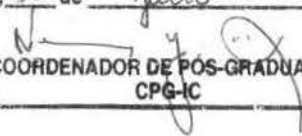


Este exemplar corresponde à redação final da
Tese/Dissertação devidamente corrigida e defendida
por: Cândida Nunes de Silva

e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 30 de julho de 2001


COORDENADOR DE PÓS-GRADUAÇÃO
CPG-IC

**A Conjetura dos 3-Fluxos de Tutte e
Emparelhamentos em Grafos Bipartidos**

Cândida Nunes da Silva

Dissertação de Mestrado

Instituto de Computação
Universidade Estadual de Campinas

A Conjetura dos 3-Fluxos de Tutte e Emparelhamentos em Grafos Bipartidos

Cândida Nunes da Silva¹

1º de junho de 2001

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Ricardo Dahab
IC—UNICAMP (Orientador)
- Prof. Dr. Paulo Feofiloff
IME—USP
- Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi
IC—UNICAMP
- Prof. Dr. Cid Carvalho de Souza
IC—UNICAMP

¹Apoio financeiro da CAPES, processo número 01P-15081/1997.

A Conjetura dos 3-Fluxos de Tutte e Emparelhamentos em Grafos Bipartidos

Este exemplar corresponde à redação final da
Dissertação devidamente corrigida e defendida
por Cândida Nunes da Silva e aprovada pela
Banca Examinadora.

Campinas, 13 de Junho de 2001.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Ricardo Dahab', enclosed within a large, loopy circular flourish.

Prof. Dr. Ricardo Dahab
IC—UNICAMP (Orientador)

Dissertação apresentada ao Instituto de Com-
putação, UNICAMP, como requisito parcial para
a obtenção do título de Mestre em Ciência da
Computação.

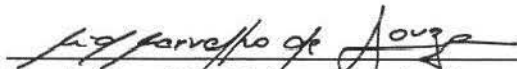
© Cândida Nunes da Silva, 2001.
Todos os direitos reservados.

TERMO DE APROVAÇÃO

Tese defendida e aprovada em 01 de junho de 2001, pela Banca Examinadora composta pelos Professores Doutores:



Prof. Dr. Paulo Feofiloff
IME - USP



Prof. Dr. Cid Carvalho de Souza
IC - UNICAMP



Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi
IC - UNICAMP



Prof. Dr. Ricardo Dahab
IC - UNICAMP

“The first and simplest emotion which we discover
in the human mind is curiosity.”

Edmund Burke

“To be conscious that you are ignorant
is a great step to knowledge.”

Benjamin Disraeli

“To myself I seem to have been only like a boy
playing on the sea-shore and diverting myself in now and then
finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary,
whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.”

Isaac Newton

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer ao meu querido orientador e amigo Ricardo Dahab por sua excelente orientação, a qual não se restringiu apenas a esta dissertação. Agradeço seu carinho, sua atenção e compreensão, que foram essenciais para o bom desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço imensamente ao Gustavo, meu namorado e parceiro, por me fazer enxergar minhas capacidades e meus dons. A sua alegria, seu companheirismo, sua cumplicidade e seu carinho inesgotável contribuíram em muito para a realização deste trabalho.

Tenho ainda muito a agradecer aos meus pais, Celso e Eulalina, por sua intensa dedicação em me propiciar uma vida feliz, confortável e permeada de sucessos. Agradeço aos meus irmãos Eleonora, Celso e Letícia e ao meu cunhado Alexandre pelo amor fraterno que têm por mim, o qual me traz muita alegria.

Agradeço a todos os que já foram meus professores por tudo que me ensinaram. Cada um a sua maneira contribuiu para minha formação técnica e pessoal. Em particular, quero agradecer aos professores Célia Picinin de Mello e Cláudio L. Lucchesi que, através da visão lúdica e colorida de teoria dos grafos que me passaram em suas aulas, me motivaram a estudar o assunto.

Agradeço aos professores da banca examinadora Paulo Feofiloff, Cid C. de Souza e especialmente ao professor Cláudio L. Lucchesi por terem lido cuidadosamente a dissertação e por terem contribuído com sugestões interessantes.

Também agradeço aos meus queridos amigos Tissiana, Marco Antônio, Islene, Oliva, Christiane, Ana Monteiro, Bruno, Lúcia, Anthony, Marcus, Leonardo Rossi e a tantas outras pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradeço a todo pessoal do LSD por terem me acolhido no laboratório.

Finalmente agradeço à CAPES e à UNICAMP pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta dissertação aborda o tema de fluxos inteiros em grafos e, mais especificamente, a Conjetura dos 3-fluxos de Tutte, a qual postula que todo grafo 4-aresta-conexo admite um 3-fluxo.

Motivados pela existência de uma redução da Conjetura dos 3-fluxos para grafos 5- regulares, concentramos nosso trabalho no estudo das propriedades dos grafos 5- regulares que admitem 3-fluxo. Como resultado, estabelecemos que tais grafos são caracterizados pela existência de uma equipartição de seus vértices com certas propriedades especiais, a qual denominamos *equipartição mod 3-orientável*. Por sua vez, caracterizamos equipartições mod 3-orientáveis de duas formas: (i) pela existência de um emparelhamento perfeito em um grafo bipartido derivado da equipartição e (ii) em termos do tamanho dos cortes de arestas do grafo. Tais caracterizações dão origem a um algoritmo polinomial para determinar se uma dada equipartição de um grafo 5-regular é mod 3-orientável.

Abstract

This dissertation deals with integer flows in graphs; more specifically with Tutte's 3-flow Conjecture, which states that every 4-edge-connected graph admits a 3-flow.

Tutte's 3-flow Conjecture can be reduced to the class of 5-regular 4-edge-connected graphs. As a result, we have characterized the 5-regular graphs which admit a 3-flow as those possessing an equipartition of its vertices with certain properties, which we called *mod 3-orientable equipartition*.

We then present two characterizations for the existence of such equipartitions: one in terms of perfect matchings in a bipartite graph derived from the equipartition; the other related to the size of edge cuts in the graph. These characterizations give rise to a polynomial algorithm for testing the mod 3-orientability of a given equipartition.

Conteúdo

Agradecimentos	viii
Resumo	ix
Abstract	x
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Resultados da Dissertação	6
1.3 Organização da Dissertação	7
2 Definições e Resultados Clássicos	8
2.1 Definições e Terminologia	8
2.2 Teorema de Hall	10
2.3 Imersões em Superfícies e a Fórmula de Euler	12
2.3.1 Grafos em superfícies	12
2.3.2 Fórmula de Euler	15
2.4 Outros Resultados	15
3 Fluxos Inteiros	18
3.1 Fundamentos	18
3.1.1 k -fluxos e k -fluxos Modulares	22
3.2 Conjetura dos 3-fluxos de Tutte	25
3.3 Reduções	26
3.3.1 Redução a Grafos Simples	26
3.3.2 Redução a Grafos 4-aresta-conexos	27
3.3.3 Redução a Grafos 5-regulares	28
3.3.4 NP-completude para grafos 5-regulares	33
3.4 Contra-exemplo Mínimo em Superfícies de Genus Baixo	34

4	Grafos 5-regulares e mod 3-orientações	37
4.1	Equipartições mod 3-orientáveis	37
4.2	Equipartições mod 3-promissoras	38
4.3	Caracterizações	42
4.4	Algoritmo para Verificação de mod 3-orientabilidade.	49
5	Conclusão	53
A	Observações Experimentais sobre Equipartições	55
	Bibliografia	60

Lista de Figuras

1.1	Grafo com aresta de corte	1
1.2	Exemplo da necessidade de quatro cores	2
1.3	Um 4-fluxo para o K_4	3
1.4	Grafo cúbico bipartido imerso no toro	4
2.1	O conjunto de componentes H e seu conjunto de vizinhos N_H	10
2.2	O grafo $K_{3,3}$ imerso no toro visto em três e duas dimensões	13
2.3	O grafo $K_{3,3}$ imerso no plano projetivo	14
2.4	Imersão não celular do K_4 no toro	14
2.5	Cruzamento dos cortes δX e δY	16
3.1	Redução de arestas múltiplas	27
3.2	A operação de 2-divisão de um vértice v	29
3.3	Os cortes δX_A e δY	31
3.4	Algoritmo para redução a grafo 5-regular	32
3.5	A operação de expansão de um vértice v	33
4.1	Uma equipartição mod 3-orientável de um grafo 5-regular	37
4.2	Uma mod 3-orientação de um grafo bipartido e 5-regular	39
4.3	Uma equipartição mod 3-promissora que não é mod 3-orientável	41
4.4	Os passos da operação de encolhimento	43
4.5	Ilustração da demonstração do Teorema 4.6	45
4.6	Orientando uma árvore $T^+ \in \mathcal{T}^+$ como uma ramificação	46
4.7	Orientando uma coroa $C^+ \in \mathcal{C}^+$	46
4.8	Ilustração do Lema 4.7	48
4.9	Ilustração da contrapositiva do Lema 4.7	51
4.10	Algoritmo para determinar se uma equipartição (V^+, V^-) é mod 3-orientável	52
A.1	Uma equipartição de G_1 onde $ \delta V^+ $ é máxima que não é mod 3-promissora	57
A.2	Uma equipartição de G_1 onde $ \delta V^+ $ é máxima que é mod 3-promissora	57
A.3	Uma equipartição mod 3-promissora de G_2 que não possui $ \delta V^+ $ máxima	58

A.4	Uma equipartição mod 3-promissora de G_2 onde $ \delta V^+ $ é máxima	58
A.5	O grafo 5-regular G_3 que não admite 3-fluxo	59
A.6	Uma equipartição mod 3-promissora de G_3 onde $ \delta V^+ $ é máxima	59

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação examina alguns aspectos da Teoria de Fluxos Inteiros, introduzida por Tutte [27]. O conceito de fluxos inteiros surgiu como uma generalização do conceito de colorações, que constitui uma importante e vasta área de pesquisa dentro da Teoria dos Grafos. A Seção 2.3 desta dissertação trata de imersões de grafos em superfícies. Os conceitos lá apresentados são necessários para a compreensão do que segue.

1.1 Motivação

Uma (face) k -coloração de um mapa planar G é uma atribuição de cores $0, 1, \dots, k-1$ às faces de G , de forma que faces incidentes à mesma aresta tenham cores distintas. Assim, grafos com aresta de corte como o da Figura 1.1 não admitem uma k -coloração de suas faces, pois a face F_0 é incidente à aresta de corte e duas vezes.

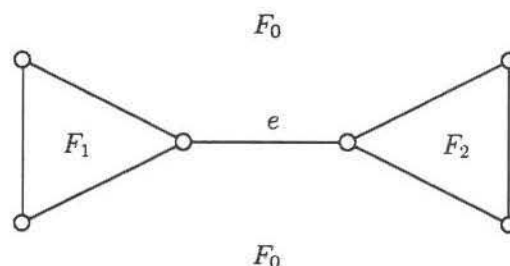


Figura 1.1: Grafo com aresta de corte

O problema da k -coloração de faces é o de determinar se um mapa planar G admite uma k -coloração de suas faces, para um dado valor de k .

O Teorema das Quatro Cores, enunciado a seguir, estabelece que $k = 4$ é suficiente para todos os mapas planares. O grafo K_4 apresentado na Figura 1.2 é um exemplo de que para colorir mapas planares são necessárias quatro cores distintas.

Teorema 1.1 *Todo mapa planar e sem aresta de corte admite uma 4-coloração de suas faces.*

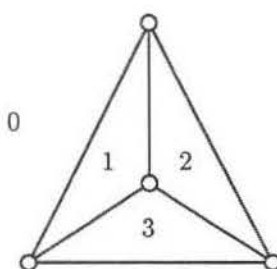


Figura 1.2: Exemplo da necessidade de quatro cores

A busca por uma demonstração desse teorema, que durou mais de um século, impulsionou toda a pesquisa nessa área. Livros e artigos como [16, 21, 20] apresentam a história dos avanços obtidos ao longo da busca por uma demonstração do teorema.

A primeira demonstração do Teorema das Quatro Cores, devida a Appel e Haken [2, 3], surgiu em 1977, 125 anos após a sua proposição. É uma demonstração controversa que utiliza o computador para examinar um grande número de casos. Contém imprecisões, o que a torna difícil de ser verificada. Apenas recentemente, em 1997, Robertson, Sanders, Seymour e Thomas [17] finalmente demonstraram o Teorema, utilizando a mesma técnica de Appel e Haken, mas de forma rigorosa, ainda utilizando o computador.

Outros resultados importantes no contexto de coloração de mapas planares são o Teorema das Cinco Cores de Heawood [13] e o Teorema de Grötzsch [11]:

Teorema 1.2 (Heawood) *Todo mapa planar e sem aresta de corte admite uma 5-coloração de suas faces.*

Teorema 1.3 (Grötzsch) *Todo grafo planar, sem laços e sem triângulos admite uma 3-coloração de seus vértices.*

O Teorema de Grötzsch refere-se à *k*-coloração de vértices, que consiste em encontrar uma atribuição de cores $0, 1, \dots, k - 1$ aos vértices, colorindo diferentemente vértices adjacentes. Note, porém, que para qualquer mapa planar G , existe um mapa planar dual G^* : vértices de G correspondem a faces de G^* e faces de G correspondem a vértices de G^* , com todas as relações de adjacência preservadas. Assim, os circuitos com l arestas de G são mapeados em cortes com l arestas (l -cortes) de G^* . Portanto, podemos enunciar o Teorema de Grötzsch na sua forma dual, que trata de 3-coloração de faces.

Teorema 1.4 (Grötzsch) *Todo mapa planar, sem aresta de corte e sem 3-cortes admite uma 3-coloração de suas faces.*

Um *k*-fluxo, $k \geq 1$, para um grafo $G = (V, E)$ é um par de funções (D, φ) , onde D associa orientações e φ define pesos inteiros para as arestas de E . A função peso φ deve ser tal que $1 \leq \varphi(e) \leq k - 1$, para toda aresta $e \in E$. Além disso, para cada vértice $v \in V$, o *fluxo líquido* em v , ou seja, a diferença entre a soma dos pesos das arestas orientadas segundo D com origem em v e a soma dos pesos das arestas com destino em v , deve ser nulo. A Figura 1.3 mostra um 4-fluxo para o K_4 .

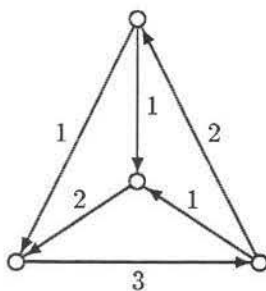


Figura 1.3: Um 4-fluxo para o K_4

Dado um inteiro k e um grafo G qualquer, o problema aqui é o de determinar se G admite um k -fluxo. É fácil verificar que um grafo G admite k -fluxo, $k \geq 1$, somente se não possui aresta de corte. Esse fato não é surpreendente pois, conforme veremos a seguir, no caso dos mapas planares existe uma equivalência entre admitir um k -fluxo e ter uma k -coloração de faces.

Um *k*-fluxo modular (D, φ) , é um k -fluxo no qual permitimos que o fluxo líquido nos vértices seja zero módulo k . Mostraremos na Seção 3.1.1 que um k -fluxo modular sempre

pode ser convertido em um k -fluxo. Portanto, um grafo admite um k -fluxo se, e somente se, admite um k -fluxo modular.

Essa equivalência entre k -fluxos e k -fluxos modulares, juntamente com o Teorema 1.5 enunciado a seguir, permite que estabeleçamos uma equivalência entre k -colorações de faces de mapas planares e k -fluxos. Em [30], Younger mostra como é possível obter um k -fluxo para um mapa planar a partir de uma k -coloração de faces do mesmo e vice-versa.

Teorema 1.5 *Um mapa planar $G = (V, E)$ admite uma k -coloração de faces se, e somente se, admite um k -fluxo modular.*

É possível estender parcialmente a afirmação do Teorema 1.5 para mapas em superfícies orientadas quaisquer, demonstrando que a existência de uma k -coloração de faces implica na existência de um k -fluxo modular. A recíproca nem sempre é verdadeira. O grafo imerso no toro apresentado na Figura 1.4, por exemplo, admite um 3-fluxo, pois é cúbico bipartido. Entretanto, essa imersão possui quatro faces adjacentes duas a duas, exigindo portanto o uso de quatro cores para colorir suas faces. Este e outros exemplos encontram-se em [31].

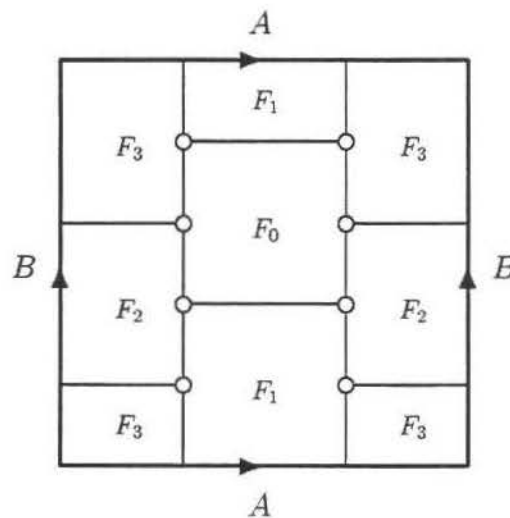


Figura 1.4: Grafo cúbico bipartido imerso no toro

Note que para grafos em geral o conceito de coloração de faces é relativo à superfície de imersão do grafo G em questão. Diferentemente, o problema de fluxos inteiros, assim como o de coloração de vértices, independe de conceitos topológicos. A equivalência entre esses três problemas somente acontece no plano. Outra diferença existente entre fluxos inteiros

e colorações é que, enquanto o valor de k pode ser arbitrariamente grande relativo aos problemas de coloração, no caso de k -fluxos existe um limite superior, atualmente igual a 6 (Seymour) e conjecturado em 5 (Tutte), satisfeito por qualquer grafo finito e sem aresta de corte.

Entre as décadas de 50 e 70, Tutte [27, 28] introduziu o conceito de k -fluxos e propôs três conjecturas: as Conjeturas dos 5-, 4- e 3-fluxos, enunciadas a seguir.

Conjetura 1.6 (*5-fluxo*) *Todo grafo sem aresta de corte admite um 5-fluxo.*

Conjetura 1.7 (*4-fluxo*) *Todo grafo sem aresta de corte e sem subgrafo contraível ao grafo de Petersen admite um 4-fluxo.*

Conjetura 1.8 (*3-fluxo*) *Todo grafo sem aresta de corte e sem 3-cortes admite um 3-fluxo.*

As três Conjeturas de Tutte permanecem abertas até hoje. Pelo Teorema 1.5, as Conjeturas dos 5-, 4- e 3-fluxos, quando restritas aos grafos planares, recaem diretamente no Teorema das Cinco Cores, no Teorema das Quatro Cores e no Teorema de Grötzsch, respectivamente. Portanto, conhecemos demonstrações das três conjecturas para a subclasse dos grafos planares.

