CORRESPONDÊNCIAS E APLICAÇÕES À TEORIA DO EQUILÍBRIO GERAL ECONÔMICO.

JOSÉ HELENO FARO

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

IMECC – UNICAMP
março de 2002

CORRESPONDÊNCIAS E APLICAÇÕES À TEORIA DO EQUILÍBRIO GERAL ECONÔMICO.

JOSÉ HELENO FARO

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por José Heleno Faro e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora.

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar (orientador)
Prof. Dr. Marcos de Barros Lisboa
Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino

Campinas, 12 de março de 2002.

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar
(orientador)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Faro, José Heleno

F238c Correspondências e aplicações à teoria do equilíbrio geral econômico / José Heleno Faro -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Marko Antonio Rojas Medar

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Economia matemática. 2. Análise. 3. Equilíbrio econômico. I. Rojas Medar, Marko Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 12 de março de 2002 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

Prof (a). Dr (a). MARCOS DE BARROS LISBOA

Prof (a). Dr (a). PAULO RÉGIS CARON RUFFINO

"Mas horas há que marcam fundo...
Feitas, em cada um de nós,
De eternidades de segundo,
Cuja saudade extingue a voz."
Manuel Bandeira

Agradecimentos

A minha mãe, Maria Helena, que sempre demonstrou todo o amor que um filho pode querer;
A meu tio, Lúcio, pelo constante incentivo;
A minha noiva, Alessandra, por tudo;
Ao professor Marko, pela orientação sempre confiante, pelos conhecimentos que me transmitiu e, principalmente, pela amizade;
A todos os amigos que conheci nesta cidade; em especial a todos àqueles deste instituto que me ajudaram de alguma forma.
Aos professores Marcos Lisboa e Paulo Ruffino, membros da banca examidora, que fizeram sugestões de grande valor para a redação final desta dissertação. Em especial, gostaria de agradecer ao professor Marcos Lisboa pelas conversas sobre teoria econômica, que em muito me serviram para elucidar alguns pontos.
Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

A análise matemática apresentou, principalmente a partir da década de 60, um considerável avanço no que se refere à teoria de correspondências ou multifunções. Muitas das contribuições nesta área são devidas a economistas matemáticos, tais como Robert Aumann, Wener Wildenbrand, Gerad Debreu, dentre outros, que motivados por problemas teóricos da ciência econômica, mais especificamente à Teoria do Equilíbrio Geral e Teoria de Jogos, foram responsáveis por vários resultados que, ou generalizavam alguns fatos obtidos na análise de funções clássicas, ou mesmo apresentavam novos conceitos e resultados. O objetivo principal deste trabalho é o de, num primeiro momento, sistematizar a teoria básica de correspondências: passando por sua definição, a conceituação de convergência, o estudo da continuidade até mensurabilidade e integração. Por fim, vamos dar algumas das aplicações deste escopo à Teoria do Equilíbrio Geral com finitos bens; mais especificamente, o modelo de Equilíbrio Geral com um contínuo de agentes e puras trocas e ao modelo com produção e agentes mensuráveis, conhecido como *coalition production economy.*

Abstract

The mathematical analysis has presented, specially after the 60's, a considerable development in what is referred to the theory of correspondences or multifunctions. Many of the contributions in this area are due to mathematic-economists, such as Robert Aumann, Wener Hildenbrand, Gerard Debreu, amongst others, that motivated by theoretical problems of economic science, more specifically the Theory of General Equilibrium and the Game Theory, were reponsable for many results that have, either generalized facts obtained in the analysis of classical functions, or even presented new concepts and results. The main goal of this work is to, in a fist stage, synthesize the basic theory of correspondences; passing by its definition, the concept of convergence, the study of continuity up to measurability and integration. In the end we give some aplications of this framework to the theory of General Equilibrium with finite goods; more specifically, to the model of General Equilibrium with a continuum of agents and pure exchange and the model with production and measurable agents, known as *coalition production economy.*

Índice

Capítulo 1

Teoria de Correspondências.

1.1 Apresentação.

Nesta primeira parte do trabalho, temos como objetivo, introduzir os elementos básicos da teoria de correspondências. Tendo em vista que uma correspondência, de um conjunto X a um conjunto Y, é uma aplicação que associa a cada elemento de X um subconjunto não-vazio de Y, temos a necessidade de realizar um estudo sobre os espaços de subconjunto de Y para, então, podermos especificar alguns conceitos de convergência de conjuntos. Como neste trabalho o estudo é desenvolvido para o caso em que $Y = \mathbb{R}^n$, ou de forma um pouco mais geral, para o caso em que Y é um espaço de Polonês (Y é um espaço métrico completo e separável), não estabeleceremos resultados em contextos mais gerais; um tratamento em que admitimos espaços topológicos formados pela coleção de subconjuntos de um espaço topológico original Y é dado em [26]. Como daremos enfase para o caso em que $Y = \mathbb{R}^n$, vamos apresentar alguns tipos de espaços de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, a saber: a família dos subconjutos compactos de $\mathbb{R}^n$ e seu subespaço dos compactos e convexos, o qual apresenta relevância ao se trabalhar com correspondências que relacionam elementos em X a subconjuntos não-vazios, compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$. Não obstante, também apresentaremos uma noção de convergência de conjuntos aplicável a qualquer sequência de conjuntos, conhecida por convergência de Kuratowski. Veremos que, quando dotamos o espaço de conjuntos compactos com a métrica de Hausdorff, obtemos um espaço de Polonês. Ainda, apresentaremos uma caracterização da métrica de Hausdorff via função suporte, graças a um resultado devido a Minkowski, o que torna sua operacionalização bem mais cômoda.

Em seguida, daremos os principais resultados relacionados à continuidade e hemicontinuidade superior e inferior para correspondências. Tais resultados são de extrema importância para o estabelecimento dos teoremas de ponto fixo, mais precisamente, o teorema do ponto fixo de Kakutani para correspondência o qual generalizou o teorema do ponto fixo de Brouwer para funções.

A última parte deste primeiro capítulo versa sobre mensurabilidade e integração de correspondências. Iniciaremos esta seção apresentando os conceitos de mensurabilidade e Borel-mensurabilidade para correspondências cujo domínio é um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, além da noção de seleção mensurável e de contextos que garantam sua existência. Daí, vamos definir a integral de Aumann além de tratarmos algumas de suas propriedades, destacando sua convexidade decorrente de um resultado devido a Lyapunov. Ao fim, depois de definirmos uma correspondência contável aditiva, apresentaremos o teorema de Radon-Nikodym.

1.2 Espaços de Conjuntos em $\mathbb{R}^n$.

1.2.1 Os Espaços $K(\mathbb{R}^n)$ e $KC(\mathbb{R}^n)$.

Inicialmente, vamos recapitular alguns resultados e definições básicas:

(a) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado se para toda sequência $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \to x$ tenhamos que $x \in A$.

(b) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é limitado se existe alguma constante $k > 0$ tal que para todo $a \in A$, $d(a, 0) = \|a\| < k$.

(c) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, A é fechado e limitado.

(d) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo quando para todo $a_1, a_2 \in A$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$, tenhamos que $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A$.

(e) A *envolvente convexa* de A é o conjunto:

$$coA = \{\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \,/ a_1, a_2 \in A, \ \lambda \in [0, 1]\}$$

Ou equivalentemente, coA é a intersecção de todos os subconjuntos convexos que contém A; como a intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo[1], então coA é um conjunto convexo. Ainda, é claro que $A \subseteq coA = co(coA)$.

Definamos, então, dois espaços de conjuntos em $\mathbb{R}^n$, a saber, o espaço dos subconjuntos não-vazios e compactos e outro, um espaço próprio deste último, que toma o requerimento adicional de convexidade.

(i) $K(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n / \ A \neq \emptyset, \ A$ é compacto$\}$.

(ii) $KC(\mathbb{R}^n) = \{A \in K(\mathbb{R}^n) / \ A$ é convexo$\}$.

Usando as definições acima podemos provar a seguinte proposição:

Proposição 1 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Então:*

(i) Se A é convexo então $coA = A$.

(ii)Se A é fechado então coA é fechado.

(iii)Se A é compacto então coA é compacto.

Definição 2 *Sejam A, B subconjunto não-vazios de $\mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos a seguinte definição dada por Minkowski:*

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b : a \in A, \, b \in B\} \\ \lambda A &= \{\lambda a : \, a \in A\} \end{aligned}$$

Daí, vemos que $K(\mathbb{R}^n)$ e $KC(\mathbb{R}^n)$ são fechados para estas operações de adição e multiplicação por escalar, ou seja, são espaços vetoriais.

1.2.2 A Função Suporte.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. Definimos a função suporte do conjunto A como sendo:

$$\begin{aligned} \sigma_A \quad &: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ x \quad &\longmapsto \quad \sigma_A(x) = \sup_{a \in A} \langle a, x \rangle \end{aligned}$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$.

Tal função apresenta uma série de propriedades, as quais listamos abaixo:

Teorema 3 *Seja $D(\sigma_A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_A(x) < +\infty\}$ o domínio efetivo de σ_A. Então:*

(i) $D(\sigma_A)$ é um cone convexo com vértice em $0 \in \mathbb{R}^n$.

(ii)$\sigma_A(\lambda x) = \lambda \sigma_A(x)$, $\forall \lambda \geq 0$[1].

[1]Desta propriedade, $\sigma_A(x) = \|x\| \sigma_A(\frac{x}{\|x\|})$, daí é usual definir $\sigma_A : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, em que $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in R^n : \|x\| - 1\}$.

(iii)σ_A é convexa, ou seja:

$$\sigma_A(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\sigma_A(x) + \beta\sigma_A(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \alpha, \beta \geq 0 \text{ tais que } \alpha + \beta = 1$$

(iv) σ_A é uma função semicontínua inferior (s.c.i.)[2] e nunca ocorre que $\sigma_A \equiv +\infty$.

(v) $\sigma_A = \sigma_{\overline{co}A}$, em que $\overline{co}A$ é igual a intercecsão de todos os conjuntos convexos fechados que contém A, ou equivalentemente, $\overline{co}A = \overline{coA}$, em que $\overline{X}$ é o fecho[3] do conjunto X.

Demonstração: (i)Seja $x \in D(\sigma_A)$. Logo $\forall \lambda \geq 0, \sigma_A(\lambda x) = \sup_{a\in A} \langle \lambda a, x\rangle = \lambda \sup_{a\in A} \langle a, x\rangle = \lambda\sigma_A(x) < +\infty$. Assim $\lambda x \in D(\sigma_A)$. Além disso, $\sigma_A(0) = \sup_{a\in A} \langle 0, a\rangle = 0$. Portanto, $D(\sigma_A)$ é um cone com vértice em 0. Sua convexidade, como veremos, será decorrente do item (iii).

(ii) Segue como escólio de (i).

(iii)Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, para todo $\alpha, \beta \geq 0$ tais que $\alpha + \beta = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \sigma_A(\alpha x + \beta y) &= \sup_{a\in A} \langle \alpha x + \beta y, a\rangle = \sup_{a\in A} \{\alpha \langle x, a\rangle + \langle \beta y, a\rangle\} \leq \\ \alpha \sup_{a\in A} \langle x, a\rangle + \beta \sup_{a\in A} \langle y, a\rangle &= \alpha\sigma_A(x) + \beta\sigma_A(y) < +\infty \end{aligned}$$

ou seja, σ_A é convexa sobre $D(\sigma_A)$. Em particular, $\alpha x + \beta y \in D(\sigma_A)$,o que completa (i), isto é, $D(\sigma_A)$ é um cone convexo com vértice em 0.

(iv) Como $\sigma_A(o) = 0$, nunca ocorre que $\sigma_A \equiv +\infty$. A s.c.i. segue do fato de σ_A ser o supremo das formas lineares e contínuas.

(v) Mostremos duas desigualdades:

($\leq$) - Como $A \subseteq \overline{co}A$ segue que:

$$\begin{aligned} \sigma_A(x) &= \sup_{a\in A} \langle a, x\rangle \leq \sup_{a\in \overline{co}A} \langle a, x\rangle = \sigma_{\overline{co}A}(x) \\ &\Rightarrow \sigma_A \leq \sigma_{\overline{co}A} \end{aligned}$$

($\geq$) - Seja $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrário.

Se $\sigma_A(x) = +\infty$, da desigualdade anterior, $\sigma_{\overline{co}A}(x) = +\infty$.

Todavia, se $\sigma_A(x) < +\infty$, façamos $\zeta = \sigma_A(x)$.

[2] Seja E um espaço vetorial normado. Uma função $\zeta : E \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ é dita s.c.i. se $\forall x \in E \ \lim_{y\to x} \inf \zeta(y) \geq \zeta(x)$; em que $\lim_{y\to x} \inf \zeta(y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{y\in B(x,\varepsilon)} \zeta(y) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{y\in B(x,\varepsilon)} \zeta(y)$.

[3] O fecho de um conjunto X é definido como: $\overline{X} = \cap\{K \supseteq X : K \text{ é fechado}\}$

Se $z \in coA \Rightarrow \exists a_1 \dots a_m \in A$ e $\alpha_1 \dots \alpha_m \in \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, com $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, tais que $z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$.

Logo, $\langle x, z \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle x, a_i \rangle \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \zeta = \zeta = \sigma_A(x)$. Ou seja, $\forall z \in coA$, $\langle x, z \rangle \leq \sigma_A(x)$.

Assim, $\sigma_{coA}(x) \leq \sigma_A(x)$.

Se agora $z \in \overline{co}A = \overline{coA}$, então $\exists (z_p) \subseteq coA$ tal que $z_p \to z$. Portanto, $\forall p \in \mathbb{N}$ temos que $\langle x, z_p \rangle \leq \sigma_A(x)$. Como se, dado um $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, definirmos a função:

$$\begin{aligned} \vartheta_x \quad &: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ z \quad &\longmapsto \quad \langle x, z \rangle \end{aligned}$$

ϑ_x é contínua, podemos fazer:

$$\langle x, z \rangle = \lim_{p \to \infty} \langle x, z_p \rangle \leq \sigma_A(x), \ \forall z \in \overline{co}A$$

Portanto, $\sigma_{\overline{co}A}(x) = \sup_{a \in \overline{co}A} \langle x, a \rangle \leq \sigma_A(x)$. Isto é, $\sigma_{\overline{co}A} \leq \sigma_A$, o que encerra a demonstração. □

Observação 4 *Também podemos mostrar que se $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa, positivamente homogênea e s.c.i. Então σ é a função suporte do seguinte conjunto fechado e convexo:*

$$\Omega = \bigcap_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, y \rangle \leq \sigma(\xi)\}$$

a demonstração deste fato pode ser encontrada em [30].

Proposição 5 *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ e σ_A sua função suporte. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ com $\sigma_A(v) < \infty$. Então, se $v_k = k^{-1}v + (1 - k^{-1})u$, $(v_k \to u)$, com $k \in \{1, 2, ...\}$, temos que $\sigma_A(u) = \lim_{k \to \infty} \sigma_A(v_k)$.*

Demonstração: Em [14] temos a demonstração utilizando o fato de σ_A ser s.c.i. □

Teorema 6 *Seja $A \in KC(\mathbb{R}^n)$ e $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ fixado. Então:*

(i) Existe $x_u \in A$ tal que $\sigma_A(u) = \langle u, x_u \rangle$;

(ii)O hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_A(u) = \langle u, x \rangle\}$ suporta A em x_u.

(iii) $d(0, H) = \sigma_A(\frac{u}{\|u\|})$.

Demonstração: (i) Temos que a aplicação $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle u, x \rangle \in \mathbb{R}$, por uma das propriedades do produto interno, é linear além de contínua. Ainda, A é um conjunto compacto, logo tal aplicação atinge um máximo em algum ponto $x_u \in A$, isto é, $\langle u, x_u \rangle = \max\limits_{x \in A} \langle u, x \rangle = \sup\limits_{x \in A} \langle u, x \rangle = \sigma_A(x)$.

(ii) O hiperplano H limita A já que $\forall x \in A$, $\langle u, x \rangle \leq \sigma_A(x)$. Ainda, $x_u \in H \cap A$, o que implica em H suportar A em x_u.

(iii) Como u é ortogonal a H, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda u \in H$. Mas daí $\|\lambda u\|$ é a distância de 0 a H. O que nos permite escrever:

$$\sigma_A(\frac{u}{\|u\|}) = \frac{1}{\|u\|}\sigma_A(u) \overset{\lambda u \in H}{=} \frac{1}{\|u\|} \langle \lambda u, u \rangle = |\lambda| \frac{\|u\|^2}{\|u\|} = \|\lambda u\| = d(0, H)$$

$\square$

Vejamos alguns exemplos, quando particularizamos o conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Exemplo: Seja $A = B[0,1] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Portanto para todo $x \neq 0$,podemos escrever:

$$\sigma_{B[0,1]}(x) = \sup_{a \in B[0,1]} \langle x, a \rangle = \left\langle x, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \frac{1}{\|x\|} \|x\|^2 = \|x\|$$

Se $x = o$, $\sigma_A(x) = 0 = \|x\|$. Logo, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \sigma_{B[0,1]}(x) = \|x\|$.

Em outras palavras, a função suporte da bola unitária n-dimensional corresponde a função norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo: Seja $A = \{(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+ : \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\}$. Então sua função suporte σ_A é dada por: $\sigma_A(x) = \sup\limits_{a \in \sigma_A} \langle x, a \rangle = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$, em que $x = (x_1 \ldots x_n)$. De fato, seja $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$

$$\sigma_A(x) = \sup_{a \in A} \langle x, a \rangle = \sup\{\sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_i : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} = x_j = \lambda$$

que ocorre na j-ésima coordenada. Tomando $a \in A$ tal que $a = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, em que o número 1 ocorre na j-ésima coordenada, temos:

$$\langle x, a \rangle = x_j = \lambda.$$

Portanto, $\sigma_A(x) = \lambda$. $\square$

Exemplo: Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ ($W \neq \{0\}$) e $W^\perp$ seu complemento ortogonal, ou seja, $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$. Então:

$$\sigma_W(x) = \begin{cases} 0, \; x \in W^\perp \\ +\infty, \; x \in W \end{cases}$$

Com efeito,

Se $x \in W^\perp \Rightarrow \langle x, \kappa \rangle = 0, \forall \kappa \in W$, logo $\sigma_W(x) = \sup\limits_{a \in W} \langle x, a \rangle = 0$. Pois, sem perda de generalidade, se $\sup\limits_{a \in W} \langle x, a \rangle > 0$, teríamos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a\varepsilon \in W^\perp$ tal que $[\varepsilon \in (0, \sigma_W(x))]$ $0 < \sigma_W(x) - \varepsilon < \langle x, a\varepsilon \rangle < \sigma_W(x)$, absurdo, pois $a\varepsilon \in W^\perp \Rightarrow \langle x, a\varepsilon \rangle = 0$. Portanto $\sigma_W(x) = 0$.

Se $x \in W \Rightarrow \sigma_W(x) = \sup\limits_{a \in W} \langle x, a \rangle \geq \langle x, x \rangle = \|x\|^2$. Como W é subespaço, $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall y \in W$, $\lambda x + \beta y \in W$. Portanto $\sigma_W(x) = \sup\limits_{a \in W} \langle x, a \rangle \geq \langle x, \lambda x + \beta y \rangle = \lambda \langle x, x \rangle + \beta \langle x, y \rangle \neq 0$. Daí, como $\forall r \in \mathbb{R}_+$, $\exists \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \exists y \in W$ tal que $r = \lambda \langle x, x \rangle + \beta \langle x, y \rangle$, $\sigma_W(x) \geq r, \forall r \in \mathbb{R}_+$. Logo, $\sigma_W(x) = +\infty$. $\square$

Exemplo: Seja $A = \{a \in \mathbb{R}^n : |a_i| \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$ então $\sigma_A(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, em que $x = (x_1, ..., x_n)$. Com efeito, $\forall a \in A$, $|a_i| \leq 1$, $\forall i \in \{1, ...n\}$. Assim, $\sigma_A(x) = \sup\limits_{a \in A} \langle x, a \rangle = \sup\limits_{a \in A} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i$, mas $\max\limits_{a \in A} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1 + ... + 1 = n$. Logo, $\sup\limits_{a \in A} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$. Tomando $a = (-1^{\xi(i)}, -1^{\xi(i)}, ..., -1^{\xi(i)})$, em que $\xi(i) = 0$ se $x_i \geq 0$ e $\xi(i) = 1$ se $x_i < 0$, então $\langle x, a \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.
$\square$

Teorema 7 *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, com A e B não-vazios.*

(i) Se λ, μ são reais positivos, então $\sigma_{\lambda A + \mu B}(x) = \lambda \sigma_A(x) + \mu \sigma_B(x)$.

(ii) Se $A \subseteq B$ então $\sigma_A(x) \leq \sigma_B(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Reciprocamente, se $\forall x \in R^n, \sigma_A(x) \leq \sigma_B(x)$

então $\overline{co}A \subseteq \overline{co}B$. Em particular, se A e B são convexos, fechados e não-vazios então:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \sigma_A(x) \leq \sigma_B(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(iii) Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma família de subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^n$. Então $\sigma_{\bigcup_{i\in I} A_i}(x) = \sup_{i\in I} \sigma_{A_i}(x)$.

Demonstração: (i)Pela definição da função suporte, $\sigma_{\lambda A+\mu B}(x) = \sup_{z\in\lambda A+\mu B} \langle x, z\rangle$, sendo $z \in \lambda A + \mu B$ então $\exists a \in A$ e $\exists b \in B$ tal que $z = \lambda a + \mu b$, assim podemos escrever $\sigma_{\lambda A+\mu B}(x) = \sup_{(a,b)\in A\times B} \{\lambda \langle x, a\rangle + \mu \langle x, b\rangle\} = \lambda \sup_{a\in A} \langle x, a\rangle + \mu \sup_{b\in B} \langle x, b\rangle = \lambda\sigma_A(x) + \mu\sigma_B(x)$ pois λ e μ são reais positivos.

(ii) Como $A \subseteq B$ é imediato que $\sigma_A(x) \leq \sigma_B(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$. Reciprocamente, se $\forall x \in \mathbb{R}^n, \sigma_A(x) \leq \sigma_B(x)$ e, por contradição, existisse um elemento $z \in \overline{co}A$ tal que $z \notin \overline{co}B$. Daí pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma forma linear e contínua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que separa estritamente $\{z\}$, que obviamente é um compacto, e $\overline{co}B$, que é um fechado. Em outras palavras, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que , como $\langle x_0, w\rangle < \langle x_0, z\rangle \ \forall x \in \overline{co}B$, $\sup_{w\in\overline{co}B} \langle x_0, w\rangle < \langle x_0, z\rangle$. Mas $\langle x_0, z\rangle \leq \sup_{w\in\overline{co}A} \langle x_0, w\rangle$ e daí $\sigma_B(x_0) = \sigma_{\overline{co}B}(x_0) < \sigma_{\overline{co}A}(x_0) = \sigma_A(x_0)$, absurdo. Para a última equivalência, segue do que mostramos acima e de que se A é convexo fechado então $A = \overline{co}A$.

(iii) Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma família de subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^n$. Temos que $\forall i \in I$, $A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \sigma_{A_i}(x) \leq \sigma_{\bigcup_{i\in I} A_i}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Inversamente, se $a \in A = \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ tal que $a \in A_{i_0}$. Assim, $\langle x, a\rangle \leq \sup_{\xi\in A_{i_0}} \langle x, \xi\rangle = \sigma_{A_{i_0}}(x) \leq \sup_{i\in I} \sigma_{A_i}(x)$. Logo, $\sup_{a\in\bigcup_{i\in I} A_i} \langle x, a\rangle \leq \sup_{i\in I} \sigma_{A_i}(x)$. O que encerra a demonstração. □

1.2.3 Convergência de Kuratowski.

Definição 8 *Seja (A_p) um sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Seguem as definições abaixo:*

(a) $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto limite de (A_p) se $\forall\, V = B(x, \varepsilon), \exists\, p_0 \in \mathbb{N} / \ \forall p \geq p_0, A_p \cap V \neq \emptyset$.

(b) $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto aderente de (A_p) se $\forall p \in \mathbb{N}$ e $\forall\, V = B(x, \varepsilon)$, $\exists q \geq p$ tal que $A_q \cap V \neq \emptyset$.

(c) $\liminf A_p = \{x \in R^n / \ x$ é um ponto limite de $(A_p)\}$.

(d) $\limsup A_p = \{x \in R^n / \ x$ é um ponto aderente de $(A_p)\}$.

(e) Se $\liminf A_p = \limsup A_p = A$, então dizemos que A é o limite da sequência (A_p), no sentido de Kuratowski. Como notação, utilizamos:

$$\lim A_p = A \text{ ou } A_p \xrightarrow{K} A.$$

Vejamos, primeiramente, um exemplo em que uma sequência de conjuntos em $\mathbb{R}^n$ não converge no sentido de Kuratowski.

Exemplo: Em $\mathbb{R}$, seja

$$A_p = \begin{cases} [1/p, +\infty), \; p\,\acute{e}\,par. \\ (-\infty, -1/p], \; p\,\acute{e}\,impar. \end{cases}$$

temos que $\liminf A_p = \{0\}$, isto é, 0 é o único ponto limite de (A_p). Todavia, $\limsup A_p = \mathbb{R}$, ou seja, todo número real é ponto aderente de (A_p). Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, tomando $q = \min\{n \in \mathbb{N} : 1/n < \varepsilon \text{ e } n > p\}$, temos que $A_q \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Assim (A_p) não converge no sentido de Kuratowsky. □

Teorema 9 *Seja (A_p) uma sequência de conjuntos em $\mathbb{R}^n$, então:*

$$(\limsup A_p)^c \subset \liminf A_p^{c}\,[4]$$

Demonstração: Seja x_0 um elemento que não pertença a $\limsup A_p$. Logo existe uma vizinhança V_0 de x_0 e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m \geq n_0$, $A_m \cap V_0 = \emptyset$. Agora, seja V uma vizinhança arbitrária de x_0. Então, para todo $m \geq n_0$, $x_0 \in A_m^c \cap V$. Assim, $A_m^c \cap V$ é certamente não-vazio e, logo, $x_0 \in \liminf A_p^c$. □

Exemplo: Para vermos que não podemos ter, em geral, a igualdade de conjuntos no teorema anterior, segue o seguinte exemplo em $\mathbb{R}$:

$$A_p = \begin{cases} [1/p, +\infty), \; p\,\acute{e}\,par \\ (-\infty, -1/p], \; p\,\acute{e}\,\acute{i}mpar \end{cases}$$

temos do exemplo anterior que $\limsup A_p = \mathbb{R}$, isto é, $(\limsup A_p)^c = \emptyset$, mas $\liminf A_p^c =$

[4] $A^c = \mathbb{R}^n \backslash A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}$ *denota o complementar do conjunto A em $\mathbb{R}^n$.*

$\{0\}$. □

Lema 10 *(Monotonicidade dos limites de Kuratowski) Sejam* (A_p) *e* (B_p) *sequências de conjuntos em* $\mathbb{R}^n$ *tais que* $A_p \subset B_p$, $\forall p \in \mathbb{N}$, *então:*

(i)$\limsup A_p \subset \limsup B_p$.

(ii)$\liminf A_p \subset \liminf B_p$

Demonstração: (i)Queremos mostrar que, sob a hipótese de que $A_p \subset B_p$, $\forall p \in \mathbb{N}$, todo ponto aderente de (A_p) é ponto aderente de (B_p). Com efeito, se x é ponto aderente de (A_p) então, dados quaisquer $\varepsilon > 0$ e $p \in \mathbb{N}$, é possível encontrar $q \in \mathbb{N}$ tal que $A_q \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, mas $B_q \cap B(x, \varepsilon) \supset A_q \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, isto é, x também é ponto aderente de (B_p).

