Novas Identidades Combinatórias Relacionadas a Versões Finitas de Identidades do Tipo Rogers-Ramanujan

Candidato: Miloš Ivković[1]

Orientador: José Plínio O. Santos

[1]Este trabalho foi financiado pela FAPESP, processo número 00/04475-3.

Novas Identidades Combinatórias Relacionadas à Versões Finitas de Identidades do Tipo Rogers-Ramanujan

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corregida e defendida por Miloš Ivković e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas 09 de Agosto de 2002.

Prof. Dr. **José Plinio O. dos Santos**
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. **José Plínio Oliveira dos Santos IMECC/UNICAMP**
2. Profa. Dra. **Sueli Rodrigues Costa**
3. Prof. Dr. **Vilmar Trevisan UFRGS**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, **UNICAMP** como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Ivkovic, Milos

Iv5n Novas identidades combinatórias relacionadas à versões finitas de identidades do tipo Roger-Ramaujan / Milos Ivkovic -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : José Plínio Oliveira dos Santos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Partições (Matemática). 2. Funções geradoras. 3. Identidades combinatórias. I. Santos, José Plínio Oliveira dos. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 09 de agosto de 2002 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Prof (a). Dr (a). VILMAR TREVISAN

Za Velibora Tintora (1973-2000)
i druge *déracinés* koji širom sveta
pišu u njegovo ime.

Resumo

Neste trabalho 5 conjeturas relacionadas com versões finitas das identidades do tipo Rogers-Ramanujan são provadas. Usando estes resultados, foi possível obter generalizações polinomiais para seqüências de Fibonacci e Pell. Diversas novas interpretações combinatórias para estas seqüências, em termos de partições e caminhos reticulados são obtidas, usando-se técnicas de q-calculo e funções geradoras.

Abstract

Ins this work conjectures related with the finite versions of the Rogers-Ramanujan type identies are proved. Using this results it was possible to obtain polynomial generalizations of the Fibonacci and Pell sequences. Various new interpretations for these sequences, in terms of partitions and lattice paths, were obtained using q-calculus and generating functions.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Em nosso trabalho apoiamo-nos sobre os ombros de muitos grandes homens e usamos a experiência de muitas grandes viagens. O primeiro é Leonardo Pisano, *discretus et sapiens* (serio e educado, veja Grim[14]), viajante que nasceu em Pisa em, aproximadamente, 1170 e viajava para a Algeria, Egito, Síria, Grécia, Sicília e Province, ficando conhecido por *Fibonacci* devido, provavelmente, ao nome do pai Guilielmo Bonacci, embora ele preferisse ser chamado Leonardo Bigollo que significa viajante.

Depois do retorno para Pisa em, aproximadamente, 1200 escreveu o livro *Liber abbaci* (livro do ábaco) onde, além de outras coisas, introduziu os numerais hindu-arábicos. Este não foi nem o primeiro, nem o mais popular livro introduzindo numerais hindu-arábicos na Europa (Horadam[16]) mas a posterior fama de Fibonacci o tornou mais conhecido hoje. Dentro desse livro, no capítulo 12, descreveu um problema considerando a reprodução de coelhos. O problema foi colocado somente para mostrar facilidade de calculo com numerais hindu-arábicos, mas é muito importante para nós, porque consiste na definição da seqüencia de Fibonacci:

$$F_0 = 1, F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad para\, n \geq 2.$$

Esses tipos de seqüências foram estudadas sistematicamente por Lucas.[1]

Lucas considerou o polinômio $X^2 - PX + Q$ onde P e Q são inteiros. O disciminante da equação associada é $D = P^2 - 4Q$ e raízes são:

[1] François-Édourad-Anatole Lucas(1842-1891), Depois de servir como oficial de artilharia na gerra Franco-Prússia ele foi professor de matemática em Lycée Saint Lois e em Lycée Charlemagne, os dois em Paris.

$$\frac{P \pm \sqrt{D}}{2} = \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

Suponhamos que $D \neq 0$ (Ribenboim[18]). Definimos a seqüencia:

$$U_n(P,Q) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad para \quad n \geq 0$$

Essa seqüencia é chamada *Seqüência de Lucas associada ao par (P,Q).*
A seqüencia $V_n(P,Q) = \alpha^n + \beta^n$ é chamada *Seqüência companheira da seqüencia de Lucas*(Ribenboim[18]) com parâmetros mencionados, que não aborderemos neste trabalho.

Para $P = 1, Q = -1$ temos a seqüencia de Fibonacci. Para $P = 2, Q = -1$ temos a *Seqüencia de Pell*:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 12 \quad 29 \quad 70 \quad 169\ldots$$

Cuja relação de recorrência para essa seqüencia é:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 0)$$

.

Neste trabalho vamos apresentar algumas novas interpretações combinatórias para estas duas seqüências.

* *
*

Outro grande matemático, Srinivasa Ramanujan Aiyanrar (1887-1920), cujo trabalho impresionou e inspirou gerações de matemáticos, também inspirou-nos. Mais precisamente, nosso trabalho foi, como detalharemos posteriormente, inspirado nas famosas identidades de Rogers-Ramanujan:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})} \tag{1.1}$$

$$ \tag{1.2} $$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})} \tag{1.3}$$

A história sobre estas identidades é longa, interessante e bastante conhecida,e pode ser vista em, por exemplo, Andrews[6] ou Mondek[17]. Ramanujan conjeturou estas identidades aproximadamente em 1913 sem apresenta uma prova na época. Nem Hardy, a quem ele apresentou suas conjeturas em famosa carta enviada em 1913 foi capaz de prová-las. MacMahon, a maior autoridade inglesa nesta area, na época publicou as identidades (sem provas) em seu tratado *Combinatory Analysis*.

A parte mais interessante desta história, na nossa opinião, é o fato de que Rogers, que provou e publicou essas identidades no *Proceedings of the London Mathematical Society* no ano de 1894 não reagiu! Não sabemos se ele perdeu interesse no assunto a ponto de não ler o trabalho de MacMahon ou se pensou que não era importante mencionar o seu próprio trabalho. Ramanujan "descobriu" o artigo de Rogers em 1917, o que fez com que Rogers ficasse famoso.

Leonard James Rogers nasceu e foi educado em Oxford. Trabalhou no Yorkshire College e na Universidade de Leeds de 1888 ate 1919. Morreu em Oxford 1933. Era um homem com muitos e diferentes talentos. Falava várias línguas, era bom músico e matemático talentoso. Nos conhecemos ele hoje só por causa das identidades de Rogers-Ramanujan (Andrews[6]).

De qualquer maneira, a segunda prova das identidades de Rogers levou Bailey, em 1944, à observação que depois ficou conhecida como "Lema de Bailey". Nós a apresentamos no Capítulo 2 (para mais detalhes veja na Paule[25]). Por sugestão de Bailey, L.J. Slater, no começo dos anos 50, usando esse lema forneceu uma lista de 130 identidades de tipo Rogers-Ramanujan[2] (Slater[28] e [29]).

Ninguém sabe como Ramanujan descobriu essas identidades e outras parecidas que ele anotou em "Lost" Notebook (Andrews[2]). Mas nós sabemos que cuidadoso estudo do trabalho de Rogers por Bailey e Slater, e depois por Andrews[3] levou o terceiro para formulação do método para investigar identidades desse tipo através de generalizações

[2]Identidades de tipo Rogers-Ramanujan são identidades onde temos de um lado uma soma infinita e do outro um produto infinito.

[3]Andrews (Evan Pugh Professor de Matemática na Pennsylvania State University) mesmo descobriu o "Lost Notebook"de Ramanujan em 1976 quando visitava Cambridge. As anotações estavam em uma das caixas de papeis pessoais de G.N. Watson que estavam guardadas em Wren Library de Trinity College. Mais sobre essa história bastante interessante pode se encontrar em Andrews[6].

polinomiais. No capitulo 3. descrevemos esse método. J.P.Santos utilizou este método para conjeturar 74 identidades com possíveis interpretações combinatórias no sua tese de doutorado Santos[20]. Neste trabalho vamos provar 5 destas conjeturas.

No começo dos anos 80 o físico R. Baxter descobriu que as identidades de Rogers-Ramanujan estão relacionadas com a solução do modelo "hard hexagon" em mecânica estatística. Seus resultados aparecem em Baxter[9]. De fato, no anos 90, Alexander Berkovich e Barry McCoy Berkovich[10] estudaram várias propriedades das identidades do tipo Rogers-Ramanujan usando diversos modelos de mecânica estatística. É interessante mencionar que eles conseguiram provar duas conjeturas de Santos (identidades número 34 e 36) usando propriedades dos modelos por eles propostos.

No capítulo 4 apresentamos à parte original desta disertação . Provamos duas conjeturas de Santos[20] e, usando técnicas das funções geradoras, discutimos certas propriedades combinatórias destas relacionadas a números de Fibonacci e caminhos reticulados.

No capítulo 5 provamos mais uma conjetura e damos duas interpretações combinatoriais: uma em termos de partições , e outra em termos de partições planas.

No capítulo 6 provamos mais duas conjeturas e consideramos certas generalizações dos números de Pell usando coeficientes trinomiais, que surgem dessas conjeturas. Estas conjeturas serviram de motivação para descobrir outras formulas relacionadas aos números de Pell.

Alguns resultados apresentados aqui já foram publicados (os do capítulo 4 em Santos & Ivkovic[21]), outros submetidos (resultados de capitulo 6 em Santos & Ivkovic[22]). Outros ainda são apresentados pela primeira vez aqui (5.5).

Nossos resultados sobre partições e caminhos reticulados estão relacionados com seqüencias de Fibonacci e Pell. Também, para nossa grande felicidade, nosso trabalho parece interessante para os físicos. Berkovich *et al.* estão interessados na interpretação combinatorial das identidades do tipo Rogers-Ramanujan porque estas propriedades podem ajudar na construção de modelos em mecânica estatística.

Capítulo 2

Notações e resultados básicos

Neste capítulo introduzimos notações e definições, além de vários resultados importantes que serão utilizados.

No que segue, consideramos todas as funções na variável q formalmente, ou mais precisamente, como funções geradoras. Esse abordagem será justificado no Capitulo 4.A maioria das funções consideradas convergem para q, número complexo tal que $|q| < 1$, mas isso não será relevante aqui. Para detalhes sobre funções geradoras veja, por exemplo Rainville[27] ou Andrews[1].

Sejam $a \in \mathbb{C}; k \in \mathbb{Z}_{+}^{*}, n \in \mathbb{Z}_{+}$.

