

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Modelagem e Implementação Computacional da Poroelasticidade Acoplada

Autor: **Francisco Ilson da Silva Júnior**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

15-2003

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Modelagem e Implementação Computacional da Poroelasticidade Acoplada

Autor: **Francisco Ilson da Silva Junior**

Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2003

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Si38m Silva Junior, Francisco Ilson da
Modelagem e implementação computacional da
poroelasticidade acoplada / Francisco Ilson da Silva
Junior.--Campinas, SP: [s.n.], 2003.

Orientador: Renato Pavanello
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Absorção do
som. 3. Programação orientada a objetos (Computação).
I. Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.
Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Modelagem e Implementação Computacional da Poroelasticidade Acoplada

Autor: **Francisco Ilson da Silva Júnior**
Orientador: **Prof. Dr. Renato Pavanello**

Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. José Roberto de França Arruda
DMC/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Arcanjo Lenzi
DEM/UFSC

Campinas, 29 de julho de 2003.

Dedicatória

Dedico este trabalho a meus pais, Francisco Ilson e Rita,
e a minha avó, Francisca Bernardino.

È l'uomo chi fa crescere i fiori nel deserto e non solo l'acqua

Renato Lora

Agradecimentos

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições que colaboraram para o sucesso deste trabalho:

- Ao CNPQ pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.
- A todos professores, funcionários e alunos de Pós-Graduação do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, obrigado pela acolhida dada a este retirante cearense, pela colaboração e atenção dispensadas.
- Aos amigos mais próximos: Geraldo, Cornélis, Carlos Souto, Simone e Marcos Pinho, um especial agradecimento pelos momentos de alegria e de descontração. Gostaria de lembrar também dos integrantes da República "Boon de Fora": Alex, Éder, Elson, Edmilson e Luiz, por fazerem da casa onde moramos um lugar de ótima convivência e tranqüilidade.
- Ao Professor Renato Pavanello, uma referência a todos os seus orientados, demonstrando sempre conhecimento profissional e científico. Pela compreensão nos momentos difíceis deste período em que trabalhamos juntos, pelo apoio e dedicação a pesquisa desenvolvida, o meu muito obrigado, Professor.

Resumo

Silva Junior, Francisco Ilson, *Modelagem e Implementação Computacional da Poroelasticidade Acoplada*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003, 153 p. Dissertação (Mestrado).

Sistemas mecânicos contendo materiais poroelásticos são bastante empregados em aplicações de engenharia tais como: controle de ruído em automóveis e aeronaves, modelagem geofísica, biomecânica, etc. A pesquisa do presente trabalho é focada no estudo dos fenômenos de propagação de ondas elásticas e acústicas em meios poroelásticos acoplados e na simulação computacional usando-se um método numérico. Uma formulação de elementos finitos mista é utilizada, baseada nas equações clássicas de Biot modificadas, escritas em termos do deslocamento estrutural (u) e da pressão acústica (p) nos interstícios preenchidos pelo fluido, formulação (u,p). A implementação computacional da presente aproximação em elementos finitos possui seu código em linguagem C++ com programação orientada a objetos (POO), a qual é discutida neste trabalho. Modelos de elementos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais com as características de materiais poroelásticos foram implementados. Os problemas da poroelasticidade acoplada resolvidos no presente trabalho são: problemas parabólicos transientes (domínio do tempo) e problemas dinâmicos (domínio da frequência). Validações numéricas a partir de resultados encontrados na literatura e de soluções analíticas são apresentadas. Problemas acústicos acoplados com meios porosos, dos quais são analisados a capacidade de absorção e o comportamento vibroacústico dos materiais absorvedores, são estudados para diversas geometrias e layouts. A partir de tais resultados pode-se caracterizar a influência do acoplamento acústico-poroelástico na propriedade de absorção dos materiais poroelásticos. Conclui-se que o procedimento de implementação computacional feita neste trabalho pode ser uma ferramenta de grande utilidade no projeto e caracterização do comportamento de sistemas de isolamento acústica contendo materiais poroelásticos.

Palavras chaves: Poroelasticidade, Elementos Finitos, Absorção Acústica, POO.

Abstract

Silva Junior, Francisco Ilson, *Modelling and Computational Implementation of the Coupled Poroelasticity*. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003, 153 p. Dissertação (Mestrado).

Poroelastic materials are frequently used in engineering applications such as: noise control in automobiles and aircrafts, geophysical modelling, biomechanics, etc. In this research, it was studied a formulation of propagation phenomena of elastic and acoustic waves in coupled poroelastic media and discuss the computational simulation using a numeric method. A mixed finite element formulation was applied and based in the classic equations of Biot, rewritten in terms of structural displacement (u) and acoustical pressure (p) of the fluid that fills in the interstitial volume. The computational implementation of the finite element approach has been done in C++ language with the oriented object programming (OOP) which is discussed in this work. Unidimensional, bidimensional and tridimensional elements with features of the poroelastic materials are implemented. Two types of coupled poroelasticity problems are solved: transient parabolic in time domain and dynamic in frequency domain. Numeric validations by well known results founds in the literature are presented. For coupled acoustic porous media the absorption capacity is analyzed and the vibro-acoustical behavior of the absorbing materials is studied for several geometries and layouts. The influence of the acoustic-poroelastic coupling in the absorption property of the system is characterized. The computational implementation done in this work can be a useful tool in the design and characterization of acoustic insulation systems with the present poroelastic materials.

Key words: Poroelasticity, Finite Element, Acoustical Absorption, OOP.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Motivação e objetivos	3
1.2	Descrição do Trabalho	3
2	Revisão Bibliográfica	5
2.1	Sistemas Acoplados	5
2.1.1	Classes de Problemas Acoplados	6
2.1.2	Procedimentos de Análise	7
2.2	Revisão Histórica	9
3	Propagação de Ondas em Materiais Poroelásticos	14
3.1	Características dos Materiais Poroelásticos	14
3.2	Hipóteses físicas para o problema da poroelasticidade	16
3.3	Equações de movimento	18
3.3.1	Potencial de deformação	19
3.3.2	Dissipação Pseudo-Potencial	22
3.3.3	Energia Cinética	23
3.3.4	Formulação Lagrangiana do problema poroelástico	24
3.4	Equações de Propagação de ondas nos materiais poroelásticos - Modelo de Biot	26
3.5	Equações de Propagação de ondas nos materiais poroelásticos - Modelo de Biot-Allard	26
3.5.1	A Equação da fase sólida na formulação (\mathbf{u},p)	29
3.5.2	A Equação da fase fluida na formulação (\mathbf{u},p)	32

3.5.3	Equações da Poroelasticidade Acoplada na formulação (\mathbf{u},p)	33
3.6	Formulação (\mathbf{u},p) para problemas poroelásticos transientes - Formulação de Rice-Cheng	34
3.7	Propriedades dos materiais poroelásticos	35
3.7.1	Testes para determinação das propriedades dos materiais poroelásticos	35
3.7.2	Parâmetros físicos dos materiais poroelásticos	37
3.8	Propagação de ondas em meios acústicos	45
3.8.1	Propagação de ondas planas e impedância acústica	45
3.8.2	Impedância de uma camada de espessura finita	46
3.8.3	Impedância do ar livre e absorção acústica	48
3.8.4	Medidas em Vibroacústica	50
4	Aplicação do Método dos Elementos Finitos no Problema Poroelástico	52
4.1	Método dos elementos finitos em meios poroelásticos	52
4.1.1	A formulação integral fraca	52
4.1.2	A aproximação por Elementos Finitos	54
4.2	Condições de Contorno em Poroelasticidade - Formulação (\mathbf{u},p)	62
4.2.1	Condições de Contorno na formulação fraca	63
4.2.2	Excitações para o problema poroelástico	64
4.2.3	Condições de apoios para o problema poroelástico	66
4.2.4	Acoplamentos entre domínios	68
4.3	Método dos Elementos Finitos para o problema transiente	72
4.3.1	Forma Fraca para o problema transiente	72
4.3.2	Aproximação por Elementos Finitos para o problema transiente	73
4.3.3	Implementação no Tempo - Métodos de Discretização	75
5	Implementação Computacional	77
5.1	Programação Orientada ao Objeto	77
5.2	O programa Meflab++	78
5.3	Implementação do Problema Poroelástico no Meflab++	79

5.3.1	Categoria Domain	80
5.3.2	Categoria Task	82
5.3.3	Categoria Differential Operator	84
5.3.4	Categoria Material Behaviour	85
5.3.5	Categoria Elements	86
5.3.6	Categoria Equation System	87
6	Resultados e Discussão	89
6.1	Validações do programa implementado	89
6.1.1	Coluna Poroelástica	89
6.1.2	Camadas de materiais absorvedores	93
6.1.3	Medidas de Vibroacústica em Materiais Poroelásticos	97
6.1.4	Tubo de Impedância - acoplamento acústico-poroelástico	102
6.2	Estudos de Casos - Aplicações	105
6.2.1	Efeito do ângulo em um material absorvedor sobre a absorção acústica	106
6.2.2	Análise de uma cavidade acústica tridimensional com material absorvedor	110
6.2.3	Análise de um modelo simplificado de um habitáculo veicular	113
7	Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos	121
7.1	Conclusões	121
7.2	Propostas de Trabalhos Futuros	123
A	Formulação (u,p) para problemas poroelásticos - Formulação de Rice-Cheng	129
B	Solução Analítica da coluna poroelástica	139
C	Solução Analítica do Tubo de Impedância com material poroso rígido	143

Lista de Figuras

1.1	Esquema de montagem estrutural e controle de ruído em uma aeronave comercial	2
2.1	Diagrama de Análise Seqüencial	8
3.1	Fases Sólida e Fluida de um Material Poroelástico	15
3.2	Comportamento macroscópico de um fluxo sobre um material poroelástico .	15
3.3	Propagação de ondas em um material poroelástico	16
3.4	Elemento infinitesimal para um contínuo poroelástico	18
3.5	Volume de controle para um teste drenado	35
3.6	Volume de controle para um teste não drenado	36
3.7	Região da camada limite térmica em uma representação de um poro	42
3.8	Tortuosidade - Analogia com um fluxo entre paredes rígidas	44
3.9	Impedância em um material com espessura finita	47
4.1	Condições de contorno e acoplamentos em domínios poroelásticos	64
5.1	Fluxograma simplificado das informações no Meflab++	79
5.2	Descrição Geral do Meflab++ - Categorias Gerais	80
5.3	Domain: Classe FEM-UNS implementada: especialista para problemas não simétricos	82
5.4	Task: Análise Transiente e Dinâmica e suas classes derivadas	83
5.5	Operador Diferencial: PoroElasticity e PoroElasticityComplex	85
5.6	Classe Biot - material poroelástico	86
5.7	Classes de Elementos Físico e Geométricos lineares	87
5.8	Sistema de Equações e Solvers lineares dos casos Transiente e Dinâmico . . .	88

6.1	Condições Iniciais para as colunas poroelásticas - pressão prescrita e deslocamento prescrito	90
6.2	Respostas temporais de deslocamento e pressão para a coluna poroelástica - caso da pressão imposta	91
6.3	Respostas temporais de deslocamento e pressão para a coluna poroelástica - caso de deslocamento imposto	92
6.4	Resposta temporal para o problema sob as condições de contorno de pressão imposta	92
6.5	Resposta temporal para o problema sob as condições de contorno de deslocamento imposto	93
6.6	Descrição física do problema dinâmico poroelástico - camadas de materiais poroelásticos	94
6.7	Impedância acústica superficial (real e imaginário) - camada simples de material poroelástico - lã de vidro com 10 cm de espessura)	95
6.8	Impedância Acústica Superficial (real e imaginário) - multi-camadas de materiais poroelásticos	96
6.9	Absorção acústica do sistema de insolação de multi-camadas	97
6.10	Respostas de Vibroacústica para o material poroelástico Espuma C	99
6.11	Respostas de Vibroacústica para o material poroelástico Espuma D	100
6.12	Respostas de Vibroacústica para o material poroelástico Espuma E	101
6.13	Tubo de Impedância com presença de um absorvedor	102
6.14	Absorção acústica do absorvedor rígido em um tubo de impedância	103
6.15	Malha de Elementos Finitos - 12 elementos acústicos e 120 elementos poroelásticos	104
6.16	Absorção acústica do absorvedor flexível em um tubo de impedância	105
6.17	Descrição Física do problema	106
6.18	Malhas de Elementos Finitos para a análise do ângulo em um material poroelástico	107

6.19	Absorção acústica em função da frequência - análise do ângulo do material poroelástico	108
6.20	Análise da absorção para um ângulo de $\theta = 270^0$	109
6.21	Análise da absorção para um ângulo de $\theta = 315^0$ - <i>duplo</i>	109
6.22	Cavidade acústica 3D com presença de um material poroelástico	110
6.23	Malha de Elementos Finitos 3D para a cavidade acústica	111
6.24	Pressão média quadrática para o sistema da cavidade acústica tridimensional - com a presença do material absorvedor	112
6.25	Malha de Elementos Finitos para a cavidade acústica	114
6.26	Curvas de resposta em frequência de pressão para a cavidade acústica	114
6.27	Modos Acústicos para a análise dinâmica de um habitáculo veicular simplificado	116
6.28	Análise dinâmica de um habitáculo veicular simplificado - presença de bancos	117
6.29	Modos operacionais acústicos para a análise dinâmica de um habitáculo veicular simplificado - presença dos bancos	118
6.30	Modos Operacionais Estruturais acoplados para a análise dinâmica de um habitáculo veicular simplificado - presença dos bancos	119

Lista de Tabelas

2.1	Tipos de acoplamentos numéricos via formulação direta	8
6.1	Propriedades do material poroelástico utilizado nas simulações do problema transiente	90
6.2	Propriedades do material poroelástico utilizado nas simulações do problema dinâmico	94
6.3	Propriedades do material poroelástico utilizado nas simulações do problema dinâmico	98
6.4	Propriedades do material poroelástico utilizado nas simulações do tubo de impedância	104
6.5	Frequências naturais da cavidade acústica com a presença do material absorvedor	112
6.6	Frequências naturais da cavidade acústica rígida sem a presença do material absorvedor	113
6.7	Comparação das frequências naturais da cavidade acústica - desacoplado x acoplado	115
6.8	Frequências da cavidade acústica - presença dos bancos	118

Nomenclatura

Letras Latinas

A - constante de Lamé para os materiais poroelásticos (Teoria de Biot-Allard)

B - coeficiente de Skempton

b - coeficiente de amortecimento viscoso

c - velocidade de propagação do som em um meio

E - módulo de elasticidade ou módulo de rigidez ou módulo de Young

F - força ou cargas

h - porosidade

H - frequência característica viscosa

H' - frequência característica térmica

i - parte imaginária ($\sqrt{-1}$)

N - módulo de cisalhamento ou módulo de elasticidade transversal

p - pressão intersticial da fase fluida

Pr - número de Prandt

q - fluxo de massa por unidade de área na fronteira S do volume de controle poroelástico

Q - coeficiente de acoplamento entre as equações da fases sólida e fluida

R - módulo de deformação volumétrica do fluido por unidade de porosidade

t - tempo

u - deslocamento da fase estrutural

U - deslocamento da fase fluida

v - velocidade de partícula fluida

X - carga de dissipação viscosa

\dot{w} - velocidade de infiltração

Z - impedância acústica

Letras Gregas

α - absorção acústica

β - constante de Biot

Γ - contorno do domínio poroelástico

γ - constante de propagação da onda acústica

γ - termo de acoplamento entre as fases fluida e estrutural (Teoria de Biot-Allard)

δ - delta de Kronecker

ψ - função de ponderação (Método dos Elementos Finitos)

Λ - comprimento característico viscoso

Λ' - comprimento característico térmico

λ - constante de Lamé para os materiais poroelásticos (Teoria de Biot)

κ - permeabilidade hidráulica

η - viscosidade cinemática do Fluido

ν_b - coeficiente de Poisson drenado

ρ - massa específica de um material

σ - fluxo resistivo

θ - Razão entre os calores específicos do fluido

ξ - dilatação do fluido

Ω - domínio poroelástico

ω - frequência

Termos com Subscritos

c_0 - velocidade de propagação do som no meio acústico

K_b - módulo de deformação volumétrica do material poroelástico no vácuo

K_s - módulo de deformação volumétrica do material elástico no vácuo

K_f - módulo de deformação volumétrica do fluido
 P_0 - pressão atmosférica
 Z_n - impedância acústica superficial
 α_∞ - tortuosidade
 δ_v - dimensão da película viscosa
 ν_u - coeficiente de Poisson não drenado
 ρ_s - massa específica da fase sólida
 ρ_f - massa específica da fase fluida
 ρ_0 - massa específica do ar em condições específicas

Termos com Sobrescritos

\tilde{A} - variável complexa e dependente da frequência
 \dot{a} - termo com derivada primeira temporal
 \ddot{a} - termo com derivada segunda temporal
 $\hat{\sigma}^s$ - tensor de tensão da fase estrutural no vácuo
 σ^s - tensor total de tensão da fase estrutural
 σ^f - tensor de tensão da fase fluida
 ε^s - tensor de deformação da fase estrutural
 ε^f - tensor de deformação da fase fluida

Notação indicial

A_{ij} - matriz
 A_i - vetor
 $A_{i,i}$ - divergente de um vetor
 $a_{,j}$ - gradiente de um escalar
 $a_{,jj}$ - laplaciano de um escalar

Siglas

DMC - Departamento de Mecânica Computacional

FRF - Função de resposta em frequência

POO - Programação orientada a objetos

SPL - "Sound Pressure Level" (Nível de Pressão Sonora)

SVL - "Sound Velocity Level" (Nível de Vibração Estrutural)

Capítulo 1

Introdução

Estudos extensivos vem sendo conduzidos para o desenvolvimento de modelos analíticos que reflitam o comportamento de materiais poroelásticos usados em acústica. Esses modelos são usados para predizerem a propagação de ondas acústicas e elásticas em materiais com comportamento poroelástico. Devido à sua grande aplicação em engenharia e à necessidade de modelos rápidos, versáteis e eficientes, várias modelos numéricos baseados na técnica de Elementos Finitos vem sendo propostos e implementados. Esses modelos são usados para predizerem a absorção, as características de perda de transmissão, condições de contorno e como ferramenta para a otimização destas propriedades. Um exemplo disto é a determinação da geometria de construções complexas de materiais absorvedores em cavidades acústicas.

Estruturas contendo materiais poroelásticos são amplamente usadas devido às suas propriedades de absorção e isolamento do som bem como às suas características de amortecimento. Dentre outras podem-se citar as seguintes aplicações:

- Controle de ruídos em automóveis
- Controle da qualidade do som em ambientes domésticos e industriais
- Sistemas de isolamento acústica em aeronaves
- Mecânica dos Solos
- Escoamento em meios porosos
- Modelagem de sistemas biomecânicos

Em uma aplicação típica destes materiais em aeronaves comerciais, é desejado um isolamento acústico eficiente e que proporcione conforto e qualidade sonora aos passageiros. Este sistema, dito passivo, em associação com outros, ditos ativos, realizam o controle de ruídos em uma aeronave. As propriedades, as configurações, as formas e a localização de camadas de materiais poroelásticos são fatores influentes na maximização da absorção acústica.

Um sistema de isolamento de um jato comercial é mostrado em detalhe na Figura (1.1). O sistema é composto por diversos tipos de materiais porosos (Lamary et al., 2001), associado a dispositivos de amortecimento, sendo sua descrição física real bastante complexa.

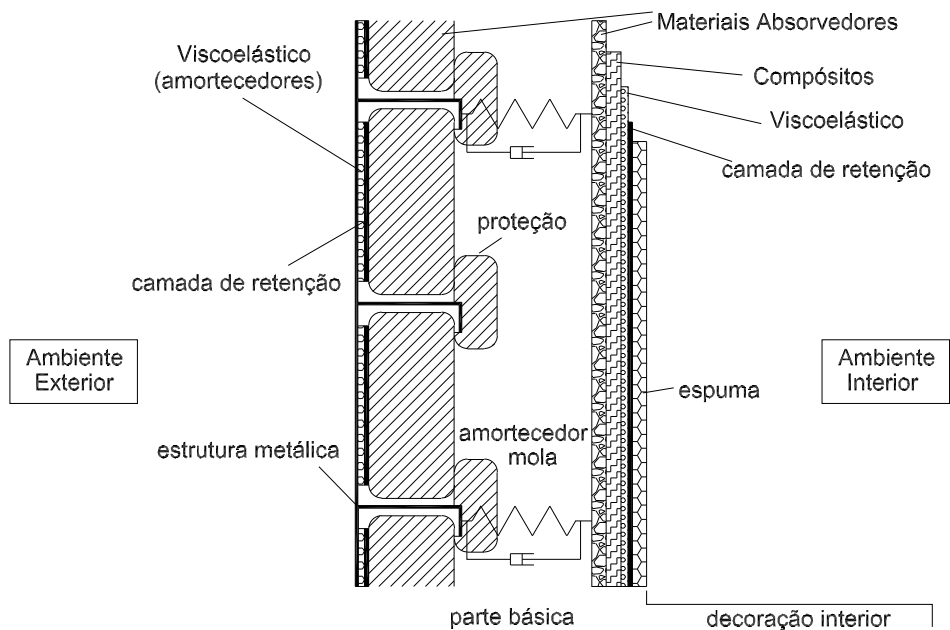


Figura 1.1: Esquema de montagem estrutural e controle de ruído em uma aeronave comercial

Para o caso exemplar da indústria automobilista, o projeto de isolamento acústico em seus habitáculos passam por diversas etapas. A validação da eficiência destes, na maioria dos casos, vem de análises experimentais as quais refletem em testes, o desempenho e a absorção acústica dos sistemas absorvedores escolhidos. Com a utilização de modelos numéricos confiáveis algumas etapas poderiam se tornar mais rápidas e menos onerosas. Neste sentido, a ferramenta necessária para o projetista é um ambiente virtual onde se reproduza numericamente os fenômenos de um teste. Na grande maioria dos casos, o procedimento baseado

na simulação computacional se torna menos oneroso e agrega valor ao produto final.

1.1 Motivação e objetivos

O interesse no desenvolvimento de métodos preditivos em Vibro-acústica nasceu da experiência acumulada no Departamento de Mecânica Computacional neste tema, onde em trabalhos anteriores foram evidenciados vários fenômenos acústicos e aplicações variadas de materiais poroelásticos (Campos, 1995) e (Nunes, 2001). Dentre os trabalhos citados, destaca-se a contribuição de (Nunes, 2001), o qual consiste em uma investigação teórica e experimental de cavidades acústicas, explorando-se os efeitos da presença de materiais absorvedores em um modelo experimental de um habitáculo veicular.

A poroelasticidade vem sendo amplamente discutida na comunidade científica e é um tema interessante devido a sua grande aplicação em engenharia.

O presente trabalho não apresenta uma formulação inédita para o estudo da poroelasticidade mas contribui com uma técnica de implementação orientada a objetos em materiais poroelásticos utilizados em acústica, que foi aplicada inicialmente em baixas frequências.

Assim, a implementação computacional de um modelo numérico que resolva de forma versátil os modelos e aplicações de materiais poroelásticos em acústica foi o principal objetivo deste trabalho. Com o intuito de mostrar a validade do Método de Elementos Finitos nesta aplicação, resultados amplamente discutidos na literatura foram comparados e ainda proposição de problemas, nos quais se evidencie a eficiência e a utilidade dos métodos numéricos.

Entre os objetivos específicos podem ser citados: a criação de uma ferramenta rápida e eficiente aplicada aos projetos de sistemas absorvedores, realizar o estudo da fenomenologia e das hipóteses usadas na modelagem, a ampliação do uso dos modelos para o caso do acoplamento poro-acústico e o estudo da influência de parâmetros físicos e computacionais sobre os campos acoplados.

1.2 Descrição do Trabalho

O presente trabalho está organizado conforme descrito a seguir:

No Capítulo 2, apresenta-se uma descrição do campo de estudo de sistemas acoplados e como se insere o problema da poroelasticidade. Uma revisão histórica da literatura sobre os modelos e as principais formulações numéricas é apresentada.

O Capítulo 3 mostra um estudo sistemático das propriedades dos materiais, dos fenômenos da propagação de ondas em materiais poroelásticos, das hipóteses e teorias simplificadoras do problema, do efeito de impedância e absorção em cavidades acústicas, conceitos que foram aplicados neste trabalho.

No Capítulo 4, tem-se a partir do entendimento das equações diferenciais regentes do problema da poroelasticidade acoplada, descritas no Capítulo 3, o detalhamento da formulação numérica de Elementos Finitos implementada computacionalmente.

No capítulo 5, mostra-se a proposta de implementação computacional realizada, destacando-se as principais contribuições detalhadas no programa Meflab++, em uma formulação de elementos finitos compilada em uma linguagem C++ com uma filosofia de orientação a objetos.

O capítulo 6 contém a validação desse modelo e do método numérico implementado. Foram testados diversos problemas encontrados na literatura. A proposta de aplicação em domínios unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais foi concebida em problemas de vibro-acústica e no estudo numérico dos efeitos das propriedades dos materiais poroelásticos em cavidades acústicas. Problemas envolvendo o acoplamento acústico-poroelástico são discutidos.

No Capítulo 7 apresentam-se as conclusões do presente trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros nesta área de pesquisa.

Este trabalho abre perspectivas para aplicações maiores onde se está interessado em projetos e na determinação de soluções ótimas para sistemas absorvedores acústicos.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Sistemas Acoplados

Uma síntese e uma classificação dos sistemas acoplados são apresentados com a finalidade de posicionar globalmente o problema da poroelasticidade acoplada.

A análise de sistemas acoplados é aquela onde há uma junção entre dois ou mais campos de engenharia. Devido a sua grande aplicação, a sua modelagem tem sido objetivo de muitos estudos há algum tempo. Trabalhos aparecem na literatura desde os anos vinte (Lamb, 1920).

Nos anos setenta e oitenta, um grande número de trabalhos sobre o assunto receberam destaque na literatura científica. Foi dada uma maior ênfase a escolha da descrição e da formulação matemática a ser utilizada em problemas acoplados.

Dentre as formulações mais usuais pode-se citar as formulações Eulerianas para o domínio fluido e as formulações Lagrangianas para o domínio sólido. Todavia, várias possibilidades foram e são estudadas, a fim de se procurar para cada caso específico a melhor forma de descrever e resolver as equações de sistemas acoplados. Uma análise de materiais piezelétricos, por exemplo, resulta da interação entre os campos estruturais e elétricos. Outros exemplos de análise de sistemas acoplados são as que envolvem os campos térmico-estrutura, térmico-elétrico e fluido-estrutura.

Nesta revisão, será dada ênfase ao estudo de sistemas acoplados dentro de um contexto dos métodos numéricos, mais particularmente no contexto do método dos Elementos Finitos.

2.1.1 Classes de Problemas Acoplados

De acordo com (Zienkiewicz et al., 1965), um dos pioneiros na área de modelagem numérica, os sistemas podem ser formulados usando-se uma técnica mista ou acoplada.

Formulações mistas são aquelas aplicadas para um domínio simples nas quais as equações e as condições de contorno que descrevem o fenômeno físico baseiam-se em um número de variáveis dependentes, as quais podem ser reduzidas por eliminação, ainda se mantendo como um problema com solução. Enquadram-se nesta classe as formulações em deslocamento, em forças e as mistas.

Por outro lado as formulações acopladas são aquelas aplicadas em múltiplos domínios e as variáveis dependentes que usualmente (mas não sempre) descrevem diferentes fenômenos físicos respeitam as seguintes restrições: (a) nenhum dos domínios pode ser resolvido separadamente um do outro; (b) nenhum conjunto de variáveis dependentes pode ser explicitamente eliminado ao nível de equação diferencial.

Em sistemas acoplados a solução de um subdomínio em separado pode ser um problema bem definido, quando as variáveis correspondentes ao outro subdomínio são conhecidas. Isto nem sempre pode ser feito para as formulações de problemas mistos.

Ainda segundo (Zienkiewicz, 1984), os sistemas acoplados podem ser classificados em duas categorias:

Classe I - Problemas nos quais o acoplamento ocorre somente nas interfaces dos domínios.

Ocorre através da imposição das condições de contorno. Uma subdivisão ainda é feita:

- a) problemas nos quais diferentes variáveis dependentes existem em diferentes domínios
- b) problemas nos quais idênticas variáveis dependentes existem em diferentes domínios

Classe II - Problemas que contenham os vários domínios sobrepostos (com uma intersecção seja parcial ou total entre eles). Neste caso o acoplamento ocorre através das equações diferenciais governantes normalmente referentes a diferentes fenômenos físicos.

Na primeira classe estão os problemas de interação fluido-estrutura, os quais diferentes meios físicos interagem um com outro. Um outro exemplo é a interação estrutura-estrutura,

para qual uma interface divide as regiões em análise e onde diferentes discretizações numéricas podem ser utilizadas.

Para a segunda classe, o acoplamento é dito mais forte em comparação à primeira classe. A poroelasticidade está nesta classe de problemas. Um exemplo físico pode ser evidenciado na mecânica dos solos onde o comportamento do solo é fortemente influenciado pelas pressões do fluido presente em seus poros (Brooks e Hughes, 1984).

A necessidade do uso de esquemas de discretização diferentes em campos diversos pode surgir por várias razões:

- Diferentes malhas de elementos finitos podem ser vantajosas para descreverem sub-domínios.
- Diferentes procedimentos e métodos de solução numérica ou até mesmo a combinação deles, como por exemplo a dos elementos de contorno com os elementos finitos em regiões definidas, pode ser computacionalmente desejado.
- Problemas de multi-domínios podem ser simplificados quando divididos através escolha de diferentes esquemas de integração no tempo.

Observa-se que várias formulações e classes de problemas podem ser identificadas, o que demonstra a generalidade e a abrangência dos estudos nesta área.

2.1.2 Procedimentos de Análise

Diferentes procedimentos de análises para as diversas classes de problemas acoplados são discutidos nesta seção. Algumas de suas particularidades e razões são postas em evidência.

O procedimento para se fazer uma análise de sistemas acoplados depende de quais campos estão sendo acoplados. Dois métodos distintos podem ser identificados: seqüencial e o direto (Zienkiewicz, 1984).

O método seqüencial envolve duas ou mais análises em seqüência, cada uma feita em um diferente campo. Pode-se acoplar os dois campos aplicando-se os resultados da primeira análise sobre a segunda, como por exemplo: a análise do campo de tensões-térmicas, onde o campo de temperaturas obtido em uma análise térmica é aplicado como forças de corpo

em uma subsequente análise do campo de tensões. A Figura (2.1) ilustra um procedimento seqüencial que pode ser acoplado ou desacoplado

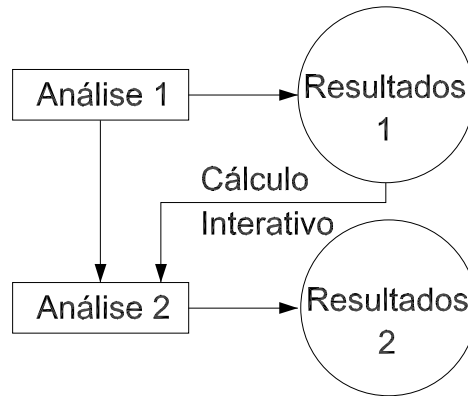


Figura 2.1: Diagrama de Análise Seqüencial

O método direto usualmente já envolve uma análise completa e simultânea dos campos. Para este tipo de procedimento, os acoplamentos entre os campos podem ser feitos calculando-se as matrizes de acoplamento ou através dos vetores de carregamento elementares. Em problemas lineares com matriz acoplada, a interação é processada simultaneamente. Para o procedimento via vetor de carregamento, é requerido ao menos duas iterações para uma resposta acoplada. Problemas não-lineares são iterativos para ambos acoplamentos.

Na Tabela (2.1) é mostrado um resumo de problemas comuns em engenharia com acoplamento direto e o seus termos, matriz ou vetor, de acoplamento:

Tabela 2.1: Tipos de acoplamentos numéricos via formulação direta

Tipo de Análise	Método de Acoplamento
Termo-Estrutural	Vetor Carregamento (matriz caso existir contato)
Magnético-Estrutural	Vetor carregamento
Eletro-Magnético	Matriz
Eletro-Magnético-Térmico-Estrutural	Vetor carregamento
Eletro-Magnético-Térmico	Vetor carregamento
Piezelétrico	Matriz
Dinâmico-Termo-Fluido	Matriz
Fluido-Estrutura (ex: Vibro-acústico)	Matriz
Termo-Elétrico	Vetor carregamento
Magnético-Térmico	Vetor Carregamento
Eletrostático-Estrutural	Vetor carregamento

Vale destacar que na maioria dos problemas acoplados de forma direta, apesar da inerente simetria das matrizes, ocorre na montagem do problema acoplado, uma assimetria do sistema de equações lineares.

O problema da poroelasticidade acoplada se enquadra nos problemas de interação Fluido-Estrutura, mais especificamente nos vibro-acústicos. O problema possui algumas particularidades, entre elas está a homogeneização das propriedades de dois domínios, o Fluido e o Estrutural em um só, constituindo assim uma superposição de campos. Importantes características deste tipo de acoplamento serão colocados em evidência nos capítulos seguintes.

2.2 Revisão Histórica

Neste ítem será apresentado um breve histórico sobre o desenvolvimento dos modelos e formulações numéricas de materiais poroelásticos bem como algumas de suas aplicações em engenharia.

Nos trabalhos de (Eijk e Zwikker, 1941), (Zwikker et al., 1941a), (Zwikker et al., 1941b) e (Zwikker, 1941), apresentam-se os fundamentos teóricos dos materiais absorvedores usados em acústica, bem como uma discussão dos novos parâmetros físicos introduzidos. Técnicas de medições de propriedades acústicas e parâmetros físicos dos materiais absorvedores são exemplificados em uma montagem experimental.

Em (Biot, 1956) a teoria clássica de Biot é escrita. Um desenvolvimento de modelo de propagação de ondas de tensão em sólidos elásticos porosos contendo em seu interior um fluido compressível viscoso. A ênfase deste trabalho está nos materiais estudados na Mecânica dos Sólidos, o exemplo em estudo é uma rocha saturada por água. Uma implementação numérica também é feita para evidenciar os resultados desta nova teoria.

Em (Biot, 1962), é reescrita a teoria clássica de Biot apresentada em 1956, agora para problemas de propagação de ondas acústicas em meios porosos com extensão a casos de anisotropia, viscoelasticidade e dissipação do sólido. Vários modelos dissipativos são discutidos, bem como seus funcionais correspondentes. Um método funcional e Lagrangiano são utilizados para compor os termos de energia de diferentes sistemas. Processos químicos de meios porosos multifásicos incluindo efeitos superficiais em uma visão da teoria da termodinâmica também

são mencionados, bem como a natureza de dissipação termoelástica e efeitos eletrocinéticos.

No trabalho (Rice e Cleary, 1976), os autores apresentam uma formulação modificada para a Teoria da Poroelasticidade de Biot, sendo propostas novas constantes com outro significado físico e de mais fácil entendimento. É estudado ainda o problema de um meio poroso contendo um fluido compressível.

Em (Craggs, 1978), um modelo numérico de elementos finitos isoparamétricos com oito nós é usado para prever o comportamento da absorção acústica de materiais porosos rígidos. Resultados de simulações unidimensionais e bidimensionais mostram o efeito sobre os modos de propagação sonora. Valores Analíticos de Impedância também são citados neste texto.

O trabalho de (Craggs, 1979) mostra o procedimento do acoplamento de elementos acústicos com elementos porosos em um modelo de absorção acústica. A comprovação do método é feita através da comparação de resultados analíticos para um tubo de impedância.

Em (Craggs, 1985) uma simplificação teórica do comportamento de absorção de materiais porosos é apresentada em termos da resistividade e densidade efetivas. Comprovações experimentais em uma cavidade acústica com a presença de materiais absorvedores são feitas. Aplicações de engenharia e possibilidades de aplicações industriais são citadas pelo autor.

Em (Johnson et al., 1987), um estudo das características físicas conhecidas de um fluido aprisionado em um poro de um meio poroso isotrópico é feito para uma posterior definição de parâmetros como o comprimento viscoso e térmico, características dinâmicas de materiais porosos. A evolução da tortuosidade e da permeabilidade em função da frequência são estudados a partir de um enfoque teórico e experimental.

Em (Depollier et al., 1988), um modelo comparativo das equações de Biot é construído para uma melhor aproximação das propriedades acústicas de materiais absorvedores de som. Novos termos dos coeficiente de Biot são escritos.

Em (Detournay e Cheng, 1991) estudou-se a fratura hidráulica estacionária presente em um meio poroelástico. Uma solução no campo de Laplace é proposta para o meio poroso sujeito a tal carregamento.

O trabalho (Champoux e Allard, 1991) apresenta um modelo teórico da tortuosidade dinâmica em função da frequência. Os resultados teóricos obtidos são comparados com os

resultados de uma análise experimental de medidas acústicas sobre um material poroso rígido e saturado de ar.

