


Aplicações Harmônicas e Estabilidade em Variedades Bandeira

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Luiz Leduíno de Salles Neto e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 7 de abril de 2000

  
Prof. Dr. Caio José Coleti Negreiros  
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Prof. Dr. Caio José Coleti Negreiros
- 2 Prof. Dr. Luiz Antonio Barreira San Martin
- 3 Claudio Aguinaldo Buzzi

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE	D U
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	Sa 34 a
V.	Ex.
TOMBO BC	42743
PROC.	16/278/00
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	18/10/00
N.º CPD	

CM-00146989-2

BIB ID 276911

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Salles Neto, Luiz Leduino

Sa34a      Aplicações harmônicas e estabilidade em variedades bandeira /  
Luiz Leduino Salles Neto -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : Caio José Coleti Negreiros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Aplicações holomorfas. 2. Variedades complexas. I. Negreiros,  
Caio José Coleti. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.



**Universidade Estadual de Campinas**

**Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica**

---

**Aplicações Harmônicas e Estabilidade em Variedades  
Bandeira**

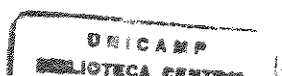
Luiz Leduino de Salles Neto

Orientador: Caio José Coleti Negreiros

7 de abril de 2000

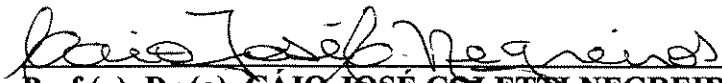
2000157157

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE



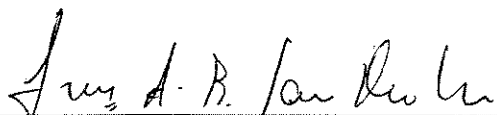
Dissertação de Mestrado defendida em 07 de abril de 2000 e aprovada

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



---

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS



---

Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



---

Prof (a). Dr (a). CLÁUDIO AGUINALDO BUZZI

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

Aos meus pais

Agradecimentos:

- À minha mãe, Carmem, e meu pai, Mickaya, por terem sido sempre, com extremo carinho, meus maiores incentivadores e apoiadores;
- Ao professor Caio pela paciência e dedicação;
- Aos professores da banca pelas sugestões;
- Ao professor Kill pelos 3 anos e meio que me orientou na iniciação científica, quando me ensinou a gostar e a entender a matemática;
- Aos professores Claudina, Bordin, Márcio Rosa, Plínio, entre outros, que mostraram-me durante o curso a beleza da matemática;
- Ao amigo Dantas por toda sua ajuda e companheirismo desde o primeiro ano de graduação;
- Aos amigos e amigas da comunidade da G-5 na Moradia, onde vivi por 5 inesquecíveis anos: Lupi, Baiano, Bandeirão, Jack, Max, Vilma, Caubim, Wally, Morceirão, Celsão, Cristiano, Vitor, Carioca, Serjão, Santista, Flávia, Renatão, Neale, Batata, Krishna, Soninha, Aparício, Renata, Fernanda;
- Aos amigos e amigas, companheiros e companheiras que lutaram e continuam lutando pela universidade pública gratuita e de qualidade para todos: Gediel, Humberto, Rosângela, Domingos, Evandro, Simone, Renata, Paulão, Carlão, Ivan, Elba, Braga, Celso, Jeferson, Adriana, Vivien, Rosa, Toninho;

- Às minhas amigas Marília e Juliana, que me ajudaram a sentir melhor o mundo;
- À Lygia por todo seu carinho durante estes anos;
- À minha irmã Camila, ao Marco, à minha avó Néia, pelo apoio dado durante todo o tempo;
- Ao Augusto pelas relevantes correções e sugestões;
- Aos amigos e amigas do predinho pelo companheirismo. Em especial ao José, Marlio, Jones, Roberto Carlos, Yuri, Alexandre, Everaldo, Leonardo, Roseli, Newton, Marcela, Adriano.
- Aos servidores da Unicamp por todo seu trabalho nem sempre valorizado, porém imprescindível para universidade;
- À APG, DCE, STU e ADUNICAMP por continuarem lutando contra o sucateamento e privatização da universidade pública;
- À FAPESP pelo financiamento, que deve ser modelo para todo país.

## Resumo

Neste trabalho estudamos condições de estabilidade para os Referenciais de Frenet de aplicações  $\phi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\lambda=(\lambda_{ij})}^2)$ . Mostramos que os Referenciais de Frenet apesar de holomorfos, não são estáveis relativamente a um conjunto de métricas de tipo Borel, inclusive a métrica de Killing. Veremos antes alguns resultados de aplicações harmônicas; geometria complexa de  $F(n)$ ; correspondência entre torneios e estrutura quase complexa numa variedade bandeira.

## Abstract

In this work we study the stability conditions for Eells-Wood maps  $\phi : M^2 \rightarrow (F(n), ds_{\lambda=(\lambda_{ij})}^2)$ . We show that Eells-Wood maps are holomorphic, but are not stable relatively to a field of Borel type metric, include the killing metric. We will see at the beging some results of harmonic maps, complex geometry, correspondence between tournaments and quasi-complex structure in a flag manifold.



# Índice

<b>1</b>	<b>Aplicações Harmônicas</b>	<b>8</b>
1.1	Aplicações Harmônicas . . . . .	8
1.2	Variedades quase Kahler . . . . .	12
1.3	Teorema de Lichnerowcz . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Geometria Complexa de <math>F(n)</math></b>	<b>19</b>
2.1	Variedades Bandeiras Maximais . . . . .	19
2.2	Métricas de Borel . . . . .	21
2.3	Variedades Bandeiras Generalizadas . . . . .	26
2.4	Estruturas- $f$ em Variedades Bandeira . . . . .	28
2.5	Estrutura- $f$ Horizontal em Variedade Bandeira . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Torneios e Referencial de Frenet</b>	<b>35</b>
3.1	Torneios e Aplicações Harmônicas . . . . .	35
3.2	Referenciais de Frenet . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Estabilidade em Variedade Bandeira</b>	<b>52</b>
4.1	Equações de Aplicações Harmônicas . . . . .	52
4.2	Segunda Variação da Energia para aplicações em $F(n)$ . . . . .	56

4.3	Estabilidade em $F(n)$ . . . . .	59
-----	----------------------------------	----

## Introdução

Seja  $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  uma aplicação suave entre duas Variedades Riemannianas. A energia de  $\phi$  é dada por  $E(\phi) = \int_M (1/2) |d\phi|^2 v_g$ . Temos que  $\phi$  é harmônica se e somente se  $\phi$  é um ponto crítico da energia.

Neste trabalho estudamos alguns aspectos das aplicações harmônicas entre variedades bandeira  $F(n) = \{(L_1, \dots, L_n), L_i \perp L_j \forall i \neq j, \text{ e } \oplus L_i = \mathbb{C}^n\}$ .

Eells e Wood mostraram em [[5]] que podemos escrever  $\phi : (h_0(z), \dots, h_n(z)) : M \rightarrow F(n)$ , onde  $h : M \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ . Estas aplicações são chamadas de Referenciais de Frenet.

Dada uma aplicação  $\phi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : (M, q) \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda=(\lambda_{ij})}^2)$ , escrevemos a energia de  $\phi$  como  $E(\phi) := \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} |A_z^{ij}|^2 v_g$ . Demonstramos então a:

(Segunda Variação da Energia) Seja  $\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : (M^2, q) \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda=(\lambda_{ij})})$  uma aplicação harmônica. Então:

$$\frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t)|_{t=0} := I_{\Lambda}^{\phi}(q) = 4Re \int_M \langle q A_z^{\Lambda}, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g + 2Re \sum_{i,j} \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g$$

Esta expressão nos permitiu mostrar os resultados que seguem sobre estabilidade de maneira simples.

Chamamos  $\phi$  estável se  $I_{\Lambda}^{\phi}(q) \geq 0$  para qualquer variação  $q : M \rightarrow u(n)$ .

Mostramos que os Referenciais de Frenet não são estáveis em relação a algumas métricas de tipo Borel, incluindo a métrica de Killing:

Teorema: Seja  $\psi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda'=(\lambda'_{ij})}^2)$  uma aplicação de Eells Wood. Consideremos  $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$  a seguinte perturbação da métrica de Kahler ( $\Lambda = (\lambda_{ij})$ ):

$$\lambda'_{ij}(i < j) = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{se } j = i + 1 \\ \lambda_{ij} - \epsilon_k, \epsilon_k \geq 0 & \text{para } j \neq i + 1, 1 \leq k \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{cases}$$

onde  $\Lambda = (\lambda_{ij})$  é métrica de Kahler. Então  $\psi$  não é estável.

Corolário: Seja  $\psi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow (F(n), J, \text{métrica de Killing})$  uma aplicação de Eells-Wood. Então  $\psi$  não é estável.

No capítulo 1 vemos alguns resultados preliminares sobre aplicações harmônicas tendo como base a monografia feita por Eells e Lemaire [4]. No capítulo 2 estudamos a geometria complexa de uma variedade bandeira. No capítulo 3 demonstramos uma importante correspondência 1:1 entre torneios e estruturas quase complexas em variedades bandeiras, feita pela primeira vez por Burstall e Salamon em [3]. Ainda no capítulo 3 estudamos os Referenciais de Frenet com base no trabalho de Eells-Wood [5]. Terminamos nosso trabalho com o estudo da estabilidade de aplicações harmônicas entre variedades bandeira, com base no trabalho do orientador Negreiros [15].

# Capítulo 1

## Aplicações Harmônicas

### 1.1 Aplicações Harmônicas

Sejam  $(M, g)$  e  $(N, h)$  duas variedades Riemannianas compactas, conexas, orientáveis e sem bordo,  $m$  e  $n$  suas respectivas dimensões. Seja  $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  uma aplicação suave. Denotaremos por  $|d\phi|$  sua norma em um ponto  $x$  de  $M$ , induzida pelas métricas  $g$  e  $h$ , isto é, a norma Hilbert Schimdt da aplicação linear  $d\phi(x)$ .

Se  $(x^i)$  e  $(u^\alpha)$  são coordenadas locais numa vizinhança de  $x$  e  $\phi(x)$  respectivamente temos:

$$|d\phi|^2 = g^{ij} h_{\alpha\beta}(\phi) \phi_i^\alpha \phi_j^\beta$$

onde  $(\phi_i^\alpha) = (\partial\phi^\alpha/\partial x^i)$ .

Observemos que  $|d\phi|^2$  pode ser visto como o traço de  $\phi^*h$  calculado com respeito a  $g$ :

$$|d\phi| = \langle g, \phi^*h \rangle = \langle g, \phi^*h \rangle.$$

**Definição .** A densidade de energia de  $\phi$  é a função  $e(\phi) = 1/2|d\phi|^2$ . A energia de  $\phi$  é o número real  $E(\phi) = \int_M e(\phi)v_g$ .

Podemos notar que para qualquer aplicação temos  $E(\phi) \geq 0$  e que  $E(\phi) = 0 \iff \phi$  é constante.

**Definição .** : A aplicação  $\phi : M \rightarrow N$  é dita harmônica  $\iff$  é um ponto crítico da energia, isto é, para todo  $v \in C(\phi^{-1}TN)$  temos  $D_v E(\phi) = 0$ , onde  $D_v E(\phi)$  é definido como segue: para um dado  $v$ , considere a família de aplicações  $\phi_t$  tal que  $\phi_0 = \phi$  e  $\partial\phi_t/\partial t|_{t=0} = v$ . Tomando  $\phi_t(x) = \exp_{\phi(x)}tv$ , teremos  $D_v E(\phi) = dE(\phi_t)/dt|_{t=0}$ .

**Teorema 1.1.1.** *Uma aplicação  $\phi : M \rightarrow N$  é harmônica  $\iff$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange  $\nabla d\phi = \tau(\phi) = 0$ , onde  $\nabla d\phi$  é chamada campo tensorial de  $\phi$ .*

Demonstração: Para qualquer família  $\phi_t$  com  $\phi_0 = \phi$  e  $\partial\phi_t/\partial t|_{t=0}$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\phi_t)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \int_M e(\phi_t)v_g|_{t=0} \\ &= 1/2 \int_M \frac{\partial}{\partial t} \langle d\phi_t, d\phi_t \rangle v_g|_{t=0} \\ &= \int_M \langle \nabla_{\partial/\partial t} d\phi_t, d\phi_t \rangle v_g|_{t=0} \end{aligned}$$

onde  $d\phi_t$  é a diferencial de  $\Phi = \phi_t$  ao longo de  $M$ ,  $t$  é fixo e  $\nabla_{\partial/\partial t}$  é a derivada covariante em  $T^*(M \times R) \otimes \Phi^{-1}TN$ .

Para  $X \in TM$ , temos:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial/\partial t} d\phi_t)X &= \nabla_{\partial/\partial t}^{\Phi^{-1}TN} (d\phi_t \cdot X) - d\phi_t \cdot \nabla_{\partial/\partial t}^{T(M \times R)} X \\
&= \nabla_{\partial/\partial t}^{\Phi^{-1}TN} (d\Phi \cdot X) - 0 \\
&= \nabla_X^{\Phi^{-1}TN} (d\Phi \cdot \frac{\partial}{\partial t}) + d\Phi[\frac{\partial}{\partial t}, X] \\
&= \nabla_X^{\Phi^{-1}TN} (\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 0).
\end{aligned}$$

Temos assim:

$$\begin{aligned}
\frac{dE(\phi_t)}{dt}|_{t=0} &= \int_M \langle \nabla_{\frac{\partial \Phi}{\partial t}}, d\phi_t \rangle v_g|_{t=0} \\
&= \int_M \langle dv, d\phi_t \rangle v_g \\
&= \int_M \langle v, d^*d\phi \rangle v_g \\
&= - \int_M \langle v, \tau_\phi \rangle v_g
\end{aligned}$$

Se  $\phi$  é harmônica então  $\phi = 0$  para qualquer  $X$  e  $\tau_\phi = 0$ .

