Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica

Equações de Navier-Stokes com Densidade Variável e Difusão de Massa em Domínios Finos

Tese de Doutorado em Matemática

por

Marilaine de Fraga Sant'Ana

José Luiz Boldrini
orientador

Julho de 2000

Equações de Navier-Stokes com Densidade Variável e Difusão de Massa em Domínios Finos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Marilaine de Fraga Sant'Ana** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de Novembro de 2000.

José Luiz Boldrini
Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Orientador

Banca Examinadora
Prof. Dr. José Luiz Boldrini (Orientador- DMA-IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Helena Judith Nussenzveig Lopes (DM-IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos (DM-IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Sérgio Muniz Oliva Filho (DMA-IME-USP)
Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho (DM-ICMSC-USP)

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas**, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Sant'Ana, Marilaine de Fraga

Sa59e Equações de Navier-Stokes com densidade variável e difusão de massa em domínios finos / Marilaine de Fraga Sant'Ana -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : José Luiz Boldrini

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais não lineares. 2. Navier-Stokes, Equações de. I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 26 de julho de 2000 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof (a). Dr (a). HELENA JUDITH NUSSENZVEIG LOPES

Prof (a). Dr (a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Prof (a). Dr (a). SÉRGIO MUNIZ OLIVA FILHO

Prof (a). Dr (a). ALEXANDRE NOLASCO DE CARVALHO

Dedico este trabalho ao Alvino e ao Victor

AGRADECIMENTOS:

Ao professor Boldrini, pela atenção e paciência, pelos sábios conselhos, pela extrema competência e pelos ótimos papos.

Aos demais professores do IMECC com quem convivi e estudei, em especial, ao Professor Djairo Figueiredo que nos contagiou com a sua paixão pelas Equações Parciais.

Aos colegas do Predinho, pelos momentos de estudo, concentração e cooperação e também pelos momentos descontrídos que tornavam nosso ambiente mais leve. Em especial ao Sinval, João, Serginho, Bahiano, Janete, Lu, Elis, Érica, Ximena, Marcela, Claudinha, Denilson, Iara, Jaque, Lorena, Cristina, Gabriela, Márlio, Ryuichi, Zé e Leo.

A Ângela e Nelson, pela boa amizade e pelo carinho com que nos acolheram.

À Rosa e sua família que foram a minha família em Campinas.

À Turma do Patê, pela amizade, pelo apoio e pelas agradáveis conversas entre copos de vinho.

À minha família, pelo carinho mesmo distante e pelas notícias do Sul que tanto aumentavam minha conta telefônica.

Finalmente, quero agradecer ao Alvino e ao Victor, pelo amor, pelo companheirismo, pela compreensão com minhas ausências.

RESUMO

O trabalho analisa um modelo simplificado para as equações de Navier-Stokes que governam o escoamento de um fluido viscoso incompressível, com densidade variável e difusão de massa. Estas equações são estudadas em um domínios tridimensionais finos sob condições de contorno periódicas. O comportamento das soluções de tais equações é analisado quando a espessura dos domínios tendem a zero. Mostra-se que estas soluções convergem para soluções correspondentes de um específico problema limite bidimensional cujas equações associadas chamamos de sistema reduzido. Analisamos também a família de atratores dos sistemas correspondentes aos domínios tridimensionais finos e a sua relação com o atrator do sistema reduzido, mostrando que uma propriedade de semicontinuidade superior para esta família de atratores vale numa bacia de atração limitada.

ABSTRACT

In this work we analyze a simplified model for the Navier-Stokes equations governing the flow of an incompressible viscous fluid with variable density and mass diffusion. These equations are studied in thin three-dimensional domains under periodic boundary conditions. The behavior of the solutions of such equations is analyze when the thickness of the domains tend to zero. It is shown that these solutions converge to corresponding solutions of a specific limit bidimensional problem whose associate equations we call reduced system. We also analyze the attractors of the systems corresponding to the thin three-dimensional domains and their relationship with the attractor of the reduced system, by showing that a uppersemicontinuity property holds in a bounded attraction basin.

Índice

Introdução

Problemas envolvendo domínios finos se fazem presentes em várias situações físicas, tais como no estudo da dinâmica de marés, em vários aspectos da meteorologia, em questões relativas à lubrificação, e outros; e, pela sua importância têm merecido a atenção de muitos pesquisadores.

Do ponto de vista matemático, tal domínio pode ser caracterizado como se segue: fixado um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um domínio fino correspondente a Ω é um conjunto da forma:

$$\Omega_\varepsilon = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ 0 < Y < g(X,\varepsilon),\ X \in \Omega\}$$

para $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ com ε_0 um número positivo e $g : \overline{\Omega} \times [0,\varepsilon_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ função de classe C^3 tal que:

$$\begin{array}{ll} g(x,0) = 0 & \\ g_0(X) := \dfrac{\partial g}{\partial \varepsilon}(X,0) > 0 & \textit{para } X \in \overline{\Omega} \\ g(X,\varepsilon) > 0 & \textit{para } X \in \overline{\Omega},\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]. \end{array}$$

O caso mais simples é aquele de domínios com espessura constante, isto é, aqueles que $g(X,\varepsilon) = \varepsilon$, e, portanto, $\Omega_\varepsilon = \Omega \times (0,\varepsilon)$. Por simplicidade, este será o caso que consideraremos em todo este trabalho.

Como foi dito acima, a importância do tema tem feito que muitos autores o tenham estudado sob vários aspectos. Em particular, Hale e Raugel consideraram casos envolvendo domínios finos em problemas com equções de reação-difusão e equações hiperbólicas com amortecimento (veja por exemplo, [17] e [18]). Também Oliva estudou sistemas de reação-difusão em domínios com canais finos em [27]. Já Raugel e Sell estudaram as equações clássicas de Navier-Stokes em domínios finos em [29], [30], [31] e [32]. Problemas relacionados também podem ser encontrados em Teman e Ziane em

[38] e [39], Moise, Teman e Ziane em [25], Avrin em [2] e [3], Zhimin em [40] e Montgomery Smith em [26].

Abordaram ainda estes assuntos Maurer em [24], Saint Raymond em [33], Bresch, Lemoine e Simon em [9] e [10], Carvalho e Ruas Filho em [12], Marsden e Raugel em [23], Besson, Laydi e Touzani em [5], Laydi e Lenczner em [21], Bayada, Chambat e Ciuperca em [4], entre outros.

Observamos que a grande maioria das investigações sobre comportamentos de fluidos em domínios finos tem sido realizada supondo que o fluido envolvido é governado pelas equações clássicas de Navier-Stokes, isto é, que o fluido é viscoso e incompressível, Newtoniano e de densidade constantes. Entretanto, há situações em que estas suposições não são adequadas e modelos mais complexos de fluidos deveriam ser utilizados.

Uma situação deste tipo é aquela em que o fluido de interesse ainda pode ser considerado viscoso, incompressível e newtoniano, mas a densidade não pode mais ser assumida constante, como acontece por exemplo em vários casos de misturas de fluidos miscíveis. Outro fenômeno que pode ocorrer é aquele em que não é desprezível a difusão de massa. Neste casos, o escoamento do fluido é governado pelas chamadas equações de Navier-Stokes com densidade variável e difusão massa, que são as seguintes:

$$\begin{cases} \zeta\left[\dfrac{\partial U}{\partial t}+(U\cdot\nabla)\,U\right]-\mu\,\Delta U-\lambda\left[(U\cdot\nabla)\nabla\zeta+(\nabla\zeta\cdot\nabla)\,U\right] \\ \qquad +\dfrac{\lambda^2}{\zeta}\left[(\nabla\zeta\cdot\nabla)\nabla\zeta-\dfrac{1}{\zeta}(\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta)\nabla\zeta+\Delta\zeta\nabla\zeta\right]=\nabla P+\zeta F \\ \operatorname{div} U=0 \\ \dfrac{d\zeta}{dt}+U\cdot\nabla\zeta=\lambda\Delta\zeta \end{cases} \tag{1}$$

em um domínio aberto limitado de $\mathbb{R}^3$ de fronteira regular com condições de contorno de Dirichlet para U e de Neumann para ζ, $U\mid_{t=0}=U_0$ e $\zeta\mid_{t=0}=\zeta_0$. Nas equações acima, ζ, U e P denotam respectivamente a densidade, a velocidade e a pressão do fluido. F é a força externa por unidade de massa e $\lambda>0$ é o coeficiente de difusão de massa.

Beirão da Veiga analisou tais equações em [7] para o caso de domínios limitados (não finos) e mostrou a existência de soluções locais, bem como a existência de soluções globais para dados pequenos.

Um modelo mais simples que o acima, estudado anteriormente, também em domínios limitados e com condições de contorno como antes, por Kazhikov e Smagulov ([19]), pode ser obtido quando o coeficiente de difusão λ é pequeno, desprezando-se o termo que está multiplicado por λ^2 na primeira das equações acima. Neste caso, as equações simplificadas se tornam:

$$
\begin{cases}
\zeta\left[\dfrac{\partial U}{\partial t}+(U\cdot\nabla)\,U\right]-\mu\,\Delta U-\lambda\left[(U\cdot\nabla)\nabla\zeta+(\nabla\zeta\cdot\nabla)\,U\right]=\nabla P+\zeta F \\
\operatorname{div} U=0 \\
\dfrac{d\zeta}{dt}+U\cdot\nabla\zeta=\lambda\Delta\zeta
\end{cases}
\tag{2}
$$

Observamos que se o campo de forças externas F for dado por unidade de volume, ao invés de ser dado por unidade de massa, como nos casos anteriores, as equações (2) se tornam:

$$
\begin{cases}
\zeta\left[\dfrac{\partial U}{\partial t}+(U\cdot\nabla)\,U\right]-\mu\,\Delta U-\lambda\left[(U\cdot\nabla)\nabla\zeta+(\nabla\zeta\cdot\nabla)\,U\right]=\nabla P+F \\
\operatorname{div} U=0 \\
\dfrac{d\zeta}{dt}+U\cdot\nabla\zeta=\lambda\Delta\zeta
\end{cases}
\tag{3}
$$

No presente trabalho, estudaremos os sistemas (2) e (3), porém com condições de contorno periódicas e em um domínio fino $\Omega_\varepsilon = \Omega \times (0,\varepsilon)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (que é, como dissemos anteriomente, o caso mais simples de domínio fino).

Portanto, estaremos interessados não apenas em questões de existência de soluções, mas também no seu comportamento quando $\varepsilon \to 0+$. Para isto, devido às fortes não linearidades presentes nas equações, necessitaremos de estimativas de ordens relativamente altas, para as quais as técnicas utilizadas por Beirão da Veiga em [7] são mais adequadas do que aquelas utilizadas por Kazhikov e Smagulov em [19]. A situação é bastante diferente daquela do caso do problema análogo para as equações clássicas de Navier-Stokes, para as quais estimativas de ordem relativamente baixas são suficientes para se controlar a dependência das componentes verticais das soluções e assim obter o comportamento limite.

É importante ressaltar que, embora o padrão de argumentação a ser utilizado na demonstração da existência de soluções de (2) (ou (3)) tenha certa similaridade com aquele de [7], teremos que apresenta-lo com detalhes por duas razões:

A primeira razão é que, como as condições de contorno que estamos considerando são diferentes daquelas de [7], não poderemos utilizar em geral uma certa equivalência de normas que era válida e importante no caso de [7]. Neste aspecto, os argumentos se complicam e teremos que adapta-los os para conseguir os resultados.

A segunda razão é que, como nos capítulos finais deste trabalho estaremos interessados no comportamento das soluções quando $\varepsilon \to 0+$, necessitaremos ter um controle adequado das dependências das estimativas com respeito a ε.

Uma observação importante é que, a rigor, todos os resultados apresentados neste trabalho são válidos apenas para o sistema (3) (exceto o resultado sobre a existência local de soluções que é também rigorosamente válido para (2)). O ponto fundamental é que uma certa equivalência de normas para as soluções envolvidas também se torna crucial na obtenção dos resultados, o que somente conseguimos provar no caso de soluções do sistema (3). No entanto, os resultados se tornariam imediatamente válidos caso se prove que a equivalência de normas aludida acima é verdadeira (talvez de forma adaptada) para as soluções de (2), o que conjecturamos ser verdade, sob certas condições. Portanto, já que considerar apenas o caso (3) não simplificaria significativamente nem a argumentação nem o cálculo das estimativas, decidimos apresentar no capítulo referente ao controle das componentes verticais, tanto a argumentação quanto as computações para o caso ligeiramente mais complexo de (2). Isto facilitará a extensão dos resultados no caso de ser provada a equivalência mencionada. Assim, nos lugares adequados haverá referência a ambos os sistemas, com as ressalvas convenientes.

Finalmente, descreveremos de forma breve a organização do trabalho:

No primeiro capítulo, fixaremos a notação e, para facilidade de referência, apresentaremos alguns resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho. Também prepararemos o problema para a abordagem posterior, através de uma mudança de variável conveniente que tira a dependência do parâmetro ε do domínio, passando-o às equações.

No segundo capítulo, mostraremos a existência e a unicidade de soluções locais para o problema, utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, assim como Beirão da Veiga fez em [7]. Mediante algumas hipóteses adicionais, necessárias para garantir a equivalência adequada de certas normas das soluções, mostraremos também a existência de soluções globais para dados pequenos.

No terceiro capítulo, definiremos as componentes horizontal e vertical de uma solução e mostraremos que para certas normas das componentes verticais valem estimativas de ordem $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Isto garante seu decréscimo a zero à medida em que o domínio tende a se tornar bidimensional ($\varepsilon \to 0+$). Para tal, usaremos fortemente o fato do problema ter condições periódicas para podermos obter uma certa desigualdade do tipo de Poincaré, com dependência de ε adequada que será fundamental na demonstração da estimativa. Obtemos também o sistema reduzido bidimensional que corresponderá caso limite de $\varepsilon = 0$

No quarto capítulo, os resultado obtidos no capítulo anterior serão utilizados para estabelecer a existência de atratores (em um sentido fraco a ser explicado no capítulo) para os problemas em domínios tridimensionais finos (tais atratores serão também conjuntos finos em normas adequadas) e a sua a relação com o atrator correspondente para o problema reduzido bidimensional. Estes atratores serão comparados através da noção de semicontinuidade superior. Abordaremos em primeiro lugar o caso autônomo, isto é, consideraremos inicialmente o termo forçante (campo de forças externas) independente de t. Depois, utilizando a noção de *Skew-Product Semiflow* , estabeleceremos a comparação entre os atratores para problemas não autônomos.

Capítulo 1: Preliminares

Neste trabalho estaremos estudando o seguinte sistema de equações diferenciais parciais não lineares que governam o escoamento de um fluido incompressível, Newtoniano, com densidade variável e difusão de massa em um domínio fino descrito abaixo sob condições de contorno periódicas.

$$\begin{cases} \zeta\left[\dfrac{\partial U}{\partial t}+(U\cdot\nabla)\,U\right]-\mu\,\Delta U-\lambda\left[(U\cdot\nabla)\nabla\zeta+(\nabla\zeta\cdot\nabla)\,U\right]=\nabla P+G \text{ em } \Omega_\varepsilon \\ \operatorname{div} U=0 \;\; em\; \Omega_\varepsilon \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+U\cdot\nabla\zeta=\lambda\Delta\zeta \;\; em\; \Omega_\varepsilon \\ U\mid_{t=0}=U_0(X,Y) \quad para \;\; (X,Y)\in\Omega_\varepsilon \\ \zeta\mid_{t=0}=\zeta_0(X,Y) \quad para \;\; (X,Y)\in\Omega_\varepsilon \\ U((X,Y)+l_ie_i,t)=U((X,Y),t) \quad para \;\; i=1,2,3 \\ U((X,Y)+\varepsilon e_3,t)=U((X,Y),t) \\ \zeta((X,Y)+l_ie_i,t)=\zeta((X,Y),t) \quad para \;\; i=1,2, \\ \zeta((X,Y)+\varepsilon e_3,t)=\zeta((X,Y),t), \end{cases} \tag{1.1}$$

com condições iniciais adequadas para U e ζ. Nestas equações temos $l_3=1$, $(X,Y)\in\Omega_\varepsilon=\Omega\times(0,\varepsilon)$ para $\Omega=(0,l_1)\times(0,l_2)$ e $\{e_1,e_2,e_3\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Portanto, X e Y denotam respectivamente as componentes horizontal e vertical da variável independente espacial; l_1 e l_2 são os períodos dados nas direções horizontais.

Como na Introdução, ζ, U e P denotam respectivamente a densidade, a velocidade e a pressão no fluido e G denota respectivamente ζF ou F dependendo de ser o campo de forças externas F dado por unidade de massa ou unidade de volume (isto é, (1.1) corresponde respectivamente ao sistema (2) ou (3) da Introdução).

Sem perda de generalidade para o que nos interessa, em todo este trabalho estaremos supondo que $0 < \varepsilon < 1$.

Este primeiro capítulo é dividido em duas seções: a primeira dedica-se a recordar alguns resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho; a segunda seção estabelece uma mudança de variável que transforma o problema acima em um problema com domínio fixo e equações com parâmetro variável, preparando-o para a abordagem que será feita nos demais capítulos.

1.1 Notações e Resultados Preliminares

Para facilidade de referência, apresentaremos a seguir uma série de resultados que serão úteis no decorrer do trabalho.

Usaremos as notações padrões para os espaços de Sobolev usuais: sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto não vazio, $W^{m,p}(\Omega)$ denota a classe das funções que possuem derivadas no sentido de distribuições até ordem m que sejam funções de $L^p(\Omega)$. Como é usual, quando $p = 2$, denotaremos $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H_0^m(\Omega)$ denota o subconjunto de $H^m(\Omega)$ em que se anulam em $\partial\Omega$ no sentido de traços (para $\partial\Omega$ suficientemente regular).

Maiores informações sobre espaços de Sobolev podem ser encontradas, por exemplo, em Adams [1].

Devido às condições de contorno do problema que estaremos analisando, utilizaremos também espaços de Sobolev de funções periódicas. Assim, utilizaremos as seguintes notações:

Dados números estritamente positivos $l_1, \ldots, l_n$, chamamos o conjunto

$$D = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ 0 < x_i < l_i,\ i = 1, \ldots, n\} \tag{1.2}$$

de **célula básica** de períodos $l_1, \ldots, l_n$.

A cada ponto $z \in \mathbb{R}^n$ associamos uma célula de períodos $l_1, \ldots, l_n$, D_z obtida transladando de z a célula básica D: $D_z = z + D$.

Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é D-**periódica** se $u(x_1, \ldots, x_i + l_i e_i, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ para $i = 1, \ldots, n$ e todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Com as notações anteriores, denotamos por $W^{m,p}_{per}(D)$ a classe das funções D-periódicas tais que as suas restrições a qualquer célula periódica D_z com $z \in \mathbb{R}^n$ pertence a $W^{m,p}(D_z)$. Devido à periodicidade, pode-se tomar como norma em $W^{m,p}_{per}(D)$ o seguinte: $||u||_{W^{m,p}_{per}(D)} = ||u_{|D}||_{W^{m,p}(D)}$.