Nestas condições definimos

$$(a; q^k)_n := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n = 0 \\ (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{k(n-1)}) & n > 0 \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

$$\tag{2.2}$$

$$(a; q^k)_\infty := \lim_{n\to\infty} (a; q^k)_n \tag{2.3}$$

$$\tag{2.4}$$

$$(a)_n = (a; q)_n \qquad \text{no caso em que } k = 1. \tag{2.5}$$

Também definimios para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(a; q^k)_\lambda := \frac{(a; q^k)_\infty}{(aq^{k\lambda}; q^k)_\infty}. \tag{2.6}$$

Desta última definição destacamos a seguinte conseqüência

$$\frac{1}{(q^k, q^k)_{-n}} = 0 \tag{2.7}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

2.1 Polinômios de Gauss

Os q-análogos dos números binomiais ou polinômios de Gauss são definidos por $(q \in \mathbb{C})$:

$$\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right]_k = \begin{cases} \frac{(q^k;q^k)_n}{(q^k;q^k)_m (q^k;q^k)_{n-m}} & ,0 \leq m \leq n \\ 0 & ,\text{ caso contrario} \end{cases} \tag{2.8}$$

e para $k = 1$ escrevemos

$$\left[\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\right] = \begin{cases} \frac{(q)_n}{(q)_m (q)_{n-m}} & ,0 \leq m \leq n \\ 0 & ,\text{caso contrario} \end{cases}$$

Fixadas as notações, listamos a seguir propriedades fundamentais dos polinômios de Gauss, cujas demonstrações podem ser encontradas em Andrews[1].

$$\left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right] = 1 \tag{2.9}$$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n \\ n-m \end{array}\right] \tag{2.10}$$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ m \end{array}\right] + q^{n-m} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ m-1 \end{array}\right] \tag{2.11}$$

$$\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ m-1 \end{array}\right] + q^{m} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ m \end{array}\right] \tag{2.12}$$

É imediato que polinômios de Gauss são q-análogos de coeficientes binomiais:

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Polinômios de Gauss satisfazem várias identidades. Citamos as mais usadas:

$$\frac{1}{(z;q)_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+j-1 \\ j \end{bmatrix} z^j \tag{2.14}$$

$$(z)_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j z^j q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

as quais podem ser encontradas em [1] e

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} 2n+k \\ n+\ell \end{bmatrix} = \frac{1}{(q)_\infty}, k,\ell \in \mathbb{Z} \tag{2.16}$$

que pode ser obtida diretamente da definição de polinômio de Gauss. Essa identidade vai ser crucial no Capitulo 3.

2.2 q-Analogos de Coeficientes Trinomiais

Da mesma forma que os coeficientes binomiais, podem-se definir coeficientes *trinomiais*, ou seja:

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{j=-n}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}_2 x^{j+n} \tag{2.17}$$

onde $\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}_2$ são chamados coeficientes trinomiais.

Usando $(1+x+x^2)^n = (1+x(1+x))^n$ e aplicando teorema binomial duas vezes é fácil provar que:

$$\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}_2 = \sum_{h\geq 0} \frac{n!}{h!(h+j)!(n-j-2h)} \tag{2.18}$$

Usando $(1+x+x^2)^n = ((1+x)^2 - x)^n$ e o teorema binomial novamente temos:

$$\binom{n}{j}_2 = \sum_{h\geq 0}(-1)^h \binom{n}{h}\binom{2n-2h}{n-j-h} \tag{2.19}$$

Também, tem-se:

$$\binom{n}{j}_2 = \binom{n}{-j}_2 \tag{2.20}$$

$$\binom{n}{j}_2 = \binom{n-1}{j-1}_2 + \binom{n-1}{j}_2 + \binom{n-1}{j+1}_2 \tag{2.21}$$

Esta ultima relação fornece a possibilidade de apresentar os coeficientes trinomiais na forma de um triângulo parecido com o triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 8 & 10 & 8 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 13 & 22 & 26 & 22 & 13 & 5 & 1
\end{array}$$

As seguintes expressões (Andrews&Baxter[5]) são q-análogos dos coeficientes trinomiais da mesma forma pela qual polinômios de Gauss são q-analogos de coeficientes binomiais, ou seja, o limite de cada uma delas quando q vai para 1 é igual o coeficiente trinomial dado por (2.18) e (2.19).

$$T_0(m,A,q) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} 2m-2j \\ m-A-j \end{bmatrix}, \tag{2.22}$$

$$T_1(m,A,q) = \sum_{j=0}^{m}(-q)^j \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} 2m-2j \\ m-A-j \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Temos relações parecidas as relações extraídas do o triângulo de Pascal :

$$\begin{aligned} T_1(m,A,q) &= T_1(m-1,A,q) + q^{m+A}T_0(m-1,A+1,q) \\ &\quad + q^{m-A}T_0(m-1,A-1,q) \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} T_0(m,A,q) &= T_0(m-1,A-1,q)+q^{m+A}T_1(m-1,A,q) \\ &\quad +q^{2m+2A}T_0(m-1,A+1,q) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Vamos usar também (Andrews&Baxter[5]) a identidade:

$$\begin{aligned} &T_1(m,A,q)-q^{m-A}T_0(m,A,q)-T_1(m,A+1,q) \\ &+q^{m+A+1}T_0(m,A+1,q)=0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Seja

$$U(m,A,q)=T_0(m,A,q)+T_0(m,A+1,q) \tag{2.27}$$

As seguintes identidades são verdadeiras (Andrews[3])

$$\begin{aligned} U(m,A,q) &= (1+q^{2m-1})U(m-1,A,q) \\ &\quad +q^{m-A}T_1(m-1,A-1,q)+q^{m+A+1}T_1(m-1,A+2,q) \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} U(m,A,q) &= (1+q+q^{2m-1})U(m-1,A,q) \\ &\quad -qU(m-2,A,q)+q^{2m-2A}T_0(m-2,A-2,q) \\ &\quad +q^{2m+2A+2}T_0(m-2,A+3,q) \end{aligned} \tag{2.29}$$

De (2.22) e (2.23) podemos ver que

$$T_0(m,A,q)=T_0(m,-A,q) \tag{2.30}$$

$$T_1(m,A,q)=T_1(m,-A,q), \tag{2.31}$$

onde (2.10) foi usado.

Os seguintes resultados assintóticos para $T_0(m,A,q), T_1(m,A,q)$ e $U(m,A,q)$ são dados em Andrews[1]:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ m-A \quad par}} T_0(m,A,q)=\frac{(-q;q^2)_\infty+(q;q^2)_\infty}{2(q^2;q^2)_\infty} \tag{2.32}$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ m-A \quad impar}} T_0(m,A,q)=\frac{(-q;q^2)_\infty-(q;q^2)_\infty}{2(q^2;q^2)_\infty} \tag{2.33}$$

$$\lim_{m\to\infty} T_1(m, A, q) = \frac{(-q^2; q^2)_\infty}{(q^2; q^2)_\infty} \tag{2.34}$$

$$\lim_{m\to\infty} U(m, A, q) = \frac{(-q; q^2)_\infty}{(q^2; q^2)_\infty} \tag{2.35}$$

2.3 Lema de Bailey

Prosseguimos apresentando um conceito fundamental: dadas duas seqüências α_n e β_n de números complexos, diz-se que (α_n, β_n) é um par de Bailey se

$$\beta_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{\alpha_r}{(q)_{n-r}(aq)_{n+r}}, \tag{2.36}$$

para todo $n \geq 0$, onde $a \in \mathbb{C}$.

Obs. Fixado a e dada a seqüência α_n, os β_n dados por (2.36) ficam completamente determinados. A inversa também é válida conforme Andrews[3], onde encontramos

$$\alpha_n = (1 - aq^{2n}) \sum_{j=0}^{n} \frac{(aq)_{n+j-1}(-1)^{n-j} q^{\binom{n-j}{2}}}{(q)_{n-j}} \beta_j \tag{2.37}$$

Acompanhando esta definição apresentamos a seguir um resultado devido a Bailey (1949) que tem permitido a obtenção de novas identidades do tipo Rogers-Ramanujan.

Lema 1.1. (Lema de Bailey) Se α_n e β_n são seqüências que formam um par de Bailey então α'_n e β'_n dadas por

$$\beta'_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\rho_1)_j(\rho_2)_j(aq/\rho_1\rho_2)_{n-j}(aq/\rho_1\rho_2)^j}{(aq/\rho_1)_n(aq/\rho_2)_n(q)_{n-j}} \beta_j \tag{2.38}$$

$$\alpha'_r = \frac{(\rho_1)_r(\rho_2)_r(aq/\rho_1\rho_2)^r}{(aq/\rho_1)_r(aq/\rho_2)_r} \alpha_r \tag{2.39}$$

também formam um par de Bailey, isto é,

$$\beta'_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{\alpha'_r}{(q)_{n-r}(aq)_{n+r}}$$

(ρ_1 e ρ_2 são números complexos para os quais as expressões (2.38) e (2.39) ficam bem definidas).

Para completar as informações dadas pelo Lema (1.1), acrescentamos que a seqüência que se obtém por iteradas aplicações deste resultado, pode também ser estendida para a esquerda sempre que os valores de ρ_1 e ρ_2 assim o permitirem

$$\cdots \longrightarrow (\alpha_n^{(-2)}, \beta_n^{(-2)}) \longrightarrow (\alpha_n^{(-1)}, \beta_n^{(-1)}) \longrightarrow (\alpha_n, \beta_n) \longrightarrow (\alpha'_n, \beta'_n) \longrightarrow \cdots$$

pois de (2.39) temos

$$\alpha_r^{(-1)} = \frac{(aq/\rho_1)_r(aq/\rho_2)_r(\rho_1\rho_2/aq)^r}{(\rho_1)_r(\rho_2)_r}\alpha'_r$$

e conforme Andrews[6] temos que

$$\beta_n^{(-1)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(aq/\rho_1)_j(aq/\rho_2)_j(\rho_1\rho_2/aq)_{n-j}(\rho_1\rho_2/aq)^{2n-j}}{(\rho_1)_n(\rho_2)_n(q)_{n-j}}\beta_j.' \tag{2.40}$$

Completamos nossos dados sobre os pares de Bailey com mais duas relações envolvendo α_n e β_n, que possibilitam a obtenção de novas identidades:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a^j q^{j^2} \beta_j = \frac{1}{(aq)_\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a^j q^{j^2} \alpha_j \tag{2.41}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\rho_1)_j a^j \rho_1^{-j} q^{\binom{j+1}{2}}\beta_j = \frac{(aq/\rho_1)_\infty}{(aq)_\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\rho_1)_j}{(aq/\rho_1)_j}(-1)^j(\rho_1)^{-h}a^j q^{\binom{j+1}{2}}\alpha_j \tag{2.42}$$

cujas demonstrações podem ser vistas em Santos[20].