**Exemplo 1.1.1.** A aplicação identidade  $I : (M, g) \rightarrow (M, g)$  é trivialmente harmônica.

**Exemplo 1.1.2.** Se  $N=R$ , a aplicação harmônica  $f : (M, g) \rightarrow R$  é uma função harmônica.

**Exemplo 1.1.3.** Se  $M$  é o círculo  $S^1$ , a aplicação  $\phi : S^1 \rightarrow (N, h)$  é harmônica  $\iff \phi$  é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco. De fato, a equação  $\tau(\phi) = 0$  reduz-se a  $\nabla_{\phi'} \phi' = 0$ .

**Definição . :** Para uma aplicação  $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  a forma quadrática  $\nabla d\phi$  é chamada segunda forma fundamental da aplicação  $\phi$ .

**Proposição 1.1.2.** Para  $X, Y \in C(TM)$  temos:

$$\nabla d\phi(X, Y) = \nabla_X^{\phi^{-1}TN} d\phi \cdot Y - d\phi(\nabla_X^M Y)$$

Basta observar que  $\nabla d\phi(X, Y) = (\nabla_X d\phi)Y$ .

**Corolário 1.1.2.1.**  $\nabla_X(d\phi)$  é simétrico, i.e., para todo  $X, Y \in C(TM)$  temos  $\nabla d\phi(X, Y) = \nabla d\phi(Y, X)$ .

Demonstração: Como  $\nabla^M$  e  $\nabla^N$  tem torsão nulas, temos:

$$\begin{aligned} \nabla d\phi(X, Y) - \nabla d\phi(Y, X) &= \nabla_X^{\phi^{-1}TN}(d\phi \cdot Y) - \nabla_Y^{\phi^{-1}TN}(d\phi \cdot X) - d\phi(\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X) \\ &= d\phi \cdot [X, Y] - d\phi \cdot [X, Y] = 0 \end{aligned}$$

Isto mostra em particular que  $\nabla d\phi$  é de fato uma forma quadrática em cada ponto  $x \in M$ , visto que para  $X, Y \in C(TM)$  e  $f \in C(M)$ , temos  $\nabla d\phi(fX, Y) = (\nabla_{fX} d\phi)Y = f\nabla d\phi(X, Y)$  e  $\nabla d\phi(X, fY) = (\nabla_{fY} d\phi)X = f\nabla d\phi(X, Y)$ .

**Corolário 1.1.2.2.** Para qualquer  $\phi \in C(M, N)$ , a 1-forma  $d\phi \in A^1(\phi^{-1}TN)$  é fechada.

**Corolário 1.1.2.3.** Uma aplicação  $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  é harmônica se e somente se é 1 forma harmônica com valores em  $\phi^{-1}TN$ .

**Definição .** A curvatura média da imersão é o traço da segunda forma fundamental dividida por  $m = \dim M$ .

Temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.1.3.** Uma imersão Riemanniana é harmônica se e somente se é minimal.



Considere a curvatura média de  $\phi$ , ou seja,  $(1/m)\text{trace}\nabla d\phi = (1/m)\tau(\phi)$ . Esta é uma seção de  $\phi^{-1}TR^n$  que é normal a imagem de  $N$ , logo é vista como uma seção do fibrado normal  $V(N, M)$ . Sua derivada covariante é definida como a projeção em  $V(N, M)$  de sua derivada em  $\phi^{-1}TR^n$ , e a denotaremos por  $\nabla^\perp((1/m)\text{tr}\nabla d\phi)$ .

**Definição** .  $\phi$  tem curvatura média constante se  $\nabla^\perp((1/m)\text{tr}\nabla d\phi) = 0$ .

Esta condição é equivalente a  $|((1/m)\text{tr}\nabla d\phi)|$  ser constante.

## 1.2 Variedades quase Kahler

**Definição** .  $M$  é chamada variedade quase complexa se é uma variedade real com um campo de endomorfismos  $J$  de  $TM$  tal que  $J^2 = -I$ .

Seja  $M$  uma variedade quase complexa.  $M$  tem dimensão par e suas duas seções tem dimensão  $m = \dim_{\mathbb{R}}M/2 = \dim_{\mathbb{C}}M$ . Denotaremos por  $T^{\mathbb{C}}M$  o fibrado tangente complexificado cuja fibra em  $x$  é  $T_xM \otimes \mathbb{C}$ , e por  $J^{\mathbb{C}}$  o respectivo operador complexificado definido por:

$$\begin{aligned} J_x^{\mathbb{C}}: T_x^{\mathbb{C}}M &\longrightarrow T_x^{\mathbb{C}}M \\ u + \sqrt{-1}v &\longrightarrow J_x u + \sqrt{-1}J_x v \end{aligned}$$

Como  $J^2 = -I$  seus autovalores são  $\sqrt{-1}$  e  $-\sqrt{-1}$ . Denotaremos seus autoespaços associados por  $T'M$  (fibrado tangente holomorfo) e  $T''M$  (fibrado tangente anti-holomorfo). Logo  $T^{\mathbb{C}}M = T'M \oplus T''M$ . Observemos que  $T''M = \overline{T'M}$  (complexo conjugado). Esta decomposição induz um dual  $T^{*\mathbb{C}}M = T^{*'}M \oplus T^{*''}M$ , com  $T_x^{*'}M = (T_x'M)^*$  e  $T_x^{*''}M = (T_x''M)^*$ .

Suponhamos  $M$  com uma métrica quase Hermitiana, isto é, uma métrica Riemanniana tal que  $g(JX, JY) = g(X, Y)$ . Desta forma  $g$  induz uma forma Hermitiana em  $T^*M$ , associando a  $X, Y \in T_x^*$  o número  $g(X, \bar{Y})$ . Se  $(\theta^j)_{j=1, \dots, m}$  é um referencial local em  $T^*M$ , escrevemos  $g = g_{j\bar{k}} \theta^j \bar{\theta}^k$ .

**Definição . :** A forma de Kahler  $\omega$  em  $TM$  é  $\omega(X, Y) = g(X, JY)$ . A forma de Kahler é uma 2-forma com componentes  $\omega_{j\bar{k}} = -ig_{j\bar{k}}$ .

**Definição . :** Uma variedade quase Hermitiana  $(M, J, g)$  é chamada quase Kahler se  $d\omega = 0$ .

Seja  $\phi : (M, J, g) \rightarrow (N, J, h)$  uma aplicação suave entre variedades quase Hermitianas. Sua diferencial complexificada  $d^C \phi : T^C M \rightarrow T^C N$  determina varias diferenciais parciais por composição com as inclusões em  $T^*M$  e  $T^{**}M$  em  $T^C M$  e as projeções de  $T^C N$  sobre  $T^*N$  e  $T^{**}N$ . Definimos assim:

$$\partial\phi : T^*M \rightarrow T^*N$$

$$\bar{\partial}\phi : T^{**}M \rightarrow T^*N$$

$$\partial\bar{\phi} : T^*M \rightarrow T^{**}N$$

$$\bar{\partial}\bar{\phi} : T^{**}M \rightarrow T^{**}N$$

Podemos notar que  $\bar{\partial}\bar{\phi} = \overline{\partial\phi}$  e  $\partial\bar{\phi} = \overline{\bar{\partial}\phi}$ . Temos por construção

$$d^C \phi|_{T^*M} = \partial\phi + \bar{\partial}\bar{\phi} \text{ e } d^C \phi|_{T^{**}M} = \bar{\partial}\phi + \partial\bar{\phi}$$

**Definição . :** Uma aplicação  $\phi$  é chamada holomorfa (anti-holomorfa)  $\iff J \circ d\phi = d\phi \circ J$  ( $J \circ d\phi = -d\phi \circ J$ ).  $\phi$  é  $\pm$  holomorfa se  $\phi$  é holomorfa ou anti-holomorfa.

Nota-se que  $\phi$  é holomorfa se e somente se  $\bar{\partial}\phi = 0$  e  $\phi$  é anti-holomorfa se e somente se  $\partial\phi = 0$ .

Usando as estruturas quase Hermitianas de  $M$  e  $N$  definiremos agora as densidades parciais de energia de  $\phi$  como:

$$\begin{aligned} e'(\phi) &= |\partial\phi|^2 = g^{\bar{i}j} h_{\alpha\bar{\beta}} \phi_i^\alpha \bar{\phi}_j^\beta \\ e''(\phi) &= |\bar{\partial}\phi|^2 = g^{\bar{i}j} h_{\alpha\bar{\beta}} \phi_i^\alpha \bar{\phi}_j^\beta \end{aligned}$$

onde  $\phi_i^\alpha$  ( $\bar{\phi}_j^\beta$ ) é a matriz de representação de  $\partial\phi$  ( $\bar{\partial}$ ) no referencial local escolhido.

Temos  $e(\phi) = e'(\phi) + e''(\phi)$ .

Seja  $M$  compacta e definamos:

$$\begin{aligned} E'(\phi) &= \int_M e'(\phi) \nu_g \\ E''(\phi) &= \int_M e''(\phi) \nu_g \\ E(\phi) &= E'(\phi) + E''(\phi) \end{aligned}$$

Observe que  $\phi$  é holomorfa se e somente se  $E'(\phi) = 0$  e anti-holomorfa se e somente se  $E''(\phi) = 0$ .

### 1.3 Teorema de Lichnerowicz

Demonstraremos nesta seção o Teorema de Lichnerowicz que nos será muito útil nos próximos capítulos.

**Lema 1.3.1.** *Se  $\omega^M$  e  $\omega^N$  representam as formas de Kahler em  $M$  e  $N$ , então:*

$$k(\phi) = e'(\phi) - e''(\phi) = \langle \omega^M, \phi^* \omega^N \rangle .$$

Demonstração: Com o referencial acima temos

$$\langle \omega^M, \phi^* \omega^N \rangle = (\omega^M)^{j\bar{k}} \phi_j^\alpha \phi_{\bar{k}}^{\bar{\beta}} \omega_{\alpha\bar{\beta}}^N - (\omega^M)^{j\bar{k}} \phi_{\bar{k}}^\alpha \phi_j^{\bar{\beta}} \omega_{\alpha\bar{\beta}}^N$$

Como  $(\omega^M)^{j\bar{k}} = ig^{j\bar{k}}$  e  $\omega^N = -ih_{\alpha\bar{\beta}}$  temos:

$$\langle \omega^M, \phi^* \omega^N \rangle = g^{j\bar{k}} \phi_j^\alpha \phi_{\bar{k}}^{\bar{\beta}} h_{\alpha\bar{\beta}} - g^{j\bar{k}} \phi_{\bar{k}}^\alpha \phi_j^{\bar{\beta}} h_{\alpha\bar{\beta}} = e'(\phi) - e''(\phi).$$

**Lema 1.3.2.** (*Lema da Homotopia*) Seja  $\phi_t : M \rightarrow N$  uma família de aplicações suaves entre variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$ , parametrizada por  $t$ , e seja  $\omega$  uma 2-forma fechada em  $N$ . Então:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^* \omega) = d(\phi_t^* i(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}) \omega)$$

onde  $i(X)\omega$  denota o produto interior do vetor  $X$  com a 2-forma  $\omega$ .

*Demonstração:* Como  $d\omega=0$ , em  $M$  temos  $d(\phi_t^* \omega) = 0$  para todo  $t$ . Considere a aplicação suave  $\Phi : R \otimes M \rightarrow N$ , definida por  $\Phi(t, x) = \phi_t(x)$ . Seja  $D$  a diferencial exterior em  $R \otimes N$ . Temos  $D(\Phi^* \omega) = 0$ .

Afirmamos que  $\Phi^* \omega = \phi_t^* \omega + Dt \wedge \phi_t^* (i(\partial \phi_t / \partial t) \omega)$ .

De fato, para quaisquer  $X, Y \in C(TM)$  temos:

$$\Phi^* \omega(X, Y) = \omega(d\Phi \cdot X, d\Phi \cdot Y) = \omega(d\phi_t \cdot X, d\phi_t \cdot Y) = \phi_t^* \omega(X, Y)$$

e  $Dt(X) = 0$ .

