\
\geq \;& \min\Bigg\{ \sup_{a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{F_1(x_1)(y_1), F_1(x_2)(y_2)\}, \\
& \sup_{a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{F_2(x_1)(y_1), F_2(x_2)(y_2)\} \Bigg\} \\
\geq \;& \sup_{a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{\min\{F_1(x_1)(y_1), F_1(x_2)(y_2)\}, \min\{F_2(x_1)(y_1), F_2(x_2)(y_2)\}\} \\
= \;& \sup_{a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{F_1(x_1)(y_1), F_1(x_2)(y_2), F_2(x_1)(y_1), F_2(x_2)(y_2)\} \\
= \;& \sup_{a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{\min\{F_1(x_1)(y_1), F_2(x_1)(y_1)\}, \min\{F_1(x_2)(y_2), F_2(x_2)(y_2)\}\} \\
= \;& \sup_{a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{(F_1(x_1) \wedge F_2(x_1))(y_1), (F_1(x_2) \wedge F_2(x_2))(y_2)\} \\
= \;& \sup_{a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{(F_1 \cap F_2)(x_1)(y_1), (F_1 \cap F_2)(x_2)(y_2)\}
\end{aligned}$$

Do Teorema 9.4 obtemos que F é um processo fuzzy s-convexo. ∎

Proposição 9.10. *Sejam $F_1, F_2 : \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$ processos fuzzy s-convexos e $\lambda \geq 0$. Então, $F_1 + \lambda F_2$ é um processo fuzzy s-convexo.*

Demonstração: Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ e $a \in]0,1[$ arbitrarios. Então,

$$\begin{aligned}
& (F_1 + \lambda F_2)(ax_1 + (1-a)x_2) \\
= \;& F_1(ax_1 + (1-a)x_2) + \lambda F_2(ax_1 + (1-a)x_2) \\
\supseteq \;& (a^s F_1(x_1) + (1-a)^s F_1(x_2)) + \lambda\,(a^s F_2(x_1) + (1-a)^s F_2(x_2)) \\
= \;& (a^s F_1(x_1) + a^s \lambda F_2(x_1)) + ((1-a)^s F_1(x_2) + (1-a)^s \lambda F_2(x_2)) \\
= \;& a^s(F_1(x_1) + \lambda F_2(x_1)) + (1-a)^s(F_1(x_2) + \lambda F_2(x_2)),
\end{aligned}$$

o qual implica que

$$(F_1 + \lambda F_2)(ax_1 + (1-a)x_2) \supseteq a^s(F_1 + \lambda F_2)(x_1) + (1-a)^s(F_1 + \lambda F_2)(x_2).$$

Portanto, $F_1 + \lambda F_2$ é um processo fuzzy s-convexo. ∎

Observação 9.11. *Da proposição anterior, temos que a família de processos fuzzy s-convexos é um cone.*

A seguir devemos estudar a s-convexidade da integral média fuzzy de F. Para definição e propriedades da integral média fuzzy ver [23].

Definição 9.12. *[23] Seja $F : [0, b] \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma v.a.f. integralmente limitada. Então a multifunção fuzzy $M_F : (0, b] \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ definida por*

$$M_F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x F(t)dt \ , \ \forall x \in (0, b],$$

é chamada integral média fuzzy de F.

Observação 9.13. *Observe que tomando $t = xs$ na definição previa, a aplicação α-nível de M_F pode-se escrever como $[M_F(x)]^\alpha = \int_0^1 F_\alpha(xs)ds$, isto é, $M_F(x) = \int_0^1 F(xs)ds$.*

Teorema 9.14. *Seja $F : [0, b] \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ um v.a.f. integralmente limitada. Se F é s-convexa, então M_F também é s-convexa.*

Demonstração: Sejam F s-convexa, $x_1, x_2 \in [0, b]$ e $a \in]0, 1[$. Então, usando a Observação 9.13 e a Proposição 9.6, temos que

$$\begin{aligned}
[M_F(ax_1 + (1-a)x_2)]^\alpha &= \int_0^1 F_\alpha(ax_1 s + (1-a)x_2 s)ds \\
&\supset \int_0^1 (a^s F_\alpha(x_1 s) + (1-a)^s F(x_2 s))\, ds \\
&= a^s \int_0^1 F_\alpha(x_1 s)ds + (1-a)^s \int_0^1 F(x_2 s)ds \\
&= a^s \, [M_F(x_1)]^\alpha + (1-a)^s \, [M_F(x_2)]^\alpha
\end{aligned}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Portanto, M_F é s-convexa. ■

CAPÍTULO 10

Desigualdades de Hadamard e Jensen para processos fuzzy

Em [25] foi definido processos fuzzy s-convexos e foram estudadas algumas propriedades. Neste Capítulo, definimos processos fuzzy s-concavos, estudamos algumas propriedades e damos alguns resultados de desigualdades para ambos, processos fuzzy s-convexos e s-concavos.

O Capítulo está ordenado como segue: Na Seção 9.1 é dado a Definição de Processos fuzzy s-convexos sobre um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^m$. Na Seção 9.2 estudamos processo fuzzy s-côncavos sobre um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^m$. Na seção 9.3 apresentamos a desigualdade de tipo Hadamard e na última Seção apresentamos a desigualdade de tipo Jensen.

10.1 Processos fuzzy s-convexos

Em [25] os autores introduzeram a definição de processo fuzzy s-convexos sobre $\mathbb{R}^m$. Está definição pode-se dar também dada seguinte forma.

Definição 10.1. *Seja* $s \in]0,1]$. *Um processo fuzzy* $F : C \subset \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$ *é chamado* **processo fuzzy s-convexo sobre** C, *se para todo* $a \in]0,1[$ *e todo* $x, y \in C$ *se satisfaz a* *condição*

$$(1-a)^s F(x) + a^s F(y) \subseteq F\{(1-a)x + ay\}.$$

Como vimos no Capítulo anterior, esta definição generaliza a noção de s-convexidade para multifunções dado por Breckner [18], pois se $\Gamma : C \subseteq \mathbb{R}^m \to P(\mathbb{R}^n)$ é uma multifunção, então introduzendo $F(x) = \chi_{\Gamma(x)}$, vemos que a Definição 10.1 coincide com a definição de s-convexidade para multifunções.