Em (Goransson, 1995b) uma formulação residual fraca para o problema acoplado de propagação de ondas acústicas e elásticas através de materiais porosos flexíveis é apresentada para um caso unidimensional em termos da pressão acústica e do campo de deslocamento estrutural. O efeito de uma estrutura fibrosa é discutido em uma síntese de um problema fluido-estrutura em baixas frequências pelo estudo da transmissibilidade acústica através de uma parede dupla.

Em (Goransson, 1995a) uma nova formulação residual é desenvolvida levando em conta os fatores inerciais e acoplamentos fluido-estrutura. A formulação apresentada por este autor resulta em simetria do problema acoplado, já que um novo campo de variáveis é introduzido: o potencial de velocidades.

Em (Kang e Bolton, 1995), há o desenvolvimento de um modelo bidimensional elasto-dinâmico baseado na técnica de elementos finitos para materiais elásticos porosos usados no controle passivo de ruídos. É aplicada a formulação (u,U) , deslocamento da fase sólida (u) e deslocamento da fase fluida (U), com um acoplamento de domínios acústico-poroelástico para exemplos de tubos de impedância sob diversas condições de contorno.

No Departamento de Mecânica Computacional da Unicamp, (Campos, 1995) reescreve as equações da poroelasticidade de Biot e as equações modificadas segundo (Rice e Cleary, 1976) em um estado linear quase-estático. A deformação elástica e a difusão fluida em meios porosos saturados são estudadas. O método numérico dos Elementos de Contorno é aplicado em problemas clássicos da elasticidade e em problemas da Mecânica dos Solos.

(Siqueira, 1995) apresenta formulações analíticas e numéricas para problemas clássicos da poroelasticidade aplicada a Mecânica dos Solos. A implementação computacional usa orientação por objetos que se mostra adaptada a formulação de Elementos Finitos.

Em (Leclaire et al., 1996b) os autores apresentam um estudo sobre o comprimento característico viscoso que é usado para descrever o comportamento acústico de um meio poroso saturado por fluido em altas frequências. Uma comprovação experimental destes efeitos é apresentada. A determinação experimental deste parâmetro se dá através da técnica de me-

didadas de atenuação ultrasônica. Os valores são comparados através do ajuste não-linear de curvas de dispersão.

Em (Leclaire et al., 1996a) é feito uma explanação sobre os significados físicos dos comprimentos característicos viscoso e térmico de um material poroelástico. Uma discussão sobre novas técnicas experimentais usando-se o gás Hélio para análise da transmissibilidade em frequências ultrasônicas é apresentada. A proposta deste trabalho está no novo método de determinação simultânea de ambos os comprimentos característicos de uma forma precisa e confiável.

Em (Panneton e Atalla, 1997b), linearizações dos termos das equações acopladas da poroelasticidade de Biot são propostas pelos autores, já que em trabalhos anteriores nota-se que a técnica de elementos finitos aplicado a problemas dinâmicos poroelásticos recaem em problemas de autovetores e autovalores não-lineares.

Para (Panneton e Atalla, 1997a), uma formulação de elementos finitos baseado na teoria clássica de Biot-Allard pode ser usada para a solução de problemas tridimensionais da poroelasticidade acoplada. Um esquema de programação das matrizes na formulação (u,U) é colocada em evidência. Os acoplamentos entre o fluido presente na matriz estrutural e os diversos acoplamentos entre os campos acústicos e poroelásticos são detalhados. Para um exemplo numérico que mostra o efeito da presença de um material absorvedor poroelástico dentro de uma cavidade acústica tridimensional são obtidas medidas globais do comportamento dinâmico de pressão.

Em (Atalla et al., 1998), uma formulação mista de deslocamento estrutural e pressão intersticial do fluido (u,p) é apresentada. A formulação é derivada das clássicas equações da poroelasticidade de Biot acrescida do modelo de Allard. Faz-se uma implementação computacional baseada nas técnicas de elementos finitos, em sua clássica forma acoplada, para o problema fluido-estrutura envolvendo as equações dinâmicas de uma matriz estrutural no vácuo e de um modelo equivalente fluido acústico de Helmholtz. Uma outra discussão pertinente neste trabalho é o ganho de tempo em processamento obtido pelo uso da formulação (u,p) em comparação com as clássicas desenvolvidas por Biot-Allard (u,U) .

Em (Debergue et al., 1999) são apresentados as diversas condições de contorno e aco-

plamento para a formulação fraca mista (u,p) para materiais poroelásticos. O estudo torna evidente as vantagens de se usar a formulação mista (u,p) quando comparada com a formulação (u,U), devido as montagens das matrizes de acoplamento entre os vários domínios, acústico, poroelástico e elástico.

Em (Atalla et al., 2001), um reforço do modelo da formulação mista de materiais poroelásticos desenvolvida em (Atalla et al., 1998) e (Debergue et al., 1999) é feito, onde os coeficientes, a montagem das matrizes de elementos finitos, o acoplamento acústico, elástico e poroelástico e a imposição das condições de contorno de tais acoplamentos são discutidos.

Em (Lamary et al., 2001), um programa feito em filosofia orientada a objetos para o problema poroelástico, o CAVOK, é discutido e apresentado. Suas vantagens e resultados numéricos são explanados em uma aplicação aero-acústica.

Em (Dazel et al., 2002) uma nova técnica de síntese modal para materiais poroelásticos é concebida. É proposto um método alternativo através de linearizações dos coeficientes de Biot com a frequência e aplicando-se técnicas de redução modal em problemas de elementos finitos aplicados em materiais poroelásticos.

O trabalho de (Litwinczik, 2003) apresenta um estudo sobre irradiação sonora de uma placa plana simplesmente apoiada revestida com material poroso. Um modelo de propagação de ondas em materiais porosos, baseado na teoria clássica de Biot, é usado. Métodos experimentais de determinação dos parâmetros poroelásticos são discutidos.

Dentro deste escopo o presente trabalho aborda os modelos de Biot e Biot-Allard para fases sólidas flexíveis, incluindo-se os termos de dissipação térmica e viscosa. Uma discussão das propriedades poroelásticas é feita, procurando-se esclarecer o sentido físico de cada uma delas.

Utilizando-se do Método de Elementos Finitos para as equações diferenciais parciais (problemas de valores de contorno) do modelo da poroelasticidade de Biot-Allard, foi proposta uma implementação numérica no domínio frequência e do tempo. Baseada na linguagem orientada ao objeto, tal implementação foi construída a partir da inserção do problema poroelástico em um programa mais amplo e geral, o Meflab++, em desenvolvimento por um grupo de pesquisa do Departamento de Mecânica Computacional.

Capítulo 3

Propagação de Ondas em Materiais Poroelásticos

Neste capítulo, um estudo de meios porosos com saturação fluida é apresentado. O modelo clássico de Biot para a propagação de ondas em meios poroelásticos será discutido. Em seguida, outros modelos derivados serão descritos para compreensão do comportamento dinâmico e transiente dos materiais poroelásticos estudados neste trabalho.

3.1 Características dos Materiais Poroelásticos

A análise da propagação de ondas acústicas em meios porosos parte do processo de homogeneização das propriedades. Desprezando-se os efeitos microscópicos, assume-se os conceitos e princípios da mecânica do contínuo (existência de potenciais e do princípio da estacionariedade), consistindo em se medir valores macroscópicos.

O material poroelástico pode ser compreendido como sendo a superposição de dois domínios ou duas fases: Sólido e Fluido. A Figura (3.1) mostra de uma forma simplificada a representação macroscópica do meio poroelástico.

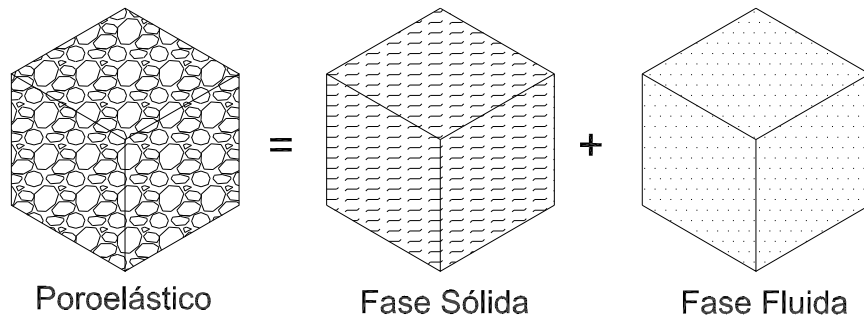


Figura 3.1: Fases Sólida e Fluida de um Material Poroelástico

De forma preliminar, pode-se afirmar que os efeitos dissipativos que os materiais poroelásticos exercem sobre um fluxo de um fluido sobre este está relacionado com as irreversibilidades geradas. A dificuldade de propagação das ondas mecânicas dentro de um material poroelástico é função de como a rede é distribuída no espaço.

Uma representação dos efeitos que influenciam os fenômenos de transporte de massa ou energia em um meio poroelástico é mostrada na Figura (3.2):



Figura 3.2: Comportamento macroscópico de um fluxo sobre um material poroelástico

A variação da pressão ($p_2 - p_1$) do fluxo exercido através do material poroso é um dos fatores preponderantes para se poder entender os efeitos dissipativos devido ao acoplamento fluido-estrutura.

De forma análoga a problemas de óptica, a incidência de uma onda acústica em um material poroelástico pode ser entendido como a passagem de uma onda de um meio para o outro com índices de refração diferentes, conforme ilustrado na Figura (3.3).

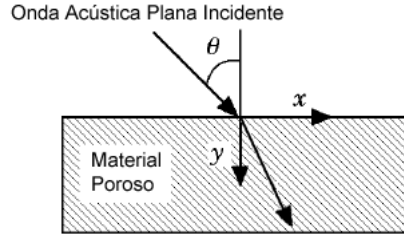


Figura 3.3: Propagação de ondas em um material poroelástico

3.2 Hipóteses físicas para o problema da poroelasticidade

Neste ítem serão enumeradas as diversas hipóteses físicas e simplificadoras para o problema poroelástico. A relevância dessas hipóteses está no entendimento e na linearização das equações diferenciais governantes. As hipóteses iniciais são as que se seguem:

- O comprimento da onda propagante é maior que as dimensões do volume elementar macroscópico.
- Os corpos sólidos são homogêneos.
- Os corpos sólidos são isotrópicos, ou seja, possuem propriedades como porosidade (h), contínuas em qualquer ponto. A porosidade h é definida como sendo a fração volumétrica de poros preenchidos por fluido sobre o volume total ocupado pelo esqueleto poroelástico.

$$h = \frac{V_f}{V_f + V_s} \quad (3.1)$$

Define-se q como sendo o fluxo perpendicular através da área S . Para estabelecer o balanço de massa e energia do sistema é necessário se calcular as seguintes quantidades:

$$dq = \dot{w}_i \cdot n_i dS$$

$$\dot{w}_i = \dot{u}_i - \dot{U}_i \quad (3.2)$$

onde: u_i é o vetor de deslocamento estrutural,
 U_i é o vetor de deslocamento fluido,
 \dot{w}_i representa o vetor de velocidade de infiltração e
 dq é o valor infinitesimal do fluxo volumétrico

Para um volume microscópico Ω com um contorno de área S, tem-se:

$$\int_S w_i \cdot n_i dS = \int_{\Omega} w_{i,i} d\Omega \quad (3.3)$$

e sendo definido então:

$$\xi = -w_{i,i} \quad (3.4)$$

sendo ξ o incremento de conteúdo fluido, também conhecido como dilatação fluida. Tal grandeza representa fisicamente a soma das parcelas de fluido que entra ou sai através de S.

- As deformações da fase sólida serão pequenas o suficiente para serem linearizadas, o que permite escrever em forma indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

onde ε_{ij} representa o tensor de deformações linearizado e u_i como já descrito, o vetor de deslocamento da fase sólida. A vírgula indica a regra de derivação usual da notação indicial.

- As velocidades de partícula fluida são pequenas de tal forma a se poder desprezar os termos convectivos.
- Para uma perturbação causada por uma fonte externa, a propagação das ondas mecânicas sobre o meio ocorre de forma rápida podendo ser admitido como um processo adiabático.
- Os poros que constituem o corpo esquelético são todos interconectados de tal forma a permitir o fluxo sem interrupções através dos mesmos.
- O fluido é considerado Newtoniano.
- A fase fluida é contínua ou seja o meio é supostamente completo e saturado, sem a presença de vazios.

Este conjunto de hipóteses físicas permite escrever as equações governantes do meio poroelástico.

3.3 Equações de movimento

Seja um sistema contínuo, cujo volume cúbico infinitesimal esteja sujeito a forças internas do material aplicadas nas suas faces, conforme descrito na Figura (3.4).

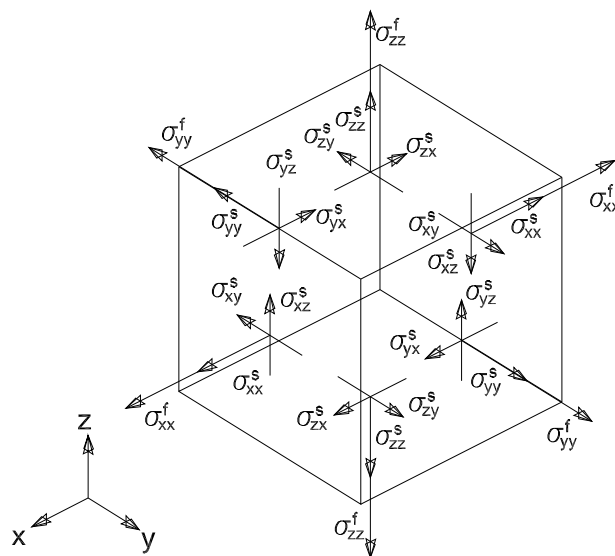


Figura 3.4: Elemento infinitesimal para um contínuo poroelástico

Define-se o tensor das tensões para o meio poroso da seguinte maneira, mostrado a seguir em uma forma matricial, uma proposta ilustrativa de como é composto tal tensor para um meio poroelástico:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^s + \sigma_{xx}^f & \sigma_{xy}^s & \sigma_{xz}^s \\ \sigma_{yx}^s & \sigma_{yy}^s + \sigma_{yy}^f & \sigma_{yz}^s \\ \sigma_{zx}^s & \sigma_{zy}^s & \sigma_{zz}^s + \sigma_{zz}^f \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Os tensores σ_{ij}^s e σ_{ij}^f denotam os tensores de tensão parcial associados com a partícula sólida e a partícula fluida, respectivamente.

O vetor u_i corresponde a uma média macroscópica do deslocamento estrutural no elemento geométrico de referência considerado, enquanto U_i é a média do deslocamento do fluido contido no elemento que entrou ou saiu de tal volume de controle.

Uma dificuldade se origina do fato da descrição macroscópica *a priori* ser Lagrangiana enquanto que para o fluido é Euleriana. Contudo, para pequenos deslocamentos para o sólido e para o fluido as duas descrições podem ser consideradas equivalentes.

A seguir, uma descrição das parcelas de energia de um domínio contínuo poroelástico é apresentada. Será montado o Lagrangiano do problema com a finalidade de se encontrar as equações diferenciais governantes, que corresponde ao modelo inicial de Biot.

3.3.1 Potencial de deformação

Para o caso de um meio poroelástico, nota-se a existência de um potencial de deformação \mathbf{V} . Assume-se que este potencial de deformação é dependente da deformação da fase fluida (ξ) e da fase sólida (ε_{ij}), o que permite escrever a seguinte equação:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial V}{\partial \xi} d\xi \quad (3.6)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação (3.6) representa a variação infinitesimal do potencial de deformação com respeito às deformações da fase sólida e o segundo termo representa a variação com respeito ao acréscimo de fluido.

Os tensores de tensão para ambas as fases, sólida e fluida são definidos como:

$$\sigma_{ij}^s = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} \sigma^f = \frac{\partial V}{\partial \xi}$$

Assumindo-se pequenas deformações, a expansão de V pode ser limitada aos termos quadráticos, ou seja o potencial de deformação em sua forma linear pode ser escrito como:

$$V = \frac{\sigma_{xx}^s \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^s \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}^s \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}^s \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz}^s \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz}^s \varepsilon_{yz} + \sigma^f \xi}{2} \quad (3.7)$$

Sendo σ_{ij}^s os componentes de tensão atuantes nas faces do cubo unitário mostrados na Figura (3.4) na partição sólida. A tensão σ^f é a tensão efetiva da parte fluida sobre as faces do cubo. Tal valor de tensão está relacionada com a pressão (p) do fluido no volume infinitesimal, através da seguinte relação:

$$\sigma_{ij}^f = -hp\delta_{ij} \quad (3.8)$$

onde p é a pressão intersticial do fluido e h é a porosidade do meio. Na Equação (3.8), o termo δ_{ij} indica a função delta de Kronecker, definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.9)$$

onde a relação $\sigma_{ij}^f = \sigma^f \delta_{ij}$ é utilizada.

A partir da lei de Hooke em sua forma generalizada, tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 - \nu_b}{E} \sigma_{ij}^s - \frac{\nu_b}{E} \sigma_{kk}^s \delta_{ij} \quad (3.10)$$

onde ν_b representa o coeficiente de Poisson e E o módulo de Elasticidade do material da fase sólida.

Para a fase fluida, tem-se a chamada equação de estado, descrita como sendo:

$$\xi = \frac{\sigma^f}{K_f} \quad (3.11)$$

onde K_f é o módulo de deformação volumétrica do fluido.

Devido a isotropia da fase sólida, faz-se somente necessário o conhecimento das duas primeiras invariantes do tensor de deformação, que em suas formas tensoriais podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{kk} \\ I_2 &= 2((\varepsilon_{kk}^2) - I_1^2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $\varepsilon_{kk} = tr(\varepsilon)$ representa o traço do tensor. Tal escalar corresponde a soma da diagonal do tensor. Matematicamente, para a deformação tridimensional ($k = 1, 2, 3$), tem-se:

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (3.13)$$

A partir da Equação (3.7) combinada com a Equação (3.10) e usando-se os valores das invariantes do sistema, definidos na Equação (3.12), uma expressão para o potencial de deformação pode ser encontrada, conforme dedução apresentada em (Bourbié et al., 1987):

$$2\mathbf{V} = (\lambda_f + 2N)I_1^2 + NI_2 + 2\beta\frac{R}{h}I_1\xi + R\xi^2 \quad (3.14)$$

onde N representa o módulo de cisalhamento do material da fase sólida, λ_f é a segunda constante de Lamé. As constantes β e R são coeficientes introduzidos por Biot que serão descritos e analisados posteriormente.

Escrevendo-se as expressões das tensões parciais para as duas fases, a partir da Equação (3.7), em sua forma tensorial, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^s &= \lambda_f \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij} + \beta \frac{R}{h} \xi \delta_{ij} \\ \sigma^f &= \frac{R}{h} (\beta \varepsilon_{kk} + h \xi) \end{aligned} \quad (3.15)$$

De uma forma alternativa pode-se introduzir a variável pressão, definida na Equação (3.8), nas equações descritas em (3.15), obtendo-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^s &= \lambda_0 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij} - \beta p \delta_{ij} \\ h\xi &= -\frac{h^2}{R} p - \beta \varepsilon_{kk}\end{aligned}\tag{3.16}$$

onde $\lambda_0 = \lambda_f - \beta^2 \frac{R}{h^2}$ é o segundo coeficiente de Lamé medido em um sistema aberto ($p = 0$) e λ_f representa o segundo coeficiente de Lamé medido em um sistema fechado ($\xi = 0$)

O coeficiente R é a pressão exercida no fluido devido a um acréscimo unitário de ξ supondo-se uma deformação macroscópica isovolumétrica da fase sólida nula ($\varepsilon_{kk} = 0$), explícito na segunda equação de (3.16).

O coeficiente β relaciona as deformações das fases fluida (ξ) e sólida (ε_{kk}) para o caso do sistema aberto ($p = 0$) conforme explicitado na segunda equação de (3.16).

3.3.2 Dissipação Pseudo-Potencial

O Lagrangiano do problema é construído em uma formulação conservativa. Para se poder fazer um balanço de energia total em um elemento infinitesimal poroelástico, deve-se assumir uma parcela de energia denominada como *Pseudo*, responsável pelas perdas de energia entre as interações fluido-estrutura.

As dissipações de energia estão associadas aos movimentos relativos do fluido nas vizinhanças do ponto de equilíbrio. Nestas condições, a força dissipativa X_i se relaciona com o vetor das velocidades de infiltração \dot{w}_i , da seguinte maneira (Bourbié et al., 1987)

$$\dot{w}_i = K_{ij} X_j\tag{3.17}$$

onde K_{ij} está associado a dissipação do meio.

Baseado na Equação (3.17), uma dissipação pseudo-potencial \mathbf{D} pode ser introduzida. Em sua forma quadrática e supondo K_{ij} definida positiva:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \frac{1}{2} \dot{w}_i^t K_{ij}^{-1} \dot{w}_i \\ X_i &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{w}_i}\end{aligned}\tag{3.18}$$

O termo pseudo-potencial que aparece na segunda equação de (3.18) é somente justificável nas vizinhanças do equilíbrio termodinâmico. Para o caso isotrópico, o tensor K_{ij}^{-1} é proporcional a identidade $K_{ij}^{-1} = K^{-1} \cdot I_{ij}$, sendo K um escalar e uma constante de proporcionalidade, assim tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2K} \dot{w}_i^2 \\ X_i &= \frac{1}{K} \dot{w}_i \end{aligned} \quad (3.19)$$

A clássica lei de Darcy pode ser reconhecida na segunda equação de (3.19) desde que K seja identificado como a permeabilidade hidráulica do meio e a força X_i esteja em oposição ao gradiente de pressão ($p_{,i}$).

3.3.3 Energia Cinética

O comprimento de onda que se propaga sobre o meio é assumido como sendo bem maior que as dimensões do volume elementar macroscópico $d\Omega$. Baseado nesta hipótese, pode-se expandir os termos do potencial de energia cinética \mathbf{C} até os termos de segunda ordem, como se segue:

$$2\mathbf{C} = \rho_u \dot{u}_i \dot{u}_i + 2\rho_{uw} \dot{u}_i \dot{w}_i + \rho_w \dot{w}_i \dot{w}_i \quad (3.20)$$

onde as densidades ρ_u , ρ_{uw} e ρ_w são originadas a partir das diversas interações que ocorrem pela presença de duas fases no domínio. Para o caso específico em que não haja movimento global ($\dot{w}_i = 0$), pode-se identificar o valor de ρ_u como sendo a densidade média do meio, dada por:

$$\rho_u = (1 - h)\rho_s + h\rho_f \quad (3.21)$$

onde ρ_s e ρ_f são as densidades da fase estrutural e fluida respectivamente.

3.3.4 Formulação Lagrangiana do problema poroelástico

Considerando uma formulação Lagrangiana clássica \mathbf{L} , pode-se escrever:

$$\mathbf{L} = \mathbf{C} - \mathbf{V} \quad (3.22)$$

onde \mathbf{L} é o Lagrangiano do sistema.

Neste contexto aplicar o princípio de Hamilton é equivalente a resolver o sistema, aplicando-se as equações de Euler-Lagrange, para a condição de equilíbrio do sistema, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_{i,j}} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (3.23)$$

Para o caso em estudo $q_i = u_i$ ou w_i . Com a utilização da Equação (3.23) e das expressões de \mathbf{D} na Equação (3.18), \mathbf{C} na Equação (3.20) e \mathbf{V} na Equação (3.14), obtém-se as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho_u \ddot{u}_i + \rho_{uw} \ddot{w}_i \\ -p_{,i} &= \rho_{uw} \ddot{u}_i + \rho_w \ddot{w}_i + \frac{1}{K} \dot{w}_i \end{aligned} \quad (3.24)$$

A partir destas equações, pode-se identificar os parâmetros de densidade. Se não existir movimento médio relativo entre a fase fluida e a estrutura ($w_i = 0$), a primeira equação é reduzida à equação de movimento em um meio contínuo (teoria da elasticidade), enquanto que a segunda deve ser reduzida à equação de movimento do fluido ($\rho_{uw} = h\rho_f$). Para o caso do fluido em repouso, ($w = -u$), a segunda equação de (3.24) é reduzida a:

$$-p_{,i} = -(h\rho_f - \rho_w) \ddot{u}_i - \frac{1}{K} \dot{u}_i \quad (3.25)$$

Tal equação mostra que para uma aceleração do sistema \ddot{u}_i , uma força deve ser exercida no fluido para prever seu deslocamento médio. A parcela inercial F_i da força de acoplamento é dada por:

$$F_i = (h\rho_f - \rho_w)\ddot{u}_i \quad (3.26)$$

Para descrever esse efeito de acoplamento, usa-se uma analogia com o problema de massa adicional, considerando o movimento de um obstáculo em um meio fluido. Neste caso, pode-se expressar ρ_w em função de ρ_f , introduzindo-se o parâmetro α_∞ , definido como tortuosidade, da seguinte maneira:

$$\rho_w = h\alpha_\infty\rho_f \quad (3.27)$$

onde $\alpha_\infty \geq 1$.

A expressão da força inercial descrita na Equação (3.26) que é oposta à aceleração global do sistema, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F_i = -h(\alpha_\infty - 1)\rho_f\ddot{u}_i \quad (3.28)$$

A segunda equação de (3.24) pode então ser reescrita da seguinte forma:

$$\dot{w}_i = -K(p_{,i} + h\rho_f\ddot{u}_i + \rho_w\ddot{w}_i) \quad (3.29)$$

Para o caso não permanente, ou seja com a presença de efeitos inerciais, ao se comparar as Equações (3.17) e (3.29), nota-se que a força associada com \dot{w}_i é:

$$X_i = -(p_{,i} + h\rho_f\ddot{u}_i + \rho_w\ddot{w}_i) \quad (3.30)$$

Fazendo uma analogia com a Lei clássica de Darcy (em condições permanentes), derivada a partir das equações de Navier-Stokes para um fluido de viscosidade cinemática η , obtém-se a seguinte expressão para a permeabilidade hidráulica:

$$K = \frac{\kappa}{\eta} \quad (3.31)$$

onde κ é a permeabilidade absoluta e variável dependente da geometria do meio poroso.

3.4 Equações de Propagação de ondas nos materiais poroelásticos - Modelo de Biot

A introdução dos vetores de deslocamentos das fases sólida e fluidas, u_i e U_i , respectivamente, nas equações descritas em (3.24), pode-se escrever as equações clássicas escritas inicialmente por Biot:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}^s &= \rho_{11}\ddot{u}_i + \rho_{12}\ddot{U}_i + b(\dot{u}_i - \dot{U}_i) \\ \sigma_{ij,j}^f &= \rho_{12}\ddot{u}_i + \rho_{22}\ddot{U}_i - b(\dot{u}_i - \dot{U}_i)\end{aligned}\quad (3.32)$$

Substituindo-se os valores de tensões parciais das fases sólidas e fluida, descritas na Equação (3.16), tem-se a formulação em deslocamentos dada por:

$$\begin{aligned}\lambda u_{i,ij} + Q U_{i,ij} + N(u_{i,jj} + u_{j,ij}) &= \rho_{11}\ddot{u}_i + \rho_{12}\ddot{U}_i + b(\dot{u}_i - \dot{U}_i) \\ Q u_{i,ij} + R U_{i,ij} &= \rho_{12}\ddot{u}_i + \rho_{22}\ddot{U}_i - b(\dot{u}_i - \dot{U}_i)\end{aligned}\quad (3.33)$$

onde:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \frac{R}{h^2}(\beta - h)^2, Q = \frac{R}{h}(\beta - h), b = \frac{h^2}{K} = \frac{h^2\eta}{\kappa} \\ \rho_{11} &= (1 - h)\rho_s + h\rho_f(\alpha_\infty - 1), \rho_{22} = \alpha_\infty h\rho_f, \rho_{12} = h\rho_f(1 - \alpha_\infty)\end{aligned}$$

Esta é a formulação clássica de Biot, que é utilizada em várias análises analíticas encontradas na literatura (Biot, 1962). Este enfoque serve de base para o desenvolvimento de vários modelos similares.

3.5 Equações de Propagação de ondas nos materiais poroelásticos - Modelo de Biot-Allard

No modelo poroelástico proposto por (Allard, 1993), os efeitos viscosos e térmicos são adicionados o que permite reescrever as equações (3.32) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j}^s &= \rho_{11}\ddot{u}_i + \rho_{12}\ddot{U}_i + \tilde{b}(\dot{u}_i - \dot{U}_i) \\
\sigma_{ij,j}^f &= \rho_{22}\ddot{U}_i + \rho_{12}\ddot{u}_i - \tilde{b}(\dot{u}_i - \dot{U}_i)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

As suposições clássicas quanto ao comportamento linear acústico, linear elástico e ao meio poroelástico que simplificam a propagação ainda são assumidas neste novo modelo.

Uma formulação mista (u,p) é baseada nas equações da poroelasticidade, propostas inicialmente como uma formulação de deslocamento por Biot (Biot, 1956).

O símbolo \tilde{b} indica que a propriedade física associada b é complexa e dependente da frequência (ω).

Na Equação (3.34), u_i e U_i denotam os vetores de deslocamentos macroscópicos médios das fases sólida e fluida, respectivamente. Estes deslocamentos são valores médios no senso da teoria de Biot, deslocamentos volumétricos médios por unidade área da seção transversal. As densidades ρ_{11} e ρ_{22} são coeficientes de massa que levam em conta o fato do fluxo relativo sobre os poros não ser uniforme.

Estes fatores são relacionados à densidade do material da fase sólida, ρ_s , e da densidade de massa intersticial do fluido, ρ_0 , através de:

$$\begin{aligned}
\rho_{11} &= (1 - h)\rho_s - \rho_{12} \\
\rho_{22} &= h\rho_0 - \rho_{12}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

como visto anteriormente, ítem (3.2), h é a porosidade do material poroelástico. O coeficiente ρ_{12} corresponde à interação existente entre a inércia das fases sólida e fluida e é função da tortuosidade do material (Bourbié et al., 1987):

$$\rho_{12} = -h\rho_0(\alpha_\infty - 1) \tag{3.36}$$

Ao modelo de Biot é incluso o amortecimento estrutural associado com a configuração do sistema. O coeficiente \tilde{b} é associado ao amortecimento viscoso dependente da frequência

(ω) , o qual leva em consideração os efeitos das forças de interação viscosa do fluido sobre a estrutura.

Este termo é relacionado com a resistência ao fluxo no material poroso (Allard, 1993) e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tilde{b} = h^2 \sigma \tilde{G} \quad (3.37)$$

onde:

$$\tilde{G} = \sqrt{1 + \frac{i\omega}{H}} \quad (3.38)$$

e

$$H = \frac{\sigma^2 \Lambda^2 h^2}{4\alpha_\infty^2 \eta \rho_f} \quad (3.39)$$

onde σ é o fluxo resistivo que o material poroelástico apresenta ao escoamento, H é a frequência característica viscosa, α_∞ é tortuosidade do material (Bourbié et al., 1987), Λ é o comprimento característico viscoso (Johnson et al., 1987) e assim como a porosidade é uma propriedade geométrica da malha porosa e η é a viscosidade cinemática do fluido (Incropera e DeWitt, 1996).

Utilizando os vetores de deslocamento sólidos e fluidos (u_i, U_i) como variáveis primárias e assumindo oscilações harmônicas, uma formulação no domínio da frequência (Panneton e Atalla, 1996) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \omega^2 \tilde{\rho}_{11} u_i + \omega^2 \tilde{\rho}_{12} U_i + \sigma_{ij,j}^s &= 0 \\ \omega^2 \tilde{\rho}_{22} U_i + \omega^2 \tilde{\rho}_{12} u_i - hp_{,i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

tendo-se as seguintes relações para os novos termos de densidades agora dependentes da frequência:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{11} &= \rho_{11} + \frac{\tilde{b}}{i\omega} \\
\tilde{\rho}_{22} &= \rho_{22} + \frac{\tilde{b}}{i\omega} \\
\tilde{\rho}_{12} &= \rho_{12} - \frac{\tilde{b}}{i\omega}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Isolando o vetor de deslocamento da partícula fluida U_i na Equação (3.40), pode-se expressar tal valor em função da pressão p intersticial dos poros e do deslocamento da parte sólida u_i .

$$U_i = \frac{h}{\tilde{\rho}_{22}\omega^2} p_{,i} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_i \tag{3.42}$$

Tal Equação (3.42) será usada posteriormente na derivação da formulação mista (u,p).

3.5.1 A Equação da fase sólida na formulação (u,p)

Utilizando-se da Equação (3.42) na primeira equação de (3.40) tem-se a seguinte relação:

$$\omega^2 \tilde{\rho} u_i + h \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,i} + \sigma_{ij,j}^s = 0 \tag{3.43}$$

onde um novo termo de densidade $\tilde{\rho}$, função da frequência, é introduzido como sendo:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{11} - \frac{(\tilde{\rho}_{12})^2}{\tilde{\rho}_{22}} \tag{3.44}$$

A Equação (3.43) possui os termos ainda dependente do deslocamento da fase fluida U_i , devido a dependência do tensor de tensões da fase estrutural, $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^s(u_i, U_i)$. Como visto no ítem (3.3.1), as relações das tensões parciais apresentadas na Equação (3.15) são aqui reescritas com os termos variando com a frequência e em sua forma tensorial:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^s(u_i, U_i) &= \tilde{A} u_{i,i} \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij} + \tilde{Q} U_{i,i} \delta_{ij} \\
-h p \delta_{ij} &= \tilde{R} U_{i,i} \delta_{ij} + \tilde{Q} u_{i,i} \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Os coeficientes \tilde{A} e N correspondem aos coeficientes de Lamé para um meio sólido elástico, \tilde{Q} é um coeficiente de acoplamento entre as dilatações (ε_{kk} e ξ) e as tensões das duas fases, \tilde{R} pode ser interpretado como sendo o módulo de deformação volumétrica do fluido que ocupa uma fração h de um volume unitário.

Os coeficientes \tilde{A} , \tilde{Q} e \tilde{R} possuem uma relação com o módulo de deformação volumétrica da fase estrutural no vácuo K_b , com K_s que representa o módulo de deformação volumétrica do material que constitui a fase e com \tilde{K}_f que representa o módulo de deformação volumétrica do fluido (Allard, 1993). Estes termos podem ser detalhados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{(1-h)[1-h-K_b/K_s]K_s + h(K_s/\tilde{K}_f)K_b}{1-h-K_b/K_s + hK_s/\tilde{K}_f} - \frac{2}{3}N \\ \tilde{Q} &= \frac{[1-h-K_b/K_s]hK_s}{1-h-K_b/K_s + hK_s/\tilde{K}_f} \\ \tilde{R} &= \frac{h^2K_s}{1-h-K_b/K_s + hK_s/\tilde{K}_f}\end{aligned}\tag{3.46}$$

O módulo de deformação volumétrica fluido \tilde{K}_f leva em consideração o efeito das interações térmicas do fluido presente no poro. Este efeito é de natureza dissipativa, ou seja pode ser compreendido como um amortecimento térmico.

$$\tilde{K}_f = \frac{\theta P_0}{\theta - ((\theta - 1)/[1 + (H'/2i\omega)\tilde{G}'])}\tag{3.47}$$

onde

$$\tilde{G}' = \sqrt{1 + \frac{i\omega}{H'}}\tag{3.48}$$

e

$$H' = \frac{16\eta}{Pr(\Lambda')^2\rho_0}\tag{3.49}$$

onde θ é a razão entre os calores específicos do fluido (Incropera e DeWitt, 1996) ($\theta = c_p/c_v$), P_0 é a pressão atmosférica, H' é a frequência característica térmica, Λ' é o comprimento característico térmico e Pr é o número de Prandtl (Dazel et al., 2002).