Para  $X \in C(TM)$  temos:

$$\begin{aligned}
\Phi^*\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right) &= \omega\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}, d\Phi \cdot X\right) \\
&= \left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)(d\phi_t \cdot X) \\
&= \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)X \\
&= Dt \wedge \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right)
\end{aligned}$$

$$\text{e } \phi_t^*\omega(\partial/\partial t, X) = 0.$$

Temos assim:

$$\begin{aligned}
0 &= D(\Phi^*\omega) \\
&= D(\phi_t^*) + D(Dt \wedge \phi_t^*(i(\frac{\partial\phi_t}{\partial t})\omega)) \\
&= Dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\omega) + d(\phi_t^*\omega) - Dt \wedge D(\phi_t^*(i(\frac{\partial\phi_t}{\partial t})\omega)) \\
&= Dt \wedge \left(\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\omega) - d(\phi_t^*(i(\frac{\partial\phi_t}{\partial t})\omega))\right)
\end{aligned}$$

**Teorema 1.3.1.** *(Teorema de Lichnerowicz) Se  $M$  e  $N$  são variedades quase Kahler, então  $K(\phi) = E'(\phi) - E''(\phi)$  é um invariante homotópico, i.e., é constante em componentes conexas de  $C(M, N)$ .*

*Demonstração:* Seja  $*$  o operador Hodge. Temos:

$$k(\phi)v_g = \langle \omega^M, \phi^*\omega^N \rangle v_g = \omega^M \wedge *\phi^*\omega^N = \phi^*\omega^N \wedge *\omega^M.$$

Seja  $\phi_0$  e  $\phi_1$  duas aplicações de  $M$  em  $N$  homotópicas através da família  $\phi_t, t \in [0, 1]$ . Como  $\omega$  é fechado temos pelo Lema da Homotopia:

$$\phi_1^*\omega^N - \phi_0^*\omega^N = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\omega^N)dt = d \int_0^1 \phi_t^*i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\omega \cdot dt \equiv d\alpha.$$

onde  $\alpha$  é uma forma em  $M$ . Assim

$$(k(\phi_1) - k(\phi_0))v_g = (\phi_1^* \omega^N - \phi_0^* \omega^N) \wedge * \omega^M = d\alpha \wedge * \omega^M = d(\alpha \wedge * \omega^M)$$

uma vez que  $d(*\omega^M) = d(\omega^{m-1}/(m-1)!) = 0$ , sendo  $m$  a dimensão complexa de  $M$ .

Portanto:

$$K(\phi_1) - K(\phi_0) = \int_M d(\alpha \wedge * \omega^M) = 0.$$

Para uma variação  $\phi_t$  temos  $E'(\phi_t) - E''(\phi_t) = K(\phi_t)$  uma constante donde:

$$\frac{\partial E'(\phi_t)}{\partial t} = \frac{\partial E''(\phi_t)}{\partial t} = 1/2 \frac{\partial E(\phi_t)}{\partial t}$$

**Corolário 1.3.1.1.** *Os pontos críticos de  $E'$ ,  $E''$  e  $E$  coincidem. Portanto, numa dada classe de homotopia os mínimos de  $E'$ ,  $E''$  e  $E$  coincidem.*

Demonstração: Temos  $\phi_0$  e  $\phi$  na mesma classe. Assim

$$E'(\phi) - E'(\phi_0) = E''(\phi) - E''(\phi_0)$$

portanto se  $E'(\phi_0) \leq E'(\phi)$  para todo  $\phi$ ,  $E''(\phi_0) \leq E''(\phi)$ .

Similarmente, como  $E(\phi) = K(\phi) + 2E''(\phi)$ , temos  $E(\phi) - 2E''(\phi) = E(\phi_0) - 2E''(\phi_0)$ , ou  $E(\phi) - E(\phi_0) = 2E''(\phi) - 2E''(\phi_0)$ , portanto o mínimo coincide.

**Corolário 1.3.1.2.** *Se  $\phi$  é uma aplicação  $\pm$  holomorfa entre variedades Kahler, então  $\phi$  é harmônica e um mínimo absoluto de  $E$  em sua classe.*

De fato, uma aplicação holomorfa satisfaz  $E''(\phi) = 0$  e portanto é um mínimo absoluto de  $E''$  em sua classe.

## Capítulo 2

# Geometria Complexa de $F(n)$

### 2.1 Variedades Bandeiras Maximais

**Definição .** (Geométrica) Uma variedade bandeira maximal  $F(n)$  consiste no espaço formado por n-uplas  $(L_1, \dots, L_n)$  tais que  $L_i$  é um subspaço de  $\mathbb{C}^n$ ,  $L_i \perp L_j, \forall i \neq j$  e  $\bigoplus_{i=1}^n L_i = \mathbb{C}^n$ .

Via a ação natural de  $U(n)$  em  $F(n)$  obtemos:

**Definição .** (Algébrica)  $F(n) = \frac{U(n)}{T}$  onde  $U(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}); A\bar{A}^t = AA^* = I\}$ ,  $T$  é o toro maximal de  $U(n)$ , i.e.,  $T = U(1) \times \dots \times U(1)$ .

Seja  $p = T(F(n))_{(T)}$  o espaço tangente de  $F(n)$  em  $(T)$  e

$$u(n) = \{X \in M(n \times n, \mathbb{C}); X + X^* = 0\} = p \oplus u(1) \oplus \dots \oplus u(1)$$

**Exemplo 2.1.1.** Seja  $n=3$ . Seja  $X \in u(3)$



$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ -x_{12} & \sqrt{-1}x_{22} & x_{23} \\ -x_{13} & -x_{23} & \sqrt{-1}x_{33} \end{pmatrix}$$

onde  $x_{11}, x_{22}, x_{33} \in \mathbb{R}$ . Temos

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{-1}x_{11} & 0 & 0 \\ -\bar{0} & \sqrt{-1}x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-1}x_{33} \end{pmatrix} = p \oplus (u(1) \oplus u(1) \oplus u(1))$$

Logo

$$p = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \leq i \neq j \leq 3 \right\}$$

Usando a ação natural de  $U(n)$  em  $F(n)$  Borel-Hirzebruch mostraram que existem  $2^{\binom{n}{2}}$  estruturas quase complexas invariantes.

Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base canônica de  $\mathbb{C}^n$  e  $E_i =$  subspaço de  $\mathbb{C}^n$  gerado por  $e_i$ . Temos:

**Lema 2.1.1.**  $u(n)^{\mathbb{C}} \cong gl(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}_n$ .

*Demonstração:* Obviamente  $u(n)^{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}_n$ . Reciprocamente, dado  $X \in \mathbb{C}_n$  existem  $A, B \in u(n)$  tal que  $X = A + \sqrt{-1}B$ . De fato, basta tomar

$$A = \frac{X - X^*}{2} \text{ e } B = \frac{X + X^*}{2\sqrt{-1}}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
u(n)^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}_n &= \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) \cong \bar{\mathbb{C}}^n \otimes \mathbb{C}^n \\
&\cong (\bar{E}_1 \oplus \dots \oplus \bar{E}_n) \otimes (E_1 \oplus \dots \oplus E_n) \\
&\cong (\bar{E}_1 \otimes E_1 \oplus \dots \oplus \bar{E}_n \otimes E_n) \oplus \left( \bigoplus_{i,j} \bar{E}_i E_j \oplus \bar{E}_j E_i \right)
\end{aligned}$$

onde  $\bar{E}_i E_j$  significa  $\bar{E}_i \otimes E_j$ .

Portanto se  $E_j = a e_j, a \in \mathbb{C}$  teremos  $\bar{E}_j = \bar{a} e_j, a \in \mathbb{C}$ .

Seja  $D_{ij}^{\mathbb{C}} = \bar{E}_i E_j \oplus \bar{E}_j E_i$ . Consideremos  $D_{ij} = D_{ij}^{\mathbb{C}} \cap u(n)$ . Temos:

$$p^{1,0} \cong \bigoplus_{i < j} \bar{E}_i E_j \text{ e } p^{0,1} \cong \bigoplus_{i < j} \bar{E}_j E_i.$$

Dado  $q : M^2 \rightarrow u(n)$  definimos naturalmente  $\frac{\partial q}{\partial z} \in T(M)^* \otimes p^{1,0}$  e  $\frac{\partial q}{\partial \bar{z}} \in T(M)^* \otimes p^{0,1}$ .

## 2.2 Métricas de Borel

Estudemos agora as métricas  $U(n)$  invariantes em  $F(n)$ , chamadas métricas de Borel, muito importante para a teoria de aplicações harmônicas em variedades bandeira.

Introduzamos o método do referencial móvel.

Um referencial consiste de um conjunto ordenado de  $n$  vetores linearmente independentes  $(Z_1, \dots, Z_n)$  tais que

$$Z_1 \wedge \dots \wedge Z_n \neq 0$$

Um referencial é chamado unitário se temos também:

$$\langle Z_i, Z_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.2.2.1)$$

Temos

$$dZ_i = \sum_j \omega_{i\bar{j}} Z_j$$

onde as  $\omega_{i\bar{j}}$  são 1-formas, chamadas, formas de Maurer-Cartan.

**Proposição 2.2.1.** *As formas de Maurer-Cartan são anti-Hermitianas, isto é, satisfazem*

$$\omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}i} = 0$$

*Demonstração:*

Derivando (2.2.2.1):

$$\langle dZ_i, Z_j \rangle + \langle Z_i, dZ_j \rangle = 0$$

Assim temos:

$$\langle \sum \omega_{i\bar{k}} Z_k, Z_j \rangle + \langle Z_i, \sum \omega_{j\bar{k}} Z_k \rangle = 0$$

Usando a linearidade do produto interno e (2.2.2.1):

$$\begin{aligned} \sum \omega_{i\bar{k}} \langle Z_k, Z_j \rangle + \sum \omega_{j\bar{k}} \langle Z_i, Z_k \rangle &= 0 \\ \omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}i} &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente obtemos:

$$\omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}i} = 0$$

**Proposição 2.2.2.** *As formas de Maurer-Cartan satisfazem a equação:*

$$d\omega_{i\bar{j}} = \sum_k \omega_{i\bar{k}} \wedge \omega_{k\bar{j}}$$

*Demonstração:*

Temos

$$dZ_i = \sum_j \omega_{i\bar{j}} Z_j$$

Tomando a derivada exterior obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \omega_{i\bar{j}} dZ_j &= 0 \\ \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \sum_k \omega_{i\bar{k}} dZ_k &= 0 \\ \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \sum_k \omega_{i\bar{k}} \left( \sum_j \omega_{k\bar{j}} Z_j \right) &= 0 \\ \sum_j d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \sum_j \left( \sum_k \omega_{i\bar{k}} \wedge \omega_{k\bar{j}} \right) Z_j &= 0 \\ \sum_j \left( d\omega_{i\bar{j}} Z_j - \sum_k \omega_{i\bar{k}} \wedge \omega_{k\bar{j}} \right) Z_j &= 0 \end{aligned}$$

Todas as métricas invariantes á esquerda sobre  $F(n)$  tem a forma

$$ds_{\Lambda=\lambda_{ij}} = \sum \lambda_{ij} \omega_{i\bar{j}} \otimes \omega_{i\bar{j}}$$

onde  $\Lambda = (\lambda_{ij})$  é uma matriz real simétrica satisfazendo:

$$\begin{aligned}\lambda_{ij} &> 0 \text{ se } i \neq j \\ \lambda_{ij} &= 0 \text{ se } i = j\end{aligned}$$

Estas métricas são chamadas métricas tipo Borel.

Seja  $A, B \in F(n)_T$ . Temos  $ds_{\Lambda=(\lambda_{ij})}^2(A, B) := \sum_{(i,j)} \lambda_{ij} tr(E_i A E_j B^*)$ , onde  $\lambda_{ij} - \lambda_{ji} > 0, \lambda_{ii} = 0, \forall i, j$ . Se  $\lambda_{ij} = 1, \forall i \neq j$  temos a métrica induzida em  $F(n)$  pela forma de Killing de  $U(n)$ . A métrica de Killing em  $U(n)$  é dada por:

$$\langle A, B \rangle = tr(AB^*), A, B \in u(n) = U(n)_I.$$

Borel em [2] descreveu o conjunto de métricas de Kahler invariantes a menos de permutação dada pela seguinte matriz simétrica:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_2 & \cdots & \cdots & \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \\ & 0 & \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_3 & \cdots & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \lambda_{n-1} \\ & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos  $(F(n), J, ds_{\Lambda})$ . Vale lembrar que a forma de Kahler em  $F(n)$  é dada por:

$$\Omega(A, B) = \langle a, JB \rangle_{ds_{\Lambda}^2}$$

onde  $A, B \in p = T(F(n))_T - F(n)_{(T)}$ .

**Definição .** Uma estrutura quase complexa invariante  $J$  é dita integrável se  $(F(n), J)$  é uma variedade complexa, ou seja, admite sistemas de coordenadas locais complexas com mudanças de coordenadas holomorfas.

**Teorema 2.2.3.** *Newlander-Niremberg:* Uma estrutura quase complexa  $J$  é integrável se e somente  $J$  satisfaz as equações de integrabilidade de Newlander-Niremberg:

$$[JA, JB] - [A, B] + J[A, B] + J[JA, B] = 0 \forall A, B \in p.$$

*Demonstração:* Ver [7]

**Exemplo 2.2.1.** : Notemos que as duas estruturas quase complexas invariantes de  $G_k(\mathbb{C}^n)$  são integráveis.

$$J_1 = \left[ \begin{pmatrix} 0 & A \\ -\bar{A}^t & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1}A \\ \sqrt{-1}\bar{A}^t & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$J_2 = \left[ \begin{pmatrix} 0 & A \\ -\bar{A}^t & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{-1}A \\ -\sqrt{-1}\bar{A}^t & 0 \end{bmatrix}$$

*Observação 1.* Temos que a Variedade de Grassman

$$G_k(\mathbb{C}^n) \cong \left( \frac{U(n) \times U(n-k)}{U(k)}, J_1, \text{métrica de Killing} \right)$$

é também chamada variedade de Killing e foi descoberta por Fubini-Study.

Temos que uma variedade  $(F(n), J, ds_\Lambda)$  é quase Kahler se  $D\Omega = 0$ .

**Definição .** Se  $J$  for integrável então  $(F(n), J, ds_\Lambda)$  é dita uma variedade de Kahler. Se  $d\Omega^{1,2} = 0$   $(F(n), J, ds_\Lambda)$  é dita (1,2)-simplética.

