

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

# **Algumas Considerações Teóricas sobre a Persistência de Espécies em Meios Heterogêneos**

*Autor:* LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA

*Orientador:* PROF. DR. WILSON CASTRO FERREIRA JÚNIOR

*Co-orientador:* PROF. DR. YURI DIMITROV BOZHKOV

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos pré-requisitos para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

Fevereiro de 2003



# **Algumas Considerações Teóricas sobre a Persistência de Espécies em Meios Heterogêneos**

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Luiz Antonio Ribeiro de Santana** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de fevereiro de 2003

---

**Prof. Dr. Wilson Castro Ferreira Júnior**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov**  
Co-orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de DOUTOR em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Santana, Luiz Antonio Ribeiro de

Sa59a      Algumas Considerações Teóricas sobre a Persistência de Espécies em Meios Heterogêneos / Luiz Antonio Ribeiro de Santana – Campinas, [S.P.: s.n.], 2003.

Orientador: Wilson Castro Ferreira Júnior.

Co-Orientador: Yuri Dimitrov Bozhkov.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Biomatemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Ecologia. I. Ferreira Júnior, Wilson Castro. II. Bozhkov, Yuri Dimitrov. III. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

---

# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é analisar modelos matemáticos que descrevem o comportamento de indivíduos de uma espécie hipotética que habitam um meio no qual há heterogeneidade espacial, isto é, o meio influencia as dinâmicas reprodutiva e de locomoção dessa espécie. Este efeito é obtido ao modelarmos a função densidade desses organismos via equações diferenciais parciais de evolução a coeficientes não-constantas. Mais precisamente, a introdução de uma função que corrige as capacidades reprodutivas dessa espécie caracteriza as regiões mais e menos propícias ao seu desenvolvimento. Com isso, desejamos saber se tal meio se constitui num refúgio, isto é, se este meio possui condições suficiente boas para a persistência da espécie em estudo, o que se traduz em termos matemáticos na existência de uma solução estacionária não trivial, que será a densidade limite desses indivíduos para grandes instantes de tempo.

Esta solução estacionária é obtida ao utilizarmos o Método de Fibração, introduzido e desenvolvido por S. I. Pohozaev. Este método nos informa que o autovalor fundamental de um determinado problema espectral deve ser de uma determinada magnitude.

Vários são os fatores que influenciam a magnitude do autovalor fundamental, como propriedades topológicas da região candidata a refúgio, e as capacidades de reprodução da espécie hipotética analisada. A disposição das regiões mais e menos propícias ao seu desenvolvimento também influem na magnitude desta constante. Estudamos uma situação particular na qual as regiões mais ou menos propícias se concentram numa único subconjunto convexo da região, e analisamos quais são os arranjos desta sub-região que contribuem para a persistência ou extinção da espécie em análise.

No final, analisamos uma outra situação particular, na qual a disposição entre

as regiões mais e menos favoráveis para o desenvolvimento desta espécie se alternam em escalas de comprimento pequenas em relação às dimensões da região candidata a refúgio. Utilizamos métodos de homogeneização, obtendo equações diferenciais a coeficientes constantes, que nos permitem obter conclusões a respeito da sobrevivência ou extinção da espécie em estudo de maneira mais simples que fazendo uma análise direta dos modelos originais, os quais possuem coeficientes de variação espacial rápida.

---

# Abstract

The main objective of this work is to analyze mathematical models which describe the behavior of individuals for hypothetical species which inhabits an environment with spatial heterogeneity, that is, the environment influences the reproductive and mobile features of this species. This effect is obtained if we model the density function of these organisms by evolution partial differential equations with non-constant coefficients. To be more precise, we introduce a function which corrects the reproductive capabilities of this species and characterizes the most and least favorable regions to its development. By knowing this, we wish to know if such an environment constitutes a refuge, that is, if this environment has good enough conditions for the studied species persistence, which in mathematical terms implies the existence of a stable non-trivial stationary solution, which will be the limit density of these individuals in the steady state.

This stationary solution is obtained by making use of the fibering method, introduced and developed by S. I. Pohozaev. This method implies that the fundamental eigenvalue of a certain spectral problem must be of a determined magnitude.

There are several factors which influence on the magnitude of the fundamental eigenvalue cited above, as the topological properties of the refuge candidate region, as well as the reproductive capabilities of the analyzed hypothetical species. The arrangements of the most and least favorable regions to its development also influence on the magnitude of this constant. We study a particular situation where the most or least favorable regions concentrate in a single convex subset of this region, and we analyze the arrangements of this sub-region which contribute to the persistence or extinction of the analyzed species.

At the end of this work, we analyze another particular situation, where the most

and least favorable regions for the development of this species alternate in length scales which are small when compared to the dimensions of refuge candidate region. We use homogenisation methods, obtaining a differential equation with constant coefficients, which allows us to conclude on the survival or extinction of the studied species in a way which is simpler than performing a direct analysis of the original models, which possess rapid varying coefficients.



*Eu dedico este trabalho à minha mãe Irani,  
ao meu irmão William,  
e à memória do meu pai Moraes.*



---

# Agradecimentos

Aos meus orientadores Wilson e Yuri, pelos ensinamentos, pela amizade e incentivo na realização deste trabalho.

À minha mãe Irani, por sempre ter estado ao meu lado, uma mãe simplesmente excepcional; meu irmão William, admirado e respeitado, um grande amigo; e à memória do meu pai Moraes, no qual sempre penso com muito carinho e saudade.

Aos professores Boldrini, Djairo, Rodney, Joni, Plínio e Lúcio, por terem sido excelentes docentes, e por terem me ajudado a chegar tão longe.

Aos professores Robert Stephen Cantrell, Chris Cosner, Stephen Gourley, John Norbury, Kazuhiro Kurata e Angela Alberico, os quais me deram sugestões e me forneceram alguns materiais para a realização deste texto.

Aos meus amigos, dentre eles Denise, Akiles, Rosana, Cantão, Gil, Norberto, Lucy, Chico, Daniel e Carlos Henrique, meus colegas; Brod, Tenório, Alex, Takeda e Renato, da antiga I-2 da Moradia; Fernando, Carlos Nagy, Carlon, Henry e João, de fora do ambiente acadêmico; e finalmente Sônia e Sandra, as “mães” daqui de Campinas.

Ao Portugal, que é sem dúvida meu melhor e mais querido amigo, que sempre me ajudou desde quando cheguei aqui, e que goza do meu respeito e admiração profundos.

À Fátima, Cidinha, Leila, Ednaldo e Márcio, que sempre me ajudaram no âmbito burocrático, me lembrando de compromissos e fazendo a minha vida acadêmica fluir sem problemas.

Ao IMECC e à Unicamp, por ser uma excelente universidade.

À CAPES, ao Departamento de Matemática Aplicada e ao National Institute of Health (USA), pelo suporte financeiro.

E a todos aqueles que não citei e que me ajudaram a realizar este trabalho, de uma forma ou de outra.

*Obrigado!*

---

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Dedicatória</b>	<b>ix</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xi</b>
<b>Sumário</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Sobre a Persistência de Espécies em Meios Heterogêneos</b>	<b>9</b>
2.1 Introdução . . . . .	9
2.2 Considerações Dimensionais e Teóricas . . . . .	11
<b>3 Sobre a Persistência de Espécies em Meios Heterogêneos II</b>	<b>15</b>
3.1 Introdução . . . . .	15
3.2 A Aplicação do Método de Fibrção . . . . .	18
<b>4 A Influência da Magnitude do Espectro na Persistência de Espécies</b>	<b>25</b>
4.1 Introdução . . . . .	25
4.2 Considerações dimensionais . . . . .	26
4.3 Otimização em Relação à Heterogeneidade Ambiental . . . . .	32

---

<b>5 Domínios Mínimos em Meios Heterogêneos de Oscilação Rápida</b>	<b>53</b>
5.1 Introdução . . . . .	54
5.2 O caso unidimensional . . . . .	57
5.3 O Modelo em Duas Dimensões Espaciais . . . . .	61
<b>6 Domínios Mínimos em Meios Heterogêneos de Oscilação Rápida II</b>	<b>67</b>
6.1 O Caso Unidimensional . . . . .	68
6.2 O Modelo em Duas Dimensões Espaciais . . . . .	76
6.3 Considerações sobre domínios bidimensionais mais gerais . . . . .	81
<b>7 Conclusões e Problemas em Aberto</b>	<b>85</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>
<b>A Um exemplo simples de aplicação do Método de Fibração</b>	<b>93</b>

---

# Capítulo 1

---

## Introdução

O objetivo deste texto é o estudo de modelos matemáticos que podem ser úteis para determinação de chances de sobrevivência de uma espécie hipotética, cujas dinâmicas de reprodução e locomoção são conhecidas, em regiões onde há *heterogeneidade espacial*, ou seja, quando notamos diferenças na qualidade do meio influenciando nas dinâmicas reprodutiva e mótil dos organismos em estudo.

A influência das diferenças na qualidade do meio sobre as características inerentes da espécie em análise podem ser exemplificadas de várias formas, dependendo do ambiente em estudo e da espécie a qual desejamos obter informações sobre suas chances de sobrevivência nesse ambiente. Eis alguns exemplos:

- A mobilidade dos organismos em estudo pode se alterar quando os mesmos se encontram em sub-regiões nas quais há facilidade ou dificuldade de movimentação, como animais terrestres atravessando regiões pantanosas ou rios, ou quando corredores ecológicos são construídos, visando facilitar a locomoção de organismos cuja preservação é de interesse;
- Características reprodutivas podem variar se considerarmos elementos relevantes na constituição do meio, como sub-regiões com maior incidência de predadores de uma determinada espécie em análise, prejudicando sua reprodução nessas sub-regiões; ou, a predominância ou ausência de água e alimento em algumas partes do meio, prejudicando a reprodutividade de espécies aquáticas ou terrestres que necessitam de fontes de alimento com determinada abundância para

sua proliferação.

Os dois ítems anteriores resumem a motivação do presente manuscrito. Desejamos obter respostas sobre as possibilidades de sobrevivência de organismos em situações como as descritas acima. E a forma através da qual faremos tal análise será via estudo de existência e estabilidade de soluções de equações a derivadas parciais de evolução que modelam a dinâmica vital dos organismos em estudo. Tais equações, que serão objeto de nossa análise no presente trabalho, apresentam a seguinte forma geral:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D(x, y)\nabla u) + f(x, y, u). \quad (1.1)$$

A função  $u$ , que aparece como incógnita da equação acima, denota a densidade de indivíduos da espécie em estudo no instante  $t$  e na posição  $(x, y)$  de uma região limitada  $\Omega$ , a qual servirá de candidata a refúgio para a colonização dessa espécie. Nesse trabalho nós consideraremos somente regiões planas, isto é estudaremos regiões limitadas  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , que bastam para as considerações práticas de interesse, e cujas considerações matemáticas são de maior facilidade e clareza, contribuindo para o melhor entendimento das idéias aqui apresentadas. Faremos também uma identificação da função  $u$ , que representa a densidade da população em análise, com a própria população.

A primeira parcela do segundo membro da equação (1.1) descreve a dinâmica de mobilidade dos organismos em análise, isto é, ela nos dá informações sobre as facilidades ou dificuldades de locomoção de natureza aleatória (ou difusiva) desses seres na região  $\Omega$ . A medida de dificuldade/facilidade de locomoção desses organismos é fornecida pelo coeficiente de difusão  $D$ , que assumimos que seja uma função limitada das variáveis espaciais. Permitiremos que essa função assumira somente valores *positivos*, isto é, consideramos situações onde há regiões de maior ou menor intensidade na movimentação de natureza aleatória dos organismos em análise. Uma referência sobre a obtenção desse modelo pode ser encontrada em Ferreira Jr. (1998) (*cf.*).

A segunda parcela do segundo membro de (1.1) nos dá informações sobre como os organismos se reproduzem na região  $\Omega$ . Também consideramos nessa parcela efeitos de saturação que o meio em estudo impõe ao desenvolvimento desses organismos, bem como outras possíveis influências sobre o crescimento populacional da espécie



em análise, como predação por exemplo. Assumimos que esta função seja dependente da posição, o que representa influências do meio nas capacidades reprodutivas. Ao contrário do coeficiente de difusão, permitimos que essa função assumia valores *negativos*, refletindo a existência de sub-regiões pouco propícias, ou inóspitas ao desenvolvimento da espécie em estudo no meio  $\Omega$ .

Modelos de dinâmica populacional via equações do tipo (1.1) têm sido utilizados desde a primeira metade do século passado. Fisher (1937), seguido por Kolmogorov, Petrovsky & Piskunov (1937), estudou a disseminação de um gene numa população utilizando modelos em uma dimensão espacial análogos a (1.1) nos quais o coeficiente de difusão era constante e o termo de dinâmica populacional era logística, isto é, considerou dinâmicas do tipo

$$f(x, y, u) = r \left(1 - \frac{u}{K}\right) u, \quad (1.2)$$

onde  $r$ , conhecido como coeficiente de crescimento intrínseco, é uma constante que denota o ritmo do crescimento de  $u$  para valores pequenos da respectiva densidade, e  $K$  conhecido como capacidade de suporte do meio, indica um limiar para o crescimento da população em análise, como reflexo das limitações de espaço e alimento do meio a ser colonizado por  $u$ .

Mais tarde, Skellam (1951) adotou modelos mais gerais, nos quais funções não constantes substituem os coeficientes presentes em (1.2) para modelar situações onde há heterogeneidade espacial. Kierstead & Slobodkin (1953) fizeram uso de equações do tipo (1.1) em duas dimensões espaciais, porém com coeficientes constantes, para determinação de tamanhos críticos de regiões planas para os quais era possível a sobrevivência de organismos cujas densidades obedeciam à referida equação na região dada. A região candidata a refúgio da espécie  $u$  supunha-se rodeada por outra região imediatamente letal à sobrevivência da população em estudo, modelada pela seguinte condição de fronteira do tipo *Dirichlet*:

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \quad (1.3)$$

onde  $\partial\Omega$  denota a fronteira da região  $\Omega$  candidata a refúgio da população  $u$ .

Quase trinta anos depois, Ludwig, Jones & Holling (1978) estudavam um modelo de equações diferenciais ordinárias para o controle de uma praga chamada *spruce*

*budworm* que atacava regiões de florestas em New Brunswick, Canadá. Este modelo levava em consideração, além das propriedades de crescimento pertinentes à espécie e saturação imposta pelo ambiente, efeitos de predação que, neste caso, eram somente densidade-dependentes. No ano seguinte, Ludwig, Aronson & Weinberger (1979) estudavam um modelo similar ao tratado no trabalho anterior, porém analisavam a densidade da praga no tempo e no espaço: a região em análise era uma faixa  $\Omega = (-\ell/2, \ell/2) \times \mathbb{R}$ , e analisavam sob quais condições uma população com dinâmica descrita por (1.1) poderia sobreviver num meio com condições de fronteira letais (1.3). A ausência de condições laterais na ordenada justificava a homogeneidade da densidade  $u$  em relação à variável espacial  $y$  correspondente; com isso, o modelo analisado em tal artigo era de fato em uma dimensão espacial apenas.

O estudo de tal modelo revelou a dependência da possibilidade de sobrevivência da espécie  $u$  sobre o *tamanho* da região candidata a refúgio; isto é, no caso específico do modelo de Ludwig, Aronson & Weinberger (1979), existia um valor crítico de domínio, dado por <sup>1</sup>

$$\ell^* := \pi \sqrt{\frac{D}{r}}, \quad (1.4)$$

abaixo do qual a região  $\Omega$  não se constituía num refúgio para a espécie em estudo, acarretando sua extinção. Em termos matemáticos, temos que  $\ell < \ell^*$  implica a estabilidade linear da solução trivial (que no caso é a solução nula). Neste mesmo trabalho, condições de fronteira do tipo mista, ou Condições de *Robin*, que possuem a forma<sup>2</sup>

$$u + h \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (1.5)$$

são apresentadas como modelo para um meio exterior hostil, porém não letal à população  $u$ .

Este artigo clássico foi alvo de muitos estudos e extensões para o caso bidimensional, levando em consideração os efeitos de fronteira na variável espacial  $y$ . Citemos dois deles:

Ben-Yu, Mitchell & Sleeman (1986) analisaram o mesmo problema numa região retangular, obtendo um valor crítico de área do domínio  $\Omega$ , com forma semelhante

---

<sup>1</sup> Aqui,  $D$  denota o coeficiente de difusão, e  $r$  o coeficiente de crescimento intrínseco, ambos constantes positivas. <sup>2</sup> Neste caso,  $h$  é uma constante não-negativa, e  $\partial u / \partial n$  denota a derivada normal, na direção exterior ao domínio  $\Omega$ .

àquela obtida em (1.4), a saber:

$$A^* := 2\pi^2 \frac{D}{r}. \quad (1.6)$$

Murray & Sperb (1983) estudaram um modelo mais geral, onde efeitos de termos de primeira ordem, ou *convectivos*, que modelam tendências de movimentação dos organismos numa determinada direção, foram utilizados. Esses modelos indicam a importância da magnitude do *autovalor fundamental*  $\lambda_1$  do problema elíptico associado<sup>3</sup>

$$-\Delta\phi = (\mathbf{w} \cdot \nabla\phi) + \lambda\phi \quad \text{em } \Omega, \quad (1.7)$$

$$\phi = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \quad (1.8)$$

para as chances de sobrevivência da espécie em estudo no meio  $\Omega$ . De maneira mais precisa, se a população em estudo tem densidade  $u$  obedecendo a seguinte equação na região  $\Omega$ :

$$u_t + (\mathbf{w} \cdot \nabla u) = \nu f(u) + \Delta u, \quad (1.9)$$

onde  $\nu > 0$  é uma constante e  $f(0) = 0$ , então uma condição necessária para a sobrevivência da espécie em análise nessa região é

$$\nu f'(0) > \lambda_1, \quad (1.10)$$

onde  $f'$  denota a derivada da função  $f$  em relação ao seu argumento. Além disso, no caso específico no qual temos  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$  constante, obteve-se o seguinte resultado:

$$\lambda_i(\alpha) = \lambda_i(0) + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2, \quad (1.11)$$

onde  $\alpha = |\mathbf{w}|$ ,  $\lambda_i(\alpha)$  denota o  $i$ -ésimo autovalor do problema (1.7), e  $\lambda_i(0)$  denota o  $i$ -ésimo autovalor do problema associado a (1.7), mas com ausência de convecção, isto é, quando  $\mathbf{w} \equiv 0$ .

A partir do próximo capítulo vamos nos concentrar em obter estimativas de área mínima para a sobrevivência de espécies em meios limitados, nos quais há heterogeneidade espacial, e os quais são rodeados por ambientes letais à sobrevivência da espécie em análise. Seguindo procedimentos análogos àqueles seguidos pelos autores

<sup>3</sup> O campo vetorial  $\mathbf{w}$  presente no termo de convecção da equação (1.7) é em geral uma função das variáveis espaciais, além de possuir divergente nulo.

citados nesta introdução, e apresentando métodos modernos de análise, exibiremos a importância da magnitude do espectro de determinados operadores diferenciais sobre as possibilidades de sucesso na colonização desses meios heterogêneos. A necessidade de tal estudo reside na tentativa de entender melhor situações mais realísticas. Ao considerarmos, por exemplo, regiões possuidoras de relevo variado (presença de montanhas ou lagos) ou riqueza de fauna e flora, as hipóteses tradicionais de homogeneidade das características reprodutivas, e de mobilidade das espécies analisadas nos modelos existentes não é mais válida. Por isso, há a necessidade de considerar modelos mais gerais nos quais o meio influi nas características das espécies em estudo, como está descrito em Kareiva (1990). Naquele trabalho, além de discutir a insuficiência que os modelos tradicionais possuem para a modelagem das situações concretas, o autor cita linhas de trabalho que podem ser seguidas por experimentalistas e teóricos para que haja um melhor entendimento entre as duas partes, e com isso uma melhor compreensão da influência da heterogeneidade ambiental na dinâmica de espécies:

- i. Os experimentalistas devem investigar mais rigorosamente os papéis da dispersão e subdivisão espacial em comunidades naturais;
- ii. Os teóricos devem fazer o trabalho dos experimentalistas mais “fácil”, mostrando se (e quando) os efeitos de natureza espacial são relevantes, oferecendo maneiras de se conduzir experimentos apropriadamente.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: os capítulos 2 e 3 a seguir tratam do estabelecimento de condições necessárias para a persistência de uma espécie hipotética que habita um meio que influi nas suas características reprodutivas e de mobilidade. Descobre-se, com o auxílio do *Método de Fibração*, devido a S. I. Pohozaev, que a magnitude do espectro de determinados problemas associados é de fundamental importância para chances de sucesso dessa espécie. Deixamos os detalhamentos matemáticos para o Capítulo 3. O Capítulo 2 está dedicado a explicações e interpretações dos resultados obtidos no capítulo seguinte.

O Capítulo 4 trata da influência de fatores ambientais e intrínsecos da espécie em estudo sobre a magnitude do autovalor fundamental, que se revela um indicador geral da qualidade do meio candidato a refúgio. Estudaremos nesse capítulo um caso particular de heterogeneidade espacial, na qual as regiões mais ou menos favoráveis para o

desenvolvimento da espécie hipotética se concentram numa sub-região do meio. Estudaremos a influência do posicionamento desta sub-região na magnitude do autovalor fundamental, visando obter informações que auxiliam ou prejudicam sua persistência no meio dado.

Os Capítulos 5 e 6 tratam de um outro tipo de heterogeneidade espacial: tratamos de um caso no qual as regiões mais e menos propícias ao desenvolvimento da espécie em análise se intercalam em escalas de comprimento pequenas em comparação com as dimensões da região candidata a refúgio. Utilizando a técnica de *homogeneização*, obtemos uma equação diferencial auxiliar com coeficientes *constantes*, relacionada com a equação original que modela a dinâmica reprodutiva e de mobilidade da espécie em estudo, e que fornece informações sobre a influência da disposição das regiões mais e menos favoráveis nas chances de sobrevivência dessa espécie de uma maneira mais simples que a análise direta do modelo original, que possui coeficientes de variação rápida. Organizamos este tópico de maneira similar àquela apresentada nos Capítulos 1 e 2, isto é, o Capítulo 5 contém explicações e interpretações dos resultados obtidos no capítulo seguinte.

Encerramos o trabalho com conclusões e uma apresentação de problemas relacionados com os tópicos apresentados e estudados no texto, porém não analisados em profundidade.

Uma aplicação do método de fibração foi feita num caso mais elementar que o apresentado no texto. Com isso, visamos mostrar ao leitor uma aplicação simples do método, e com isso ajudar na leitura deste texto.



---

---

## Capítulo 2

---

# Sobre a Persistência de Espécies em Meios Heterogêneos

### RESUMO DO CAPÍTULO

Iniciamos neste capítulo o estudo de modelos matemáticos para dinâmica populacional e de mobilidade de indivíduos que habitam uma região limitada a qual, em virtude da presença de regiões mais ou menos propícias ao seu desenvolvimento, influem nas características reprodutivas da espécie hipotética cuja capacidade de colonização nesse meio se deseja prever.

### 2.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é interpretar os resultados obtidos sobre os modelos matemáticos que exibem influência do meio nas capacidades reprodutivas e de locomoção de uma espécie hipotética, cuja densidade é denotada pela letra  $u$ , e que satisfaz uma determinada equação diferencial parcial a coeficientes não-constantes, que refletem a heterogeneidade ambiental. Este capítulo está reservado somente a comentários e interpretações dos resultados a serem obtidos no capítulo seguinte, onde os detalhes matemáticos correspondentes serão apresentados.

Os modelos considerados neste trabalho para análise de sobrevivência de uma espécie levam em consideração influências do meio nas características reprodutivas e de movimentação dessa espécie. Seguindo Cantrell & Cosner (1989), Cantrell & Cosner (1991a) e Cantrell & Cosner (1991b), consideraremos variantes da dinâmica reprodutiva do tipo logística clássica apresentada no capítulo anterior. De maneira mais precisa, usaremos a seguinte variante para o termo de dinâmica vital:

$$f(x, y, u) := r \left( \gamma(x, y) - \frac{u}{K} \right) u, \quad (2.1)$$

no qual as constantes positivas  $r$  e  $K$ , representando a taxa de crescimento intrínseco e a capacidade de suporte associada à espécie  $u$ , respectivamente, mantêm os significados do modelo logístico tradicional. Porém notamos neste novo termo a presença de uma função  $\gamma$ , a qual é dependente das variáveis espaciais. Esta função, que assumimos ser limitada, é um indicador da interferência do meio nas capacidades reprodutivas da espécie  $u$ . Esta função também assumirá valores *negativos* em sub-regiões inóspitas à sobrevivência de  $u$  na região  $\Omega$ . Convém notar que a função  $\gamma$  introduzida em (2.1) influencia *somente* as capacidades reprodutivas da espécie em análise. Com isso, referir-nos-emos à constante  $r$ , que indica a capacidade de reprodução da espécie hipotética na ausência de heterogeneidade espacial, como taxa de crescimento intrínseco *básico*.

As limitações de espaço do meio ainda se fazem presentes, independente da existência de regiões mais ou menos propícias ao desenvolvimento de  $u$ , o que é revelado pela independência do termo de “saturação” da função  $\gamma$ <sup>1</sup>. Este termo de saturação deve ser entendido como a resposta do meio a grandes valores da densidade  $u$  revelando a impossibilidade do mesmo suportar um valor de densidade acima de um determinado valor (representado pela constante positiva  $K$ ) na ausência de heterogeneidade espacial. Para valores pequenos de  $u$ , temos  $u^2 \ll u$ , isto é, o termo de dinâmica vital se comporta como malthusiano para valores de densidade baixos.

Nós também consideramos neste trabalho a interferência das diferenças de qualidade do meio em estudo  $\Omega$  nas características de mobilidade da espécie  $u$ . De maneira mais precisa, permitiremos que o coeficiente de difusão da espécie  $u$  seja também função das variáveis espaciais, como está exposto explicitamente em (1.1).

<sup>1</sup> Devemos salientar que os efeitos de saturação se fazem presentes nas regiões nas quais  $\gamma > 0$ . Nos pontos onde  $\gamma < 0$ , os efeitos de saturação não são apreciados, pois o termo de dinâmica vital é estritamente negativo nesses pontos.