Quando $p = 2$ denotaremos $H^m_{per}(D) = W^{m,2}_{per}(D)$. Como é usual, é possível neste caso trabalhar com uma norma equivalente, utilizando os coeficientes das séries de Fourier das funções envolvidas, via o Teorema de Parseval.

Maiores informações sobre os espaços de Sobolev de funções periódicas podem ser encontrados, por exemplo, em Temam [37].

A seguir enunciamos um lema que fornece uma desigualdade de interpolação que nos será muito útil no decorrer de todo o trabalho. A primeira parte do enunciado do lema, referente a espaços de Sobolev usuais, pode ser encontrada em Tanabe [35], página 13; quanto à parte referente a espaços de Sobolev de funções periodicas, comentaremos logo a seguir.

1.1.1 Lema *Seja Ω uma região em $\mathbb{R}^n$ a qual é uniformemente regular de classe C^m. Sejam j um inteiro não negativo e $p, r \in (1, \infty)$.*

Se $0 \leq j \leq m$ e $p^{-1} - (m-j)n^{-1} \leq r^{-1} \leq p^{-1}$, então $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{r,j}(\Omega)$ e existe uma constante C tal que para $\lambda = nm^{-1}(p^{-1} - r^{-1} + jn^{-1})$ vale

$$||u||_{W^{j,r}(\Omega)} \leq C||u||^{\lambda}_{W^{m,p}(\Omega)}||u||^{1-\lambda}_{L^p(\Omega)}.$$

O mesmo resultado vale para os correspondentes espaços de Sobolev para classes de funções periódicas, $W^{k,l}_{per}(D)$, onde D é a célula básica do período.

Prova: Como a prova da primeira parte pode ser encontrada em outros textos, faremos apenas os comentários suficientes para provar a segunda. De fato, a última afirmação do lema é consequência da anterior; basta tomar uma domínio adequado $D \subset \tilde{\Omega}$ suficientemente regular; aplicar o resultado da afirmação anterior com $\tilde{\Omega}$ no lugar de Ω e utilizar a periodicidade das funções envolvidas para obter a desigualdade correspondente com uma constante que é a constante obtida com $\tilde{\Omega}$ multiplicada pelo número de células imediatamente vizinhas à célula D (número que depende apenas da dimensão). □

A seguir enunciaremos os princípios de máximo para equações parabólicas que nos auxiliarão na limitação da densidade no Capítulo 2. Estaremos baseados em Friedman [15], página 34 e seguintes.

Considere o operador diferencial parcial linear cuja expressão é:

$$L(u) \equiv \Sigma_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Sigma_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.3}$$

em um domínio $(n+1)$-dimensional $\mathcal{A}$. Suponhamos que L satisfaça as seguintes hipótese:

(A) L é um operador parabolico em $\mathcal{A}$, isto é, para todo $(x,t) \in \mathcal{A}$ e para todo vetor real $\zeta \neq 0$ se tem que $\Sigma_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\zeta_i\zeta_j > 0$.

(B) Os coeficientes de L são funções contínuas em $\mathcal{A}$.

(C) $c(x,t) \leq 0$ em $\mathcal{A}$.

Dado um ponto $(x_0, t_0) \in \mathcal{A}$, definamos também o subconjunto $\mathbf{S}(\mathbf{x_0}, \mathbf{t_0}) \subset \mathcal{A}$ formado pelos pontos $(x,t) \in \mathcal{A}$ que possam ser conectados a (x_0, t_0) por uma curva contínua totalmente contida em $\mathcal{A}$ e tal que se a percorrermos partindo do ponto (x,t) até ponto (x_0, t_0), a coordenada t é não decrescente.

Nestas condições, vale o seguinte **princípio do máximo forte**:

1.1.2 Teorema *Suponhamos que para o operador (1.3) valham as condições* (A), (B) *e* (C) *anteriores. Então, se $L(u) \geq 0$ ($L(u) \leq 0$) em D e se u tem em D um máximo positivo (mínimo negativo), o qual é assumido em um ponto $(x_0, t_0) \in \mathcal{A}$, então $u(x,t) = u(x_0, t_0)$ para todo $(x,t) \in S(x_0, t_0)$, onde $S(x_0, t_0)$ é o subconjunto definido acima.*

Enunciemos agora alguns resultados sobre um problema que é um caso especial do operador (1.3), mas que nos será muito útil nos capítulos futuros.

Sendo D definido como em (1.2), no lema abaixo, $C_{per}^{\infty}(D)$ denotará a classe das funções em $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ que são D-periódicas; $C_{per}^{\infty}(D \times [0,T])$ denotará a classe das funções em $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ tais que para cada $t \in [0,T]$ se tem que $u(.,t) \in C_{per}^{\infty}(D)$.

1.1.3 Lema *Considere a_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$ constantes reais tais que para todo vetor real $\zeta \neq 0$ vale que $\Sigma_{i,j=1}^n a_{ij}\zeta_i\zeta_j > 0$ e funções $b_i \in C_{per}^\infty(D \times [0,T])$, $i = 1, \dots, n$ e $u_0 \in C_{per}^\infty(D)$. Então, o seguinte problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Sigma_{i=1}^n b_i(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \Sigma_{i,j=1}^n a_{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \\ u(x,0) = u_0. \end{cases}$$

tem uma única solução clássica $u \in C_{per}^\infty(D \times [0,T])$. Além disso, se $0 < m \leq u_0(x) \leq M$ para todo x, então também para todo (x,t) vale que

$$m \leq u(x,t) \leq M. \tag{1.4}$$

A solução aludida acima é a solução do problema de contorno periódico:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Sigma_{i=1}^n b_i(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \Sigma_{i,j=1}^n a_{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \\ u(x + l_i e_i, t) = u(x,t), i = 1, \dots, n, \forall x \in R^n. \\ u(x,0) = u_0. \end{cases}$$

Prova A existência de uma solução D-periódica fraca pode ser facilmente obtida utilizando-se, por exemplo, o método de Faedo-Galerkin. A unicidade de tal solução pode ser obtida facilmente de forma usual: supondo que existam duas soluções, basta subtrair as equações correspondentes, multiplicar pela a diferença das soluções e então integrar em D, utilizando o fato de as soluções serem periódicas e fazendo as compensações usuais. Resultados clássicos de regularidade parabólica fornecem então que esta solução tem a regularidade enunciada. A última afirmação é óbvia das definições.

Assim, resta apenas provar que $m \leq u \leq M$. Para isto suponhamos por contradição que (1.4) não seja verdadeira. Então, se

$$\tilde{M} = \max\{u(x,t), (x,t) \in R^n \times [0,T]\} = \max\{u(x,t), (x,t) \in D \times [0,T]\} > M > 0,$$

temos que $u(x_0, t_0) = \tilde{M}$ para algum (x_0, t_0), com $t_0 > 0$. Porém, podemos aplicar o Princípio de Máximo Forte (Lema 1.1.2) e nestas condições o conjunto $S(x_0, t_0)$ a que se refere o lema é o conjunto $R^n \times (0, t_0]$. Portanto, o lema implica que $u(x,t) = \tilde{M}$ para todo $(x,t) \in R^n \times (0, t_0]$. Por continuidade temos então que $u_0(x) = \tilde{M} > M$, o que contradiz a hipótese sobre u_0 e, portanto, $u(x,t) \leq M$.

Se por outro lado tivermos:

$$\tilde{m} = \min\{u(x,t), (x,t) \in R^n \times [0,T]\} = \min\{u(x,t), (x,t) \in D \times [0,T]\} < m,$$

consideremos a função $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - m$. Então, $\tilde{u}$ também é D-periódica e satisfaz exatamente a mesma equação que u, com condição inicial $\tilde{u}(x,0) = u_0(x) - m \geq 0$. Neste caso, temos que

$$\min\{\tilde{u}(x,t), (x,t) \in R^n \times [0,T]\} = \min\{\tilde{u}(x,t), (x,t) \in D \times [0,T]\} = \tilde{m} - m < 0,$$

e, portanto, $\tilde{u}(x_1,t_1) = \tilde{m} - m$ para algum (x_1,t_1), com $t_1 > 0$. Outra vez podemos aplicar o Princípio de Máximo Forte (Lema 1.1.2) e $S(x_1,t_1)$ é o conjunto $R^n \times (0,t_1]$. Portanto, o lema implica que $\tilde{u}(x,t) = \tilde{m} - m$ para todo $(x,t) \in R^n \times (0,t_1]$. Por continuidade temos então que $\tilde{u}(x,0) = \tilde{m} - m < 0$, o que contradiz a hipótese sobre u_0 e, portanto, $m \leq u(x,t)$. □

Um resultado análogo ao anterior vale com menos regularidade nos dados do problema. De fato, temos:

1.1.4 Lema *Considere a_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$ constantes reais tais que para todo vetor real $\zeta \neq 0$ vale que $\Sigma_{i,j=1}^n a_{ij}\zeta_i\zeta_j > 0$ e funções $b_i \in L^2(0,T;H^1_{per}(D))$, $i = 1,\ldots,n$ e $u_0 \in L^2_{per}(D)$. Suponhamos além disso que* $\operatorname{div}(b_1,\ldots,b_n) = 0$. *Então, o seguinte problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Sigma_{i=1}^n b_i(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \Sigma_{i,j=1}^n a_{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \\ u(x,0) = u_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

tem uma única solução generalizada $u \in L^2(0,T;H^1_{per}(D))$. Além disso, se $0 < m \leq u_0(x) \leq M$ para todo x, então também para todo (x,t) vale que

$$m \leq u(x,t) \leq M. \tag{1.6}$$

A solução aludida acima é a solução generalizada do problema de contorno periódico:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Sigma_{i=1}^n b_i(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \Sigma_{i,j=1}^n a_{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \\ u(x + l_i e_i, t) = u(x,t), i = 1,\ldots,n, \forall x \in R^n. \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Prova: A existência e unicidade de soluções generalizadas se faz analogamente ao caso anterior. Provaremos apenas (1.6).

Considere $\epsilon > 0$ e funções $b_i^\epsilon \in C_{per}^\infty(D \times [0,T])$ e $u_0^\epsilon \in C_{per}^\infty(D)$ tais que, quando $\epsilon \to 0+$ temos $b_i^\epsilon \to b_i$ em $L^2(0,T; H_{per}^1(D))$; $\operatorname{div}(b_1^\epsilon, \ldots, b_n^\epsilon) = 0$; $u_0^\epsilon \to u_0$ em $L_{per}^2(D)$; $0 < m_\epsilon \leq u_0^\epsilon(x) \leq M_\epsilon$ (para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno) e $m_\epsilon \to m$ e $M_\epsilon \to M$. Tais funções podem ser obtidas por exemplo tomando a convolução de b_i e u_0 com um núcleo regularizante (*mollifier*) adequado.

Considere agora, conforme o Lema (1.1.3), as soluções $u_\epsilon \in C_{per}^\infty(D \times [0,T])$ do problema seguinte:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + \Sigma_{i=1}^n b_i^\epsilon(x,t)\dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i} - \Sigma_{i,j=1}^n a_{ij}\dfrac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \\ u_\epsilon(x,0) = u_0^\epsilon. \end{cases} \tag{1.7}$$

Do resultado do Lema (1.1.3), sabemos que para todo ϵ suficientemente pequeno $0 < m_\epsilon \leq u_\epsilon(x,t) \leq M_\epsilon$. Portanto, das informações sobre m_ϵ e M_ϵ, concluímos que para obtermos o resultado desejado basta mostrarmos que ao longo de alguma sequência $\epsilon_k \to 0+$ teremos $u_{\epsilon_k} \to u$ q.t.p. em $D \times (0,T)$.

Para isto, subtraímos a equação (1.5) da equação (1.7); multiplicamos $(u - u_\epsilon)$; integramos em D e fazemos algumas integrações por partes, utilizando o fato de que $\operatorname{div}(b_1, \ldots, b_n) = 0$ e $\operatorname{div}(b_1^\epsilon, \ldots, b_n^\epsilon) = 0$ e que as soluções são D-periódicas. Fazendo as compensações usuais, obtemos finalmente:

$$||u - u_\epsilon||^2_{L^\infty(0,T;L^2(D))} + \mu||\nabla u - \nabla u_\epsilon||^2_{L^2(0,T;L^2(D))} \leq \frac{M}{2\mu}\Sigma_{i=1}^n||b_i - b_i^\epsilon||^2_{L^2(0,T;L^2(D))}.$$

Isto implica em particular que quando $\epsilon \to 0+$, temos que $||u - u_\epsilon||_{L^2(D\times(0,T))} \to 0$, e, portanto, ao longo de uma subsequência $\epsilon_k \to 0+$ teremos $u_{\epsilon_k} \to u$ q.t.p. em $D \times (0,T)$ e portanto $m \leq u(x,t) \leq M$ q.t.p. em $D \times (0,T)$. □

Enunciamos a seguir uma versão o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [14], página 171. Este resultado será utilizado no Capítulo 2, na prova da existência de soluções locais do nosso problema.

1.1.5 Teorema

Sejam S um conjunto convexo fechado num espaço de Banach Y e T um operador contínuo de S em Y tal que TS está contido em S e o fecho de TS é compacto em Y. Então T possui um ponto fixo em S.

O teorema apresentado a seguir está demonstrado em [6], página 331, ele fornece condições para a existência de atrator para um semigrupo contínuo e será utilizado no Capítulo 4.

1.1.6 Teorema

Seja $\{S(t) : t \geq 0 : E\}$ um semigrupo de operadores contínuos em E, espaço métrico. Vamos supor que existe um aberto $\mathcal{U} \subset E$ e um conjunto limitado $\mathcal{B}_0$ absorvente em $\mathcal{U}$. Se $S(t)$ for uniformemente compacto para t grande então o conjunto ω-limite de $\mathcal{B}_0$ é o atrator global que atrai os limitados de $\mathcal{U}$.

Apresentamos agora uma versão do Lema de Gronwall que será utilizado repetidas vezes no decorrer do trabalho. Extraímos tal lema de [37], página 18.

1.1.7 Lema *Sejam funções y, $\dfrac{dy}{dt}$, a e $\theta \in L^1_{loc}(t_0, \infty)$ satisfazendo $\dfrac{dy}{dt} \leq a + \theta y$. Então, para $t \geq t_0$ tem-se que*

$$y(t) \leq y(0)\, exp\left\{\int_{t_0}^{t} \theta(\tau)\, d\tau\right\} + \int_{t_0}^{t} a(s)\, exp\left\{\int_{s}^{t} \theta(\tau)\, d\tau\right\} ds.$$

1.2 Preparação do Problema

Nesta seção prepararemos o problema para a análise propriamente dita procedendo de forma análoga a, por exemplo, [29]. O objetivo é o de, através uma adequada mudança de variáveis independentes, transferir a influência do parâmetro ε do domínio original para a novas equações. Tal mudança de variáveis é a seguinte:

$$x_i = X_i\,,\ i = 1, 2$$
$$y = \varepsilon^{-1} Y$$

Observemos que esta mudança transforma o domínio Ω_ε em

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times (0, 1). \tag{1.8}$$

Explicitemos agora como ela atua sobre as funções ζ, F e P, e sobre suas derivadas, introduzindo também as correspondentes funções u, ϱ, p e f, e também as notações ∇_ε, $\triangle_\varepsilon$ e div_ε.

$$U(X_1, X_2, Y) = u(X_1, X_2, \varepsilon^{-1}Y) = u(x_1, x_2, y)$$

$$\zeta(X_1, X_2, Y) = \varrho(X_1, X_2, \varepsilon^{-1}Y) = \varrho(x_1, x_2, y)$$
$$P(X_1, X_2, Y) = p(X_1, X_2, \varepsilon^{-1}Y) = p(x_1, x_2, y)$$
$$F(X_1, X_2, Y) = f(X_1, X_2, \varepsilon^{-1}Y) = f(x_1, x_2, y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial X_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i},\ i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_i X_j} = \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{\partial U}{\partial X_j}\right)\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j},\ i = 1, 2,\ j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_i Y} = \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right) = \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i y},\ i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right) = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Portanto, temos

$$\nabla U = (\frac{\partial U}{\partial X_1}, \frac{\partial U}{\partial X_2}, \frac{\partial U}{\partial Y}) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial X_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial X_2}, \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y})$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{div} U = \nabla \cdot U = \nabla_\varepsilon \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\triangle U = \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial Y}(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Como estas expressões serão muito utilizadas, para facilidade de referência, destacamos abaixo as seguintes notações.

$$\nabla_\varepsilon u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{1.9}$$

$$\operatorname{div}_\varepsilon u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.10}$$

$$\triangle_\varepsilon u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.11}$$

Ou seja, $\triangle_\varepsilon u = \triangle_x u + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ onde $\triangle_x u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$

Utilizando estes resultados, (1.1) se transforma nos seguintes problemas que serão os objetos das nossas considerações matemáticas a partir de agora. Quando $G = \zeta F$, o problema (1.1) se transforma no problema

$$\begin{cases} \varrho \left[\dfrac{du}{dt} + (u \cdot \nabla_\varepsilon u) \right] - \lambda \left[(u \cdot \nabla_\varepsilon) \nabla_\varepsilon \varrho + (\nabla_\varepsilon \varrho \cdot \nabla_\varepsilon)\, u \right] = \mu \triangle_\varepsilon u + \nabla_\varepsilon p + \varrho f \\ \operatorname{div}_\varepsilon u = 0 \\ \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} + u \cdot \nabla_\varepsilon \varrho = \lambda \triangle_\varepsilon \varrho \\ u((x,y) + l_i e_i, t) = u((x,y),t) \;\; i = 1,2,3 \\ \varrho((x,y) + l_i e_i, t) = \varrho((x,y),t) \;\; i = 1,2,3 \\ u((x,y),0) = u_0(x,y), \\ \varrho((x,y),0) = \varrho_0(x,y). \end{cases} \tag{1.12}$$

Quando $G = F$, temos o problema

$$\begin{cases} \varrho \left[\dfrac{du}{dt} + (u \cdot \nabla_\varepsilon u)\right] - \lambda \left[(u \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \varrho + (\nabla_\varepsilon \varrho \cdot \nabla_\varepsilon)\, u\right] = \mu \Delta_\varepsilon u + \nabla_\varepsilon p + f \\ \operatorname{div}_\varepsilon u = 0 \\ \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} + u \cdot \nabla_\varepsilon \varrho = \lambda\, \Delta_\varepsilon \varrho \\ u((x,y) + l_i\, e_i, t) = u((x,y),t) \;\; i = 1,2,3 \\ \varrho((x,y) + l_i\, e_i, t) = \varrho((x,y),t) \;\; i = 1,2,3 \\ u((x,y),0) = u_0(x,y), \\ \varrho((x,y),0) = \varrho_0(x,y). \end{cases} \tag{1.13}$$

Aqui, como antes, $l_3 = 1$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de $I\!R^3$ e ∇_ε , Δ_ε e div_ε são as expressões definidas em (1.9), (1.11) e (1.10). Explicitamos também as condições iniciais adequadas aos problemas.