Podemos enunciar assim o Teorema de Lichnerowcs:

**Teorema 2.2.4.** [10] *Seja  $\phi : (M^2, g) \rightarrow (F(n), J, ds_\Lambda)$  uma aplicação holomorfa e  $ds_\Lambda^2$  (1,2)-simplética. Então  $\phi$  é harmonica.*

**Teorema 2.2.5.** [2]: *Existem infinitos  $\Lambda$  tal que  $(F(n), J, ds_\Lambda)$  é uma variedade de Kahler.*

No capítulo 3 veremos que  $(F(n), J, ds_\Lambda)$  é uma variedade quase-kahler se e somente se é uma variedade kahler.

## 2.3 Variedades Bandeiras Generalizadas

**Definição . :** Chamamos variedade bandeira complexa a

$$F(r_1, \dots, r_n; N) = \frac{U(N)}{U(r_1) \times \dots \times U(r_n)}$$

onde  $r_1 + \dots + r_n = N$ .

$F(r_1, \dots, r_n; N)$  é um espaço homogêneo completamente redutível:

$$u(N) = [u(r_1) + \dots + u(r_n)] \oplus [\oplus_{i < j} m_{ij}]$$

onde

$$m_{ij} = \{A = (A_{kl} \in u(N); t.q. A_{kl} = 0 \text{ se } (k, l) \neq (i, j)e(j, i))\}$$

sendo  $A_{kl} \in gl(r_k \times r_l; \mathbb{C})$  sua representação istrópica.

..... Consideremos sua versão complexificada: .....

$$M_{ij}^{\mathbb{C}} = \{A = (A_{kl} \in gl(N; \mathbb{C}) t.q. A_{kl} = 0 \text{ se } (k, l) \neq (i, j)e(j, i))\} = E_{ij} \oplus E_{ji}$$

sendo  $E_{ij} := A = (A_{kl} \in u(N)/A_{kl} = 0 \text{ se } (k, l) \neq (i, j)U(r_1) \times \dots \times U(r_n)$   
invariante e irredutível. Para  $A = (A_{kl}) \in E_{ij}$  qualquer temos:

$$A = (A_{kl}^1) + \sqrt{-1}(A_{kl}^2) \text{ onde}$$

$$A_{kl}^1 = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{2} & (k, l) = (i, j) \\ -\frac{A_{ij}^t}{2} & (k, l) = (j, i) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e

$$A_{kl}^2 = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{2\sqrt{-1}} & (k, l) = (i, j) \\ -\frac{A_{ij}^t}{2\sqrt{-1}} & (k, l) = (j, i) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim é fácil notar que:

$$\bar{A} = (A_{kl}^1) - \sqrt{-1}(A_{kl}^2) \in E_{ji}$$

Similarmente temos:

$$\bar{E}_{ij} = E_{ji}[\oplus_{i,j} m_{ij}]^{\mathbb{C}} = \oplus_{i \neq j} E_{ij}$$



## 2.4 Estruturas- $f$ em Variedades Bandeira

**Definição . :** Uma estrutura- $f$  em  $F = F(r_1, \dots, r_n; N)$  é uma seção  $\mathcal{F}$  de  $End(TF((r_1, \dots, r_n; N)))$  tal que  $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$ .

Uma estrutura- $f$   $U(N)$  invariante em  $F(r_1, \dots, r_n; N)$  pode ser identificada com um  $H$  endomorfismo equivariante  $\mathcal{F}$  de  $\bigoplus_{i < j} E_{ij}$  tal que  $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$ , onde  $H = U(r_1) \times \dots \times U(r_n)$ . Usando o que [[6]] chama de Lema de Schur's, todas  $U(N)$  estruturas- $f$  invariantes podem ser construídas como segue:

Seja  $\epsilon = (\epsilon_{ij})$  uma matriz anti-simétrica  $n \times n$  tomando valores no conjunto  $\{1, 0, -1\}$ . Defina:

$$\begin{aligned} \sqrt{-1} & \text{ autoespaço de } F = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} E_{ij} \\ -\sqrt{-1} & \text{ autoespaço de } F = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} \bar{E}_{ij} = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=-1} E_{ij} \\ 0 & \text{ autoespaço de } F = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=0} E_{ij} \end{aligned}$$

Podemos definir assim um  $H$  endomorfismo equivariante  $\mathcal{F}$  de  $\bigoplus_{i \neq j} E_{ij}$  que pode ser visto como uma extensão  $\mathbb{C}$ -linear de um endomorfismo equivariante  $H$  de  $\bigoplus_{i < j} m_{ij}$  pois  $\bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} \bar{E}_{ij}$  e  $\bigoplus_{\epsilon_{ij}=-1} \bar{E}_{ij}$  são conjugados e

$$[\bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} \bar{E}_{ij}] \cap \bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} \bar{E}_{ij} = \{0\}$$

**Definição .** A dimensão complexa do autoespaço  $\sqrt{-1}$  de  $\mathcal{F}$  é o posto de  $F$ .

Suponha que a estrutura- $F$   $\mathcal{F}$  é definida por  $\epsilon(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}_{ij})$  Então:

$$rank \mathcal{F} = dim_{\mathbb{C}}[\sqrt{-1} \text{ autoespaço de } \mathcal{F}] = dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{\mathcal{F}_{ij}=1} E_{ij} = \sum_{\mathcal{F}_{ij}=1} dim_{\mathbb{C}} E_{ij} = \sum_{\mathcal{F}_{ij}=1} r_i r_j.$$

**Definição .** Uma estrutura- $f$   $\mathcal{F}$  numa variedade bandeira com a propriedade  $[\mathcal{F}_+, \mathcal{F}_-] \subset h$  é chamada uma estrutura- $f$  horizontal, onde:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_+ &= \sqrt{-1} \text{ auto-espaço} \\ \mathcal{F}_- &= -\sqrt{-1} \text{ auto-espaço} \\ h &= u(r_1) + \dots + u(r_n)\end{aligned}$$

Dado  $A \in E_{ij}$  podemos escrever:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = (0, \dots, 0, A^i, 0, \dots, 0)$$

onde  $A_j = (0, \dots, 0, A_{ij}, 0, \dots, 0)$  e

$$A^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{ij} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Similarmente para  $B \in E_{kl}$ .

Logo

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = (0, \dots, 0, B^k, 0, \dots, 0)$$

$$- \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = (0, \dots, 0, A^i, 0, \dots, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} A_j B^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_l A^i \end{pmatrix}$$

Assim temos:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \begin{cases} 0 & \text{se } i, j, k, l \text{ são distintos ou } j \neq l \\ E_{il} & \text{se } j=k, i \neq l \\ E_{ii} - E_{jj} & \text{se } j=k, i=l \end{cases}$$

O Teorema a seguir caracteriza as estruturas- $f$  horizontais numa variedade bandeira complexa em termos das  $\epsilon$ -matrizes.

**Teorema 2.5.1.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma estrutura- $f$  invariante em  $F$ . Então  $\mathcal{F}$  é horizontal se e somente se existe uma  $n$  permutação  $\sigma$  tal que: i)  $\sigma$  e  $\sigma^2$  não tem pontos fixos; ii)  $(i, j) | \mathcal{F}_{ij} = 1 \subset (k, \sigma(k)) / k = 1, 2, \dots, n$*

*Demonstração:* Uma condição equivalente de horizontabilidade é  $[\mathcal{F}_+, \bar{\mathcal{F}}_+] \subset h^c$  [[16]]. Note que  $F_+ = \sqrt{-1}$  autoespaço de  $\mathcal{F} = \bigoplus_{\mathcal{F}_{ij}=1} E_{ij}$ . Portanto

$[\mathcal{F}_+, \bar{\mathcal{F}}_+] \subset h^{\mathbb{C}}$  se e somente se  $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{kl} = 1, (i, j) \neq (k, l)$  implica que  $i \neq k$  e  $j \neq l$ . Da anti-simetria de  $\epsilon(\mathcal{F})$  segue que  $\mathcal{F}$  é horizontal se e somente se existe uma permutação de ordem  $n$   $\sigma$  tal que i) e ii) são válidas.

Temos então:

**Proposição 2.5.2.** *Seja  $\mathcal{F}$  em  $F(r_1, \dots, r_n; N)$  uma variedade bandeira complexa com altura  $\leq 1$  e  $J$  uma estrutura quase complexa em  $\mathcal{F}$ . Então  $J$  é horizontal se e somente se  $n=3$  e  $J$  é não integrável.*

Seja  $M$  uma superfície riemanniana com coordenada complexa local  $z$  e:

$$\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$$

uma aplicação numa variedade bandeira.

**Definição .** Seja  $\pi_i$  a projeção ortogonal sobre  $E_i$ . Chamamos de segunda forma fundamental de  $\phi$  a:

$$A'_{ij} = \pi_j \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \pi_i \quad i \neq j$$

**Definição .** Uma aplicação  $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$  é dita subordinada a uma matriz- $\epsilon$  se  $A'_{ij} = 0$  quando  $\epsilon_{ij} \neq 1, i \neq j$ . Temos  $\epsilon_{ij} \in [-1, 0, 1] \forall i, j$ .

**Proposição 2.5.3.** *Uma aplicação  $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$  é  $f$ -holomorfa relativa a uma estrutura- $f$   $\mathcal{F}$  invariante sobre  $F$  se e somente se é subordinada a  $\epsilon(\mathcal{F})$*

Prova: Uma aplicação  $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$  é  $f$ -holomorfa se e somente se

$$d\phi \circ F = F \circ d\phi \quad (2.5.2.1)$$

onde  $J$  é a estrutura complexa da superfície de Riemann. De [[16]] temos que (2.5) vale se e somente se  $d\phi \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \in \sqrt{-1} - \text{auto-espaço de } \mathcal{F}$ . Note que a forma de Maurer-Cartan dá um isomorfismo familiar

$$\phi^{-1}TF(r_1, \dots, r_n; N)^C = \oplus_{i \neq j} \bar{E}_i E_j \quad (2.5.2.2)$$

$$= \oplus_{i \neq j} \text{Hom}(E_i, E_j) \quad (2.5.2.3)$$

Portanto sob este isomorfismo a componente de  $d\phi$  em  $\text{Hom}(E_i, E_j)$  é  $A'_{ij}$  (ver [[10]]). Por conjugação temos que o subespaço  $E_{ij}$  corresponde a  $\bar{E}_i E_j = \text{Hom}(E_i, E_j)$ . Assim,

$$\sqrt{-1} \text{ autoespaço de } \mathcal{F} = \oplus_{\mathcal{F}_{ij}=1} \text{Hom}(E_i, E_j)$$

Segue que  $\phi$  é  $f$ -holomorfa relativa a  $\mathcal{F}$  se e somente se  $\mathcal{F}_{ij} \neq 1$ ,  $i \neq j$  implica que  $A'_{ij} = 0$ .

**Definição .** Uma aplicação  $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$  é chamada equiharmônica se é harmonica em relação a qualquer métrica de Borel.

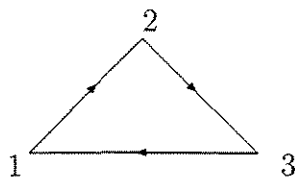
**Corolário 2.5.3.1.** *Suponha que  $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_n; N)$  é subordinada a uma  $\epsilon$ -matriz, i.e., associada a uma estrutura- $f$  horizontal. Então  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  é uma aplicação equiharmônica e cada  $\phi_j : M^2 \rightarrow G_{r_j, N}$  é harmônica para  $j = 1, 2, \dots, n$ .*

## Capítulo 3

# Torneios e Referencial de Frenet

### 3.1 Torneios e Aplicações Harmônicas

**Definição .** Um *torneio*,  $\mathcal{T}$ , é um conjunto  $T$  de jogadores com uma relação  $\rightarrow$  que associa a todo par um vencedor. Assim se  $s, t \in T, s \neq t$  então ou  $s \rightarrow t$  ou  $t \rightarrow s$ .



Se  $T$  tem  $n$  elementos escrevemos  $|\mathcal{T}| = n$  e chamamos  $\mathcal{T}$  um  $n$ -torneio.  $\mathcal{T}$  pode ser representado por uma grafo em que  $T$  é o conjunto de vértices e quaisquer dois vértices  $s, t \in T$  são ligados por uma aresta orientada  $s \rightarrow t$ .

**Definição .** Um homomorfismo  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  entre dois torneios é uma aplicação  $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  que preserva as relações de dominação i.e.:

$$s \rightarrow t \Rightarrow \phi(s) = \phi(t) \text{ ou } \phi(s) \rightarrow \phi(t).$$

Se  $\phi$  é bijetiva  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{T}'$  são ditos isomorfos.

Um  $n$ -torneio determina um vetor de resultado:

$$(v_1, \dots, v_n) : 0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq n - 1,$$

$$\sum_1^n v_i = \binom{n}{2}$$

cujas componentes são os números de jogos vencidos por cada jogador. Temos assim que torneios isomorfos têm identicos vetores de resultados.

**Definição .** Chamamos  $\mathcal{T}_n$  o  $n$ -torneio canônico se  $i \rightarrow j$  se e somente se  $i < j$ .

**Teorema 3.1.1 ([3]).** *A menos de isomorfismo,  $\mathcal{T}_n$  é o único torneio canônico satisfazendo as seguintes condições*

1. a relação de domínio é transitiva, i.e.,  $i \rightarrow j$  e  $j \rightarrow k \Rightarrow i \rightarrow k$ ,
2. não existem circuitos, i.e., caminhos fechados  $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1$ ,
3. o vetor de resultado é  $(0, 1, 2, \dots, n - 1)$ .