## 2.2 CONSIDERAÇÕES DIMENSIONAIS E TEÓRICAS

Para apreciarmos de maneira mais clara a influência das variáveis de interesse do problema (como o tamanho do domínio candidato a refúgio, taxas de crescimento intrínseco, etc.) na persistência ou extinção da espécie em estudo, faremos uso de variáveis dependentes e independentes *adimensionais*, definidas em função das variáveis originais do problema em questão com dinâmica vital definida em (2.1). As mudanças das variáveis dependentes são exibidas a seguir:

$$\bar{x} := x/\sqrt{|\Omega|}, \quad (2.2)$$

$$\bar{y} := y/\sqrt{|\Omega|}, \quad (2.3)$$

$$\bar{t} := rt, \quad (2.4)$$

onde  $|\Omega|$  denota a Medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^2$  da região  $\Omega$ , ou seja, sua área. Nós também utilizaremos a seguinte reescala na função incógnita:

$$\bar{u} := \frac{u}{K} \quad (2.5)$$

para reescrever o termo de dinâmica reprodutiva sob a seguinte forma:

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) = \bar{\gamma}(\bar{x}, \bar{y})\bar{u} - \bar{u}^2, \quad (2.6)$$

onde

$$\bar{\gamma}(\bar{x}, \bar{y}) := \gamma\left(\sqrt{|\Omega|}\bar{x}, \sqrt{|\Omega|}\bar{y}\right). \quad (2.7)$$

Ao considerarmos a função auxiliar  $\bar{D}$  definida por

$$\bar{D}(\bar{x}, \bar{y}) := \frac{1}{r|\Omega|} D\left(\sqrt{|\Omega|}\bar{x}, \sqrt{|\Omega|}\bar{y}\right), \quad (2.8)$$

e ao omitirmos os sinais sobre as novas variáveis, para maior clareza e economia de notação, apresentamos o modelo no qual concentraremos nossos esforços, os quais possuem a seguinte forma explícita:

$$u_t = \nabla \cdot (D(x, y)\nabla u) + \gamma(x, y)u - u^2 \quad \text{em } U \times \{t > 0\}, \quad (2.9)$$

$$u = 0 \quad \text{em } \partial U \times \{t \geq 0\}, \quad (2.10)$$

$$u = u_0(x, y), \quad \text{em } \bar{U} \times \{t = 0\}, \quad (2.11)$$

onde  $u_0$  descreve a distribuição inicial dos indivíduos na região  $U$ , obtida da região original  $\Omega$  a partir das reescalas feitas em (2.2) e (2.3),  $\bar{U} := U \cup \partial U$  denota o fecho do conjunto  $U$ . Faremos estudos sobre formas particulares para as funções  $\gamma$  e  $D$  mais adiante. Neste capítulo e no seguinte estaremos interessados em relacionar as possibilidades de sobrevivência da espécie  $u$  com algumas propriedades geométricas e topológicas da região original  $\Omega$ , como sua área por exemplo. Mostraremos a seguir que a existência de soluções estacionárias estáveis para o problema (2.9), (2.10), (2.11), que correspondem a configurações bem sucedidas da colonização do meio em estudo quando  $t \rightarrow \infty$ , dependem de um tamanho *crítico* de domínio, abaixo do qual somente a solução trivial existe como solução estacionária, indicando o insucesso da tentativa de colonização, e a conseqüente extinção da espécie no meio em análise, não se constituindo, pois, num refúgio para os organismos em estudo.

Para isso, apresentamos e analisamos resultados para a existência da soluções não-triviais para o problema estacionário associado ao problema (2.9), (2.10), (2.11), a saber:

$$-\nabla \cdot (D(x, y) \nabla u) = \gamma(x, y) u - u^2 \quad \text{em } U, \quad (2.12)$$

$$u = 0 \quad \text{em } \partial U. \quad (2.13)$$

Como o problema (2.12), (2.13) é possuidor de coeficientes não-constantes, uma análise via métodos clássicos não se aplica nesse caso. Para obtermos as informações desejadas sobre o modelo acima, devemos fazer uso de métodos variacionais, isto é, caracterizar as soluções do problema acima como pontos críticos de um determinado Funcional de Euler  $\mathcal{J}(u)$ .

Os resultados exibidos a seguir foram inicialmente obtidos por Cantrell & Cosner (1989), no caso de difusão constante, e por Cantrell & Cosner (1991b) no caso de difusão variável. Temos que o problema (2.12), (2.13) admite uma solução positiva, não-trivial, entendida no sentido de ponto crítico do Funcional de Euler  $\mathcal{J}(u)$ , para

$$\lambda_1 < 1, \quad (2.14)$$

onde o autovalor fundamental  $\lambda_1$  é a menor constante positiva que torna a seguinte identidade verdadeira:

$$\iint_U D(x, y) \nabla \phi \cdot \nabla v \, dx \, dy = \lambda \iint_U \gamma(x, y) \phi v \, dx \, dy, \quad (2.15)$$

onde  $\phi$  denota a auto-função associada ao autovalor  $\lambda$  e tal identidade deve satisfazer para todas as funções  $v$  pertencentes ao conjunto  $W$  para os quais a identidade (2.15) faz sentido e que se anulam na fronteira de  $U$  (cf. Capítulo 3). Além disso, temos que essa solução, caso seja única, será assintoticamente estável quando  $t \rightarrow \infty$  para quaisquer valores iniciais não-negativos  $u_0$ . Logo, esta solução nos informa a densidade da espécie em análise no estado estacionário, indicando que o meio é propício ao seu desenvolvimento quando temos  $\lambda_1 < 1$ , se constituindo, pois, num refúgio para esta espécie.

Quando temos

$$\lambda_1 \geq 1, \quad (2.16)$$

a solução identicamente nula é a única solução do problema (2.12), (2.13), que passa a ser a solução assintoticamente estável quando  $t \rightarrow \infty$  para valores iniciais não negativos, o que implica neste caso o insucesso na colonização do meio  $\Omega$  pela espécie  $u$ , resultando na sua extinção. Logo, a região  $\Omega$  original não suporta a colonização da espécie  $u$ , não se constituindo num refúgio para a referida espécie.

A condição para persistência da espécie  $u$  dada em (2.14) revela a importância que o autovalor fundamental  $\lambda_1$  tem sobre as chances de sucesso na colonização do meio dado. Veremos mais adiante que esta constante é influenciada por vários fatores relativos à espécie em análise e ao meio em estudo, como o coeficiente de crescimento intrínseco  $r$  e a área do candidato a refúgio  $\Omega$ .

Portanto, é de interesse obter estimativas para esse valor, bem como obter informações sobre a influência que a heterogeneidade do meio em questão para o aumento ou a diminuição dessa constante. Mais adiante estudaremos como a magnitude de  $\lambda_1$  se altera mediante arranjos dos valores de um tipo específico de função de crescimento  $\gamma$ .

No próximo capítulo trataremos da obtenção de resultados similares aos citados acima, porém utilizando *Método de Fibrção* introduzido e desenvolvido por S. I. Pohozaev. Tal método consiste basicamente na imersão do espaço de funções  $W$  introduzido acima num espaço maior (que no caso da fibrção esférica, que será utilizada nesse trabalho, é  $\mathbb{R} \times W$ ), e analisarmos os pontos críticos do funcional  $\mathcal{J}$  como pontos críticos de um outro funcional  $\hat{\mathcal{J}}$ , definido a partir de  $\mathcal{J}$ , porém com restrições. Pode-se

mostrar que tais problemas são equivalentes, o que nos possibilita obter novos resultados sobre existência e não-existência de problemas não-lineares, como (2.12), (2.13), possibilitando a separação de fatores algébricos e topológicos do problema, o que afeta o número de soluções.

Nos trabalhos Pohozaev & Drábek (1997) e Pohozaev (1999), uma versão mais geral do problema (2.12), (2.13) é estudada, porém obtendo uma caracterização para a solução positiva não-trivial obtida em Cantrell & Cosner (1991b), a saber:

$$u = t(v_1)v_1, \quad (2.17)$$

onde

$$t(v) := \frac{H(v)}{F(v)} \quad (2.18)$$

e  $v_1$  é a função minimizadora do seguinte problema:

$$m := \inf_{v \in W} \{H(v) \mid F(v) = -1\}, \quad (2.19)$$

com

$$H(v) := \iint_{\Omega} D(x, y) |\nabla v|^2 \, dx dy - \iint_{\Omega} \gamma(x, y) v^2 \, dx dy, \quad (2.20)$$

e

$$F(v) := - \iint_{\Omega} |v|^3 \, dx dy. \quad (2.21)$$

Convém neste ponto notar que este método fornece uma caracterização da solução positiva do problema, correspondendo a uma função minimizante do problema de ponto crítico com restrição exibido em (2.19), o que representa um meio para obtenção dessa função, por métodos numéricos por exemplo, facilitando a observação e o estudo dos padrões para a densidade em estado estacionário em meios heterogêneos, como o meio  $\Omega$  o qual estudamos neste trabalho.

---

---

## Capítulo 3

---

# Sobre a Persistência de Espécies em Meios Heterogêneos II: Detalhamentos Matemáticos

### RESUMO DO CAPÍTULO

Nesta parte do trabalho, nós pretendemos realizar os detalhamentos matemáticos necessários para a obtenção dos resultados discutidos no capítulo anterior, onde a se faz comentários do ponto de vista ecológico sobre a sobrevivência de espécies que almejam colonizar meios onde existe heterogeneidade espacial. Para isso, lançamos mão do *Método de Fibração*, devido a S. I. Pohozaev, que permite obter e caracterizar soluções não triviais de equações diferenciais elípticas não-lineares a coeficientes não constantes.

### 3.1 INTRODUÇÃO

Nesta parte do trabalho, estamos interessados na obtenção dos resultados discutidos no capítulo anterior, onde as possibilidades de sobrevivência de uma espécie hipotética, cuja densidade é denotada por  $u$ , são discutidas. Admitimos que tal espécie

obedeça a uma dinâmica vital com difusão na qual suas tendências de movimentação, bem como suas capacidades reprodutivas, são dependentes da posição do meio, que é denotado pela letra grega  $\Omega$  que, por simplicidade, assumimos ser um domínio do plano  $\mathbb{R}^2$ . Para sermos mais precisos, assumimos que  $u$  resolve a seguinte equação a derivadas parciais de evolução:

$$u_t = \nabla \cdot (D(x, y)\nabla u) + r\gamma(x, y)u - \frac{r}{K}u^2, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, \infty), \quad (3.1)$$

$$u = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

$$u = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t = 0, \quad (3.3)$$

onde a função  $D$  denota o coeficiente de difusão, que permitimos depender das variáveis espaciais sobre a região  $\Omega$  em estudo, assim como a função  $\gamma$ , que supomos limitada,  $\gamma \leq 1$ , que mede a interferência do meio nas capacidades reprodutivas da espécie  $u$ , podendo inclusive assumir valores negativos, indicando a existência de sub-regiões impróprias ao seu desenvolvimento; porém, vamos considerar a saturação do ambiente como constante ao longo do domínio  $\Omega$ . Tal constante, conhecida comumente como capacidade de suporte, denotamos pela letra  $K$ . Nós denotamos por  $u_0$  a distribuição inicial espécie em estudo no meio  $\Omega$ , a qual supomos ser uma função limitada e não-negativa em  $\Omega$ . Supomos que o coeficiente de difusão  $D$  também seja uma função positiva e limitada das variáveis espaciais.

A análise de sobrevivência de espécies via modelos que seguem dinâmicas descritas no problema (3.1), (3.2) e (3.3) se baseia na existência e análise de estabilidade das *soluções estacionárias* desse problema, ou seja, as soluções do problema seguinte:

$$-\nabla \cdot (D(x, y)\nabla u) = r\gamma(x, y)u - \frac{r}{K}u^2, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3.4)$$

$$u = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (3.5)$$

Como discutimos anteriormente, a existência (ou não) de soluções não-triviais para o problema estacionário acima determina chances de sucesso na colonização do meio em análise.

Para que possamos estabelecer as devidas conexões entre existência de soluções não-triviais do problema (3.4), (3.5) e as variáveis de interesse do problema, faremos

uso das seguintes reescalas das variáveis independentes:

$$\bar{x} := x/\sqrt{|\Omega|}, \quad (3.6)$$

$$\bar{y} := y/\sqrt{|\Omega|}, \quad (3.7)$$

$$\bar{t} := rt, \quad (3.8)$$

assim como utilizaremos a função incógnita adimensional seguinte:

$$\bar{u} := \frac{u}{K}.$$

Com isso, ao considerarmos as novas funções

$$\bar{D}(\bar{x}, \bar{y}) := \frac{1}{r|\Omega|} D\left(\sqrt{|\Omega|}\bar{x}, \sqrt{|\Omega|}\bar{y}\right),$$

$$\bar{\gamma}(\bar{x}, \bar{y}) := \gamma\left(\sqrt{|\Omega|}\bar{x}, \sqrt{|\Omega|}\bar{y}\right),$$

onde  $|\Omega|$  denota a área da região  $\Omega$ , nós obtemos, após omitirmos os sinais acima dos objetos em estudo, para clareza e economia de notação, o seguinte problema a ser analisado:

$$-\nabla \cdot (D(x, y)\nabla u) = \gamma(x, y)u - u^2, \quad (x, y) \in \mathcal{U}, \quad (3.9)$$

$$u = 0, \quad (x, y) \in \partial\mathcal{U}, \quad (3.10)$$

no qual  $\mathcal{U}$  denota o domínio obtido a partir de  $\Omega$  através da reescala definida por (3.6),(3.7). Como consequência de tal reescala, temos que  $|\mathcal{U}| = 1$ .

Introduzimos um parâmetro de controle  $\alpha > 0$ , para modular as características reprodutivas da espécie  $u$ , promovendo maiores ou menores diferenças de qualidade do meio, mas não alterando a saturação do mesmo. Com isso, estudaremos a seguinte variante do problema (3.9), (3.10):

$$-\nabla \cdot (D(x, y)\nabla u) = \alpha\gamma(x, y)u - u^2, \quad (x, y) \in \mathcal{U}, \quad (3.11)$$

$$u = 0, \quad (x, y) \in \partial\mathcal{U}, \quad (3.12)$$

Como o problema descrito em (3.11), (3.12) está escrito na forma divergente, sem termos de primeira ordem, podemos utilizar métodos de energia para sua análise,

ou seja, vamos considerar as *soluções fracas* do problema acima, que são as funções  $u \in W := H_0^1(\Omega)$  com a norma<sup>1</sup>

$$\|u\| := \left( \iint_U D(x, y) |\nabla u|^2 dx dy \right)^{1/2}, \quad (3.13)$$

que fazem a seguinte relação verdadeira,  $\forall v \in W$ :

$$\iint_U D(x, y) \nabla u \cdot \nabla v dx dy = \alpha \iint_U \gamma(x, y) uv dx dy - \iint_U u^2 v dx dy, \quad (3.14)$$

bem como podemos identificar as soluções do problema variacional acima como pontos críticos do seguinte *Funcional de Euler*:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\alpha(u) &:= \frac{1}{2} \iint_U D(x, y) |\nabla u|^2 dx dy - \frac{\alpha}{2} \iint_U \gamma(x, y) u^2 dx dy + \frac{1}{3} \iint_U |u|^3 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\alpha}{2} G(u) - \frac{1}{3} F(u), \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde

$$F(u) := - \iint_U |u|^3 dx dy, \quad (3.16)$$

e

$$G(u) := \iint_U \gamma(x, y) u^2 dx dy. \quad (3.17)$$

## 3.2 A APLICAÇÃO DO MÉTODO DE FIBRAÇÃO

Faremos a análise da existência de pontos críticos do funcional acima via uso do *Método de Fibração*, devido a S.I. Pohozaev, e apresentado no caso específico de problemas do tipo (3.11), (3.12), em Pohozaev & Drábek (1997) e em Pohozaev (1999), porém numa versão mais geral que esta. A seguir faremos uma reprodução detalhada das idéias contidas nos artigos citados acima, porém com adaptações para o caso o qual estamos interessados.

A idéia consiste em associar o Funcional de Euler definido em (3.15) com um outro, de propriedades adicionais, e observar a magnitude da constante  $\alpha$ , em comparação

<sup>1</sup> A norma definida em (3.13) é equivalente à norma usual de  $H_0^1(U)$ , fato este devido à limitação da função  $D$ , e à Desigualdade de Poincaré.



com o autovalor fundamental do problema seguinte:

$$\iint_{\mathcal{U}} D(x, y) \nabla \phi \cdot \nabla v \, dx \, dy = \lambda \iint_{\mathcal{U}} \gamma(x, y) \phi v \, dx \, dy, \quad (3.18)$$

onde as incógnitas são o autovalor  $\lambda$  e a autofunção  $\phi \in W$ . A identidade acima deve ser válida para todo  $v \in W$ . Convém lembrar neste ponto que o autovalor fundamental do problema acima é possuidor da seguinte caracterização variacional:

$$\lambda_1 = \min_{\substack{\phi \in W \\ \iint_{\mathcal{U}} \gamma(x, y) \phi^2 \, dx \, dy > 0}} \frac{\iint_{\mathcal{U}} D(x, y) |\nabla \phi|^2 \, dx \, dy}{\iint_{\mathcal{U}} \gamma(x, y) \phi^2 \, dx \, dy}, \quad (3.19)$$

e que tal autovalor é simples e positivo (cf. Alberico, Ferone & Volpicelli (1999) e as referências lá contidas).

Seguindo o Método de Fibrção, consideremos a função  $v \in W$ , definida a partir de  $u$ , solução de (3.14) através da relação

$$u = tv, \quad (3.20)$$

onde a constante positiva  $t \in \mathbb{R}$  é a princípio arbitrária, porém fixa e determinada *a posteriori*. Substituindo (3.20) em (3.15), nós temos

$$\mathcal{J}_\alpha(tv) = \frac{t^2}{2} \|v\|^2 - \frac{\alpha t^2}{2} G(v) - \frac{|t|^3}{3} F(v).$$

Escolhemos como *funcional de fibrção* a parte principal de  $\mathcal{J}_\alpha$ , a saber:

$$\begin{aligned} H_\alpha(v) &:= \iint_{\mathcal{U}} |\nabla v|^2 \, dx \, dy - \alpha \iint_{\mathcal{U}} \gamma(x, y) |v|^2 \, dx \, dy \\ &= \|v\|^2 - \alpha G(v). \end{aligned}$$

Como  $u$  é ponto crítico de (3.15), temos que a equação de bifurcação

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J}_\alpha(tv) = 0 \quad (3.21)$$

é válida. No nosso caso específico, temos que (3.21) toma a seguinte forma:

$$tH_\alpha(v) - |t|F(v) = 0.$$

Como estamos interessados em obter soluções não-triviais, impomos naturalmente que  $t \neq 0$ , obtendo assim a seguinte expressão para  $|t|$ :

$$|t| = \frac{H_\alpha(v)}{F(v)}. \quad (3.22)$$

Convém neste ponto notar que as seguintes condições são necessárias para que (3.22) tenha sentido:

$$F(v) \neq 0,$$

e

$$\frac{H_\alpha(v)}{F(v)} > 0.$$

Substituindo (3.22) em (3.15), nós obtemos o *funcional induzido*

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{J}}_\alpha(v) &:= \mathcal{J}_\alpha(t(v)v) \\ &= \frac{1}{6} \left( \frac{H_\alpha(v)}{F(v)} \right)^3 F(v). \end{aligned} \quad (3.23)$$

O funcional induzido  $\widehat{\mathcal{J}}_\alpha$  obtido acima goza de certas propriedades. Ei-las:

- i. Homogeneidade de grau zero: Para todos  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , e  $v \in W$  tal que  $F(v) \neq 0$  nós temos

$$\widehat{\mathcal{J}}_\alpha(\tau v) = \widehat{\mathcal{J}}_\alpha(v).$$

Temos, em particular que  $\widehat{\mathcal{J}}_\alpha$  é um funcional par e sua Derivada de Gâteaux em  $v$  na direção  $v$  é zero, isto é:

$$\langle \widehat{\mathcal{J}}'_\alpha(v), v \rangle = 0;$$

- ii. Se  $v_c \in W$  for ponto crítico de  $\widehat{\mathcal{J}}_\alpha$ , então  $|v_c|$  também será ponto crítico de  $\widehat{\mathcal{J}}_\alpha$ ;  
 iii. Pontos críticos do funcional induzido  $\widehat{\mathcal{J}}_\alpha$  também são pontos críticos do mesmo funcional, mas com a seguinte *restrição de fibração*:

$$\mathcal{F}(v) = c,$$

onde  $\mathcal{F}$  é um funcional diferenciável que satisfaz a *condição de não-degeneração*

$$\langle \mathcal{F}'(v), v \rangle \neq 0 \quad \text{sempre que} \quad \mathcal{F}(v) = c.$$

Conclui-se que caso encontremos algum ponto crítico  $v_c$  de  $\widehat{J}_\alpha$ , podemos assumir sem perda de generalidade que  $v_c$  é uma função *não-negativa* em  $U$ . Os detalhamentos destas observações encontram-se no Apêndice A, em Drábek & Pohozaev (1997) e Pohozaev (1999) (*cf.*).

Originalmente, o método de fibração indica a existência de soluções para o problema (3.4), (3.5), cuja multiplicidade é dependente da magnitude do autovalor fundamental  $\lambda_1$ . Há dois casos a considerar:

- i.  $\alpha \leq \lambda_1$ ;
- ii.  $\alpha > \lambda_1$ .

Quando estamos no primeiro caso, obtemos a existência de uma solução positiva, não-trivial do problema (3.4), (3.5) ao escolhermos como restrição de fibração

$$H_\alpha(v) = 1,$$

que satisfaz a condição de não degeneração, pois quando  $H(v) = 1$ , temos

$$\langle H'_\alpha(v), v \rangle = 2 H(v) = 2 \neq 0;$$

porém, temos por (3.22) que  $F(v)$  deve ser positivo, o que é vetado por sua própria definição (*cf.*). Com isso, o Método de Fbração não se aplica imediatamente nesse caso, em concordância com os resultados obtidos em Cantrell & Cosner (1991), que prevêem a não-existência de solução positiva para  $\alpha \leq \lambda_1$ .

No caso  $\alpha > \lambda_1$ , o método de fibração nos dá originalmente dois pontos críticos positivos, não-triviais, e distintos para o funcional (3.15). Porém, para a obtenção de um deles, necessitamos impor a condição de positividade do funcional  $F$ . Logo, não podemos obter essa solução neste caso.

Concentrar-nos-emos, pois, em obter a segunda solução positiva do problema (3.4), (3.5) quando temos  $\alpha > \lambda_1$  pelo Método de Fbração. Para isto, escolhemos  $F(v)$  como funcional de fibração, e

$$F(v) = -1$$

como a restrição de fibração; temos que a condição de não-degeneração também é satisfeita nesse caso, pois

$$\langle F'(v), v \rangle = -3F(v) = 3 \neq 0.$$

Com esta restrição, o funcional induzido  $\widehat{J}_\alpha$  se torna

$$\widehat{J}_\alpha(v) = \frac{1}{6} (H_\alpha(v))^3.$$

Precisamos, em decorrência da definição de  $t$  dada em (3.22), encontrar um ponto crítico de  $\widehat{J}_\alpha$  que satisfaça a condição

$$H_\alpha(v) < 0.$$

Logo, faz sentido obter tal ponto encontrando a função que realiza o mínimo  $m_\alpha$  do seguinte problema:

$$m_\alpha = \inf_{v \in W} (H_\alpha(v) \mid F(v) = -1). \quad (3.24)$$

Mostremos inicialmente que o espaço de funções sobre o qual pretendemos encontrar o ínfimo acima é não-vazio; isto é, provemos que

$$W^- := \{v \in W \mid F(v) = -1\} \neq \emptyset.$$

Para isto, tomamos “a” auto-função  $e_1$  associada ao autovalor fundamental<sup>2</sup> do problema (3.18). Pela Teoria Espectral, tal função é positiva em  $U$ ; logo,

$$F(e_1) < 0. \quad (3.25)$$

Com isso, e pela 3-homogeneidade de  $F$ , podemos encontrar uma constante  $t_1$  tal que  $F(t_1 e_1) = -1$ . Com isso, temos que  $W^-$  não é vazio, como queríamos demonstrar. Além disso temos, pela caracterização variacional do autovalor fundamental  $\lambda_1$ , que

$$H(t_1 e_1) = |t_1|^2 (\lambda_1 - \alpha) G(e_1) < 0,$$

o que implica que o ínfimo  $m$  é negativo, por definição.

Para provarmos que a solução positiva do problema (3.4), (3.5), que corresponde ao minimizador do problema (3.24), existe para  $\alpha \in (\lambda_1, \lambda_1 + L)$ , onde  $L$  é uma constante

<sup>2</sup> Estamos nos referindo à auto-função  $e_1$  positiva, associada ao autovalor  $\lambda_1$  que satisfaz a identidade (3.18) para todo  $v \in W$ . (cf. Alberico, Ferone & Volpicelli (1999) e as referências lá contidas).

positiva, supomos por absurdo que a afirmação acima é falsa, o que implica a existência de uma seqüência  $\epsilon_k \rightarrow 0$  tal que para qualquer  $\alpha^k := \lambda_1 + \epsilon_k$  o problema de minimização (3.24) não possui função minimizante (não-negativa). Para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , seja  $(v_n^k)_{n=1}^\infty$  uma seqüência minimizante do problema (3.24), isto é,

$$F(v_n^k) = -1 \quad \text{e} \quad H_{\alpha^k}(v_n^k) \rightarrow m_{\alpha^k} \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Se  $(v_n^k)_{n=1}^\infty$  é limitada para algum  $k \in \mathbb{N}$ , podemos, sem perda de generalidade, assumir que ela converge fracamente em  $W$  para uma função  $\bar{v}^k$  quando  $n \rightarrow \infty$ . A continuidade fraca dos funcionais  $F$  e  $G$  e a semi-continuidade fraca inferior da parte principal  $H_\alpha$  nos permite deduzir, na passagem do  $\liminf$  quando  $n \rightarrow \infty$ , que

$$F(\bar{v}^k) = -1 \quad \text{e} \quad H_{\alpha^k}(\bar{v}^k) \leq m_{\alpha^k}.$$

Mas, por definição de  $m_{\alpha^k}$  dada em (3.24), temos que a desigualdade acima vale no sentido oposto. Com isso, obtemos por contradição uma função minimizante para o problema (3.24) que no caso é a função limite  $\bar{v}^k$ .

Com isso, a seqüência  $(v_n^k)_{n=1}^\infty$  é ilimitada para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ . Assumimos, sem perda de generalidade, que

$$\|v_n^k\| \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty;$$

além disso construímos, a partir dessa seqüência, uma outra seqüência  $(w_n^k)_{n=1}^\infty$  da seguinte maneira:

$$w_n^k := \frac{v_n^k}{r_n^k},$$

onde

$$|r_n^k| := \|v_n^k\|.$$

Por definição, temos  $\|w_n^k\| = 1$ , o que nos permite tomar uma subsequência, se necessário, e assumir que  $w_n^k$  converge fracamente em  $W$  para uma função  $\bar{w}^k \in W$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Como o limite fraco  $\bar{w}^k$  obedece  $\|\bar{w}^k\| \leq 1$ , podemos tomar uma outra subsequência, e assumir a convergência fraca de  $\bar{w}^k$  em  $W$  para uma função  $\bar{w} \in W$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Novamente temos

$$\|\bar{w}\| \leq 1. \tag{3.26}$$

Observando as definições de  $v_n^k$  e  $w_n^k$ , deduzimos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} |r_n^k|^2 (1 - \alpha^k G(w_n^k)) &= |r_n^k|^2 - |r_n^k|^2 \alpha^k G(w_n^k) \\ &= \|v_n^k\| - \alpha^k (v_n^k) \\ &= H_{\alpha^k}(v_n^k) \rightarrow m_{\alpha^k} < 0. \end{aligned}$$

Com base em (3.26) e na observação acima, e aplicando duas vezes o  $\liminf$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $k \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\|\bar{w}\| - \lambda_1 G(\bar{w}) \leq 1 - \lambda_1 G(\bar{w}) \leq 0.$$

A desigualdade acima é válida no sentido contrário, em virtude da natureza minimizante do autovalor fundamental  $\lambda_1$  em relação ao Quociente de Rayleigh exibido em (3.19). Com isso, com base na Teoria Espectral, podemos encontrar uma constante  $k_1 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\bar{w} = k_1 e_1. \quad (3.27)$$

A 3-homogeneidade do funcional  $F$  nos leva a concluir que

$$F(w_n^k) = \frac{1}{|r_n^k|^3} F(v_n^k) = -\frac{1}{|r_n^k|^3}.$$

Passando os limites quando  $n \rightarrow \infty$  e  $k \rightarrow \infty$  nós obtemos pela continuidade fraca de  $F$

$$F(\bar{w}) = 0,$$

ou, por (3.27), que

$$|k_1|^3 F(e_1) = 0,$$

o que é uma contradição, por (3.25). Logo, fazendo  $\alpha = 1$ , nós obtemos a solução do problema (3.4), (3.5) quando  $\lambda < 1$ , tomando a função  $v$  minimizante do problema (3.24), e considerando a função  $u$ , definida a partir de  $v$  pela relação

$$u = t(v) v,$$

onde  $t(v)$  é definido em (3.22). As referências contidas em Pohozaev & Drábek (1997), e Pohozaev (1999) garantem sua positividade, limitação em quase toda parte e diferenciabilidade local.