Sendo o ar, o fluido utilizado e a partir de aproximações pertinentes para a maioria dos materiais poroelásticos usados em acústica, muitas linearizações podem ser consideradas (Allard, 1993), o que resulta em:

$$\frac{K_b}{K_s} \lll 1 \quad (3.50)$$

O que leva a uma simplificação nas duas últimas equações descritas na Equação (3.46):

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= (1 - h)\tilde{K}_f \\ \tilde{R} &= h\tilde{K}_f \end{aligned} \quad (3.51)$$

A partir de tal resultado, uma igualdade importante que será utilizada em itens posteriores no que se refere a condições de contorno e interações com outros domínios, pode ser estabelecida da seguinte forma:

$$h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \cong 1 \quad (3.52)$$

Com o intuito de eliminar a dependência de $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^s(u_i, U_i)$, as equações descritas em (3.45) são combinadas, resultando em:

$$\sigma_{ij}^s(u_i, U_i) = \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{R}} \right) u_{i,i} \delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij} - h \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} p \delta_{ij} \quad (3.53)$$

A partir da Equação (3.53) pode-se isolar o valor de tensão $\hat{\sigma}_{ij}^s(u_i)$ o qual representa o tensor de tensões parciais da fase sólida somente dependente do deslocamento estrutural u_i :

$$\hat{\sigma}_{ij}^s(u_i) = \left(\tilde{A} - \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{R}} \right) u_{i,i} \delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij} \quad (3.54)$$

o que leva a:

$$\sigma_{ij}^s(u_i, U_i) = \hat{\sigma}_{ij}^s(u_i) - h \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} p \delta_{ij} \quad (3.55)$$

Substituindo-se a Equação (3.55) na primeira equação de (3.40), obtém-se a equação para a fase sólida em termos das variáveis (u_i, p) :

$$\hat{\sigma}_{ij,j}^s + \tilde{\rho} \omega^2 u_i + \tilde{\gamma} p_{,i} = 0 \quad (3.56)$$

onde o termo de acoplamento entre a variável u_i (fase sólida) e p (fase fluida) é dada por:

$$\tilde{\gamma} = h \left(\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \quad (3.57)$$

Substituindo as expressões descritas dos coeficientes \tilde{A} , \tilde{Q} e \tilde{R} , escritas na Equação (3.46), na Equação (3.54), pode-se definir uma expressão para o tensor $\hat{\sigma}_{ij}^s$, como sendo:

$$\hat{\sigma}_{ij}^s = \left(K_b - \frac{2}{3} N \right) u_{i,i} \delta_{ij} + 2N \varepsilon_{ij} \quad (3.58)$$

a qual representa a relação de tensão-deformação clássica para um meio sólido elástico linear.

Nota-se que $\hat{\sigma}_{ij}^s$ é a tensão parcial do material da fase sólida no vácuo, ou seja representa o tensor das tensões do material poroelástico que prevalece em condições drenadas (sem a presença de fluido nos interstícios da matriz poroelástica). Neste trabalho, considera-se que este tensor não varia com a frequência.

3.5.2 A Equação da fase fluida na formulação (u, p)

Aplicando o divergente em ambos os lados da Equação (3.42), tem-se:

$$U_{i,i} = \frac{h}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_{i,i} \quad (3.59)$$

Substituindo-se o valor de $U_{i,i}$ na Equação (3.45), obtém-se a equação da parte fluida em termos das variáveis (u_i, p) :

$$p_{,ii} + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{R}} p - \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{h}^2} \tilde{\gamma} u_{i,i} = 0 \quad (3.60)$$

Tal expressão corresponde à equação governante do domínio fluido.

3.5.3 Equações da Poroelasticidade Acoplada na formulação (u,p)

Agrupando-se as Equações (3.56) e (3.60), fase sólida e fluida, respectivamente, obtém-se o seguinte sistema de equações para o problema acoplado:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij,j}^s + \omega^2 \tilde{\rho} u_i + \tilde{\gamma} p_{,i} &= 0 \\ \frac{h^2}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} + \omega^2 \frac{h^2}{\tilde{R}} p - \omega^2 \tilde{\gamma} u_{i,i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Na equação da fase sólida, nota-se que os dois primeiros termos representam os termos presentes na Lei da Elasticidade clássica e o último representa o acoplamento entre a fase fluida com a sólida, o qual é dependente do gradiente de pressão da fase fluida ($p_{,i} = \text{grad } p$). A segunda equação da poroelasticidade, a equação da fase fluida, os dois primeiros termos da equação do modelo de propagação de ondas planas (equação de Helmholtz) e o último termo pode ser interpretado como um termo fonte na clássica formulação da Mecânica dos Fluidos, representando o acoplamento entre a fase sólida com a fluida, cujo valor é dependente do deslocamento estrutural u_i .

O sistema de equações diferenciais (3.61) se encontra na forma clássica do problema de interação fluido-estrutura. Entretanto, vale salientar que o acoplamento é volumétrico, pois o material poroelástico é uma superposição espacial e temporal de duas fases sólida e fluida, interagindo e coexistindo no mesmo domínio.

3.6 Formulação (u,p) para problemas poroelásticos transientes - Formulação de Rice-Cheng

Uma formulação matemática mais consistente para o problema poroelástico pode ser obtida substituindo as constantes de Biot pelas constantes definidas por (Rice e Cleary, 1976) e reagrupando estas equações conforme proposto por (Detournay e Cheng, 1991).

Esta formulação é bastante difundida no campo de Geomecânica e foi utilizada neste trabalho para a simulação do problema poroelástico transiente.

A formulação proposta por (Rice e Cleary, 1976) considera as forças de inércia como sendo desprezíveis, limitando as análises para problemas transientes de longa duração que envolvam acelerações baixas. Neste sentido as equações de equilíbrio são obtidas a partir do somatório de forças, dado por:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3.62)$$

onde o tensor das tensões pode ser escrito por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma^f \delta_{ij} \quad (3.63)$$

Após várias substituições e agrupamentos de variáveis, conforme explicitado no Anexo A, pode-se escrever as equações finais do problema poroelástico transiente, como sendo:

$$N\varepsilon_{ij,j} + \frac{N\nu_b}{1 - 2\nu_b}\varepsilon_{kk,i} - \beta p_{,i} = 0 \quad (3.64)$$

$$\kappa p_{,jj} - \beta \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} - \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3.65)$$

onde N é o módulo de cisalhamento, ν_b é o coeficiente de Poisson, β é a constante de Biot, t é a grandeza do tempo, κ é permeabilidade hidráulica do meio e Q é o termo de acoplamento entre as fases sólida e fluida.

Como pode-se notar os processos poroelásticos são descritos pelas equações (3.64), havendo a necessidade da definição de cinco constantes do material:

- Duas constantes elásticas: N e ν_b
- Duas constantes poroelásticas: B ou β e ν_u
- Uma constante relacionada ao fluxo: κ

3.7 Propriedades dos materiais poroelásticos

Neste ítem procura-se mostrar os principais testes efetuados para a determinação dos parâmetros poroelásticos, com o objetivo de tornar mais claro o significado físico de cada um deles.

3.7.1 Testes para determinação das propriedades dos materiais poroelásticos

Os testes para se determinar as propriedades dos materiais poroelásticos podem ser efetuadas em duas análises: resposta drenada e pela resposta não drenada.

Na análise drenada, conforme mostrado na Figura (3.5), os efeitos da variação volumétrica são originados somente pelos efeitos do fluido (não há influência do comportamento cisalhante do sólido).

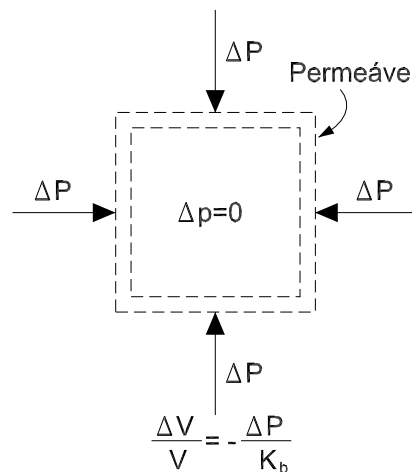


Figura 3.5: Volume de controle para um teste drenado

Entre as principais características de um material poroelástico sob análise em condições drenadas, tem-se:

- A pressão é nula nos poros do material, ou seja o fluido pode movimentar-se sem resistência.
- $\xi = \beta \varepsilon_{kk}$; a dilatação fluida é diretamente proporcional à dilatação sólida, sendo relacionados por β que é uma constante introduzida por Biot.
- Para a análise da pressão dos poros, necessita-se de um longo tempo para se alcançar a pressão estática de equilíbrio.
- Os parâmetros do material em um teste drenado são: K_b e ν_b , que são o módulo de deformação volumétrica do corpo do material e do módulo de Poisson da fase sólida em condições drenadas, respectivamente.

As principais características da análise em um material poroelástico em condições não drenadas, conforme mostrado esquematicamente na Figura (3.6), são:

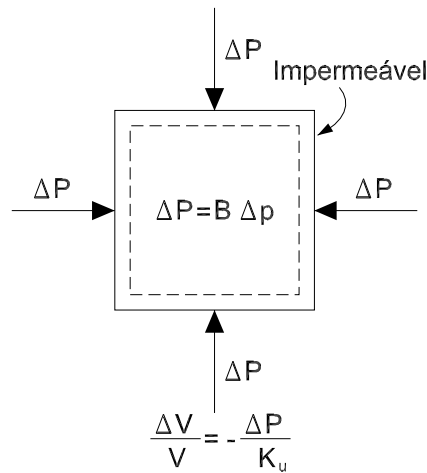


Figura 3.6: Volume de controle para um teste não drenado

- O fluxo é nulo, ou seja $\xi = 0$, o que significa que o fluido não pode escapar.
- $-\frac{h^2}{R} p = \beta \varepsilon_{kk}$, isto é, a dilatação é associada à pressão dos poros.
- Para a análise, a resposta é instantânea, ou seja a pressão do fluido nos poros não precisa de longos tempos para estabilização.

- Os parâmetros do material em um teste não drenado são: K_u e ν_u , que são o módulo de deformação volumétrica do material e do módulo de Poisson, agora em condições não drenadas, respectivamente. Estas propriedades são afetadas pela presença do fluido.

3.7.2 Parâmetros físicos dos materiais poroelásticos

O objetivo desta seção é apresentar um resumo das constantes elásticas e poroelásticas bem como seus valores usuais na resolução de problemas que envolvem o conceito de poroelasticidade acoplada (Borba, 1992). É importante ressaltar que o objetivo principal desta seção é permitir uma melhor análise física do problema.

- **Módulo de Elasticidade Linear (E)**

O módulo de elasticidade linear, ou módulo de Young mede a relação tensão/deformação obtida em um teste de tração ou compressão uniaxial.

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{\sigma_{yy}}{\varepsilon_{yy}} = \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}} \quad (3.66)$$

Na verdade o módulo de Elasticidade E não é constante com a frequência, citam-se como exemplos: os materiais com comportamento viscoelástico. Para o modelo em estudo e implementado no presente trabalho, esta relação para pequenos valores de tensão e deformação pode ser considerada constante (materiais homogêneos e isotrópicos):

O módulo de elasticidade linear possui dimensão de tensão. Assim no Sistema Internacional, sua unidade de medida será o Pascal (Pa).

- **Módulo de Elasticidade Transversal (N)**

O módulo elasticidade transversal, mede a relação entre uma tensão de cisalhamento e a deformação transversal por ela produzida. Para o estado plano de deformação:

$$N = \frac{\sigma_{xy}}{2\varepsilon_{xy}} = \frac{\sigma_{yx}}{2\varepsilon_{yx}} \quad (3.67)$$

O módulo de cisalhamento ainda se relaciona com o módulo de Young e o coeficiente de Poisson, da seguinte forma:

$$N = \frac{E}{2(1 + \nu_b)} \quad (3.68)$$

O módulo de cisalhamento possui a mesma unidade do módulo de elasticidade linear, Pascal (Pa).

- **Módulo de Poisson drenado** (ν_b)

O módulo de Poisson mede a relação entre as deformações transversal e longitudinal (em relação à direção de carregamento) em um teste de tração uniaxial, ou seja, aplicando-se uma tração na direção x:

$$\nu_b = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} \quad (3.69)$$

O módulo de Poisson é uma grandeza adimensional, e seu valor está entre 0 e 0,5. O Limite superior é atingido por materiais incompressíveis. Valores típicos do módulo de Poisson para rochas situam-se entre 0,15 e 0,45 e para o caso de materiais absorvedores este valor varia entre 0,1 e 0,4.

- **Módulo de Poisson não drenado** (ν_u)

Assim como o módulo de Poisson drenado, o módulo de Poisson não drenado também mede a relação entre uma deformação transversal e uma deformação longitudinal. A diferença entre os dois é que o teste para medição do valor do módulo de Poisson não drenado não se permite fluxo de fluido para dentro ou fora da amostra.

O valor do módulo de Poisson não drenado está entre o valor do módulo de Poisson drenado ν_b e 0,5. O limite inferior é atingido quando o fluido dos poros é altamente compressível.

- **Coefficiente de Pressão de Poro** (B)

O coeficiente de pressão de poro, ou coeficiente de Skempton, mede a relação entre uma variação de pressão de poro e a variação de tensão hidrostática total na amostra, sob condições não drenadas.

$$B = -\frac{3\Delta p}{\Delta\sigma_{kk}} \quad (3.70)$$

com $\Delta m = 0$, conforme descrito no Anexo A.

O coeficiente de pressão de poro é uma grandeza adimensional, e seu valor está entre 0 e 1. O limite superior é atingido por materiais cujos constituintes sejam incompressíveis. O limite inferior é atingido quando o fluido dos poros é altamente compressível, como é o caso dos materiais absorvedores acústicos.

- **Coeficiente de tensão efetiva de Biot (β)**

O coeficiente de tensão efetiva de Biot mede a relação entre a variação no volume ocupado pelos poros por unidade de volume do material. Ou seja:

$$\beta = \frac{\xi}{\varepsilon_{kk}} \quad (3.71)$$

com $\Delta p = 0$.

O coeficiente de tensão efetiva é uma grandeza adimensional, e seu valor está entre 0 e 1. O limite inferior é atingido quando os constituintes sólidos do material são altamente compressíveis, e o superior quando os mesmos são incompressíveis.

- **Módulo de deformação volumétrica drenado (K_b)**

O módulo de deformação volumétrica drenado mede a relação entre uma tensão hidrostática aplicada e a variação volumétrica dela decorrente do material, sob condições drenadas, isto é:

$$K_b = -\frac{\sigma_{kk}}{3\varepsilon_{kk}} \quad (3.72)$$

Este ainda se relaciona com os módulos de cisalhamento e módulo de Poisson drenado através de

$$K_b = \frac{2N(1 + \nu_b)}{3(1 - 2\nu_b)} \quad (3.73)$$

O módulo de deformação volumétrica possui as mesmas dimensões do módulo de cisalhamento, sendo portanto medido em Pascal (Pa).

- **Permeabilidade** (κ)

Esta variável mede o grau de resistência oferecido por um material poroso à passagem de um determinado fluido através dele. Pode ser entendido como sendo a relação entre o diferencial de pressão aplicado a uma amostra de rocha e a vazão do fluido correspondente. A lei de Darcy (desprezando as forças de corpo) estabelece que:

$$q_i = -\kappa p_{,i} \quad (3.74)$$

sendo q_i o vetor de fluxo específico de fluido (vazão de fluido por unidade de área)

Percebe-se que a permeabilidade depende das características do material poroelástico (principalmente da porosidade e dos canais que unem os poros) e da viscosidade do fluido.

Utilizando as unidades no Sistema Internacional, a permeabilidade será medida em $m^2/Pa/s$, que corresponde à unidade darcy/centipoise (*darcy/cp*). A permeabilidade é um parâmetro que varia muito de um material poroso para outro, dos fluidos neles contidos e das condições de escoamento.

- **Porosidade** (h)

É a razão entre os volumes de fluido que preenche os poros e o volume total do material poroelástico.

$$h = \frac{V_f}{V_f + V_s} \quad (3.75)$$

Em materiais utilizados em acústica como absorvedores, nota-se valores elevados, próximos à unidade. Por ser uma medida relativa não possui dimensão física.

- **Fluxo Resistivo (σ)**

É uma medida de permeabilidade ou perda de carga. É a resistência ao fluxo de um fluido que ao passar por um material poroso provoca uma redução de pressão ΔP . Possui unidades no Sistema Internacional de Ns/m^4 ou equivalente *Rayls/m*. Tal propriedade é função das propriedades e distribuição da rede de poros sobre a matriz sólida, mas ainda é dependente das propriedades do fluido neles contidos.

Para uma amostra com área transversal unitária feita de material poroelástico e espessura ℓ e fazendo-se passar sobre este um fluxo de fluido, uma expressão simples para se determinar o valor do fluxo resistivo σ é mostrada a seguir:

$$\sigma = \frac{\Delta P}{q\ell} \quad (3.76)$$

onde q é o fluxo por unidade de área.

- **Comprimento Característico Viscoso (Λ)**

Assume-se uma estrutura microscópica rígida, onde somente o movimento do fluido seja possível. A variável δ_v é a dimensão da camada limite viscosa laminar e definida como sendo:

$$\delta_v = (2\eta\rho_0\omega)^{1/2} \quad (3.77)$$

pode ser compreendido como a dimensão de fluido em aderência com a parede do poro.

Uma representação do sistema local de coordenadas (α, β, γ) é indicada na Figura (3.7).

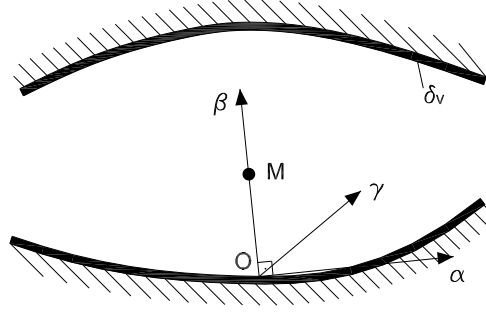


Figura 3.7: Região da camada limite térmica em uma representação de um poro

Assume-se que para altas frequências, o valor de δ_v seja muito menor que as dimensões laterais do poro. Para o caso poro-acústico (Johnson et al., 1987), os efeitos viscosos e térmicos são tratados separadamente.

O comprimento viscoso Λ reflete o efeito do cisalhamento que o fluido sofre ao passar por um material poroso, que pode ser escrito como se segue:

$$\Lambda = 2 \frac{\int_V |v(r)|^2 dV}{\int_A |v(r_w)|^2 dA} \quad (3.78)$$

onde V é o volume dos poros, $v(r)$ a velocidade microscópica do fluido no poro. Tal velocidade pode ser determinada desprezando-se a pequena contribuição dos efeitos viscosos da região da camada limite δ_v em problemas acústicos. A velocidade $v(r_w)$ é a velocidade do fluido, também sem efeitos viscosos, medida na área A da superfície das paredes do poro.

Em (Leclaire et al., 1996b), uma relação empírica é desenvolvida:

$$\Lambda = s \left(\frac{8\alpha_\infty \eta}{\sigma h} \right)^{1/2} \quad (3.79)$$

onde s é um parâmetro dependente da geometria do poro.

A dimensão de Λ é o metro (m), mas em muitas caracterizações, por se tratar de uma medida dimensional muito pequena, pode ser apresentada em micrometro (μm). Seus valores podem ser obtidos através de análise experimental. Entre as várias técnicas, pode-se citar a de medidas por atenuação ultrasônica (Leclaire et al., 1996b) e (Leclaire et al., 1996a).

- **Comprimento Característico Térmico** (Λ')

Assim como o desenvolvimento anterior, a nível dimensional de um poro, algumas hipóteses devem ser levadas em consideração: a densidade e o calor específico dos materiais usados em acústica devem ser bem maiores que os valores para o ar e que as trocas térmicas na parede podem ser desprezadas.

$$\Lambda' = 2 \frac{\int_V dV}{\int_A dA} \quad (3.80)$$

Em (Leclaire et al., 1996b), uma relação empírica é desenvolvida:

$$\Lambda' = s' \left(\frac{8\alpha_\infty \eta}{\sigma h} \right)^{1/2} \quad (3.81)$$

onde s' é um parâmetro dependente da geometria do poro.

A unidade de Λ' é o metro (m) e assim como o comprimento característico Λ , por ser muito pequeno, sua dimensão pode ser medida em micrometro (μm). As mesmas técnicas de medição experimental, descritas anteriormente para a grandeza Λ , podem ser aplicadas, salvo algumas considerações.

- **Tortuosidade** (α_∞)

A tortuosidade α_∞ é um parâmetro intrínseco de estruturas porosas. É relação não somente da porosidade do material, mas também da geometria porosa do meio onde o fluxo ocorre. Para alguns autores como (Champoux e Allard, 1991), esta variável pode ser relacionada através de:

$$\alpha_\infty = Func(h) \cdot h \quad (3.82)$$

Uma representação de um fluxo sobre um caminho de paredes rígidas é uma analogia com o fluxo sobre um material poroso, importante para medição e compreensão do parâmetro tortuosidade, é descrito na Figura (3.8):

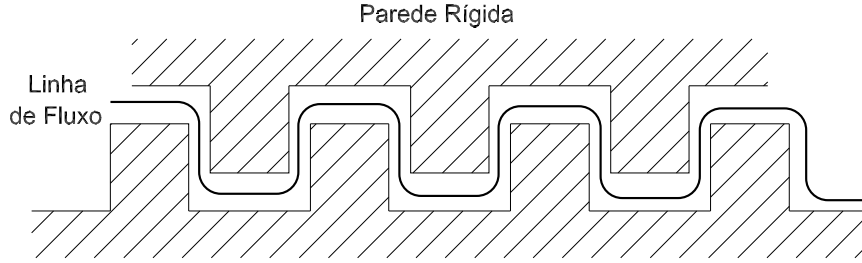


Figura 3.8: Tortuosidade - Analogia com um fluxo entre paredes rígidas

Esta variável pode ser relacionada com as velocidades das ondas acústicas em um fluido sem viscosidade sob uma estrutura rígida e saturada (Allard et al., 1994):

$$\alpha_{\infty} = \frac{c_i^2}{c_{is}^2} \quad (3.83)$$

onde c_i é a velocidade de propagação sonora no fluido e c_{is} é a velocidade de propagação sonora no mesmo fluido porém agora contido em uma situação de saturação na estrutura porosa.

A tortuosidade nos modelos poro-acústicos é uma função da frequência. Em estudos de autores como (Johnson et al., 1987), um modelo dinâmico é desenvolvido como função da permeabilidade, sendo a tortuosidade relacionada da seguinte forma:

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \alpha_{\infty} - \frac{i\sigma h}{\rho_0 \omega} \left(1 + i \frac{4\alpha_{\infty}^2 \eta \rho_0 \omega}{\sigma^2 \Lambda^2 h^2} \right)^{1/2} \quad (3.84)$$

A tortuosidade não possui dimensão física e seus valores variam segundo o grau de distorção da rede. Possui valores maiores que a unidade. A maioria dos materiais poroelásticos usados em acústica possuem valores máximos de tortuosidade da ordem de 10.

3.8 Propagação de ondas em meios acústicos

Além de diversos parâmetros físicos envolvidos no modelo poroelástico, diversas quantidades acústicas serão utilizadas neste trabalho. Neste ítem estas grandezas são definidas.

3.8.1 Propagação de ondas planas e impedância acústica

Considere uma onda plana acústica propagando-se na direção positiva do eixo x em um meio isotrópico e homogêneo. O campo de pressão sonora é uma variável física dependente do tempo (t) e da distância (x), dado por:

$$p(x) = A \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) - \alpha x \right\} \quad (3.85)$$

onde ω é a frequência de oscilação do sistema, em rad/s , c é a velocidade de propagação do som no meio, A é a amplitude da onda. Para a origem, tem-se:

$$p(0) = A \cdot \exp(i\omega t) \quad (3.86)$$

Este é o valor de pressão harmônica dependente do tempo e independente da posição, também conhecida como pressão acústica.

Fazendo-se $\omega/c = \beta$ e ainda $\alpha + i\beta = \gamma$, de forma simplificada a representação da pressão é:

$$p(x) = p(0) \cdot \exp(-\gamma x) \quad (3.87)$$

A constante γ é dependente de ω e é determinada pela natureza do meio é conhecida como *constante de propagação do meio*, sua parte real α é a *constante de atenuação* da amplitude da pressão e sua parte imaginária β é conhecida como *constante de fase*.

De forma análoga a velocidade v de um volume específico, pode ser expresso pela Equação (3.88):

$$v(x) = v(0) \cdot \exp(-\gamma x) \quad (3.88)$$

onde a constante de propagação γ é a mesma descrita na Equação (3.87) devido ao fato de que a razão p/v ser independente da posição x .

Em meios homogêneos (ar ou materiais sólidos compactos), a velocidade v é idêntica à velocidade do material. Para meios porosos compostos por um esqueleto sólido, a velocidade v é menor que a velocidade de vibração do ar, tal razão é proporcional ao volume dos poros acessíveis sobre o volume total do meio, sendo então a porosidade fator preponderante no comportamento da propagação acústica de um meio.

A partir das definições mostradas nas Equações (3.87) e (3.88), a impedância acústica pode ser escrita como:

$$Z(x) = \frac{p(x)}{v(x)} \quad (3.89)$$

Para um meio infinito, a impedância é uma constante característica e será representada por W . Como em geral p e v possuem uma defasagem de um em relação ao outro, W é complexo.

3.8.2 Impedância de uma camada de espessura finita

Considere uma camada uniforme, com propriedades γ e W conhecidas e possuindo uma espessura l . Supondo uma impedância conhecida Z_2 em $x = l$ pode-se determinar uma relação e se explicitar a impedância em $x=0$, conforme ilustrado na Figura (3.9).

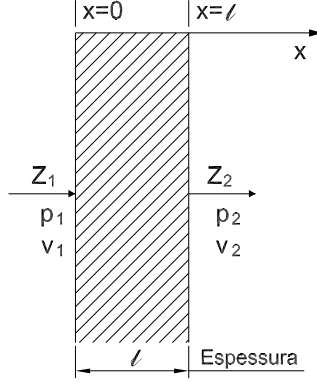


Figura 3.9: Impedância em um material com espessura finita

A solução para o campo de pressões de ondas planas é a superposição entre as ondas incidentes e refletidas:

$$\begin{aligned} p(x) &= p_i \cdot \exp\{-\gamma(l-x)\} + p_r \cdot \exp\{\gamma(l-x)\} \\ v(x) &= \frac{p_i}{W} \cdot \exp\{-\gamma(l-x)\} + \frac{p_r}{W} \cdot \exp\{\gamma(l-x)\} \end{aligned} \quad (3.90)$$

onde p_r e p_i são as pressões de incidência e reflexão da onda em $x = l$. Como dito, a condição de contorno $p(l)/v(l) = Z_2$ é conhecida, de tal forma que:

$$\frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 - W}{Z_2 + W} \quad (3.91)$$

Introduzindo a Equação (3.91) em (3.90), tem-se o valor da impedância z_1 em $x=0$:

$$Z_1 = W \frac{Z_2 \cosh(\gamma l) + W \sinh(\gamma l)}{Z_2 \sinh(\gamma l) + W \cosh(\gamma l)} \quad (3.92)$$

Para o caso em que $Z_2 = W$ tem-se que $Z_1 = Z_2 = W$. Em um outro caso especial quando $Z_2 = \infty$, neste caso:

$$Z_1 = W \coth(\gamma l) \quad (3.93)$$

Este caso é de grande importância pois pode ser facilmente realizado quando se tem um material absorvedor com a presença de uma parede rígida na posição de $x=l$.

Um outro caso é quando o valor $Z_2 = 0$, uma situação hipotética na verdade, onde a Equação (3.92) leva a:

$$Z_1 = W \tanh(\gamma l) \quad (3.94)$$

3.8.3 Impedância do ar livre e absorção acústica

A partir da equação da continuidade para um fluido tem-se:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.95)$$

onde ρ_0 denota a densidade do ar. Linearizando a equação de estado para o caso acústico:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{K_0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.96)$$

sendo:

$$K_0 = \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{d\rho} \quad (3.97)$$

Para eliminar v , diferencia-se a Equação (3.96) com respeito a x e a Equação (3.97) com respeito a t e igualando as duas expressões obtém-se a equação diferencial para p , como se segue:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{K_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.98)$$

que é a conhecida equação da onda acústica linear para uma dimensão.

Para variações harmônicas com o tempo variando segundo $f(t) = \exp(i\omega t)$, obtém-se a equação de Helmholtz.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \omega^2 \frac{\rho_0}{K_0} p = 0 \quad (3.99)$$

A solução para a equação diferencial descrita na Equação (3.98) é da forma:

$$p = A \exp(i\omega t) \exp(-\gamma_0 x) \quad (3.100)$$

Substituindo os valores das derivadas da Equação (3.100) na Equação (3.98), tem-se:

$$\gamma_0^2 = -\frac{\rho_0}{K_0} \omega^2 \quad (3.101)$$

obtendo-se:

$$\gamma_0 = \pm i\omega \sqrt{\frac{\rho_0}{K_0}} \quad (3.102)$$

Comparando-se a Equação (3.85), chega-se à interpretação física de $\sqrt{\frac{K_0}{\rho_0}}$ como sendo a velocidade de propagação do som c_0 no ar livre.

Para se determinar a impedância do ar livre deve-se recorrer as Equações (3.95) e (3.96) em sua forma dinâmica, podendo-se explicitar o valor de W_0 da seguinte forma:

$$\frac{p}{v} = W_0 = \sqrt{K_0 \rho_0} = \rho_0 c_0 \quad (3.103)$$

Inserindo os valores conhecidos de $\rho_0 = 1.18 \text{ kg/m}^3$ e $c_0 = 343 \text{ m/s}$ sob condições de temperatura e pressão atmosférica, 20°C e 1 atm , respectivamente, na Equação (3.103), determina-se o valor constante da impedância do meio acústico (ar), a qual é uma quantidade real de aproximadamente $405 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Uma outra variável conhecida é a razão entre as pressões refletida e incidente sobre uma parede formada por um material absorvedor:

$$r = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z - W_0}{Z + W_0} \quad (3.104)$$

A partir desta razão tem-se uma importante variável adimensional que é o coeficiente de absorção de um material absorvedor, que pode ser definido como se segue:

$$\alpha = 1 - \left| \frac{p_r}{p_i} \right|^2 = 1 - \left| \frac{Z - W_0}{Z + W_0} \right|^2 \quad (3.105)$$

3.8.4 Medidas em Vibroacústica

A pressão acústica é definida como sendo a diferença entre a pressão total atmosférica e a pressão (média) estática, medidas pontualmente em unidades de força por unidade de área. Se esta pressão sonora estiver em medidas relativas (dB) é então chamada de nível de pressão sonora (sound pressure level - SPL).

A Velocidade de Partícula é a velocidade com qual um pequeno volume de ar se move em torno de uma posição de equilíbrio devido à propagação sonora. Tal definição não deve ser confundida com a velocidade da fase sólida em uma análise estrutural.

Seja um domínio poroelástico representado pelos seus graus de liberdade de deslocamento u_i e pressão p . Para a caracterização dinâmica deste sistema, pode-se utilizar as medidas vibroacústicas.

Medidas globais e representativas do sistema tais como a pressão média quadrática pode ser obtida por:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{2N_a} \sum_{i=1}^{N_a} |p_i|^2 \quad (3.106)$$

Para a fase estrutural, tem-se a medida global de velocidade média quadrática:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\omega^2}{2N_a} \sum_{i=1}^{N_a} |u_i|^2 \quad (3.107)$$

onde N_a é o número de pontos da amostra global do domínio poroelástico, ou seja é o número de graus de liberdade em que o sistema foi avaliado.

Tais valores, $\langle v^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$, representam a média temporal e espacial *rms* de todas as amplitudes de velocidade e pressão nodais, respectivamente.

Em medidas relativas (dB), estas grandezas podem ser expressas da seguinte forma (Kinsler et al., 1995):

$$\begin{aligned}SPL &= 10 \log_{10} \left(\frac{\langle p^2 \rangle}{p_{ref}^2} \right) \\SVL &= 10 \log_{10} \left(\frac{\langle v^2 \rangle}{v_{ref}^2} \right)\end{aligned}\tag{3.108}$$

Nos problemas resolvidos neste trabalho, os valores de referência utilizados foram: $p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} Pa$ e $v_{ref} = 5 \cdot 10^{-8} m/s$.

Capítulo 4

Aplicação do Método dos Elementos Finitos no Problema Poroelástico

Neste capítulo será evidenciado o método numérico por elementos finitos para as equações diferenciais da poroelasticidade descritas no Capítulo 3.

4.1 Método dos elementos finitos em meios poroelásticos

Como já visto na seção anterior ítem (3.5), as equações diferenciais já com a presença dos termos acoplados, em uma formulação (u,p) em sua forma dinâmica (função da frequência) são descritas em notação indicial da seguinte forma:

$$\hat{\sigma}_{ij,j}^s + \omega^2 \tilde{\rho} u_i + \tilde{\gamma} p_{,j} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{h^2}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,jj} + \omega^2 \frac{h^2}{\tilde{R}} p - \omega^2 \tilde{\gamma} u_{i,i} = 0 \quad (4.2)$$

Uma formulação de elementos finitos para a forma fraca do problema será desenvolvida a seguir.

4.1.1 A formulação integral fraca

Por ser um problema de interação fluido-estrutura, a poroelasticidade acoplada, tem-se a composição de seus resíduos ponderados para ambas equações (sólido e fluido).

Deve-se compor o produto interno entre o resíduo (R_i) de cada direção por cada função de ponderação (ψ_i). Este valor, por ser um balanço de energia, deve ser nulo:

$$\int_{\Omega} R_i \psi_i d\Omega = 0 \quad (4.3)$$

Admitem-se duas funções de ponderação δu_i e δp para o vetor de deslocamento u_i e para o campo de pressão p , respectivamente.

A função de ponderação para a primeira equação diferencial (fase sólida), Equação (4.1), é função do deslocamento. A segunda equação diferencial, Equação (4.2), é escalar, o que implica em um produto interno entre o resíduo e a função de ponderação escalar e devendo ser nulo.

A partir de algumas manipulações algébricas, a forma fraca de Galerkin para o problema, pode ser obtida.

$$\int_{\Omega} \widehat{\sigma}_{ij}^s \delta u_{i,j} d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \widetilde{\rho} u_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega} \widetilde{\gamma} p_{,j} \delta u_i d\Omega - \oint_{\Gamma} \widehat{\sigma}_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (4.4)$$

$$\int_{\Omega} \frac{h^2}{\widetilde{\rho}_{22}} p_{,j} \delta p_{,j} d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \frac{h^2}{\widetilde{R}} p \delta p d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \widetilde{\gamma} u_i \delta p_{,j} d\Omega + \omega^2 \oint_{\Gamma} \left(\widetilde{\gamma} u^n - \frac{h^2}{\widetilde{\rho}_{22} \omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \delta p d\Gamma = 0 \quad (4.5)$$

onde Ω e Γ denotam o domínio poroelástico e o seu contorno, respectivamente, n_j é o vetor normal unitário à superfície do contorno Γ , u^n é um escalar que representa a deslocamento estrutural projetado na direção da normal n_j , definido na seguinte forma:

$$u^n = u_i \cdot n_j \quad (4.6)$$

O valor da derivada direcional de pressão ($\partial p / \partial n$) também é um escalar e representa o valor projetado do gradiente de p ($p_{,j}$) na direção n_j , como se segue:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = p_{,j} \cdot n_j \quad (4.7)$$

4.1.2 A aproximação por Elementos Finitos

O domínio poroelástico Ω será dividido em pequenos volumes, os elementos finitos, uma aproximação polinomial para as variáveis u_i e p é proposta, tal que:

$$u_i = [N^u]\bar{u}_i \quad (4.8)$$

$$p = [N^p]\bar{p} \quad (4.9)$$

para o caso tridimensional $[N^u]$ é:

$$[N^u] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

e a função $[N^p]$:

$$[N^p] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \dots \quad N_n] \quad (4.11)$$

definindo-se as funções $[N^u]$ e $[N^p]$ como as família de funções de forma para a variável de deslocamento estrutural e pressão intersticial, respectivamente, e ainda \bar{u}_i e \bar{p} como sendo os graus de liberdade de deslocamento estrutural e pressão intersticial, respectivamente, definidos pela discretização do domínio poroelástico.

Para a aproximação das funções ponderadoras do Método de Galerkin, adota-se:

$$\delta u_i = [N^u]\delta\bar{u}_i \quad (4.12)$$

$$\delta p = [N^p]\delta\bar{p} \quad (4.13)$$

Para se construir a forma discretizada de elementos finitos, em sua forma fraca do problema poroelástico, deve-se analisar cada termo da Equações (4.4) e (4.5):

- **Matriz de Rigidez $[K]$ da fase sólida**

A partir das relações constitutivas evidenciadas na Equação (4.14), para cada dimensão do domínio será obtida uma relação matricial entre as tensões e as deformações:

$$\widehat{\sigma}_{ij}^s = (K_b - 2/3N)u_{i,i}\delta_{ij} + 2N\varepsilon_{ij} \quad (4.14)$$

Reescrevendo a Equação (4.14) na seguinte forma matricial:

$$\{\widehat{\sigma}^s\} = [D_{ij}]\{\varepsilon\} \quad (4.15)$$

onde $\{\sigma^s\}$ e $\{\varepsilon\}$ são vetores colunas com os valores de tensões parciais da fase estrutural e D_{ij} é a matriz de Hooke. Tal matriz é descrita aqui para o caso tridimensional, ($i = j = 1, 2, 3$), o qual será o caso mais geral estudado neste trabalho (3D):

$$\begin{Bmatrix} \widehat{\sigma}_{xx}^s \\ \widehat{\sigma}_{yy}^s \\ \widehat{\sigma}_{zz}^s \\ \widehat{\sigma}_{xy}^s \\ \widehat{\sigma}_{xz}^s \\ \widehat{\sigma}_{yz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_b + \frac{4}{3}N & K_b - \frac{2}{3}N & K_b - \frac{2}{3}N & 0 & 0 & 0 \\ K_b - \frac{2}{3}N & K_b + \frac{4}{3}N & K_b - \frac{2}{3}N & 0 & 0 & 0 \\ K_b - \frac{2}{3}N & K_b - \frac{2}{3}N & K_b + \frac{4}{3}N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

O termo da rigidez, proveniente das tensões internas do corpo é determinado a partir da primeira parcela do produto interno da Equação (4.1):

$$- \int_{\Omega} \widehat{\sigma}_{ij,j}^s \delta u_i d\Omega = \int_{\Omega} \widehat{\sigma}_{ij}^s \delta u_{i,j} d\Omega - \oint_{\Gamma} \widehat{\sigma}_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma \quad (4.17)$$

A integral de contorno está na formulação como condição de contorno a ser especificada no problema.

$$\oint_{\Gamma} \widehat{\sigma}_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma = \oint_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (4.18)$$

onde t_i representa um vetor de força de superfície imposta. Tais forças representam condições naturais no contorno da fase sólida.