Um torneio  $\mathcal{T}$  é dito ser irredutível se não existe um homomorfismo de  $\mathcal{T}$  em  $\mathcal{T}_2 = (0, 1)$ . Mais especificamente  $\mathcal{T}$  é simples se não existe homomorfismo de  $\mathcal{T}$  sobre qualquer torneio  $\mathcal{L}$  com  $1 < |\mathcal{L}| < |\mathcal{T}|$ .

Um torneio é chamado forte se todo par  $i, j \in \mathcal{T}$  pode ser ligado por um caminho

$$i = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_r = j.$$

**Teorema 3.1.2** ([3]). *Um torneio  $\mathcal{T}$  é forte  $\iff \mathcal{T}$  é irredutível.*

**Definição .** Dado  $n \geq 3$  e um sunconjunto  $\sigma \subset T = 1, \dots, n$ , o torneio Grassmanniano  $\mathcal{T}(n, \sigma)$  é dado por:

$$i \rightarrow j \iff \begin{cases} i > j & i, j \in \sigma \text{ ou } i, j \in \sigma^c = T \setminus \sigma \\ i < j & i \in \sigma, j \in \sigma^c \text{ ou } i \in \sigma^c, j \in \sigma \end{cases}$$

Já podemos enunciar e demonstrar o teorema que "relaciona" as estruturas quase complexa invariante  $J$  de uma variedade bandeira  $F(n)$  e torneios. Este resultado têm importantes aplicações na teoria de aplicações harmônicas.

**Teorema 3.1.3** ([3]). *Existe uma correspondência 1:1 entre as estruturas quase complexa invariante  $J$  em  $F(n)$  e  $n$ -torneios  $\mathcal{T}(J)$  tal que:*

1.  $\mathcal{T}(J)$  é isomorfo ao torneio canônico se e somente se  $J$  é integrável.
2. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a)  $\mathcal{T}(J)$  é forte
- (b)  $J$  é integrável

(c) Não existe uma projeção holomorfa homogênea de  $F$  sobre uma Grassmanniana complexa.

*Demonstração:*

Consideremos a aplicação  $\Lambda^2 m \rightarrow u(N)$ . Assim o colchete de Lie pode ser calculado com uma elementar teoria de representação. Como visto no capítulo 2:

$$[\bar{E}_i E_j, \bar{E}_k E_l] = \begin{cases} 0 & \text{se } i, j, k, l \text{ são todos distintos,} \\ \bar{E}_i E_k l & \text{se } j = k, i \neq l. \end{cases}$$

Portanto  $m^{1,0}$  é fechada sob o colchete de Lie se e somente se  $i \rightarrow j \rightarrow k \implies i \rightarrow k$ . Segue do Teorema de Newlander-Nirenberg que  $J$  é integrável se e somente se  $\mathcal{T}(J)$  é transitivo, i.e., isomorfo ao torneio canônico. Temos também que  $\bar{E}_i E_j$  são gerados por colchetes de Lie de  $m^{1,0}$  se e somente se é um caminho

$$i = i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_r = j$$

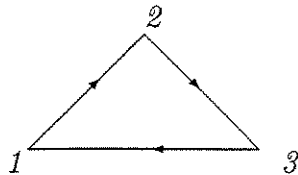
A Variedade Grassmanniana  $G_r(\mathbb{C}^N)$  é um caso especial de uma variedade bandeira com  $n = 2r = r_1$ . Esta possui uma estrutura complexa canônica correspondente ao torneio canônico  $\mathcal{T}_2$ . A projeção homogênea:

$$\pi : F = \frac{U(N)}{U(r_1) \times \dots \times U(r_n)} \rightarrow \frac{U(N)}{U(r) \times U(n-r)} = G_r(\mathbb{C}^N)$$

é determinada por um subconjunto  $\sigma \subset 1, \dots, n$  com  $r = \sum_{i \in \sigma} r_i$ . Agora  $\pi$  aplica a bandeira  $(E_1, \dots, E_n)$  no  $r$ -dimensional subspaço  $E = \bigoplus_{i \in \sigma} E_i$ . A

diferencial  $\pi_*$  da identidade mergulha  $\bar{E}_i E_j$  no  $(1, 0)$  espaço  $\bar{E} E^\perp \subset T_0^{\mathbb{C}} G_r(\mathbb{C}^N)$  se e somente se  $i \in \sigma, j \in \sigma^c$ . Temos que  $\pi$  é holomorfa se e somente se  $\mathcal{T}(J)$  tem  $i \rightarrow j$  quando  $i \in \sigma, j \in \sigma^c$  no caso que existe um epimorfismo  $\mathcal{T}(J) \rightarrow \mathcal{T}_2$ .

**Lema 3.1.1.** *Um  $n$ -torneio é isomorfo ao torneio canônico se e somente se não tem 3-ciclo, i.e., seu grafo associado não contém figuras do tipo:*



*Demonstração:*

É suficiente mostrar que qualquer  $N$ -torneio  $\mathcal{T}$  com um circuito,

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_l \rightarrow i_1$$

tem um 3-ciclo. Para  $l = 3$  é óbvio. Suponhamos então  $l = r (> 3)$ . Consideremos o seguinte  $(r + 1)$ -ciclo

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_r \rightarrow i_{r+1} \rightarrow i_1$$

Assim ou

$$i_1 \rightarrow i_r \tag{3.1.3.1}$$

ou

$$i_r \rightarrow i_1 \tag{3.1.3.2}$$

Se vale (3.1.3.1) nós temos um 3-ciclo

$$i_1 \rightarrow i_r \rightarrow \dots \rightarrow i_{r+1} \rightarrow i_1$$

Se vale (3.1.3.2) nós temos o r-ciclo

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_r \rightarrow i_1$$

Por indução este inclui um 3-ciclo.

Seja  $M$  uma superfície de Riemann. Consideremos o fibrado vetorial trivial  $\mathbb{C}^N$  sobre  $M$ . Um subfibrado  $E$  de  $\mathbb{C}^N$  com fibra  $\mathbb{C}^r$  define uma aplicação  $\phi_E : M \rightarrow G_r(\mathbb{C}^N)$  numa variedade Grassmanniana da seguinte forma:  $\phi_E(m)$  é igual a fibra  $E_m$ . Reciprocamente, uma aplicação em  $G_r(\mathbb{C}^N)$  determina um subfibrado de  $\mathbb{C}^N$  de posto  $r$ . Seja  $\pi, \pi^\perp = I - \pi$  a projeção ortogonal sobre  $E$  e seu complemento ortogonal  $E^\perp$ . Se  $z$  é uma coordenada complexa local em  $M$ , o operador

$$\partial''_E = \pi \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \pi$$

dá uma estrutura holomorfa  $E$  com seções holomorfas  $s$  caracterizadas pela equação  $\partial''_E s = 0$ . O pull-back de  $\phi$  nos dá:

$$\phi_E^{-1}TG_r(\mathbb{C}^N)^{\mathbb{C}} \cong \bar{E}E^\perp \oplus EE^\perp$$

e sob este isomorfismo, a diferencial de  $\phi_E$  é identificado com a segunda forma fundamental de  $E$  em  $\mathbb{C}^N$ , que é representado localmente pelo homomorfismo

$$A'_E = \pi^\perp \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \pi, \quad A''_E = \pi^\perp \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \pi$$

**Definição .** Um subfibrado  $E$  de  $\mathbb{C}^N$  é chamado harmônico se

$$A'_E \circ \partial''_E = \partial''_{E^\perp} \circ A'_E$$

para qualquer escolha da coordenada  $z$ .

Assim temos que  $E$  é harmônica se e somente se  $A''_E \circ \partial'_E = \partial'_{E^\perp} \circ A'_E$  e como  $A'_{E^\perp} = -(A''_E)^*$ , se somente se  $E^\perp$  é harmônica. Portanto  $E$  é um fibrado harmônico se e somente se  $\phi_E$  é uma aplicação harmônica entre variedade Grassmanniana com métrica Riemanniana simétrica.

Mais geralmente consideramos uma coleção  $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$  de subfibrados ortogonais de  $\mathbb{C}^N$  com fibras  $\mathbb{C}^{r_i}$  tal que  $\sum_i^n r_i = N$ . Portanto

$$\mathbb{C}^N = \oplus_{i=1}^n E_i$$

Definimos assim uma aplicação

$$\psi : M \rightarrow \frac{U(N)}{U(r_1) \times \dots \times U(r_n)}$$

numa variedade bandeira. Chamaremos a coleção de subfibrados  $E_i$  por bandeira móvel. Por analogia com o caso  $n = 2$  temos

$$A'_{ij} = \pi_i \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \pi_j, \quad A''_{ij} = \pi_i \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \pi_j,$$

onde  $\pi_i$  denota a projeção ortogonal sobre  $E_i$ . Para  $i \neq j$  temos as segunda forma fundamental de  $E_i$  relacionadas por:

$$\langle A'_{ij}s, t \rangle + \langle s, A''_{ij}t \rangle = 0, \quad i \neq j$$

portanto  $-A''_{ij} = (A'_{ij})^*$  é a adjunta de  $A'_{ij}$ . Assim  $A'_{ij}$  define um homomorfismo de  $E_j$  em  $E_i$ ,  $i \neq j$ , ou, uma seção

$$dz \oplus A'_{ij} \in \Gamma(M, \kappa \otimes \text{Hom}(E_j, E_i)),$$

onde  $\kappa = \Lambda^{1,0}M$  é seu fibrado canônico. Esta seção é holomorfa se e somente se

$$\partial''_i \circ A'_{ij} = A'_{ij} \circ \partial''_j,$$

onde  $\partial''_i = A''_{ii}$ .

Mo e Negreiros provaram em [11] o seguinte teorema:

**Teorema 3.1.4.** *Seja  $\Omega(X, Y) = \sum \lambda_{ij} \omega_{i\bar{j}}(X) J \omega_{\bar{j}i}(Y)$ . Temos*

$$\frac{1}{4} d\Omega = \sum_{i < j < k} C_{i,j,k} \Psi_{i,j,k}$$

onde

$$C_{i,j,k} = u_{ij} - u_{ik} + u_{jk}$$

$$\Psi_{i,j,k} = \text{Im}(\omega_{\bar{i}j} \wedge \omega_{\bar{i}k} \wedge \omega_{j\bar{k}})$$

Temos então o importante resultado:

**Proposição 3.1.5.** [12] *A métrica de Killing em  $F(N)$  é (1,2)-simplética se e somente se  $n \neq 3$ .*

Idéia da Demonstração De 3.1.4 temos

$$(1/4)d\Omega = \sum_{i < j < k} C_{ijk} \Psi_{ijk}$$

Portanto,  $ds_{\Lambda}^2$  é (1,2)-simplética se e somente se  $d\Omega^{1,2} = 0$  se e somente se

$$C_{ijk} = 0 \text{ quando } \Psi_{ijk} \in \mathbf{C}^{1,2} \oplus \mathbf{C}^{2,1} \quad (3.1.3.3)$$

Mas  $C_{ijk} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ik} + \epsilon_{jk} \neq 0$ . Portanto (3.1.3.3) é equivalente a  $\Psi_{ijk} \in \mathbf{C}^{0,3} \oplus \mathbf{C}^{3,0}$  para qualquer  $i < j < k$ . Mas nós podemos provar que o número de 3 ciclos num torneio  $\mathcal{T}_j$  é igual a  $\binom{n}{3}$ . É impossível portanto, se  $n > 3$ , pois usando a desigualdade de Gaule [13] temos que o número de 3-ciclos em  $\mathcal{T}_j$  é menor ou igual a  $(1/24)(n^2 - n)$  se  $n$  é ímpar e  $(1/24)(n^3 - 4n)$  se  $n$  é par.

**Teorema 3.1.6 ([9]).** *A estrutura quase complexa  $J$  é integrável  $\iff (F(N), J)$  é uma variedade complexa  $\iff J$  satisfaz as equações de integrabilidade de*

Newlander-Niremberg  $\iff$  o torneio associado não contém 3-ciclos (ou circuito)  $\iff \mathcal{T}_J$  é isomorfo a  $\mathcal{T}_n$ .

**Teorema 3.1.7.** Considere  $(F(n), J, ds_\lambda^2)$ . Tal variedade é Kahler se e somente se é quase-kahler.

*Demonstração:*

Se uma variedade é Kahler obviamente ela é quase-kahler. Mostremos a recíproca. Seja  $J$  uma estrutura quase integrável sobre  $F(n)$ . Temos que existe  $\Psi_{i,j,k} = \text{Im}(\omega_{i\bar{j}} \wedge \omega_{\text{bar}ik} \wedge \omega_{j\bar{k}}) \in \mathbb{C}^{(3,0)} \oplus \mathbb{C}^{(0,3)}$ . Como  $J$  não é integrável,  $\mathcal{T}_J$  possui um 3-ciclo. Logo  $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ik} = \epsilon_{jk}$ . Assim

$$C_{i,j,k} = u_{i,j} - u_{i,k} + u_{j,k} = \lambda_{i,j} + \lambda_{i,k} + \lambda_{j,k} \neq 0$$

Logo  $d\Omega \neq 0$  que contradiz a hipótese de  $F(n)$  ser quase-kahler.