Exemplo 10.2. *Consideremos o processo fuzzy $F : (0,\infty) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ que a cada $x \in (0,\infty)$ associa os pontos da reta real "muito maiores do que $\sqrt{x}$". Agora, definimos os processos fuzzy $F_1, F_2 : (0,\infty) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ como segue*

$$F_1(x)(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{x}} - 1 & se \quad \sqrt{x} \le t \le 2\sqrt{x}, \\ 1 & se \quad t \ge 2\sqrt{x}, \\ 0 & se \quad t \le \sqrt{x}, \end{cases}$$

$$F_2(x)(t) = \begin{cases} -\left(\frac{t-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) + 1 & se \quad \sqrt{x} \le t \le 2\sqrt{x}, \\ 1 & se \quad t \ge 2\sqrt{x}, \\ 0 & se \quad t \le \sqrt{x}. \end{cases}$$

Para F_1 e $x = 4$, temos que os pontos da reta real "muito maiores do que $\sqrt{4} = 2$" é o conjunto fuzzy

$$F_1(4)(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} - 1 & se \quad 2 \le t \le 4, \\ 1 & se \quad t \ge 4, \\ 0 & se \quad t \le 2, \end{cases}$$

isto significa que os pontos depois de 4 são "muito maiores do que 2", enquanto os pontos no intervalo $]2,4[$ são parcialmente "muito maiores do que 2", isto é, possuem um grau de pertinência ao conjunto fuzzy $F_1(4)$. Similarmente, podemos ver que $F_2(4)$ também modela o conjunto fuzzy dos pontos de reta real "muito maiores do que 2". Portanto, ambos F_1 e F_2 modelam o processo fuzzy F. Desta maneira, podemos achar diversos processo fuzzy que definam F. Por outro lado, note que F_1 é $\frac{1}{2}$-convexo, mas F_2 não é s-convexo para todo $s \in]0,1]$.

10.2 Processos fuzzy s-côncavos

Nesta Seção introduzimos o conceito de processos fuzzy s-côncavos e estabelecemos algumas propriedades. Este conceito generaliza a definição de multifunção s-concavo dado em [18].

Definição 10.3. *Seja $s \in]0,1]$. Um processo fuzzy $F : C \subset \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$ é chamado* **processo fuzzy s-côncavo sobre** *C, se para todo $a \in]0,1[$ e todo $x, y \in \mathbb{R}^m$ se satisfaz a seguinte condição*

$$F\{(1-a)x + ay\} \subseteq (1-a)^s F(x) + a^s F(y).$$

Processos fuzzy 1-côncavos são simplemente chamados processo fuzzy côncavos.

Exemplo 10.4. *Consideremos o processo fuzzy $F : [0,\infty) \to \Im(\mathbb{R})$, onde $F(x)$ é um conjunto fuzzy triangular isósceles com suporte $[-f(x), f(x)]$ onde $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função s-convexa. Então F é um processo fuzzy s-côncavo.*

A seguir daremos algumas caracterizações para processos fuzzy s-côncavos.

Teorema 10.5. *Seja $F : C \subset \mathbb{R}^m \to \Im(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy sobre C. Então, F é s-côncavo se, e somente se,*

$$F((1-a)x_1 + ax_2)(y) \leq \sup_{y_1,y_2:(1-a)^s y_1 + a^s y_2 = y} \min\{F(x_1)(y_1), F(x_2)(y_2)\},$$

para todo $a \in]0,1[$ e todo $x, y \in C$.

Agora, apresentamos outra caracterização usando o conceito de função suporte fuzzy.

Teorema 10.6. *Seja $F : C \subset \mathbb{R}^m \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy sobre C. Então, F é s-côncavo se, e somente se, $S(F(\cdot),(\alpha,\psi))$ é uma função s-convexa, isto é, $S(F(\cdot),(\alpha,\psi))$ satisfaz (4) para todo $(\alpha,\psi) \in [0,1] \times \mathbb{S}^m$.*

Demonstração: Suponhamos que F é um processo fuzzy s-côncavo. Sejam $(\alpha,\psi) \in [0,1] \times \mathbb{S}^m$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e $a \in]0,1[$. Então, das propriedades de função suporte, temos que

$$\begin{aligned} S(F(ax_1 + (1-a)x_2),(\alpha,\psi)) &\leq S(a^s F(x_1) + (1-a)^s F(x_2),(\alpha.\psi)) \\ &= \sigma(a^s F_\alpha(x_1) + (1-a)^s F_\alpha(x_2),\psi) \\ &= a^s \sigma(F_\alpha(x_1),\psi) + (1-a)^s \sigma(F_\alpha(x_2),\psi). \end{aligned}$$

Consequêntemente,

$$S(F(ax_1 + (1-a)x_2), (\alpha, \psi)) \le a^s S(F(x_1), (\alpha, \psi)) + (1-a)^s S(F(x_2), (\alpha, \psi)).$$

Portanto, $S(F(\cdot), (\alpha, \psi))$ é s-convexa. Para provar a recíproca basta ver que

$$S(F(ax_1 + (1-a)x_2), (\alpha, \psi)) \le S(a^s F(x_1) + (1-a)^s F(x_2), (\alpha, \psi))$$

para todo $(\alpha, \psi) \in [0,1] \times \mathbb{S}^m$, que é uma consequência das propriedades da função suporte de um conjunto fuzzy. ■

Exemplo 10.7. *Consideremos o processo fuzzy $F : [0, \infty) \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ dado por*

$$F(x)(t) = \begin{cases} \frac{t}{x^s} & se \quad 0 \le t \le x^s, \\ 0 & se \quad t \notin [0, x^s], \end{cases}$$

para $x \neq 0$ e $F(0) = \chi_{\{0\}}$. Temos que a função suporte fuzzy $S(F(\cdot),\ (\alpha, \psi))$, para cada $(\alpha, \psi) \in [0,1] \times S^1$, com $S^1 = \{-1, 1\}$, é dado por $S(F(x),\ (\alpha, 1)) = \alpha x^s$, que é uma função s-convexa e $S(F(x), (\alpha, -1)) = 0$ que também é s-convexa. Então, do Teorema 10.6 temos que F é um processo fuzzy s-côncavo.