2.4 Diversos Resultados

Antes de falar mais sobre identidades de Rogers-Ramanujan citamos dois resultados "técnicos"que vamos usar neste de disertação .

Produto Triplo de Jacobi: Para números complexos $z \neq 0, |q| < 1$ vale que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n z^n q^{\binom{n+1}{2}} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{n+1})(1 - zq^{n+1})(1 - z^{-1}q^n). \tag{2.43}$$

Lema de Abel: Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ então $\lim_{t\to 1^-} (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = L$.

(veja em Andrews[1])

2.5 Identidades de tipo Rogers-Ramanujan

Vamos esclarecer alguns termos, citar as identidades de Rogers-Ramanujan e fazer a interpretação combinatória destas identidades.

Teorema 2.1 (Identidades de Rogers-Ramanujan,L.J. Rogers, 1894) *Seja* $|q| < 1$ *vale:*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}$$

Nesta dissertação o tema prioritario são as interpretações combinatórias de identidades do tipo Roger-Ramanujan ou seja, identidades que de um lado têm produto infinito e do outro soma infinita. Na maioria dos casos vamos apresentar interpretações em termos de *partições* cuja definição é a seguinte:

Definição 2.1 *Uma partição de um inteiro positivo n é uma seqüencia finita, não decresente de números inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que $\sum_{i=1}^{r} a_i = n$. Os a_i são chamados partes da partição .*

A função geradora para partições irrestritas de n, é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}, \tag{2.44}$$

onde $p(0) = 1$.

MacMahon concluiu em 1918 que as identidades de Rogers-Ramanujan podem se reformuladas combinatorialmente (Andrews[1]):

Teorema 2.2 (A primeira identidade de Rogers-Ramanujan) *O número de partições de um inteiro n em que a diferença entre partes consecutivas é de pelo menos dois é igual ao número de partições de n em que as partes são congruentes a 1 ou 4 módulo 5.*

Teorema 2.3 (A segunda identidade de Rogers-Ramanujan) *O número de partições de um inteiro em que cada parte excede 1 e a diferença entre partes consecutivas é de pelo menos 2 é igual ao número de partições de n em que as partes são congruentes a 2 ou 3 módulo 5*

No começo dos anos 80 o físico R. Baxter descobriu que as identidades de Rogers-Ramanujan são relacionadas à solução do modelo "hard hexagon"em mecânica estatística. Seus resultados aparecem em Baxter [9]. Nos anos 90 Alexander Berkovich e Barry McCoy (Berkovich[10]) estudaram várias propriedades das identidades do tipo Rogers-Ramanujan usando diversos modelos de mecânica estatística. Físicos chamam o lado da soma da identidade de Rogers-Ramanujan lado *fermiônico* e o lado do produto de *bosônico*. Embora que neste trabalho nós não consideramos problemas físicos, vamos usar essa notação .

Capítulo 3

O método de Equações de q-Diferença

Ninguém sabe como Ramanujan descobriu as identidades da classe que hoje traz o seu nome. Mas muitos dos que gastaram boa parte de suas vidas examinando o trabalho de Ramanujan (Bailey, Berndt, Andrews...) têm algumas idéias.

Andrews em 1985 tentou formalizar um método o qual, na sua opinião, Ramanujan usou intuitivamente.

Em sua tese do doutorado (Santos [20]) J.P.Santos usou esse método para fazer diversas conjeturas. Aqui, vamos apresentar o método através da identidade numero 94 da lista de Slater (Slater[29]), porque essa identidade foi a motivação inicial para o trabalho (Santos&Ivkovic[21]). Temos:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{30n-11})(1+q^{30n-19})(1-q^{30n})}{(1-q^n)} - q^3 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{30n-11})(1+q^{30n-19})(1-q^{30n})}{(1-q^n)} \tag{3.1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1;q)_{2n+1}} \tag{3.2}$$

Consideramos uma função de duas variáveis, $f(q,t)$, associada à identidade que se quer provar e com as seguintes propriedades:

(i) $f(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q) t^n$ onde $P_n(q)$ são polinômios.

(ii) $\lim_{n\to\infty} P_n(q)$ é igual ao lado do produto da identidade.

(iii) $f(q,t)$ satisfaz uma equação não-homogênea de primeira ordem em q

Em nosso caso definimos

$$f_{94}(q,t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}} \tag{3.3}$$

com isso obtemos:

$$f_{94}(q,t) = \frac{1}{(1-t)(1-tq^2)} + tq^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} q^{2(n-1)} q^{(n-1)^2+(n-1)}}{(1-t)(tq^2;q^2)_n(1-tq)(tq^2;q^2)_n}$$

$$(1-t)(1-tq)f_{94}(q,t) = 1 + tq^2 f_{94}(q;tq^2)$$

Portanto a condição (iii) é satisfeita.

Podemos escrever

$$f_{94}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n$$

onde

$$(1-t)(1-tq)\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n = 1 + tq^2 \sum_{n=0}^{\infty} P_n (tq^2)^n \tag{3.4}$$

3.1 Forma fermiônica

Agora podemos seguir Andrews [6]:

$$f_{94} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n q^{n^2+n} \sum_{m=0}^{\infty} t^m \begin{bmatrix} m+2n+1 \\ m \end{bmatrix} \quad \text{(por 2.15)}$$

$$f_{94} = \sum_{N=0}^{\infty} t^N \sum_{n=0}^{N} q^{n^2+n} \begin{bmatrix} N+n+1 \\ 2n+1 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$P_N = \sum_{n=0}^{N} q^{n^2+n} \begin{bmatrix} N+n+1 \\ 2n+1 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Usando (2.16) temos que

$$\lim_{N\to\infty} P_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} q^{n^2+n} \begin{bmatrix} N+n+1 \\ 2n+1 \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1;q)_{2n+1}} \tag{3.6}$$

que é igual lado direito de (3.1).

É importante destacar que todos os P_N são polinômios. Por causa disso este método é as vezes citado como método de *finitização* (veja Sills [24]). Como (3.5) surgiu do lado da soma da identidade nós chamamos (3.5) forma fermiônica.

3.2 Forma bosônica

Na última sesção apresentamos o método de Andrews (o método de equações de q-diferença) que Andrews apresentou em Andrews[6]. Entretanto, em nosso trabalho nós seguimos Santos[20] na busca da forma bosônica para (3.1). A equação (3.4) implica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} q P_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} q P_{n-2} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n} P_{n-1} t^n.$$

É fácil ver que:

$$\begin{aligned} &P_0(q) = 1 \ ; \ P_1(q) = 1 + q + q^2 \\ &P_n(q) = (1 + q + q^{2n}) P_{n-1}(q) - q P_{n-2}(q). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Agora, para os famíliarizados com polinômios de Gauss não é tão difícil conjeturar a forma explicita (forma bosônica) C_n para família dos polinômios P_n:

$$C_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+3} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Vamos provar que essa conjectura é verdadeira:

Teorema 3.1. A família $P_n(q)$ dada em (3.7) é igual $C_n(q)$ dado em (3.8).

Prova. Como $C_0(q) = 1$ e $C_1(q) = 1 + q + q^2$ precisamos mostrar a igualdade:

$C_n(q) = (1 + q + q^{2n})C_{n-1}(q) - qC_{n-2}(q)$ ou que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+3} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} \\
&= (1+q+q^{2n}) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+3} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-3 \end{bmatrix} \right) \\
&-q \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+3} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-4 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Quando (2.11) é aplicada a cada expressão do lado esquerdo de (3.9) temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+9j+n+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-1 \end{bmatrix} \\
&- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+3} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-2 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+19j+6+n} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Aplicando (2.12) a cada soma na expressão acima e substituindo em (3.9), temos (depois de alguns cancelamentos):

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+j+n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+9j+n+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}$$

$$
- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+9j+n+4} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+19j+6+n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-4 \end{bmatrix}
$$

$$
= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+4} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-3 \end{bmatrix}
$$

$$
- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j+1} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+4} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-4 \end{bmatrix}. \tag{3.10}
$$

Considerando o lado direito da última expressão e aplicando (2.11) nas primeiras duas somas temos:

$$
\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j+1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+9j+1+n} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}
$$

$$
- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+4} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-3 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+19j+6+n} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-4 \end{bmatrix}
$$

$$
- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j+1} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+4} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-4 \end{bmatrix}.
$$

Aplicando agora (2.12) na primeira e terceira soma da última expressão e fazendo alguns cancelamentos, temos que o lado direito de (3.10) é igual a:

$$
\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-j+n} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+9j+1+n} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}
$$

$$
- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+9j+j+1+n} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-3 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+19j+6+n} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-4 \end{bmatrix}.
$$

Agora consideramos o lado esquerdo de (3.10) e aplicamos (2.11) a todas as somas:

$$
\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-j+n} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j+2n-1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-1 \end{bmatrix}
$$

$$+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+9j+n+1}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+2n+2}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-3 \end{bmatrix}$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+9j+n+1}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+2n+2}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-3 \end{bmatrix}$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+n+6}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-4 \end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+24j+2n+9}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-5 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Aplicando agora (2.12) na primeira e quinta soma e fazendo cancelamentos com as somas do lado direito de (3.11) ficamos com:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-6j+2n}\begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j \end{bmatrix}+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j+2n-1}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-1 \end{bmatrix}$$
$$+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+2n+2}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-3 \end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j+2n-1}\begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+2n+2}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-3 \end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+24j+2n+9}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-5 \end{bmatrix}$$

Observando que a terceira soma cancela com quinta e trocando j por $j+1$ na última soma, temos (após uso de 2.11)

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j+2n+1}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-1 \end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j+2n-1}\begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-j+3n-2}\begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-1 \end{bmatrix}$$

que é identicamente zero por (2.12) portanto completando a prova. □

Portanto, a versão finita de identidade (3.1) foi provada:

$$P_N=\sum_{n=0}^{N} q^{n^2+n}\begin{bmatrix} N+n+1 \\ 2n+1 \end{bmatrix}=\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{q^{15j^2+4j}}\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j \end{bmatrix}-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+3}\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}=C_n(q). \quad (3.12)$$

Voltando ao método de Andrews, precisamos terminar prova da propriedade (iii). Usando (2.16) vale:

$$\lim_{n\to\infty} C_n(q) = \frac{1}{(q)_\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+3}\right).$$

Usando agora Produto Triplo de Jacobi (2.43) temos:

$$\lim_{n\to\infty} C_n(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{30n-11})(1+q^{30n-19})(1-q^{30n})}{(1-q^n)} - q^3 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{30n-11})(1+q^{30n-19})(1-q^{30n})}{(1-q^n)}$$

que é o lado esquerdo de (3.1), o que termina a prova de (ii).