## 3.2 Referenciais de Frenet

Seja  $F : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  uma aplicação de uma superfície de Riemann num  $n$ -espaço projetivo complexo. Dizemos que  $f$  é cheia se sua imagem não está em nenhum subespaço próprio de  $\mathbb{C}P^n$ . Chamamos de levantamento de  $f$  em um conjunto aberto  $U$  de  $M$  uma aplicação suave  $f_U : U \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  tal que  $\pi \circ f_U = f$  em  $U$ , onde  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  é a projeção canônica.

Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  uma aplicação holomorfa.

**Definição .** Para  $0 \leq \alpha \leq \infty$  definimos o  $\alpha$ -ésimo espaço osculador de  $f$  em  $x \in M$   $\tilde{\theta}_\alpha(x) = \tilde{\theta}_\alpha(f)(x) =$  espaço gerado por  $\partial^\gamma f_U(x) : 0 \leq \gamma \leq \alpha$ , onde  $F_U$  é o levantamento de  $f$  sobre um conjunto aberto contendo  $x$ .



**Lema 3.2.1.** *Se  $f$  é cheia então para algum  $x \in M$ ,  $\dim \tilde{\theta}_n(x) = n + 1$ .*

*Demonstração:* Suponhamos por absurdo que o lema não seja verdadeiro. Então para  $x$  em algum subconjunto aberto  $U$ , para algum  $\gamma \in \{1, \dots, n\}$   $\partial^\gamma f_U(x)$  é linearmente dependente em  $\{\partial^\alpha f_U(x) : 0 \leq \alpha \leq \gamma\}$ . Por diferenciação todas as derivadas superiores serão linearmente dependentes destas derivadas. Assim, as imagens de  $f_U$  estarão contidas num subconjunto próprio de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Como  $f$  é analítica,  $f$  está no mesmo subspaço, o que contradiz a hipótese de que  $f$  é cheia.

Considereremos agora o conjunto

$$A = \{x \in M : \dim \tilde{\theta}_n(x) \leq n + 1\}$$

E para qualquer inteiro  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq n$ ) definimos  $f_\alpha : M \setminus A \rightarrow G_{\alpha+1}(\mathbb{C}^{n+1})$  como

$$f_\alpha(x) = \tilde{\theta}_\alpha(x).$$

**Lema 3.2.2.** *Existe uma única extensão de  $f_\alpha$  de uma aplicação holomorfa  $f_\alpha : M \rightarrow G_{\alpha+1}(\mathbb{C}^{n+1})$ .*

*Demonstração:* Seja  $x \in M$ . Escolhemos uma carta  $U$  contendo  $x$  e um levantamento holomorfo  $f_U$  de  $f$  em  $U$ . Considere a aplicação  $w : U \rightarrow \Lambda^{n+1} \mathbb{C}^{n+1}$  definido por

$$w(x) = f_U(x) \wedge \partial' f_U(x) \wedge \dots \wedge \partial'^\alpha f_U(x) \quad (3.2.3.1)$$

podemos ver que  $w$  é holomorfo e para  $x \in A$ ,  $f_\alpha(x) = (\alpha + 1)$ -plano definido por  $w(x)$ . Se  $x \in A$  podemos escrever  $w(x') = (z(x') - z(x))^\rho W(x)$  para todo  $x'$  em alguma vizinhança aberta  $U'$  de  $x$ , onde  $\rho$  é um inteiro positivo e  $W : U' \rightarrow \Lambda^{n+1}\mathbb{C}^{n+1}$  é holomorfa e não nula. Como  $W'(x)$  pode ser decomposta para todo  $x' \neq x$ , também pode ser decomposta para  $x' = x$  e nós podemos definir  $f_\alpha(x)$  como o  $(\alpha + 1)$ -subespaço dimensional definido por  $W(x)$ . Da expressão (3.2.3.1) vemos que  $w$  não depende da carta  $U$  e do levantamento  $f_u$ . Como  $M \setminus A$  é denso em  $M$ , segue a unicidade.

**Definição .** A aplicação  $f_U$  é chamada  $\phi = \pi \circ \psi : M \rightarrow \alpha$ -ésima curva associada de  $f$

Veremos agora como construir aplicações harmônicas em  $\mathbb{C}P^n$ .

**Lema 3.2.3.** *Seja  $M, Y, N$  variedades riemannianas,  $\pi : Y \rightarrow N$  uma submersão riemanniana e  $\psi : M \rightarrow Y$  uma aplicação harmônica. Suponha que  $\psi$  é horizontal com respeito a  $\pi$ , i.e., para cada  $x \in M$   $d\psi(x)$  aplica  $T_x M$  no espaço horizontal de  $\pi$ . Então  $\phi = \pi \circ \psi : M \rightarrow N$  é harmônica.*

*Demonstração:*

Para cada  $x \in M$  o campo tensorial de  $\phi$  é dado por:

$$\tau(\phi) = \sum_i \nabla d\pi(d\psi(e_i), d\psi(e_i)).$$

onde  $\nabla d\pi$  é a segunda forma fundamental da aplicação  $\pi$  e  $\{e_i\}$  é uma base ortonormal do espaço tangente  $T_x M$ . Assim, por hipótese cada vetor  $d\psi(e_i)$  é horizontal e  $\nabla d\pi(e', e') = 0$  para qualquer vetor horizontal  $e' \in TY$ . Segue então que  $\tau(\phi) = 0$ .

Seja  $r, s$  inteiros não negativos ( $0 \leq r + s \leq n$ ). Seja

$$\mathcal{H}_{r,s} = \{(V, W) \in G_r(\mathbb{C}^{n+1}) \times G_s(\mathbb{C}^{n+1}) : V \perp W\}$$

Colocando  $t = (n + 1) - (r + s)$ , temos a variedade bandeira definida no capítulo 2

$$\mathcal{H}_{r,s} = \frac{U(n+1)}{U(r) \times U(s) \times U(t)}.$$

Se  $s = n - r$  temos a submersão Riemanniana  $\pi : \mathcal{H}_{r,s} \rightarrow \mathbb{C}P^n = U(n+1)/U(r) \times U(s) \times U(t)$  dado pela inclusão de  $U(r) \times U(s)$  em  $U(n)$ . Geometricamente  $\pi(V, W) = (V + W)^\perp$ .

**Definição .** Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  uma aplicação holomorfa cheia de uma superfície de Riemann. Chamaremos  $g = f_{n-1}^\perp : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  de polar de  $f$ .

Caracterizaremos a seguir a aplicação polar em termos de levantamentos locais.

**Lema 3.2.4.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  uma aplicação holomorfa*

1. *Se  $f$  é cheia, sua polar  $g$  é anti-holomorfa e cheia. Para qualquer levantamento local*

$$\langle \partial'^\alpha f_U, \partial'^\beta g_U \rangle = 0 \quad \forall \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq n - 1 \quad (3.2.3.2)$$

$$\langle \partial'^\alpha f_U(x), \partial'^\beta g_U(x) \rangle \neq 0 \quad x \in M \quad (3.2.3.3)$$

*para todo  $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = n$ .*

2. Reciprocamente, se  $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  é uma aplicação suave satisfazendo (1) para algum  $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = n$ , então  $f$  e  $g$  são cheias e  $g$  é a polar de  $f$ .

*Demonstração:*

1. Para  $\beta = 0$  a primeira equação de (1) é imediata. Como  $f$  é cheia,  $\partial^n(x)$  não está em  $f_{n-1}(x)$  para  $x \in M \setminus A$ . Logo a segunda equação de (1) também é válida para  $\beta = 0$ . O resultado segue para outros  $\alpha, \beta$ . A anti-holomorficidade de  $g$  segue de sua definição. Resta provar que  $g$  é cheia. Suponha que  $\lambda_0 g_U(x) + \dots + \lambda_n \partial^n g_U(x) = 0$  para algum ponto  $x \in M$  onde a segunda equação de (1) valha. Tomando o produto interno sucessivamente com  $f_U(x), \partial' f_U(x), \dots, \partial^n f_U(x)$  teremos  $\lambda_n = \dots = \lambda_0 = 0$ . Pela recíproca do lema (3.2.1),  $g$  é cheia.
2. Análoga a (1).

*Observação 2.* Se  $g$  é polar de  $f$ , o conjunto de pontos  $x$ , onde

$\dim$  espaço gerado por  $\{\partial'^\alpha f_U(x)\} < n + 1$  e  $\dim$  espaço gerado por  $\{\partial'^\beta g_U(x)\} < n + 1$  coincidem.

Consideremos agora uma aplicação holomorfa cheia  $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  e  $r \in [0, n]$  inteiro. Seja  $g$  a polar de  $f$  e  $s = n - r$ . Podemos definir assim a aplicação  $\psi : M \rightarrow \mathcal{H}_{r,s}$  tal que  $\psi(x) = (f_{r-1}(x), g_{s-1}(x))$ .

**Lema 3.2.5.** *A aplicação  $\pi$  é horizontal com respeito a  $\pi : \mathcal{H}_{r,s} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ .*

*Demonstração:* É suficiente mostrar que  $\Psi : M \rightarrow \mathcal{H}_{r,s} \rightarrow G_r(\mathbb{C}^{n+1}) \times G_s(\mathbb{C}^{n+1})$  é horizontal com respeito a  $\Pi : U \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , onde  $U = \{(V, W) \in$

$G_r(\mathbb{C}^{n+1} \times G_s(\mathbb{C}^{n+1} : \dim(V + W) = n$  e  $\Pi(V, W) = (V + W)^\perp$ . É suficiente mostrar que  $\partial'\psi$  e  $\partial''\psi \in T'U$  são horizontais. Mostraremos para  $\partial'\psi$ . Temos  $(V, W) = \psi(x) = (f_{r-1}, g_x)$ . Como  $g$  é antiholomorfa  $\partial'\psi(x) = (\partial'f_{r-1}(x), 0)$ . Podemos identificar o subspaço vertical de  $T'_{V,W}U$  com  $T'_vG_r(V \oplus W) \subset T'_vG_r(\mathbb{C}^{n+1}) \cong \mathcal{L}(V, V^\perp)$ . Seja  $f_U (g_U)$  um levantamento holomorfo (anti-holomorfo) de  $f (g)$  respectivamente em alguma vizinhança de  $x$ . Defina  $A \subset M$ . Suponhamos que  $x \notin A$ . Então segundo a observação acima,  $\{\partial'^\alpha f_U(x) : 0 \leq \alpha \leq r - 1\}$  e  $\{\partial''^\beta g_U(x) : 0 \leq \beta \leq s - 1\}$  são linearmente independentes. O primeiro conjunto de vetores gera  $V$ . Como  $\partial^i \partial'^{i-1} f_U(x) = \partial^i f_U(x) \in V$  para todo  $i < r$ , vemos que o isomorfismo  $h : T'_vG_r(\mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow \mathcal{L}(V, V^\perp)$  que  $h(\partial'f_{r-1}(x)) \in \mathcal{L}(V, V^\perp)$  tem imagem na projeção de  $\partial'^r f_U(x)$  sobre  $V^\perp$ . Mas  $\partial'\psi(x)$  é horizontal se e somente se  $h(\partial'f_{r-1}(x)) \in \mathcal{L}(V, V^\perp)$  é perpendicular a  $\mathcal{L}(V, W)$ , i.e., se e somente se a projeção de  $\partial'f_U(x)$  sobre  $V^\perp$  é perpendicular a  $W$ . Isto segue da ortogonalidade de  $V$  e  $W$  e das relações de isotropia (3.2.3.3) e (3.2.3.3), pois  $\{\partial''^\beta g_U(x) : 0 \leq \beta \leq s - 1\}$  gera  $W$ . A horizontabilidade dos pontos isolados de  $A$  segue por continuidade.

**Proposição 3.2.1.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  uma aplicação holomorfa cheia entre uma superfície de Riemann e  $r$  um inteiro ( $0 \leq r \leq n$ ). Defina  $\phi : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  por*

$$\phi(x) = f_{r-1}(x)^\perp \cap f_r(x)$$

*ou equivalentemente*

$$\phi(x) = (f_{r-1}(x) \oplus g_{s-1})^\perp,$$

onde  $g$  é a polar de  $f$  e  $s = n - r$ . Então  $\phi$  é harmônica.

*Demonstração:* A aplicação  $\phi$  é a composição da aplicação  $\psi$  definida acima e a submersão Riemanniana  $\pi : \mathcal{H}_{r,s} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . Afirmamos que  $\phi$  é harmônica. De fato, como uma aplicação em  $G_r(\mathbb{C}^{n+1}) \times G_s(\mathbb{C}^{n+1})$ , suas componentes são  $\pm$  holomorfas, e pelo Lema (3.2.1), é também horizontal com respeito a  $\pi$ . Portanto pelo Lema (3.2.1),  $\phi$  é harmônica.

*Observação 3.* 1. Se  $r = 0$  então  $\phi = f$  é holomorfa; se  $r = n$  então  $\phi = g$  é anti-holomorfa.