Proposição 10.8. *Seja $F : C \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy sobre C tal que*

(a) $F(x+y) \subseteq F(x) + F(y)$,

(b) $F(tx) = t^s F(x)$.

Então F é um processo fuzzy s-côncavo sobre C.

Demonstração: Da soma e multiplicação por escalar sobre $\Im(\mathbb{R}^n)$, e das condições (a) e (b), temos que

$$\begin{aligned}
& F(ax_1 + (1-a)x_2)(y) \\
\le\ & (F(ax_1) + F((1-a)x_2))(y) \\
=\ & \sup_{y_1, y_2 : y_1 + y_2 = y} \min\{F(ax_1)(y_1), F((1-a)x_2)(y_2)\} \\
=\ & \sup_{y_1, y_2 : a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{F(ax_1)(a^s y_1), F((1-a)x_2)((1-a)^s y_2)\} \\
=\ & \sup_{y_1, y_2 : a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{(a^s F(x_1))(a^s y_1), ((1-a)^s F(x_2))((1-a)^s y_2)\} \\
=\ & \sup_{y_1, y_2 : a^s y_1 + (1-a)^s y_2 = y} \min\{F(x_1)(y_1), F(x_2)(y_2)\},
\end{aligned}$$

para todo $x_1, x_2 \in C$, $a \in]0,1[$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Portanto, pelo Teorema 10.5, F é um processo fuzzy s-côncavo sobre C. ■

Exemplo 10.9. *Seja $F : \mathbb{R}^m \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um operador quasilinear fuzzy (ver [42]), Então F satisfaz aa condições da Proposição 10.8 para $s = 1$. Desta maneira, cada operador quasilinear fuzzy é um processo fuzzy concavo.*

10.3 Desigualdade de tipo Hadamard

Nesta Seção, apresentamos algumas desigualdades de tipo Hadamard para processos fuzzy s-convexos e s-concavos e damos alguns exemplos.

Primeiro lembramos conceitos e propriedades de variáveis aleatórias fuzzy definidas sobre um intervalo que serão úteis.

Uma multifunção $F : [0,b] \to K(X)$ é chamada Borel mensurável, se o gráfico de F, isto é, o conjunto $\{(t,x)/\ x \in F(t)\}$ é um subconjunto Borel de $[0,b] \times X$.

Como a medida de Lebesgue é completa, a Borel mensurabilidade de F é equivalente a seguinte condição: para cada conjunto Borel B, $F^{-1}(B) = \{t \in [0,b]\ /\ F(t) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathbb{L}$, onde $\mathbb{L}$ denota a σ-álgebra de todos os subconjuntos Lebesgue-mensuráveis do intervalo $[0,b]$.

A integral de uma multifunção $F : [0,b] \to K(X)$ é definida por

$$\int_0^b F dt = \left\{ \int_0^b f(t)dt/\ f \in \mathbb{S}(F) \right\},$$

onde $\int_0^b f(t)dt$ é a integral de Bochner e $\mathbb{S}(F)$ é o conjunto de todas as seleções de F, isto é,

$$\mathbb{S}(F) = \left\{ f \in L^1([0,b],X)/\ f(t) \in F(t)\ q.t.p.. \right\}.$$

Uma multifunção é chamada integralmente limitada, se existe uma função $h : [0,b] \to X$ integrável tal que $||x|| \leq h(t)$ para todo x e t tal que $x \in F(t)$.

Se $F : [0,b] \to K(X)$ é um conjunto aleatório integralmente limitado, então a integral de Aumann de F é um subconjunto não vazio de X.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e F, $F_1, F_2 : [0,b] \to K_C(X)$ são conjuntos aleatórios integralmente limitados, então

a) $\int_0^b F dt \in K_C(X)$

b) $\int_0^b(\lambda F_1 + F_2)dt = \lambda \int_0^b F_1 dt + \int_0^b F_2 dt$.

Para mais detalhes ver o Capítulo 6, ver também hiai&Umegaki [39].

Seja $F : [0,b] \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy e definimos $F_\alpha : [0,b] \to K(\mathbb{R}^n)$ por $F_\alpha(x) = [F(x)]^\alpha$, $\forall \alpha \in [0,1]$. Então F é chamado mensurável se F_α é mensurável para todo $\alpha \in [0,1]$. Também, F é chamado integralmente limitado se F_α é integralmente limitado para cada $\alpha \in [0,1]$. Se F é um processo fuzzy mensurável, então F é chamado **variável aleatória fuzzy** (vaf) (ver Capítulo 8 ou [65]).

Proposição 10.10. *(Puri e Ralescu [65]) Se $F : [0,b] \to \mathcal{F}(X)$ é uma vaf integralmente limitada, então existe um único conjunto fuzzy $u \in \mathcal{F}(X)$ tal que $[u]^\alpha = \int_0^b F_\alpha dt \ \forall \alpha \in [0,1]$.*

A integral da variável aleatória fuzzy F, $\int_0^b F dt$, é o único conjunto fuzzy $u \in \mathcal{F}(X)$ obtido na Proposição 10.10, isto é, $\int_0^b F dt = u \Leftrightarrow [u]^\alpha = \int_0^b F_\alpha dt$, para cada $\alpha \in [0,1]$.

Teorema 10.11. *Se $F_1, F_2 : [0,b] \to \mathcal{F}_C(X)$ são vaf integralmente limitadas e $\lambda \in \mathbb{R}$, então*

$$\int_0^b (\lambda F_1 + F_2)dt = \lambda \int_0^b F_1 dt + \int_0^b F_2 dt.$$

Para mais detalhes e propriedades da integral de uma vaf ver [65].

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, a seguinte relação se satisfaz

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{10.1}$$

Esta desiguldade é conhecida na literatura como desigualdade de Hadamard. A seguir estendemos esto, primeiro provamos uma desigualdade de tipo Hadamard para processo fuzzy s-convexos e depois para processos fuzzy s-concavos.