---

---

## Capítulo 4

---

# A Influência da Magnitude do Espectro na Persistência de Espécies

### RESUMO DO CAPÍTULO

Pretendemos nesse capítulo obter informações a respeito da influência de fatores ambientais e intrínsecos sobre o autovalor fundamental de um determinado problema de valores de contorno. A magnitude deste autovalor revelou-se, nos capítulos anteriores, fundamental para determinação das chances de sobrevivência dessa espécie. Análises dimensionais e métodos variacionais se fazem úteis para obtenção de tais conclusões.

### 4.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores, nos propusemos a estudar situações ecológicas nas quais um meio limitado  $\Omega$  possuía influência nas capacidades reprodutivas de uma espécie hipotética, cuja densidade denotamos pela letra  $u$ . Modelamos tal influência através de uma equação diferencial parcial semi-linear a coeficientes não-constantes, a qual a densidade  $u$  supomos obedecer. Um desses coeficientes, o qual chamamos de  $\gamma$ , servia como uma correção no coeficiente de crescimento intrínseco da espécie, que por abuso

de notação também chamávamos de  $u$ , deixando a saturação ambiental constante. E também assumimos que o meio exterior era letal à essa espécie. Sob estas hipóteses, estudamos quais condições eram necessárias para que este ambiente  $\Omega$  se constituia num refúgio para a espécie  $u$ .

Nós concluímos que o sucesso da colonização deste meio dependia da magnitude de uma constante. Esta constante, denominada autovalor fundamental, revela-se, em virtude das reescalas adimensionais feitas anteriormente, sob influência de características intrínsecas da espécie em estudo (como sua taxa de crescimento intrínseco básica  $r$ ), bem como características métricas da região candidata a refúgio  $\Omega$  (como sua área, por exemplo).

O objetivo deste capítulo é exhibir e interpretar tais influências, além de mostrar a dependência que o autovalor fundamental possui sobre a heterogeneidade das características reprodutivas da espécie hipotética  $u$  imposta pelo meio. De maneira mais específica, estudaremos uma forma particular de heterogeneidade ambiental, e com o auxílio de adaptações do trabalho Harrell II, Kröger & Kurata (2001), obteremos informações sobre a qualidade de um meio, numa situação ecológica particular.

## 4.2 CONSIDERAÇÕES DIMENSIONAIS

O objetivo desta seção é observar a variação do autovalor fundamental  $\lambda_1$  mediante mudanças nas variáveis de interesse do problema, como a taxa de crescimento intrínseco  $r$ , a área da região candidata a refúgio  $\Omega$ , bem como alterações de escala na correção do crescimento intrínseco  $\gamma$ , o que indica um aumento ou diminuição na heterogeneidade imposta no meio em análise, dependendo da magnitude da alteração de escala imposta à correção  $\gamma$ .

Para fixarmos idéias, começamos esta análise lembrando brevemente a motivação da mesma. Iniciamos o estudo da existência de soluções positivas, não-triviais para



o seguinte problema:

$$-\nabla \cdot (D(x, y) \nabla u) = \gamma(x, y) u - u^2, \quad (x, y) \in U, \quad (4.1)$$

$$u = 0, \quad (x, y) \in \partial U, \quad (4.2)$$

onde  $U$  é o domínio obtido a partir do domínio  $\Omega$ , mediante reescalas das variáveis espaciais (cf. Capítulo 3). A existência de tal solução positiva significa sucesso na colonização do meio em análise, pois segundo os resultados de Cantrell & Cosner (1991b), a solução do problema de evolução associado a (4.1), (4.2) converge para a solução estacionária quando  $t \rightarrow \infty$  para qualquer dado inicial não-negativo e não-trivial. Com isso, o meio original  $\Omega$  se constitui, na linguagem utilizada em Ludwig, Aronson & Weinberger (1979), num refúgio para a espécie  $u$ .

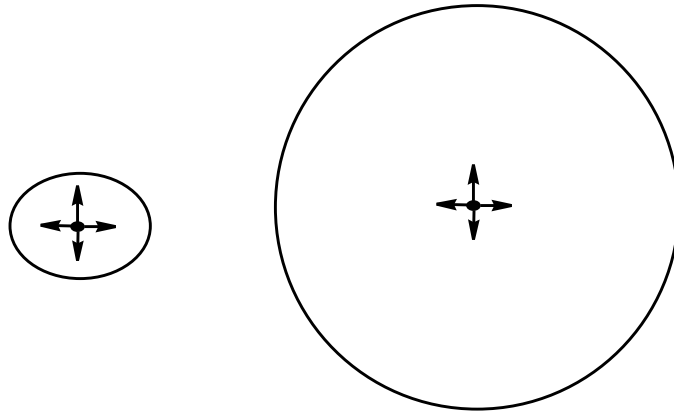
Concluimos que o meio  $\Omega$  se constitui num refúgio, o que representa a existência de solução não-trivial para o problema (4.1), (4.2), quando  $\lambda_1 < 1$ , onde o autovalor fundamental  $\lambda_1$  é minimizador do Quociente de Rayleigh

$$\lambda_1 = \min_{\substack{\phi \in W \\ \iint_U \gamma(x, y) \phi^2 dx dy > 0}} \frac{\iint_U D(x, y) |\nabla \phi|^2 dx dy}{\iint_U \gamma(x, y) \phi^2 dx dy}. \quad (4.3)$$

Começamos nossa análise ao lembrarmos da definição da função adimensional  $\bar{D}$ , a qual aparece no denominador da expressão (4.3). Substituindo a função  $\bar{D}$  pela função dimensional correspondente, e mantendo as outras variáveis dependentes e independentes adimensionais, obtemos a seguinte variante de (4.3):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{r|\Omega|} \min_{\substack{\phi \in W \\ \iint_U \gamma(x, y) \phi^2 dx dy > 0}} \frac{\iint_U D(\sqrt{|\Omega|x}, \sqrt{|\Omega|y}) |\nabla \phi|^2 dx dy}{\iint_U \gamma(x, y) \phi^2 dx dy} \\ &= \frac{1}{r|\Omega|} \rho. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A expressão acima é objeto de algumas interpretações. A condição  $\lambda_1 < 1$ , que indica sucesso na colonização do meio  $\Omega$  pela espécie  $u$ , nos informa que valores pequenos dessa constante indicam boas chances de colonização. Ao observarmos (4.4), notamos a contribuição imediata de dois fatores para a diminuição da constante  $\lambda_1$ , que nesse caso atendem à intuição:



**Figura 4.1:** Quando os indivíduos de uma espécie locomovem-se muito intensamente, domínios com fronteira letal devem ser suficientemente grandes para que perdas de indivíduos devido a contato com fronteira sejam menores.

- i. A taxa crescimento intrínseco básica  $r$  deve ser suficientemente grande: Quando o meio em análise é inalterado, observamos que a espécie em análise deve compensar as perdas de seus indivíduos para a fronteira letal e para as regiões menos propícias pertencentes ao meio  $\Omega$  com suas propriedades reprodutivas; isto é, a espécie em estudo deve se reproduzir numa taxa suficientemente alta para que a relação  $\lambda_1 < 1$  seja satisfeita. Podemos reescrever a condição para sobrevivência de  $u$  no meio  $\Omega$  da seguinte maneira:

$$r > r^* := \frac{1}{|\Omega|} \rho.$$

A proporcionalidade inversa da constante  $r^*$  em relação à área da região  $\Omega$  pode ser explicada via interpretação microscópica do processo difusivo (cf. Murray (1989) e Okubo (1980)): quando os indivíduos da espécie em estudo se movimentam aleatoriamente, com igual probabilidade de deslocamento em todas as direções, suas chances de sobrevivência são reduzidas num meio com fronteira letal de pequenas dimensões, já que as chances de contato com esta fronteira são maiores que as chances de contato num meio similar, porém de dimensões maiores; com isso, faz-se necessário uma taxa reprodução grande num meio muito reduzido, para compensar as grandes perdas na fronteira nesse meio de dimensões reduzidas (cf. Figura 4.1).

- ii. As dimensões da região candidata a refúgio devem ser suficientemente grandes: Este outro fato intuitivo já foi observado em modelos unidimensionais em Ludwig, Aronson & Weinberger (1979), e em modelos bidimensionais com taxa de crescimento não influenciada pelo meio (*cf.* Skellam (1951), Kierstead & Slobodkin (1953) e Murray & Sperry (1983)). Tal observação se torna evidente ao reescrevermos a condição para persistência  $\lambda_1 < 1$  da seguinte maneira:

$$|\Omega| > A^* := \frac{1}{r} \rho.$$

A relação inversa entre tamanho área e a taxa de crescimento intrínseco se faz presente nesta expressão. Neste caso, a expressão acima nos diz que valores grandes para a taxa de crescimento intrínseco  $r$  compensam a perda dos organismos para a fronteira letal e para as sub-regiões menos propícias de  $\Omega$ , reduzindo assim o valor mínimo de área  $A^*$  necessário para a sobrevivência da espécie  $u$  no referido meio. Valores pequenos de  $r$  influem no aumento do valor crítico de área, dificultando as chances de sobrevivência da espécie em estudo.

Após as observações mais imediatas feitas acima, comentamos alguns efeitos da heterogeneidade do meio na magnitude do autovalor fundamental  $\lambda_1$ . Seguindo Cantrell & Cosner (1989), observamos inicialmente que em consequência da caracterização variacional de  $\lambda_1$  exibida em (4.3), se temos correções  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  satisfazendo  $\gamma_1 \leq \gamma_2$ , isto implica, devido à positividade da função  $D$ , que para qualquer  $\phi \in W$  que satisfaça  $\iint_{\Omega} \gamma_i(x, y) \phi^2 dx dy > 0$ ,  $i = 1, 2$ , temos

$$\frac{\iint_{\Omega} D(x, y) |\nabla \phi|^2 dx dy}{\iint_{\Omega} \gamma_1(x, y) \phi^2 dx dy} \geq \frac{\iint_{\Omega} D(x, y) |\nabla \phi|^2 dx dy}{\iint_{\Omega} \gamma_2(x, y) \phi^2 dx dy}.$$

Aplicando o ínfimo em ambos os lados da desigualdade acima, nós obtemos

$$\lambda_1(\gamma_1) \geq \lambda_1(\gamma_2), \quad (4.5)$$

onde denotamos por  $\lambda_1(\gamma)$  o autovalor fundamental do problema espectral do Capítulo 3 com correção do crescimento intrínseco  $\gamma$ . Se houver um subconjunto de  $\Omega$  de medida positiva no qual vale  $\gamma_1 < \gamma_2$ , temos que a desigualdade obtida em (4.5) é válida no sentido estrito.

Esta desigualdade fornece algumas interpretações intuitivas, como por exemplo ao tomarmos  $\gamma_1 \leq 1$  qualquer, obtemos por (4.5) a desigualdade  $\lambda_1(\gamma_1) \geq \lambda_1(1)$ , o que significa que alterações no crescimento intrínseco que prejudicam as capacidades reprodutivas da espécie em análise aumentam o autovalor fundamental, dificultando assim no cumprimento da condição de persistência  $\lambda_1 < 1$ .

Uma outra interpretação que pode ser obtida de (4.5) é quando as sub-regiões favoráveis sofrem melhorias, alterando a função de ajuste  $\gamma_1$  para uma outra  $\gamma_2$  que satisfaz<sup>1</sup>  $\gamma_1^+ \leq \gamma_2^+$ . Isto implica  $\gamma_1 \leq \gamma_2$  e com isso, novamente por (4.5), temos a diminuição do autovalor fundamental, permitindo que a condição de persistência se cumpra mais facilmente. Analogamente, pioras de qualidade nas regiões pouco propícias ao desenvolvimento da espécie em estudo acarretam o aumento da magnitude do autovalor fundamental, ocasionando maiores dificuldades na colonização do meio em estudo.

Uma conclusão não tão intuitiva pode também ser obtida da caracterização variacional para  $\lambda_1$  apresentada em (4.3): Quando substituímos a função de ajuste do crescimento intrínseco  $\gamma$  por uma função  $\gamma_1$  dada por  $\gamma_1 = \beta\gamma$ ,  $\beta > 0$ , em (4.3) obtemos

$$\lambda_1(\gamma_1) = \frac{1}{\beta} \lambda(\gamma).$$

Interpretamos tal constante, para  $\beta \geq 1$ , como melhorias das sub-regiões mais propícias ao desenvolvimento da espécie em estudo, acompanhadas pelas pioras das sub-regiões menos propícias do mesmo meio. Quando temos  $0 < \beta < 1$ , estamos realizando pioras na qualidade das sub-regiões mais propícias, acompanhadas de melhoras nas regiões menos propícias deste meio.

Notamos que para  $\beta \geq 1$ , obtemos  $\lambda(\gamma_1) \leq \lambda(\gamma)$ , o que implica a melhora geral do ambiente, independente das pioras realizadas nas regiões menos propícias ao desenvolvimento da espécie em estudo. Analogamente, quando temos  $0 < \beta < 1$ , notamos a piora na qualidade geral do meio através da relação  $\lambda(\gamma_1) > \lambda(\gamma)$ , não importando, pois, as melhorias nas regiões menos propícias ao desenvolvimento da espécie  $u$ .

Convém salientar uma outra interpretação sobre a introdução desta constante  $\beta$ , devida a Cantrell & Cosner (2001): esta constante é posta com o objetivo de comparação entre espécies que habitam o mesmo ambiente, porém sentem as influências do meio

<sup>1</sup> A parte positiva de uma função  $f$  é dada por  $f^+ := \max\{f(x), 0\}$ .

nas suas capacidades reprodutivas com diferentes intensidades: uma espécie que utiliza os recursos de alimento do meio com o objetivo principal de suprir necessidades fisiológicas, ou que guardar reservas alimentares no seu organismo, terá um crescimento intrínseco baixo nas regiões mais propícias, mas não sentirá os efeitos negativos das regiões desfavoráveis tão intensamente. Organismos que utilizam os recursos ambientais com o intuito principal de reprodução, com baixas reservas alimentares no seu organismo, terão rápido crescimento nas regiões mais propícias, porém sentirão as dificuldades impostas pelas regiões menos propícias de maneira mais intensa. O resultado obtido acima nos informa que organismos que não se reproduzem tão rapidamente têm mais chances de sobrevivência em meios com heterogeneidade espacial do que aqueles seres que se reproduzem muito rapidamente, e que sentem mais intensamente os efeitos negativos das regiões menos favoráveis do meio em análise.

Procedendo de maneira análoga à obtenção da desigualdade obtida em (4.5), notamos monotonicidade do autovalor fundamental em relação a valores crescentes do coeficiente de difusão, mesmo quando ele é uma função não constante: Se  $D_1$  e  $D_2$  satisfazem  $D_1 \leq D_2$ , obtemos

$$\lambda_1(D_1) \leq \lambda_1(D_2), \quad (4.6)$$

onde  $\lambda_1(D)$  denota o autovalor fundamental  $\lambda_1$  do problema espectral do Capítulo 3, com coeficiente de difusão  $D$ . Este resultado está em concordância com a intuição, e com resultados obtidos com difusão constante em trabalhos anteriores a este: sob o ponto de vista microscópico, a “rapidez” de movimentação dos organismos da espécie em análise é representado pelo valor do coeficiente de difusão. Com isso, valores grandes desse coeficiente indicam “movimentações rápidas” destes organismos, aumentando assim as chances de encontro com a fronteira letal e as sub-regiões menos propícias ao desenvolvimento da espécie  $u$  no meio candidato a refúgio  $\Omega$ .

Uma outra observação que pode ser feita nesse momento diz respeito às diferenças entre os valores que o coeficiente de difusão assume. Para fixarmos idéias, supomos uma situação na qual temos

$$D = D(\alpha) := D_1 (\alpha \chi_B + \chi_{\Omega \setminus B}),$$

onde supomos  $B \subset \Omega$  um conjunto convexo, de medida positiva e que não intercepta a fronteira de  $\Omega$ . Denotamos a função indicadora do conjunto  $B$  por  $\chi_B$  e  $0 < \alpha < 1$  é

uma constante. Por (4.6), temos que a relação  $\lambda_1(D(\alpha)) \leq \lambda_1(D(1)) = \lambda_1(D_1)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ . Interpretamos este resultado novamente pela abordagem microscópica do processo difusivo: a sub-região B impõe dificuldades de movimentação aos organismos em estudo, em virtude do valor  $\alpha D_1 < D_1$  que o coeficiente de difusão apresenta em B; com isso, os organismos ali presentes apresentam menores chances de deixar a referida sub-região, e de entrar em contato com a fronteira letal, justificando assim o aumento da qualidade geral do meio, indicado pela diminuição do autovalor fundamental  $\lambda_1$  neste caso. Diferenças nos valores do coeficiente de difusão no meio resultam em valores maiores da densidade  $u$  nas regiões de menor valor do coeficiente de difusão, o que na terminologia de Ferreira Jr. (1998), recebe o nome de efeito “lombada”.

### 4.3 OTIMIZAÇÃO EM RELAÇÃO À HETEROGENEIDADE AMBIENTAL

O objetivo dessa seção é observar a variação do autovalor fundamental  $\lambda_1$  mediante arranjos das regiões mais e menos propícias ao desenvolvimento da espécie hipotética  $u$ , numa situação ecológica particular. Pretendemos, de maneira mais específica, estender alguns resultados de Cantrell & Cosner (1991a) para o caso bidimensional.

O problema tratado no referido artigo se assemelha ao problema estudado aqui, porém num meio unidimensional e com a função de ajuste do crescimento intrínseco assumindo formas particulares. Para sermos mais precisos,  $\Omega = (0, 1)$  e

$$\begin{aligned} u_t &= d\Delta u + m(x)u - cu^2 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ B(u) &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u &= u_0(x), \quad \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

onde  $m(x) = r\gamma(x)$ ,  $c = r/K$ ,  $u_0$  denota a distribuição inicial dos indivíduos em  $\Omega$ , e  $B(u)$  é uma função que caracteriza as condições de sobrevivência da espécie  $u$  no exterior do meio unidimensional  $\Omega$  podendo ser

- i. Meio imediatamente letal: quando impomos Condições de *Dirichlet*:

$$B(u) = u, \tag{4.7}$$

significando a morte dos organismos que alcançam a fronteira do meio em estudo;

ii. Meio refletor: ao impormos Condições do tipo *Neumann*:

$$B(u) = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (4.8)$$

onde denotamos  $\partial u/\partial n$  a derivada normal, tomada na direção normal exterior do meio  $\Omega$ . A fronteira nesse caso serve como uma barreira perfeita à população, já que o fluxo é nulo;

iii. Meio parcialmente hostil: Quando são impostas Condições de *Robin*

$$B(u) = \beta u + \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (4.9)$$

onde  $\beta$  é uma constante positiva, correspondendo a uma situação na qual alguns membros da população em estudo se perdem para a fronteira, enquanto alguns sobrevivem e voltam para o meio  $\Omega$ . Esta condição serve como um elo de ligação entre as Condições de Neumann (quando  $\beta = 0$ ) e de Dirichlet (quando  $\beta \rightarrow \infty$ ); com isso, quanto maior o valor dessa constante, maior a hostilidade do meio exterior a  $\Omega$  (cf. Ludwig, Aronson & Weinberger (1979) para uma dedução dessa condição de fronteira em estado estacionário.)

O resultado utilizado para persistência naquele artigo foi o mesmo obtido em Cantrell & Cosner (1989):  $d < 1/\lambda_1(m)$ , onde  $\lambda_1(m)$  é o autovalor fundamental do problema

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= \lambda m(x)\phi \quad \text{em } \Omega, \\ B(\phi) &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

As conclusões obtidas em Cantrell & Cosner (1991a) foram baseadas em dois tipos particulares de função  $m(x)$ :

i.  $m(x) \equiv m_1 > 0$  num único sub-intervalo de  $(0, 1)$  de comprimento  $T$  e  $m(x) \equiv -m_2 < 0$  no restante do intervalo  $(0, 1)$ ;

- ii.  $m(x) \equiv -m_2 < 0$  num único sub-intervalo de  $(0, 1)$  de comprimento  $1 - T$ , com  $m(x) \equiv m_1 > 0$  no complementar.

Quando a função  $m(x)$  apresenta uma configuração do tipo (i.) com condições do tipo (4.7), o menor valor de  $\lambda_1$  ocorre quando o sub-intervalo onde  $m$  é positivo está localizado no centro do intervalo maior; logo, a melhor configuração para a sobrevivência de  $u$  neste meio é quando as regiões menos propícias cercam as regiões mais propícias ao desenvolvimento de  $u$  isolando as regiões mais propícias da fronteira letal. O maior valor de  $\lambda_1(m(x))$  ocorre quando o sub-intervalo onde  $m$  é positivo se localiza em contato com um dos extremos do intervalo maior; assim, a configuração mais prejudicial a essa espécie hipotética será quando o meio mais propício estiver em contato com a fronteira letal.

Mantendo a configuração do tipo (i.) para a função  $m$ , mas com condições do tipo (4.8), a situação é revertida: a melhor configuração do meio para a sobrevivência da espécie  $u$  (que corresponde ao menor valor de  $\lambda_1(m(x))$ ) ocorre quando o sub-intervalo onde  $m$  é positivo estiver em contato com um dos extremos do intervalo maior, havendo isolamento de um dos extremos deste sub-intervalo de regiões menos propícias ao desenvolvimento da espécie  $u$ . A situação mais desfavorável para o desenvolvimento da referida espécie neste meio (que corresponde à situação na qual  $\lambda_1(m(x))$  é máximo) ocorre quando o sub-intervalo onde  $m$  é positivo está na região central do intervalo maior.

Quando a função  $m$  apresenta configuração do tipo (ii.), com condições do tipo (4.7), a configuração ambiental que mais favorece a espécie  $u$  será aquela na qual o intervalo onde  $m(x)$  é negativo estiver em contato com a fronteira, fazendo com que  $\lambda_1(m(x))$  assumo seu valor mínimo. Isto indica que a melhor situação para o desenvolvimento da espécie em estudo nesta situação é aquela na qual as regiões mais propícias ao seu crescimento estejam com o mínimo de contatos possível com as regiões pouco propícias ou letais.

Com o mesmo tipo de configuração para a função  $m$ , porém com condições de fronteira do tipo (4.8), a situação mais propícia para o desenvolvimento de  $u$  também é aquela na qual o intervalo onde  $m(x)$  é negativo se encontra em contato com um dos extremos do intervalo maior; logo, a situação ambiental mais favorável ocorre quando



há somente uma região mais propícia em contato com a fronteira com condições do tipo (4.8).

Numa situação na qual as condições de fronteira são do tipo (4.9), as conclusões sobre as situações mais ou menos favoráveis ao desenvolvimento de  $u$  dependem da magnitude da constante  $\beta$ : Seja  $T_0$  tamanho do intervalo onde as regiões favoráveis se concentram.

- i. Quando  $0 < \beta < \pi/2T$ , as configurações mais e menos favoráveis para a colonização do meio em questão são iguais àquelas exibidas no caso de condições de fronteira (4.8) (*cf.*);
- ii. Quando  $\beta = \pi/2T$ , a posição das regiões mais ou menos propícias ao desenvolvimento de  $u$  são irrelevantes para determinação da condição geral do ambiente, já que o autovalor fundamental  $\lambda_1(m(x))$  nesse caso é constante e igual a  $\pi^2/4T^2$ ;
- iii. Quando  $\beta > \pi/2T$ , as configurações mais e menos favoráveis ao desenvolvimento da espécie em estudos são as mesmas daquelas exibidas no meio com condições de fronteira do tipo (4.7).

Os resultados exibidos acima são obtidos em Cantrell & Cosner (1991a) através do uso do cálculo de funções de uma variável real. Mais precisamente, o seguinte problema espectral é resolvido

$$\begin{aligned} -\phi'' &= \lambda m(x)\phi \quad \text{em } (0,1), \\ B(\phi) &= 0, \quad \text{em } x = 0,1, \end{aligned}$$

com a função  $m$  dependendo de parâmetros que determinam as posições das regiões mais e menos propícias, e os seus respectivos comprimentos. Quando se impõe continuidade da auto-função  $\phi$  e sua derivada nos pontos de descontinuidade de  $m$ , equações transcendentais dependentes dos parâmetros de definição da função  $m$  são obtidos. Uma análise dessas equações transcendentais fornece os resultados exibidos acima.

Neste ponto pretendemos estender os resultados obtidos por Cantrell & Cosner (1991a) e resumidos acima no caso do meio exterior completamente hostil, isto é, com

condições de fronteira do tipo (4.7), para situação em duas dimensões espaciais. No caso em que temos as regiões mais favoráveis ao desenvolvimento da espécie reunidas numa única componente conexa de medida positiva, sabemos que a pior configuração ambiental para esta espécie é aquela na qual as regiões mais propícias se encontram em contato com a fronteira letal. Quando estamos numa situação bidimensional, uma pergunta surge naturalmente: existe alguma parte (ou partes) da fronteira cujo contato com as regiões mais propícias diminui ainda mais o autovalor principal  $\lambda_1$ , comprometendo ainda mais a sobrevivência da espécie  $u$  neste meio?

Utilizaremos métodos fundamentalmente distintos daqueles utilizados em Cantrell & Cosner (1991a) para responder a pergunta acima em casos semelhantes àqueles analisados no referido artigo, porém em duas dimensões espaciais. Supomos que a região candidata a refúgio  $\Omega$  (e conseqüentemente a região  $U$  obtida mediante a reescala definida no Capítulo 3) é um domínio conexo e limitado do plano  $\mathbb{R}^2$ . Supomos que o coeficiente de difusão  $D$  seja constante adimensional, e a função  $\gamma$  que estabelece quais são as regiões mais e menos propícias à reprodução da espécie em estudo, possui a seguinte forma particular:

$$\gamma_B(x, y) := \gamma_1 \chi_B - \gamma_2 \chi_{U \setminus B}, \quad (4.10)$$

onde  $B$  é um subconjunto conexo e convexo de  $U$ , como uma região circular, e  $\gamma_i, i = 1, 2$  são duas constantes de sinais iguais, que representam diferenças na qualidade no meio dentro e fora da sub-região  $B$ .