Mais uma vez observamos que passamos de um problema com equações fixas em um domínio dependente de um parâmetro para problemas em um domínio fixo (em $\tilde{\Omega}$), mas com equações dependentes de um parâmetro .

Como em [29], devido à presença nas equações do parâmetro ε e à necessidade de um controle adequado das normas das soluções quando $\varepsilon \to 0+$ e também porque ocorre uma modificação no operador divergente natural ao problema, os espaços funcionais convenientes no nosso caso devem ser diferentes daqueles usualmente utilizados com as clássicas de Navier-Stokes. Em particular, os espaços de Sobolev subjacentes também devem ter suas normas alteradas, levando em conta a dependência com respeito a ε.

Para introduzir tais espaços, definamos antes os operadores diferenciais básicos $D_\varepsilon^\alpha u$ adequados à mudança de variáveis anterior. Neles, cada derivada em relação a terceira variável será multiplicada pelo fator ε^{-1}:

$$D_\varepsilon^\alpha u = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha_3}} D_3^{\alpha_3} u = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha_3}} \, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial y^{\alpha_3}} \, u. \tag{1.14}$$

Além disso, como estaremos sempre com o mesmo $\tilde{\Omega}$ e sempre com funções $\tilde{\Omega}$-periódicas, por simplicidade omitiremos nas notações dos espaços funcionais que se seguem tanto a sua dependência com respeito a este conjunto quanto o subíndice *per* que estávamos utilizando anteriormente para espaços de funções periódicas.

1.2.1 Definição
Sendo $\tilde{\Omega}$ a célula periódica básica definida em (1.8), definimos o espaço funcional

$$W_\varepsilon^{m,p} = \{u : I\!R^n \to I\!R,\ u \text{ é } \tilde{\Omega}\text{-periódica e } D_\varepsilon^\alpha u \in L^p(\tilde{\Omega}_z), 0 \leq |\ \alpha\ | \leq m\},$$

onde $\tilde{\Omega}_z = z + \tilde{\Omega}$, com a norma

$$||u||_{W_\varepsilon^{m,p}} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||D_\varepsilon^\alpha u||^p_{L^p(\tilde{\Omega})} \right\}^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Quando $p = 2$, denotamos

$$H_\varepsilon^m = W_\varepsilon^{m,2},$$

o qual é um espaço de Hilbert com produto interno dado para $u, v \in H_\varepsilon^m$ por

$$(u, v)_{H_\varepsilon^m} = \Sigma_{|\alpha| \leq m} (D_\varepsilon^\alpha u, D_\varepsilon^\alpha v)_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Também necessitaremos do seguinte subespaço de H_ε^k, formado por funções com média zero:

$$H_{\varepsilon,0}^k = \{u \in H_\varepsilon^k; \int_{\tilde{\Omega}} u(x, y)\, dx\, dy = 0\}. \tag{1.15}$$

A extensão para funções com valores vetoriais é obviamente a seguinte:

1.2.2 Definição

$$(W_\varepsilon^{m,p})^3 = W_\varepsilon^{m,p} \times W_\varepsilon^{m,p} \times W_\varepsilon^{m,p},$$

com norma de $u = (u_1, u_2, u_3)$ dada por

$$||u||_{(W_\varepsilon^{m,p})^3} = ||u_1||_{W_\varepsilon^{m,p}} + ||u_2||_{W_\varepsilon^{m,p}} + ||u_3||_{W_\varepsilon^{m,p}}.$$

Para simplificar a notação, já que do contexto ficará claro a que estaremos nos referindo, no texto que se segue, vamos denotar esta norma simplesmente por $\|\cdot\|_{W_\varepsilon^{m,p}}$.

1.2.3 Observação

A equação da densidade (que é a mesma tanto para o problema (1.12) quanto para o problema (1.13) formalmente implica que a média da densidade sobre a célula básica é constante.

De fato, da equação da densidade, das definições de $\operatorname{div}_\varepsilon u$, $\nabla_\varepsilon u$ e $\Delta_\varepsilon u$ e do fato de que $\operatorname{div}_\varepsilon u = 0$, temos que

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -u \cdot \nabla_\varepsilon \varrho + \lambda \Delta_\varepsilon \varrho = \operatorname{div}_\varepsilon (-u \cdot \varrho + \lambda \nabla_\varepsilon \varrho).$$

Integrando sobre $\tilde{\Omega}$, utilizando o teorema da divergência e utilizando as condiçẽs de contorno periódicas, concluímos que $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\tilde{\Omega}} \varrho(s)\, ds = 0$. Portanto, a média de ϱ no instante t é sempre igual a:

$$m_\varrho(t) = \frac{1}{m(\tilde{\Omega})} \int_{\tilde{\Omega}} \varrho(x,y,t)\, dxdy = \frac{1}{m(\tilde{\Omega})} \int_{\tilde{\Omega}} \varrho_0(x,y)\, dxdy = \tilde{\varrho}_0$$

É natural impor, como faremos no próximo capítulo, que para cada $t \in [0,T]$ $\varrho(.,t) - \tilde{\varrho}_0 \in H^m_{\varepsilon,0}$ (o espaço definido em (1.15)).

Como em capítulos futuros estaremos fazendo $\varepsilon \to 0+$, será importante notar como as constantes correspondentes às imersões de espaços de Sobolev dependem de ε. Neste sentido a observação abaixo será bastante útil.

1.2.4 Observação

Como $0 < \varepsilon \leq 1$, das definições, temos que $\|D^\alpha u\|^p_{L^p(\tilde{\Omega})} \leq \|D^\alpha_\varepsilon u\|^p_{L^p(\tilde{\Omega})}$.

Portanto, temos sempre que $\|u\|_{W^{m,p}(\tilde{\Omega})} \leq \|u\|_{W_\varepsilon^{m,p}}$ e, quando valer uma imersão de $W^{m,p}(\tilde{\Omega})$ em $L^q(\tilde{\Omega})$, também teremos que $W_\varepsilon^{m,p}$ estará imerso em $L^q(\tilde{\Omega})$. Além disso, a desigualdade correspondente entre as normas respectivas valerá com uma constante $C = C(\tilde{\Omega})$ de imersão que é independente de ε, pois

$$\|u\|_{L^q(\tilde{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\tilde{\Omega})} \leq C\|u\|_{W_\varepsilon^{m,p}}.$$

Na observação seguinte, são indicadas algumas equivalências de norma que valem em $H^k_{\varepsilon,0}$ e serão importantes no decorrer do trabalho.

1.2.5 Observação

$$\|\cdot\|_{H^2_{\varepsilon,0}} \text{ é equivalente a } \|\Delta_\varepsilon \cdot\|_{L^2(\tilde\Omega)} \text{ em } H^2_{\varepsilon,0},$$
$$\|\cdot\|_{H^3_{\varepsilon,0}} \text{ é equivalente a } \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \cdot\|_{L^2(\tilde\Omega)} \text{ em } H^3_{\varepsilon,0}.$$

De fato, seja $\sigma \in H^m_{\varepsilon,0}$, com $m = 2$ ou $m = 3$. Como σ tem média zero em $\tilde\Omega$, podemos aplicar a desigualdade de Poincaré ([13], página 275) e concluir que:

$$\|\sigma\|_{L^2(\tilde\Omega)} \leq K\|\nabla\sigma\|_{L^2(\tilde\Omega)} \leq K\|\nabla_\varepsilon \sigma\|_{L^2(\tilde\Omega)} \tag{1.16}$$

onde $K = K(\tilde\Omega)$ é independente de ε, como em (1.2.4).

Além disso, lembramos que podemos expressar $\sigma \in H^m_{\varepsilon,0}$ por sua série de Fourier. Denotando $a_i = l_i^{-1}$, $1 \leq i \leq 3$, onde l_i é o período na direção e_i (lembramos que no nosso caso temos $l_3 = a_3 = 1$), para $z \in \tilde\Omega$ temos que

$$\sigma(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \sigma^k \, e^{2\pi i k a\cdot z} \tag{1.17}$$

onde denotamos também $ka = (k_1a_1, k_2a_2, k_3a_3)$. Lembramos que os coeficientes de Fourier são dados por $\sigma^k = a_1a_2a_3 \int_{\tilde\Omega} \sigma(\zeta)\, e^{-2\pi i k a\cdot\zeta} d\zeta$ e que quando $\sigma \in H^m_{\varepsilon,0}$ temos que $\sigma^{(0,0,0)} = 0$, pois a média de σ é nula.

Utilizando a Identidade de Parseval, temos então

$$\|\sigma\|^2_{H^m_{\varepsilon,0}} = (a_1a_2a_3)^{-1} \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} (2\pi)^{2|\alpha|} \left(k_1a_1 + k_2 + a_2 + \frac{1}{\varepsilon}k_3a_3\right)^{2|\alpha|} |\sigma^k|^2$$

onde, como observamos acima, o termo referente a $k = (0,0,0)$ é nulo.

Assim, podemos obter a equivalência desejada, pois

$$\begin{aligned}
\|\sigma\|^2_{H^2_{\varepsilon,0}} &= (a_1a_2a_3)^{-1} \textstyle\sum_{|\alpha|\leq 2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} (2\pi)^{2|\alpha|}(k_1a_1 + k_2a_2 + \frac{1}{\varepsilon}k_3a_3)^{2|\alpha|}|\sigma^k|^2 \\
&\leq (a_1a_2a_3)^{-1}(2\pi)^4 \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}(k_1a_1 + k_2a_2 + \frac{1}{\varepsilon}k_3a_3)^4|\sigma^k|^2 \\
&\leq (a_1a_2a_3)^{-1}(2\pi)^4 16 \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}(k_1^2a_1^2 + k_2^2a_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}k_3^2a_3^2)^2|\sigma^k|^2 \\
&= 16\|\Delta_\varepsilon \sigma\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}.
\end{aligned}$$

e também

$\|\sigma\|^2_{H^3_{\varepsilon,0}} = (a_1a_2a_3)^{-1}\sum_{|\alpha|\le 3}\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}(2\pi)^{2|\alpha|}(k_1a_1 + k_2a_2 + \frac{1}{\varepsilon}k_3a_3)^{2|\alpha|}|\sigma^k|^2$

$\le (a_1a_2a_3)^{-1}(2\pi)^6\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}(k_1a_1 + k_2a_2 + \frac{1}{\varepsilon}k_3a_3)^6|\sigma^k|^2$

$\le (a_1a_2a_3)^{-1}(2\pi)^6 16\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}(k_1^2a_1^2 + k_2^2a_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}k_3^2a_3^2)^2(k_1a_1 + k_2a_2 + \frac{1}{\varepsilon}k_3a_3)^2|\sigma^k|^2$

$= 16\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \sigma\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}.$

Como as desigualdades opostas são triviais, temos as equivalências enunciadas.

Definiremos a seguir os espaços funcionais que serão associados à velocidade como em Raugel e Sell [29].

1.2.6 Definição

(i) Seja $C^\infty_{per,0}(\tilde{\Omega})$ a classe das funções $\tilde{\Omega}$-periódicas C^∞ e tais que suas restrições ao fecho de $\tilde{\Omega}$ tenham suporte contido em $\tilde{\Omega}$, definimos

$$\vartheta_{per,\varepsilon} = \{u \in (C^\infty_{por,0}(\tilde{\Omega}))^3; \operatorname{div}_\varepsilon u = 0 \text{ em } \tilde{\Omega}\}.$$

(ii) H_ε é definido como o fecho de $\vartheta_{per,\varepsilon}$ em $(L^2(\tilde{\Omega}))^3$.

(ii) V_ε é definido como o fecho de $\vartheta_{per,\varepsilon}$ em $(H^1_\varepsilon(\tilde{\Omega}))^3$.

Como no caso das equações de Navier-Stokes clássicas (veja, por exemplo, Temam [37], para o caso periódico, ou Temam [36], para outro casos), necessitaremos também do correspondente projetor de Helmholtz e do operador de Stokes:

1.2.7 Definição

Denotaremos por $\mathbf{P}_\varepsilon$ o **projetor de Helmholtz** associado a H_ε, isto é, $\mathbf{P}_\varepsilon$ é definido como a projeção ortogonal de $L^2(\tilde{\Omega})$ sobre H_ε.

Como em Raugel e Sell [29], vale a importante propriedade que $H_\varepsilon^\perp = \{\nabla_\varepsilon p : p \in H^1_\varepsilon\}$ e, portanto,

$$\mathbf{P}_\varepsilon(\nabla_\varepsilon p) = 0 \text{ para } p \in H^1_\varepsilon \tag{1.18}$$

1.2.8 Definição

Denotaremos por A_ε o **operador de Stokes** definido por

$$A_\varepsilon = -\mathbf{P}_\varepsilon \Delta_\varepsilon : D(A_\varepsilon) \subset H_\varepsilon \to H_\varepsilon,$$

com domínio $D(A_\varepsilon) = H_\varepsilon \cap (H_\varepsilon^2)^3$.

Uma propriedade importante, que é válida para condições de contorno periódicas, como é o nosso caso, e que pode ser verificada facilmente utilizando série de Fourier, é que

$$A_\varepsilon u = -\Delta_\varepsilon u \text{ para } u \in D(A_\varepsilon) \tag{1.19}$$

1.2.9 Observação

Observamos que, tanto na situação das equações de Navier-Stokes clássicas (densidade constante) com condições de contorno periódicas para a velocidade, como é o caso de Raugel e Sell [29] e no qual pode-se trabalhar com espaços de velocidade de média zero, quanto na situação das equações de Navier-Stokes com densidade variável e difusão de massa, mas em domínios limitados e condição de contorno do tipo Dirichlet homogênea para a velocidade e do tipo Neumann homogênea para a densidade, como é o caso de Beirão da Veiga em [7], pode-se aplicar a desigualdade de Poincaré e se utilizar então da equivalência entre $\|u\|_{V_\varepsilon}$ e $\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ para a velocidade $u \in V_\varepsilon$, onde V_ε é o correspondente espaço das velocidades naqueles trabalhos.

No caso dos problemas deste trabalho, não temos condições de fronteira do tipo Dirichlet para a velocidade e, embora estejamos com condições de contorno periódicas, devido às não linearidades decorrentes do acoplamento com a densidade, não podemos garantir em geral que, com algum ajustamento, a velocidade terá média zero. Assim, não é possível trabalhar desde o início com um espaço de velocidades com média zero como em Raugel e Sell [29], e não dispomos a priori de uma desigualdade do tipo Poincarè. Portanto, temos que trabalhar com um espaço de velocidades sem média zero, como na Definição 1.2.6, e neles não temos a equivalência de normas descrita anteriormente.

Assim, na Seção 2.1, deveremos mostrar a existência de soluções locais utilizando para o espaço V_ε a norma usual de H_ε^1, isto é,

$$\|u\|_{V_\varepsilon}^2 = \|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + \|\nabla_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2.$$

Por outro lado, em H_ε^2 ou $(H_\varepsilon^2)^3$, poderemos trabalhar com a norma

$$\|u\|_{H_\varepsilon^2}^2 = \|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + \|\Delta_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2,$$

onde u é um elemento desses espaços, uma vez que as condições periódicas permitem limitar $\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ e $\|D_\varepsilon^\alpha u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in (\mathbb{N})^3$ tal que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$, em função de $\|\Delta_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$.

Isto será provado a seguir. Antes queremos observar que como consequência deste fato e devido à propriedade descrita em (1.19), em $D(A_\varepsilon) = H_\varepsilon \cap (H_\varepsilon^2)^3$, podemos trabalhar com a norma

$$\|u\|_{H_\varepsilon^2}^2 = \|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + \|A_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2,$$

Para provar a afirmação, tomamos $u \in (H_\varepsilon^2)^3$ e consideremos a sua série de Fourier. Usando a mesma notação que em (1.17), para $z \in \tilde{\Omega}$, temos

$$u(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} u^k \, e^{2\pi i k a \cdot z}.$$

Assim,

$$\nabla_\varepsilon u(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} (2\pi i) \left(k_1 a_1, k_2 a_2, \frac{1}{\varepsilon} k_3 a_3\right) \cdot u^k \, e^{2\pi i k a \cdot z},$$

e, portanto,

$$\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 = 4\pi^2 (a_1 a_2 a_3)^{-1} \textstyle\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \left|\left(k_1 a_1, k_2 a_2, \frac{1}{\varepsilon} k_3 a_3\right) \cdot u^k\right|^2$$

$$\leq 4\pi^2 (a_1 a_2 a_3)^{-1} \textstyle\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \left(k_1^2 a_1^2 + k_2^2 a_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} k_3^2 a_3^2\right) |u^k|^2$$

$$\leq 16\pi^2 (a_1 a_2 a_3)^{-1} max\{a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_3^{-1}\} \textstyle\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \left(k_1^2 a_1^2 + k_2^2 a_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} k_3^2 a_3^2\right)^2 |u^k|^2$$

$$= max\{a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_3^{-1}\} \, \|\Delta_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2.$$

Agora, sendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in (I\!N)^3$ tal que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\|D_\varepsilon^\alpha u(x)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} &= (a_1a_2a_3)^{-1} \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^3} (2\pi)^4 \left| \left((k_1a_1)^{\alpha_1}, (k_2a_2)^{\alpha_2}, (\frac{1}{\varepsilon}k_3a_3)^{\alpha_3}\right) \cdot u^k \right|^2 \\
&\leq 16\pi^4 (a_1a_2a_3)^{-1} \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \left(k_1^2a_1^2 + k_2^2a_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}k_3^2a_3^2\right)^2 |u^k|^2 \\
&= \|\Delta_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para finalizar este capítulo, gostaríamos de comentar que a falta da equivalência entre as normas indicadas na Observação 1.2.9 implica que teremos maiores dificuldades em provar um teorema de existência local de soluções para os nossos problemas. Além disso, somente conseguiremos obter um teorema de existência global assumindo certas restriçõs, a serem descritas no próximo capítulo, sobre o campo de forças f e sobre os dados iniciais. A demonstração do resultado de existência global no tempo será possível porque sob tais condições seremos capazes de provar que para as soluções locais, cuja existência já está garantida, valerá a equivalência requerida de normas, embora tal equivalência continue sem valer em geral para funções arbitrárias no nosso espaço funcional das velocidades.

Capítulo 2: Existência de Soluções

Este capítulo é composto de duas seções. Na primeira delas estabelecemos a existência de solução local para o problema (1.12) e (1.13), bem como a prova da unicidade de tais soluções. A segunda seção será dedicada à prova da existência de solução global para dados iniciais suficientemente pequenos, mediante hipóteses adicionais. Como já foi mencionado no capítulo anterior, tais hipóteses nos permitirão estabelecer a equivalência entre $\|\cdot\|_{H^1_\varepsilon}$ e $\|\nabla_\varepsilon\cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ para a soluções locais, permitindo que obtenhamos o resultado de existência global.

2.1 Existência de Soluções Locais

Esta seção será dedicada a mostrar a existência de solução local no tempo para o problema (1.12) (bem como para o problema (1.13))

Como já foi observado anteriormente, Beirão da Veiga mostrou em [7] a existência de soluções locais de um problema semelhante ao abordado neste trabalho, mas com condições de contorno do tipo de Dirichlet homogênea para a velocidade e do tipo de Neumann homogênea para a densidade (convém observar que Beirão da Veiga não estuda o caso de domínios finos).

