

Este exemplar corresponde à redação final da
Tese/Dissertação devidamente corrigida e defendida
por: Rodrigo Bittencourt Westrupp
e aprovada pela Banca Examinadora.
Campinas, 22 de dezembro de 1999
R. Bittencourt
COORDENADOR DE PÓS-GRADUAÇÃO
CPG-IC

Diagramas de Voronoi de Ordem k
na Geometria Projetiva Orientada

Rodrigo Bittencourt Westrupp

Dissertação de Mestrado

Diagramas de Voronoi de Ordem k na Geometria Projetiva Orientada

Este exemplar corresponde à redação final da
Dissertação devidamente corrigida e defendida
por Rodrigo Bittencourt Westrupp e aprovada
pela Banca Examinadora.

Campinas, 10 de dezembro de 1999.



Prof. Dr. Pedro Jussieu de Rezende
(IC-UNICAMP) (Orientador)

Dissertação apresentada ao Instituto de Com-
putação, UNICAMP, como requisito parcial para
a obtenção do título de Mestre em Ciência da
Computação.

Diagramas de Voronoi de Ordem k na Geometria Projetiva Orientada

Rodrigo Bittencourt Westrupp¹

Dezembro de 1999

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Pedro Jussieu de Rezende (IC-UNICAMP) (Orientador)
- Prof. Dr. Luiz Henrique de Figueiredo (LNCC-CNPq)
- Prof. Dr. Jorge Stolfi (IC-UNICAMP)
- Prof. Dr. Cid Carvalho de Souza (IC-UNICAMP) (Suplente)

¹Apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq (proc. 132357/98-4) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP (proc. 98/12955-3)

21700000

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V.	
TOMBO BC/	40114
PROG.	278100
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	28/04/00
N.º CPD	

CM-00135984-1

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Westrupp, Rodrigo Bittencourt

W529d Diagramas de Voronoi de ordem k na geometria projetiva orientada / Rodrigo Bittencourt Westrupp -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1999.

Orientador : Pedro Jussieu de Rezende

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação.

I. Geometria projetiva. 2. Algoritmos. I. Rezende, Pedro Jussieu.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Computação. III.
Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Tese defendida e aprovada em 06 de dezembro de 1999, pela
Banca Examinadora composta pelos Professores Doutores:

Luiz Henrique de Figueiredo

Prof. Dr. Luiz Henrique de Figueiredo
IMPA

Jorge Stolfi

Prof. Dr. Jorge Stolfi
IC-UNICAMP

Pedro Jussieu de Rezende

Prof. Dr. Pedro Jussieu de Rezende
IC - UNICAMP

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos uma generalização do diagrama de Voronoi: consideramos diagramas de Voronoi de ordem k no plano projetivo orientado \mathbb{T}^2 . Este espaço admite retas orientadas assim como muitos outros conceitos geométricos fundamentais de maneira consistente. Neste contexto, demonstramos várias propriedades de diagramas de Voronoi, algumas delas intrínsecas a \mathbb{T}^2 . Por exemplo, o diagrama de Voronoi de ordem k de um conjunto de n sítios em \mathbb{T}^2 tem um número exato de regiões e é antípoda do diagrama de Voronoi de ordem $n - k$ do mesmo conjunto de sítios, $\forall k : 1 \leq k < n$. Finalmente, apresentamos uma generalização, de \mathbb{R}^2 para \mathbb{T}^2 , de dois algoritmos para construção de diagramas de Voronoi de ordem k . O primeiro algoritmo constrói os diagramas de Voronoi de todas as ordens para busca dos k vizinhos mais próximos, em tempo e espaço ótimos; enquanto o segundo é um algoritmo incremental randomizado *on-line* para construir o diagrama de Voronoi de cada ordem, independentemente. Para este segundo algoritmo, apresentamos um novo método para localização de pontos, o qual reduz a complexidade de tempo por um fator logarítmico e que é muito mais simples que o original.

Abstract

In this dissertation, we present a generalization of the Voronoi diagram: we consider order k Voronoi diagrams in the oriented projective plane \mathbb{T}^2 . This space handles oriented lines as well as many other fundamental geometric concepts in a consistent way. In this context, we show several properties of Voronoi diagrams, some of them intrinsic to \mathbb{T}^2 . For example, the order k Voronoi diagram of a set of n sites in \mathbb{T}^2 has an exact number of regions. Furthermore, this diagram is antipodal to the order $n - k$ Voronoi diagram of the same set of sites, $\forall k : 1 \leq k < n$. Finally, we present a generalization, from \mathbb{R}^2 to \mathbb{T}^2 , of two algorithms for constructing order k Voronoi diagrams. The first one constructs all Voronoi diagrams for k nearest neighbor search, in optimal time and space, and the other is an on-line randomized incremental algorithm for constructing each order k Voronoi diagram, independently. For this second algorithm, we present a new method for point location which improves the time complexity by a logarithmic factor and which is much simpler than the original one.

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq (proc. 132357/98-4) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP (proc. 98/12955-3), pelo apoio financeiro;

A Vera Ragazzi, pela presteza e empenho em resolver problemas e implementar soluções;

A Guilherme Albuquerque Pinto, principalmente pelas valiosas sugestões;

A César Nivaldo Gon, pelos visualizadores do ambiente GeoPrO;

A Pedro Jussieu de Rezende, pela orientação e pelo grande incentivo para que vários problemas fossem resolvidos, além de suas muitas contribuições para a minha formação;

A Leca, Nardi e Rafa, um agradecimento especial pelo indispensável apoio durante a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Agradecimentos	vii
1 Introdução	1
2 Diagramas de Voronoi de Ordem k	3
3 Geometria Projetiva Orientada	6
3.1 Plano Projetivo Orientado	6
3.2 Os Lados de uma Reta	9
3.3 Uma Distância no Plano Euclidiano de Dois Lados	11
4 Um Algoritmo Ótimo para Construir os Diagramas de Voronoi de todas as Ordens para Busca dos k Vizinhos mais Próximos no Plano Projetivo Orientado	14
4.1 Introdução	14
4.2 Diagramas de Voronoi de ordem k no Plano Projetivo Orientado	15
4.3 O Algoritmo	30
4.4 Corretude	31
4.5 Complexidade de Tempo e de Espaço	32
4.6 Considerações Finais	32
5 Um Algoritmo Randomizado Incremental On-line para Construir Dia- gramas de Voronoi de Ordem k no Plano Projetivo Orientado	34
5.1 Introdução	34
5.2 Dualidade com Casco Convexo	35

5.2.1	Levantamento dos pontos	37
5.3	O Algoritmo	38
5.3.1	Determinando $Q_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\})$	39
5.3.2	Construindo o casco convexo C_{k+1}	40
5.3.3	Inserindo um novo sítio p_i	41
5.4	Corretude	60
5.5	Complexidade de Tempo e Espaço	60
5.6	Considerações Finais	62
6	Conclusões	67
6.1	Trabalhos Futuros	68
	Bibliografia	69

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de diagrama de Voronoi de vizinho mais próximo.	4
2.2	Diagrama de Voronoi de ordem 2 do conjunto de sítios da figura 2.1.	5
3.1	Modelos de \mathbb{T}^2 : (a) plano e (b) esférico.	7
3.2	Relação entre os modelos plano e esférico de \mathbb{T}^2	8
3.3	Exemplos de segmentos de reta no modelo plano de \mathbb{T}^2	9
3.4	Segmento de reta entre um ponto no aquém e um ponto no além.	10
3.5	O lado esquerdo de uma reta.	11
3.6	Os pontos de intersecção de duas retas.	12
3.7	Perpendicularidade entre retas em \mathbb{T}^2	13
4.1	Diagramas de Voronoi antípodas.	17
4.2	Diagrama de Voronoi de ordem 2 do conjunto de sítios da figura 4.1.	18
4.3	Arestas incidentes: (a) v no aquém e (b) $\neg v$ no além.	19
4.4	Arestas incidentes: (a) v no além e (b) $\neg v$ no aquém.	20
4.5	Arestas de \mathbb{V}_{k+1} incidentes em v : (a) v no aquém e (b) v no além. A área sombreada representa o interior do círculo centrado em p . Observe que, em ambos os casos, este círculo contém $ H = k$ sítios no seu interior.	21
4.6	Arestas de \mathbb{V}_{k+2} incidentes em v : (a) v no aquém e (b) v no além. O círculo centrado em q , em ambos os casos, contém $ H + 1 = k + 1$ sítios no seu interior.	22
4.7	Ilustração da prova do Lema 4.3: (a) caso (i) e (b) caso (ii)	23
4.8	Diagrama de Voronoi de ordem 2 de um conjunto de sítios no aquém. Imagem produzida com GeoPrO [12]	33
4.9	Diagrama de Voronoi de ordem 2 de um conjunto incluindo sítios no aquém e no além. Imagem produzida com GeoPrO [12]	33
5.1	Dualidade entre diagrama de Voronoi em \mathbb{R}^2 e casco convexo em \mathbb{R}^3	35
5.2	Mapeamento de \mathbb{T}^2 para \mathbb{T}^3 : sítios em apenas um hemisfério	36
5.3	Mapeamento de \mathbb{T}^2 para \mathbb{T}^3 : sítios em dois hemisférios.	37
5.4	Mapeamento de \mathbb{T}^1 para \mathbb{T}^2 : sítios em dois hemisférios.	38

5.5	Um conjunto de 16 sítios.	40
5.6	O conjunto $Q_3(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$ do nosso exemplo.	41
5.7	Projeção em \mathbb{T}^2 do casco convexo C_4 de $Q_3(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$ do nosso exemplo: (a) parte inferior e (b) parte superior.	41
5.8	Projeção da parte inferior do casco convexo C_{15} em \mathbb{T}^2	42
5.9	Projeção da parte superior do casco convexo C_{15} em \mathbb{T}^2	43
5.10	O buraco produzido por p_{16}	45
5.11	Vértice distal destruído por p_i reaparece como proximal.	46
5.12	Triângulo distal destruído por p_i reaparece como proximal.	47
5.13	Rótulo de uma aresta: (a) diagrama de Voronoi e (b) casco convexo dual.	48
5.14	Todo triângulo adjacente a uma aresta da fronteira é proximal	48
5.15	Triângulos adjacentes à fronteira da superfície destruída.	49
5.16	Triângulos proximais produzidos por p_{16}	50
5.17	A parte sombreada será preenchida por triângulos distais.	51
5.18	H é o conjunto dos $k - 1$ vizinhos mais próximos de qualquer ponto em $e(p, q)$ ou $e(q, r)$	52
5.19	Projeção em \mathbb{T}^2 da parte inferior de C_{16}	53
5.20	Diagrama de Voronoi $V_3(\{p_1, \dots, p_{16}\})$ do nosso exemplo.	54
5.21	Por contradição, supondo que $B \subset A$ (na prova do Lema 5.18).	56
5.22	Haveria 4 pontos cocirculares.	56
5.23	Uma contradição (Lema 5.18).	57
5.24	Por contradição, supondo que C não seja conexo (na prova do Lema 5.19).	57
5.25	Intersecção de uma aresta de A com uma aresta de B	58
5.26	Contradição: B não seria convexa (na prova do Lema 5.19).	58
5.27	Contradição: a seria igual a p_i (Lema 5.20).	59
5.28	Projeção em \mathbb{T}^2 da parte inferior do casco convexo dual do diagrama de Voronoi de ordem 3 de um conjunto de sítios no aquém.	63
5.29	Diagrama de Voronoi de ordem 3 de um conjunto de sítios no aquém de \mathbb{T}^2	64
5.30	Projeção em \mathbb{T}^2 da parte inferior do casco convexo dual do diagrama de Voronoi de ordem 3 de um conjunto de sítios no além.	65
5.31	Diagrama de Voronoi de ordem 3 de um conjunto de sítios no além de \mathbb{T}^2	66

Capítulo 1

Introdução

O diagrama de Voronoi está entre as estruturas mais estudadas em Geometria Computacional, devido à quantidade de suas aplicações em diversas áreas [3]. Um exemplo clássico consiste no seguinte problema: dadas n agências dos correios e a posição de uma pessoa, determinar qual das agências está mais próxima da pessoa. O problema pode ser resolvido de maneira trivial, calculando-se a distância da pessoa a cada agência, em tempo linear no número de agências. Entretanto, se o problema deve ser resolvido frequentemente, é interessante utilizar uma estratégia mais elaborada. Construindo-se uma única vez o diagrama de Voronoi das n agências, podemos determinar a agência mais próxima de qualquer pessoa em tempo $O(\log n)$, utilizando um algoritmo de localização de pontos, como o algoritmo de Kirkpatrick [16].

Nos últimos anos, muitas pesquisas em Geometria Computacional abordaram generalizações do diagrama de Voronoi. Dentre elas, está o diagrama de Voronoi de ordem k , introduzido primeiramente por Shamos e Hoey [30]. Este diagrama generalizado permite, por exemplo, resolver o problema das agências dos correios quando estamos interessados nas k agências mais próximas. Outras generalizações podem ser obtidas, considerando-se objetos mais complexos ou modificando-se o espaço geométrico.

Neste contexto, esta dissertação é continuação natural de dois trabalhos anteriores. No primeiro deles [11], foi apresentado um ambiente distribuído de visualização com suporte para Geometria Projetiva Orientada [31]. Este ambiente, denominado GeoPrO, foi utilizado no segundo trabalho [22], onde foram generalizados, de \mathbb{R}^2 para o plano projetivo orientado \mathbb{T}^2 , algoritmos para construção de diagramas de Voronoi de ordem 1. Dessa forma, o GeoPrO serviu como ferramenta de apoio à visualização dos algoritmos implementados.

Nós também generalizamos algoritmos de \mathbb{R}^2 para \mathbb{T}^2 , mas consideramos diagramas de Voronoi de ordem k . Assim como em [22], utilizamos os visualizadores do ambiente GeoPrO para facilitar a depuração dos algoritmos implementados.

Organização da Dissertação

No capítulo 2, apresentamos uma introdução a diagramas de Voronoi de ordem k e o capítulo 3 apresenta os conceitos fundamentais do plano projetivo orientado. Algumas referências são indicadas no texto, possibilitando ao leitor interessado encontrar mais detalhes.

No capítulo 4, apresentamos uma generalização, de \mathbb{R}^2 para \mathbb{T}^2 , de um algoritmo para construir os diagramas de Voronoi de todas as ordens. Este algoritmo generalizado mantém a otimalidade do algoritmo original e permitiu visualizarmos diagramas de Voronoi, antes do estudo de algoritmos mais complexos. O capítulo também apresenta cotas exatas para o número de regiões, vértices e arestas de um diagrama de Voronoi de ordem k de n sítios em \mathbb{T}^2 e mostra que este diagrama é antípoda do diagrama de Voronoi de ordem $n - k$ do mesmo conjunto de sítios.

Um algoritmo eficiente para construir diagramas de Voronoi de ordem k em \mathbb{T}^2 é apresentado no capítulo 5. Este algoritmo é randomizado, incremental e *on-line* e, ao se inserir um novo sítio, a primeira etapa consiste em localizar um vértice destruído do diagrama de Voronoi anterior. Nós reduzimos o tempo esperado deste passo de $O(\log n)$ para $O(1)$, mantendo a complexidade das demais etapas.

Para demonstrar a corretude dos algoritmos apresentados, nós mostramos várias propriedades de diagramas de Voronoi de ordem k em \mathbb{T}^2 . As propriedades de \mathbb{R}^2 que se aplicam naturalmente a \mathbb{T}^2 são apenas citadas e indicamos uma referência para a demonstração original correspondente.

No final de cada capítulo, apresentamos imagens de diagramas de Voronoi de ordem k nos modelos plano e esférico de \mathbb{T}^2 . Estas imagens foram produzidas pelos visualizadores do ambiente GeoPrO, como resultado da execução dos algoritmos implementados.

Capítulo 2

Diagramas de Voronoi de Ordem k

A definição usual de diagrama de Voronoi é o *diagrama de vizinho mais próximo*: dado um conjunto de objetos num espaço geométrico, o diagrama de Voronoi desse conjunto é uma divisão do espaço em regiões, cada qual associada a um objeto do conjunto, de modo que todos os pontos de uma região são mais próximos do objeto correspondente do que de todos os demais. Veja na figura 2.1 um diagrama de Voronoi de pontos. No contexto de diagramas de Voronoi, cada objeto do conjunto é denominado *sítio*.

Outras definições do diagrama de Voronoi são consideradas variações ou generalizações e podem ser obtidas da seguinte forma [22]:

- utilizando outra relação de ordem entre distâncias;
- considerando objetos mais complexos;
- modificando o espaço geométrico.

A modificação da relação de ordem entre distâncias acontece, por exemplo, no *diagrama de Voronoi de vizinho mais distante*. Neste diagrama, os pontos de cada região são mais distantes do sítio associado do que de todos os outros.

No diagrama de vizinho mais próximo, cada região é associada a apenas um sítio do conjunto. Entretanto, podemos definir um diagrama que associe, a cada região, k sítios do conjunto, de modo que os pontos de cada região sejam mais próximos dos k sítios associados do que de todos os demais. O diagrama de Voronoi definido dessa forma é denominado *diagrama de Voronoi de ordem k* . Assim, o diagrama de vizinho mais próximo é o diagrama de Voronoi de ordem 1, enquanto o diagrama de vizinho mais distante é o diagrama de Voronoi de ordem $n - 1$, onde n é o número de sítios.

Este trabalho trata de generalizações do diagrama de Voronoi. Em primeiro lugar, nós consideramos diagramas de Voronoi de ordem k . Por exemplo, o diagrama de Voronoi de

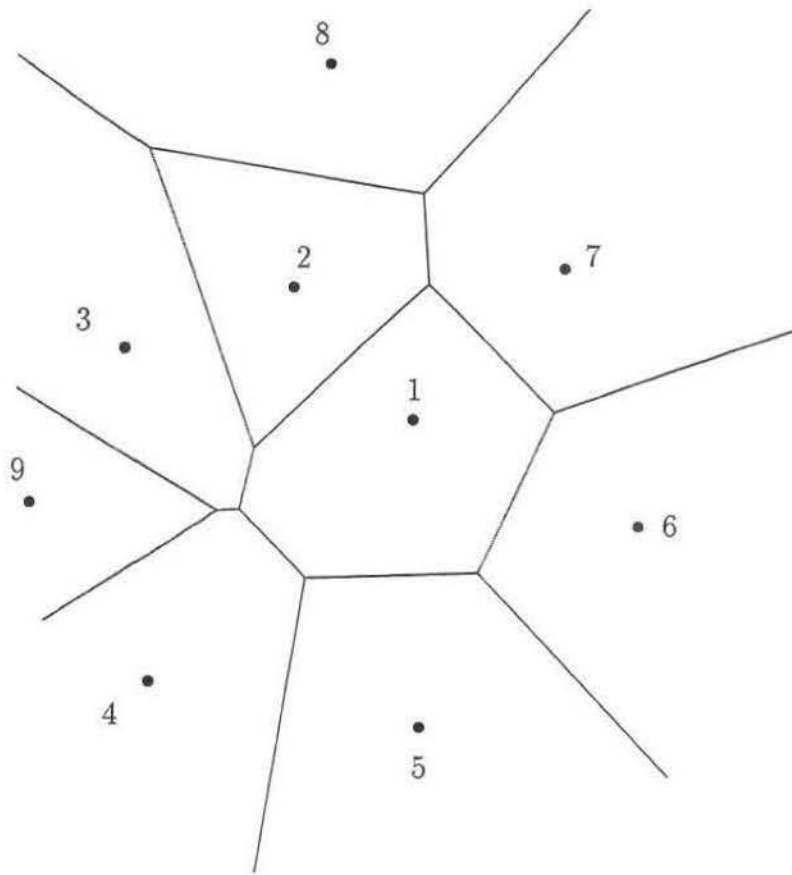


Figura 2.1: Exemplo de diagrama de Voronoi de vizinho mais próximo.

ordem 2 do conjunto de sítios da figura 2.1 é apresentado na figura 2.2. Além disso, nós modificamos o espaço geométrico, ao utilizarmos a Geometria Projetiva Orientada.

Alguns conceitos que parecem bastante intuitivos no diagrama de Voronoi de ordem 1 podem, à primeira vista, tornar-se intrigantes quando aumentamos a ordem do diagrama. Por exemplo, no diagrama de Voronoi de ordem 1, cada região contém o sítio ao qual está associada. Entretanto, nos diagramas de ordem mais alta, onde cada região está associada a k sítios, um sítio pode ser associado a uma região e, ao mesmo tempo, estar contido em outra região. Na figura 2.2, observe que a região associada aos sítios $\{1, 7\}$ contém apenas o sítio 7 e a região associada a $\{1, 5\}$ não contém nenhum sítio.

Outro exemplo é a existência de uma região para cada sítio no diagrama de Voronoi de ordem 1. Isto não ocorre em diagramas de ordem superior, pois cada região está associada a k sítios. Assim, existem $\binom{n}{k}$ possíveis subconjuntos de k sítios, onde um sítio pode estar associado a várias regiões. Felizmente, apenas $O(k(n-k))$ destas combinações

estão associadas a regiões do diagrama de Voronoi de ordem k [17]. No capítulo 4, nós apresentamos uma demonstração do número exato de regiões, vértices e arestas de um diagrama de Voronoi de ordem k no plano projetivo orientado. No próximo capítulo, apresentamos uma introdução a este espaço geométrico.

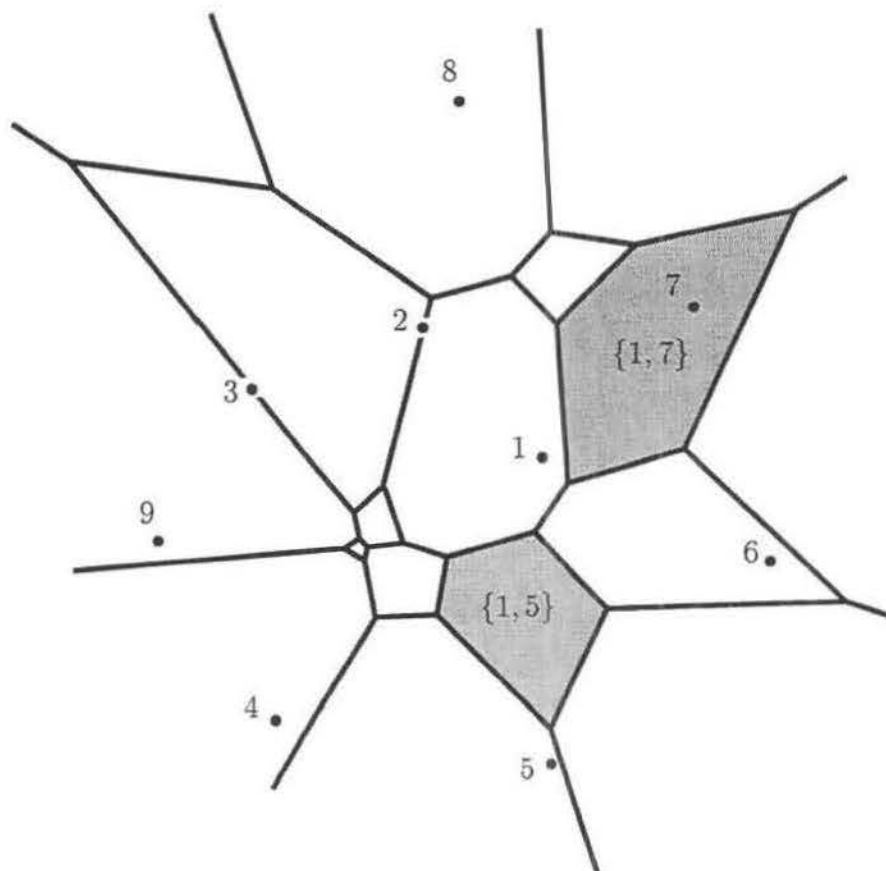


Figura 2.2: Diagrama de Voronoi de ordem 2 do conjunto de sítios da figura 2.1.

Capítulo 3

Geometria Projetiva Orientada

A grande maioria dos algoritmos para construção de diagramas de Voronoi no plano Euclidiano \mathbb{R}^2 trata de maneira especial as regiões ilimitadas do diagrama. Num algoritmo incremental, por exemplo, a inserção de um novo sítio geralmente remove alguns vértices do diagrama. Porém, caso o novo sítio seja inserido no exterior do casco convexo do conjunto, pode acontecer de nenhum vértice ser removido. Como muitos algoritmos incrementais [4, 13] começam identificando um vértice destruído pelo novo sítio, a inserção deste sítio tem que ser tratada como um caso especial.

Uma solução é utilizar o plano projetivo clássico \mathbb{P}^2 que equivale, topologicamente, a uma cópia do \mathbb{R}^2 e um ponto no infinito. Este ponto representa simultaneamente todos os pontos no infinito e, portanto, surge o problema de ausência de orientação: os dois pontos no infinito de uma reta são representados pelo mesmo ponto, embora estejam em sentidos opostos.

Uma solução elegante para este problema vem da utilização do plano projetivo orientado \mathbb{T}^2 [25, 31] que é, topologicamente, composto de duas cópias do \mathbb{R}^2 e uma reta do infinito. Deste modo, os pontos no infinito de uma reta são representados por pontos distintos na reta do infinito, uma representação que permite definirmos de maneira consistente conceitos geométricos como convexidade e orientação.

Neste capítulo, apresentaremos a notação que será utilizada ao longo da dissertação, bem como conceitos associados ao plano projetivo orientado. A notação adotada é a mesma usada em [31], onde o leitor interessado pode encontrar, em detalhes, os conceitos que serão apresentados.

3.1 Plano Projetivo Orientado

O plano projetivo orientado \mathbb{T}^2 combina as vantagens do plano projetivo clássico e do plano Euclidiano. Além de considerar a existência de pontos no infinito, \mathbb{T}^2 permite atribuir

orientação aos objetos geométricos e, para isto, são utilizadas coordenadas homogêneas com sinal. Assim, o ponto $p = [x, y, w]$ é diferente do ponto $[-x, -y, -w]$. Este último, denotado por $\neg p$, é denominado *antípoda* de p , ao mesmo tempo em que p é antípoda de $\neg p$.

Como \mathbb{T}^2 é formado por duas cópias do \mathbb{R}^2 e uma reta do infinito, devemos distinguir pontos *próprios* e *impróprios*. Um ponto $p = [x, y, w]$ é próprio se $w \neq 0$. Caso contrário, com $w = 0$, o ponto é impróprio¹, ou seja, está na reta do infinito, denotada por Ω . Já um ponto próprio está numa das cópias do \mathbb{R}^2 : uma delas é denominada *aquém* e a outra *além*. No *aquém*, estão todos os pontos com $w > 0$ e, no *além*, aqueles com $w < 0$. O *aquém* e o *além* são chamados de *hemisférios canônicos*.