Quando temos  $\gamma_1 > 0$  e  $\gamma_2 > 0$ , estamos modelando uma situação semelhante à situação (i.) para a função  $m$  utilizada em Cantrell & Cosner (1991a), isto é, estamos modelando uma situação na qual a sub-região favorável ao desenvolvimento da espécie  $u$  se encontra no conjunto  $B$ , e as partes restantes do conjunto maior  $U$  representam regiões menos favoráveis. Neste caso, desejamos saber quais configurações espaciais dão melhores e piores chances de sobrevivência para uma espécie que atende à dinâmica populacional definida no problema (4.1), (4.2). Poder-se-ia aplicar tal modelo numa situação na qual  $u$  modela uma espécie ameaçada de extinção, e habitando um meio onde as condições gerais não são favoráveis. Uma tentativa de impedir sua extinção neste meio seria a de investir na melhora de uma parte do mesmo (representada pelo conjunto  $B$ ). A melhora geral do meio estaria vetada devido a limitações

de recursos disponíveis; logo, é de interesse saber onde este investimento limitado deveria ser posto, visando contribuir da melhor maneira possível para as chances de sobrevivência da espécie ameaçada de extinção neste meio heterogêneo.

A situação na qual  $\gamma_1 < 0$  e  $\gamma_2 < 0$  difere drasticamente da situação apresentada no parágrafo anterior: quando estas constantes são ambas negativas, temos que o meio é em geral favorável à espécie  $u$ , exceto na sub-região  $B$ , que não apresenta condições favoráveis ao desenvolvimento desta espécie. Um exemplo de uma possível aplicação deste modelo neste contexto é a tentativa de extinguir uma espécie de praga, modelada pela densidade  $u$ , que sobrevive na região em questão. A sub-região  $B$  seria criada como uma tentativa de diminuir, ou até extinguir, esta praga. A limitação de recursos ao combate à praga estaria limitada a esta sub-região; portanto, é de interesse saber qual é a posição na qual  $B$  deve ser posta, para que o prejuízo à praga seja o maior possível.

Para obtermos os resultados desejados, faremos uma adaptação de Harrell II, Kröger & Kurata (2001). Naquele trabalho, eles obtiveram resultados sobre as configurações ótimas do autovalor do seguinte problema:

$$-\Delta\phi + \alpha\chi_B\phi = \sigma\phi \quad \text{em } \Omega, \quad (4.11)$$

$$\phi = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (4.12)$$

onde  $\alpha$  é uma constante, podendo ser positiva (representando, na linguagem do referido artigo, um *obstáculo*) ou negativa (representando uma *fonte*) e  $B$  é um subconjunto de  $\Omega$ , definido da mesma maneira que fizemos acima. Eles obtiveram resultados sobre a disposição de tal obstáculo (ou fonte) no sentido de obter maiores ou menores valores possíveis para o autovalor fundamental  $\sigma_1$  do problema (4.11), (4.12). O autovalor fundamental desse problema, no caso  $\alpha > 0$ , assumia sua maior magnitude quando o obstáculo era colocado em contato com a fronteira de  $\Omega$ . A menor magnitude para o autovalor fundamental do problema (4.11), (4.12) ocorria quando o obstáculo era posicionado no interior de  $\Omega$ , tipicamente na posição central desta região (no caso da região  $\Omega$  ser suficientemente simétrica para que tal posição central possa ser caracterizada). Os resultados referentes a  $\alpha < 0$  (presença de uma fonte), são opostos aos resultados citados acima: o autovalor fundamental do problema (4.11), (4.12) assume sua maior magnitude no interior de  $\Omega$ , enquanto sua menor magnitude é assumida em

contato com a fronteira.

Para que possamos utilizar os demais resultados contidos em Harrell II, Kröger & Kurata (2001) para o nosso propósito, devemos inicialmente associar o problema espectral associado a  $\lambda_1$  com coeficiente de difusão  $D$  constante e com a forma particular de correção  $\gamma_B$  definida em (4.10), com o seguinte problema espectral:

$$D \iint_U \nabla \psi \cdot \nabla v \, dx \, dy - \iint_U \gamma_B(x, y) \psi v \, dx \, dy + \sigma \iint_U \psi v \, dx \, dy = 0, \quad \forall v \in W. \quad (4.13)$$

O autovalor fundamental  $\sigma_1$  do problema espectral (4.12) é também possuidor de uma caracterização variacional, porém ele aparece como o *supremo* do seguinte Quociente de Rayleigh (cf. Cantrell & Cosner (2002a)):

$$\sigma_1 = \max_{\psi \in W} \frac{-D \iint_U |\nabla \psi|^2 \, dx \, dy + \iint_U \gamma_B(x, y) \psi^2 \, dx \, dy}{\iint_U \psi^2 \, dx \, dy}. \quad (4.14)$$

Sabemos pelas referências contidas em Cantrell & Cosner (2001) que os autovalores fundamentais  $\lambda_1$  e  $\sigma_1$  se relacionam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sigma_1 > 0 & \quad \text{se e somente se} \quad \lambda_1 < 1, \\ \sigma_1 = 0 & \quad \text{se e somente se} \quad \lambda_1 = 1, \\ \sigma_1 < 0 & \quad \text{se e somente se} \quad \lambda_1 > 1. \end{aligned}$$

Porém, não é de nosso conhecimento uma dependência *monótona* entre esses autovalores, no sentido que configurações ambientais que minimizam o autovalor  $\lambda_1$  maximizam  $\sigma_1$  e vice-versa. Esta relação é evidente ao considerarmos um meio homogêneo ( $\gamma_B \equiv 1$ ), assim como as relações entre  $\lambda_1$  e  $\sigma_1$  descritas acima. Isto nos motiva a assumir, sem demonstração, que tal dependência monótona entre  $\lambda_1$  e  $\sigma_1$  existe neste caso mais geral. Com isso, a condição para persistência da espécie  $u$  no meio em estudo, em termos do autovalor  $\sigma_1$  é

$$\sigma_1 \geq 0,$$

enquanto a condição para extinção dessa espécie se torna

$$\sigma_1 < 0.$$

Logo, devemos encarar valores crescentes do autovalor  $\sigma_1$  como melhoras nas condições gerais de sobrevivência de  $u$  no meio em questão. Diminuição dos valores deste autovalor são interpretados como piora geral do meio para a persistência da espécie  $u$ .

Com o objetivo de simplificar os cálculos, consideramos somente as auto-funções  $\psi$  associadas a  $\sigma_1$ , normalizadas em  $L^2(U)$ . Com isso, a seguinte identidade é verdadeira para o auto-par  $(\sigma_1, \psi)$ :

$$\sigma_1 = -D \iint_U |\nabla \psi|^2 dx dy + \iint_U \gamma_B(x, y) \psi^2 dx dy. \quad (4.15)$$

Apresentamos à seguir os detalhamentos matemáticos dos resultados obtidos no artigo Harrell II, Kröger & Kurata (2001), com adaptações que atendem ao nosso propósito. Seja  $B(\epsilon)$  o conjunto

$$B(\epsilon) := \{ \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{v} \in B \}, \quad (4.16)$$

onde  $\mathbf{v}$  é um vetor unitário, arbitrário, e  $\epsilon > 0$  uma constante pequena que denota o deslocamento da região  $B$  no interior de  $U$  na direção do vetor  $\mathbf{v}$ . Chamamos de  $\sigma_1(\epsilon)$  e  $\psi(\epsilon)$  o autovalor fundamental, e a auto-função correspondentes ao problema (4.13) com a função de correção  $\gamma_{B(\epsilon)}$ , respectivamente.

Seguiremos a estrutura do artigo citado, apresentando inicialmente o seguinte

### Lema 1

*i. Existem constantes  $\epsilon_0 > 0$  e  $C$ , os quais dependem somente de  $U$ , tais que*

$$|\sigma_1(\epsilon) - \sigma_1| \leq C\epsilon,$$

*para todo  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ .*

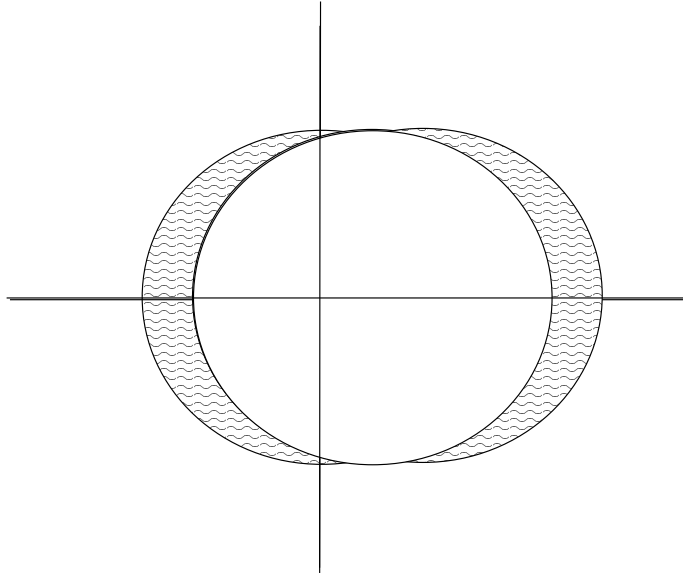
*ii.  $\|\psi(\epsilon) - \psi\|_{L^\infty(U)} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .*

*Prova:* De acordo com a caracterização do autovalor fundamental  $\sigma_1(\epsilon)$ , temos

$$\begin{aligned} \sigma_1(\epsilon) &\geq -D \iint_U |\nabla \psi|^2 dx dy + \iint_U \gamma_{B(\epsilon)}(x, y) \psi^2 dx dy \\ &= \sigma_1 + \iint_U (\gamma_{B(\epsilon)} - \gamma_B) \psi^2 dx dy. \end{aligned} \quad (4.17)$$

As referências contidas em Harrell II, Kröger & Kurata (2001) garantem a limitação em quase toda parte das funções  $\psi$  e  $\psi(\epsilon)$  por uma constante  $C_1$  dependente de  $U$  somente. Analisando o termo

$$\iint_U |\gamma_{B(\epsilon)}(x, y) - \gamma_B(x, y)| dx dy \quad (4.18)$$



**Figura 4.2:** Ilustração da área sombreada, a qual correspondente à integral dada em (4.18), exibindo simetria em relação a eixos ortogonais passando pelo centro de uma das circunferências.

mais cuidadosamente, temos que o valor da integral descrita em (4.18), levando em conta as definições de  $\gamma_B$  e  $\gamma_{B(\epsilon)}$ , e considerando a região  $B$  como sendo circular de raio  $R$ , pode ser estimada superiormente por

$$2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \left( \epsilon^2 \arcsin \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4R^2}} + 2\epsilon R \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4R^2}} \right),$$

que para  $\epsilon \ll 2R$ , tem o valor aproximado

$$2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \left( \frac{\pi\epsilon^2}{2} + 2\epsilon R \right) \leq 2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \left( \frac{\pi\epsilon_0}{2} + 2R \right) \epsilon = C_2\epsilon;$$

logo, pelo menos neste caso é correto dizer que

$$\iint_U |\gamma_{B(\epsilon)}(x, y) - \gamma_B(x, y)| dx dy \leq C_2\epsilon, \quad (4.19)$$

para alguma constante  $C_2$  positiva. Assim, concluímos de (4.17), de (4.19) e da limitação de  $\psi$  que

$$\sigma_1 - \sigma_1(\epsilon) \leq C_3\epsilon.$$

Procedendo analogamente, obtemos

$$\sigma_1(\epsilon) - \sigma_1 \leq C_4 \epsilon.$$

Com isso, ao tomarmos  $C_5 = \max\{C_3, C_4\}$ , nós obtemos

$$|\sigma_1 - \sigma_1(\epsilon)| \leq C_5 \epsilon,$$

a desigualdade desejada.

A seguir, mostramos que a seqüência  $\{\psi(\epsilon)\}_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$  é globalmente limitada. Como  $\psi(\epsilon)$  é autofunção associada ao autovalor  $\sigma_1(\epsilon)$ , deduzimos de (4.15) que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{U}} |\nabla \psi(\epsilon)|^2 dx dy &= -\frac{1}{D} \left( \sigma_1(\epsilon) - \iint_{\mathbb{U}} \gamma_{B(\epsilon)}(x, y) \psi^2 dx dy \right) \\ &\leq \frac{1}{D} \left( |\sigma_1(\epsilon) - \sigma_1| + |\sigma_1| + \max\{|\gamma_1|, |\gamma_2|\} \iint_{\mathbb{U}} \psi(\epsilon)^2 dx dy \right) \\ &\leq \frac{1}{D} (C_5 \epsilon_0 + |\sigma_1| + \max\{|\gamma_1|, |\gamma_2|\} C_1). \end{aligned}$$

Como  $H_0^1(\mathbb{U})$  com a norma usual é um Espaço de Banach reflexivo, existe uma subsequência de  $\{\psi(\epsilon)\}_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$  que converge fracamente em  $H_0^1(\mathbb{U})$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . O Teorema de Rellich-Kondrachov garante a imersão compacta  $H_0^1(\mathbb{U}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{U})$ ; com isso a seqüência  $\{\psi(\epsilon)\}_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$  também é fortemente convergente em  $L^2(\mathbb{U})$  na norma usual. Chamemos de  $w \in H_0^1(\mathbb{U})$  o limite fraco de uma subsequência convergente qualquer. Observando (4.13) para o auto-par  $(\sigma_1(\epsilon), \psi(\epsilon))$ ,

$$D \iint_{\mathbb{U}} \nabla \psi(\epsilon) \cdot \nabla v dx dy - \iint_{\mathbb{U}} \gamma_{B(\epsilon)}(x, y) \psi(\epsilon) v dx dy + \sigma_1(\epsilon) \iint_{\mathbb{U}} \psi(\epsilon) v dx dy = 0.$$

nós obtemos na passagem ao limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , em virtude da convergência da subsequência de  $\{\psi(\epsilon)\}_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$ , e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, a seguinte expressão:

$$D \iint_{\mathbb{U}} \nabla w \cdot \nabla v dx dy - \iint_{\mathbb{U}} \gamma_B(x, y) w v dx dy + \sigma_1 \iint_{\mathbb{U}} w v dx dy = 0,$$

o que implica  $w = \psi$ . Como a subsequência de  $\{\psi(\epsilon)\}_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$  foi escolhida arbitrariamente, temos que a seqüência inteira é convergente para  $\psi$ , fracamente em  $H_0^1(\mathbb{U})$  e fortemente em  $L^2(\mathbb{U})$ . Tomando  $w(\epsilon) := \psi(\epsilon) - \psi$ , temos que  $w(\epsilon)$  satisfaz

$$-\Delta w_\epsilon + (\gamma_{B(\epsilon)} - \sigma_1) w(\epsilon) = (\sigma_1(\epsilon) - \sigma_1) \psi(\epsilon) - (\gamma_{B(\epsilon)} - \gamma_B) \psi.$$

Temos que a seguinte estimativa  $L^\infty(\mathcal{U})$  é válida:

$$\|w(\epsilon)\|_{L^\infty(\mathcal{U})} \leq \|w(\epsilon)\|_{L^2(\mathcal{U})} + C_6|\sigma_1(\epsilon) - \sigma_1| + C_7\|\gamma_{B(\epsilon)} - \gamma_B\|_{L^1(\mathcal{U})}.$$

Na passagem quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos pela convergência forte de  $\{\psi(\epsilon)\}_{0 < \epsilon < \epsilon_0}$  para  $\psi$  em  $L^2(\mathcal{U})$  e pela demonstração da parte (i.) deste lema, que  $w(\epsilon) \rightarrow 0$ , o que queríamos demonstrar, tendo em mente a definição de  $w(\epsilon)$ .

O seguinte lema não apresenta adaptações para o nosso propósito. Portanto, ele será somente enunciado.

**Lema 2** *Supondo que  $\zeta \in C^1(\mathcal{U})$ , vale o seguinte limite*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left( \iint_{B(\epsilon)} \zeta^2 dx dy - \iint_B \zeta^2 dx dy \right) = \oint_{\partial B} \zeta^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds, \quad (4.20)$$

onde  $\partial B$  denota a fronteira da região  $B$  e  $ds$  é o elemento de comprimento infinitesimal.

Desejamos agora exibir um resultado sobre a variação do autovalor fundamental  $\sigma_1$  em relação ao posicionamento da região  $B$ , e que possui uma interpretação ecológica. Como este lema também necessitou ser adaptado, faremos o detalhamento da sua demonstração:

**Proposição 1** *Sejam  $\sigma_1$  e  $\psi$  o autovalor e auto-função, que respectivamente resolvem o problema (4.13). Suponha que a região  $B$  possua uma fronteira convexa, conexa, suave por partes e que possa ser deslocada rigidamente na direção de um vetor unitário  $\mathbf{v}$ . Então*

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \mathbf{v}} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma_1(\epsilon) - \sigma_1}{\epsilon} = (\gamma_1 + \gamma_2) \oint_{\partial B} \psi^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) ds.$$

*Prova:* Mantendo a notação utilizada desde o início desta seção e considerando as auto-funções  $\psi$  e  $\psi(\epsilon)$  associadas a  $\sigma_1$  e  $\sigma_1(\epsilon)$ , respectivamente, normalizadas na norma usual de  $L^2(\mathcal{U})$ , temos que as seguintes equações são satisfeitas, para todos  $w_1, w_2 \in H_0^1(\mathcal{U})$ :

$$D \iint_{\mathcal{U}} \nabla \psi \cdot \nabla w_1 dx dy - \iint_{\mathcal{U}} \gamma_B(x, y) \psi w_1 dx dy + \sigma_1 \iint_{\mathcal{U}} \psi w_1 dx dy = 0,$$

e

$$D \iint_{\mathcal{U}} \nabla \psi(\epsilon) \cdot \nabla w_2 dx dy - \iint_{\mathcal{U}} \gamma_{B(\epsilon)}(x, y) \psi(\epsilon) w_2 dx dy + \sigma_1(\epsilon) \iint_{\mathcal{U}} \psi(\epsilon) w_2 dx dy = 0.$$



Substituindo  $w_1 = \psi(\epsilon)$  e  $w_2 = \psi$  e subtraindo as expressões obtidas acima após a substituição, nós obtemos:

$$(\sigma_1(\epsilon) - \sigma_1) \iint_{\mathcal{U}} \psi(\epsilon)\psi \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{U}} (\gamma_{B(\epsilon)}(x, y) - \gamma_B(x, y))\psi(\epsilon)\psi \, dx \, dy. \quad (4.21)$$

O Lema (1) nos diz que  $\|\psi - \psi(\epsilon)\|_{L^\infty(\mathcal{U})} \rightarrow 0$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ; logo, levando em conta a desigualdade seguinte

$$\left| \iint_{\mathcal{U}} \psi(\epsilon)\psi \, dx \, dy - \iint_{\mathcal{U}} \psi^2 \, dx \, dy \right| \leq \|\psi - \psi(\epsilon)\|_{L^\infty(\mathcal{U})} \iint_{\mathcal{U}} \psi \, dx \, dy,$$

temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \iint_{\mathcal{U}} \psi(\epsilon)\psi \, dx \, dy - \iint_{\mathcal{U}} \psi^2 \, dx \, dy \right| = 0,$$

isto é,

$$\left| \iint_{\mathcal{U}} \psi(\epsilon)\psi \, dx \, dy - \iint_{\mathcal{U}} \psi^2 \, dx \, dy \right| \in o(1). \quad (4.22)$$

Façamos cálculos análogos aos realizados acima para fazer uma outra estimativa:

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{\mathcal{U}} (\gamma_{B(\epsilon)}(x, y) - \gamma_B(x, y))(\psi(\epsilon)\psi - \psi^2) \, dx \, dy \right| \\ & \leq \|\psi - \psi(\epsilon)\|_{L^\infty(\mathcal{U})} \iint_{\mathcal{U}} (\gamma_{B(\epsilon)}(x, y) - \gamma_B(x, y))\psi \, dx \, dy \\ & \leq \|\psi - \psi(\epsilon)\|_{L^\infty(\mathcal{U})} \|\psi\|_{L^\infty(\mathcal{U})} \iint_{\mathcal{U}} (\gamma_{B(\epsilon)}(x, y) - \gamma_B(x, y)) \, dx \, dy \\ & \leq \|\psi - \psi(\epsilon)\|_{L^\infty(\mathcal{U})} \|\psi\|_{L^\infty(\mathcal{U})} C_2 \epsilon. \end{aligned}$$

Uma nova utilização do Lema 1, e os cálculos acima nos fazem concluir a validade do seguinte limite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left| \iint_{\mathcal{U}} (\gamma_{B(\epsilon)}(x, y) - \gamma_B(x, y))(\psi(\epsilon)\psi - \psi^2) \, dx \, dy \right| = 0;$$

isto é, vale a afirmação:

$$\left| \iint_{\mathcal{U}} (\gamma_{B(\epsilon)}(x, y) - \gamma_B(x, y))(\psi(\epsilon)\psi - \psi^2) \, dx \, dy \right| \in o(\epsilon). \quad (4.23)$$

Substituindo (4.22) e (4.23) em (4.21), temos

$$\frac{(\sigma_1(\epsilon) - \sigma_1)}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \iint_{\mathcal{U}} (\gamma_{B(\epsilon)}(x, y) - \gamma_B(x, y))\psi^2 \, dx \, dy + o(1). \quad (4.24)$$

Para podermos aplicar o Lema 2, necessitamos realizar algumas alterações na expressão obtida em (4.24):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\epsilon} \iint_{\mathbf{U}} (\gamma_{B(\epsilon)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \gamma_B(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \psi^2 \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{\epsilon} \iint_{\mathbf{U}} (\gamma_1 \chi_{B(\epsilon)} - \gamma_2 \chi_{\mathbf{U} \setminus B(\epsilon)} - \gamma_1 \chi_B + \gamma_2 \chi_{\mathbf{U} \setminus B}) \psi^2 \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \\
&= \frac{\gamma_1}{\epsilon} \iint_{\mathbf{U}} (\chi_{B(\epsilon)} - \chi_B) \psi^2 \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} - \frac{\gamma_2}{\epsilon} \iint_{\mathbf{U}} (\chi_{\mathbf{U} \setminus B(\epsilon)} - \chi_{\mathbf{U} \setminus B}) \psi^2 \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \\
&= \frac{\gamma_1}{\epsilon} \iint_{\mathbf{U}} (\chi_{B(\epsilon)} - \chi_B) \psi^2 \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} + \frac{\gamma_2}{\epsilon} \iint_{\mathbf{U}} (\chi_{B(\epsilon)} - \chi_B) \psi^2 \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

Com isso, reescrevemos (4.24) da seguinte maneira:

$$\frac{(\sigma_1(\epsilon) - \sigma_1)}{\epsilon} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\epsilon} \iint_{\mathbf{U}} (\chi_{B(\epsilon)} - \chi_B) \psi^2 \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} + o(1). \quad (4.25)$$

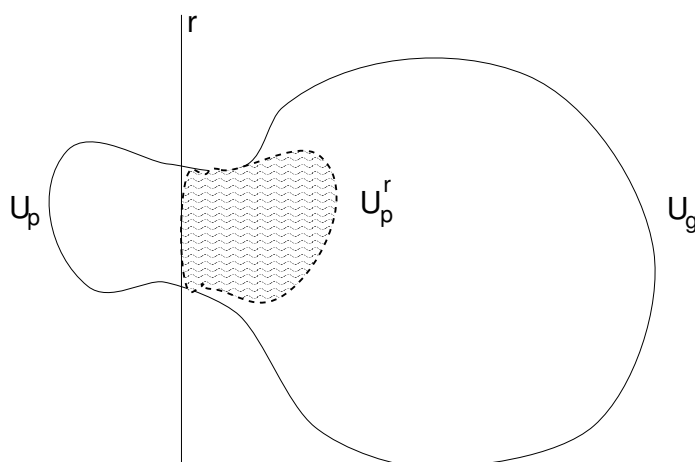
As referências contidas em Harrell II, Kröger & Kurata garantem que  $\psi \in C^{1,\beta}(\mathbf{U})$  para algum  $0 < \beta < 1$ , o que nos permite utilizar o Lema 2 na passagem ao limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$  na identidade (4.25), obtendo assim

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \mathbf{v}} = (\gamma_1 + \gamma_2) \oint_{\partial B} \psi^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds,$$

como se queria demonstrar.

O resultado da Proposição 1 nos diz que a variação do autovalor fundamental  $\sigma_1$  (e conseqüentemente  $\lambda_1$ ) em relação ao deslocamento da região  $B$ , que concentra as regiões mais ou menos favoráveis do meio  $\Omega$ , é proporcional a  $\gamma_1 + \gamma_2$ , que em valor absoluto é a amplitude dos valores do crescimento intrínseco das regiões mais e menos favoráveis. Isto significa que se esta amplitude tem um valor muito elevado, qualquer mudança na disposição espacial das regiões mais e menos favoráveis deste meio terá uma grande influência na qualidade ambiental geral, o qual é medida pelo autovalor fundamental  $\lambda_1$ . Valores baixos desta amplitude refletem uma situação na qual a resposta do meio a mudanças de configuração espacial das regiões mais e menos favoráveis é mais modesta, pois neste caso  $\gamma_1 + \gamma_2$  possui um valor pequeno.

A técnica apresentada a seguir, chamada *técnica de reflexão de domínios*, é útil para a determinação do sinal da derivada direcional do autovalor  $\sigma_1$  numa determinada direção. A grosso modo, se a região candidata a refúgio possuir esta propriedade, poderemos mostrar se o autovalor  $\sigma_1$  cresce ou diminui quando a região  $B$  se afasta de uma parte da fronteira próxima a essa região. Isto motiva a seguinte



**Figura 4.3:** Ilustração dos lados pequeno  $U_p$  e grande  $U_g$  em relação à reta  $r$ , e da reflexão  $U_p^r$  em relação a esta reta.

**Definição 1** *Seja  $r$  um reta que intersecciona a região  $U$ . Para qualquer conjunto conexo  $S$  que não intersecciona  $r$ , denotamos por  $S^r$  a reflexão de  $S$  pela reta  $r$ . Dizemos que a região  $U$  possui a propriedade de reflexão interior em relação a  $r$  se existe uma componente conexa  $U_p$  de  $U \setminus r$  tal que  $U_p^r$  é um subconjunto próprio da outra componente conexa  $U_g$  de  $U \setminus r$ . Qualquer reta  $r$  com esta propriedade chama-se reta de reflexão interior de  $U$ . Além disso,  $U_p$  será chamado o lado pequeno de  $U$  (e  $U_g$  será chamado o lado grande) (cf. Figura 4.3).*

O seguinte teorema informa que quando a propriedade definida acima é válida, o autovalor  $\sigma_1$  cresce quando a região  $B$  se afasta do lado pequeno no caso onde temos  $\gamma_1 > 0$  e  $\gamma_2 > 0$ , e diminui quando  $\gamma_1 < 0$  e  $\gamma_2 < 0$ . Logo, no primeiro caso, a qualidade geral do meio melhora quando as regiões mais favoráveis para o desenvolvimento da espécie em análise se afastam da fronteira letal, e no segundo caso, o meio piora qualitativamente quando as regiões menos propícias se afastam da fronteira letal, pela diminuição do autovalor  $\sigma_1$ . Os detalhamentos matemáticos deste teorema, que necessitam ser feitas, pois existem adaptações para o nosso caso, foram sugeridas em Kurata (2002).