(ii)Seja x um ponto limite de A_p, ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall p \geq p_0$, $A_p \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Mas $\forall p \geq p_0$, $B_p \cap B(x, \varepsilon) \supset A_p \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. O que mostra que x é um ponto limite de (B_p). □

Teorema 11 *Sejam* (A_p) *e* (B_p) *sequências de conjuntos em* $\mathbb{R}^n$, *então:*

(i) $\limsup(A_p \cup B_p) = \limsup A_p \cup \limsup B_p$.

(ii) $\liminf(A_p \cap B_p) \subset \liminf A_p \cap \liminf B_p$.

Demonstração: (i) Pelo lema anterior $\limsup A_p \subset \limsup(A_p \cup B_p)$ e $\limsup B_p \subset \limsup(A_p \cup B_p)$ e daí, $\limsup A_p \cup \limsup B_p \subset \limsup(A_p \cup B_p)$. Mostremos a inclusão inversa, seja $x_0 \in \limsup(A_p \cup B_p)$ e suponha que x_0 não pertença a $\limsup A_p$. Então existem uma vizinhança V_0 e um natural n_0 tal que para todo $m \geq n_0$, $A_m \cap V_0 = \emptyset$. Agora seja V um vizinhança qualquer de x_0 e seja $n \in \mathbb{N}$. Então existe uma vizinhança $U \subset V \cap V_0$ e um número natural n_1, com $n_1 \geq \max\{n_0, n\}$. Agora, por $x_0 \in \limsup(A_p \cup B_p)$, existe um natural $m \geq n_1$ tal que $(A_m \cup B_m) \cap U \neq \emptyset$. Como $m \geq n_0$ e $U \subset V_0$ e $A_m \cap U = \emptyset$, temos que $B_m \cap U \neq \emptyset$. Assim, $B_m \cap V \neq \emptyset$ $\forall m \geq n$ o que implica em $x_0 \in \limsup B_p$.

(ii) Segue imediatamente do lema anterior, item (ii). □

Lema 12 *Seja* (A_p) *uma sequência de conjuntos em* $\mathbb{R}^n$, *então* $\liminf A_n \subset \limsup A_p$.

Demonstração: Das definições, temos que todo ponto limite é um ponto aderente. □

Exemplo: Em $\mathbb{R}^n$, seja $A_p = B(0,p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < p\}, \forall p \in \mathbb{N}$. Se $x \in \mathbb{R}^n$ e V é uma vizinhança qualquer de x, então é claro que $\exists\, p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_p \cap V \neq \emptyset$, $\forall p \geq p_0$. Daí, consequentemente, $\liminf A_p = \mathbb{R}^n$.e como $\lim\inf A_n \subset \lim\sup A_p \Rightarrow \lim\sup A_p = \mathbb{R}^n$, isto é, $\lim A_p = \mathbb{R}^n$. □

Teorema 13 *Sejam (A_p) e (B_p) sequências de conjuntos em $\mathbb{R}^n$, então:*

(i)$\lim\inf(A_p \cap B_p) \supset \lim\inf A_p \cap \lim\inf B_p$

(ii)$\lim\inf(A_p \cup B_p) \subset \lim\inf A_p \cup \lim\inf B_p \cup [\lim\sup A_p \cap \lim\sup B_p]$.

Demonstração: (i) Segue da monotonicidade do conjunto de pontos limites $\lim\inf$.

(ii)Como para qualquer sequência de conjuntos (A_p) de $\mathbb{R}^n$, vale que $\lim\inf A_p \subset \lim\sup A_p$, vemos que:

$\lim\inf A_p \cup \lim\inf B_p \cup [\lim\sup A_p \cap \lim\sup B_p] = [\lim\inf A_p \cap \lim\inf B_p] \cup \lim\inf A_p \cup \lim\inf B_p \cup [\lim\sup A_p \cap \lim\sup B_p] = [\lim\inf A_p \cap \lim\inf B_p] \cup [\lim\inf A_p \cap \lim\sup A_p] \cup [\lim\sup B_p \cap \lim\inf B_p] \cup [\lim\sup B_p \cap \lim\sup A_p] = [\lim\inf A_p \cup \lim\sup B_p] \cap [\lim\inf B_p \cup \lim\sup A_p]$. Mas, por simetria[5], é suficiente mostrar que $\lim\inf(A_p \cup B_p) \subset \lim\inf A_p \cup \lim\sup B_p$. Seja $x_0 \in \lim\inf(A_p \cup B_p)$ e suponha que $x_0 \notin \lim\sup B_p$. Então existe uma vizinhança U_0 e algum número natural n_0 tal que, para todo $m \geq n_0$, $B_m \cap U_0 = \emptyset$. Tomemos agora uma vizinhança arbitrária U de x_0 e seja $n \in \mathbb{N}$. Então $U \cap U_0$ é uma vizinhança de x_0. Assim existe algum número natural n_1 tal que, para todo $m \geq n_1, (A_m \cup B_m) \cap (U \cap U_0) \neq \emptyset$. Escolhendo n_2 de maneira que $n_2 \geq \max\{n_0, n_1\}$, podemos concluir que , para todo $m \geq n_2$, $A_m \cap (U \cap U_0) \neq \emptyset$. Ou seja, $x_0 \in \lim\inf A_p$. □

Os teoremas acima implicam em boas propriedades para a operação de união, como são atestadas nos corolários abaixo.

Corolário 14 *(i) Se a sequência (B_p) converge então* $\lim\sup(A_p \cup B_p) = \lim\sup A_p \cup \lim B_p$ *e* $\lim\inf(A_p \cup B_p) = \lim\sup A_p \cup \lim B_p$.

(ii) Se ambas as sequências (A_p) e (B_p) convergem então $(A_p \cup B_p)$ também converge e $\lim(A_p \cup B_p) = \lim A_p \cup \lim B_p$.

[5] Ou seja, demonstrado que $\lim\inf(A_p \cap B_p) \subset \lim\inf A_p \cup \lim\sup B_p$ segue que $\lim\inf(A_p \cap B_p) = \lim\inf(B_p \cap A_p) \subset \lim\inf B_p \cup \lim\sup A_p$.

Demonstração: (i) Como B_p converge, $\limsup B_p = \liminf B_p = \lim B_p$. Assim, segue do teorema 11, que $\limsup(A_p \cup B_p) = \limsup A_p \cup \lim B_p$. Agora pelo teorema 13, $\liminf(A_p \cup B_p) \supset \limsup A_p \cup \lim B_p$ e $\liminf(A_p \cup B_p) \subset (\liminf A_p \cup \lim B_p) \cap (\lim B_p \cup \limsup A_p) = (\liminf A_p \cap \lim B_p) \cup \liminf A_p \cup \lim B_p$

$\cup(\lim B_p \cap \limsup A_p) = \limsup A_p \cup \lim B_p$. Logo, $\liminf(A_p \cup B_p) = \limsup A_p \cup \lim B_p$.

(ii) Segue imediatamente da hipótese de convergência e do teorema 11. □

Corolário 15 *Se a sequência* $(A_p \cup B_p)$ *converge e se* $\limsup A_p \cap \limsup B_p = \emptyset$, *então ambas as sequências* (A_p) *e* (B_p) *convergem.*

Demonstração: Pela hipótese e pelo teorema 11, $\lim(A_p \cup B_p) = \limsup A_p \cup \limsup B_p$. Ainda, pela hipótese e pelo teorema 13, $\lim(A_p \cup B_p) \supset \liminf A_p \cup \liminf B_p$ e $\lim(A_p \cup B_p) \subset \liminf A_p \cup \liminf B_p \cup [\limsup A_p \cap \limsup B_p]$,mas $\limsup A_p \cap \limsup B_p = \emptyset$. Logo, $\limsup A_p \cup \limsup B_p = \liminf A_p \cup \liminf B_p$. Mas pelo lema 12, $\liminf A_p \subset \limsup A_p$, sendo que se esta inclusão é estrita, então $\limsup A_p \cap \liminf B_p \neq \emptyset$, o que contraria a hipótese, logo $\liminf A_p = \limsup A_p$. Analogamente, temos que $\liminf B_p = \limsup B_p$. □

Para a operação de interceção, no entanto, o limite de Kuratowski não apresenta propriedades análogas, como podemos constatar no próximo exemplo.

Exemplo: Seja $A_p = \{-1\} \cup [1 + 1/p, \infty)$ e $B_p = (-\infty, -1 - 1/p\} \cup \{1\}$. Então $\lim A_p = \{-1\} \cup [1, \infty)$ e $\lim B_p = (-\infty, -1 - 1/p\} \cup \{1\}$, o que nos permite concluir que $\lim A_p \cap \lim B_p = \{-1\} \cup \{1\}$, mas para todo $p \in N$, $A_p \cap B_p = \emptyset$ e assim $\lim(A_p \cap B_p) = \emptyset$. □

Os teoremas abaixo estabelecem uma maneira alternativa de se caracterizar os limites de Kuratowski.

Teorema 16 *Se* (A_p) *é um sequência de conjuntos em* $\mathbb{R}^n$, *então* $\limsup A_p = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\overline{\bigcup_{m \geq n} A_m})$.

Demonstração: Pela definição de limite de Kuratowski, $x \in \limsup A_p$ se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para qualquer vizinhança U de x, existir algum $m \geq n$ tal que $A_m \cap U \neq \emptyset$, isto é, se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$, x pertencer ao fecho de $\bigcup_{m \geq n} A_m$, o que demonstra o teorema. $\square$

Teorema 17 *Se (A_p) é um sequência de conjuntos em $\mathbb{R}^n$, então* $\liminf A_p = \bigcap_H (\overline{\bigcup_{m\in H} A_m})$, *em que H denota um subconjunto cofinal*[6] *arbitrário de $\mathbb{N}$ e a intersecção é sobre todos os H.*

Demonstração: Seja $x \in \liminf A_p$. Tomemos U uma vizinhança de x, H um subconjunto cofinal de $\mathbb{N}$ e $p_0 \in \mathbb{N}$ apropriado, logo $\forall p \geq p_0$, $A_p \cap U \neq \emptyset$. Assim existe $m \in H$, com $m \geq p_0$ e $A_m \cap U \neq \emptyset$. Então $x \in \overline{\bigcup_{m\in H} A_m}$. Como isso vale para qualquer subconjunto cofinal H, temos que $\liminf A_p \subset \bigcap_H (\overline{\bigcup_{m\in H} A_m})$

Agora, supondo que $x \notin \liminf A_p$, então existe uma vizinhança U de x tal que, $\forall p \in \mathbb{N}$, podemos escolher $m_p \geq p$ com $A_{m_p} \cap U = \emptyset$. Seja $H_U = \{m_p : p \in \mathbb{N}\}$. Então H_U é um subconjunto cofinal de $\mathbb{N}$ para o qual $U \cap (\bigcup_{m_p \in H_U} A_{m_p}) = \emptyset$ e assim $x \notin (\overline{\bigcup_{m\in H_U} A_m})$.

Logo temos que $\liminf A_p \subset \bigcap_H (\overline{\bigcup_{m\in H} A_m})$ e se $x \notin \liminf A_p$ então $x \notin \bigcap_H (\overline{\bigcup_{m\in H} A_m})$, daí podemos concluir que $\liminf A_p = \bigcap_H (\overline{\bigcup_{m\in H} A_m})$. $\square$

Corolário 18 *Dada uma sequência qualquer (A_p) de conjuntos em $\mathbb{R}^n$, então os conjuntos* $\liminf A_p$ *e* $\limsup A_p$ *são fechados.*

Demonstração: Seguem como consequências imediatas dos teoremas 16 e 17. $\square$

Corolário 19 *Dada uma sequência qualquer (A_p) de conjuntos em $\mathbb{R}^n$, então* $\liminf A_p = \liminf \overline{A}_p$ *e* $\limsup A_p = \limsup \overline{A}_p$.

Demonstração: Segue diretamente dos teoremas 16 e 17, já que, se Δ é qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$, então $(\overline{\bigcup_{m\in\Delta} A_m}) = (\overline{\bigcup_{m\in\Delta} \overline{A}_m})$; isto ocorre porque qualquer conjunto fechado que contém A_p também contém $\overline{A}_p$. $\square$

Corolário 20 *Se (A_p) é uma sequência constante, isto é, se $A_p = A_0$ para todo $p \in N$, então* $\lim A_p = \overline{A}_0$.

[6] *H é um conjunto cofinal de $\mathbb{N}$ se $\forall n \in N, \exists m \in H$ tal que $m > n$.*

Demonstração: Temos que para qualquer subconjunto $\Delta \subset \mathbb{N}$, $(\overline{\bigcup_{m\in\Delta} A_m}) = \overline{A}_0$,e assim $\liminf A_p = \bigcap_{H}(\overline{\bigcup_{m\in H} A_m}) = \overline{A}_0$ e também, $\limsup A_p = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}) = \overline{A}_0$. □

1.2.4 Convergência na Métrica de Hausdorff.

Definamos, agora, uma métrica sob o espaço $K(\mathbb{R}^n)$, conhecida como métrica de Hausdorff:

$$\begin{aligned} H \quad &: \quad K(\mathbb{R}^n) \times K(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A,B) \quad &\longmapsto \quad H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0/\ A \subseteq N(B,\varepsilon) \text{ e } B \subseteq N(A,\varepsilon)\} \end{aligned}$$

em que:

$$\begin{aligned} N(A,\varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R}^n /\ d(x,A) \leq \varepsilon\} \\ d(x,A) &= \inf_{a\varepsilon A} d(x,a) \end{aligned}$$

Equivalentemente, podemos definir a métrica de Hausdorff da seguinte forma:

$$H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\}$$

Daí segue a definição usual de convergência em espaços métricos:

Definição 21 *Dizemos que uma sequência (A_p) de compactos não-vazios converge a um compacto $A \in K(R^n)$, na métrica de Hausdorff, (notação: $A_p \xrightarrow{H} A$) se,*

$$\lim_{p\to\infty} H(A_p, A) = 0$$

Teorema 22 *$(K(\mathbb{R}^n), H)$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Para mostrarmos que $(K(\mathbb{R}^n), H)$ é completo, tomemos uma sequência de Cauchy (A_p) de compactos e não-vazios de $\mathbb{R}^n$. Mostremos que:

(i)$A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}}(\overline{\bigcup_{i\geq p} A_i}) \neq \emptyset$, o que é um conjunto fechado.

(ii)$A_p \xrightarrow{H} A$.

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$. Então, como (A_p) é de Cauchy, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe p_k tal que $p, q \geq p_k$ implica em $H(A_p, A_q) < 2^{-k}\varepsilon$. Seja (r_k) uma sequência estritamente crescente em $\mathbb{N}$ tal que $r_k \geq p_k$,$\forall k$. Seja $x_1 \in A_{r_1}$. Suponhamos, então, que escolhemos $x_1, x_2, ..., x_k$ tais que $x_i \in A_{r_k}$e, ainda, $d(x_i, x_{i-1}) < 2^{-i}\varepsilon$, $\forall i \in \{1, ..., k-1\}$. Então x_{k-1} é escolhido de modo que se verifique $d(x_k, x_{k-1}) < 2^{-(k-1)}\varepsilon$. Observamos que tal x_{k-1} existe, pois: $d(x_k, A_{r_{k-1}}) \leq H(A_{r_k}, A_{r_{k-1}}) \leq 2^{-(k-1)}\varepsilon$. Podemos ver que a sequência (x_k) é de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, logo existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_k \to x$. Ainda, temos que $x \in A$, o que prova (i).

Por outra parte, temos que: $d(x, x_1) = \lim\limits_{k \to \infty} d(x_k, x_1) \leq \lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{i-1}^{k-1} d(x_{i-1}, x_i) \leq \varepsilon$.

Assim, para todo $r_1 \geq p_1$ e para todo $x_1 \in A_1$, podemos construir um $x \in A$ tal que $d(x, x_1) \leq \varepsilon$. Ou seja, $A_{r_1} \subseteq N(A, \varepsilon)$, $\forall r_1 \geq p_1$. Mostremos agora que $A \subseteq N(A_p, \varepsilon), \forall p \geq q$. Com efeito, sabemos que $H(A_p, A_q) < \varepsilon/2$ para todo $p, q \geq p_1$. Se $x \in A$, então $x \in \overline{\bigcup_{p \geq p_1} A_p}$ e, por tanto, existe $q > p_1$ e $y \in A_q$ com $d(x, y) < \varepsilon/2$. Finalmente, se $p > p_1$,temos que $d(x, A_p) \leq d(x, A_q) + H(A_p, A_q) < \varepsilon$. Por tanto, $A \subseteq N(A_p, \varepsilon), \forall p \geq p_1$. Isto mostra que $\lim\limits_{p \to \infty} H(A_p, A) = 0$, o que prova (ii).

Agora, só resta mostrarmos que $A \in K(\mathbb{R}^n)$. Por (i), temos que, A é a intersecção de conjuntos fechados, logo A é um conjunto fechado. Agora, seja $\varepsilon > 0$, então $H(A_p, A) < \varepsilon/2$ para todo $p \geq p_0$. Em particular, temos que $A \subseteq N(A_{p_0}, \varepsilon/2)$. Daí, como A_{p_0}é compacto então este é limitado, logo existe um conjunto finito F tal que $A_{p_0} \subseteq N(F, \varepsilon/2)$, o que implica que $A \subseteq N(F, \varepsilon)$ e, por tanto, A também é limitado. Concluímos que A é um conjunto compacto, o que encerra a demonstração. $\square$

Teorema 23 $(K(\mathbb{R}^n), H)$ *é um espaço métrico separável*[7].

Demonstração: Para a demonstração, vamos usar o fato de que $\mathbb{Q}^n$ é um conjunto denso em $\mathbb{R}^n$. Seja Φ o conjunto de todos os conjuntos finitos da forma $\{x_{i_1}, ..., x_{i_p}\}$, com $x_{i_k} \in \mathbb{Q}^n$. Então é claro que Φ é um subconjunto enumerável de $K(\mathbb{R}^n)$. Agora mostremos que Φ é um subcojunto denso de $K(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, seja $A \in K(\mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$ dado. Como A é um subconjunto compacto, então este é limitado, de modo que existem $y_{i_1}, ..., y_{i_p}$ em $\mathbb{R}^n$ tais que $A \subseteq N(\{x_{i_1}, ..., x_{i_p}\}, \varepsilon/2)$. Mas, pela densidade de $\mathbb{Q}^n$ em $\mathbb{R}^n$, podemos encontrar elementos $x_{i_1}, ..., x_{i_p}$ em $\mathbb{Q}^n$ tais que $d(x_{i_k}, y_{i_k}) \leq \varepsilon/2, \forall k \in \{1, ..., p\}$. Assim fica claro que

[7] *Um espaço X é dito separável se este admite um subconjunto enumerável e denso.*

$A \subseteq N(\{x_{i_1}, ..., x_{i_p}\}, \varepsilon)$.

Por último, podemos supor também que $\{x_{i_1}, ..., x_{i_p}\} \subseteq N(A, \varepsilon)$, pois, caso contrário, deveria existir $x_0 \in \{x_{i_1}, ..., x_{i_p}\}$ tal que $d(x_0, A) > \varepsilon$, o que implicaria em $A \cap B(x_0, \varepsilon) = \emptyset$. Mas, em tal caso, é claro que o conjunto $\{x_{i_1}, ..., x_{i_p}\} \backslash \{x_0\}$ continua sendo finito, possuindo ainda a propriedade de que $A \subseteq N(\{x_{i_1}, ..., x_{i_p}\} \backslash \{x_0\}, \varepsilon)$. Isto mostra que $H(A, \{x_{i_1}, ..., x_{i_p}\}) < \varepsilon$, provando que Φ é um conjunto denso em $K(\mathbb{R}^n)$.

Assim, $(K(\mathbb{R}^n), H)$ é um espaço métrico separável. $\square$

Os Teoremas 22 e 23 indicam, assim, que $(K(\mathbb{R}^n), H)$ é um espaço de Polonês. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo: Seja (x_k) uma sequência de pontos na reta, podemos vê-la como uma sequência de conjuntos unitários em $\mathbb{R}$ ao trabalharmos com $(\{x_k\})$, e ainda, $\lim x_p = x \Leftrightarrow \{x_p\} \xrightarrow{H} \{x\}$. $\square$

Um resultado interessante é que a convergência na métrica de Hausdorff não é equivalente à convergência de Kuratowski em $K(\mathbb{R}^n)$, vejamos o exemplo abaixo, confirmando tal afirmação:

Exemplo: Seja em $\mathbb{R}$ a seguinte sequência de compactos:

$$A_p = \begin{cases} \{0, 1/p\} \text{ se p é par} \\ \{0, p\} \text{ se p é impar} \end{cases}$$

temos que, $\liminf\ A_p = \limsup\ A_p = \{0\}$, ou seja, (A_p) converge no sentido de Kuratowski. Todavia, $H(A_p, \{0\}) \nrightarrow 0$, isto é, (A_p) não converge na métrica de Hausdorff. $\square$

Mas, como dado em [31], sob certa condição sobre a sequência de compactos tomada, temos a equilivalência:

Teorema 24 *Seja (A_p) uma sequência em $K(\mathbb{R}^n)$ e suponha que exista $K \in K(\mathbb{R}^n)$ tal que $A_p \subseteq K, \forall p$. Então*

$$A_p \xrightarrow{K} A \Leftrightarrow A_p \xrightarrow{H} A$$

Vemos, facilmente, que a condição de que exista $K \in K(\mathbb{R}^n)$ tal que $A_p \subseteq K, \forall p$, não ocorre no exemplo anterior. Também dado em [31], temos o seguinte resultado:

Teorema 25 *Seja $X \in K(\mathbb{R}^n)$ e considere o conjunto:*

$$K(X) = \{A \in K(\mathbb{R}^n) : A \subseteq X\}$$

Então $K(X)$ é compacto em $K(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 26 *Algumas das propriedades da métrica de Hausdorff são as seguintes:*

(i)H é positivamente homogênea, isto é, $\forall A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ e $\forall \lambda > 0$ temos que $H(\lambda A, \lambda B) = \lambda H(A, B)$.

(ii)$\forall A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ é verdade que $H(coA, coB) \leq H(A, B)$.

(iii)$\forall A, B, C, D \in K(\mathbb{R}^n)$ temos a desigualdade $H(A + B, C + D) \leq H(A, C) + H(B, D)$.

(iv)A métrica de Hausdorff é invariante por translação sobre $KC(\mathbb{R}^n)$, isto é, $\forall A, B, C \in KC(\mathbb{R}^n)$, temos que $H(A + C, B + C) = H(A, B)$.

Um resultado importante sobre a convergência de sequências de compactos e convexos é o seguinte:

Teorema 27 *$(KC(\mathbb{R}^n), H)$ é um subespaço fechado de $(K(R^n), H)$.*

Demonstração: Seja (A_p) uma sequência de compactos e convexos não-vazios de $\mathbb{R}^n$, tal que $A_p \xrightarrow{H} A \in K(\mathbb{R}^n)$. Então temos que, pela desigualdade triangular, $\forall p \in \mathbb{N}$, $H(A, coA) \leq H(A, A_p) + H(A_p, coA)$. Por outra parte, como (A_p) é uma sequência de compactos e convexos não-vazios de $\mathbb{R}^n$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $H(A_p, coA) = H(coA_p, coA) \leq H(A_p, A)$, ou seja, $H(A, coA) \leq 2H(A_p, A)$, $\forall p \in \mathbb{N}$, como $\lim\limits_{p \to \infty} H(A_p, A) = 0$ então $H(A, coA) = 0$, daí $coA = A$, o que diz que A é convexo, encerrando a demonstração. □

Segue, então, o resultado de compacidade:

Teorema 28 *(Teorema de Seleção de Blaschke): Se $X \in K(\mathbb{R}^n)$ e $(A_p) \subseteq X$ é um sequência em $KC(\mathbb{R}^n)$, então existe uma subsequência convergente em $KC(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Sabemos que se $X \in K(\mathbb{R}^n)$ então o conjunto $K(X) = \{A \in K(\mathbb{R}^n) : A \subseteq X\}$ é compacto. Portanto, $(A_p) \subseteq KC(\mathbb{R}^n)$ possui uma subsequência convergente em $K(X) \subseteq K(\mathbb{R}^n)$. Ainda, como $(KC(\mathbb{R}^n), H)$ é um subespaço fechado de $(K(R^n), H)$, então A

é um subconjunto convexo de X. $\square$

Segundo um resultado devido a Minkowski, a classe dos subconjuntos compactos-convexos de $\mathbb{R}^n$, pode ser imerso isometricamente na classe de funções contínuas sobre a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Este resultado proporciona, como veremos, a caracterização da métrica de Hausdorff através da função suporte, além de implicar em algumas propriedades. Denotemos por:

$$C(\mathbb{S}^{n-1}) = \{f : S^{n-1} \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ é contínua}\}$$

dotado com a métrica uniforme:

$$\begin{aligned} d \quad &: \quad C(\mathbb{S}^{n-1}) \times C(\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathbb{R} \\ (f,g) \quad &\longmapsto \quad d(f,g) = \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

Teorema 29 *(Imersão de Minkowski). A aplicação $j : KC(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{S}^{n-1})$, definida por $j(A) = \sigma_A$ é uma isometria aditiva e positivamente homogênea, isto é:*

(a) $d(j(A), j(B)) = H(A,B)$

(b) $\sigma_{A+B} = \sigma_A + \sigma_B$

(c) $\sigma_{\lambda A} = \lambda \sigma_A, \forall \lambda \geq 0$.

Observação 30 *Tal teorema, implica em resultados já estabelecidos no Teorema 3 (item (i)) e no Teorema 7 (item(i)), como o caso dos itens (b) e (c) do Teorema 29. Podemos ver também que o item (a) do Teorema 29 nos possibilita caracterizar a métrica de Hausdorff da seguinte forma:*

$$H(A,B) = \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} |\sigma_A(x) - \sigma_B(x)|$$

O que nos permite obter o seguinte resultado, já obtido no Teorema 7 (item(ii)):

$$A, B \in KC(\mathbb{R}^n), \text{ então } A = B \Leftrightarrow \sigma_A = \sigma_B$$

Corolário 31 *Dado $A \in KC(\mathbb{R}^n)$, σ_A é uma função Lipschitziana com constante $\|A\| := H(A, \{0\})$, isto é, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, |\sigma_A(x) - \sigma_A(y)| \leq \|A\| \, \|x - y\|$.*

Demonstração: De fato, $\|A\| = H(A, \{0\}) = \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \left|\sigma_A(x) - \sigma_{\{0\}}(x)\right| = \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} |\sigma_A(x)|$.

Logo, $|\sigma_A(x) - \sigma_A(y)| = |\sigma_A(x-y)| = \|x-y\| \left|\frac{\sigma_A(x-y)}{\|x-y\|}\right| \leq \|x-y\| \sup_{z \in \mathbb{S}^{n-1}} |\sigma_A(z)| = \|A\| \, \|x-y\|$. □

1.3 Continuidade e Hemicontinuidade de Correspondências.

Nesta seção, introduziremos os conceitos básicos relacionados à continuidade de correspondências, mas para isso, definamos uma correspondência.

Definição 32 *Uma correspondência Γ do conjunto X no conjunto Y (escrevemos $\Gamma : X \rightrightarrows Y$), é uma regra ao qual associa a cada elemento $x \in X$ um subconjunto não-vazio $\Gamma(x) \subseteq Y$.*

O gráfico de uma correspondência $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ é dado pelo subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$, denotado por $G_\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y / \, y \in \Gamma(x)\}$.

Como em [14], segue a seguinte definição:

Definição 33 *Seja $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ uma correspondência:*

(i) A imagem inversa Γ^{-1} da correspondência Γ é definida como: Seja $\mathcal{F}$ uma familía de subconjunto de Y , então $\Gamma^{-1}(\mathcal{F}) = \{x \in X : \Gamma(x) \in \mathcal{F}\}$.