\mathbb{T}^2 pode ser representado pelo *modelo plano* ou pelo *modelo esférico*, como mostrado na figura 3.1. No modelo plano, um ponto $p = [x, y, w]$ é representado pelo ponto em coordenadas cartesianas $(x/w, y/w)$, onde $w \neq 0$; no modelo esférico, p é representado pelo ponto $(x, y, w) / \sqrt{x^2 + y^2 + w^2}$. Note que estes dois modelos estão relacionados por projeção central, como mostrado na figura 3.2. Nossa convenção nas figuras utiliza pontos vazios e linhas tracejadas para o *além* no modelo plano ou quando estão escondidos no modelo esférico.

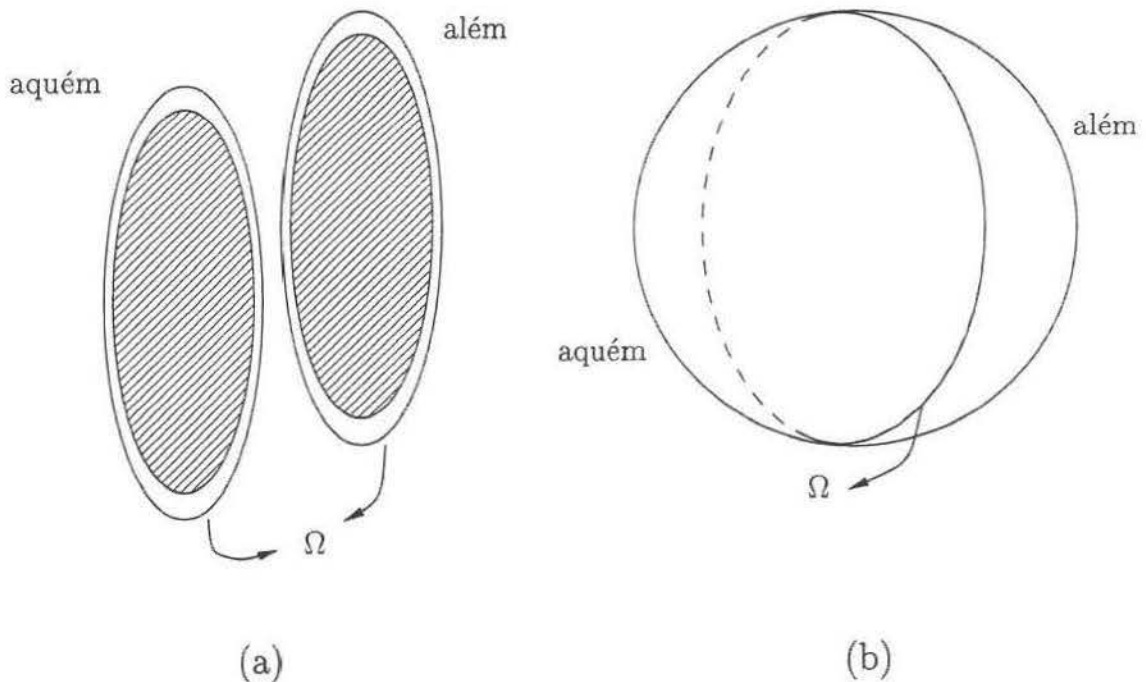


Figura 3.1: Modelos de \mathbb{T}^2 : (a) plano e (b) esférico.

¹A tripla $[0, 0, 0]$ é considerada inválida.

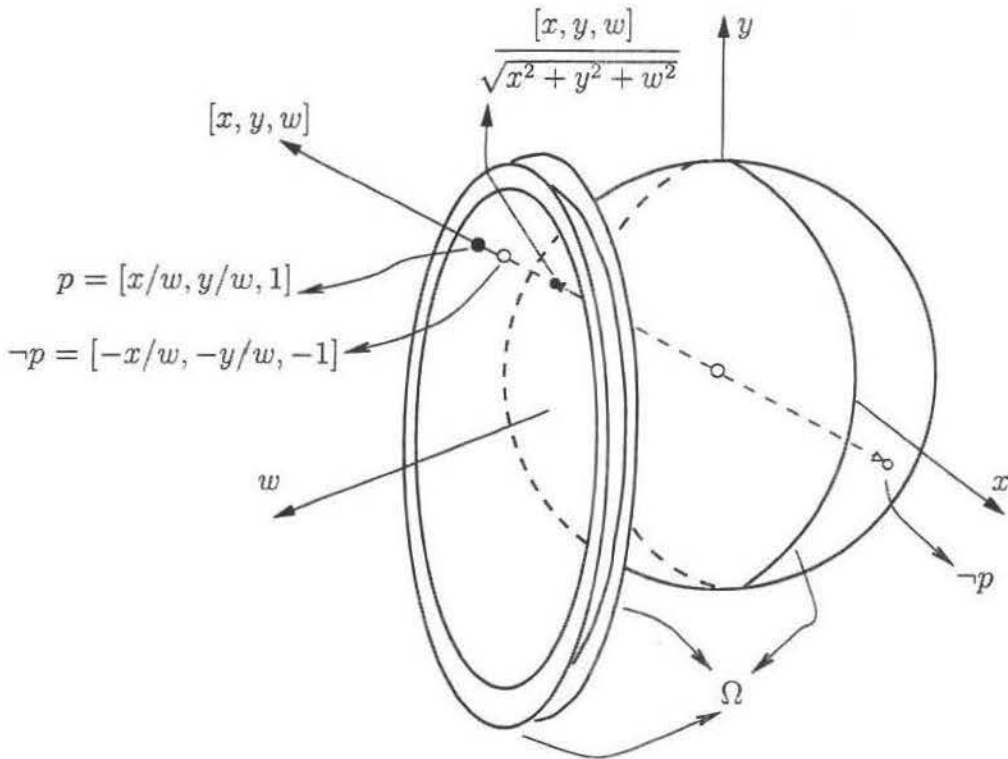


Figura 3.2: Relação entre os modelos plano e esférico de \mathbb{T}^2 .

O conceito de segmento de reta em \mathbb{T}^2 é uma simples generalização do mesmo conceito em \mathbb{R}^2 . Dados dois pontos p e q em \mathbb{T}^2 , não coincidentes, o segmento de reta entre eles é formado pelos pontos do menor dos dois arcos definidos por p e q no círculo máximo do modelo esférico que os contém. Veja na figura 3.3 alguns exemplos de segmentos de reta em \mathbb{T}^2 . Observe que o segmento de reta entre um ponto p , no aquém, e um ponto q , no além, tem um aspecto particular no modelo plano. Este segmento de reta pode ser melhor visualizado no modelo esférico, como mostrado na figura 3.4. Note que o segmento de reta entre p e $-p$ é indefinido, pois existem infinitos círculos máximos passando por estes pontos.

A noção de ponto médio está diretamente relacionada ao conceito de segmento de reta. Dados dois pontos p e q , onde pelo menos um deles é próprio, nós denotamos por $midpoint(p, q)$ o ponto médio correspondente, definido da seguinte forma:

$$midpoint(p, q) = [p_x|q_w| + q_x|p_w|, p_y|q_w| + q_y|p_w|, p_w|q_w| + q_w|p_w|]$$

O ponto médio de dois pontos só está bem definido se o segmento de reta entre eles também está. Por exemplo, se $q = -p$, então o ponto médio é indefinido, da mesma forma que o segmento de reta entre eles.

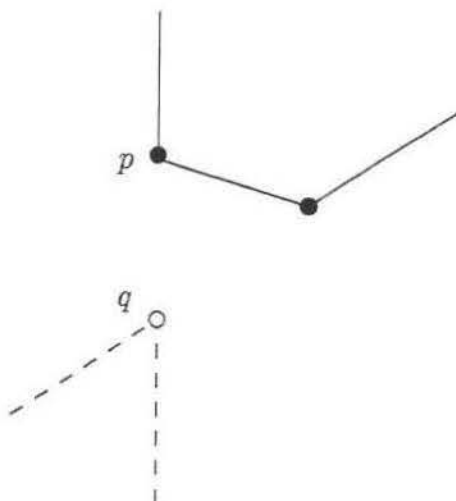


Figura 3.3: Exemplos de segmentos de reta no modelo plano de \mathbb{T}^2 .

3.2 Os Lados de uma Reta

Em \mathbb{R}^2 , dados dois pontos p e q existe uma única reta passando por eles. Mas, em \mathbb{T}^2 , podemos definir duas retas passando por p e q , contendo os mesmos pontos, mas com orientações opostas. A equação de uma reta r em \mathbb{T}^2 tem a forma $Ax + By + Cz = 0$, onde A, B, C são constantes reais. A reta com orientação oposta a de r é $-Ax - By - Cz = 0$. Portanto, é conveniente representar r em \mathbb{T}^2 pela tripla de coeficientes $\langle A, B, C \rangle$ e a reta com orientação oposta por $\langle -A, -B, -C \rangle$.

Atribuindo orientação a uma reta, podemos definir de maneira consistente os seus lados esquerdo e direito. A figura 3.5 mostra o lado esquerdo de uma reta r orientada de p para q , passando por estes pontos. Note que a reta também passa por $\neg p$ e $\neg q$. A operação de determinar uma reta passando por dois pontos é chamada *join* e denotada por \vee . Nesta notação, a reta r é definida por $p \vee q$, enquanto a reta com orientação oposta a de r é $q \vee p$.

Em \mathbb{T}^2 , duas retas não coincidentes interceptam-se sempre em dois pontos antípodas, como mostrado na figura 3.6. A operação dual do *join* consiste em, dadas duas retas r e s , determinar um de seus pontos de intersecção. Esta operação é denominada *meet* e denotada por \wedge . Na figura 3.6, o ponto p é igual a $r \wedge s$, ou seja, p é o ponto em que r , de acordo com sua orientação, intercepta s passando do lado esquerdo para o lado direito desta reta.

Como as retas em \mathbb{T}^2 possuem orientação, podemos decidir se um ponto p está do lado esquerdo ou do lado direito de uma reta r . Esta operação, denotada por \diamond , indica o sinal

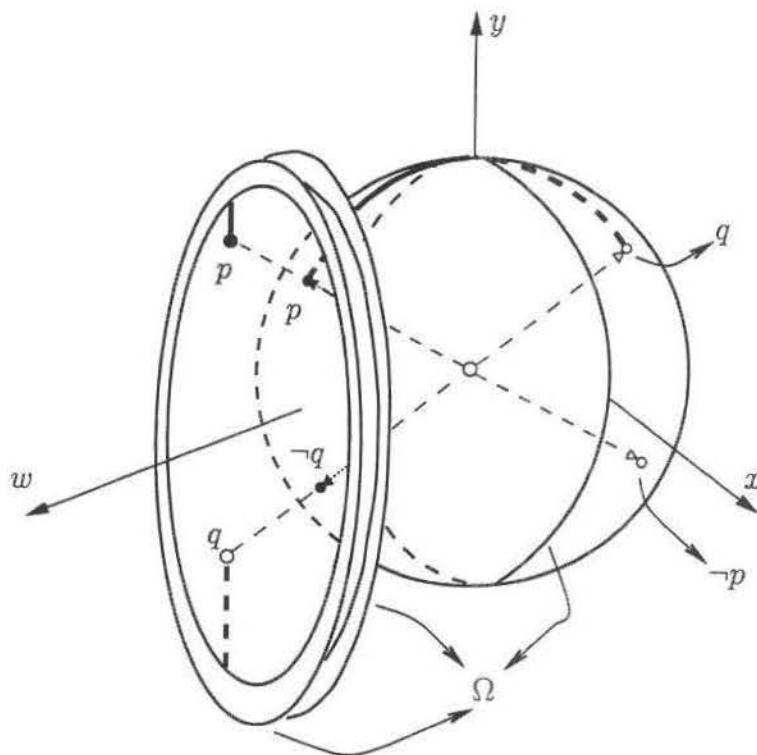


Figura 3.4: Segmento de reta entre um ponto no aquém e um ponto no além.

da substituição das coordenadas do ponto p na equação da reta r . Assim,

$$p \text{ está } \left\{ \begin{array}{l} \text{à esquerda de} \\ \text{sobre} \\ \text{à direita de} \end{array} \right\} r \text{ se } p \diamond r \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right\}.$$

Com o operador \wedge , podemos definir o conceito de perpendicularidade de duas retas em \mathbb{T}^2 . Em primeiro lugar, considere que Ω seja a reta do infinito orientada de modo que o aquém esteja do seu lado esquerdo. Nós definimos $\text{dir}(r) = r \wedge \Omega$, ou seja, $\text{dir}(r)$ é o ponto de Ω interceptado por r , passando do aquém para o além, de acordo com a orientação de r . Veja na figura 3.7. O ponto de \mathbb{T}^2 correspondente ao vetor ortogonal a $\text{dir}(r)$ é denotado por $\text{norm}(r)$. Assim, nós dizemos que uma reta s é perpendicular a r se $\text{norm}(r) = \text{dir}(s)$ ou $\text{dir}(r) = \text{norm}(s)$.

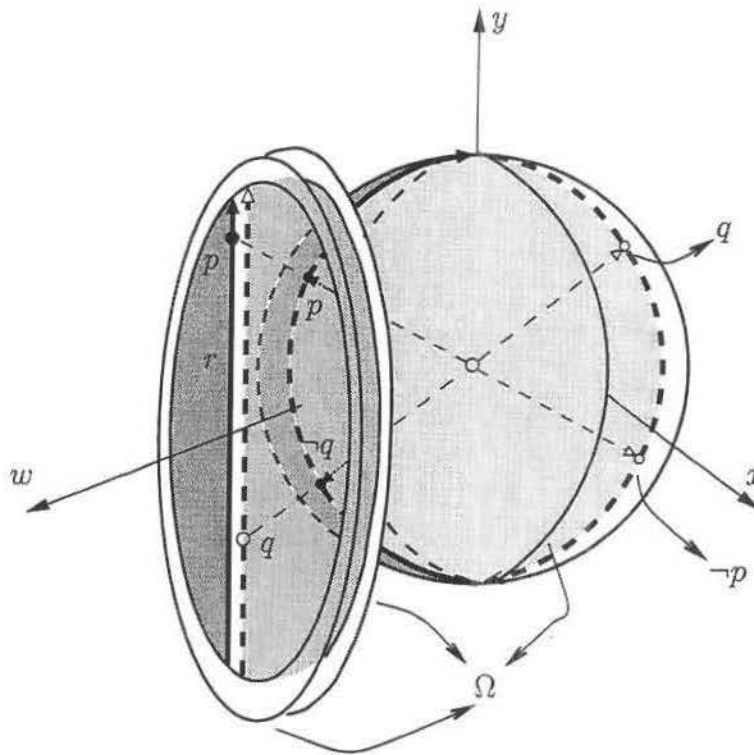


Figura 3.5: O lado esquerdo de uma reta.

3.3 Uma Distância no Plano Euclidiano de Dois Lados

Com duas cópias do \mathbb{R}^2 e uma reta do infinito, \mathbb{T}^2 pode ser usado para emular \mathbb{R}^2 [31]. A tradução das primitivas dos algoritmos geométricos de \mathbb{R}^2 para \mathbb{T}^2 , de maneira adequada, permite resolver problemas geométricos de maneira uniforme e transparente. O algoritmo em \mathbb{T}^2 torna-se uniforme, pois não precisa considerar casos especiais e, ao mesmo tempo, fica transparente quando as primitivas são generalizadas adequadamente. Assim, o algoritmo funciona como se estivesse em \mathbb{R}^2 .

Quando utilizado dessa forma, \mathbb{T}^2 é denominado *plano Euclidiano de dois lados*. A seguir, nós apresentamos a noção de distância neste plano.

Definição 3.1 *Sejam p e q pontos em \mathbb{T}^2 , onde pelo menos um deles é um ponto próprio. Então, a distância $d_{\mathbb{T}^2}(p, q) : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^1$, é definida como:*

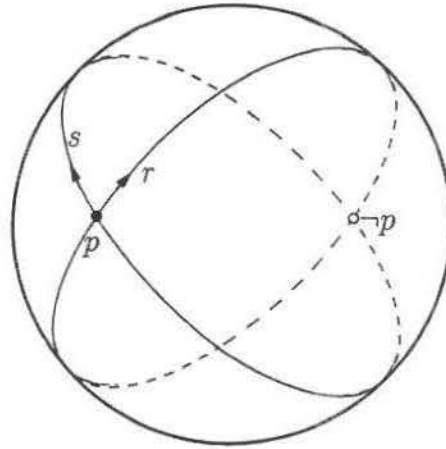


Figura 3.6: Os pontos de intersecção de duas retas.

$$d_{\mathbb{T}^2}(p, q) = \left[\sqrt{(p_x q_w - q_x p_w)^2 + (p_y q_w - q_y p_w)^2}, p_w q_w \right]$$

Note que $d_{\mathbb{T}^2}$ assume valores num subconjunto de \mathbb{T}^1 e a menor distância entre dois pontos p e q de \mathbb{T}^2 é $[0, 1]$, quando $p = q$. Se p e q estão no mesmo hemisfério, esta distância é sempre finita, mas quando um dos pontos está sobre a reta do infinito, a distância é $[1, 0]$ (infinita). Para pontos em hemisférios diferentes, a distância assume valores além do infinito e a maior distância entre dois pontos é $[0, -1]$, quando $p = \neg q$.

Definição 3.2 A relação de ordem entre pontos de \mathbb{T}^1 é definida da seguinte maneira: sejam p e q pontos em \mathbb{T}^1 . Nós dizemos que $p \leq_{\mathbb{T}^1} q$ se e somente se:

- (i) $p_w q_w \leq 0$, $p_w \geq 0$, $q_w \leq 0$ ou
- (ii) $p_w q_w > 0$, $p_x q_w \leq q_x p_w$.

É fácil verificar que $d_{\mathbb{T}^2}$ satisfaz os mesmos axiomas que funções de distância entre pontos com coordenadas reais e esta é, portanto, uma generalização desta noção. Nós denominamos $d_{\mathbb{T}^2}(p, q)$ a *distância no Plano Euclidiano de Dois Lados* de p a q .

Podemos observar que a distância entre um ponto próprio e um ponto impróprio é sempre igual a $[1, 0]$. Assim, não podemos distinguir numericamente distâncias infinitas. No entanto, algoritmos para construção de diagramas de Voronoi frequentemente utilizam distância para decidir o vizinho mais próximo de um dado ponto. Pela definição de $d_{\mathbb{T}^2}$, um ponto na reta do infinito está equidistante de todos os pontos do *aquém* e do *além* e, portanto, todos os pontos são cocirculares. No capítulo 4, nós mostramos como um algoritmo pode ser generalizado, de \mathbb{R}^2 para \mathbb{T}^2 , tratando esta particularidade nas primitivas geométricas.

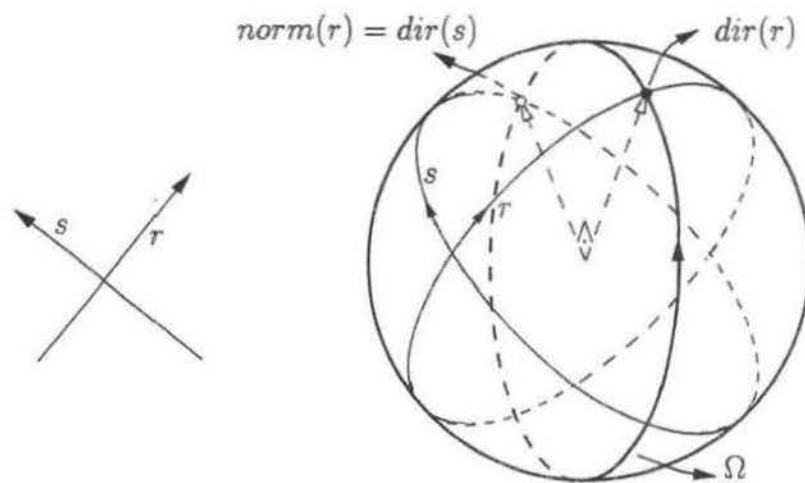


Figura 3.7: Perpendicularidade entre retas em \mathbb{T}^2 .

Nos próximos capítulos, nós utilizamos duas operações entre pontos de \mathbb{T}^2 : soma e subtração. Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{T}^2$, a soma $p + q$ resulta no ponto em \mathbb{T}^2 :

$$[2p_x|q_w| + 2q_x|p_w|, 2p_y|q_w| + 2q_y|p_w|, p_w|q_w| + q_w|p_w|].$$

Se p e q estão no mesmo hemisfério, a subtração $p - q$ é dada pelo ponto em \mathbb{T}^2 :

$$[p_x|q_w| - q_x|p_w|, p_y|q_w| - q_y|p_w|, p_w|q_w|].$$

Caso contrário, $p - q$ é igual a:

$$[p_x|q_w| - q_x|p_w|, p_y|q_w| - q_y|p_w|, p_w|q_w|].$$

Capítulo 4

Um Algoritmo Ótimo para Construir os Diagramas de Voronoi de todas as Ordens para Busca dos k Vizinhos mais Próximos no Plano Projetivo Orientado

4.1 Introdução

O problema de busca dos k vizinhos mais próximos para k arbitrário pode ser resolvido de maneira eficiente construindo-se a priori os diagramas de Voronoi de todas as ordens. Utilizando esta abordagem, Dehne [9] apresentou um algoritmo ótimo para o plano euclidiano. Neste capítulo, apresentamos uma generalização deste algoritmo para \mathbb{T}^2 , além de várias propriedades de diagramas de Voronoi, algumas delas intrínsecas a \mathbb{T}^2 , demonstradas na seção 4.2. Por exemplo, o diagrama de Voronoi de ordem k de um conjunto de n sítios em \mathbb{T}^2 tem um número exato de regiões e este diagrama é antípoda do diagrama de Voronoi de ordem $n - k$ do mesmo conjunto de sítios, $\forall k : 1 \leq k < n$. A seção 4.3 apresenta o algoritmo e, nas seções 4.4 e 4.5, demonstramos sua corretude e complexidade. O conteúdo deste capítulo está essencialmente no artigo [26].

4.2 Diagramas de Voronoi de ordem k no Plano Projetivo Orientado

Nós denotamos por S um conjunto de n sítios, que são pontos em \mathbb{T}^2 e por $\neg S$ o conjunto dos pontos antípodas dos sítios em S . Seja k um inteiro, $1 \leq k < n$. Para cada subconjunto $H_k \subset S$ de k sítios, nós denotamos por $\mathcal{V}_k(H_k, S)$ o conjunto:

$$\{x \in \mathbb{T}^2 : d_{\mathbb{T}^2}(x, p) \leq_{\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^2}(x, q), \forall p \in H_k, \forall q \in S \setminus H_k\},$$

que é denominado a *região de Voronoi de ordem k* associada a H_k . Em outras palavras, $\mathcal{V}_k(H_k, S)$ é o conjunto de pontos em \mathbb{T}^2 cujos k vizinhos mais próximos em S são os sítios em H_k . Como $d_{\mathbb{T}^2}$ é uma generalização da métrica Euclidiana, o conjunto de todas as regiões de Voronoi de ordem k forma uma partição de \mathbb{T}^2 . Nós denotamos esta partição por $\mathbb{V}_k(S)$ e a chamamos de *diagrama de Voronoi de ordem k de S* .

Assumimos que $S \cup \neg S$ não contém quatro pontos com circuncentro próprio¹. Toda aresta de um diagrama de Voronoi de ordem k é parte de um bissetor $B(p, q)$, com $p, q \in S$. Nós denotamos por $\bar{B}_k(p, q)$ uma parte de $B(p, q)$ que é uma aresta do diagrama de Voronoi de ordem k de S .

A primeira propriedade que apresentaremos refere-se à inversão da relação de ordem quando a função de distância é aplicada a pontos antípodas. Esta propriedade é caracterizada pelo seguinte lema.

Lema 4.1 *Se p, q e r são pontos em \mathbb{T}^2 , então:*

$$d_{\mathbb{T}^2}(r, p) \leq_{\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^2}(r, q) \iff d_{\mathbb{T}^2}(\neg r, p) \geq_{\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^2}(\neg r, q)$$

PROVA: Sejam $[x_1, w_1]$ e $[x_2, w_2]$ as coordenadas, em \mathbb{T}^1 , de $d_{\mathbb{T}^2}(r, p)$ e $d_{\mathbb{T}^2}(r, q)$, respectivamente. Então,

$$d_{\mathbb{T}^2}(r, p) \leq_{\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^2}(r, q) \iff [x_1, w_1] \leq_{\mathbb{T}^1} [x_2, w_2]$$

Pela definição de $\leq_{\mathbb{T}^1}$ (seção 3.3),

$$[x_1, w_1] \leq_{\mathbb{T}^1} [x_2, w_2] \iff$$

ou

$$(i) \ w_1 w_2 \leq 0 \text{ e } w_1 \geq 0 \text{ e } w_2 \leq 0 \iff$$

$$(-w_1)(-w_2) \leq 0 \text{ e } w_1 \geq 0 \text{ e } w_2 \leq 0 \iff$$

¹Pela definição de $d_{\mathbb{T}^2}$, todos os sítios são cocirculares se consideramos como centro **qualquer** ponto na reta do infinito. Veja a seção 3.3.

$$(-w_2)(-w_1) \leq 0 \text{ e } (-w_2) \geq 0 \text{ e } (-w_1) \leq 0;$$

ou

$$(ii) \ w_1 w_2 > 0 \text{ e } x_1 w_2 \leq x_2 w_1 \iff$$

$$(-w_1)(-w_2) > 0 \text{ e } x_1(-w_2) \geq x_2(-w_1) \iff$$

$$(-w_2)(-w_1) > 0 \text{ e } x_2(-w_1) \leq x_1(-w_2).$$

Como ((i) ou (ii)) $\iff [x_1, -w_1] \geq_{\mathbb{T}^1} [x_2, -w_2]$, temos que

$$[x_1, w_1] \leq_{\mathbb{T}^1} [x_2, w_2] \iff [x_1, -w_1] \geq_{\mathbb{T}^1} [x_2, -w_2].$$

Pela definição de distância no Plano Euclidiano de dois lados (seção 3.3):

$$d_{\mathbb{T}^2}(r, p) = [x_1, w_1] \iff d_{\mathbb{T}^2}(\neg r, p) = [x_1, -w_1].$$

Analogamente,

$$d_{\mathbb{T}^2}(r, q) = [x_2, w_2] \iff d_{\mathbb{T}^2}(\neg r, q) = [x_2, -w_2].$$

Portanto, nós provamos que

$$d_{\mathbb{T}^2}(r, p) \leq_{\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^2}(r, q) \iff d_{\mathbb{T}^2}(\neg r, p) \geq_{\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^2}(\neg r, q).$$

□

Pelo lema anterior, se s é o vizinho mais próximo de p , então s é o vizinho mais distante de $\neg p$, como observado em [22]. Nós generalizamos esta relação para diagramas de Voronoi de ordem k .