**Teorema 1** *Suponha que  $U$  possua a propriedade de reflexão interior em relação a uma reta  $r$  pela qual o conjunto  $B$ , o qual assumimos possuir convexidade, conexidade, fronteira suave por partes, e simetria por reflexão. Além disso, supondo que  $B$  é deslocado na direção de um vetor unitário  $\mathbf{v}$  perpendicular a  $r$  e apontando do lado pequeno para o lado grande.*

*Então, no caso onde  $\gamma_1 > 0$  e  $\gamma_2 > 0$ , temos*

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \mathbf{v}} > 0.$$

*No caso  $\gamma_1 < 0$  e  $\gamma_2 < 0$ ,*

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \mathbf{v}} < 0$$

*(cf. Figura 4.4).*

*Prova:* Necessitamos inicialmente mostrar que para qualquer ponto  $\mathbf{x} \in \partial B$  que se encontra no lado pequeno, temos

$$\psi(\mathbf{x}) < \psi(\mathbf{x}^r).$$

Para a obtenção deste resultado, consideremos a função auxiliar  $w$  definida no lado pequeno  $U_p$ :

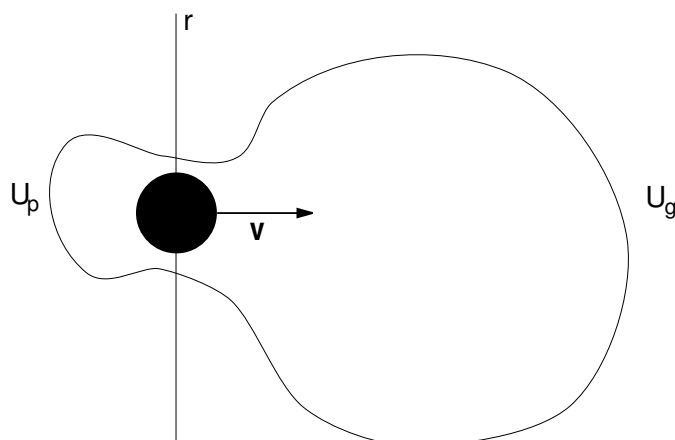
$$w(\mathbf{x}) := \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}^r).$$

No interior desta região, temos pela definição de  $\psi$ :

$$D\Delta w + \gamma_B(x, y)w = \sigma_1 w, \quad (4.26)$$

enquanto na fronteira de  $U_p$ , temos:

- i. Na parte da fronteira de  $U_p$  que se localiza sobre reta de reflexão interior  $r$ , temos trivialmente  $w(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}^r) = 0$ ;
- ii. Na parte da fronteira do lado pequeno  $U_p$  que coincide com a fronteira de  $U$ , nós temos  $w(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}^r) = 0 - \psi(\mathbf{x}^r) = -\psi(\mathbf{x}^r) \leq 0$ , pois  $\mathbf{x}^r$  se trata de um ponto interior de  $U$  e estamos tomando a autofunção  $\psi$  positiva e normalizada na norma usual de  $L^2(U)$ .



**Figura 4.4:** Quando a região B (em preto) se desloca na direção do vetor  $\mathbf{v}$  acima, o autovalor  $\sigma_1$  aumentará ou diminuirá, dependendo do sinal das constantes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (cf. Teorema 1).

Afirmamos que  $w(\mathbf{x}) \leq 0$  em  $U_p$ . Com efeito, se esta afirmação não é verdadeira, existe uma região  $U' \subset U_p \subsetneq U$  tal que  $w(\mathbf{x}) > 0$  em  $U'$ . A equação (4.26), aliada ao fato de que  $w = 0$  na fronteira de  $U'$  ( $w$  é construída com base na função  $\psi$  a qual é  $C^{1,\beta}(U)$ ), nos informa que  $w$  é autofunção associada a  $\sigma_1$ . Com isso  $\sigma_1$  é autovalor em ambos os domínios  $U'$  e  $U$ , o que é vetado pela conhecida monotonicidade dos autovalores em relação ao tamanho do domínio. Logo, temos de fato  $w(\mathbf{x}) \leq 0$  em  $U_p$ .

Uma aplicação do princípio do máximo forte neste caso nos dá a desigualdade estrita  $w(\mathbf{x}) < 0$  em  $U_p$ . Portanto,  $\psi(\mathbf{x}) < \psi(\mathbf{x}^r)$ .

Considerando a região B deslocada na direção do vetor unitário  $\mathbf{v}$ , seja  $\partial B_1$  a parte da fronteira de B que está no lado grande  $U_g$  e  $\partial B_2 := \partial B \setminus \partial B_1$ . Realizamos alguns cálculos na identidade obtida em (1):

$$\begin{aligned} (\gamma_1 + \gamma_2) \oint_{\partial B} \psi^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, ds &= (\gamma_1 + \gamma_2) \left( \oint_{\partial B_1} \psi^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, ds + \oint_{\partial B_2} \psi^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, ds \right) \\ &= (\gamma_1 + \gamma_2) \oint_{\partial B_2} [\psi^2(\mathbf{x}) - \psi^2(\mathbf{x}^r)](\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, ds. \end{aligned}$$

Como em  $B_2$  nós temos  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) < 0$ , o resultado acima em conjunto com os sinais de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dão o resultado desejado.

Note que os sinais das constantes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  não necessitam ser iguais. Isto significa

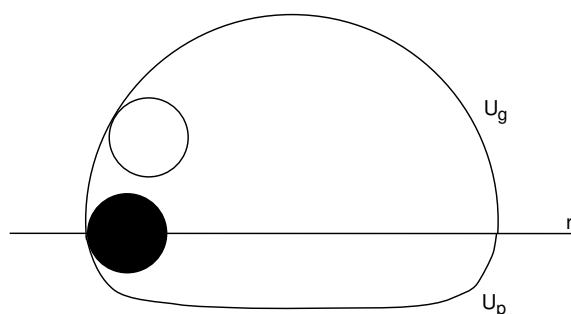
que uma maior variedade de situações pode ser obtida, e dependendo das magnitudes dos valores de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  o autovalor  $\sigma_1$  pode aumentar ou diminuir, mesmo em situações nas quais o meio é totalmente favorável, mas com regiões mais favoráveis que outras (caso no qual  $\gamma_1 > 0$  e  $\gamma_2 < 0$ ) ou num meio totalmente desfavorável, mas com regiões mais desfavoráveis que outras ( que corresponde ao caso no qual  $\gamma_1 < 0$  e  $\gamma_2 > 0$ ).

A partir deste ponto, vamos enunciar sem demonstração alguns resultados contidos em Harrell II, Kröger & Kurata (2001) os quais, com as devidas adaptações, admitem uma interpretação ecológica no nosso contexto. Nos concentraremos no caso onde  $\gamma_1 > 0$  e  $\gamma_2 > 0$ , pois o outro caso, onde estas constantes são ambas negativas, o resultado sempre deve ser interpretado de maneira invertida, isto é, as configurações que minimizam o autovalor  $\sigma_1$  num caso maximizam o mesmo autovalor no outro caso, e vice-versa. Ei-los:

**Corolário 1** *Suponha que a região  $U$  é um convexo com simetria de reflexão em relação a uma reta  $r$  e que  $B$  seja uma bola de raio suficientemente pequeno. Então na configuração posição que minimiza  $\sigma_1$ , com  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ , a região  $B$  está em contato com a fronteira. Na posição que maximiza  $\sigma_1$ , o centro de  $B$  está localizado sobre  $r$ .*

Este resultado está de acordo com aqueles obtidos em Cantrell & Cosner (1991a). A configuração espacial que mais desfavorece a espécie em estudo, no caso onde as regiões favoráveis se concentram numa única sub-região do meio em estudo, é aquela na qual esta sub-região está em contato com a fronteira letal, pois como esta região é a mais favorável para a espécie em análise, uma maior taxa de organismos encontrará a fronteira próxima, já que ela apresenta uma maior densidade de indivíduos que outras áreas da região. Algum ponto da reta  $r$  que não esteja em contato com a fronteira letal será o centro da região  $B$  que mais favorece o desenvolvimento da espécie  $u$ , pois as regiões menos propícias servirão como um isolamento das regiões mais propícias, evitando contato direto com a fronteira letal.

Uma pergunta que surge naturalmente é: dentre as configurações espaciais das regiões mais favoráveis (representadas pela única região  $B$ ) em contato com a fronteira letal, existe alguma que contribui mais negativamente para o desenvolvimento da espécie em análise?



**Figura 4.5:** A região em branco representa uma configuração na qual o autovalor  $\sigma_1$  é maior que a configuração representada pela região em preto, pois a primeira se encontra em contato com a fronteira da região, porém no lado grande da mesma.

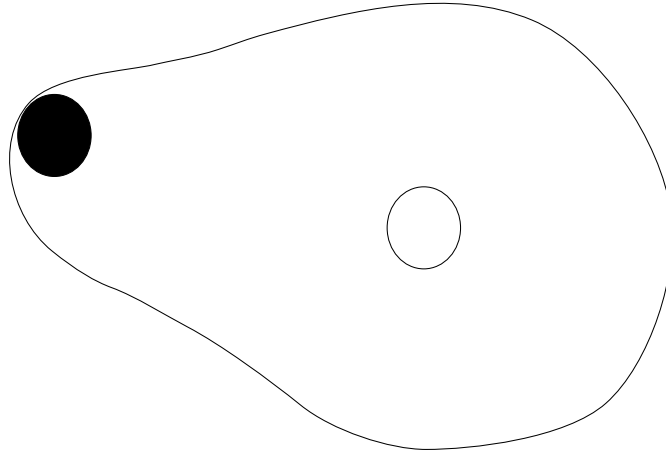
A seguinte proposição é o início da resposta à questão acima:

**Proposição 2** *Seja  $B$  uma bola tangente à fronteira de  $U$ , que assumimos ser de classe  $C^2$  numa vizinhança do ponto de contato. Além disso, suponha que  $U$  possua a propriedade de reflexão interior em relação a uma reta  $r$  normal à fronteira no ponto de contato. Então  $\sigma_1$  é estritamente crescente quando  $B$  é deslocado em contato com a fronteira em direção ao lado grande (cf. Figura 4.5).*

Isto serve como uma “receita” para construção de refúgios: caso queiramos melhorar as condições gerais de sobrevivência de uma espécie numa região com geometria definida, devemos evitar as sub-regiões que podem ser classificadas como lados pequenos, pois como a proposição acima nos alerta, estas são regiões que diminuem a magnitude de  $\sigma_1$ .

No caso geral, a determinação dos lados pequenos de um meio dado pode ser difícil, principalmente se a geometria da fronteira desse meio for complexa. Mas para geometrias mais simples, estas regiões podem ser encontradas com mais facilidade, como veremos a seguir, caracterizando uma classe de sub-regiões “ruins”, que caracterizam os lados pequenos do meio.

**Definição 2** *Um vértice de um domínio de classe  $C^2$  é um ponto da fronteira no qual a curvatura é localmente maximizada. Se a fronteira for  $C^2$  por partes, os pontos não-*



**Figura 4.6:** Ilustração do Teorema 2. Os vértices são regiões que minimizam o autovalor  $\sigma_1$  quando em contato com a região B (em preto). As regiões centrais do meio U maximizam  $\sigma_1$  (em branco).

suaves da fronteira (como vértices de um polígono, por exemplo) que apontam para fora da região são também considerados vértices.

**Teorema 2** Seja  $U$  um domínio bidimensional convexo que possui as seguintes propriedades:

- i.  $U$  é simétrico por reflexões em relação aos eixos  $x$  e  $y$ ;
- ii. A fronteira de  $U$  é de classe  $C^2$  para  $x, y \neq 0$ ;
- iii. Em qualquer quadrante do plano, a curvatura da fronteira de  $U$  é uma função monótona de  $x$ .

Caso o raio de  $B$  seja menor que o raio de curvatura do vértice de  $U$ , então  $\sigma_1$  é minimizado, no caso em que  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ , quando  $B$  está em contato com um vértice, e maximizado quando o centro da região  $B$  coincide com a origem. Caso o raio de  $B$  seja pequeno o suficiente para caber no interior de  $U$ , porém maior que o raio de curvatura do vértice, a posição de  $B$  que minimiza  $\sigma_1$  é aquela mais próxima possível do vértice.



A afirmação acima caracteriza algumas regiões nos quais o posicionamento de regiões favoráveis é menos indicada: os vértices. A alta curvatura que os caracteriza permite o maior contato com as regiões favoráveis da forma proposta para B; logo, como essas regiões favoráveis são aquelas que produzem a maior quantidade de organismos da espécie para o meio, haverá uma maior perda para a fronteira letal, devido ao maior contato entre esta fronteira e a fronteira da região B.

Para finalizar este capítulo, vamos enunciar um caso particular: quando a região U é, por exemplo, um polígono regular de  $n$  lados, com seus vértices eventualmente substituídos por arcos circulares exteriores com ângulos inferiores a  $2\pi/n$ , a posição de B que maximiza  $\sigma_1$  é no centro do polígono, enquanto a posição de B que minimiza  $\sigma_1$  é a mais próxima possível de um dos vértices. Com isso, as regiões que podem ser classificadas como lado pequeno são aquelas que possuem estes vértices. A região central do polígono, que mais se distancia da fronteira letal é aquela que mais favorece o desenvolvimento da espécie em estudo.



---

## Capítulo 5

---

# Domínios Mínimos em Meios Heterogêneos de Oscilação Rápida

### RESUMO DO CAPÍTULO

Nesta parte do trabalho estamos interessados na obtenção de informações sobre a persistência ou extinção de uma determinada espécie que habita um meio no qual as condições de sobrevivência possuem alta variação espacial, isto é, as regiões mais e menos propícias para o desenvolvimento da espécie em estudo se alternam no meio em escalas reduzidas quando comparadas às dimensões de interesse do problema, como o perímetro da região em estudo por exemplo. Uma análise em múltiplas escalas aliada a um processo de obtenção de médias, processos estes conhecidos como técnica de *homogeneização* nos permitem obter conclusões a respeito do sucesso (ou não) da colonização do meio dado via o estudo de uma equação diferencial auxiliar, cuja análise é mais simples que a análise da equação diferencial original obtida para o estudo do comportamento da espécie em questão.

## 5.1 INTRODUÇÃO

A motivação do presente estudo sobre condições para sobrevivência ou persistência de espécies em meios heterogêneos reside na tentativa de descrever, de uma maneira mais precisa, situações ecológicas mais complexas, onde dificuldades de sobrevivência num meio estão mais presentes em determinadas partes do mesmo, fato este que é desprezado por modelos ecológicos mais simples, onde os coeficientes que medem o grau de hospitalidade nesse meio são constantes.

De acordo com o que vimos nos capítulos anteriores, quando a heterogeneidade do meio em questão possui, digamos, uma certa regularidade no sentido em que as diferenças observadas na qualidade do mesmo estão bem definidas espacialmente (grandes regiões favoráveis  $\times$  grandes regiões desfavoráveis), propriedades geométricas dessas regiões, como os tamanhos e localizações geográficas das regiões mais e menos propícias para o desenvolvimento da espécie em estudo, são determinantes para o sucesso ou não da colonização do meio analisado.

Nessa parte do trabalho estamos interessados em situações nas quais o meio a ser colonizado possui uma heterogeneidade específica: as regiões favoráveis e desfavoráveis estão bem definidas em escalas espaciais pequenas em relação às dimensões de interesse do problema, como o tamanho da região a ser colonizada, por exemplo.

Padrões heterogêneos como o descrito acima podem ser encontrados em vários tipos de florestas: árvores em geral estão dispostas a uma certa distância umas das outras, mas quando observamos a região de florestas como um todo, tais distâncias podem não ser observadas, dependendo da análise realizada sobre tal região; com isso, assume-se que a disposição das árvores é praticamente uniforme, o que acarreta em modelos a coeficientes constantes para populações que sobrevivem nesses meios, como é o caso do seminal trabalho de Ludwig, Aronson & Weinberger (1979).

Outro tipo de padrão, que é motivação para o presente trabalho, é aquele no qual temos heterogeneidade espacial, porém somente em *uma* das dimensões espaciais de interesse. Um exemplo típico de tal situação reside na disposição na qual certos tipos de vegetais são plantados em fazendas: várias fileiras vazias são deixadas entre os vegetais plantados, que também são plantados em fileiras, para que haja um trânsito

mais fácil nessas plantações, facilitando a colheita e aplicação de pesticidas nas plantas lá presentes.

Com o intuito de esclarecer as idéias apresentadas acima, descreveremos à seguir uma situação-exemplo que será alvo de nossa análise no presente capítulo:

Consideramos um meio limitado plano  $\Omega$  que, tendo em vista as aplicações, pode ser considerado inicialmente como uma região retangular:

$$\Omega := (0, L) \times (0, M) \subset \mathbb{R}^2. \quad (5.1)$$

Nesse meio, uma determinada espécie, cuja densidade denotamos por  $u(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ ,  $t > 0$ , se desenvolve.

Seguimos a abordagem dada nos capítulos anteriores, considerando modelos de equações com derivadas parciais semi-lineares de evolução nas quais as dinâmicas reprodutivas e de dispersão da espécie em estudo são postas em análise:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D(x, y) \nabla u) + r_1 \left( \gamma(x, y) - \frac{u}{K} \right) u. \quad (5.2)$$

Com o intuito de estudarmos situações nas quais a função  $\hat{\gamma}$ , que modela o crescimento intrínseco de  $u$  em (5.2), possui rápidas alternâncias entre as regiões muito e pouco propícias para o desenvolvimento de  $u$ , vamos considerar a *variável rápida*

$$\xi = \frac{x}{\epsilon}, \quad (5.3)$$

onde  $\epsilon := L/n$  e  $n$  é a quantidade de períodos da função original  $\hat{\gamma}$  que desejamos que caibam no intervalo  $(0, L)$ . Estamos assumindo que tal constante  $\epsilon$  é pequena, isto é, assumimos que as diferenças de qualidade do meio só aparecem quando estamos observando o mesmo em escalas de comprimento pequenas em relação à escala das dimensões espaciais do meio  $\Omega$  (que no caso é  $L$ ).

Desejamos observar como variações súbitas na qualidade do meio em relação à posição influem na colonização da região. Para isto, nós consideramos a função  $r$  definida para todo  $\xi \in \mathbb{R}$  dada por

$$r(\xi) := r_1 \gamma(x, y) = \begin{cases} r_1, & 0 \leq \xi < \beta \\ -r_2, & \beta \leq \xi < 1, \end{cases} \quad (5.4)$$

e estendida periodicamente, isto é,  $r(\xi + 1) = r(\xi)$ . A diferença de qualidade no meio está modelada pela magnitude das constantes positivas  $r_1$  e  $r_2$ , com regiões mais propícias para o desenvolvimento de  $u$  (denotadas pelo conjunto dos  $(x, y) \in \Omega$  onde  $r = r_1$ ) e regiões menos propícias (nas quais  $r = -r_2$ ). Este valor negativo indica regiões inóspitas para a espécie em estudo. A constante  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$  determina como se processa a disposição das regiões mais e menos propícias para o desenvolvimento de  $u$  na escala de menor comprimento. Quanto maior o valor dessa constante, mais benéfico o meio se torna para a espécie modelada em virtude da escassez de regiões pouco propícias para o seu desenvolvimento, tendendo à situação na qual o meio é homogêneo e inteiramente propício a  $u$ , isto é, quando  $\beta = 1$ . E, analogamente, quanto menor o valor dessa constante, maiores são as regiões desfavoráveis para o desenvolvimento de  $u$ , se aproximando da situação menos propícia, quando as regiões inóspitas ocupam toda a região  $\Omega$  (quando  $\beta = 0$ ).

Note que estamos modelando uma situação onde o crescimento intrínseco é dependente da abscissa somente, o que representa a situação de uma plantação onde uma espécie de praga sobrevive, e na qual a fonte, que são as plantas, se encontram em fileiras (regiões mais propícias). As regiões menos propícias modelam a ausência de plantas hospedeiras.

De maneira análoga ao que foi feito acima, vamos permitir que a heterogeneidade espacial também influa nas propriedades de locomoção da espécie  $u$ . Definindo uma função  $\widehat{D}$  da seguinte forma:

$$\widehat{D}(\xi) = \begin{cases} D_1, & 0 \leq \xi < \beta \\ D_2, & \beta \leq \xi < 1, \end{cases} \quad (5.5)$$

vamos modelar rápidas variações no coeficiente de difusão de  $u$  definindo-o assim:

$$D(x, y) := \widehat{D}(\xi). \quad (5.6)$$

Devemos ressaltar o fato que, ao contrário da definição do coeficiente de crescimento intrínseco acima, vamos permitir que o coeficiente de difusão de  $u$  possua somente valores *positivos* pois, seguindo Shigesada & Kawasaki (1997), as magnitudes dos valores que  $\widehat{D}$  assume no meio  $\Omega$  deixadas em aberto permitem que uma variedade maior de situações ecológicas seja obtida. Por exemplo, as regiões pouco propícias para o

desenvolvimento da espécie em estudo podem permitir uma locomoção mais fácil que as regiões mais propícias para  $u$  (o que significa que  $D_1 < D_2$ ), ou vice-versa.

## 5.2 O CASO UNIDIMENSIONAL

Nesta seção nós nos concentraremos numa situação mais simples, mas na qual as idéias principais sobre obtenção de informações do modelo em estudo via processos de homogeneização estão presentes com menos dificuldades técnicas que o modelo em duas dimensões; logo, seguindo as idéias contidas no trabalho de Ludwig, Aronson & Weinberger (1979), comentaremos inicialmente o modelo unidimensional equivalente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \widehat{D}(\xi) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left( r(\xi) - \frac{r_1}{K} u \right) u, \quad (5.7)$$

que representa a dinâmica vital de uma espécie habitando um meio unidimensional  $(0, L)$ .

Nesse contexto, temos que a região de interesse  $\Omega$  se reduz a um intervalo  $(0, L)$ . Consideramos uma situação na qual o meio exterior a  $\Omega$  é totalmente inóspito ou letal, o que em termos matemáticos significa que a função incógnita obedece, além da equação diferencial descrita acima, à condição do tipo Dirichlet:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.8)$$

assim como  $u(x, 0) = u_0(x)$ , que representa a distribuição inicial dos indivíduos ao longo domínio.

Como desejamos obter condições sob as quais tenhamos sucesso na colonização da região  $\Omega$ , devemos analisar matematicamente se a solução trivial (no nosso caso, a identicamente nula) é estável para “pequenas” perturbações, isto é

$$u = 0 + \delta(x, t),$$

onde  $\delta$  é tal que  $\delta^2 \ll \delta$ , ou seja, que o quadrado do valor da perturbação  $\delta$  em análise é desprezível quando comparado com o próprio valor da perturbação. Com isso, temos ao substituir que  $\delta$  satisfaz a seguinte equação diferencial linear

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \widehat{D}(\xi) \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) + \widehat{r}(\xi) \delta \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty),$$

satisfazendo as mesmas condições iniciais e de fronteira de  $u$ . A linearidade da equação acima torna possível a utilização do Método de Fourier, considerando a função solução  $\delta$  da forma

$$\delta(x, t) = e^{\sigma t} w_{\sigma}(x).$$

Logo, devemos analisar o sinal das constantes  $\sigma$  que resolvem o seguinte problema espectral:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \widehat{D}(\xi) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \widehat{r}(\xi) w = \sigma w \quad (5.9)$$

$$w(0) = w(L) = 0, \quad (5.10)$$

já que se tivermos, por exemplo, que os autovalores  $\sigma$  forem *todos* negativos, a espécie em estudo está destinada à extinção. *Algum* valor positivo de  $\sigma$  indica persistência desta espécie.<sup>1</sup>

Existe uma grande dificuldade técnica para a análise do problema espectral descrito em (5.9): a presença de coeficientes que, além de não serem constantes, possuem *variação rápida*, que é revelada com a dependência explícita da variável rápida  $\xi = x/\epsilon$ . Por exemplo, a obtenção de resultados numéricos de (5.9) é extremamente custosa pelo fato de o erro da aproximação numérica ser em geral proporcional a  $1/\epsilon$ , ocasionando assim em tamanhos de passo muito pequenos, e com isso tempos de execução muito grandes para obtenção de resultados relevantes e confiáveis acerca do fenômeno estudado. Além disso, o modelo “macroscópico” é de interesse, já que é nesta escala que pretendemos influir e/ou controlar o sistema.

Propomos nesse ponto analisar o fenômeno em questão, fazendo uso de uma ferramenta chamada processo de *homogeneização* (Keller (1977), Bakhvalov & Panasenko (1989)). Tal método consiste em substituir o problema (5.9), por uma outra equação, mais simples que a primeira, e relacionada com a mesma por ser obtida através de um processo de análise de múltiplas escalas e médias, resultando assim numa aproximação do problema original. Tal processo é muito utilizado em engenharia para obtenção de resultados na modelagem de meios porosos, onde há variações periódicas dos materiais, mas em escalas de comprimento pequenas em relação às dimensões de interesse do problema.

<sup>1</sup> Este “princípio de estabilidade linear” baseia-se em termos gerais na Teoria Espectral de Fourier.



O próximo capítulo será dedicado aos cálculos necessários para obtenção das equações homogeneizadas. Deixamos para este capítulo os comentários a respeito dos resultados obtidos.

Um dos resultados obtidos é a equação efetiva associada do problema espectral no caso unidimensional (5.9). Ela possui a seguinte forma:

$$\bar{D} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \bar{r} w_0 = \sigma w_0, \quad (5.11)$$

$$w_0(0) = w_0(L) = 0, \quad (5.12)$$

onde  $w_0$  representa a solução aproximada do problema (5.9) e os coeficientes *constantes*  $\bar{D}$  e  $\bar{r}$  são dados por

$$\bar{D} := \left( \int_0^1 \frac{1}{\widehat{D}(z)} dz \right)^{-1} \quad (5.13)$$

e

$$\bar{r} := \int_0^1 \widehat{r}(z) dz. \quad (5.14)$$

Neste ponto, observe que a análise do fenômeno em estudo se torna bem mais simples, já que ao substituímos o problema de autovalores original (5.9) pelo problema de autovalores homogeneizado (5.11), os coeficientes envolvidos são constantes; com isso, uma análise semelhante àquela realizada no artigo de Ludwig, Aronson & Weinberger (1979) será suficiente para o nosso propósito.

Fazendo tal análise, temos que o comprimento crítico, abaixo do qual teremos extinção da espécie  $u$  devido aos efeitos letais da fronteira, aliados às condições inóspitas das regiões nas quais temos  $\widehat{r} = -r_2$ , é dado por

$$L^* := \pi \sqrt{\frac{\bar{D}}{\bar{r}}},$$

que, em função das variáveis de interesse do problema fica

$$L^* = \pi \sqrt{\frac{D_1 D_2}{[\beta D_2 + (1 - \beta) D_1][\beta r_1 - (1 - \beta) r_2]}}. \quad (5.15)$$

Note que nem todos os valores de  $\beta$  são permitidos para a sobrevivência da espécie  $u$ : se as regiões desfavoráveis ao desenvolvimento dessa espécie forem muito

maiores que as regiões favoráveis na micro-escala, o que se traduz matematicamente pela relação

$$\beta < \beta^* := \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \quad (5.16)$$

obteremos a extinção de  $u$ , *independentemente do tamanho da região em estudo*, o que está de acordo com as expectativas dessa situação.