Recentemente, Robertson, Sanders, Seymour e Thomas [18, 19, 22, 23] demonstraram a Conjetura dos 4-fluxos para a subclasse dos grafos cúbicos. Essa demonstração usa a veracidade do Teorema das Quatro Cores e é feita em termos do problema equivalente de *3-coloração de arestas* de grafos cúbicos, definido da seguinte forma: uma 3-coloração de arestas de um grafo cúbico G é uma atribuição de cores 1, 2, 3 às arestas de G , de forma que, para todo vértice v de G , as três arestas incidentes a v sejam coloridas com cores distintas. A equivalência entre os problemas de determinar se um grafo cúbico G admite uma 3-coloração de arestas e determinar se G admite um 4-fluxo é enunciada no Teorema 1.9 a seguir. Uma demonstração para esse Teorema é apresentada em [9].

Teorema 1.9 *Um grafo cúbico G admite uma 3-coloração de suas arestas se, e somente se, admite um 4-fluxo.*

Sem usar o Teorema das Quatro Cores e de forma muito elegante, Jaeger estabeleceu que os grafos 4-aresta-conexos admitem um 4-fluxo. Uma demonstração deste resultado encontra-se em [9, 25].

Teorema 1.10 (Jaeger) *Todo grafo 4-aresta-conexo admite um 4-fluxo.*

Jaeger [15] também foi o primeiro a demonstrar a existência de um limite superior finito para o valor de k , para o qual todo grafo sem aresta de corte admite um k -fluxo.

Teorema 1.11 (Jaeger) *Todo grafo sem aresta de corte admite um 8-fluxo.*

Poucos anos depois, Seymour [24] melhorou esse limite para 6.

Teorema 1.12 (Seymour) *Todo grafo sem aresta de corte admite um 6-fluxo.*

A Conjetura dos 5-fluxos de Tutte projeta o melhor valor possível para k , dado que o grafo de Petersen não admite um 4-fluxo.

Pelo Teorema 1.12, temos uma caracterização para os grafos que admitem um k -fluxo para $k \geq 6$: os grafos sem aresta de corte. Também conhecemos caracterizações dos grafos que admitem um k -fluxo para $k = 1$ e $k = 2$. Os grafos que admitem 1-fluxo são os grafos sem arestas e os que admitem 2-fluxo são os *grafos eulerianos*, isto é, aqueles onde todos os vértices possuem grau par. Para os valores intermediários de k , conhecemos apenas as três Conjeturas de Tutte.

Para $k = 5$, teremos uma caracterização dos grafos que admitem um 5-fluxo caso a conjetura dos 5-fluxos seja verdadeira.

Para $k = 4$, temos pouca esperança de obter uma tal caracterização, já que decidir se um grafo qualquer G admite um 4-fluxo é um problema NP-completo. Esse resultado foi demonstrado por Holyer [14] para grafos cúbicos, para o problema equivalente de 3-coloração de arestas.

Finalmente, para $k = 3$, a situação é similar: decidir se um grafo qualquer admite um 3-fluxo também é um problema NP-completo. Esse resultado foi demonstrado por Garey, Johnson e Stockmeyer (veja GT4 de [10]) para grafos planares, para o problema equivalente de 3-coloração de vértices.

Existe uma série de resultados parciais sobre as Conjeturas de Tutte que não serão apresentados aqui, mas podem ser encontrados nas referências [8, 25] e nos Capítulos de 1 a 5 de [31].

1.2 Resultados da Dissertação

Nosso objeto central de estudo é a Conjetura dos 3-fluxos de Tutte, para a qual existe uma redução a grafos 5-regulares, apresentada em [8] e no Capítulo 3 desta dissertação.

Estabelecemos que os grafos 5-regulares que admitem 3-fluxo são caracterizados pela existência de uma equipartição de seus vértices com certas propriedades especiais, a qual denominamos uma equipartição *mod 3-orientável*.

Conseguimos encontrar duas caracterizações para uma equipartição mod 3-orientável de um grafo 5-regular, as quais constituem a principal contribuição desta dissertação. A primeira está relacionada à existência de emparelhamento perfeito num grafo bipartido derivado do grafo original e da equipartição, enquanto a segunda refere-se ao tamanho

dos cortes do grafo. Através dessas caracterizações, chegamos a um algoritmo polinomial para determinar se uma equipartição de um grafo 5-regular é mod 3-orientável.

Conforme mencionamos anteriormente, o problema de decidir se um grafo qualquer admite um 3-fluxo é NP-completo. É possível demonstrar também que para a subclasse dos grafos 5-regulares esse problema continua NP-completo. Uma demonstração desse fato, original e a única que conhecemos, encontra-se no Capítulo 3 desta dissertação. Portanto, nossas caracterizações dificilmente serão úteis na busca de um algoritmo polinomial para esse problema de decisão. No entanto, como a hipótese da Conjetura dos 3-fluxos restringe-se aos grafos 4-aresta-conexos, temos esperança de que esses resultados possam ser aplicados numa eventual demonstração da Conjetura dos 3-fluxos de Tutte.

1.3 Organização da Dissertação

No Capítulo 2 apresentamos uma série de definições e resultados relevantes para o desenvolvimento deste trabalho; em sua maioria são conceitos e resultados da Teoria dos Grafos já bastante conhecidos.

O Capítulo 3 apresenta os subsídios necessários para a compreensão dos resultados dessa dissertação. Estes incluem uma introdução formal à Teoria de Fluxos Inteiros, uma explicação sucinta do estado da arte com relação à Conjetura dos 3-fluxos de Tutte, a apresentação de certas reduções aplicáveis à Conjetura dos 3-fluxos e uma demonstração de que decidir se um grafo 5-regular admite 3-fluxo é um problema NP-completo.

O Capítulo 4 traz os resultados originais da dissertação. Nesse capítulo desenvolvemos uma série de idéias que nos permitem chegar às duas caracterizações de equipartições mod 3-orientáveis e ao algoritmo polinomial que determina quando uma dada equipartição é mod 3-orientável. No Apêndice A apresentamos alguns exemplos interessantes de equipartições de grafos 5-regulares que encontramos ao longo do nosso estudo.

Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos nossas conclusões a respeito desse trabalho e algumas possíveis linhas de estudo para o futuro.

Capítulo 2

Definições e Resultados Clássicos

Neste capítulo apresentamos uma série de conceitos, definições e propriedades relativas a grafos não orientados em geral, bem como alguns resultados da Teoria dos Grafos relevantes para nosso trabalho. Uma referência clássica para Teoria dos Grafos é o livro de Bondy e Murty [4].

2.1 Definições e Terminologia

Nas definições apresentadas a seguir supomos que G é um grafo não orientado. Denotaremos por $V(G)$ o seu conjunto de vértices e por $E(G)$ o seu conjunto de arestas. Quando for apropriado, $F(G)$ denotará o conjunto de faces de uma imersão de G em uma superfície. No caso em que a referência ao grafo G for subentendida, usaremos simplesmente V , E e F para nos referirmos aos respectivos conjuntos.

Dizemos que o grafo G possui *arestas múltiplas* se mais de uma aresta de E possui o mesmo par de vértices como extremos. Quando temos apenas duas arestas e_1, e_2 de E compartilhando um mesmo par de vértices extremos, dizemos que e_1, e_2 são *arestas duplas*. Uma aresta e de E é um *laço* se os extremos de e são idênticos. Quando G não possui laços e nem arestas múltiplas dizemos que G é um *grafo simples*.

O *grau* $d(v)$ de um vértice $v \in V$ é o número de arestas de E que incidem em v ; laços são contados duas vezes. Quando todo vértice v de V possui o mesmo grau d dizemos que G é *d -regular*; o grafo G é regular se G é d -regular para algum valor de d .

Definimos um *caminho* de v_0 a v_n em G como uma seqüência finita e não vazia $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$, cujos elementos são alternadamente vértices e arestas de G tal que, para todo $1 \leq i \leq n$, a aresta e_i possui os vértices v_{i-1} e v_i como extremos. O inteiro n é o *comprimento* de P . Dizemos que o caminho P é *simples* quando não há repetição de vértices na seqüência. Se para todo par de vértices $u, v \in V$ existir um caminho de u a v em G , então G é um grafo *conexo*.

Um *ciclo* em G é um caminho $C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ com comprimento $n > 0$ onde $v_0 = v_n$. Dizemos que o ciclo C é um *circuito* quando os vértices v_0, v_1, \dots, v_{n-1} são distintos. A *cintura* de G é o comprimento do menor circuito de G . Quando G não possui circuitos dizemos que é *acíclico* e, nesse caso, a sua cintura é infinita.

Uma *bipartição* (S_1, S_2) de um conjunto S é uma partição de S em dois subconjuntos S_1 e S_2 , isto é, $S = S_1 \cup S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Uma *equipartição* de S é uma bipartição (S_1, S_2) onde $|S_1| = |S_2|$.

Dizemos que $G = (V, E)$ é um grafo *bipartido* se (V^+, V^-) é uma bipartição de V e toda aresta de E possui um extremo em V^+ e o outro em V^- . Quando $|V^+| = |V^-|$ dizemos que G é *equipartido*.

Um *emparelhamento* em um grafo simples G é um conjunto de arestas $M \subseteq E$ tal que, para todo vértice $v \in V$, no máximo uma aresta de M incide em v . Dado $X \subseteq V$, dizemos que o emparelhamento M *cobre* X se existir uma aresta de M incidente a cada vértice $v \in X$. Quando M cobre V , dizemos que M é um *emparelhamento perfeito* de G .

Uma *árvore* é um grafo conexo T tal que $|E(T)| = |V(T)| - 1$. Denotamos por $t(G)$ o número de componentes conexos do grafo G que são árvores. Uma *coroa* é um grafo conexo C tal que $|E(C)| = |V(C)|$; ou seja, uma coroa é obtida a partir de uma árvore pela adição de uma aresta. Assim, uma coroa possui um único circuito.

Dado $X \subseteq V(G)$, denotaremos por $G[X]$ o subgrafo de G induzido pelos vértices de X . O *complemento* \overline{X} de X em relação a $V(G)$ é o conjunto $V(G) \setminus X$.

Dados $X, Y \subseteq V$, definimos o conjunto de *arestas de ligação* entre X e Y , denotado por $\delta_G(X, Y)$, ou simplesmente $\delta(X, Y)$, como o subconjunto das arestas de E que possuem um extremo em X e outro em Y . No caso em que $Y = \overline{X}$, o conjunto das arestas de ligação é chamado de *corte* e é denotado por $\delta_G X$ ou simplesmente δX . Quando X é unitário, digamos $X = \{v\}$, usamos a notação δv em vez de δX .

Os quatro subconjuntos de vértices $X \cap Y$, $X \cap \overline{Y}$, $\overline{X} \cap \overline{Y}$ e $\overline{X} \cap Y$ são chamados de *quadrantes* de X e Y . Quando os quatro quadrantes de X e Y são não vazios, dizemos que os cortes δX e δY se *cruzam*, ou que os conjuntos X e Y se *cruzam*.

Quando os conjuntos de vértices X e Y são disjuntos e $G[X]$ e $G[Y]$ são conexos, dizemos que $G[X]$ e $G[Y]$ são *subgrafos adjacentes* se $\delta(X, Y)$ é não vazio.

Dizemos que G é *l-aresta-conexo* quando é necessário remover pelo menos l arestas de E para desconectar G . Por essa definição temos que todo grafo *l-aresta-conexo* também é $(l - 1)$ -aresta-conexo. Um *l-corte* é um corte δX tal que $|\delta X| = l$. Portanto, uma aresta de corte é um 1-corte.

O conjunto de componentes conexos de G é denotado por $K(G)$. Dado $H \subseteq K(G[X])$, definimos o conjunto dos componentes conexos vizinhos de H , denotado por N_H , como o conjunto dos componentes de $K(G[\overline{X}])$ adjacentes aos componentes de H . A Figura 2.1 ilustra essa definição.

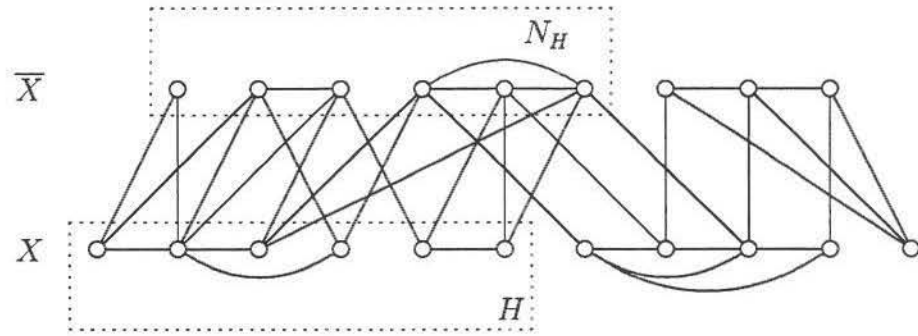


Figura 2.1: O conjunto de componentes H e seu conjunto de vizinhos N_H

Note que, quando $G = (V, E)$ é um grafo bipartido com bipartição (V^+, V^-) , todos os componentes de $K(G[V^+])$ e $K(G[V^-])$ são vértices isolados e, nesse caso, a definição de componentes vizinhos equivale à definição tradicional de vértices vizinhos.

Dada uma aresta $e = (u, v) \in E$, definimos a operação de *contração* de e como a remoção de e de E , seguida da substituição de u e v em V pelo vértice uv cujas arestas incidentes são aquelas de u e v exceto e . Dado um subgrafo H de G , a contração de H equivale à contração de todas as arestas de H .

Para finalizar, damos algumas poucas definições relativas a grafos orientados. Um caminho $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ de v_0 a v_n em um grafo orientado G é *orientado* se, para todo $1 \leq i \leq n$, a aresta e_i é orientada com origem em v_{i-1} e destino em v_i . Analogamente, um circuito $C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ em um grafo orientado G é *orientado* se, para todo $1 \leq i \leq n$, a aresta e_i é orientada com origem em v_{i-1} e destino em v_i .

Uma *ramificação* é uma árvore orientada T , com um vértice v denominado *raiz*, tal que para todo vértice u de T distinto de v existe exatamente uma aresta de δu orientada com destino em u ; no caso da raiz v , nenhuma aresta de δv é orientada com destino em v .

2.2 Teorema de Hall

O Teorema de Hall, aqui referenciado por Teorema 2.1, tem especial importância no desenvolvimento dos resultados do Capítulo 4. Ele estabelece uma condição necessária e suficiente para que em um grafo bipartido $G = (V, E)$ com bipartição (V^+, V^-) exista um emparelhamento que cubra os vértices de V^+ . Uma demonstração para este teorema

pode ser encontrada no Capítulo 5 de [4].

Teorema 2.1 (Hall) *Um grafo bipartido $G = (V, E)$ com bipartição (V^+, V^-) possui um emparelhamento que cobre V^+ se, e somente se, $|X| \leq |N_X|$ para todo $X \subseteq V^+$.*

Um emparelhamento que cobre V^+ e V^- é, naturalmente, perfeito:

Corolário 2.2 *Um grafo bipartido $G = (V, E)$ com bipartição (V^+, V^-) possui um emparelhamento perfeito se, e somente se, $|X| \leq |N_X|$ para todo $X \subseteq V^+$ e todo $X \subseteq V^-$.*

No Lema 2.3 a seguir usamos o Corolário 2.2 para demonstrar que todo grafo bipartido d -regular possui d emparelhamentos perfeitos disjuntos.

Lema 2.3 *Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido d -regular com bipartição (V^+, V^-) . Então, G possui d emparelhamentos perfeitos disjuntos.*

Prova: Por indução em d . Para $d = 0$, temos $|E| = 0$ e nenhum emparelhamento perfeito. Quando $d > 0$, para qualquer $X \subseteq V^+$, temos que

$$\begin{aligned} |\delta X| &= d|X|, \text{ e} \\ |\delta N_X| &= d|N_X|. \end{aligned}$$

Pela definição de N_X , temos que

$$|\delta X| \leq |\delta N_X|;$$

portanto,

$$|X| \leq |N_X|.$$

O mesmo argumento vale para os subconjuntos $X \subseteq V^-$; logo, pelo Corolário 2.2, G possui um emparelhamento perfeito M . Construa $G' = (V, E \setminus M)$; o grafo G' é $(d - 1)$ -regular. Pela hipótese de indução, G' possui $d - 1$ emparelhamentos perfeitos M_1, M_2, \dots, M_{d-1} . Como M_1, M_2, \dots, M_{d-1} também são emparelhamentos perfeitos de G e são disjuntos de M , então, G tem d emparelhamentos perfeitos disjuntos. \square

2.3 Imersões em Superfícies e a Fórmula de Euler

2.3.1 Grafos em superfícies

Abordaremos aqui, informalmente, os conceitos necessários para o entendimento da Fórmula de Euler, descrita na Seção 2.3.2. Uma introdução ao assunto pode ser encontrada no livro de D. West [29].

É um fato bem conhecido que toda superfície conexa tridimensional e sem borda é *homeomorfa* (isto é, equivalente topologicamente) a uma esfera com h alças, onde h é um inteiro não-negativo. Para $h = 0$ temos a esfera, quando $h = 1$ temos o toro, para $h = 2$ temos o toro duplo e assim por diante. Exemplos familiares de superfícies com alças são câmaras de pneu, rosquinhas e xícaras com uma ou mais alças.

Um grafo pode ser *imerso*, ou desenhado, numa dessas superfícies: vértices são representados por pontos e arestas são representadas por curvas simples ligando seus extremos, de forma que duas arestas se intersectam apenas em seus extremos comuns. Dada uma superfície, nem todo grafo pode ser imerso nela, mas todo grafo pode ser imerso em alguma superfície com um número suficiente de alças. Basta para isso desenhar o grafo de forma arbitrária no plano e substituir cada cruzamento de duas arestas por uma alça, de forma que uma das arestas passe pela alça e a outra não. Questões importantes a respeito de imersões incluem a de se encontrar uma superfície com o menor número de alças na qual um dado grafo possa ser imerso. Uma imersão de um grafo numa superfície é chamado de um *mapa* naquela superfície.

Grafos *planares* são aqueles que podem ser imersos na esfera. O famoso Teorema de Kuratowski (veja [21]) determina que um grafo é planar se, e somente se, não contiver um subgrafo que seja uma subdivisão de $K_{3,3}$ ou de K_5 . Um mapa de um grafo planar no plano é chamado por alguns autores de *grafo plano*.

Um mapa M de um grafo G numa superfície S define áreas em S chamadas de *faces*, que correspondem aos pedaços contínuos de $S \setminus M$, isto é, o que resta da superfície se removermos dela as curvas e pontos que correspondem a arestas e vértices. A Figura 2.2(a) mostra o grafo $K_{3,3}$ imerso no toro. O mapa resultante tem 3 faces, F_0 , F_1 e F_2 . A Figura 2.2(b) mostra o mesmo mapa numa outra representação do toro, em que cortamos a superfície ao longo de duas curvas, uma longitudinal, A , e outra, B , perpendicular a A .