Teorema 4.1 *O diagrama de Voronoi de ordem k de um conjunto S de n sítios em \mathbb{T}^2 é antípoda do diagrama de Voronoi de ordem $n - k$ de S , $\forall k : 1 \leq k < n$.*

PROVA: Considere o diagrama de Voronoi de ordem k de S , $\mathcal{V}_k(S)$, e um ponto $x \in \mathbb{T}^2$. Seja H_k um conjunto próprio de S , contendo k sítios. Pela definição de $\mathcal{V}_k(H_k, S)$,

$$x \in \mathcal{V}_k(H_k, S) \iff d_{\mathbb{T}^2}(x, p) \leq_{\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^2}(x, q), \forall p \in H_k, \forall q \in S \setminus H_k.$$

Pelo Lema 4.1,

$$x \in \mathcal{V}_k(H_k, S) \iff d_{\mathbb{T}^2}(\neg x, p) \geq_{\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^2}(\neg x, q), \forall p \in H_k, \forall q \in S \setminus H_k,$$

que é equivalente a

$$x \in \mathcal{V}_k(H_k, S) \iff d_{\mathbb{T}^2}(\neg x, q) \leq_{\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^2}(\neg x, p), \forall q \in S \setminus H_k, \forall p \in H_k,$$

ou

$$x \in \mathcal{V}_k(H_k, S) \iff \neg x \in \mathcal{V}_{n-k}(S \setminus H_k, S).$$

□

Na prática, conhecendo-se um diagrama de Voronoi de ordem k em \mathbb{T}^2 , podemos obter o diagrama de Voronoi de ordem $n - k$, em tempo linear, simplesmente substituindo cada vértice pelo seu antípoda e mantendo a topologia representada pelas arestas conectando pares de vértices. A figura 4.1 mostra o diagrama de Voronoi de ordem 1 de um conjunto de 4 sítios e o seu antípoda.

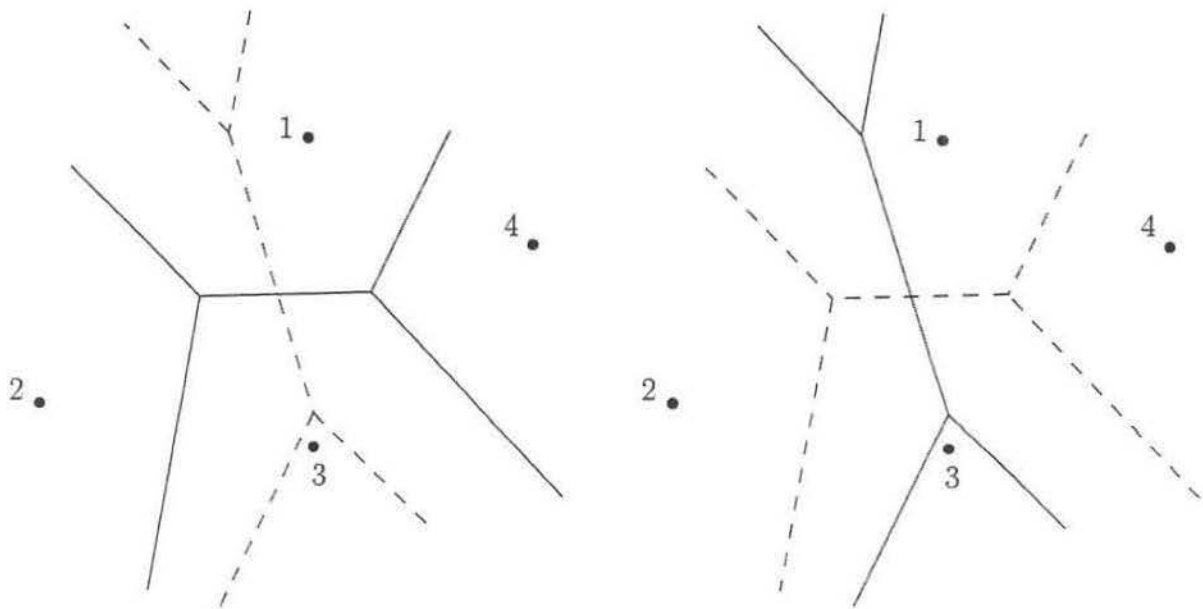


Figura 4.1: Diagramas de Voronoi antípodas.

O diagrama de Voronoi de ordem 2 do conjunto de sítios anterior pode ser visto na figura 4.2. Note que, para n par, o diagrama de Voronoi de ordem $n/2$ é antípoda dele mesmo. Assim, observe na figura que a parte do diagrama que está no além coincide com a parte do aquém.

O seguinte lema, cuja versão Euclidiana pode ser encontrada em [17], descreve os pontos próprios de \mathbb{T}^2 que estão em arestas de algum diagrama de Voronoi de ordem k . Para uma descrição dos pontos na reta do infinito, veja o Lema 4.3 e o Teorema 4.4.

Lema 4.2 *Seja $\mathcal{V}_k(S)$ o diagrama de Voronoi de ordem k de um conjunto S de sítios em \mathbb{T}^2 . Então, $p \notin \Omega$ é um ponto numa aresta $\bar{B}_k(s_i, s_j)$ de $\mathcal{V}_k(S)$ se e somente se o*

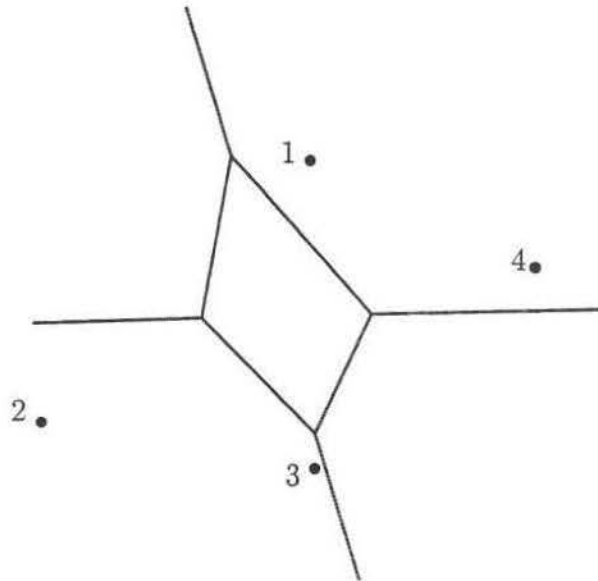


Figura 4.2: Diagrama de Voronoi de ordem 2 do conjunto de sítios da figura 4.1.

círculo centrado em p com raio $d_{\mathbb{T}^2}(p, s_i) = d_{\mathbb{T}^2}(q, s_j)$ contém $k - 1$ sítios de S no seu interior.

PROVA: Esta é uma simples generalização da prova do lema 3 de [17].

□

Teorema 4.2 *Sejam $v, \neg v \in \mathbb{T}^2$ os circuncentros próprios de $s_a, s_b, s_c \in S$, com s_a, s_b, s_c no mesmo hemisfério de \mathbb{T}^2 . Seja H o conjunto de sítios que estão mais próximos de v do que s_a, s_b, s_c estão:*

$$H = \{z \in S : d_{\mathbb{T}^2}(v, z) <_{\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^2}(v, s_a)\}$$

e seja $k = |H|$. Então, v é um vértice de Voronoi de $\mathbb{V}_{k+1}(S)$ e $\mathbb{V}_{k+2}(S)$, enquanto $\neg v$ é um vértice de Voronoi de $\mathbb{V}_{n-k-1}(S)$ e $\mathbb{V}_{n-k-2}(S)$. Além disso, as arestas e regiões que são incidentes em v e $\neg v$ são dadas pelos diagramas mostrados nas figuras 4.3 e 4.4.

PROVA: Esta é uma generalização da prova do teorema 1 de [9]. Pelo Teorema 4.1, segue que as arestas incidentes em $\neg v$ são as arestas antípodas àquelas incidentes em v . Observe nas figuras 4.5 e 4.6 as arestas de \mathbb{V}_{k+1} e \mathbb{V}_{k+2} incidentes em v , respectivamente.

□

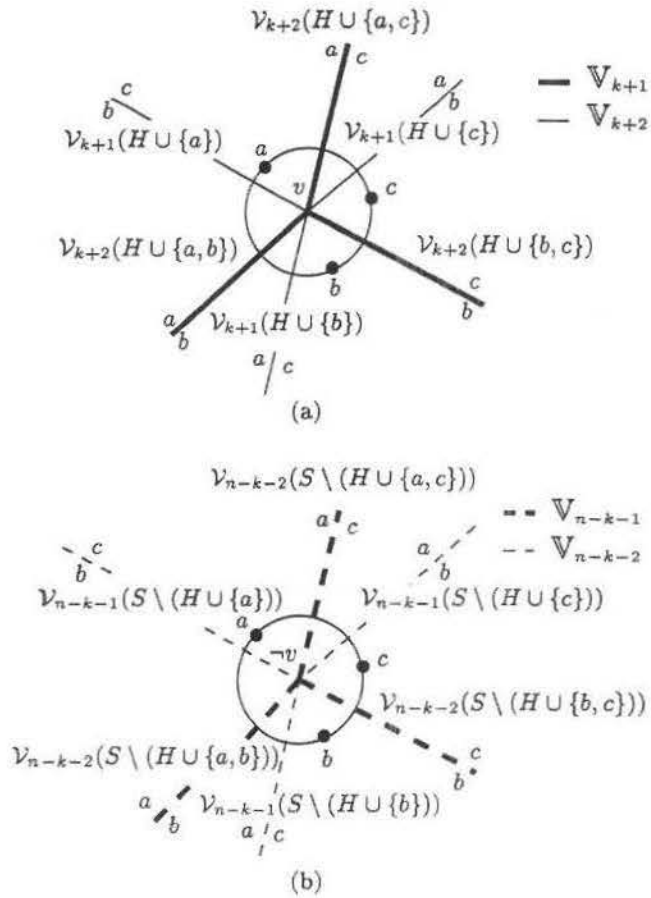


Figura 4.3: Arestas incidentes: (a) v no aquém e (b) $\neg v$ no além.

Teorema 4.3 *Sejam $s_a, s_b, s_c \in S$ e $v \in \mathbb{T}^2 \setminus \Omega$ o vértice de Voronoi de $\mathbb{V}_i(S)$ tal que:*

$$v \in \mathcal{V}_i(A, S) \cap \mathcal{V}_i(B, S) \cap \mathcal{V}_i(C, S),$$

$\neg v$ é um vértice de Voronoi de $\mathbb{V}_j(S)$,

$$\neg v \in \mathcal{V}_j(A', S) \cap \mathcal{V}_j(B', S) \cap \mathcal{V}_j(C', S),$$

e $v, \neg v$ são os circuncentros próprios de s_a, s_b, s_c . Seja H o conjunto de sítios de S que são mais próximos de v do que s_a, s_b, s_c estão:

$$H = \{z \in S : d_{\mathbb{T}^2}(v, z) <_{\mathbb{T}^1} d_{\mathbb{T}^2}(v, s_a)\}$$

e seja $k = |H|$. Então, ou

$i = k + 1$ e $j = n - k - 1$ com

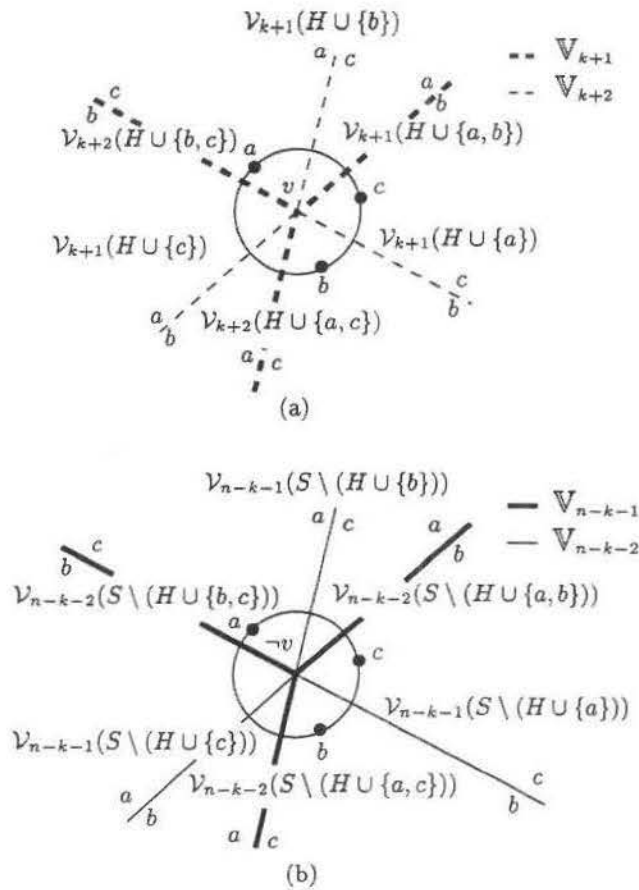


Figura 4.4: Arestas incidentes: (a) v no além e (b) $\neg v$ no aquém.

$$\{A, B, C\} = \{H \cup \{s_a\}, H \cup \{s_b\}, H \cup \{s_c\}\} \text{ e}$$

$$\{A', B', C'\} = \{S \setminus (H \cup \{s_a\}), S \setminus (H \cup \{s_b\}), S \setminus (H \cup \{s_c\})\}$$

ou

$i = k + 2$ e $j = n - k - 2$ com

$$\{A, B, C\} = \{H \cup \{s_a, s_b\}, H \cup \{s_b, s_c\}, H \cup \{s_a, s_c\}\} \text{ e}$$

$$\{A', B', C'\} = \{S \setminus (H \cup \{s_a, s_b\}), S \setminus (H \cup \{s_b, s_c\}), S \setminus (H \cup \{s_a, s_c\})\}.$$

PROVA: Segue como uma generalização do teorema 2 em [9]. Pelo Teorema 4.1, nós temos que $A' = S \setminus A$, $B' = S \setminus B$ e $C' = S \setminus C$.

□

O Teorema 4.2 apresenta uma condição suficiente para um ponto $v \notin \Omega$ ser um vértice de Voronoi de $\mathbb{V}_{k+1}(S)$ e $\mathbb{V}_{k+2}(S)$. Por outro lado, o Teorema 4.3 mostra que esta condição é necessária. Logo, o Teorema 4.2 descreve todos os vértices próprios e as arestas e regiões

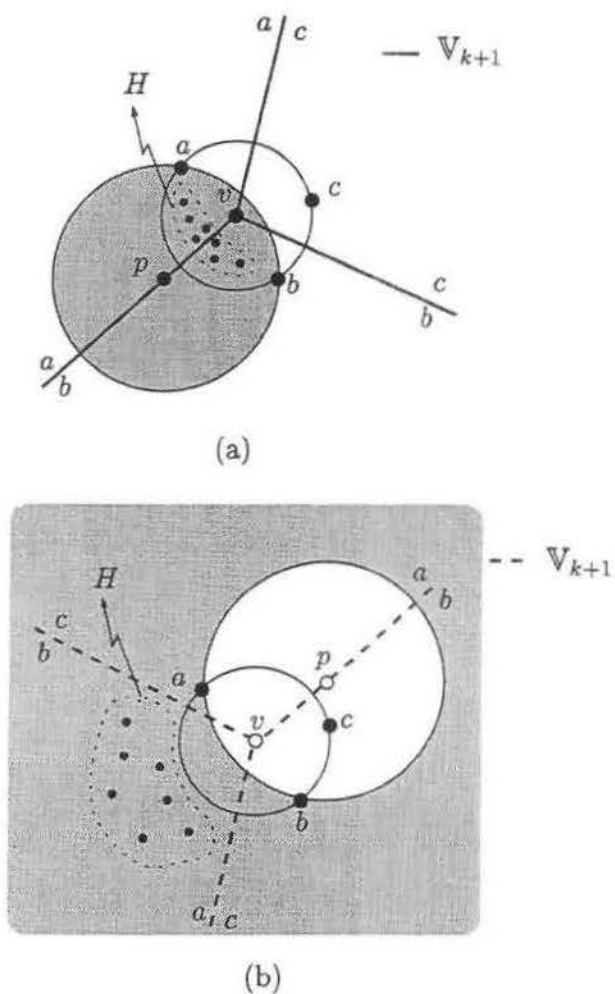


Figura 4.5: Arestas de \mathbb{V}_{k+1} incidentes em v : (a) v no aquém e (b) v no além. A área sombreada representa o interior do círculo centrado em p . Observe que, em ambos os casos, este círculo contém $|H| = k$ sítios no seu interior.

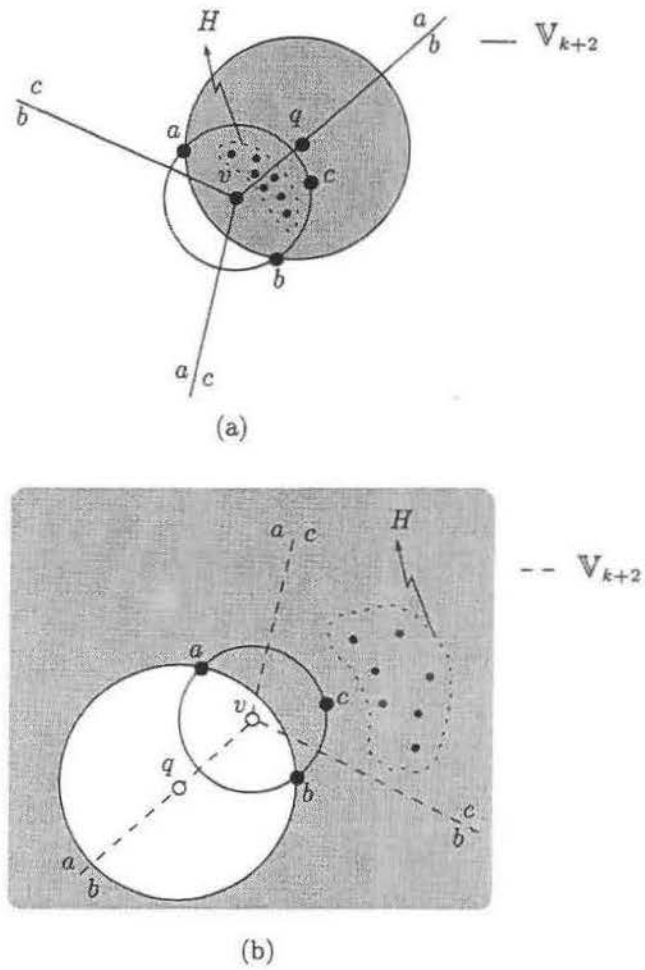


Figura 4.6: Arestas de \mathbb{V}_{k+2} incidentes em v : (a) v no aquém e (b) v no além. O círculo centrado em q , em ambos os casos, contém $|H| + 1 = k + 1$ sítios no seu interior.

neles incidentes de todos os diagramas $\mathbb{V}_k(S)$, $\forall k : 1 \leq k \leq n - 1$. Antes de descrevermos os vértices no infinito, nós precisamos da seguinte definição.

Definição 4.3 Considere o homeomorfismo identidade h que mapeia o modelo esférico de \mathbb{T}^2 na esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Seja $B(q, \alpha)$ o conjunto de pontos de \mathbb{S}^2 cuja distância em \mathbb{R}^3 até $q \in \mathbb{S}^2$ é menor que ou igual a α . A vizinhança $N(p, \alpha)$ em \mathbb{T}^2 é o conjunto de pontos $h^{-1}(r)$, com $r \in B(h(p), \alpha)$.

O lema a seguir caracteriza os pontos que estão em arestas de algum diagrama de Voronoi de ordem k . O Corolário 4.1 será usado no Teorema 4.5 para caracterizar os vértices no infinito.

Lema 4.3 Se $p \in \mathbb{T}^2$ é um ponto que separa duas regiões de Voronoi adjacentes $\mathcal{V}_k(H \cup \{s_a\})$ e $\mathcal{V}_k(H \cup \{s_b\})$ de $\mathbb{V}_k(S)$, então p está contido na reta

$$r = \text{norm}(\text{dir}(s_a \vee s_b)) \vee \text{midpoint}(s_a, s_b).$$

PROVA: Se $p \notin \Omega$ então, pelo Lema 4.2, $d_{\mathbb{T}^2}(p, s_a) = d_{\mathbb{T}^2}(p, s_b)$ e o k -ésimo vizinho mais próximo de p é s_a ou s_b . Como $p \notin \Omega$, p está contido em r . Se $p \in \Omega$, então, ou (i) s_a e s_b estão em hemisférios diferentes, e neste caso temos $r = \Omega$, que contém p . Veja a figura 4.7(a);

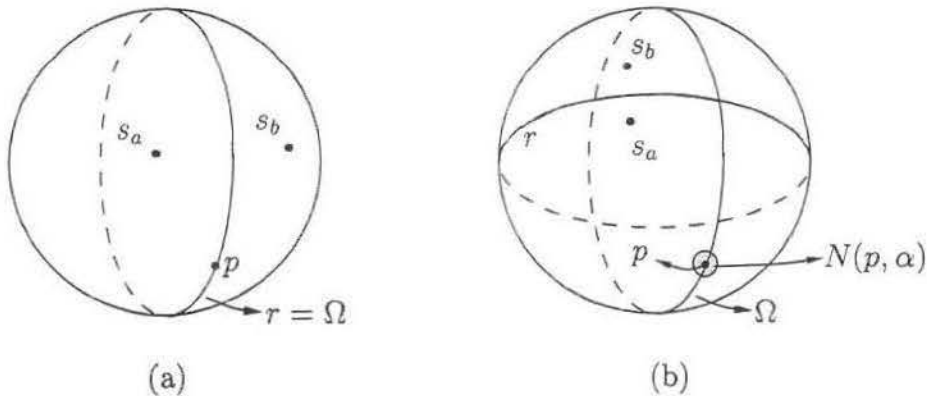


Figura 4.7: Ilustração da prova do Lema 4.3: (a) caso (i) e (b) caso (ii) .

ou

(ii) s_a e s_b estão no mesmo hemisfério. Por contradição, suponha que p não esteja em r . Se nós tomamos $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, a vizinhança $N(p, \alpha)$ contém pontos de uma única região, uma contradição para o fato de que p separa $\mathcal{V}_k(H \cup \{s_a\})$ e $\mathcal{V}_k(H \cup \{s_b\})$. Temos uma contradição. Veja a figura 4.7(b).

□

Corolário 4.1 *Se $v \in \Omega$ é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$, então existem $s_a, s_b \in S$ com s_a e s_b num dos hemisférios canônicos de \mathbb{T}^2 , tal que*

$$v \in r = \text{norm}(\text{dir}(s_a \vee s_b)) \vee \text{midpoint}(s_a, s_b).$$

Sejam $s_a, s_b, s_c \in S$. Nós denotamos por $M(a, b, c)$ e $\neg M(a, b, c)$ os circuncentros de s_a, s_b, s_c . De acordo com a definição 3.1 de distância no plano Euclidiano de dois lados, todos os sítios são cocirculares se nós tomamos qualquer ponto em Ω como circuncentro. Assim, não há sítio no interior de um círculo centrado num ponto em Ω e o Teorema 4.2 não é suficiente para caracterizar a que diagramas de Voronoi um vértice em Ω pertence. Os Teoremas 4.4 e 4.5 descrevem que vértice $M(a, b, j)$, circuncentro de $s_a, s_b, s_j \in S$, é adjacente a um vértice $v \in \Omega$ e a que diagramas de Voronoi v pertence. Primeiramente, vamos estabelecer condições suficientes.

Teorema 4.4 *Sejam $v \in \Omega$ e $s_a, s_b \in S$, com s_a e s_b num dos hemisférios canônicos de \mathbb{T}^2 , tal que*

$$v \in r = \text{norm}(\text{dir}(s_a \vee s_b)) \vee \text{midpoint}(s_a, s_b).$$

Se existe pelo menos um sítio no hemisfério canônico oposto ao de s_a e s_b , então é suficiente para v ser um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$, $1 \leq k < n$, que ou

(i) $\exists s_j \in S \setminus \{s_a, s_b\}$: $M(a, b, j)$ é um vértice próprio de $\mathbb{V}_k(S)$, tal que a aresta $\bar{B}_k(s_a, s_b)$ incidente em $M(a, b, j)$ tem a mesma orientação da reta $M(a, b, j) \vee v$ e não existe outro vértice de $\mathbb{V}_k(S)$ no segmento de $M(a, b, j)$ até v ,

ou

(ii) $\exists s_j \in S \setminus \{s_a, s_b\}$: $M(a, b, j)$ é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$ e $\forall s_j \in S \setminus \{s_a, s_b\}$, com $M(a, b, j) \in \mathbb{V}_k(S)$, nós temos $M(a, b, j) \in \Omega$.

PROVA: Sejam $s_a, s_b \in S$, com s_a e s_b num mesmo hemisfério de \mathbb{T}^2 , tal que

$$v \in r = \text{norm}(\text{dir}(s_a \vee s_b)) \vee \text{midpoint}(s_a, s_b),$$

e considere que exista no mínimo um sítio no hemisfério canônico oposto ao de s_a e s_b . Assuma que o caso (i) ocorra. Como $M(a, b, j)$ é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$, então ele separa no mínimo três regiões, entre elas $\mathcal{V}_k(H \cup \{s_a\})$ e $\mathcal{V}_k(H \cup \{s_b\})$. Como a aresta $\bar{B}_k(s_a, s_b)$ incidente em $M(a, b, j)$ tem a mesma orientação da reta $M(a, b, j) \vee v$ e não há outro vértice de $\mathbb{V}_k(S)$ no segmento de $M(a, b, j)$ até v , estas regiões também são adjacentes a v . Assim, v separa $\mathcal{V}_k(H \cup \{s_a\})$ e $\mathcal{V}_k(H \cup \{s_b\})$. Resta apenas mostrarmos que existe uma terceira região adjacente a v . Considere uma vizinhança $N(v, \alpha)$. Se α é suficientemente pequeno, então a parte de $N(v, \alpha)$ que está no hemisfério oposto de $M(a, b, j)$ contém pontos que

são mais próximos de um ponto s_c naquele hemisfério do que s_a e s_b estão. Note que assumimos a existência de pelo menos um sítio naquele hemisfério. Portanto, s_c está entre os k vizinhos mais próximos destes pontos, ou seja, existe uma região $\mathcal{V}_k(H' \cup \{s_c\})$, com $s_a \notin H'$ e $s_b \notin H'$, tal que v também limita $\mathcal{V}_k(H' \cup \{s_c\})$. Logo, v é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$.