Em geral, para um problema de elasticidade, as condições de contorno para a parte estrutural podem ser divididas em:

$$\begin{aligned}\lambda_1 : u_i &= \hat{u}_i \\ \lambda_2 : t_i &= \hat{t}_i\end{aligned}\tag{4.19}$$

Como todos os termos (integrais) do produto interno para a primeira equação diferencial (fase sólida) possuem como função de ponderação δu_i , o termo $\delta \bar{u}_i$ fica em evidencia à equação. A partir da formulação fraca, tem-se a integral de domínio resultante como sendo a rigidez da fase sólida:

$$[K]\bar{u}_i = \int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij}^s \delta u_{i,j} d\Omega\tag{4.20}$$

De forma semelhante à Equação (4.12) e com base nas relações cinemáticas, o divergente do termo em deslocamento é dado por:

$$\delta u_{i,j} = [B]^t \delta \bar{u}_i\tag{4.21}$$

onde a matriz [B] é formada por um operador [L] aplicada à função de forma $[N^u]$.

$$[B] = [L][N^u]\tag{4.22}$$

O operador [L] para o caso tridimensional é:

$$[L] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}\tag{4.23}$$

Aplicando o resultado da Equação (4.22) e conhecendo as relações cinemáticas, o tensor de deformação será dado por:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\bar{u}\} \quad (4.24)$$

Substituindo as Equações (4.21) na Equação (4.20) e, ainda, com as relações complementares das Equações (4.15) e (4.24), tem-se:

$$\begin{aligned} [K]\bar{u}_i &= \int_{\Omega} [B]^t \{\widehat{\sigma}^s\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [B]^t [D] \{\varepsilon\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [B]^t [D] [B] \{\bar{u}\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [B]^t [D] [B] d\Omega \bar{u}_i \end{aligned} \quad (4.25)$$

Logo a Matriz de Rigidez $[K]$ para a fase sólida é:

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^t [D] [B] d\Omega$$

- **Matriz de Massa $[M]$ da fase sólida**

O termo de inércia pode ser obtido a partir da segunda parcela do produto interno da Equação (4.1):

O termo da Massa varia com a frequência:

$$[M]\bar{u}_i = \tilde{\rho} \int_{\Omega} u_i \delta u_i d\Omega \quad (4.26)$$

Como já escrito a variação virtual de δu_i será:

$$\delta u_i = [N^u] \delta \bar{u}_i \quad (4.27)$$

Aplicando a aproximação de elementos finitos:

$$u_i = [N^u]\bar{u}_i \quad (4.28)$$

Para os vetores δu_i e u_i definidos segundo a forma apresentada, o valor da integral de massa estrutural resulta em:

$$[M]\bar{u}_i = \tilde{\rho} \int_{\Omega} [N^u]^t [N^u] d\Omega \cdot \bar{u}_i \quad (4.29)$$

Logo a matriz de massa $[M]$ para a fase sólida é:

$$[M] = \tilde{\rho} \int_{\Omega} [N^u]^t [N^u] d\Omega \quad (4.30)$$

• **Matriz de Acoplamento $[C]$ da fase sólida**

O termo de acoplamento pode ser obtido a partir da terceira parcela do produto interno da Equação(4.1):

O termo de acoplamento varia com a frequência:

$$[C]p = \tilde{\gamma} \int_{\Omega} p_{,j} \delta u_i d\Omega \quad (4.31)$$

Aplicando a aproximação de elementos finitos:

$$p = [N^p]\bar{p} \quad (4.32)$$

Para os vetores definidos da seguinte forma, o valor da integral de acoplamento estrutura-fluido resulta em:

$$[C]p = \tilde{\gamma} \int_{\Omega} [N^u]^t \nabla [N^p] d\Omega \cdot \bar{p} \quad (4.33)$$

onde ∇ representa o operador de derivadas parciais de primeira ordem aplicado à família de funções $[N^p]$.

Logo, a matriz de acoplamento $[C]$ para a fase sólida, é:

$$[C] = \tilde{\gamma} \int_{\Omega} [N^u]^t \nabla [N^p] d\Omega \quad (4.34)$$

• **Matriz de Rigidez $[H]$ da fase fluida**

O termo de rigidez pode ser obtido a partir da primeira parcela do produto interno da Equação (4.2):

A passagem da forma fraca deu-se da seguinte maneira:

$$-\frac{h^2}{\tilde{\rho}_{22}} \int_{\Omega} p_{,jj} \delta p dx dy = \frac{h^2}{\tilde{\rho}_{22}} \left(\int_{\Omega} p_{,j} \delta p_{,j} dx dy - \oint_{\Gamma} p_{,j} n_j \delta p dS \right) \quad (4.35)$$

A integral de contorno será especificada usando-se as condições de contorno para o domínio fluido:

$$\oint_{\Gamma} p_{,j} n_j \delta p dS = \oint_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} \delta p dS \quad (4.36)$$

A partir da forma fraca, tem-se a integral de domínio resultante como sendo a rigidez da fase fluida:

$$[H]\bar{p} = \frac{h^2}{\tilde{\rho}_{22}} \int_{\Omega} p_{,j} \delta p_{,j} d\Omega \quad (4.37)$$

A variação virtual de δp será:

$$\delta p = [N^p] \delta \bar{p} \quad (4.38)$$

Aplicando a aproximação de elementos finitos:

$$p = [N^p]\bar{p} \quad (4.39)$$

Dados os vetores definidos, o valor da integral de rigidez fluida resulta em:

$$[H]\bar{p} = \frac{h^2}{\tilde{\rho}_{22}} \int_{\Omega} \nabla[N^p]\nabla[N^p]d\Omega\bar{p} \quad (4.40)$$

onde ∇ representa o operador de derivadas parciais de primeira ordem aplicado à família de funções $[N^p]$.

Logo, a matriz de rigidez $[H]$ para a fase fluida é:

$$[H] = \frac{h^2}{\tilde{\rho}_{22}} \int_{\Omega} \nabla[N^p]\nabla[N^p]d\Omega \quad (4.41)$$

- **Matriz de Massa $[Q]$ da fase fluida**

O termo de inércia para a fase fluida pode ser obtido a partir da segunda parcela do produto interno da Equação (4.2):

O termo da Massa varia com a frequência e é dado por:

$$[Q]\bar{p} = \frac{h^2}{\tilde{R}} \int_{\Omega} p\delta p d\Omega \quad (4.42)$$

O valor da integral de massa fluida resulta em:

$$[Q]\bar{p} = \frac{h^2}{\tilde{R}} \int_{\Omega} [N^p]^t [N^p] d\Omega \cdot \bar{p} \quad (4.43)$$

Logo, a matriz de massa $[Q]$ para a fase fluida é:

$$[Q] = \frac{h^2}{\tilde{R}} \int_{\Omega} [N^p]^t [N^p] d\Omega \quad (4.44)$$

- **Matriz de Acoplamento $[C]$ da fase fluida**

O termo de acoplamento pode ser obtido a partir da terceira parcela do produto interno da Equação (4.2):

A passagem para a forma fraca foi feita da seguinte forma:

$$\tilde{\gamma} \int_{\Omega} u_{i,i} \delta p d\Omega = \tilde{\gamma} \left(- \int_{\Omega} \delta p_{,j} u_i d\Omega + \oint_{\Gamma} u_i n_j \delta p dS \right) \quad (4.45)$$

originando uma integral de contorno que será especificada a partir das condições de contorno para o domínio fluido.

A seguinte transformação é verdadeira e pertinente:

$$\oint_{\Gamma} u_i \cdot n_j \delta p dS = \oint_{\Gamma} u^n \delta p dS \quad (4.46)$$

A partir da formulação fraca, tem-se a integral de domínio resultante como sendo o termo de acoplamento entre a fase fluida e a sólida, dada por:

$$[C]^t u_i = \tilde{\gamma} \int_{\Omega} \delta p_{,j} u_i d\Omega \quad (4.47)$$

O valor da integral de acoplamento fluido-estrutura resulta em:

$$[C]^t \bar{u}_i = \tilde{\gamma} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^t [N^u] d\Omega \bar{u}_i \quad (4.48)$$

onde ∇ representa o operador de derivadas parciais de primeira ordem aplicado à família de funções $[N^p]$.

Logo, a matriz de acoplamento $[C]$ para a fase fluida é:

$$[C]^t = \tilde{\gamma} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^t [N^u] d\Omega \quad (4.49)$$

- **Resumo das matrizes**

As equações diferenciais escritas agora em uma formulação de Elementos Finitos do tipo Galerkin, na forma matricial, resultam em:

$$\begin{aligned} [K]\{\bar{u}_i\} - \omega^2 [\widetilde{M}]\{\bar{u}_i\} - [\widetilde{C}]\{\bar{p}\} &= 0 \\ [\widetilde{H}]\{\bar{p}\} - \omega^2 [\widetilde{Q}]\{\bar{p}\} - \omega^2 [\widetilde{C}]^t\{\bar{u}_i\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Sendo que:

$$\begin{aligned} [K] &= \int_{\Omega} [\mathcal{L}]^t [N^u]^t [D] [\mathcal{L}] [N^u] d\Omega \\ [\widetilde{M}] &= \tilde{\rho} \int_{\Omega} [N^u]^t [N^u] d\Omega \\ [\widetilde{H}] &= \frac{h^2}{\tilde{\rho}_{22}} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^t \nabla [N^p] d\Omega \\ [\widetilde{Q}] &= \frac{h^2}{\tilde{R}} \int_{\Omega} [N^p]^t [N^p] d\Omega \\ [\widetilde{C}] &= \tilde{\gamma} \int_{\Omega} [N^u]^t \nabla [N^p] d\Omega \end{aligned} \quad (4.51)$$

Em uma forma matricial, o problema pode ser colocado na forma de auto-vetores e auto-valores, da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} [K] - \omega^2 [\widetilde{M}] & -[\widetilde{C}] \\ -\omega^2 [\widetilde{C}]^t & [\widetilde{H}] - \omega^2 [\widetilde{Q}] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^s \\ F^p \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

Tal equação é composta pela matriz dinâmica, os vetores de incógnitas $\{\bar{u}_i, \bar{p}\}$ e forças aplicadas e será utilizada para a implementação do problema na frequência das equações da poroelasticidade acoplada. Sua solução permite determinar os modos operacionais da solução do sistema linear, descrito na Equação (4.52), para cada frequência analisada.

4.2 Condições de Contorno em Poroelasticidade - Formulação (u,p)

Neste ítem serão explicitadas de uma forma mais detalhada as condições de contorno que podem estar presente em um problema poroelástico com formulação (u,p). Tal estudo é

iniciado a partir do ítem (4.1), onde foi mostrada a formulação de elementos finitos para o problema dinâmico bem como as equações do problema poroelástico em sua forma fraca.

4.2.1 Condições de Contorno na formulação fraca

Interessa-se agora, no cálculo das integrais de contorno, que são as condições naturais do sistema. Na forma fraca identificam-se duas integrais de contorno, como se segue:

$$\begin{aligned} I_1 &= - \oint_{\Gamma} \widehat{\sigma}_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma \\ I_2 &= \oint_{\Gamma} \left(\widetilde{\gamma} u^n - \frac{h^2}{\widetilde{\rho}_{22} \omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \delta p d\Gamma \end{aligned} \quad (4.53)$$

A tensão total da fase sólida foi inicialmente decomposta em duas parcelas (sólido e fluido), expressa como se segue:

$$\sigma_{ij}^s = \widehat{\sigma}_{ij}^s - h \left(1 + \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}} \right) p \delta_{ij} \quad (4.54)$$

Reescrevendo a integral de contorno da equação da fase sólida, mostrada nas Equações (4.53), tem-se:

$$I_1 = - \oint_{\Gamma} \sigma_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma - \oint_{\Gamma} h \left(1 + \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{R}} \right) p \delta u^n d\Gamma \quad (4.55)$$

onde $\delta u^n = \delta_{ij} n_j \delta u_i$

Esta integral, Equação (4.55), representa o trabalho feito pelas forças externas na fase sólida do material poroelástico.

De forma similar para a equação do fluido pode-se reescrever a integral de contorno I_2 . Para se obter uma relação mais interessante para substituições futuras, dá-se preferência à utilização da variável U_i ao invés do gradiente de pressão. Estas variáveis são relacionadas, como já apresentado, na seguinte forma:

$$U_i = \frac{h}{\widetilde{\rho}_{22} \omega^2} p_{,i} - \frac{\widetilde{\rho}_{12}}{\widetilde{\rho}_{22}} u_i \quad (4.56)$$

sendo o coeficiente de acoplamento $\tilde{\gamma}$, dado por:

$$\tilde{\gamma} = h \left(\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \quad (4.57)$$

A integral I_2 se torna:

$$I_2 = - \oint_{\Gamma} h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) u^n \delta p d\Gamma - \oint_{\Gamma} h (U^n - u^n) \delta p d\Gamma \quad (4.58)$$

onde a segunda integral representa a velocidade de infiltração, que é o fluxo sobre o contorno Γ . A expressão I_2 representa o trabalho feito pelas forças externas sobre a fase fluida.

A seguir serão listados os tipos de condições e acoplamentos entre os diversos meios para um sistema poroelástico. Os resultados serão diretamente impostos nas integrais I_1 a partir da Equação (4.55) e I_2 a partir da Equação (4.58). Na Figura (4.1), explicita-se um domínio poroelástico sujeito à possíveis interações com outros domínios bem como à imposição de condições de contorno como excitações e apoios.

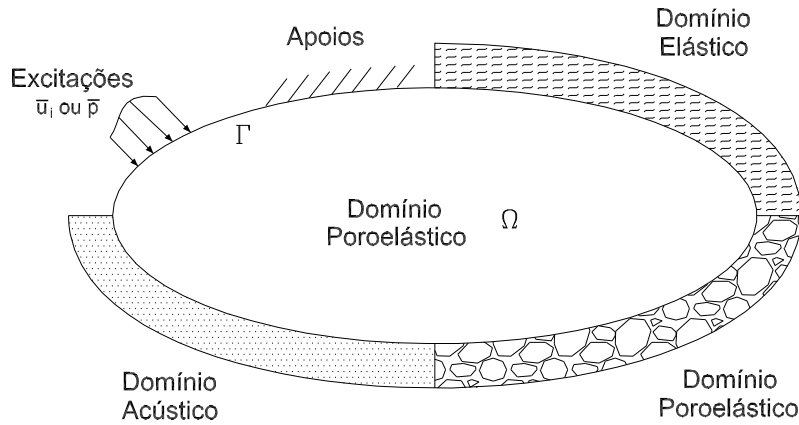


Figura 4.1: Condições de contorno e acoplamentos em domínios poroelásticos

4.2.2 Excitações para o problema poroelástico

- Caso de um campo de pressão imposto

Para o caso de um campo de pressão \bar{p} a ser aplicado em Γ , as condições de contorno aplicadas nas Equações (4.55) e (4.58) são:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^s n_j &= -\bar{p} \delta_{ij} n_j \\ p &= \bar{p}\end{aligned}\tag{4.59}$$

Em consequência, as integrais I_1 e I_2 se tornam:

$$\begin{aligned}I_1 &= \oint_{\Gamma} \left(1 - h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \right) p_i \delta u^n d\Gamma \\ I_2 &= 0\end{aligned}\tag{4.60}$$

Como a pressão é imposta, a variação admissível para δp na Equação (4.58) tende a zero. Por outro lado, a partir do resultado descrito na Equação (3.52), para a maioria dos materiais poroelásticos utilizados em acústica, tem-se que: $h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \cong 1$ é válido, e como consequência, a integral I_1 também se anula.

Em resumo, para os materiais poroelásticos submetidos à excitação de um campo de pressão, somente a relação cinemática $p = \bar{p}$ aplicada sobre a pressão do poro da fase fluida sobre o contorno Γ se faz necessária.

- **Caso de um vetor de deslocamento imposto**

Para o caso de vetor de deslocamento \bar{u}_i a ser aplicado em Γ , como por exemplo, um movimento de um pistão sobre o contorno Γ , as condições de contorno aplicadas nas Equações (4.55) e (4.58) são:

$$\begin{aligned}u_i &= \bar{u}_i \\ \bar{u}_n &= (1 - h)u^n + hU^n = U^n - u^n = 0\end{aligned}\tag{4.61}$$

Como o deslocamento é imposto, a variação admissível para δu_i e, logo, para δu^n , na Equação (4.55) tem seu valor tendendo a zero.

$$\begin{aligned}
I_1 &= 0 \\
I_2 &= - \oint_{\Gamma} h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{R} \right) \bar{u}_i \delta p d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Mais uma vez, utilizando do resultado $h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{R} \right) \cong 1$, que é válido para a maioria dos materiais poroelásticos utilizados em acústica, tem-se que: I_2 se reduz a uma clássica condição de contorno natural para um meio fluido, dada por: $I_2 = - \oint_{\Gamma} \bar{u}_i \delta p d\Gamma$.

Para um caso particular em que seja imposto um deslocamento tangencial no contorno Γ (excitação cisalhante) o componente normal de \bar{u}_i tende a zero e, logo, a integral I_2 , também. Neste caso, somente a relação cinemática $u_i = \bar{u}_i$ deve ser aplicada na fase sólida.

4.2.3 Condições de apoios para o problema poroelástico

São condições de contorno do tipo Dirichlet, condições que possuem seus valores aplicados sobre as variáveis essenciais do problema presente na superfície do contorno Γ . Em geral, três tipos se destacam.

- **Condição de parede livre**

Quando uma parte do contorno está aberta para o meio infinito acústico, a condição de contorno livre se aplica. Essa condição significa que nenhum suporte retém o movimento da estrutura poroelástica.

Na realidade isto não é verdade. Devido ao fato de que o meio acústico estar ligado ao ar presente na rede do material poroelástico, o carregamento do ar sobre a fase fluida na área livre não é desprezível.

Para simplificar a condição livre, é assumido que a impedância da fase sólida é muito maior de que a impedância do meio acústico que cerca o meio poroelástico e que somente o comportamento elástico possui um efeito notável.

Assumindo-se tais simplificações, o qual considera um sistema placa-poroelástico vibrando no vácuo, neste caso particular as condições de suporte livre são:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^s n_j &= 0 \\ p &= 0\end{aligned}\tag{4.63}$$

Conseqüentemente, por não haver trabalho externo agindo sobre o contorno Γ poroelástico as integrais I_1 e I_2 tendem a zero naturalmente.

- **Condição de parede rígida**

Neste caso as condições de contorno aplicadas sobre uma superfície rígida são:

$$\begin{aligned}u_i &= 0 \\ U^n - u^n &= 0\end{aligned}\tag{4.64}$$

Conseqüentemente, por não haver trabalho externo agindo sobre o contorno Γ poroelástico as integrais I_1 e I_2 tendem a zero naturalmente, além do fato de que as variações admissíveis de δu e δu^n tenderem a zero. A pressão do poro p na região da parede rígida é livre.

- **Condição de parede com deslizamento**

Tal condição de contorno significa que o deslocamento normal é restrito (parede rígida) mas o movimento tangencial está livre. Tal efeito é representado pelas seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}\sigma_{shear}^s &= 0 \\ u^n &= 0 \\ U^n - u^n &= 0\end{aligned}\tag{4.65}$$

Conseqüentemente, por não haver trabalho externo agindo sobre o contorno Γ poroelástico as integrais I_1 e I_2 tendem a zero naturalmente. Como o deslocamento normal é imposto e nulo, a variação admissível δu^n tende a zero. A pressão do poro p na região da parede rígida e o deslocamento sólido tangencial são livres.

4.2.4 Acoplamentos entre domínios

- **Condição de acoplamento Poroelástico-Elástico**

O meio elástico pode ser descrito em termos do vetor de deslocamento u_i^e . A combinação das integrais de contorno do meio poroelástico, descritas nas Equações (4.55) e (4.58), com a integral obtida da formulação fraca do meio elástico, serão obtidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \oint_{\Gamma} \sigma_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma - \oint_{\Gamma} h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p \delta u^n d\Gamma + \oint_{\Gamma} \sigma_{ij}^e n_j \delta u_i d\Gamma \\
 I_2 &= - \oint_{\Gamma} h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) u^n \delta p d\Gamma - \oint_{\Gamma} h (U^n - u^n) \delta p d\Gamma
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

onde σ_{ij}^e representa o tensor de tensões do meio elástico.

As condições de acoplamento entre o meio poroelástico e o meio elástico são para o contorno Γ descritas pelas seguinte relações:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}^s \cdot n_j &= \sigma_{ij}^e \cdot n_j \\
 U^n - u^n &= 0 \\
 u_i &= u_i^e
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Estas relações descritas na Equação (4.67) correspondem às relações de equilíbrio, infiltração nula e compatibilidade cinemática, respectivamente. Substituindo as duas primeiras relações da Equação (4.67) nas integrais da Equação (4.66), é obtido:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \oint_{\Gamma} h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p \delta u^n d\Gamma \\
 I_2 &= - \oint_{\Gamma} h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) u^n \delta p d\Gamma
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Estas equações mostram que o meio poroelástico será acoplado com o meio elástico através de uma formulação simétrica em seus termos. A relação cinemática $u_i = u_i^e$ deverá também ser, de forma explícita, imposta no contorno de acoplamento Γ .

Mais uma vez, para a maioria dos materiais poroelásticos utilizados em acústica o resultado de que $h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{R}\right) \cong 1$ reduz os resultados obtidos na Equação (4.68) ao clássico problema de acoplamento fluido estrutura, como se segue:

$$\begin{aligned} I_1 &= - \oint_{\Gamma} p \delta u^n d\Gamma \\ I_2 &= - \oint_{\Gamma} u^n \delta p d\Gamma \end{aligned} \quad (4.69)$$

• **Condição de acoplamento Poroelástico-Acústico**

O meio acústico pode ser descrito em termos do campo de pressão p^a . A combinação das integrais de contorno do meio poroelástico, descritas nas Equações (4.55) e (4.58), com a integral obtida da formulação fraca do meio acústico, serão obtidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} I_1 &= - \oint_{\Gamma} \sigma_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma - \oint_{\Gamma} h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{R}\right) p \delta u^n d\Gamma \\ I_2 &= - \oint_{\Gamma} h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{R}\right) u^n \delta p d\Gamma - \oint_{\Gamma} h (U^n - u^n) \delta p d\Gamma + \oint_{\Gamma} \frac{1}{\rho_a \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n} \delta p d\Gamma \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde ρ_a é a densidade do meio acústico.

As condições de acoplamento entre o meio poroelástico e o meio acústico são para o contorno Γ descritas pelas seguinte relações:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^s n_j &= -p^a n_j \\ \frac{1}{\rho_a \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial n} &= (1 - h)u^n + hU^n \\ p &= p^a \end{aligned} \quad (4.71)$$

Estas relações descritas na Equação (4.71) correspondem às relações de equilíbrio, equilíbrio de vazões e compatibilidade cinemática, respectivamente. Substituindo as relações da Equação (4.71) nas integrais da Equação (4.70), é obtido:

$$\begin{aligned}
I_1 &= - \oint_{\Gamma} \left(1 - h - h \frac{\tilde{Q}}{R} \right) p^a \delta u^n d\Gamma \\
I_2 &= - \oint_{\Gamma} \left(1 - h - h \frac{\tilde{Q}}{R} \right) u^n \delta p d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Estas equações mostram que o meio poroelástico será acoplado com o meio acústico através de uma formulação simétrica em seus termos. A relação cinemática $p = p^a$ deverá também ser, de forma explícita, imposta no contorno de acoplamento Γ , isto é há continuidade na malha.

Para a maioria dos materiais poroelásticos utilizados em acústica o resultado de que $h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{R} \right) \cong 1$ reduz agora as integrais de acoplamento entre os meios acústico e poroelástico a valores nulos, o que significa que para tal acoplamento somente se faz necessária a imposição da relação cinemática $p = p^a$ e esquecendo-se das duas primeiras descritas na Equação (4.71).

Esta simplificação para as integrais de contorno no acoplamento entre os meios acústicos e poroelástico, resulta na ausência de termos de acoplamentos na interface do meio acústico com as fases fluida e sólida do meio poroelástico, ou seja, não há matriz de acoplamento entre os meios poroelástico e acústico.

- **Condição de acoplamento Poroelástico-Poroelástico**

O meio poroelástico é descrito segundo a formulação (u,p) em termos do vetor de deslocamento da fase sólida u_i e do campo de pressão da fase fluida p . Sejam os índices 1 e 2 que denotam os dois domínios poroelásticos.

A combinação das integrais de contorno dos meios poroelásticos, descritas nas Equações (4.55) e (4.58), serão obtidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
I_1 &= - \oint_{\Gamma} \sigma_{1ij}^s n_j \delta u_{1i} d\Gamma - \oint_{\Gamma} h_1 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{R}_1} \right) p_1 \delta u_1^n d\Gamma + \\
&\quad + \oint_{\Gamma} \sigma_{2ij}^s n_j \delta u_{2i} d\Gamma + \oint_{\Gamma} h_2 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{R}_2} \right) p_2 \delta u_2^n d\Gamma \\
I_2 &= - \oint_{\Gamma} h_1 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{R}_1} \right) u_1^n \delta p_1 d\Gamma - \oint_{\Gamma} h_1 (U_1^n - u_1^n) \delta p_1 d\Gamma + \\
&\quad + \oint_{\Gamma} h_2 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{R}_2} \right) u_2^n \delta p_2 d\Gamma + \oint_{\Gamma} h_2 (U_2^n - u_2^n) \delta p_2 d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.73}$$

As condições de acoplamento entre os meios poroelásticos são para o contorno Γ descritas pelas seguinte relações:

$$\begin{aligned}
\sigma_{1ij}^s n_j &= \sigma_{2ij}^s n_j \\
h_1 (U_1^n - u_1^n) &= h_2 (U_2^n - u_2^n) \\
u_{1i} &= u_{2i} \\
p_1 &= p_2
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Estas relações descritas na Equação (4.74) correspondem as relações de equilíbrio, equilíbrio de vazões e compatibilidade cinemática de deslocamento e pressão, respectivamente. Substituindo a primeira e terceira relações da Equação (4.74) na Equação (4.73), para a equação da integral I_1 é obtido:

$$I_1 = - \oint_{\Gamma} h_1 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{R}_1} \right) p_1 \delta u_1^n d\Gamma + \oint_{\Gamma} h_2 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{R}_2} \right) p_2 \delta u_2^n d\Gamma \tag{4.75}$$

Substituindo a segunda e quarta relações da Equação (4.74) na Equação (4.73), para a equação da integral I_2 , é obtido:

$$I_2 = - \oint_{\Gamma} h_1 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_1}{\tilde{R}_1} \right) u_{1n} \delta p_1 d\Gamma + \oint_{\Gamma} h_2 \left(1 + \frac{\tilde{Q}_2}{\tilde{R}_2} \right) u_{2n} \delta p_2 d\Gamma \tag{4.76}$$

As Equações (4.75) e (4.76) mostram que a interação entre dois domínios poroelásticos é obtida através de uma formulação simétrica em seus termos. As relações cinemáticas $p_1 = p_2$ e $u_1 = u_2$ deveram também ser, de forma explícita, impostas no contorno de acoplamento Γ , através do uso de malhas contínuas.

Para a maioria dos materiais poroelásticos utilizados em acústica o resultado de que $h \left(1 + \frac{\tilde{Q}}{R}\right) \cong 1$ leva ambas integrais, I_1 e I_2 , a tenderem zero. Tal redução implica que para tal acoplamento somente se faz necessária a imposição das relações cinemáticas que são naturalmente satisfeitas dentro do processo de superposição das matrizes.

4.3 Método dos Elementos Finitos para o problema transiente

Sejam as equações diferenciais que regem o problema poroelástico, descritas no ítem (3.6):

$$\begin{aligned} 2N\varepsilon_{ij,j} + \frac{2N\nu_b}{1-2\nu_b}\varepsilon_{kk,j} - \beta p_{,j} &= 0 \\ \beta \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa p_{,jj} &= 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

Utilizando-se das seguintes condições de contorno:

- $u_i = g_i$ em Γ_u - Deslocamento;
- $\sigma_{ij}n_j = h_i$ em Γ_s - Forças de Superfícies;
- $p_i = S_i$ em Γ_p - Pressões;
- $q_i n_i = R_i$ em Γ_u - Vazões;

Para o problema deve-se ainda considerar $\xi|_{t=0} = 0$, ou seja não há variação no conteúdo do fluido no meio poroso no estado inicial.

4.3.1 Forma Fraca para o problema transiente

A forma fraca de um problema pode ser obtida através do produto interno do resíduo por uma função de ponderação admissível. A Integração da equação ocorre em um domínio fechado (Ω) de validade do problema.

Escrevendo-se as equação da fase sólida, Equação (4.77) em sua forma fraca, tem-se:

$$\int_{\Omega} (2N\varepsilon_{ij,j} + \frac{2N\nu_b}{1-2\nu_b}\varepsilon_{kk,j} - \beta p_{,j})\delta u_i d\Omega = 0 \quad (4.78)$$

Fazendo a Integração por partes, chega-se à seguinte forma:

$$- \int_{\Omega} \left(2N\varepsilon_{ij} + \frac{2N\nu_b}{1-2\nu_b}\varepsilon_{kk} \right) \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \beta p_{,j} \delta u_i d\Omega + \oint_{\Gamma} \left(2N\varepsilon_{ij} + \frac{2N\nu_b}{1-2\nu_b}\varepsilon_{kk} \right) n_j \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (4.79)$$

Com base nas relações constitutivas e cinemáticas pode-se reduzir a forma fraca da seguinte maneira:

$$- \int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij}^s \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \beta p_{,j} \delta u_i d\Omega + \oint_{\Gamma} \hat{\sigma}_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (4.80)$$

O resíduo da equação da fase fluida, Equação (4.77), é apresentado a seguir:

$$\int_{\Omega} \left(\beta \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa p_{,jj} \right) \delta p d\Omega = 0 \quad (4.81)$$

Novamente a integração por partes é feita, obtendo-se a forma fraca, dada por:

$$\int_{\Omega} \kappa p_{,j} \delta p_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} \beta \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} \delta p d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \delta p d\Omega - \oint_{\Gamma} p_{,j} \cdot n_j d\Gamma = 0 \quad (4.82)$$

4.3.2 Aproximação por Elementos Finitos para o problema transiente

Considerando-se um elemento que possui a família de funções de interpolação ou funções de forma como sendo $[N^u]$ para a aproximação na fase sólida e $[N^p]$ para a aproximação na fase fluida.

De forma análoga ao caso dinâmico, faz-se a aproximação de Elementos Finitos pelo Método de Galerkin, o que permite escrever o seguinte sistema discreto que governa o problema transiente:

para a fase s3lida:

$$- \int_{\Omega} [\mathcal{L}]^t [N^u]^t [D] [\mathcal{L}] [N^u] d\Omega \bar{u}_i - \int_{\Omega} \beta \nabla [N^p] [N^u] d\Omega \bar{p} = 0 \quad (4.83)$$

e para a fase fluida:

$$\int_{\Omega} \kappa \nabla [N^p] \nabla [N^p] d\Omega \bar{p} + \int_{\Omega} \beta \nabla [N^u] [N^p] d\Omega \dot{\bar{u}}_i + \frac{1}{Q} \int_{\Omega} [N^p] [N^p] d\Omega \dot{\bar{p}} = 0 \quad (4.84)$$

As Equa33es (4.83) e (4.84) podem ser reduzidas 3s seguintes formas matriciais, respectivamente:

$$[K] \bar{u}_i - [Q] \bar{p} = 0 \quad (4.85)$$

$$[Q]^t \dot{\bar{u}}_i + [S] \dot{\bar{p}} + [H] p = 0 \quad (4.86)$$

sendo:

$$\begin{aligned} [K] &= - \int_{\Omega} [\mathcal{L}]^t [N^u]^t [D] [\mathcal{L}] [N^u] d\Omega \\ [Q] &= \beta \int_{\Omega} \nabla [N^p] [N^u] d\Omega \\ [H] &= \kappa \int_{\Omega} \nabla [N^p] \nabla [N^p] d\Omega \\ [S] &= \frac{1}{Q} \int_{\Omega} [N^p] [N^p] d\Omega \end{aligned} \quad (4.87)$$

O termos da integrais de contorno representam o balan3o das for3as sobre o elemento. Tal soma resulta em valor nulo devido 3s condi33es de contorno inicialmente impostas.

Na forma matricial, acoplando-se ambas Equa33es (4.85) e (4.86), do fluido e da estrutura, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Q^t & -S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}}_i \\ \dot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -Q \\ 0 & -H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.88)$$

4.3.3 Implementação no Tempo - Métodos de Discretização

Para o sistema resultante do problema poroelástico, Equação (4.88), como visto a partir da formulação de Elementos Finitos em problemas transientes, pode ser representado pelo seguinte sistema matricial, típico:

$$[A]\{\dot{c}\} + [B]\{c\} = \{P\} \quad (4.89)$$

para um intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_0$, sendo: $[A]$, $[B]$ e $\{P\}$ matrizes e vetores previamente conhecidos e constantes e $\{c\}$ o vetor de incógnitas.

Fazendo-se uma média ponderada para a aproximação da derivada temporal, introduz-se a variável θ , dependente de dois intervalos de tempos consecutivos (Reddy, 1984).

Tal método de aproximação temporal independe do número de variáveis espaciais, por se tratar de uma formulação geral, a sua implementação poderá ser usada para uma aproximação do tipo das Equações (4.89), em problemas de quaisquer dimensões:

$$\theta\{\dot{c}\}_{n+1} + (1 - \theta)\{\dot{c}\}_n = \frac{\{c\}_{n+1} - \{c\}_n}{\Delta t_n} \quad (4.90)$$

Este tipo de aproximação, Equação (4.90), é característica de problemas transientes parabólicos. Para intervalos de tempo variando $0 \leq t \leq t_0$. O fator θ , determinante do método de aproximação temporal, pode ser dado, para cada aproximação, da seguinte forma:

$$\theta = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{Método de Euler} \\ 1/2 & \text{Método de Crank-Nicolson} \\ 2/3 & \text{Método de Galerkin} \end{array} \right\} \quad (4.91)$$

Utilizando a aproximação da Equação (4.90) para intervalos de tempo iguais a Δt_n na Equação (4.89), obtém-se:

$$[A]\{c\}_{n+1} = [A]\{c\}_n + \theta\Delta t_n(\{P\}_{n+1} - [B]\{c\}_{n+1}) + (1 - \theta)\Delta t_n(\{P\}_n - [B]\{c\}_n) \quad (4.92)$$

Rearranjando a expressão da Equação (4.92) e então, reescrevendo-a em uma forma recursiva para c_n , obtém-se:

$$([A] + \theta \Delta t_n [B])\{c\}_{n+1} = ([A] - (1 - \theta) \Delta t_n [B])\{c\}_n + \Delta t_n (\theta \{P\}_{n+1} + (1 - \theta) \{P\}_n) \quad (4.93)$$

Tal equação recursiva será utilizada para a implementação do problema das equações da poroelasticidade acoplada pelo Método dos Elementos Finitos em problemas transientes.

Capítulo 5

Implementação Computacional

Neste capítulo será apresentada a implementação computacional feita com a filosofia da Programação Orientada ao Objeto. Foram implementados os elementos finitos poroelásticos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais em dois tipos de análises: transiente (domínio do tempo) e dinâmico (domínio da frequência). Um conjunto de classes foi adicionada às já existentes no projeto computacional Meflab++, programa em desenvolvimento no Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp.

5.1 Programação Orientada ao Objeto

A solução numérica do sistema de equações do problema da poroelasticidade, mostrado nas Equações (4.88) e (4.52), foi implementada na linguagem C++. Para resolver os problemas transientes e dinâmicos, faz-se necessário o conhecimento prévio das matrizes elementares dependentes do tempo e frequência, respectivamente, e da matriz global do sistema (equivalentes de massa, amortecimento e rigidez).

O gerenciamento dos dados, a montagem e o método de resolução do problema foram concebidos com a filosofia de programação orientada ao objeto (Oriented Object Programming - OOP).