Existe uma outra classe de superfícies sem borda, que não podem ser materializadas em três dimensões, chamadas de *não-orientáveis* ou *não-orientadas*, em contraposição às superfícies *orientáveis* ou *orientadas*, estas caracterizadas pela esfera com alças. A classe das superfícies não-orientadas é caracterizada pela esfera, na superfície da qual se adicionam c *crosscaps*, que equivalem a regiões circulares na qual pontos diametralmente opostos estão identificados. Uma curva entrando nessa região “reaparece” no ponto diametralmente oposto, e assim podemos imaginar várias curvas atravessando um crosscap

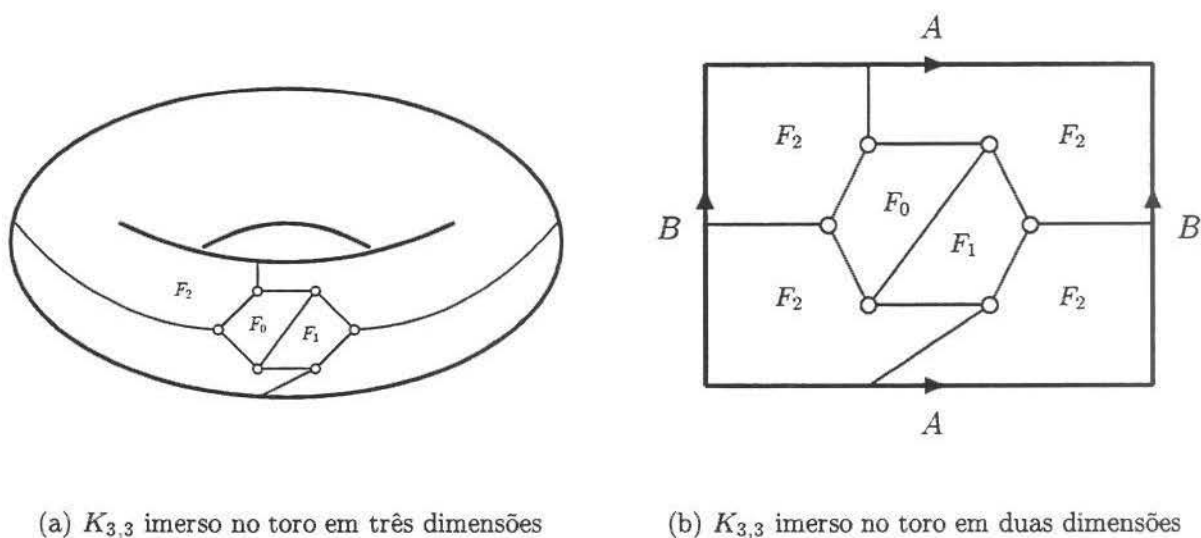


Figura 2.2: O grafo $K_{3,3}$ imerso no toro visto em três e duas dimensões

sem que se cruzem. Um grafo qualquer pode ser imerso numa superfície não-orientada com um número suficiente de crosscaps, cada um destes substituindo o cruzamento de duas arestas num desenho arbitrário do grafo no plano. A esfera com um crosscap é chamada de *plano projetivo* e aquela com dois crosscaps de *garrafa de Klein*. O conceito de faces aqui é similar àquele em superfícies orientadas. A Figura 2.3 mostra o $K_{3,3}$ imerso numa superfície equivalente à esfera com um crosscap, representado pela linha tracejada. Os números ao redor do crosscap identificam as arestas.

O *genus* de uma superfície (orientável ou não-orientável) é o maior número de curvas fechadas não-separadoras disjuntas que podem ser traçadas na superfície. Uma curva fechada C é *separadora* se divide a superfície em duas regiões disjuntas exceto por C , que é parte das duas regiões. Assim, qualquer curva ligando dois pontos interiores a cada uma das regiões deve, necessariamente, intersectar C . Uma curva fechada é *não-separadora* se não é separadora. Com essa definição concluímos que a esfera sem alças ou crosscaps tem genus 0. Pode-se demonstrar também que o toro tem genus 1, o plano projetivo e a garrafa de Klein tem genus 1 e 2, respectivamente. É possível imaginar também uma superfície contendo alças e crosscaps. A definição de genus estende-se naturalmente para tais superfícies. A existência de pelo menos um crosscap torna a superfície não-orientável. Assim, falamos em superfícies com *genus orientável* e *genus não-orientável*. Um grafo G tem genus g se g é o menor genus de uma superfície onde G é imersível.

Uma imersão numa superfície S é chamada de *celular* se cada face é homeomorfa a um

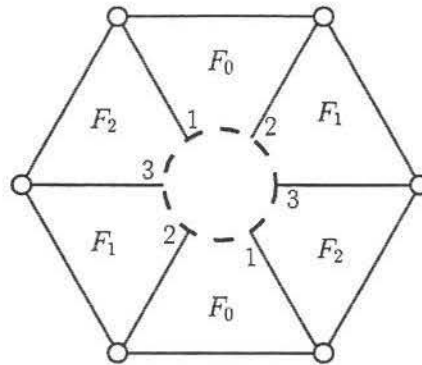


Figura 2.3: O grafo $K_{3,3}$ imerso no plano projetivo

disco planar fechado (com borda). As Figuras 2.2 e 2.3 mostram imersões celulares do $K_{3,3}$. A imersão do K_4 no toro mostrada na Figura 2.4 não é celular, já que ao contrairmos o K_4 a um ponto, percebemos que a face externa F_0 é equivalente ao toro.

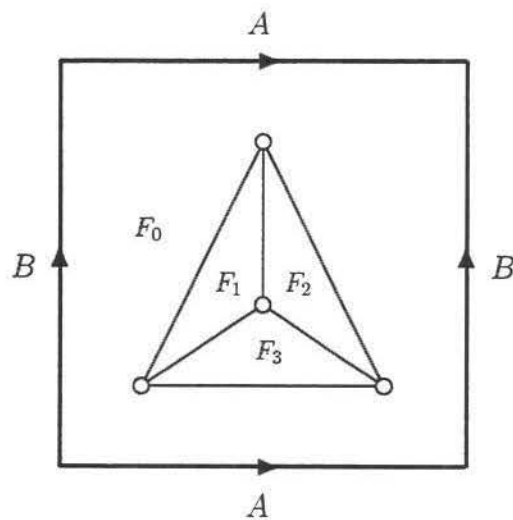


Figura 2.4: Imersão não celular do K_4 no toro

2.3.2 Fórmula de Euler

Seja S uma superfície equivalente à esfera com h alças e c crosscaps. A *Característica de Euler* $\chi(S)$, de S é:

$$\chi(S) := 2 - 2h - c.$$

Note que a característica de Euler é ímpar somente para superfícies não-orientadas. Além disso, se S tem genus g , então $\chi(S) = 2(1 - g)$ se S é orientada e $\chi(S) = 2 - g$ se S é não-orientada.

Dado um grafo $G = (V, E)$ conexo, e uma imersão celular M de G numa superfície S contendo $|F|$ faces, a *Fórmula de Euler* estabelece que

$$|V| - |E| + |F| := \chi(S).$$

Para o plano, obtemos a conhecida relação $|V| - |E| + |F| = 2$.

2.4 Outros Resultados

A seguir apresentaremos uma série de propriedades referentes a grafos não orientados que serão utilizadas posteriormente.

Proposição 2.4 *Seja $G = (V, E)$ um grafo regular e (V^+, V^-) uma equipartição de V . Então, vale a relação*

$$|E(G[V^+])| = |E(G[V^-])|.$$

Prova: Seja d o inteiro tal que G é d -regular. Por simples contagem temos que

$$\begin{aligned} d|V^+| &= 2|E(G[V^+])| + |\delta V^+|, \text{ e} \\ d|V^-| &= 2|E(G[V^-])| + |\delta V^-|. \end{aligned}$$

Por hipótese, (V^+, V^-) é uma equipartição de V ; portanto, $|V^+| = |V^-|$. Além disso, como $V^+ = \overline{V^-}$, temos que $|\delta V^+| = |\delta V^-|$. Logo, $|E(G[V^+])| = |E(G[V^-])|$. \square

Proposição 2.5 *Seja $G = (V, E)$ um grafo e $X, Y \subseteq V$. Então, vale a relação*

$$|\delta(X \cap Y)| + |\delta(\overline{X} \cap \overline{Y})| + 2|\delta(X \cap \overline{Y}, \overline{X} \cap Y)| = |\delta X| + |\delta Y|.$$

Prova: A demonstração é por simples contagem. Conforme ilustrado pela Figura 2.5, as arestas de $\delta(X \cap \bar{Y}, \bar{X} \cap Y)$ e de $\delta(X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y})$ são contadas duas vezes na soma $|\delta X| + |\delta Y|$, enquanto as demais arestas de δX e de δY são contadas apenas uma vez. Na soma $|\delta(X \cap Y)| + |\delta(\bar{X} \cap \bar{Y})|$ não contamos as arestas de $\delta(X \cap \bar{Y}, \bar{X} \cap Y)$, contamos duas vezes as arestas de $\delta(X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y})$ e apenas uma vez as demais arestas de δX e de δY . Daí o resultado. \square

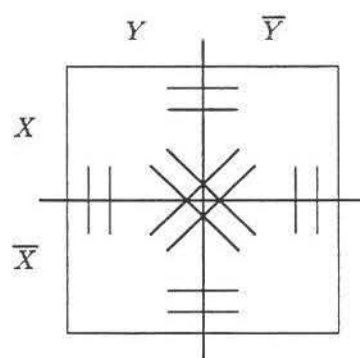


Figura 2.5: Cruzamento dos cortes δX e δY

Corolário 2.6 *Seja $G = (V, E)$ um grafo e $X, Y \subseteq V$. Se $|\delta X| \equiv |\delta Y| \pmod{2}$, então*

$$|\delta(X \cap Y)| \equiv |\delta(\bar{X} \cap \bar{Y})| \pmod{2}.$$

Prova: Pela Proposição 2.5 temos que

$$|\delta(X \cap Y)| + |\delta(\bar{X} \cap \bar{Y})| \equiv |\delta X| + |\delta Y| \pmod{2}.$$

Como $|\delta X| \equiv |\delta Y| \pmod{2}$, então

$$|\delta X| + |\delta Y| \equiv 0 \pmod{2};$$

logo,

$$|\delta(X \cap Y)| + |\delta(\bar{X} \cap \bar{Y})| \equiv 0 \pmod{2}.$$

Daí o resultado. \square

Proposição 2.7 *Seja $G = (V, E)$ um grafo, $X \subseteq V$ e $Y \subseteq X$. Se $|\delta X| \equiv 1 \pmod{2}$, então*

$$|\delta(X \cap Y)| \not\equiv |\delta(X \cap \bar{Y})| \pmod{2}.$$

Prova: Por contagem temos que

$$|\delta X| = |\delta(X \cap Y)| + |\delta(X \cap \bar{Y})| - 2|\delta(X \cap Y, X \cap \bar{Y})|;$$

como $|\delta X| \equiv 1 \pmod{2}$, então

$$|\delta(X \cap Y)| + |\delta(X \cap \bar{Y})| \equiv 1 \pmod{2}.$$

Daí o resultado. □

Capítulo 3

Fluxos Inteiros

Neste capítulo abordaremos parte da Teoria de Fluxos Inteiros. Na Seção 3.1 apresentamos os conceitos de k -fluxos e k -fluxos modulares e alguns resultados clássicos envolvendo esses conceitos. Na Seção 3.2 apresentamos um resumo do estado da arte com relação à Conjetura dos 3-fluxos de Tutte. Na Seção 3.3 mostramos algumas reduções que restringem o espaço de grafos a serem considerados nas demonstrações das Conjeturas de Tutte e demonstramos que decidir se um grafo 5-regular admite um 3-fluxo é um problema NP-completo. Na Seção 3.4 mostramos que, para certas superfícies de genus baixo, qualquer contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-fluxos possui cintura 3. As referências [8, 25, 30, 31] cobrem o tópico de fluxos inteiros de forma abrangente.

3.1 Fundamentos

Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$, definimos uma *orientação k -ponderada parcial* de G , para $k \geq 1$, como um par (D, φ) , onde D é uma função que define orientações para as arestas de E e φ é uma função, denominada função *peso*, que associa a cada aresta e de E um inteiro $\varphi(e)$ tal que $0 \leq \varphi(e) \leq k - 1$.

Dada uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) de G , definimos o *suporte* de (D, φ) , denotado por $S(D, \varphi)$, como o conjunto das arestas $e \in E$ tais que $\varphi(e) \neq 0$. Quando $S(D, \varphi) = E$, dizemos que (D, φ) é uma *orientação k -ponderada total*, ou simplesmente uma *orientação k -ponderada*.

Dadas uma orientação k' -ponderada parcial (D', φ') de um grafo G e uma outra orientação k'' -ponderada parcial (D'', φ'') de G , definimos a *soma* de (D', φ') e (D'', φ'') , denotada por $(D', \varphi') + (D'', \varphi'')$, como um par de funções (D, φ) , tais que, para toda aresta $e \in E$, D define uma orientação e φ atribui um peso $\varphi(e)$ para e , da seguinte forma:

- se as orientações de e em D' e D'' coincidem, então D orienta e no mesmo sentido que D' e D'' e $\varphi(e) := \varphi'(e) + \varphi''(e)$;
- se as orientações de e em D' e D'' são opostas e $\varphi'(e) > \varphi''(e)$, então D orienta e no mesmo sentido que D' e $\varphi(e) := \varphi'(e) - \varphi''(e)$;
- se as orientações de e em D' e D'' são opostas e $\varphi''(e) > \varphi'(e)$, então D orienta e no mesmo sentido que D'' e $\varphi(e) := \varphi''(e) - \varphi'(e)$;
- se as orientações de e em D' e D'' são opostas e $\varphi'(e) = \varphi''(e)$, então D orienta e em um sentido arbitrário e $\varphi(e) := 0$.

Proposição 3.1 *A soma de uma orientação k' -ponderada parcial (D', φ') de um grafo $G = (V, E)$ com outra orientação k'' -ponderada parcial (D'', φ'') de G é uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) de G onde $k = k' + k'' - 1$.*

Prova: Basta observar que, para toda aresta $e \in E$, temos que $0 \leq \varphi'(e) \leq k' - 1$ e $0 \leq \varphi''(e) \leq k'' - 1$; portanto, $0 \leq \varphi(e) \leq k' + k'' - 2$. \square

Dadas uma orientação k' -ponderada parcial (D', φ') de um grafo $G = (V, E)$ e uma constante inteira l , definimos a *multiplicação* de (D', φ') por l , denotada por $l \cdot (D', \varphi')$, como um par de funções (D, φ) , onde D define orientações e φ atribui pesos para as arestas de E de forma que, para toda aresta $e \in E$, o sentido de orientação definido por D é o mesmo definido por D' e $\varphi(e) := l\varphi'(e)$.

Proposição 3.2 *A multiplicação de uma orientação k' -ponderada parcial (D', φ') de um grafo $G = (V, E)$ por uma constante inteira l é uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) de G onde $k = l(k' - 1) + 1$.*

Prova: Basta observar que, para toda aresta $e \in E$, temos que $0 \leq \varphi'(e) \leq k' - 1$ e, portanto, $0 \leq \varphi(e) \leq l(k' - 1)$. \square

Dada uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) de um grafo G e $X \subseteq V$, definimos δ^+X como o conjunto das arestas de E com origem em X e destino em \overline{X} segundo a orientação D . Analogamente, δ^-X é o conjunto das arestas de E com origem em \overline{X} e destino em X segundo a orientação D . O *fluxo líquido* em X , denotado por φ_X , é definido como

$$\varphi_X := \sum_{e \in \delta^+X} \varphi(e) - \sum_{e \in \delta^-X} \varphi(e);$$

em particular, quando $X = \{v\}$, temos

$$\varphi_v := \sum_{e \in \delta^+ v} \varphi(e) - \sum_{e \in \delta^- v} \varphi(e).$$

A Proposição 3.3 mostra que o fluxo líquido em X também pode ser expresso como a soma dos fluxos líquidos dos vértices contidos em X .

Proposição 3.3 *Seja (D, φ) uma orientação k -ponderada parcial de G e $X \subseteq V$. Então,*

$$\varphi_X = \sum_{v \in X} \varphi_v.$$

Prova: Por definição, o fluxo líquido em X é dado por

$$\varphi_X = \sum_{e \in \delta^+ X} \varphi(e) - \sum_{e \in \delta^- X} \varphi(e).$$

No entanto,

$$\sum_{e \in \delta^+ X} \varphi(e) = \sum_{\substack{e \in \delta^+ v \\ v \in X}} \varphi(e) - \sum_{e \in G[X]} \varphi(e);$$

analogamente,

$$\sum_{e \in \delta^- X} \varphi(e) = \sum_{\substack{e \in \delta^- v \\ v \in X}} \varphi(e) - \sum_{e \in G[X]} \varphi(e).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_X &= \sum_{\substack{e \in \delta^+ v \\ v \in X}} \varphi(e) - \sum_{\substack{e \in \delta^- v \\ v \in X}} \varphi(e) \\ &= \sum_{v \in X} \varphi_v. \end{aligned}$$

□

A Proposição 3.4 mostra que existe uma simetria entre o fluxo líquido em X e em seu complemento \overline{X} , ou seja, $\varphi_X = -\varphi_{\overline{X}}$.

Proposição 3.4 *Seja (D, φ) uma orientação k -ponderada parcial de G e $X \subseteq V$. Então,*

$$\varphi_{\overline{X}} = -\varphi_X.$$

Prova: O fluxo líquido em V é nulo. Então, temos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \varphi_V \\
 &= \sum_{v \in V} \varphi_v && \text{(pela Proposição 3.3)} \\
 &= \sum_{v \in X} \varphi_v + \sum_{v \in \bar{X}} \varphi_v \\
 &= \varphi_X + \varphi_{\bar{X}} && \text{(pela Proposição 3.3)}.
 \end{aligned}$$

Daí o resultado. □

Dado $X \subseteq V$, dizemos que X está *balanceado* quando o fluxo líquido em X é nulo. De forma análoga, quando o fluxo líquido em X é nulo módulo k , dizemos que X está *balanceado módulo k* . A um vértice com fluxo líquido positivo damos o nome de *fonte*, enquanto um vértice com fluxo líquido negativo é denominado *sorvedouro*. A carga de uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) é definida como a soma dos fluxos líquidos de todos os vértices fonte.

Dadas uma orientação k -ponderada (D, φ) de G e uma aresta $e \in E$, definimos a operação de *k -reversão* da aresta e como a inversão de sua orientação e a mudança de seu peso de $\varphi(e)$ para $k - \varphi(e)$. A Proposição 3.5 mostra que o novo par de funções de orientação e peso gerados após a k -reversão de qualquer aresta $e \in E$ continua definindo uma orientação k -ponderada.