Teorema 10.12. *Seja $F : I \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy s-convexo sobre o intervalo $I \subset [0,\infty)$ mensurável e integralmente limitado e seja $a, b \in I$, com $a < b$. Então*

$$(s+1)^{-1}\{F(a) + F(b)\} \subseteq \int_a^b F(x)dx/(b-a) \subseteq 2^{s-1}F\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{10.2}$$

Demonstração: Como F é s-convexo sobre I temos que

$$t^s F(a) + (1-t)^s F(b) \subseteq F\{ta + (1-t)b\}$$

para todo $t \in [0,1]$. Integrando esta relação obtemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 F\{ta+(1-t)b\}\,dt &\supseteq \int_0^1 \{t^sF(a)+(1-t)^sF(b)\}\,dt\\ &= F(a)\int_0^1 t^s dt + F(b)\int_0^1 (1-t)^s dt\\ &= (s+1)^{-1}\{F(a)+F(b)\}.\end{aligned}$$

Agora, fazendo o cambio de variável $x = tb+(1-t)a$, segue a primeira relação em (10.2).

Para provar a segunda relação em (10.2), observe que para todo $x, y \in I$ temos que

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \supseteq \frac{1}{2^s}\{F(x)+F(y)\}. \tag{10.3}$$

Então tomando $x = ta+(1-t)b$ e $y = tb+(1-t)a$, de (10.3) obtemos que

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) \supseteq \frac{1}{2^s}\left[F\{ta+(1-t)b\}+F\{tb+(1-t)a\}\right].$$

Integrando esta relação se tem que

$$\begin{aligned}\int_0^1 F\left(\frac{a+b}{2}\right)dt &\supseteq \int_0^1 \frac{1}{2^s}\left[F\{ta+(1-t)b\}+F\{tb+(1-t)a\}\right]dt\\ &= \frac{1}{2^s}\left[\int_0^1 F\{ta+(1-t)b\}\,dt+\int_0^1 F\{tb+(1-t)a\}\,dt\right].\end{aligned}$$

Como

$$\int_0^1 F\{ta+(1-t)b\}\,dt = \int_0^1 F\{tb+(1-t)a\}\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx,$$

segue que

$$\int_a^b F(x)dx/(b-a) \subseteq 2^{s-1}F\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

■

Teorema 10.13. *Seja $F : I \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy s-côncavo sobre um intervalo $I \subset [0,\infty)$ mensurável e integramente limitado e seja $a, b \in I$, com $a < b$. Então*

$$2^{s-1}F\left(\frac{a+b}{2}\right) \subseteq \int_a^b F(x)dx/(b-a) \subseteq (s+1)^{-1}(F(a)+F(b)). \tag{10.4}$$

Demonstração: A prova é análoga à do Teorema 10.12. ■

Corolário 10.14. *Seja $F : I \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy s-côncavo mensurável e integralmente limitado sobre o intervalo $I \subset [0, \infty)$ e seja $a, b \in I$, com $a < b$. Então*

$$2^{s-1}\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b \Gamma(x)dx/(b-a) \leq (s+1)^{-1}(\Gamma(a)+\Gamma(b)),$$

onde $\Gamma = S(F(.), (\alpha, \psi))$.

Demonstração: O resultado segue do Teorema 10.13 e das propriedades da função suporte fuzzy. ■

Exemplo 10.15. *Consideremos $s = 1/2$ e o processo fuzzy 1/2-concavo $F_1 : (1/2, 1) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ como no Exemplo 10.7. Então*

$$\Gamma(x) = S(F_1(x), (\alpha, 1)) = \alpha\sqrt{x}. \tag{10.5}$$

para cada $\alpha \in [0, 1]$. Desta maneira, pelo Corolário 10.14, temos que

$$\frac{\sqrt{6}}{8}\alpha \leq \int_{1/2}^1 \Gamma(x)dx \leq \frac{2+\sqrt{2}}{3}\alpha.$$

10.3.1 Aplicações

(a) Para um processo fuzzy mensurável e integralmente limitado $F : [0, b] \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$, a integral média fuzzy de F é um processo fuzzy $M_F : (0, b] \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$M_F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x F(t)dt \ , \ \forall x \in (0, b].$$

Este conceito foi introduzido em [23], onde também são estudadas algumas propriedades. Em [25] é estudado a s-convexidade da interal média fuzzy. Agora, na seguinte Proposição, usando a desigualdade de Hadamard, obtemos uma nova relação para a integral média fuzzy.

Proposição 10.16. *Seja $F : [0, b] \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy mensurável e integralmente limitado. Se F é s-convexo então M_F é s-convexo e*

$$(s+1)^{-1}\left\{F(0) + F(x)\right\} \subseteq M_F(x) \subseteq 2^{s-1}F\left(\frac{x}{2}\right). \tag{10.6}$$

Demonstração: Como F é s-convexa, então do Teorema 4.5 em [23] M_F é s-convexa. A relação (10.6) é uma consequência imediata do Teorema 10.12. ■

(b) Com o propósito de estabelecer alguns refinamentos de (10.1), Dragomir [33] introduz a aplicação

$$H(t) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dx,$$

e prova que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, então $H(t)$ é convexa e que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq H(t) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \quad \forall t \in [0,1].$$

A seguir, extendemos este resultado para processo fuzzy s-convexos. Seja $F : [a,b] \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy mensuável e integralmente limitado e definimos

$$H(t) := \frac{1}{b-a}\int_a^b F\left\{tx + (1-t)(a+b)/2\right\} dx, \tag{10.7}$$

para $t \in [0,1]$.