2. Temos as seguintes expressões equivalentes para  $\phi$

$$\begin{aligned}\phi(x) &= g_{s-1}(x)^\perp \cap g_s(x), \\ \phi(x) &= f_r(x)^\perp \cap g_s(x).\end{aligned}$$

Podemos enunciar agora o Teorema de Eells-Wood:

**Teorema 3.2.2.** [5] *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  uma aplicação holomorfa e  $r$  um inteiro ( $0 \leq r \leq n$ ). Defina  $h_k : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  como na proposição 3.2.1 por*

$$h_k(x) = f_{r-1}(x)^\perp \cap f_r(x)$$

*Então  $h_k$  é uma aplicação harmônica. Portanto, dado  $\phi : (\mathbb{C}P^1, g) \rightarrow (\mathbb{C}P^{n-1})$  harmônica existe únicos  $k$  e  $h$  tal que  $\phi = h_k$ .*

Este teorema nos fornece um conjunto natural de aplicações  $\psi : M \rightarrow F(n) : \psi = (h_0(z), \dots, h_{n-1}(z))$  para uma aplicação  $h : M \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$  holomorfa e cheia. Chamaremos esta aplicação de Referencial de Frenet.

**Teorema 3.2.3 ([9]).** *Seja  $\phi : M^2 \rightarrow f(r_1, \dots, r_n)$  uma aplicação subordinada a uma matriz  $\epsilon$  horizontal. Então:*

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \text{ é equi-harmônica e cada } \phi_j \text{ é harmônica}$$

**Teorema 3.2.4.** *Os Referenciais de Frenet  $\psi = (h_0, \dots, h_{n-1}) : M^2 \rightarrow F(n)$  são equi-harmônicas.*

*Demonstração:* Seja  $\phi : M \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$  uma aplicação harmônica cheia e isotrópica ( $\phi = h_k$ ). Seu diagrama é:

$$\phi_0 \rightarrow \phi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \phi_{n-1}$$

Considere  $\psi = (h_0, \dots, h_{n-1}) : M^2 \rightarrow F(n)$  a Referenciais de Frenet subordinada a estrutura- $f$  horizontal seguinte:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ & 0 & & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema de Black  $\psi$  é harmônica.

A recíproca do Teorema de Black não é sempre verdadeira. Ver [[10]].

---

## Capítulo 4

# Estabilidade em Variedade Bandeira

### 4.1 Equações de Aplicações Harmônicas

Seja  $\Phi : M \rightarrow U(n)$  o levantamento da aplicação  $\phi : M \rightarrow F(n)$ , i.e.,  $\phi = \pi \circ \Phi$  onde  $\pi : U(n) \rightarrow \frac{U(n)}{T} = F(n)$  é a projeção natural. Seja  $e_1, \dots, e_n$  uma base canônica de  $\mathbb{C}^n$  e  $\pi_j$  a matriz da projeção ortogonal em  $E_j$ , onde  $E_j$  é o subspaço de  $\mathbb{C}^n$  gerado por  $e_j$ .

Temos que  $\pi_j : M \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$  satisfaz  $A'_{ji}(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)A_z^{ji}$ , onde  $A_z^{ji} = \pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial z}$ . Para  $\mathbf{V} \in \Gamma(\phi^*(T(F(n))))$ , seja  $q = \phi^*\beta(\mathbf{V})$ , onde  $\phi^*\beta : \phi^*(TF(n)) \rightarrow M \times u(n)$  é o pull-back da forma de Maurer Cartan.

Definimos agora a variação de  $\phi$  por:

$$\phi_t(x) := (\exp(-tq)\Phi)$$



**Lema 4.1.1.** 1.  $\delta\pi_j = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\pi_j(t) = [\pi_j, q]$ .

2.  $\frac{\partial}{\partial z}[\pi_j, q] = [\frac{\partial\pi_j}{\partial z}, q] + [\pi_j, \frac{\partial q}{\partial z}]$ .

3.  $\delta(A_z^{ij}) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}A_z^{ij}(t) = [A_z^{ij}, q] - \pi_j \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j$ .

*Demonstração:*

1. Da definição temos  $\pi_j = \Phi E_j \Phi^*$  onde  $E_j$  é a matriz  $n \times n$  com 1 na  $(i, j)$  posição e zero no restante. Portanto:

$$\pi_j(t) = e^{-tq} \pi_j e^{tq}$$

Assim  $\delta\pi_j = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\pi_j(t) = -q\pi_j + \pi_j q = [\pi_j, q]$ .

2. Direto  
 3. Usando (1) e (2) temos

$$\begin{aligned} \delta(A_z^{ij}) &= \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}A_z^{ij}(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(\pi_i(t) \frac{\partial\pi_j(t)}{\partial z}) \\ &= (\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\pi_i(t)) \frac{\partial\pi_j}{\partial z} + \pi_i \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\pi_j(t)) \\ &= [\pi_i, q] \frac{\partial\pi_j}{\partial z} + \pi_i \frac{\partial}{\partial z} [\pi_j, q] \\ &= [A_z^{ij}, q] - \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \end{aligned}$$

*Observação 4.* Claramente  $\pi_i \pi_j = 0$  quando  $i \neq j$ .

**Lema 4.1.2.** 1.  $\text{Re} \langle [A_z^{ij}, az], q \rangle = 0$

2.  $\langle A_z^{ij}, \pi_i B \pi_j \rangle = \langle A_z^{ij}, B \rangle$

$$3. \langle A_z^{ij}, [q, [q, A_z^{ij}]] \rangle = -\langle [q, A_z^{ij}], [q, A_z^{ij}] \rangle$$

$$4. \langle A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q \rangle = -\langle A_z^{ij} q, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle$$

$$5. \langle A_z^{ij}, q \pi \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q \rangle = -\langle q A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle$$

---

$\forall B \in \mathbb{C}_n, q : M \rightarrow u(n)$  onde  $A_z^{ij} := \pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial \bar{z}}$ .

*Demonstração:*

1. Temos  $A_z^{ij*} = -A_z^{ij}$ . Portanto  $[A_z^{ij}, A_z^{ij}]^* = [A_z^{ji}, A_z^{ij}]$ . Portanto

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \langle [A_z^{ji}, A_z^{ij}], q \rangle &= \langle [A_z^{ji}, A_z^{ij}], q \rangle + \langle q, [A_z^{ji}, A_z^{ij}] \rangle \\ &= \operatorname{tr}([A_z^{ji}, A_z^{ij}] q^*) + \operatorname{tr}(q [A_z^{ji}, A_z^{ij}]^*) \\ &= -\operatorname{tr}([A_z^{ji}, A_z^{ij}] q) + \operatorname{tr}(q [A_z^{ji}, A_z^{ij}]) = 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \langle A_z^{ij}, \pi_i B \pi_j \rangle &= \operatorname{tr}(A_z^{ij} \pi_j^* B^* \pi_i^*) \\ &= \operatorname{tr}\left(\pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial z} \pi_j B^* \pi_i\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial z} \pi_j B^*\right) \\ &= -\operatorname{tr}\left(\frac{\partial \pi_i}{\partial z} \pi_j^2 B^*\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial z} B^*\right) \\ &= \langle A_z^{ij}, B \rangle \end{aligned}$$

$$3. \langle A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q \rangle = \operatorname{tr}(A_z^{ij} q^* \pi_j^* (\frac{\partial q}{\partial z})^* \pi_i^*) = -\operatorname{tr}(A_z^{ij} q \pi_j (\frac{\partial q}{\partial z})^* \pi_i) = -\langle A_z^{ij} q, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle$$

$$4. \langle A_z^{ij} q, \pi \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle = \operatorname{tr}(A_z^{ij} \pi_j^* (\frac{\partial q}{\partial z})^* \pi_i^* q^*) = -\operatorname{tr}(q A_z^{ij} \pi_j (\frac{\partial q}{\partial z})^* \pi_i) = -\langle q A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle$$

**Definição .** Seja  $\phi = (\pi_i, \dots, \pi_n) : (M, q) \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda=(\lambda=(\lambda_{ij}))}^2)$ . Definimos a energia de  $\phi$  como:

$$E(\phi) := \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} |A_z^{ij}|^2 \nu_g$$

Calculamos agora as equações de Euler-Lagrange para o problema variacional:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0} E(\phi_t) &= \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} |A_z^{ij}(t)|^2 \nu_g \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} A_z^{ij}(t) \rangle \nu_g \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, [A_z^{ij}, q] - \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle \nu_g \end{aligned}$$

Temos assim  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt}|_{t=0} E(\phi_t) = I + II$  onde

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, [A_z^{ij}, q] \rangle \nu_g \\ II &= -\operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle \nu_g \end{aligned}$$

Pelo Lema (4.1.2) temos  $I = 0$ . Usando Teorema de Stoke's temos:

$$\begin{aligned} II &= -\operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g \\ &= -\operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle \frac{\partial A_z^{ij}}{\partial z}, q \rangle \nu_g - \operatorname{Re} \int_M \sum_{ij} \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \langle A_z^{ij}, q \rangle \nu_g \\ &= -\operatorname{Re} \int_M \langle \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial \bar{z}}, q \rangle \nu_g \end{aligned}$$

onde  $A_z^\Lambda = \sum_{ij} \lambda'_{ij} A_z^{ij}$ .

Temos a seguinte proposição

**Proposição 4.1.1.**  $\phi : (M^2, g) \rightarrow (F(n), ds_\Lambda^2)$  é harmônica se e somente se  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} A_z^\Lambda = 0$  se e somente se  $\frac{\partial}{\partial z} A_x^\Lambda + \frac{\partial}{\partial y} A_y^\Lambda$ , onde:

$$\begin{aligned} A_x^\Lambda &:= \sum \lambda_{ij} \pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial x} \\ A_y^\Lambda &:= \sum \lambda_{ij} \pi_i \frac{\partial \pi_j}{\partial y} \end{aligned}$$

## 4.2 Segunda Variação da Energia para aplicações em $F(n)$

**Lema 4.2.1.**

$$\frac{\partial^2 \pi_i(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = [[\pi_i, q], q].$$

*Demonstração:* Por definição temos:  $\pi_i(t) = e^{-tq} \pi_i e^{tq}$ . Então  $\frac{\partial}{\partial t} \pi_i(t) = -qe^{tq} \pi_i e^{tq} + e^{-tq} \pi_i q e^{tq}$ . Como  $[q, e^{tq}] = 0$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial t} = e^{-tq} [\pi_i, q] e^{tq}$$

Portanto:

$$\frac{\partial^2 \pi_i(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = -q[\pi_i, q] + [\pi_i, q]q = [[\pi_i, q], q]$$

**Teorema 4.2.1.** (*Segunda Variação da Energia*) Seja  $\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : (M^2, q) \rightarrow (F(n), ds_{\Lambda=\lambda_{ij}})$  uma aplicação harmônica. Então:

$$\frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t) \Big|_{t=0} := I_{\Lambda}^{\phi}(q) = 4Re \int_M \langle q A_z^{\Lambda}, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g + 2Re \sum_{i,j} \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g$$

*Demonstração:*

Pela definição de  $E(\phi_t)$  temos:

$$E(\phi_t) = \sum_{ij} \int_M \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}(t), A_z^{ij}(t) \rangle v_g$$

Então

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t) = 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}(t), \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} A_z^{ij}(t) \rangle v_g. \text{ Portanto}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}E(\phi_t) = 2 \int_M \sum \lambda_{ij} \langle \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(A_z^{ij}(t)), \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(A_z^{ij}(t)) \rangle + 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_z^{ij}(t) \rangle v_g$$

Logo:

$$\frac{d^2}{dt^2}E(\phi_t)|_{t=0} = 2 \sum \lambda_{ij} \int_M \langle \frac{d}{dt}|_{t=0} A_z^{ij}, \frac{d}{dt}|_{t=0} A_z^{ij}(t) \rangle + 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}|_{t=0} A_z^{ij}(t) \rangle v_g = I.$$

Analisaremos I e II separadamente. Começemos com II. Temos:

$$\begin{aligned} \text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}|_{t=0} A_z^{ij} \rangle v_g &= \text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} (\frac{\partial}{\partial t}(\pi_i(t) \frac{\partial \pi_j(t)}{\partial z})) \rangle v_g \\ &= \text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \left[ \left( \frac{\partial \pi_i(t)}{\partial t} \frac{\partial \pi_j(t)}{\partial z} \right) + \pi_i(t) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \pi_j(t)}{\partial t} \right) \right] \rangle v_g \\ &= \text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}|_{t=0} \pi_i(t) \frac{\partial \pi_j}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \pi_i(t) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \pi_j \right) \rangle v_g \\ &\quad + \pi_i \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2}|_{t=0} \pi_j(t) \right) \rangle v_g \\ &= \text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, [[\pi_i, q], q] \frac{\partial \pi_j}{\partial z} + 2[\pi_i, q] \frac{\partial}{\partial z} ([\pi_j, q]) + \\ &\quad + \pi_i \frac{\partial}{\partial z} ([[\pi_j, q], q]) \rangle v_g \\ &= \text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, A + B + C \rangle v_g \end{aligned}$$