Proposição 3.5 *Seja (D, φ) uma orientação k -ponderada de G e $e = (u, v)$ uma aresta de E orientada de u para v segundo D . Então, o par (D', φ') obtido após a k -reversão de e é uma orientação k -ponderada de G onde*

$$\begin{aligned}
 \varphi'_u &= \varphi_u - k, \text{ e} \\
 \varphi'_v &= \varphi_v + k.
 \end{aligned}$$

Prova: Como $k - 1 \geq k - \varphi(e) \geq 1$, o par (D', φ') gerado pela k -reversão de e também é uma orientação k -ponderada de G . Por hipótese, e é orientada com origem em u . Então, após a k -reversão de e , o fluxo líquido em u será

$$\begin{aligned}
 \varphi'_u &= \varphi_u - \varphi(e) - (k - \varphi(e)) \\
 &= \varphi_u - k;
 \end{aligned}$$

em v , que era o vértice destino de e , o fluxo líquido será

$$\begin{aligned}\varphi'_v &= \varphi_u + \varphi(e) + (k - \varphi(e)) \\ &= \varphi_u + k.\end{aligned}$$

O fluxo líquido em todos os outros vértices de V permanece inalterado. \square

Seja G' um subgrafo de G e sejam (D, φ) e (D', φ') orientações k -ponderadas de G e G' , respectivamente. Quando ambas (D, φ) e (D', φ') definem o mesmo sentido de orientação e o mesmo peso para as arestas de $E(G')$, dizemos que (D, φ) é uma *extensão* de (D', φ') .

3.1.1 k -fluxos e k -fluxos Modulares

Um *k -fluxo inteiro parcial*, ou simplesmente um *k -fluxo parcial*, de um grafo $G = (V, E)$ é uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) tal que todo vértice $v \in V$ está balanceado segundo (D, φ) . Definimos analogamente um *k -fluxo total*, ou simplesmente um *k -fluxo*, de G como uma orientação k -ponderada (D, φ) segundo a qual todo vértice de G está balanceado.

Similarmente, dizemos que uma orientação k -ponderada parcial (D, φ) é um *k -fluxo modular parcial* de G quando todo vértice de V está balanceado módulo k segundo (D, φ) . Analogamente, um *k -fluxo modular total*, ou simplesmente um *k -fluxo modular*, de G é uma orientação k -ponderada (D, φ) segundo a qual todo vértice de G está balanceado módulo k .

Os Corolários 3.6 e 3.7 seguem das Proposições 3.1 e 3.2 e das definições de k -fluxo parcial e k -fluxo modular parcial.

Corolário 3.6 *A soma de um k' -fluxo parcial (D', φ') de um grafo $G = (V, E)$ com outro k'' -fluxo parcial (D'', φ'') de G é um k -fluxo parcial (D, φ) de G onde $k = k' + k'' - 1$.*

Corolário 3.7 *A multiplicação de um k' -fluxo parcial (D', φ') de um grafo $G = (V, E)$ por uma constante inteira l é um k -fluxo parcial (D, φ) de G onde $k = l(k' - 1) + 1$.*

Os Corolários 3.8 e 3.9 seguem da Proposição 3.3 e das definições de k -fluxo parcial e k -fluxo modular parcial.

Corolário 3.8 *Seja (D, φ) um k -fluxo parcial de G e $X \subseteq V$; então $\varphi_X = 0$.*

Corolário 3.9 *Seja (D, φ) um k -fluxo modular parcial de G e $X \subseteq V$; então $\varphi_X \equiv 0 \pmod{k}$.*

Demonstraremos a seguir que, para um grafo G admitir um k -fluxo, para $k \geq 1$, é necessário e suficiente que G não possua aresta de corte.

Proposição 3.10 *Um grafo $G = (V, E)$ admite k -fluxo, para $k \geq 1$, se, e somente se, não possui aresta de corte.*

Prova: (Necessidade) Suponha que o grafo G tenha aresta de corte e e que admita um k -fluxo (D, φ) . Pelo Corolário 3.8, o 1-corte $\delta X = \{e\}$ de G deve ter fluxo líquido $\varphi_X = 0$. Portanto, a aresta e deveria ter peso $\varphi(e)$ nulo, o que contradiz o fato de que (D, φ) é um k -fluxo. Logo, G não admite um k -fluxo.

(Suficiência) Suponha que G não tenha arestas de corte. Se $E = \emptyset$, então G admite um 1-fluxo. Caso contrário, seja $e = (u, v)$ uma aresta qualquer de G . Como G não possui aresta de corte, existe um caminho simples de u a v em G que não passa pela aresta e ; portanto existe um circuito C_e de G que contém a aresta e . Logo, existe um conjunto finito de n circuitos C_0, C_1, \dots, C_{n-1} , $n \geq 1$, que cobre as arestas de G ; isto é, para cada aresta $e \in E$, existe $0 \leq i \leq n-1$ tal que $e \in E(C_i)$. Sejam (D_i, φ_i) , para $0 \leq i \leq n-1$, 2-fluxos parciais de G tais que $S(D_i, \varphi_i) = E(C_i)$. Tomando $(D, \varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot (D_i, \varphi_i)$, temos, pelos Corolários 3.6 e 3.7, que (D, φ) é um 2^n -fluxo parcial de G . Além disso, $\varphi(e) > 0$ para toda aresta $e \in E$, pois $2^i > \sum_{j=0}^{i-1} 2^j$, para $i \geq 0$. Logo, (D, φ) é um 2^n -fluxo de G , o que prova o resultado. \square

O Corolário 3.11 segue diretamente da Proposição 3.5. Uma consequência interessante desse corolário é que se um grafo $G = (V, E)$ admite um k -fluxo modular, então G admite um k -fluxo modular para qualquer que seja a orientação atribuída às arestas de E , conforme demonstrado no Corolário 3.12.

Corolário 3.11 *Seja (D, φ) um k -fluxo modular de G . Então, a orientação k -ponderada (D', φ') obtida pela k -reversão de qualquer aresta $e \in E$ também é um k -fluxo modular de G .*

Corolário 3.12 *Seja $G = (V, E)$ um grafo que admite um k -fluxo modular (D, φ) . Então, para qualquer orientação D' de E , existe um k -fluxo modular de G cuja função de orientação das arestas é D' .*

Prova: Seja $E_{dif} \subseteq E$ o conjunto das arestas cuja orientação definida por D difere daquela definida por D' . Pelo Corolário 3.11, podemos k -reverter todas as arestas de E_{dif} e continuaremos tendo um k -fluxo modular; tal k -fluxo modular possui D' como função de orientação. \square

A definição de k -fluxo modular é menos restritiva que a definição de k -fluxo, já que exige apenas que o fluxo líquido em cada vértice seja um múltiplo qualquer de k . É

natural pensarmos que essa maior flexibilidade torne o problema de determinar se um dado grafo admite um k -fluxo modular mais simples que determinar se tal grafo admite um k -fluxo. No entanto, conforme demonstrado no Teorema 3.13, existe uma equivalência entre os dois problemas.

Teorema 3.13 *Um grafo G admite um k -fluxo se, e somente se, admite um k -fluxo modular.*

Prova: Todo k -fluxo é um k -fluxo modular, portanto basta mostrarmos como transformar um k -fluxo modular (D, φ) de G num k -fluxo. A demonstração é por indução na carga de (D, φ) . Quando a carga de (D, φ) é nula, não existem vértices fonte e, como $\varphi_V = 0$, temos pela Proposição 3.3 que também não existem vértices sorvedouro; logo, (D, φ) é um k -fluxo.

Quando a carga de (D, φ) é positiva, existe pelo menos um vértice fonte s . Seja $S \subseteq V$ o conjunto dos vértices alcançáveis a partir de s por caminhos orientados segundo D ; por construção, $\delta^+ S = \emptyset$ e, portanto, $\varphi_S \leq 0$. Logo, pela Proposição 3.3, S contém pelo menos um vértice sorvedouro t . Seja (D', φ') o k -fluxo modular obtido após a k -reversão das arestas do caminho orientado de s a t . Pela Proposição 3.5, $\varphi'_s = \varphi_s - k$, $\varphi'_t = \varphi_t + k$, e os fluxos líquidos nos vértices internos ao caminho de s a t permanecem inalterados; logo, a carga de (D', φ') é k unidades menor que a carga de (D, φ) . Por hipótese de indução, sabemos transformar o k -fluxo modular (D', φ') num k -fluxo de G ; isso prova o resultado. \square

Note que a transformação de um k -fluxo modular num k -fluxo pode ser feita em tempo polinomial. Um caminho orientado simples de uma fonte s a um sorvedouro t pode ser encontrado por um percurso em tempo $O(|V| + |E|)$ (veja o Capítulo 23 de [5]) e, como esse caminho possui comprimento $O(|V|)$ no pior caso, sua k -reversão também pode ser feita em tempo polinomial. A carga de G é limitada superiormente pela soma dos pesos de cada aresta que sai de cada fonte, isto é, $k|E|$ no pior caso. Portanto, como a cada passo da indução a carga diminui de k , o número de vezes que o passo da indução será executado é $O(E)$.

Existem algumas situações em que é preferível trabalhar com k -fluxos modulares. Por exemplo, para verificar a admissibilidade de um 3-fluxo em um grafo G , é suficiente verificar a existência de uma *mod 3-orientação*, um 3-fluxo modular onde toda aresta possui peso unitário. Isso se deve ao fato de que, dado um 3-fluxo modular qualquer (D, φ) , pelo Corolário 3.11, sempre é possível obter uma *mod 3-orientação* D' 3-revertendo as arestas e com peso $\varphi(e) = 2$. Em uma *mod 3-orientação*, como definimos apenas a orientação para as arestas do grafo, existem menos variáveis a serem consideradas que em um 3-fluxo modular e assim, acaba sendo mais fácil trabalhar com *mod 3-orientações*.

Por isso, as demonstrações das duas caracterizações para grafos 5-regulares que admitem 3-fluxo apresentadas no Capítulo 4 são dadas em termos de mod 3-orientações.

3.2 Conjetura dos 3-fluxos de Tutte

Conforme vimos no Capítulo 1, Tutte propôs a Conjetura dos 3-fluxos, que afirma que todo grafo sem arestas de corte e sem 3-cortes admite um 3-fluxo. Também mencionamos no Capítulo 1 que, no caso dos mapas planares, há uma equivalência entre a existência de k -fluxos e de k -colorações de faces. Portanto, o Teorema de Grötzsch (Teorema 1.4) constitui uma demonstração da Conjetura dos 3-fluxos para o caso planar.

Grünbaum [12], em 1963, e Aksionov [1], em 1974, exibiram uma extensão do Teorema de Grötzsch, o Teorema 3.14, que garante a 3-coloração de vértices para os grafos planares com até três 3-cortes. Novamente, pela equivalência entre k -fluxos e k -colorações de faces para mapas planares, o Teorema 3.14 também demonstra que todo grafo planar com até três 3-cortes admite um 3-fluxo.

Teorema 3.14 (Grünbaum-Aksionov) *Todo mapa planar sem aresta de corte e com no máximo três 3-cortes admite uma 3-coloração de suas faces.*

Vários anos depois, Steinberg e Younger [26] demonstraram novamente o Teorema de Grünbaum e Aksionov em termos de fluxos, e ainda estenderam o resultado para grafos imersíveis no plano projetivo com até um 3-corte. O Teorema de Steinberg e Younger é enunciado a seguir.

Teorema 3.15 (Steinberg-Younger) *Todo grafo planar sem aresta de corte e com no máximo três 3-cortes e todo grafo imersível no plano projetivo com no máximo um 3-corte admite um 3-fluxo.*

Dahab e Younger [7] estenderam esse resultado para grafos imersíveis no plano projetivo com até três 3-cortes.

Teorema 3.16 (Dahab-Younger) *Todo grafo planar imersível na esfera ou no plano projetivo, sem aresta de corte e com no máximo três 3-cortes, admite um 3-fluxo.*

Até o presente momento, o Teorema de Dahab e Younger é o melhor resultado conhecido com relação à Conjetura dos 3-fluxos de Tutte.

3.3 Reduções

Nesta seção mostraremos algumas reduções aplicáveis à Conjetura dos 3-fluxos de Tutte, as quais garantem que é suficiente demonstrar a conjectura para a subclasse dos grafos simples, 4-aresta-conexos e 5-regulares. Concluímos a seção com uma demonstração da NP-completude do problema de decidir se um grafo 5-regular admite um 3-fluxo.

3.3.1 Redução a Grafos Simples

A redução de um grafo G com um laço e é bastante simples: removemos e , gerando um grafo menor G' ; se G' admite um k -fluxo (D', φ') , estendemos (D', φ') para um k -fluxo (D, φ) de G atribuindo orientação arbitrária e peso $\varphi(e) = 1$ para e . O Lema 3.17 a seguir mostra como é feita a redução de arestas múltiplas para valores de $k \geq 3$.

Lema 3.17 *Seja G um grafo com arestas múltiplas e_i, e_j e G' o grafo obtido após a contração de ambas e_i e e_j . Então, para $k \geq 3$, G admite um k -fluxo se, e somente se, G' admite um k -fluxo.*

Prova: Sejam u e v os extremos de e_i, e_j e w o vértice de G' resultante da contração dessas arestas. Pelo Corolário 3.8, o corte $\delta_G\{u, v\}$ está balanceado; portanto $\delta_{G'}w$ também está balanceado. Isto prova a necessidade.

Seja (D', φ') um k -fluxo, $k \geq 3$, de G' . Para obtermos um k -fluxo de G devemos, primeiramente, transferir as orientações e pesos definidos por (D', φ') para as arestas de G , conforme ilustrado pela Figura 3.1(a). Dessa forma, apenas a e_i e a e_j não foram atribuídos um peso e uma orientação; portanto, somente os vértices u e v podem não estar balanceados. De qualquer forma, como w está balanceado segundo (D', φ') , temos que $\varphi'_u = -\varphi'_v$.

Seja $r := \varphi'_u \pmod k$. Se tomarmos um inteiro ϵ , $1 \leq \epsilon \leq k - 1$, tal que $r + \epsilon \not\equiv 0 \pmod k$, sabemos como obter um k -fluxo modular (D, φ) em G : e_i é orientada com destino em u e recebe peso $(r + \epsilon) \pmod k$ enquanto e_j é orientada com origem em u e recebe peso ϵ , conforme ilustrado pela Figura 3.1(b). Para $k \geq 3$, sempre é possível encontrar um tal ϵ . Pelo Teorema 3.13, sabemos como transformar esse k -fluxo modular (D, φ) num k -fluxo de G ; isto prova o resultado. \square

Observe que nem a remoção de laços nem a contração de arestas múltiplas geram cortes novos. Portanto, em ambos os casos, o grafo reduzido G' ainda satisfaz a hipótese da Conjetura dos 3-fluxos de Tutte.

Note ainda que a redução a grafo simples pode ser feita em tempo polinomial, pois tanto a redução de laços como a redução de arestas múltiplas diminuem o número de

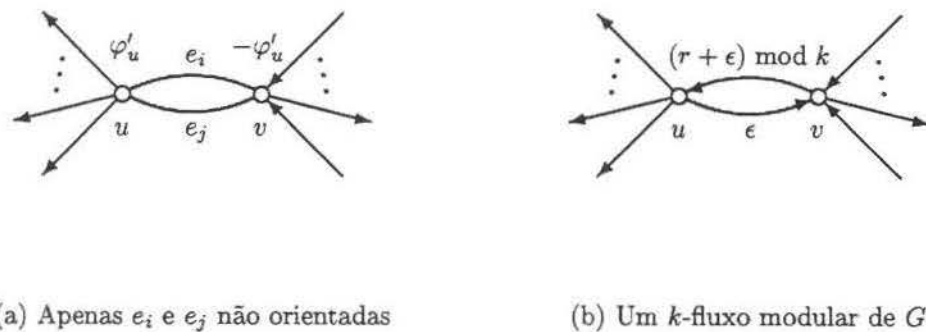


Figura 3.1: Redução de arestas múltiplas

arestas do grafo; logo serão efetuadas no máximo $O(|E|)$ vezes. Além disso, conforme vimos na Seção 3.1.1, a transformação de um k -fluxo modular num k -fluxo também pode ser feita em tempo polinomial.

3.3.2 Redução a Grafos 4-aresta-conexos

O Lema 3.18 mostra que é possível reduzir qualquer uma das Conjeturas de Tutte a grafos 3-aresta-conexos. No caso particular da Conjetura dos 3-fluxos, isso significa que é suficiente demonstrá-la para os grafos 4-aresta-conexos.

Lema 3.18 *Seja G um grafo e $\delta X = \{e_i, e_j\}$ um 2-corte de G . Seja G' o grafo obtido a partir de G pela contração da aresta e_j . Então, G admite um k -fluxo se, e somente se, G' admite um k -fluxo.*

Prova: Sejam u e v os vértices de V que são extremos da aresta e_j , e seja w o vértice de G' resultante da contração de e_j . Pelo Corolário 3.8, o corte $\delta_G\{u, v\}$ está balanceado; portanto $\delta_{G'}w$ também está balanceado. Isto prova a necessidade.

Seja (D', φ') um k -fluxo de G' . Um k -fluxo (D, φ) para as arestas de G é obtido da seguinte forma. Primeiramente, transferimos as orientações e os pesos associados às arestas de G' para as arestas de G . Assim, todos os vértices distintos de u e v estão balanceados pois apenas à aresta e_j não foi atribuído um peso e uma orientação. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \in X$. Orientando a aresta e_j no sentido contrário

de e_i em relação ao corte δX e atribuindo-a o peso $\varphi(e_j) = \varphi'(e_i)$, fazemos com que o corte δX fique balanceado. Pela Proposição 3.3, como δX está balanceado e todos os vértices de X exceto u estão balanceados, então u também está balanceado. Analogamente, v também está balanceado e, portanto, (D, φ) é um k -fluxo de G . Isto prova o resultado. \square

Novamente, a operação que reduz o tamanho do grafo contendo 2-corte é a contração de uma aresta, garantindo que o grafo reduzido também satisfaz a hipótese da Conjetura dos 3-fluxos de Tutte.

A redução de 2-cortes também pode ser feita em tempo polinomial. Conseguimos verificar a existência de um 2-corte no grafo em tempo polinomial utilizando algoritmos de fluxo máximo (veja o Capítulo 27 de [5]) e, como a cada redução o número de arestas do grafo diminui, essa verificação é efetuada no máximo $O(|E|)$ vezes.

3.3.3 Redução a Grafos 5-regulares

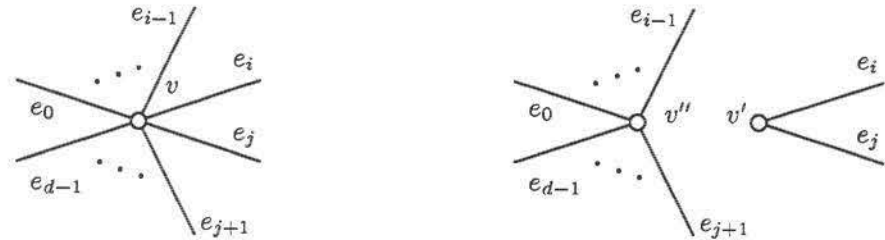
Nesta seção demonstraremos como é possível reduzir a Conjetura dos 3-fluxos à subclasse dos grafos 5-regulares. A operação de 2-divisão descrita a seguir é fundamental para essa redução.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e v um vértice de V com grau $d \geq 4$, onde $\delta v = \{e_0, e_1, \dots, e_{d-1}\}$ é o conjunto das arestas incidentes a v . A operação de 2-divisão de v em G é a substituição de v por dois outros vértices v' e v'' , sendo v' de grau 2, com $\delta v' = \{e_i, e_j\} \subseteq \delta v$, e v'' de grau $d - 2$, com $\delta v'' = \delta v \setminus \delta v'$, conforme ilustrado pela Figura 3.2. Quando, na operação de 2-divisão de v , queremos especificar que as arestas em $\delta v'$ são $\{e_i, e_j\}$, falamos da 2-divisão de v por $\{e_i, e_j\}$.