Podemos observar que, além de prova para versão finita de (3.1), temos possibilidade de aplicar valores diferentes para t (o que vai ser feito no capítulo seguinte durante a discussão do aspecto combinatório dessa identidade). É bem conhecido que todas as provas das identidades do tipo Rogers-Ramanujan são complexas. Aqui, toda dificuldade é conjeturar a forma bosônica. As provas dessas conjeturas, além de serem bastante trabalhosas (veja Teorema 3.1) e exige muitas manipulações algébricas.

Portanto, usando este método, temos duas vantagens:

a) A demonstração para a versão finita das identidades fica relativamente simples (mas trabalhosa),o que por sua vez fornece prova da identidade original.

b) A possibilidade de explorar a natureza combinatorial das identidades.

Capítulo 4

Números de Fibonacci e partições

Neste capítulo apresentamos algumas propriedades combinatórias de (3.3) e estudamos uma outra identidade da lista de Slater (Slater[29]). Esses resultados já foram publicados em (Santos&Ivković[21]).

4.1 Uma família de polinômios relacionada à seqüência de Fibonacci

Começamos com algumas observações sobre a natureza combinatorial de $P_N(q)$ dado em (3.7). Sabendo que $P_N(q)$ é o coeficiente de t^N em (3.3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+n}}{(1-t)(tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_{n+1}}$$

e considerando que $n^2+n = 2+4+\cdots+2n$ podemos ver que o coeficiente de t^N em

$$\frac{t^n q^{n^2+n}}{(tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_{n+1}}$$

é a função geradora para as partições em exatamente N partes, onde todo par menor do que ou igual à maior parte aparece pelo menos uma vez. Por causa do fator $(1-t)$ no denominador provamos o seguinte:

Teorema 4.1: $P_N(q)$ é a função geradora para os partições em no máximo N partes onde todo par menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez.

Para ver o ligação entre a família dos polinômios $P_N(q)$ e os números de Fibonacci, fazemos $q = 1$ em (3.7), obtendo

$$P_0(1) = 1; \; P_1(1) = 3$$

$$P_n(1) = 3P_{n-1}(1) - P_{n-2}(1)$$

Para a seqüencia de Fibonacci F_n temos $F_2 = 1; \; F_4 = 3$ e

$$F_{2n+2} = 3F_{2n} - F_{2n-2}$$

de onde podemos concluir:

$$C_n(1) = P_n(1) = F_{2n+2}$$

Dessas considerações provamos:

Teorema 4.2: O número total de partições em no máximo N partes onde todo par menor do que ou igual à maior parte aparece pelo menos uma vez é igual F_{2N+2}.

A família dada por (3.7) tem também uma propriedade interessante em $q = -1$. Temos:

$$P_0(-1) = 1; \; P_1(-1) = 1$$

$$P_n(-1) = P_{n-1}(-1) + P_{n-2}(-1)$$

o que significa que para $q = -1$ temos todos os números de Fibonacci i.e. $P_n(-1) = F_{n+1}$. Para ver o que está ocorrendo no sentido combinatório em $q = -1$ precisamos observar que quando mudamos q por $-q$ em (3.3) o único termo que muda é $(tq; q^2)_{n+1}$ e agora o coeficiente de t^N vai ser o número de partições como explicado no Teorema 4.2 com um número par de partes ímpares menos o número de partições onde o número de partes ímpares é ímpar. Formalizamos isso no seguinte teorema:

Teorema 4.3 O número de partições em no máximo N partes onde todo par menor do que ou igual à maior parte aparece pelo menos uma vez e com número par de partes ímpares, menos o número destas com um número ímpar de partes ímpares, é igual F_{N+1}.

Na tabela (4.1) apresentamos, para alguns valores de n, os resultados provados nos teoremas 4.1, 4.2 e 4.3. Na primeira coluna temos n, na segunda partições descritas no teorema 4.3 com um número par de partes ímpares e na terceira coluna aquelas com um número ímpar de partes ímpares. Na quarta coluna F_{2n+2} -número total de partições nas colunas 2 e 3 e na quinta coluna a diferença entre os números de partições na segunda e terceira colunas -F_{n+1}.

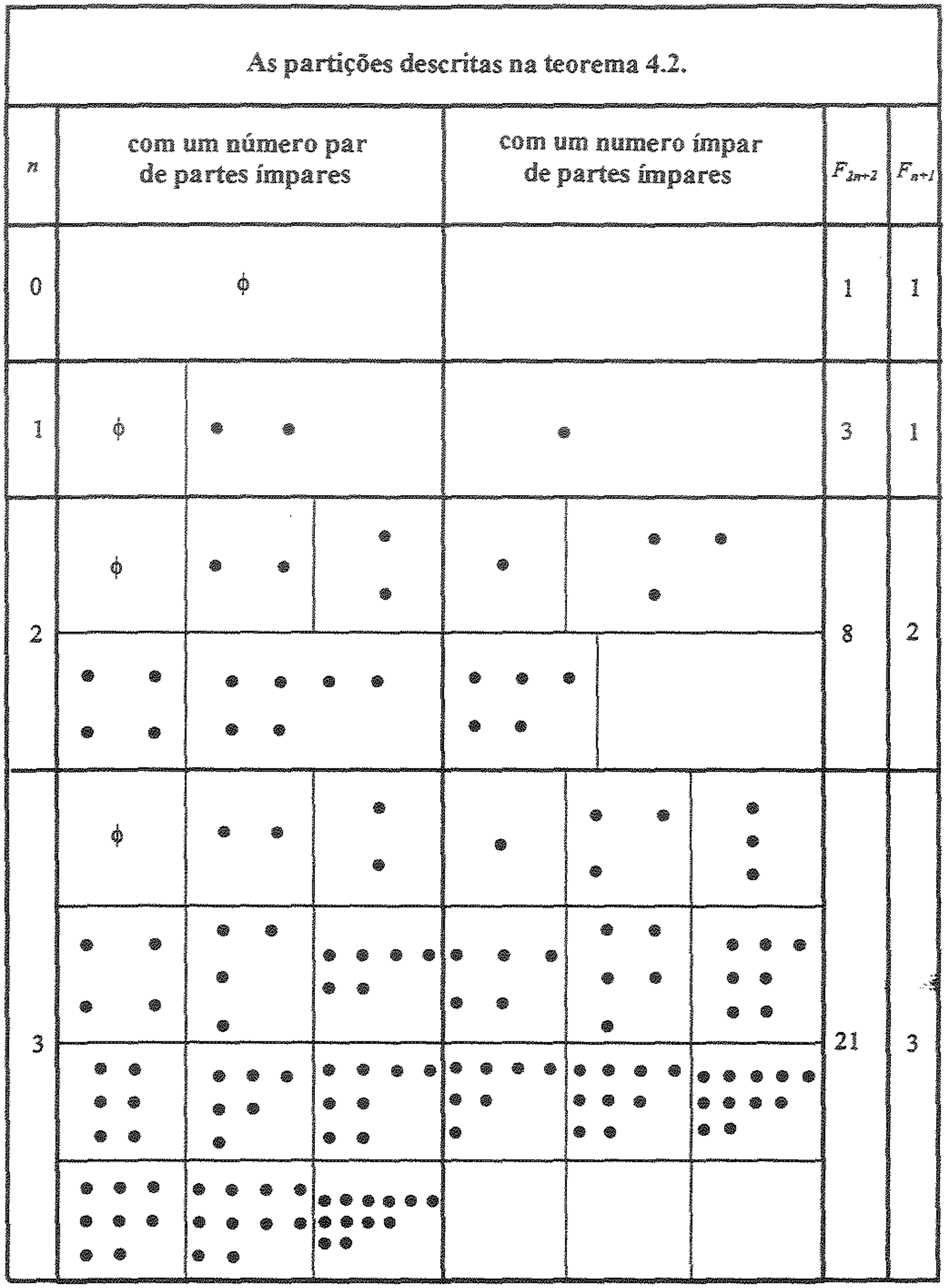
As partições descritas na teorema 4.2.
n
com um número par de partes ímpares
com um numero ímpar de partes ímpares
F_{2n+2}
F_{n+1}
0
ϕ
1
1
1
ϕ
3
1
2
ϕ
8
2
3
ϕ
21
3

Tabela 4.1

4.2 Segunda família de polinômios relacionada à seqüência de Fibonacci

Agora consideramos a função de duas variáveis dada em Santos [20], relacionada à identidade 99 de Slater (Slater [29]):

$$f_{99}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n} \tag{4.1}$$

Desta equação pode-se obter a seguinte equação funcional:

$$(1-t)(1-tq)f_{99}(q,t) = 1 - tq + tq^2 f_{99}(q,tq^2)$$

da qual obtemos

$$\begin{aligned} T_0(q) &= 1;\ T_1(q) = 1+q^2 \\ T_n(q) &= (1+q+q^{2n})T_{n-1}(q) - qT_{n-2}(q) \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $T_n(q)$ é o coeficiente de t^N em (4.1) i.e.

$$f_{99}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(q)t^N \tag{4.3}$$

Em (Santos[20]) encontramos a seguinte conjectura para uma fórmula fechada de (4.2):

$$B_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+1} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

A prova dessa conjetura é dada no teorema seguinte.

Teorema 4.4. A família $T_n(q)$ dada em (4.2) e igual $B_n(q)$ dado em (4.4).