A programação orientada ao objeto é organizada em função de um grupo de objetos, previamente classificados segundo suas características e semelhanças (atributos), os quais se comunicam através do envio de mensagens (métodos) e, assim, acessando os atributos dos objetos. Um objeto, segundo sua responsabilidade, pode executar uma tarefa específica

de armazenamento de dados ou de herdar dados e características de uma estrutura maior. Tal processo de programação oferece entre outras vantagens robustez e segurança, levando a programas com grande possibilidade de trabalho em conjunto, manutenção e facilidade de evolução.

Ao projeto Meflab++, foi adicionado um conjunto de classes com as responsabilidades de modelar, configurar e resolver vários tipos de problemas poroelásticos e poro-acústicos propostos.

5.2 O programa Meflab++

Neste ítem serão discutidos alguns aspectos de programação usados no Meflab++. Será posta em evidência a estratégia de solução computacional do programa.

Meflab++ é um software feito em linguagem C++ com filosofia orientada ao objeto. O processamento de suas rotinas está baseada em uma aplicação padrão do sistema operacional *Windows*[®]. É um programa de categoria de 20.000 linhas. A linguagem C++ foi utilizada em particular por se mostrar bem adaptada à proposta de orientação a objetos e pela manipulação das abstrações em alto-nível (uso de memória dinâmica) enquanto, para o uso de Elementos Finitos permite implementações de baixo-nível necessárias para a eficácia dos cálculos (controle numérico dos erros computacionais).

A proposta do Meflab++ é a de permitir a resolução de vários tipos de problemas encontrados em Engenharia pelo método de elementos finitos e ainda na busca de soluções ótimas em determinados campos utilizando-se dos métodos computacionais clássicos de otimização.

A solução de problemas pelo Meflab++ parte da leitura do arquivo de dados o qual a classe **Dictionary** terá a responsabilidade de entendê-lo para uma posterior classificação do problema, segundo a classe **Main Problem**. A lista de tarefas a ser realizada no problema estão sob a responsabilidade da classe **Task**, que as executa segundo um gerenciamento dos dados.

O problema será dividido em domínios, cada um com uma equação diferencial regente e cada uma com seu respectivo operador diferencial e material que se comporta segundo a sua lei constitutiva. Os tipos e quantidades de graus de liberdade são função da escolha do operador

diferencial e da dimensão do domínio. A malha de elementos finitos é processada com o recebimento das coordenadas dos nós e da conectividade de seus elementos. As condições de contorno e iniciais são dados de entrada e finalizam a montagem do domínio.

O método de aproximação numérica do problema, FEM - finite element method, possui a responsabilidade de montar as matrizes globais de cada domínio proposto.

O processamento se dá início a partir da escolha do "solver" do sistema equações. Para os problemas resolvidos neste trabalho, todos os métodos de resolução são de equações lineares.

O pós-processamento de algumas variáveis como a deformação no caso de problemas de elasticidade, fluxo de calor em problemas térmicos, gradiente de pressão e deslocamento fluido no caso poroelástico implementado são determinados em função do operador diferencial escolhido e na maioria das vezes o cálculo é feito ao nível elementar ou nodal (pontos de integração).

A seguir um fluxograma simplificado do processamento de um problema a ser resolvido utilizando o programa Meflab++.

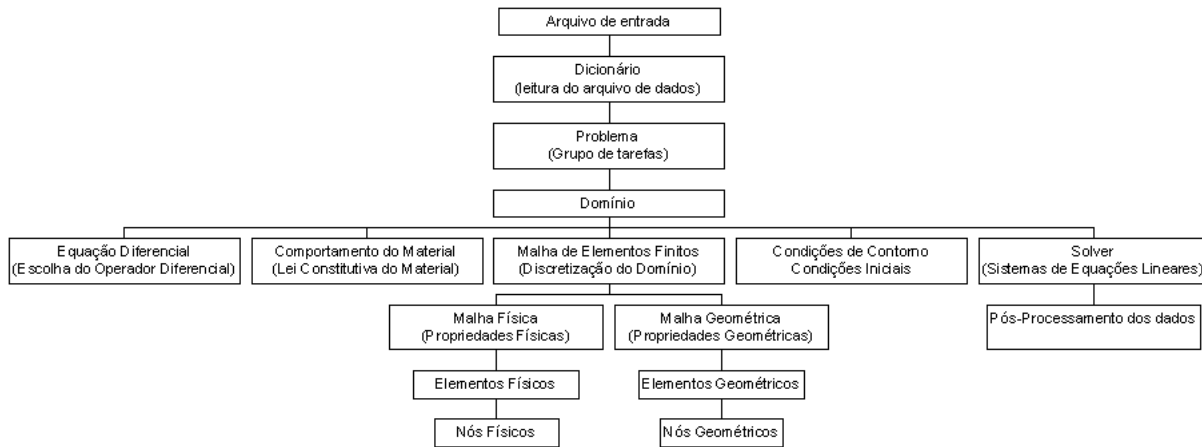


Figura 5.1: Fluxograma simplificado das informações no Meflab++

5.3 Implementação do Problema Poroelástico no Meflab++

Para se introduzir o problema poroelástico ao programa Meflab++, as classes originais devem sofrer algumas modificações e outras novas devem ser criadas. A estrutura global do

Programa Meflab++ e as modificações nas chamadas categorias de maior ordem hierárquica do Meflab++ são indicadas na Figura (5.2).

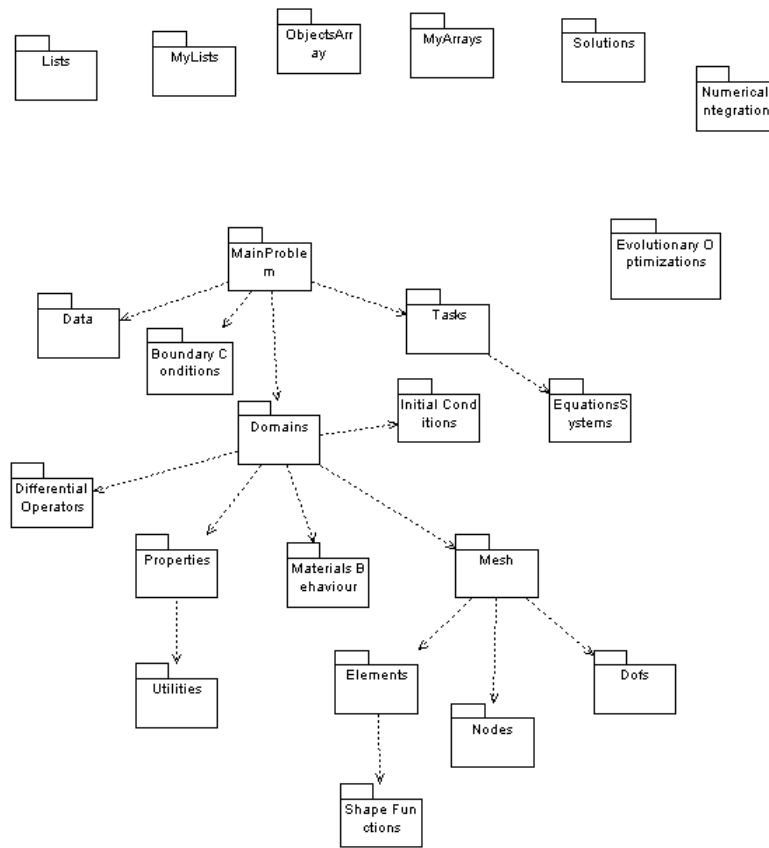


Figura 5.2: Descrição Geral do Meflab++ - Categorias Gerais

As modificações nas categorias originais do Meflab++ serão descritas nos itens posteriores. Serão destacados os novos métodos, classes e objetos criados para a montagem do problema poroelástico transiente e dinâmico.

5.3.1 Categoria Domain

A Categoria **Domain** é constituída pelo tipo de Método Integral ou Formulação do Problema principal, para o caso Poroelástico o método utilizado é o dos Elementos Finitos (classe **FEM-UNS**) que se originou da classe **FEM**, conforme mostrado na Figura (5.3). A partir de algumas modificações feitas devido à natureza não simétrica das matrizes criou-se a classe **FEM-UNS** ("FEM Unsymmetrical") na qual a montagem das matrizes de elementos finitos

procede em uma matriz não simétrica e não mais em banda e simétrica como feito em problemas desacoplados. Em versões futuras, o uso de armazenamento esparsos deve ser acrescentado à classe **Matrix** do MeFlab++.

Para o problema poroelástico transiente estudado, devido à sua descrição apresentar termos dissipativos (problema do tipo parabólico), com primeira derivada em deslocamento e pressão - (\dot{u}, \dot{p}) há a necessidade de métodos específicos para tal montagem das matrizes globais de Amortecimento, Rigidez e do Vetor de Carga Nodal: *give-TransientLHSide()*, *give-RHSide()*, *assemble-Transient-StiffnessMatrix()* e *assemble-Transient-DampingMatrix()*.

Para o problema dinâmico, a responsabilidade desta classe (**FEM-UNS**) é a montagem da matriz dinâmica global. Esta matriz procede da montagem das matrizes de rigidez e massa equivalentes (com os termos dissipativos e imaginários) a níveis elementares para uma posterior montagem das matrizes globais. O método de montagem do lado esquerdo da equação, vetor de forças, também deve ser modificado para os casos de deslocamento e pressão impostos, o valor do vetor de forças também é dependente da frequência. Os métodos de montagem das matrizes dinâmicas globais são: *give-FRFLHSide(omega)*, *give-RHSide(omega)*, *assemble-Complex-StiffnessMatrix()* e *assemble-Complex-MassMatrix()*.

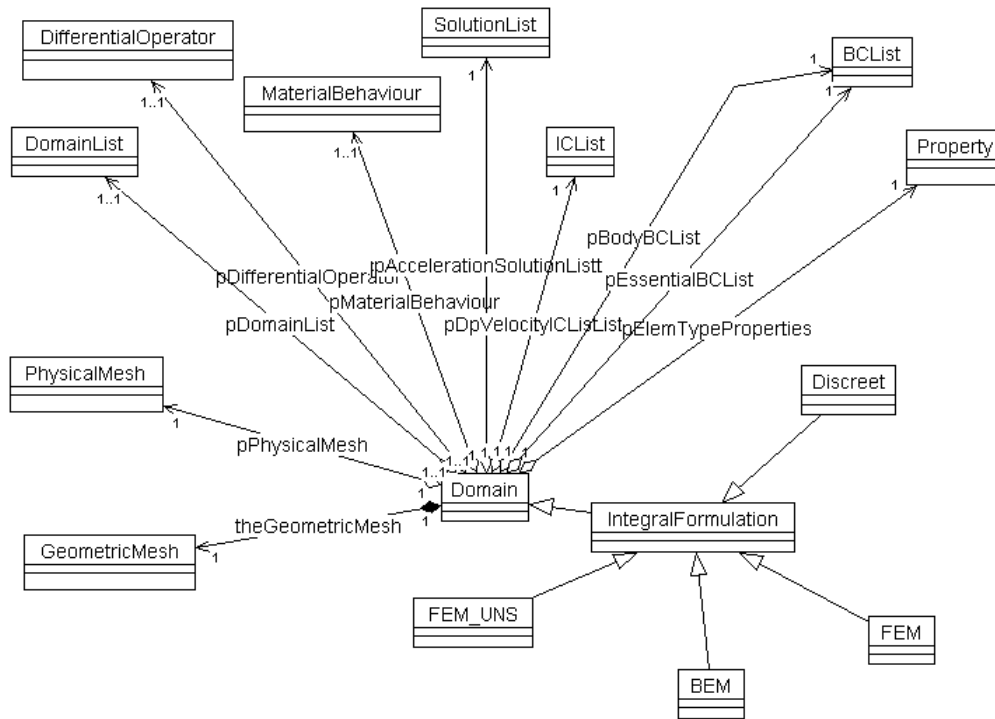


Figura 5.3: Domain: Classe FEM-UNS implementada: especialista para problemas não simétricos

5.3.2 Categoria Task

A Categoria **Task** agrupa as classes responsáveis pela leitura e interpretação das tarefas que são descritas no arquivo de entrada. Para o problema poroelástico transiente implementado, a classe **Task** deve ser responsável pela interpretação da palavra TRANSIENT, ou seja, a resposta no tempo que pode ser obtida pelos métodos de predição no tempo (problema parabólico).

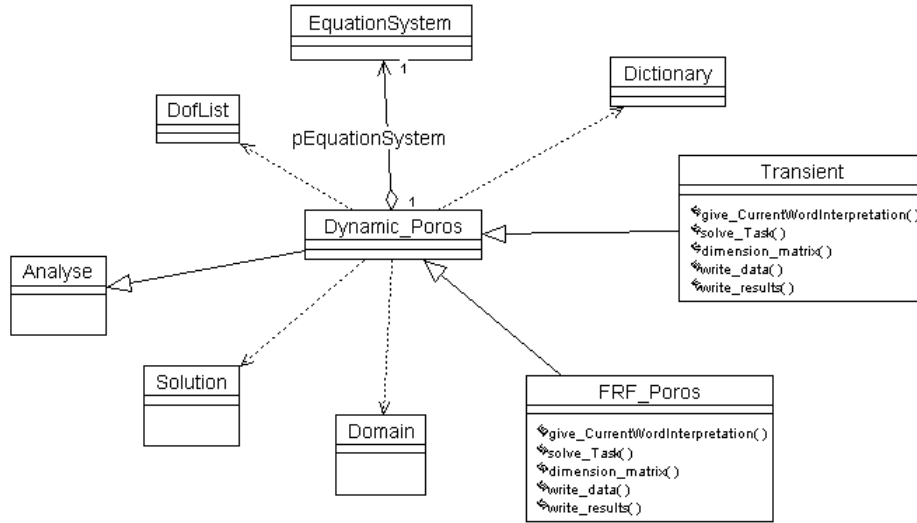


Figura 5.4: Task: Análise Transiente e Dinâmica e suas classes derivadas

O conjunto de tarefas do problema dinâmico é semelhante ao do problema transiente, somente com a mudança para o domínio da frequência. A instrução no arquivo de entrada de dados é DYNAMIC-POROUS. Para este caso deve-se prever os valores dos modos operacionais ou as respostas para cada passo de frequência prescrita, isto é, a determinação das funções de resposta em frequência (FRF) para o sistema poroelástico. A classe responsável pela interpretação desta tarefa é a classe **FRF-Porous**, que pode ser avaliada na Figura (5.4).

Características comuns para estas duas classes (**Transient** e **FRF-Porous**) estão nos métodos de dimensionamento das matrizes de resultados (*dimension-matrix()*), no comando de escrever os dados nas matrizes (*write-data()*) e escrever em arquivos (*write-results()*).

O método *solve-Task(pDomain)* das classes **Transient** e **FRF-Porous** é virtual e responsável pela obtenção da resposta das variáveis primárias (u,p) ao longo do tempo e frequência, respectivamente. O objeto "pDomain" é um ponteiro do tipo **FEM-UNS** e a partir de seus atributos é realizada a tarefa de obtenção da solução transiente ou dinâmica.

5.3.3 Categoria Differential Operator

A categoria **Differential Operator** é composta pelos operadores diferenciais de diversos problemas encontrados em engenharia. Para o problema poroelástico implementado duas classes denominadas de **Poroelasticity**, para o caso transiente e **PoroelasticityComplex**, para o caso dinâmico foram construídas. Estas classes possuem as responsabilidades de calcular as matrizes que serão utilizadas na integração numérica sobre o elemento geométrico. o tamanho das matrizes é determinado pelo tipo de análise e pelo tamanho do domínio (1D, 2D ou 3D).

Compor a lista de graus de liberdade para o caso poroelástico é uma outra responsabilidade das classes implementadas. O problema transiente apresenta todos os seus graus de liberdade reais. Para o problema dinâmico implementado houve a necessidade da criação de graus de liberdades complexos. A solução encontrada foi a de dobrar a ordem do sistema em graus de liberdades reais e imaginários.

Na Figura (5.5) é mostrada uma descrição da classe dos operadores diferenciais.

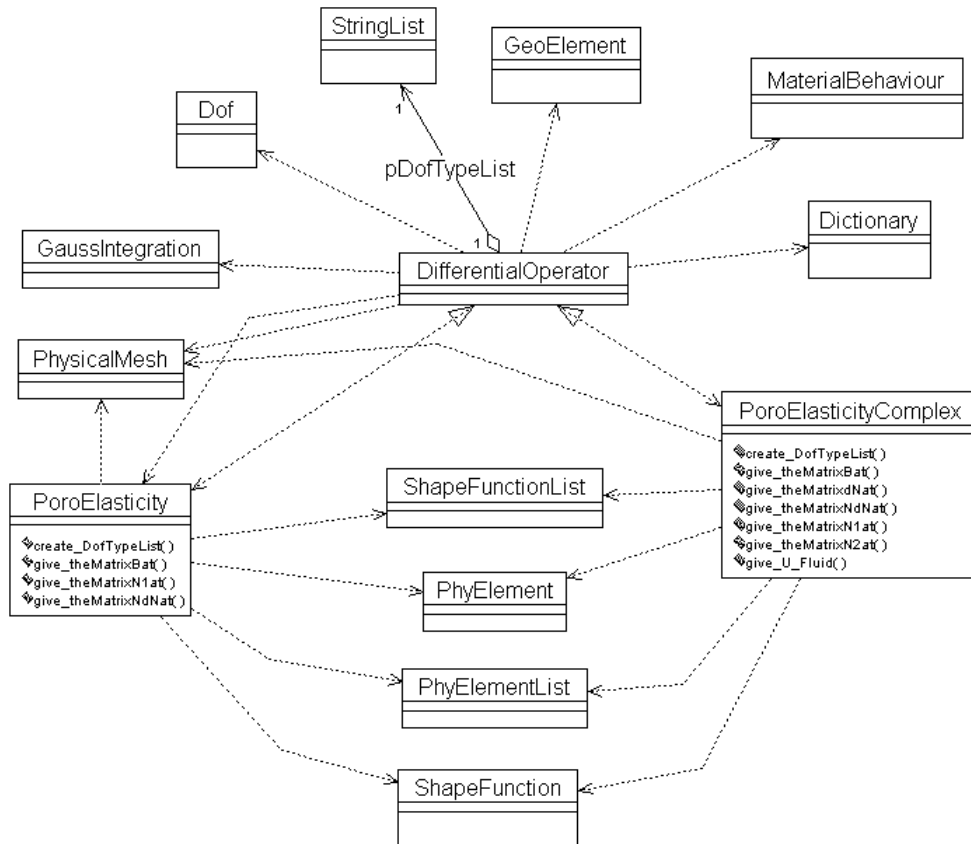


Figura 5.5: Operador Diferencial: PoroElasticity e PoroElasticityComplex

5.3.4 Categoria Material Behaviour

A Categoria Material é composta por classes que contem as propriedades dos materiais. Para o caso Poroelástico, foi abstraída a classe **Biot**, mostrado na Figura (5.6), que representa uma generalização de todos materiais poroelásticos com comportamento segundo as hipóteses descritas no ítem (3.2). Nesta classe é definida a lei constitutiva do problema, onde são repassados todos os coeficientes das matrizes de Elementos Finitos dos campos: fluido, estrutura e acoplamento. O método implementado nesta classe foi (*give-constitutiveMatrix()*), a qual possui a responsabilidade de calcular a matriz constitutiva do material ("theMatrixD") com tamanho segundo a dimensão do problema e do tipo de Operador Diferencial em estudo. Para o caso dinâmico esta matriz é uma função da frequência.

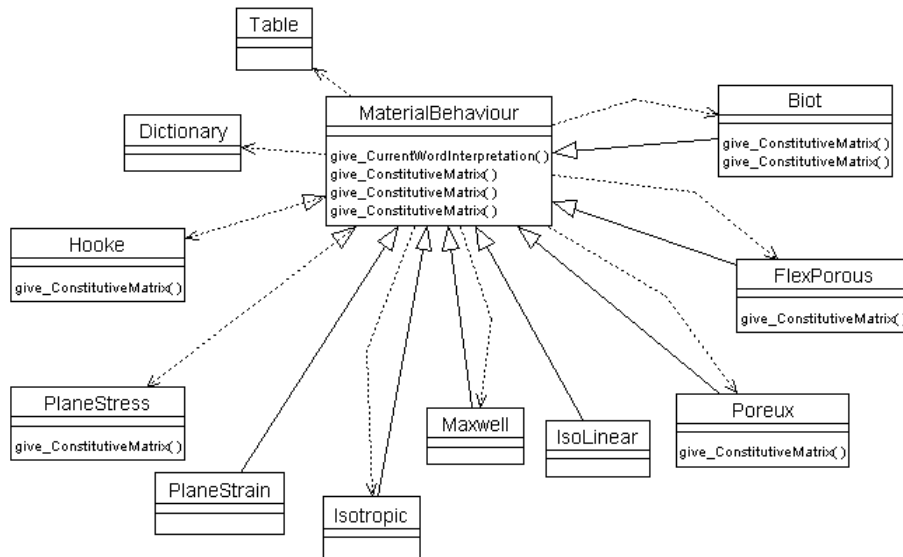


Figura 5.6: Classe Biot - material poroelástico

5.3.5 Categoria Elements

Esta categoria, para o tipo de implementação proposta, foi complementada com a adição das classes: **LinenPorophy**, **Tri3Porophy**, **Quad4Porophy** e **Cube8Porophy**.

Estas classes correspondem ao elementos físicos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais com a responsabilidade de devolver as matrizes de Massa, Rigidez e Amortecimento para qualquer tipo de problema seja ele transiente ou dinâmico.

As classes de elementos geométricos correspondentes são **Linengeo**, **Tri3geo**, **Quad4geo** e **Cube8geo**, que já se encontravam implementadas. Estas classes devem ser gerais para se conseguir os valores das matrizes em um ponto geométrico específico (malha geométrica) e fazer a integração numérica. Estas classes possuem a responsabilidade de devolver todas as características dos elementos geométricos propostos no arquivo de entrada de dados.

Em particular para o problema poroelástico, as matrizes elementares apresentam a característica de não-simetria, o que implica na modificação do armazenamento das classes das matrizes. Um estudo em paralelo está sendo feito com o intuito de melhorar o armazenamento e operações com tais matrizes (não simétricas) através de armazenamento espargo, com a construção futura da chamada classe **SparseMatrix**. A Figura (5.7) apresenta o

diagrama de classes dos elementos físicos e geométricos.

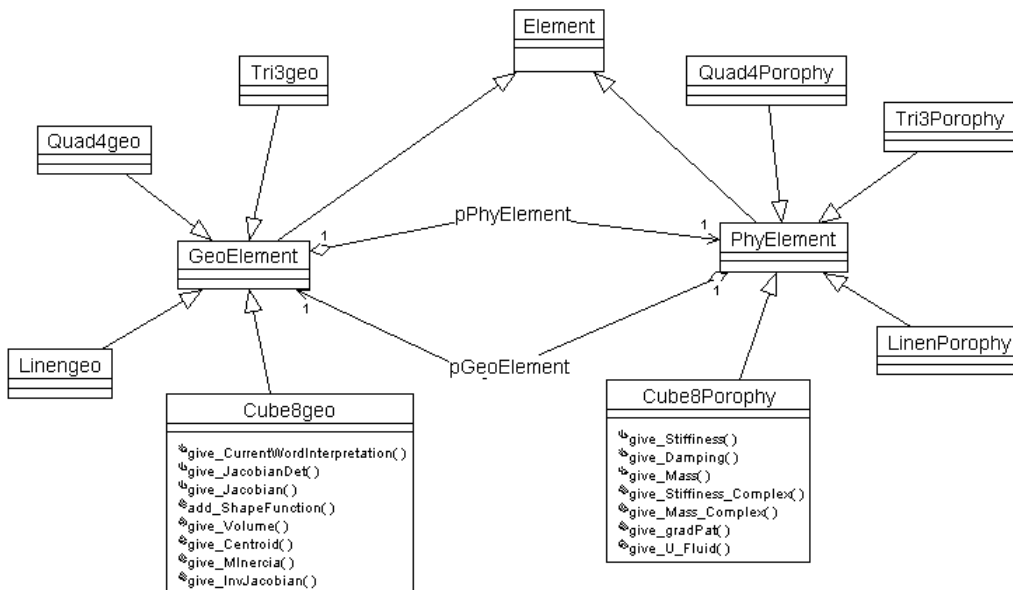


Figura 5.7: Classes de Elementos Físico e Geométricos lineares

5.3.6 Categoria Equation System

Esta categoria mostra o conjunto de métodos de resoluções do sistema linear de equações prescritos para os problemas Transiente e Dinâmico.

Na Figura (5.8), nota-se a relação de herança entre as classes **Euler**, **Crank-Nicolson** e **Galerkin** com a classe **Parabolic**. A evolução temporal do vetor de resultados no caso transiente é dado segundo um dos métodos parabólicos implementados. Para o caso dinâmico o problema é variante com a frequência porém ainda linear, o que provoca dificuldades na obtenção da resposta do problema de autovetores e autovalores. Optou-se portanto em não se fazer redução modal alguma e determinar para cada sistema de equação produzido a cada passo de frequência a resposta dinâmica do sistema (modo operacional). O método de resolução do sistema linear de equações para o caso dinâmico está presente na classe **Gauss-Freq**.

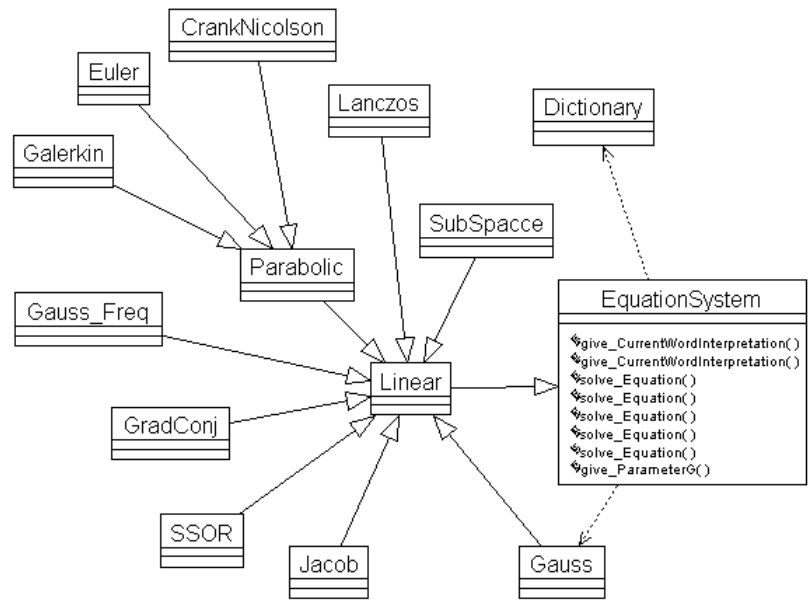


Figura 5.8: Sistema de Equações e Solvers lineares dos casos Transiente e Dinâmico

Capítulo 6

Resultados e Discussão

Neste capítulo, uma metodologia para validação do modelo numérico implementado é apresentada, baseando-se em resultados encontrados na literatura, bem como soluções analíticas para problemas simples. Em seguida, são mostradas as possibilidades de uso desta ferramenta computacional em problemas propostos, avaliando-se a influência de parâmetros numéricos e físicos dos modelos.

6.1 Validações do programa implementado

Apresentam-se a seguir, problemas transientes e dinâmicos da poroelasticidade acoplada.

6.1.1 Coluna Poroelástica

O problema da coluna poroelástica é um caso bastante estudado na poroelasticidade clássica.

Inicialmente proposto e resolvido por Biot em (Biot, 1941a), o problema consiste em uma coluna poroelástica sujeito a uma tensão normal de compressão P e pressão nula em todos os poros. Para uma nova condição inicial, Biot propôs um estudo da coluna sob condições de deslocamento normal nulo e vazão normal nula (Biot, 1941b). Estes modelos são bastante utilizados em construções de fundações e consolidação de solos.

Para validar o procedimento transiente implementado, um domínio unidimensional é proposto e são consideradas duas condições iniciais distintas, mostradas na Figura (6.1).

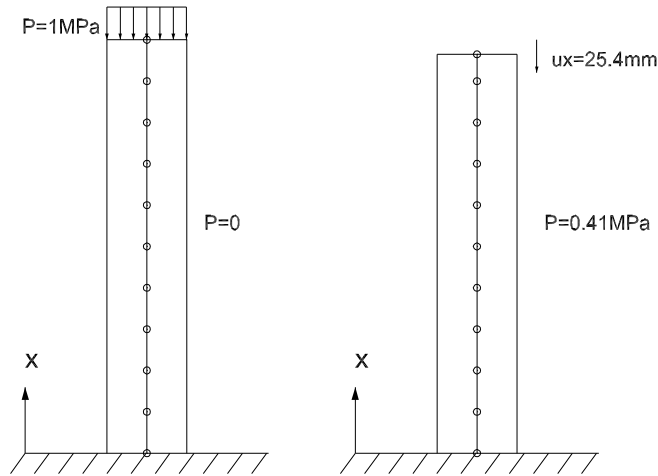


Figura 6.1: Condições Iniciais para as colunas poroelásticas - pressão prescrita e deslocamento prescrito

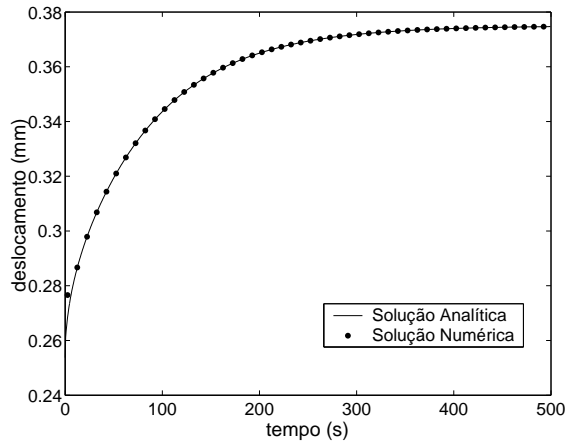
Na Tabela (6.1), mostram-se os parâmetros do material poroelástico utilizado:

Tabela 6.1: Propriedades do material poroelástico utilizado nas simulações do problema transiente

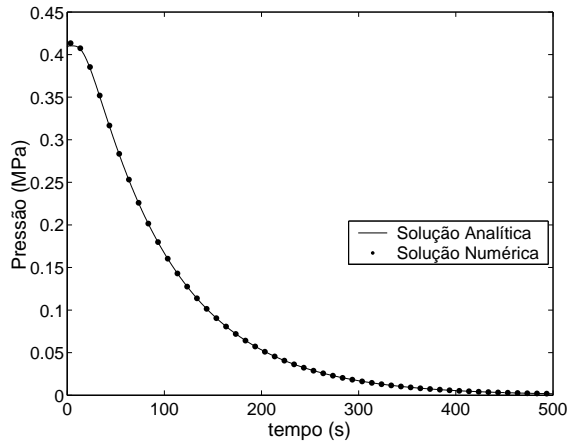
	N(GPa)	$\kappa(m^2s/Pa)$	B	ν_b	ν_u
rocha	6000	$2 \cdot 10^{-5}$	0.62	0.20	0.33

Em ambos casos de condições iniciais, a coluna está engastada em sua base e possui um comprimento de 6 metros. Primeiramente, é analisado o caso do valor de pressão imposto sobre a extremidade da coluna, o qual é constante no tempo. A solução analítica para este problema se encontra no Anexo B.

Para uma malha de 9 elementos poroelásticos unidimensionais e lineares, os resultados de resposta temporal para o deslocamento na extremidade e para a pressão na base da coluna são apresentados na Figura (6.2).



Deslocamento na extremidade da coluna

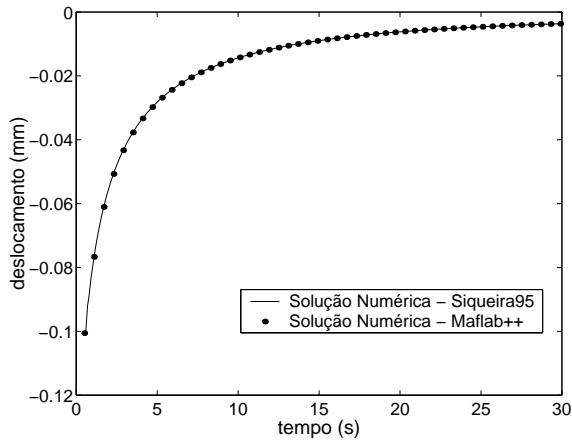


Pressão na base da coluna

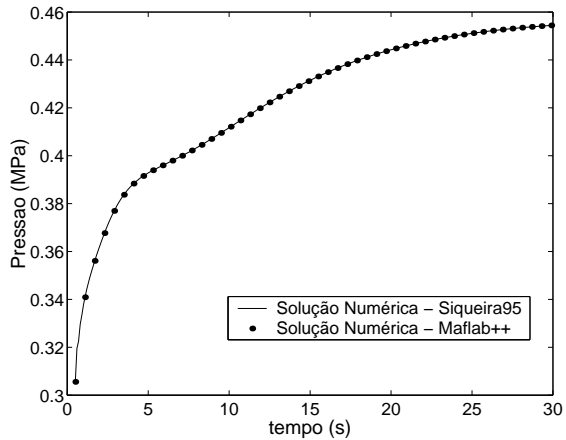
Figura 6.2: Respostas temporais de deslocamento e pressão para a coluna poroelástica - caso da pressão imposta

Uma boa concordância entre os resultados foi encontrada quando comparada com a resposta analítica do sistema. Para uma malha simples obteve-se um rápido processamento dos resultados.

Para a segunda condição de carregamento, é feita uma análise da resposta transiente que consiste em se deformar a extremidade da coluna poroelástica de $1pol$ ($25.4mm$), deslocamento este que proporciona um equilíbrio de pressões em todos os pontos da coluna de um valor de $0.416MPa$, no instante de tempo inicial $t = 0$. Na Figura (6.3) são mostradas as respostas temporais do sistema.



Deslocamento na extremidade da coluna



Pressão na base da coluna

Figura 6.3: Respostas temporais de deslocamento e pressão para a coluna poroelástica - caso de deslocamento imposto

Novamente, uma boa concordância dos resultados foi encontrada, porém desta vez comparados com resultados numéricos encontrados em (Siqueira, 1995). A malha utilizada neste caso foi de 7 elementos poroelásticos unidimensionais e lineares.

Analisando os resultados de deslocamento e pressão de todos os nós da malha em função do tempo, tem-se a superposição das respostas no domínio poroelástico proposto, para os dois tipos de conjuntos de condições de contorno e iniciais, conforme mostrado nas Figuras (6.4) e (6.5).

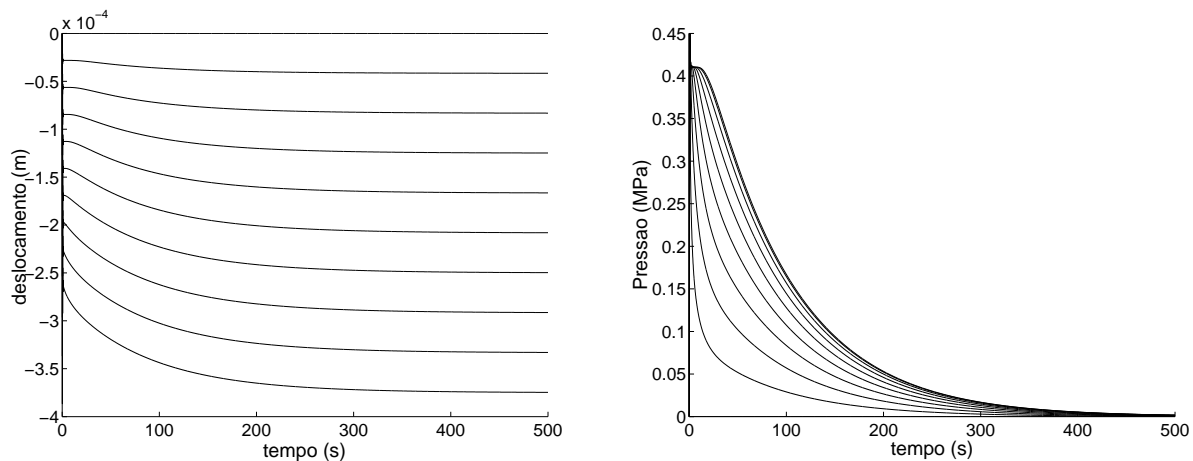


Figura 6.4: Resposta temporal para o problema sob as condições de contorno de pressão imposta

Nota-se que para todos os nós, as variáveis de deslocamento e pressão tendem a se estabilizar ao longo do tempo para os dois conjuntos de condições de contorno analisados.