A operação de 2-divisão em si aumenta o tamanho do grafo, pois cria um vértice novo. Porém, o vértice de grau 2 v' gerado após a 2-divisão de v pode ser reduzido segundo o Lema 3.18 e, com a operação de 2-divisão seguida da redução do vértice de grau 2, conseguimos reduzir o tamanho do grafo em uma aresta. É fácil ver que se o grafo assim reduzido admite um 3-fluxo, o grafo original também admite; basta unirmos novamente os dois vértices gerados após a 2-divisão que teremos um 3-fluxo no grafo original.

No entanto, ainda é preciso garantir que o grafo reduzido satisfaz a hipótese da Conjetura dos 3-fluxos de Tutte, pois a operação de 2-divisão gera cortes novos. Pelo Lema 3.19 demonstrado a seguir, se a 2-divisão de v por algum par de arestas $\{e_i, e_j\} \subseteq \delta v$ cria um 1-corte, então G possui um 3-corte.

Lema 3.19 *Seja G um grafo p -aresta-conexo, e $v \in V$ tal que a 2-divisão de v por um par de arestas $\{e_i, e_j\}$ gera um l -corte δX , com $l < p$. Então, $\delta X \cup \{e_i, e_j\}$ é um $(l + 2)$ -corte de G .*

(a) Vértice v antes da 2-divisão(b) Após a 2-divisão de v por $\{e_i, e_j\}$ Figura 3.2: A operação de 2-divisão de um vértice v

Prova: Sejam v' e v'' os novos vértices gerados pela 2-divisão de v , onde v' é o vértice de grau 2. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $v'' \in X$. Assim, necessariamente, $v' \in \overline{X}$ pois, caso contrário, δX seria um l -corte de G .

Considere o subconjunto X' de V , onde $X' = X \setminus \{v''\} \cup \{v\}$. Se $e_i \in \delta X$ e $e_j \notin \delta X$, temos que $\delta X' = \delta X \setminus \{e_i\} \cup \{e_j\}$, ou seja, $\delta X'$ é um l -corte de G ; uma contradição. Analogamente, não podemos ter $e_j \in \delta X$ e $e_i \notin \delta X$. Caso ambas $e_i, e_j \in \delta X$, temos que $\delta X' = \delta X \setminus \{e_i, e_j\}$, ou seja, $\delta X'$ é um $(l - 2)$ -corte de G ; novamente uma contradição. Portanto, certamente $\{e_i, e_j\} \notin \delta X$. Mas então, $\delta X' = \delta X \cup \{e_i, e_j\}$, e $\delta X'$ é um $(l + 2)$ -corte em G . \square

Nos casos em que G é 4-aresta-conexo, basta demonstrarmos que é possível efetuar a 2-divisão de um vértice v de G sem criar 3-cortes. Novamente, pelo Lema 3.19, um 3-corte $\delta Z'$ só será gerado pela 2-divisão de v se existir em G um 5-corte δZ contendo as arestas de $\delta Z'$ e as duas arestas incidentes ao vértice v' de grau 2. O Lema 3.20 demonstrado a seguir garante que é sempre possível escolher um par de arestas $\{e_i, e_j\} \subseteq \delta v$ tais que a 2-divisão de v por $\{e_i, e_j\}$ não gera 3-cortes. A demonstração do Lema 3.20 segue, em linhas gerais, aquela de L. A. Silva em [8].

Lema 3.20 *Seja G um grafo 4-aresta-conexo, com um vértice $v \in V$ de grau $d(v) = 4$ ou $d(v) \geq 6$. Então, existem arestas $\{e_i, e_j\} \subseteq \delta v$ tais que, para todo 5-corte δZ de G , temos $|\delta Z \cap \{e_i, e_j\}| \leq 1$.*

Prova: Seja \mathcal{A} a coleção dos subconjuntos de δv , cada um dos quais está contido em algum 5-corte de G . Seja A um elemento maximal de \mathcal{A} e δX_A um 5-corte que contém A . Podemos supor, sem perda de generalidade, que $v \in X_A$.

Claramente, se $A = \emptyset$, então qualquer par de arestas de δv satisfaz a tese. Caso contrário, as demonstrações das seguintes proposições concluem a prova:

- (i) $A \subsetneq \delta v$; isto é, A é um subconjunto próprio de δv .
- (ii) Qualquer par de arestas e_i, e_j de δv tal que $e_i \in \delta v \setminus A$ e $e_j \in A$ satisfaz a tese.

Demonstraremos primeiramente a proposição (i). Como $v \in X_A$, temos

$$\delta(X_A \setminus v) = (\delta X_A \setminus A) \uplus (\delta v \setminus A),$$

onde \uplus denota união disjunta. Portanto,

$$|\delta(X_A \setminus v)| = |\delta X_A| - |A| + |\delta v \setminus A|.$$

Mas $|\delta(X_A \setminus v)| \geq 4$ por hipótese e $|\delta X_A| = 5$ por construção. Então,

$$|\delta v \setminus A| - |A| \geq -1.$$

Por outro lado,

$$|\delta v \setminus A| + |A| = |\delta v| \geq 4.$$

Combinando as duas desigualdades obtemos

$$2|\delta v \setminus A| \geq 3,$$

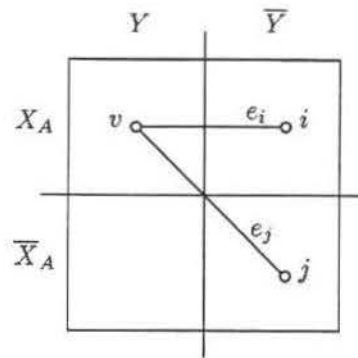
o que implica que $\delta v \setminus A$ é não vazio, ou seja, $A \subsetneq \delta v$.

Agora já podemos demonstrar a proposição (ii). Sejam então e_i, e_j arestas de δv tais que $e_i \in \delta v \setminus A$ e $e_j \in A$. Considere um corte qualquer δY de G contendo ambas as arestas e_i, e_j . Suponha que $v \in Y$ e sejam i, j os extremos de e_i, e_j distintos de v . Então, conforme ilustrado pela Figura 3.3, temos que $v \in X_A \cap Y$ por construção; $i \in X_A \cap \bar{Y}$ pois $e_i \in \delta Y \setminus \delta X_A$; $j \in \bar{X}_A \cap \bar{Y}$ pois $e_j \in \delta Y \cap \delta X_A$.

Se $\bar{X}_A \cap Y = \emptyset$, então $\delta(X_A \cap Y) \subseteq \delta Y$ e, pela maximalidade de A , $|\delta Y| \neq 5$ e chegamos ao fim da demonstração. Caso contrário, temos, pela Proposição 2.5,

$$|\delta Y| = |\delta(X_A \cap \bar{Y})| + |\delta(\bar{X}_A \cap Y)| + 2|\delta(X_A \cap Y, \bar{X}_A \cap \bar{Y})| - |\delta X_A|.$$

Como $|\delta X_A| = 5$, $|\delta(X_A \cap \bar{Y})| \geq 4$, $|\delta(\bar{X}_A \cap Y)| \geq 4$ e $|\delta(X_A \cap Y, \bar{X}_A \cap \bar{Y})| \geq 1$, então $|\delta Y| \geq 5$, sendo que a igualdade só é atingida quando ambos $|\delta(X_A \cap \bar{Y})|$ e $|\delta(\bar{X}_A \cap Y)|$

Figura 3.3: Os cortes δX_A e δY

são iguais a 4 e $|\delta(X_A \cap Y, \bar{X}_A \cap \bar{Y})| = 1$. Nesse caso, como $|\delta X_A| = 5 \equiv 1 \pmod{2}$, pela Proposição 2.7, temos que $|\delta(X_A \cap Y)| \equiv 1 \pmod{2}$. Pela maximalidade de A , $|\delta(X_A \cap Y)| \neq 5$ e, portanto, $|\delta(X_A \cap Y)| \geq 7$. Pela Proposição 2.5, temos

$$\begin{aligned} |\delta Y| &= |\delta(X_A \cap Y)| + |\delta(\bar{X}_A \cap \bar{Y})| + 2|\delta(X_A \cap \bar{Y}, \bar{X}_A \cap Y)| - |\delta X_A| \\ &\geq |\delta(X_A \cap Y)| + |\delta(\bar{X}_A \cap \bar{Y})| - |\delta X_A| \\ &\geq 7 + 4 - 5 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Portanto, $|\delta Y| \geq 6$ sempre, o que conclui a demonstração. \square

Ao aplicarmos sucessivamente a operação de 2-divisão, seguida da redução dos 2-cortes, a todos os vértices com grau diferente de 5, obteremos um grafo 4-aresta-conexo e 5-regular, conforme desejado. Observe, mais uma vez, que esse processo de redução também pode ser feito em tempo polinomial. A Figura 3.4 mostra o pseudo-código de um algoritmo polinomial para a redução de um grafo 4-aresta-conexo a um grafo 5-regular 4-aresta-conexo.

O laço (1) é executado no máximo $O(|E|)$ vezes pois cada 2-divisão é seguida da redução de pelo menos um 2-corte e, portanto, diminui em pelo menos um o número de arestas do grafo. É possível verificar se algum 5-corte contém $\{e_i, e_j\}$ em tempo polinomial usando algoritmos de fluxo máximo. Essa verificação é efetuada uma vez no passo (1.2) e no máximo três vezes no laço (1.2.4), pois $|A| \leq 5$. As atribuições de A , e_i e e_j podem ser feitas em tempo linear no grau de v . A 2-divisão tem complexidade $O(|V| + |E|)$, pois requer apenas um percurso. Finalmente, conforme mencionamos na Seção 3.3.2, a redução dos 2-cortes também pode ser realizada em tempo polinomial.

Redução a grafo 5-regular

Entrada: Grafo 4-aresta-conexo $G = (V, E)$.

Saída: G reduzido a um grafo 5-regular 4-aresta-conexo.

- (1) enquanto existe $v \in G$ tal que $d(v) \neq 5$
 - (1.1) escolha $\{e_i, e_j\} \subseteq \delta v$ quaisquer
 - (1.2) se existe um 5-corte que contenha $\{e_i, e_j\}$, faça
 - /* o conjunto maximal A é não vazio */
 - (1.2.1) $A := \{e_i, e_j\}$;
 - (1.2.2) $e_i :=$ aresta arbitrária de $\delta v \setminus A$;
 - (1.2.3) $e_j :=$ aresta arbitrária de A .
 - /* torna A maximal */
 - (1.2.4) enquanto existir um 5-corte que contenha $\{e_i, e_j\}$, faça
 - (1.2.4.1) $A := A \cup \{e_i\}$;
 - (1.2.4.2) $e_i :=$ aresta arbitrária de $\delta v \setminus A$;
 - (1.2.4.3) $e_j :=$ aresta arbitrária de A .
 - (1.3) $G := G$ após 2-divisão de v por $\{e_i, e_j\}$;
 - (1.4) $G := G$ após redução dos 2-cortes gerados.

Figura 3.4: Algoritmo para redução a grafo 5-regular

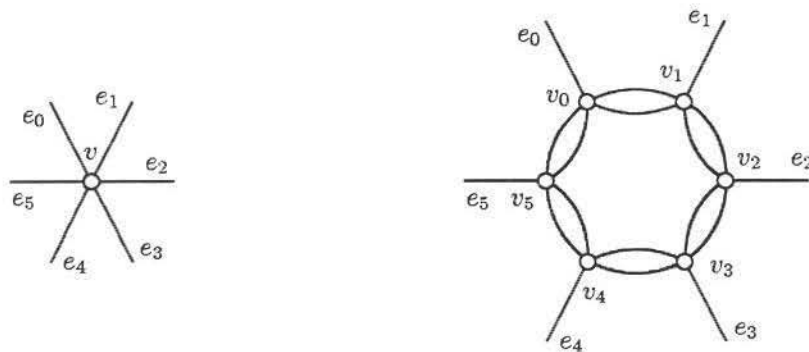
3.3.4 NP-completude para grafos 5-regulares

Garey, Johnson e Stockmeyer demonstraram em 1976 que decidir se um grafo planar sem vértices de grau maior que 4 admite uma 3-coloração de seus vértices é um problema NP-completo (veja GT4 de [10]). Assim, decidir se um grafo planar qualquer admite uma 3-coloração de seus vértices também é um problema NP-completo.

Conforme mencionamos no Capítulo 1, existe uma equivalência entre k -fluxos e k -coloração de vértices para grafos planares e, portanto, o problema Π de determinar se um grafo qualquer admite um 3-fluxo é NP-completo. Mostraremos nesta seção que é possível reduzir polinomialmente o problema Π ao problema mais restrito Π' de determinar se um grafo 5-regular admite um 3-fluxo, isto é, Π' também é NP-completo.

Nesse momento, é natural pensarmos em utilizar a redução a grafos 5-regulares apresentada anteriormente; porém, tal redução refere-se a grafos 4-aresta-conexos e não pode ser estendida para grafos em geral, pois a operação de 2-divisão não se aplica a vértices de grau 3: qualquer subdivisão de um tal vértice cria um vértice de grau 1. No entanto, é possível transformar um grafo 3-aresta-conexo qualquer num grafo 5-regular através da operação de expansão descrita a seguir.

Um *colar* de comprimento n é um grafo com conjunto de vértices $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas duplas $\{(v_i, v_{i \pm 1 \pmod n}), 0 \leq i \leq n-1\}$. Em outras palavras, um colar é um circuito de arestas duplas. Seja G um grafo com um vértice v de grau $d \geq 3$, onde $\delta v = \{e_0, e_1, \dots, e_{d-1}\}$. Definimos a *expansão* de v como a substituição de v por um colar de comprimento d com vértices v_0, v_1, \dots, v_{d-1} , de forma que cada aresta e_i de δv seja incidente ao vértice v_i do colar, conforme ilustrado pela Figura 3.5.

(a) Vértice v antes da expansão

(b) Colar de 6 vértices após a expansão

Figura 3.5: A operação de expansão de um vértice v

Agora já podemos descrever a redução de Π a Π' . Seja G uma instância para o problema Π . Se existir em G um vértice com grau menor que três, então ou este possui grau um e G não admite 3-fluxo, ou é possível reduzir G em tempo polinomial a um grafo G' tal que todo vértice possui grau pelo menos três, e que admite um 3-fluxo se e somente se G admite um 3-fluxo: a redução dos vértices de grau nulo consiste apenas na remoção de tais vértices enquanto a redução dos vértices de grau dois é feita segundo o Lema 3.18. O grafo G' , por sua vez, pode ser reduzido em tempo polinomial a um grafo 5-regular G'' , efetuando-se a operação de expansão para todo vértice de G' com grau diferente de cinco. O grafo G'' assim construído é uma instância para o problema Π' e, pelo Lema 3.17, G' admite um 3-fluxo se, e somente se, G'' admite. Portanto, o problema Π' também é NP-completo.

3.4 Contra-exemplo Mínimo em Superfícies de Genus Baixo

As operações de remoção de laços e contração de arestas não aumentam o genus do grafo; portanto, a redução de um grafo G a um grafo simples e 4-aresta-conexo pode ser realizada sem que a superfície de imersão de G seja alterada. Já a operação de 2-divisão de um vértice v por $\{e_i, e_j\} \subseteq \delta v$ pode aumentar o genus do grafo se as arestas e_i e e_j não forem consecutivas em δv de acordo com a imersão de G . Porém, a 2-divisão do Lema 3.20 sempre pode ser feita por arestas consecutivas: basta notar que quando $A = \emptyset$, podemos fazer a 2-divisão de v por qualquer par de arestas consecutivas em δv e que quando $A \neq \emptyset$, como $A \subsetneq \delta v$, sempre haverá um par de arestas e_i, e_j consecutivas em δv , tal que $e_i \in \delta v \setminus A$ e $e_j \in A$.

Portanto, a redução a grafo 5-regular também pode ser realizada sem que a superfície de imersão de G seja alterada. Isso significa que todo contra-exemplo mínimo para a Conjetura dos 3-fluxos imersível numa dada superfície S é simples, 4-aresta-conexo e 5-regular. Por ser simples, todo contra-exemplo imersível numa superfície S qualquer possui cintura $c \geq 3$. Para certas superfícies de genus baixo, o Lema 3.21 demonstra que qualquer contra-exemplo mínimo imersível em alguma dessas superfícies possui cintura $c \leq 3$; logo, $c = 3$. A demonstração do Lema 3.21 foi inspirada pela demonstração de L. A. Silva [8] da validade da Conjetura dos 5-fluxos para os grafos imersíveis em superfícies orientadas com genus menor ou igual a 1 ou não orientadas com genus menor ou igual a 2.

Lema 3.21 *Dada uma superfície*

(i) *orientada de genus 0 ou 1, ou*

(ii) *não orientada de genus 1 ou 2,*

todo grafo 5-regular imersível nessa superfície possui cintura $c \leq 3$.

Prova: Pelo Lema 3.22 demonstrado a seguir, todo grafo G 5-regular com cintura $c \geq 4$ e imersível numa superfície S de genus g possui $|V|$ limitado a

$$|V| \leq \frac{4c(g-1)}{3c-10}, \text{ se } S \text{ é orientada, ou}$$

$$|V| \leq \frac{2c(g-2)}{3c-10}, \text{ se } S \text{ é não orientada.}$$

Logo, não existem grafos 5-regulares e com cintura $c \geq 4$ imersíveis nas superfícies em questão e qualquer grafo 5-regular imersível em alguma dessas superfícies necessariamente possui cintura $c \leq 3$. \square

Lema 3.22 *Seja G um grafo 5-regular com cintura c , e imersível numa superfície S de genus g . Então, vale que:*

$$(10-3c)|V| \geq 4c(1-g), \text{ se } S \text{ é orientada;}$$

$$(10-3c)|V| \geq 2c(2-g), \text{ se } S \text{ é não-orientada.}$$

Prova: Seja f_i o número de faces com i arestas na imersão de G em S . Como G possui cintura c temos que

$$2|E| = \sum_{i=c}^{\infty} i f_i \geq c|F|. \quad (3.1)$$

Como G é 5-regular, temos que

$$2|E| = 5|V|. \quad (3.2)$$

A fórmula de Euler para superfícies orientadas é

$$|V| + |F| - |E| = 2(1-g). \quad (3.3)$$

Multiplicando a equação (3.3) por $2c$ e substituindo (3.1) e (3.2) temos que:

$$\begin{aligned} 4c(1-g) &= 2c|V| + 2c|F| - 2c|E| \\ &\leq 2c|V| + 4|E| - 2c|E| \\ &= 2c|V| + 2(2-c)|E| \\ &= 2c|V| + 5(2-c)|V| \\ &= (10-3c)|V|. \end{aligned}$$

No caso das superfícies não-orientadas, a fórmula de Euler é

$$|V| + |F| - |E| = 2 - g. \quad (3.4)$$

De forma análoga, multiplicando (3.4) por $2c$ e substituindo (3.1) e (3.2) concluímos que:

$$2c(2 - g) \leq (10 - 3c)|V|.$$

□

Capítulo 4

Grafos 5-regulares e mod 3-orientações

Neste capítulo são apresentadas duas caracterizações para a existência de mod 3-orientações em grafos 5-regulares. Pela equivalência entre k -fluxos e k -fluxos modulares demonstrada no Teorema 3.13, essas são caracterizações para os grafos 5-regulares que admitem 3-fluxo. Uma versão resumida e em inglês dos resultados apresentados neste capítulo foi publicada em [6].