Teorema 10.17. *Seja F um processo fuzzy s-convexo mensurável e integralmente limitado sobre o intervalo $[a,b]$. Então H é s-convexa sobre $[0,1]$ e*

$$H(t) \subseteq 2^{s-1}F\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \forall t \in [0,1]. \tag{10.8}$$

Demonstração: Seja $t_1, t_2 \in [0,1]$ e $\alpha, \beta \geq 0$ com $\alpha + \beta = 1$. Então,

$$\begin{aligned}
& H(\alpha t_1 + \beta t_2) \\
= \ & \frac{1}{b-a}\int_a^b F\left[(\alpha t_1 + \beta t_2)x + \left\{1 - (\alpha t_1 + \beta t_2)\right\}(a+b)/2\right] dx \\
= \ & \frac{1}{b-a}\int_a^b F\left[\alpha\left\{t_1 x + (1-t_1)(a+b)/2\right\} + \beta\left\{t_2 x + (1-\beta t_2)(a+b)/2\right\}\right] dx \\
\supseteq \ & \frac{1}{b-a}\int_a^b \alpha^s F\left\{t_1 x + (1-t_1)(a+b)/2\right\} dx + \\
& \frac{1}{b-a}\int_a^b \beta^s F\left\{t_2 x + (1-\beta t_2)(a+b)/2\right\} dx \\
= \ & \alpha^s H(t_1) + \beta^s H(t_2),
\end{aligned}$$

o que prova que H é s-convexa. Agora, seja $t \in (0, 1]$. Tomando $r = tx + (1-t)(a+b)/2$ obtemos que

$$H(t) = \int_q^p F(r)dr/(p-q)$$

onde $p = tb + (1-t)(a+b)/2$ e $q = ta + (1-t)(a+b)/2$. Pelo Teorema 10.12 temos que

$$\int_q^p F(r)dr/(p-q) \subseteq 2^{s-1} F\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2^{s-1} F\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

que prova (10.8). ■

Observação 10.18. *Procedendo como na prova do Teorema 10.17, podemos também provar que se F é um processo fuzzy s-côncavo mensurável e integralmente limitado sobre o intervalo $[a, b]$, então*

$$2^{s-1} F\left(\frac{a+b}{2}\right) \subseteq H(t).$$

10.4 Desigualdade de tipo Jensen

Nesta Seção apresentamos uma generalização da desigualdade de Jensen para processo fuzzy s-convexos e s-concavos.

Teorema 10.19. *Seja $F : C \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy s-convexo sobre C e $s > 0$. Então a seguinte relação se satisfaz*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^s F(x_i) \subseteq F\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right), \tag{10.9}$$

quando $p_i \geq 0$, $x_i \in C$ e $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Por outro lado, se F é um processo fuzzy s-côncavo sobre C e $s > 0$. Então se satisfaz a seguinte relação

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \subseteq \sum_{i=1}^{n} p_i^s F(x_i) \tag{10.10}$$

quando $p_i \geq 0$, $x_i \in C$ e $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Demonstração: primeiro provamos a relação (10.9). Para isto, procedemo por indução sobre n. Para $n = 2$, (10.9) é a definição de s-convexidade de F. Agora, suponhamos que (10.9) é válido para $n = k - 1$ dado $p_i \geq 0$, $x_i \in C$ e $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Podemos supor que todo $p_i > 0$. Seja então $q_j = p_j/(p_1 + ... + p_{k-1})$, $1 \leq j < k$. Então $q_1 + ... + q_{k-1} = 1$ e desta maneira

$$q_1^s F(x_1) + ... + q_{k-1}^s F(x_{k-1}) \subseteq F(q_1 x_1 + ... + q_{k-1} x_{k-1}). \tag{10.11}$$

Definimos $P = p_1 + ... + p_{k-1}$, então

$$\begin{aligned} F(p_1 x_1 + ... + p_k x_k) &= F\left\{P\left(\frac{p_1}{P} x_1 + ... + \frac{p_{k-1}}{P} x_{k-1}\right) + p_k x_k\right\} \\ &\supseteq P^s F\left(\frac{p_1}{P} x_1 + ... + \frac{p_{k-1}}{P} x_{k-1}\right) + p_k^s F(x_k) \\ &\supseteq P^s \left(\frac{p_1^s}{P^s} F(x_1) + ... + \frac{p_{k-1}^s}{P^s} F(x_{k-1})\right) + p_k^s F(x_k) \\ &= \sum p_i^s F(x_i), \end{aligned}$$

que estabelece (10.9) para $n = k$, e consequentemente para todo $n \in \mathbb{N}$.

A prova de (10.10) segue os mesmos pasos pelo que aqui omitimos. ■

Corolário 10.20. *Seja $F : C \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um processo fuzzy sobre C e $s > 0$. Então*

$$n^{-s} \sum_{i=1}^{n} F(x_i) \subseteq F\left(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i\right), \tag{10.12}$$

quando $x_i \in C$, $1 \leq i \leq n$.

Exemplo 10.21. *Consideremos o processo fuzzy 1/2-convexo e F_1 como no exemplo 10.2. Desta maneira, do Corolário 10.20, para cada $\alpha \in [0, 1]$ temos que*

$$\left[(1+\alpha)\sqrt{n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i}, \infty\right) \supset n^{-1/2}(1+\alpha) \sum_{i=1}^{n} [\sqrt{x_i}, \infty[$$

CAPÍTULO 11

Trabalhos futuros

A seguir descrevemos alguns problemas que serão motivo de estudos futuros.

11.1 Análise fuzzy

Neste trabalho de tese nós temos estudado o espaço de conjuntos fuzzy compactos, que é um espaço quasilinear, e temos dado alguns resultados análogos à teoria de análise funcional clássica. Nós acreditamos que este estudo foi o início para desenvolver outras ferramentas, por exemplo, falta obter um resultado análogo ao teorema de separação de H. Banach, o qual desempenha um papel importante na teoria clássica. Por outro lado, foi dado o conceito de um operador adjunto, assim como o dual do espaço de conjuntos fuzzy compactos. Agora, sería bom estudar suas propridades e explorar no máximo seu uso em diferentes problematicas que surgem na teoria fuzzy.

11.2 Inclusões e equações diferenciais fuzzy

Este tema está sendo motivo de estudo de diferentes autores. Nos últimos anos foi muito mais explorado, obtendo-se várias formas de interpretar as inclusões e equações diferenciais, a qual acompanhamos e aportamos (em alguns casos) seu desenvolvimento. Como um novo tema, tem ainda muito por ser explorado, por exemplo, estudar estabilidade, bifurcação, comportamento assintótico das soluções, fluxos, etc. Existem alguns trabalhos (pouco) onde estuda-se estas propriedades para casos particulares de Inclusões e equações diferenciais fuzzy.