(ii) A imagem inversa forte Γ^s da correspondência Γ é definida como: Seja $U \subset Y$, então $\Gamma^s(U) = \{x \in X : \Gamma(x) \subset U\}$.

(iii) A imagem inversa fraca Γ^w da corresondência Γ é definida como: Seja $U \subset Y$, então $\Gamma^w(U) = \{x \in X : \Gamma(x) \cap U \neq \emptyset\}$.

Inicialmente, vamos definir o conceito de hemicontinuidade[8] superior:

Definição 34 *Uma correspondência $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ é dita hemicontinua superior (h.c.s.) em x se para todo aberto Θ contendo $\Gamma(x)$, existe uma vizinhança V de x tal que:*

$$\Gamma(z) \subset \Theta, \forall z \in V.$$

Dizemos então que uma correspondência é h.c.s. se esta for h.c.s. em todo ponto de seu domínio.

[8]Alguns autores empregam o termo *Semicontinuidade* ao invés de *Hemicontinuidade* para correspondências. O termo *multifunção* também é usualmente empregado como sinônimo de *correspondência*.

Exemplo: Seja $f: X \to Y$ uma função e $\widetilde{f}: X \rightrightarrows Y$ uma correspondência tal que $\forall x \in X$, $\widetilde{f}(x) = \{f(x)\}$, daí podemos mostrar que f é contínua em x se, e somente se, $\widetilde{f}$ é h.c.s. em x.
$\square$

A proposição seguinte ilustra algumas propriedades sobre hemicontinuidade superior:

Proposição 35 *(i) Se a correspondência $\Gamma: X \rightrightarrows Y$ é h.c.s. em x então o fecho de Γ, isto é, a correspondência $x \mapsto \overline{\Gamma(x)}$ é também h.c.s. Todavia, a recíproca é falsa.*

(ii)Se as correspondências $(\Gamma_i)_{i=1}^n$, $\Gamma_i : X \rightrightarrows Y$, são h.c.s. então a união, isto é, a correspondência $x \mapsto \bigcup_{i-1}^{n} \Gamma_i(x)$, é também h.c.s.

(iii)Sejam as correspondências $\Gamma: X \rightrightarrows Y$ e $\Psi: Y \to W$, tais que, Γ e Ψ sejam h.c.s., então a composição $\Psi o \Gamma$, isto é, $x \mapsto \Psi(\Gamma(x)) = \bigcup_{y \in \Gamma(x)} \Psi(y)$ é h.c.s.

Em muitas aplicações, como salienta[21], a correspondência é a valores compactos, ou seja, $\Gamma(x)$ é um subconjunto compacto de Y para todo x em X. Para este caso, a definição geral de h.c.s. em termos de vizinhança possui uma reformulação por sequências, o que facilita em muitos casos as demonstrações.

Teorema 36 *A correspondência $\Gamma: X \to K(Y)$, em que $K(Y)$ denota a coleção de todos os subconjuntos compactos de Y, é h.c.s. em x se, e somente se, para toda sequência convergindo para x em X e toda sequência (y_n), com $y_n \in \Gamma(x_n)$, exista uma subsequência convergente de (y_n) com limite pertencente a $\Gamma(x)$.*

Demonstração: ver [21]. $\square$

Proposição 37 *Seja a correspondência $\Gamma: X \rightrightarrows Y$ a valores compactos e h.c.s.. Então a imagem $\Gamma(K) = \bigcup_{x \in K} \Gamma(x)$ do conjunto compacto K é um compacto.*

Demonstração: Vamos mostrar que toda sequência (y_n) contida na imagem $\Gamma(K)$ possui alguma subsequência convergente, e ainda, seu limite pertence a $\Gamma(K)$. Com efeito, seja a sequência $(y_n) \subset \Gamma(K)$, temos que para todo y_n existe algum $x_n \in K$ tal que $y_n \in \Gamma(x_n)$. Como K é compacto, existe uma subsequência (x_{n_q}) ao qual o limite $\lim_{q \to \infty} x_{n_q} = x \in K$. Assim, pela hipótese de h.c.s. de Γ, podemos aplicar o Teorema 36 para as subsequências (x_{n_q}) e (y_{n_q}), e daí obtemos uma subsequência de (y_{n_q}) convergente com limite pertencente a $\Gamma(x) \subset \Gamma(X)$. □

Proposição 38 *Sejam as correspondências* $\Gamma_i : X \rightrightarrows Y\,(i = 1, ..., k)$ *a valores compactos e h.c.s. Então a correspondência*

$$\begin{aligned} \Psi \quad &: \quad X \rightrightarrows \prod_{i=1}^{k} Y_i,\, Y_i = Y\, \forall i \in \{1, ..., k\}. \\ x \quad &\mapsto \quad \prod_{i=1}^{k} \Gamma_i(x) \end{aligned}$$

é a valores compactos e h.c.s.

Demonstração: Precisamos mostrar que para qualquer sequência (x_n) convergindo a x e para toda sequência $(y_n) = (y_n^1, ..., y_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, com $y_n^i \in \Gamma_i(x_n)\, \forall i \in \{1, ..., k\}$, existe uma subsequência convergente, e ainda, seu limite pertence ao produto cartesiano $\prod_{i=1}^{k} \Gamma_i(x)$. Recordemos que a sequência $(y_n^1, ..., y_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ do produto cartesiano converge a $(y^1, ..., y^k)$ se, e somente se, toda sequência $(y_n^i)_{n\in N}$ de suas coordenadas converge a $y^i\, \forall i \in \{1, ..., k\}$. Assim, aplicando o Teorema 36 sucessivamente, desde a primeira até a última coordenada, obtemos a convergência desejada no espaço produto. □

Proposição 39 *Sejam as correspondências* $\Gamma_i : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n\,(i = 1, ..., k)$ *a valores compactos e h.c.s. Então a correspondência soma*

$$\begin{aligned} \Psi \quad &: \quad X \rightrightarrows \mathbb{R}^n \\ x \quad &\mapsto \quad \sum_{i=1}^{k} \Gamma_i(x) \end{aligned}$$

é a valores compactos e h.c.s.

Demonstração: Seja a sequência (x_n) convergindo a x e seja $y_n \in \sum_{i=1}^{k} \Gamma_i(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos que $y_n = \sum_{i=1}^{k} y_n^i$, em que $y_n^i \in \Gamma_i(x_n)$, $i \in \{1, ..., k\}$. Pelo Teorema 36, existe para cada sequência $(y_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência convergente que, ainda, tem seu limite $y^i \in \Gamma_i(x)$. Consequentemente, existe uma subsequência convergente $(y_{n_q})_{q\in N}$ tal que a coordenada $y_{n_q}^i$ converge a y^i. Daí, $\lim\limits_{q\to\infty} y_{n_q} = (y^1 + ... + y^k) \in \sum\limits_{i=1}^{k} \Gamma_i(x_n)$. □

Proposição 40 *Seja a correspondência $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ a valores compactos e h.c.s. em x. Então a correspondência envolvente convexa*

$$\begin{aligned} \Psi &: X \rightrightarrows \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \Psi(X) = co\Gamma(x) \end{aligned}$$

é a valores compactos e h.c.s. em x.

Demonstração: Seja a sequência (x_p) convergindo a x e seja $y_p \in co\Gamma(x_p)$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Por um bem conhecido resultado devido a Caratheodory (ver [24]) no qual todo $y_p \in R^n$ pode ser escrito como uma soma convexa de $n+1$ vetores em $\Gamma(x_p)$, isto é:

$$y_p = \lambda_p^0 z_p^0 + \lambda_p^1 z_p^1 + ... + \lambda_p^n z_p^n$$

em que, $z_p^i \in \Gamma(x_p)$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_p^k = 1$, $\lambda_p^k \geq 0$. Assim, pelo Teorema 36, $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}$ existe uma subsequência convergente de $(z_p^i)_{p\in\mathbb{N}}$ que, ainda, tem seu limite pertecente a $\Gamma(x)$. Ainda mais, a sequência $(\lambda_p^i)_{p\in N}$ é limitada e assim possui uma subsequência convergente. Consequentemente, existe uma subsequência convergente (y_{p_q}) tal que as correspondentes subsequências $(z_{p_q}^i)_{q\in N}$ e $(\lambda_{p_q}^i)_{q\in N}$ são convergentes. Escrevemos explicitamente, $\lim\limits_{q\to\infty} z_{p_q}^i = z^i$ e $\lim\limits_{q\to\infty} \lambda_{p_q}^i = \lambda^i$. Claramente, temos que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda^i = 1$ e $\lambda^i \geq 0$, daí $\lim\limits_{q\to\infty} y_{p_q} = (\lambda^0 z^0 + ... + \lambda^n z^n) \in co\Gamma(x)$, o que encerra a demonstração. □

Definição 41 *Uma correspondência $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ é dita* fechada *se o gráfico G_Γ é um subconjunto fechado de $X \times Y$.*

Observação 42 *Pela definição anterior e pelo Teorema 36, vemos que se uma correspondência $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ é a valores fechados (isto é, $\Gamma(x)$ é fechado em Y, $\forall x \in X$) e h.c.s. então esta possui gráfico fechado. Todavia uma correspondência pode ter gráfico fechado e não ser h.c.s.,* *como o exemplo:*

$$\begin{aligned} \Gamma &: \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R} \\ x &\mapsto \Gamma(x) = \begin{cases} \{1/x\} & se\ x > 0 \\ \{0\} & se\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Neste exemplo, o gráfico da correspondência Γ, a valores compactos, é fechado em $X \times Y$, mas Γ não é h.c.s. em $x = 0$. Todavia, note que se Y é um espaço compacto- o qual pode ser o caso em algumas aplicações- então toda correspondência fechada é h.c.s.; isto segue imediatamente do teorema 36. Por esta razão, muitas vezes na literatura, denomina-se uma correspondência fechada como h.c.s. Entretanto, como podemos trabalhar com Y não compacto, é importante distinguir o dois casos.

Proposição 43 *Sejam a correspondência $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ a valores compactos e h.c.s. e a correspondência $\Psi : X \rightrightarrows Y$ fechada e assuma que $\Gamma(x) \cap \Psi(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$. Então a correspondência intercesão*

$$\begin{aligned} \Phi &: X \rightrightarrows Y \\ x &\mapsto \Phi(x) = \Gamma(x) \cap \Psi(x) \end{aligned}$$

é a valores compactos e h.c.s.

Demonstração: Vamos provar que $\forall (x_p)$ tal que $x_p \to x$ e $\forall (y_p)$ com $y_p \in \Gamma(x_p) \cap \Psi(x_p)\, \forall p \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência convergente de (y_p) tal que seu limte pertence a $\Gamma(x) \cap \Psi(x)$. Aplicando o Teorema 36 à correspondência Γ segue que existe uma subsequência convegente (y_{p_q}) tal que seu limte y pertence a $\Gamma(x)$. Para provarmos que $y \in \Psi(x)$, observemos que $(x_{p_q}, y_{p_q}) \in G_\Psi$ e $\lim_{q \to \infty} (x_{p_q}, y_{p_q}) = (x, y)$. Como por hipótese o gráfico G_Ψ é fechado, segue que $(x, y) \in G_\Psi$, isto é, $y \in \Psi(x)$, o que encerra a demonstração. $\square$

Damos agora a definição de hemicontinuidade inferior para correspondências.

Definição 44 *A correspondência $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ é dita hemicontinua inferior (h.c.i) em x se, e somente se, para todo conjunto aberto Θ em Y, com $\Gamma(x) \cap \Theta \neq \emptyset$, existir uma vizinhança V de x tal que:*

$$\Gamma(z) \cap \Theta \neq \emptyset, \forall z \in V$$

Dizemos então que uma correspondência é h.c.i. se esta for h.c.i. em todo ponto de seu domínio.

Exemplo: Seja $f : X \to Y$ uma função e considere a correspondência:

$$\begin{aligned} \widetilde{f} &: X \rightrightarrows Y \\ x &\mapsto \{f(x)\} \end{aligned}$$

então f é contínua se, e somente se, $\widetilde{f}$ é h.c.i. □

Algumas propriedades, que seguem imediatamente da definição de h.c.i., são listadas na proposição abaixo:

Proposição 45 *(i)* $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ *é h.c.i. se, e somente se,* $\overline{\Gamma} : X \rightrightarrows Y$ *é h.c.i.*

(ii)Se as correspondências $\Gamma_i : X \rightrightarrows Y$ *são h.c.i.* $\forall i \in \{1, ..., k\}$ *em* x *então a correspondência união:*

$$\begin{aligned} \Psi &: X \rightrightarrows Y \\ x &\mapsto \Psi(x) = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i(x) \end{aligned}$$

também é h.c.i.

(iii)Se as correspondências $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ *e* $\Psi : Y \rightrightarrows U$ *são h.c.i., então a correspondência:*

$$\begin{aligned} \Xi &: X \rightrightarrows U \\ x &\mapsto \Xi(x) = \Psi o \Gamma(x) \end{aligned}$$

é também h.c.i.

Demonstração: ver [20] e [21]. □

Como quando tratamos de hemicontinuidade superior, temos também para o caso de hemicontinuidade inferior uma caracterização por meio de sequências, todavia tal caracterização não necessita da hipótese de que a correspondência seja a valores compactos, como no Teorema 36.

Teorema 46 *A correspondência* $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ *é h.c.i em* x *se, e somente se, para toda sequência* (x_n) *tal que* $x_n \to x$ *e* $\forall y \in \Gamma(x)$*, existe uma sequência* (y_n) *tal que* $y_n \to y$ *com* $y_n \in \Gamma(x_n)$*.*

Demonstração: ver [21]. □

Proposição 47 *Sejam* $\Gamma_i : X \rightrightarrows Y$ *correspondências h.c.i.* $\forall i \in \{1, ..., k\}$ *em* x*. Então a correspondência produto:*

$$\begin{aligned} \Psi \quad &: \quad X \rightrightarrows Y \times \underbrace{...}_{k\ vezes} \times Y \\ x \quad &\mapsto \quad \prod_{i=1}^{k} \Gamma_i(x) \end{aligned}$$

é h.c.i. em x*.*

Demonstração: Seja a sequência (x_p) tal que $x_p \to x$ e seja $y = (y^1, ..., y^k) \in \Gamma_1(x) \times ... \times \Gamma_k(x)$. Pelo Teorema 46, y^i pode ser obtido como limite de uma sequência $(y_p^i)_{p \in N}$, com $y_p^i \in \Gamma_i(x_p)$, $\forall i$. Assim, $y_p = (y_p^1, ..., y_p^k)$ é a sequência desejada. □

Proposição 48 *Seja* $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *uma correspondência h.c.i. em* x*. Então a correspondência envolvente convexa:*

$$\begin{aligned} \Phi \quad &: \quad X \rightrightarrows \mathbb{R}^n \\ x \quad &\mapsto \quad \Phi(x) = co\Gamma(x) \end{aligned}$$

é h.c.i.

Demonstração: Seja a sequência (x_p) tal que $x_p \to x$. Seja, ainda, $y \in co\Gamma(x)$, ou seja, $y = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j y^j$, em que $y^j \in \Gamma(x)$, $\lambda^j \geq 0$, $\forall i \in \{0, ..., n\}$ e $\sum_{j=0}^{n} \lambda^j = 1$. Como Γ é h.c.i. em x, existe uma subsequência $(y_p^j)_{p \in N}$ convergente a y^j com $y_p^j \in \Gamma(x_p)$. Daí, $y_p = \lambda^0 y_p^0 + ... + \lambda^n y_p^n$ pertence a $co\Gamma(x_p)$ e converge a y. □

Observação 49 *Como citado em [21], em contraste com um resultado obtido na Proposição 43, a intersecsão de correspondências h.c.i. não é, em geral, uma correspondência h.c.i.*

Definição 50 *Uma correspondência* Γ *é dita contínua se* Γ *for h.c.i. e h.c.s.*

Vejamos alguns exemplos de correspondências descontínuas, dados em [6]:

Exemplo: Seja a correspondência:

$$\begin{aligned} F_1 &: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} [-1,1] & se\ x \neq 0 \\ \{0\} & se\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

então F_1 é h.c.i. em 0, mas não é h.c.s. em 0.

Seja, ainda, a correspondência:

$$\begin{aligned} F_2 &: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} [-1,1] & se\ x = 0 \\ \{0\} & se\ x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

então F_2 é h.c.s. em 0, mas não é h.c.i. em 0. □

Segue, agora, um exemplo dado em [20] de correspondência que seja contínua:

Exemplo: Sejam $f_i : X \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas ($i \in \{1, ..., m\}$). Definindo:

$$\begin{aligned} \Psi &: X \rightrightarrows \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \Psi(x) = co\{f_1(x), ..., f_m(x)\} \end{aligned}$$

ou seja, temos uma correspondência que associa cada ponto $x \in X$ a envolvente convexa em $\mathbb{R}^n$ dos pontos $\{f_1(x), ..., f_m(x)\}$. Então Ψ é contínua. □

Podemos definir a continuidade de correspondências do tipo $\Gamma : T \subset \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ através da definição usual de continuidade para espaços métricos. A equivalência da definição herdada da estrutura de espaço métrico com a definição mais geral, dada acima, pode ser obtida trabalhando-se com a caracterização de continuidade dada por sequências.

1.4 Teoremas do Ponto Fixo.

Os teoremas de Ponto Fixo para correspondência surgem nos contextos em que tenhamos uma correspondência do tipo $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \Omega$. Para o caso em que a correspondência é a valores unitários, ou seja, uma função $\Gamma \equiv f : \Omega \longrightarrow \Omega$, o problema é saber em que condições podemos garantir a existência de um elemento $\xi \in \Omega$ tal que $g(\xi) = \xi$. Neste contexto, temos o clássico resultado quando $\Omega \in KC(\mathbb{R}^n)$ e f é contínua:

Teorema 51 *Ponto Fixo de Brouwer:*

Seja Ω um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ contínua. Então existe um ponto fixo $z \in \Omega$ tal que $f(z) = z$.

Demonstração: ver [16]. □

Exemplo: Se, em particular, $n = 1$ e daí tomamos $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, a demonstração segue imediatamente ao fazermos $g : x \in [a, b] \longrightarrow g(x) = f(x) - x$. De fato, se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ nada há a demonstrar. Se todavia, $f(a) > a$ e $f(b) < b$, logo $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$, do fato de g ser uma função contínua segue, do teorema do valor intermediário, que existe $z \in (a, b)$ tal que $g(z) = 0$, ou seja, $f(z) = z$. □

Para correspondências $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \Omega$, em geral, podemos ter, dentre outros, dois tipos de teoremas do ponto fixo. O primeiro tipo questiona a existência de um ponto $z \in \Omega$ tal que $z \in \Gamma(z)$, já o outro tipo, mais forte, questiona a existência de um ponto $z \in \Omega$ tal que $\Gamma(z) = \{z\}$. O primeiro tipo é o mais importante, sob o ponto de vista de aplicações, e trataremos deste nesta seção para o caso em que tenhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Antes, necessitamos da definição de seleção para uma correspondência:

Definição 52 *Seja $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Dizemos que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma seleção de Γ se $f(x) \in \Gamma(x), \forall x \in X$.*

Daremos, agora, um caso particular do clássico Teorema de Michael sobre a existência de seleções contínuas demonstrado em [29].

Teorema 53 *Sejam $\Omega \in KC(\mathbb{R}^n)$ e $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \Omega$ cujos valores são compactos e convexos. Supondo que Γ é h.c.i. então Γ admite uma seleção contínua.*

A seguir, vamos estabelecer um lema para daí provarmos o teorema do ponto fixo de Kakutani; este lema decorre do Teorema 53. Assim, necessitamos da hipótese de h.c.i. para correspondências, entretanto, o teorema de Kakutani é usualmente estabelecido para correspondências h.c.s. a valores fechados. Não obstante, como o conjunto Ω é compacto, temos um resultado (Observação 42) em que h.c.s. associada à propriedade de a correspondência assumir valores fechados, implica nesta possuir gráfico fechado.

Lema 54 *Sejam X, Y subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ e $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ uma correspondência a valores convexos com gráfico fechado. Então, dado $\beta > 0$, existe uma correspondência $\Psi : X \rightrightarrows Y$ a valores convexos, h.c.i. tal que $Gr_\Psi \subset \beta + G_r\Gamma = N(G_r\Gamma, \beta)$.*

Demonstração: Vamos considerar a seguinte correspondência $\Psi\varepsilon'$ definida para todo $\varepsilon > 0$:

$$\Psi\varepsilon'(x) = \bigcup_{\substack{x' \in X \\ \|x - x'\| < \varepsilon}} \Gamma(x')$$

Para vermos que Ψ' é h.c.i., vamos considerar um aberto G tal que $\Psi\varepsilon'(x) \cap G \neq \emptyset$. Então existe $x' \in X$ com $\|x' - x\| < \varepsilon$ e $\Gamma(x') \cap G \neq \emptyset$. Se ηé suficientemente pequeno ($\eta < \varepsilon - \|x' - x\|$) e se $\|x_0 - x\| < \eta$, então $\|x' - x_0\| < \varepsilon$ e $\Psi\varepsilon'(x_0) \cap G \neq \emptyset$, pois $\Gamma(x') \subset \Psi\varepsilon'(x_0)$. Daí, segue da proposição 48 que $\Psi\varepsilon = co\Psi\varepsilon'$ também é h.c.i., logo $\Psi\varepsilon$ é a valores convexos, restando apenas provar que $Gr_{\Psi_\varepsilon} \subset \beta + Gr_\Gamma$ se ε é suficientemente pequeno. Por contradição, vamos supor que isto não seja possível, isto é, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ e para algum $\beta > 0$ temos que $Gr_{\Psi_\varepsilon} \not\subseteq \beta + Gr_\Gamma$, o que nos permite escrever que $\exists \beta > 0$ tal que $\forall n \in N$, $Gr_{\Psi_{1/n}} \not\subseteq \beta + Gr_\Gamma$. Então existe uma sequência $(x_n, y_n) \subset X \times Y$ tal que $(x_n, y_n) \in Gr_{\Psi_{1/n}}$ mas $d((x_n, y_n), Gr_\Gamma) \geq \beta$. Temos que $(x_n, y_n) \in Gr_{\Psi_{1/n}}$ equivale a afirmar que $y_n = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{n,i} y_{n,i}$ com $\lambda_{n,i} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{n,i} = 1$ e $y_{n,i} \in \Gamma(x'_{n,i})$ em que $\left\| x'_{n,i} - x_n \right\| < 1/n$. Nesta afirmação temos que a soma é sobre o mesmo subconjunto dos naturais $\{1, 2, ..., m+1\}$; e foi utilizado o teorema de Caratheodory em $\mathbb{R}^n$, já utilizado na Proposição 40.

Como $X, Y \in K(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda_{n,i} \in [0, 1]$ vamos assumir (passando à subsequência se necessário) que $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\lambda_{n,i} \to \lambda_i$, $y_{n,i} \to y_i$ e $x'_{n,i} \to x'_i$. Daí, como $\left\| x'_{n,i} - x_n \right\| < 1/n$, passando o limite quando $n \to \infty$, temos que $x'_i = x$. Temos também que $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$ e $y_n = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{n,i} y_{n,i} \to \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i y_i = y$. Então, de $(x'_{n,i}, y_{n,i}) \in Gr_\Gamma$, $(x'_i, y_i) = (x_i, y_i) \in \overline{Gr_\Gamma} = Gr_\Gamma$. Daí, $y_i \in \Gamma(x)$ e, como $\Gamma(x)$ é convexo, $y \in \Gamma(x)$, isto é, $(x, y) \in Gr_\Gamma$. Mas como $d((x_n, y_n), Gr_\Gamma) \geq \beta$ para todo n, isto é impossível, e esta contradição encerra a demonstração. $\square$

Corolário 55 *Nas condições do teorema anterior, Ψ é a valores fechados.*

Demonstração: Seja $\Psi = \overline{\Psi\varepsilon}$ para ε suficientemente pequeno e, pela Proposição 45, Ψ é h.c.i. Ainda, Ψ é a valores convexos e, se $Gr_{\Psi_\varepsilon} \subset \beta + Gr_\Gamma$, então $Gr_\Psi \subset \beta + Gr_\Gamma$. $\square$

Teorema 56 *Ponto Fixo de Kakutani:*

Seja Ω um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$ e seja $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \Omega$ uma correspondênicia a valores convexo com gráfico fechado. Então existe $z \in \Omega$ tal que $z \in \Gamma(z)$.

Demonstração: Pelo Lema 54 e Corolário 55, para cada natural n existe uma correspondência $\Psi_n : \Omega \rightrightarrows \Omega$ h.c.i. tal que $Gr_{\Psi_n} \subset n^{-1} + Gr_\Gamma$ e Ψ_n é a valores convexos e fechados. Então pelo Teorema 53, existe uma seleção contínua ϕ_n para Ψ_n. Como $\phi_n : \Omega \to \Omega$ é uma função contínua, pelo Teorema 51, existe $x_n \in \Omega$ tal que $\phi_n(x_n) = x_n$, $\forall n$. Como Ω é compacto então a sequência (x_n) possui algum ponto limite x. Do fato de que $(x_n, x_n) \in Gr_{\Psi_n} \subset n^{-1} + Gr_\Gamma$, segue que $(x, x) \in \overline{Gr_\Gamma} = Gr_\Gamma$. Assim $x \in \Gamma(x)$, o que encerra a demonstração. $\square$

O exemplo a seguir mostrar que a hipótese, no Teorema do Ponto Fixo de Kakutani, de que Γ seja a valores convexos é necessária para a tese:

Exemplo: Seja $\Omega \in KC(\mathbb{R}^n)$, $\partial\Omega$ sua fronteira[9] e seja

$$\begin{aligned} \Gamma \quad &: \quad \Omega \rightrightarrows \Omega \\ x \quad &\mapsto \quad \overline{B(x, \inf_{z\in\partial\Omega} d(x,z)) \backslash B(x, \inf_{z\in\partial\Omega} d(x,z)/2)} \end{aligned}$$

vemos que $\forall x \in \Omega$, $\overline{B(x, \inf_{z\in\partial\Omega} d(x,z)) \backslash B(x, \inf_{z\in\partial\Omega} d(x,z)/2)}$ não é um conjunto convexo e $x \notin \Gamma(x)$. $\square$

[9] Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, a fronteira de A, denotado por ∂A, é o conjunto dos pontos $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ e $B(a, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.

1.5 Medida e Integração de Correspondências.

1.5.1 Alguns Elementos Básicos sobre Integração de Funções.

Tomemos o espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma-$aditivo, em que:

(a) $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra, ou seja,

$$\begin{aligned}
(\text{i})\emptyset, X &\in \mathcal{A}; \\
(\text{ii})A &\in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}; \\
(\text{iii})(A_n)_{\mathbb{N}} &\subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

(b) μ é um medida, ou seja, $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ e,

$$\begin{aligned}
(\text{i})\mu(\emptyset) &= 0; \\
(\text{ii})\mu(A) &\geq 0, \forall A \in \mathcal{A}; \\
(\text{iii})(A_n)_{\mathbb{N}} &\subseteq \mathcal{A}, \text{ disjunta } \Rightarrow \mu(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n) = \sum_{\mathbb{N}} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Vamos, inicialmente, dar algumas definições e resultados importantes para o contexto de funções integráveis, que serão importantes mais a frente.

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e Y um espaço de Banach[10]. Um conjunto $E \in \mathcal{A}$ é dito de medida nula se $\mu(E) = 0$.