4.1 Equipartições mod 3-orientáveis

Seja $G = (V, E)$ um grafo 5-regular. Uma equipartição (V^+, V^-) de seus vértices, é *mod 3-orientável* se existe alguma mod 3-orientação D das arestas de G tal que todo vértice de V^+ é uma fonte e todo vértice de V^- é um sorvedouro segundo D . Na Figura 4.1 mostramos um exemplo de equipartição mod 3-orientável de um grafo 5-regular com a mod 3-orientação associada.

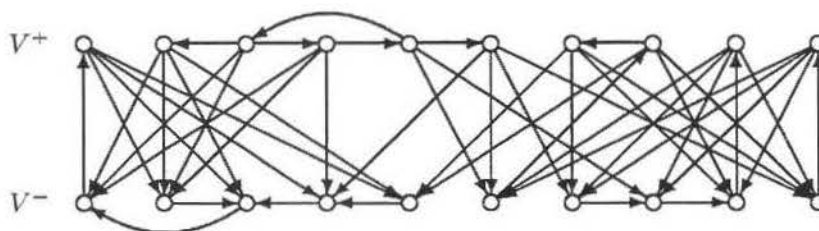


Figura 4.1: Uma equipartição mod 3-orientável de um grafo 5-regular

Para qualquer mod 3-orientação D de G , o fluxo líquido em qualquer vértice $v \in V$ deve ser $+3$ ou -3 , ou seja, D deve orientar, para todo vértice $v \in V$, quatro das arestas de δv num mesmo sentido e apenas uma no sentido contrário. Se denominarmos V^+ e V^- , respectivamente, os subconjuntos das fontes e dos sorvedouros de V segundo D , teremos que $|V^+| = |V^-|$ pois, pelo Corolário 3.8, o fluxo líquido em G é nulo; portanto (V^+, V^-) é uma equipartição mod 3-orientável.

Concluimos assim, que um grafo G 5-regular admite um 3-fluxo se, e somente se, possui uma equipartição mod 3-orientável. No caso particular em que G é bipartido, a própria bipartição de seus vértices é mod 3-orientável, como mostra o Teorema 4.1 abaixo.

Teorema 4.1 *Seja $G = (V, E)$ um grafo 5-regular bipartido com bipartição (V^+, V^-) . Então, (V^+, V^-) é uma equipartição mod 3-orientável.*

Prova: (V^+, V^-) é uma equipartição dos vértices de G , pois, como G é 5-regular, temos

$$5|V^+| = |\delta V^+| = |\delta V^-| = 5|V^-|.$$

O Lema 2.3 garante que G possui 5 emparelhamentos perfeitos disjuntos; então, tome um emparelhamento perfeito M qualquer de G . Orientando as arestas de M com origem em V^- e destino em V^+ e todas as demais com origem em V^+ e destino em V^- , obtemos uma mod 3-orientação segundo a qual os vértices de V^+ são fontes e os de V^- são sorvedouros. Isso mostra que (V^+, V^-) é mod 3-orientável. \square

A Figura 4.2 ilustra essa demonstração. A Figura 4.2(a) mostra em destaque as arestas de um emparelhamento perfeito do grafo 5-regular bipartido e a Figura 4.2(b) mostra a mod 3-orientação obtida. Note que as arestas do emparelhamento formam o conjunto das arestas minoritárias dos vértices de G com relação à mod 3-orientação.

A conexão entre emparelhamentos perfeitos e 3-fluxos para grafos 5-regulares quaisquer é explorada na Seção 4.3, onde duas caracterizações de equipartições mod 3-orientáveis são descritas. A Seção 4.2 a seguir desenvolve a teoria necessária para as demonstrações da Seção 4.3.

4.2 Equipartições mod 3-promissoras

Seja G um grafo 5-regular e (V^+, V^-) uma equipartição de seus vértices. Dizemos que (V^+, V^-) é *mod 3-promissora* se todo componente conexo de $K(G[V^+])$ e de $K(G[V^-])$ é uma árvore ou uma coroa, ou seja, $|E(S)| \leq |V(S)|$, $\forall S \in K(G[V^+]) \cup K(G[V^-])$. A equipartição mod 3-orientável da Figura 4.1 é um exemplo de equipartição mod 3-promissora. Isso não é uma coincidência: nos dois lemas a seguir demonstraremos que toda equipartição mod 3-orientável é necessariamente mod 3-promissora.

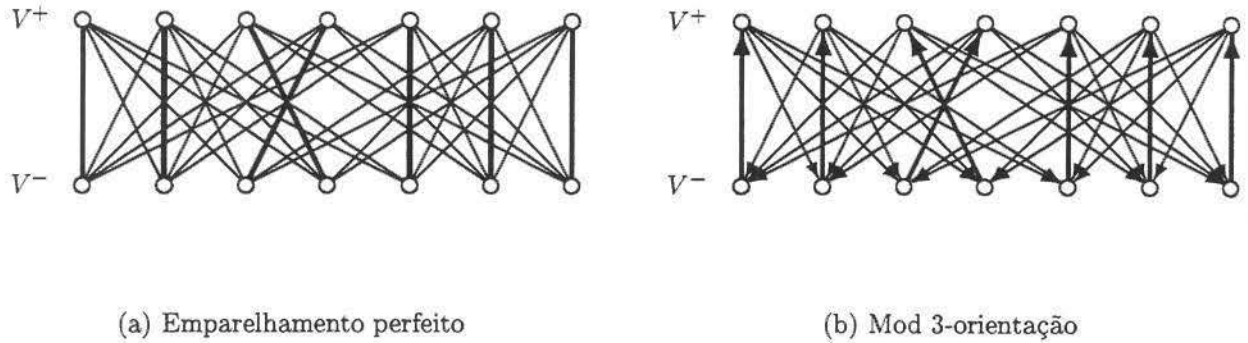


Figura 4.2: Uma mod 3-orientação de um grafo bipartido e 5-regular

Lema 4.2 *Seja $G = (V, E)$ um grafo 5-regular e (V^+, V^-) uma equipartição mod 3-orientável de V . Então, para todo $Z \subseteq V$, com $Z^+ = Z \cap V^+$ e $Z^- = Z \cap V^-$, vale a relação*

$$|\delta Z| \geq 3||Z^+| - |Z^-||. \quad (4.1)$$

Prova: Seja D uma mod 3-orientação de G tal que V^+ e V^- são, respectivamente, os conjuntos de fontes e sorvedouros de G segundo D . O fluxo líquido de cada vértice fonte é $+3$ e de cada sorvedouro é -3 . Portanto, pela Proposição 3.3, o fluxo líquido φ_Z é

$$\begin{aligned} 3(|Z^+| - |Z^-|) &= \varphi_Z \\ &= \sum_{e \in \delta^+ Z} \varphi(e) - \sum_{e \in \delta^- Z} \varphi(e) \\ &= |\delta^+ Z| - |\delta^- Z|, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato que $\varphi(e) = 1, \forall e \in E$. Tomando os valores absolutos dos termos das igualdades acima, temos que

$$\begin{aligned} 3||Z^+| - |Z^-|| &= ||\delta^+ Z| - |\delta^- Z|| \\ &\leq |\delta Z|, \end{aligned}$$

o que estabelece o resultado. □

Em particular, essa relação vale para todo $Z \subseteq V^+$ e todo $Z \subseteq V^-$. Logo, pelo Lema 4.3 a seguir, toda equipartição mod 3-orientável é mod 3-promissora.

Lema 4.3 *Seja $G = (V, E)$ um grafo 5-regular e (V^+, V^-) uma equipartição de V . Então, (V^+, V^-) é mod 3-promissora se, e somente se, para todo $X \subseteq V^+$ e todo $X \subseteq V^-$ vale a relação*

$$|\delta X| \geq 3|X|.$$

Prova: (Necessidade) Seja $X \subseteq V^+$. Por hipótese, $G[V^+]$ tem como componentes conexos apenas árvores ou coroas. Em particular, os componentes conexos de $G[X]$ são árvores ou coroas. Portanto $|E(G[X])| \leq |X|$, com igualdade somente quando todos os componentes de $K(G[X])$ são coroas. Como G é 5-regular temos que:

$$\begin{aligned} |\delta X| &= 5|X| - 2|E(G[X])| \\ &\geq 5|X| - 2|X| \\ &= 3|X|. \end{aligned}$$

O mesmo argumento vale para $X \subseteq V^-$.

(Suficiência) Seja $G_i \in K(G[V^+])$. Por hipótese $|\delta V(G_i)| \geq 3|V(G_i)|$. Pela 5-regularidade de G temos que

$$\begin{aligned} 2|E(G_i)| &= 5|V(G_i)| - |\delta V(G_i)| \\ &\leq 5|V(G_i)| - 3|V(G_i)| \\ &= 2|V(G_i)|. \end{aligned}$$

Isto é, $|E(G_i)| \leq |V(G_i)|$.

Mas, como G_i é conexo, $|E(G_i)| \geq |V(G_i)| - 1$. Portanto, ou G_i é uma árvore e $|E(G_i)| = |V(G_i)| - 1$, ou G_i é uma coroa e $|E(G_i)| = |V(G_i)|$. O argumento para $G_i \in K(G[V^-])$ é idêntico. \square

Embora toda equipartição mod 3-orientável seja necessariamente mod 3-promissora, a recíproca não é verdadeira. A Figura 4.3 apresenta um exemplo de grafo 5-regular com uma equipartição mod 3-promissora que não é mod 3-orientável. O conjunto $Z = \{1, 7, 8, 9, 10, 11\}$ é um certificado de que (V^+, V^-) é mod 3-orientável, pois $|\delta Z| = 10$ e $||Z^+| - |Z^-|| = 4$ e, portanto, Z não satisfaz a relação (4.1).

As equipartições mod 3-promissoras possuem algumas propriedades interessantes, ressaltadas na Proposição 4.4 e no Lema 4.5.

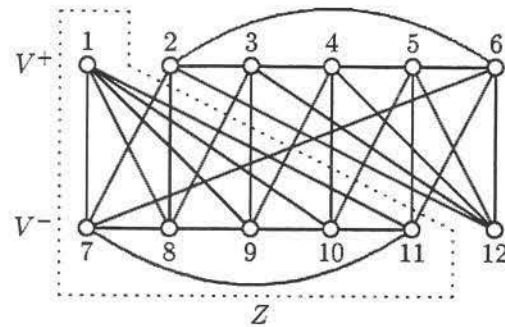


Figura 4.3: Uma equipartição mod 3-promissora que não é mod 3-orientável

Proposição 4.4 *Seja $G = (V, E)$ um grafo 5-regular e $X \subseteq V$. Então,*

$$|\delta X| = \begin{cases} 3|X| & \text{se } G[X] \text{ é uma coroa} \\ 3|X| + 2 & \text{se } G[X] \text{ é uma árvore.} \end{cases}$$

Prova: Pela 5-regularidade de G temos

$$\begin{aligned} |\delta X| &= 5|X| - 2|E(G[X])| \\ &= \begin{cases} 5|X| - 2|X| = 3|X| & \text{quando } G[X] \text{ é uma coroa} \\ 5|X| - 2(|X| - 1) = 3|X| + 2 & \text{quando } G[X] \text{ é uma árvore.} \end{cases} \end{aligned}$$

Isso prova a proposição. □

Lema 4.5 *Seja G um grafo 5-regular e (V^+, V^-) uma equipartição mod 3-promissora de V . Então, o número de árvores em $K(G[V^+])$ e $K(G[V^-])$ é o mesmo. Isto é,*

$$t(G[V^+]) = t(G[V^-]).$$

Prova: Primeiramente,

$$|E(G[V^+])| = \sum_{G_i \in K(G[V^+])} |E(G_i)|.$$

Por hipótese, qualquer $G_i \in K(G[V^+])$ é árvore ou coroa. Além disso,

$$\sum_{\substack{G_i \in K(G[V^+]) \\ G_i \text{ coroa}}} |E(G_i)| = \sum_{\substack{G_i \in K(G[V^+]) \\ G_i \text{ coroa}}} |V(G_i)|, \text{ e}$$

$$\sum_{\substack{G_i \in K(G[V^+]) \\ G_i \text{ árvore}}} |E(G_i)| = \sum_{\substack{G_i \in K(G[V^+]) \\ G_i \text{ árvore}}} |V(G_i)| - t(G[V^+]).$$

Portanto,

$$|E(G[V^+])| = |V^+| - t(G[V^+]).$$

Da mesma forma,

$$|E(G[V^-])| = |V^-| - t(G[V^-]).$$

Por hipótese, $|V^+| = |V^-|$. Como G é 5-regular, a Proposição 2.4 nos garante que $|E(G[V^+])| = |E(G[V^-])|$, e portanto concluímos que $t(G[V^+]) = t(G[V^-])$. \square

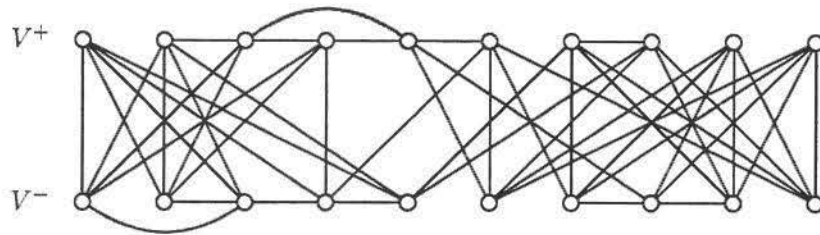
Dada uma equipartição mod 3-promissora (V^+, V^-) de um grafo 5-regular G , definimos a operação de *encolhimento de G com relação a (V^+, V^-)* como a remoção das coroas de $K(G[V^+])$ e $K(G[V^-])$, seguida pela contração das árvores de $K(G[V^+])$ e $K(G[V^-])$ a vértices; removemos ainda as eventuais arestas múltiplas geradas por essas contrações. A Figura 4.4 mostra os passos do encolhimento de um grafo 5-regular com relação a uma dada equipartição mod 3-promissora.

Como na operação de encolhimento todas as arestas de $G[V^+]$ e $G[V^-]$ são removidas ou contraídas, o grafo H resultante é bipartido. Denotaremos por $V^+(H)$ e $V^-(H)$ os conjuntos de vértices de H , sendo estes, respectivamente, os conjuntos de vértices resultantes da contração das árvores de $K(G[V^+])$ e $K(G[V^-])$. Pelo Lema 4.5, temos que $|V^+(H)| = |V^-(H)|$ e, portanto, H é equipartido.

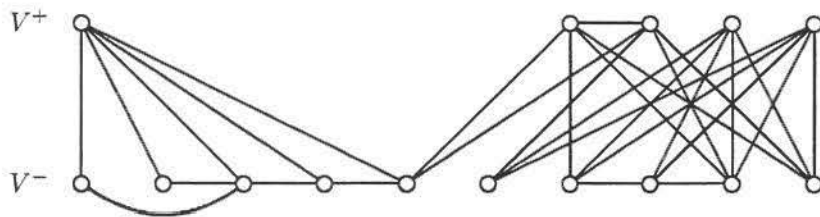
A operação de encolhimento tem por finalidade associar, a qualquer equipartição mod 3-promissora (V^+, V^-) , um grafo equipartido H , de forma que a relação de vizinhança entre os vértices do grafo encolhido H represente fielmente a relação de vizinhança existente entre as árvores de $K(G[V^+])$ e $K(G[V^-])$. Através dessa associação conseguimos provar as duas caracterizações de equipartições mod 3-orientáveis enunciadas nos Teoremas 4.6 e 4.8.

4.3 Caracterizações

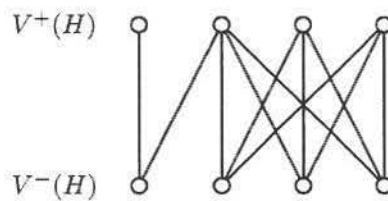
Nesta seção detalhamos como é possível relacionar o problema do emparelhamento perfeito em grafos bipartidos à existência de mod 3-orientações em grafos 5-regulares.



(a) Uma equipartição mod 3-promissora de um grafo 5-regular G



(b) G após remoção das coroas



(c) O grafo H resultante do encolhimento de G

Figura 4.4: Os passos da operação de encolhimento

Teorema 4.6 *Seja $G = (V, E)$ um grafo 5-regular e (V^+, V^-) uma equipartição de V . Então (V^+, V^-) é mod 3-orientável se, e somente se, é mod 3-promissora e o grafo H obtido pelo encolhimento de G com relação a (V^+, V^-) tem um emparelhamento perfeito.*

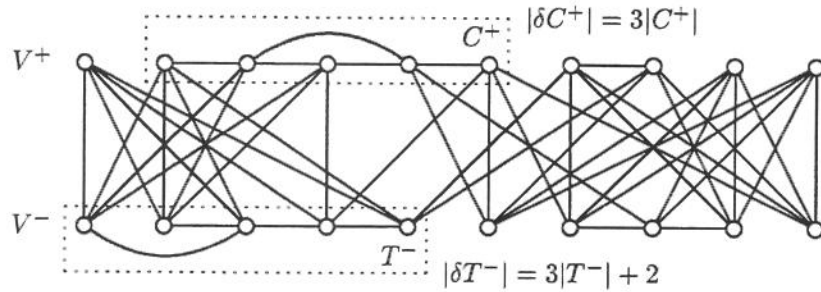
Prova: (Necessidade) Seja (V^+, V^-) uma equipartição mod 3-orientável e D uma mod 3-orientação de G associada. Sabemos que (V^+, V^-) é mod 3-promissora. Sejam \mathcal{T}^+ , \mathcal{C}^+ , \mathcal{T}^- e \mathcal{C}^- as coleções de árvores e de coroas de $K(G[V^+])$ e $K(G[V^-])$.