Assuma agora que o caso (ii) ocorra. Como $v \in \Omega$ e $v \in r$, ou v é $M(a, b, j)$ ou é $\neg M(a, b, j)$. Se v é $M(a, b, j)$, então ele é um vértice. Caso contrário, como $M(a, b, j)$ é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$ e $\forall s_j \in S \setminus \{s_a, s_b\}$, com $M(a, b, j) \in \mathbb{V}_k(S)$, nós temos $M(a, b, j) \in \Omega$, $M(a, b, j)$ tem um vértice adjacente em $r \wedge \Omega$, que não é $M(a, b, j)$. Logo, este é $\neg M(a, b, j)$, ou seja, $\neg M(a, b, j)$ é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$. Como ou v é $M(a, b, j)$ ou é $\neg M(a, b, j)$, mas v não é $M(a, b, j)$, então v é $\neg M(a, b, j)$, que é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$. \square

Agora nós mostramos a recíproca do Teorema 4.4.

Teorema 4.5 *Seja $v \in \Omega$ um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$. Então existem $s_a, s_b \in S$ com s_a e s_b num dos hemisférios canônicos de \mathbb{T}^2 tal que*

$$v \in r = \text{norm}(\text{dir}(s_a \vee s_b)) \vee \text{midpoint}(s_a, s_b),$$

e existe no mínimo um sítio no hemisfério canônico oposto ao de s_a e s_b . Nós também temos ou

(i) $\exists s_j \in S \setminus \{s_a, s_b\} : M(a, b, j)$ é um vértice próprio de $\mathbb{V}_k(S)$, tal que a aresta $\bar{B}_k(s_a, s_b)$ incidente em $M(a, b, j)$ tem a mesma orientação da reta $M(a, b, j) \vee v$ e não existe outro vértice de $\mathbb{V}_k(S)$ no segmento de $M(a, b, j)$ até v ,

ou

(ii) $\exists s_j \in S \setminus \{s_a, s_b\} : M(a, b, j)$ é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$ e $\forall s_j \in S \setminus \{s_a, s_b\}$, com $M(a, b, j) \in \mathbb{V}_k(S)$, nós temos $M(a, b, j) \in \Omega$.

PROVA: Pelo Corolário 4.1, se $v \in \Omega$ é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$, então $\exists s_a, s_b \in S$ com s_a e s_b num dos hemisférios canônicos de \mathbb{T}^2 tal que

$$v \in r = \text{norm}(\text{dir}(s_a \vee s_b)) \vee \text{midpoint}(s_a, s_b).$$

• Se s_a e s_b são os únicos sítios num dos hemisférios canônicos, então ou:

1. Não existe sítio no hemisfério oposto, $S = \{s_a, s_b\}$. Logo, o único diagrama de Voronoi é $V_1(\{s_a, s_b\})$ que é simplesmente a reta r , ou seja, não existem vértices, uma contradição para v ser um vértice de $V_k(S)$; ou

2. Existe no mínimo um sítio no hemisfério canônico oposto ao de s_a e s_b . Portanto, $M(a, b, j) \in \Omega$, $\forall s_j \in S \setminus \{s_a, s_b\}$. Como v é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$ e v é um circuncentro de s_a , s_b e qualquer sítio no hemisfério canônico oposto, $\exists s_j \in S \setminus \{s_a, s_b\} : M(a, b, j)$ é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$. Isto implica (ii).
- Se existe no mínimo um sítio no mesmo hemisfério canônico em que s_a e s_b estão, então ou:
 1. Não existe sítio no hemisfério canônico oposto, caso em que $S = S' \cup \{s_a, s_b\}$, com todos os sítios de S' no mesmo hemisfério canônico em que s_a e s_b estão. Portanto, não há vértice em Ω , uma contradição para v ser um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$; ou
 2. Existe no mínimo um sítio s_c no hemisfério canônico oposto ao de s_a e s_b . Assim, v é uma interseção de r e Ω , onde Ω equivale ao bissetor de s_c e qualquer outro sítio no hemisfério canônico em que s_a e s_b estão. Por contradição, assumamos que (i) é falso. Seja $S'' \subset S$ o conjunto de sítios tal que $M(a, b, s')$, com $s' \in S''$, é um vértice de $\mathbb{V}_k(S)$ no segmento de $M(a, b, j)$ até v . Considere o vértice $M(a, b, s'_1) \in \mathbb{V}_k(S)$, com $s'_1 \in S''$. Como (i) foi assumido como falso, o segmento de $M(a, b, s'_1)$ até v contém outro circuncentro $M(a, b, s'_2) \in \mathbb{V}_k(S)$, com $s'_2 \in S''$. Da mesma forma, o segmento de $M(a, b, s'_2)$ até v deve conter outro circuncentro $M(a, b, s'_3) \in \mathbb{V}_k(S)$, com $s'_3 \in S''$. Por um argumento indutivo, temos que o número de circuncentros é infinito e portanto S seria também um conjunto infinito, uma contradição. Isto implica (i).

□

A seguir, nós mostramos que o diagrama de Voronoi de ordem k de um conjunto finito de sítios tem um número exato de regiões. Antes disto, nós apresentamos algumas definições e propriedades utilizadas na prova.

Definição 4.4 *Sejam $p, q, r \in S$ e seja v um circuncentro próprio destes sítios. Seja k o número de sítios no interior do circuncírculo de p, q, r . No diagrama de Voronoi de ordem $k+1$, v é denominado proximal (figura 4.5), enquanto no diagrama de ordem $k+2$, v é um vértice distal (figura 4.6).*

Definição 4.5 *Uma aresta e é uma aresta proximal de $\mathbb{V}_i(S)$ se e somente se ambos os vértices de e são proximais em $\mathbb{V}_i(S)$.*

Definição 4.6 *Uma aresta e é uma aresta distal de $\mathbb{V}_i(S)$ se e somente se e é incidente em, no mínimo, um vértice distal de $\mathbb{V}_i(S)$.*

Em \mathbb{T}^2 , da mesma forma que em \mathbb{R}^2 [17], uma região de um diagrama de Voronoi de ordem $k + 1$ sempre contém ao menos uma aresta do diagrama de Voronoi de ordem k . Assim, podemos classificar as regiões de Voronoi da seguinte forma:

Definição 4.7 $\mathcal{V}_{i+1}(H)$ é uma região tipo I de $\mathbb{V}_{i+1}(S)$ se e somente se $\mathcal{V}_{i+1}(H)$ contém no seu interior apenas uma aresta e de $\mathbb{V}_i(S)$, e é proximal em $\mathbb{V}_i(S)$.

Definição 4.8 $\mathcal{V}_{i+1}(H)$ é uma região tipo II de $\mathbb{V}_{i+1}(S)$ se e somente se $\mathcal{V}_{i+1}(H)$ contém em seu interior apenas vértices distais e arestas distais de $\mathbb{V}_i(S)$.

O Lema 4.4 garante que não pode ocorrer outro tipo de região. Os Lemas 4.4 e 4.5 são generalizações dos lemas 8 e 10 em [17], respectivamente, e por isso omitimos suas provas.

Lema 4.4 Toda região de qualquer diagrama de Voronoi $\mathbb{V}_i(S)$ é ou uma região tipo I ou uma região tipo II.

Lema 4.5 Se $\mathcal{V}_i(H)$ contém m vértices distais de $\mathbb{V}_{i-1}(S)$ no seu interior, então também contém $2m + 1$ arestas distais de $\mathbb{V}_{i-1}(S)$.

O lema a seguir estabelece uma relação entre o número de vértices, arestas e regiões de qualquer diagrama de Voronoi de ordem k e o Lema 4.7 mostra o número exato de regiões do diagrama de Voronoi de ordem k de um conjunto finito de sítios. Esta é uma propriedade intrínseca de \mathbb{T}^2 .

Lema 4.6 Sejam V_k o número de vértices, E_k o número de arestas e F_k o número de regiões de $\mathbb{V}_k(S)$, $1 \leq k \leq n - 1$. Então, $V_k = 2F_k - 4$ e $E_k = 3F_k - 6$.

PROVA: Como F_k é o número de faces da subdivisão correspondente a $\mathbb{V}_k(S)$ e cada vértice de $\mathbb{V}_k(S)$ tem grau 3. Então, pela fórmula de Euler, $E_k + 2 = V_k + F_k$. Como $E_k = \frac{3}{2}V_k$, nós temos $V_k = 2F_k - 4$ e $E_k = 3F_k - 6$. □

Lema 4.7 O número F_k de regiões de $\mathbb{V}_k(S)$, $1 \leq k \leq n - 1$, é

$$F_k = 2k(n - k) - n + 2.$$

PROVA: Sejam E_i o número de arestas e V_i o número de vértices de $\mathbb{V}_i(S)$. Seja V'_{i+1} o número de vértices proximais de $\mathbb{V}_{i+1}(S)$, ou seja, o número de vértices de $\mathbb{V}_{i+1}(S)$ que não existem em $\mathbb{V}_i(S)$. Então, $V_{i+1} = V'_{i+1} + V'_i$, isto é

$$V'_{i+1} = V_{i+1} - V'_i. \tag{4.1}$$

Seja E'_{i+1} o número de arestas proximais (arestas conectando apenas vértices proximais) e E''_{i+1} o número de arestas distais (arestas incidentes em, no mínimo, um vértice distal de $\mathbb{V}_{i+1}(S)$). Como o diagrama de Voronoi de ordem 1 possui apenas vértices proximais, todas as suas arestas são deste tipo, ou seja, $E_1 = E'_1$ e

$$E_{i+1} = E'_{i+1} + E''_{i+1}.$$

Como cada aresta proximal de $\mathbb{V}_{i+1}(S)$ corresponde a uma região tipo I de $\mathbb{V}_{i+2}(S)$, o número F'_{i+2} de regiões tipo I de $\mathbb{V}_{i+2}(S)$ é igual ao número E'_{i+1} de arestas proximais de $\mathbb{V}_{i+1}(S)$. Seja F''_{i+2} o número de regiões tipo II de $\mathbb{V}_{i+2}(S)$ e seja m_j o número de vértices distais de $\mathbb{V}_{i+1}(S)$ contidos no interior da j -ésima região tipo II de $\mathbb{V}_{i+2}(S)$. Seja V''_{i+1} o número total de vértices *distais* de $\mathbb{V}_{i+1}(S)$. Então, nós temos

$$\sum_{j=1}^{F''_{i+2}} m_j = V''_{i+1} = V'_i.$$

Pelo Lema 4.5, o número e_j de arestas incidentes nestes m_j vértices é $e_j = 2m_j + 1$. Então,

$$E''_{i+1} = \sum_{j=1}^{F''_{i+2}} e_j = 2 \sum_{j=1}^{F''_{i+2}} m_j + F''_{i+2} = 2V'_i + F''_{i+2}$$

ou $F''_{i+2} = E''_{i+1} - 2V'_i$.

Portanto, $F_{i+2} = F'_{i+2} + F''_{i+2} = E'_{i+1} + E''_{i+1} - 2V'_i = E_{i+1} - 2V'_i$

Como $F_1 = n$, nós temos $F_2 = E_1 - 2V'_0 = E_1 = 3F_1 - 6 = 3n - 6$, pelo Lema 4.6. Além disso, $F_{k+2} = E_{k+1} - 2V'_k = 3F_{k+1} - 6 - 2V'_k$.

Por (4.1), $V'_k = V_k - V'_{k-1}$, e $V'_1 = V_1 = 2F_1 - 4 = 2n - 4$, pelo Lema 4.6. Então,

$$V'_k = V_k - (V_{k-1} - V'_{k-2}) = (V_k - V_{k-1}) + V'_{k-2}.$$

Portanto, $V'_k = \sum_{i=\lfloor k/2 \rfloor + 1}^k (V_{2i-k} - V_{2i-k-1}) + V_{2\lfloor k/2 \rfloor - k} = \sum_{i=1}^k [(-1)^{k-i} V_i]$, ou seja,

$$V'_k = \sum_{i=1}^k [(-1)^{k-i} (2F_i - 4)].$$

Então,

$$F_{k+2} = 3F_{k+1} - 6 - 2 \sum_{i=1}^k [(-1)^{k-i} (2F_i - 4)]. \quad (4.2)$$

Por indução em k , nós podemos provar que

$$F_k = 2k(n - k) - n + 2.$$

Base: $F_1 = n$ e $F_2 = 3n - 6$.

Hipótese (1): $\exists j \geq 2$ tal que

$$F_k = 2k(n - k) - n + 2, \forall k : 1 \leq k \leq j$$

Passo de Indução: Por (4.2),

$$F_{k+1} = 3F_k - 6 - 2 \sum_{i=1}^{k-1} [(-1)^{k-1-i}(2F_i - 4)].$$

Por indução em k , nós podemos provar que:

$$\sum_{i=1}^{k-1} [(-1)^{k-1-i}(2F_i - 4)] = F_k - n + 2k - 2$$

Base: $k = 2$:

$$\sum_{i=1}^1 [(-1)^{1-i}(2F_i - 4)] = 2F_1 - 4 = 2n - 4 = F_2 - n + 2(2) - 2$$

Hipótese (2): $\exists k \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} [(-1)^{k-1-i}(2F_i - 4)] = F_k - n + 2k - 2$$

Passo de Indução:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k [(-1)^{k-i}(2F_i - 4)] &= (-1)^{k-k}(2F_k - 4) + \sum_{i=1}^{k-1} [(-1)^{k-i}(2F_i - 4)] \\ &= 2F_k - 4 - \sum_{i=1}^{k-1} [(-1)^{k-1-i}(2F_i - 4)] \end{aligned}$$

Pela hipótese (2),

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^k [(-1)^{k-i}(2F_i - 4)] = \\ &= 2F_k - 4 - (F_k - n + 2k - 2) \\ &= F_k + n - 2k - 2 \\ &= 2k(n - k) - n + 2 + n - 2k - 2, \text{ pela hipótese (1)} \\ &= 2k(n - k) - 2k \\ &= 2(k + 1)(n - k) - 2(n - k) - 2k \\ &= 2(k + 1)(n - k - 1) + 2(k + 1) - 2n \\ &= [2(k + 1)(n - (k + 1)) - n + 2] - n + 2(k + 1) - 2 \end{aligned}$$

$$= F_{k+1} - n + 2(k+1) - 2$$

□

Então,

$$F_{k+1} = 3F_k - 6 - 2[F_k - n + 2k - 2] = F_k + 2n - 4k - 2$$

Pela hipótese (1),

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= 2k(n-k) - n + 2 + 2n - 4k - 2 \\ &= 2k(n-k) + n - 4k \\ &= 2k(n-k-1) - 2k + n \\ &= 2(k+1)(n-k-1) - 2(n-k-1) - 2k + n \\ &= 2(k+1)(n-(k+1)) - n + 2 \end{aligned}$$

□

Teorema 4.6 *Sejam V_k o número de vértices, E_k o número de arestas e F_k o número de regiões de $\mathbb{V}_k(S)$, $1 \leq k \leq n-1$. Então nós temos:*

- (i) $\Theta(V_k) = \Theta(E_k) = \Theta(F_k)$, $\forall k : 1 \leq k \leq n-1$
- (ii) $F_k \in O(k(n-k)) \subset O(kn)$, $\forall k : 1 \leq k \leq n-1$
- (iii) $\sum_{k=1}^{n-1} F_k \in \Theta(n^3)$
- (iv) $\sum_{k=1}^{n-1} kF_k \in \Theta(n^4)$

PROVA: Esta é uma simples generalização da prova do teorema 3 em [9].

□

4.3 O Algoritmo

Nesta seção, apresentamos um algoritmo para construir os diagramas de Voronoi de todas as ordens. Um vetor L com todos os circuncentros é construído e com cada circuncentro nós mantemos suas arestas e regiões incidentes. Cada diagrama de Voronoi $\mathbb{V}_k(S)$ é representado por uma lista encadeada de vértices, cada vértice correspondendo a um circuncentro em L .

1. Construa um vetor L com todos os circuncentros $M(a, b, c)$ e $\neg M(a, b, c)$, $a > b > c$, cada um definido por três sítios s_a, s_b e s_c de S . Armazene $M(a, b, c)$, $\neg M(a, b, c)$ e (a, b, c) em L no endereço $\binom{a-1}{3} + \binom{b-1}{2} + c$.

2. Percorra L e calcule, para cada $M(a, b, c)$, o conjunto

$$H(a, b, c) = \{z \in S : d_{T^2}(M(a, b, c), z) <_{T^1} d_{T^2}(M(a, b, c), s_a)\}$$

e os raios e regiões incidentes em $M(a, b, c)$, como descrito no Teorema 4.2. Para $\neg M(a, b, c)$, o Teorema 4.1 implica que o conjunto $\neg H(a, b, c) = S \setminus H(a, b, c) \setminus \{s_a, s_b, s_c\}$. Se $|H(a, b, c)| = k$ então $H(a, b, c)$ é o conjunto dos k sítios que estão mais próximos de $M(a, b, c)$ do que s_a, s_b e s_c estão, enquanto $\neg H(a, b, c)$ é o conjunto dos $n-k-3$ sítios que estão mais próximos de $\neg M(a, b, c)$ do que s_a, s_b e s_c estão. Adicione $M(a, b, c)$ ao final das listas encadeadas correspondentes de $\mathbb{V}_{k+1}(S)$ e $\mathbb{V}_{k+2}(S)$. Analogamente, adicione $\neg M(a, b, c)$ ao final das listas encadeadas de $\mathbb{V}_{n-k-2}(S)$ e $\mathbb{V}_{n-k-1}(S)$. Armazene com $M(a, b, c)$ em L , o endereço de $M(a, b, c)$ e $\neg M(a, b, c)$ em tais listas.

3. Percorra L novamente para conectar os vértices de cada $\mathbb{V}_k(S)$. Cada $M(a, b, c)$ é um vértice nas listas de $\mathbb{V}_i(S)$ e $\mathbb{V}_{i+1}(S)$, com 6 raios incidentes. Para cada raio r , que é parte de $B(s_a, s_b)$, incidente em $M(a, b, c)$ de $\mathbb{V}_j(S)$, verifique se $M(a, b, d)$, com $s_d \in S \setminus \{s_a, s_b, s_c\}$, é um vértice de $\mathbb{V}_j(S)$, tal que $M(a, b, d) \in B(s_a, s_b)$. Caso tal $M(a, b, d)$ não seja único, tome aquele com a menor distância de $M(a, b, c)$. Se $M(a, b, c) \in \Omega$ e $M(a, b, d) \in \Omega$, então nós tomamos aquele com a menor vizinhança $N(M(a, b, c), \alpha)$. Se $M(a, b, c) \notin \Omega$ e $M(a, b, d) \in \Omega$ então nós verificamos os casos descritos no Teorema 4.5. Reduza r a uma aresta $(M(a, b, c), M(a, b, d))$ e o raio correspondente de $M(a, b, d)$ a uma aresta $(M(a, b, d), M(a, b, c))$.

4.4 Corretude

O passo 1 computa todos os circuncentros $M(a, b, c)$ definidos por três sítios s_a, s_b e s_c de S . O passo 2 calcula o conjunto H dos k sítios que estão mais próximos de $M(a, b, c)$ do que s_a, s_b e s_c estão. Pelo Teorema 4.2, cada $M(a, b, c) \notin \Omega$ corresponde a um vértice de $\mathbb{V}_{k+1}(S)$ e $\mathbb{V}_{k+2}(S)$. Pelo Teorema 4.3, estes são todos os vértices próprios de todos os diagramas $\mathbb{V}_k(S)$. O passo 3 simplesmente conecta os vértices adjacentes. Se $\{M(a, b, c), M(a, b, d)\} \not\subset \Omega$ então a corretude segue do Teorema 4.3. Ainda precisamos provar que os vértices na reta do infinito são corretamente conectados. Pelo Teorema 4.5, se um vértice $M(a, b, c) \in \Omega$, então ou:

- (i) $M(a, b, c)$ tem um vértice adjacente $M(a, b, j) \notin \Omega$ ou
- (ii) todos os seus vértices adjacentes $M(a, b, j)$ pertencem a Ω .

No caso (i), $M(a, b, c)$ é um vértice adjacente a $M(a, b, j)$. Como $M(a, b, j) \notin \Omega$, ambos são conectados no passo 3. No caso (ii), o vértice adjacente a $M(a, b, c)$ em $\mathbb{V}_k(S)$

é aquele com a menor vizinhança $N(M(a, b, c), \alpha)$. Este vértice é conectado a $M(a, b, c)$ no passo 3.

Pelo Teorema 4.4, estes são todos os vértices impróprios de todos os diagramas $V_k(S)$. Como todos os vértices próprios ou impróprios de todos os diagramas $V_k(S)$ são computados e conectados corretamente, nós provamos a corretude do algoritmo.

4.5 Complexidade de Tempo e de Espaço

A complexidade de espaço do algoritmo é

$$\Theta\left(\sum_{k=1}^{n-1} kV_k\right) = \Theta\left(\sum_{k=1}^{n-1} kF_k\right) = \Theta(n^4).$$

Cada circuncentro é computado em tempo constante. Como há $\Theta(n^3)$ circuncentros, o passo 1 toma tempo $\Theta(n^3)$. No segundo passo, para cada um destes circuncentros, o algoritmo realiza $\Theta(n)$ iterações, ou seja, o passo 2 toma tempo $\Theta(n^4)$. Da mesma forma, o passo 3 toma tempo $\Theta(n^4)$. Portanto, o algoritmo toma tempo $\Theta(n^4)$ e usa espaço $\Theta(n^4)$ e, pelo Teorema 4.6, isto é ótimo.

4.6 Considerações Finais

Apresentamos uma generalização, de \mathbb{R}^2 para \mathbb{T}^2 , de um algoritmo para construir os diagramas de Voronoi de todas as ordens com a informação dos k sítios associados a cada região de Voronoi. Esta generalização mantém a mesma simplicidade do algoritmo original, embora sua prova de corretude seja mais complexa do que para o plano euclidiano. Nós também mostramos que, para k fixo e para um conjunto finito de sítios, o diagrama de Voronoi de ordem k tem um número exato de regiões.

Implementamos o algoritmo, permitindo visualizar cada um dos diagramas. A figura 4.8 mostra o diagrama de Voronoi de ordem 2 de um conjunto de pontos no aquém. Observe que, ao contrário do que acontece em \mathbb{R}^2 , mesmo nas regiões ilimitadas do diagrama em \mathbb{T}^2 toda aresta é adjacente a exatamente dois vértices, ou seja, regiões ilimitadas não precisam ser consideradas casos especiais. A figura 4.9 mostra o diagrama de Voronoi de ordem 2 para um conjunto contendo sítios no aquém e no além. Observe as arestas e vértices na reta do infinito.

Devido à simplicidade deste algoritmo, nós o escolhemos como o primeiro algoritmo para este propósito a ser generalizado para \mathbb{T}^2 . No próximo capítulo, apresentaremos um algoritmo incremental para construir o diagrama de Voronoi de cada ordem em \mathbb{T}^2 independentemente.

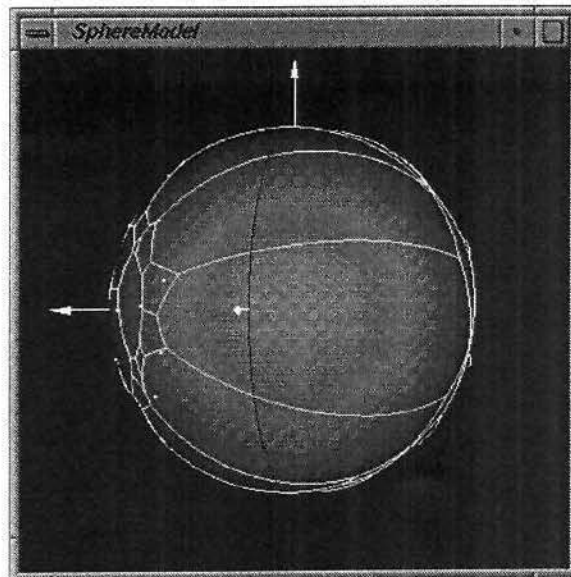


Figura 4.8: Diagrama de Voronoi de ordem 2 de um conjunto de sítios no aquém. Imagem produzida com GeoPrO [12]

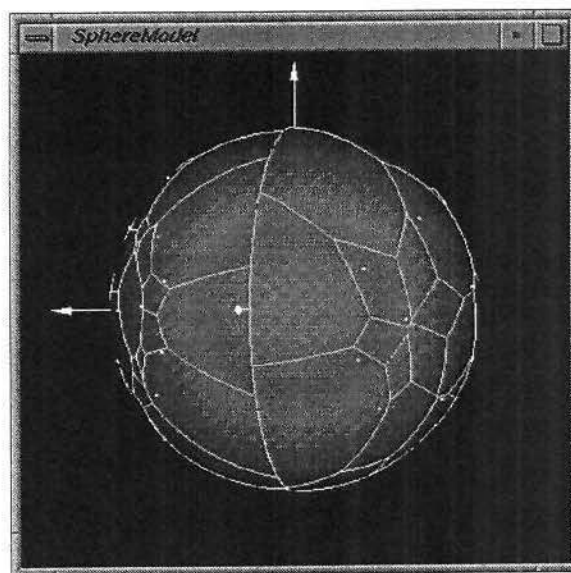


Figura 4.9: Diagrama de Voronoi de ordem 2 de um conjunto incluindo sítios no aquém e no além. Imagem produzida com GeoPrO [12]

Capítulo 5

Um Algoritmo Randomizado Incremental On-line para Construir Diagramas de Voronoi de Ordem k no Plano Projetivo Orientado

5.1 Introdução

Os algoritmos incrementais apresentam uma complexidade de tempo no pior caso que, em geral, é maior do que a de algoritmos que utilizam outras técnicas. No entanto, especialmente quando utilizamos técnicas de randomização, a complexidade de tempo de um algoritmo incremental é, muitas vezes, semelhante a dos algoritmos de divisão e conquista ou de varredura, no pior caso.