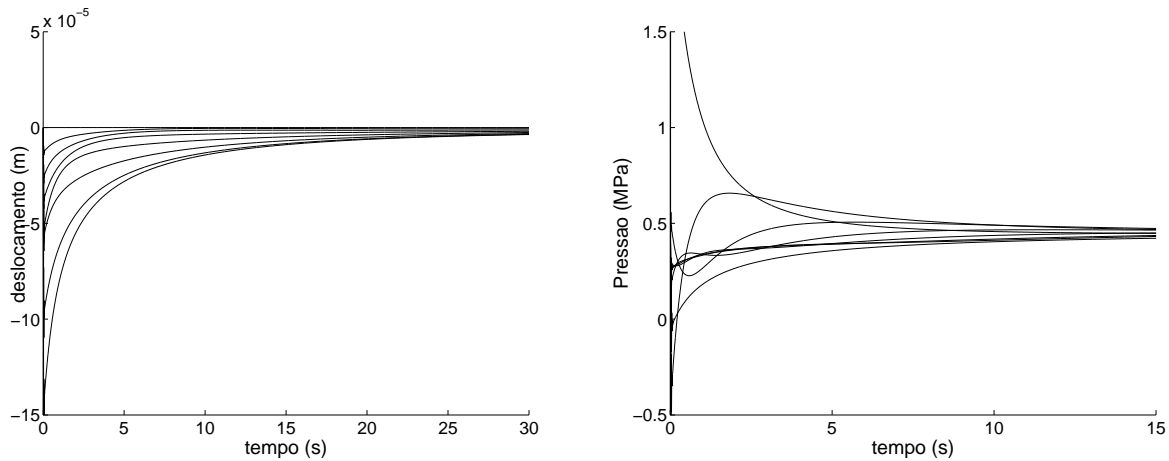


Figura 6.5: Resposta temporal para o problema sob as condições de contorno de deslocamento imposto

Os testes apresentados validam o procedimento transiente, o qual não será mais explorado neste trabalho.

6.1.2 Camadas de materiais absorvedores

Para validar o problema dinâmico, foram analisados inicialmente os problemas de absorção acústica por camadas de materiais poroelásticos. As características do sistema como impedância acústica superficial, absorção acústica e, ainda, as medidas globais de vibroacústica são aqui determinadas numericamente via simulação computacional utilizando-se do programa implementado no Meflab++.

Dois casos foram estudados, sendo prescritos, em ambas as situações, os valores de impedância acústica na superfície de uma camada de isolamento acústica. As dimensões laterais das camadas podem ser consideradas grandes em relação à direção de propagação das ondas acústicas sobre o material, o que simplifica o problema a uma dimensão (1D). A excitação acústica consiste em uma onda de pressão de módulo unitário sob uma das extremidades sendo a outra limitada por uma parede rígida. A descrição física dos problemas é mostrada na Figura (6.6).

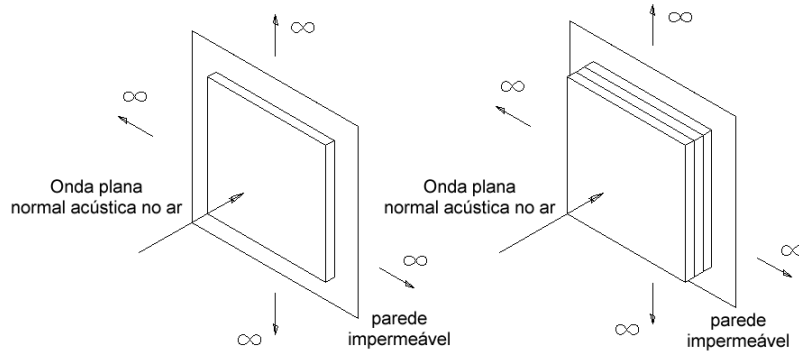


Figura 6.6: Descrição física do problema dinâmico poroelástico - camadas de materiais poroelásticos

Os parâmetros dos materiais utilizados nas simulações numéricas para a validação do problema dinâmico são descritos na Tabela (6.2):

Tabela 6.2: Propriedades do material poroelástico utilizado nas simulações do problema dinâmico

	α_∞	$\rho_1(kg/m^3)$	$\sigma(Ns/m^4)$	h	$N(kPa)$	ν_b	$\Lambda(m)$	$\Lambda'(m)$	Esp.(cm)
Lã de Vidro	1.06	130	40000	0.94	2200(1+i0.1)	0	$0.56 \cdot 10^{-4}$	$1.10 \cdot 10^{-4}$	10
Manta	1.18	41	34000	0.98	110(1+i0.015)	0.3	$0.60 \cdot 10^{-4}$	$0.87 \cdot 10^{-4}$	0.4
Tela	2.56	125	$320 \cdot 10^4$	0.80	1000(1+i0.1)	0.3	$0.06 \cdot 10^{-4}$	$0.24 \cdot 10^{-4}$	0.08
Espuma A	2.52	31	87000	0.97	55(1+i0.055)	0.3	$0.37 \cdot 10^{-4}$	$1.19 \cdot 10^{-4}$	0.5
Espuma B	1.98	16	65000	0.99	18(1+i0.1)	0.3	$0.37 \cdot 10^{-4}$	$1.21 \cdot 10^{-4}$	1.6

O primeiro caso consiste na análise de uma camada simples com 10cm de espessura de material poroelástico Lã de Vidro, descrito na Tabela (6.2). O segundo caso a ser analisado foi montado com quatro materiais distintos com diferentes espessuras. Da face limitada à face sob excitação acústica, os materiais presentes no problema de multi-camadas são: Espuma B, Espuma A, uma tela, uma manta, cujas espessuras são mostradas na última coluna da Tabela (6.2) e somadas correspondem a 2,58 cm de espessura.

A Impedância acústica como descrita no ítem (3.8.1) é agora modificada na composição da velocidade já que esta é função das velocidades das duas fases presentes no material poroelástico, o que permite escrever:

$$Z_n = \frac{p}{i\omega((1-h)u^n + hU^n)} \quad (6.1)$$

onde u^n e U^n são os deslocamentos das fases sólida e fluida, respectivamente, normais à superfície analisada.

Os resultados de impedância acústica (parte real e imaginária) para o caso da camada simples de material poroelástico são comparados na Figura (6.7) aos resultados obtidos por (Atalla et al., 1998):

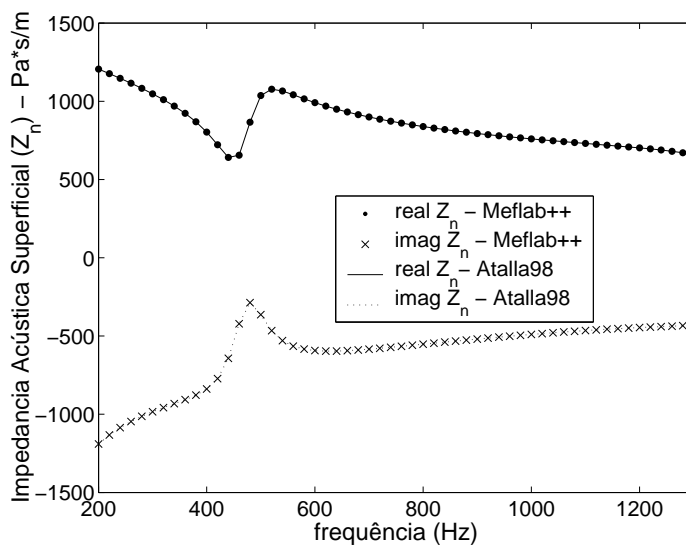


Figura 6.7: Impedância acústica superficial (real e imaginário) - camada simples de material poroelástico - lã de vidro com 10 cm de espessura)

A malha utilizada para este caso foi de 15 elementos poroelásticos unidimensionais e lineares. O tempo de processamento das matrizes, seguido do processamento dos cálculos das respostas dinâmicas (modos operacionais) é relativamente pequeno, aproximadamente 5s em um processador *Pentium*[®] 4.

Uma boa concordância entre os resultados numéricos obtidos pelo programa implementado Meflab++ foi encontrada quando comparados com os encontrados na referência do autor (Atalla et al., 1998).

Os resultados de impedância acústica (parte real e imaginária) para o caso de multi-camadas de materiais poroelásticos são comparados na Figura (6.8), aos resultados numéricos obtidos por (Atalla et al., 1998):

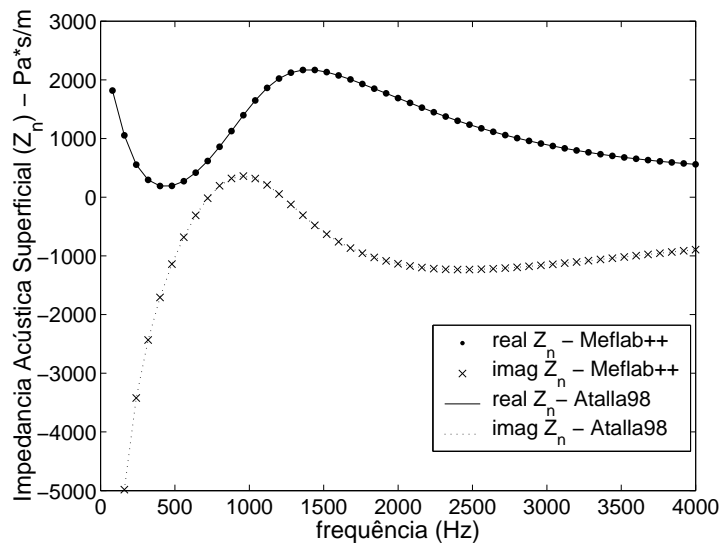


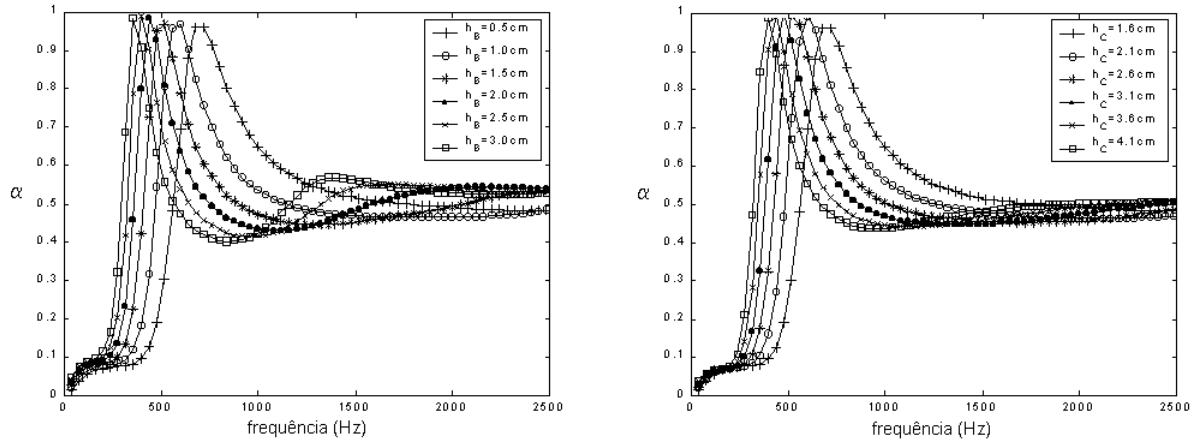
Figura 6.8: Impedância Acústica Superficial (real e imaginário) - multi-camadas de materiais poroelásticos

A malha utilizada para este caso foi de 5 elementos poroelásticos unidimensionais e lineares para cada camada de material poroelástico. Neste caso, o tempo de processamento das matrizes e o tempo de processamento dos cálculos das respostas dinâmicas (modos operacionais) também foram relativamente pequenos.

Mais uma vez, uma boa concordância entre os resultados numéricos obtidos pelo programa implementado Meflab++ foi encontrada, quando comparadas aos resultados obtidos com os da referência (Atalla et al., 1998).

Ainda, para o problema de multi-camadas de materiais poroelásticos, um estudo sobre a influência da espessura nos materiais absorvedores sobre o valor da absorção acústica do sistema de isolamento foi realizado.

As espessuras das espumas A ou B foram variadas, mas se mantendo os demais parâmetros inalterados. Na Figura (6.9) mostram-se os resultados obtidos para os dois estudos.



Influência da espessura da "Espuma A" sobre a absorção acústica. Influência da espessura da "Espuma B" sobre a absorção acústica.

Figura 6.9: Absorção acústica do sistema de insolação de multi-camadas

Os valores de frequência para os quais ocorre a máxima absorção pelo sistema tendem a diminuir a medida que são aumentados os valores das espessuras das espumas A e B. Isto é justificado pela diminuição de massa ser menos significativa, que a perda de rigidez, e vice-versa, proporcionando variações nos valores das frequências naturais do sistema.

Estes dados constituem resultados importantes e de grande utilidade no projeto de um sistema absorvedor composto por várias camadas de materiais poroelásticos. Ábacos podem ser construídos facilmente com as curvas de absorção a partir das variações dimensionais do sistema de isolamento proposto.

6.1.3 Medidas de Vibroacústica em Materiais Poroelásticos

Uma outra medida de validação dos resultados numéricos obtidos pelo programa Meflab++ é realizada com base em medidas globais de vibroacústica: a média quadrática da velocidade e a média quadrática de pressão.

Para os materiais descritos na Tabela (6.3), uma montagem semelhante à da camada simples anterior, Figura (6.6), porém analisou-se a resposta global dinâmica a dois tipos de excitação distintos: a primeira é mecânica que consiste na imposição de um deslocamento com amplitude de $10^{-8}m$ na extremidade livre da estrutura e uma segunda do tipo acústica que consiste na imposição de uma onda de pressão de amplitude de $1Pa$ na extremidade

livre.

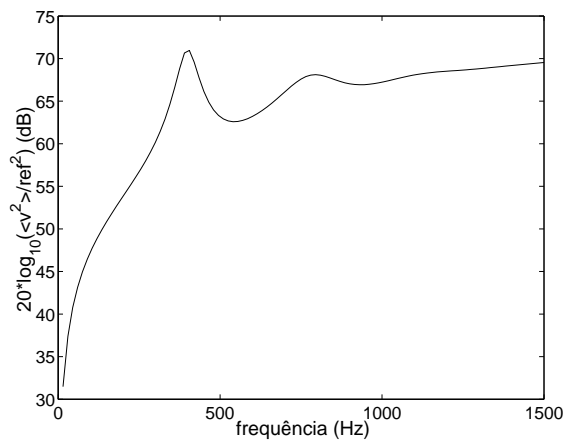
Tabela 6.3: Propriedades do material poroelástico utilizado nas simulações do problema dinâmico

	α_∞	$\rho_1(kg/m^3)$	$\sigma(Ns/m^4)$	h	$N(kPa)$	ν_b	$\Lambda(m)$	$\Lambda'(m)$	Esp.(cm)
Espuma C	2.52	31	87000	0.97	55(1+i0.055)	0.3	$37 \cdot 10^{-6}$	$119 \cdot 10^{-6}$	12
Espuma D	1.06	130	40000	0.94	2200(1+i0.1)	0	$56 \cdot 10^{-6}$	$110 \cdot 10^{-6}$	12
Espuma E	1.4	30	25000	0.95	21(1+i0.05)	0	$93.2 \cdot 10^{-6}$	$93.2 \cdot 10^{-6}$	12

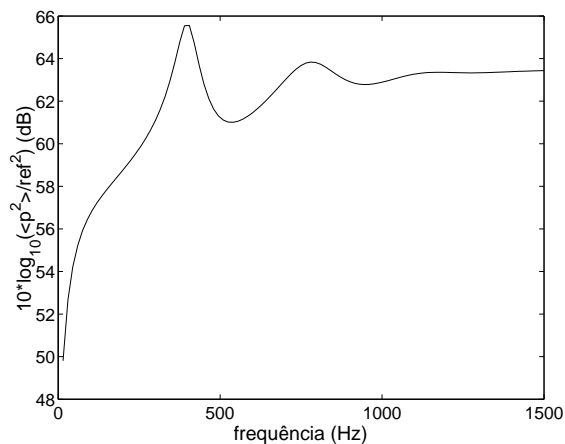
Em todas as análises numéricas destes casos foi utilizada uma malha de 24 elementos finitos unidimensionais e lineares. Constituindo um total de 50 graus de liberdade (2 graus por nó) para a malha completa.

Para os resultados de velocidade média quadrática $\langle v^2 \rangle$ a velocidade de referência utilizada foi de $v_{ref} = 5 \cdot 10^{-8} m/s$ e para a pressão média quadrática $\langle p^2 \rangle$ a pressão de referência foi de $p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} Pa$.

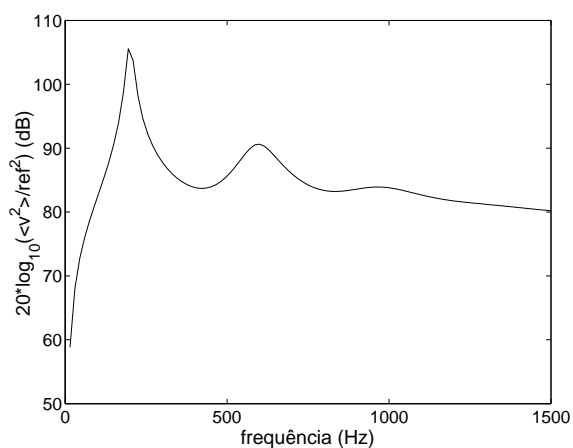
Usando-se o material Espuma C, descrito na Tabela (6.3), foram obtidos os resultados numéricos mostrados na Figura (6.10):



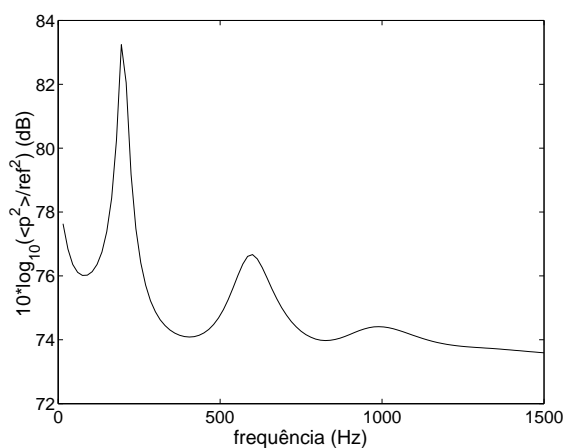
Velocidade média quadrática ($\langle v^2 \rangle$) - excitação mecânica



Pressão média quadrática ($\langle p^2 \rangle$) - excitação mecânica



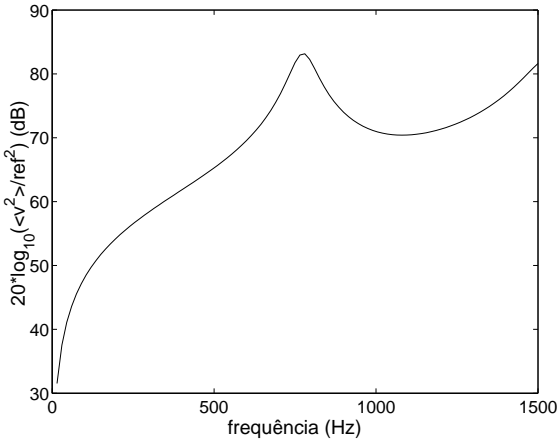
Velocidade média quadrática ($\langle v^2 \rangle$) - excitação acústica



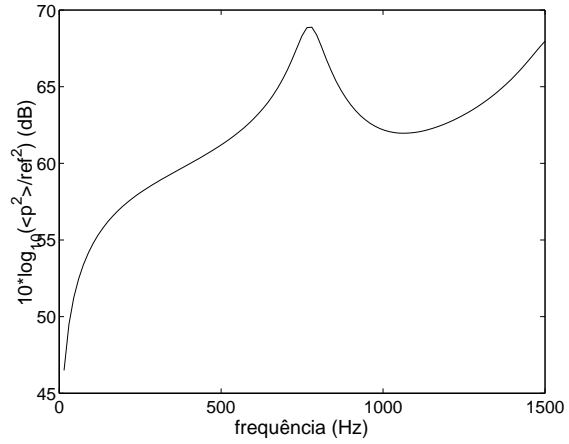
Pressão média quadrática ($\langle p^2 \rangle$) - excitação acústica

Figura 6.10: Respostas de Vibroacústica para o material poroelástico Espuma C

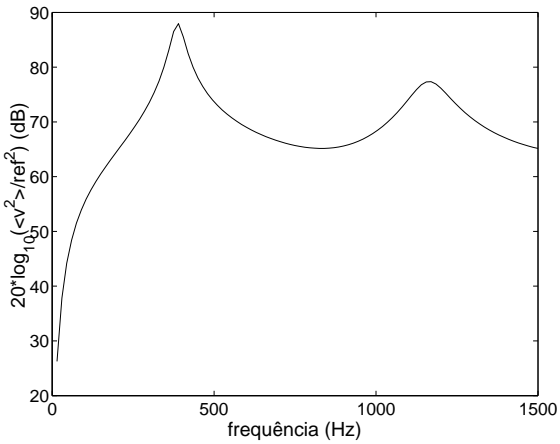
Da mesma forma, usando-se o material Espuma D, descrito na Tabela (6.3), os resultados numéricos obtidos são mostrados na Figura (6.11):



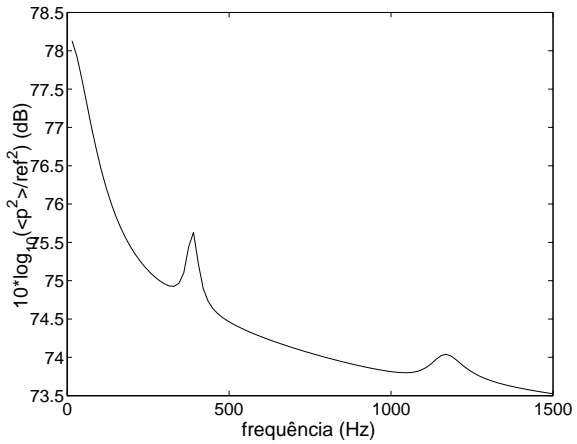
Velocidade média quadrática ($\langle v^2 \rangle$) - excitação mecânica



Pressão média quadrática ($\langle p^2 \rangle$) - excitação mecânica



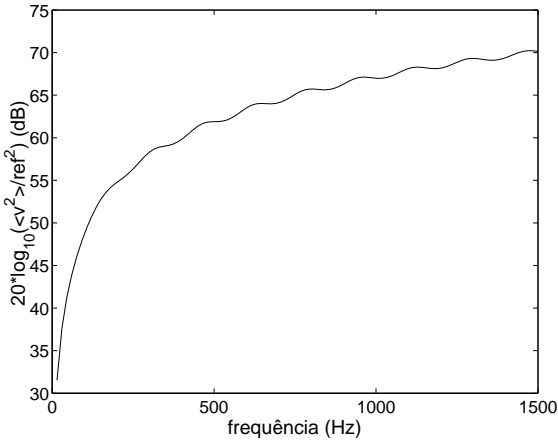
Velocidade média quadrática ($\langle v^2 \rangle$) - excitação acústica



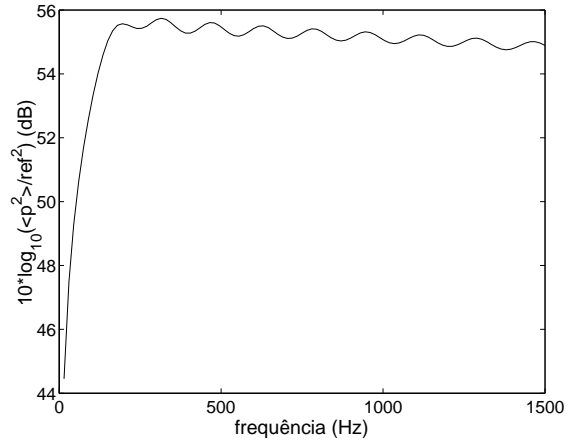
Pressão média quadrática ($\langle p^2 \rangle$) - excitação acústica

Figura 6.11: Respostas de Vibroacústica para o material poroelástico Espuma D

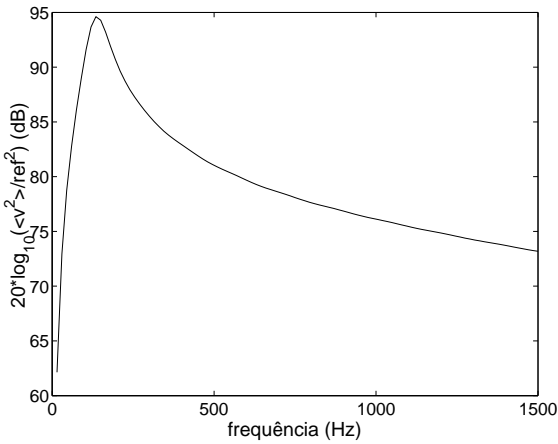
E por último, para o material Espuma E, também descrito na Tabela (6.3), obteve-se os resultados numéricos apresentados na Figura (6.12):



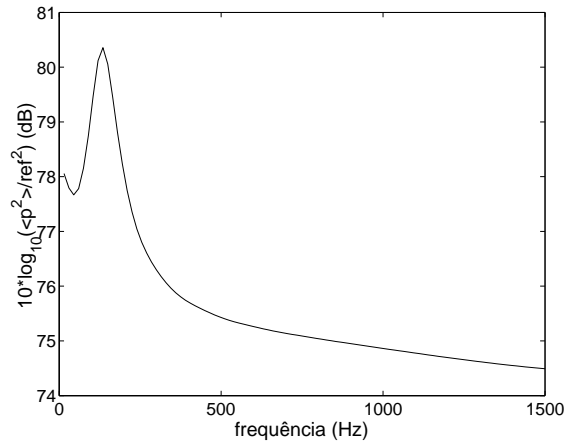
Velocidade média quadrática ($\langle v^2 \rangle$) - excitação mecânica



Pressão média quadrática ($\langle p^2 \rangle$) - excitação mecânica



Velocidade média quadrática ($\langle v^2 \rangle$) - excitação acústica



Pressão média quadrática ($\langle p^2 \rangle$) - excitação acústica

Figura 6.12: Respostas de Vibroacústica para o material poroelástico Espuma E

Uma boa concordância dos resultados numéricos obtidos pelo programa implementado Meflab++ foi encontrada quando comparados com os encontrados na referência do autor (Dazel et al., 2002), onde o autor propõe as mesmas análises numéricas, porém com algumas linearizações no comportamento do material poroelástico com a frequência e reduções modais que no presente trabalho não foram exploradas.

6.1.4 Tubo de Impedância - acoplamento acústico-poroelástico

Para validar o acoplamento acústico-poroelástico, um estudo de um tubo de impedância é efetuado utilizando-se do programa poroelástico implementado no Meflab++.

Um tubo com paredes rígidas e com a presença de um material poroelástico com uma determinada espessura em uma de suas extremidades é excitado acusticamente através do movimento harmônico de um pistão rígido na outra extremidade, conforme montagem da Figura (6.13). A amplitude da velocidade do pistão é de 1m/s. A descrição física deste problema pode ser vista na Figura (6.13):

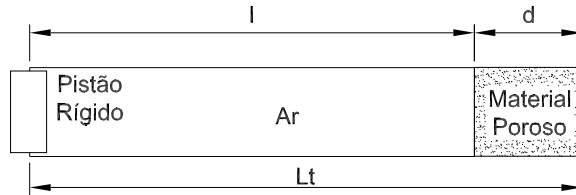


Figura 6.13: Tubo de Impedância com presença de um absorvedor

No trabalho de (Craggs, 1979), uma análise de um tubo de impedância é proposto. Um modelo unidimensional para um material poroso rígido presente é feito, não havendo deformações elásticas no material absorvedor. Tal análise é válida pois procede de uma solução analítica conhecida, a solução exata de uma impedância sobre uma coluna de material absorvedor baseada no modelo de Rayleigh (Craggs, 1978). Este modelo se encontra desenvolvido no Anexo C.

A solução analítica proposta em (Craggs, 1978), parte de:

$$R_a = \Re\{Z_0 \coth(i\gamma d)\} \quad (6.2)$$

$$X_a = \Im\{Z_0 \coth(i\gamma d)\} \quad (6.3)$$

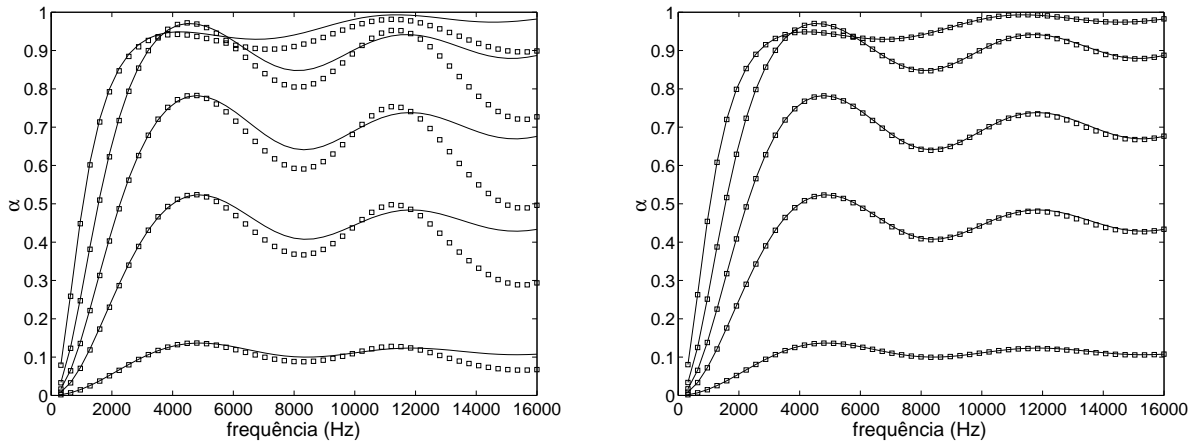
onde R_a e X_a são as partes reativa e resistiva da impedância superficial prescrita na superfície do material absorvedor, respectivamente. Os outros valores são:

$$Z_0 = \frac{\rho_0 c_0}{h^{1/2}} \left(\alpha_\infty - i \frac{\sigma}{\rho_0 \omega} \right)^{1/2} \quad (6.4)$$

$$\gamma = \frac{\omega}{c_0} h^{1/2} \left(\alpha_\infty - i \frac{\sigma}{\rho_0 \omega} \right)^{1/2} \quad (6.5)$$

O problema proposto para validar os resultados de acoplamento ar-poros consiste no uso de um tubo com comprimento total de $L_t = 75mm$, com um material absorvedor de $d = 25mm$. As propriedades do material poroso, pertinentes a esta análise, são a tortuosidade e a porosidade, possuindo valores unitários.

Um total de dez simulações numéricas são propostas e comparadas com os resultados analíticos, onde duas malhas de elementos unidimensionais e lineares são usadas para analisar-se a variação da absorção acústica prescrita na superfície do material absorvedor com a frequência sob diversos valores do parâmetro fluxo resistivo (σ).



Malha de Elementos - 5 acústicos + 5 porosos Malha de Elementos - 25 acústicos + 50 porosos

Figura 6.14: Absorção acústica do absorvedor rígido em um tubo de impedância

As curvas em linhas cheias representam a solução analítica para uma variação de σ nos valores de 1000, 5000, 10000, 20000 e 50000 Rayls/m, partindo-se da curva inferior para a superior, descritos na Figura (6.14).

Nota-se que para uma malha grosseira (10 elementos finitos) os resultados obtidos em altas frequências possuem um erro absoluto significativo. Com o refinamento da malha (75

elementos finitos) uma ótima prescrição dos resultados mesmo em altos valores de frequência foram encontrados.

Uma outra análise de um tubo de impedância é encontrada em (Kang e Bolton, 1995). A proposta desta análise é a substituição do material absorvedor rígido por um material absorvedor poroelástico com a presença de deformações elásticas e acoplamento fluido-estrutura (ar/poroelástico).

A malha descrita na Figura (6.15) foi utilizada na simulação do programa Meflab++, sendo agora, um problema bidimensional.

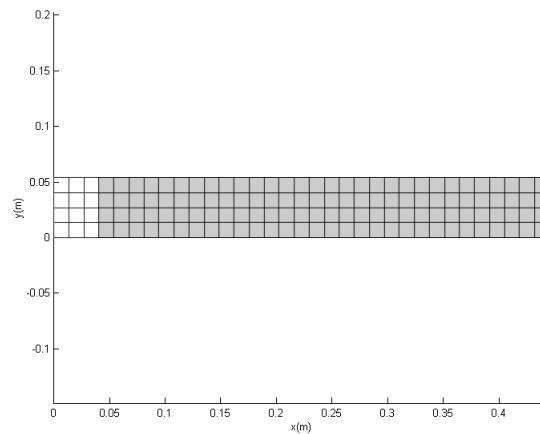


Figura 6.15: Malha de Elementos Finitos - 12 elementos acústicos e 120 elementos poroelásticos

O comprimento total do tubo é de $L_t = 44,55cm$ e do material absorvedor poroelástico é de $d = 40.5cm$. O material poroelástico utilizado para esta simulação tem seus parâmetros descritos na Tabela (6.4):

Tabela 6.4: Propriedades do material poroelástico utilizado nas simulações do tubo de impedância

	α_∞	$\rho_1(kg/m^3)$	$\sigma(Ns/m^4)$	h	$N(kPa)$	ν_b	$\Lambda(m)$	$\Lambda'(m)$
Espuma F	7.8	30	25000	0.90	28.6(1+i0.27)	0.4	$226 \cdot 10^{-6}$	$226 \cdot 10^{-6}$

Os resultados de absorção acústica também são prescritos em (Kang e Bolton, 1995), onde a solução analítica para este problema é traçada e comparada com diversas malhas.

No presente trabalho, somente a malha bidimensional com quadriláteros lineares descrita na Figura (6.15) foi simulada. Obtém-se bons resultados em comparação com o resultado analítico, conforme pode ser visto no gráfico da absorção sonora mostrado na Figura (6.16).

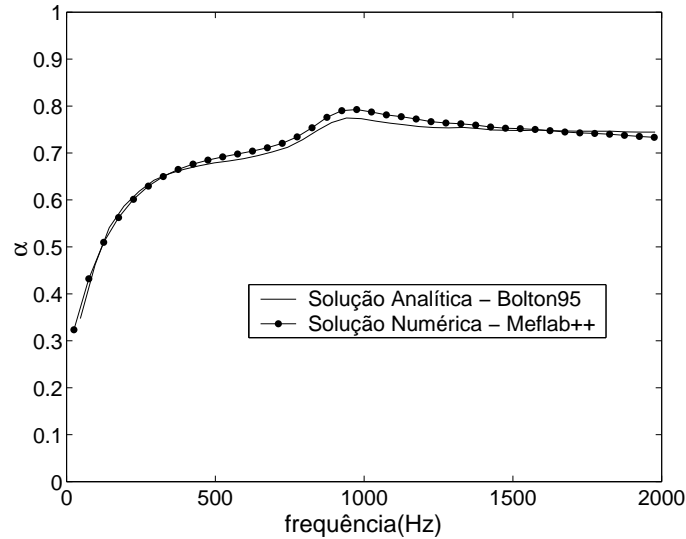


Figura 6.16: Absorção acústica do absorvedor flexível em um tubo de impedância

A convergência dos resultados alcançada foi de forma monotônica, sendo tal fato constatado a partir da análise de outras malhas menos refinadas que a apresentada na Figura (6.15).

6.2 Estudos de Casos - Aplicações

Uma série de problemas extras é aqui apresentada com o propósito de mostrar as várias possibilidades de uso dos modelos de vibroacústica desenvolvidos. O efeito do ângulo de cunha de um material absorvedor poroelástico em um tubo de impedância sobre a absorção acústica do sistemas é analisado. A absorção acústica e o efeito que a presença de um material poroelástico proporciona nas respostas em frequência de pressão em uma cavidade acústica tridimensional e a simulação da presença de bancos feitos de um material absorvedor em um modelo simplificado de um habitáculo veicular são propostos.

6.2.1 Efeito do ângulo em um material absorvedor sobre a absorção acústica

Seguidas análises de um tubo de impedância com a presença de um material poroelástico em forma de cunha foram simuladas numericamente. Na Figura (6.17), a descrição do problema bem como a definição dos seus parâmetros dimensionais são apresentados:

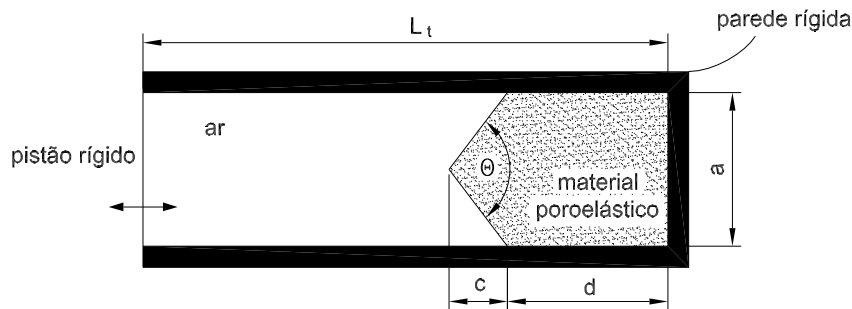
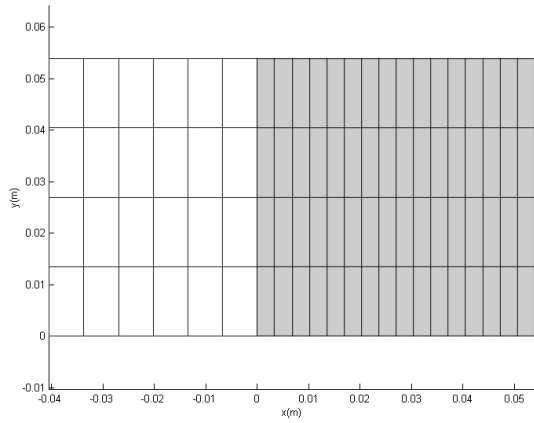


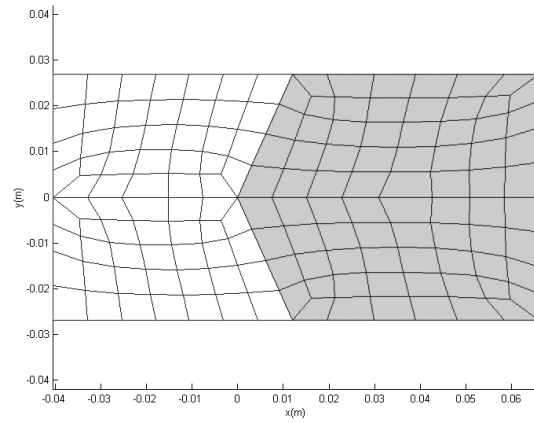
Figura 6.17: Descrição Física do problema

À exemplo do problema do ítem (6.1.4), a natureza de excitação do problema é acústica e feita segundo a imposição da impedância de um pistão rígido em movimento harmônico sobre uma extremidade do tubo de impedância. A amplitude da velocidade do pistão é de 1m/s.