Prova. Considerando que $B_0(q) = 1$ e $B_1(q) = 1 + q^2$ nós precisamos provar $B_n(q) = (1 + q + q^{2n})B_{n-1}(q) - qB_{n-2}(q)$:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+1} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-5j-1 \end{bmatrix}$$

$$= (1+q+q^{2n}) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} \right)$$

$$-q \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+1} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-3 \end{bmatrix} \right). \tag{4.5}$$

Aplicamos (2.11) às duas primeiras somas, temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+7j+n+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-1 \end{bmatrix}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+1} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+13j+n+2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-5j-2 \end{bmatrix}.$$

Agora aplicamos (2.12) em cada uma destas somas para obter:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-3j} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j \end{bmatrix}$$

$$+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+7j+n+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j+2n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-1 \end{bmatrix}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+3j+n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-1 \end{bmatrix}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+13j+n+2} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-3 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+2n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}.$$

Substituindo isto em (4.5), obtemos, após simplicações

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-3j+n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+7j+n+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+3j+n} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+13j+n+3} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-3 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+2} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} \qquad (4.6) \\
&- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j+1} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+2} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aplicando (2.11) nas primeiras duas somas do lado direito da ultima expressão, temos para esse lado:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j+1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+7j+n+1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} \\
&- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+13j+n+1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-3 \end{bmatrix} \\
&- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j+1} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+2} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Usando (2.12) às primeira e terceira somas, depois de cancelamento, temos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-3j+n} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+7j+n+1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} \\
&- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+3j+n} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+13j+2+n} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aplicando (2.11) a todas as somas a esquerda de (4.6) e depois de cancelamentos com correspondentes somas do lado direto temos:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-3j+n} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j+2n-1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+12j+2n+2} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-3 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+3j+n} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+2n} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+18j+2n+4} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-4 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-3j+n} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-1 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+3j+n} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-2 \end{bmatrix}$$

Usando (2.12) na primeira e quarta somas a esquerda temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-8j+2n} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j+2n-1} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-1 \end{bmatrix}$$

$$+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+12j+2n+2} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-3 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-2j+2n-1} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-1 \end{bmatrix}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+2n} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+18j+5} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-4 \end{bmatrix} = 0$$

Trocando j por $j-1$ na ultima soma e usando (2.10) esta soma cancela-se com a terceira.

Trocando j por $-j$ na quarta soma, usando (2.10) e subtraindo essa soma da segunda em (4.4) temos finalmente:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-8j+2n} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2-3j+3n-2} \begin{bmatrix} 2n-3 \\ n-5j-1 \end{bmatrix}$$

$$- \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+2n} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-5j-2 \end{bmatrix} = 0$$

Para ver que este expressão é, de fato, identicamente zero aplicamos (2.11) às primeiras duas somas, trocamos j por $-j$ e usamos (2.10) o que completa a prova.

Considerando que $T_N(q)$ é o coeficiente de t^N em:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{n^2+n}}{(1-t)(tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_n}$$

e observando que $n^2+n = 2+4+\cdots+2n$ podemos ver que coeficiente de t^N em

$$\frac{t^n q^{n^2+n}}{(tq^2;q^2)_n(tq;q^2)_n}$$

é a função geradora para as partições em exatamente N partes onde a maior parte é par e todo par menor do que a maior parte aparece pelo menos uma vez. Considerando o fator $(1-t)$ no denominador nós provamos o seguinte teorema:

Teorema 4.5. $T_n(q)$ é a função geradora para partições em no máximo N partes onde a maior parte é par e todo par menor do que a maior parte aparece pelo menos uma vez.

Fazendo $q = 1$ em (4.2) temos

$$T_0(1) = 1;\ T_1(1) = 2$$

$$T_n(1) = 3T_{n-1}(1) - T_{n-2}(1)$$

Mas para F_n vale:

$$F_1 = 1;\ F_3 = 2$$

$$F_{2n+1} = 3F_{2n-1} - F_{2n-3}$$

de onde podemos concluir:

$$B_n(1) = T_n(1) = F_{2n+1}$$

o que nós permite concluir o seguinte resultado:

Theorem 4.6. O número total de partições em no máximo N partes onde a maior parte é par e todo par, menor do que a maior parte aparece pelo menos uma vez é igual a F_{2n+1}.

Para a família (4.2) também temos em $q = -1$ todos os números de Fibonacci F_n, $n \geq 2$.

$$T_0(-1) = 1;\ T_1(-1) = 2$$

$$T_n(-1) = T_{n-1}(-1) + T_{n-2}(-1)$$

i.e., $T_n(-1) = F_{n+2}$, $n \geq 0$.

Fazendo a mesma observação feita para a primeira família de polinômios em $q = -1$ temos o seguinte resultado:

Teorema 4.7. O número total de partições em no máximo N partes onde a maior parte é par e todo par menor do que a maior parte aparece pelo menos uma vez e onde o número de partes ímpares é par menos o número dessas com um número ímpar de partes ímpares é igual F_{N+2}.

Na tabela (4.2) apresentamos, para alguns valores de n todos os resultados provados nesta seção . Na primeira coluna temos n, na segunda as partições descritas no teorema 4.4 com um número par de partes ímpares e na terceira coluna aquelas com número ímpar de partes ímpares. Na quarta coluna temos F_{2n+1}, o número total de partições nas colunas 2 e 3 e na quinta coluna a diferença entre os valores da segunda e da terceira colunas -F_{n+2}.

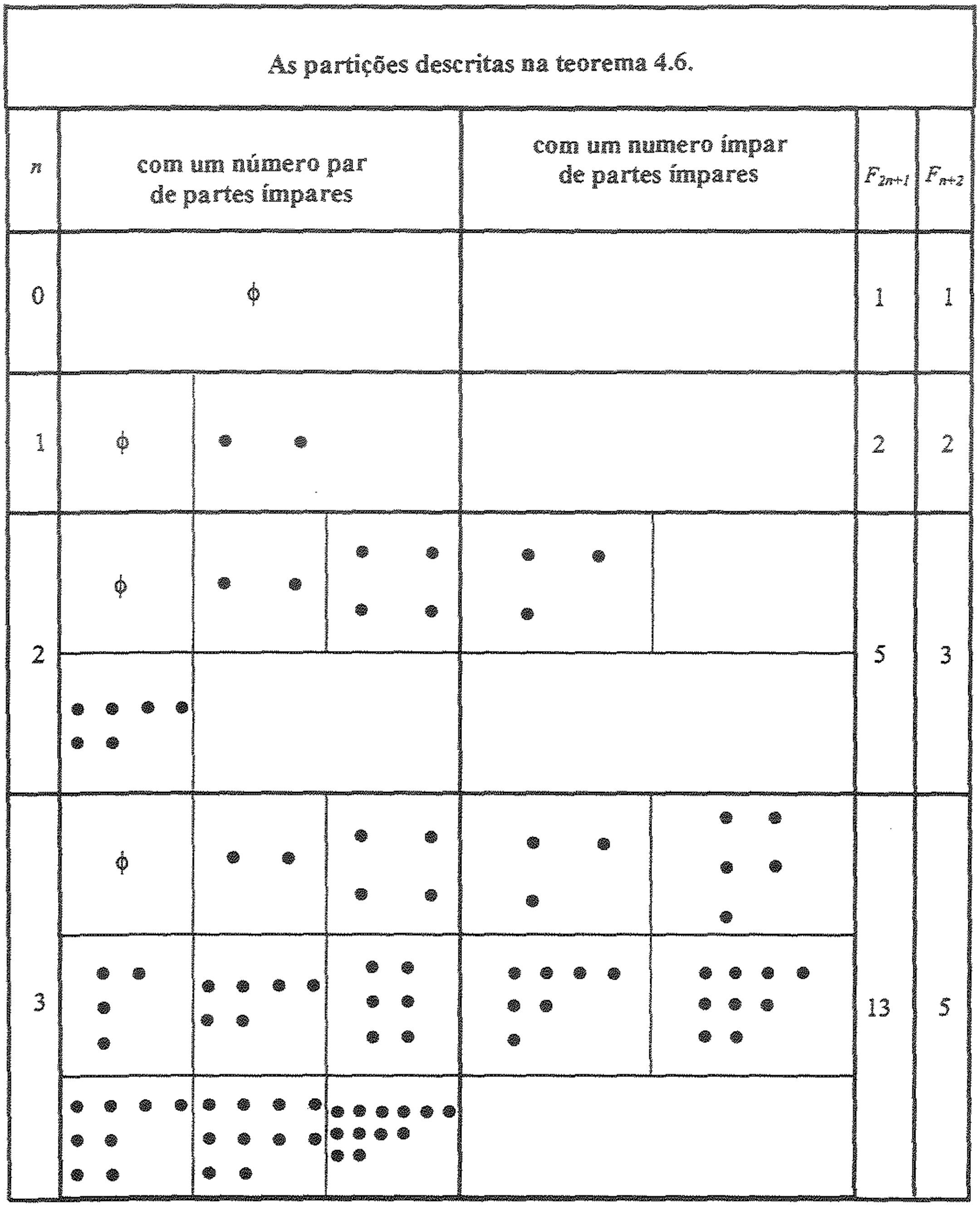
As partições descritas na teorema 4.6.
n
com um número par de partes ímpares
com um numero ímpar de partes ímpares
F_{2n+1}
F_{n+2}
0
ϕ
1
1
1
ϕ
2
2
2
ϕ
ϕ
5
3
3
ϕ
13
5

Tabela 4.2

4.3 Fórmula para F_n

Esse capítulo tem título "Números de Fibonacci e partições "e estamos até aqui falando sobre famílias de polinômios conectados com números de Fibonacci.Vamos juntar os resultados e formalizar a conexão.

Usando o fato de que os polinômios gaussianos dados em (2.8) são q-análogos dos coeficientes binomiais, i.e.:

$$\lim_{q\to 1}\left[\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right] = \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right),$$

podemos calcular limites quando q se aproxima 1 em (3.8) e (2.11) para obter:

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1} C_n(q) &= \lim_{q\to 1}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+4j}\left[\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j \end{array}\right] - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+14j+3}\left[\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j-2 \end{array}\right]\right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j-2 \end{array}\right)\right\} = C_n(1)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1} B_n(q) &= \lim_{q\to 1}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+2j}\left[\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j \end{array}\right] - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{15j^2+8j+1}\left[\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j-1 \end{array}\right]\right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j-1 \end{array}\right)\right\} = B_n(1)\end{aligned}$$

Como já observamos

$$C_n(1) = F_{2n+2} \qquad \text{and} \qquad B_n(1) = F_{2n+1}$$

de onde:

$$F_{2n+2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j-2 \end{array}\right)\right\} \tag{4.7}$$

e

$$F_{2n+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} 2n+1 \\ n-5j-1 \end{array}\right)\right\} \tag{4.8}$$

4.4 Caminhos reticulados e Números de Fibonacci

Nesta seção apresentamos uma forma de relacionar números de Fibonacci a caminhos reticulados usando resultados provados em seções anteriores.