Definição 57 *Uma função $\psi : X \longrightarrow Y$ é dita $\mathcal{A}-$simples se existe uma partição finita de X de conjuntos $(A_i)_{i=1}^m$ pertencentes a $\mathcal{A}$ [11], tal que ψ é constante em cada conjunto desta partição.*

Definição 58 *A integral de ψ, com respeito a μ é definida por:*

$$\int \psi d\mu = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) y_i$$

em que $(A_i)_{i=1}^m$ é uma partição correspondente a ψ, e $\psi(A_i) = \{y_i\}$.

[10] Seja X um espaço vetorial com norma $\|\cdot\|_X$, se este for completo nesta norma, então $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach.

[11] *Ou seja,* $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = X$ *e* $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Definição 59 *Uma sequência* (ψ_p) *de funções* $\mathcal{A}-$*simples de* X *em* Y *é dita* $\Delta-$*Cauchy se* $\Delta(\psi_m, \psi_n) = \int_X \|\psi_m(x) - \psi_n(x)\| \, d\mu \to 0$ *quando* $m, n \to \infty$.

Definição 60 *(Integral de Bochner) Uma função* $\gamma : X \to Y$ *é dita* $\mu-$*integrável, se existe uma sequência* $\Delta-$*Cauchy* (ψ_p) *de funções* $\mathcal{A}-$*simples de* X *em* Y *que converge a* γ $\mu-q.s.$ *em* X. *A integral de* γ *com respeito a* μ *é definida por* $\int \gamma d\mu = \lim\limits_{m\to\infty} \int \psi_m d\mu$.

O espaço de funções $\mu-$*integráveis* de X em Y é denotado por $L^1(X, Y, \mu)$.

Definição 61 *Dado* $A \in \mathcal{A}$, *seja* $\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ *a função característica do conjunto* A. *A função* $\gamma : X \to Y$ *é dita* $\mu-$*integrável em* A *se a função* $\chi_A.\gamma \in L^1(X, Y, \mu)$.

Quando tomamos o espaço de Banach $Y = \mathbb{R}^n$, a integral da função $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, de X em $\mathbb{R}^n$, é o vetor $(\int \gamma_1 d\mu, ..., \int \gamma_n d\mu)$. Obviamente, $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ é $\mu-$*integrável* se cada componente $\gamma_i : X \to \mathbb{R}$ for $\mu-$*integrável*.

Definição 62 *Para cada* $k = 1, 2, ...$, *sejam* (X_k, A_k, μ_k) *espaços de medida e* $\gamma_k : X_k \to \mathbb{R}$. *A sequência* (γ_k) *é dita uniformemente integrável se, e somente se:*

(i) $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \int_{X_k} |\gamma_k| \, d\mu_k < \infty$;

(ii)Para toda sequência de conjunto (A_k), *tal que* $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k(A_k) = 0$, *tenhamos que* $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{A_k} |\gamma_k| \, d\mu_k = 0$.

A proposição seguinte proporciona uma condição suficiente para que a sequência (γ_k), definida anteriormente, seja uniformemente integrável.

Proposição 63 *Para cada* $k = 1, 2, ...$, *sejam* (X_k, A_k, μ_k) *espaços de medida e* $\gamma_k : X_k \to \mathbb{R}$. *A sequência* (γ_k) *é uniformemente integrável se existe uma função integrável* ψ *tal que* $|\gamma_k| < \psi$ *para todo* k.

Vamos apresentar agora um resultado conhecido como *Lema de Fatou em dimensão n*, estabelecido em [22] e [32]:

Lema 64 *Seja* (X, A, μ) *um espaço de medida e uma sequência* $(\varphi_k) \subset L^1(X, \mathbb{R}^n_+, \mu)$. *Supondo que* $\lim\limits_{k\to\infty} \int_X \varphi_k d\mu$ *existe. Então existe uma função* $\varphi \in L^1(X, \mathbb{R}^n_+, \mu)$, *tal que:*

Teorema 65 *(i)*$\varphi(x) \in \limsup\{\varphi_k(x)\}$ *$\mu - q.s.$;*

(ii)$\int_X \varphi d\mu \leq \lim\limits_{k\to\infty} \int_X \varphi_k d\mu$.

Se, adicionalmente, a sequência (φ_k) *for uniformemente integrável e se o conjunto* $(\varphi_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ *for limitado* $\mu - q.s.$ *Então existe uma função* $\varphi : X \to \mathbb{R}^n_+$*, tal que,* $\varphi(x) \in \limsup\{\varphi_k(x)\}$ $\mu - q.s.$ *e* $\int_X \varphi d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int_X \varphi_k d\mu$.

Ainda, se toda função $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$*, com as propriedades (i) e (ii) acima, valer que* $\int_X \varphi d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int_X \varphi_k d\mu$*. Então a sequência* (φ_k) *é uniformemente integrável.*

1.5.2 Mensurabilidade e Seleções Mensuráveis

Definição 66 *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e* $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *uma correspondência.* Γ *é mensurável quando:*

$$\Gamma^w(C) := \{x \in X : \Gamma(x) \cap C \neq \emptyset\} \in \mathcal{A},\ \forall C \subseteq \mathbb{R}^n,\ C \text{ fechado.}$$

Notemos que no contexto clássico, se $f : X \to \mathbb{R}^n$ então f é mensurável se, e somente se, $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, $\forall C$ fechado de $\mathbb{R}^n$. Assim, se definirmos a correspondência $\widetilde{f}(x) = \{f(x)\}$, então $\widetilde{f} : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ e ainda,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}^w(A) &= \{x \in X : \widetilde{f}(x) \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in X : \{f(x)\} \cap A \neq \emptyset\} = \\ &= \{x \in X : f(x) \in A\} = f^{-1}(A). \end{aligned}$$

O que nos permite afirmar que f é mensurável no sentido usual se, e somente se, $\widetilde{f}$ é mensurável no sentido da definição dada para correspondências.

Seguem, na proposição seguinte, alguns resultados sobre mensurabilidade de correspondências.

Proposição 67 *Sejam* $\Gamma, \Psi : X \to \mathbb{R}^n$ *correspondências mensuráveis.*

Exemplos: (a)$\Gamma_1(x) = \overline{\Gamma(x)}$ é mensurável.

(b)$\Gamma_2(x) = co\Gamma(x)$ é mensurável.

(c)Se Γ e Ψ são a valores compactos, então $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = H(\Gamma(x), \Psi(x))$ é mensurável.

(d) Qualquer que seja $y \in \mathbb{R}^n$, a função $g_y : x \in X \to d(y, \Gamma(x))$ é mensurável. $\square$

Para o contexto de mensurabilidade, segue naturalmente a definição:

Definição 68 *Seja $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}^n$ é uma seleção mensurável de Γ se f é uma seleção ($f(x) \in \Gamma(x), \forall x \in X$) e f é mensurável.*

Exemplo: Seja a correspondência $\Gamma : x \in \mathbb{R} \rightrightarrows [x, x+1] \subset \mathbb{R}$, então a função $f : x \in \mathbb{R} \to \frac{2x+1}{2} \in \mathbb{R}$ é uma das possíveis seleções (neste caso mensurável) de Γ. Note que, neste exemplo, as seleções mensuráveis mais fáceis de serem observadas são $g(x) = x$ e $h(x) = x + 1$. $\square$

Como citado em [31], a existência de seleções está garatida pelo axioma da escolha, já que, dada $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, para todo $x \in X$ temos $\Gamma(x) \neq \emptyset$, podemos para cada x *escolher* algum $y \in \Gamma(x)$ e fazer $\varphi(x) = y$. Todavia, um problema bem difícil em geral, é saber quando uma correspondência admite seleção mensurável. O teorema a seguir, provado por Kuratowski em 1965, dá condições suficientes para a existência de seleções mensuráveis para uma certa classe de correspondências:

Teorema 69 *Seja $\Gamma : X \rightrightarrows Y$,em que Y é um espaço Polonês (por exemplo, $\mathbb{R}^n$), é uma correspondência mensurável a valores fechados, então Γ admite uma seleção mensurável.*

Castaing, em 1967, estabeleceu uma equivalência muito importante, a saber:

Teorema 70 *Nas condições do enunciado anterior, são equivalentes:*

(i) Γ é mensurável.

(ii) Existe uma sequência (f_n) de seleções mensuráveis de Γ, tais que,

$$\Gamma(x) = \overline{\{f_n(x)/\ n \in \mathbb{N}\}}, \forall x \in X.$$

Demonstração: ver [26]. $\square$

Definição 71 *Uma outra definição de mensurabilidade ao qual é, em geral mais forte que a anterior, dada como: Seja $\Gamma : X \rightrightarrows Y$, denotemos por:*

(i) $\mathcal{B}(Y)$ *a* σ*-álgebra de Borel de* Y.

(ii) $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$ *a* σ*-álgebra gerada pelo espaço produto* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(Y)$.

Então dizemos que Γ *é* borel-mensurável *se* $G_\Gamma \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$.

O resultado a seguir dado em [31], ilustra uma situação em que os dois conceitos de mensurabilidade apresentados são equivalentes:

Teorema 72 *Se* Y *é um espaço Polonês, então* Γ *borel-mensurável implica em* Γ *mensurável. A recíproca só é válida se* Γ *é a valores fechados.*

Definição 73 *Dizemos que um espaço de medida* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *é completo se:*

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0 \text{ e } A \subseteq B \Rightarrow A \in \mathcal{A}.$$

Assim, usando a definição boreliana de mensurabilidade e a completude de um espaço de medida obtemos um outro resultado acerca das seleções mensuráveis, e este é o seguinte:

Teorema 74 *(Teorema da Seleção Mensurável de Aumann) Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida finita*[12] *e completo e* Y *um espaço de Polish. Se* $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ *borel-mensurável, então* Γ *admite uma seleção mensurável* $\mu - q.s.$*,ou seja,* $\exists\ f : X \to Y$ *tal que* f *é mensurável e* $f(x) \in \Gamma(x)$ $\mu - q.s.$

Demonstração: ver [20], [26], e [6]. □

É preciso ressaltar que os adjetivos mensurável e fechado não são equivalentes, o que comprovamos no exemplo a seguir, dado em [31]:

Exemplo: Seja $\mathbb{R}$ com a medida usual de Lebesgue, considere ainda um conjunto A, que não seja Lebesgue-mensurável (isto é, $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$), por exemplo o conjunto de Vitali (ver[11]), e seja $\mathcal{X}_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ sua função característica. Definindo, $\Xi : x \in \mathbb{R} \rightrightarrows \Xi(x) \subset \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Xi(x) = \{\mathcal{X}_A(x)\}$. Temos que Ξ é fechada porém não é mensurável; com efeito, $\Xi^w(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} : \Xi(x) \cap \{1\} \neq \emptyset\} = A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$. □

[12] *O espaço* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *é dito de medida finita se* $\mu(X) < +\infty$. *Como exemplo particular, temos os espaços de probabilidade em que* $\mu(X) = 1$.

Para as situações em que trabalhamos com correspondências do tipo $\Gamma : T \subseteq \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$, temos a seguinte caracterização de mensurabilidade, dada na seguinte proposição:

Proposição 75 *Seja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{B}(K(\mathbb{R}^n))$ as σ-álgebras de Borel de $\mathbb{R}^n$ e $(K(\mathbb{R}^n), H)$, respectivamente. Então, de acordo com [31], as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)$\Gamma : T \to K(\mathbb{R}^n)$ é mensurável.

(ii)$\{t \in T : \Gamma(t) \in \Delta\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \Delta \in \mathcal{B}(K(\mathbb{R}^n))$.

(iii)$\Gamma^w(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\forall B \in \mathcal{B}(K(\mathbb{R}^n))$.

(iv)$\Gamma^w(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n, A$ aberto.

(v)$\Gamma^w(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\forall C \subseteq \mathbb{R}^n, C$ fechado.

(vi)$G_\Gamma = \{(t, y) \in T \times \mathbb{R}^n : y \in \Gamma(t)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(K(\mathbb{R}^n))$.

(vii)$d(y, \Gamma(\cdot)) : T \to \mathbb{R}$ é mensurável $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

(viii)$\|\Gamma(\cdot)\| : T \to \mathbb{R}$ é mensurável.

Se ainda, $\Gamma : T \subseteq \mathbb{R}^n \to KC(\mathbb{R}^n)$, temos a equivalência das afirmações anteriores com:

(ix)$\sigma_{\Gamma(\cdot)}(x) : T \to \mathbb{R}$, $\sigma_{\Gamma(\cdot)}(x)(t) = \sigma_{\Gamma(t)}(x)$ é mensurável $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

1.5.3 A Integral de Aumann e suas Propriedades.

Seja X é um espaço de medida finita, e μ a medida usual de Lebesgue. Denotamos, como de costume neste trabalho, por:

$$L^1(X, \mathbb{R}^n, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R}^n / \ f \text{ é integrável}\}$$

em que f integrável significa que cada componente f_i é Lebesgue integrável.

Vamos supor que o espaço de medida é completo.

Definição 76 *Seja $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}^n$ é uma seleção integrável se $f \in L^1$ e $f(x) \in \Gamma(x)$ $\mu - q.s.$ Vamos denotar por $\mathcal{S}(\Gamma)$ o conjunto das seleções integráveis de Γ.*

A definição dada por Aumann para a integral de correspondências segue abaixo e pode ser encontrada originalmente em [9], juntamente com várias propriedades, que aqui também trataremos.

Definição 77 *Seja* $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. *A* integral de Aumann *de* Γ *se define como:*

$$\int \Gamma d\mu = \{ \int f d\mu / \ f \in \mathcal{S}(\Gamma) \}$$

Dizemos que Γ *é integrável quando* $\int \Gamma d\mu \neq \emptyset$.

Exemplo: Suponhamos que $f \in L^1(X, \mathbb{R}^n, \mu)$ e defindo, para todo $x \in X$, $F(x) = \{f(x)\}$. Obtemos que F é integrável, pois $\mathcal{S}(F) = \{f\}$, e $\int F d\mu = \{\int f d\mu\}$. □

Um problema, então, que nos apresentar é saber quando uma correspondência é integrável. Para o tratamento deste problema, precisamos estabelecer a seguinte definição:

Definição 78 *Seja* $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Γ *é dita* integravelmente limitada *se existe uma função* $g \in L^1(X, \mathbb{R}_+, \mu)$ *tal que* $\sup\{\|y\| : y \in \Gamma(x)\} \leq g(x)$ $\mu - q.s.$ *em* X.

Assim, temos que se Γ é uma correspondência mensurável e fechada, então Γ é integravelmente limitada se, e somente se, $\|\Gamma(x)\| \in L^1(X, \mathbb{R})$.

Teorema 79 *Se* $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *é Borel-mensurável e integravelmente limitada, então* Γ *é integrável.*

Demonstração: Temos pela definição que Γ é integravelmente limitada quando $\int \Gamma d\mu = \{\int f d\mu / \ f \in \mathcal{S}(\Gamma)\} \neq \emptyset$ o que é equivalente a afirmar que $\mathcal{S}(\Gamma) \neq \emptyset$. Daí, basta mostrarmos que Γ admite alguma seleção integrável. Com efeito, como Γ é borel-mensurável, pelo Teorema 74, Γ admite uma seleção mensurável $\mu - q.s.$, isto é, existe uma f mensurável tal que $f(x) \in \Gamma(x)\, \mu - q.s.$ Ainda, a hipótese de Γ ser integravelmente limitada garante que existe $\tau \in L^1(X, \mathbb{R})$ tal que $\|y\| \leq \tau(x)$, $\forall x, \forall y$ tal que $y \in \Gamma(x)$. Portanto, $\|f(x)\| \leq \tau(x)$, $\forall x$. O que mostra que f é integrável. Assim, $f \in \mathcal{S}(\Gamma)$ e daí $\int \Gamma d\mu \neq \emptyset$. □

Definição 80 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida.* $A \in \mathcal{A}$ *é chamado de átomo se:*

(i) $\mu(A) > 0$;

(ii) $B \in \mathcal{A}$ *e* $B \subseteq A \Rightarrow \mu(B) = 0$ *ou* $\mu(B) = \mu(A)$.

Assim, uma medida μ é dita sem-átomos quando $\forall A \in \mathcal{A}$, A não for um átomo.

Se associarmos ao conceito de integral a idéia de soma, e se considerarmos correspondências a valores convexos, então, nete caso, é natural esperarmos que a integral de Aumann seja um conjunto convexo. Todavia, não há razão aparente para esperarmos que a integral seja convexa para correspondência a valores não necessariamente convexos. O teorema de Lyapunov, a seguir, tem como consequência mais importante justamente o fato de que a convexidade da integral de Aumann depende, essencialmente, da hipótese de não atomicidade da medida μ, quando tratamos de correspondências a espaços de dimensão finita, em particular, a valores em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 81 *(Lyapunov) Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida finita e suponhamos que μ não possua átomos. Então a imagem de μ (isto é, $\{\mu(A)/\ A \in \mathcal{A}\}$) é um conjunto fechado e convexo.*

Demonstração: ver [27] □

O teorema a seguir é devido a Richter:

Teorema 82 *Seja $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Se μ não possui átomos, então a integral $\int \Gamma d\mu$ é um conjunto convexo.*

Demonstração: Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \int \Gamma d\mu$, então existem f_1, $f_2 \in \mathcal{S}(\Gamma)$ tais que $\gamma_1 = \int f_1 d\mu$ e $\gamma_2 = \int f_2 d\mu$. Vamos definir $\overline{\mu}(A) = (\int_A f_1 d\mu, \int_A f_2 d\mu)$, $\forall A \in \mathcal{A}$. Como f_1 e f_2 são seleções integráveis de Γ e μ é sem-átomos então $\overline{\mu}$ é uma medida vetorial finita sem-átomos. Com efeito, supondo que E seja um átomo para $\overline{\mu}$; então $\overline{\mu}(E) \neq 0$ implica que $\mu(E) > 0$. Aplicando o teorema de Lyapunov (Teorema 81) em μ, E pode ser particionado em E_1 e E_2 pertencentes a $\mathcal{A}$, tais que $\mu(E_1) = \mu(E_1') = \frac{\mu(E)}{2}$ e $\overline{\mu}(E_1) = \overline{\mu}(E)$, $\overline{\mu}(E_1') = 0$. Repetindo esta construção, obtemos uma sequência (E_p) com a propriedade de que, para todo p, $E_p \in A$, $E_{p+1} \subset E_p$, $\mu(E_p) = (1/2^p)\mu(E)$, e $\overline{\mu}(E_p) = \overline{\mu}(E)$. Seja então $F = \bigcap_{p=1}^{\infty} E_p$; então $\mu(F) = 0$ e $\overline{\mu}(F) = \overline{\mu}(E) \neq 0$, o que é uma contradição. Por outro lado, $\overline{\mu}(\emptyset) = (0, 0)$ e $\overline{\mu}(X) = (\gamma_1, \gamma_2)$. Assim, pelo teorema de Lyapunov (Teorema 81), para todo $\lambda \in [0, 1]$, existe $W \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{\mu}(W) = (\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)0, \lambda\gamma_2 + (1-\lambda)0) = (\lambda\gamma_1, \lambda\gamma_2)$, daí, segue que $\overline{\mu}(X\backslash W) = ([1-\lambda]\gamma_1, [1-\lambda]\gamma_2)$. Definindo,

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in W \\ f_2(x), & x \in X\backslash W \end{cases}$$

temos que, para todo $x \in X$, $f(x) \in \Gamma(x)$ e $\int f d\mu = \int_W f_1 d\mu + \int_{X \setminus W} f_2 d\mu = \lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2$. Assim, dados quaisquer $\gamma_1, \gamma_2 \in \int \Gamma d\mu$, qualquer combinação convexa $\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2$ é o resultado da integral de alguma seleção integrável de Γ, isto é, $[\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2] \in \int \Gamma d\mu$. $\square$

Exemplo: Seja $([0,1], \mathcal{L}([0,1]), m)$, em que m denota a medida usual de Lebesgue, portanto sem-átomos, e $\mathcal{L}([0,1])$ denota a família dos subconjuntos de $[0,1]$ que sejam Lebesgue mensuráveis. Sejam, ainda, a, b reais tais que $0 < a < b$. Definamos a correspondência $\Gamma(x) = \{a, b\}$, $\forall x \in [0,1]$. Logo Γ não é a valores convexos. Sejam agora, $\forall x \in [0,1]$, $f_1(x) = a$ e $f_2(x) = b$. Claramente, $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\Gamma)$ e $\int f_1 d\mu = a$ e $\int f_2 d\mu = b$. Por outra parte, se tomarmos qualquer partição mensurável de $[0,1]$ da forma $\{A, B\}$, isto é, $[0,1] = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ e $A, B \in \mathcal{L}([0,1])$. Então fazendo $f = f_1\mathcal{X}_A + f_2\mathcal{X}_B$, obtemos a família de seleções integráveis de Γ. Temos que para todo $x \in [0,1]$, $f(x) = f_1(x)\mathcal{X}_A(x) + f_2(x)\mathcal{X}_B(x)$. Logo, se $x \in A$ então $f(x) = f_1(x)$ e se $x \in B$ então $f(x) = f_2(x)$. Assim, $f \in \mathcal{S}(\Gamma)$ e ainda, $\int f d\mu = \int f_1\mathcal{X}_A d\mu + \int f_2\mathcal{X}_B d\mu = a\mu(A) + b\mu(B) = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in [0,1]$. Logo, $\int \Gamma d\mu = [a, b]$.
$\square$

Exemplo: Consideremos o espaço $X = [0,1]$ com a medida usual de Lesbegue m, mas com a introdução de um átomo em um de seus extremos, por exemplo, $\mu(\{1\}) = 3$. Ou seja, se $A \in \mathcal{L}([0,1])$, então definimos:

$$\mu(A) = \begin{cases} m(A), \; se \; 1 \notin A \\ 3 + m(A \setminus \{1\}), \; se \; 1 \in A \end{cases}$$

Definindo a correspondência $F(x) = \{4, 5\}$, $\forall x \in [0,1]$ e considerando todas as partições mensuráveis de $[0,1]$ da forma $\{A, b, \{1\}\}$, obsservamos que dada qualquer $f \in \mathcal{S}(F)$, ela deve ser da forma:

$$\begin{aligned} f &= 4\mathcal{X}_A + 5\mathcal{X}_B + 4\mathcal{X}_{\{1\}} \; ou \\ f &= 4\mathcal{X}_A + 5\mathcal{X}_B + 5\mathcal{X}_{\{1\}} \end{aligned}$$

no primeiro caso, obtemos:

$\int f d\mu = 4\mu(A) + 5\mu(B) + 12 = 4\lambda + 5(1-\lambda) + 12$, $\lambda \in [0,1]$.

já no segundo caso, obtemos:

$\int f d\mu = 4\mu(A) + 5\mu(B) + 15 = 4\lambda + 5(1-\lambda) + 15$, $\lambda \in [0,1]$.

Assim, $\int F d\mu = [16,17] \cup [19,20]$, o que não é um conjunto convexo. $\square$

Corolário 83 *Dado o espaço de medida $(X, \mathcal{A}, v)$ não necessariamente sem-átomos, seja $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ uma correspondência em que $\Gamma(x)$ é convexo para todo x pertencente a algum átomo. Então $\int \Gamma dv$ é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Com efeito, seja $X_1 = \cup\{A \in \mathcal{A} : A$ é um átomo$\}$, e seja $X_0 = X \backslash X_1$, ou seja, X_0 não possui átomos. Denotemos por Γ_0 e Γ_1 as restrições de Γ em X_0 e X_1, respectivamente. Assim, $\int \Gamma dv = \int_{X_0} \Gamma_0 dv + \int_{X_1} \Gamma_1 dv$. Pelo teorema de Richter (Teorema 82), $\int_{X_0} \Gamma_0 dv$ é um conjunto convexo. Agora, pelo hipótese de $\Gamma(x)$ ser convexo para todo x pertencente a algum átomo, $\int_{X_1} \Gamma_1 dv$ é um conjunto convexo. Logo, $\int \Gamma dv$ é um subconunto convexo de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Notemos que no exemplo anterior, $\Gamma(1) = \{4,5\}$ não é convexo e $\{1\}$ era um átomo. Todavia, se tomarmos deste exemplo o mesmo espaço de medida em que $\{1\}$ é um átomo com $\mu(\{1\}) = 3$, mas com a correspondência:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \{4,5\}, & se\, x \neq 1 \\ [4,5], & se\, x = 1 \end{cases}$$

por um raciocínio análogo para o cálculo da integral, chegamos que $\int \Psi d\mu = [16,20]$, o que é um conjunto convexo. Note, contudo, que $\Psi(1)$ é convexo, o que exemplifica o corolário anterior.

Vamos discutir, agora, alguns resultados sobre convergência de integrais, para então abordarmos em que condições a integral de Aumann é um conjunto compacto.

Proposição 84 *Seja (Γ_k) uma sequência de correspondência de X em $\mathbb{R}^n_+$, e suponhamos que exista uma sequência de funções (γ_k) de X em $\mathbb{R}^n_+$ satisfazendo:*

(i) Dado $y \in \Gamma_k(x)$, $y \leq \gamma_k(x)\ \mu - q.s.$

(ii)A sequência (γ_k) é uniformemente integrável e o conjunto $\{\gamma_k(x)\}$ é limitado $\mu - q.s.$

Então $\limsup(\int \Gamma_k d\mu) \subset \int \limsup(\Gamma_k) d\mu$.

Demonstração: Seja $y \in \limsup(\int \Gamma_k d\mu)$. Então existe uma sequência $(y_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ com limite y, tal que $y_{k_j} = \int \gamma_j d\mu$ com $\gamma_j(x) \in \Gamma_{k_j}, \forall j \in \mathbb{N}$. Agora, basta mostrar que a correspondência que associa a cada $x \in X$ o conjunto $\limsup\{\gamma_k(x)\}$ possui uma seleção integrável γ satisfazendo a condição $\int \gamma d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int \gamma_k d\mu$. Mas, como (γ_k) é uniformemente integrável e o conjunto $\{\gamma_k(x)\}$ é limitado $\mu - q.s.$, segue do Lema 64 que tal fato é satisfeito. □

Corolário 85 *Seja (Γ_k) uma sequência de correspondência de X em $\mathbb{R}^n$, e suponhamos que cada Γ_k é limitado pela mesma função $\psi \in L^1(X, \mathbb{R}^n, \mu)$. Então* $\limsup(\int \Gamma_k d\mu) \subset \int \limsup(\Gamma_k) d\mu$.

Segue, então, o teorema abaixo análogo ao lema de *Fatou*:

Teorema 86 *Seja (Γ_k) uma sequência de correspondência de X em $\mathbb{R}^n$ tal que para todo k, Γ_k seja borel-mensurável. Ainda, suponhamos que cada Γ_k seja limitada pela mesma função $\gamma \in L^1(X, \mathbb{R}^n, \mu)$. Então* $\int \liminf(\Gamma_k) d\mu \subset \liminf(\int \Gamma_k d\mu)$.

Demonstração: ver [9]. □

Segue um contra-exemplo que mostra que a hipótese de borel-mensurabilidade não pode ser dispensada, dado em [9].

Exemplo: Seja Λ um subconjunto não-mensurável de $[0,1]$ com medida interior nula e medida exterior igual a 1. Consideremos a sequência (F_k) de correspondências de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ definida por $F_k(x) = \{\mathcal{X}_\Lambda(x)/k\}$. Nesta caso, $\lim \int F_k d\mu = \emptyset$ embora $\int \lim F_k d\mu = \{0\}$. □

O teorema seguinte é análogo ao *teorema da convergência dominada de Lesbegue.*

Teorema 87 *Sejam Γ, $\Gamma_k : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ $k = 1, 2, ...$, uma sequência de correspondências borel-mensuráveis, tais que, $\forall x \in X$ temos que $\lim \Gamma_k(x) = \Gamma(x)$ (no sentido de Kuratowski) e supondo também que cada Γ_k seja limitada pela mesma função $\varphi \in L^1(X, \mathbb{R}^n, \mu)$. Então,* $\lim \int \Gamma_k d\mu = \int \Gamma d\mu$.