Já existem algoritmos randomizados incrementais para uma grande quantidade de problemas geométricos [5, 6, 7, 15, 18, 20, 28, 29, 32]. Neste capítulo, apresentamos um algoritmo randomizado incremental para construir diagramas de Voronoi de ordem k em \mathbb{T}^2 . Como este algoritmo é também *on-line*, não podemos gerar uma permutação aleatória do conjunto de sítios, pois somente o conhecemos no final do algoritmo. Portanto, assumimos *a priori* que os sítios são inseridos em ordem aleatória. Como veremos, a randomização permite que o algoritmo tenha uma complexidade semelhante à da grande maioria dos algoritmos existentes para esta finalidade.

Uma característica particular deste algoritmo é o fato da construção de um diagrama de ordem k ocorrer diretamente, ou seja, não há necessidade de construirmos os diagramas de ordem inferior a k . Outros algoritmos [1, 6, 17, 19, 27] fazem uso destes diagramas para obter o diagrama de ordem k .

Este algoritmo é totalmente baseado na dualidade entre diagrama de Voronoi no plano

e casco convexo no espaço. Para o plano euclidiano, esta relação é utilizada em [14] para diagramas de Voronoi de ordem 1 e em [2] para diagramas de Voronoi de ordem k . Nós generalizamos esta dualidade ao plano projetivo orientado \mathbb{T}^2 para diagramas de Voronoi de ordem k , considerando sítios em apenas um hemisfério.

5.2 Dualidade com Casco Convexo

O diagrama de Voronoi de um conjunto S de sítios no plano euclidiano é dual da triangulação de Delaunay deste conjunto [23]. Quando consideramos o parabolóide em \mathbb{R}^3 definido por $z = x^2 + y^2$ e projetamos cada sítio verticalmente neste parabolóide, obtemos um conjunto de pontos cujo casco convexo possui uma relação interessante com o diagrama de Voronoi de S . A projeção vertical em \mathbb{R}^2 da parte inferior deste casco convexo é a triangulação de Delaunay de S e, portanto, o diagrama de Voronoi de S é dual desta parte do casco convexo [2], como mostrado na figura 5.1.

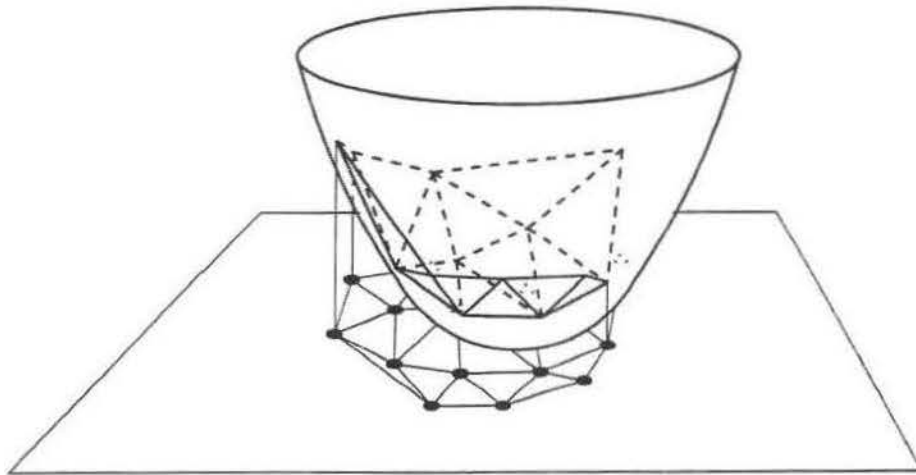


Figura 5.1: Dualidade entre diagrama de Voronoi em \mathbb{R}^2 e casco convexo em \mathbb{R}^3 .

Para o plano projetivo orientado, a generalização consiste em construir não apenas a parte inferior, mas o casco convexo completo. Considerando-se sítios em apenas um hemisfério de \mathbb{T}^2 , esta é uma solução. Por exemplo, a figura 5.2 mostra o casco convexo construído em \mathbb{T}^3 , para o mesmo conjunto de sítios da figura 5.1. No entanto, para sítios em hemisférios diferentes, surgem alguns problemas.

Observe que apenas uma folha do parabolóide não é capaz de representar os dois hemisférios, quando os sítios são mapeados desta forma. Então, seria natural utilizarmos um parabolóide de duas folhas em \mathbb{T}^3 . Ainda assim, teríamos vários problemas:

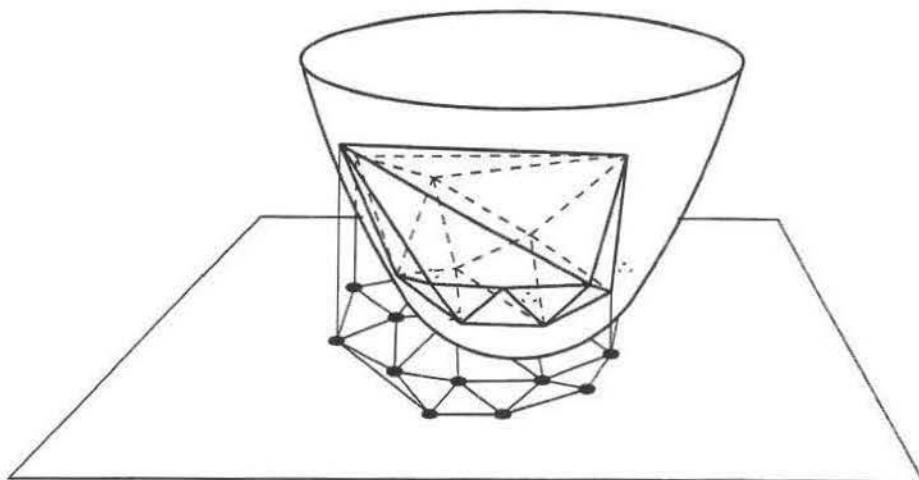


Figura 5.2: Mapeamento de \mathbb{T}^2 para \mathbb{T}^3 : sítios em apenas um hemisfério

- o casco convexo em \mathbb{T}^3 dos pontos mapeados neste parabolóide *não* é dual do diagrama de Voronoi em \mathbb{T}^2 . Na figura 5.3, observe que o mapeamento do sítio p está no interior do casco convexo em \mathbb{T}^3 . O leitor pode observar melhor o problema na figura 5.4, onde mostramos a projeção dos pontos no plano $x = 0$.
- as origens dos dois hemisférios são mapeadas em pontos antípodas. Portanto, *não* poderiam ser consideradas no casco convexo, pois o tornariam indefinido;
- à medida em que aumentamos a ordem do diagrama de Voronoi, surgem regiões degeneradas sobre a reta do infinito. Assim, os pontos duais destas regiões seriam representados por um único ponto: o foco impróprio, compartilhado pelas duas folhas do parabolóide.

A princípio, poderíamos resolver os dois primeiros problemas fazendo uma translação do foco próprio de ambas as folhas do parabolóide. Esta translação seria feita de forma que o plano tangente no ponto em \mathbb{T}^3 cuja projeção em \mathbb{T}^2 está mais distante da origem, numa das folhas, não interceptasse a outra. Mas isto não é suficiente. Para podermos considerar regiões na reta do infinito, a translação do foco próprio de cada folha as reduziria a um único ponto: o foco impróprio.

Infelizmente, um mapeamento de \mathbb{T}^2 que permita a construção de um casco convexo em \mathbb{T}^3 , considerando-se sítios em hemisférios diferentes, ainda não foi encontrado. Neste capítulo, nós assumimos que todos os sítios estão num mesmo hemisfério.

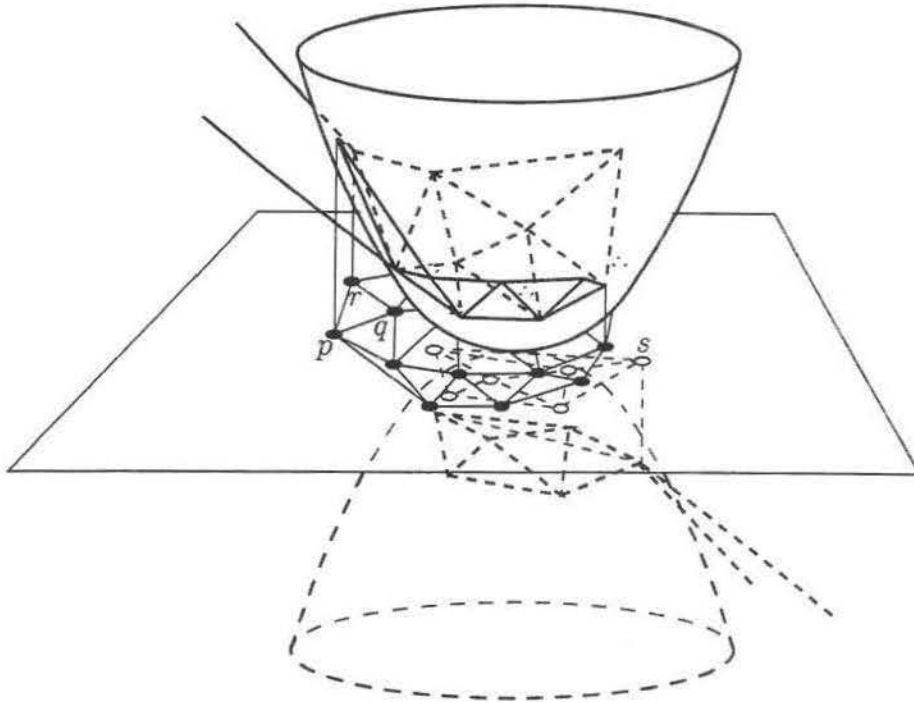


Figura 5.3: Mapeamento de \mathbb{T}^2 para \mathbb{T}^3 : sítios em dois hemisférios.

5.2.1 Levantamento dos pontos

Para obter o diagrama de Voronoi de ordem k de um conjunto S de sítios em \mathbb{T}^2 , nós começamos por mapear cada subconjunto $H \subset S$, contendo k sítios, num ponto em \mathbb{T}^3 .

Definição 5.9 Seja $H \subset S$ um subconjunto contendo exatamente k sítios de S . Definimos $q(H) : (\mathbb{T}^2)^k \rightarrow \mathbb{T}^3$ da seguinte forma:

$$q(H) = \frac{1}{k} \sum_{p \in H} [p_x |p_w|, p_y |p_w|, p_x^2 + p_y^2, p_w |p_w|].$$

Definição 5.10 O conjunto de todos os pontos em \mathbb{T}^3 correspondentes ao mapeamento de um subconjunto $H \subset S$, contendo k sítios, é denotado por $Q_k(S)$:

$$Q_k(S) = \{q(H) : H \subset S, |H| = k\}$$

Quando consideramos sítios em apenas um hemisfério, a seguinte propriedade de diagramas de Voronoi em \mathbb{R}^2 [2] também se aplica ao diagrama de Voronoi estendido a \mathbb{T}^2 .

Lema 5.8 O casco convexo de $Q_k(S)$ é dual do diagrama de Voronoi de ordem k de S , de modo que cada vértice do casco convexo é dual de uma região de Voronoi e cada face do casco convexo é dual de um vértice de Voronoi.

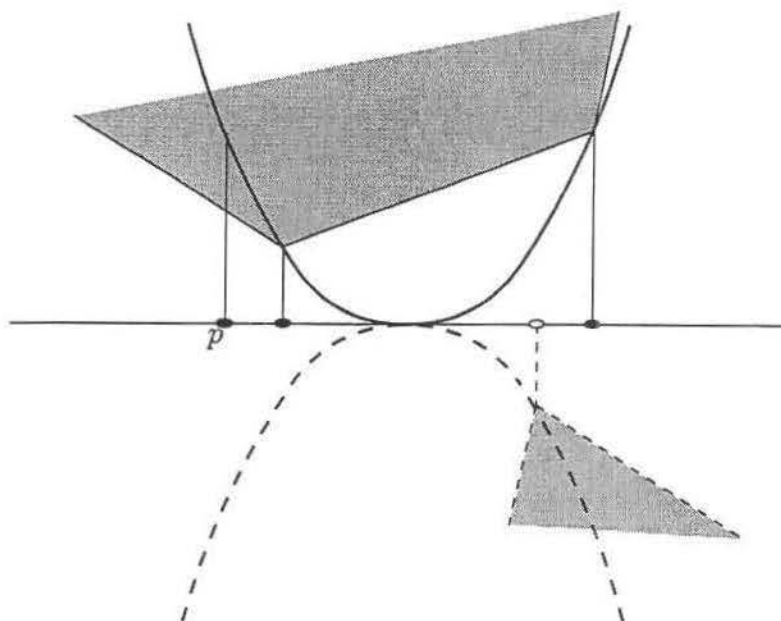


Figura 5.4: Mapeamento de T^1 para T^2 : sítios em dois hemisférios.

5.3 O Algoritmo

Como o casco convexo de $Q_k(S)$ é dual do diagrama de Voronoi de ordem k dos sítios em S , poderíamos simplesmente computar o conjunto $Q_k(S)$ e determinar o seu casco convexo. No entanto, $Q_k(S)$ contém $O(n^k)$ pontos, dos quais apenas $2k(n-k) - n + 2$ são vértices do casco convexo — duais de regiões de $V_k(S)$ [26]. Então, em vez disso, vamos aplicar a dualidade a partes do diagrama de Voronoi de ordem k , onde conseguimos determinar, de maneira eficiente, quais subconjuntos contendo k sítios de S produzem vértices do casco convexo.

Apresentamos um algoritmo incremental que constrói o diagrama de Voronoi de ordem k diretamente — sem construir os diagramas de ordem inferior a k . Assim, assumindo que p_1, \dots, p_n seja a ordem (aleatória) de inserção dos sítios, denominamos *estágio $_i$* o momento em que o algoritmo concluiu a construção do casco convexo C_i dual de $V_k(\{p_1, \dots, p_i\})$. Note que não faz sentido construirmos o diagrama de Voronoi de ordem k para menos de $k + 1$ sítios e, então, a primeira etapa consiste da construção do casco convexo C_{k+1} para os $k + 1$ primeiros sítios. Neste momento, já estamos no estágio $_{k+1}$ e o algoritmo prossegue para cada novo sítio p_i , $i = k + 2, \dots, n$.

Algoritmo Diagrama-de-Voronoi-de-ordem- k ($\{p_1, \dots, p_n\}$)

1. Determine $Q_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\})$.
2. Construa o casco convexo C_{k+1} deste conjunto.
3. Para i de $k+2$ até n faça
 - (a) Determine e remova todas as faces de C_{i-1} – duais de vértices de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$ – que são destruídas pela inserção de p_i .
 - (b) Determine o conjunto de todos os vértices novos do casco – duais de regiões de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_i\})$ – que não existiam em $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$.
 - (c) Reconstrua, com estes vértices novos, a parte do casco C_{i-1} que foi destruída, obtendo C_i .
 - (d) Determine o rótulo das arestas novas de C_i .
4. Retorne o diagrama de Voronoi de ordem k dual de C_n .

Esta é a idéia geral do algoritmo. A seguir, apresentamos em detalhes cada passo, juntamente com algumas propriedades que são utilizadas para demonstrar sua corretude. Apresentamos, também no final do capítulo, uma análise de sua complexidade de tempo e de espaço. Durante o texto, mostramos a execução do algoritmo tomando como exemplo o conjunto de sítios da figura 5.5 e construindo o diagrama de Voronoi de ordem 3 deste conjunto.

5.3.1 Determinando $Q_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\})$

Pela definição 5.10, o conjunto $Q_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\})$ contém $\binom{k+1}{k} = k+1$ pontos:

$$Q_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\}) = \{q(T_1), \dots, q(T_{k+1})\},$$

onde $T_j = \{p_1, \dots, p_{k+1}\} \setminus \{p_j\}$. Portanto, $Q_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\})$ pode ser computado em tempo $\Theta(k)$ da seguinte forma. Em primeiro lugar, calculamos:

$$[x, y, z, w] = q(\{p_1, \dots, p_{k+1}\}).$$

Em seguida, determinamos cada $q(T_j)$ em tempo constante:

$$q(T_j) = \frac{1}{k} ([((k+1)x, (k+1)y, (k+1)z, w] - q(\{p_j\}))).$$

No nosso exemplo, construímos $Q_3(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$, formado pelos pontos

$$q(\{p_2, p_3, p_4\}) = \frac{1}{3}(q(\{p_2\}) + q(\{p_3\}) + q(\{p_4\})),$$



Figura 5.5: Um conjunto de 16 sítios.

$$q(\{p_1, p_3, p_4\}) = \frac{1}{3}(q(\{p_1\}) + q(\{p_3\}) + q(\{p_4\})),$$

$$q(\{p_1, p_2, p_4\}) = \frac{1}{3}(q(\{p_1\}) + q(\{p_2\}) + q(\{p_4\})),$$

$$q(\{p_1, p_2, p_3\}) = \frac{1}{3}(q(\{p_1\}) + q(\{p_2\}) + q(\{p_3\})).$$

Este conjunto é mostrado na figura 5.6.

5.3.2 Construindo o casco convexo C_{k+1}

A etapa seguinte é a de construção de C_{k+1} , o casco convexo de $Q_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\})$, dual do diagrama de Voronoi de ordem k de $\{p_1, \dots, p_{k+1}\}$. Como podemos utilizar qualquer algoritmo para casco convexo que seja ótimo em tempo e espaço, preferimos utilizar o algoritmo por divisão-e-conquista descrito em [23], pois este algoritmo é bastante simples. A figura 5.7 mostra o casco convexo C_4 para o nosso exemplo.

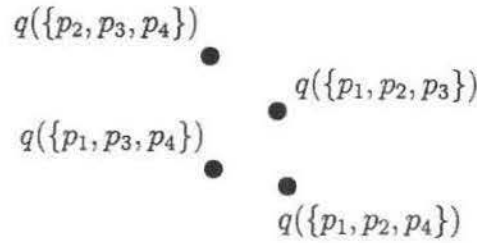


Figura 5.6: O conjunto $Q_3(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$ do nosso exemplo.

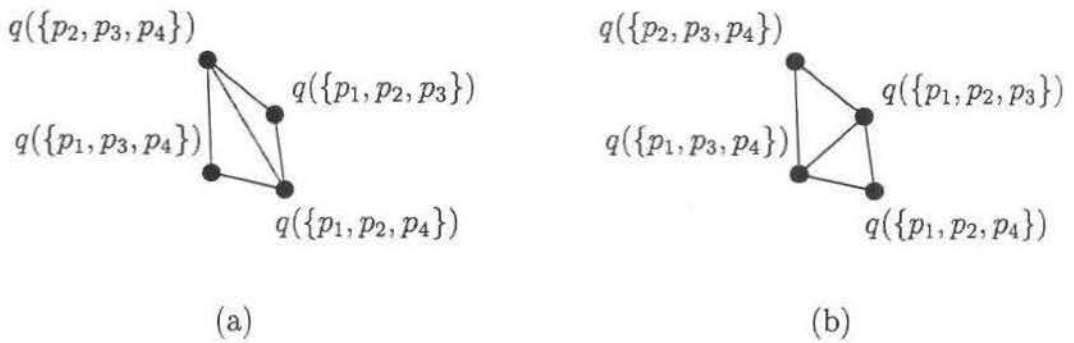


Figura 5.7: Projeção em \mathbb{T}^2 do casco convexo C_4 de $Q_3(\{p_1, p_2, p_3, p_4\})$ do nosso exemplo: (a) parte inferior e (b) parte superior.

5.3.3 Inserindo um novo sítio p_i

O passo genérico do algoritmo consiste da inserção de um novo sítio p_i . Neste momento, estamos no estágio $i-1$, ou seja, terminamos de construir o casco convexo C_{i-1} e precisamos determinar C_i , dual do diagrama de Voronoi de ordem k de $\{p_1, \dots, p_i\}$. A inserção de p_i é realizada em duas grandes etapas. Na primeira delas, determinamos e removemos todas as faces do casco convexo C_{i-1} que *não* estão presentes no novo casco C_i . Na segunda etapa, determinamos as faces do casco convexo C_i que são novas, ou seja, *não* estão presentes em C_{i-1} .

Para os 15 primeiros sítios do nosso conjunto exemplo, as figuras 5.8 e 5.9 mostram a projeção das partes inferior e superior do casco convexo C_{15} em \mathbb{T}^2 , respectivamente. A seguir, vamos apresentar a inserção do próximo sítio p_{16} .

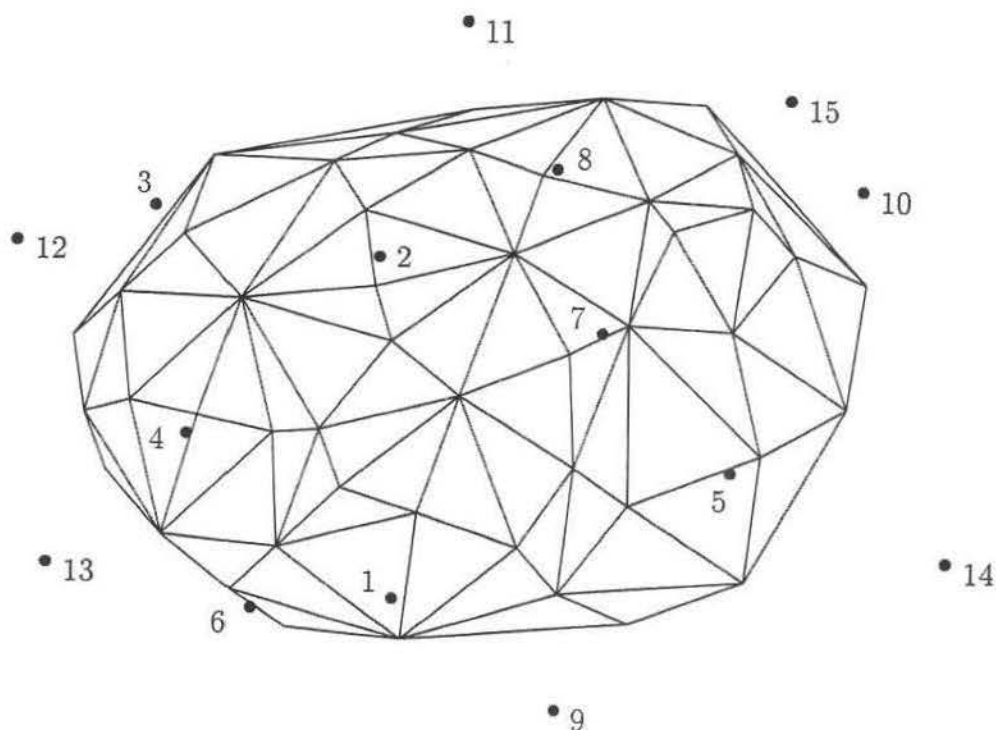


Figura 5.8: Projeção da parte inferior do casco convexo C_{15} em \mathbb{T}^2

Determinando as faces destruídas por p_i

Para determinar as faces de C_{i-1} que *não* estão presentes no novo casco C_i , podemos nos basear na seguinte propriedade, cuja prova é uma generalização para \mathbb{T}^2 da prova do lema 5 de Aurenhammer e Schwarzkopf [4].

Lema 5.9 *Seja R a união de todas as regiões $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_i\}, \{p_1, \dots, p_i\})$. Então, as arestas de $\mathcal{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$ no interior de R formam um grafo conexo.*

Este lema garante que as faces de C_{i-1} destruídas por p_i correspondem a um grafo conexo. Portanto, após determinarmos uma destas faces, podemos percorrer o grafo correspondente e remover todas elas, em tempo linear no número de faces destruídas. Para isso, basta utilizarmos o algoritmo de busca em largura descrito em [8]. Nosso problema resume-se, então, em determinar uma das faces de C_{i-1} destruída por p_i . Em primeiro lugar, precisamos caracterizar em que situação uma face é destruída por p_i . A seguinte propriedade de vértices de Voronoi em \mathbb{R}^2 [17] também se aplica aos vértices do diagrama de Voronoi estendido a \mathbb{T}^2 quando todos os sítios estão num mesmo hemisfério.