Em Narayana [19], lema 4A encontra-se a seguinte fórmula

$$|L(m,n;t,s)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\binom{m+n}{m-k(t+s)} - \binom{m+n}{n+k(t+s)+t} \right] \tag{4.9}$$

Para o número total dos caminhos reticulados da origem até (m,n) sem tocar as retas $y = x - t$ e $y = x + s$, onde o caminho reticulado é uma trajetoria formada de passos para cima ou para direita.

Considerando que podemos escrever (4.7) e (4.8) como

$$F_{2n+2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\binom{n+(n+1)}{n-j(2+3)} - \binom{n+(n+1)}{n+1+j(2+3)+2} \right] \tag{4.10}$$

$$F_{2n+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\binom{n+(n+1)}{n-j(1+4)} - \binom{n+(n+1)}{(n+1)+j(1+4)+1} \right] \tag{4.11}$$

podemos concluir que seguinte teorema é valido:

Teorema 4.7. F_{2n+i} é o número de caminhos reticulados de origem até $(n, n+1)$ tais que não tocam as retas $y = x - i$ e $y = x + 5 - i$, onde $i = 1, 2$.

Capítulo 5

Uma identidade relacionada à partições planas

Consideramos a função de duas variáveis associada à identidade número 50 da lista de Slater (Slater [29]),

$$f_{50}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}(tq;q^2)_{n+1}} \tag{5.1}$$

temos, então:

$$(1-t)(1-tq)f_{50}(q,t) = 1 + (tq^3 + t^2q^4)f_{50}(q,tq^2) \tag{5.2}$$

Escrevendo $f_{50}(q,t)$ em forma $\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n$ para (5.2) temos

$$P_n = (1+q+q^{2n+1})P_{n-1} - (q-q^{2n})P_{n-2} \tag{5.3}$$

e também:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = 1+q+q^3; \quad P_2 = 1+q+q^2+q^3+2q^4+q^5+q^6+q^8 \tag{5.4}$$

Em (Santos [20]) J.P.Santos conjeturou uma fórmula explícita para a família dos polinômios que satisfazem essa recorrência:

$$C_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1+6j \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Provaremos aqui essa conjetura.

Teorema 5.1 *A família $P_n(q)$ dada em (5.3) e igual $C_n(q)$ dado em (5.5).*

Prova: Temos que provar o seguinte:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} \begin{bmatrix} 2n+2 \\ n-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} \begin{bmatrix} 2n+2 \\ n-1+6j \end{bmatrix} =$$

$$(1+q+q^{2n+1}) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2+6j \end{bmatrix} \right)$$

$$-(q-q^{2n}) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-3+6j \end{bmatrix} \right). \quad (5.6)$$

Usando (2.12) nas duas somas a esquerda temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-6j-1 \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-6j \end{bmatrix} -$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2+6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+1+n} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-1+6j \end{bmatrix} =$$

$$(1+q+q^{2n+1}) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} \begin{bmatrix} 2n \\ n-1-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2+6j \end{bmatrix} \right)$$

$$-(q-q^{2n}) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-3+6j \end{bmatrix} \right). \quad (5.7)$$

Agora usamos (2.11) na primeira e terceira soma na esquerda. Depois do cancelamento, temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2} \begin{bmatrix} 2n \\ n-2-6j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-6j \end{bmatrix} -$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}\begin{bmatrix} 2n \\ n-3-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+1+n}\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-1+6j \end{bmatrix} =$$

$$(q+q^{2n+1})\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}\begin{bmatrix} 2n \\ n-1-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}\begin{bmatrix} 2n \\ n-2+6j \end{bmatrix}\right)$$

$$-(q-q^{2n})\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-3+6j \end{bmatrix}\right). \tag{5.8}$$

Aplicamos (2.11) na segunda e quarta soma na esquerda. Depois dos cancelamentos temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}\begin{bmatrix} 2n \\ n-2-6j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n}\begin{bmatrix} 2n \\ n-6j \end{bmatrix} -$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}\begin{bmatrix} 2n \\ n-3-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+1+n}\begin{bmatrix} 2n \\ n-1+6j \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+1}\begin{bmatrix} 2n \\ n-1-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+3}\begin{bmatrix} 2n \\ n-2+6j \end{bmatrix}$$

$$-(q-q^{2n})\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-3+6j \end{bmatrix}\right). \tag{5.9}$$

Depois de aplicação de (2.12) na segunda e quarta soma a esquerda, esse lado fica:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}\begin{bmatrix} 2n \\ n-2-6j \end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+2j+n}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-6j-1 \end{bmatrix} +$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}\begin{bmatrix} 2n \\ n-3+6j \end{bmatrix} -$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-10j+1+n}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-2+6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-4j+2n}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-1+6j \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

A terceira e a sexta somas se cancelam por (2.10).

Agora vamos trabalhar no lado direto. Depois da aplicação de (2.12) na primeira e segunda soma e cancelamento de somas idênticas nos dois lados temos a equação inteira:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}\begin{bmatrix}2n\\n-2-6j\end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}\begin{bmatrix}2n\\n-3+6j\end{bmatrix} =$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+1}\begin{bmatrix}2n-1\\n-2-6j\end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+3}\begin{bmatrix}2n-1\\n-3+6j\end{bmatrix}$$
$$-(q-q^{2n})\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j}\begin{bmatrix}2n-2\\n-2-6j\end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2}\begin{bmatrix}2n-2\\n-3+6j\end{bmatrix}\right). \quad (5.11)$$

Aplicamos (2.11) nas primeiras duas somas a direita. Depois de cancelar somas idênticas com sinais diferentes tem-se neste lado:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}\begin{bmatrix}2n\\n-2-6j\end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}\begin{bmatrix}2n\\n-3+6j\end{bmatrix} =$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}\begin{bmatrix}2n-2\\n-3-6j\end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}\begin{bmatrix}2n-2\\n-4+6j\end{bmatrix} +$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}\begin{bmatrix}2n-2\\n-2-6j\end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2+2n}\begin{bmatrix}2n-2\\n-3+6j\end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Aplicamos novamente (2.11) às duas somas a esquerda.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}\begin{bmatrix}2n-1\\n-2-6j\end{bmatrix} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+20j+2n+4}\begin{bmatrix}2n-1\\n-3-6j\end{bmatrix} -$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}\begin{bmatrix}2n-1\\n-3+6j\end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-28j+8+2n}\begin{bmatrix}2n-1\\n-4+6j\end{bmatrix} =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+14j+n+2}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-3-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-22j+5+n}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-4+6j \end{bmatrix} +$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+8j+2n}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-2-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-16j+2+2n}\begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-3+6j \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

A primeira e a terceira soma à direita são iguais à primeira soma a esquerda por (2.12). Também por (2.12) a segunda e a quarta somas a direita são iguais a segunda soma da esquerda. Então, ficamos com a expressão:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2+20j+2n+4}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-3-6j \end{bmatrix} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{24j^2-28j+8+2n}\begin{bmatrix} 2n-1 \\ n-4+6j \end{bmatrix}. \tag{5.14}$$

Mas, depois da aplicação de (2.10) e a troca j por $i+1$ podemos ver que isso é identicamente igual a zero.

5.1 Interpretação Combinatória

Com a prova do seção anterior temos o "terreno preparado" para obter uma interpretação combinatória para a expressão (5.1). Vamos achar uma interpretação em termos de partições coloridas (duas cores). Partições coloridas não diferem muito das partições definidas em (2.1). Neste último caso algumas partes são "coloridas"i.e. marcados de tal forma que podemos distinguir alguns subconjuntos do conjunto das partes.

Vamos juntar os produtos no denominador. Por enquanto vamos deixar $(-tq;q^2)_n$ de lado, temos então:

$$\frac{t^n q^{n^2+2n}}{(t;q)_{2n+2}} \tag{5.15}$$

como n^2+2n pode ser escrita como $3+5+\ldots+(2n+1)$, podemos ver a parte (5.15) de (5.1) como a função geradora para partições onde a maior parte é ímpar e todas as partes ímpares maiores do que 1 aparecem ao menos uma vez. A estas chamaremos partes verdes.

A expressão $(-tq;q^2)_n$ obviamente resulta em partições com partes ímpares diferentes. Vamos denominá-los de partes amarelas. Nota-se que a maior parte aqui é menor do que a maior parte verde.

Lembrando de (5.3) que dá a recorrência dentro da família dos polinômios P_i, podemos trocar q por 1 e (5.3) fica fica:

$$P_0(1) = 1; \quad P_1(1) = 3 \quad P_n(1) = 3P_{n-1}(1) \tag{5.16}$$

No final temos:

Teorema 5.2 *O número total de partições em no máximo N partes e duas cores onde: a maior parte verde é ímpar e todos os partes verdes ímpares maiores do que 1 aparecem pelo menos uma vez; partes amarelos são ímpares, diferentes e a maior parte amarela e menor do que a maior parte verde é igual 3^N.*

Vale mencionar que não existe uma única forma para interpretar (5.1) e funções similares. Para nós parece ser esta a interpretação mais simples para (5.1).

Apesar disso é fácil ver que podemos ordenar as partes verdes e as amarelas do Teorema 5.2. tal que temos uma interpretação combinatória em termos de partições planas (com duas linhas).

Definição 5.1 (Partições planas) *Uma partição planar de n é dada por*

$$n = \sum_{i_1 \dots i_r} n_{i_1 i_2} \quad onde \quad n_{i_1 i_2} \geq n_{j_1 j_2} \tag{5.17}$$

quando $i_1 \leq j_1$ e $i_2 \leq j_2$ lexicograficamente (todos $n_{i_1 i_2}$ inteiros positivos).

Em nosso caso a primeira linha seria formada de partes verdes e segunda de partes amarelas. Como todos os ímpares menores do que a maior parte e maiores do que 1 aparecem como as partes verdes, as partes amarelas são ímpares e diferentes e a maior parte amarela e menor do que o maior parte verde, é claro que condições de definição são satisfeitas.

Partições planas têm aplicações na teoria de funções simétricas, teoria de invariantes, e muitos problemas combinatório. No caso em que vale a desigualdade estrita nas colunas de partição , partições planais são equivalentes a *Young tableaux*. Para mais detalhes uma referência é (Andrews[1]).

Capítulo 6

Generalizações polinomiais da seqüência de Pell

6.1 Introdução

Neste capítulo consideramos as identidades 36 e 34 de (Slater [28]), respectivamente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{8n-3})(1-q^{8n-5})(1-q^{8n}) \tag{6.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_n q^{n^2+2n}}{(q^2;q^2)_n} = \frac{(-q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{8n-1})(1-q^{8n-7})(1-q^{8n}) \tag{6.2}$$

Em (Santos [20]), Santos, usando estas duas identidades, encontrou generalizações polinomiais para a seqüencia de Pell, incluindo fórmulas explicitas para as famílias em termos de q-análogos de coeficientes trinomiais.