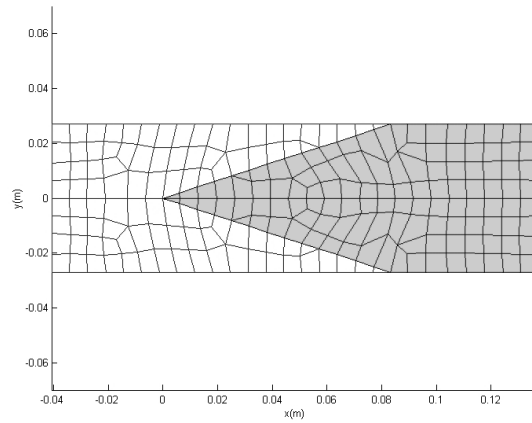
Três malhas distintas, cada uma com um ângulo de cunha θ , foram montadas e simuladas utilizando o programa Meflab++ para resolver o problema poroelástico. As configurações adotadas são mostradas na Figura (6.18).



Ângulo de 180^0



Ângulo de 132^0



Ângulo de 36^0

Figura 6.18: Malhas de Elementos Finitos para a análise do ângulo em um material poroelástico

O comprimento total do tubo de impedância é variável e sendo acrescido do valor c descrito na Figura (6.17), valor este determinado em função do ângulo de cunha escolhido.

O material poroelástico utilizado nestas simulações é o mesmo descrito na Tabela (6.4). Na Figura (6.19) mostram-se os resultados para a absorção acústica para os três ângulos analisados.

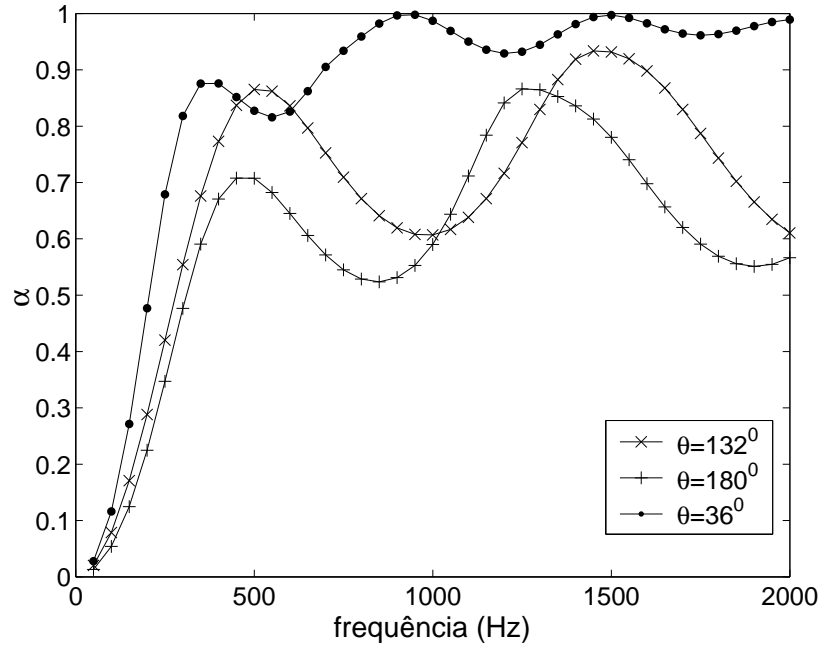
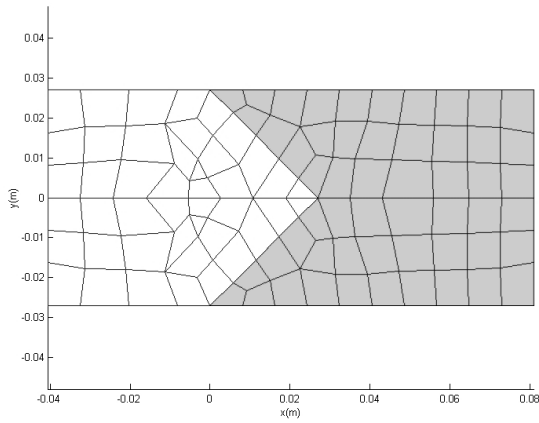


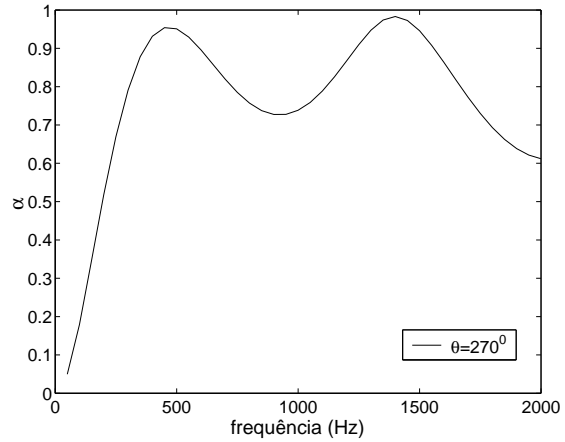
Figura 6.19: Absorção acústica em função da frequência - análise do ângulo do material poroelástico

Nota-se que para os valores numéricos obtidos para o ângulo $\theta = 132^\circ$ não se obteve um ganho significativo de absorção acústica em relação aos valores para o ângulo $\theta = 180^\circ$, porém na maioria das faixas de frequência analisadas, nota-se uma ganho de absorção. Para os resultados obtidos com o ângulo $\theta = 36^\circ$ o efeito do ângulo agudo se fez notar, elevando os valores de absorção acústica para valores próximos de 1 a partir de 500Hz.

Outras análises do efeito do ângulo do material absorvedor sobre a absorção acústica foram feitas. Duas malhas com características de ângulos negativos foram propostas. As descrições físicas para estas novas simulações são apresentadas nas Figuras (6.20) e (6.21), bem como os resultados obtidos em termos das curvas de absorção do sistema.

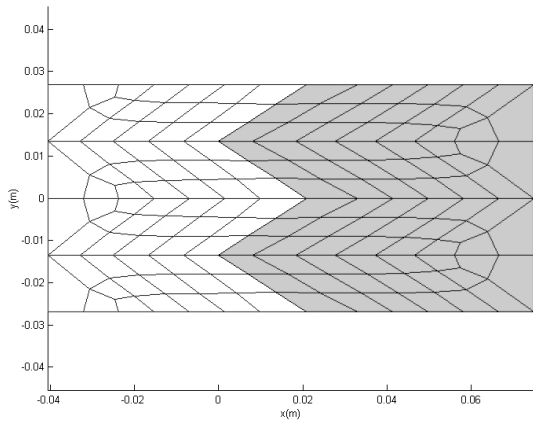


Malha de Elementos Finitos

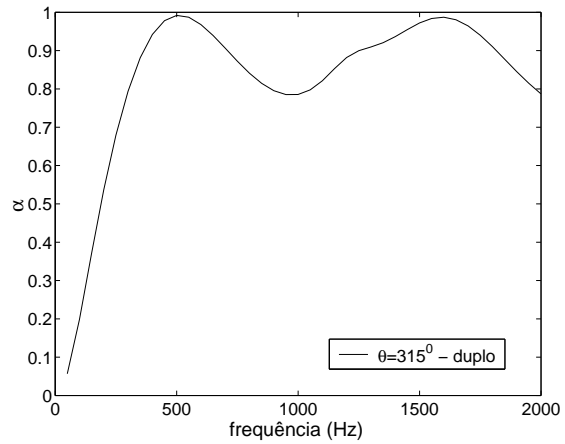


Absorção acústica do sistema em função da frequência

Figura 6.20: Análise da absorção para um ângulo de $\theta = 270^{\circ}$



Malha de Elementos Finitos



Absorção acústica do sistema em função da frequência

Figura 6.21: Análise da absorção para um ângulo de $\theta = 315^{\circ}$ – *duplo*

Nestas simulações foram observados resultados e curvas de absorção acústica semelhantes às obtidas com ângulos obtusos. Houve um pequeno aumento dos valores de absorção para algumas faixas porém nota-se uma tendência semelhante para as duas últimas configurações.

Este exemplo permite mostrar a efetividade das simulações criadas para o auxílio ao projeto de sistemas de absorção sonora em aplicações residenciais, por exemplo: salas e auditórios, assim como no projeto de salas anecoicas.

6.2.2 Análise de uma cavidade acústica tridimensional com material absorvedor

A análise da presença de um material absorvedor em uma cavidade acústica mostra um interessante resultado da redução de energia de pressão do sistema devido à absorção acústica pelo material poroelástico.

Usando-se um exemplo proposto por (Panneton e Atalla, 1997a), uma cavidade com as características físicas descritas na Figura (6.22) bem como os principais dados da configuração proposta que será analisada.

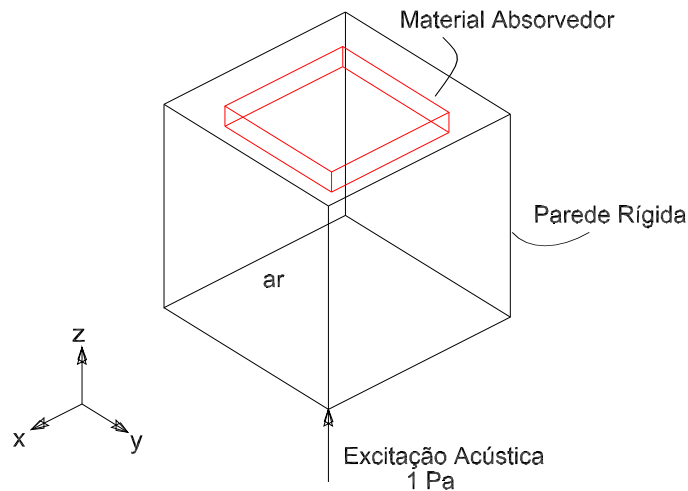


Figura 6.22: Cavidade acústica 3D com presença de um material poroelástico

A cavidade acústica é um domínio tridimensional cúbico de arestas de 1m. Uma camada de absorvedor com dimensões de $60 \times 60 \text{ cm}^2$ e espessura de 7.62cm é posicionada de forma simétrica, no lado oposto ao da excitação acústica. Os parâmetros físicos deste material absorvedor poroelástico estão descritos na Tabela (6.4).

A malha tridimensional, descrita na Figura (6.23), possui a presença de 175 elementos finitos lineares e foi montada para a simulação da pressão média quadrática $\langle p^2 \rangle$, obtenção de uma medida global do sistema.

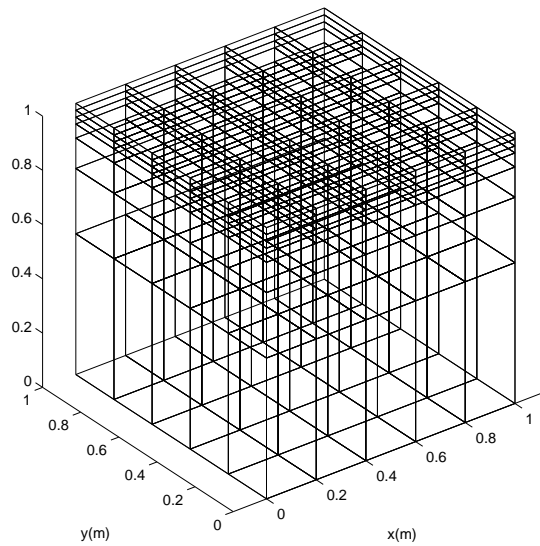


Figura 6.23: Malha de Elementos Finitos 3D para a cavidade acústica

A malha é dividida em dois domínios: um domínio acústico discretizado com $5 \times 5 \times 7$ elementos e um domínio poroelástico discretizado com $3 \times 3 \times 3$ elementos.

A excitação acústica consiste em uma pressão de valor unitário imposta no nó localizado na origem do sistema cartesiano montado. Para uma referência de $p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} Pa$, a pressão média quadrática do sistema é descrita na Figura (6.24).

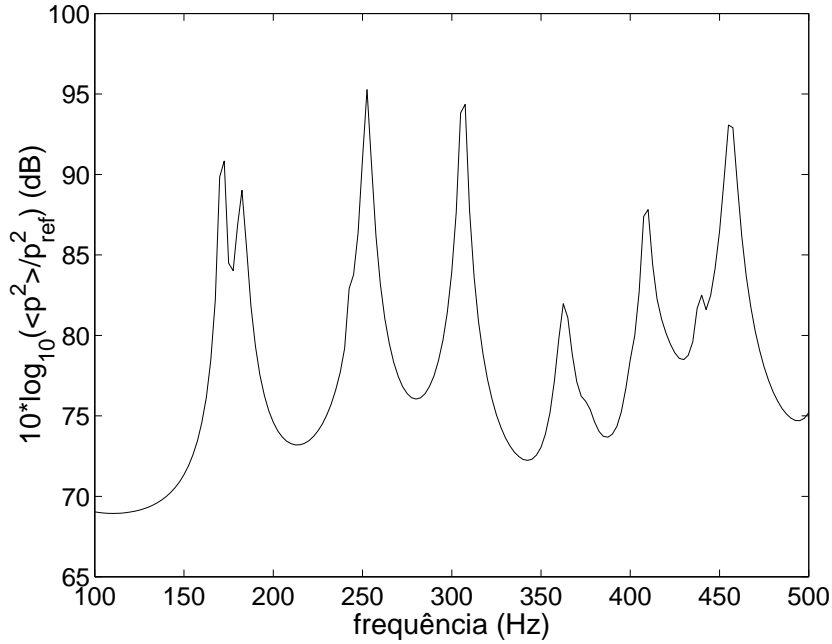


Figura 6.24: Pressão média quadrática para o sistema da cavidade acústica tridimensional - com a presença do material absorvedor

Em síntese, as seguintes frequências naturais foram obtidas para o sistema acústico acoplado devido a presença do material absorvedor poroelástico.

Tabela 6.5: Frequências naturais da cavidade acústica com a presença do material absorvedor

	Frequências naturais (Hz)					
Problema acoplado	172.5	252.5	307.5	362.5	410	455

Resultados teóricos com hipóteses de um guia de ondas planas viajando sobre uma cavidade acústica rígida serão utilizados para se ter uma idéia do comportamento da cavidade tridimensional em análise.

As frequências naturais para o sistema são dadas pela equação a seguir, sendo (l, m, n) os contadores harmônicos do sistema:

$$w_{l,m,n} = c_0 \sqrt{\left(\frac{l \cdot \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m \cdot \pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{L_z}\right)^2} \quad (6.6)$$

onde $w_{l,m,n}$ representa a frequência natural do sistema medida em rad/s , c_0 representa a velocidade do som no meio acústico e L_x , L_y e L_z são as dimensões da cavidade acústica.

A partir da substituição das dimensões da cavidade, da velocidade de propagação do som no ar, tem-se os valores para as 7 primeiras frequências naturais, descritos na Tabela (6.6).

Tabela 6.6: Frequências naturais da cavidade acústica rígida sem a presença do material absorvedor

	Frequências naturais (Hz)						
Problema desacoplado	171.5	242.5	297.0	343	383.5	420.1	485.1

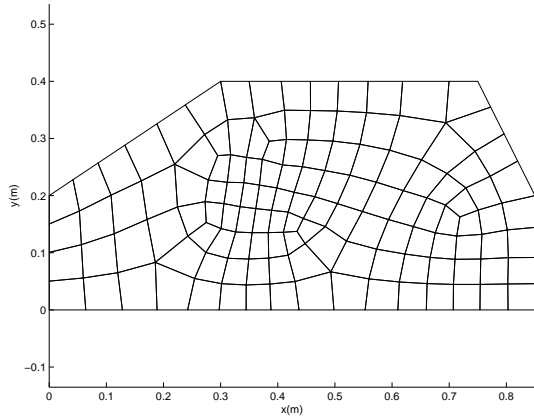
Nota-se pelos valores das frequências naturais e pela comparação das médias quadráticas de pressões que a influência do material absorvedor presente proporciona uma pequena variação nos valores de frequência natural do sistema.

Este sistema possui frequências naturais múltiplas, o qual em uma análise com malhas não simétricas (5x5x7), são gerados erros numéricos que proporcionam diferentes valores de frequências para os modos analisados. Um estudo mais refinado, visando a validação dos valores de frequências pode ser efetuado, mas está fora do escopo desta aplicação, onde o foco está no efeito do acoplamento poro-acústico.

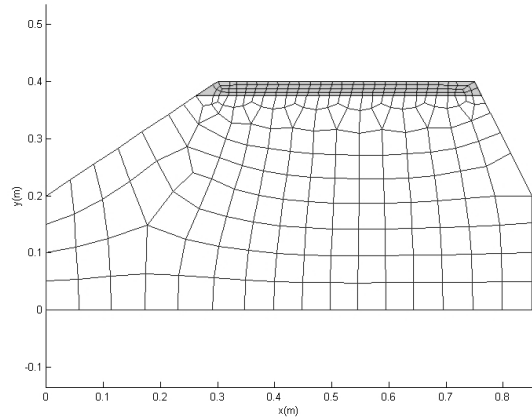
6.2.3 Análise de um modelo simplificado de um habitáculo veicular

A última aplicação apresentada refere-se à criação de um modelo simplificado de um habitáculo veicular. O modelo consiste na criação de uma cavidade acústica com condição de contorno rígidas. Primeiramente estuda-se o modelo acústico desacoplado das equações da poroelasticidade. Em seguida um material poroelástico foi fixado no teto da cavidade acústica para se montar o caso acoplado (acoplamento ar/poroelástico).

As malhas utilizadas, descritas na Figura (6.25), foram construídas com o uso de um gerador de malhas comercial e resolvidas utilizando-se do programa implementado no Meflab++. Procura-se evidenciar para este exemplo, o grau de mudança na absorção e atenuação do sinal de resposta em frequência de pressão ao comparar-se os dois sistemas, com e sem o material absorvedor.



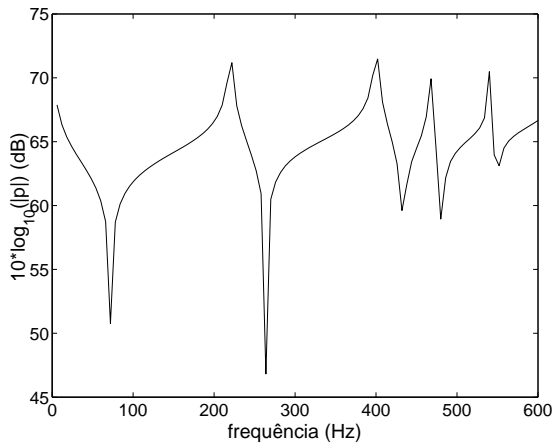
problema desacoplado



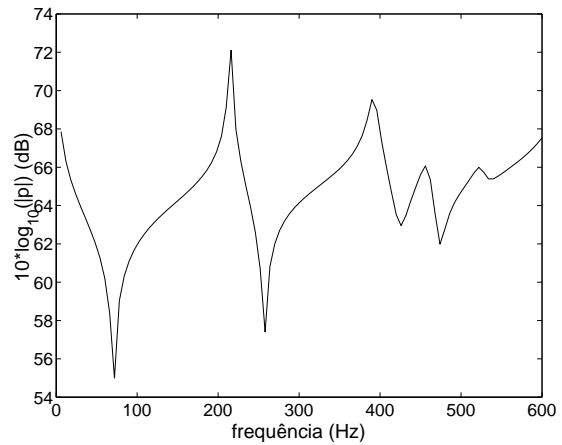
problema acoplado

Figura 6.25: Malha de Elementos Finitos para a cavidade acústica

Os parâmetros físicos do material absorvedor poroelástico utilizado na simulação do caso acoplado estão descritos na Tabela (6.4). As respostas em frequência da pressão, para os dois casos, acoplado e desacoplado, são descritos na Figura (6.26):



problema desacoplado



problema acoplado

Figura 6.26: Curvas de resposta em frequência de pressão para a cavidade acústica

Nota-se que para o problema acoplado, na faixa das baixas frequências, as amplitudes dos modos naturais do sistema não sofrem grande influência devido à presença do material poroelástico. Para as faixas de frequência mais altas, a amplitude da resposta de pressão decresce, sendo o quarto modo quase todo amortecido. O material poroelástico influencia com

suas características de absorção acústica sobre este sistema a partir de valores de frequência em torno de 400Hz, o que usual para este tipo de aplicação.

Os valores das frequências de ressonância do sistema também sofreram uma pequena variação como se nota nos resultados mostrados na Tabela (6.7):

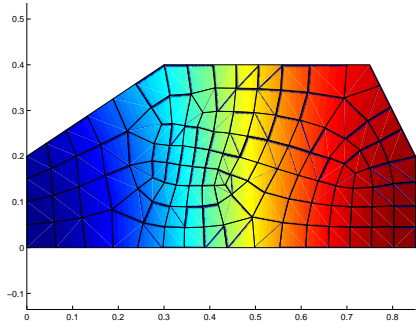
Tabela 6.7: Comparação das frequências naturais da cavidade acústica - desacoplado x acoplado

	Frequências naturais (Hz)			
Problema desacoplado	216	390	456	522
Problema acoplado	222	402	468	540

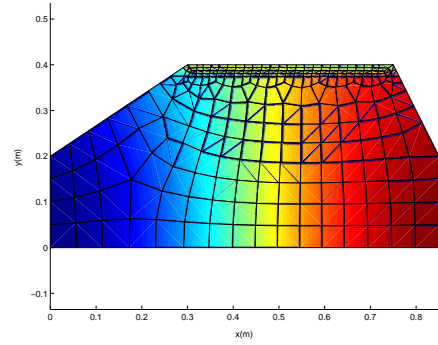
Os primeiros quatro modos, devido à inclusão do material poroelástico, sofreram um pequeno acréscimo em seus valores considerando apenas a faixa de frequência de [0:600Hz].

Nota-se neste caso, que o volume acústico variou, o que obviamente também influenciou na alteração das frequências características do sistema.

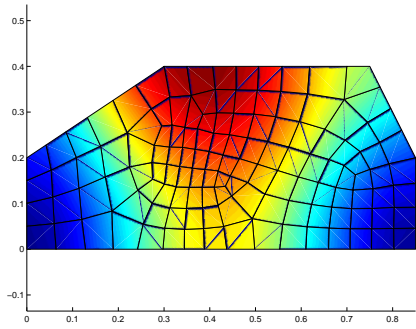
Os valores dos modos operacionais permaneceram inalterados, gerando configurações muito próximas para ambos os casos. As configurações dos modos operacionais acústicos para os problemas desacoplado e acoplado são mostrados na Figura (6.27):



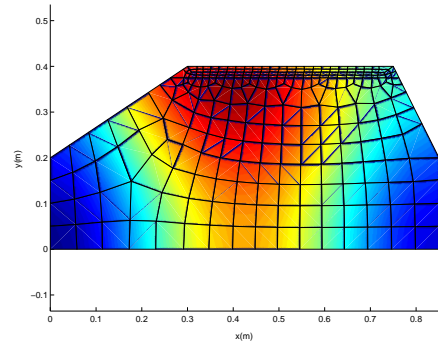
1⁰ Modo de Pressão - desacoplado



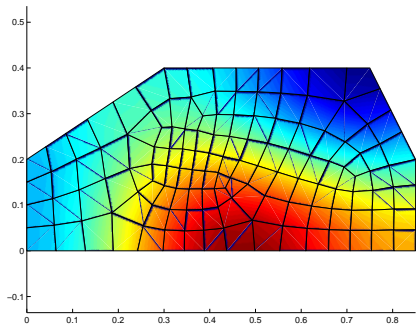
1⁰ Modo de Pressão - acoplado



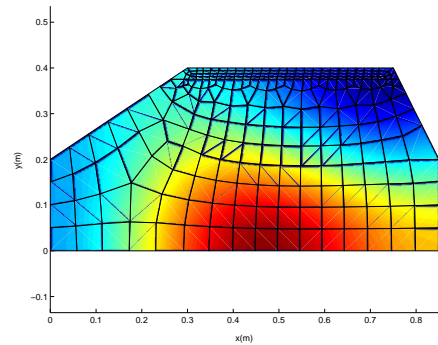
2⁰ Modo de Pressão - desacoplado



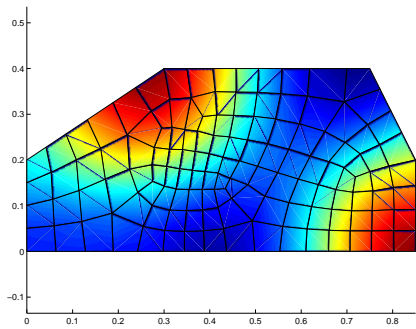
2⁰ Modo de Pressão - acoplado



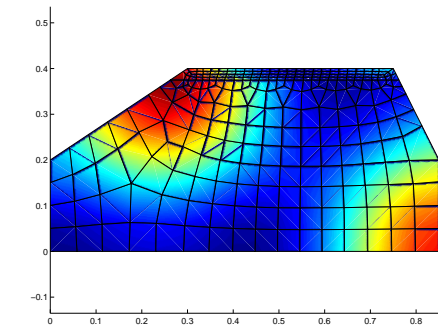
3⁰ Modo de Pressão - desacoplado



3⁰ Modo de Pressão - acoplado



4⁰ Modo de Pressão - desacoplado



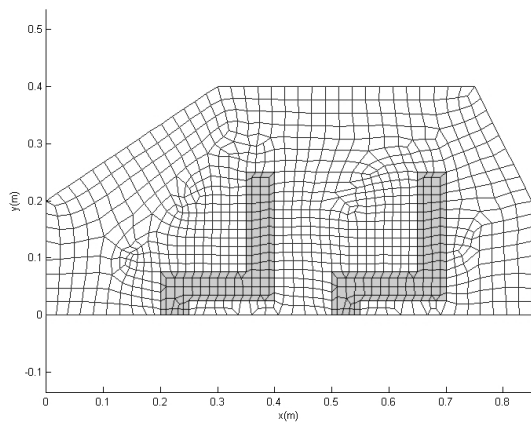
4⁰ Modo de Pressão - acoplado

Figura 6.27: Modos Acústicos para a análise dinâmica de um habitáculo veicular simplificado

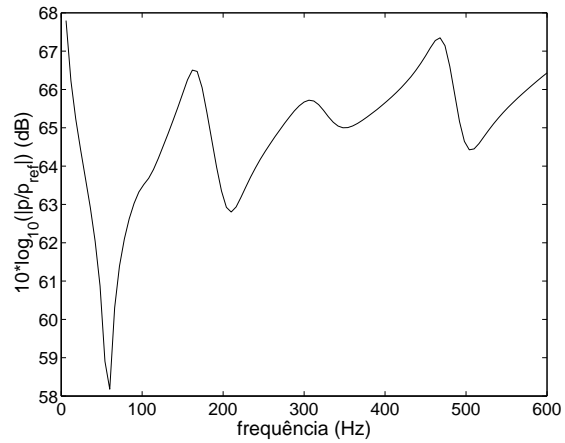
Uma nova análise para esta cavidade é proposta. Desta vez são analisadas geometrias que representam de forma simplificada um modelo de absorção acústica dos bancos. Os materiais dos bancos também são absorvedores poroelásticos.

A análise partiu da malha mostrada na Figura (6.28) e obtendo-se um sistema muito modificado do original, isto é, a cavidade acústica com contornos rígidos. Esta configuração possui uma geometria bem distinta da cavidade com bancos.

A resposta em frequência da pressão sonora quanto a uma excitação acústica de 1 Pa localizada a 65 mm da origem vertical e medida no mesmo ponto é mostrada na Figura (6.28). Observa-se uma mudança significativa na forma desta resposta em relação aos casos anteriores.



Malha de Elementos Finitos



Resposta de pressão na frequência

Figura 6.28: Análise dinâmica de um habitáculo veicular simplificado - presença de bancos

A geometria do banco foi concebida em um modelo idealizado pois este é totalmente constituído por material poroelástico. Em uma análise real uma estrutura elástica deve reforçar o banco. Tal domínio não foi acrescentado ao modelo da cavidade com os bancos devido à necessidade de programação das matrizes de acoplamento entres os domínios elástico, acústico e poroelástico.

Os materiais absorvedores poroelásticos utilizados para constituir os bancos foram os mesmos da simulação anterior, cujos parâmetros físicos estão descritos na Tabela (6.4).

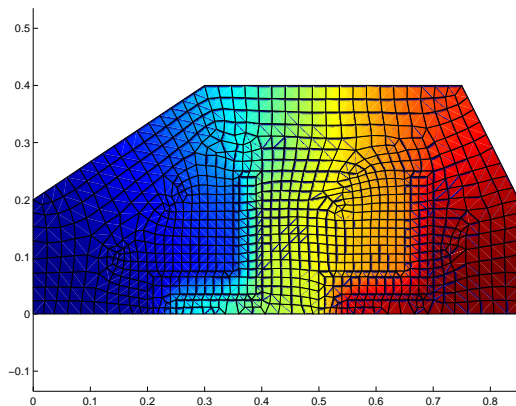
Os novos valores das frequências naturais do sistema com a presença dos bancos podem

ser vistas na Tabela (6.8):

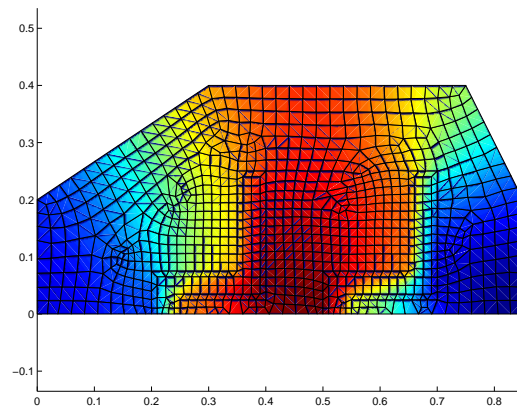
Tabela 6.8: Freqüências da cavidade acústica - presença dos bancos

	Freqüências (Hz)		
Problema acoplado	162	306	468

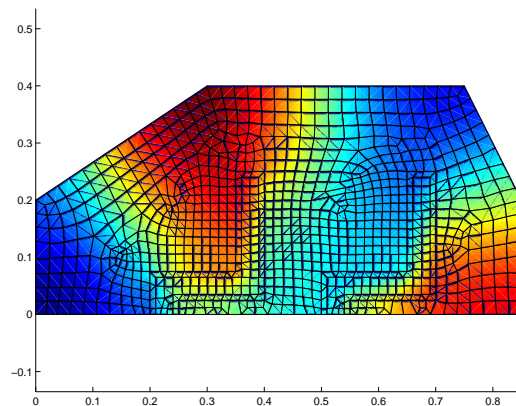
As configurações de pressão para os três primeiros modos operacionais de pressão para o sistema modificado pela presença dos bancos são descritos na Figura (6.29).



1^o Modo de Pressão



2^o Modo de Pressão



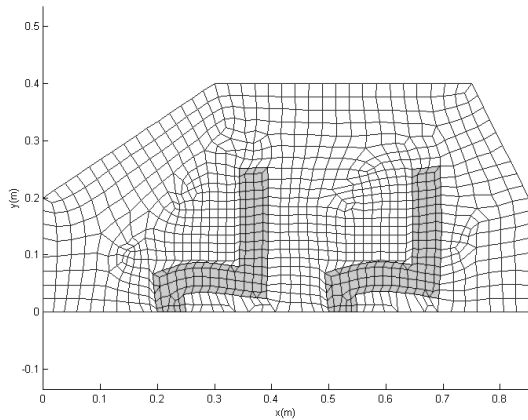
3^o Modo de Pressão

Figura 6.29: Modos operacionais acústicos para a análise dinâmica de um habitáculo veicular simplificado - presença dos bancos

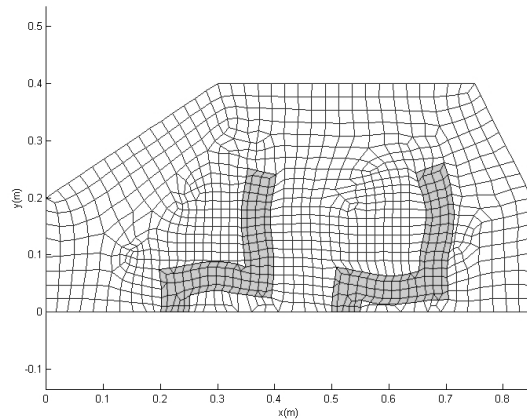
Mudanças significativas das configurações dos modos acústicos são percebidas. A introdução dos bancos funciona como uma barreira acústica que acopla os resultados acústicos

com respostas estruturais do sistema poroelástico.

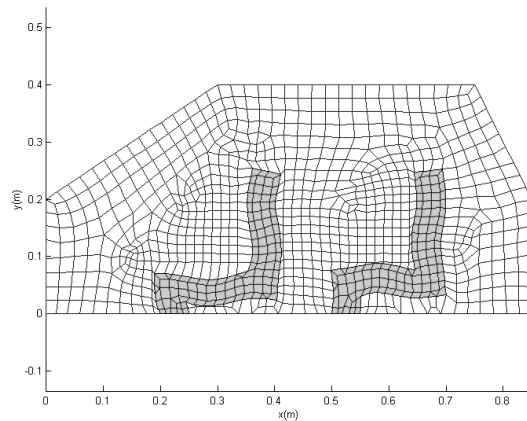
Os modos operacionais estruturais acoplados também são descritos, conforme pode ser visto na Figura (6.30).



1^o Modo Estrutural



2^o Modo Estrutural



3^o Modo Estrutural

Figura 6.30: Modos Operacionais Estruturais acoplados para a análise dinâmica de um habitáculo veicular simplificado - presença dos bancos

Os modos operacionais estruturais encontrados são puramente elásticos, ou seja a estrutura poroelástica apresentou modos de flexão encontrados em uma espuma, porém obtidos pelo acoplamento ar/poros.

Uma simulação como esta, pode ser mais realista, através da inclusão de reforços elásticos sobre os bancos. Para tanto se faz necessário o conhecimento e a introdução dos termos de acoplamento elástico com os meios acústico e poroelástico envolvidos.

Com esta simulação dos bancos puramente poroelástico, mostrou-se a possibilidade de montagem e obtenção de uma solução numérica dinâmica para um modelo simplificado de um habitáculo veicular, evidenciando, assim, as possibilidades, a flexibilidade e a capacidade de uma ferramenta numérica aplicada a meios poroelásticos e absorvedores acústicos.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos

Neste capítulo são apresentadas as conclusões e discussões pertinentes ao trabalho de pesquisa e implementação das equações da poroelasticidade acoplada. Sugestões de trabalhos envolvendo o tema estudado com um maior aprofundamento dos conceitos físicos são feitas.

7.1 Conclusões

A formulação mista (u,p) utilizada neste trabalho mostrou-se adequada à implementação realizada e bastante adaptada ao programa Meflab++ em um contexto do estudo de sistemas acoplados. A formulação (u,p) uniu duas definições exploradas em trabalhos anteriores: problemas em meios acústicos através de um equivalente de Helmholtz e problemas em meios elásticos através de um equivalente sólido.

Esta formulação ainda apresenta como vantagem o fato do acoplamento do meio poroelástico com outros meios, entre estes o acústico e o elástico, ser de fácil compreensão e através de algumas simplificações, as matrizes de Elementos Finitos acopladas serem de fácil construção, resultando em acoplamentos do tipo Fluido-Estrutura clássicos.

A simples imposição de alguns parâmetros dos materiais poroelásticos pode tornar o material com tendência a um comportamento acústico (fluido) ou elástico (sólido). Tal efeito pode-se tornar interessante em estudos sistemáticos e construção de sínteses de sistemas poroelásticos.