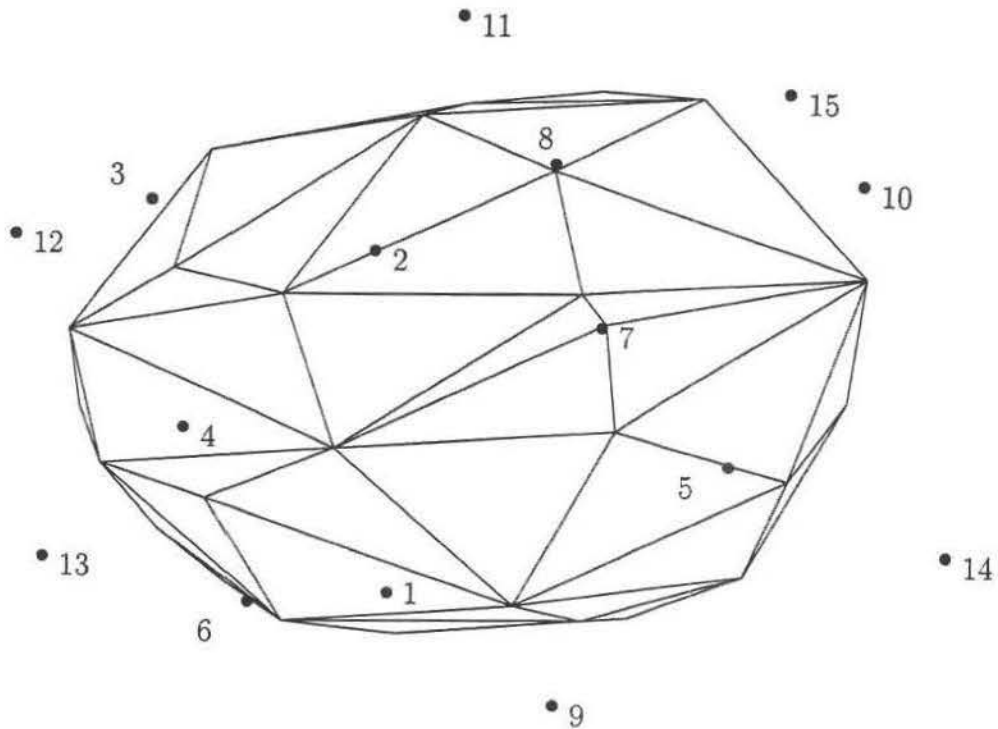


Figura 5.9: Projeção da parte superior do casco convexo C_{15} em \mathbb{T}^2

Proposição 5.1 *Assuma que não há 3 sítios cocirculares. Todo vértice próprio de Voronoi é um circuncentro de exatamente 3 sítios de S e o circuncírculo correspondente contém ou $k - 1$ ou $k - 2$ sítios no seu interior.*

Definição 5.11 *Sejam s_a, s_b, s_c sítios em S e seja v um circuncentro próprio de s_a, s_b, s_c . Se v é um vértice de Voronoi de $\mathbb{V}_k(S)$, nós denominamos v da seguinte forma. Se o circuncírculo de s_a, s_b, s_c contém $k - 1$ sítios no seu interior, denominamos v um vértice proximal de $\mathbb{V}_k(S)$. Caso contrário, com $k - 2$ sítios no interior deste circuncírculo, denominamos v um vértice distal de $\mathbb{V}_k(S)$. A face dual de v no casco convexo é denominada analogamente.*

Uma face f de C_{i-1} é destruída por p_i não apenas se o vértice v dual de f não está presente em C_i , mas também caso v mude de tipo. No primeiro caso, o circuncírculo correspondente a v continha $k - 1$ sítios no seu interior. Com a inserção de p_i , passou a ter k sítios no interior e deixou de ser um vértice de Voronoi. No segundo caso, o circuncírculo continha $k - 2$ sítios e passou a ter $k - 1$. Logo, v mudou de distal para proximal. Nós destruímos f também neste caso, pois as regiões que definem v no novo diagrama estão associadas a conjuntos de sítios que incluem p_i e, portanto, a face dual de v deixou de

ser f e deve ser reconstruída. Este segundo caso ficará mais claro quando apresentarmos o método de reconstrução destas faces. Assim, temos a seguinte propriedade:

Lema 5.10 *Uma face f do casco convexo C_{i-1} dual de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$ é destruída por p_i se e somente se p_i está no interior do circuncírculo correspondente ao vértice de Voronoi dual de f .*

Nosso problema agora é determinar uma face f de C_{i-1} destruída por p_i . Apresentamos no final deste capítulo um algoritmo para localização de pontos que resolve este problema. Por enquanto, suponha que f seja determinada de maneira eficiente. Note que uma face é destruída se e somente se p_i é inserido no interior do circuncírculo correspondente ao vértice dual desta face. Portanto, podemos testar em tempo constante se uma dada face é destruída ou não. Após determinarmos f , podemos percorrer o grafo conexo correspondente às faces destruídas e removê-las em tempo linear no número destas faces.

A figura 5.10 mostra a projeção da parte inferior do casco convexo C_{15} , com a remoção dos triângulos destruídos pelo próximo sítio p_{16} . Observe que, neste exemplo, o novo sítio modifica apenas a parte inferior do casco convexo, mas nada impede que a parte superior possa ser modificada. Escolhemos este exemplo para simplificar a apresentação e aumentar a intuição do leitor ao longo do texto.

Determinando as faces produzidas por p_i

Após removermos todas as faces destruídas por p_i , nós temos apenas as faces do casco C_{i-1} que permanecem no novo casco C_i . As demais faces possuem vértices duais de regiões novas — regiões associadas a conjuntos de sítios que incluem p_i . Cada face pode ser de dois tipos de acordo com o vértice dual correspondente: proximal ou distal. Nosso algoritmo utiliza a seguinte propriedade de diagramas de Voronoi.

Lema 5.11 *Toda região de um diagrama de Voronoi de ordem k de um conjunto contendo $n \geq k + 2$ sítios tem, no mínimo, um vértice proximal.*

PROVA: Esta é uma generalização da prova do lema 7 de [17]. Em \mathbb{R}^2 , esta propriedade vale apenas para regiões limitadas. Mas em \mathbb{T}^2 , a propriedade vale para toda e qualquer região de Voronoi e segue-se naturalmente do fato de que toda região de um diagrama de Voronoi em \mathbb{T}^2 é um polígono, o que não acontece em \mathbb{R}^2 para as regiões ilimitadas. \square

Este lema garante que, reconstruindo todos os triângulos proximais novos, já determinamos todos os vértices novos do casco convexo. Após a reconstrução destes triângulos, restam apenas alguns buracos no casco convexo que devem ser preenchidos. Como já

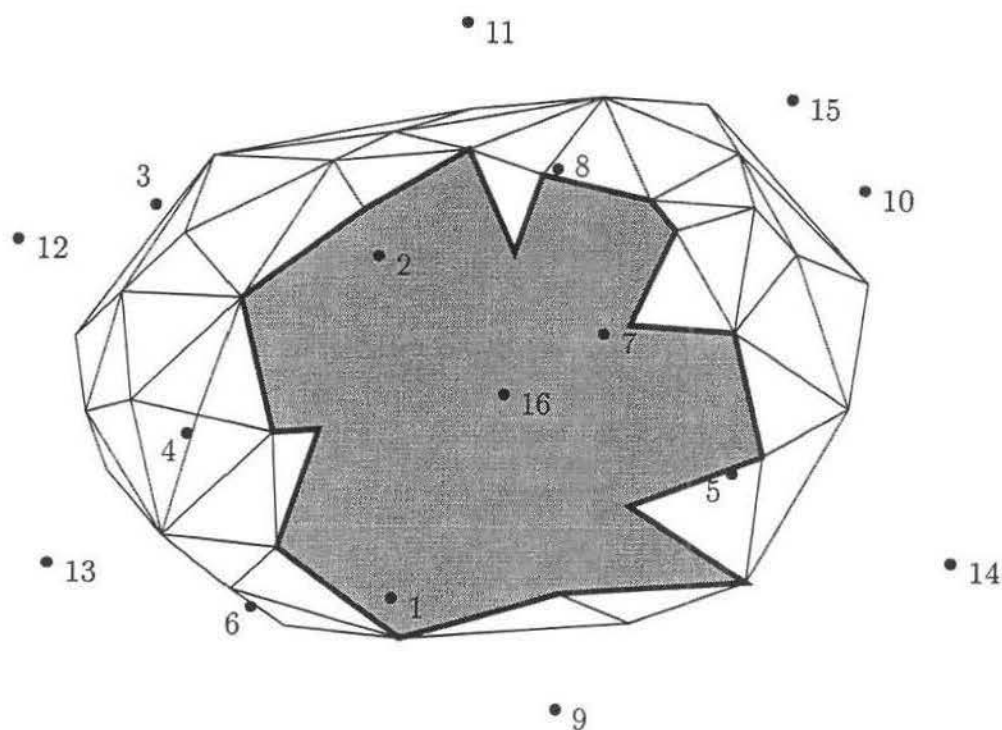


Figura 5.10: O buraco produzido por p_{16} .

reconstruimos os triângulos proximais, todos estes buracos são formados por triângulos distais. Além disso, estão faltando apenas as arestas destes triângulos, pois já determinamos todos os vértices novos do casco convexo.

No artigo [4], Aurenhammer e Schwarzkopf afirmam que, caso o sítio p_i seja inserido no interior da projeção do casco convexo no plano, cada um destes buracos, quando projetado no plano, é um polígono convexo. Neste caso, podemos utilizar um algoritmo de Aggarwal et al. [1] que, em tempo linear, constrói o casco convexo de uma sequência de pontos, cuja projeção no plano corresponde a uma ordem circular dos vértices de um polígono convexo. No entanto, caso p_i seja inserido no exterior da projeção do casco convexo no plano, podem surgir buracos cujas projeções no plano são polígonos simples — *não* necessariamente convexos. Voltaremos a discutir este tópico ao descrevermos a reconstrução dos triângulos distais.

A seguir, apresentaremos como determinar todos os triângulos produzidos pelo novo sítio, começando pelos triângulos proximais.

Os triângulos proximais produzidos por p_i

Lema 5.12 *Todo vértice distal v de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$ destruído pela inserção de p_i reaparece como um vértice proximal v' em $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_i\})$. Veja a figura 5.11.*

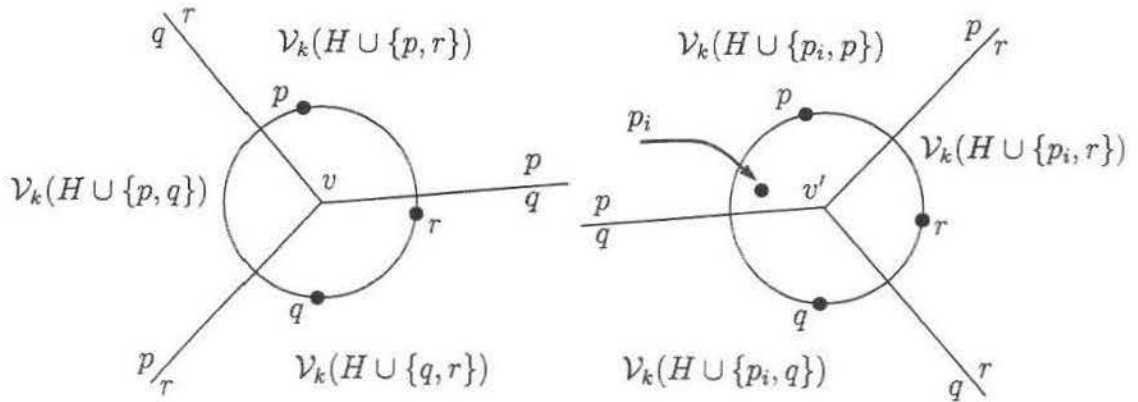


Figura 5.11: Vértice distal destruído por p_i reaparece como proximal.

PROVA: Se v foi destruído, então p_i foi inserido no interior do circuncírculo correspondente a v . Pela definição 5.11, este circuncírculo continha $k - 2$ sítios, passando a conter $k - 1$ sítios com a inserção de p_i . Logo, pela mesma definição, v reaparece em $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_i\})$ como um vértice v' proximal. \square

Para evitar qualquer confusão com vértice do diagrama de Voronoi, chamamos de *canto* cada vértice do casco convexo.

Lema 5.13 *Seja Δ um triângulo distal do casco convexo dual de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$ destruído pela inserção de p_i . Sejam $q(H_1)$, $q(H_2)$, $q(H_3)$ os cantos de Δ . Então, Δ produz um novo triângulo proximal Δ' , cujos cantos são $q((H_1 \cap H_2) \cup \{p_i\})$, $q((H_1 \cap H_3) \cup \{p_i\})$, $q((H_2 \cap H_3) \cup \{p_i\})$.*

PROVA: Seja v o vértice de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$ dual de Δ . Pelo Lema 5.12, v reaparece em $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_i\})$ como um vértice v' proximal. De maneira dual, Δ reaparece no novo casco convexo como Δ' . Este triângulo é dual de v' , cujas regiões incidentes são $\mathcal{V}_k((H_1 \cap H_2) \cup \{p_i\})$, $\mathcal{V}_k((H_1 \cap H_3) \cup \{p_i\})$, $\mathcal{V}_k((H_2 \cap H_3) \cup \{p_i\})$.

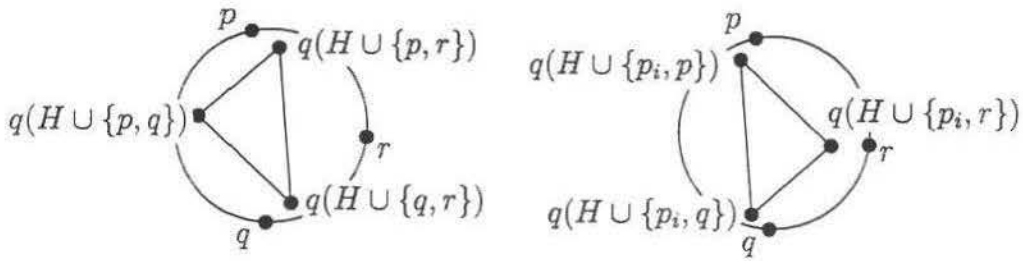


Figura 5.12: Triângulo distal destruído por p_i reaparece como proximal.

□

Lema 5.14 *Todos os triângulos novos proximais cujos cantos são todos novos são criados da forma descrita no Lema 5.13.*

PROVA: Seja Δ' um triângulo novo proximal, cujos cantos são todos novos. Este triângulo é dual de um vértice v' cujas regiões incidentes são todas novas — regiões associadas a conjuntos de sítios que incluem p_i . Então sejam $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_i, p\})$, $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_i, q\})$, $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_i, r\})$ estas regiões. Como p_i é um sítio comum a estas três regiões, p_i está no interior do circuncírculo correspondente a v' . Portanto, antes da inserção de p_i , este circuncírculo continha exatamente $|H| = k - 2$ sítios, definindo um vértice v distal de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$ e um triângulo distal Δ dual de v . Assim, Δ' é criado a partir de Δ , como descrito no Lema 5.13.

□

Quando p_i é inserido, produz um buraco no casco convexo C_{i-1} e, para obter o casco convexo C_i , o algoritmo mantém um rótulo para cada aresta. Cada aresta do casco é rotulada simplesmente pelos sítios que definem o bissetor contendo a aresta de Voronoi dual correspondente. Por exemplo, se e é dual de uma aresta de Voronoi compartilhada pelas regiões $\mathcal{V}_k(H \cup \{p\})$ e $\mathcal{V}_k(H \cup \{q\})$, então e é rotulada por (p, q) . Veja a figura 5.13.

Lema 5.15 *Seja Δ um triângulo novo que possui apenas um canto novo e dois antigos. Seja c_1 o seu canto novo e c_2, c_3 seus cantos antigos (na fronteira do buraco produzido por p_i). Então, Δ é proximal e podemos determinar seu canto novo a partir do rótulo da aresta entre os cantos antigos. Seja $e(p, q)$ a aresta formada por c_2 e c_3 . Então o canto c_1 é $\frac{1}{k}(k \cdot c_2 - p + p_i) = \frac{1}{k}(k \cdot c_3 - q + p_i)$ e as novas arestas são rotuladas por (p, p_i) e (q, p_i) .*

PROVA: Sejam $H_1, H_2, H_3 \subset S$ os subconjuntos de k sítios associados às regiões duais de c_1, c_2 e c_3 , respectivamente. Além disso, seja $H = H_2 \cap H_3$. Como a aresta entre c_2 e

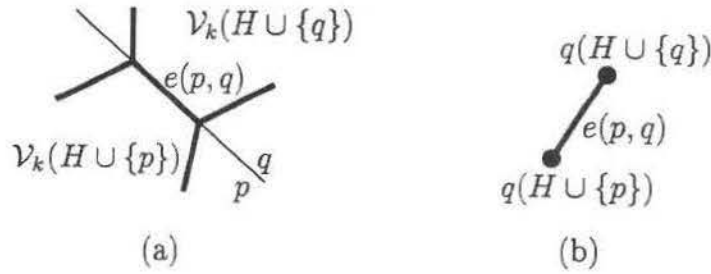


Figura 5.13: Rótulo de uma aresta: (a) diagrama de Voronoi e (b) casco convexo dual.

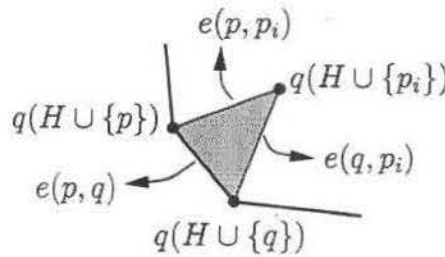


Figura 5.14: Todo triângulo adjacente a uma aresta da fronteira é proximal

c_3 é $e(p, q)$, as regiões duais de c_2 e c_3 são $\mathcal{V}_k(H \cup \{p\})$ e $\mathcal{V}_k(H \cup \{q\})$, respectivamente. Por contradição, suponha que Δ seja distal. Como c_1 é novo, $p_i \in H_1$. Devido ao fato de $\mathcal{V}_k(H_1)$, $\mathcal{V}_k(H \cup \{p\})$ e $\mathcal{V}_k(H \cup \{q\})$ serem adjacentes e $p_i \notin H_2$, temos $p_i \in H_3$, uma contradição. Logo, Δ é proximal e as novas arestas são rotuladas por (p, p_i) e (q, p_i) . Além disso, pela definição 5.9,

$$c_1 = q(H \cup \{p_i\}) = \frac{1}{k}(k \cdot q(H \cup \{p\}) - p + p_i) = \frac{1}{k}(k \cdot q(H \cup \{q\}) - q + p_i).$$

Assim, podemos determinar c_1 facilmente, a partir de c_2 ou c_3 :

$$c_1 = \frac{1}{k}(k \cdot c_2 - p + p_i) = \frac{1}{k}(k \cdot c_3 - q + p_i).$$

□

A figura 5.15 mostra os triângulos novos adjacentes à fronteira do buraco produzido por p_{16} . Como demonstramos, todos estes triângulos são proximais. O lema seguinte refere-se a triângulos incidentes em apenas um canto da fronteira.

Lema 5.16 *Seja Δ um triângulo novo que possui apenas dois cantos novos e um antigo. Então Δ é distal.*

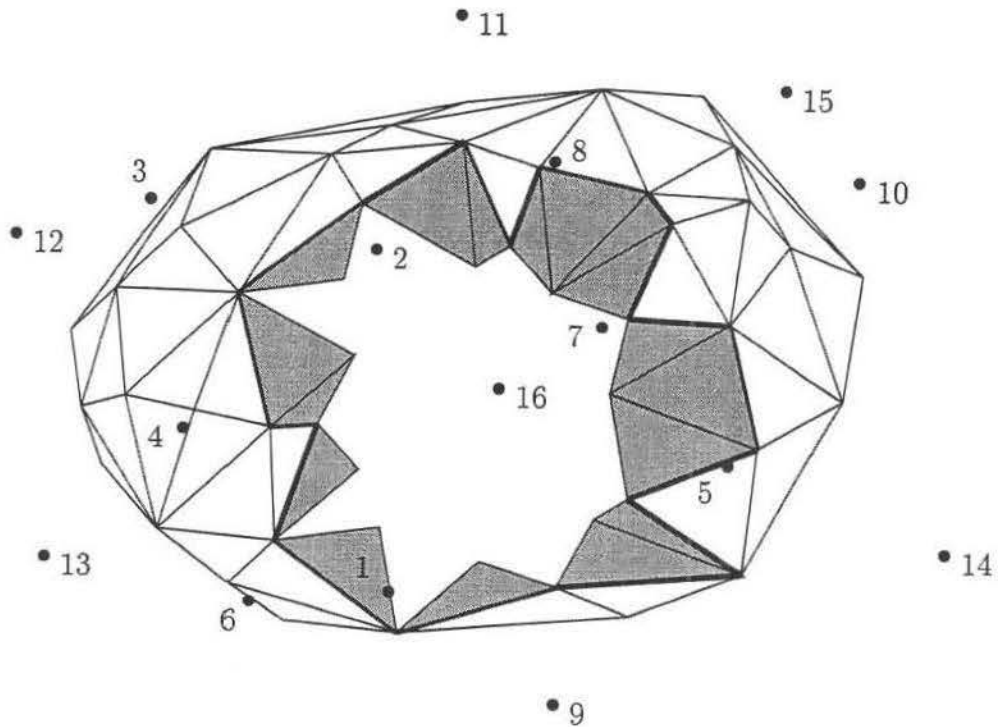


Figura 5.15: Triângulos adjacentes à fronteira da superfície destruída.

PROVA: Sejam c_1 e c_2 os cantos novos de Δ e seja c_3 seu canto antigo (na fronteira do buraco produzido por p_i). Sejam $H_1, H_2, H_3 \subset S$ os subconjuntos de k sítios associados às regiões duais de c_1 , c_2 e c_3 , respectivamente. Além disso, como $p_i \in H_1$ e $p_i \in H_2$, seja $H \cup \{p_i\} = H_1 \cap H_2$ e seja $e(p, q)$ a aresta nova entre c_1 e c_2 . Então, as regiões duais de c_1 e c_2 são $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_i, p\})$ e $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_i, q\})$, respectivamente. Como $\mathcal{V}_k(H_3)$ é adjacente a estas regiões, temos

$$|(H \cup \{p_i, p\}) \cap H_3| = |(H \cup \{p_i, q\}) \cap H_3| = k - 1.$$

Como c_3 é um canto antigo, $p_i \notin H_3$ e, assim, $H \cup \{p\} \subset H_3$ e $H \cup \{q\} \subset H_3$, ou seja, $H_3 = H \cup \{p, q\}$ e Δ é distal.

□

Assim, pelo Lema 5.11, reconstruindo os triângulos cujos cantos são todos novos e aqueles em que apenas dois cantos são antigos, determinamos todos os cantos novos produzidos por p_i . A figura 5.16 apresenta todos os triângulos proximais produzidos pelo sítio p_{16} . Note que ainda aparecem alguns buracos, a serem preenchidos por triângulos distais, como mostrado na figura 5.17.

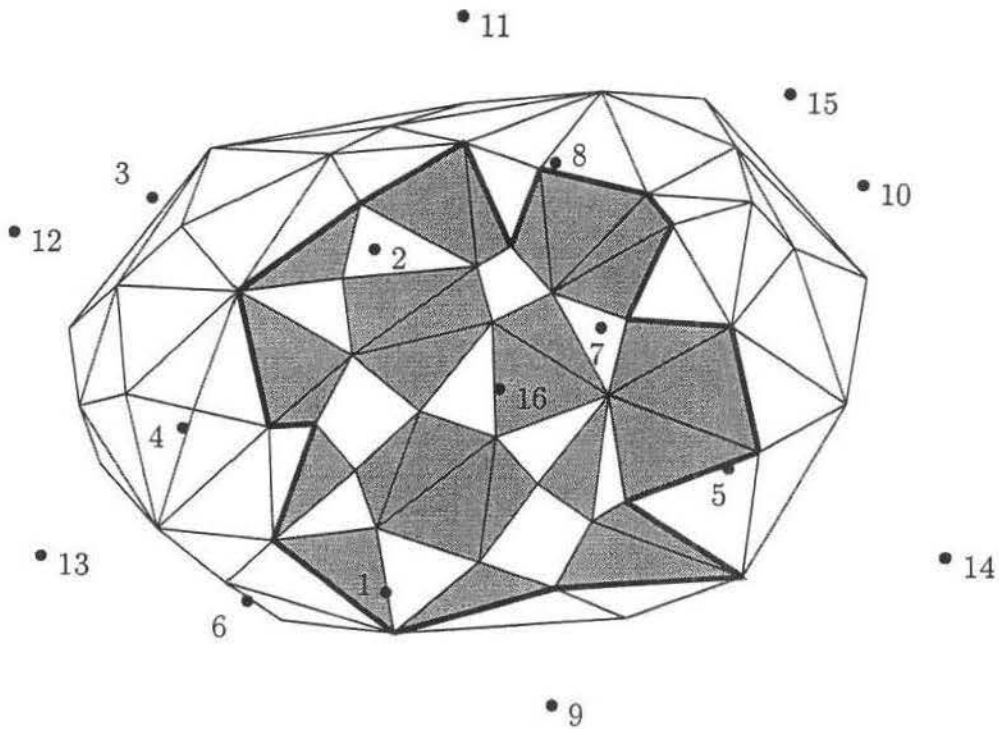


Figura 5.16: Triângulos proximais produzidos por p_{16} .

Os triângulos distais produzidos por p_i

Já determinamos todos os triângulos proximais produzidos por p_i , mas restam ainda alguns buracos a serem reconstruídos, cada um formado por um conjunto de triângulos distais produzidos por p_i . A reconstrução de cada buraco pode ser realizada utilizando-se um algoritmo para casco convexo. Mas, antes disso, precisamos determinar as fronteiras de cada buraco, ou seja, dada uma aresta em determinado buraco, precisamos determinar as arestas adjacentes de forma a utilizá-las como entrada do algoritmo para casco convexo.

Por questão de eficiência, é interessante gastar tempo não mais que linear no número de cantos de cada buraco para determiná-lo. Pode-se demonstrar [4] que duas arestas estão num mesmo buraco se e somente se o conjunto dos $k - 1$ vizinhos mais próximos é o mesmo para qualquer ponto numa das arestas. Veja a figura 5.18.

Além disso, as arestas de um mesmo buraco formam um grafo conexo [4] e, então, podemos determinar cada um em tempo linear no seu número de arestas.

Para a reconstrução de cada buraco, nós utilizamos o mesmo algoritmo [23] que, no primeiro passo, construiu o casco convexo do conjunto $Q_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\})$, em tempo ótimo. Neste ponto, é interessante notar que, caso p_i fosse inserido no interior do casco convexo

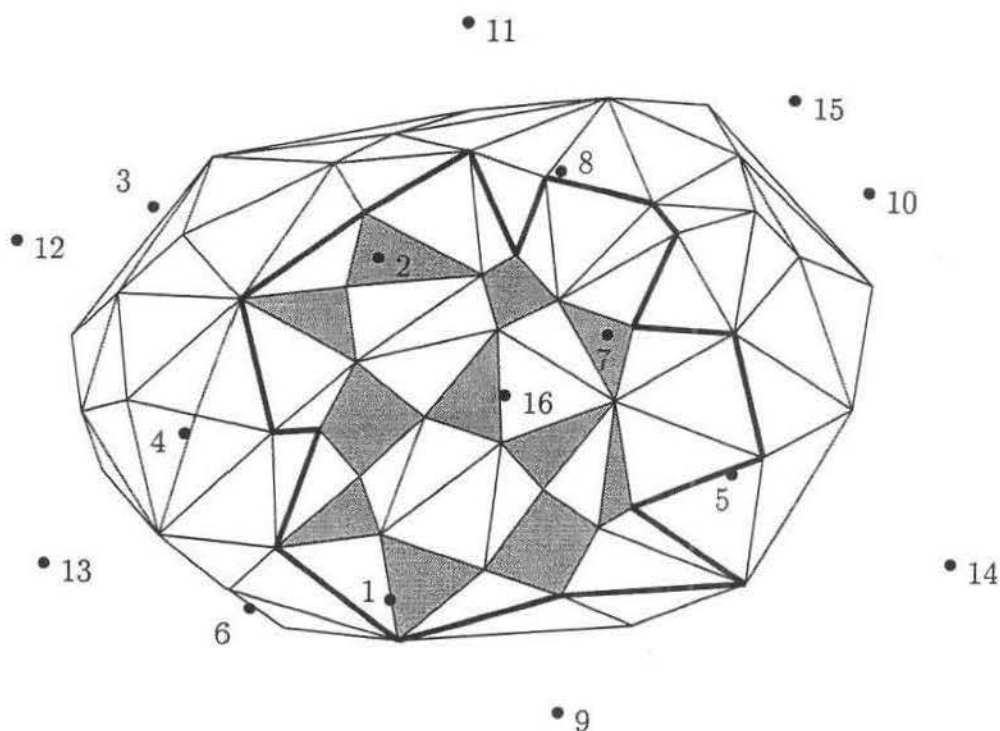


Figura 5.17: A parte sombreada será preenchida por triângulos distais.

de $\{p_1, \dots, p_{i-1}\}$, cada um destes buracos seria um polígono convexo, quando projetado no plano. Neste caso, poderíamos utilizar um algoritmo [1] que, em tempo linear, constrói o casco convexo de uma sequência de pontos que, projetada no plano, corresponde a uma ordem circular dos vértices de um polígono convexo.