Aqui vamos introduzir a segunda variável, t, de um modo diferente.

Começamos com o lado esquerdo de (6.1) e definimos

$$f(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}} \tag{6.3}$$

É fácil ver que

$$\begin{aligned}
f(q,t) &= \frac{1}{1-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}} \\
&= \frac{1}{1-t} + \frac{(1+tq)}{(1-t)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-tq^3;q^2)_{n-1} t^n q^{n^2}}{(tq^2;q^2)_n} \\
&= \frac{1}{1-t} + \frac{(1+tq)}{1-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq^3;q^2)_n t^{n+1} q^{n^2+2n+1}}{(tq^2;q^2)_{n+1}} \\
&= \frac{1}{1-t} + \frac{(1+tq)}{1-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq^2;q^2)_n (tq^2)^n q^{n^2}}{(tq^2;q^2)_{n+1}} \\
&= \frac{1}{1-t} + \frac{(1+tq)tq}{(1-t)} f(q;tq^2)
\end{aligned}$$

o que implica:

$$(1-t)f(q,t) = 1 + (1+tq)tqf(q,tq^2). \tag{6.4}$$

Esta equação funcional será usada na seção 2 para obter uma generalização polinomial para a seqüência de Pell e uma interpretação combinatória para esta seqüência.

Os números de Pell 1, 2, 5, 12,... definidos por $a_0 = 1$; $a_1 = 2$; $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ são os denominadores da seqüência dos números racionais:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots \tag{6.5}$$

que são os convergentes da fração contínua que representa $\sqrt{2}$.

Na seção 3 exibimos uma nova fórmula para os números de Pell em termos de coeficientes trinomiais provada usando-se a fórmula explícita da generalização polinomial dos números de Pell dada na seção 2.

Na seção 4 temos uma outra generalização polinomial com interpretação combinatória correspondente e uma nova fórmula para a seqüência de Pell.

Na seção 5 apresentamos duas fórmulas relacionadas com a seqüência de Pell.

6.2 Generalização polinomial para a seqüência de Pell

Podemos ver de (6.2), que

$$f(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2}}{(t;q^2)_{n+1}}$$

e temos a equação funcional:

$$(1-t)f(q,t)=1+(1+tq)tqf(q,tq^2).$$

Sabendo que o coeficiente de t^n na expansão de (6.2) é um polinômio em q, temos:

$$f(q,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(q)t^n. \tag{6.6}$$

podemos substituir isso em (6.4) para obter:

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(q)t^n=1+(1+tq)tq\sum_{n=0}^{\infty}P_n(q)t^nq^{2n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(q)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(q)t^{n+1}=1+\sum_{n=0}^{\infty}P_n(q)t^{n+1}q^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}P_n(q)t^{n+2}q^{2n+2}$$

de onde temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(q)t^n-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}(q)t^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}t^nq^{2n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}P_{n-2}t^nq^{2n-2}.$$

Agora é fácil ver, comparando os coeficientes com mesma potência de t, que

$$\begin{aligned} P_0(q)&=1\\ P_1(q)&=1+q\\ P_n(q)&=(1+q^{2n-1})P_{n-1}(q)+q^{2n-2}P_{n-2}\end{aligned} \tag{6.7}$$

Esta família de polinômios pode ser interpretada combinatorialmente se nós observarmos que (6.2) pode ser escrita na forma seguinte:

$$f(q,t) = \frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+tq)(1+tq^3)\dots(1+tq^{2n-1})t^n q^{1+3+5+\dots+2n-1}}{(1-tq^2)(1-tq^4)\dots(1-tq^{2n})}$$

de onde temos que nesta soma o coeficiente de $t^N q^M$ é o número total de partições de M em exatamente N partes onde todo ímpar menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez e no máximo duas vezes.

Considerando o fator $\dfrac{1}{(1-t)}$ nós acabamos de provar seguinte teorema:

Teorema 6.1. $P_n(q)$ é a função geradora para partições em no máximo n partes onde todo ímpar menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez e no máximo duas vezes.

Para ver a relação dessa família de polinômios e a seqüência de Pell fazemos $q = 1$ em (6.7). Temos:

$$\begin{aligned} P_0(1) &= 1 \\ P_1(1) &= 2 \\ P_n(1) &= 2P_{n-1}(1) + P_{n-2}(1) \end{aligned} \tag{6.8}$$

a seqüência de Pell dada no começo.

Dessas observações nós temos a seguinte interpretação combinatória para a seqüência de Pell que nós vamos formular como o teorema.

Teorema 6.2. O número total de partições em no máximo n partes onde todo ímpar menor do que ou igual a maior parte aparece pelo menos uma vez e no máximo duas vezes é igual ao número de Pell $P_n(1)$.

6.3 Fórmula explícita para uma generalização polinomial da seqüência de Pell

Usando a fórmula (6.20) de (Santos[20]) foi possível achar uma conjetura para uma fórmula explicita para a família de polinômios dada em (6.7). Nesta seção nós vamos provar a conjetura:

$$C_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j} U(n, 8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+3} U(n, 3-8j) \tag{6.9}$$

onde $U(n, A) = U(n, A, q)$.

Para mostrar que esta conjetura é correta nós precisamos mostrar que (6.9) satisfaz a relação de recorrência definida em (6.7).

Teorema 6.3. A fórmula $C_n(q)$ dada em (6.9) satisfaz as condições iniciais e a relação de recorrência dadas em (6.7).

Prova. Considerando que $C_0(q) = 1$ e $C_1(q) = 1 + q$ precisamos mostrar que

$$C_n(q) = (1 + q^{2n-1})C_{n-1}(q) + q^{2n-2}C_{n-2}(q).$$

Substituindo a expressão para $C_n(q)$ dada em (6.9) temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j} U(n, 8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+3} U(n, 3-8j) \\
&= (1 + q^{2n-1}) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j} U(n-1, 8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+3} U(n-1, 3-8j) \right) \\
&+ q^{2n-2} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j} U(n-2, 8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+3} U(n-2, 3-8j) \right).
\end{aligned}$$

Aplicando (2.28) ao lado esquerdo e usando (2.27), depois de algumas simplificações temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-6j+n}T_1(n-1,8j-1)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+10j+1+n}T_1(n-1,8j+2)$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-6j+n}T_1(n-1,2-8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-22j+7+n}T_1(n-1,5-8j)$$
$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j-2+2n}T_0(n-2,8j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j-2+2n}T_0(n-1,8j+1)$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+1+2n}T_0(n-2,3-8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+1+2n}T_0(n-2,4-8j)$$

Usando, agora, (2.24) em todas as somas do lado esquerdo obtemos a seguinte expressão para lado esquerdo:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-6j+n}T_1(n-2,8j-1)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j-2+2n}T_0(n-2,8j)$$
$$+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+2n}T_0(n-2,8j-2)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+10j+1+n}T_1(n-2,8j+2)$$
$$+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+18j+2n+2}T_0(n-2,8j+3)+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j+2n-2}T_0(n-2,8j+1)$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-6j+n}T_1(n-2,2-8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+2n+1}T_0(n-2,3-8j)$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j+2n-3}T_0(n-2,1-8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-22j+7+n}T_1(n-2,5-8j)$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-30j+2n+11}T_0(n-2,6-8j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+2n+1}T_0(n-2,4-8j)$$

Trocando j por $j+1$ nas últimas duas somas, depois de cancelamentos com as correspondentes somas no lado direito temos:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-6j+n}T_1(n-2,8j-1) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+2n}T_0(n-2,8j-2)$$
$$+\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+10j+1+n}T_1(n-2,8j+2) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+18j+2n+2}T_0(n-2,8j+3)$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-6j+n}T_1(n-2,2-8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j+2n-3}T_0(n-2,1-8j)$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+10j+1+n}T_1(n-2,-3-8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j-3+2n}T_0(n-2,-2-8j).$$

Usando (2.26) com $m=n-2, A=1-8j$ temos:

$$T_1(n-2,1-8j) - q^{n-2-1+8j}T_0(n-2,1-8j) - T_1(n-2,2-8j)$$
$$+q^{n-2+1-8j+1}T_0(n-2,2-8j) = 0$$

Considerando que $T_1(n-2,1-8j) = T_1(n-2,8j-1)$ por (2.31) temos que a primeira, segunda, quinta e sexta somas acima são identicamente zero.

A terceira, quarta, sétima e oitava soma juntas são também identicamente zero por (2.26) e (2.30). Isto completa a prova.

Sabendo que $P_n(1)$ é a seqüência de Pell, que pode ser visto em (6.8), podemos obter uma fórmula explícita para essa seqüência usando a formula (6.9).

$$P_n(1) = \lim_{q\to 1} C_n(q) =$$
$$\lim_{q\to 1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+2j}U(n,8j) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-14j+3}U(n,3-8j)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lim_{q\to 1}(T_0(n,8j,q) + T_0(n,8j+1,q) -$$

$$T_0(n,3-8j,q) - T_0(n,4-8j,q))$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\binom{n}{8j}_2 + \binom{n}{8j+1}_2 - \binom{n}{3-8j}_2 - \binom{n}{4-8j}_2 \right]$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\binom{n+1}{8j+1}_2 - \binom{n+1}{8j+3}_2 \right]$$

onde foi usado que $T_0(m,A,q)$ é um q-análogo dos coeficientes trinomiais,

$$\lim_{q\to 1} T_0(m,A,q) = \binom{m}{A}_2.$$

6.4 A segunda generalização polinomial para a seqüência de Pell

Começamos considerando a função $f_{34}(q,t)$ associada à equação 34 de (Slater[28]) dada em (6.2)

$$f_{34}(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}}. \tag{6.10}$$

Usando os mesmos passos usados para obter (6.4) podemos obter a equação funcional:

$$(1-t)f_{34}(q,t) = 1 + (1+tq)tq^3 f_{34}(q,tq^2) \tag{6.11}$$

Trocando $f_{34}(q,t)$ por

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n(q)t^n$$

em (6.10) podemos obter

$$\begin{aligned} D_0(q) &= 1; \\ D_1(q) &= 1 + q^3 \\ D_n(q) &= (1 + q^{2n+1})D_{n-1}(q) + q^{2n}D_{n-2}(q) \end{aligned} \tag{6.12}$$

Para achar a interpretação combinatória para essa família de polinômios podemos escrever (6.10) na seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tq;q^2)_n t^n q^{n^2+2n}}{(t;q^2)_{n+1}} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+tq)(1+tq^3)\dots(1+tq^{2n+1})t^n q^{(2+1)+(4+1)\dots(2n-2+1)+(2n+1)}}{(1-t)(1-tq^2)(q-tq^4)\dots(1-tq^{2n})}$$

de onde podemos ver que nessa soma o coeficiente de $t^N q^M$ é o número total de partições de M em exatamente N partes onde a maior parte é ímpar, maior do que ou igual a 3, aparecendo somente uma vez, e todo ímpar menor do que a maior parte e maior do que ou igual a 3 aparece como partes pelo menos uma vez e no máximo duas vezes.