11.3 Controle ótimo fuzzy

Também é de nosso interesse estudar problemas de controle ótimo, onde o controle é dado por um conjunto fuzzy. Tendo as ferramentas adequadas, podemos tentar obter um principio do máximo do tipo Pontryagin no contexto fuzzy, questão que ainda está em aberto e que acreditamos terá muitas aplicações.

11.4 Probabilidade fuzzy

Nesta temática, estamos interessados em provar um teorema central de limite para variáveis aleatórias fuzzy compactas em espaços de Banach, que ainda está em aberto. Primeiramente temos estudado este teorema em dimensão finita, como consta neste trabalho. Um caso mais geral sería provar uma lei forte de grandes números e o teorema central de limite para variáveis aleatórias fuzzy fechadas, isto é, para variáveis aleatórias que têm como valores conjuntos fuzzy cujos níveis são fechados, ao contrário do que tem sido feito até agora, onde as variáveis aletórias consideradas têm valores fuzzy compactos.

11.5 Processos fuzzy

Neste trabalho de tese nós apresentamos uma generalização do conceito de processos convexos ao contexto fuzzy, estudamos suas propridades e obtemos algumas desigualdades para estes. Um trabalho por fazer é estudar a relação de processos fuzzy s-convexos e a continuidade. Por outro lado, explorar seu uso em otimização fuzzy.

11.6 Medida e integral fuzzy

Desde que Sugeno introduziu os conceitos de medidas fuzzy e suas correpondentes integrais fuzzy, esta teoria foi muito bem explorada e estendida por diversos autores em diversas direções. Em particular a continuidade da integral fuzzy (em seus diferentes conceitos) com respeito a diferentes grupos de convergência foram motivo de estudo nos últimos anos.

Medida fuzzy (função de conjuntos), generaliza a definição usual de uma medida substituindo a aditividade por propriedades mais fracas. Uma interpretação abstrata é: a não-aditividade de uma medida fuzzy expressa a interação entre conjuntos. Suas aplicações são diversas, por exemplo, a teoria de capacidades (capacities), a teoria de evidência (evidence), a teoria de possibilidade, entre outros. Também existem áreas práticas onde a não aditividade é importante, por exemplo, problemas de decisão, avaliação subjetiva, processamento de informação ou classificação, entre outros.

Por outro lado, sabemos da importância que tem a defuzificação de um conjunto fuzzy na teoria de análise fuzzy e, nesta direção, a teoria de medida e integral fuzzy é fundamental. Além disso, sabemos da importância da métrica de Hausdorff neste contexto.

A primeira parte de nossa proposta é analizar: quando uma medida fuzzy é contínua em relação a convergência de Hausdorff?. Também, analizar, a continuidade da integral fuzzy (integral no sentido de Choquet, Wang, Oguara-Ralescu entre outras) em relação à medida fuzzy.

Zhang, estudo a integral fuzzy de uma multifunção (set-valued) respeito de uma medida fuzzy, conceito que generaliza a integral de Aumann para multifunções. Depois, são estudadas as diferentes propriedades desta integral. Logo, como uma extensão natural, temos a integral fuzzy de multifunções fuzzy (fuzzy-valued mappings).

Nossa proposta é estudar a continuidade da integral fuzzy de uma multifunção respeito dos diferentes grupos de convergência. Nessa direção, a teoria de análise multívoca (set-valued análise) será fundamental para obter resultados referente a esta teoria. Também, sería interessante analizar as convergências das integrais fuzzy de uma multifunção fuzzy.

Recentemente, é dado o conceito de integrais indeterminadas, e se discute sobre a classificação das integrais fuzzy. Agora, podemos escrever esta integral como uma integral de uma multifunção e assim podemos estudar esta integral via a teoria multívoca. Logo, tentaremos responder parcial ou totalmente o problema inverso (proposto por Wang) que ainda está em aberto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Aubin J.P., Fuzzy differential equation, *Problems of Control and Information Theory*, 19, 55-67, 1990.

[2] Aubin J.P. and Franskowska H., *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, 1990.

[3] Aubin J.P. and Cellina A., *Differential Inclusions*, Springer - Verlag, New york, 1984.

[4] Araujo A., Giné E., *The Central limit theorem for real and Banach valued random variables*, Wiley, Series in Probability and Mathematical Statistics, 1980.

[5] Arrow, K.J., Hahn, F.H., *General Competitive Analysis*, Holden-Day, 1971.

[6] Artstein, Z., Hart, S., Law of large numbers for random sets and allocation processes, *Math. Oper. Res.* **6**, 485-492, 1981.

[7] Artstein, Z., Vitale, R.A., A strong law of large numbers for random compact sets, *Ann. Probab.* **3**, 879-882, 1975.

[8] Artstein Z., Limit laws for multifunctions applied to an optimization problem, *Lecture Notes in Mathematics*, 990, Springer - Verlag, Berlin, **3**, 65-79, 1983.

[9] Assev S.M., Quasilinear operators and their application in the theory of multivalued mappings, *Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics* 2, 23-52, 1986.

[10] Aumann R.J., Integrals of set-valued functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 12, 1-12, 1965.

[11] Babu G.J., A note on bootstrapping the variance of sample quantiles, *Ann. Inst. Statist. Math.* **38**, 439-443, 1986.

[12] Bassanezi R.C. and Barros L.C. A simples model of life expectancy with subjetive parameters, *Kibernetes: Inter, Journal of Systems and Cybernetics* 24, vol. 9, 91-98, 1995.

[13] Barros L.C., Bassanezi R.C. e Tonelli P.A, Fuzzy modelling in population dynamics, *Ecological Modelling*, pp. 27-33, 2000.

[14] Blasi F.S. de, On the differentiability of multifunctions, *Pacific J. Math.*, 66, 67-81, 1976.

[15] Borwein J.M., Norm duality for convex processes and applications, *JOTA*, **48** 9-52, (1986).

[16] Borwein J.M. and Lewis A.S., *Convex analysis and nonlinear optimization*, Springer-Verlag, 2000.

[17] Breckner W.W., Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funtionen in topologischen linearen Räumen, *Publ. Inst. Math. (Beograd.)*, **23**, 13-20, 1978.