Um método numérico como o dos Elementos Finitos, estudado e aplicado nesta dissertação

apresenta a vantagem de permitir a consideração de análises de diferentes materiais com diferentes parâmetros poroelásticos em um mesmo modelo, permitindo um aumento no grau de confiabilidade da implementação computacional realizada. Regiões com diferentes materiais poroelásticos e o efeito de combinação destes em geometrias e layouts diversos se torna uma grande possibilidade de inovação em projetos acústicos industriais.

Possíveis extensões de modelos mais complexos são favorecidas pela aplicação dos conceitos de Programação Orientada a Objetos.

Simplificações de modelos como a da simulação dos bancos em um habitáculo veicular ajudam a prever o comportamento e a influência dos absorvedores quanto ao campo de pressão e à qualidade sonora no interior de um veículo.

A presença de materiais absorvedores com propriedades poroelásticas definidas podem propiciar um elevado grau de amortecimento ao sistema global, o que pode se tornar um interessante fator no projeto acústico e controle de ruídos.

O procedimento de implementação computacional feita neste trabalho pode ser uma ferramenta de grande utilidade no projeto e caracterização do comportamento de sistemas de isolamento acústica contendo materiais poroelásticos.

As principais dificuldades na implementação estão relacionadas com o fato das variáveis serem complexas e as matrizes do sistema acoplado não serem simétricas. O uso de métodos de álgebra computacional adaptadas a este modelo devem ser implementados e melhorados em versões futuras.

Conclui-se, também, que apesar do estudo da poroelasticidade se restringir aos problemas lineares, a complexidade das hipóteses e formulações físicas é grande. Estudos teóricos e experimentais mais extensos são necessários para a consolidação dos conceitos da física e melhor avaliação da influência dos parâmetros de cada um dos modelos tratados.

De uma forma geral, do ponto de vista das formulações, implementações e estudos de casos, pode-se concluir que várias possibilidades foram discutidas, sendo que a ferramenta desenvolvida mostrou desempenho global satisfatório.

7.2 Propostas de Trabalhos Futuros

Aplicações práticas e construções de malhas que reproduzissem problemas encontrados em indústrias seriam de grande valia. Projetos de isolamento acústica contendo materiais absorvedores onde segundo a exigência de transmissibilidade e absorção acústica devam ser respeitadas é um bom teste da implementação numérica desenvolvida neste trabalho.

Validações experimentais dos resultados numéricos apresentados nesta dissertação seria um campo em estudo, já que a correlação de resultados numéricos e experimentais exige um certo conhecimento específico e nem sempre é evidente. Uma outra proposta de validação dos resultados é a comparação com resultados de softwares comerciais.

Sobre o aspecto computacional é proposta uma adaptação dos métodos e tipos matemáticos empregados como por exemplo o armazenamento das matrizes de elementos finitos ser então executado de uma forma esparsa, ganhando-se assim em velocidade de processamento numérico. O desenvolvimento de um ambiente gráfico para visualização dos resultados numéricos pode vir a ser um trabalho de grande interesse.

O estudo de formulações simétricas de fácil obtenção e redução dos modos de um sistema é importante. As vantagens e desvantagens de se utilizar uma ou outra formulação é um trabalho de pesquisa que pode ser explorado. Estudo de problemas que utilizem outros modelos para o comportamento poroelástico, tais como os viscoelásticos, os quais apresentam variações dos valores dos Módulos de Elasticidade (E) e Cisalhamento (N) com a frequência.

Problemas que envolvam sínteses e otimização de projetos envolvendo materiais poroelásticos são componentes de uma linha de pesquisa de grande aplicação acadêmica e industrial.

Com o desenvolvimento do programa Meflab++, pretende-se formar uma ferramenta útil no estudo de novas formulações teóricas, do desenvolvimento de geração de malhas aplicadas a problemas acoplados e de uma elaborada discretização de problemas dependentes da frequência. Desta forma espera-se um programa mais robusto, com simulações rápidas, as quais proporcionem aos engenheiros a concepção de novos projetos de isolamento acústicas de forma confiável e eficiente.

Referências

- Allard, J. F. (1993). *Propagation of Sound in Porous Media: Modeling Sound Absorbing Materials*. Elsevier, New York.
- Allard, J. F., Castagnede, B., Henry, M., and Lauriks, W. (1994). Evaluation of tortuosity in acoustic porous materials saturated by air. *Rev. Science Instrum.*, 65(3):754–755.
- Atalla, N., Hamdi, M. A., and Panneton, R. (2001). Enhanced weak integral formulation for the mixed (u,p) poroelastic equations. *Journal of Acoustical Society of America*, 109(6):3065–3068.
- Atalla, N., Panneton, R., and Debergue, P. (1998). A mixed displacement-pressure formulation of poroelastic materials. *Journal of Acoustical Society of America*, 104(3):1444–1452.
- Biot, M. (1941a). Consolidation settlement under a rectangular load distribution. *Journal Applied Physics*, 12:426–430.
- Biot, M. (1941b). General theory of three dimensional consolidation. *Journal Applied Physics*, 12:155–164.
- Biot, M. (1956). The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. *Journal of Acoustical Society of America*, 28:168–191.
- Biot, M. (1962). Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *Journal of Acoustical Society of America*, 34:1254–1264.
- Borba, G. L. (1992). Formulação direta do método dos elementos de contorno para tratamento do estado plano da poroelasticidade acoplada. Dissertação (Mestrado), Unicamp.

- Bourbié, T., Coussy, O., and Zinszner, B. (1987). *Acoustics of Porous Media*. Institut Français du Pétrolé Publications, Paris.
- Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R. (1984). Seismic soil-structure-fluid interaction analysis. *Numerical Methods in Coupled Systems*, pages 353–386.
- Campos, J. C. B. (1995). *Solução de Problemas Poroelásticos através do Método dos Elementos de Contorno*. Tese (Doutorado), Unicamp.
- Champoux, Y. and Allard, J.-F. (1991). Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *Journal of Applied Physics*, 70(4):1975–1979.
- Craggs, A. (1978). A finite element model for rigid porous absorbing materials. *Journal of Sound and Vibration*, 61:101–111.
- Craggs, A. (1979). Coupling of finite element acoustic absorption models. *Journal of Sound and Vibration*, 66(4):605–613.
- Craggs, A. (1985). A finite element model for acoustically lined small rooms. *Journal of Sound and Vibration*, 108(2):327–337.
- Dazel, O., Sgard, F., Lamarque, C.-H., and Atalla, N. (2002). An extension of complex modes for the resolution of finite-element poroelastic problems. *Journal of Sound and Vibration*, 253(2):421–445.
- Debergue, P., Panneton, R., and Atalla, N. (1999). Boundary conditions for the weak formulation of the mixed (u,p) poroelasticity problem. *Journal of Acoustical Society of America*, 106(5):2383–2390.
- Depollier, C., Allard, J. F., and Lauriks, W. (1988). Biot theory and stress-strain equations in porous-absorbing materials. *Journal of Acoustical Society of America*, 84(6):2277–2279.
- Detournay, E. and Cheng, A. H. (1991). Plane strain analysis of a stationary hydraulic fracture in a poroelastic medium. *International Journal of Solids and Structures*, 37(13):1645–1662.

- Eijk, J. and Zwicker, C. (1941). Absorption of sound by porous materials i. *Physica*, 8(2):149–158.
- Goransson, P. (1995a). Acoustic finite element formulation of a flexible porous material - a correction for inertial effects. *Journal of Sound and Vibration*, 185(4):559–580.
- Goransson, P. (1995b). A weighted residual formulation of the acoustic wave propagation through a flexible porous material and a comparison with a limp material model. *Journal of Sound and Vibration*, 182(3):4799–494.
- Incropera, F. P. and DeWitt, D. P. (1996). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley.
- Johnson, D., Koplik, J., and Dashen, R. (1987). Theory of dynamics permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 176:379–402.
- Kang, Y. J. and Bolton, J. S. (1995). Finite element modeling of isotropic elastic porous materials coupled with acoustical finite elements. *Journal of Acoustical Society of America*, 98(1):635–643.
- Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., and Sanders, J. V. (1995). *Fundamental of Acoustics*. John Wiley and Sons.
- Lamary, P., Tanneau, O., and Chevalier, Y. (2001). Modelling poroelastic multilayered material for aircraft insulation. *First European Forum - Materials and Products for Noise and Vibration Control in Machinery and Transportation*, pages 1–10.
- Lamb, H. (1920). On the vibration of an elastic plate in contact with water. In *Proceedings of Royal Society*, volume A88, pages 205–216.
- Leclaire, P., Kelders, L., and Lauriks, W. (1996a). Determination of the viscous and thermal characteristic lengths of plastic foams by ultrasonic measurements in helium and air. *Journal of Applied Physics*, 80(4):2009–2012.
- Leclaire, P., Kelders, L., Lauriks, W., Glorieux, C., and Thoen, J. (1996b). Determination of the viscous characteristic length in air-filled porous materials by ultrasonic attenuation measurements. *Journal of Acoustical Society of America*, 99(4):1944–1948.

- Leithold, L. (1990). *O Cálculo com Geometria Analítica*. Harbra.
- Litwinczik, V. (2003). *Sound Radiation by a simply supported covered plate*. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Santa Catarina.
- Nunes, A. (2001). Estudo teórico e experimental da acústica de cavidades com absorção sonora. Dissertação (Mestrado), Unicamp.
- Panneton, R. and Atalla, N. (1996). Numerical prediction of sound transmission through multilayer systems with isotropic poroelastic materials. *Journal of Acoustical Society of America*, 100:346–354.
- Panneton, R. and Atalla, N. (1997a). An efficient finite element scheme for solving the three-dimensional poroelasticity problem in acoustic. *Journal of Acoustical Society of America*, 101(6):3287–3298.
- Panneton, R. and Atalla, N. (1997b). Low-frequency approximations for acoustic porous materials: Linerisation of the poroelastic eigenvalue problem. *Transactions of the CSME*, 4:401–413.
- Reddy, J. N. (1984). *An Introduction to the Finite Element Method*. MacGraw-Hill, New York.
- Rice, J. R. and Cleary, M. P. (1976). Some basic stress-diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. In *Reviews of Geophysics and Space Physics*, volume 14, pages 227–241.
- Siqueira, C. A. M. (1995). Um sistema orientado por objetos para análise numérica da poroelasticidade acoplada pela técnica dos elementos finitos. Dissertação (Mestrado), Unicamp.
- Zienkiewicz, O., Irons, B., and Norton, B. (1965). Natural frequencies of complex free or submerged structures by finite element method. In *Vibration in Civil Engineering - Proceedings of a Symposium, London Butterworths*, pages 83–93.

- Zienkiewicz, O. C. (1984). Coupled problems and their numerical solution. *Numerical Methods in Coupled Systems*, pages 35–58.
- Zwikker, C. (1941). Absorption of sound by porous materials iv. *Physica*, 8(10):1102–1107.
- Zwikker, C., Eijk, J. V. D., and Kosten, C. (1941a). Absorption of sound by porous materials ii. *Physica*, 8(5):469–476.
- Zwikker, C., Eijk, J. V. D., and Kosten, C. (1941b). Absorption of sound by porous materials iii. *Physica*, 8(10):1094–1101.
- Zwikker, C. and Kosten, C. W. (1949). *Sound Absorbing Materials*. Elsevier Publishing Company.

Anexo A

Formulação (u,p) para problemas poroelásticos - Formulação de Rice-Cheng

O tensor das tensões pode ser escrito por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma^f \delta_{ij} \quad (\text{A.1})$$

onde σ_{ij} é a tensão total no material, σ_{ij}^s é a tensão efetiva no material sólido e σ^f a tensão sobre a fase fluida.

As relações constitutivas, que correspondem nas relações entre as tensões e as deformações, em um domínio poroelástico definidas no item (3.3.1) são aqui reescritas:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^s &= 2N\varepsilon_{ij} + \lambda_f \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + Q\xi \delta_{ij} \\ \sigma^f &= Q\varepsilon_{kk} + R\xi \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Substituindo-se os valor de tensão σ_{ij}^s descrito na Equação (A.1), tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} - \sigma^f \delta_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + \lambda_f \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + Q\xi \delta_{ij} \\
&= 2N\varepsilon_{ij} + \lambda_f \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + Q\delta_{ij} \frac{(\sigma^f - Q\varepsilon_{kk})}{R} \\
&= 2N\varepsilon_{ij} + \left(\lambda_f - \frac{Q^2}{R} \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{Q\sigma^f \delta_{ij}}{R} \\
\sigma_{ij} + \sigma^f \left(-1 - \frac{Q}{R} \right) \delta_{ij} &= 2N\varepsilon_{ij} + \left(\lambda_f - \frac{Q^2}{R} \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Comparando-se a Equação (A.3) com a lei de Hooke em sua forma generalizada descrita na Equação (3.10), tem-se:

$$\lambda_f - \frac{Q^2}{R} = \lambda_0 \tag{A.4}$$

Tomando-se a relação entre σ^f e p presente na Equação (3.7), chega-se a seguinte equação:

$$\sigma_{ij} - hp \left(-1 - \frac{Q}{R} \right) \delta_{ij} = 2N\varepsilon_{ij} + \lambda_0 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \tag{A.5}$$

que pode ser reescrita como sendo:

$$\sigma_{ij} + \beta p \delta_{ij} = 2N\varepsilon_{ij} + \lambda_0 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \tag{A.6}$$

onde:

$$\beta = \phi \frac{(Q + R)}{R} \tag{A.7}$$

considerando λ_0 , que é a segunda constante de Lamé, definida por:

$$\lambda_0 = \frac{2N\nu_b}{1 - 2\nu_b} \tag{A.8}$$

chega-se a seguinte equação para a fase sólida:

$$\sigma_{ij}^s = 2N\varepsilon_{ij} + \frac{2N\nu_b}{1-2\nu_b}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \beta p\delta_{ij} \quad (\text{A.9})$$

Para o problema poroelástico transiente em estudo, as forças de corpo ou inerciais serão desprezadas, o que significa uma relação de equilíbrio de forças:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Escrevendo-se a Equação (A.9) com o operador diferencial Laplaciano e substituindo na Equação (A.10) de equilíbrio juntamente com as relações cinemáticas, descritas na Equação (3.2), tem-se:

$$Nu_{i,ji} + \frac{N\nu_b}{1-2\nu_b}u_{i,ij} - \beta p_{,j} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Na abordagem de (Rice e Cleary, 1976) são utilizados outros coeficientes, todavia as hipóteses adotadas para o problema poroelástico são as mesmas que as utilizadas na Teoria de Biot.

As equações de Biot apresentadas podem ser reduzidas a seguinte expressão:

$$2N\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}^s - \frac{\nu_b}{1+\nu_b}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{2N}{3H}p\delta_{ij} \quad (\text{A.12})$$

onde H é um parâmetro físico que relaciona a deformação volumétrica com a variação de pressão dos poros sob carregamento constante.

Definindo-se o valor de P como sendo:

$$P = \lambda_f + 2N \quad (\text{A.13})$$

Através de algumas manipulações matemáticas, pode-se chegar as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
2N\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu_b}{1 + \nu_b}(\sigma_{kk} + 3P)\delta_{ij} + \frac{2N}{3H}p\delta_{ij} - \left(1 - \frac{3\nu_b}{1 + \nu_b}\right)p\delta_{ij} \\
&= \sigma_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu_b}{1 + \nu_b}(\sigma_{kk} + 3P)\delta_{ij} + \frac{2N}{3H}p\delta_{ij} - \left(\frac{1 - 2\nu_b}{1 + \nu_b}\right)p\delta_{ij} \\
&= \sigma_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu_b}{1 + \nu_b}(\sigma_{kk} + 3P)\delta_{ij} + \frac{2N}{3H}p\delta_{ij} - \frac{2N}{3K_b}p\delta_{ij} \\
&= \sigma_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu_b}{1 + \nu_b}(\sigma_{kk} + 3P)\delta_{ij} + \frac{2N}{3}\left(\frac{1}{H} - \frac{1}{K_b}\right)p\delta_{ij} \tag{A.14}
\end{aligned}$$

A Equação (A.14) é a forma utilizada por (Rice e Cleary, 1976), onde ν_b é o coeficiente de Poisson do material quando em condições drenadas (pressão nos poros constante), N é o módulo de cisalhamento e K_b é o módulo de deformação volumétrica drenado, sendo este dado por:

$$K_b = \frac{2N(1 + \nu_b)}{3(1 - 2\nu_b)} \tag{A.15}$$

o que permite escrever a seguinte associação:

$$\frac{1}{K_u} = \frac{1}{K_b} - \frac{1}{H} \tag{A.16}$$

onde K_u é o Módulo de deformação volumétrica não drenado. Tal relação é obtida a partir da Equação (A.14), bastando aplicá-la a um teste drenado, onde as seguintes condições são impostas:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= -p'\delta_{ij} \\
p &= p' \\
\frac{p'}{\varepsilon_{kk}} &= -K_u \tag{A.17}
\end{aligned}$$

Sendo o parâmetro K_u o Módulo de deformação volumétrica não drenado e p' a pressão de confinamento na estrutura.

O último termo da Equação (A.14) fica então sendo:

$$\frac{2N}{3} \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{K_b} \right) = \frac{1 - 2\nu_b}{1 + \nu_b} K_b \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{K_b} \right) = -\frac{(1 - 2\nu_b)K_b}{(1 + \nu_b)K_u} \quad (\text{A.18})$$

A pressão dos poros e a tensão se relacionam segundo a seguinte variável B , definida da seguinte maneira:

$$B = -\frac{p}{\sigma_{kk}/3} \quad (\text{A.19})$$

Tal constante B é definida como sendo o coeficiente de Skempton, cujo valor pode ser obtido em teste não drenado, relacionando a pressão nos poros com a pressão hidrostática.

Substituindo a Equação (A.19) na Equação (A.14), tem-se:

$$\begin{aligned} 2N\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{B\sigma_{kk}\delta_{ij}}{3} - \frac{\nu_b}{1 + \nu_b}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{B\nu_b}{1 + \nu_b}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{(1 - 2\nu_b)K_b}{(1 + \nu_b)K_u} \frac{B\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} \\ &= \sigma_{ij} - \left[\frac{B}{3} - \frac{\nu_b}{1 + \nu_b} + \frac{B\nu_b}{1 + \nu_b} + \frac{(1 + \nu_b)K_b B}{(1 + \nu_b)3K_u} \right] \sigma_{kk}\delta_{ij} \\ &= \sigma_{ij} - \frac{3\nu_b + B(1 - 2\nu_b)(1 - K_b/K_u)}{3(1 + \nu_b)} \sigma_{kk}\delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Definindo-se agora um novo parâmetro ν_u , que corresponde ao Módulo de Poisson não drenado:

$$\begin{aligned} \frac{3\nu_b + B(1 - 2\nu_b)(1 - K_b/K_u)}{3(1 + \nu_b)} &= \frac{\nu_u}{1 + \nu_u} \\ \nu_u &= \frac{3\nu_b + B(1 - 2\nu_b)(1 - K_b/K_u)}{3 - B(1 - 2\nu_b)(1 - K_b/K_u)} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Para um ensaio drenado, a variação de massa m do fluido nos poros, por unidade de volume do material é dado por:

$$\Delta m = m - m_0 = dm = v d\rho + \rho dv \quad (\text{A.22})$$

onde $m = \rho v$ e ainda:

$$\Delta m = (\rho - \rho_0)v_0 + \rho_0(v - v_0) \quad (\text{A.23})$$

onde v e v_0 são as frações volumétricas aparentes, finais e iniciais, respectivamente e ρ e ρ_0 são as massas específicas antes e após a deformação ocorrer.

Esta variação de massa também pode ser expressa como:

$$\Delta m = \frac{\rho_0 v_0 p}{K_f} + \rho_0 \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K_u} \right) \frac{(\sigma'_{kk} + 3p)}{3} - \frac{\rho_0 v_0 p}{K_u} \quad (\text{A.24})$$

onde:

$$K_f = -\frac{p}{\xi} = \frac{p\rho}{(\rho - \rho_0)} \quad (\text{A.25})$$

onde K_f é o módulo de deformação volumétrica do fluido, m é a massa do fluido por unidade de volume, m_0 e v_0 são as variáveis em estado de referência.

Reformulando a Equação (A.14) com a utilização das relações descritas na Equação (A.15) e Equação (A.16), obtém-se:

$$2N\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu_b}{1 + \nu_b} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{3\nu_b}{1 + \nu_b} p\delta_{ij} - \frac{(1 - 2\nu_b)K_b}{(1 + \nu_b)K_u} p\delta_{ij} \quad (\text{A.26})$$

A partir da definição descrita na Equação (A.21) do Módulo de Poisson não drenado, tem-se:

$$\frac{(1 - 2\nu_b)K_b}{(1 + \nu_b)K_u} = \frac{3}{B} \left[\frac{3\nu_b + (1 - 2\nu_b)B}{3(1 + \nu_b)} - \frac{\nu_u}{1 + \nu_u} \right] \quad (\text{A.27})$$

Logo:

$$\begin{aligned} 2N\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij} + p\delta_{ij} - \frac{\nu_b}{1 + \nu_b} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{3\nu_b}{1 + \nu_b} p\delta_{ij} - \frac{3}{B} \left[\frac{3\nu_b + (1 - 2\nu_b)B}{3(1 + \nu_b)} - \frac{\nu_u}{1 + \nu_u} \right] p\delta_{ij} \\ &= \sigma_{ij} - \frac{\nu_b}{1 + \nu_b} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{3\nu_b}{1 + \nu_b} p\delta_{ij} + \left[1 - \frac{3\nu_b + (1 - 2\nu_b)B}{3(1 + \nu_b)} + \frac{3\nu_u}{B(1 + \nu_u)} \right] p\delta_{ij} \\ &= \sigma_{ij} - \frac{\nu_b}{1 + \nu_b} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{3\nu_b}{1 + \nu_b} p\delta_{ij} \frac{3(\nu_u + \nu_b)}{B(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)} p\delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

O mesmo pode ser feito com a Equação (A.24), agrupando-se os termos, tem-se:

$$\Delta m = \rho_0 p \left(\frac{v_0}{K_f} - \frac{v_0}{K_u} \right) + \rho_0 \left(\frac{1}{K_b} - \frac{1}{K_u} \right) \frac{\sigma_{kk} + 3p}{3} \quad (\text{A.29})$$

Utilizando-se da relação $(1/K_b - 1/K_u)$:

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{K_f} - \frac{v_0}{K_u} &= \frac{v_0/K_f + 1/K_b - 1/K_u - v_0/K_u - 1/K_b + 1/K_u}{1/K_b + 1/K_u} \left(\frac{1}{K_b} - \frac{1}{K_u} \right) \\ &= \left(\frac{v_0/K_f + 1/K_b - 1/K_u - v_0/K_u}{1/K_b + 1/K_u} - 1 \right) \left(\frac{1}{K_b} - \frac{1}{K_u} \right) \\ &= \left(\frac{1}{B} - 1 \right) \left(\frac{1}{K_b} - \frac{1}{K_u} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

O coeficiente de Skempton B pode ser expresso pela seguinte relação:

$$B = \frac{1/K_b - 1/K_u}{v_0/K_f + 1/K_b - 1/K_u - v_0/K_u} \quad (\text{A.31})$$

Aplicando o coeficiente de Skempton na Equação (A.29), tem-se que:

$$\Delta m = \rho_0 \left(\frac{1}{K_b} - \frac{1}{K_u} \right) \frac{(\sigma_{kk} + 3p/B)}{3} \quad (\text{A.32})$$

A partir da definição do Módulo de Poisson não drenado, obtém-se uma expressão para $(1/K_b - 1/K_u)$, descrito na Equação (A.15):

$$\left(\frac{1}{K_b} - \frac{1}{K_u} \right) = \frac{1}{(1 - 2\nu_b)B} \left[\frac{3\nu_u(1 + \nu_b)}{1 + \nu_u} - 3\nu_b \right] \frac{1}{K_b} \quad (\text{A.33})$$

Utilizando-se da definição de Módulo de deformação volumétrica (K_b) pode-se obter a seguinte relação:

$$\left(\frac{1}{K_b} - \frac{1}{K_u} \right) = \frac{9\nu_u}{2N(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)B} \quad (\text{A.34})$$

Obtendo-se então a expressão para a variação da massa por unidade de volume total:

$$\Delta m = \frac{3\rho_0(\nu_u - \nu_b)}{2NB(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)} \left(\sigma_{kk} + \frac{3p}{B} \right) \quad (\text{A.35})$$

Observa-se que na Equação (A.28) e Equação (A.35), há a necessidade de apenas duas constantes elásticas, N e ν_b e de duas constantes poroelásticas, ν_u e B .

Através da Equação (A.28), pode-se explicitar os valores das tensões:

$$\sigma_{ij} = 2Ne_{ij} + \frac{\nu_b}{1 + \nu_b} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{3(\nu_u - \nu_b)}{B(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)} p \delta_{ij} \quad (\text{A.36})$$

Quando $i = j$, tem-se:

$$\sigma_{kk} = \frac{1 + \nu_b}{1 - 2\nu_b} \left[2N\varepsilon_{ij} - \frac{9(\nu_u - \nu_b)}{B(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)} p \right] \quad (\text{A.37})$$

Logo:

$$\sigma_{ij} = 2Ne_{ij} + \frac{2N\nu_b}{1 - 2\nu_b} \varepsilon_{ij} \delta_{ij} - \frac{3\nu_u - \nu_b}{B(1 - 2\nu_b)(1 + \nu_u)} p \delta_{ij} \quad (\text{A.38})$$

Definindo-se:

$$\beta = \frac{3(\nu_u - \nu_b)}{B(1 - 2\nu_b)(1 + \nu_u)} \quad (\text{A.39})$$

O coeficiente β é o parâmetro poroelástico de Biot. A Equação (A.35) pode ser manuseada explicitando a variável de pressão p :

$$\xi = \frac{\Delta m}{\rho_0} = \frac{3(\nu_u - \nu_b)}{2NB(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)} \left(\sigma_{kk} + \frac{3p}{B} \right) \quad (\text{A.40})$$

Onde o parâmetro ξ é o volume de líquido que sai da amostra por unidade de volume, como para os exemplos em estudo o fluido é considerado incompressível, o parâmetro ξ é a variação do volume poroso, considerando-se uma porosidade h constante.

Analisando-se na Equação (A.38), o caso $i = j$:

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{3(\nu_u - \nu_b)}{2GB(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)} \left\{ \frac{1 + \nu_b}{1 - 2\nu_b} \left[2N\varepsilon_{ij} - \frac{9(\nu_u - \nu_b)}{B(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)}p \right] + \frac{3p}{B} \right\} \\
&= \frac{3(\nu_u - \nu_b)}{B(1 + \nu_b)(1 - 2\nu_b)} \varepsilon_{kk} - \left[\frac{27(\nu_u - \nu_b)^2}{2NB^2(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)^2(1 - 2\nu_b)} - \frac{9(\nu_u - \nu_b)}{2NB^2(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)} \right] p \\
&= \frac{3(\nu_u - \nu_b)}{B(1 + \nu_b)(1 - 2\nu_b)} \varepsilon_{kk} - \frac{27(\nu_u - \nu_b)^2 - 9\nu_u(1 + \nu_u)(1 - 2\nu_b)}{2NB^2(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)^2(1 - 2\nu_b)} p \\
&= \frac{3(\nu_u - \nu_b)}{B(1 + \nu_b)(1 - 2\nu_b)} \varepsilon_{kk} - \frac{9(\nu_u - \nu_b)(3\nu_u - 3\nu_b - 1 + 2\nu_b - \nu_u + 2\nu_b\nu_u)}{2NB^2(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)^2(1 - 2\nu_b)} p \quad (A.41)
\end{aligned}$$

O que leva a:

$$\xi = \frac{3(\nu_u - \nu_b)}{B(1 + \nu_b)(1 - 2\nu_b)} \varepsilon_{kk} - \frac{9(\nu_u - \nu_b)(2\nu_b - 1)}{2NB^2(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)^2(1 - 2\nu_b)} p \quad (A.42)$$

Assumindo-se o valor:

$$Q = \frac{2NB^2(1 + \nu_b)(1 + \nu_u)^2(1 - 2\nu_b)}{9(\nu_u - \nu_b)(2\nu_b - 1)} \quad (A.43)$$

Fazendo-se as substituições das Equações (A.39) e (A.43) na Equação (A.42), conclui-se que:

$$\xi = \beta\varepsilon_{kk} + \frac{1}{Q}p \quad (A.44)$$

Juntamente com as equações a seguir, pode-se descrever matematicamente o modelo poroelástico (Lei de Darcy - desprezando-se as forças de corpo):

$$q_i = -\kappa p_{,i} \quad (A.45)$$

onde q_i é a vazão na direção i por unidade de área.

A partir da equação da continuidade, tem-se:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + q_{i,i} = 0 \quad (\text{A.46})$$

Substituindo-se a Equação (A.44) na Equação (A.46) e posteriormente substituindo o valor da Equação (A.45), chega-se então a segunda equação utilizada na solução de problemas poroelásticos.

$$\kappa p_{,jj} - \beta \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} - \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.47})$$

A equação elástica com um termo de acoplamento para o fluido, já explicitada anteriormente na Equação (A.11) é agora reescrita em termos do tensor de deformações da fase sólida ε_{ij} , é dada como sendo:

$$N \varepsilon_{ij,j} + \frac{N \nu_b}{1 - 2\nu_b} \varepsilon_{kk,j} - \beta p_{,j} = 0 \quad (\text{A.48})$$

Anexo B

Solução Analítica da coluna poroelástica

Considerando as equações da Teoria da Poroelasticidade Acoplada para o caso unidimensional apresentadas anteriormente chega-se a:

$$\frac{2N(1 - \nu_b)}{(1 - 2\nu_b)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\beta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - k \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.2})$$

As Equações (B.1) e (B.2) devem ser satisfeitas para as seguintes condições de contorno, de acordo com a Figura (6.1).

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ \sigma(h) &= -P \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0) &= 0 \\ p(h) &= 0 \end{aligned}$$

Considerando que a tensão total σ na coluna constante e igual a $-P$, a equação diferencial é levada a:

$$\sigma = -P = 2N \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu_b}{1 - 2\nu_b} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \beta p \quad (\text{B.3})$$

De onde

$$-P = \frac{2N(1 - \nu_b)}{(1 - 2\nu_b)} \frac{\partial u}{\partial x} - \beta p \quad (\text{B.4})$$

Derivando a Equação (B.4) em relação ao tempo:

$$\frac{2N(1 - \nu_b)}{(1 - 2\nu_b)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \beta \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Logo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\beta(1 - 2\nu_b)}{2N(1 - \nu_b)} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{B.6})$$

Introduzindo o resultado da Equação (B.6) na Equação (B.2), chega-se a:

$$\frac{\beta^2(1 - 2\nu_b)}{2N(1 - \nu_b)} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - k \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Reagrupando os termos:

$$\left[\frac{\beta^2(1 - 2\nu_b)}{2N(1 - \nu_b)} + \frac{1}{Q} \right] \frac{\partial p}{\partial t} - k \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.8})$$

A Equação (B.8) é a equação que deve ser resolvida para o cálculo das pressões ao longo da coluna. Utilizando-se da condição de que a variação de conteúdo de fluido é igual a zero no instante inicial:

$$\xi = \beta \frac{\partial u}{\partial x}(0) + \frac{1}{Q} p(0) = 0 \quad (\text{B.9})$$

De onde:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = -\frac{1}{\beta Q}p(0) \quad (\text{B.10})$$

Aplicando-se o resultado da Equação (B.10) na Equação (B.4), tem-se que para a pressão na coluna no instante inicial:

$$p(0) = \frac{P}{\left[\frac{2N(1-\nu_b)}{(1-2\nu_b)\beta Q} + \beta \right]} \quad (\text{B.11})$$

Observando-se a Equação (B.8) e a equação da condução de calor unidimensional apresentada em (Incropera e DeWitt, 1996), pode-se concluir que uma solução para esta servirá como solução para a Equação (B.8). Com isso chega-se a equação que descreve o comportamento da pressão ao longo da coluna poroelástica.

$$p(x, t) = \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n h)}{\beta_n} \exp(-c\beta_n^2 t) \cos[\beta_n(h - x)] \quad (\text{B.12})$$

sendo:

$$c = \frac{k}{\left[\frac{\beta^2(1-2\nu_b)}{2N(1-\nu_b)} + \frac{1}{Q} \right]} \quad (\text{B.13})$$

e

$$\beta_n = \frac{(2n + 1)\pi}{2h} \quad (\text{B.14})$$

Para o cálculo do deslocamento no topo da coluna poroelástica, chega-se a:

$$u_0 = - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (\text{B.15})$$

Utilizando-se a Equação (B.4) pode-se isolar o termo em

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(1 - 2\nu_b)}{2N(1 - \nu_b)} [\beta p - P] \quad (\text{B.16})$$

Aplicando-se o resultado anterior na Equação (B.15) e substituindo a solução, descrita na Equação (B.12):

$$u_0 = - \int_0^h \frac{(1 - 2\nu_b)}{2N(1 - \nu_b)} \left[\beta \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\beta_n h)}{\beta_n} \exp(-c\beta_n^2 t) \cos[\beta_n(h - x)] - P \right] dx \quad (\text{B.17})$$

Resolvendo-se a integral:

$$u_0 = \frac{(1 - 2\nu_b)}{2N(1 - \nu_b)} \left[Ph - \beta \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(\beta_n h)}{\beta_n^2} \exp(-c\beta_n^2 t) \right] \quad (\text{B.18})$$

Considerando-se o termo $\sin^2(\beta_n h)$ na Equação (B.18), o mesmo apresentará sempre o valor unitário, logo:

$$u_0 = \frac{(1 - 2\nu_b)}{2N(1 - \nu_b)} \left[Ph - \beta \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \exp(-c\beta_n^2 t) \right] \quad (\text{B.19})$$

Através do uso da Equação (B.19), observa-se que para $t = 0$, o deslocamento inicial no topo da coluna será:

$$u_0 = \frac{(1 - 2\nu_b)}{2N(1 - \nu_b)} \left[Ph - \beta \frac{2p(0)}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \right] \quad (\text{B.20})$$

Considerando que a série abaixo é convergente e pode ser calculada a sua soma, conforme (Leithold, 1990):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4h^2}{\pi^2(2n+1)^2} = \frac{4h^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} = \frac{4h^2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \frac{h^2}{2} \quad (\text{B.21})$$

Utilizando a resultado da soma da séria acima na Equação (B.20) pode-se obter o valor para o deslocamento inicial no topo da coluna poroelástica.

$$u_0 = \frac{(1 - 2\nu_b)h}{2N(1 - \nu_b)} [P - \beta p(0)] \quad (\text{B.22})$$

Anexo C

Solução Analítica do Tubo de Impedância com material poroso rígido

A exata solução para impedância acústica de entrada, Z_n , de uma coluna de material absorvedor poroso rígido com comprimento l com uma terminação rígida, com a descrição física feita na Figura (6.13), é encontrada em (Zwikker e Kosten, 1949) como sendo:

$$Z_n = Z_0 \operatorname{cotah}(\gamma l) \quad (\text{C.1})$$

onde Z_0 é a impedância acústica característica e γ é a constante de propagação. Os valores destes parâmetros de propagação de ondas acústicas podem ser determinados através considerando-se uma forma unidimensional das equações diferenciais da continuidade e do equilíbrio para o meio acústico (Kinsler et al., 1995), para uma partícula fluida com pressão (p) e velocidade (v), tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \alpha_\infty \rho_0 v + \sigma v \\ -\frac{h}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Assumindo uma propagação de ondas harmônicas com ondas elásticas e acústicas do tipo:

$$p = \hat{p}e^{i(\omega t - \gamma x)} \quad (\text{C.3})$$

$$v = \hat{v}e^{i(\omega t - \gamma x)}$$

Em sua forma dinâmica, no domínio da frequência, as equações descritas na Equação (C.2) são reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} i\gamma\hat{p} - (i\omega\alpha_\infty\rho_0 + \sigma)\hat{v} &= 0 \\ -\frac{i\omega h}{\rho_0 c_0^2}\hat{p} + i\gamma\hat{v} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Para uma solução não trivial, o determinante do sistema de equações formado pelas variáveis \hat{p} e \hat{v} deve ser zero, como é demonstrado na Equação (C.5):

$$\begin{vmatrix} i\gamma & -(i\alpha_\infty\rho_0\omega + \sigma) \\ -i\omega h/\rho_0 c_0^2 & i\gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{C.5})$$

o que resulta em:

$$\gamma = \frac{\omega}{c_0} h^{1/2} \left(\alpha_\infty - i \frac{\sigma}{\rho_0 \omega} \right)^{1/2} \quad (\text{C.6})$$

Como a impedância característica acústica é dada como sendo:

$$Z_0 = \frac{p}{v} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\omega h} \gamma = \frac{\rho_0 c_0}{h^{1/2}} \left(\alpha_\infty - i \frac{\sigma}{\rho_0 \omega} \right)^{1/2} \quad (\text{C.7})$$