Demonstração: Se $\Gamma(x) = \liminf(\Gamma_k(x)) = \limsup(\Gamma_k(x))$ para todo $x \in X$, então pelo Corolário 85 e pelo Teorema 86 podemos escrever $\int \Gamma d\mu = \int \liminf(\Gamma_k) d\mu \subset \liminf(\int \Gamma_k d\mu) \subset \limsup(\int \Gamma_k d\mu) \subset \int \limsup(\Gamma_k) d\mu = \int \Gamma d\mu$. □

Teorema 88 *Se* $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *é uma correspondência integravelmente limitada e a valores fechados, então a integral* $\int \Gamma d\mu$ *é um conjunto compacto.*

Demonstração: Para $k = 1, 2, ...$, escrevemos $\Gamma_k = \Gamma$. Assim, para todo x, o conjunto $\Gamma(x)$ é fechado, e daí obtemos que $\limsup(\Gamma_k(x)) = \overline{\Gamma(x)} = \Gamma(x)$ e $\limsup(\int \Gamma_k d\mu) = \overline{\int \Gamma d\mu}$. Agora, a partir da Proposição 84, temos que $\overline{\int \Gamma d\mu} = \limsup(\int \Gamma_k d\mu) \subset \int \limsup(\Gamma_k) d\mu$. Daí, $\int \Gamma d\mu$ é fechado. Por outro lado, como Γ é limitado por uma função a valores reais ψ, segue que $\int \Gamma d\mu$ é limitado pela integral $\int \psi d\mu$. Assim, mostramos que $\int \Gamma d\mu$ é compacto. □

O teorema a seguir é muito importante por seu uso em aplicações, como veremos no segundo capítulo:

Teorema 89 *Seja* P *um espaço métrico e uma correspondência* $\Gamma : X \times P \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *tal que:*

(i)existe uma função $\gamma \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$ *satisfazendo* $\|y\| \leq \gamma(x)$ *para todo* $y \in \Gamma(x, p)$ *e para todo* $p \in P$;

(ii)A correspondência $\Gamma(x, \cdot) : P \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *é fechada em* p, $\mu - q.s.$ *em* X.

Então, a relação que associa a cada $p \in p$ *a integral* $\int \Gamma(\cdot, p) d\mu$ *é fechada em* p.

Demonstração: Seja (p_k) uma sequência em P convergindo a p. Lembrando que $\limsup A_k$ é o conjunto de pontos aderentes da sequência (A_k), então provaremos este teorema monstrando que $\limsup(\int \Gamma(\cdot, p_k) d\mu) \subset \int \Gamma(\cdot, p) d\mu$. Com efeito, como a correspondência $\Gamma(x, \cdot)$ é, por hipótese, fechada em p, temos que $\limsup(\Gamma(x, p_k)) \subset \Gamma(x, p)$. Pela Proposição 84, $\limsup(\int \Gamma(\cdot, p_k) d\mu) \subset \int \limsup(\Gamma(\cdot, p_k) d\mu \subset \int \Gamma(\cdot, p) d\mu$, o que encerra a demonstração. □

Deste resultado, se $\Gamma : X \times P \rightrightarrows W \subset \mathbb{R}^n$, em que W é compacto, segue que se $\Gamma(x, p)$ é h.c.s. em p e temos as hipóteses do teorema anterior, então $\int \Gamma(x, p) d\mu$ é h.c.s em p. O trabalho pioneiro sobre este resultado foi de Aumann [9]. Alternativamente, em [7] Aumann sem utilizar o lema de Fatou e o teorema da convergência dominada, mas sim o teorema de Lyapunov(Teorema 81) e um teorema sobre seleções mensuráveis (em que toda correspondência Borel-mensurável a valores compactos admite uma seleção mensurável), demonstra tal fato; neste trabalho, Aumann define uma correspondência $\Gamma : X \times P \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ h.c.s como sendo uma correspondência que possui gráfico fechado, isto é, sua definição de h.c.s é mais forte que a adota aqui. Yannelis, em [33], estende tais resultado para o caso em que $\Gamma : X \times P \rightrightarrows Y$, sendo

Y um espaço de Banach separável. Debreu, em [14], já havia estabelecido tais resultados para o caso em que Y seja um espaço de Banach, entretanto, este utilizou uma noção de convergência, para provar o teorema da convergência dominada em dimensão infinita, distinta da definição dada a partir dos limites de Kuratowsky.

A proposição seguinte, dada em [31], ilustra algumas propriedades básicas para a integral de Aumann.

Proposição 90 *Sejam* $\Gamma, \Psi : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Então:*

(i)Se $\Gamma(x) \subset \Psi(x)$ $\mu - q.s.$ *então* $\int \Gamma d\mu \subset \int \Psi d\mu$.

(ii)Se $\lambda\Gamma(x) = \Gamma(\lambda x)$ *então* $\int \lambda\Gamma d\mu = \lambda \int \Gamma d\mu$.

(iii)Se Γ *e* Ψ *são fechadas e integravelmente limitadas, então* $\int(\Gamma + \Psi)d\mu = \int \Gamma d\mu + \int \Psi d\mu$.

Assim, sob condições razoáveis, a integral é linear.

A Integral e a Função Suporte.

Pelos teoremas anteriores temos que, quando a medida μ é sem-átomos, a integral é um conjunto convexo e, ainda, se a correspondência é a valores fechados, sua integral é um conjunto compacto. A questão que estamos interessados agora, é saber o que ocorre com a função suporte associada à integral de uma correspondência. O teorema seguinte trata de tal questionamento:

Teorema 91 *Se* $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *é Borel-mensurável* $(G_\Gamma \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *e a valores fechados, então* $\sigma_{\int \Gamma d\mu}(y) = \int \sigma_{\Gamma(\cdot)}(y) d\mu$.

Demonstração: Observamos que $\sigma_{\int \Gamma d\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ esta definida por $\sigma_{\int \Gamma d\mu}(x) = \sup\limits_{z \in \int \Gamma d\mu} \langle x, z \rangle$.

Fixemos agora um $y \in \mathbb{R}^n$ e consideremos a forma linear π associada com y, isto é: $\pi(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Então, temos que:

$\sigma_{\int \Gamma d\mu}(y) = \sup\limits_{x \in \int \Gamma d\mu} \langle x, y \rangle = \sup \pi(\int \Gamma d\mu) = \int \sup \pi(\Gamma(x)) d\mu(x) =$

$\int \sup\{\pi(z) : z \in \Gamma(x)\}) d\mu(x) = \int \sup\{\langle z, y \rangle : z \in \Gamma(x)\} d\mu(x) = \int \sigma_{\Gamma(x)}(y) d\mu(x)$, isto é, $\sigma_{\int \Gamma d\mu}(y) = \int \sigma_{\Gamma(x)}(y) d\mu(x)$. □

Corolário 92 *Sejam* F, G *correspondências nas condições do teorema anterior.*

Então, $H(\int F d\mu, \int G d\mu) \leq \int H(F(\cdot), G(\cdot)) d\mu$.

Demonstração: Utilizando a caracterização da métrica de Hausdorff, dada na Observação 30, vemos que:

$$H(\int Fd\mu, \int Gd\mu) = \sup_{y\in\mathbb{S}^{n-1}} \left|\sigma_{\int Fd\mu}(y) - \sigma_{\int Gd\mu}(y)\right| = \sup_{y\in\mathbb{S}^{n-1}} \left|\int \sigma_{F(\cdot)}(y)d\mu - \int \sigma_{G(\cdot)}(y)d\mu\right| =$$
$$= \sup_{y\in\mathbb{S}^{n-1}} \left|\int\{\sigma_{F(\cdot)}(y) - \sigma_{G(\cdot)}(y)\}d\mu\right| \leq \sup_{y\in\mathbb{S}^{n-1}} \int \left|\sigma_{F(\cdot)}(y) - \sigma_{G(\cdot)}(y)\right| d\mu =$$
$$= \int \sup_{y\in\mathbb{S}^{n-1}} \left|\sigma_{F(\cdot)}(y) - \sigma_{G(\cdot)}(y)\right| d\mu = \int H(F(\cdot), G(\cdot))d\mu. \qquad \square$$

Sabemos, pela Observação 30, que se $A, B \in KC(\mathbb{R}^n)$ então $A = B \Leftrightarrow \sigma_A = \sigma_B$. Assim, sendo $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ integravelmente limitada, fechada com μ sem-átomos, então $\int \Gamma d\mu \in KC(\mathbb{R}^n)$. Logo, $A = \int \Gamma d\mu \Leftrightarrow \sigma_A = \sigma_{\int \Gamma d\mu}$. Mas, pelo Teorema 91, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, $\sigma_{\int \Gamma d\mu}(y) = \int \sigma_{\Gamma(\cdot)}(y)d\mu$, o que nos permite conhercer pontualmente $\sigma_A(y)$, para cada y$\in \mathbb{R}^n$. Assim, podemos reconstruir o conjunto compacto-convexo $\int \Gamma d\mu$ através de sua função suporte.

Exemplo: Seja $A \in KC(\mathbb{R}^n)$ e consideremos a correspondência:

$$\begin{aligned} \Upsilon &: [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n \\ x &\longrightarrow \Upsilon(x) = A \end{aligned}$$

Então, $\int \Upsilon d\mu = (b-a)A$. Com efeito, como $\sigma_{\int \Upsilon d\mu}(y) = \int \sigma_{\Upsilon(\cdot)}(y)d\mu$,
$\sigma_{\int \Upsilon d\mu}(y) = \sigma_{\int_{[a,b]} Adt}(y) = \int_{[a,b]} \sigma_A(y)dt = \sigma_A(y)\int_{[a,b]} dt = (b-a)\sigma_A(y) =$
$= \sigma_{(b-a)A}(y), \forall y \in \mathbb{R}^n$. Logo, $\sigma_{\int \Upsilon d\mu} = \sigma_{(b-a)A} \Leftrightarrow \int \Upsilon d\mu = (b-a)A$. $\square$

Exemplo: Seja $Z : [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ tal que $Z(t) = B[0,t] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq t\}, \forall t \in [0,1]$. Observemos que Z é a valores fechados e integravelmente limitada, portanto integrável, e ainda, $\int_{[0,1]} Z(t)dt = B[0, \frac{1}{2}]$. Com efeito, calculemos $\int_{[0,1]} Z(t)dt$.

Temos que, para todo $t \in [0,1]$:
$\sigma_{Z(t)}(y) = \sigma_{B[0,1]}(y) = \sup_{a\in B[0,1]} \langle a, y\rangle = \left\langle t\frac{y}{\|y\|}, y\right\rangle = \frac{t}{\|y\|}\langle y, y\rangle = t\|y\|, \forall y \in \mathbb{R}^n$.
Logo, $\int \sigma_{Z(t)}(y)dt = \int t\|y\|\,dt = \|y\|\int tdt = \frac{\|y\|}{2} = \sigma_{\int Zdt}(y), \forall y \in \mathbb{R}^n$.
Por outro lado, notemos que para $t = 1/2$, $\sigma_{B[0,\frac{1}{2}]}(y) = \frac{\|y\|}{2}, \forall y \in \mathbb{R}^n$. Ou seja, temos que:
$\sigma_{\int Zdt} = \sigma_{B[0,\frac{1}{2}]} \Leftrightarrow \int Zdt = B[0, \frac{1}{2}]$ $\square$

A Integral e a Envolvente Convexa.

Uma questão interessante na integração de correspondência, é o estudo da relação entre a integral de uma correspondência Γ e a integral de sua envolvente convexa $co\Gamma$ ou a integral de sua envolvente convexa fechada $\overline{co}\Gamma$. Para o caso da envolvente convexa fechada, segue a seguinte proposição.

Proposição 93 *Seja $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ uma correspondência a valores fechados e integravelmente limitada, em que o espaço de medida (X, A, μ) não possua átomos. Então $\int \Gamma d\mu = \int \overline{co}\Gamma d\mu$.*

Demonstração: Sabemos que pelo Teorema 3, item (v), para todo subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, é certo que: $\sigma_A = \sigma_{\overline{co}A}$ e assim, como Γ é a valores fechados, integravelmente limitada e μ é sem-átomos, então $\int \Gamma d\mu \in KC(\mathbb{R}^n)$. Logo, $\sigma_{\int \Gamma d\mu} = \sigma_{\int \overline{co}\Gamma d\mu}$, e pela Observação 30, temos que $\int \Gamma d\mu = \int \overline{co}\Gamma d\mu$. □

Vejamos um exemplo:

Exemplo: Considerando a correspondência $F : [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$, definida por $F(t) = \{a, b\}, \forall t$. Logo, $\int_{[0,1]} F(t)dt = \int_{[0,1]} \overline{co}F(t)dt = \int_{[0,1]}[a,b]dt = [a,b]$. □

Uma outra questão, mais difícil, é saber a relação entre $\int \Gamma d\mu$ e $\int co\Gamma d\mu$. A proposição a seguir responde esta questão.

Proposição 94 *Se $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$ é Borel-mensurável, então $co \int \Gamma d\mu = \int co\Gamma d\mu$. Daí, se μ não possui átomos, então $\int \Gamma d\mu = \int co\Gamma d\mu$.*

Demonstração: ver em [9]. □

Exemplo: Considerando, novamente, a correspondência $F : [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$, definida por $F(t) = \{a, b\}, \forall t$. Como $coF(t) = [a,b], \forall t \in [0,1]$, segue que $\int_{[0,1]} F(t)dt = \int_{[0,1]}[a,b]dt = [a,b]$. □

Exemplo: Seja μ a medida usual de Lebesgue sobre $[0,1]$ e seja $\{1\}$ um átomo com medida $\mu(\{1\}) = 5$. Se G é definida por $G(x) = \{2,3\}, \forall x \in [0,1]$. Então temos que:

$\int G d\mu = [12, 13] \cup [17, 18]$, enquanto que $\int coG d\mu = [12, 18]$. $\square$

1.5.4 A Derivada de Radon-Nikodym para Correspondências.

Vamos introduzir, inicialmente, alguns conceitos necessários para a apresentação dos resultados desta seção.

Definição 95 *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito um subespaço* afim *se $\forall y_1, y_2 \in A$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \in A$.*

Desta definição segue o conceito de *envolvente afim*, como abaixo:

Definição 96 *A* envolvente afim *de um subconjunto $B \subset \mathbb{R}^n$, denotada por afB, é a intersecção de todos os subconjuntos afim de $\mathbb{R}^n$ que contêm B.*

Definição 97 *O* interior relativo *de um subconjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$, denotado por irC, é o conjunto $irC = \{v \in afC : \exists \eta > 0$ em que $\forall u \in afC$ tenhamos que $u \in C$ e $\|u - v\| \leq \eta\}$.*

Vamos supor, nesta seção, que o espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ seja finito.

Até agora sempre trabalhos com correspondências do tipo $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, existem também muitos problemas em que podemos associar subconjuntos de X a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, como veremos na segunda parte deste trabalho. Para isso, vamos introduzir a noção de correspondências do tipo $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, ou seja, correspondências que associam a cada elemento $A \in \mathcal{A}$, um subconjunto não-vazio $\Gamma(A) \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 98 *Uma correspondência $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é dita* σ-aditiva *se, para toda sequência (A_k) de elementos disjuntos contida em $\mathcal{A}$, $\Gamma(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \Gamma(A_k)$.*

O lado direito da igualdade é, por definição, igual ao conjunto:

$$\{y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{k \in \mathbb{N}} y_k,\ y_k \in \Gamma(A_k),\ \sum_{k \in \mathbb{N}} \|y_k\| < \infty\}$$

Os principais teorema desta seção são atribuídos ao trabalho de Artstein [5], o qual utiliza o termo *set value measures* para correspondências do tipo $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ contáveis-aditivas.

Assim como definimos a função suporte para a classe de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, naturalmente podemos estender tal definição para correspondências com valores em $\mathbb{R}^n$. Assim, dada uma correspondência $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$, fazemos $\sigma_{\Gamma(x)}(p) = \sup\limits_{y\in\Gamma(x)} \langle p, y\rangle$.

Proposição 99 *Seja* $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *σ-aditiva, e seja* $p \in \mathbb{R}^n$. *Para todo* $A \in \mathcal{A}$, *sejam:*

(i)$\mu_p(A) = \sup\limits_{y\in\Gamma(A)} \langle p, y\rangle$

(ii)$\Gamma_p(A) = \{y \in \Gamma(A) : \mu_p(A) = \langle p, y\rangle\}$

Então, (i) define uma medida μ_p *sobre* $\mathcal{A}$ *com valores em* $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *e (ii) define uma relação* Γ_p *contável-aditiva de* $\mathcal{A}$ *em* $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: (i) Temos que $\Gamma(\emptyset) = \{0\}$, pois em caso contrário, $\exists y \in \Gamma(\emptyset)$ tal que $y \neq 0$ e como $\Gamma(\emptyset) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(\emptyset)$, teríamos uma contradição. Assim $\mu_p(\emptyset) = 0$.

Ainda, temos que, seja qual for $\Gamma : A \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$, $\mu_p(\mathcal{A}) \subset]-\infty, +\infty]$, pois vemos que $\mu_p(A) = \sigma_{\Gamma(A)}(p)$.

Mostremos que μ_p é $\sigma-$aditiva. Com efeito, seja (A_k) uma sequência de elementos disjuntos em $\mathcal{A}$. Escolhendo $y \in \Gamma(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k)$, temos que $y = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} y_k$, com $y_k \in A_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Tomando $\langle p, y\rangle = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \langle p, y_k\rangle$, e disto segue que

$$\mu_p(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sup_{y\in\Gamma(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k)} \langle p, y\rangle = \sup_{y\in\Gamma(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k)} (\sum_{k\in\mathbb{N}} \langle p, y_k\rangle) =$$

$$= \sup_{y\in\Gamma(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k)} (\lim_m \inf \sum_{k=1}^{m} \langle p, y_k\rangle) \leq \lim_m \inf \sum_{k=1}^{m} \sup_{y\in\Gamma(A_k)} \langle p, y_k\rangle = \lim_m \inf \sum_{k=1}^{m} \mu_p(A_k).$$

Se $\mu_p(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \infty$, não temos mais nada a demonstrar. Todavia, se $\mu_p(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k) < \infty$, temos que $\mu_p(A_k) \leq \mu_p(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k) < \infty$. Agora, seja $\eta > 0$ dado, e em cada conjunto $\Gamma(A_k)$, $k \in \mathbb{N}$, escolhemos um ponto z_k satisfazendo a condição $\mu_p(A_k) - \langle p, z_k\rangle < 2^{-k}\eta$.

Definindo $v_r = \sum\limits_{k=1}^{r} z_k + \sum\limits_{k=r+1}^{\infty} y_k$, temos que $v_k \in \Gamma(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k)$ e $\mu_p(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k) \geq \lim_r \sup \langle p, v_r\rangle \geq \lim_r \sup \sum\limits_{k=1}^{r} \mu_p(A_k) - \eta$. Como $\eta > 0$ é arbitrário, $\mu_p(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k) \geq \lim_r \sup \sum\limits_{k=1}^{r} \mu_p(A_k)$. Logo, $\mu_p(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu_p(A_k)$.

(ii)Seja (A_k) uma sequência de elementos disjuntos de $\mathcal{A}$. Mostremos que $\Gamma_p(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_p(A_k)$.

($\subseteq$)Seja $y \in \Gamma_p(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k)$. Fazendo $y = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} y_k$ com $y_k \in \Gamma_p(A_k)$, obtemos que $\langle p, y\rangle = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \langle p, y_k\rangle \leq \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu_p(A_k) = \mu_p(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \langle p, y\rangle$, isto é, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \langle p, y_k\rangle = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu_p(A_k)$. Agora temos que mostrar que, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\langle p, y_k\rangle = \mu_p(A_k)$, isto segue de, combinando o fato de que, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\langle p, y_k\rangle \leq \mu_p(A_k)$ e $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \langle p, y_k\rangle = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu_p(A_k)$, não poderemos ter algum índice $j \in \mathbb{N}$ tal que $\langle p, y_k\rangle < \mu_p(A_k)$, o que nos proporciona a igualdade desejada.

($\supseteq$)Seja $y \in \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_p(A_k)$, ou seja, $y = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} y_k$, com $y_k \in \Gamma_p(A_k)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Daí,$\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\langle p, y_k\rangle = \mu_p(A_k)$ implicando que $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} y_k = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu_p(A_k) = \mu_p(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \langle p, y_k\rangle = \langle p, y\rangle$, ou seja, $y \in \Gamma_p(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k)$. □

Observação 100 *A relação Γ_p não é necessariamente uma correspondência, pois $\Gamma_p(A)$ pode ser vazio. Não obstante, se Γ é a valores compactos então Γ_p é uma correspondência.*

Definição 101 *Uma correspondência $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é dita absolutamente contínua com respeito a medida μ se para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$ implicar que $\Gamma(A) = \{0\}$. Como notação utilizamos $\Gamma \ll \mu$.*

Proposição 102 *Seja a medida μ_p, como definida na Proposição 99. Dado $p \in \mathbb{R}$, então se $\Gamma \ll \mu$ então $\mu_p \ll \mu$.*

Demonstração: Fixado $p \in \mathbb{R}^n$, seja $A \in \mathcal{A}$ arbitrário tal que $\mu(A) = 0$, pela hipótese, $\Gamma(A) = \{0\}$. Daí, $\mu_p(A) = \sup\limits_{y\in\Gamma(A)} \langle p, y\rangle = \sup\limits_{y\in\{0\}} \langle p, y\rangle = 0$. □

Recordamos agora que $D(\sigma_A)$ é o domínio efetivo da função suporte σ_A do conjunto A. Definimos então o conjunto $L(A) = D(\sigma_A) - D(\sigma_A)$. Assim, $D(\sigma_A)$ é um cone que gera o subspaço $L(A)$ de $\mathbb{R}^n$.

Lema 103 *Seja $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ $\sigma-$aditiva tal que $\Gamma \ll \mu$. Assumindo que exista uma subspaço M de $\mathbb{R}^n$ tal que $M = L(\Gamma(A))$ para cada $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) > 0$. Então existe uma correspondência $\Psi : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$* $\mathcal{A}$-mensurável *tal que:*

(i)Para todo $x \in X$, $\Psi(x)$ é fechado e convexo.

(ii)Para a função suporte σ de Ψ, temos que $\int_A \sigma_{\Psi(x)}(p)d\mu = \mu_p(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ e $\forall p \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: ver [5] e [26]. □

O lema a seguir generaliza o anterior ao retirar a necessidade da hipótese de existência de um subspaço M.

Lema 104 *Seja* $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *$\sigma-$aditiva tal que* $\Gamma \ll \mu$. *Então existe uma correspondência* $\Psi : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ $\mathcal{A}$-mensurável *tal que:*

(i)Para todo $x \in X$, $\Psi(x)$ *é fechado e convexo.*

(ii)Para a função suporte σ *de* Ψ, *temos que* $\int_A \sigma_{\Psi(x)}(p)d\mu = \mu_p(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ *e* $\forall p \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Inicialmente, observemos que se $A_1 \subset A_2$ então $L(\Gamma(A_1)) \subset L(\Gamma(A_2))$, e substituindo a condição do Lema 103 de que exista uma subspaço M de $\mathbb{R}^n$ tal que $M = L(\Gamma(A))$, para cada $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) > 0$, pela seguinte construção: $X = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} X_j$ para algum $(X_j : j \in \mathbb{N})$ tal que $L(\Gamma(A)) = M_j$ seja verdadeiro para todo $A \subset X_j$ com $\mu(A) > 0$ e para cada j; daí o Lema 103 vale em cada X_j.

Assim, seja $A_0 = \{A \subset X : \mu(A) > 0\}$, e fixemos $n_0 = \max_{A \in A_0} \dim L(\Gamma(A))$. Vamos denotar por $\mathcal{L}$ o conjunto $\{L(\Gamma(A)) : \dim L(\Gamma(A)) = n_0$ para algum $A\alpha \in A_0$ com $\mu(A\alpha) > 0\}$. Como n_0 é o máximo para o qual $A \subset A\alpha$ e $\mu(A) > 0$ temos que $L(\Gamma(A)) = L(\Gamma(A\alpha))$. Supondo, ainda, que $L(\Gamma(A\alpha)) \neq L(\Gamma(A\beta))$. Como $L(\Gamma(A\alpha)) \subset L(\Gamma(A\alpha \cap A\beta)$ e $L(\Gamma(A\beta)) \subset L(\Gamma(A\alpha \cap A\beta)$, obtemos que $\dim L(\Gamma(A\alpha \cap A\beta) > n_0$. Daí, se $L(\Gamma(A\alpha)) \neq L(\Gamma(A\beta))$ temos $\mu(A\alpha \cap A\beta) = 0$, e assim $\mathcal{L}$ é no máximo um conjunto enumerável.

Agora, para cada α se pode encontrar algum $X\alpha$, uma união enumerável de conjuntos A_j tais que $L(\Gamma(A_j)) = L(\Gamma(A\alpha))$, e $X\alpha$ é maximal no sentido de que se $L(\Gamma(A)) = L(\Gamma(A\alpha))$ então $\mu(A \backslash X\alpha) = 0$. Assim, obtemos uma família enumerável de conjuntos mensuráveis e disjuntos $\{X\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ em que o Lema 103 seja válido em cada espaço de medida $(X\alpha, A_{|X\alpha}, \mu_{|X\alpha})$, onde $A_{|X\alpha}$ e $\mu_{|X\alpha}$ denotam as respectivas restrições de A e μ a $X\alpha$.

Seja $X^{(1)} = X \backslash \bigcup \alpha X\alpha$; temos então que $X^{(1)}$ é mensurável. Definindo $A_1 = \{A \subset X^{(1)} : \mu(A) > 0\}$ e fixando $n_1 = \max_{A \in A_1} \dim L(\Gamma(A))$. Então $n_1 < n_0$. O argumento é repetido para $X^{(1)}$ e analogamente obtemos $X^{(2)}$, e assim sucessivamente. Após um número finito de passos, X é decomposto em uma família enumerável de conjuntos X_j, em que o Lema 103 é aplicado para cada $(X_j, A_{|X_j}, \mu_{|X_j})$. Como μ_p é $\sigma - aditivam$, a prova esta completa. □

Vamos introduzir, agora, o conceito de *seletor* para uma correspondência do tipo $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Tal definição segue a idéia dada quando discutimos a existência de seleções para correspondência do tipo $\Gamma : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$.

Definição 105 *Uma medida vetorial* ϕ *é um* seletor *para* $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *se* $\phi(A) \in \Gamma(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

Lema 106 *Seja* $\Psi : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ $\mathcal{A}$-mensurável *a valores fechados e compactos do Lema 104. Definindo a correspondência* $J : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *por* $J(x) = ir\Psi(x)$, $\forall x \in X$. *Então o conjunto* $\mathcal{S}(J)$ *é não-vazio.*

Lema 107 *Seja* $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ $\sigma-$*aditiva a valores convexos tal que* $\Gamma \ll \mu$. *Seja também* $\Psi : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ $\mathcal{A}$-mensurável *a valores fechados e compactos do lema 104. Definindo a correspondência* $J : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *por* $J(x) = ir\Psi(x)$, $\forall x \in X$. *Então* $\int_A J(x)d\mu = ir\Gamma(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

Demonstração: ver [5] e [26]. □

A partir destes dois lemas anteriores, estabelecidos originalmente em [5], vamos estabelecer condições suficientes para a existência de uma seletor ϕ de Γ tal que, dado $A_0 \in \mathcal{A}$ e $y \in \Gamma(A_0)$, tenhamos que $\phi(A_0) = y$.