[18] Breckner W.W., Continuity of generalized convex and generalized concave set-valued functions, *Rev Anal. Numér. Théor. Approx.*, **22**, 39-51, 1993.

[19] Bruckner A.M. and Ostrow E., Some functions classes related to the class of convex functions, *Pacific J. Math.* **12**, 1203-1215, 1962.

[20] Brezis H., *Analyse Fonctionnelle*, Mansson, 1992.

[21] Castaing C. and Valadier M., *Convex Analysis and Measurable multifunctions*, Lect. Notes in Math. 580, Springer-Verlag, 1977.

[22] Colubi A., López-Díaz M., Domínguez-Menchero J.S. and Gil M.A., A generalized strong law of large numbers, *Probability Theory and Related Field* 114 (1999) 401-417.

[23] Chalco-Cano Y., Rojas-Medar M.A and Román-Flores H., M-Convex fuzzy mapping and fuzzy integral mean, *Computers and Mathematics, with Applications*, 1117-1126, 2000.

[24] Chalco-Cano Y., Bassanezi R.C., Rojas-Medar M.A., Mizukoshi M.T., Population dinamics by fuzzy differential inclusions, *Kibernetes: Inter, Journal of Systems and Cybernetics*, a aparecer 2004.

[25] Chalco-Cano Y., Rojas-Medar M.A. and Osuna-Gómez R., S-Convex fuzzy process, *Computers and Mathematics with Applications*, a aparecer 2003.

[26] Colling I.L. and Kloeden P.E., Continuous approximation of fuzzy sets, *J.Fuzzy Math.* **3**(2), 449-453, (1995).

[27] Ding V. and Kandel A., Existence of the solutions of fuzzy differential equations with parameters, *Information Sciences* 99, 205-217, 1997.

[28] Diamond P. and Kloeden P., *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*, World Scientific Pub, Singapure, 1994.

[29] Denneberg D., *Non-additive Measure and Integrals*, Kluwer, Dordrecht, 1994.

[30] Dubois D. and Prade H., Toll sets, *4th IFSA World Congress*, Brussels, 1991.

[31] Debreu G.,Integration of correspondences, *Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. and Probability*, **2**, 351-372, 1966.

[32] Deimling K., *Multivalued Differential Equations*, Berlin, 1992.

[33] Dragomir M.L., Two mappings in connection to Hadamard Inequalities, *J.Math. Anal. Appl.*, **167**, 49-56, 1992.

[34] Goetschel R. and Voxman W., Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets and Systems 18* 31-43, 1986.

[35] Giné E., Hahn M.G. and Zinn J., Limit theorems for random sets: An application of probability in Banach space results, in: *Probability in Banach Spaces IV* (A. Beck and K. Jacobs, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 990, Springer-Berlag, pp. 112-135, 1983.

[36] Hess C., The distribution of unbounded random sets and the multivalued strong law of large numbers in nonreflexive Banach spaces, *J. Convex Anal.* **6**, 163-182, 1999.

[37] Hiai F., Strong laws of large numbers for multivalued random variables, in: *Multifunctions and Integrands (G. Salinetti, ed.), Lecture Notes in Math.*, vol. 1091, Springer-Berlag, 160-172, 1984.

[38] Hiai F., Convergence of conditional expectations and strong laws of large numbers for multivalued random variables, *Trans. Amer. Math. Soc.* **291**, 613-627, 1985.

[39] Hiai F. and Umegaki H., Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions, *J. Multivar. Anal.*, **7**, 149-182, 1977.

[40] Hudzik H. and Maligranda L., Some remarks on s-convex functions, *Aequationes Mathematicae*, **48**, 100-111, 1994.

[41] Ibrahim A-G.M. , On the differentiability of set-valued functions defined on a Banach space and mean value theorem, Appl. Math. Comp. 74 , 76-94, 1996.

[42] Jiménez-Gamero M.D., Chalco-Cano Y., Rojas-Medar M.A. and Brandão A. J. V., Fuzzy quasilinear spaces and applications, *Fuzzy Sets and Systems* a aparecer 2004.

[43] Jiménez-Gamero M.D., Chalco-Cano Y.,Rojas-Medar M.A. and Brandão A.J.V., On the differentiability of fuzzy-valued mappings and the stability of a fuzzy differential inclusion, Submitted to *Fuzzy Sets and Systems* 2004.

[44] Jiménez-Gamero M.D., Rojas-Medar M.A. and Chalco-Cano Y., A SLLN for random closed sets, submetido 2003.

[45] Jiménez-Gamero M.D., Chalco-Cano Y., Rojas-Medar M.A. e Vilca-Labra F., A strong law of large numbers and central limit theorem for fuzzy random variables, *Actas 57 Seminário Brasileiro de Análise*, 406 - 413, 2003.

[46] Kaleva O., Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems, 24*, 301-317, 1987.

[47] Kaleva O., The calculus of fuzzy values functions, *Appl. Math. Lett. 2-3*, 55-59, 1990.

[48] Kloeden P.E., Fuzzy dynamical systems, *Fuzzy Sets and Systems* 7, 272-296, 1982.

[49] Krivan V. and Colombo G., A non-stochastic approach for modelling uncertainty in population dinamics, *Bulletin of Mathematical Biology*, 60, 721-751, 1998.

[50] Kendall D.G., *Fundations of a theory of random sets*, Stochastic Geometry, ed. Harding E.F. e Kendall D.G., Wiley, New York, 1974.

[51] Klement E.P., Puri M.L. and Ralescu D.A., Limit theorems for fuzzy random variables, *Proceedings of Royal Society of London*, Series A 19, 171-182, 1986.

[52] Lasota A. and Strauss A., Asymptotic behavior for differential equations which cannot be locally linearized, *J. Differential Equations*, 10, 152-172, 1971.

[53] Lay S.R., *Convex Sets and Their Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1982.

[54] Lowen R., Convex fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 3, 291-310, 1980.

[55] Lowen R., *Fuzzy Sets Theory: Basic Concepts, Techniques and Bibliography*, Kluwer Academic Publishers, London, 1996.

[56] Lyashenko N.N., Limit theorems for sums of independent, compact, random subsets of Euclidean space, *J. Soviet Math.*, **20**, 2187-2196, 1982.