Considerando o fator $1/(1-t)$ para $q = 1$ temos

$$\begin{aligned} D_0(1) &= 1 \\ D_1(1) &= 2 \\ D_n(1) &= 2D_{n-1}(1) + D_{n-2}(1) \end{aligned} \tag{6.13}$$

é a seqüência de Pell. Então, provamos o seguinte:

Teorema 6.4. O número total de partições em no máximo n partes onde a maior parte é ímpar, maior do que ou igual a 3, aparecendo somente uma vez, e todo ímpar menor do que a maior parte e maior do que ou igual a 3 aparece como parte pelo menos uma vez e no máximo duas vezes é igual ao número de Pell $D_n(1)$.

Foi também possível achar uma forma explícita em termos de coeficientes q-trinomiais para a família dos polinômios (6.12).

Provamos que $D_{n-1}(q)$ é igual a:

$$C_{34}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2+6j}U(n, 8j+1) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{16j^2-10j+1}U(n, -8j+2) \tag{6.14}$$

Então temos a seguinte fórmula para os números de Pell:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\binom{n}{8j+1}_2 + \binom{n}{8j+2}_2 - \binom{n}{-8j+2}_2 - \binom{n}{-8j+3}_2\right]\\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\binom{n}{8j+1}_2 - \binom{n}{8j+3}_2\right]\end{aligned} \tag{6.15}$$

Não citamos a prova para $C_{34}(n)$ dada em (6.14) porque essa prova é muito parecida com uma dada para o teorema 6.3.

Essa fórmula também foi provada em (Sills[23]) usando-se uma identidade de Lebesgue.

A mesma expressão obtida no teorema 6.2. e no teorema 6.4 para duas classes de partições diferentes foi uma motivação para procurarmos uma bijeção entre as duas classes. Não foi difícil encontrar essa bijeção :

Na classe de partições descrita no teorema 6.4 todos os ímpares maiores do que 3 aparecem pelo menos uma vez (e no máximo duas vezes); podemos subtrair 2 de uma cópia de cada destas partes ímpares para obter uma partição de classe descrita no teorema 6.2. É claro que é possível inverter esse procedimento, observe-se que a maior parte obtida é necessariamente ímpar (veja 6.2).

Ilustramos isso na Tabela 6.1. onde a primeira coluna consiste de partições definidas no Teorema 6.2, e a segunda coluna consiste de partições definidas no Teorema 6.4.

Teorema 6.2	**Teorema 6.4**
•	• • •
• •	• • • •
• • •	• • • • •
• • • •	• • • • • • • •
• • • •	• • • • • •
• • • • •	• • • • • • •
• • • • •	• • • • • • • • •
• • • • • •	• • • • • • • • • •
• • • • • • •	• • • • • • • • • • •
• • • • • • • •	• • • • • • • • • • • •
• • • • • • • • •	• • • • • • • • • • • • • • •

Tabela 6.1

Observamos que para obter as partições na primeira coluna, tomamos $n = 3$ em (6.7) chegando a:

$$P_3(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9$$

e as partições em coluna 2 nós obtivemos tomando $n = 3$ em (6.12):

$$D_3(q) = 1 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9 + q^{10} + q^{11} + q^{12} + q^{15}$$

6.5 Duas fórmulas importantes relacionadas com a seqüência de Pell

Sabendo a fórmula (6.15) foi possível encontrar e provar, por indução , as seguintes fórmulas: a primeira para a seqüência (S_n) das somas parciais dos números de Pell e a segunda para os numeradores (N_m) da seqüência dos números racionais dada em (6.1).

$$S_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\binom{n}{8j+2}_2 - \binom{n}{8j+4}_2 \right] \tag{6.16}$$

onde

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 3, \quad S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2} + 1; \quad n \geq 3 \tag{6.17}$$

e

$$N_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\binom{n}{8j}_2 - \binom{n}{8j+4}_2 \right] \tag{6.18}$$

onde

$$N_1 = 1, \quad N_2 = 3, \quad N_n = 2N_{n-1} + N_{n-2}; \quad n \geq 3 \tag{6.19}$$

Capítulo 7

Considerações Finais

Durante a redação deste trabalho mais perguntas surgiram do que respostas foram dadas.

Durante os estudos dos resultados citados aqui, e alguns outros, ainda em rascunho, nós pudemos obter algumas ideias sobre a conexão da forma explicita para lado bosônico de uma identidade e a recorrência que esta família de polinômios satisfaz. Talvez exista uma maneira direita de conjeturar forma explicita usando só relação de recorrência.

Provas das conjeturas de Santos [20] são longas e bastantes trabalhosas. Recentes trabalhos de Wilf, Zeilberger, Petkovšek ([26], [30]) na automatização de provas de identidades combinatórias, mais precisamente, generalizações para somas múltiplas e q-análogos destas generalizações, num contexto mais geral possível, prometem automatizar estas provas. Por enquanto nada sobre esta possibilidade foi publicado. Será que existem outros problemas alem do computacional?

Que acontece se nós omitirmos a condição (iii) ($f(q,t)$ satisfaz uma equação não-homogênea de primeira ordem em q) no Método de Equações de q-Diferença? Se a possibilidade de uma relação de ordem maior é permitida o calculo com a relação de recorrência fica muito mais complicado, mas os métodos de Wilf e Zeiberger podem ajudar aqui também. Este tipo de identidades é conhecido como Identidades Polinomiais de Bressoud (veja Sills[24]).

Como nos parece existem ainda importantes questões a serem respondidas.

Bibliografia

[1] G.E. Andrews, "*The Theory of Partitions*", *Encyclopedia of Math. and Its Applications* (G.-C. Rota, ed.), Addison-Wesley, Reading, 1976, vol. 2 (Reprinted: Cambridge University Press, Cambridge, 1984).

[2] G.E. Andrews, "*Combinatorics and Ramanujan's "lost" notebook*", London, 1985, pp. 1-23.

[3] G.E. Andrews,"*Multiple series Rogers-Ramanujan type identities*", Pacific J. Math. 114 (1984), 267-283.

[4] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, "*Special Functions*", Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[5] G. E. Andrews, "*The fifth and seventh order mock theta functions*", Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1986) 113-134.

[6] G.E. Andrews, "*q-Series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics and computer algebra*", Regional conferece series in mathematics, n°66- American Mathematical Society, Rode Island, 1986.

[7] G. E. Andrews,*Number Theory*, Dover Publications, Inc. New York, 1994.

[8] G. E. Andrews,J.P.O. Santos,"*Rogers-Ramanujan Type Identities for Partitions with Attached Odd Parts*", The Ramanujan Jurnal, vol. 1, p. 91-99 (1997).

[9] R. Baxter, "*Rogers-Ramanujan identities in the hard hexagon model*", Journal of Statistical Physics 26, 1981.

[10] A. Berkovich, B. McCoy, " *Generalizations of the Andrews-Bressoud identites for the* $N = 1$ *superconformal model* $SM(2, 4\nu)$", Mathematical and Computer Modeling 26, 1997.

[11] F.Garvan, "*A Maple q-series package*", URL: www.math.ufl.edu/ frank/qmaple/qmaple.html

[12] G. Gasper, M. Rahman, "*Basic Hypergeometric Series*", Encyclopedia of Mathematics and it's Applications v.35, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[13] G. Golub, C.F. Van Loan "*Matrix Computations*", The Johns Hopkins University Press, 1994.

[14] R.E.Grim "*The Autobiography of L. Pisiano*", Fibonacci Quarterly. Vol.11, 1973.

[15] M. Ivković, M. Sokić "*Jedan dokaz egzistencije Ojlerove konstante*", Primatijada'97, Lepenski vir, 1997.

[16] A.F.Horadam "*Eight hundred years young*", The Australian Mathematics Teacher, Vol.31 1965.

[17] Mondek, P. "*Identidades de Slater: Novas identidades e interpretações combinatórias*", Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 1997.

[18] P. Ribenboim "*The New Book of Prime Numbers Records*", Springer-Verlag, 1995.

[19] T.V. Narayana, "*Lattice path combinatorics with statistical applications*", Mathematical Expositions nº23, University of Toronto Press, 1976.

[20] J.P.O. Santos, "*Computer Algebra and Identities of the Rogers-Ramanujan Type*", Ph.D. thesis, Pennsylvania State University, 1991.

[21] J.P.O. Santos and M. Ivković, "*Fibonacci Numbers and Partitions*", Fibonacci Quarterly/to appear.

[22] J.P.O. Santos and M. Ivković, "*Polynomial Generalizations of the Pell sequence and the Fibonacci sequence*", The Ramanujan Journal/submitted.

[23] J.P.O.Santos, A.V. Sills, "*q-Pell Sequences and Two Identities of V.S Lebesgue*", *Discrete Mathematics*/to appear.

[24] A.V. Sills,"*Computer Assisted Explorations of Rogers-Ramanujan Type Identities*", Ph.D. thesis, University of Kantacky, 2002.

[25] P. Paule, " *The Concept of Beiley Chains*", preprint.

[26] M.Petkovšek, H. Wilf, D.Zeilberger,"*A=B*"
URL:www.math.edu/ zeiberg, 1997.

[27] E.D. Rainville,"*Special Functions*", Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

[28] L.J. Slater, "*A new proof of Rogers' transformations of infinite series*", *Proc. London Math. Soc.* **53**(2)(1951), 460-475.

[29] L.J. Slater, "*Further identities of the Rogers-Ramanujan type*",*Proc. London Math. Soc.* **54**(2)(1952), 147-167.

[30] D. Zeilberger, T. Amdeberhan, "*DODGSON: A Maple package for conjecturing and proving determinant identities by Dodson´s condesation method*",
URL:www.math.edu/ zeiberg