A figura 5.19 mostra a projeção da parte inferior do casco convexo C_{16} , após a inserção do sítio p_{16} . Como p_{16} não destruiu nenhum triângulo da parte superior do casco, esta parte se mantém exatamente como mostramos na figura 5.9. Este casco convexo é dual do diagrama de Voronoi $V_3(\{p_1, \dots, p_{16}\})$, mostrado na figura 5.20.

Rotulando as arestas novas

As arestas novas devem ser rotuladas à medida em que são construídas. Isto é necessário porque o algoritmo utilizará esta informação ao inserir o próximo sítio p_{i+1} ou ainda durante as próximas etapas da inserção de p_i . No primeiro caso, os rótulos das arestas são utilizados, por exemplo, para determinarmos os triângulos proximais adjacentes às arestas da fronteira da superfície nova, como descrito no Lema 5.15. No segundo caso, nós utilizamos os rótulos das arestas para determinar se duas arestas estão num mesmo

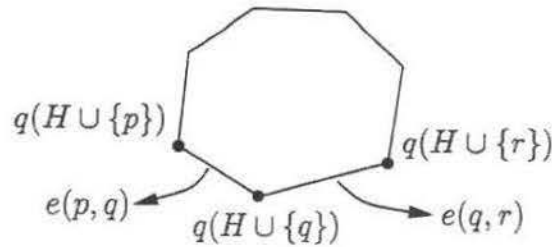


Figura 5.18: H é o conjunto dos $k - 1$ vizinhos mais próximos de qualquer ponto em $e(p, q)$ ou $e(q, r)$.

buraco, formado por triângulos distais, como vimos anteriormente.

Localizando uma face destruída por p_i

Nesta seção, apresentaremos um método para localizar uma face do casco convexo destruída por p_i . No plano, isto significa encontrar um triângulo, dual de um vértice de Voronoi de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$, cujo circuncírculo contenha p_i . Poderíamos fazer isto diretamente neste diagrama de Voronoi, mas levaríamos tempo $O(k(n - k))$. Por questão de eficiência, é importante localizarmos p_i em cada diagrama de Voronoi construído até o momento. Primeiramente, localizamos um triângulo Δ de C_{k+1} destruído por p_i e, em seguida, localizamos p_i em C_j , $j = k + 2, \dots, i - 1$, considerando que já conhecemos um triângulo Δ de C_{j-1} destruído por p_i .

O algoritmo em [4] para \mathbb{R}^2 utilizava um procedimento de localização de pontos baseado num resultado de Guibas, Knuth e Sharir [15], tomando tempo esperado $O(\log^2 n)$ para localizar p_i num determinado casco convexo C_j . No final do artigo [4], Aurenhammer sugere a utilização de um algoritmo de trapezoidização [29], tomando tempo esperado $O(\log n)$.

Ao contrário de um algoritmo de trapezoidização para uso geral, o nosso algoritmo é baseado em propriedades de diagramas de Voronoi. Naturalmente, teremos que demonstrar estas propriedades que garantem a corretude do algoritmo. Porém, como esta é uma solução específica para o nosso problema — localizar um triângulo destruído por p_i — o algoritmo é muito mais simples do que o original, além de ser mais eficiente. Conseguimos localizar um triângulo Δ de C_j destruído por p_i em tempo esperado $O(1)$. Apresentaremos algumas propriedades e, em seguida, o algoritmo.

Lema 5.17 *Seja Δ um triângulo distal destruído por p_i e seja C_j , $j < i$, o casco convexo no qual Δ é uma face. Então, p_i destrói o triângulo proximal de C_{j+1} produzido a partir de Δ — descrito no Lema 5.13.*

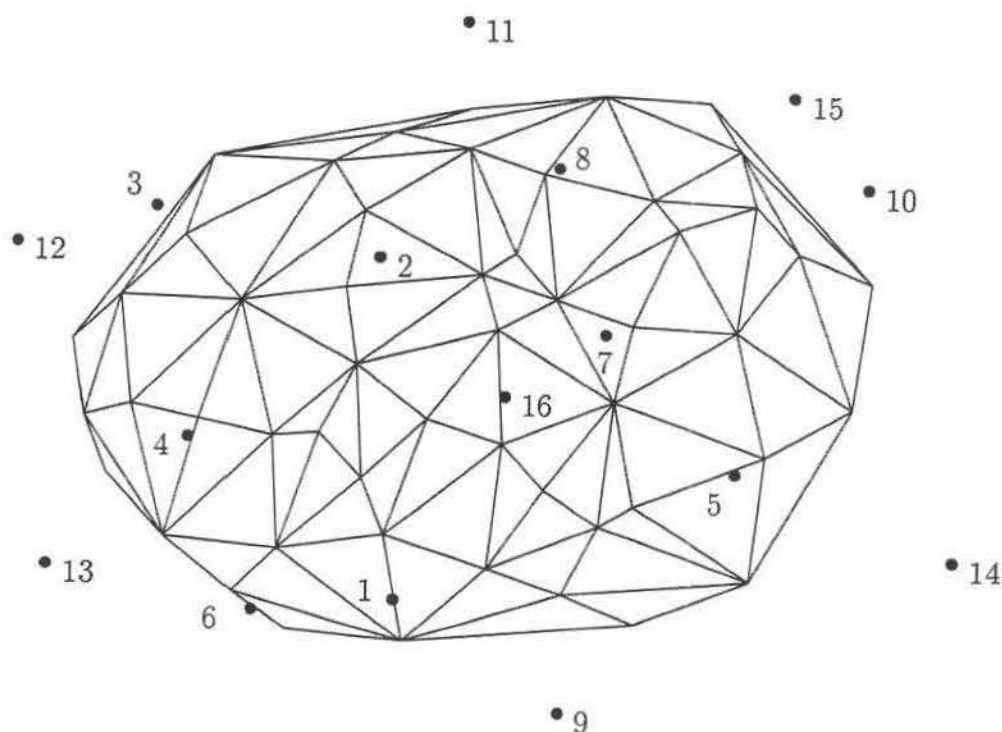


Figura 5.19: Projeção em \mathbb{T}^2 da parte inferior de C_{16} .

PROVA: Seja v o vértice dual de Δ e sejam p, q, r os sítios de S cujo circuncentro é v . Pelo Lema 5.12, v reaparece em $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{j+1}\})$ como um vértice proximal v' , também circuncentro de p, q, r . Como p_i destrói Δ , então p_i está no interior do circuncírculo de p, q, r . Portanto, p_i destrói v' e, no casco convexo dual, p_i destrói o triângulo proximal correspondente.

□

Pelo lema anterior, conhecendo-se um triângulo distal Δ que p_i destrua em C_j , podemos localizar, em tempo constante, um triângulo Δ' que p_i destrua em C_{j+1} . Este último triângulo é proximal. No entanto, o vértice dual de um triângulo proximal *não* reaparece no diagrama de Voronoi seguinte e, então, não podemos determinar diretamente um triângulo de C_{j+1} destruído por p_i .

As propriedades que apresentamos, a seguir, referem-se especificamente a este caso e nos permitem localizar tal triângulo em tempo esperado constante. Note que, caso p_i destrua um triângulo Δ de C_j — seja Δ proximal ou distal — e p_{j+1} não destruiu tal triângulo, então Δ está presente em C_{j+1} . Caso p_{j+1} destrua Δ , então há apenas dois casos possíveis. No primeiro deles, Δ é distal e, pelo lema anterior, podemos determinar Δ' em

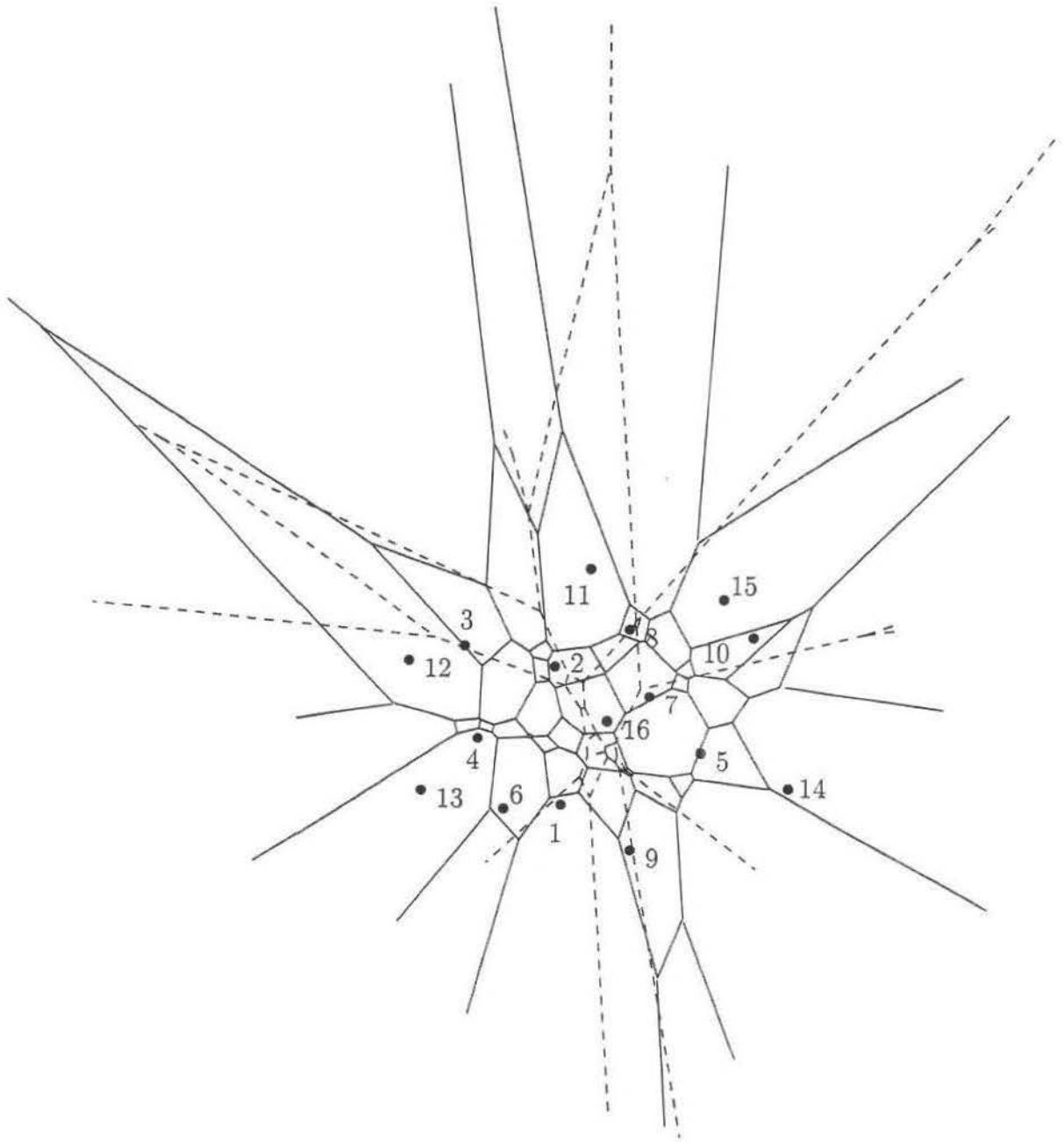


Figura 5.20: Diagrama de Voronoi $\mathbb{V}_3(\{p_1, \dots, p_{16}\})$ do nosso exemplo.

tempo constante. No segundo caso, Δ é proximal e o tratamento deste caso é apresentado a seguir.

No restante desta seção, denotamos por v um vértice proximal de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_j\})$ destruído por p_{j+1} e por p_i e denotamos por p, q, r os sítios de S cujo circuncentro é v . Como este é um vértice de Voronoi, denotamos por $H \subset \{p_1, \dots, p_j\}$ o conjunto de sítios no interior do circuncírculo de p, q, r . Como v é proximal, $|H| = k - 1$, ou seja, o conjunto H contém os $k - 1$ sítios dentre $\{p_1, \dots, p_j\}$ que estão mais próximos de v . Como p, q, r estão na fronteira do circuncírculo centrado em v , ou seja, são equidistantes de v , estes são os k -ésimos vizinhos mais próximos de v . Desta forma, um novo sítio s no interior do circuncírculo está mais próximo de v do que p, q, r estão e os k vizinhos mais próximos de v passam a ser $H \cup \{s\}$.

As propriedades que serão apresentadas estão relacionadas a dois diagramas de Voronoi: $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_j, p_{j+1}\})$ e $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_j, p_i\})$. No primeiro diagrama, $v \in \mathcal{V}_k(H \cup \{p_{j+1}\})$, pois p_{j+1} destrói v , logo p_{j+1} está no interior do circuncírculo de p, q, r . No segundo diagrama, $v \in \mathcal{V}_k(H \cup \{p_i\})$, analogamente.

Lema 5.18 *Seja A a região de Voronoi $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_{j+1}\})$ no diagrama de Voronoi $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_j, p_{j+1}\})$ e seja B a região de Voronoi $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_i\})$ no diagrama de Voronoi $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_j, p_i\})$. Então, $A \not\subseteq B$ e $B \not\subseteq A$.*

PROVA: Primeiramente, temos que $A \neq B$, pois $p_i \neq p_{j+1}$. Por contradição, sem perda de generalidade, suponha que $B \subset A$. Note que

$$A \cap B = \mathcal{V}_{k+1}(H \cup \{p_{j+1}, p_i\}, \{p_1, \dots, p_j, p_{j+1}, p_i\}).$$

Assim, $A \cap B$ é o subconjunto dos pontos em A que estão mais próximos de p_i do que de qualquer outro sítio em $\{p_1, \dots, p_j\} \setminus H$. Logo, toda aresta de $A \cap B$ que seja parte ou totalidade de uma aresta de B está contida no bissetor de p_i com algum sítio em $\{p_1, \dots, p_j\} \setminus H$. Analogamente, toda aresta de A , cuja intersecção com B seja não-nula, está contida no bissetor de p_{j+1} com algum sítio em $\{p_1, \dots, p_j\} \setminus H$. No decorrer das demonstrações, faremos referência a este argumento denotando-o por $*$.

Então, por argumentos anteriores $*$, todas as arestas de B estão contidas em bissetores de p_i com sítios em $\{p_1, \dots, p_j\} \setminus H$. Portanto, $p_i \in B$ e, em $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_j, p_i\})$, a única região associada a um conjunto de sítios que inclui p_i é B . Veja a figura 5.21. Como $p_i \in B$, p_i está em A e, assim, existe ponto $x \in A \setminus B$, tal que x está mais próximo de p_i do que p_{j+1} está (caso contrário, haveria pelo menos duas arestas de B , cada uma contida num bissetor que contém uma aresta de A , ou seja, 4 pontos cocirculares, uma contradição. Veja a figura 5.22). Seja $\mathcal{V}_k(H \cup \{a\})$ a região de Voronoi de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_j, p_i\})$ que contém x , como mostra a figura 5.23. Note que $a \in \{p_1, \dots, p_j\} \setminus H$. Como $x \in A \setminus B$, então

$x \in A$, ou seja,

$$d_{T^2}(x, p_{j+1}) <_{T^1} d_{T^2}(x, a) <_{T^1} d_{T^2}(x, p_i)$$

e

$$d_{T^2}(x, p_i) <_{T^1} d_{T^2}(x, p_{j+1}),$$

uma contradição.

□

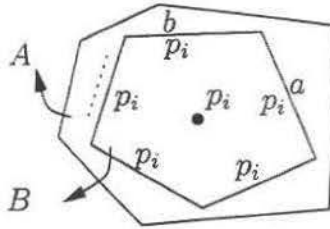


Figura 5.21: Por contradição, supondo que $B \subset A$ (na prova do Lema 5.18).

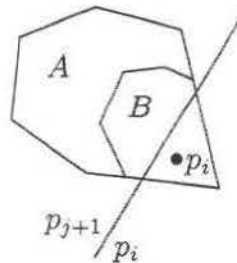


Figura 5.22: Haveria 4 pontos cocirculares.

Lema 5.19 *Seja A a região de Voronoi $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_{j+1}\})$ no diagrama de Voronoi $\mathcal{V}_k(\{p_1, \dots, p_j, p_{j+1}\})$ e seja B a região de Voronoi $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_i\})$ no diagrama de Voronoi $\mathcal{V}_k(\{p_1, \dots, p_j, p_i\})$. Seja $C = A \setminus B$. Então, C é conexo.*

PROVA: Como A e B são regiões de Voronoi, então são convexas. Por contradição, suponha que C não seja conexo. Então, pelo Lema 5.18, as fronteiras de A e B interceptam-se em, no mínimo, 3 pontos. Veja a figura 5.24.

Seja e_{j+1} uma aresta de A interceptada por uma aresta e_i de B, como mostra a figura 5.25. Por argumentos anteriores *, e_{j+1} está contida no bissetor de p_{j+1} com algum

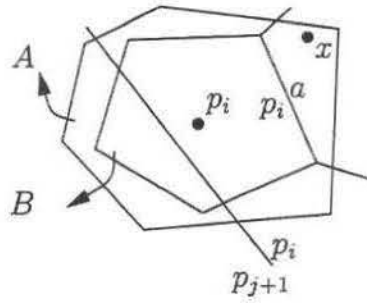


Figura 5.23: Uma contradição (Lema 5.18).

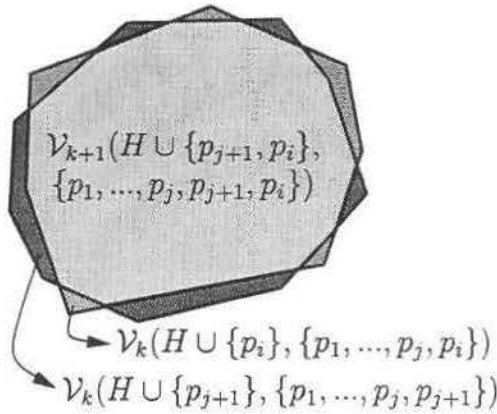


Figura 5.24: Por contradição, supondo que C não seja conexo (na prova do Lema 5.19).

sítio a em $\{p_1, \dots, p_j\} \setminus H$ e a região adjacente a e_{j+1} é $\mathcal{V}_k(H \cup \{a\}, \{p_1, \dots, p_j, p_{j+1}\})$. Como e_i intercepta e_{j+1} , a outra região adjacente a e_i é $\mathcal{V}_k(H \cup \{a\}, \{p_1, \dots, p_j, p_i\})$. Logo, a intersecção u de e_i com e_{j+1} é um circuncentro de p_i, p_{j+1} e a , ou seja, u está no bissetor de p_i com p_{j+1} . Se houver mais de 2 intersecções, teremos mais de 2 circuncentros, cada um definido por p_i, p_{j+1} e um terceiro sítio em $\{p_1, \dots, p_j\} \setminus H$, todos contidos no bissetor de p_i com p_{j+1} . Assim, temos mais de 2 intersecções deste bissetor com a fronteira de B , uma contradição para o fato de que B é convexa. Veja a figura 5.26.

□

Lema 5.20 *Considere uma aresta da região de Voronoi $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_{j+1}\})$ de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{j+1}\})$ interceptada pelo bissetor de p_i e p_{j+1} . Então, há apenas um ponto de intersecção.*

PROVA: Por contradição, suponha que uma aresta e de $\mathcal{V}_k(H \cup \{p_{j+1}\})$ de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{j+1}\})$ seja interceptada em, pelo menos, dois pontos distintos u_1 e u_2 . Seja a o sítio

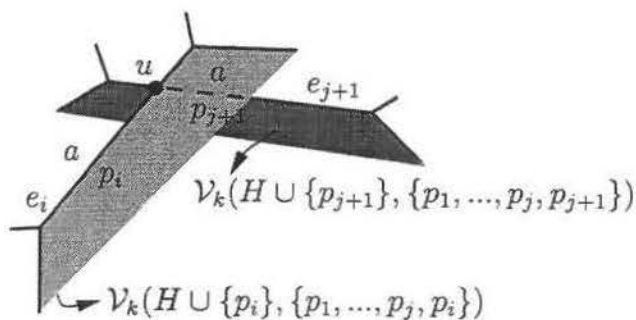


Figura 5.25: Intersecção de uma aresta de A com uma aresta de B .

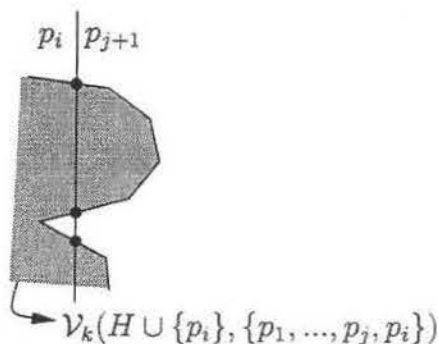


Figura 5.26: Contradição: B não seria convexa (na prova do Lema 5.19).

que, juntamente com p_{j+1} , define o bissetor contendo e . Veja a figura 5.27. Então, por argumentos anteriores *, os pontos u_1 e u_2 são circuncentros de p_i , p_{j+1} e a , ou seja, estão no bissetor de p_i e p_{j+1} e $a = p_i$, uma contradição. □

Assim, nós temos o seguinte corolário:

Corolário 5.2 p_i destrói pelo menos um vértice de $V_k(H \cup \{p_{j+1}\}, \{p_1, \dots, p_{j+1}\})$.

Já apresentamos o método de localização de pontos que utilizamos ao longo do algoritmo. O lema seguinte refere-se à eficiência deste método.

Lema 5.21 *Seja Δ um triângulo de C_j que p_i destrua. Então, um Δ' de C_{j+1} destruído por p_i pode ser determinado em tempo esperado constante.*

PROVA: Há apenas dois casos possíveis: ou Δ é distal ou Δ é proximal. No primeiro caso, a prova segue do Lema 5.17. No segundo caso, caracterizado pelos Lemas 5.19, 5.18 e

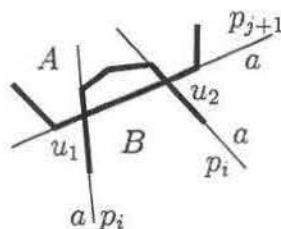


Figura 5.27: Contradição: a seria igual a p_i (Lema 5.20).

5.20, Δ é dual de um vértice contido em alguma região de Voronoi A de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{j+1}\})$ e Δ' é determinado em tempo linear no número de vértices da região A . Seja F_k o número de regiões de Voronoi de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{j+1}\})$. Então, o número de vértices deste diagrama é $2F_k - 4$ e o número esperado de vértices numa região de Voronoi deste diagrama é constante. Assim, em tempo esperado constante, podemos determinar um vértice de A que p_i destrua e, de maneira dual, um triângulo Δ' destruído por p_i .

□

Lema 5.22 *Um triângulo Δ_{i-1} de C_{i-1} destruído por p_i pode ser determinado em tempo esperado $O(k \log n)$.*

PROVA: Em primeiro lugar, localizamos um triângulo Δ_{k+1} de C_{k+1} destruído por p_i , em tempo $O(k)$. Em seguida, para $j = k+2, \dots, i-1$, localizamos um triângulo Δ_j de C_j destruído por p_i , da seguinte forma:

Se p_j não destrói Δ_{j-1} então

1. Seja $t \in \{j, \dots, i-1\}$ o maior índice, tal que Δ_{j-1} está em C_t . Como Δ_{j-1} está em C_t , já determinamos Δ_t e podemos avançar para C_t : $\Delta_t = \Delta_{j-1}$ e $j = t+1$;

Senão

2. Localizamos Δ_j em C_j , em tempo constante, como demonstrado pelo Lema 5.21.

Fim-Se

Note que o número de vezes em que o passo 1 é executado é, no máximo, uma unidade a mais que o número de execuções do passo 2. Portanto, o tempo total é devido ao passo 2 e dado por:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=k+2}^{i-1} \text{Probabilidade}\{\Delta_{j-1} \text{ ser destruído por } p_j\} \\ & \leq \sum_{j=k+2}^{i-1} \frac{k}{j} = k \sum_{j=k+2}^{i-1} \frac{1}{j} \in O(k \log \frac{n}{k}). \end{aligned}$$

□

5.4 Corretude

Lema 5.23 *O algoritmo constrói o diagrama de Voronoi $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_n\})$.*

PROVA: No primeiro passo, computamos $Q_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\})$ e construímos seu casco convexo C_{k+1} . Pelo Lema 5.8, este casco convexo é dual de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\})$.

Para cada novo sítio p_i , $i = k + 2, \dots, n$,

1. localizamos um triângulo Δ_{i-1} de C_{i-1} destruído por p_i , como demonstrado pelo Lema 5.22;
2. pelo Lema 5.9, as arestas de C_{i-1} incidentes em triângulos destruídos por p_i formam um grafo conexo. Nós percorremos este grafo, utilizando busca em largura [8], removendo todos estes triângulos;
3. os triângulos proximais novos são todos construídos, como demonstrado pelos Lemas 5.14 e 5.15. Pelo Lema 5.11, toda região de um diagrama de Voronoi de ordem k de um conjunto contendo $n \geq k + 2$ sítios tem, no mínimo, um vértice proximal. Como $i \geq k + 2$, o lema se aplica e, assim, todos os triângulos proximais e todos os cantos do casco convexo C_i são corretamente computados. Os triângulos distais estão em buracos ainda não preenchidos pelo algoritmo [4]. Todas as arestas de um mesmo buraco possuem os mesmos $k - 1$ vizinhos mais próximos e estas arestas formam um grafo conexo [4]. Portanto, após determinarmos as arestas de um buraco, construímos o casco convexo dos cantos na fronteira do buraco. Após todos os buracos serem preenchidos, temos o casco convexo C_i . Pelo Lema 5.8, este casco convexo é dual de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_i\})$. Portanto, a partir de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$, obtemos $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_i\})$. Quando $i = n$, obtemos $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_n\})$.