Note pela definição de  $\beta^*$  em (5.16) que  $\beta^*$  é uma função *crescente* de  $r_2$ ; com isso, conclui-se que para regiões com grandes diferenças de qualidade, regiões favoráveis devem ter uma grande predominância sobre regiões desfavoráveis para que a população modelada pela função solução  $u$  obtenha sucesso no meio em questão. Outro fato que se pode observar pela definição de  $L^*$  é a existência de uma assíntota vertical quando  $x = \beta^*$ , o que revela a grande dificuldade que a espécie em estudo possui em se desenvolver numa região onde áreas desfavoráveis prevalecem sobre áreas favoráveis na escala menor de comprimento. Quando  $\beta \rightarrow 1$ , vemos que a situação padrão na qual temos  $L^* = \pi\sqrt{D_1/r_1}$ , que é a situação do meio totalmente favorável, se restabelece.

Uma outra observação pode ser feita nesse momento: a predominância de regiões desfavoráveis sobre regiões favoráveis na escala menor de comprimento *não* é o único fator que pode levar a espécie em estudo à extinção: mantendo a constante  $\beta$  fixa, observamos que se as diferenças de qualidade do meio em questão forem muito grandes, a sobrevivência da espécie  $u$  fica comprometida. De maneira mais precisa, se

$$r_2 > r_2^* := \frac{\beta}{1 - \beta} r_1,$$

então observamos a impossibilidade de  $u$  sobreviver no meio em questão, não importa o quão grande tal meio seja. Analogamente, temos que o meio em questão deve possuir regiões suficientemente favoráveis para o sucesso da colonização de  $u$ , o que em termos matemáticos se traduz na seguinte desigualdade que o coeficiente de crescimento intrínseco das regiões favoráveis,  $r_1$ , deve obedecer para que haja possibilidades de sobrevivência da espécie em estudo:

$$r_1 > r_1^* := \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) r_2.$$

Uma análise preliminar de modelos unidimensionais é útil pelo fato de podermos, com menos dificuldades técnicas, obter resultados e conclusões a respeito de mo-

delos que são válidos em maiores dimensões espaciais. O modelo o qual nos propusemos a investigar no início deste texto, apesar de apresentar características semelhantes ao modelo unidimensional equivalente, também apresenta propriedades ausentes no modelo unidimensional, como veremos a seguir.

### 5.3 O MODELO EM DUAS DIMENSÕES ESPACIAIS

Nesta parte do texto, vamos nos concentrar na análise do modelo em duas dimensões espaciais associado ao modelo unidimensional analisado na seção anterior. Neste ponto, estamos interessados em estudar as conseqüências da rápida variação do crescimento intrínseco e da difusão da espécie em estudo. Lembrando que estamos interessados em rápidas variações numa das dimensões espaciais somente, analisemos pois o seguinte problema espectral:

$$\nabla \cdot (\widehat{D}(\xi) \nabla w) + \widehat{r}(\xi)w = \sigma w, \quad \text{em } \Omega \quad (5.17)$$

$$w = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (5.18)$$

onde  $w$  é o autovetor associado à separação de variáveis da solução do problema linear de reação- difusão em estudo,  $\Omega$  é uma região retangular da forma  $(0, L) \times (0, M)$ , e que novamente estamos interessados na magnitude das constantes  $\sigma$  que verificam a identidade acima, ou seja, os autovalores do problema dado acima: se todos os autovalores do problema acima forem negativos, a espécie em estudo se extingue; caso contrário, concluímos que a espécie  $u$  tem chances de sobrevivência no meio  $\Omega$ .

Lembrando que estamos interessados no problema em duas dimensões espaciais, elucidamos a notação utilizada acima para o operador diferencial  $\nabla$ , a saber:

$$\nabla := \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}.$$

Procedendo de maneira análoga à seção anterior, utilizamos o método de homogeneização para obter uma solução aproximada do problema espectral (5.17) com uma ligeira adaptação, devida ao fato de os coeficientes do problema (5.17) possuírem

dependência na variável  $x$  somente. Cálculos análogos aos realizados na seção anterior nos dão como resposta que a solução aproximada  $w_0$  é solução do seguinte problema espectral a coeficientes constantes:

$$\overline{D} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \overline{\overline{D}} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \overline{r} w_0 = \sigma w_0 \quad \text{em } \Omega, \quad (5.19)$$

$$w_0 = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (5.20)$$

Temos que os coeficientes constantes  $\overline{D}$  e  $\overline{r}$  são definidos de maneira análoga àquela feita na seção anterior (cf. (5.13) e (5.14)). Porém, o coeficiente de difusão  $\overline{\overline{D}}$  é definido de maneira distinta de  $\overline{D}$ , a saber:

$$\overline{\overline{D}} := \int_0^1 \widehat{D}(z) dz, \quad (5.21)$$

o que revela a presença de difusão *anisotrópica* neste modelo, induzida pela dependência dos coeficientes de difusão e de crescimento intrínseco originais sobre a dimensão espacial  $x$  somente.

O Método de Fourier com algumas alterações nos conduz à seguinte expressão, a qual é uma estimativa do valor mínimo da área que o meio  $\Omega$  deve possuir para a preservação da espécie  $u$  nesse meio:

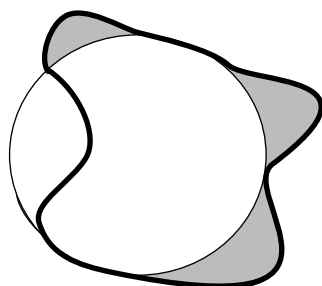
$$|\Omega| < A^* := \frac{2\pi^2}{\overline{r}} \left( \overline{D} \overline{\overline{D}} \right)^{1/2},$$

onde denotamos por  $|\Omega|$  a Medida de Lebesgue (no caso a área) do domínio  $\Omega$ .

Para continuarmos a análise do nosso modelo, necessitamos expressar o valor crítico de área  $A^*$  em função das variáveis de interesse do problema, que são os valores que os coeficientes de crescimento intrínseco e de difusão assumem na escala menor de comprimento, assim como suas devidas proporções. Com isso, obtemos a seguinte expressão para  $A^*$ :

$$A^* = \frac{2\pi^2}{\beta r_1 - (1 - \beta)r_2} \left[ \frac{D_1 D_2 (\beta D_1 + (1 - \beta) D_2)}{\beta D_2 + (1 - \beta) D_1} \right]^{1/2}. \quad (5.22)$$

Através da comparação dos valores críticos de comprimento mínimo e área mínima obtidos em (5.15) e (5.22), respectivamente, concluímos que as análises feitas na seção anterior para a expressão do comprimento crítico como função das variáveis



**Figura 5.1:** Ilustração de uma região de mesma área da circunferência exibida acima, porém com geometria desfavorável (áreas sombreadas). A presença destas reentrâncias aumentam a magnitude do autovalor fundamental, pois organismos lá colocados têm maiores chances de contato com a fronteira letal.

presentes na escala menor de comprimento são análogas àquelas feitas aqui. Com isso, comentamos brevemente o resultado obtido para a área crítica:

A expressão obtida em (5.22) revela a grande influência da menor escala de comprimento no comportamento macroscópico da região em estudo  $\Omega$  no que diz respeito a possibilidades de sobrevivência de uma espécie com uma dinâmica vital que obedece a equação apresentada em (5.7), ou sua análoga em duas dimensões espaciais. A distribuição especial das regiões favoráveis e desfavoráveis, bem como a suas diferenças de ordem qualitativa, tem uma importância decisiva na expressão da área mínima necessária para que a espécie em estudo tenha chances de sobrevivência no meio em questão. Se neste meio existirem regiões extremamente desfavoráveis para a proliferação da espécie  $u$ , ou se essas regiões impróprias estiverem distribuídas em abundância na menor escala de comprimento, a região como um todo pode se tornar hostil para  $u$ , resultando na sua extinção. Valores moderados de inospitalidade aliados à abundância de regiões favoráveis na escala menor de comprimento podem resultar, na maior escala de observação, numa região propícia ao desenvolvimento da espécie em estudo.

Para finalizarmos essa discussão, apresentamos resultados sobre tamanho críticos para meios bidimensionais mais gerais do que os retangulares considerados acima.

Neste caso, não podemos considerar o coeficiente de difusão e a taxa de crescimento intrínseco como funções da variável rápida  $\xi$ , pois neste caso o operador de média sobre o período  $\langle \cdot \rangle$  não está bem definido. Logo, procuramos obter um resultado sobre o valor de área crítico numa situação mais simples, introduzindo um termo de primeira ordem, ou de *convecção*, que indica a tendência de movimentação dos organismos em estudo numa direção pre-estabelecida. Esta direção é dada pelo vetor  $\mathbf{b} := (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ , que supomos constante. Os resultados obtidos a seguir foram inspirados em Murray & Sperb (1983), porém as estimativas de área mínima para domínios candidatos a refúgio não foram completamente obtidas naquele trabalho.

Consideramos um problema espectral semelhante ao problema homogeneizado obtido em (5.19), (5.20), a saber:

$$D_1 w_{xx} + D_2 w_{yy} + r w + \mathbf{b} \cdot \nabla w = \sigma w \quad \text{em } \Omega, \quad (5.23)$$

$$w = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (5.24)$$

onde os coeficientes de difusão  $D_1$  e  $D_2$  são constantes positivas, podendo ser distintas, o que implica difusão anisotrópica neste meio. Consideramos a taxa de crescimento intrínseco  $r$  também uma constante positiva, pois já sabemos pelas considerações feitas acima que as chances de sobrevivência num problema deste tipo somente existem quando  $r > 0$ .

Obtemos, através da Desigualdade de Faber-Krahn, e de um resultado técnico contido em Murray & Sperb (1983), a seguinte estimativa para o valor crítico de área:

$$|\Omega| < A^* := \frac{4\pi j_0^2}{4r - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{b})^2} \sqrt{D_1 D_2}, \quad (5.25)$$

onde denotamos por  $j_0$  a primeira raiz positiva da Equação de Bessel do primeiro tipo de ordem zero e  $\mathbf{d} := (d_1, d_2)$  é o vetor de coordenadas

$$d_1 = 1/\sqrt{D_1}$$

$$d_2 = 1/\sqrt{D_2}.$$

Notamos que a expressão obtida em (5.25) somente tem sentido se o módulo do vetor  $\mathbf{b}$  não possuir um valor elevado. Isto significa que no caso de um meio com fronteira letal, a perda de indivíduos em função do processo convectivo, e consequente

choque com a fronteira, não deve ser muito grande para que o meio em questão possa ser um refúgio para esta espécie. Obtemos um valor crítico para o módulo do vetor de convecção  $\mathbf{d}$  como função da taxa de crescimento intrínseco e dos coeficientes de difusão:

$$|\mathbf{b}| < \frac{2\sqrt{r}}{|\mathbf{d}|} = 2\sqrt{r \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}}.$$

Logo, perdas de organismos para a fronteira letal, em decorrência do transporte na direção do vetor  $\mathbf{b}$  podem ser compensadas por grandes taxas de crescimento intrínseco ou de movimentação aleatória, a qual serve como uma espécie de “resistência” ao movimento por convecção.

A estimativa de área mínima  $A^*$  obtida em (5.25) não leva em consideração outras propriedades geométricas da fronteira da região candidata a refúgio  $\Omega$ , como o formato de sua fronteira. Podemos intuir sobre tal influência analisando os organismos individualmente: supondo um meio com geometria mais complexa, com reentrâncias e sulcos (*cf.* Figura 5.1), os organismos pertencentes à espécie  $u$  analisada, se movimentando aleatoriamente na região  $\Omega$  e com chances iguais de deslocamento em todas as direções, têm maiores chances de encontro com a fronteira letal quando se encontram próximos de partes fronteira com geometria mais complexa. Com isso, é natural esperar, com base na análise dos capítulos anteriores, que o autovalor fundamental aumente. E este de fato é o caso, de acordo com Battacharya (2001). Neste artigo, uma estimativa análoga à Desigualdade de Faber-Krahn é obtida, porém levando em consideração uma grandeza denominada *assimetria* da região  $\Omega$ , e denotada pela letra grega  $\alpha$ . Esta função mede o quão  $\Omega$  se assemelha a uma região circular. Com base nesse resultado, pudemos obter uma estimativa para  $A^*$  levando em consideração a assimetria do domínio  $\Omega$ . Ei-la:

$$A^* = \frac{4\pi j_0^2}{4r - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{b})^2} \sqrt{D_1 D_2} \left( 1 + \frac{61}{200} \alpha(\Omega)^3 \right). \quad (5.26)$$

Observamos que quanto maior o valor da assimetria  $\alpha$  da região, maior o valor do valor crítico de domínio  $A^*$ , dificultando assim a persistência da espécie  $u$  na região candidata a refúgio, em concordância com a análise tendo por base a movimentação individual dos organismos da espécie  $u$  feita acima.





---

## Capítulo 6

---

# Domínios Mínimos em Meios Heterogêneos de Oscilação Rápida II: Detalhamentos Matemáticos

### RESUMO DO CAPÍTULO

Nesta parte do trabalho, nos concentraremos nos detalhamentos matemáticos para obtenção dos resultados discutidos no capítulo anterior. O método de homogeneização aliado a considerações sobre o espectro de problemas de valores de contorno do laplaciano conduzem aos resultados sobre tamanhos mínimos de domínios necessários para sobrevivência das espécies cujas dinâmicas populacionais obedecem às equações diferenciais parciais consideradas anteriormente.

## 6.1 O CASO UNIDIMENSIONAL

Consideramos inicialmente o estudo de um problema no qual o meio  $\Omega$  é unidimensional. De maneira mais precisa, consideramos o seguinte problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \widehat{D} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r_1 \left( \gamma \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \frac{u}{K} \right) u \text{ em } (0, L), \quad (6.1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (6.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.3)$$

que modela a dinâmica de uma população de indivíduos, cuja densidade denotamos por  $u$  e que tenta se estabelecer numa região unidimensional, no caso o intervalo  $(0, L)$ . Neste intervalo, ocorre alta variação entre as regiões mais e menos propícias para seu desenvolvimento, o que é revelado pela presença da função  $\gamma$ . Mais precisamente, consideramos a função  $\gamma$  da seguinte forma:

$$r(\xi) := r_1 \gamma(x, y) = \begin{cases} r_1, & 0 \leq \xi < \beta, \\ -r_2, & \beta \leq \xi < 1, \end{cases} \quad (6.4)$$

e estendida periodicamente, ou seja,  $r(\xi + 1) = r(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ . Os parâmetros  $r_1$  e  $r_2$ , ambos positivos, medem as diferenças de qualidade do meio em análise. Como veremos a seguir, as suas respectivas magnitudes serão fatores determinantes para as chances sucesso da colonização do referida região pela espécie  $u$ .

Estamos considerando situações nas quais há também alta heterogeneidade na capacidade de locomoção dos organismos modelados, através da dependência do coeficiente de difusão  $\widehat{D}$  sobre a mesma variável rápida  $x/\epsilon$ , isto é, consideramos a função  $\widehat{D}$  definida da seguinte maneira:

$$\widehat{D}(\xi) = \begin{cases} D_1 > 0, & 0 \leq \xi < \beta \\ D_2 > 0, & \beta \leq \xi < 1, \end{cases} \quad (6.5)$$

com  $\widehat{D}(\xi + 1) = \widehat{D}(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

A constante  $K$ , que denota o parâmetro usual de capacidade de suporte do meio, é uma medida dos efeitos de saturação do meio diante de grandes valores da densidade  $u$ .

Considerando a linearização associada à equação (6.1), isto é

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \widehat{D} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) + \widehat{r} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \delta \text{ em } (0, L),$$

$$\delta(0, t) = \delta(L, t) = 0,$$

$$\delta(x, 0) = \delta_0(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

podemos fazer uso do Método de Fourier para considerarmos a solução do problema acima sob a forma seguinte

$$\delta(x, t) = e^{\sigma t} w_{\sigma}(x). \quad (6.6)$$

Com isso, concentrar-nos-emos no seguinte problema espectral:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \widehat{D} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \widehat{r} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) w = \sigma w, \quad (6.7)$$

$$w(0) = w(L) = 0. \quad (6.8)$$

Convém notar pela forma da solução procurada em (6.6) que se *todos* os autovalores  $\sigma$  do problema (6.7) forem negativos, concluímos que a solução identicamente nula é linearmente estável. Isto implica que a população modelada pela função solução  $u$  tende para a solução nula quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja o meio é inóspito para esta espécie. Quando temos  $\sigma \geq 0$  para *algum* autovalor, alguma das soluções da forma descrita em (6.6) não tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ , o que indica que  $u$  tem possibilidades de sobrevivência no meio estudado.

O método de múltiplas escalas (Keller (1977)) apresentado a seguir tem como objetivo obter uma aproximação  $w_0$  para a solução  $w$  do problema espectral apresentado em (6.7). Esta solução aproximada na verdade resolve um outro problema de autovalores-autovetores relacionado com o problema original descrito em (6.7); porém, ao contrário do problema (6.7), que possui coeficientes dependentes da *variável rápida*  $x/\epsilon$ , os coeficientes do problema obtido a seguir são *constantes*, o que resulta uma análise mais simples do problema em questão.

A principal característica deste método está na tentativa de desacoplar a chamada variável lenta (que é a variável  $x$ ) e a variável rápida  $x/\epsilon$ , assumindo-se que  $w$  possua a seguinte forma:

$$w = w(x, x/\epsilon),$$

o que pressupõe que a função incógnita  $w$  apresenta comportamentos desacoplados entre as escalas de maior e de menor comprimento. Também assumimos que  $w$  seja 1-periódica na variável rápida, que denotamos por  $\xi$  e para os cálculos a seguir, que o coeficiente de difusão seja inicialmente função diferenciável de  $\xi$ .

Utilizando a notação

$$u_{x_1 x_2 \dots x_n} := \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n},$$

temos:

$$\frac{1}{\epsilon} \widehat{D}_\xi \left( w_x + \frac{1}{\epsilon} w_\xi \right) + \widehat{D}(\xi) \left( w_{xx} + \frac{2}{\epsilon} w_{x\xi} + \frac{1}{\epsilon^2} w_{\xi\xi} \right) + \widehat{r}(y)w = \sigma w,$$

que, ao agruparmos em potências crescentes de  $\epsilon$ , se torna:

$$\frac{1}{\epsilon^2} \left( \widehat{D}(\xi)w_\xi \right)_\xi + \frac{1}{\epsilon} \left[ \left( \widehat{D}(\xi)w_x \right)_\xi + \widehat{D}(\xi)w_{x\xi} \right] + \widehat{D}(\xi)w_{xx} + \widehat{r}(\xi)w = \sigma w. \quad (6.9)$$

Neste ponto, estamos assumindo *formalmente* que as duas escalas de comprimento são independentes. Nós também assumimos a dependência *regular* da solução sobre o parâmetro  $\epsilon$ , o que possibilita escrevermos  $w$  sob a seguinte forma, ou *expansão assintótica*:

$$w(x, \xi) = w_0(x, \xi) + \epsilon w_1(x, \xi) + \epsilon^2 w_2(x, \xi) + \dots + \epsilon^n w_n(x, \xi) + o(\epsilon^n) \quad (6.10)$$

onde as funções  $w_n(x, \xi)$  também são limitadas, independentes do parâmetro  $\epsilon$ , e periódicas na variável rápida  $y$ , com período 1. Substituindo (6.10) em (6.9), após reagruparmos em potências crescentes do parâmetro  $\epsilon$ , e separarmos os índices  $n$  das funções  $w_n$  das derivadas parciais por vírgulas (para evitar confusões de notação), nós obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \epsilon^{-2} \left( \widehat{D}(\xi)w_{0,\xi} \right)_\xi + \epsilon^{-1} \left[ \left( \widehat{D}(\xi)w_{1,\xi} \right)_\xi + \left( \widehat{D}(\xi)w_{0,x} \right)_\xi + \widehat{D}(\xi)w_{0,x\xi} \right] \\ & + \left[ \left( \widehat{D}(\xi)w_{2,\xi} \right)_\xi + \left( \widehat{D}(\xi)w_{1,x} \right)_\xi + \widehat{D}(\xi)w_{1,x\xi} + \widehat{D}(\xi)w_{0,xx} + \widehat{r}(\xi)w_0 \right] + \dots \\ & + \epsilon^n \left[ \left( \widehat{D}(\xi)w_{(n+2),\xi} \right)_\xi + \left( \widehat{D}(\xi)w_{(n+1),x} \right)_\xi + \widehat{D}(\xi)w_{(n+1),x\xi} + \widehat{D}(\xi)w_{n,xx} + \widehat{r}(\xi)w_n \right] + o(\epsilon^n) \\ & = \sigma w_0 + \epsilon(\sigma w_1) + \epsilon^2(\sigma w_2) + \dots + \epsilon^n(\sigma w_n) + o(\epsilon^n) \end{aligned}$$

com as condições de contorno seguintes:

$$w_0(x, \xi) + \epsilon w_1(x, \xi) + \epsilon^2 w_2(x, \xi) + \dots + \epsilon^n w_n(x, \xi) + o(\epsilon^n) = 0, \quad x = 0, L. \quad (6.11)$$

O que nós obtemos ao comparar os dois membros da equação acima é uma seqüência de equações recursivas, nas quais uma vez obtidas as funções iniciais  $w_0$  e  $w_1$ , podemos obter as funções seguintes mediante substituição e resolução das equações posteriores:

$$(\widehat{D}(\xi)w_{0,\xi})_\xi = 0, \quad (6.12)$$

$$(\widehat{D}(\xi)w_{1,\xi})_\xi + (\widehat{D}(\xi)w_{0,x})_\xi + \widehat{D}(\xi)w_{0,x\xi} = 0, \quad (6.13)$$

$$(\widehat{D}(\xi)w_{2,\xi})_\xi + (\widehat{D}(\xi)w_{1,x})_\xi + \widehat{D}(\xi)w_{1,x\xi} + \widehat{D}(\xi)w_{0,xx} + \widehat{r}(\xi)w_0 = \sigma w_0, \quad (6.14)$$

$$(\widehat{D}(\xi)w_{(n+2),\xi})_\xi + (\widehat{D}(\xi)w_{(n+1),x})_\xi + \widehat{D}(\xi)w_{(n+1),x\xi} + \widehat{D}(\xi)w_{n,xx} + \widehat{r}(\xi)w_n = \sigma w_n, \quad (6.15)$$

onde  $n = 1, 2, \dots$

O objetivo deste trabalho é o de caracterizar a função  $w_0$  como solução de uma outra equação diferencial mais simples do que a equação satisfeita por  $w$  em (6.7). Segue da equação (6.12) que esta função independe da variável rápida  $\xi$ , pois como sabemos que  $\widehat{D}$  não é identicamente nula, podemos primitivar esta equação para obter a seguinte expressão:

$$\widehat{D}(\xi)w_{0,\xi}(x, \xi) = C(x),$$

isto é,

$$w_{0,\xi}(x, \xi) = \frac{C(x)}{\widehat{D}(\xi)}. \quad (6.16)$$

Introduzimos neste momento o seguinte operador, a *média sobre o período*

$$\langle f \rangle (x) := \int_0^1 f(x, \xi) d\xi,$$

frisando que  $x$  e  $\xi$  são consideradas variáveis independentes no cálculo desta integral. Aplicando o operador média  $\langle \cdot \rangle$  na equação (6.16), e lembrando da periodicidade das funções  $w_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  na variável rápida  $\xi$ , nós temos

$$\langle w_{0,\xi}(x, \xi) \rangle = \int_0^1 w_{0,\xi}(x, \xi) d\xi = w_0(x, \xi)|_{\xi=0}^{\xi=1} = 0,$$

o que implica, por (6.16), que a função  $w_0$  *independe da variável rápida  $\xi$* , isto é

$$w_0 = w_0(x).$$

Com isso, podemos reescrever a equação (6.13) da seguinte maneira:

$$\left[ \widehat{D}(\xi)(w_{1,\xi} + w_{0,x}) \right]_\xi = 0. \quad (6.17)$$

O cálculo da primitiva da expressão acima nos dá como resultado as expressões seguintes:

$$\begin{aligned}\widehat{D}(\xi)(w_{1,\xi} + w_{0,x}) &= C_1(x), \\ w_{1,\xi} + w_{0,x} &= C_1(x)\widehat{D}^{-1}(\xi).\end{aligned}\quad (6.18)$$

Uma outra aplicação do operador média na última equação resulta em

$$w_{0,x} = C_1(x) \langle \widehat{D}^{-1}(\xi) \rangle,$$

isto é,

$$C_1(x) = \overline{D}w_{0,x},$$

onde  $\overline{D}$  (que será o *coeficiente de difusão efetivo*) é calculado através da média harmônica da função  $\widehat{D}$ , a saber:

$$\overline{D} := \left( \int_0^1 \frac{1}{\widehat{D}(\xi)} d\xi \right)^{-1}. \quad (6.19)$$

Logo, por (6.19) e (6.18), temos

$$w_{1,\xi} = \left( \frac{\overline{D}}{\widehat{D}(\xi)} - 1 \right) w_{0,x},$$

isto é

$$w_1(x, \xi) = N_1(\xi)w_{0,x} + F_1(x), \quad (6.20)$$

onde

$$N_1(\xi) := \int_0^\xi \left( \frac{\overline{D}}{\widehat{D}(\eta)} - 1 \right) d\eta$$

e  $F_1$  é uma função arbitrária da variável lenta  $x$ .

Uma nova aplicação do operador média na equação (6.14) nos dá, em vista da periodicidade das funções  $w_2$  e  $\widehat{D}$ , a seguinte equação:

$$\widehat{D}(\xi)w_{1,x} \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} + \int_0^1 \widehat{D}(\xi)w_{1,x\xi} d\xi + \left( \int_0^1 \widehat{D}(\xi) d\xi \right) w_{0,xx} + \left( \int_0^1 \widehat{r}(\xi) d\xi \right) w_0 = \sigma w_0. \quad (6.21)$$

Como temos que

$$\int_0^1 \widehat{D}(\xi)w_{1,x\xi} d\xi = \int_0^1 \left[ \widehat{D}(\xi) \left( \frac{\overline{D}}{\widehat{D}(\xi)} - 1 \right) w_{0,xx} \right] d\xi = \overline{D}w_{0,xx} - \left( \int_0^1 \widehat{D}(\xi) d\xi \right) w_{0,xx} \quad (6.22)$$

e, pela definição de  $\widehat{D}$ , que

$$w_{1,x} \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \left( F_1'(x) + N_1(\xi) w_{0,xx} \right) \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \left[ \int_0^1 \left( \frac{\overline{D}}{\widehat{D}(\xi)} - 1 \right) d\xi \right] w_{0,xx} = 0 \quad \left( ' := \frac{d}{dx} \right), \quad (6.23)$$

a equação (6.21) se simplifica, resultando na seguinte equação:

$$\overline{D} w_{0,xx} + \overline{r} w_0 = \sigma w_0, \quad (6.24)$$

onde o coeficiente de difusão efetivo  $\overline{D}$  é definido em (6.19) e o crescimento intrínseco efetivo  $\overline{r}$  é definido por

$$\overline{r} := \int_0^1 \widehat{r}(\xi) d\xi. \quad (6.25)$$

A equação a coeficientes constantes obtida em (6.24) é a *equação homogeneizada* que foi analisada no capítulo anterior.