Como não temos em geral no nosso caso a equivalência entre $\|\cdot\|_{H^1_\varepsilon}$ e $\|\nabla_\varepsilon\cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ em V_ε, teremos que usar para este espaço a norma $\|\cdot\|_{H^1_\varepsilon}$ tal que $\|\cdot\|^2_{H^1_\varepsilon} = \|\cdot\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon\cdot\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$. Portanto, teremos a preocupação de controlar $\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$, o que não era necessário na situação abordada por Beirão da Veiga. Além disso, para uso nos capítulos seguintes, nos quais queremos obter o comportamento das soluções quando $\varepsilon \to 0+$, ao obtermos as estimativas para as normas, teremos que controlar suas dependências com respeito a ε.

Para mostrarmos a existência de soluções locais, utilizaremos argumentos de pontos fixos, construindo adequadamente um conjunto K em um certo espaço de funções e um operador $\Phi : K \to K$, para intervalos de tempo suficientemente pequenos, para qual poderemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder (1.1.5), e cujos pontos fixos correspondem às soluções de (1.12) (ou (1.13))

O operador Φ atuará em um subconjunto adequado do produto cartesiano do espaço funcional das velocidades pelo espaço funcional da densidade e será definido através de linearizações adequadas de cada uma das equações presentes em (1.12).

Formalmente, ele será definido como se segue:

2.1.1 Definição Considere fixados dados iniciais u_0, ϱ_0, e um campo de forças $f(t)$ definido em $[0,T]$, com regularidades a serem explicitadas posteriorente, e suponhamos que sejam fornecidos uma velocidade $\overline{u}$ e uma densidade $\overline{\varrho}$. Definiremos então o operador

$$\Phi(\overline{u},\overline{\varrho}) = (u,\varrho),$$

onde o par (u,ϱ) será a solução do sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} + \overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho = \lambda\,\triangle_\varepsilon\,\varrho \ \text{ em } \tilde{\Omega} \\[2ex] \varrho((x,y)+l_i\,e_i,t) = \varrho((x,y),t), \ \ i=1,2,3 \\[2ex] \varrho(x,y,0) = \varrho_0(x,y) \\[2ex] \varrho\,\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu\,\triangle_\varepsilon\,u = -\varrho\,(\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon)\overline{u} + \lambda\,[(\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\,\varrho \\[2ex] \qquad\qquad + (\nabla_\varepsilon\,\varrho\cdot\nabla_\varepsilon)\overline{u}] - \nabla_\varepsilon\,p + \varrho f \ \text{ em } \tilde{\Omega} \\[2ex] \operatorname{div}_\varepsilon u = 0 \ \text{ em } \tilde{\Omega} \\[2ex] u((x,y)+l_i e_i,t) = u((x,y),t), \ \ i=1,2,3 \\[2ex] u(x,y,0) = u_0(x,y). \end{cases}$$

Lembramos que, neste caso, pela definição de $\tilde{\Omega}$, temos $l_3 = 1$.

Observe que a primeira das equações diferenciais parciais acima é desacoplada da segunda. Uma vez que ela seja resolvida, obteremos ϱ, que será então usado como um dado na segunda equação, que fornecerá então u. Isto separa as dificuldades em dois blocos e sugere que devemos estudar separadamente cada um dos problemas correspondentes às equações acima. Isto será feito mais adiante nesta seção.

Também é óbvio que um ponto fixo de Φ, isto é, um par (u, ϱ) tal que $\Phi(u, \varrho) = (u, \varrho)$, será uma solução do nosso problema.

Adiantamos que o conjunto K no qual o ponto fixo será procurado será da forma $K = K_1(T^*) \times K_2(T^*)$, onde

$$K_1(T^*) = \left\{ u;\ u(.,0) = u_0,\ \|u\|^2_{L^\infty(0,T^*,V_\varepsilon)} + \|u\|^2_{L^2(0,T^*,H^2_\varepsilon)} + \|\frac{du}{dt}\|^2_{L^2(0,T^*,H_\varepsilon)} \le R_1^2 \right\} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} K_2(T^*) = \Big\{ \varrho;\ \varrho(.,0) = \varrho_0,\ &\|\varrho - \tilde{\varrho}_0\|^2_{L^\infty(0,T^*,H^2_{\varepsilon,0})} + \|\varrho - \tilde{\varrho}_0\|^2_{L^2(0,T^*,H^3_{\varepsilon,0})} \\ &+ \|\frac{d}{dt}(\varrho - \tilde{\varrho}_0)\|^2_{L^2(0,T^*,H^1_{\varepsilon,0})} \le R_2^2 \Big\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

com constantes estritamente positivas T^*, R_1 e R_2 independentes de ε a serem precisadas no decorrer do argumento. Destacamos em particular na notação acima a variável T^*, que deverá ser escolhida tal que $T^* \le T$ e suficientemente pequeno para garantir que $\Phi : K \to K$.

Em K_2, $\tilde{\varrho}_0 = \frac{1}{m(\tilde{\Omega})} \int_{\tilde{\Omega}} \varrho_0(x,y)\, dxdy$ é a média de ϱ_0 na célula básica. Além disso, como veremos, este K terá as propriedades desejadas desde que $T > 0$ seja suficientemente pequeno.

Iniciemos demonstrando um lema que fornece resultados sobre a primeira das equações anteriores.

2.1.2 Lema *Sejam dados*

$$\varrho_0 \in H^2_\varepsilon \ \textit{ tal que } \ 0 < m \le \varrho_0 \le M,$$

$$\overline{u} \in L^\infty(0,T,H^1_\varepsilon) \cap L^2(0,T,H^2_\varepsilon)$$

e consideremos o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} + \overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon \varrho = \lambda \Delta_\varepsilon \varrho \\ \varrho((x,y) + l_i e_i, t) = \varrho((x,y),t), \ i = 1,2,3 \\ \varrho(x,y,0) = \varrho_0(x,y). \end{cases} \tag{2.3}$$

Então existe uma única solução ϱ deste problema tal que

$$\varrho - \tilde{\varrho}_0 \in L^\infty(0,T,H^2_{\varepsilon,0}) \cap L^2(0,T,H^3_{\varepsilon,0}) \ \ e \ \ \frac{\partial}{\partial t}(\varrho - \tilde{\varrho}_0) \in L^2(0,T,H^1_{\varepsilon,0}),$$

onde $\tilde{\varrho}_0 = \frac{1}{m(\tilde{\Omega})} \int_{\tilde{\Omega}} \varrho_0(x,y)\, dxdy$ é a média de ϱ_0 na célula básica. De fato, se tem que $\varrho - \tilde{\varrho}_0 \in C(0,T,H^2_{\varepsilon,0})$.

Além disso, temos também que

$$m \leq \varrho \leq M \tag{2.4}$$

e, se $\overline{u} \in K_1$, onde K_1 é o conjunto definido em (2.1), vale a estimativa

$$\|\varrho - \tilde{\varrho}_0\|^2_{C(0,T,H^2_{\varepsilon,0})} + \|\varrho - \tilde{\varrho}_0\|^2_{L^2(0,T,H^3_{\varepsilon,0})} + \|\frac{d}{dt}(\varrho - \tilde{\varrho}_0)\|^2_{L^2(0,T,H^1_{\varepsilon,0})} \leq A(1+R_1^2)(1+e^{BR_1^2}) \tag{2.5}$$

onde A e B são constantes positivas dependendo apenas de $\tilde{\Omega}$, λ e $\|\Delta_\varepsilon \varrho_0\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$.

Em particular, para $0 < T^* \leq T$, se $\overline{u} \in K_1(T*)$ e se R_2 da definição (2.2) do conjunto $K_2(T^*)$ for tomado tal que $A(1+R_1^2)(1+e^{BR_1^2}) \leq R_2^2$, então teremos $\varrho \in K_2(T^*)$.

Prova:

A existência de solução deste problema linear com as regularidades indicadas pode ser obtida de forma padrão tal como indicamos em (1.1.3) ou (1.1.4). Além disso, o fato de que $m \leq \varrho \leq M$ é consequência imediata do Lema 1.1.4.

Assim, nos concentraremos na prova da estimativa (2.5). Para isto, seja

$$\sigma = \varrho - \tilde{\varrho}_0.$$

Observamos que se ϱ satisfaz o problema (2.3) então σ satisfaz o seguinte:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + \overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon \sigma = \lambda \Delta_\varepsilon \sigma \\ \sigma((x,y) + l_i e_i, t) = \sigma((x,y),t), \ i = 1,2,3 \\ \sigma(x,y,0) = \sigma_0(x,y) = \varrho_0(x,y) - \tilde{\varrho}_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Aplicando $\triangle_\varepsilon$ à primeira equação de (2.6) e tomando o produto interno da equação resultante com $\triangle_\varepsilon \sigma$, obtemos

$$(\triangle_\varepsilon \frac{d\sigma}{dt}, \triangle_\varepsilon \sigma) + (\triangle_\varepsilon [\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon \sigma], \triangle_\varepsilon \sigma) = \lambda (\triangle_\varepsilon \triangle_\varepsilon \sigma, \triangle_\varepsilon \sigma).$$

Como $(\triangle_\varepsilon [\lambda \triangle_\varepsilon \sigma - (\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon \sigma)], \triangle_\varepsilon \sigma) = -(\nabla_\varepsilon [\lambda \triangle_\varepsilon \sigma - (\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon \sigma)], \nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \sigma)$, obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\triangle_\varepsilon \sigma\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \lambda \|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \sigma\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq | (\nabla_\varepsilon [\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon \sigma], \nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon) |$$

$$\leq (\|\nabla_\varepsilon \overline{u}\|_{L^4(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon \sigma\|_{L^4(\tilde{\Omega})} + \|\overline{u}\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \|\triangle_\varepsilon \sigma\|_{L^2(\tilde{\Omega})}) \|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \sigma\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Agora, pelas imersões $H^1_\varepsilon(\tilde{\Omega})$ em $L^4(\tilde{\Omega})$ e $H^2_\varepsilon(\tilde{\Omega})$ em $L^\infty(\tilde{\Omega})$ (veja a Observação 1.2.4), e usando a desigualdade de Hölder, temos:

$$\frac{d}{dt} \|\triangle_\varepsilon \sigma\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \lambda \|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \sigma\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \frac{2C}{\lambda} \|\overline{u}\|^2_{H^2_\varepsilon} \|\triangle_\varepsilon \sigma\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \tag{2.7}$$

Assim, usando o Lema de Gronwall (Lema 1.1.7), obtemos que para $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \|\triangle_\varepsilon \sigma(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} &\leq \|\triangle_\varepsilon \sigma(0)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} exp\left\{\int_0^t \tfrac{2C}{\lambda} \|\overline{u}(\tau)\|^2_{H^2_\varepsilon} d\tau\right\} \\ &\leq \|\triangle_\varepsilon \sigma(0)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} exp\left\{\frac{2C}{\lambda} \|\overline{u}\|^2_{L^2(0,T,H^2_\varepsilon)}\right\}, \end{aligned}$$

e, portanto, temos

$$\|\sigma\|^2_{C(0,T,H^2_{\varepsilon,0})} \leq \|\triangle_\varepsilon \sigma(0)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} exp\left\{\frac{2C}{\lambda} \|\overline{u}\|^2_{L^2(0,T,H^2_\varepsilon)}\right\}. \tag{2.8}$$

Integrando (2.7) no tempo e utilizando esta última estimativa, obtemos também que

$$\lambda \int_0^T \|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \sigma\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} dt \leq \|\triangle_\varepsilon \sigma(0)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{2C}{\lambda} \|\sigma\|^2_{C(0,T,H^2_{\varepsilon,0})} \|\overline{u}\|^2_{L^2(0,T,H^2_\varepsilon)},$$

ou seja,

$$\|\sigma\|^2_{L^2(0,T,H^3_{\varepsilon,0})} \leq \frac{1}{\lambda} \|\triangle_\varepsilon \sigma(0)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{2C}{\lambda^2} \|\sigma\|^2_{C(0,T,H^2_{\varepsilon,0})} \|\overline{u}\|^2_{L^2(0,T,H^2_\varepsilon)} \tag{2.9}$$

Tomando agora ∇_ε aplicado à equação (2.3), temos:

$$\nabla_\varepsilon \left(\frac{d\sigma}{dt}\right) + \nabla_\varepsilon \left(\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon \sigma\right) = \lambda \nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \sigma.$$

Assim, usando as imersões de $H^2_\varepsilon(\tilde{\Omega})$ em $L^\infty(\tilde{\Omega})$ e $H^1_\varepsilon(\tilde{\Omega})$ em $L^4(\tilde{\Omega})$ (veja a Observação 1.2.4), obtemos:

$$\begin{aligned}\left\|\nabla_\varepsilon \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} &\leq \lambda \|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \sigma\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + C\,\|\nabla_\varepsilon \overline{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\,\|\nabla_\varepsilon \sigma\|_{H^2_{\varepsilon,0}} + C\,\|\overline{u}\|_{H^1_\varepsilon}\,\|\triangle_\varepsilon \sigma\|_{H^1_{\varepsilon,0}} \\ &\leq (\lambda + 2C\,\|\overline{u}\|_{H^1_\varepsilon})\,\|\sigma\|_{H^3_{\varepsilon,0}}\end{aligned}$$

onde C é a constante decorrente das imersões.

Logo, temos

$$\left\|\frac{d\sigma}{dt}\right\|_{L^2(0,T,H^1_{\varepsilon,0})} \leq (\lambda + 2C\,\|\overline{u}\|_{C(0,T,H^1_\varepsilon)})\,\|\sigma\|_{L^2(0,T,H^3_{\varepsilon,0})}. \tag{2.10}$$

Portanto, usando (2.8),(2.9) e(2.10), usando o fato de que $\overline{u} \in K_1(T^*)$ e simplificando, obtemos (2.5). $\square$

No lema a seguir obteremos estimativas para a velocidade.

2.1.3 Lema *Sejam $\overline{u}$ e ϱ como no Lema (2.1.2) e consideremos o problema*

$$\begin{cases} \varrho\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu\,\Delta_\varepsilon u + \nabla_\varepsilon p = -\varrho\,(\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon\,)\overline{u} \\ \qquad\qquad +\lambda\,[(\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon\,)\nabla_\varepsilon\,\varrho + (\nabla_\varepsilon\,\varrho\cdot\nabla_\varepsilon\,)\overline{u}] + \varrho f \\ u((x,y)+l_i e_i, t) = u((x,y),t), \;\; i = 1,2,3 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y). \end{cases} \tag{2.11}$$

Então existe solução $u \in L^\infty(0,T,V_\varepsilon) \cap L^2(0,T,D(A_\varepsilon))$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T,H_\varepsilon)$ para este problema. De fato, nestas condições se tem que $u \in C(0,T,V_\varepsilon)$

Além disso, para $0 < T^* \leq \min\{T,1\}$, vale o seguinte: fixemos $R_1 > 0$ na definição (2.1) do conjunto $K_1(T^*)$ e tomemos R_2 na definição (2.2) do conjunto $K_2(T^*)$ tal que $A(1+R_1^2)(1+e^{BR_1^2}) \leq R_2^2$, onde A e B são constantes positivas dependendo apenas de $\tilde{\Omega}$, λ e $\|\Delta_\varepsilon \varrho_0\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ e definidas no Lema 2.1.2. Então, se $\overline{u} \in K_1(T^*)$ vale a estimativa seguinte

$$\|u\|^2_{L^\infty(0,T^*;V_\varepsilon)} + \|u\|^2_{L^2(0,T^*;H_\varepsilon^2)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))}$$

$$\leq\; C\left[\|u_0\|^2_{V_\varepsilon} + (R_1^4 + R_2^4)\,T^{*1/4} + \|f\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))}\right] e^{2C\,(R_1^2+R_2^2)T^{*1/4}},$$

Prova:

Observamos que (2.11) corresponde a um problema de Stokes com densidade variável. A existência e unicidade de soluções de tal problema com a regularidade indicada pode ser feita exatamente como o problema de Stokes correspondente em Ladyzenskay e Solonnikov [20].

Assim, vamos nos concentrar na obtenção das estimativas enunciadas.

Iniciemos observando que, nas condições enunciadas, o Lema 2.1.2 garante que $\varrho \in K_2(T^*)$, e portanto valem as limitações para as normas indicadas em (2.2), fato que utilizaremos no que se segue.