Teorema 108 *Seja* $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ $\sigma-$*aditiva a valores convexos tal que* $\Gamma \ll \mu$. *Então, dado* $A_0 \in \mathcal{A}$, *para todo ponto* $y \in \Gamma(A_0)$, *existe um seletor* ϕ *de* Γ *tal que* $\phi(A_0) = y$.

Demonstração: ver [5] e [26]. □

Exemplo: Seja v a medida de Lebesgue sobre o intervalo $[0, 1]$, e vamos considerar a correspondência Γ definida por: $\Gamma(A) = \mathbb{N}$ se $v(A) > 0$ e $\Gamma(A) = \{0\}$ se $v(A) = 0$. Pela construção $\Gamma \ll v$ e Γ não é a valores convexos. Qualquer seletor ϕ de Γ é sem-átomos pois $\phi \ll v$. Agora supondo que $\phi([0, 1]) = 1$; segue que a imagem de ϕ é o intervalo $[0, 1]$, o que claramente é uma contradição. Daí o único seletor neste caso é a medida indenticamente nula. □

Exemplo: Seja novamente v a medida de Lebesgue sobre $[0, 1]$, e consideremos a correspondência Γ definida por: $\Gamma(A) = \{0\}$ se A é enumerável e $\Gamma(A) = (0, \infty)$ se A é não-enumerável. Como podemos construir um conjunto não-enumerável de medida de Lebesgue nula (conjunto de Cantor), temos que Γ não admite nemhum seletor. □

Estabeleceremos, então, o teorema de Radon-Nikodym para correspondências; mas antes, daremos uma defincão e alguns conceitos, como segue:

Definição 109 *Seja* $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *σ-aditiva tal que* $\Gamma \ll \mu$. *Uma correspondência* $\Psi : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *é uma derivada de Radon-Nikodym de* Γ *com respeito a* μ *se* $\int_A \Psi(x)d\mu = \Gamma(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

Dadas $J_1, J_2 : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ contável-aditivas, escrevemos $J_1 \subset J_2$ quando para todo $A \in \mathcal{A}$, $J_1(A) \subset J_2(A)$. Tomando, então, $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ σ-aditiva a valores convexos, vamos denotar por $\mathcal{M}$ como sendo a coleção de todas as correspondências contável-aditivas a valores convexos $J : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ satisfazendo a condição: $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{J(A)} = \overline{\Gamma(A)}$. Ainda, denotaremos o maior e o menor elemento em $\mathcal{M}$, com respeito a inclusão ($\subset$), quando estes existirem, por Γ^{sup} e Γ^{inf}, respectivamente.

Segue abaixo um tipo de teorema de Radon-Nikodym para correspondência:

Teorema 110 *Seja* $\Gamma : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *σ-aditiva a valores convexos tal que* $\Gamma \ll \mu$. *Então* $\mathcal{M}$ *admite um maior elemento* Γ^{sup}, *e* Γ^{sup} *possui uma derivada de Radon-Nikodym* $\mathcal{A}$-mensurável *a valores fechado e convexos.*

Demonstração: Seja $\Psi : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *$\mathcal{A}$-mensurável* a valores fechados e compactos do Lema 104. Temos que para todo $A \in \mathcal{A}$, $\int_A \Psi dv \subset \Gamma(A)$.

Como consequência do Lema 107, $ir\Gamma(A) \subset \int_A \Psi d\mu$. E assim segue que a correspondência σ-aditiva $F(A) = \int_A \Psi d\mu$ pertence a $\mathcal{M}$. Necessitamos provar agora que $F = \Gamma^{\text{sup}}$. Supondo que $h \in \mathcal{M}$ e $y \in h(A)$. O Teorema 108 nos diz que existe um seletor γ para h para o qual $\gamma(A) = y$. Agora, temos que γ possui uma derivada de Radon-Nikodym com respeito a μ e vamos denotá-la por ϕ. Para todo $p \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathcal{A}$, obtemos que $\langle p, \int_B \gamma d\mu \rangle = \langle p, \phi(B) \rangle \leq \mu_p(B)$. Daí, $\langle p\phi(x) \rangle \leq \sigma_{\Gamma(x)}(p)$ $\mu - q.s.$ em X.

Seguindo, vamos requerer que $\phi(x) \in \Psi(x)$ $\mu - q.s.$ em X. Vamos utilizar a decomposição $(X_j : j \in \mathbb{N})$ de X em conjuntos disjuntos discutida no Lema 104. Para cada conjunto X_j da decomposição, podemos encontrar uma sequência (p_k) em $\mathbb{R}^n$ tal que $\Psi(x) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{y : \langle p_k, y \rangle \leq \sigma_{\Gamma(x)}(p_k)\}$ $\mu - q.s.$ em X_j. Podemos ver que $\langle p_k, \phi(x) \rangle \leq \sigma_{\Gamma(x)}(p_k)$ $\mu - q.s.$ em X_j. Daí, o requerimento acima é válido, e como ϕ é uma seleção integrável de Ψ, temos que $y = \int_A \phi(x)d\mu$ é um elemento de Γ^{sup}; o que encerra a demonstração. □

Capítulo 2

Aplicações à Economia: O Modelo de Equilíbrio Geral com Agentes Mensuráveis.

2.1 Introdução.

A Teoria do Equilíbrio Geral é uma promissora área de investigação na teoria econômica. Desde a publicação de *A Riqueza das Nações* de Adam Smith, em 1776, o questionamento sobre a possibilidade de o sistema social, em que cada indivíduo age segundo seus próprios interesses, ou seja, sob um regime descentralizado, alcançar um resultado em que cada agente tenha suprida suas necessidades de maneira satisfatória, obteve grande avanço no que se refere ao processo de alocação de recursos escassos.

Depois da obra de Adam Smith, o grande expoente foi Walras, formulando uma criativa forma de realização dos intercâmbios que levariam a uma distribuição dos recursos, em que todos os participantes do mercado se sentiriam satisfeitos com o resultado, levando em consideração as dotações iniciais que estes dispunham. Todavia, o intrumental matemático da época ainda não conferia a sua obra uma formalidade matemática coerente. Com efeito, só com a obra de Arrow & Debreu [3], de 1954, é que observamos a consolidação de um tratamento matemático bem fundamentado do problema, utilizando o teorema do ponto fixo de Kakutani (Teorema 56), provado bem após a obra de Walras. Daí em diante, os avanços na Teoria do Equilíbrio Geral são inúmeros.

Um dos principais nomes da Teoria do Equilíbrio Geral é Robert Aumann, o qual publicou em 1964 um artigo criticando a idéia de trabalharmos a noção de mercados perfeitamente competitivos com um número finito de agentes. Propondo um modelo com um contínuo de agentes, ou mais precisamente, um modelo em que os agentes são caracterizados por um espaço de medida sem átomos, Aumann em [10] expõe os conceitos clássicos de equilíbrio Walrasiano, ou competitivo, e de núcleo (*core*) para uma economia de puras trocas (ou seja, sem produção) e prova a equivalência entre estes conceitos para uma economia com um contínuo de agentes. Ainda, Aumann em [8], prova a existência de equilíbrio geral para uma economia de puras trocas, sem a usual hipótese, até então, de preferências convexas.

A equivalência provada por Aumann, entre o conjunto de alocações que respeitam a definição de um equilíbrio competitivo e o conjunto de alocações pertencentes ao núcleo da economia, em [10] é generalizada por Hildenbrand para uma economia com produção[1] em [17]. No artigo [19], o mesmo autor estende o resultado de existência de equilíbrio competitivo, dado em [8], para uma economia com produção com um finito de firmas, em que os consumidores são caracterizados por um espaço de medida, que pode ser particionado em um espaço sem-átomos e outro com átomos; neste último os agentes possuem preferências convexas.

A questão da otimalidade de Pareto para economias com agentes mensuráveis, e sua relação com conceito de equilíbrio competitivo, foi tratada por Hildenbrand em [18].

Assim, neste segundo capítulo, vamos apresentar alguns destes fatos, destacando a utilização dos resultados expostos no primeiro capítulo desta dissertação.

Inicialmente, vamos estabelecer a existência de equilíbrio competitivo para uma economia de puras trocas, provado em [8]. Veremos que neste resultado utilizaremos o fato de que a integral de Aumann, de uma correspondência definida sobre um espaço sem átomos e a valores no $\mathbb{R}^n$, é um conjunto convexo. E este fato é o que possibilita descartarmos a hipótese de convexidade nas preferências.

Daremos, finalizando, a generalização realizada por Hildenbrand [17] do trabalho pioneiro de Aumann[10], em que temos a equivalência dos conceitos de equilíbrio competitivo e núcleo de uma economia com agentes mensuráveis e com produção (*coalition production economies*). Neste resultado, utilizaremos o teorema de Radon-Nikodym para correspondências.

[1] Hildenbrand utiliza originalmente o termo *coalition production economies* para a caracterização de uma economia com produç ão. A razão disto é o fato de se associar a cada possível coalizão de agentes da economia uma certa tecnologia.

Vale mencionar que não vamos tratar o caso de economias com um número infinito de bens. Bewley foi o pionero no tratamento das questões aqui abordadas para o caso de infinitos bens e estendeu ambos os resultados apresentados neste capítulo nos trabalhos [12] e [13].

Um ponto importante a ser destacado é que a existência de equilíbrio em uma economia com um contínuo de agentes, apresentado em [10], pode ter a demonstração da existência de equilíbrio competitivo feita sem a utilização da teoria de correspondência. Como encontrado em [23], Ichiishi conclui que num contexto contínuo a economia apresenta, genericamente, uma *função* de demanda contínua. Intuitivamente, qualquer economia com um contínuo de agentes pode ser aproximada por uma sequência de economias que apresente uma função de demanda contínua, e esta última tem a demonstração da exitência de equilíbrio sem a necessidade de recorrermos aos argumentos da teoria de correspondência.

2.2 Existência de Equilíbrio Competitivo para uma Economia de Puras Trocas com um Contínuo de Agentes.

2.2.1 Definições e o Teorema de Existência.

Uma economia de puras trocas é um sistema de mercado sem produção, ou seja, é um modelo para estudar o intercâmbio entre agentes econômicos que, de posse de uma determinada quantia de cada bem presente na economia, buscam satisfazer suas necessidades ao máximo trocando entre si suas dotações sem haver a interferência de um orgão centralizado. As trocas são regidas por um sistema de preços que especifica as possibilidades de trocas para uma dada dotação inicial, associando a cada bem um valor que chamamos de preço. O problema central nesta teoria é perguntar, sob que condições, se estas existem, encontramos um sistema de preços em que, aos agentes realizarem as trocas sob este sistema, tenhamos um estado para a economia configurado por dotações que satisfaçam cada agente de modo a não haver mais incentivos às trocas; tal estado para a economia é dito um equilíbrio competitivo.

Veremos que um modelo com um contínuo de agentes possibilita obtermos um contexto em que tenhamos as condições suficientes para uma resposta positiva a tal questão, isto é, possibilite a existência de equilíbrio competitivo. Um modelo com um contínuo de agentes tem por objetivo modelar a idéia de uma economia perfeitamente competitiva, ou seja, uma economia em que nenhum agente tenha o poder de interferir nos preços, assim os agentes tomam os preços como dados. De maneira um pouco mais geral, podemos pensar o espaço de agentes como um espaço de medida sem-átomos; isto implica que cada agente, visto como um ponto neste espaço, tem medida nula. Vamos, então, iniciar a construção do modelo:

Trabalhamos com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^l$; a dimensão l do espaço representa o número de diferentes bens para serem trocados no mercado.

Observação 111 *Utilizamos, neste capítulo, a seguinte notação:* $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^{l.}$

$$\begin{aligned} x &> y \Leftrightarrow x_i > y_i, \forall i \in \{1, ..., l\} \\ x &\geqq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i, \forall i \in \{1, ..., l\} \\ x &\geq y \Leftrightarrow x \geqq y \text{ e } x \neq y \end{aligned}$$

Uma cesta de bens x é um ponto no octante não negativo $\Omega = \mathbb{R}^l_+$. A i-ésima coordenada de uma cesta x representa a quantidade do bem i contido nesta cesta x.

O conjunto de agentes (*traders*) é o intervalo compacto $T = [0, 1]$. Notemos que $(T, \mathcal{B}(T), m)$, é um espaço de medida sem átomos(m é a medida usual de Lebesgue e $\mathcal{B}(T)$ é a família dos conjuntos Borel-mensuráveis de T). Poderíamos adotar qualquer espaço de medida sem-átomos, que é a condição suficiente para que cada agente individual não possua *influência.*

Definição 112 *Um* alocação *(uma distribuição de cesta sobre os espaço de agentes) é uma função $f : T \to \Omega$, em que, cada coordenada é Lebesgue integrável sobre T. Ou seja, temos o conjunto $L^1(T, \Omega, m)$ representando o conjunto de alocação da economia.*

Para cada agente $t \in T$, associamos uma cesta ou dotação inicial $i(t)$, isto é, temos um *alocação inicial* $i : T \to \Omega$.

Por hipótese:

$$\int_T i \overset{notação}{=} \int_T i(t)dt > 0$$

O que significa que cada bem esta presente no mercado.

Definição 113 *Uma alocação factível (*alocação final *ou* troca*) é uma alocação f para o qual*

$$\int_T f = \int_T i$$

Assim definimos $\Lambda(i) = \{f \in L^1(T, \Omega, m) : \int_T f = \int_T i\}$

Vamos agora especificar o critério de escolha dos agentes a partir de uma relação de quasi-ordem sobre o espaço de escolha Ω. Para cada agente t definimos uma relação $\succcurlyeq_t$ sobre Ω, chamada de relação de preferência-indiferença e vamos supor que esta é uma quasi-ordem, ou seja, $\succcurlyeq_t$é reflexiva, transitiva e completa. Respectivamente, definimos:

$$(i)x \succ_t y \text{ quando } x \succcurlyeq_t y \text{ mas não tenhamos que } y \succcurlyeq_t x$$

$$(ii)x \backsim_t y \text{ quando } x \succcurlyeq_t y \text{ e } y \succcurlyeq_t x$$

Agora, vamos especificar um espaço de preferências do tipo (i) acima, a partir de algumas propriedades:

Definição 114 *Denotemos por* $\mathbb{P}(\Omega)$, *como sendo o conjunto de todas as relações* $\succ \subseteq \Omega \times \Omega$ *que cumprem:*

(a) Monotonicidade: $x \geq y \Rightarrow x \succ y$.

(b)Continuidade: $\forall y \in \Omega$,*os conjuntos* $\{x : x \succ y\}$ *e* $\{x : y \succ x\}$ *são abertos em relação a* Ω.

(c)Mensurabilidade: Se x *e* y *são alocações, então o conjunto* $\{t : x(t) \succ y(t)\}$ *é Borel-mensurável.*

Daí, definimos uma aplicação

$$\begin{aligned} \Psi \quad &: \quad T \to \mathbb{P}(\Omega) \\ t \quad &\longmapsto \quad \succ_t \end{aligned}$$

Assim, $\succ_t$ *é chamada de relação de preferência do agente* t, *e ainda, vemos que* Ψ *determina uma rede de preferências* $(\succ_t)_{t\in T}$. *A condição (a) significa que todo agente prefere uma cesta que tenha, ao menos, uma quantidade maior de algum dos bens. Em particular esta hipótese implica em não-saciabilidade local, ou seja, dado qualquer* $t \in T$, *para toda cesta* $x \in \Omega$ *é possível encontrar, tão próxima quanto se queira, uma outra cesta* $y \in \Omega$, *tal que* $y \succ_t x$. *Da propriedade (b) e do fato de* $\succcurlyeq_t$ *ser uma pré-ordem segue a existência de uma função utilidade* $\mathcal{U}_t : \Omega \to \mathbb{R}$, *isto é, para todo* $x, y \in \Omega$, $\mathcal{U}_t(x) \geq \mathcal{U}_t(y) \Leftrightarrow x \succcurlyeq_t y$; *e ainda* $\mathcal{U}_t$ *é contínua. Este resultado pode ser encontrado em vários textos clássicos da área, ver por exemplo [2],[21],[24] e [28]. Já a propriedade (c), nos garante que* $\mathcal{U}_t$ *pode ser escolhida de maneira que tal função seja mensurável tanto em* t *como em* x.

Para cada bem, devemos associar um preço não-negativo e, como temos l bens na economia, definimos um vetor de preços p como um vetor em $\mathbb{R}_+^l$.

Obviamente os agentes, dadas suas dotações iniciais, não podem escolher qualquer cesta $x \in \Omega$, estes podem apenas escolher aquelas cestas que são acessíveis ao seu poder de compra limitado pelo produto interno $\langle p, i(t) \rangle$ que podemos entender pela riqueza do agente t. Assim, definimos a correspondência:

$$\begin{aligned} B \quad &: \quad \mathbb{R}_+^l \times T \rightrightarrows \Omega \\ (p,t) \quad &\longmapsto \quad B_{(p,i(t))} = \{x \in \Omega : \langle p, x \rangle \leq \langle p, i(t) \rangle\} \end{aligned}$$

que nos dá o conjunto de cestas que o agente t pode adquirir a partir de trocas realizadas com suas dotações iniciais $i(t) \in \Omega$.

Assim, pelo que foi exposto podemos definir uma economia $\mathcal{E}$ como sendo uma aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \quad &: \quad T \to \Omega \times \mathbb{P}(\Omega) \\ t \quad &\longmapsto \quad (i(t), \succ_t) \end{aligned}$$

Definição 115 *Um* equilíbrio competitivo ou Walrasiano *é um par consistinto de um vetor de preços p e uma alocação f, tal que, a menos de um conjunto de medida nula*[2], *$f(t)$ é máximo com respeito a $\succ_t$, no conjunto $B_{(p,i(t))} = \{x \in \Omega : \langle p, x \rangle \leq \langle p, i(t) \rangle\}$.*

Uma *alocação de equilíbrio* é uma alocação f para o qual existe um vetor de preços p tal que o par (p, x) é um equilíbrio competitivo.

De maneira um pouco mais formal podemos definir o conjunto $W(\mathcal{E})$ de equilíbrios Walrasianos como sendo:

$$W(\mathcal{E}) = \{(p, f) \in \mathbb{R}_+^l \times \Lambda(i) : f(t) \text{ é máximo com respeito a } \succ_t \text{ no conjunto } B_{(p,i(t))}\ \mu - q.s. \\ \text{em } T\}$$

Dadas as definições, vamos enunciar o resultado principal desta seção:

Teorema 116 (EW) *Nas condições exposta anteriormente para uma economia E, existe um equilíbrio competitivo, ou seja, $W(E) \neq \emptyset$.*

[2] *Entretanto, em alguns casos vamos desconsiderar os conjuntos de medida nula.*

2.2.2 Teorema Auxiliar

Para a demonstração do Teorema (EW), vamos inicialmente demonstrar um teorema auxiliar. Vamos definir uma economia $\mathcal{M}$, consistindo de um natural l, determinado pelo número de bens na economia inicialmente tomada $\mathcal{E}$, uma alocação inicial e uma relação de preferência $\succcurlyeq_t \subseteq \Omega \times \Omega$ para cada agente t em T. Diferentemente das propriedades que definem a economia $\mathcal{E}$, dadas na seção anterior, vamos assumir para a economia $\mathcal{M}$ que :

Hipótese 1: Existe uma dotação inicial $i \in L^1(T, \Omega, m)$ para a economia $\mathcal{M}$, tal que, $i(t) > 0$ para todo $t \in T$, ou seja, todo agente possui uma quantia positiva de cada bem presente na economia. Notemos que esta é uma hipótese mais forte que aquela feita para a economia $\mathcal{E}$, que especificava apenas que $\int i > 0$.

Hipótese 2: Para esta hipótese vamos definir primeiramente:

Definição 117 *Uma cesta $x \in \Omega$ é dita um* maximal-$\succ_t$ *para as preferências do agente t se para qualquer cesta $y \in \Omega$ valer que $x \succcurlyeq_t y$.*

Daí, assumiremos que a rede de preferências $(\succ_t)_{t \in T}$ apresenta a seguinte propriedade: para todo $t \in T$, se $x > y$ então $x \succ_t y$ a menos que y seja uma cesta maximal. Esta propriedade para as preferências é conhecida como *monotonicidade fraca.* Vemos que, diferentemente da monotonicidade definida anteriormente, neste caso, dada uma cesta x que não seja maximal para os agentes, não será mais suficiente que se aumente a quantia de algum bem em suas dotações para que estes se sintam mais satisfeitos. Ainda, a existência de uma cesta maximal é impossível com a hipótese de monotonicidade.

Hipótese 3: Não somente vamos permitir a existência de uma cesta maximal, mas também vamos exigir isto para a economia $\mathcal{M}$. Mais precisamente, vamos definir:

Definição 118 *Seja v uma alocação, isto é, $v \in L^1(T, \Omega, m)$. Dizemos que a preferência do agente t é* commodity-wise-satured *em $v(t)$ se para toda cesta x e bem i, tal que $x_i \geqq v_i(t)$ tenhamos que $x \backsim_t (x_1, ..., x_{i-1}, v_i(t), x_{i+1}, ..., x_l)$.*

Ou, em outras palavras, mudando o valor da i-ésima coordenada para acima de $v_i(t)$ não alteramos o nível de satisfação. Intuitivamente, temos que a preferência pelo i-ésimo bem é saciada quando a quantidade deste bem é igual a $v_i(t)$, embora o agente t possa querer ainda mais de outro bem j, de qual detem menos do que $v_j(t)$.

Agora, seja $V : T \rightrightarrows \Omega$ uma correspondência que associa a cada $t \in T$ o hiper-retângulo $V(t) = \{x \in \Omega : x \leqq v(t)\}$, ou seja, o conjunto de cestas em que suas componentes são menores ou iguais a $v(t)$. Daí, vamos definir uma aplicação $v_t : \Omega \ni x \mapsto v_t(x) \in V(t)$ como segue: $v_t(x)$ é a cesta formada a partir de x ao substituirmos toda coordenada x_i por $v_i(t)$ quando x_i for maior que $v_i(t)$. Então a hipótese *commodity-wise-saturation* sobre $v(t)$ implica que $v_t(x) \backsim_t x$. Desta maneira, podemos restringir a escolha dos agentes ao hipercubo $V(t)$, já que para qualquer $x, y \in \Omega$ por nossa construção $x \succcurlyeq_t y \Leftrightarrow v_t(x) \succcurlyeq_t v_t(y)$.

A existência de $v(t)$ é intuitivamente coerente, ao passo ela implica dizer simplesmente que existe um limite superior para a quantidade do bem que pode ser consumida de maneira individualmente proveitosa, aconteça o que acontecer com os outros bens, sendo ou não avaliados. O requerimento de que v seja uma alocação, ou seja, $v \in L^1(T, \Omega, m)$, quer dizer que a economia como um todo pode ser *commodity-wise-satured*, ou seja, existe uma cesta (a saber, $\int vdm$) que pode ser distribuída entre os agentes de forma que cada agente t tenha sobre sua preferência a propriedade *commodity-wise-satured* em $v(t)$.

Assim, segue a hipótese: Existe uma alocação $v \in L^1(T, \Omega, m)$ tal que, toda preferência $\succ_t$ apresenta a propriedade *commodity-wise-satured* em $v(t)$.

Finalmente, para a economia $\mathcal{M}$ damos a seguinte hipótese.

Hipótese 4: *Restrição à Saturação,* x não pode ser *maximal*-$\succ_t$ a menos que $x > i(t)$.

Podemos então ver a economia $\mathcal{M}$ como uma aplicação:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \quad &: \quad T \to \Omega \times \mathbb{P}^*(\Omega) \\ t \quad &\longmapsto \quad (i(t), \succ_t) \end{aligned}$$

em que, $\mathbb{P}^*(\Omega)$ apresenta algumas diferenças com relação a $\mathbb{P}(\Omega)$: trocamos a propriedade (a) da Definição 114 pela hipótese 2 apresentada nesta seção. Além disso assumimos as hipóteses 1, 3 e 4. Estabelecemos, então, o teorema auxiliar sobre existência de equilíbrio competitivo

Teorema 119 *(Teorema Auxiliar) Se $\mathcal{M}$ satisfaz as condições expostas nas hipóteses 1,2,3 e 4 desta seção, além das propriedade de continuidade e mensurabilidade dadas nos itens (b) e (c) da Definição 114, então existe equilíbrio competitivo para $\mathcal{M}$, ou seja. $\mathcal{W}(M) \neq \emptyset$.*

Esboço da Prova do Teorema Auxiliar.

Para a demonstração, temos como ponto inicial a definição da correspondência *preferred set* $C_p(t)$, definido para cada agente t e para cada vetor de preços p, como o conjunto de cestas preferíveis ou indiferentes a todos os elementos da restrição orçamentária $B_{(p,i(t))}$. Formalmente:

$$\begin{aligned} C \quad &: \quad \mathbb{R}^l_+ \times T \rightrightarrows \Omega \\ (p,t) \quad &\longmapsto \quad C_p(t) = \{x \in \Omega : \forall y \in B_{(p,i(t))},\ x \succcurlyeq_t y\} \end{aligned}$$

Dada a correspondência *preferred set* C_p, agora fixamos $p \in \mathbb{R}^l_+$, definimos por *aggregate preferred set* o seguinte conjunto, dado pela integral de Aumann:

$$\int_T C_p dm = \{\int_T f dm : f \in S(C_p)\}$$

em que, $S(C_p)$ é o conjunto das seleções integráveis da correspondência $C_p : T \rightrightarrows \Omega$. Notemos que neste caso, $S(C_p)$ é o conjunto de alocações f tais que $f(t) \in C_p(t)$ $\mu - q.s.$ em T.

A integral de Aumann $\int_T C_p dm$ é o conjunto de todas as cestas agregadas que podem ser distribuídas entre os agentes de tal maneira que cada agente esteja, no mínimo, tão satisfeito como ele estaria ao vender suas dotações iniciais e comprando o melhor (de maneira padrão[3]) que ele poderia no mercado, aos preços p.

Como não fizemos nehuma hipótese de convexidade sobre as preferências, o conjunto $C_p(t)$ pode não ser convexo. Todavia, pelo Teorema 82, o conjunto $\int_T C_p dm$ é convexo, pois estamos trabalhando com $(T, \mathcal{B}(T), m)$, como já comentado no início deste capítulo, sendo um espaço de medida sem-átomos. Ao utilizarmos a convexidade do conjunto $\int_T C_p dm$, estaremos aptos a provar que existe um único ponto $c(p) \in \int_T C_p dm$ que seja o mais próximo de $\int idm$; Daí, definimos $h(p) = c(p) - \int idm$.

Seja $P = \{p \in \Omega : \sum_{i=1}^{l} p_i = 1\}$ o simplex dos vetores de preços normalizados, cujas coordenadas tenham soma unitária. Daí, a idéia central da prova é fazer uso de h para construir uma função contínua de P em P e então aplicar o teorema do ponto fixo de Brouwer; o ponto fixo obtido, o qual denotamos por q, resulta em um vetor de preços de equilíbrio.

[3] Entedemos como maneira padrão, o comportamento maximizador, condicionado pela sua relação de preferência, requerido na definição de Equilíbrio Walrasiano.

Definimos a função $f : P \longrightarrow \mathbb{R}^l$ como:

$$f(p) = \frac{p + h(p)}{1 + \sum_{i=1}^{l} h_i(p)}$$

Vamos mostrar, mais a frente, que $h(p) \geqq 0$. Ainda, o denominador na definição da função f nunca é igual a zero e, também, $f(p) \in P, \forall p \in P$.