Pela Proposição 4.4, para toda árvore $T^+ \in \mathcal{T}^+$ temos $|\delta V(T^+)| = 3|V(T^+)| + 2$ (veja a Figura 4.5(a)); portanto D orienta uma única aresta de $\delta V(T^+)$ com destino em $V(T^+)$, a qual damos o nome de *aresta minoritária*, e todas as outras com origem em $V(T^+)$. No caso das coroas $C^+ \in \mathcal{C}^+$, a Proposição 4.4 diz que $|\delta V(C^+)| = 3|V(C^+)|$; portanto D orienta todas as arestas de $\delta V(C^+)$ com origem em $V(C^+)$. Uma análise análoga vale para as árvores e coroas em \mathcal{T}^- e \mathcal{C}^- . Logo, concluímos que toda aresta de δV^+ que é orientada segundo D com origem em V^- e destino em V^+ , necessariamente possui um extremo em alguma árvore $T^- \in \mathcal{T}^-$ e outro extremo em alguma árvore $T^+ \in \mathcal{T}^+$ (veja a Figura 4.5(d)). Como os vértices do grafo H , obtido pelo encolhimento de G com relação a (V^+, V^-) , representam as árvores de \mathcal{T}^+ e \mathcal{T}^- e a relação de vizinhança entre os vértices de H reproduz a relação de vizinhança entre as árvores de \mathcal{T}^+ e \mathcal{T}^- , temos que as arestas de H que são imagens das arestas de δV^+ com origem em V^- e destino em V^+ formam em H um emparelhamento perfeito (veja a Figura 4.5(c)).

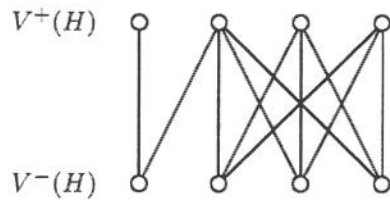
(Suficiência) Seja (V^+, V^-) uma equipartição mod 3-promissora tal que o grafo H obtido pelo encolhimento de G com relação a (V^+, V^-) possui um emparelhamento perfeito M . Oriente as arestas de δV^+ que são imagens das arestas de M com origem em V^- e destino em V^+ . Oriente as arestas restantes de δV^+ no sentido oposto, ou seja, com origem em V^+ e destino em V^- . Dessa forma, apenas as arestas das árvores e coroas de \mathcal{T}^+ , \mathcal{C}^+ , \mathcal{T}^- e \mathcal{C}^- não foram orientadas.

Seja $T^+ \in \mathcal{T}^+$ e $v \in V(T^+)$ o vértice de T^+ que é extremo da aresta minoritária do corte $\delta V(T^+)$. Orientamos as arestas de T^+ de forma que T^+ seja uma ramificação com raiz v , conforme mostrado na Figura 4.6. Assim, para todo vértice u de T^+ temos exatamente uma aresta de δu orientada com destino em u : esta é uma aresta da ramificação T^+ para todos os vértices distintos de v e, para v , é a própria aresta minoritária de $\delta V(T^+)$. Portanto, todo vértice de T^+ é uma fonte com fluxo líquido $+3$. Orientamos as arestas de uma árvore $T^- \in \mathcal{T}^-$ da mesma forma e, posteriormente, invertemos suas orientações, o que torna todo vértice de T^- um sorvedouro com fluxo líquido -3 .

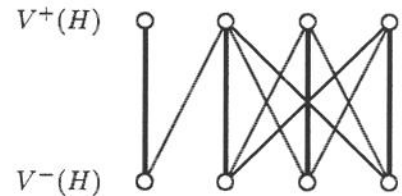
Para orientar as arestas de uma coroa $C^+ \in \mathcal{C}^+$, devemos contrair o único circuito R de C^+ a um único vértice v , obtendo assim uma árvore L . Agora, basta orientamos L como uma ramificação com raiz v , restaurarmos o circuito R e orientarmos suas arestas



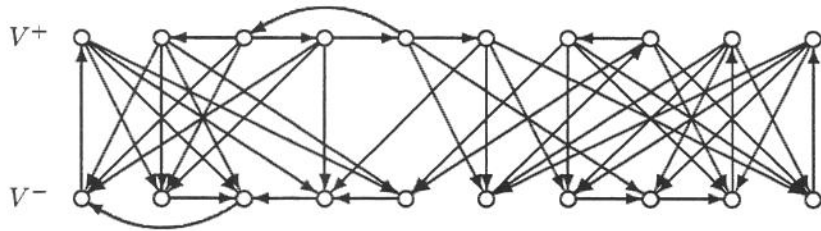
(a) Equipartição mod 3-promissora de G



(b) Grafo G encolhido ou H



(c) Emparelhamento perfeito de H



(d) Mod 3-orientação de G

Figura 4.5: Ilustração da demonstração do Teorema 4.6

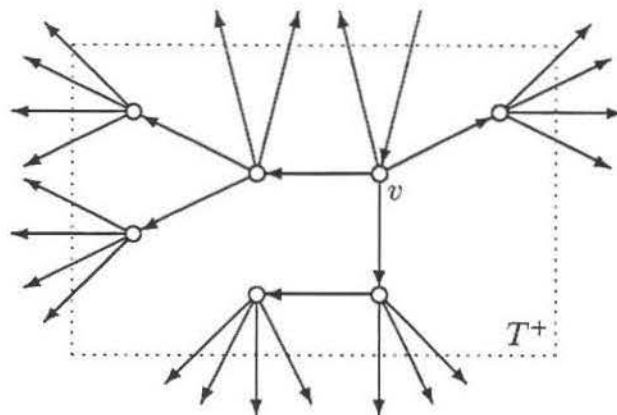


Figura 4.6: Orientando uma árvore $T^+ \in \mathcal{T}^+$ como uma ramificação

de forma a torná-lo um circuito orientado, conforme mostrado na Figura 4.7. Assim, para todo vértice u de C^+ temos exatamente uma aresta de δu orientada com destino em u : esta é uma aresta da ramificação L para todos os vértices que não pertencem a R , e, para os vértices de R , é uma aresta do circuito orientado. Portanto, todo vértice de C^+ é uma fonte com fluxo líquido $+3$. Novamente, orientamos as arestas de uma coroa $C^- \in \mathcal{C}^-$ da mesma forma e, posteriormente, invertemos suas orientações, o que torna todo vértice de C^- um sorvedouro com fluxo líquido -3 .

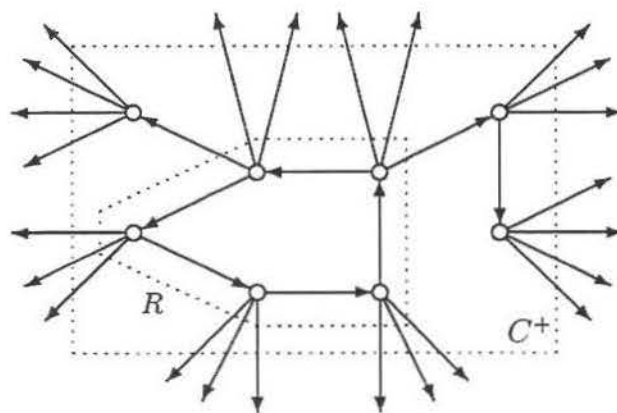


Figura 4.7: Orientando uma coroa $C^+ \in \mathcal{C}^+$

Portanto, conseguimos estender a orientação de δV^+ para as árvores e coroas de \mathcal{T}^+ , \mathcal{C}^+ , \mathcal{T}^- e \mathcal{C}^- de tal forma que todo vértice de V^+ será uma fonte com fluxo líquido +3 e todo vértice de V^- será um sorvedouro com fluxo líquido -3. Isso prova que (V^+, V^-) é mod 3-orientável. A Figura 4.5 ilustra esta demonstração. \square

Lema 4.7 *Seja $G = (V, E)$ um grafo 5-regular, (V^+, V^-) uma equipartição mod 3-promissora de V e H o grafo obtido pelo encolhimento com relação a (V^+, V^-) . Seja F um subconjunto das árvores de $K(G[V^+])$ ou de $K(G[V^-])$, F_H os vértices de H que são imagens das árvores de F , e N_F, N_{F_H} os respectivos componentes vizinhos de F e F_H . Finalmente, defina o conjunto de vértices $Z = V(F) \cup V(N_F)$. Então, se*

$$|\delta Z| \geq 3|V(N_F)| - |V(F)|,$$

temos que

$$|N_{F_H}| \geq |F_H|.$$

Prova: As Figuras 4.8(a) e 4.8(b) ilustram os conjuntos F, N_F, F_H, N_{F_H} e Z do enunciado.

Pela Proposição 4.4, cada coroa C de $K(G[V^+])$ contribui com $3|V(C)|$ arestas para o corte δV^+ , enquanto cada árvore T de $K(G[V^+])$ contribui com $3|V(T)| + 2$ arestas para o corte δV^+ ; o mesmo ocorre para as coroas e as árvores de $K(G[V^-])$. Então, uma simples contagem revela que

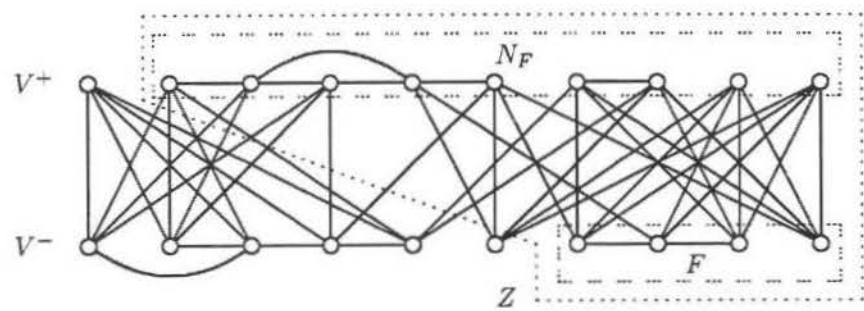
$$\begin{aligned} |\delta V(F)| &= 3|V(F)| + 2t(F), \text{ e} \\ |\delta V(N_F)| &= 3|V(N_F)| + 2t(N_F). \end{aligned}$$

Pela definição de N_F temos que $\delta V(F) \subseteq \delta V(N_F)$; então, $\delta Z = \delta V(N_F) \setminus \delta V(F)$. Logo,

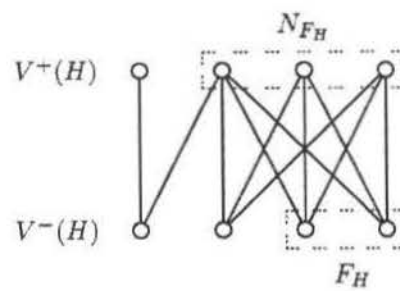
$$\begin{aligned} |\delta Z| &= |\delta V(N_F)| - |\delta V(F)| \\ &= 3(|V(N_F)| - |V(F)|) + 2(t(N_F) - t(F)). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} 2(t(N_F) - t(F)) &= |\delta Z| - 3(|V(N_F)| - |V(F)|) \\ &\geq 3|V(N_F)| - |V(F)| - 3(|V(N_F)| - |V(F)|) \text{ (pela hipótese)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$



(a) $|\delta Z| \geq 3|V(N_F)| - |V(F)|$



(b) $|N_{FH}| \geq |F_H|$

Figura 4.8: Ilustração do Lema 4.7

Portanto, $t(N_F) \geq t(F)$. Mas, $t(F) = |F_H|$ e $t(N_F) = |N_{F_H}|$, já que as relações de vizinhança entre as árvores de $K(G[V^+])$ e $K(G[V^-])$ são preservadas em H , isto é, para cada árvore de N_F existe em N_{F_H} um vértice que é a sua imagem. Logo, $|N_{F_H}| \geq |F_H|$.

A demonstração para o caso em que F é um subconjunto das árvores de $K(G[V^-])$ é análoga. \square

Teorema 4.8 *Seja $G = (V, E)$ um grafo 5-regular e (V^+, V^-) uma equipartição de V . Então (V^+, V^-) é mod 3-orientável se, e somente se, para todo $Z \subseteq V$, com $Z^+ = Z \cap V^+$ e $Z^- = Z \cap V^-$, vale a relação*

$$|\delta Z| \geq 3||Z^+| - |Z^-||.$$

Prova: A necessidade da condição já foi demonstrada no Lema 4.2; portanto, basta demonstrarmos a suficiência. O Lema 4.3 nos garante que (V^+, V^-) é mod 3-promissora; então, seja $H = (V(H), E(H))$ o grafo bipartido com bipartição $(V^+(H), V^-(H))$ obtido pelo encolhimento de G com relação a (V^+, V^-) . Como, por hipótese, a relação 4.1 vale para qualquer $Z \subseteq V$, temos, pelo Lema 4.7, que para todo $F_H \subseteq V^+(H)$ e todo $F_H \subseteq V^-(H)$ vale a relação

$$|N_{F_H}| \geq |F_H|;$$

pelo Corolário 2.2, H possui emparelhamento perfeito. Pelo Teorema 4.6, (V^+, V^-) é mod 3-orientável. \square

4.4 Algoritmo para Verificação de mod 3-orientabilidade

A partir dos Teoremas 4.6 e 4.8, o projeto de um algoritmo que verifica se uma dada equipartição (V^+, V^-) de um grafo 5-regular G é mod 3-orientável torna-se simples.

Primeiramente devemos verificar se (V^+, V^-) é mod 3-promissora. Para isso devemos executar uma busca nos subgrafos $G[V^+]$ e $G[V^-]$ para determinar os componentes conexos de cada um dos subgrafos. Em seguida devemos verificar se cada um desses componentes é uma árvore ou coroa, o que envolve apenas uma comparação entre o número de vértices e arestas de cada componente. Essa etapa pode ser realizada em tempo polinomial $O(|V| + |E|)$.

Na etapa seguinte, dado que (V^+, V^-) é mod 3-promissora, geramos o grafo bipartido H que é resultado do encolhimento de G com relação a (V^+, V^-) . Como já determinamos na etapa anterior quais são os componentes de $K(G[V^+])$ e $K(G[V^-])$ e quais destes são árvores, conseguimos construir H facilmente através de um simples percurso na estrutura do grafo G , ou seja, a construção de H leva tempo polinomial $O(|V| + |E|)$ também.

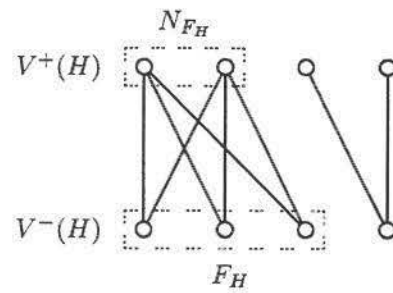
Finalmente, utilizamos o método dos caminhos aumentantes (descrito no Capítulo 5 de [4]), que é polinomial, para determinar se H possui um emparelhamento perfeito M ou provar que tal emparelhamento não existe, exibindo um subconjunto de vértices de H que contradiz o Corolário 2.2.

Quando H possui emparelhamento perfeito, ou seja, (V^+, V^-) é mod 3-orientável, obtemos a mod 3-orientação de G efetuando os passos indicados na demonstração do Teorema 4.6: orientamos as arestas de δV^+ que são imagens das arestas de M com origem em V^- e destino em V^+ , orientamos as demais arestas de δV^+ no sentido oposto e estendemos essa orientação para as arestas internas às árvores e coroas de $K(G[V^+])$ e $K(G[V^-])$. A obtenção da mod 3-orientação também é feita em tempo polinomial.

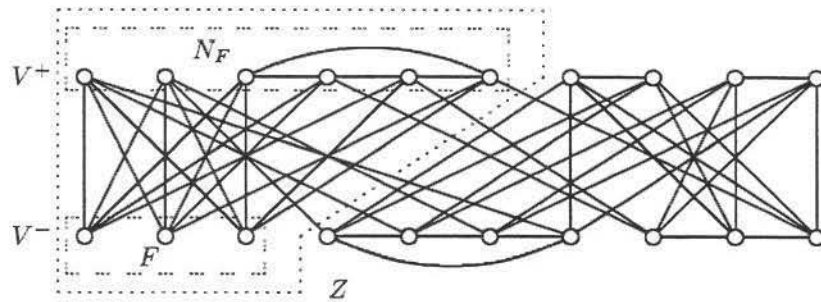
Observe que, segundo o algoritmo, existem apenas duas situações onde determinamos que (V^+, V^-) não é mod 3-orientável: quando G não é mod 3-promissora ou quando H não possui emparelhamento perfeito. No caso em que (V^+, V^-) não é mod 3-promissora existe alguma componente $S \in K(G[V^+]) \cup K(G[V^-])$ tal que $|V(S)| < |E(S)|$, ou seja, $|\delta V(S)| < 3|V(S)|$; portanto, S certifica que (V^+, V^-) não satisfaz ambas as caracterizações dos Teoremas 4.6 e 4.8. Já no caso em que H não possui emparelhamento perfeito, só temos um certificado de que (V^+, V^-) não satisfaz a caracterização do Teorema 4.6: o subconjunto F_H de vértices de H que contradiz o Corolário 2.2. No entanto, pela contrapositiva do Lema 4.7, dado o conjunto de árvores F de $K(G[V^+])$ ou $K(G[V^-])$ que são imagens dos vértices de F_H e seu respectivo conjunto de componentes vizinhos N_F , o subconjunto $Z = V(F) \cup V(N_F)$ de V é um certificado de que (V^+, V^-) não satisfaz a caracterização do Teorema 4.8. Este fato é ilustrado pela Figura 4.9.

Na Figura 4.10 mostramos o pseudo-código do algoritmo descrito acima.

Nesse momento é natural pensarmos em utilizar esse algoritmo para determinar se um grafo 5-regular admite uma mod 3-orientação. Podemos, por exemplo, testar todas as equipartições de G até que encontremos uma mod 3-orientação, ou nos certifiquemos de que G não admite uma. No entanto, tal algoritmo claramente não é polinomial pois, no pior caso, teremos que testar todas as $\binom{|V|}{\frac{|V|}{2}} \in \Omega(2^{\frac{|V|}{2}})$ equipartições de G . Na verdade, dado que o problema de decidir se um grafo 5-regular admite 3-fluxo é NP-completo, temos pouca esperança de conseguir um algoritmo polinomial para resolvê-lo. No entanto, é possível que consigamos, ao analisar somente os grafos 5-regulares e 4-aresta-conexos, decidir em tempo polinomial quais admitem mod 3-orientação ou até mesmo provar que todos admitem, conforme afirma a conjectura de Tutte.



(a) $|N_{FH}| < |F_H|$



(b) $|\delta Z| < 3|V(N_F)| - |V(F)|$

Figura 4.9: Ilustração da contrapositiva do Lema 4.7

Verificação de mod 3-orientabilidade

Entrada: Grafo 5-regular $G = (V, E)$ e uma equipartição (V^+, V^-) de V .

Saída: Uma mod 3-orientação de G ou $Z \subseteq V$ que não satisfaz a relação 4.1.

- (1) se (V^+, V^-) é mod 3-promissora então
 - (2) encolha G , gerando H ;
 - (3) se H possui emparelhamento perfeito M então
 - (3.1) oriente as arestas de M com origem em V^- e destino em V^+ ;
 - (3.2) oriente as demais arestas de δV^+ no sentido contrário;
 - (3.3) estenda a orientação para as árvores e coroas de $K(G[V^+])$ e $K(G[V^-])$.
 - (4) senão

/* existe $F_H \subseteq V(H)$ tal que $|F_H| < |N_{F_H}|$ */

 - (4.1) tome F como o conjunto das árvores que representam F_H ;
 - (4.2) retorne $Z = V(F) \cup V(N_F)$.
- (5) senão

/* existe $S \in K(G[V^+]) \cup K(G[V^-])$ tal que $|V(S)| < |E(S)|$ */

 - (5.1) retorne $Z = V(S)$.