Façamos agora o produto interno da equação diferencial em (2.11) por $2u$. Multipliquemos então a equação diferencial em (2.3) por u e tomemos o produto interno da equação resultante com u. Somemos as duas identidades resultantes para obter:

$$\left(\varrho \frac{du}{dt}, 2u\right) + \left(u \frac{\partial \varrho}{\partial t}, u\right) - (\mu \triangle_\varepsilon u, 2u) = (-\varrho(\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon)\overline{u}, 2u)$$

$$+\lambda\, [((\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \varrho, 2u) + ((\nabla_\varepsilon \varrho \cdot \nabla_\varepsilon)\overline{u}, 2u)] + (\varrho f, 2u)$$

$$-(\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon \varrho)u, u) + \lambda\, ((\triangle_\varepsilon \varrho)u, u)\,.$$

Usando a desigualdade de Hölder, 2.4, imersões de espaços de Sobolev , o fato de $\overline{u} \in K_1$ e $\varrho \in K_2$, bem como a observação de que $\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} = \|\varrho^{-1/2}\varrho^{1/2}u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq m^{-1/2}\, \|\varrho^{1/2}u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ podemos estimar cada um dos termos do lado direito como se segue:

$$\begin{aligned}
|\,(-\varrho(\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon)\overline{u}, 2u)\,| &\leq 2M\|\overline{u}\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon \overline{u}\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\, \|\overline{u}\|_{H^1_\varepsilon}\|\overline{u}\|_{H^2_\varepsilon}\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\, R_1\|\overline{u}\|_{H^2_\varepsilon}\|\varrho^{1/2}u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\lambda\,((\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \varrho, 2u)| &\leq 2\lambda\|\overline{u}\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon{}^2\varrho\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\, \|\overline{u}\|_{H^1_\varepsilon}\|\varrho - \tilde{\varrho}_0\|_{H^3_{\varepsilon,0}}\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\, R_1\|\varrho - \tilde{\varrho}_0\|_{H^3_{\varepsilon,0}}\|\varrho^{1/2}u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\lambda((\nabla_\varepsilon \varrho \cdot \nabla_\varepsilon)\overline{u}, 2u)| &\leq 2\lambda\|\nabla_\varepsilon \varrho\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon \overline{u}\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\, \|\varrho - \tilde{\varrho}_0\|_{H^2_{\varepsilon,0}}\|\overline{u}\|_{H^2_{\varepsilon,0}}\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\, R_2\|\overline{u}\|_{H^2_{\varepsilon,0}}\|\varrho^{1/2}u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}
\end{aligned}$$

$$|(\varrho f, 2u)| \leq 2M\|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C\|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\varrho^{1/2}u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

Os dois últimos termos são tratados analogamente, mas necessitam de uma manipulação prévia e também do uso de desigualdes de interpolação.

$$\begin{aligned}
|\,(\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon \varrho)u, u)\,| &= |\int_{\tilde{\Omega}}(\overline{u} \cdot \nabla_\varepsilon \varrho)\; u \cdot u| \\
&= |\int_{\tilde{\Omega}} \operatorname{div}_\varepsilon(\overline{u} \cdot \varrho)\; u \cdot u| \\
&= |-\int_{\tilde{\Omega}} \overline{u} \cdot \varrho\, 2u \cdot \nabla_\varepsilon u| \\
&\leq 2\|\overline{u}\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\varrho\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\, \|\overline{u}\|_{H^{7/4}_\varepsilon}\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\, \|\overline{u}\|^2_{H^{7/4}_\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + (\mu/4)\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\, (\|\overline{u}\|^{1/4}_{H^1_\varepsilon}\|\overline{u}\|^{3/4}_{H^2_\varepsilon})^2\|u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + (\mu/4)\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\, R_1^{1/2}\|\overline{u}\|^{3/2}_{H^2_\varepsilon}\|\varrho^{1/2}u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + (\mu/4)\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\lambda\,(\triangle_\varepsilon\,\varrho)u,u)| &= |\lambda \textstyle\int_{\tilde\Omega} \mathrm{div}_\varepsilon(\nabla_\varepsilon\,\varrho))\,u\cdot u| \\
&= |-\lambda \textstyle\int_{\tilde\Omega}(\nabla_\varepsilon\,\varrho)\,2u\cdot\nabla_\varepsilon\,u| \\
&\le 2\lambda\|\nabla_\varepsilon\,(\varrho-\tilde\varrho_0)\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,u\|_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&\le C\,\|\varrho-\tilde\varrho_0\|_{H^{11/4}_{\varepsilon,0}}\|u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,u\|_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&\le C\,\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^2_{H^{11/4}_{\varepsilon,0}}\|u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+(\mu/4)\|\nabla_\varepsilon\,u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&\le C\,(\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^{1/4}_{H^2_{\varepsilon,0}}\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^{3/4}_{H^3_{\varepsilon,0}})^2\|u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+(\mu/4)\|\nabla_\varepsilon\,u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&\le C\,R_2^{1/2}\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^{3/2}_{H^3_{\varepsilon,0}}\|\varrho^{1/2}u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+(\mu/4)\|\nabla_\varepsilon\,u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}
\end{aligned}
$$

Substituindo estas estimativas, vem:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\varrho^{1/2}u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\mu\,\|\nabla_\varepsilon\,u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&\le C\,R_1\|\overline{u}\|_{H^2_\varepsilon}\|\varrho^{1/2}u\|_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&+C\,R_1\|\varrho-\tilde\varrho_0\|_{H^3_{\varepsilon,0}}\|\varrho^{1/2}u\|_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&+C\,R_2\|\overline{u}\|_{H^2_{\varepsilon,0}}\|\varrho^{1/2}u\|_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&+C\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\varrho^{1/2}u\|_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&+C\,R_1^{1/2}\|\overline{u}\|^{3/2}_{H^2_\varepsilon}\|\varrho^{1/2}u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+(\mu/4)\|\nabla_\varepsilon\,u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&+C\,R_2^{1/2}\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^{3/2}_{H^3_{\varepsilon,0}}\|\varrho^{1/2}u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+(\mu/4)\|\nabla_\varepsilon\,u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\varrho^{1/2}u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\frac{\mu}{2}\,\|\nabla_\varepsilon\,u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \le{}& C\left(R_1\|\overline{u}\|_{H^2_\varepsilon}+R_1\|\varrho-\tilde\varrho_0\|_{H^3_{\varepsilon,0}}+R_2\|\overline{u}\|_{H^2_{\varepsilon,0}}+\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)}\right)\|\varrho^{1/2}\\
&+C\left(R_1^{1/2}\|\overline{u}\|^{3/2}_{H^2_\varepsilon}+R_2^{1/2}\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^{3/2}_{H^3_{\varepsilon,0}}\right)\|\varrho^{1/2}u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Denotando agora

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \|\varrho^{1/2}u(t)\|_{L^2(\tilde\Omega)}, \\
h(t) &= R_1\|\overline{u}\|_{H^2_\varepsilon}+R_1\|\varrho-\tilde\varrho_0\|_{H^3_{\varepsilon,0}}+R_2\|\overline{u}\|_{H^2_{\varepsilon,0}}+\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)}, \\
g(t) &= R_1^{1/2}\|\overline{u}\|^{3/2}_{H^2_\varepsilon}+R_2^{1/2}\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^{3/2}_{H^3_{\varepsilon,0}},
\end{aligned}
$$

a desigualdade anterior implica que

$$
\frac{d\phi(t)^2}{dt}\le Ch(t)\phi(t)+Cg(t)\phi(t)^2.
$$

Como o nosso objetivo é obter uma limitação para $\phi(t)$, se ela for nula, já teremos trivialmente a limitação. Assim, podemos assumir que $\phi(t)>0$ e então a última desigualdade implica que

$$\frac{d\phi(t)}{dt} \leq \frac{C}{2}h(t) + \frac{C}{2}g(t)\phi(t),$$

o que, pela Lema de Gronwall, implica que para $t \in [0,T]$ vale

$$\phi(t) \leq \left[\phi(0) + \frac{C}{2}\int_0^t h(s)ds\right] e^{\frac{C}{2}\int_0^t g(s)ds}$$

Agora, utilizando a desigualdade de Holder e lembrando que $\overline{u} \in K_1$ e $\varrho \in K_2$ (veja (2.1) e (2.2)), obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^t h(s)ds &= \textstyle\int_0^t \left(R_1\|\overline{u}\|_{H^2_\varepsilon} + R_1\|\varrho - \tilde{\varrho}_0\|_{H^3_{\varepsilon,0}} + R_2\|\overline{u}\|_{H^2_{\varepsilon,0}} + \|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\right) ds \\ &\leq C\ \left(R_1^2 + R_2^2\right) t^{1/2} + \|f\|_{L^1(0,t;L^2(\tilde{\Omega}))}\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\int_0^t g(s)ds = \int_0^t R_1^{1/2}\|\overline{u}\|^{3/2}_{H^2_\varepsilon} + R_2^{1/2}\|\varrho - \tilde{\varrho}_0\|^{3/2}_{H^3_{\varepsilon,0}} \leq C\ \left[R_1^2 + R_2^2\right] t^{1/4}$$

Lembrando a definição de ϕ, das desigualdades acima, concluímos que para $t \in [0,T]$ vale que

$$\|u(t)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C\ \left[\|u_0\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left(R_1^2 + R_2^2\right) t^{1/2} + \|f\|_{L^1(0,t;L(\tilde{\Omega}))}\right] e^{C\,[R_1^2+R_2^2]t^{1/4}}$$

E portanto, para $0 < T^* \leq T$ temos

$$\|u\|_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))} \leq C\ \left[\|u_0\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left(R_1^2 + R_2^2\right) T^{*1/2} + \|f\|_{L^1(0,T^*;L(\tilde{\Omega}))}\right] e^{C\,[R_1^2+R_2^2]T^{*1/4}} \tag{2.12}$$

Obtivemos assim uma limitação para $\|u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$, o que se faz necessário pelo fato de não termos a equivalência entre a norma de V_ε, $\|\cdot\|_{H^1_\varepsilon}$, e $\|\nabla_\varepsilon\cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$. Partimos agora para a limitação das normas das derivadas.

Tomamos o produto entre a primeira equação de (2.11) e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, para $u \in V_\varepsilon$, isto é,

$$\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \mu\left(\Delta_\varepsilon u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \left(\nabla_\varepsilon p, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\left(\varrho(\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon)\overline{u}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$+\lambda\left[\left((\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\varrho, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \left((\nabla_\varepsilon\varrho\cdot\nabla_\varepsilon)\overline{u}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] + \left(\varrho f, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Observando que o terceiro termo do lado esquerdo se anula pois $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in V_\varepsilon$ e que

$$\left(\varrho\,\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \left(\varrho^{1/2}\,\frac{\partial u}{\partial t}, \varrho^{1/2}\,\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \left\|\varrho^{1/2}\,\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \geq m\,\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})},$$

e

$$\left(\Delta_\varepsilon\, u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\left(\nabla_\varepsilon\, u, \nabla_\varepsilon\,\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon\, u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})},$$

após utilizar adequadamente a desigualdade de Holder e fazer algumas compensações, concluímos que

$$\begin{aligned} m\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon\, u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \;&\leq C\;\Big[\|\overline{u}\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})} + \|\overline{u}\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla^2_\varepsilon\varrho\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})} \\ &+\; \|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})} + \|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\Big] \end{aligned}$$

Utilizando agora a imersão de $H^1_\varepsilon(\tilde{\Omega})$ em $L^4(\tilde{\Omega})$ e desigualdades de interpolação na desigualdade anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} m\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon\, u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \;&\leq C\;\Big[\|\overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon}\left(\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^{1/4}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^{3/4}_{H^1_\varepsilon}\right)^2 \\ &+\; \|\overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon}\left(\|\nabla^2_\varepsilon\varrho\|^{1/4}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla^2_\varepsilon\varrho\|^{3/4}_{H^1_\varepsilon}\right)^2 \\ &+\; \|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|^2_{H^1_{\varepsilon,0}}\left(\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^{1/4}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^{3/4}_{H^1_\varepsilon}\right)^2 + \|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\Big] \end{aligned}$$

Utilizando agora o fato de $\overline{u} \in K_1$ e $\varrho \in K_2$, desta desigualdade vem

$$\begin{aligned} m\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon\, u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \;&\leq C\;\Big[R_1^{5/2}\|\overline{u}\|^{3/2}_{H^2_\varepsilon} + R_1^2R_2^{1/2}\|\varrho - \tilde{\varrho}_0\|^{3/2}_{H^3_{\varepsilon,0}} \\ &+ R_2^2R_1^{1/2}\|\overline{u}\|^{3/2}_{H^2_\varepsilon} + \|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\Big] \end{aligned} \tag{2.13}$$

Tomamos agora o produto entre a equação de (2.11) e $A_\varepsilon u$, para obter:

$$\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial t}, A_\varepsilon u\right) - \mu\,(\Delta_\varepsilon\, u, A_\varepsilon u) + (\nabla_\varepsilon\, p, A_\varepsilon u) = -\,(\varrho(\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon\,)\overline{u}, A_\varepsilon u)$$

$$+\lambda\,\left[((\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon\,)\nabla_\varepsilon\,\varrho, A_\varepsilon u) + (\varrho(\nabla_\varepsilon\,\varrho\cdot\nabla_\varepsilon\,)\overline{u}, A_\varepsilon u)\right] + (\varrho f, A_\varepsilon u).$$

O terceiro termo do primeiro membro da identidade acima é nulo pois $A_\varepsilon u \in V_\varepsilon$. Utilizando a desigualdade de Hölder adequadamente, temos então:

$$\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \le \frac{M^2}{\mu^2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + C\left[\|\overline{u}\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})}\right.$$

$$\left.+\|\overline{u}\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla^2_\varepsilon\varrho\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})} + \|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right]$$

Como antes, utilizando a imersão de $H^1_\varepsilon(\tilde{\Omega})$ em $L^4(\tilde{\Omega})$ e desigualdades de interpolação, obtemos:

$$\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \le \frac{M^2}{\mu^2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + C\left[\|\overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon}\left(\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^{1/4}_{L^2(\tilde{\Omega})}(\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^{3/4}_{H^1_\varepsilon}\right)^2\right.$$

$$+\|\overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon}\left(\|\nabla^2_\varepsilon\varrho\|^{1/4}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla^2_\varepsilon\varrho\|^{3/4}_{H^1_{\varepsilon,0}}\right)^2$$

$$\left.+\|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|^2_{H^1_{\varepsilon,0}}\left(\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^{1/4}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^{3/4}_{H^1_\varepsilon}\right)^2 + \|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right]$$

Lembrando que $\overline{u} \in K_1$ e $\varrho \in K_2$, da desigualdade anterior, vem

$$\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \le \frac{M^2}{\mu^2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + C\left[R_1^{5/2}\|\nabla_\varepsilon\,\overline{u}\|^{3/2}_{H^1_\varepsilon} + R_1^2R_2^{1/2}\|\varrho-\tilde{\varrho}_0\|^{3/2}_{H^3_{\varepsilon,0}}\right.$$

$$\left.+R_2^2R_1^{1/2}\|\overline{u}\|^{3/2}_{H^2_\varepsilon} + \|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right]$$

Multiplicando esta última desigualdade por $\dfrac{m\mu^2}{2M^2}$, somando com a desigualdade de (2.13) e simplificando, vem

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \frac{m}{2M^2}\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \frac{m}{2\mu}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq C\,\Big[R_1^{5/2}\|\overline{u}\|^{3/2}_{H^2_\varepsilon} + R_1^2R_2^{1/2}\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^{3/2}_{H^3_{\varepsilon,0}}$$

$$+R_2^2R_1^{1/2}\|\overline{u}\|^{3/2}_{H^2_\varepsilon} + \|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\Big]$$

Integrando esta última desigualdade no tempo de 0 a $0 < T^* \leq T$, obtemos

$$\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^\infty(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))} + \frac{m}{2M^2}\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))} + \frac{m}{2\mu}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))} \leq \|\nabla_\varepsilon u_0\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\,C\left[(R_1^{5/2}+R_2^2R_1^{1/2})\int_0^{T^*}\|\overline{u}\|^{3/2}_{H^2_\varepsilon}dt + R_1^2R_2^{1/2}\int_0^{T^*}\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^{3/2}_{H^3_{\varepsilon,0}}dt + \int_0^{T^*}\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}dt\right]$$

Utilizando a desigualdade de Hölder nas duas primeiras integrais e lembrando que $\overline{u} \in K_1(T^*)$ e $\varrho \in K_2(T^*)$, esta última desigualdade implica que

$$\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^\infty(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))} + \frac{m}{2M^2}\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))} + \frac{m}{2\mu}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))} \leq \|\nabla_\varepsilon u_0\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\,C\left[(R_1^{5/2}+R_2^2R_1^{1/2})\|\overline{u}\|^{3/2}_{L(0,T^*;H^2_\varepsilon)}T^{*1/4} + R_1^2R_2^{1/2}\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^{3/2}_{L^2(0,T^*;H^3_{\varepsilon,0})}T^{*1/4} + \|f\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))}\right]$$

$$\leq \|\nabla_\varepsilon u_0\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + C\left[(R_1^{5/2}+R_2^2R_1^{1/2})R_1^{3/2}T^{*1/4} + R_1^2R_2^{1/2}R_2^{3/2}T^{*1/4} + \|f\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))}\right]$$

$$\leq \|\nabla_\varepsilon u_0\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + C\,(R_1^4+R_2^4)\,T^{*1/4} + C\|f\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))}$$

Em resumo,

$$\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^\infty(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))} + \frac{m}{2M^2}\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))} + \frac{m}{2\mu}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))}$$

$$\leq \|\nabla_\varepsilon u_0\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + C\,(R_1^4+R_2^4)\,T^{*1/4} + C\|f\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))} \tag{2.14}$$

Agora, elevando a estimativa (2.12) ao quadrado e somando com (2.14) e simplificando, obtemos

$$\|u\|^2_{L^\infty(0,T^*;V_\epsilon)} + \|u\|^2_{L^2(0,T^*;H^2_\epsilon)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))}$$

$$\leq C\left[\|u_0\|^2_{V_\epsilon} + (R_1^4+R_2^4)\,T^{*1/4} + \|f\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))}\right] e^{2C\,(R_1^2+R_2^2)T^{*1/4}},$$

que é a estimativa enunciada. □

Com as informações dos dois lemas anteriores, podemos agora provar o seguinte:

2.1.4 Lema *Seja $K = K_1(T^*) \times K_2(T^*)$, com K_1 e K_2 definidos em (2.1),(2.2), e o operador Φ definido em (2.1.1). Então, para R_1 e R_2 adequadamente escolhidos e para T^* suficientemente pequeno, vale que $\Phi(K) \subset K$. Além disso, $\Phi : K \to K$ é contínua quando consideramos em $K = K_1(T^*) \times K_2(T^*)$ a topologia de $L^2(0,T^*,L^2(\tilde\Omega)) \times L^2(0,T^*,L^2(\tilde\Omega))$.*

Prova: As escolhas de R_1 e R_2 serão baseadas nas estimativas dos dois lemas anteriores.

De fato, basta inicialmente tomar R_1 grande o suficiente para que

$$3C\|u_0\|_{H^1_\epsilon} \leq \frac{R_1^2}{3},$$

onde C é a constante que aparece na estimativa do Lema 2.1.3.

Uma vez fixado tal R_1, escolhemos R_2 grande o suficiente para que

$$A(1+R_1^2)(1+e^{BR_1^2}) \leq R_2^2,$$

onde A e B são as constantes dadas no Lema 2.1.2. Com esta escolha, aquele lema garante que $\varrho \in K_2(T^*)$.

A seguir, escolhemos $T^* > 0$ tão pequeno que satisfaça ao mesmo tempo o seguinte:

$$0 < T^* \leq 1,$$

$$e^{2C\,(R_1^2+R_2^2)T^{*1/4}} \leq 3,$$

$$3C\,\left(R_1^4+R_2^4\right)T^{*1/4} \leq \frac{R_1^2}{3},$$

$$3C\|f\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))} \leq \frac{R_1^2}{3},$$

onde outra vez C é constante que aparece na estimativa do Lema 2.1.3.

Com tais escolhas, podemos provar que $\Phi(K) \subset K$. De fato, seja $(\overline{u}, \overline{\varrho}) \in K = K_1(T^*) \times K_2(T^*)$ com estes conjuntos definidos nas condições anteriores. Denotando $(u, \varrho) = \Phi(\overline{u}, \overline{\varrho})$, vemos que a estimativa do Lema 2.1.3 implica que

$$\|u\|^2_{L^\infty(0,T^*;V_\epsilon)} + \|u\|^2_{L^2(0,T^*;H^2_\epsilon)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))}$$

$$\leq C\left[\|u_0\|^2_{V_\epsilon} + (R_1^4 + R_2^4)\,T^{*1/4} + \|f\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))}\right] e^{2C\,(R_1^2+R_2^2)T^{*1/4}}$$

$$\leq C\left[\|u_0\|^2_{V_\epsilon} + (R_1^4 + R_2^4)\,T^{*1/4} + \|f\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))}\right] 3$$

$$\leq \frac{R_1^2}{3} + \frac{R_1^2}{3} + \frac{R_1^2}{3} = R_1^2$$

Portanto, temos também que $u \in K_1(T^*)$.

Assim, $\Phi(\overline{u}, \overline{\varrho}) = (u, \varrho) \in K_1(T^*) \times K_2(T^*) = K$ e, portanto, $\Phi(K) \subset K$.

Passemos à prova da continuidade da Φ.

Sejam $(\overline{u}, \overline{\varrho}), (\overline{u}_n, \overline{\varrho}_n) \in K$, para $n = 1, \ldots, \infty$ e tais que $\overline{u}_n \to \overline{u}$ e $\overline{\varrho}_n \to \overline{\varrho}$ em $L^2(0, T, L^2(\tilde{\Omega}))$ quando $n \to \infty$.