Agora, supondo que q seja um ponto fixo para f. Então $q(1 + \sum_{i=1}^{l} h_i(p)) = q + h(q)$, isto é, $h(q) = \alpha q$. Por ser $h(p) \geqq 0$, $\alpha = \sum_{i=1}^{l} h_i(p) \geqq 0$. Desejamos mostrar que $h(q) = 0$. Por contradição, vamos supor que $h(q) > 0$. Pela definição de h e pela convexidade de $\int_T C_p dm$ segue que para todo $p \in \mathbb{R}^l$, o hiperplano que passa por $h(p) + \int idm$ e é perpendicular a $h(p)$ suporta $\int_T C_p dm$. Aplicando isto para $p = q$, obtemos que

$$\left\langle (y - \int idm), h(q) \right\rangle \geqq \langle h(q), h(q) \rangle = \|h(q)\|^2, \forall y \in \int_T C_p dm$$

Como $h(q) > 0, \alpha > 0$; e pelo fato de $h(q) = \alpha q$, obtemos que $\langle (y - \int idm), \alpha q \rangle \geqq \alpha^2 \|q\|^2$ e daí:

$$\left\langle (y - \int idm), q \right\rangle \geqq \alpha \|q\|^2, \forall q \in \int_T C_p dm$$

Agora, para cada t, seja $x(t)$ um ponto pertencente à restrição orçamentária $B_{(q,i(t))}$ que seja maximal com respeito a relação de preferência de t, então temos por um lado que

$$\left\langle x(t) - \int idm, q \right\rangle \leqq 0$$

e, por outro lado, $x(t) \in C_q(t)$. Daí, integrando, obtemos que

$$\left\langle (\int xdm - \int idm), q \right\rangle \leqq 0 \text{ e } \int xdm \in \int C_p dm$$

e isto é uma contradição, pois havíamos estabelecido que $\langle (y - \int idm), q \rangle \geqq \alpha \|q\|^2, \forall q \in \int_T C_p dm$. Daí, $h(q) = 0$.

O que acabamos de mostrar, significa que $\int idm \in \int C_p dm$, ou seja, existe uma alocação $g : T \longrightarrow \Omega$ tal que $\int gdm = \int idm$ e $g(t) \in C_p(t), \forall t \in T$. Logo, g é uma alocação ($g \in \Lambda(i)$), e $g(t)$ é preferível ou indiferente a todos os elementos de $B_{(q,i(t))}$.

Para completarmos a prova de que (q, g) é um equilíbrio competitivo, só é necessário mostrar que $g(t) \in B_{(q,i(t))} \forall t \in T$. Com efeito, supondo que para algum t, $\langle q, g(t)\rangle < \langle q, i(t)\rangle$. Então, $g(t)$ não pode ser maximal pela hipótese 4 para a economia $\mathcal{M}$, e daí pela hipótese de monotonicidade fraca, segue que $g(t) + (\delta, ..., \delta) \succ_t g(t)$ para $\delta > 0$. Mas para δ suficientemente pequeno, temos que $\langle q, (g(t) + (\delta, ..., \delta))\rangle = \langle q, g(t)\rangle + \delta < \langle q, i(t)\rangle$ e assim $(g(t) + (\delta, ..., \delta)) \in B_{(q,i(t))}$, contradizendo o fato de $g(t) \in C_q(t)$. Daí, $\langle q, g(t)\rangle < \langle q, i(t)\rangle$ é impossível, o que nos permite concluir que $\langle q, g(t)\rangle \geqq \langle q, i(t)\rangle, \forall t \in T$. Se a desigualdade estrita valer para algum t, podemos deduzir que $\int \langle q, g\rangle \, dm > \int \langle q, i\rangle \, dm$, contradizendo $\int g dm = \int i dm$. Assim, $\langle q, g(t)\rangle = \langle q, i(t)\rangle, \forall t \in T$, seguindo que $g(t) \in B_{(q,i(t))}$, $\forall t \in T$. Mostramos, assim que (p, g) é um equilíbrio competitivo para $\mathcal{M}$.

Provas dos Resultados Complementares para o Teorema Auxiliar.

Vamos começar estabelecendo a existência, unicidade, continuidade e não-negatividade da função h. Em principio, as três primeiras propriedades seguem das propriedades de $\int C_p dm$ ser a valores fechados, ser não-vazia, convexa e contínua em p. A não-negatividade, veremos que segue da hipótese de monotonicidade fraca. Uma dificuldade que surge é o fato de $C_p(t)$ não ser limitado. Para transpormos esta dificuldade vamos trabalhar com um outro conjunto, definido a partir de C_p, que seja limitado.

Seja v uma alocação tal que a preferência de cada agente t apresente a propriedade *commodity-wise-satured* em $v(t)$, dada na definição 118. Recordemos que $V(t) = \{x \in \Omega : x \leqq v(t)\}$, daí, vamos trabalhar com o conjunto $D_p(t) := V(t) \cap C_p(t)$. Notemos que a correspondência $D_p : T \rightrightarrows \Omega$ é integravelmente limitada, uniformemente em p, pela função $v : T \to \Omega$. Estabelecemos os seguintes lemas:

Lema 120 *Fixado $t \in T$, a imagem direta de P, $D(t)(P)$ é um conjunto compacto.*

Notemos que por este lema, dada uma sequência $(p_k) \subset P$ tal que $p_k \to p$, toda sequência (y_k) com $y_k \in D_{p_k}(t)$ possui uma subsequência convergente. Daí, quando necessitarmos de demonstrar a h.c.s. para a correspondência $D(t) : P \rightrightarrows \Omega$ não precisaremos mostrar a existência de uma subsequência, pois sua existência já está garantida, necessitaremos tão somente mostrar que $\lim y_k \in D_p(t)$, já que, sem perda de generalidade, podemos tomar a subsequência, como sendo a própria (y_k). Ver também a Observação 42.

Lema 121 *Para cada $t \in T$, $D_{(\cdot)}(t)$ é contínua em p.*

Demonstração: Inicialmente vamos mostrar que $D_{(\cdot)}(t)$ é h.c.s. em P. Com efeito, seja (p_k) uma sequência tal que $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p$. Seja a sequência (x_k) tal que x_k e $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Como $x_k \in V(t)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ podemos escrever que $x_k \leqq v(t)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, passando o limite temos que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x \leqq v(t)$, logo $x \in V(t)$. Mostremos que $x \in C_p(t)$; Se $x \notin C_p(t)$ então existiria $y \in B_{(p,i(t))}$ tal que $y \succ_t x$. Assim, $\langle p, y\rangle \leqq \langle p, i(t)\rangle > 0$. Pela hipótese em que $i(t) > 0$, temos $\langle p, i(t)\rangle > 0$. Pela continuidade nas preferências, podemos tomar uma cesta y, suficientemente próxima de y, em que tenhamos $z \succ_t x$, mas $\langle p, z\rangle \leqq \langle p, i(t)\rangle$. Então, para um k suficientemente grande, obtemos que $\langle p_k, z\rangle \leqq \langle p_k, i(t)\rangle$. Novamente, aplicando a hipótese de continuidade nas preferências, deduzimos, de $z \succ_t x$, que, para k suficientemente grande, $z \succ_t x_k$; mas isto contradiz o fato de $x_k \in C_p(t)$ e logo $x \in D_p(t)$. Assim, $D_{(\cdot)}(t)$ é h.c.s. em p.

Mostremos agora que $D_{(\cdot)}(t)$ é h.c.i. em P. Dado $p \in P$, seja $(p_k) \subseteq P$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p$ e tomemos $x \in D_p(t)$. Devemos encontrar uma sequência (x_k) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ e $x_k \in D_{p_k}(t)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Com efeito, se x é *maximal-*$\succ_t$, então $x \in D_{p_k}(t)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e daí, fazendo $x_k = x$, temos a sequência desejada. Agora, suponhamos que x não é *maximal-*$\succ_t$. Seja x_k um ponto em $D_{p_k}(t)$ o mais perto a x; a existência de x_k segue do fato de $D_{p_k}(t)$ ser fechado, o qual é decorrente da h.c.s. Para um $\delta > 0$ arbitrário, fixemos $y\delta \backsim_t x + (\delta, ..., \delta) \succ_t x$, pela monotonicidade fraca temos que para todo δ, $y\delta \in D_{p_k}(t)$ para qualquer k suficientemente grande, senão para algum δ, exitiriam infinitos k tais que $y\delta \notin D_{p_k}(t)$. No primeiro caso, temos que para todo δ, pela definição de x_k, que $\|x_k - x\| \leqq \|y\delta - x\| \leqq \delta l^{1/2}$. Como δ é arbitrário, temos que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$, o que implica na h.c.i. desejada. No segundo caso, vamos assumir, sem perda de generalidade, que $y\delta \notin D_{p_k}(t), \forall k \in \mathbb{N}$. Então para cada k, existe algum $z_k \in B_{(p_k,i(t))} \cap V(t)$ tal que $z_k \succ_t y\delta$. Como $(z_k) \subseteq V(t)$, (z_k) possui um ponto limite z; novamente, sem perda de generalidade, suporemos que este seja seu limite. Como $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p$ e $\langle p_k, z_k\rangle \leqq \langle p_k, i(t)\rangle$, segue que $\langle p, z\rangle \leqq \langle p, i(t)\rangle$, isto é, $z \in B_{(p,i(t))}$. Por outro lado, pela hipótese de continuidade sobre as preferências, temos que $z \succcurlyeq_t y$; como $y\delta \succ_t x$, segue também que $z \succ_t x$. Mas isto contradiz $x \in D_p(t) \subset C_p(t)$, completando a prova do nosso lema. $\square$

Vale observarmos que a prova de h.c.s. do lema anterior foi possível graças à hipótese de que $i(t) > 0$ para a economia $\mathcal{M}$, a qual é uma suposição mais forte que a feita para a economia $\mathcal{E}$, dada por $\int idm > 0$.

Lema 122 *C_p e D_p são borel-mensuráveis para cada p fixado.*

Demonstração: Como toda função Lebesgue-mensurável é Borel-mensurável a menos de um conjunto de medida nula, podemos assumir que v e i são Borel-mensuráveis. A afirmação $x \in D_p(t)$ é equivalente a $x \leqq v(t)$ e $x \in C_p(t)$. Afirmar que $x \in C_p(t)$ equivale a $\forall y \in B_{(p,i(t))}$, $x \succcurlyeq_t y$; como $\succcurlyeq$ é contínua, a última passagem equivale a afirmarmos que $\forall r \in \mathbb{Q} \cap B_{(p,i(t))}$, $x \succcurlyeq_t r$. Para algum r fixado, $x \not\succcurlyeq_t r$ equivale a escrever que: existe algum ponto $s \in \mathbb{Q} \cap \Omega$ tal que $s \geqq x$ e $r \succ_t s$. Daí $\{(x.t) : x \succcurlyeq_t r\}$, o qual é igual a:

$$\Omega \times T \setminus \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap \Omega} [\{x : s \geqq x\} \times \{t : r \succ_t s\}]$$

é Borel-mensurável.

Daí, também $\{(x,t) : x \in C_p(t)\}$, o qual é igual a:

$$\bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap \Omega} [(\Omega \times \{t : \langle p, r \rangle > \langle p, i(t) \rangle\}) \cup \{(x,t) : x \succcurlyeq_t r\}\}$$

é Borel-mensurável; o que mostra que C_p é Borel-mensurável.

Assim, $\{(x,t) : x \in D_p(t)\}$, que é igual ao conjunto

$$\{(x,t) : x \leqq v(t)\} \cap \{(x,t) : x \in C_p(t)\}$$

é Borel-mensurável, o que completa a demonstração. □

Corolário 123 *O conjunto dado pela integral de Aumann $\int D_p dm$ é não-vazio, convexo, contínuo em P e fechado.*

Demonstração: (i) Temos que, $\forall t \in T$, $D_p(t) = V(t) \cap C_p(t) = \{x : x \leqq v(t)\} \cap \{x : \forall y \in B_{(p,i(t))}, x \succcurlyeq_t y\}$. Logo, $v(t) \in D_p(t)$, $\forall t \in T$. Como v é uma alocação, v é uma seleção integrável de D_p. Logo, $\int D_p dm$ é não vazio.

(ii)A convexidade de $\int D_p dm$ segue do Teorema 82.

(iii)Como, $\forall t \in T$, $D_p(t)$ é integravelmente limitada por v, segue dos Lemas 121 e 122 e do Teorema 89, que $\int D_p dm$ é contínua em P.

(iv)Ainda, como os valores de uma correspondência contínua são sempre fechados, o corolário tem sua demonstração terminada. □

Para cada $p \in P$, seja $d(p)$ o ponto em $\int D_p dm$ que seja o mais próximo de $\int idm$. A existência de tal ponto é garantida pelo fato de $\int D_p dm$ ser um conjunto fechado e não-vazio; sua unicidade é decorrente da convexidade de $\int D_p dm$. Ou seja, as condições do clássico teorema da projeção ortogonal em espaços de Hilbert.

Lema 124 *A função* $d : P \ni p \mapsto d(p) = \{\zeta \in \int D_p dm : \left\|\zeta - \int idm\right\| = \inf_{w \in \int D_p dm} \left\|w - \int idm\right\|\}$ *é contínua em* P.

Demonstração: Seja $(p_k) \subset P$ tal que $\lim_{k\to\infty} p_k = p$, e seja x um ponto limite de $d(p_k)$. Pela h.c.s. de $\int D_p dm$ temos que $x \in \int D_p dm$. Supondo que exista um ponto $y \in \int D_p dm$ tal que $\left\|y - \int idm\right\| < \left\|x - \int dm\right\|$. Pela h.c.i de $\int D_p dm$ existe uma sequência de pontos $y_k \in \int D_p dm$ convergindo a y. Seja $(d(p_{k_j}))$ uma subsequência de $(d(p_k))$ convergindo a x. Como a norma é contínua, segue que para j suficientemente grande,

$$\left\|y_{k_j} - \int idm\right\| < \left\|d(p_{k_j}) - \int idm\right\|$$

contradizendo a definição de $d(p_{k_j})$. Daí, $x = d(p)$. Logo o único ponto limite de $(d(p_k))$ é $d(p)$, e o lema está demonstrado. □

Lema 125 *Para todo* $p \in P$, $d(p) \geqq \int idm$.

Demonstração: Se, ao contrário, $d(p) < \int idm$, então $d(p)$ possui alguma coordenada(sem perda de generalidade, a primeira) tal que $d_1(p) < \int i_1 dm$. Agora, $d(p) = \int \gamma dm$, em que $\gamma(t) \in D_p(t), \forall t \in T$. Seja $y(t) = (v_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_l(t))$. Então, $y(t) \geqq \gamma(t)$ e $y(t) \leqq v(t)$; ainda, $y(t) \in D_p(t), \forall t \in T$. Mais ainda, $(\int v_1 dm, d_2(p), ..., d_l(p)) = \int ydm \in \int D_p dm$. Agora, $d_1(p) < \int i_1 dm$, e pela *Restrição à Saturação*, $\int i_1 dm < \int v_1 dm$; assim, existe algum $\alpha \in (0,1)$ tal que $\alpha \int v_1 dm + (1-\alpha) d_1(p) = \int i_1 dm$ Fixando $z = \alpha y + (1-\alpha)\gamma$ e $\overline{z} = \int zdm$, obtemos que $\overline{z} \in \int D_p dm$ (pela convexidade de $\int D_p dm$), e $\overline{z} = (\int i_1 dm, d_2(p), ..., d_l(p))$. Então, de $d_1(p) < \int i_1 dm$, deduzimos que $\left\|\overline{z} - \int idm\right\|^2 = \sum_{j=2}^{l} (d_i(p) - \int i_j dm)^2 < \sum_{j=1}^{l} (d_i(p) - \int i_j dm)^2 =$

$\left\|d(p) - \int idm\right\|^2$. Assim, $\overline{z} \in \int D_p dm$ é um ponto mais próximo de $\int idm$ que $d(p)$, o que é uma contradição. O que prova o lema. $\square$

Agora, seja $g(p) = d(p) - \int idm$. Estabelecemos para $g(p)$ todas as propriedades que desejamos para $h(p)$. Daí segue o seguinte resultado:

Lema 126 *Para todo $p \in P$ temos que $g(p) = h(p)$.*

Demonstração: Fixamos $p \in P$, escrevemos $g = g(p)$, $h = h(p)$, $c = c(p)$ e $d = d(p)$. E lembramos que $g = d - \int idm$ e $h = c - \int idm$. Daí:

(i) Se $g = 0$, logo $d = \int idm$ e assim d é o ponto mais próximo, em $\int C_p dm$, de $\int idm$. Portanto, $d = c$ e $g = h$.

(ii) Se $g \neq 0$. Pela definição de g o hiperplano que passa por d, perpendicular a g suporta $\int D_p dm$. Isto quer dizer que:

$$\langle x, g\rangle \geqq \|g\|^2, \forall x \in \int D_p dm - \int idm$$

Supondo que exista um ponto y em $\int C_p dm$ que seja mais próximo de $\int idm$ que d, ou seja, $y \in (\int C_p dm - \int idm)$ que é mais próximo de 0 (origem) que g. Então,

$$\|y\|^2 < \|g\|^2$$

Ainda mais, $\|y\|^2 - 2\langle y, g\rangle + \|g\|^2 = \|y - g\|^2 > 0$. Daí, $\|y\|^2 > \langle y, g\rangle + [\langle y, g\rangle - \|g\|^2]$. Se $\langle y, g\rangle - \|g\|^2 > 0$, então $\|y\|^2 > \langle y, g\rangle \geqq \|g\|^2$, o que é uma contradição, pois vimos que $\|y\|^2 < \|g\|^2$. Logo,

$$\langle y, g\rangle < \|g\|^2$$

Agora, $y = \int xdm - \int idm$, em que $x(t) \in C_p(t), \forall t \in T$. Pela *commodity-wise-saturation*, $v_t(x(t)) \leqq x(t)$ e $v_t(x(t)) \leqq v(t)$. Fazendo $z(t) = v_t(x(t))$, obtemos que $\int zdm \in \int D_p dm$ e $\int zdm - \int idm \leqq y$. Como $g \geqq 0$, pelo Lema 125, segue que, $\left\langle \int zdm - \int idm, g\right\rangle \leqq \langle y. g\rangle$. Daí, como vimos que $\langle y, g\rangle < \|g\|^2$, temos que $(\int zdm - \int idm) \in (\int D_p dm - \int idm)$, e como $\langle x, g\rangle \geqq \|g\|^2, \forall x \in (\int D_p dm - \int idm)$, vale que $\left\langle \int zdm - \int idm, g\right\rangle \geqslant \|g\|^2$, o que é uma contradição, e assim temos $g(p) = h(p)$. $\square$

Agora, só nos resta mostrar que algum $x : T \to \Omega$ mensurável pode ser escolhido de maneira que sua integral contrarie

$$\left\langle (y - \int idm), q \right\rangle \geqq \alpha \|q\|^2, \forall q \in \int_T C_p dm$$

como na passagem da demonstração do Teorema Auxiliar em que mostramos que $h(q) = 0$ e q é um ponto fixo de

$$f(p) = \frac{p + h(p)}{1 + \sum_{i=1}^{l} h_i(p)}$$

De acordo com a seção em que estabelecemos o Teorema Auxiliar, é suficiente mostrarmos que existe um x mensurável tal que, para todo $t \in T$, $x(t)$ é máximo em $B_{(q,i(t))}$ com respeito a $\succcurlyeq_t$. Assim temos o lema:

Lema 127 *Existe uma função $x : T \to B_{(q,i(t))}$ mensurável tal que, para todo $t \in T$, $x(t)$ é máximo em $B_{(q,i(t))}$ com respeito a $\succcurlyeq$.*

Demonstração: Seja $X(t)$ o conjunto de todos os pontos maximais em $B_{(q,i(t))}$, ou seja:

$$\begin{aligned} X \quad &: \quad T \rightrightarrows B_{(q,i(t))} \\ t \quad &\longmapsto \quad \{\zeta \in B_{(q,i(t))} : \zeta \succcurlyeq_t \eta \ m - q.s. \text{ em } B_{(q,i(t))}\} \end{aligned}$$

Como na prova do Lema 122, podemos tomar i Borel-mensurável. Então, $\{(x,t) : x \in B_{(q,i(t))}\} = \{(x,t) : \langle q, x \rangle \leqq \langle q, i(t) \rangle = \Omega \times T \backslash \bigcup_\eta [\{x : \langle q, x \rangle > \eta\} \times \{t : \eta > \langle q, i(t) \rangle\}]$,

em que η percorre todos os racionais. Logo, $\{(x,t) : x \in B_{(q,i(t))}\}$ é Borel-mensurável. Aplicando o Lema 122, deduzimos que $\{(x,t) : x \in X(t)\}$, o qual é igual ao conjunto $\{(x,t) : x \in B_{(q,i(t))}\} \cap \{(x,t) : x \in C_q(t)\}$, é um conjunto Borel-mensurável. Assim, X é Borel-mensurável.

Agora, vamos mostrar que $X(t) \neq \emptyset$ para todo $t \in T$. Pela compacidade do conjunto $V(t) \cap B_{(q,i(t))}$ e pela continuidade da relação de preferência $\succcurlyeq_t$, seguimos que $V(t) \cap B_{(q,i(t))}$ possui um elemento maximal y. Então, pela *commodity-wise-saturation*, y também é maximal em $B_{(q,i(t))}$. De fato, suponhamos que exista algum $z \in B_{(q,i(t))}$ tal que $z \succ_t y$. Assim, $\langle q, z \rangle \leqq \langle q, i(t) \rangle$; ainda mais, $\langle q, v_t(z) \rangle \leqq \langle q, z \rangle \leqq \langle q, i(t) \rangle$, o que nos leva a concluir que $v_t(z) \in B_{(q,i(t))}$. Finalmente, $v_t(z) \backsim_t z \succ_t y$. Assim, $v_t(z)$ contradiz a maximalidade de z em $V(t) \cap B_{(q,i(t))}$.

Logo, temos que $X : T \rightrightarrows B_{(q,i(t))}$ é uma correspondência Borel-mensurável satisfazendo as hipótese do Teorema 74, e assim temos a existência de uma seleção mensurável $x : T \longrightarrow B_{(q,i(t))}$ para X. $\square$

2.2.3 Prova do Teorema de Existência de Equilíbrio Geral para a Economia $\mathcal{E}$.

A idéia geral é aproximar a economia $\mathcal{E} : T \to \Omega \times \mathbb{P}(\Omega)$, definida inicialmente, por uma sequência de economias $(\mathcal{M}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, em que $\mathcal{M}_k : T \longrightarrow \Omega \times \mathbb{P}^*(\Omega)$ são economias com as propriedades dadas no Teorema Auxiliar, ou seja, já temos uma sequência de economias em que a existência de equilíbrio geral é garantida para cada uma delas, e vamos denotá-los pela sequência $((q_k, y_k))$, destes equilíbrios competitivos vamos construir um par (q, y), e mostraremos que este par é um equilíbrio competitivo para $\mathcal{E}$.

Para definir a economia $\mathcal{M}_k$, vamos especificar a dotação inicial i_k e a relação de preferência $\succcurlyeq_t^k$; quanto ao número de bens, fixamos l em todas as economias $\mathcal{M}_k$.

Seja (δ_k) uma sequência monótonona de números reais positivos tais que $\lim\limits_{k \to \infty} \delta_k = 0$, e definimos:

$$i_k(t) = i(t) + (\delta_k, ..., \delta_k)$$

Para definir a relação de preferência, seja γ_k uma sequência monótona de números reais tais que $\lim\limits_{k \to \infty} \gamma_k = \infty$ e $\gamma_1 > \delta_1$, assim façamos:

$$v_k(t) = i(i) + (\gamma_k, ..., \gamma_k)$$

Seja, finalmente os hiper-retângulos $V_k(t)$ e as funções $v_{k,t} : \Omega \longrightarrow V_k(t)$ como definidos na construção do Teorema Auxiliar.

Agora, definimos a relação de preferência como:

$$x \succcurlyeq_t^k y \Leftrightarrow v_{k,t}(x) \geq v_{k,t}(y)$$

Assim, temos que, para todo k, a economia $\mathcal{M}_k$ satisfaz as condições do Teorema Auxiliar, em que, v_k é a alocação *commodity-wise-saturation*. Ainda mais, notemos que a ordem de preferência em $\mathcal{M}_k$ coincide com a ordem em $\mathcal{E}$ para todo x e y tais que $x \leqq i(i) + (\gamma_k, ..., \gamma_k)$ e $y \leqq i(i) + (\gamma_k, ..., \gamma_k)$.

Seja (q_k, y_k) um equilíbrio competitivo para a economia $\mathcal{M}_k$. Pela compacidade de P, a sequência (q_k) possui uma subsequência convergente e sem perda de generalidade, vamos supor que esta seja a sequência original (q_k). Seja $q = \lim_{k\to\infty} q_k$. Segue um importante lema desta seção:

Lema 128 $\lim_{k\to\infty} q_k = q > 0$.

Demonstração: Inicialmente, vamos mostrar que:

(i) Se $\langle q, i(t)\rangle > 0$, então $(y_k(t))$ não possui ponto limite quando $k \to \infty$.

Com efeito, supondo que exista algum ponto y que seja ponto limite de $(y_k(t))$, sem perda de generalidade, vamos assumir que este seja o limite. Como (q_k, y_k) é um equilíbrio competitivo em $\mathcal{M}_k$, temos que $\langle q_k, y_k\rangle \leqq \langle q_k, i(t)\rangle$. Usando este fato e a restrição à saturação na economia $\mathcal{M}_k$, deduzimos que $y_k(t)$ não pode ser um *maximal*-$\succ_t$. Daí, se $\langle q_k, y_k(t)\rangle < \langle q_k, i_k(t)\rangle$, então pela monotonocidade fraca das preferências na economia $\mathcal{M}_k$, poderíamos encontrar algum ponto $\omega \in B_{(q_k, i(t))}$ em que $\omega \succ_t y_k(t)$, o que contraria a definição de equilíbrio competitivo. Logo, e pela hipótese de (i), obtemos:

$$(ii)\ \langle q, y\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle q_k, y_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle q_k, i_k(t)\rangle = \langle q, i(t)\rangle > 0$$

Assim existe alguma coordenada j tal que $y_j > 0$ e $q_j > 0$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $j = 2$. Agora, pela hipótese de monotonidade, $y + (1, 0, ..., 0) \succ_t y$. Se, para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno, definirmos $z = y + (1, -\delta, 0, ..., 0)$, então $z \in \Omega$, e pela continuidade deduzimos que $z \succ_t y$. Novamente, usando a continuidade, obtemos $z \succ_t y_k(t)$ para k suficientemente grande.

Como (q_k, y_k) é um equilíbrio competitivo para $\mathcal{M}_k$, obtemos que $\langle q_k, z\rangle > \langle q_k, i_k(t)\rangle$, fazendo $k \to \infty$ e aplicando (ii), temos:

$$(iii)\ \langle q, z\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle q_k, z\rangle \geqq \lim_{k\to\infty} \langle q_k, i_k(t)\rangle = \langle q, y\rangle$$

Mas como $q_1 = 0$ e $q_2 > 0$, obtemos:

$$\langle q, z\rangle = \langle q, y\rangle + q_1 - \delta q_2 = \langle q, y\rangle - \delta q_2 < \langle q, y\rangle$$

Contradizendo (iii). Assim, obtemos (i).

Como $q \in P$ e $\int idm > 0$, segue que $\int \langle q, i \rangle\, dm = \langle q, \int idm \rangle > 0$.