As condições de contorno (6.11) implicam que  $w_0$  satisfaz

$$w_0(0) = w_0(L) = 0. \quad (6.26)$$

É necessário neste ponto fazer uma observação sobre a validade do resultado obtido acima para situações mais gerais nas quais os coeficientes de difusão e de crescimento intrínseco são funções diferenciáveis por partes, isto é, são diferenciáveis exceto num número finito de pontos do domínio de definição das referidas funções: Quando realizamos os cálculos acima, obtemos como resultado que as funções  $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$  deveriam ser soluções *clássicas* de uma seqüência de equações diferenciais recursivas. Quando não temos diferenciabilidade em toda parte, devemos observar essas funções como soluções *generalizadas* da seqüência de problemas acima, o que significa que devem obedecer as referidas equações nos intervalos onde os coeficientes correspondentes são diferenciáveis e, além disso, satisfazer condições de continuidade e continuidade de fluxo nos pontos de descontinuidade dos coeficientes.

Existe uma estimativa para o erro cometido ao considerarmos o problema homogeneizado (6.24) como aproximação do problema de autovalores-autovetores inicial para o caso particular onde  $\widehat{r} \equiv 0$ : Chamando  $\sigma_i$  a seqüência de autovalores do problema original e de  $\overline{\sigma}_i$  a seqüência de autovalores obtidos do problema homogenei-

zado, temos que a seguinte estimativa é válida:

$$\left| \frac{1}{\sigma_i} - \frac{1}{\bar{\sigma}_i} \right| \leq c(D_1, D_2) \epsilon$$

(cf. Bakhvalov & Panasenko (1989)).

Neste ponto, vamos nos concentrar na obtenção de uma estimativa para o tamanho mínimo de domínio necessário para que haja chances de sobrevivência da espécie no meio dado, e abaixo do qual ela se extingue. Os cálculos necessários para tal estimativa se tornam mais simples quando realizamos novas escalas. Façamos, pois, a seguinte escala da variável dependente:

$$\bar{x} := x \sqrt{r_1 / \bar{D}}. \quad (6.27)$$

Com isso, temos ao substituir, e ao remover o sublinhado da variável unidimensional  $\bar{x}$ , (para economia e clareza de notação) que a equação (6.24) se reescreve da seguinte maneira:

$$-w_{0,xx} = \lambda w_0,$$

onde chamamos

$$\lambda := \frac{\bar{r} - \sigma}{r_1}. \quad (6.28)$$

As condições de contorno, mediante esta mudança de variável, ficam

$$w_0(0) = w_0(\ell) = 0,$$

onde

$$\ell := L \sqrt{r_1 / \bar{D}}.$$

Este problema espectral possui como solução o par  $(\lambda_n, v_n)$ , onde os autovalores  $\lambda_n$  são dados por

$$\lambda_n := \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}$$

e as auto-funções respectivas, por

$$v_n(x) := \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Temos por (6.28) que os autovalores do problema (6.24), (6.26) são dados por

$$\sigma_n := \bar{r} - r_1 \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} = \bar{r} - \frac{n^2 \pi^2 \bar{D}}{L^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.29)$$



que, devem ser todos negativos para que haja insucesso na colonização do meio unidimensional  $\Omega$  pela espécie  $u$ . A propriedade da *monotonicidade* dos autovalores com relação ao parâmetro  $n$  nos leva a concluir que

$$\sigma_1 > \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_n \geq \dots$$

o que implica que se tivermos

$$\sigma_1 = \bar{r} - \frac{\pi^2 \bar{D}}{L^2} < 0, \quad (6.30)$$

todos os autovalores do problema (6.24), (6.26) são negativos, acarretando a estabilidade linear da solução trivial, ou seja, a extinção da espécie  $u$ . Como *a priori* não temos informação a respeito do sinal do coeficiente de crescimento intrínseco efetivo  $\bar{r}$ , necessitamos analisar dois casos separadamente:

- i.  $\bar{r} \leq 0$ : A negatividade do crescimento intrínseco efetivo, aliada à positividade da difusão efetiva (por definição de  $\bar{D}$ ) implicam, por (6.29), a negatividade dos autovalores do problema (6.24), (6.26) para quaisquer valores da constante  $L$ ; logo, obtemos que a predominância de regiões menos propícias ao desenvolvimento da espécie em estudo na menor escala de comprimento implicam a extinção da espécie *independente do tamanho do região* a ser colonizada. Esta condição pode ser satisfeita ao considerarmos, por exemplo,  $r_1$  e  $r_2$  fixos e ao diminuirmos o valor da constante  $\beta$ , o que modela uma situação ecológica de predominância de regiões menos propícias para o desenvolvimento de  $u$  em relação às regiões mais propícias na escala de menor comprimento.
- ii.  $\bar{r} > 0$ : Quando o coeficiente de crescimento intrínseco efetivo é positivo, só há garantia para extinção de  $u$  para valores suficientemente grandes da constante  $L$ , o que indica que há um valor limiar para o comprimento da região unidimensional  $\Omega$  abaixo do qual a sobrevivência da espécie em estudo está comprometida. Tal valor é obtido ao isolarmos a constante  $L$  em (6.30):

$$L < L^* := \pi \sqrt{\frac{\bar{D}}{\bar{r}}}. \quad (6.31)$$

Utilizando as definições dos coeficientes efetivos de difusão e de crescimento intrínseco dados em (6.19) e (6.25), respectivamente, podemos reescrever a condição

para extinção de  $u$  obtida em (6.31) da seguinte maneira:

$$L < L^* = \pi \sqrt{\frac{D_1 D_2}{[\beta D_2 + (1 - \beta) D_1][\beta r_1 - (1 - \beta) r_2]}}.$$

Observando a expressão do comprimento crítico  $L^*$  obtido acima, notamos que ao considerarmos  $L^*$  como função do parâmetro  $\beta$ , e fixando as outras constantes de difusão e de crescimento intrínseco, a função resultante não é definida para todos os valores de  $\beta$ , que a princípio varia entre 0 e 1: Existe um valor limiar  $\beta^*$  dado por

$$\beta^* := \frac{r_2}{r_1 + r_2}$$

no qual notamos a presença de uma assíntota vertical no gráfico de  $L^*$  como função de  $\beta$ , o que indica a grande dificuldade na colonização do meio em estudo pela espécie  $u$  quando as regiões desfavoráveis a seu desenvolvimento predominam.

## 6.2 O MODELO EM DUAS DIMENSÕES ESPACIAIS

Nesta parte do trabalho, obteremos os resultados analisados no capítulo anterior sobre a sobrevivência ou extinção da espécie  $u$  num meio retangular. Mais precisamente, analisamos aqui o análogo do problema unidimensional (6.24), (6.26) em duas dimensões. Ei-lo:

$$\nabla \cdot \left( \widehat{D} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla w \right) + \widehat{r} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) w = \sigma w \quad \text{em } \Omega, \quad (6.32)$$

$$w = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (6.33)$$

onde as funções de crescimento intrínseco e de difusão  $\widehat{r}$  e  $\widehat{D}$  são definidas da mesma maneira como no capítulo anterior e o operador diferencial  $\nabla$  em duas dimensões espaciais é definido assim:

$$\nabla := \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}.$$

Desejamos nesta seção obter conclusões acerca da estabilidade linear da solução nula via análise dos autovalores do problema (6.32). Como tal análise é difícil por

se tratar de um problema a coeficientes não-constantes e de alta variação, faremos tal análise via um problema auxiliar, procedendo de maneira análoga à seção anterior, porém, com ligeiras modificações:

Como na seção anterior, vamos considerar que a auto-função  $w$  possui dependência sobre as variáveis lentas  $x$  e  $y$ , mas assumiremos, devido à dependência dos coeficientes de (6.32) na variável rápida  $x/\epsilon$  somente, que  $w$  só depende de variações rápidas na abscissa, o que matematicamente se expressa assim:

$$w = w(x, y, x/\epsilon). \quad (6.34)$$

Os cálculos necessários para a obtenção do problema espectral auxiliar são análogos aos que foram realizados na seção anterior. Com isso, apresentá-los-emos aqui mais brevemente, porém, dando ênfase às diferenças com relação ao caso anterior.

Substituindo (6.34) em (6.32), após reagruparmos termos em potências crescentes de  $\epsilon$  e mantendo a notação da variável rápida pela letra  $\xi$ , obtemos

$$\frac{1}{\epsilon^2} \left( \widehat{D}(\xi)w_\xi \right)_\xi + \frac{1}{\epsilon} \left[ \left( \widehat{D}(\xi)w_x \right)_\xi + \widehat{D}(\xi)w_{x\xi} \right] + \widehat{D}(\xi)(w_{xx} + w_{yy}) + \widehat{r}(\xi)w = \sigma w. \quad (6.35)$$

Consideramos formalmente a partir deste ponto que as variáveis lenta  $x$  e rápida  $x/\epsilon$  são independentes, como também assumimos a dependência regular da função  $w$  sobre o parâmetro  $\epsilon$  para que possamos escrever uma expansão assintótica em potências crescentes de  $\epsilon$ , a saber:

$$w(x, y, \xi) = w_0(x, y, \xi) + \epsilon w_1(x, y, \xi) + \epsilon^2 w_2(x, y, \xi) + \cdots + \epsilon^n w_n(x, y, \xi) + o(\epsilon^n) \quad (6.36)$$

onde assumimos que as funções  $w_n$  são funções 1-periódicas na variável rápida  $\xi$ . Substituindo (6.36) em (6.35) nós obtemos, após novamente reagruparmos em potências crescentes do parâmetro  $\epsilon$  a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \epsilon^{-2} \left( \widehat{D}(\xi)w_{0,\xi} \right)_\xi + \epsilon^{-1} \left[ \left( \widehat{D}(\xi)w_{1,\xi} \right)_\xi + \left( \widehat{D}(\xi)w_{0,x} \right)_\xi + \widehat{D}(\xi)w_{0,x\xi} \right] \\ & + \left[ \left( \widehat{D}(\xi)w_{2,\xi} \right)_\xi + \left( \widehat{D}(\xi)w_{1,x} \right)_\xi + \widehat{D}(\xi)w_{1,x\xi} + \widehat{D}(\xi)(w_{0,xx} + w_{0,yy}) + \widehat{r}(\xi)w_0 \right] + \cdots \\ & + \epsilon^n \left[ \left( \widehat{D}(\xi)w_{(n+2),\xi} \right)_\xi + \left( \widehat{D}(\xi)w_{(n+1),x} \right)_\xi + \widehat{D}(\xi)w_{(n+1),x\xi} + \widehat{D}(\xi)(w_{n,xx} + w_{n,yy}) \right. \\ & \left. + \widehat{r}(\xi)w_n \right] + o(\epsilon^n) = \sigma w_0 + \epsilon(\sigma w_1) + \epsilon^2(\sigma w_2) + \cdots + \epsilon^n(\sigma w_n) + o(\epsilon^n) \end{aligned}$$

Igualando as parcelas respectivas dos dois membros, seguindo as potências de  $\epsilon$ , obtemos a seguinte seqüência de equações diferenciais recursivas:

$$(\widehat{D}(\xi)w_{0,\xi})_{\xi} = 0, \quad (6.37)$$

$$(\widehat{D}(\xi)w_{1,\xi})_{\xi} + (\widehat{D}(\xi)w_{0,x})_{\xi} + \widehat{D}(\xi)w_{0,x\xi} = 0, \quad (6.38)$$

$$(\widehat{D}(\xi)w_{2,\xi})_{\xi} + (\widehat{D}(\xi)w_{1,x})_{\xi} + \widehat{D}(\xi)w_{1,x\xi} + \widehat{D}(\xi)(w_{0,xx} + w_{0,yy}) + \widehat{r}(\xi)w_0 = \sigma w_0, \quad (6.39)$$

$$(\widehat{D}(\xi)w_{(n+2),\xi})_{\xi} + (\widehat{D}(\xi)w_{(n+1),x})_{\xi} + \widehat{D}(\xi)w_{(n+1),x\xi} + \widehat{D}(\xi)(w_{n,xx} + w_{n,yy}) \quad (6.40)$$

$$+ \widehat{r}(\xi)w_n = \sigma w_n,$$

onde  $n = 1, 2, \dots$ . Neste ponto, rerepresentamos a média sobre o período, a saber:

$$\langle f \rangle(x, y) := \int_0^1 f(x, y, \xi) d\xi.$$

Concluimos de (6.37) após calcularmos sua primitiva e aplicarmos o operador  $\langle \cdot \rangle$  que a função  $w_0$  *independe da variável rápida*  $\xi$ , isto é, temos que

$$w_0 = w_0(x, y).$$

A primitivação e aplicação do operador média na equação (6.38) nos dão a seguinte caracterização da segunda função  $w_1$  em função da função  $w_0$ :

$$w_1(x, y, \xi) = F_1(x, y) + N_1(\xi)w_{0,x}$$

onde  $F_1$  é uma função arbitrária e

$$N_1(\xi) := \int_0^{\xi} \left( \frac{\overline{D}}{D(\eta)} - 1 \right) d\eta,$$

e  $\overline{D}$  é definido em (6.19). A aplicação da primitiva, seguida da aplicação do operador média na equação (6.39) nos dão como resultado, após considerarmos as observações técnicas feitas em (6.22) e (6.23), a seguinte equação a coeficientes constantes:

$$\overline{D}w_{0,xx} + \overline{\overline{D}}w_{0,yy} + \overline{r}w_0 = \sigma w_0, \quad (6.41)$$

com coeficientes de difusão e crescimento intrínseco efetivos  $\overline{D}$  e  $\overline{r}$  definidos em (6.19) e (6.25), respectivamente, e o segundo coeficiente de difusão efetivo  $\overline{\overline{D}}$  definido assim:

$$\overline{\overline{D}} := \int_0^1 \widehat{D}(\xi) d\xi. \quad (6.42)$$

as condições de fronteira que  $w_0$  obedece são as seguintes

$$w_0 = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

que no caso específico de um retângulo  $\Omega = (0, L) \times (0, M)$  assumem a forma:

$$\begin{aligned} w_0(x, 0) = w_0(x, M) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\ w_0(0, y) = w_0(L, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq M. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Nosso objetivo é obter uma estimativa para o valor crítico de área (que denotamos por  $A^*$ ) abaixo do qual não é possível para a espécie  $u$  colonizar o meio  $\Omega$ . Para isso, assumimos que estimativas de erro semelhantes àquela exibidas em (6.27) sejam também válidas nesse caso.

Procedendo analogamente à seção anterior, vamos realizar uma reescala das variáveis independentes:

$$\begin{aligned} \bar{x} &:= x\sqrt{r_1/\bar{D}} \\ \bar{y} &:= y\sqrt{r_1/\bar{D}}. \end{aligned}$$

Com isso, e identificando  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  com as letras  $x$  e  $y$  para clareza e economia de notação, temos que (6.41) se reduz a

$$-(w_{0,xx} + w_{0,yy}) = \lambda w_0,$$

onde

$$\lambda := \frac{\bar{r} - \sigma}{r_1}.$$

As condições laterais ficam, após a reescala, da seguinte maneira:

$$w_0(x, 0) = w_0(x, m) = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

$$w_0(0, y) = w_0(\ell, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq m,$$

onde

$$\begin{aligned} \ell &:= L\sqrt{r_1/\bar{D}} \\ m &:= M\sqrt{r_1/\bar{D}}. \end{aligned}$$

Temos que o problema espectral acima possui solução o par  $(\lambda_{np}, v_{np})$  onde os autovalores  $\lambda_{np}$  são dados por

$$\lambda_{np} = \pi^2 \left( \frac{n^2}{\ell^2} + \frac{p^2}{m^2} \right), \quad (6.44)$$

e as auto-funções respectivas por

$$v_{np}(x, y) = \sin \left( \frac{n\pi x}{\ell} \right) \sin \left( \frac{p\pi y}{m} \right),$$

e  $m, n = 1, 2, \dots$ . Deduzimos de (6.44) que os autovalores  $\sigma_{np}$  do problema espectral (6.41), (6.43) são

$$\sigma_{np} = \bar{r} - r_1 \pi^2 \left( \frac{n^2}{\ell^2} + \frac{p^2}{m^2} \right) = \bar{r} - \pi^2 \left( \frac{n^2 \bar{D}}{L^2} + \frac{p^2 \bar{D}}{M^2} \right).$$

Por definição dos autovalores  $\sigma_{mn}$ , temos que a seguinte propriedade é válida, para todos  $m, n \geq 1, 2, \dots$ :

$$\sigma_{np} \leq \sigma_{11};$$

portanto, uma condição suficiente para estabilidade linear da solução identicamente nula, que significa extinção da espécie  $u$ , é

$$\sigma_{11} = \bar{r} - \pi^2 \left( \frac{\bar{D}}{L^2} + \frac{\bar{D}}{M^2} \right) < 0, \quad (6.45)$$

condição esta que é satisfeita se  $\bar{r} \leq 0$  independentemente dos valores assumidos por  $L$  e  $M$ , que são as dimensões espaciais do domínio retangular  $\Omega$  em estudo.

Quando o coeficiente de crescimento intrínseco efetivo  $\bar{r}$  é positivo, não se conclui imediatamente a extinção da espécie  $u$ : devemos ter valores pequenos de  $L$  e  $M$  para que a condição (6.45) seja satisfeita. Com o intuito de explicitarmos a dependência das chances de sobrevivência da espécie em estudo com a área da região  $\Omega$ , fazamos uso da seguinte desigualdade:

$$2ab \leq a^2 + b^2,$$

para que possamos escrever uma outra condição suficiente para a extinção de  $u$ , a saber:

$$\bar{r} - \pi^2 \left( \frac{2\sqrt{\bar{D}\bar{D}}}{LM} \right) < 0.$$

Como temos que  $|\Omega| = LM$ , obtemos a seguinte estimativa (denotada por  $A^*$ ) para área mínima de domínio necessária para estabilidade linear da solução identicamente nula:

$$|\Omega| < A^* := \frac{2\pi^2}{\bar{r}} \sqrt{\bar{D} \bar{D}},$$

a qual, levando-se em conta as definições dos coeficientes efetivos  $\bar{r}$ ,  $\bar{D}$  e  $\bar{D}$ , se reescreve

$$|\Omega| < A^* = \frac{2\pi^2}{\beta r_1 - (1 - \beta)r_2} \left[ \frac{D_1 D_2 (\beta D_1 + (1 - \beta)D_2)}{\beta D_2 + (1 - \beta)D_1} \right]^{1/2}.$$

Notamos que analogamente ao caso unidimensionado analisado anteriormente, fixando as constantes de difusão e crescimento intrínseco, há uma assíntota vertical no gráfico de  $A^*$  como função do parâmetro  $\beta^*$ , indicando a mesma dificuldade que a espécie  $u$  tem ao se desenvolver em regiões predominantemente inóspitas.

### 6.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE DOMÍNIOS BIDIMENSIONAIS MAIS GERAIS

Nesta seção pretendemos apresentar uma estimativa para o valor crítico de área para a sobrevivência de uma espécie, porém num domínio plano conexo e limitado, não necessariamente retangular. Consideramos uma situação de difusão anisotrópica, análoga à equação homogeneizada obtida na seção anterior, com a inclusão de um termo de primeira ordem, ou *convectivo*, que modela a tendência dos organismos em estudo de se locomoverem numa direção pre-estabelecida. Chamando de  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  o vetor (constante) de convecção, vamos considerar o seguinte problema espectral:

$$D_1 w_{xx} + D_2 w_{yy} + rw + \mathbf{b} \cdot \nabla w = \sigma w \quad \text{em } \Omega, \quad (6.46)$$

$$w = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (6.47)$$

onde o conjunto limitado  $\Omega$  do plano não é necessariamente uma região retangular, e as constantes  $D_1$ ,  $D_2$  (coeficientes de difusão) e  $r$  (taxa de crescimento intrínseco) são constantes positivas. Cálculos análogos àqueles realizados na seção anterior nos dão a seguinte condição suficiente para extinção de  $u$  no meio dado:

$$\sigma_1 < 0,$$

ou

$$\lambda_1(\mathbf{c}) > 1 \quad (6.48)$$

onde  $\lambda_1(\mathbf{c})$ , relacionada com  $\sigma_1$  pela relação

$$\lambda_1(\mathbf{c}) = 1 - \frac{\sigma_1}{r},$$

é o autovalor fundamental do seguinte problema espectral:

$$-(w_{xx} + w_{yy}) + \mathbf{c} \cdot \nabla w = \lambda w \quad \text{em } \mathcal{U}, \quad (6.49)$$

$$w = 0 \quad \text{em } \partial\mathcal{U}, \quad (6.50)$$

$\mathcal{U}$  é a região do plano obtida a partir da região original  $\Omega$  via escala

$$\bar{x} := x\sqrt{r/D_1} \quad (6.51)$$

$$\bar{y} := y\sqrt{r/D_2}, \quad (6.52)$$

e  $\mathbf{c} := (c_1, c_2)$  é o vetor de componentes

$$c_1 = b_1/\sqrt{r D_1}$$

$$c_2 = b_2/\sqrt{r D_2}.$$

Não existe uma caracterização para o autovalor fundamental do problema (6.49), (6.50) para regiões gerais; porém, existem estimativas, como por exemplo àquela obtida no Teorema de Faber e Krahn: Ao considerarmos o autovalor fundamental  $\lambda_1$  do problema (6.49), (6.50) com  $\mathbf{c} \equiv 0$  e como uma função da região  $\mathcal{U}$ , fixando-se a área das regiões de interesse, aquela que dá o menor valor para  $\lambda_1$  é a região *circular* de área  $|\mathcal{U}|$ . Com isso, escrevemos a *Desigualdade de Faber-Krahn*, a saber:

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi j_0^2}{|\mathcal{U}|}, \quad (6.53)$$

onde  $j_0^2$  é a primeira raiz positiva da Função de Bessel de Primeira Espécie de Ordem Zero  $J_0(x)$  (que vale aproximadamente 2,40483).

Precisamos de um resultado demonstrado em Murray & Sperb (1983), o qual relaciona  $\lambda_1(\mathbf{c})$  e  $\lambda_1$ . Ei-lo:

$$\lambda_1(\mathbf{c}) = \lambda_1(\|\mathbf{c}\|) = \lambda_1 + \frac{\|\mathbf{c}\|^2}{4}.$$



A aplicação do resultado acima e da Desigualdade de Faber-Krahn (6.53) em (6.48), resulta numa outra condição suficiente para o insucesso da colonização do meio  $\Omega$  pela espécie  $u$ :

$$\frac{\pi j_0^2}{|\mathbf{U}|} + \frac{\|\mathbf{c}\|^2}{4} > 1,$$

ou

$$|\mathbf{U}| < \frac{4}{4 - \|\mathbf{c}\|^2} \pi j_0^2. \quad (6.54)$$

Para escrevermos a condição acima em função da área da região original  $\Omega$ , necessitamos expressar  $|\mathbf{U}|$  como função de  $|\Omega|$ , o que é possível mediante mudança de variáveis, obtendo a expressão seguinte:

$$|\mathbf{U}| = \frac{r}{\sqrt{D_1 D_2}} |\Omega|. \quad (6.55)$$

Substituindo essa relação em (6.54), nós temos após isolarmos  $|\Omega|$ , e voltarmos às variáveis originais do problema, a seguinte condição para extinção de  $u$ :

$$|\Omega| < A^* := \frac{4\pi j_0^2}{4r - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{b})^2} \sqrt{D_1 D_2}, \quad (6.56)$$

onde  $\mathbf{d} := (d_1, d_2)$  é o vetor de coordenadas

$$\begin{aligned} d_1 &= 1/\sqrt{D_1} \\ d_2 &= 1/\sqrt{D_2}. \end{aligned}$$

Note que a expressão obtida em (6.56) somente tem sentido quando

$$4r - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{b})^2 > 0.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz na desigualdade acima, encontramos a seguinte condição suficiente para a sobrevivência da espécie em estudo em relação ao módulo do vetor de convecção  $\mathbf{b}$ :

$$\|\mathbf{b}\| < \frac{2\sqrt{r}}{\|\mathbf{d}\|} = 2\sqrt{r \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}}.$$

A Desigualdade de Faber-Krahn exibida em (6.53) relaciona o autovalor fundamental do problema (6.49), (6.50) com a área da região dada; porém, esta desigualdade não leva em consideração outras características topológicas, como a forma da fronteira

do região  $U$ . Um resultado recente obtido em Bhattacharya (2001) é uma desigualdade similar àquela apresentada em (6.53), porém levando em conta uma constante que mede o quanto determinada fronteira se assemelha a uma circunferência. Esta constante, denominada *assimetria* da região é definida da seguinte maneira:

$$\alpha(U) := \inf_x \frac{|U \setminus B(\mathbf{x}, R)|}{|U|},$$

onde  $B(\mathbf{x}, R)$  denota a bola centrada em  $\mathbf{x}$  e de raio  $R$  que possui a mesma área de  $U$ . A grosso modo, esta constante é proporcional à soma das áreas das regiões pertencentes a  $U$ , porém não pertencentes à bola de mesma área centrada na posição na qual essa soma é mínima (cf. Figura 5.1) do capítulo anterior.

A desigualdade obtida em Bhattacharya (2001), na forma conveniente para nossos propósitos, é a seguinte:

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi j_0^2}{|U|} \left( 1 + \frac{61}{200} \alpha(U)^3 \right). \quad (6.57)$$

Notamos que a escala dada por (6.51), (6.52) não altera a forma de circunferências. Isso nos ajuda a concluir que

$$\alpha(U) = \alpha(\Omega). \quad (6.58)$$

Com isso, e observando (6.54) e (6.55), obtemos uma melhor estimativa para o valor de área mínimo  $A^*$ , a saber:

$$|\Omega| < A^* = \frac{4\pi j_0^2}{4r - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{b})^2} \sqrt{D_1 D_2} \left( 1 + \frac{61}{200} \alpha(\Omega)^3 \right).$$

---

## Capítulo 7

---

# Conclusões e Problemas em Aberto

Pretendemos nesta parte final do trabalho apresentar algumas linhas de trabalho motivadas pelos capítulos anteriores, porém não inseridas no presente trabalho.

O método de fibração, utilizado nos Capítulos 1 e 2, o qual caracterizou a densidade em estado estacionário da espécie em análise  $u$ , pode ser aplicado em casos mais gerais, com condições de fronteira diferentes das quais utilizamos neste texto. Por exemplo, este método pode ser aplicado a situações nas quais há presença de convecção, que correspondem à presença termos de primeira ordem na equação diferencial que descreve a densidade no estado estacionário, ou com outras condições de fronteira, como por exemplo Condições de Neumann, que modelam uma situação na qual o meio limitado em análise é isolado do meio exterior, ou Condições de Robin que modelam uma situação intermediária entre fronteira letal e refletora (*cf.* Pohozaev (1999)). Pode-se ainda mostrar que o método de fibração pode ser aplicado a sistemas de equações diferenciais elípticas com acoplamento fraco (que ocorre nos termos sem derivadas parciais), o que pode ser útil para o estudo de problemas em reações químicas, onde acoplamentos do tipo que consta em Mitidieri & Bozhkov (2002) são típicos.

É de interesse saber se o método de fibração pode esclarecer problemas onde há presença de não-localidade, isto é, quando as interações entre os indivíduos da espécie analisada pode ocorrer na ausência de contato, o que caracteriza os modelos de natureza local utilizados no presente texto. A modelagem de tais situações é feita pelo uso de equações integro-diferenciais. Uma referência para modelos dessa natureza,

mas no contexto de invasão de espécies em regiões não-limitadas, pode ser encontrada em Gourley (2000).

Vislumbramos uma possível aplicação do método de fibração para modelagem de situações nas quais a mobilidade dos indivíduos da espécie em análise sofre influência da densidade respectiva, isto é, quando a função que representa o coeficiente de difusão da espécie em análise é função da própria densidade. Um estudo desse tipo de modelagem pode ser encontrado em Cantrell & Cosner (1991b).