Denotemos $(u, \varrho) = \Phi(\overline{u}, \overline{\varrho})$ e $(u_n, \varrho_n) = \Phi(\overline{u}_n, \overline{\varrho}_n)$, e passemos a provar que $u_n \to u$ e $\varrho_n \to \varrho$ em $L^2(0, T, L^2(\tilde{\Omega}))$ quando $n \to \infty$.

Para isto, observando que da definição de Φ, tomando a diferença entre as equações que ϱ e $\overline{\varrho}$ satisfazem, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_n - \varrho) + (\overline{u}_n - \overline{u})\nabla_\varepsilon\,\varrho + \overline{u}_n \cdot \nabla_\varepsilon\,(\varrho_n - \varrho) = \lambda\,\Delta_\varepsilon\,(\varrho_n - \varrho) \tag{2.15}$$

Agora, efetuamos o produto interno entre (2.15) e $\varrho_n - \varrho$, fazemos integrações por partes usuais, observando que o terceiro termo se anula, utilizamos a desigualdade de Holder e imersões em espaços de Sobolev para obter:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varrho_n-\varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\lambda\,\|\nabla_\varepsilon(\varrho_n-\varrho)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} &= -\textstyle\int_{\tilde\Omega}(\overline{u}_n-\overline{u})\cdot\nabla_\varepsilon\varrho\,(\varrho_n-\varrho)\\
&\le \|\overline{u}_n-\overline{u}\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\varrho_n-\varrho\|_{L^4(\tilde\Omega)}\\
&\le C\,\|\overline{u}_n-\overline{u}\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\varrho\|_{H^2_{\varepsilon,0}}\|\nabla_\varepsilon(\varrho_n-\varrho)\|_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\le C\,\|\overline{u}_n-\overline{u}\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|\varrho\|^2_{H^2_{\varepsilon,0}}+\frac{\lambda}{2}\|\nabla_\varepsilon(\varrho_n-\varrho)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}
\end{aligned}
$$

Utilizando o fato de $\varrho\in K_2(T^*)$ e simplificando, a desigualdade acima implica que

$$
\frac{d}{dt}\|\varrho_n-\varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\lambda\,\|\nabla_\varepsilon(\varrho_n-\varrho)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\le C\,R_2^2\,\|\overline{u}_n-\overline{u}\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}
$$

Integrando no tempo e lembrando que $\varrho(.,0)=\varrho_n(.,0)$, obtemos para $t\in[0,T^*]$:

$$
\|\varrho_n(t)-\varrho(t)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\lambda\int_0^t\|\nabla_\varepsilon(\varrho_n(s)-\varrho(s))\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}ds\le C\,R_2^2\int_0^t\|\overline{u}_n-\overline{u}\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}ds
$$

Portanto,

$$
\|\varrho_n-\varrho\|^2_{L^\infty(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))}+\lambda\,\|\nabla_\varepsilon(\varrho_n-\varrho)\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))}\le C\,R_2^2\,\|\overline{u}_n-\overline{u}\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))}
$$

Em particular, temos para $n\to\infty$ que

$$
\|\varrho_n-\varrho\|_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))}\to 0
$$

e

$$
\|\nabla_\varepsilon(\varrho_n-\varrho)\|_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde\Omega))}\to 0,
$$

e que implicam o seguinte

$$
\|\varrho_n-\varrho\|_{L^2(0,T^*;H^1_{\varepsilon,0})\to 0} \tag{2.16}
$$

Observamos agora que u_n-u satisfaz a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
&\varrho\,\frac{\partial}{\partial t}(u_n-u)-\mu\,\triangle_\varepsilon\,(u_n-u)-\nabla_\varepsilon(p_n-p)\\
&=(\varrho-\varrho_n)\frac{\partial u_n}{\partial t}+(\varrho-\varrho_n)(u_n\cdot\nabla_\varepsilon\,)\overline{u}_n\\
&-\varrho\,((\overline{u}_n-u)\cdot\nabla_\varepsilon\,)\overline{u}_n-\varrho\,(\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon\,)(\overline{u}_n-\overline{u})\\
&+\lambda\,((\overline{u}_n-\overline{u})\cdot\nabla_\varepsilon\,)\nabla_\varepsilon\,\varrho+\lambda\,(\nabla_\varepsilon\,\varrho\cdot\nabla_\varepsilon\,)(\overline{u}_n-\overline{u})\\
&+\lambda(\overline{u}_n\cdot\nabla_\varepsilon\,)\nabla_\varepsilon\,(\varrho_n-\varrho)+\lambda(\nabla_\varepsilon\,(\varrho_n-\varrho)\cdot\nabla_\varepsilon\,)\overline{u}_n\\
&+f(\varrho_n-\varrho).
\end{aligned}\tag{2.17}$$

Tomamos agora o produto interno entre a expressão (2.17) e u_n-u e notamos que

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde\Omega}\varrho\,\frac{\partial}{\partial t}(u_n-u)\cdot(u_n-u)\;&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\tilde\Omega}\varrho\,|u_n-u|^2-\frac{1}{2}\int_{\tilde\Omega}\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,|u_n-u|^2,\\
&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\tilde\Omega}\varrho\,|u_n-u|^2\\
&-\frac{\lambda}{2}\int_{\tilde\Omega}\triangle_\varepsilon\,\varrho\,|u_n-u|^2+\frac{1}{2}\int_{\tilde\Omega}\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho\,|u_n-u|^2,
\end{aligned}$$

onde na última passagem utilizamos a equação para ϱ. Também temos:

$$-\mu\int_{\tilde\Omega}\triangle_\varepsilon\,(u_n-u)\cdot(u_n-u)=\mu\int_{\tilde\Omega}|\nabla_\varepsilon\,(u_n-u)|^2$$

e

$$-\int_{\tilde\Omega}\nabla_\varepsilon(p_n-p)\cdot(u_n-u)=0,$$

Com estas observações, obtemos de (2.17) o seguinte:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\varrho^{1/2}(u_n-u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\mu\|\nabla_\varepsilon(u_n-u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&=+\frac{\lambda}{2}\int_{\tilde\Omega}\triangle_\varepsilon\varrho\,|u_n-u|^2-\frac{1}{2}\int_{\tilde\Omega}\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon\varrho\,|u_n-u|^2\\
&+\int_{\tilde\Omega}(\varrho-\varrho_n)\frac{\partial u_n}{\partial t}\cdot(u_n-u)+\int_{\tilde\Omega}(\varrho-\varrho_n)(u_n\cdot\nabla_\varepsilon)\overline{u}_n\cdot(u_n-u)\\
&-\int_{\tilde\Omega}\varrho\,((\overline{u}_n-u)\cdot\nabla_\varepsilon)\overline{u}_n\cdot(u_n-u)-\int_{\tilde\Omega}\varrho\,(\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon)(\overline{u}_n-\overline{u})\cdot(u_n-u)\\
&+\lambda\int_{\tilde\Omega}((\overline{u}_n-\overline{u})\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\varrho\cdot(u_n-u)+\lambda\int_{\tilde\Omega}(\nabla_\varepsilon\varrho\cdot\nabla_\varepsilon)(\overline{u}_n-\overline{u})\cdot(u_n-u)\\
&+\lambda\int_{\tilde\Omega}(\overline{u}_n\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon(\varrho_n-\varrho)(u_n-u)+\lambda\int_{\tilde\Omega}(\nabla_\varepsilon(\varrho_n-\varrho)\cdot\nabla_\varepsilon)\overline{u}_n\cdot(u_n-u)\\
&+\int_{\tilde\Omega}(\varrho_n-\varrho)f\cdot(u_n-u)
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder, desigualdades de interpolação e o fato de (u,ϱ), $(\overline{u},\overline{\varrho})$, (u_n,ϱ_n) e $(\overline{u}_n,\overline{\varrho}_n)\in K$, cada um dos termos à direita desta identidade pode ser estimado como se segue:

O primeiro termo do lado direito de (2.18) estima-se da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\lambda}{2}\int_{\tilde\Omega}\triangle_\varepsilon\varrho\,|u_n-u|^2\right| &\le \left|\frac{\lambda}{2}\int_{\tilde\Omega}\mathrm{div}_\varepsilon(\nabla_\varepsilon\varrho)\,(u_n-u)\cdot(u_n-u)\right|\\
&\le\left|-\lambda\int_{\tilde\Omega}\nabla_\varepsilon\varrho\cdot((u_n-u)\cdot\nabla_\varepsilon)\,(u_n-u)\right|\\
&\le\lambda\,\|\nabla_\varepsilon\varrho\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|u_n-u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon(u_n-u)\|_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\le C\,\|\varrho-\tilde\varrho_0\|_{H^3_\varepsilon}\|u_n-u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon(u_n-u)\|_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\le C_\delta\,\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^2_{H^3_\varepsilon}\|u_n-u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\delta\|\nabla_\varepsilon(u_n-u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}
\end{aligned}
$$

para $\delta>0$ que será feito suficientemente pequeno e $C_\delta>0$ adequada.

O segundo termo do lado direito de (2.18) estima-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2}\int_{\tilde{\Omega}} \overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho\,|u_n-u|^2\right| &\leq \left|\frac{1}{2}\int_{\tilde{\Omega}} \mathrm{div}_\varepsilon\,(\overline{u}\varrho)\,(u_n-u)\cdot(u_n-u)\right| \\
&\leq \left|-\int_{\tilde{\Omega}} \varrho\overline{u}\cdot((u_n-u)\cdot\nabla_\varepsilon)\,(u_n-u)\right| \\
&\leq \|\varrho\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\overline{u}\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|u_n-u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon(u_n-u)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq MC\,\|\overline{u}\|_{H^2_\varepsilon}\,\|u_n-u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon(u_n-u)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C_\delta\,\|\overline{u}\|^2_{H^2_\varepsilon}\,\|u_n-u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\delta\|\nabla_\varepsilon(u_n-u)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})},
\end{aligned}$$

onde outra vez $\delta > 0$ que será feito suficientemente pequeno e $C_\delta > 0$ é uma constante adequada.

O terceiro termo do lado direito de (2.18) estima-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\tilde{\Omega}}(\varrho-\varrho_n)\frac{\partial u_n}{\partial t}\cdot(u_n-u)\right| \leq\; &\|\varrho-\varrho_n\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|u_n-u\|_{L^4(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\,\|\varrho-\varrho_n\|_{H^1_{\varepsilon,0}}\left\|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|u_n-u\|_{H^1_\varepsilon} \\
&\leq C\,\|\varrho-\varrho_n\|_{H^1_{\varepsilon,0}}\left\|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left(\|u_n\|_{H^1_\varepsilon}+\|u\|_{H^1_\varepsilon}\right) \\
&\leq C\,\|\varrho-\varrho_n\|_{H^1_{\varepsilon,0}}\left\|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}R_1
\end{aligned}$$

O quarto termo do lado direito de (2.18) estima-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\tilde{\Omega}}(\varrho-\varrho_n)(u_n\cdot\nabla_\varepsilon)\overline{u}_n\cdot(u_n-u)\right| &\leq \|\varrho-\varrho_n\|_{L^6(\tilde{\Omega})}\|u_n\|_{L^6(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\overline{u}_n\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|u_n-u\|_{L^6(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C\,\|\varrho-\varrho_n\|_{H^1_{\varepsilon,0}}\|u_n\|_{H^1_\varepsilon}\|\overline{u}_n\|_{H^1_\varepsilon}\|u_n-u\|_{H^1_\varepsilon} \\
&\leq C\,\|\varrho-\varrho_n\|_{H^1_{\varepsilon,0}}\|u_n\|_{H^1_\varepsilon}\|\overline{u}_n\|_{H^1_\varepsilon}\left(\|u_n\|_{H^1_\varepsilon}+\|u\|_{H^1_\varepsilon}\right) \\
&\leq C\,\|\varrho-\varrho_n\|_{H^1_{\varepsilon,0}}R_1^3
\end{aligned}$$

O quinto termo do lado direito de (2.18) estima-se da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\tilde\Omega} \varrho\,((\overline{u}_n - u)\cdot\nabla_\varepsilon)\overline{u}_n\cdot(u_n-u)\right| &\le \|\varrho\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\overline{u}_n-\overline{u}\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\overline{u}_n\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|u_n-u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\le MC\|\overline{u}_n-\overline{u}\|_{H^1_\varepsilon}\|\overline{u}_n\|_{H^2_\varepsilon}\|u_n-u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\le C\|\overline{u}_n\|^2_{H^2_\varepsilon}\|u_n-u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\overline{u}_n-\overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon}
\end{aligned}
$$

O sexto termo do lado direito de (2.18) estima-se da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\tilde\Omega} \varrho\,(\overline{u}\cdot\nabla_\varepsilon)(\overline{u}_n-u_n)\cdot(u_n-u)\right| &\le M\|\overline{u}\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon(\overline{u}_n-\overline{u})\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|u_n-u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\le C\|\overline{u}\|_{H^2_\varepsilon}\|u_n-u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\overline{u}_n-\overline{u}\|_{H^1_\varepsilon}\\
&\le C\|\overline{u}\|^2_{H^2_\varepsilon}\|u_n-u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\overline{u}_n-\overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon}
\end{aligned}
$$

O sétimo termo do lado direito de (2.18) estima-se da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\left|\lambda\int_{\tilde\Omega}((\overline{u}_n-\overline{u})\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\varrho\cdot(u_n-u)\right| &\le \lambda\,\|\overline{u}_n-\overline{u}\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla^2_\varepsilon\varrho\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|u_n-u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\le C\,\|\varrho-\tilde\varrho_0\|_{H^3_\varepsilon,0}\|u_n-u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\overline{u}_n-\overline{u}\|_{H^1_\varepsilon}\\
&\le C\,\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^2_{H^3_\varepsilon,0}\|u_n-u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\overline{u}_n-\overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon}
\end{aligned}
$$

O oitavo termo do lado direito de (2.18) estima-se da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\left|\lambda\int_{\tilde\Omega}(\nabla_\varepsilon\varrho\cdot\nabla_\varepsilon)(\overline{u}_n-\overline{u})\cdot(u_n-u)\right| &\le \lambda\|\nabla_\varepsilon\varrho\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon(\overline{u}_n-\overline{u})\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|u_n-u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\le C\|\varrho-\tilde\varrho_0\|_{H^3_\varepsilon,0}\|\overline{u}_n-\overline{u}\|_{H^1_\varepsilon}\|u_n-u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\le C\|\varrho-\tilde\varrho_0\|^2_{H^3_\varepsilon,0}\|u_n-u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\overline{u}_n-\overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon}
\end{aligned}
$$

O nono termo do lado direito de (2.18) estima-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\left|\lambda \int_{\tilde\Omega} (\overline{u}_n \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\cdot (u_n - u)\right| &\le \left|\lambda \int_{\tilde\Omega} \operatorname{div}_\varepsilon(\overline{u}_n \cdot \nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho))\cdot (u_n - u)\right| \\
&\le \left|-\lambda \int_{\tilde\Omega} (\overline{u}_n \cdot \nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho))\cdot \nabla_\varepsilon (u_n - u)\right| \\
&\le \lambda \|\overline{u}_n\|_{L^4(\tilde\Omega)} \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|_{L^4(\tilde\Omega)} \|\nabla_\varepsilon (u_n - u)\|_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&\le C_\delta \|\overline{u}_n\|^2_{L^4(\tilde\Omega)} \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|^2_{L^4(\tilde\Omega)} + \delta \|\nabla_\varepsilon (u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&\le C_\delta \|\overline{u}_n\|^2_{H^1_\varepsilon} \left(\|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|^{1/4}_{L^2(\tilde\Omega)} \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|^{3/4}_{H^1_{\varepsilon,0}} \right)^2 \\
&\qquad + \delta \|\nabla_\varepsilon (u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&\le C_\delta \|\overline{u}_n\|^2_{H^1_\varepsilon} \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|^{1/2}_{L^2(\tilde\Omega)} \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|^{3/2}_{H^1_{\varepsilon,0}} \\
&\qquad + \delta \|\nabla_\varepsilon (u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&\le C_\delta \|\overline{u}_n\|^2_{H^1_\varepsilon} \left(\|\varrho_n - \tilde\varrho_0\|_{H^2_{\varepsilon,0}} + \|\varrho - \tilde\varrho_0\|_{H^2_{\varepsilon,0}} \right)^{3/2} \\
&\quad \cdot \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|^{1/2}_{L^2(\tilde\Omega)} + \delta \|\nabla_\varepsilon (u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&\le C_\delta R_1^2 R_2^{3/2} \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|^{1/2}_{L^2(\tilde\Omega)} + \delta \|\nabla_\varepsilon (u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}
\end{aligned}$$

O décimo termo do lado direito de (2.18) estima-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\left|\lambda \int_{\tilde\Omega} (\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\cdot \nabla_\varepsilon)\overline{u}_n \cdot (u_n - u)\right| &\le \lambda \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|_{L^2(\tilde\Omega)} \|\nabla_\varepsilon \overline{u}_n\|_{L^4(\tilde\Omega)} \|u_n - u\|_{L^4(\tilde\Omega)} \\
&\le C \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|_{L^2(\tilde\Omega)} \left(\|\nabla_\varepsilon \overline{u}_n\|^{1/4}_{L^2(\tilde\Omega)} \|\nabla_\varepsilon \overline{u}_n\|^{3/4}_{H^1_\varepsilon} \right) \|u_n - \\
&\le C \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|_{L^2(\tilde\Omega)} \|\overline{u}_n\|^{3/4}_{H^2_\varepsilon} \|\overline{u}_n\|^{1/4}_{H^1_\varepsilon} \left(\|u_n\|_{H^1_\varepsilon} + \|u\|_{H^1_\varepsilon} \right. \\
&\le C R_1^{5/4} \|\overline{u}_n\|^{3/4}_{H^2_\varepsilon} \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|_{L^2(\tilde\Omega)}
\end{aligned}$$

O décimo primeiro termo do lado direito de (2.18) estima-se da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\tilde{\Omega}}(\varrho_n-\varrho)f\cdot(u_n-u)\right| &\le \|\varrho_n-\varrho\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|u_n-u\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\\
&\le C\|\varrho_n-\varrho\|_{H^1_{\varepsilon,0}}\|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|u_n-u\|_{H^1_\varepsilon}\\
&\le C\|\varrho_n-\varrho\|_{H^1_{\varepsilon,0}}\|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left(\|u_n\|_{H^1_\varepsilon}+\|u\|_{H^1_\varepsilon}\right)\\
&\le 2CR_1\|\varrho_n-\varrho\|_{H^1_{\varepsilon,0}}\|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.
\end{aligned}
$$