□

5.5 Complexidade de Tempo e Espaço

Nesta seção, apresentamos o tempo esperado do algoritmo e o espaço utilizado. Ao fazer a análise de complexidade, calculamos algumas probabilidades que estão relacionadas à quantidade de vértices no diagrama de Voronoi de ordem k em \mathbb{T}^2 . Como demonstramos nos Lemas 4.6 e 4.7, há um número exato de vértices neste diagrama e, portanto, podemos calcular exatamente as probabilidades envolvidas.

Lema 5.24 *O número esperado de vértices de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$ destruídos pelo sítio p_i é $O\left(k^2\left(1 - \frac{k}{i}\right)\right)$.*

PROVA: Seja v um vértice de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$ e sejam p, q, r os sítios em $\{p_1, \dots, p_{i-1}\}$ cujo circuncentro é v . Então, v é destruído se e somente se p_i é inserido no interior do circuncírculo C de p, q e r . Como v é um vértice de $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$, este círculo contém exatamente $k-1$ ou $k-2$ sítios no seu interior, ou seja, após a inserção de p_i , C contém no máximo k sítios. Assim, a probabilidade P de que v seja destruído por p_i é igual a probabilidade de que, após a inserção, p_i seja um dos (no máximo k) sítios no interior de C , ou seja, $P \leq \frac{k}{i}$. Pelos Lemas 4.6 e 4.7, há exatamente

$$2[2k((i-1)-k) - (i-1) + 2] - 4 = 4k(i-1-k) - 2(i-1)$$

vértices em $\mathbb{V}_k(\{p_1, \dots, p_{i-1}\})$. Logo, o número esperado de vértices destruídos por p_i é, no máximo:

$$[4k(i-1-k) - 2(i-1)] \left(\frac{k}{i}\right) < 4k^2 \left(1 - \frac{k}{i}\right) \in O\left(k^2 \left(1 - \frac{k}{i}\right)\right).$$

□

Lema 5.25 *O algoritmo toma tempo esperado $O(k^2(n-k) \log n)$.*

PROVA: No primeiro passo, determinamos $Q_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\})$ em tempo $\Theta(k)$. Em seguida, construímos o seu casco convexo em tempo $O(k \log k)$, utilizando o algoritmo por divisão-e-conquista descrito em [23]. Para cada sítio p_i , $i = k+2, \dots, n$:

1. localizamos Δ_{i-1} em C_{i-1} destruído por p_i , em tempo $O(k \log n)$, como demonstrado no Lema 5.22;
2. removemos todos os $O\left(k^2 \left(1 - \frac{k}{i}\right)\right)$ triângulos de C_{i-1} destruídos por p_i . Pelo Lema 5.9, podemos percorrer o grafo formado pelas arestas de C_{i-1} incidentes nestes vértices destruídos, removendo cada um em tempo constante. Portanto, removemos todos eles em tempo $O\left(k^2 \left(1 - \frac{k}{i}\right)\right)$.
3. seja n_i o número esperado de triângulos de C_i produzidos por p_i . Construímos a superfície nova de C_i , em tempo $O(n_i \log n_i)$, devido ao algoritmo para casco convexo [23]. Por um argumento semelhante ao dado na prova do Lema 5.24, podemos demonstrar que n_i também é $O\left(k^2 \left(1 - \frac{k}{i}\right)\right)$.

Portanto, o algoritmo toma tempo esperado:

$$O\left(k + k \log k + \sum_{i=k+2}^n (k \log n + n_i + n_i \log n_i)\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= O\left(\sum_{i=k+2}^n (k \log n + n_i \log n_i)\right) \\
&= O(k^2(n-k) \log n).
\end{aligned}$$

□

Lema 5.26 *O algoritmo usa espaço esperado $O(k^2(n-k))$.*

PROVA: Para C_{k+1} , correspondente a $V_k(\{p_1, \dots, p_{k+1}\})$, utilizamos espaço $\Theta(k)$. Para cada casco convexo C_j , $j = k+2, \dots, n$, aumentamos o espaço usado em n_j , onde n_j é o número de vértices novos produzidos por p_j . Como n_j tem valor esperado $O(k^2(1 - \frac{k}{j}))$, o espaço total usado pelo algoritmo é

$$O\left(k + \sum_{j=k+2}^n \left(k^2 \left(1 - \frac{k}{j}\right)\right)\right) = O(k^2(n-k)).$$

□

5.6 Considerações Finais

Apresentamos uma generalização, de \mathbb{R}^2 para \mathbb{T}^2 , de um algoritmo incremental randomizado on-line para construir cada diagrama de Voronoi de ordem k , independentemente. No algoritmo em \mathbb{R}^2 , a inserção de um novo sítio pode não remover nenhum vértice do diagrama, um caso especial a ser tratado pelo algoritmo. Ao contrário, o algoritmo em \mathbb{T}^2 funciona de maneira uniforme pois, mesmo quando o novo sítio é inserido no exterior do casco convexo do conjunto, sempre ao menos um vértice é removido.

O algoritmo também foi implementado e, para sua depuração, utilizamos os visualizadores do ambiente GeoPrO. A figura 5.28 mostra a projeção em \mathbb{T}^2 da parte inferior do casco convexo dual do diagrama de Voronoi de ordem 3 de um conjunto de sítios no aquém de \mathbb{T}^2 , enquanto o diagrama de Voronoi dual é mostrado na figura 5.29. Para um conjunto de sítios no além de \mathbb{T}^2 , mostramos analogamente as figuras 5.30 e 5.31.

O algoritmo original [4] utilizava um procedimento de localização de pontos baseado na trapezoidização do diagrama de Voronoi. Nós demonstramos propriedades de diagramas de Voronoi de ordem k que nos permitiram projetar um novo método para localização de pontos. Utilizando propriedades inerentes de diagramas de Voronoi, este novo método é mais eficiente e mais simples que o original.

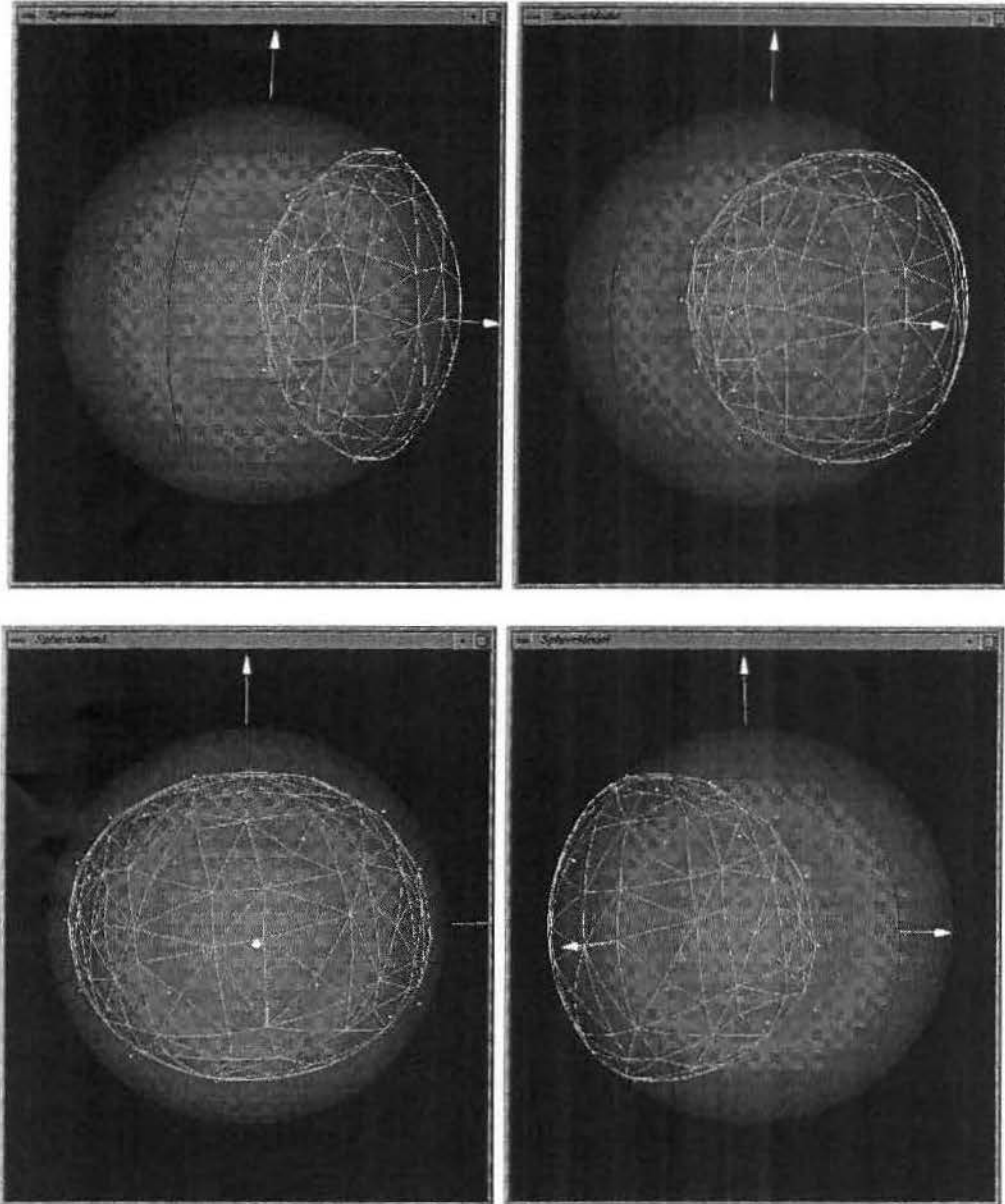


Figura 5.28: Projeção em \mathbb{T}^2 da parte inferior do casco convexo dual do diagrama de Voronoi de ordem 3 de um conjunto de sítios no aquém.

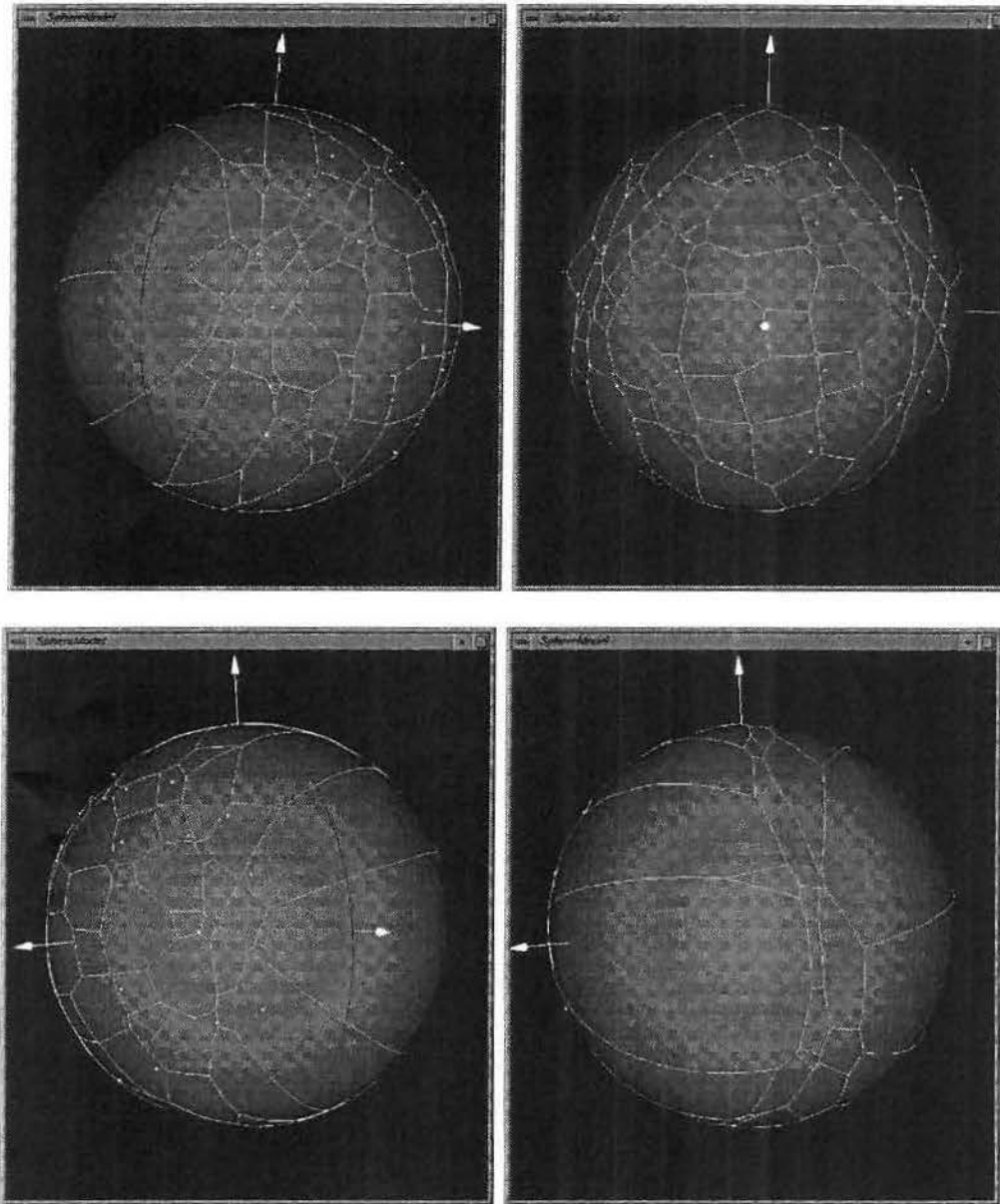


Figura 5.29: Diagrama de Voronoi de ordem 3 de um conjunto de sítios no aquém de \mathbb{T}^2 .

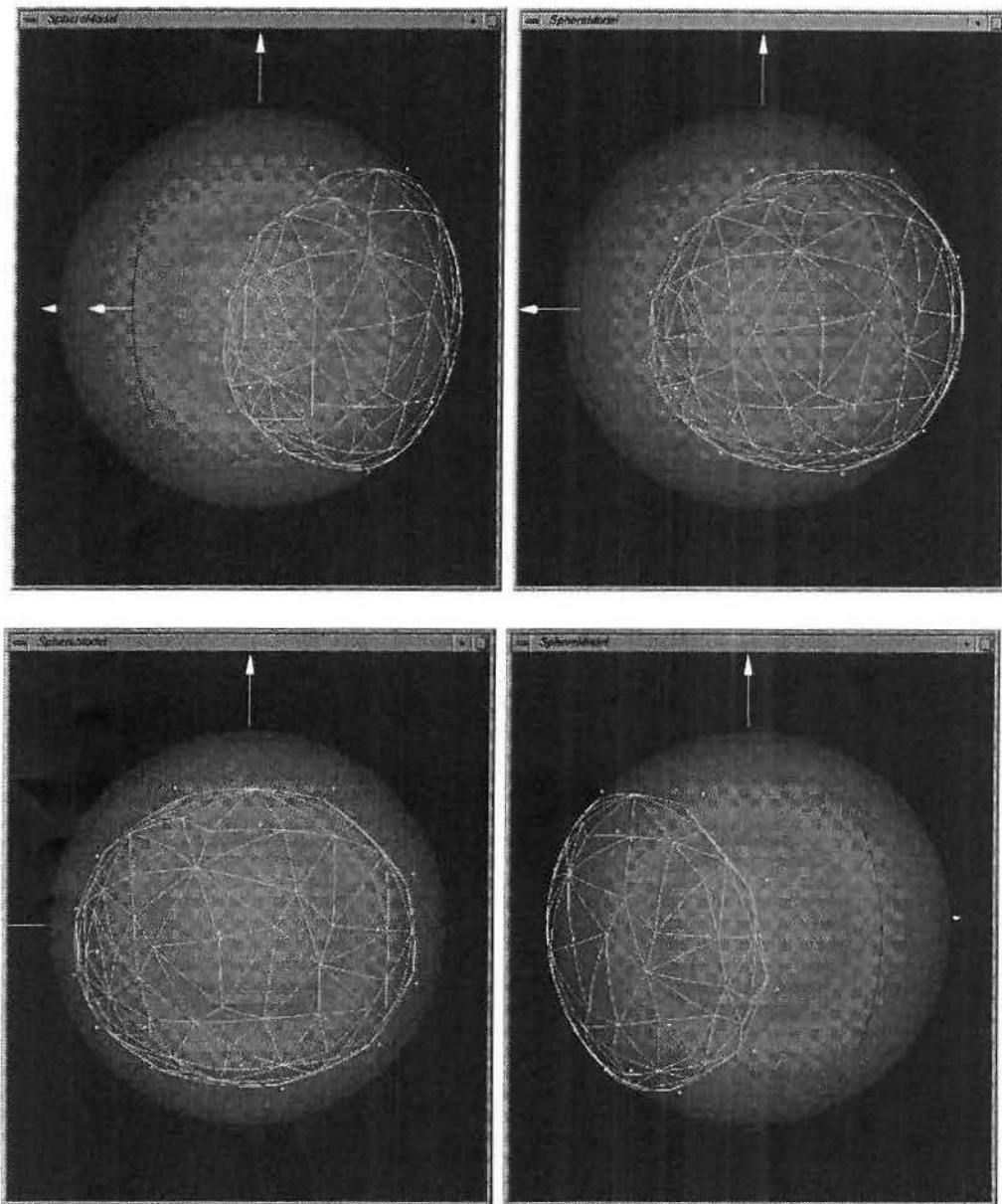


Figura 5.30: Projeção em \mathbb{T}^2 da parte inferior do casco convexo dual do diagrama de Voronoi de ordem 3 de um conjunto de sítios no além.

Capítulo 6

Conclusões

Nesta dissertação, nós apresentamos uma generalização do diagrama de Voronoi: consideramos diagramas de Voronoi de ordem k no plano projetivo orientado \mathbb{T}^2 . No capítulo 2, foi apresentada uma introdução ao diagrama de Voronoi de ordem k e, no capítulo 3, apresentamos conceitos fundamentais associados ao plano projetivo orientado. Como vimos, \mathbb{T}^2 é um espaço geométrico que permite emular e estender o plano Euclidiano. Os algoritmos tornam-se uniformes de maneira transparente: uniformes, pois não se precisa tratar casos especiais; e transparentes, pois comportam-se como se estivessem em \mathbb{R}^2 .

Apresentamos uma generalização, de \mathbb{R}^2 para \mathbb{T}^2 , de dois algoritmos para construção de diagramas de Voronoi de ordem k . O primeiro algoritmo constrói os diagramas de Voronoi de todas as ordens com a informação dos k sítios associados a cada região de Voronoi, em tempo e espaço ótimos, enquanto o segundo é um algoritmo incremental randomizado on-line para construir o diagrama de Voronoi de cada ordem, independentemente. Nós apresentamos um novo método para localização de pontos neste algoritmo, que reduz a complexidade de tempo por um fator logarítmico e é mais simples que o original.

Ao longo do texto, nós demonstramos várias propriedades de diagramas de Voronoi, algumas delas intrínsecas a \mathbb{T}^2 . Por exemplo, o diagrama de Voronoi de ordem k de um conjunto finito de sítios em \mathbb{T}^2 tem um número exato de regiões. Além disso, este diagrama é antípoda do diagrama de Voronoi de ordem $n - k$ do mesmo conjunto de sítios, $\forall k : 1 \leq k < n$.

Nós provamos a corretude de todos os algoritmos apresentados, assim como a complexidade de tempo e espaço de cada um. Todos os algoritmos foram implementados utilizando-se o GeoPrO [12] como ferramenta de visualização, o qual simplificou enormemente a depuração.

6.1 Trabalhos Futuros

A construção uniforme de diagramas de Voronoi em \mathbb{T}^2 é uma das vantagens em relação à construção em \mathbb{R}^2 e, para manter esta uniformidade, é interessante que o diagrama de Voronoi não seja “costurado” na reta do infinito. Como vimos no capítulo 5, ainda não encontramos um mapeamento de \mathbb{T}^2 que permita a construção de um casco convexo em \mathbb{T}^3 , considerando-se sítios em hemisférios diferentes. Portanto, naquele capítulo, nós assumimos que todos os sítios estão num mesmo hemisfério. Este é um problema em aberto cuja solução pode ser investigada num futuro trabalho.

Além disso, existem algoritmos para construção de diagramas de Voronoi de ordem k em \mathbb{R}^2 cujas generalizações para \mathbb{T}^2 seriam interessantes. Os algoritmos de Lee [17], por divisão e conquista, e de Rosenberger [27], por varredura, são bastante conhecidos e, portanto, há um interesse especial na generalização desses algoritmos para \mathbb{T}^2 . A princípio, a generalização do algoritmo de varredura [27] parece ser mais complicada do que a do algoritmo de divisão e conquista [17]. Mesmo considerando sítios em apenas um hemisfério, este algoritmo de varredura já teria vantagens em \mathbb{T}^2 , pois obteríamos não apenas o diagrama de Voronoi de ordem k , mas também o diagrama de Voronoi de ordem $n - k$, já que não conhecemos um algoritmo para construção do diagrama de Voronoi de ordem $n - 1$ por varredura em \mathbb{R}^2 .

Referências Bibliográficas

- [1] AGGARWAL, A. GUIBAS, L. SAXE, J. SHOR, P. *A linear-time algorithm for computing the Voronoi diagram of a convex polygon*. Discrete & Computational Geometry, 4:591–604, 1989.
- [2] AURENHAMMER, F. *A new duality result concerning Voronoi diagrams*. Discrete & Computational Geometry, 5:243–254, 1990.
- [3] AURENHAMMER, F. *Voronoi diagrams – a survey of a fundamental geometric data structure*. ACM Computing Surveys, 23(3):345–405, Setembro, 1991.
- [4] AURENHAMMER, F. e SCHWARZKOPF, O. *A simple on-line randomized incremental algorithm for computing higher order Voronoi diagrams*. International Journal of Computational Geometry and Applications, 2:363–381, 1992.
- [5] BOISSONAT, J-D. DEVILLERS, O. SCHOTT, R. TEILLAUD, M. e YVINEC, M. *Applications of random sampling to on-line algorithms in computational geometry*. Discrete & Computational Geometry, 8:51–72, 1992.
- [6] BOISSONAT, J-D. DEVILLERS, O. TEILLAUD, M. *A semidynamic construction of higher-order Voronoi diagrams and its randomized analysis*. Algorithmica, 9:329–356, 1993.
- [7] CHAZELLE, B. EDELSBRUNNER, H. GUIBAS, L. J. SHARIR, M. e SNOEYINK, J. *Computing a face in an arrangement of line segments*. Proc. 2nd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pp. 441–448, 1991.
- [8] CORMEN, T. LEISERSON, C. E. e RIVEST, R. *Introduction to algorithms*. MIT Press, 1990.
- [9] DEHNE, F. *An $O(n^4)$ algorithm to construct all Voronoi diagrams for k nearest neighbor searching*. Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science, vol. 154, pp. 160–172, 1983.

- [10] FORTUNE, S. *A sweepline algorithm for Voronoi diagrams*. *Algorithmica*, 3:153–174, 1987.
- [11] GON, C. *Computação Exata em Geometria Projetiva Orientada e Tratamento de Degenerações*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Computação – UNICAMP, Junho de 1996.
- [12] GON, C. e REZENDE, P. J. de *Um ambiente distribuído de visualização com suporte para geometria projetiva orientada*. *Anais do IX SIBGRAPI*, páginas 71–78. 1996.
- [13] GREEN, P. J. e SIBSON, R. *Computing Dirichlet tessellations in the plane*. *Computer Journal*, 21(2):168–173, 1977.
- [14] GUIBAS, L. J. e STOLFI, J. *Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams*. *ACM Transactions on Graphics*, 4:74–123, 1985.
- [15] GUIBAS, L. J. KNUTH, D. E. e SHARIR, M. *Randomized incremental construction of Delaunay and Voronoi diagrams*. *Algorithmica*, 7:381–413, 1992.
- [16] KIRKPATRICK, D. G. *Optimal search in planar subdivisions*. *SIAM Journal of Computing*, 12(1):28–35, 1983.
- [17] LEE, D. T. *On k -nearest neighbor Voronoi diagrams in the plane*. *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-31, n. 6, pp. 478–487, June 1982.
- [18] MEHLHORN, K. MEISER, S. Ó'DÚNLAIN, C. *On the construction of abstract Voronoi diagrams*. *Discrete & Computational Geometry*, 6:211–224, 1991.
- [19] MULMULEY, K. *On levels in arrangements and Voronoi diagrams*. *Discrete & Computational Geometry*, 6:307–338, 1991.
- [20] MULMULEY, K. *Computational Geometry: An Introduction through Randomized Algorithms*. Prentice Hall, 1994.
- [21] PINTO, G. A. e REZENDE, P. J., *Representation of conics in the oriented projective plane*. *Anais do X SIBGRAPI*, páginas 71–78. IEEE Computer Press, 1997.
- [22] PINTO, G. A. *Generalizações do Diagrama de Voronoi construídas através de Cônicas no Plano Projetivo Orientado e suas Visualizações*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Computação — UNICAMP, Março de 1998.
- [23] PREPARATA, F. P. e SHAMOS, M. *Computational Geometry: an introduction*. Springer-Verlag, 1985.

- [24] RAPPAPORT, D. *A convex hull algorithm for discs, and applications*. Computational Geometry: Theory and Applications, 1:171–187, 1992.
- [25] REZENDE, P. J. e STOLFI, J. *Fundamentos de Geometria Computacional*. IX Escola de Computação, 1994.
- [26] REZENDE, P. J. e WESTRUPP, R. B. *An optimal algorithm to construct all Voronoi diagrams for k nearest neighbor search in \mathbb{T}^2* . Anais do XII SIBGRAPI, páginas 7–15. IEEE Computer Press, 1999.
- [27] ROSENBERGER, H. *Order- k Voronoi diagrams of sites with additive weights in the plane*. Algorithmica, 6:490–521, 1991.
- [28] SEIDEL, R. *Linear programming and convex hulls made easy*. Proc. 6th Annual ACM Symposium on Computational Geometry, pp. 211–215, 1990.
- [29] SEIDEL, R. *A simple and fast incremental randomized algorithm for computing trapezoidal decompositions and for triangulating polygons*. Computational Geometry: Theory and Applications 1:51–64, 1991.
- [30] SHAMOS, M. I. e HOEY, D. *Closest-point problems*. In Proc. of 16th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 151–162, Oct. 1975.
- [31] STOLFI, J. *Oriented Projective Geometry: a framework for geometric computations*. Academic Press Inc., 1991. 1st Edition.
- [32] WELZL, E. *Constructing smallest enclosing disks (balls and ellipsoids)*. Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science, vol. 555, pp. 359–370, 1991.