De acordo com Cantrell & Cosner (2002b), não se sabe muito a respeito do comportamento dos problemas apresentados neste texto no estado transiente, como, por exemplo, a evolução do estado inicial da população até a solução estacionária<sup>1</sup>, e quão rapidamente a solução dos problemas de evolução com heterogeneidade espacial convergem para estas soluções estacionárias não-triviais. Isto é de interesse quando, por exemplo, a densidade respectiva representa uma população de uma praga, e desejamos saber quanto tempo é necessário para se chegar a um nível de população indesejado.

Optamos por estudar somente situações de meio exterior completamente letal à espécie  $u$  (Condições de Dirichlet) pois queríamos estudar situações de heterogeneidade específicas, como aquelas estudadas no Capítulo 3, onde as regiões favoráveis do meio  $\Omega$  se reuniam num subconjunto conexo e convexo. As idéias contidas em Harrell II, Kröger & Kurata (2001), que foram utilizadas neste trabalho com algumas modificações, se referem somente a regiões com Condições de Dirichlet. Se os resultados que constam neste artigo pudessem ser estendidos para outros tipos de condições de fronteira (Neumann ou Robin), poderíamos estender outros resultados contidos em Cantrell & Cosner (1991a), ajudando-nos assim a entender melhor aquela situação ecológica em duas dimensões espaciais. Extensões de Harrell II, Kröger & Kurata (2001) para o caso de difusão não-constante também seriam de interesse, para que a análise da influência ambiental nas capacidades reprodutivas e de locomoção dos organismos em estudos pudesse ser realizada com maior profundidade.

O estudo do espectro de operadores diferenciais em regiões com fronteira fractal têm tido aplicações para determinação do comportamento da função temperatura em cristais de gelo, ou na relação da geometria do domínio com o crescimento assintótico

---

<sup>1</sup> Uma tentativa de se observar a evolução de um sistema mais geral do que o estudado neste trabalho foi feita em Gourley (2000).

dos autovalores (cf. Fleckinger-Pellé (2000)). Porém, o estudo da magnitude do autovalor fundamental como função da geometria da fronteira fractal nos permitiria estudar situações específicas de interesse, como o estudo da disseminação de uma bactéria nociva a uma planta numa folha, a qual seria um região limitada com uma fronteira dessa natureza.

Estas observações encerram o nosso estudo sobre problemas de sobrevivência de espécies em meios heterogêneos. Acreditamos que o presente trabalho esclareceu e adicionou informações sobre estes modelos, estudados anteriormente, porém não analisado em algumas situações particulares de interesse. A utilização de métodos de análise aplicada e equações diferenciais parciais sob um ponto de vista mais teórico, nos forneceu respostas sensatas sob o ponto de vista aplicado, mostrando que o modelo é bom e confiável. Esperamos continuar a explorar e entender os problemas aqui apresentados, utilizando os métodos deste texto, ou outras abordagens mais computacionais para que possamos entender a natureza de uma maneira mais completa, objetivando interagir de uma forma menos agressiva e mais harmônica com o ambiente que nos rodeia, pois afinal nós também fazemos parte dele.



---

## Referências Bibliográficas

- Alberico, A., Ferone, A. & Volpicelli, R.: *Some properties and eigenfunctions of nonlinear weighted problems*. Rend. Mat. Roma **19**, Serie VII, 45–63 (1999).
- Bakhvalov, N. & Panasenko, G.: *Homogenisation: averaging processes in periodic media*. Kluwer Academic Publishers (1989).
- Ben-Yu, G., Mitchell, A. R. & Sleeman, B. D.: *Spatial effects in a two-dimensional model of the budworm-balsam fir ecosystem*. Comp. and Maths. with Appls. **12B**, 1117–1132 (1986).
- Bhattacharya, T.: *Some observations on the first eigenvalue of the  $p$ -laplacian and its connections with asymmetry*. Elec. J. Diff. Eqns. **35**, 1–15 (2001).
- Cantrell, R. S. & Cosner, C.: *Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **112A**, 293–318 (1989).
- Cantrell, R. S. & Cosner, C.: *The effects of spatial heterogeneity in population dynamics*. J. Math. Biology **29**, 315–338 (1991a).
- Cantrell, R. S. & Cosner, C.: *Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments II*. SIAM J. Math. Anal. **4**, Vol. 22, 1043–1064 (1991b)
- Cantrell, R. S. & Cosner, C.: *Spatial heterogeneity and critical patch size: area effects via diffusion in closed environments*. J. Theor. Biology **209**, 161–171 (2001).
- Cantrell, R. S. & Cosner, C.: *Habitat edges and predator-prey interactions: effects on critical patch size*. Math. Biosciences **175**, 31–55 (2002a).

- Cantrell, R. S. & Cosner, C.: Comunicação pessoal (2002b).
- Drábek, P. & Pohozaev, S. I.: *Positive solutions for the  $p$ -laplacian: application of the fibering method*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **127A**, 703–726 (1997).
- Evans, L. C.: *Partial differential equations*. American Mathematical Society (1998).
- Ferreira Jr., W. C.: *Notas de biomatemática*. Unicamp (1998).
- Fisher, R. A.: *The wave of advance of advantageous genes*. Ann. Eugenics **7**, 353–369 (1937).
- Fleckinger-Pellé, J.: *The vibrations of a drum with fractal boundary*. Proceedings of the international conference Mathematics and the 21st. century (2000).
- Garabedian, P.: *Partial differential equations*. John Wiley & Sons (1964).
- Gourley, S.: *Travelling front solutions of a nonlocal Fisher equation*. J. Math. Biology **41**, 272–284 (2000).
- Harrell II, E. M., Kröger, P. & Kurata, K.: *On the placement of an obstacle or a well so as to optimize the fundamental eigenvalue*. SIAM J. Math. Anal. **1**, Vol. 33, 240–259 (2001).
- Kareiva, P.: *Population dynamics in spatially complex environments: theory and data*. Philos. Trans. Roy. Soc. London **B 330**, 175–190 (1990).
- Keller, J. B.: *Effective behavior of heterogeneous media*. Stat. Mech. and Stat. Meth. in Theor. and Appl., U. Landman, ed., Plenum, 631–644 (1977).
- Kierstead, H. & Slobodkin, L. B.: *The size of water masses containing plankton bloom*. J. Mar. Res. **12**, 141–147 (1953).
- Kolmogorov, A., Petrovsky, I. & Piskunov, N.: *Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*. Moscow Univ. Bull. Math. **1**, 1–25 (1937).
- Kurata, K.: Comunicação pessoal (2002).



- Ludwig, D., Aronson, D. G. & Weinberger, H. F.: *Spatial patterning of the spruce budworm*. J. Math. Biology **8**, 217–258 (1979).
- Ludwig, D., Jones, D. D. & Holling, C. S.: *Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and the forest*. J. Anim. Ecol. **47**, 315–332 (1978).
- Mitidieri, E. & Bozhkov, Yu.: *Existence of multiple solutions for quasilinear systems via Fiberling Method*. J. Diff. Equations (2002), no prelo.
- Murray, J. D.: *Mathematical biology*. Springer-Verlag (1989).
- Murray, J. D. & Sperb, R.P.: *Minimum domains for spatial patterns in a class of reaction diffusion equations*. J. Math. Biology **18**, 169–184 (1983).
- Murray, J. D.: Comunicação pessoal (2002).
- Okubo, A.: *Diffusion and ecological problems: mathematical models*. Springer-Verlag (1980).
- Pohozaev, S. I.: *The fiberling method and its application to nonlinear boundary value problem*. Rend. Istit. Univ. Mat. Trieste, **XXXI**, 235-305 (1999).
- Shigesada, N. & Kawasaki, K.: *Biological invasions: theory and practice*. Oxford University Press (1997).
- Skellam, J. G.: *Random dispersal in theoretical populations*. Biometrika **38**, 196–218 (1951).



---

## Apêndice A

---

# Um exemplo simples de aplicação do Método de Fibração

Este apêndice tem por objetivo familiarizar o leitor com a ferramenta utilizada nos Capítulos 1 e 2 deste trabalho para obtenção das solução não-trivial positiva que indica o sucesso na colonização do meio lá considerado. O *Método de Fibração*, devido a S. I. Pohozaev, nos dá informações sobre a existência e multiplicidade de soluções não negativas e não-triviais de vários tipos de problemas de valores de contorno, onde a equação diferencial parcial é em geral *não-linear*. A presença da não-linearidade é inerente a problemas de natureza biológica: por exemplo no estudo de geração de padrões, e de persistência de espécies em regiões exploradas pelas mesmas.

O exemplo introdutório escolhido é o da existência e multiplicidade de soluções do seguinte problema de valores de contorno que envolve a Equação de Fisher/KPP, devidamente adimensionalizado: estacionária:

$$\begin{cases} -u'' = \ell^2 u(1 - u) \text{ em } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

que foi estudado inicialmente em Fisher (1937) e em Kolmogorov, Petrovsky & Piskunov (1937) como um modelo para disseminação de um gene numa população. Em Ludwig, Aronson & Weinberger (1979) o mesmo modelo é analisado, porém para descrever a dinâmica populacional, em estado estacionário, de indivíduos que se dispersam aleatoriamente num meio unidimensional que possui fronteira (extremos do intervalo  $(0, 1)$ ) letal, o que corresponde matematicamente às Condições de Fronteira do

tipo Dirichlet. Assume-se também que a reprodução respeita o Modelo de Verhulst de crescimento logístico. Neste trabalho, o método da primeira integral foi utilizado para obtenção da solução positiva que este problema possui.

Para utilizarmos o Método de Fibração, precisamos colocar o problema (A.1) na sua forma variacional equivalente, ou seja, necessitamos considerar a função solução de (A.1) como o elemento que minimiza o seguinte *Funcional de Euler*:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \int_0^1 |\mathbf{u}'|^2 dx - \frac{\ell^2}{2} \int_0^1 |\mathbf{u}|^2 dx + \frac{\ell^2}{3} \int_0^1 |\mathbf{u}|^3 dx \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{\ell^2}{2} G(\mathbf{u}) - \frac{\ell^2}{3} F(\mathbf{u}), \end{aligned} \tag{A.2}$$

onde

$$G(\mathbf{u}) := \int_0^1 |\mathbf{u}|^2 dx \tag{A.3}$$

e

$$F(\mathbf{u}) := - \int_0^1 |\mathbf{u}|^3 dx, \tag{A.4}$$

que são ambos funcionais fracamente contínuos.

O espaço de funções naturalmente escolhido, pela ordem das derivadas que aparecem em (A.2) e as condições de contorno do problema (A.1), é o Espaço de Sobolev  $H_0^1(0, 1)$  que consiste nas funções pertencentes a  $L^2(0, 1)$ , que se anulam nas extremidades do intervalo  $(0, 1)$  e que possuem uma derivada generalizada também em  $L^2(0, 1)$ . Vamos utilizar, por simplicidade a seguinte norma:

$$\|\mathbf{u}\| := \int_0^1 |\mathbf{u}'|^2 dx$$

que é equivalente à norma usual do  $H_0^1(0, 1)$ , pela Desigualdade de Poincaré. Convém notar aqui, através da imersão  $W_1^2(0, 1) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(0, 1)$  para algum  $\gamma$ , que a solução fraca de (A.1) é uma função contínua.

Existe uma relação entre os pontos críticos do funcional definido em (A.2) e soluções fracas do problema (A.1), isto é, funções  $\mathbf{u} \in H_0^1(0, 1)$  que satisfazem a identidade

$$\int_0^1 \mathbf{u}'\mathbf{v}' dx - \ell^2 \int_0^1 \mathbf{u}\mathbf{v} dx + \ell^2 \int_0^1 \mathbf{u}^2\mathbf{v} dx = 0 \tag{A.5}$$

para toda função  $v \in H_0^1(0, 1)$ . Tal equivalência existe, pois ao calcularmos a Derivada de Gâteaux do funcional em (A.2) nós temos:

$$\begin{aligned} \langle f'(u), v \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} f(u + \epsilon v) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^1 u'v' + \epsilon v'^2 \, dx - \ell^2 \int_0^1 uv + \epsilon v^2 \, dx + \ell^2 \int_0^1 u^2v + 2\epsilon uv + \epsilon^2|v|^3 \, dx \right) \\ &= \int_0^1 (-u'' - \ell^2u + \ell^2u^2)v \, dx = 0, \forall v \in H_0^1(0, 1). \end{aligned}$$

Com isso, temos que  $u$  é de fato solução fraca do problema (A.1).

O Método de Fibração consiste em associar o problema de minimização do funcional  $f(u)$  definido em (A.2) a um outro problema de minimização equivalente com restrição(ões) escolhida(s) apropriadamente. Ao encontrarmos um ponto crítico do problema com restrição(ões), estaremos prontamente encontrando um ponto crítico de  $f(u)$ , como veremos a seguir.

Para um número real  $t \neq 0$  arbitrário porém fixo, consideremos uma classe de funções  $v \in H_0^1(0, 1)$  relacionadas com as funções  $u$  do domínio do funcional  $f(u)$  através da relação

$$u = tv. \tag{A.6}$$

O objetivo é associar os pontos críticos  $u$  de  $f(u)$  a pontos críticos de um outro funcional a ser obtido mediante a relação (A.6). Substituindo (A.6) em (A.2), temos

$$\tilde{f}(t, v) := f(tv) = \frac{|t|^2}{2} \|v\|^2 - \frac{\ell^2|t|^2}{2} G(v) - \frac{\ell^2|t|^3}{3} F(v). \tag{A.7}$$

Vamos escolher como *funcional de fibração* a parte principal de  $f(u)$ , a saber:

$$H_\ell(v) := \int_0^1 (v')^2 \, dx - \ell^2 \int_0^1 v^2 \, dx = \|v\|^2 - \ell^2 G(v)$$

Uma conseqüência do fato de  $u$  ser minimizador do Funcional de Euler definido em (A.2) é a validade da relação seguinte:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(t, v) = 0, \tag{A.8}$$

que seguindo a notação de Pohozaev (1999), recebe o nome de *equação de bifurcação*. Aplicando (A.8) a nosso problema em particular, e lembrando que  $t \neq 0$ , nós obtemos:

$$H_\ell(v) - |t|F(v) = 0,$$

que resolvendo para  $t$ , fica

$$|t| = |t(v)| = \frac{H_\ell(v)}{F(v)}. \quad (\text{A.9})$$

Neste ponto precisamos impor que o denominador da expressão definida acima não se anule, o que é natural, já que estamos à procura de soluções não-triviais do problema (A.1). Também há a necessidade de impormos que o funcional de fibração  $H_\ell(v)$  e o funcional  $F(v)$  possuam mesmo sinal, para que a equação (A.9) tenha sentido. Com isso, nós finalmente obtemos o *funcional induzido* que  $v$  minimiza ao substituirmos (A.9) em (A.7):

$$\hat{f}_\ell(v) := \tilde{f}(t(v), v) = \frac{1}{6} \left( \frac{H_\ell(v)}{F(v)} \right)^3 F(v).$$

Convém notar alguns fatos a respeito de  $\hat{f}_\ell(v)$ , que são conseqüências do processo o qual chegamos a este funcional.

i. Ao tomarmos  $0 \neq t \in \mathbb{R}$  qualquer, temos que

$$\hat{f}_\ell(tv) = \frac{1}{6} \left( \frac{|t|^2 H_\ell(v)}{|t|^3 F(v)} \right)^3 |t|^3 F(v) = \frac{1}{6} \frac{|t|^6 |t|^3}{|t|^9} \left( \frac{H_\ell(v)}{F(v)} \right)^3 F(v) = \hat{f}_\ell(v),$$

o que implica a 0-homogeneidade deste funcional induzido.

ii. Temos da observação (i) acima que a Derivada de Gâteaux de  $\hat{f}(v)$  na direção  $v$  vale zero, pois

$$\langle \hat{f}'_\ell(v), v \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} \hat{f}_\ell(v + \epsilon v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} \hat{f}_\ell((1 + \epsilon)v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} \hat{f}_\ell(v) = 0.$$

iii. Também temos da construção acima que a propriedade seguinte é válida:

$$\hat{f}_\ell(v) = \hat{f}_\ell(|v|). \quad (\text{A.10})$$

Isto é uma conseqüência das definições de  $H_\ell(v)$  e  $F(v)$  (cf. (A.3) e (A.4)) e também pelo seguinte fato:

$$\begin{aligned} \nabla(|u|) &= \nabla(u^+ + u^-) \\ &= \nabla(u^+) + \nabla(u^-) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$= \begin{cases} \nabla u + 0 = \nabla u, & u > 0, \\ 0 - \nabla u = -\nabla u, & u \leq 0, \end{cases}$$

onde a última igualdade vale em quase toda parte. Daí concluímos que

$$\int_{\Omega} |\nabla(|u|)|^p dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx, \quad (\text{A.12})$$

onde  $p \in \mathbb{R}$  é um número maior que um. Por isso, se  $v_c$  for ponto crítico de  $\hat{f}_\ell(v)$  então  $|v_c|$  também será e podemos considerar o(s) ponto(s) crítico(s) do funcional induzido  $\hat{f}_\ell(v)$  como sendo não-negativo(s) em  $(0, 1)$ .

- iv. Os pontos críticos do funcional induzido  $\hat{f}_\ell(v)$  também são pontos críticos do mesmo funcional, porém com um determinado tipo de restrição; ou seja, se  $v$  é ponto crítico de  $\hat{f}_\ell(v)$ , então ele também é ponto crítico de  $\hat{f}_\ell(v)$ , sujeito à *restrição de fibração*  $H(v) = c$ , onde  $H(v)$  é um funcional que satisfaz

$$\langle H'(v), v \rangle \neq 0 \text{ sempre que } H(v) = c,$$

que é chamada *condição de não-degeneração*.

A existência e multiplicidade de soluções do funcional induzido  $\hat{f}_\ell(v)$  está intimamente ligada à magnitude da constante  $\ell$ . Dois casos devem ser levados em conta, a saber:

- i.  $\ell \leq \pi$ ;
- ii.  $\ell > \pi$ .

Discutindo brevemente o primeiro caso, o método de fibração indica a existência de *pelo menos* uma solução fraca positiva do problema (A.1) sujeito à restrição de fibração

$$H_\ell(v) = 1. \quad (\text{A.13})$$

que satisfaz a condição de não-degeneração nesse caso, pois

$$\langle H'_\ell(v), v \rangle = 2H_\ell(v) = 2 \neq 0.$$

Deveríamos ter, por (A.9) e (A.13), a positividade do funcional  $F(v)$ . Mas como isso é vetado por sua própria definição (cf. (A.4)), o método *não* nos dá informações neste caso, o que era de se esperar pois é sabido que não há soluções positivas nesse caso.

Segundo Ludwig, Aronson & Weinberger (1979), neste caso o intervalo  $(0, 1)$  não é um *refúgio* para a espécie modelada.

No segundo caso, onde  $\ell > \pi$ , o método de Fibrção informa a existência de pelo menos dois pontos críticos do mesmo funcional  $\hat{f}_\ell(v)$ . Esses pontos críticos são caracterizados como sendo soluções dos seguintes problemas variacionais com restrições:

- i. Encontrar um maximizante  $v_1 \in H_0^1(0, 1)$  do problema

$$M_\ell = \sup_{v \in H_0^1(0,1)} \{F(v) \mid H_\ell(v) = 1\}.$$

- ii. Encontrar um minimizante  $v_2 \in H_0^1(0, 1)$  do problema

$$m_\ell = \inf_{v \in H_0^1(0,1)} \{H_\ell(v) \mid F(v) = -1\}.$$

A demonstração da existência de solução para o problema (i) acima faz também uso da hipótese que  $F(v) > 0$ ; logo, (i) não nos fornece informações a respeito de soluções positivas fracas do problema (A.1).

Vamos então nos concentrar no problema variacional (ii). Note que o restrição de fibração neste caso, que é

$$F(v) = -1$$

satisfaz a condição de não-degeneração, pois

$$\langle F'(v), v \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} F(v + \epsilon v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 3(1 + \epsilon)^2 F(v) = 3F(v) = -3 \neq 0. \quad (\text{A.14})$$

Por (A.4), temos que o funcional de fibração  $\hat{f}_\ell(v)$  com a restrição (A.14) assume a forma

$$\hat{f}_\ell(v) = -\frac{1}{6}(-H_\ell(v))^3.$$

Devemos ter, em virtude de (A.9), que

$$H_\ell(v) < 0.$$

O que será feito a seguir é mostrar a existência de uma solução fraca do problema (ii). Será assumido por absurdo, a não existência de um  $\epsilon > 0$  tal que o problema (ii)



admita uma solução positiva para uma determinada faixa de valores à direita de  $\pi^2$ , com tamanho no máximo  $\epsilon$ . Propriedades da Teoria Espectral de  $-u''$  serão cruciais para chegarmos à desejada contradição.

Note que o conjunto

$$W := \{v \in H_0^1(0, 1) \mid F(v) = -1\}$$

é não-vazio. Para isso, basta tomar a primeira auto-função do seguinte problema espectral:

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

(A.2), que no nosso caso é  $e_1 = \sin(\pi x)$ . Temos que

$$F(e_1) = \frac{2}{3\pi} - 2 < 0; \quad (\text{A.16})$$

portanto, ao tomarmos

$$t_1 = \left(2 - \frac{2}{3\pi}\right)^{-1/3},$$

temos pela 3-homogeneidade do funcional  $F(v)$  que  $F(t_1 e_1) = -1$ . Também temos que

$$H_\ell(t_1 e_1) = t_1^2 \left(\frac{\pi^2 - \ell^2}{2}\right) < 0,$$

sempre que  $\ell > \pi$ . Com isso, devemos ter que  $m_\lambda$  é negativo.

Agora vamos nos concentrar em mostrar que o problema de minimização dado em (ii) acima possui um minimizante não-negativo quando  $\pi^2 < \ell^2 < \pi^2 + \epsilon$ , para algum  $\epsilon > 0$ .

Assuma por absurdo que exista uma seqüência  $\epsilon_k \rightarrow 0^+$  tal que para qualquer  $\ell_k^2 := \pi^2 + \epsilon_k$  o problema (ii) não possui nenhuma solução não-negativa. Para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , seja  $(v_n^k)_{n=1}^\infty$  uma seqüência minimizante de  $(ii)_k$ , ou seja

$$F(v_n^k) = -1 \text{ e } H_{\ell^k}(v_n^k) \rightarrow m_{\ell^k} \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Supondo que esta seqüência seja limitada na norma de  $H_0^1(0, 1)$ , podemos assumir, já que estamos num Espaço de Banach reflexivo, que esta seqüência é fracamente convergente em  $H_0^1(0, 1)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Chamemos de  $\bar{v}^k$  o limite fraco correspondente. Temos pela continuidade fraca de  $F(v)$  que

$$F(\bar{v}^k) = -1.$$

E temos que semi-continuidade inferior da norma de  $H_0^1(0, 1)$ , e pela continuidade fraca do funcional  $G(v)$  que

$$H_\ell(\bar{v}^k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} H_\ell(v_n^k) = m_{\ell k}.$$

Mas como  $\bar{v}^k \in W$ , devemos ter  $H_\ell(\bar{v}^k) \geq m_{\ell k}$ . Assim, conclui-se que  $H_\ell(\bar{v}^k) = m_{\ell k}$  e  $\bar{v}^k$  é uma solução de (ii)<sub>k</sub>, o que é uma contradição. Logo, a seqüência  $(v_n^k)_{n=1}^\infty$  deve ser ilimitada.

Podemos assumir, passando a uma subseqüência se necessário, que

$$\|v_n^k\| \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Com base nesta seqüência, definimos uma segunda seqüência  $(w_n^k)_{n=1}^\infty$  através da relação:

$$v_n^k = r_n^k w_n^k,$$

com  $|r_n^k| = \|w_n^k\|$  e  $\|w_n^k\| = 1$ . Como isso, temos uma nova seqüência uniformemente limitada na norma de  $H_0^1(0, 1)$ ; logo, podemos assumir que vale

$$w_n^k \rightharpoonup \bar{w}^k \text{ em } H_0^1(0, 1) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como  $\|w_n^k\| = 1$ , temos que  $\|\bar{w}^k\| \leq 1$ . Por sua vez, esta última relação define uma outra seqüência limitada uniformemente em  $k$ , que novamente vamos admitir que seja fracamente convergente para um elemento  $\bar{w} \in H_0^1(0, 1)$  quando  $k \rightarrow \infty$ . O limite fraco obedece a mesma desigualdade que sua seqüência correspondente, por isso também temos que

$$\|\bar{w}\| \leq 1. \tag{A.17}$$

Nós obtemos, pelas definições de  $v_n^k$  e de  $w_n^k$  que

$$\begin{aligned} |r_n^k|^2 (1 - \mathfrak{I}_k^2 G(w_n^k)) &= |r_n^k|^2 (\|w_n^k\| - \mathfrak{I}_k^2 G(w_n^k)) \\ &= \|r_n^k v_n^k\| - \mathfrak{I}_k^2 G(r_n^k v_n^k) \\ &= H_{\ell k}(v_n^k) \rightarrow m_{\ell k} < 0. \end{aligned}$$

Neste ponto, vamos passar ao limite quando  $k \rightarrow \infty$  e  $n \rightarrow \infty$  para obter, graças à continuidade fraca de  $G(v)$ , e por (A.17)

$$\|\bar{w}\| - \pi^2 G(\bar{w}) \leq 1 - \pi^2 G(\bar{w}) \leq 0.$$

A natureza minimal do autovalor  $\lambda_1 = \pi^2$  faz com que a desigualdade acima valha no sentido oposto. Com isso, obtemos

$$\|\bar{w}\| - \pi^2 G(\bar{w}) = 0.$$

Temos, pela unicidade da auto-função associada ao primeiro autovalor de  $-u''$ , que  $\bar{w}$  deve ser múltiplo escalar de  $e_1 = \sin(\pi x)$ , isto é

$$\bar{w} = k_1 e_1. \quad (\text{A.18})$$

Como

$$F(w_n^k) = |r_n^k|^{-3} F(v_n^k) = -|r_n^k|^{-3},$$

nós temos, na passagem ao limite quando  $n, k \rightarrow \infty$  e ao lembrarmos da continuidade fraca do funcional  $F(v)$  que

$$F(\bar{w}) = 0,$$

e por (A.18) que

$$|k_1|^3 F(e_1) = 0 \implies F(e_1) = 0 \neq \frac{2}{3\pi} - 2,$$

o que é uma contradição por (A.16). Daí conclui-se que para algum  $\epsilon > 0$  o problema (ii) admite pelo menos uma solução não-negativa para  $\pi^2 < \ell^2 < \pi^2 + \epsilon$ .

Podemos então estabelecer finalmente o seguinte

**Teorema 3** *Existe um  $\epsilon > 0$  tal que para  $\pi^2 < \ell^2 < \pi^2 + \epsilon$  o problema (A.1) possui uma solução  $u \in H_0^1(0, 1) \cap L^\infty(0, 1) \cap C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(0, 1)$ .*

*Prova.* Considerando a solução  $v$  obtida pela construção acima, e obtendo a constante  $t$  segundo (A.9), temos que a função

$$u = tv \quad (\text{A.19})$$

é uma solução fraca não-negativa do problema considerado. As propriedades da solução  $u$  mencionadas acima são obtidas pelas referências contidas em Drábek & Pohozaev (1997) e Pohozaev (1999).