Substituindo estas estimativas em (2.18), temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\varrho^{1/2}(u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \mu\|\nabla_\varepsilon (u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&\leq C_\delta \|\varrho - \tilde\varrho_0\|^2_{H^3_\varepsilon}\|u_n - u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \delta\|\nabla_\varepsilon (u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&+C_\delta \|\overline{u}\|^2_{H^2_\varepsilon} \|u_n - u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \delta\|\nabla_\varepsilon (u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&+C \|\varrho - \varrho_n\|_{H^1_{\varepsilon,0}} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)} R_1 \\
&+C \|\varrho - \varrho_n\|_{H^1_{\varepsilon,0}} R_1^3 \\
&+C\|\overline{u}_n\|^2_{H^2_\varepsilon}\|u_n - u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\overline{u}_n - \overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon} \\
&+C\|\overline{u}\|^2_{H^2_\varepsilon}\|u_n - u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\overline{u}_n - \overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon} \\
&+C \|\varrho\|^2_{H^3_\varepsilon,0}\|u_n - u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\overline{u}_n - \overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon} \\
&+C\|\varrho\|^2_{H^3_\varepsilon,0}\|u_n - u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\overline{u}_n - \overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon} \\
&+C_\delta R_1^2 R_2^{3/2}\|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|^{1/2}_{L^2(\tilde\Omega)} + \delta\|\nabla_\varepsilon (u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&+C R_1^{5/4}\|\overline{u}_n\|^{3/4}_{H^2_\varepsilon}\|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|_{L^2(\tilde\Omega)} \\
&+2CR_1\|\varrho_n - \varrho\|_{H^1_{\varepsilon,0}}\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Tomando $\delta = \mu/4$ na desigualdade acima e coletando adequadamente os termos, obtemos:

$$\frac{d}{dt}\|\varrho^{1/2}(u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{\mu}{4}\|\nabla_\varepsilon (u_n - u)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq C\, \left(\|\overline{u}\|^2_{H^2_\varepsilon} + \|\varrho - \tilde{\varrho}_0\|^2_{H^3_\varepsilon,0}\right) \|u_n - u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+CR_1 \left\|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\varrho - \varrho_n\|_{H^1_{\varepsilon,0}} + CR_1^3 \|\varrho - \varrho_n\|_{H^1_{\varepsilon,0}} + 2CR_1\|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\varrho_n - \varrho\|_{H^1_{\varepsilon,0}}$$

$$+CR_1^2 R_2^{3/2}\|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|^{1/2}_{L^2(\tilde{\Omega})} + CR_1^{5/4}\|\overline{u}_n\|^{3/4}_{H^2_\varepsilon}\|\nabla_\varepsilon (\varrho_n - \varrho)\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+4\|\overline{u}_n - \overline{u}\|^2_{H^1_\varepsilon}.$$

Aplicando o Lema de Gronwall a esta desigualdade, lembrando que os dados iniciais para u e u_n coincidem, e que (u, ϱ), $(\overline{u}, \overline{\varrho})$, (u_n, ϱ_n), $(\overline{u}_n, \overline{\varrho}_n)$ $\in K$ obtemos para $t \in [0, T^*]$ a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\|\varrho^{1/2}(t)(u_n(t) - u(t))\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} &\leq B_n(T^*) \exp\left\{C \int_0^{T^*} \left(\|\overline{u}(s)\|^2_{H^2_\varepsilon} + \|\varrho(s) - \tilde{\varrho}_0\|^2_{H^3_\varepsilon,0} ds\right)\right\} \\ &\leq B_n(T^*) \exp\left\{R_1^2 + R_2^2\right\}\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde

$$\begin{aligned}B_n(T^*) = \;& CR_1 \int_0^{T^*} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial t}(s)\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\varrho(s) - \varrho_n(s)\|_{H^1_{\varepsilon,0}} ds + CR_1^3 \int_0^{T^*} \|\varrho(s) - \varrho_n(s)\|_{H^1_{\varepsilon,0}} ds \\ & +2CR_1 \int_0^{T^*} \|f(s)\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\varrho_n(s) - \varrho(s)\|_{H^1_{\varepsilon,0}} ds + CR_1^2 R_2^{3/2} \int_0^{T^*} \|\nabla_\varepsilon (\varrho_n(s) - \varrho)(s)\|^{1/2}_{L^2(\tilde{\Omega})} \\ & +CR_1^{5/4} \int_0^{T^*} \|\overline{u}_n(s)\|^{3/4}_{H^2_\varepsilon}\|\nabla_\varepsilon (\varrho_n(s) - \varrho)(s)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} ds + 4\int_0^{T^*} \|\overline{u}_n(s) - \overline{u}(s)\|^2_{H^1_\varepsilon}.\end{aligned}$$

Utilizando adequadamente a desigualdade de Hölder, da definição de $B_n(T^*)$, obtemos:

$$B_n(T^*) \leq \; CR_1 \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))} \|\varrho - \varrho_n\|_{L^2(0;T^*;H^1_{\varepsilon,0})} + CR_1^3 \|\varrho - \varrho_n\|_{L^2(0,T^*;H^1_{\varepsilon,0})} T^{*1/2}$$

$$+2CR_1\|f\|_{L2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))}\|\varrho_n - \varrho\|_{L^2(0,T^*;H^1_{\varepsilon,0})} + CR_1^2R_2^{3/2}\|\nabla_\varepsilon(\varrho_n - \varrho)\|^{1/2}_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))}T^{*}$$

$$+CR_1^{5/4}\|\overline{u}_n(s)\|^{3/4}_{L^2(0,T^*;H^2_\varepsilon)}\|\nabla_\varepsilon(\varrho_n(s) - \varrho)(s)\|_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))}T^{*7/8}$$

$$+4\|\overline{u}_n - \overline{u}\|^2_{L^2(0,T^*;H^1_\varepsilon)}.$$

Lembrando que (u, ϱ), $(\overline{u}, \overline{\varrho})$, (u_n, ϱ_n), $(\overline{u}_n, \overline{\varrho}_n) \in K$, concluímos que

$$B_n(T^*) \leq \; C\left(R_1^2 + R_1^3T^{*1/2} + R_1\|f\|_{L2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))} + R_1^2R_2^{3/2}T^{*3/4} + R_1^2T^{*1/8}\right)\|\varrho - \varrho_n\|_{L^2(0;T^*;H^1_{\varepsilon,}}$$

$$+4\|\overline{u}_n - \overline{u}\|^2_{L^2(0,T^*;H^1_\varepsilon)}. \tag{2.20}$$

Observamos agora que as condições de contorno periódicas implicam que

$$\|\nabla_\varepsilon(\overline{u}_n - \overline{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})} = -(\overline{u}_n - \overline{u}, \triangle_\varepsilon(\overline{u}_n - \overline{u})) \leq \|\overline{u}_n - \overline{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon(\overline{u}_n - \overline{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

Como $\overline{u}_n - \overline{u} \in K_1(T^*)$, temos $\|\triangle_\varepsilon(\overline{u}_n - \overline{u})\|^2_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega}))}$ uniformemente limitada com respeito a n e, portanto, a desigualdade anterior juntamente com o fato de
$\|\overline{u}_n - \overline{u}\|_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega})} \to 0$ implicam que quando $n \to \infty$

$$\|\overline{u}_n - \overline{u}\|^2_{L^2(0,T^*;H^1_\varepsilon)} \to 0$$

Portanto, este último resultado, (2.16), (2.20) e (2.19), juntamente com a observação que $m\|(u_n - u)\|^2_{L^\infty(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega})} \leq \|\varrho^{1/2}(u_n - u)\|^2_{L^\infty(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega})}$ implicam em particular que

$$\|u_n - u\|_{L^2(0,T^*;L^2(\tilde{\Omega})} \to 0.$$

Isto e os resultados anteriores mostram a continuidade de Φ, completando a prova. $\square$

Estamos agora em condições de estabelecer o seguinte resultado.

2.1.5 Teorema

Dados $u_0 \in H^1_\varepsilon$ *e* $\varrho_0 \in H^2_\varepsilon$ *e* $f \in L^2(0,T,L^2(\tilde{\Omega}))$, *existe* $0 < T^* \leq T$ *tal que (1.12) (ou (1.13)) admite solução* (u,ϱ) *tal que*

$$u \in L^\infty(0,T,\,V_\varepsilon) \cap L^2(0,T,H^2_\varepsilon) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T,H_\varepsilon),$$

$$\varrho \in L^\infty(0,T,H^2_{\varepsilon,0}) \cap L^2(0,T,H^3_\varepsilon) \text{ e } \frac{\partial \varrho}{\partial t} \in L^2(0,T,H^1_\varepsilon).$$

Além disso, tal solução é única.

Prova: Consideremos o conjunto K construído como no lema anterior. Este fornece $0 < T^* \leq T$ e garante que a aplicação Φ definida em (2.1.1) satisfaz $\Phi : K \to K$ e é contínua quando se considera em K a topologia de $L^2(0,T^*,L^2(\tilde{\Omega})) \times L^2(0,T^*,L^2(\tilde{\Omega}))$.

Além disso, temos que K é convexo e compacto em $L^2(0,T^*,L^2(\tilde{\Omega})) \times L^2(0,T^*,L^2(\tilde{\Omega}))$, pelo Lema de Aubin-Lions (veja [22]) . Portanto, podemos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder (veja 1.1.5), o qual garante a existência de um ponto fixo para a função Φ, isto é, garante a existência de um par (u,ϱ) que é solução para o problema (1.12) (ou (1.13)). Pela definição de K, temos automaticamente a regularidade enunciada da solução.

Basta provar então que tal solução é única. Para isto, suponhamos que (u,ϱ) e $(\tilde{u},\tilde{\varrho})$ sejam duas soluções. Assim, como tanto (u,ϱ) quanto $(\tilde{u},\tilde{\varrho})$ satisfazem o Problema (1.12) (o argumento para (1.13 é obviamente ligeiramente mais simples), subtraindo as equações correspondentes para as velocidades e tomando o produto interno com $u-\tilde{u}$ e procedendo como o usual, obtemos:

$$\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial t} - \tilde{\varrho}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, u-\tilde{u}\right) + \mu\left\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} = (-\varrho(u\cdot\nabla_\varepsilon)u + \tilde{\varrho}(\tilde{u}\cdot\nabla_\varepsilon)\tilde{u}, u-\tilde{u})$$

$$+\lambda[(u\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\varrho - (\tilde{u}\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\tilde{\varrho} + (\nabla_\varepsilon\varrho\cdot\nabla_\varepsilon)u - (\nabla_\varepsilon\tilde{\varrho}\cdot\nabla_\varepsilon)u], u-\tilde{u}).$$

Observamos agora que

$$\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial t} - \tilde{\varrho}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, u-\tilde{u}\right) = \left(\varrho\frac{\partial}{\partial t}(u-\tilde{u}), u-\tilde{u}\right) + \left((\varrho-\tilde{\varrho})\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, u-\tilde{u}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varrho(u-\tilde{u}), u-\tilde{u}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\cdot(u-\tilde{u}), u-\tilde{u}\right) + \left((\varrho-\tilde{\varrho})\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, u-\tilde{u}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varrho(u-\tilde{u}), u-\tilde{u}) - \frac{1}{2}\left((\lambda\Delta_\varepsilon\varrho - u\cdot\nabla_\varepsilon\varrho)(u-\tilde{u}), u-\tilde{u}\right) + \left((\varrho-\tilde{\varrho})\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, u-\tilde{u}\right),$$

onde na última igualdade utilizamos a equação da densidade para ϱ. Substituindo na identidade anterior, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varrho(u-\tilde{u}),u-\tilde{u})+\mu\left\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}=\left(Z_1(u,\varrho,\tilde{u},\tilde{\varrho}),u-\tilde{u}\right),$$

onde

$$Z_1(u,\varrho,\tilde{u},\tilde{\varrho})=-(\varrho-\tilde{\varrho})\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\frac{1}{2}\lambda\left(\Delta_\varepsilon\varrho-u\cdot\nabla_\varepsilon\varrho\right)-\varrho(u\cdot\nabla_\varepsilon)u+\tilde{\varrho}(\tilde{u}\cdot\nabla_\varepsilon)\tilde{u}$$
$$+\lambda\left[(u\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\varrho-(\tilde{u}\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\tilde{\varrho}+(\nabla_\varepsilon\varrho\cdot\nabla_\varepsilon)u-(\nabla_\varepsilon\tilde{\varrho}\cdot\nabla_\varepsilon)u\right]$$

Portanto, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varrho(u-\tilde{u}),u-\tilde{u})+\mu\left\|\nabla_\varepsilon(u-\mu)\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\leq Z_2(t)\|u-\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})},\qquad(2.21)$$

onde

$$\begin{aligned}Z_2(t)=\ &\|Z_1(u,\varrho,\tilde{u},\tilde{\varrho})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\leq\|\varrho-\tilde{\varrho}\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\\
&+\tfrac{1}{2}\left(\lambda\|\Delta_\varepsilon\varrho\|_{L^4(\tilde{\Omega})}+\|u\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\varrho\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\right)\|u-\tilde{u}\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\\
&+M\,\|u\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+M\,\|u-\tilde{u}\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\tilde{u}\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\\
&+\|\varrho-\tilde{\varrho}\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\tilde{u}\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\tilde{u}\|_{L^4(\tilde{\Omega})}+\lambda\left[\|u-\tilde{u}\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon\varrho\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\right.\\
&+\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon\varrho\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\\
&+\|\nabla_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\varrho\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\end{aligned}$$

Usando as imersões de $H^1_\varepsilon(\tilde{\Omega})$ em $L^4(\tilde{\Omega})$ e de $H^2_\varepsilon(\tilde{\Omega})$ em $L^\infty(\tilde{\Omega})$, podemos estimar $Z_2(t)$ como

$$Z_2(t) \leq C\Bigg(\|\Delta_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|A_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon \varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\Delta_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon \tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\Delta_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon \varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\Bigg).$$

Agrupando os termos que têm o termo $\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ em comum e também aqueles que têm o termo $\|\Delta_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ em comum, obtemos

$$Z_2(t) \leq CZ_3(t)\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+CZ_4(t)\|\Delta_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}, \qquad (2.22)$$

onde

$$Z_3(t)=\|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon \varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \qquad (2.23)$$

$$Z_4(t)=\left\|\frac{d\tilde{u}}{dt}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon \tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\Delta_\varepsilon \varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \qquad (2.24)$$

Substituindo a estimativa (2.22) na desigualdade (2.21), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varrho(u-\tilde{u}),u-\tilde{u})+\mu\|\nabla_\varepsilon(u-\mu)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq CZ_3(t)\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|u-\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+CZ_4(t)\|\Delta_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|u-\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq C_\mu Z_3(t)^2\|u-\tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\frac{\mu}{2}\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+C_\delta Z_4(t)^2\|u-\tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\frac{\delta}{2}\|\Delta_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})},$$

com $\delta > 0$ a ser escolhido posteriormente (a escolha será $\delta = \lambda/4$) e constantes positivas C_μ e C_δ adequadas. Isto implica o seguinte:

$$\frac{d}{dt}(\varrho(u-\tilde{u}), u-\tilde{u}) \quad +\mu \left\|\nabla_\varepsilon (u-\tilde{u})\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq CH(t) \left\|u-\tilde{u}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \delta \left\|\triangle_\varepsilon (\varrho-\tilde{\varrho})\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \tag{2.25}$$

onde

$$H(t) = \ \|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|A_\varepsilon \tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon \tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon \tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\triangle_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left\|\frac{d\tilde{u}}{dt}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \tag{2.26}$$

Por outro lado, como (u, ϱ) e $(\tilde{u}, \tilde{\varrho})$ são soluções do Problema (1.12), subtraindo as equações correspondentes para a densidade e tomando o produto interno do resultado com $\triangle_\varepsilon (\varrho - \tilde{\varrho})$, obtemos:

$$\left(\frac{d}{dt}(\varrho-\tilde{\varrho}), \triangle_\varepsilon (\varrho-\tilde{\varrho})\right) + ((u\cdot\nabla_\varepsilon \varrho - \tilde{u}\cdot\nabla_\varepsilon \tilde{\varrho}, \triangle_\varepsilon (\varrho-\tilde{\varrho})) = \lambda (\triangle_\varepsilon (\varrho-\tilde{\varrho}), \triangle_\varepsilon (\varrho-\tilde{\varrho})).$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com constante λ, temos:

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon (\varrho-\tilde{\varrho})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \lambda \|\triangle_\varepsilon (\varrho-\tilde{\varrho})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \{\|u-\tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon \varrho\|^2_{L^\infty(\tilde{\Omega})} + \|\tilde{u}\|^2_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon (\varrho-\tilde{\varrho})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\}.$$

Usando a imersão de $H^2_\varepsilon(\tilde{\Omega})$ em $L^\infty(\tilde{\Omega})$, temos:

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon (\varrho-\tilde{\varrho})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \lambda \|\nabla_\varepsilon (\varrho-\tilde{\varrho})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq \frac{C^2}{\lambda} \{\|u-\tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|A_\varepsilon \tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon (\varrho-\tilde{\varrho})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\} \tag{2.27}$$

Tomando $\delta = \lambda/4$ em (2.25), utilizando a observação que

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} = \frac{1}{m}(m(u-\tilde{u}), u-\tilde{u}) \leq \frac{1}{m}(\varrho(u-\tilde{u}), u-\tilde{u}) \tag{2.28}$$

e somando com (2.27), após alguma simplificação, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[(\varrho(u-\tilde{u}),u-\tilde{u})+\|\nabla_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right]+\mu\|\nabla_\varepsilon(u-\tilde{u})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\frac{\lambda}{2}\|\Delta_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq C\left[H(t)+\|\nabla_\varepsilon\Delta_\varepsilon\varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right]\cdot\left[(\varrho(u-\tilde{u}),u-\tilde{u})+\|\nabla_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right]$$

onde $H(t)$ é dada em (2.26) e C é uma constante positiva adequada dependendo apenas dos dados do problema.

Utilizando o Lema de Gronwall (1.1.7) nesta última desigualdade e lembrando as regularidades que as soluções satisfazem (o que garante $\int_0^t H(s)ds < +\infty$ para $0 \leq t \leq T^*$), bem como o fato de terem os mesmos dados iniciais, obtemos:

$$(\varrho(u-\tilde{u}),u-\tilde{u})+\|\nabla_\varepsilon(\varrho-\tilde{\varrho})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\leq 0,$$

e, portanto, (2.28) implica que $u = \tilde{u}$ e $\varrho = \tilde{\varrho}$, isto é, a unicidade de solução . □

2.2 Existência de Soluções Globais

Nesta seção, estabelecemos a existência de soluções globais para o problema (1.13), mediante hipóteses adicionais. Lembramos que, até então, trabalhamos com o espaço V_ε (veja a Definição 1.2.6) munido da norma de $H^1_\varepsilon(\tilde{\Omega})$, isto é, $\|u\|^2_{V_\varepsilon} = \|u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$ e esta é a dificuldade para se obter solução global. A seguir, estabelecemos hipóteses que nos permitirão obter a equivalência de normas desejada. Desta forma, poderemos munir o espaço V_ε com a norma $\|u\|_{V_\varepsilon} = \|\nabla_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$. Subseqüentemente, observamos as conseqüências de tal equivalência sobre as desigualdades estabelecidas em 1.1.1 e demonstramos uma proposição que estabelece a existência propriamente dita.

Observamos que praticamente a mesma demonstração valeria para o caso do problema (1.12) se fosse possível provar a equivalência de normas referida acima para as soluções de (1.12).