Onde:

$$A = [[\pi_i, q], q] \frac{\partial \pi_j}{\partial z} = [\pi_i q - q \pi_i, q] \frac{\partial \pi_j}{\partial z} = \pi_i q^2 \frac{\partial \pi_j}{\partial z} - 2q \pi_i q \frac{\partial \pi_j}{\partial z} + q^2 A_z^{ij}.$$

$$\begin{aligned} B &= 2[\pi_i, q] \frac{\partial}{\partial z} ([\pi_j, q]) \\ &= 2(\pi_i q - q \pi_i) \left( \left[ \frac{\partial \pi_j}{\partial z}, q \right] + [\pi_j, \frac{\partial q}{\partial z}] \right) \\ &= 2\pi_i q \frac{\partial \pi_j}{\partial z} q - 2\pi_i q^2 \frac{\partial \pi_j}{\partial z} + 2\pi_i q \pi_j \frac{\partial q}{\partial z} - \pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j - 2q A_z^{ij} q + 2q \pi_i q \frac{\partial \pi_j}{\partial z} + 2q \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C &= \pi_i \frac{\partial}{\partial z} ([[\pi_j, q], q]) \\ &= A_z^{ij} q^2 - 2\pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q - 2\pi_i q \frac{\partial \pi_j}{\partial z} q - 2\pi_i q \pi_j \frac{\partial q}{\partial z} + \pi_i \frac{\partial}{\partial z} (q^2) \pi_j + \pi_i q^2 \frac{\partial \pi_j}{\partial z} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} A + B + C &= q^2 A_z^{ij} - 2q A_z^{ij} q^2 + \pi_i \frac{\partial}{\partial z} (q^2) \pi_j - \\ &\quad - 2\pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q - 2\pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j + 2q \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j = \\ &= [q, [q, A_z^{ij}]] + \pi_i \frac{\partial q^2}{\partial z} \pi_j - 2\pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q - \\ &\quad - 2\pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j + 2q \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \end{aligned}$$

Temos assim:

$$\begin{aligned} II &= 2\operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, [q, [q, A_z^{ij}]] + \pi_i \frac{\partial q^2}{\partial z} \pi_j - \\ &\quad - 2\pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j q - 2\pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j + 2q \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle v_g \end{aligned}$$

Aplicando o Lema (4.1.2) obtemos:

$$\begin{aligned} II &= -2\operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [q, A_z^{ij}], [q, A_z^{ij}] \rangle v_g \\ &\quad + 4\operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [A_z^{ij}, q \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j] \rangle + \\ &\quad + 2\operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial q^2}{\partial z} - \\ &\quad - 4\operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle v_g. \end{aligned}$$

Como  $\phi$  é harmônica, podemos usar a Proposição (4.1.1) obtendo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \frac{\partial q^2}{\partial z} \rangle v_g &= \operatorname{Re} \int_M \langle A_z^\Lambda, \frac{\partial q^2}{\partial z} \rangle v_g \\ &= -\operatorname{Re} \int_M \langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (A_z^\Lambda), q^2 \rangle v_g = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
II &= -2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [q, A_z^{ij}], [q, A_z^{ij}] \rangle v_g \\
&\quad -4\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, \pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle v_g \\
&\quad +4\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [q, A_z^{ij} q], \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle v_g.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Lema (4.1.2) temos:

$$\begin{aligned}
I &= 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [A_z^{ij}, q] - \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, [A_z^{ij}, q] - \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle v_g \\
&= 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [A_z^{ij}, q], [A_z^{ij}, q] \rangle v_g \\
&\quad -4\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [A_z^{ij}, q], \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \rangle v_g \\
&\quad +2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g
\end{aligned}$$

Finalmente temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t)|_{t=0} &= I_\Lambda^\phi = I + II = \\
&= -4\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, q \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g + \\
&\quad +2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g \\
&= 4\text{Re} \int_M \langle q A_z^\Lambda, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g + 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle v_g
\end{aligned}$$

### 4.3 Estabilidade em $F(n)$

**Definição .**  $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$  é dita ser uma perturbação de  $\Lambda = \lambda_{ij}$  associada a aplicação  $\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow F(n)$  se:

1.  $\lambda'_{ij} = \lambda_{ij}$  se  $(i, j) \neq (i_1, j_1), (j_1, i_1), \dots, (i_r, j_r), (j_r, i_r)$ ;
2.  $\lambda'_{i_k j_k} = \lambda_{i_k j_k} + \epsilon > 0$  para  $1 \leq k \leq r$ ;
3.  $A_z^{i_1 j_1} = A_z^{j_1 i_1} = \dots = A_z^{i_r j_r} = A_z^{j_r i_r} = 0$  onde  $ds_{\Lambda=(\lambda_{ij})}$  e  $ds_{\Lambda'=(\lambda'_{ij})}$  são métricas do tipo Borel.

**Lema 4.3.1.** *Seja  $\phi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow F(n)$  uma aplicação equi-harmônica. Então:*

$$I_{\Lambda'}^{\phi}(q) = I_{\Lambda}^{\phi}(q) + \int_M 2\epsilon_1 (|\pi_{i_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_1}|^2 + |\pi_{j_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_1}|^2) + \dots + \\ + \dots + 2\epsilon_r (|\pi_{i_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_r}|^2 + |\pi_{j_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_r}|^2) \nu_g$$

*Demonstração:*  $I_{\Lambda'}^{\phi}(q) = 4\text{Re} \int_M \langle q A_z^{\Lambda'}, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g + 2\text{Re} \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g$ . Mas  $A_z^{\Lambda'} = A_z^{\Lambda}$  pois  $A_z^{i_1 j_1} = A_z^{j_1 i_1} = \dots = A_z^{i_r j_r} = A_z^{j_r i_r} = 0$ . Portanto

$$I_{\Lambda'}^{\phi}(q) = 4\text{Re} \int_M \langle q A_z^{\Lambda}, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g + 2\text{Re} \sum \lambda_{ij} \int_M \langle \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \rangle \nu_g + \\ + 2\text{Re} \sum_{k=1}^r \epsilon_k \int_M (|\pi_{i_k} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_k}|^2 + |\pi_{j_k} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_k}|^2) \nu_g \\ = I_{\Lambda}^{\phi} + 2\text{Re} \sum \epsilon_k \int_M (|\pi_{i_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_1}|^2 + |\pi_{j_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_1}|^2) \nu_g.$$

**Definição .** Uma aplicação harmônica  $\phi : (M^2, q) \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda}^2)$  é dita estável se  $I_{\Lambda}^{\phi}(q) \geq 0$  para qualquer variação  $q : M^2 \rightarrow u(n)$ .

**Teorema 4.3.1 ([7]).** *Seja  $\phi : (M^2, J_1, q) \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda}^2)$  uma aplicação holomorfa entre variedades de Kahler. Então  $\phi$  é harmônica estável.*

Estudaremos agora a estabilidade dos Referenciais de Frenet com respeito a métricas do tipo Borel.

**Teorema 4.3.2.** *Seja  $\psi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda'}^2)_{\Lambda'=(\lambda'_{ij})}$  um Referenciais de Frenet. Consideremos  $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$  a seguinte perturbação da métrica de Kahler ( $\Lambda = (\lambda_{ij})$ ):*

$$\lambda'_{ij}(i < j) = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{se } j = 2, \dots, n-1 \\ \lambda_{ij} + \epsilon_k, & \epsilon_k \geq 0 \text{ para } 1 \leq k \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{cases}$$

*Então  $\psi$  é estável.*



*Demonstração:*

Seja  $J$  uma estrutura quase complexa tal que  $\psi : (M, J_1) \rightarrow (F(n), J)$  é holomorfa. De acordo com o lema (4.3.1) temos:

$$I_{\Lambda'}^{\phi}(q) = I_{\Lambda}^{\phi}(q) + \int_M [2\epsilon_1 (|\pi_1 \frac{\partial q}{\partial z} \pi_3|^2 + |\pi_3 \frac{\partial q}{\partial z} \pi_1|^2) + \dots + \\ + \dots + 2\epsilon_l (|\pi_1 \frac{\partial q}{\partial z} \pi_n|^2 + |\pi_n \frac{\partial q}{\partial z} \pi_1|^2)] v_g \geq 0$$

pois do Teorema de Lichnerowicz's  $I_{\Lambda}^{\phi}(q) \geq 0$  e todo  $\epsilon_k \geq 0$  para  $1 \leq k \leq l = \binom{2}{n} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ .

**Teorema 4.3.3.** *Seja  $\psi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : (M, q) \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda}^2)$  uma aplicação de Eells-Wood. Consideremos a seguinte perturbação da métrica de Kahler  $\Lambda = (\lambda_{ij})$ :*

$$\lambda'_{ij} = \begin{cases} \lambda_{i_{k_0} j_{k_0}} - \epsilon_k, \epsilon_k > 0 & \text{para } i = i_{k_0} \text{ e } j = j_{k_0} \\ & k_0 \in \left[1, l = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right] \cap \mathbb{N} \\ \lambda_{ij} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

*Então  $\psi$  é estável.*

*Demonstração:*

Sabemos que existe  $q : M \rightarrow u(n)$  tal que  $I_{\Lambda}^{\phi}(q) = 0$ . Aplicando o Lema (4.3.1) temos:

$$I_{\Lambda'}^{\phi} = I_{\Lambda}^{\phi} + \int_M [2\epsilon_1 (|\pi_{i_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_1}|^2 + |\pi_{j_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_1}|^2) + \dots + \\ + \dots + (-2\epsilon_{k_0}) (|\pi_{i_{k_0}} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_{k_0}}|^2 + |\pi_{j_{k_0}} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_{k_0}}|^2) \\ + \dots + 2\epsilon_r (|\pi_{i_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_r}|^2 + |\pi_{j_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_r}|^2)$$

se escolhermos  $q$  tal que

$$\pi_{i k_0} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j k_0} \neq 0 \text{ ou } \pi_{j k_0} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i k_0} \neq 0.$$

Mais geralmente temos:

**Teorema 4.3.4.** *Seja  $\psi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow (F(n), J, ds_{\Lambda'=(\lambda'_{ij})}^2)$  uma aplicação de Eells Wood. Consideremos  $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$  a seguinte perturbação da métrica de Kahler ( $\Lambda = (\lambda_{ij})$ ):*

$$\lambda'_{ij}(i < j) = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{se } j = i + 1 \\ \lambda_{ij} - \epsilon_k, \epsilon_k \geq 0 & \text{para } j \neq i + 1, 1 \leq k \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{cases}$$

onde  $\Lambda = (\lambda_{ij})$  é métrica de Kahler. Então  $\psi$  não é estável.

*Demonstração:* Seja  $q$  tal que  $I_{\Lambda}^{\phi}(q) = 0$ ,  $\pi_{i_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_1} \neq 0$  ou  $\pi_{j_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_1} \neq 0, \dots, \pi_{i_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_r} \neq 0$  ou  $\pi_{j_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_r} \neq 0$ .

Aplicando o Lema (4.1.2) obtemos:

$$I_{\Lambda'}^{\phi}(q) = I_{\Lambda}^{\phi}(q) + \int_M [-2\epsilon_1 (|\pi_{i_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_1}|^2 + |\pi_{j_1} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_1}|^2) + \dots + \\ + \dots + (-2\epsilon_r) (|\pi_{i_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{j_r}|^2 + |\pi_{j_r} \frac{\partial q}{\partial z} \pi_{i_r}|^2)] v_q < 0$$

**Corolário 4.3.4.1 ([14]).** *Seja  $\psi : (\pi_1, \dots, \pi_n) : M^2 \rightarrow (F(n), J, \text{métrica de Killing})$  uma aplicação de Eells-Wood. Então  $\psi$  não é estável.*

*Demonstração:* Basta aplicar o Teorema para  $\lambda_{12} = \lambda_{23} = \dots = \lambda_{n(n-1)} = 1$ ,  $\epsilon_1 = 1, \dots, \epsilon_l = n - 2$ , onde  $l = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n - 2$ .

## Bibliografia

- [1] M. Black, "*Harmonic maps into homogeneous spaces*", *Pitman Res. Notes Math. Ser.* 255 (1991).
- [2] A. Borel, "*Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups*", *Proc. Nat. Acad. of Sci, USA* 40, 1147-1151 (1954).
- [3] F. Burstall e S. Salamon, "*Tournaments, flags and harmonic maps*", *Math. Ann.* 277, 249-265 (1987).
- [4] J. Eells e L. Lemaire, *Selected Topics in Harmonic Maps*, American Mathematical Society, 1983.
- [5] J. Eells e J. Wood, "*Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces*", *Adv. in Math* 49, 217-263 (1983).
- [6] S. Kobayashi e K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vols. I, II, Interscience, New York, 1963, 1969.
- [7] A. Lichnerowicz, "*Applications harmoniques et variétés kahlériennes*", *Symp. Math.*, Bologna Univ., 3 341-402 (1970).

- [8] X. Mo e C. Negreiros, "*Horizontal  $f$ -structures,  $\epsilon$ -matrizes and equi-harmonic moving flags*", preprint IMECC-UNICAMP, Agosto/98.
- [9] X. Mo e C. Negreiros, "*Hermitian Structures and equi-harmonic tori on non-symmetric complex flag manifolds*", preprint IMECC-UNICAMP, Setembro/98.
- [10] X. Mo e C. Negreiros, "*Hermitian structure on flag manifolds*", Research Report 35 (1998).
- [11] X. Mo e C. Negreiros, "*(1,2)-Symplectic Structures on Flag Manifolds*", a aparecer no Tohoku Mathematical Journal (1999).
- [12] X. Mo e C. Negreiros, "*Tournaments and Geometry of Full Flag Manifolds*", Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting, Rio Claro, Brazil, World Scientific (1999)
- [13] J. Moon *Topics in tournaments*, New York: Holt, Reinhart, and Winston (1968).
- [14] C. Negreiros, "*Harmonic maps from compact Riemann surfaces into flag manifolds*", Indiana Univ. Math. Journ. 37, 617-636 (1988).
- [15] C. Negreiros, "*On the stability of flag manifold*", preprint IMECC-UNICAMP, Dezembro/98.

- [16] J. Rawnsley, *f-structures, f-twistor spaces and harmonic maps*, in Geometry Seminar "Luigi Bianchi" II, 1984, E. Vesentini, ed., Lecture Notes in Math., vol. 1164, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 85-159 (1985).