Figura 4.10: Algoritmo para determinar se uma equipartição (V^+, V^-) é mod 3-orientável

Capítulo 5

Conclusão

As duas caracterizações de equipartições mod 3-orientáveis apresentadas no Capítulo 4 são a principal contribuição desta dissertação. É interessante lembrar que tais caracterizações nos dão também uma caracterização dos grafos 5-regulares que admitem 3-fluxo; são aqueles que possuem uma equipartição mod 3-orientável.

A primeira caracterização, o Teorema 4.6, relaciona a existência de uma mod 3-orientação para uma equipartição de um grafo 5-regular G com a existência de um emparelhamento perfeito num grafo bipartido derivado dessa equipartição de tal forma que, sempre que um tal emparelhamento perfeito existe, somos capazes de construir a mod 3-orientação desejada para o grafo G . Essa relação torna-se mais interessante quando pensamos que estamos resolvendo um problema ainda pouco estudado, o de determinar a admissibilidade de 3-fluxo para grafos 5-regulares, através da redução deste a um problema já bastante estudado, o de determinar a existência de emparelhamentos perfeitos em grafos bipartidos.

A segunda caracterização, o Teorema 4.8, revela uma condição numérica simples para a mod 3-orientabilidade de um grafo 5-regular G , traduzindo-a em termos da cardinalidade dos cortes de G .

As demonstrações dessas duas caracterizações nos fornecem um algoritmo polinomial para determinar se uma dada equipartição de um grafo 5-regular G é mod 3-orientável. O algoritmo ainda exhibe uma mod 3-orientação, no caso afirmativo, ou exhibe um subconjunto Z dos vértices de G que não satisfaz a relação de equilíbrio do Teorema 4.8, caso contrário. No entanto, não conhecemos um algoritmo polinomial para determinar se um grafo 5-regular possui uma equipartição mod 3-orientável e nem temos esperança de encontrar um tal algoritmo, já que esse problema é NP-completo.

Ainda assim, acreditando na validade da Conjetura dos 3-fluxos de Tutte, temos esperança de que, para os grafos 5-regulares e 4-aresta-conexos, seja possível provar que sempre há uma equipartição mod 3-orientável e até mesmo de que seja possível encontrá-

la em tempo polinomial. Nesse caso, visto que tanto a redução para grafos 5-regulares quanto a transformação de um 3-fluxo modular num 3-fluxo pode ser feita em tempo polinomial, teríamos um algoritmo polinomial para encontrar um 3-fluxo para um grafo 4-aresta-conexo qualquer.

Futuramente, planejamos estudar a possibilidade de aplicação das caracterizações apresentadas nesta dissertação. Para isso poderíamos nos concentrar inicialmente em procurar algumas subclasses de grafos 5-regulares que admitam uma equipartição mod 3-orientável e tentar entender como é possível encontrar uma tal equipartição. Nesse sentido, o estudo dos grafos planares 4-aresta-conexos parece bastante interessante, pois já sabemos que estes admitem uma tal equipartição, mas ainda não sabemos como encontrá-la.

Apêndice A

Observações Experimentais sobre Equipartições

Com base nos resultados apresentados no Capítulo 4 desta dissertação, o interesse em encontrar equipartições mod 3-promissoras eficientemente surge naturalmente. Com esse intuito, decidimos estudar as equipartições (V^+, V^-) de grafos 5-regulares com corte δV^+ de cardinalidade máxima, pois acreditávamos que, por minimizarem o número de arestas nos subgrafos $G[V^+]$ e $G[V^-]$, essas equipartições tinham alta probabilidade de serem mod 3-promissoras.

Como ferramenta para nossa análise, formulamos um programa linear inteiro para encontrar uma equipartição (V^+, V^-) de um grafo $G = (V, E)$ que minimize o número de arestas em $G[V^+]$. No caso em que G é regular, pela Proposição 2.4, isso equivale a encontrar uma equipartição (V^+, V^-) com corte δV^+ de cardinalidade máxima. Descrevemos a seguir a formulação que utilizamos.

Para cada vértice i de G temos uma variável binária y_i tal que

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in V^+, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada aresta (i, j) de G temos uma variável binária x_{ij} tal que

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in V^+ \text{ e } j \in V^+, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O programa linear inteiro é

$$\min \sum_{(i,j) \in E} x_{ij}$$

sujeito a

$$\sum_{i \in V} y_i = \frac{|V|}{2} \quad (1)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall (i,j) \in E \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall (i,j) \in E \quad (3)$$

$$y_i + y_j - x_{ij} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in E \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in E$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in V.$$

A função objetivo minimiza o número de arestas de $G[V^+]$. A restrição (1) garante que (V^+, V^-) será uma equipartição de G e as restrições (2), (3) e (4) garantem que $(i,j) \in G[V^+]$ se, e somente se, ambos $i, j \in V^+$.

Aplicamos o programa linear a algumas instâncias cuidadosamente escolhidas e descobrimos que:

(i) Nem toda equipartição (V^+, V^-) onde $|\delta V^+|$ é máxima é mod 3-promissora. Na Figura A.1 apresentamos um exemplo de um grafo 5-regular G_1 com uma equipartição (V^+, V^-) onde $|\delta V^+|$ é máxima, mas que não é mod 3-promissora: a componente não trivial de $K(G[V^-])$ não é uma árvore e nem uma coroa. No entanto, esse mesmo grafo possui uma equipartição (V^+, V^-) onde $|\delta V^+|$ é máxima e que é mod 3-promissora; esta é apresentada na Figura A.2. Portanto, ainda não sabemos dizer se todo grafo 5-regular possui pelo menos uma equipartição (V^+, V^-) de corte δV^+ máximo que é mod 3-promissora.

(ii) Nem toda equipartição mod 3-promissora (V^+, V^-) de um grafo 5-regular possui $|\delta V^+|$ máxima. Na Figura A.3 apresentamos um exemplo de um grafo 5-regular G_2 com uma equipartição mod 3-promissora (V^+, V^-) onde $|\delta V^+|$ não é máxima. No entanto, a equipartição de G_2 apresentada na Figura A.3 não é mod 3-orientável, enquanto que a equipartição (V^+, V^-) de G_2 apresentada na Figura A.4, que possui $|\delta V^+|$ máxima, é mod 3-orientável.

(iii) Um grafo 5-regular que não admite 3-fluxo, e portanto não possui uma equipartição mod 3-orientável, pode ter uma equipartição mod 3-promissora. Na Figura A.5 apresentamos um exemplo de um grafo 5-regular G_3 que não admite 3-fluxo, pois possui quatro 3-cortes que se cruzam da mesma forma que no K_4 . A Figura A.6 mostra uma equipartição mod 3-promissora (V^+, V^-) de G_3 que, curiosamente, também possui $|\delta V^+|$ máxima.

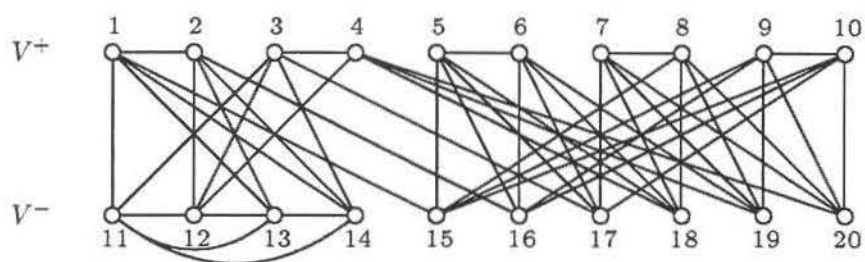


Figura A.1: Uma equipartição de G_1 onde $|\delta V^+|$ é máxima que não é mod 3-promissora

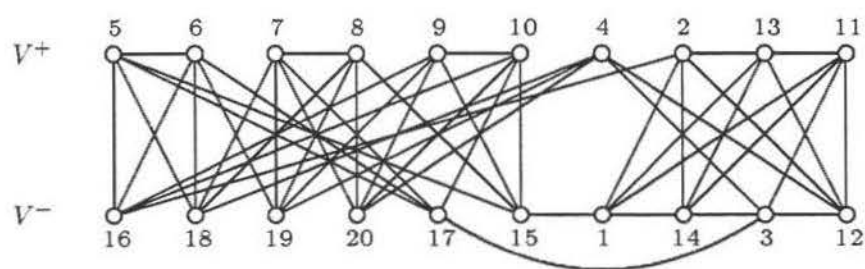


Figura A.2: Uma equipartição de G_1 onde $|\delta V^+|$ é máxima que é mod 3-promissora

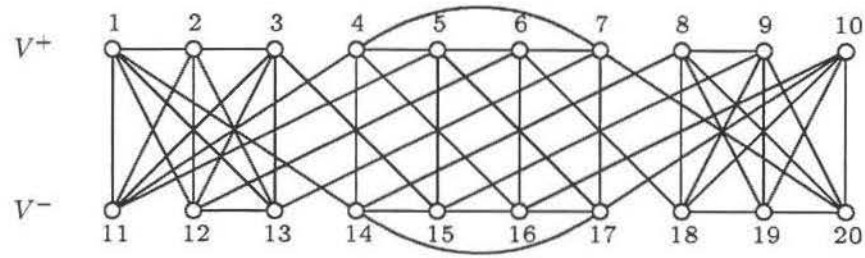


Figura A.3: Uma equipartição mod 3-promissora de G_2 que não possui $|\delta V^+|$ máxima

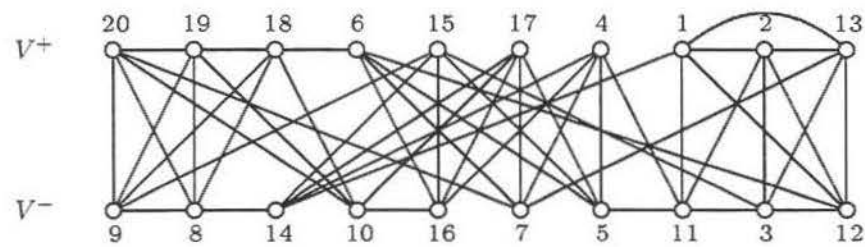


Figura A.4: Uma equipartição mod 3-promissora de G_2 onde $|\delta V^+|$ é máxima

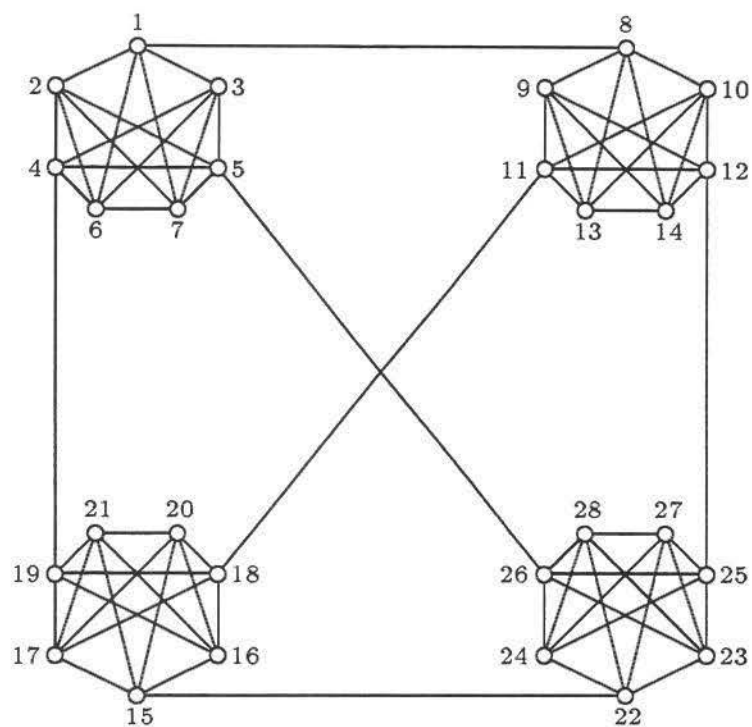


Figura A.5: O grafo 5-regular G_3 que não admite 3-fluxo

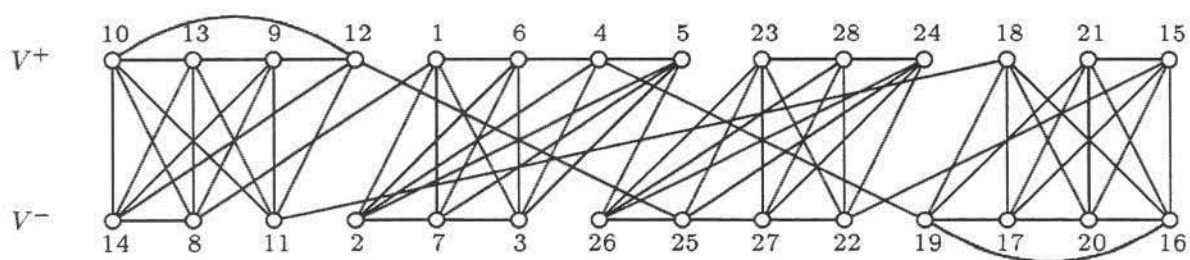


Figura A.6: Uma equipartição mod 3-promissora de G_3 onde $|\delta V^+|$ é máxima

Bibliografia

- [1] V. Aksionov. On the extension of the 3-coloring of planar graphs (em russo). *Diskret Analiz.*, 16:3–19, 1974.
- [2] K. Appel and W. Haken. Every map is four colorable, Part I: Discharging. *Illinois J. Math.*, 21:429–490, 1977.
- [3] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every map is four colorable, Part II: Reducibility. *Illinois J. Math.*, 21:491–567, 1977.
- [4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Elsevier North Holland, 1976.
- [5] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 1989.
- [6] C. N. da Silva and R. Dahab. Tutte's 3-flow conjecture and matchings in bipartite graphs. In J. Szwarcfiter and S. Song, editors, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, volume 7, 2001.
- [7] R. Dahab and D. H. Younger. Trabalho não publicado, 1988.
- [8] L. M. de Almeida e Silva. Fluxos inteiros em grafos. Tese de Mestrado, UNICAMP, 1991.
- [9] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1996.
- [10] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability*. W. H. Freeman, 1979.
- [11] H. Grötzsch. Ein dreifarbensatz für dreikreisfreie netze auf der kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe*, 8:109–120, 1958.
- [12] B. Grünbaum. Grötzsch's theorem on 3-colorings. *Michigan Math Journal*, 10:303–310, 1963.

- [13] P. J. Heawood. Map-color theorem. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2:193–200, 1890.
- [14] I. Holyer. The np-completeness of the edge-coloring. *SIAM J. Comput.*, 10:718–720, 1981.
- [15] F. Jaeger. Flows and generalized coloring theorems in graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, B 26:205–216, 1979.
- [16] O. Ore. *The Four Color Problem*. Academic Press, 1967.
- [17] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas. The four color theorem. *Journal of Combinatorial Theory*, B 70:2–44, 1997.
- [18] N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. Excluded minors in cubic graphs. Trabalho não publicado, 1995.
- [19] N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. Tutte's edge colouring conjecture. *Journal of Combinatorial Theory*, B 70:166–183, 1997.
- [20] T. L. Saaty. Thirteen colorful variations on guthrie's four-color conjecture. *American Math. Monthly*, 79:2–43, 1972.
- [21] T. L. Saaty and P. C. Kainen. *The Four-Color Problem*. Dover, 1986.
- [22] D. Sanders, P. Seymour, and R. Thomas. Edge three-coloring cubic doublecross graphs. Trabalho não publicado.
- [23] D. Sanders and R. Thomas. Edge three-coloring cubic apex graphs. Trabalho não publicado.
- [24] P. D. Seymour. Nowhere-zero 6-flows. *Journal of Combinatorial Theory*, B 30:130–135, 1981.
- [25] P. D. Seymour. Nowhere-zero flows. In R. L. Graham and L. L. M. Grötschel, editors, *Handbook of Combinatorics*, chapter 4, pages 289–299. Elsevier, 1995.
- [26] R. Steinberg and D. H. Younger. Grötzsch's theorem for the projective plane. *Ars Combinatoria*, 28:15–31, 1989.
- [27] W. T. Tutte. A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canad. J. Math*, 6:80–91, 1954.

- [28] W. T. Tutte. On the algebraic theory of graph colorings. *J. Combin. Theory*, 1:15–50, 1966.
- [29] D. B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 1996.
- [30] D. H. Younger. Integer flows. *Journal of Graph Theory*, 7:349–357, 1983.
- [31] C.-Q. Zhang. *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*. Marcel Dekker, 1997.

Índice

- 2-divisão, 28
- aresta minoritária, 44
- arestas
 - de ligação, 9
 - duplas, 8
 - múltiplas, 8
- árvore, 9, 38–49
- bipartição, 9
- caminho, 8
 - orientado, 10
 - simples, 8
- Característica de Euler, 15
- ciclo, 9
- cintura, 9
- circuito, 9
 - orientado, 10
- colar, 33–34
- complemento de vértices, 9
- contração
 - de aresta, 10
 - de subgrafo, 10
- coroa, 9, 38–49
- corte, 9
- crosscap, 12
- cruzamento de cortes, 9
- curva
 - não-separadora, 13
 - separadora, 13
- $d(v)$, 8
- $\delta(X)$, 9
- $\delta(X, Y)$, 9
- $E(G)$, 8
- emparelhamento, 9
- emparelhamento perfeito, 9
- encolhimento, 42–50
- equipartição, 9
 - mod 3-orientável, 37–50
 - mod 3-promissora, 38–50
- expansão, 33
- $F(G)$, 8
- faces de uma imersão, 12
- fluxo líquido
 - de um conjunto de vértices, 19
 - de um vértice, 20
- fonte, 21
- Fórmula de Euler, 15
- $G[X]$, 9
- garrafa de Klein, 13
- genus, 13
 - de um grafo, 13
 - não-orientável, 13
 - orientável, 13
- grafo
 - acíclico, 9
 - bipartido, 9
 - conexo, 8
 - d -regular, 8
 - equipartido, 9

- l -aresta-conexo, 9
 - planar, 12
 - plano, 12
 - simples, 8
- grau de vértice, 8
- imersão
 - celular, 13
 - de um grafo, 12
- $K(G)$, 9
- k -coloração
 - de faces, 1
 - de vértices, 3
- k -fluxo, 3, 22
 - soma, 22
 - modular, 3, 22
 - modular parcial, 22
 - multiplicação por constante, 22
 - parcial, 22
- k -reversão de aresta, 21
- l -corte, 9
- laço, 8
- mapa, 12
- mod 3-orientação, 24
- N_H , 9
- orientação k -ponderada, 18
 - carga de, 21
 - extensão de, 22
 - multiplicação por constante, 19
 - parcial, 18
 - soma, 18
 - suporte de, 18
- plano projetivo, 13, 25
- raiz da ramificação, 10
- ramificação, 10
- sorvedouro, 21
- subgrafo induzido, 9
- subgrafos adjacentes, 9
- superfície
 - não-orientável, 12
 - orientável, 12
- $t(G)$, 9
- Teorema de Hall, 11
- toro, 4, 12
- $V(G)$, 8
- \bar{X} , 9