Seja $S = \{t : \langle q, i(t) \rangle > 0\}$, então S não tem medida nula; e seja $m(S) > 0$ sua medida. Definimos:

$$A = \{x \in \Omega : \sum_{i=1}^{l} x_i \leqq 2 \int \sum_{j=1}^{l} [i_j/m(S)] dm\}$$

Vemos que $A \subseteq \Omega$ é limitado e fechado, ou seja, A é compacto. Este fato associado à (i) implica que, para todo $t \in S$, $y_k(t) \in A$ para um número finito de indíces k; isto é, para cada $t \in S$ existe algum natural $k(t)$ tal que, para todo $k \geqq k(t)$, $\sum_{i=1}^{l} y_{k,i}(t) > 2 \int \sum_{j=1}^{l} [i_j/m(S)] dm$. Daí, para $t \in S$,

$$(iv) \liminf_k \sum_{i=1}^{l} y_{k,i}(t) > 2 \int \sum_{j=1}^{l} [i_j/m(S)] dm$$

Por y_k ser uma alocação em $\mathcal{M}_k$, temos que:

$$(v) \lim_k \int \sum_{i=1}^{l} y_{k,i} dm = \lim_k \int \sum_{i=1}^{l} i_{k,i} dm = \lim_k \int \sum_{i=1}^{l} (i_i + n\delta_k) dm = \lim_k \int \sum_{i=1}^{l} i_i dm$$

O Lema de Fatou, em dimensão 1, nos diz que se (ϕ_k) é uma sequência de funções a valores reais não-negativa e mensurável, então $\liminf_k \int \phi_k dm \geqq \int \liminf_k \phi_k dm$. Assim, pelo Lema de Fatou , por (iv) e pelo hipótese de que $\int idm > 0$, temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_k \int \sum_{i=1}^{l} y_{k,i} dm &\geqq \int \liminf_k \sum_{i=1}^{l} y_{k,i} \geqq \int_S \liminf_k \sum_{i=1}^{l} y_{k,i} \geqq \int_S [2 \int \sum_{j=1}^{l} [i_j/m(S)] dm] = \\
&= [2 \int \sum_{j=1}^{l} i_j dm] \int_S 1/m(S) dm = 2 \int \sum_{j=1}^{l} i_j dm > \int \sum_{j=1}^{l} i_j dm
\end{aligned}$$

Isto contradiz (v), e assim provamos nosso lema. $\square$

Agora, como $q_k \to q > 0$, existe um certo $\delta > 0$ tal que $q_{k,i} \geqq \delta$ para k suficientemente grande e para todo i. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $q_{k,i} \geqq \delta$ para todo k e i, e que $i_{k,i}(t) \leqq i_i(t) + \delta$ para todo i, k e t. Assim, para todo i, k e t,

$$\delta y_{k,i}(t) \leqq \langle q_k, y_k(t) \rangle \leqq \langle q_k, i_k(t) \rangle \leqq \langle q_k, i_k(t) + \delta \rangle \leqq \int \sum_{j=1}^{l} [i_j(t) + \delta] dm$$

Onde, obtemos:

$$(vi)\, y_{k,i(t)} \leqq 1 + \int \sum_{j=1}^{l} [i_j(t)/\delta] dm$$

Para cada t, seja $Y(t)$ o conjunto de pontos limites de $y_k(t)$ quando $k \to \infty$. Seja $Y_k(t)$ o conjunto unitário consistindo do ponto $y_k(t)$, assim $Y(t) = \limsup Y_k(t)$. Por (vi), todo $Y_k(t)$ é limitado pela mesma função integrável. Daí pelo Corolário 85,

$$\int idm = \lim \int i_k dm \in \limsup \int Y_k dm \subseteq \int \limsup Y_k dm = \int Y dm.$$

Seja y tal que $y(t) \in Y(t)$ para todo t, e

$$(vii) \int ydm = \int idm$$

Vamos mostrar que (q, y) é um equilíbrio competitivo para a economia $\mathcal{E}$.

Para isso, necessitamos mostrar que y é uma alocação, que $y(t) \in B_{(q,i(t))}$ para todo t, e que $y(t)$ é maximal em $B_{(q,(i(t))}$ $m - q.s$ em T, isto é, que nenhum ponto em $B_{(q,i(t))}$ é preferível a $y(t)$ $m - q.s$ em T. Por (vii), y é uma alocação. Agora, como $y(t) \in Y(t)$, segue que $y(t)$ é um ponto limite de $(y_k(t))$, ou seja, $y(t) = \lim_{p\to\infty} y_{k_p}(t)$. Como $\langle q_{k_p}, y_{k_p}(t)\rangle \leqq \langle q_{k_p}, i_{k_p}(t)\rangle$, e ao fazermos $p \to \infty$, deduzimos que $\langle q, y\rangle \leqq \langle q, i(t)\rangle$, e daí, para quase todo t,

$$(viii)\, y(t) \in B_{(q.i(t))}$$

Finalmente, vamos supor que para t num conjunto de medida positiva, exista algum $z \in B_{(q,i(t))}$ tal que $z \succ_t y(t)$. Claramente $z \neq 0$, e vamos supor, sem perda de generalidade, que $z_1 > 0$. Se para $\delta > 0$ suficientemente pequeno definirmos $z\delta = z - (\delta, 0, ..., 0)$, então podemos escrever que

$$(ix)\, z\delta \succ_t y(t)$$

Ainda mais, como $\lim_k \langle q_k, z\delta\rangle = \langle q, z\rangle - q_1\delta < \langle q, z\rangle \leqq \langle q, i(t)\rangle = \lim_k \langle q, i_k(t)\rangle$, segue que, $\langle q_k, z\delta\rangle < \langle q, i_k(t)\rangle$, para k suficientemente grande; digamos, para $k > k_0$. Agora, do fato de $y(t)$ ser um ponto limite de $(y_k(t))$, existe uma subsequência $(y_{k_p}(t))$ convergindo para $y(t)$; daí, para p suficientemente grande, temos a estrita preferência $z\delta \succ_t y_{k_p}(t)$, por (ix). Se nós tomarmos p de tal forma que $k_p > k_0$, então $z\delta$ contradiz o fato de $y_{k_p}(t)$ ser maximal no conjunto de restrição orçamentária $B_{(q_{k_p}, i_{k_p}(t))}$. Logo, a suposição de que $z \succ_t y(t)$ nos levou a uma contradição, e assim concluímos que $y(t)$ é maximal em $B_{(q,i(t))}$ para quase todo t. Assim, este último fato, juntamente com (vii) e $(viii)$, nos mostram que (q, y) é um equilíbrio competitivo para a economia $\mathcal{E}$. Temos assim provado o Teorema (EW).

2.3 O Teorema do Núcleo para uma Economia com agentes mensuráveis e com Produção.

Vamos tratar agora de uma economia com produção, ou seja, um sistema de mercado em que os bens não são apenas trocados entre os agentes, mas também produzidos por apropriados agentes: as firmas. O modelo aqui exposto é conhecido na literatura por *coalition production economy*. Vamos, nesta seção, fazer uma apresentação do modelo econômico um pouco mais geral do que a apresentada na seção anterior. Diferentemente da maneira como definimos anteriormente o espaço de agentes, vamos adotar agora como espaço de agentes (consumidores) um espaço de medida finita (espaço de probabilidade) completo $(A, \mathcal{A}, v)$ sem átomos, em que: A é o conjunto de agentes ou consumidores presentes na economia; $\mathcal{A}$ é a $\sigma-$álgebra das possíveis coalizões de agentes e v é uma medida que indica a fração do total de agentes contidos em cada possível coalizão, podemos interpretar v também como uma medida que associa a cada coalizão um medida de seu poder político relativo na sociedade. Se a coalizão $S \in \mathcal{A}$ é tal que $v(S) = 0$, dizemos que esta é uma coalizão *nula*. Notemos que na seção anterior tinhamos $A = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ e v sendo a medida de Lebesgue.

Como feito na seção anterior, $\mathbb{R}^l$ denotará o espaço de bens e $\Omega = \mathbb{R}^l_+$ é o conjunto de cestas sobre o qual definimos uma relação de preferência $\succ_a$para todo $a \in A$.

Vamos denotar por $\mathbb{P}(\Omega)$ o conjunto de relações de preferência $\succ \subset \Omega \times \Omega$ que satisfaçam as seguintes propriedades:

(i) A relação de preferência $\succ$ é localmente não saciável, ou seja: para todo $x \in \Omega$ e para toda vizinhança U de x existe uma cesta $y \in \Omega \cap U$ tal que $y \succ x$.

(ii) Para todo $x \in \Omega$, os conjuntos $\{y : x \succ y\}$ e $\{x : y \succ x\}$ são abertos em relação a Ω.

(iii)A preferência $\succ$ satisfaz a seguinte condição de mensurabilidade:

$$\{(a, x, y) \in A \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l : x \succ_a y\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$$

Como feito na seção anterior, vamos assumir que $\mathcal{E}$ é uma economia de trocas puras e vamos vê-la, analogamente, como a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \quad &: \quad (A, \mathcal{A}, v) \to \Omega \times \mathbb{P}(\Omega) \\ t \quad &\longmapsto \quad (i(a), \succ_a) \end{aligned}$$

Agora para nossa *coalition production economy* falta especificar o setor produtivo da economia.

Definição 129 *O setor produtivo é descrito por uma correspondência $Y : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^l$ que seja σ-aditiva e a valores convexo. Ou seja:*

$$\begin{aligned} \textit{Dado } (S_k) \quad &\subset \quad \mathcal{A} \textit{ disjunta}, Y(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k) = \sum_{k=1}^{\infty} Y(S_k), \quad e \\ \forall S \quad &\in \quad \mathcal{A}, Y(S) \textit{ é um conjunto convexo.} \end{aligned}$$

A correspondência Y é conhecida como *production set correspondence*. Tal correspondência associa a cada possível coalizão $S \in \mathcal{A}$ uma tecnologia $Y(S)$ que interpretamos como o conjunto possibilidade de produção, o que define uma firma. Um vetor $y \in Y(S)$ representa uma possível produção para S, em que suas componentes negativas representam os insumos (*inputs*) e as coordenadas positivas representam os bens que a coalizão S poderá ofertar na economia (*outputs*).

Assim especificamos uma *coalition production economy* como sendo o par $(\mathcal{E}, Y)$.

Vamos assumir a hipótese do comportamento maximizador tanto por parte dos agentes (consumidores) em A como por parte das coalizões $S \in \mathcal{A}$, este último no seguinte sentido, a coalizão escolhe uma possível produção y em $Y(S)$ de modo a maximizar seus lucros aos preços $p \in \mathbb{R}^l_+$. Dado um preço p, o lucro por parte da coalizão S ao produzir $y \in Y(S)$ é dado pelo produto interno $\langle p, y \rangle$. Logo, o comportamento maximizador de S implica na escolha de uma produção $y \in Y(S)$ tal que $\langle p, y \rangle = \sup\limits_{w \in Y(s)} \langle p, w \rangle = \sigma_{Y(S)}(p)$, ou seja, o lucro máximo é dado pela função suporte de $Y(E)$ aplicada em p.

Uma hipótese que vamos assumir é que Y é absolutamente contínua com respeito a v, pela notação $Y \ll v$, ou seja, dado $S \in \mathcal{A}$, se $v(S) = 0$ então $Y(S) = \{0\}$. Tal hipótese diz que toda coalizão *nula* não exerce alguma atividade produtiva.

Proposição 130 *Seja* $(\mathcal{E}, Y)$ *uma* coalition production economy *em que* $\mathcal{E}$ *e* Y *satisfazem as hipóteses dadas anteriormente. Então exite uma função* $\pi(\cdot, p)$ *de* A *em* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, *que denota a distribuição individual do lucros, unicamente determinda por* v.

Demonstração: Para toda coalizão $S \in \mathcal{A}$, associamos sua função suporte $\sigma_{Y(S)}(p)$, assim definimos uma aplicação $\kappa(\cdot, p)$ de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, e ela denota a distribuição dos lucros entre as coalizões. Obsevamos que $\kappa(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k, p) = \sum_{k=1}^{\infty} \kappa(S_k, p)$, pois Y é contável aditiva e $Y \ll v$. Logo κ também é $\sigma-$aditiva e $\kappa \ll v$. Daí, pelo teorema de Radon-Nikodym , existe uma função, que denotamos por $\pi(\cdot, p) : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, tal que, para todo $S \in \mathcal{A}$,

$$\kappa(S, p) = \int_S \pi(\cdot, p) dv$$

□

Vamos estender agora o conceito de alocação e alocação factível para uma *coalition production economy.*

Definição 131 *Uma alocação* ϕ *para* $(\mathcal{E}, Y)$ *é uma função integrável de* A *em* Ω *, isto é, o conjunto é alocação é dado pelo espaço* $L^1(A, \Omega, v)$.

Ainda, uma alocação ϕ *é factível se* $\int_A \phi dv \in \int_A idv + Y(A)$, *em que* $i \in L^1(A, \Omega, v)$ *e como de costume,* $i(a)$ *denota a dotação inicial do agente* a.

Daí, definimos $\Delta(i) = \{\phi \in L^1(A, \Omega, v) : \int_A \phi dv \in \int_T idv + Y(A)\}$ *como sendo o conjunto de alocações factíveis.*

Definição 132 *Uma alocação factível* $\phi \in \Delta(i)$ *de* $(\mathcal{E}, Y)$ *é dita bloqueada (ou dominada) pela coalizão* não nula $E \in \mathcal{A}$ *se existe uma alocação* $\psi \in L^1(A, \Omega, v)$ *tal que:*

$$\begin{aligned} (i)\psi(a) \quad &\succ \quad {}_a\phi(a), \ v-q.s. \ em \ E, \\ (ii)\int_E \psi dv \quad &\in \quad \int_E idv + Y(E) \end{aligned}$$

A condição (ii), usando uma terminologia de Aumann [10], diz que a alocação ψ é efetiva para E, ou seja, temos uma espécie de factibilidade de ψ restrita a E.

Passamos, assim, para a definição do conceito de núcleo da economia $(\mathcal{E}, Y)$:

Definição 133 *O núcleo (*core*) $\mathcal{C}(\mathcal{E},Y)$ para $(\mathcal{E},Y)$ é dado pelo conjunto de todas as alocações factíveis $\xi \in \Delta(i)$ de $(\mathcal{E},Y)$ tais que não admitem nenhuma coalizão $E \in \mathcal{A}$ tal que ξ é bloqueada por E. Toda alocação factível em $\mathcal{C}(\mathcal{E},Y)$ é dita uma alocação de* Edgeworth.

Agora, vamos para a definição do conceito de equilíbrio competitivo ou Walrasiano para $(\mathcal{E},Y)$, mas, antes vamos definir o conjunto de demanda . Vemos que a correspondência restrição orçamentária em $(\mathcal{E},Y)$ é dada por:

$$\begin{aligned} B &: \mathbb{R}^l_+ \times A \rightrightarrows \Omega \\ (p,a) &\longmapsto B_{(p,i(a))} = \{x \in \Omega : \langle p,x\rangle \leqq \langle p,i(a)\rangle + \pi(a,p)\} \end{aligned}$$

Assim definimos a correspondência de demanda por:

$$\begin{aligned} D &: \mathbb{R}^l_+ \times A \rightrightarrows \Omega \\ (p,a) &\longmapsto D_{(p,\succ_a,i(a))} = \{z \in B_{(p,i(a))} : z \succcurlyeq_a x,\ \forall x \in B_{(p,i(a))}\} \end{aligned}$$

Segue assim a definição de equilibrio competitivo:

Definição 134 *Um Equilíbrio Competitivo ou Walrasiano para $(\mathcal{E},Y)$ é uma alocação factível ϕ, uma produção $\gamma \in Y(A)$ e um vetor de preços $p \in \mathbb{R}^l_+$, tal que:*

$$\begin{aligned} (i)\phi(a) &\in D_{(p,\succ_a,i(a))} v - q.s.\ em\ A. \\ (ii)\ \langle p,\gamma\rangle &= \max_{q\in Y(A)} \langle p,q\rangle \\ (iii)\int_A \phi dv &= \int_A idv + \gamma \end{aligned}$$

Vamos denotar por $\mathcal{W}(\mathcal{E},Y)$ o conjunto de alocação que são equilíbrios competitivo.

Por último, vamos assumir a existência de uma alocação ϕ_0 e uma produção y_0 tal que $\int_A \phi_0 dv < \int_A idv + y_0$. Esta suposição elimina a excepcional situação em que

$$\inf_{\phi\in L^1(A,\Omega,v)} \left\langle p, \int_A \phi dv \right\rangle = \left\langle p, \int_A idv \right\rangle + \pi(A,p)$$

como afirmam [20] e [26].

Segue portanto o teorema:

Teorema 135 *Seja* $(\mathcal{E}, Y)$ *uma* coalition production economy *com as caracteristicas descritas anteriormente, então* $\mathcal{C}(\mathcal{E}, Y) = \mathcal{W}(\mathcal{E}, Y)$.

Demonstração: $(\supseteq)$ Desejamos mostrar que $\mathcal{W}(\mathcal{E}, Y) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{E}, Y)$. Supondo que $\phi \in \mathcal{W}(\mathcal{E}, Y)$ e que $\phi \notin \mathcal{C}(\mathcal{E}, Y)$; então existe uma coalizão não nula $S \in \mathcal{A}$ e uma alocação ψ tal que

$$\begin{aligned}(i)\psi(a) &\succ {}_a\phi(a),\ v-q.s. \text{ em } S,\\ (ii)\int_S \psi dv &\in \int_S idv + Y(S)\end{aligned}$$

(i) e a Definição 134 implicam que existe um vetor de preços $p \in \mathbb{R}^l_+$ tal que $\langle p, i(a)\rangle + \pi(a,p) < \langle p, \psi(a)\rangle$ $v-q.s.$ em A. Assim, segue que $\kappa(S,p) = \int_S \pi(\cdot, p)dv < \int_S (\psi - i)dv$. Como $\int_S (\psi - i)dv \in Y(S)$, nós obtemos uma contradição pela definição de $\kappa(S,p)$.

$(\subseteq)$Agora, vamos mostrar que $\mathcal{C}(\mathcal{E}, Y) \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{E}, Y)$. Com efeito, seja $\phi \in \mathcal{C}(\mathcal{E}, Y)$ e definimos a correspondência

$$\begin{aligned}\Gamma &: A \rightrightarrows \mathbb{R}^l_+\\ a &\longmapsto \Gamma(a) = \{x \in \mathbb{R}^l_+ : x + i(a) \succ_a \phi(a)\}\end{aligned}$$

temos que Γ é uma correspondência Borel-mensurável e pelo Teorema 74, Γ admite uma seleção $\mathcal{A}-$mensurável. Ainda, $S(\Gamma) \neq \emptyset$, pois ϕ é integrável e as preferências são localmente não-saciáveis.

Pelo teorema de Radon-Nikodym para correspondências (Teorema 110), existe uma correspondência $\Psi : A \rightrightarrows \mathbb{R}^l_+$ tal que $\int_S \Psi dv \subset Y(S)$ e $\overline{\int_S \Psi dv} = \overline{Y(S)}$, para todo $S \in \mathcal{A}$.

Seja $\mathcal{A}_0 = \{S \in \mathcal{A} : v(S) > 0\}$ e definimos $Z = \bigcup_{S \in \mathcal{A}_0} \{\int_S \Gamma dv - \int_S \Psi dv\}$; podemos, utilizando o teorema de Lyapunov (Teorema 81), ver que Z é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^l$. Temos que $0 \notin Z$, caso $0 \in Z$ então existiria uma coalizão não nula $S \in \mathcal{A}$ e uma seleção integrável ψ de Γ com $\int_S \psi dv \in \int_S \Psi dv$. Agora, ao definirmos $\eta = \psi + i$, notamos que $\int_S \eta dv \in \int_S idv + Y(S)$; e $\eta(a) \succ_a \phi(a)$ $v-q.s.$ em S. Disto segue que $\phi \notin \mathcal{C}(\mathcal{E}, Y)$, o que é uma contradição.

Por um argumento padrão de separação podemos encontrar um vetor de preços não-nulo tal que para todo $z \in Z$ tenhamos $\langle p, z\rangle \geq 0$. Ainda podemos ver que $\kappa(A,p) < \infty$ e daí, por Radon-Nikodym, $\pi(\cdot, p) : A \to \mathbb{R}$ é uma função integrável. Ainda, para quase todo $a \in A$, $\langle p, i(a)\rangle + \pi(a,p) < \langle p, x\rangle$ para todo $x \succ_a \phi(a)$.

Pela não-saciabilidade local e do fato de que para quase todo $a \in A$, $\langle p, i(a)\rangle + \pi(a,p) < \langle p, x\rangle$, para todo $x \succ_a \phi(a)$, temos que $\langle p, i(a)\rangle + \pi(a,p) < \langle p, \phi(a)\rangle$ $v - q.s.$ em A. Supondo então que existe alguma coalizão não-nula $S \in \mathcal{A}$, e que tenhamos uma estrita inequação para cada agente na coalizão. Podemos assim escrever que $\left\langle p, \int_A i dv\right\rangle + \kappa(A,p) < \left\langle p, \int_A dv\right\rangle$, e assim $\kappa(A,p) < \int_A(\phi - i)dv$. Mas isto constradiz a definição de $\kappa(A,p)$, para $\int_A(\phi - i)dv \in Y(A)$. Daí, $\langle p, \phi(a)\rangle < \langle p, i(a)\rangle + \pi(a,p)$ $v - q.s.$ em A.

Mas por nossa hipótese, é sempre válido que

$$\inf_X \langle p, x\rangle < \langle p, i(a)\rangle + \pi(a,p)$$

Daí, usando de uma argumentação análoga a feita por Aumann em [10] para provar que toda alocação no núcleo é um equilíbrio competitivo no caso de um modelo de puras trocas, temos que $\phi(a)$ é um elemento maximal sobre a restrição orçamentária do agente a. Para completarmos a prova, observemos que, de $\langle p, \phi(a)\rangle < \langle p, i(a)\rangle + \pi(a,p)$ $v - q.s.$ em A, segue que $\left\langle p, \int_A(\phi - i)dv\right\rangle = \kappa(A,p)$, isto é, $\int_A(\phi - i)dv$ maximiza os lucros em $Y(A)$. Assim, ϕ possui as propriedades de uma alocação que seja uma equilibrio Warlrasiano ou competitivo. $\square$

Deste último teorema, uma consequência natural é que uma economia perfeitamente competitiva pode ser definida como uma economia em que o núcleo coincida com o conjunto de equilíbrio competitivos.

Nos modelos em que temos um número finito de agentes com finitos bens (economias finitas) de puras trocas, não é possível estabelecermos a equivalência dos conjuntos de alocações de equilíbrio competitivo e de alocações no núcleo. Neste caso todo alocação de equilíbrio está no núcleo, porém não vale a recíproca. Todavia, um resultado devido a Debreu e Scarf mostrar que, tomando uma economia com finitos agentes, para toda alocação no núcleo podemos encontrar uma nova economia com um número maior ou igual de agentes, tal que, esta alocação seja um equilíbrio competitivo para tal economia; ou seja, quando o número de agentes tende ao infinito o núcleo coincide com o conjunto de alocações de equilíbrio. Para estes resultados, ver [4].

Bibliografia

[1] Acker, F. & F. Dicktein.: **Uma Introdução à Análise Convexa**. 14º Coloquio Brasileiro de Matemática. 1983

[2] Araújo, A.: **Introdução à Economia Matemática**. 14º Coloquio Brasileiro de Matemática. 1983.

[3] Arrow, K.J. & G. Debreu.: *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy.* **Econometrica**. Vol. 22, No. 3, July, 1954. pp. 265-290.

[4] Arrow, K.J. & F.H Hahn.: **Analisis General Competitivo**. Fondo de Cultura Económica, Madrid. 1977.

[5] Artstein, Z.: *Set Value Measures*. **Trans. Am. Math. Soc**. 165, 103-121. 1972.

[6] Aubin, J.P. & H. Frankowska.: **Set-Valued Analysis**. Systems & Control: Foundations & Applications, Volume 2. Birkhäuser. 1990.

[7] Aumann, R.J.: *An Elementary Proof that Integration Preserves Uppersemicontinuity.* **Journal of Mathematical Economics**. 3, (1976) 15-18.

[8] Aumann, R.J.: *Existence of Competitive Equilibria in Markets with a continuum of Traders.* **Econometrica**, Vol. 34, No 1, January, 1966. pp.1-17.

[9] Aumann, R.J.: *Integrals of Set-Valued Functions.* **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. 12, 1965. pp. 1-12.

[10] Aumann, R.J.: *Markets with a Continuum of Traders.* **Econometrica**, Vol. 32, No 1-2, January-April, 1964. pp 39-50.

[11] Bartle, R.G.: **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. JOHN WILEY & SONS, INC. 1995.

[12] Bewley, T.: *Existence of Equilibria in economies with infinitely many Commodities.* **Journal of Economic Theory**. 4, 514-540. 1972.

[13] Bewley, T.: *The Equality of the Core and the Set of Equilibria in Economies with infinitely many commodities and the continuum of agents.* **International Economic Review**. 14, 383-394. 1973.

[14] Debreu, G.: *Integration of Correspondences.* **Proceedings of the Fifth Symposium on Mathematical Statistics and Probalilty 2, part 1**, 351-372. 1967.

[15] Diamond, P. & P. Kloeden.: **Metrics Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications**. World Scientific Publishing. London. 1994.

[16] Dunfort, N., & J.T. Schwartz.: **Linear Operators, Part I**. Interciense Publishes, INc. New York, 1958.

[17] Hildenbrand, W.:*The Core of an Economy with a Measure Space of Economy Agents.* **Review of Economic Studies**. 35, 443-452. 1968.

[18] Hildenbrand, W.: *Pareto Optimality for a Measure Space of Economic Agents.* **International Economy Review**. Vol. 10, No. 3, October, 1969.

[19] Hildenbrand, W.: *Existence of Equilibria for Economies with Production and Measure Space of Consumers.* **Econometrica**, Vol. 38, No. 5, September, 1970. pp. 608-623.

[20] Hildenbrand,W.: **Core and Equilibria of a Large Economy**.Princeton Studies in Mathematical Economics. Princeton University Press. 1974.

[21] Hildenbrand, W & A.P. Kirman.: **Introduction to Equilibrium Analysis: Variations on theme by Edgeworth and Walras**. Advanced Testbooks in Economics. Ediotrs: C.J. Bliss & M.D. Intriligator.1976.

[22] Hildenbrand, W., J.F. Mertens.: *On Fatou's lemma in several dimensions.* **Zeitschrift für Wahrscheinlichkeutstheorie und verwandte Gebiete**. 1971.

[23] Ichiishi, T.: *Economies with a mean demand function.* **Journal of Mathematical Economics.** 3.(1976). 167-171.

[24] Ichiishi, T.: **Game Theory for Economic Analysis**. Economic Theory, Econometrics, and Mathematical Economics. Academic Press. New York. 1983.

[25] Kirman, A.P.: *Measure Theory and Applications to Economics.* in chapter 6 - **Handbook of Mathematical Economics Vol. II** ; Editors: Kenneth Arrow & Michael Intriligator. Elsevier Science Publishers B.V. 1987(third printing).

[26] Klein, E. & A.C. Thompson.: **Theory of Correspondences: Including Applications to Mathemtical Economics**. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1984.

[27] Lindenstrauss, J.: *A short proof of Lyapunov's convexity theorem.* **J. Math. Mech.**. 14. 1966.

[28] Mas-Colell, A., M.D. Whinston & J. R. Green.: **Microeconomic Theory**. Oxford University Press. New York. 1995.

[29] Michael, E.:*Continuous Selections I.* **Ann. Math.** 63. 361-382. 1956.

[30] Rockafellar, R.T.: **Convex Analysis**. Princeton University Press, Priceton. 1970.

[31] Román-Flores, H. & M.A. Rojas-Medar.: **Introducción al Análisis Fuzzy**, 46°Seminário Brasileiro de Análise, 1997, pp. 259-319.

[32] Schmeidler, D.: *Fatou's lemma in several dimensions.* **Proc. Am. Math. Soc.** 24. 300-306. 1970.

[33] Yannelis, N.: *On the Upper and Lower Semicontinuity of the Aumann Integral.* **Journal of Mathematical Economics**. 19, (1990) 373-389.