[57] May R., *Stability in Ramdomly Fluctuating versus Deterministic Environments*, The American Naturalist, 621-650, 1973.

[58] Matheron G., *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, New York, 1975.

[59] Mourier E., L - random elements and L^* - elements in Banach spaces, *Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statis. and Probability, Univ. of California* 2, 231-242, 1995.

[60] Matloka M., Convex fuzzy processes, *Fuzzy Sets and Systems*, **110**,104-114, 2000.

[61] Negoita C.V and Ralescu D.A., *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*; Wiley, New York, 1975.

[62] Nguyen H.T., A note on the extension principle for fuzzy sets, *J. Math. Anal. Appl.*, **64**, 369-380, 1978.

[63] Puri M.L. and Ralescu D., Differentials of fuzzy functions, *Math. Anal. Appl. 91*, 552-558, 1983.

[64] Puri M.L. and Ralescu D., Differentielle d$\hat{}$une fonction floue, *C.R. Acad. Sc. Paris, 293-I* 237-239, 1981.

[65] Puri M.L. and Ralescu D., Fuzzy radom variables, *J. Math. Anal. Appl., 114* 409-422, 1986.

[66] Puri M. and Ralescu D., The concept of normality of fuzzy random variables, *Ann. Probab.*, **13**, 1373-1379, 1985.

[67] Puri M.L., Ralescu D.A., Strong law of large numbers for Banach space valued random sets, *Ann. Probab.* **11**, 222-224, 1983.

[68] Proske F.N., Puri M.L., Central limit theorem for Banach space valued fuzzy random variables, *Proceedings of the Americam Mathematical Society* 130, 1493-1501, 2002.

[69] R$\dot{a}$dstr$\ddot{o}$m H., An embedding theorem for spaces of convex sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* 3, 165-169, 1952.

[70] Rojas-Medar M.A., Bassanezi R.C. and Román-Flores H., A generalization of the Minkowski embedding theorem and applications, *Fuzzy Sets and System* **102**(1/2), 263-269, 1999.

[71] Rojas-Medar M. and Román-Flores H., On the equivalence of convergences of fuzzy sets, *Fuzzy Sets and System* **80**, 217-224, 1996.

[72] Román-Flores H. and Rojas-Medar M.A., Differentiability of fuzzy-valued mappings, *Revista de Matemática e Estatística-UNESP 16* 223-239, 1998.

[73] Román-Flores H., Barros L.C. and Bassanezi R.C., A note on Zadeh extensions,*Fuzzy sets and System*, **24**, 319-330, 1987.

[74] Román-Flores H. and Rojas-Medar M.A., Embedding of level-continuous fuzzy sets on Banach spaces, *Information Sciences*, 2003.

[75] Román-Flores H. and Rojas-Medar M., Level-continuity of functions and applications, *Computers Math. Applic.* **38**, 143-149, 1999.

[76] Román-Flores H., Continuity of fuzzy measures and integrals, preprint.

[77] Román-Flores H., The compactness of $E(X)$, *Appl.Math.Lett.* **11**(2), 13-17, 1998.

[78] Román-Flores H., Chalco-Cano Y. and Rojas-Medar M.A., Convolution of fuzzy sets and applications, *Comp. Math. Appl.* 46, n. 8-9, 1245 - 1251, 2003.

[79] Rockafellar T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.Y., 1970.

[80] Rockafellar R.T., Monote process of convex and concave type, *Mem. of A.M.S.* **77**, 1967.

[81] Robinson S.M., Normed convex processes, *Transactions of the American Mathematical Society* **174**, 127-140, 1972.

[82] Robinson S.M., Regularity and stability for convex multivalued functions, *Math. Op. Res.* **1**, 130-143, 1976.

[83] Robinson S.M., Stability theory for systems of inequalities, part II: differentiable non-linear system, *SIAM J. Num. Anal.* **13**, 497-513, 1976.

[84] Robins H.E., On the measure of a random set, *A*nn. Math. Statist. **14**, 70-74, 1944.

[85] Robins H.E., On the measure of a random set, II. *Ann. Math. Statist.* **15**, 342-347, 1945.

[86] Rohatgi V.K., *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*, Wiley, 1976.

[87] Seeger A. and Volle M., A convolution operation obtained by adding level sets: Clasical and new results, *Oper. Research* **29**(2), 131-154, 1995.

[88] Seikkala S., On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Systems* 24, 319-330, 1987.

[89] Traoré S. and Volle M., On the level sum of two convex functions on Banach spaces, *J. Convex Anal* 3 (1), 141-151, 1996.

[90] Tardella F., A new proof of the Lyapunov convexity theorem, *Siam J. Control and Optimization* 28 No 2, 478-481, 1990.

[91] Tiberiu Trif, Hölder continuity of generalized convex set-valued mappings, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **255**, 44-57, 2001.

[92] Toader G.H., On the hierarchy of convexity of functions, *L'analyse Num. Théorie L'Approx.* **15**, 167-172, 1986.

[93] Toader G.H., On a generalization of the convexity, *L'analyse Num. Théorie L'Approx.* **30**, 83-87, 1988.

[94] Van der Vaat A.W., Wellner J.A., *Weak convergence and empirical process*, Springer, 1996.

[95] Weil W., An application of the central limit theorem for Banach-space-valued random variables to the theory of random sets, *Z. Wahrscheinlinchkeitstheorie Verw. Gebiete* 60, 203-208, 1982.

[96] Yu-Ru, Chin-Yao Low and Tai-Hsi Wu, A note on convex fuzzy processes, *Applied Mathematics Letters*, **15**, 193-196 2002.

[97] Yu-Ru Syau, Diferentiability and convexity of fuzzy mappings, *Computers and Mathematics with Applications 41*, 73-81, 2001.

[98] Zhu Y. and Rao L., Differential inclusions for fuzzy maps, *Fuzzy Sets and Systems* 112, 257-261, 2000.

[99] Zadeh L.A., Fuzzy sets, *Information and Control* **8**, 338-353, 1965.

[100] Zadeh L.A., The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, *Information and Control*, **8**, 199-249, 1975.