Comecemos observando que, sendo (u, ϱ) solução (local) de (1.13), se multiplicarmos a equação da densidade por u e somarmos o resultado à equação da velocidade, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varrho u) = \ & \mu \triangle_\varepsilon \varrho - \varrho(u \cdot \nabla_\varepsilon)u - u(u \cdot \nabla_\varepsilon \varrho) \\ & +\lambda \left[(u \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \varrho + (\nabla_\varepsilon \varrho \cdot \nabla_\varepsilon)u + u\triangle_\varepsilon \varrho\right] - \nabla_\varepsilon p + f.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Por outro lado, observamos que

$$\triangle_\varepsilon u = \operatorname{div}_\varepsilon \nabla_\varepsilon u,$$

$$\varrho(u \cdot \nabla_\varepsilon)u - u(u \cdot \nabla_\varepsilon)\varrho = (\operatorname{div}_\varepsilon(\varrho u u_1), \operatorname{div}_\varepsilon(\varrho u u_2), \operatorname{div}_\varepsilon(\varrho u u_3)),$$

pois para cada i temos $\operatorname{div}_\varepsilon(\varrho u u_i) = \nabla_\varepsilon(\varrho u_i) \cdot u + \varrho u_i(\operatorname{div}_\varepsilon u) = \varrho(u \cdot \nabla_\varepsilon)u_i + u_i(u \cdot \nabla_\varepsilon \varrho)$, e também

$$(u \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \varrho = \left(\operatorname{div}_\varepsilon\left(\frac{d\varrho}{dx_1}u\right), \operatorname{div}_\varepsilon\left(\frac{d\varrho}{dx_2}u\right), \operatorname{div}_\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varrho}{dy}u\right)\right)$$

e

$$(\nabla_\varepsilon \varrho \cdot \nabla_\varepsilon)u + u\triangle_\varepsilon \varrho = \left(\operatorname{div}_\varepsilon(u_1 \nabla_\varepsilon \varrho), \operatorname{div}_\varepsilon(u_2 \nabla_\varepsilon \varrho), \operatorname{div}_\varepsilon(u_3 \nabla_\varepsilon \varrho)\right).$$

Assim, integrando (2.29) sobre $\tilde{\Omega}$, utilizando as informações anteriores, o teorema da divergência e o fato de as condições de contorno serem periódicas, obtemos:

$$\frac{d}{dt}\int_{\tilde{\Omega}} \varrho(t)u(t)\,dx\,dy = \int_{\tilde{\Omega}} f\,dx\,dy,$$

Portanto, se tivermos a hipótese adicional para f de que

$$\int_{\tilde{\Omega}} f = 0, \tag{2.30}$$

teremos $\frac{d}{dt}\int_{\tilde{\Omega}} \varrho u\,dx\,dy = 0$, portanto

$$\int_{\tilde{\Omega}} \varrho(t)u(t)\,dx\,dy = \int_{\tilde{\Omega}} \varrho_0 u_0\,dx\,dy.$$

Assim, acrescentando também a hipótese de que $\varrho_0 u_0$ tem média zero, isto é,

$$\int_{\tilde{\Omega}} \varrho_0 u_0 = 0, \tag{2.31}$$

teremos $\int_{\tilde{\Omega}} \varrho(t)u(t) = 0$. Como $0 < m \leq \varrho(x,t) \leq M$, e com a regularidade que temos $\varrho(t)$ e $u(t)$ são funções contínuas para quase todo t, concluímos que $u(.,t)$ se anula em algum ponto de $\tilde{\Omega}$. Para esta classe de funções vale a desigualdade de Poincarè:

$$\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq K\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})},$$

com uma constante positiva K independente de u.

2.2.1 Observação Para o problema (1.13) não há perda de generalidade ao se assumir a hipótese de que $\int_{\tilde{\Omega}} f = 0$.

De fato, se o campo de forças dado não tiver esta propriedade, no problema (1.13) pode-se sempre incorporar o valor médio deste campo na pressão e se trabalhar com um novo campo de forças de média zero.

Assim, a partir de agora, assumiremos sempre que o campo de forças tem sempre média zero e concluímos da argumentação anterior que na classe de soluções do problema (1.13), podemos utilizar a desigualdade de Poincarè acima e a partir de agora adotaremos a norma $\|\nabla_\varepsilon \cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ para o espaço V_ε. Também, para $H^2_\varepsilon(\tilde{\Omega})$, passamos a utilizar a norma $\|A_\varepsilon \cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ para funções pertencentes a $D(A_\varepsilon)$. Como já foi observado no início desta seção, tal alteração nas normas é fundamental para a obtenção de soluções globais.

Observamos também que as alterações de normas efetuadas acima acarretam mudanças às desigualdades decorrentes de 1.1.1, enunciado na seção 1.1. As desigualdades então obtidas são muito convenientes para a obtenção de soluções globais, bem como para o decréscimo da "componente vertical" da solução, assunto abordado no próximo capítulo.

Vejamos tais desigualdades.

De 1.1.1, temos:

$$\|u\|_{L^4(\tilde{\Omega})} \leq L\|u\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|u\|^{\frac{3}{4}}_{H^1(\tilde{\Omega})}.$$

Pela Desigualdade de Poincaré observada acima, temos

$$\|u\|_{L^4(\tilde{\Omega})} \leq L\,\|u\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon u\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \quad \text{para} \quad u \in V_\varepsilon. \tag{2.32}$$

Também

$$\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^4(\tilde{\Omega})} \leq L\,\|\nabla_\varepsilon u\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon u\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \quad \text{para} \quad u \in D(A_\varepsilon), \tag{2.33}$$

$$\|\nabla_\varepsilon \varrho\|_{L^4(\tilde{\Omega})} \leq L\,\|\nabla_\varepsilon \varrho\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon \varrho\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \quad \text{para} \quad \varrho \in H^2_{p,\varepsilon} \tag{2.34}$$

e

$$\|\triangle_\varepsilon \varrho\|_{L^4(\tilde{\Omega})} \leq L\,\|\triangle_\varepsilon \varrho\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \varrho\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \quad \text{para} \quad \varrho \in H^3_{p,\varepsilon}. \tag{2.35}$$

Ainda, como $\|u\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq L\,\|u\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|u\|^{\frac{3}{4}}_{H^2_\varepsilon(\tilde{\Omega})}$, obtemos:

$$\|u\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq L\,\|u\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon u\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \quad \text{para} \quad u \in D(A_\varepsilon) \tag{2.36}$$

e

$$\|\nabla_\varepsilon \varrho\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq L\,\|\nabla_\varepsilon \varrho\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \varrho\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \quad \text{para} \quad \varrho \in H^3_{p,\varepsilon}. \tag{2.37}$$

Utilizando estas desigualdades, podemos obter estimativas para (u, ϱ), solução do Problema 1.12, a fim de obtermos soluções globais, dadas pela Proposição a seguir.

2.2.2 Observação

No decorrer do trabalho utilizaremos as equivalências entre as normas $\|\cdot\|_{H^1_\varepsilon}$ e $\|\nabla_\varepsilon \cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ em V_ε, $\|\cdot\|_{H^2_\varepsilon}$ e $\|A_\varepsilon \cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ em $D(A_\varepsilon)$, $\|\cdot\|_{H^2_{\varepsilon,0}}$ e $\|\triangle_\varepsilon \cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ e $\|\cdot\|_{H^3_{\varepsilon,0}}$ e
$\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$, todas com a mesma constante de equivalência, C (independente de ε). Lembramos que C já estava sendo usada como constante

decorrente das imersões (veja 1.2.4) e das estimativas usadas para provar a existência de soluções locais, o que não nos impede de usá-la novamente tomando o cuidado de esclarecer que C será escolhida como a maior entre as constantes decorrentes das imersões, das equivalências de normas ou das estimativas.

2.2.3 Teorema *Sejam $u_0 \in H^1_\varepsilon$ e $\varrho_0 \in H^2_\varepsilon$ tais que $\int_{\tilde{\Omega}} \varrho_0 u_0 = 0$ e $f \in L^\infty(0,\infty; L^2(\tilde{\Omega})$.*

Então se $\|\nabla_\varepsilon u_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$, $\|\Delta_\varepsilon \varrho_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$ e $\|f\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\tilde{\Omega}))}$ forem sufientemente pequenos, existe solução global no tempo para o problema (1.13)

Prova: Como foi feito na prova do Lema 2.1.2, tomemos o produto interno entre $\Delta_\varepsilon \varrho$ e a equação resultante de se aplicar Δ_ε à segunda equação de (1.12). Obtemos assim:

$$\left(\Delta_\varepsilon \frac{\partial \varrho}{\partial t}, \Delta_\varepsilon \varrho\right) + (\Delta_\varepsilon (u \cdot \nabla_\varepsilon \varrho), \Delta_\varepsilon \varrho) = \lambda (\Delta_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho, \Delta_\varepsilon \varrho).$$

Logo, como na Proposição 2.1.2, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \lambda \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq |(\nabla_\varepsilon (u \cdot \nabla_\varepsilon \varrho), \nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho)|$$

$$= |(\nabla_\varepsilon u \cdot \nabla_\varepsilon \varrho + u \cdot \nabla_\varepsilon \nabla_\varepsilon \varrho, \nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho)|$$

$$\leq \frac{1}{2\lambda} \|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon \varrho\|^2_{L^\infty(\tilde{\Omega})} + \frac{1}{2\lambda} \|u\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})} \|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})} + \frac{\lambda}{2} \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Assim, usando as desigualdades (2.32),(2.35) e (2.37), temos:

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \lambda \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq \frac{1}{2\lambda} \left(L^2 \|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon \varrho\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\right.$$

$$\left. + L^4 \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon u\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\Delta_\varepsilon \varrho\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\right)$$

Considerando as equivalências entre a norma de V_ε e $\|\nabla_\varepsilon \cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ e a norma de $H^2_{\varepsilon,0}$ e $\|\Delta_\varepsilon \cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ (espaços apresentados em 1.15 e 1.2.6), temos:

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \lambda\|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \frac{C^{\frac{1}{2}}}{2\lambda}(L^4+L^2)\,\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon \varrho\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq \frac{C^2(L^4+L^2)^4}{2^4\lambda^4 4\delta_4^4}\,\|\nabla_\varepsilon u\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{3}{4}\delta_4^{\frac{4}{3}}\,\|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Tomando $\delta_4 < \dfrac{2}{3}\lambda$ e $C_2 = \dfrac{C^2(L^4+L^2)^4}{32\,\lambda^4\delta_4^4}$, temos:

$$\frac{d}{dt}\|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \lambda\,\|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C_2\,\|\nabla_\varepsilon u\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \tag{2.38}$$

Agora, procuramos estimativas para u de maneira semelhante àquela da prova do Lema 2.1.4, mas sem a preocupação com a limitação de $\|u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$, já que podemos usar $\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ como a norma de V_ε.

Tomamos o produto entre a primeira equação de (1.12) e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, isto é,

$$\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \mu\left(\Delta_\varepsilon u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\left(\varrho(u\cdot\nabla_\varepsilon)u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$
$$+\lambda\left[\left((u\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \varrho, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \left((\nabla_\varepsilon \varrho\cdot\nabla_\varepsilon)u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]$$
$$+\left(\nabla_\varepsilon p, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \left(f, \frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

Também como na demonstração do 2.1.4, temos:

$$m\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\leq\{M\,\|u\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda\,[\|u\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\nabla_\varepsilon\varrho\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^4(\tilde\Omega)}]+\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)}\}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

Usando (2.32), (2.34), (2.35) e (2.36) e a desigualdade de Hölder com $\delta_5<\frac{m}{3}$, temos:

$$m\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\leq\frac{M^2L^2}{\delta_5}\,\|u\|^{\frac12}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon u\|^{\frac32}_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\frac{\lambda^2}{\delta_5}\,[L^2\,\|u\|^{\frac12}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon u\|^{\frac32}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+L^4\|\nabla_\varepsilon\varrho\|^{\frac12}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^{\frac32}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon u\|^{\frac12}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon u\|^{\frac32}_{L^2(\tilde\Omega)}]+\frac{1}{\delta_5}\,\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

Usando agora as equivalências de normas envolvidas e novamente a desigualdade de Hölder, temos:

$$m\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\leq\frac{M^2L^2C^{\frac12}}{\delta_5}\,\|\nabla_\varepsilon u\|^{\frac52}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon u\|^{\frac32}_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\frac{\lambda^2C^{\frac12}}{\delta_5}\,(L^2+L^4)\,\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon u\|^{\frac12}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon u\|^{\frac32}_{L^2(\tilde\Omega)}+\frac{1}{\delta_5}\,\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$\leq\frac{1}{4\delta_6^4}\left(\frac{M^8L^8C^2}{\delta_5^4}\,\|\nabla_\varepsilon u\|^{10}_{L^2(\tilde\Omega)}+\frac{\lambda^8C^2}{\delta_5^4}\,(L^2+L^4)^4\,\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^8_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right)$$

$$+\frac{3\delta_6^{\frac{4}{3}}}{2}\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\frac{1}{\delta_5}\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

Assim, para $C_3 = max\left\{1, \frac{M^8L^8C^2}{4\delta 6^4\delta_5^4}, \frac{\lambda^8C^2}{4\delta 6^4\delta_5^4}(L^2+L^4)^4\right\}$, temos:

$$m\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$\leq C_3\left[\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\nabla_\varepsilon u\|^{10}_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\Delta_\varepsilon \varrho\|^8_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right]+\frac{3}{2}\delta_6^{\frac{4}{3}}\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \tag{2.39}$$

Até agora estabelecemos estimativas envolvendo ϱ e a derivada da norma de u. Mas, como podemos observar na expressão acima, $\|A_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde\Omega)}$ aparece no lado direito desta, assim, devemos obter uma estimativa para tal norma para então somarmos com a anterior.

Novamente, como na demonstração do Lema 2.1.4, tomamos o produto entre a primeira equação de (1.12) e $A_\varepsilon u$, temos:

$$\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial t}, A_\varepsilon u\right)-\mu\left(\Delta_\varepsilon u, A_\varepsilon u\right)+\left(\nabla_\varepsilon p, A_\varepsilon u\right)=-(\varrho(u\cdot\nabla_\varepsilon)u, A_\varepsilon u)$$

$$+\lambda\left[((u\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\varrho, A_\varepsilon u)+((\nabla_\varepsilon\varrho\cdot\nabla_\varepsilon)u, A_\varepsilon)\right]+(f, A_\varepsilon u)$$

Assim, podemos obter

$$\mu\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\leq M\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon u\|+M\|u\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda\left[\|u\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\Delta_\varepsilon\varrho\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon u\|+\|\nabla_\varepsilon\varrho\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon u\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde\Omega)}\right]+\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, (2.32), (2.33), (2.34) e (2.36), temos:

$$\mu \|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \frac{M^2}{2\delta_7} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{M^8 L^{16}}{8\delta_7^8} \|u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon u\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+ \frac{\lambda^8 L^8}{8\delta_7^8} \|u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\triangle_\varepsilon \varrho\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{\lambda^8 L^{16}}{8\delta_7^8} \|\nabla_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\triangle_\varepsilon \varrho\|^6_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\frac{1}{\delta_7} \|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left(\delta_7 + \frac{21}{8}\delta_7^{\frac{8}{7}}\right) \|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

Tomando $\delta_7 + \frac{21}{8}\delta_7^{\frac{8}{7}} < \frac{\mu}{2}$, observando as equivalências de normas com constante C e considerando

$$C_4 = max \left\{ \frac{M^2}{\mu\delta_7}, \frac{M^8 L^{16} C^2}{4\mu\delta_7^8}, \frac{\lambda^8 L^8 C^2}{4\mu\delta_7^8}, \frac{\lambda^8 L^{16} C^2}{4\mu\delta_7^8}, \frac{1}{\mu\delta_7} \right\},$$

temos:

$$\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C_4 \left[\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon u\|^{10}_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\triangle_\varepsilon \varrho\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})} \right] \tag{2.40}$$

Efetuando a soma entre (2.38), (2.39) e (2.40) multiplicada pelo fator $\frac{m}{2C_4}$, temos:

$$m \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \mu \frac{d}{dt} \|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{m}{2C_4} \|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{d}{dt} \|\triangle_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \frac{\lambda}{2} \|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq C_3 \left[\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon u\|^{10}_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\triangle_\varepsilon \varrho\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \right] + \frac{3}{2}\delta_6^{\frac{4}{3}} \|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+ \frac{m}{2} \left[\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon u\|^{10}_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\triangle_\varepsilon \varrho\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})} \right]$$

$$+C_2\,\|\nabla_\varepsilon u\|^8_{L^2(\tilde\Omega)}\|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

Assim, para $\delta_6 < \left(\dfrac{m}{6C_4}\right)^{\frac{3}{4}}$ e $C_5 = \dfrac{1}{l}\,max\left\{C_2, C_3 + \dfrac{m}{2}\right\}$ com $l = min\left\{\dfrac{m}{2}, 1, \dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{m}{2C_4}, \mu\right\}$, temos:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \frac{d}{dt}\left(\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right) + \|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$\leq C_5\,\left[\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + (\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)})^5\right]. \tag{2.41}$$

Procuramos agora uma limitação para $\|\nabla_\varepsilon u(t)\|_{L^2(\tilde\Omega)}$ e $\|\Delta_\varepsilon \varrho(t)\|_{L^2(\tilde\Omega)}$. Para tal, definamos

$$\varphi(t) = \|\nabla_\varepsilon u(t)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\Delta_\varepsilon \varrho(t)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}, \tag{2.42}$$

e busquemos uma desigualdade diferencial para φ.

Como, devido às equivalências de normas, temos

$$\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \geq \frac{1}{C}\,(\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}),$$

então

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \leq \tilde C_5\,[\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varphi^5]$$

para $\tilde C_5 = C_5\,(min\{1, C^{-1}\})^{-1}$.

Denotemos agora $C_f \geq 0$ uma constante que limita $\tilde C_5\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$, isto é,

$$\tilde C_5\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq C_f.$$

Deste modo, temos:

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \leq C_f + \tilde C_5\varphi^5,$$

e, portanto, $\varphi(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} \leq C_f - [1 - \tilde{C}_5\varphi^4]\varphi, \\ \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases}$$

onde $\varphi_0 = \|\nabla_\varepsilon u_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon \varrho_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$.

Mostremos agora que se

$$\varphi(0) < \frac{1}{2(2\tilde{C}_5)^{1/4}} \tag{2.43}$$

e

$$C_f < \frac{1}{16(2\tilde{C}_5)^{1/4}}, \tag{2.44}$$

teremos, para $t \in [0, +\infty)$,

$$\varphi(t) < \frac{1}{(2\tilde{C}_5)^{1/4}}. \tag{2.45}$$

De fato, por contradição suponha que isto não seja verdade. Como $\varphi(0) < \dfrac{1}{2(2\tilde{C}_5)^{1/4}}$, exite $t^* > 0$ tal que $\varphi(t) < \dfrac{1}{(2\tilde{C}_5)^{1/4}}$ no intervalo $[0, t^*)$ e $\varphi(t^*) = \dfrac{1}{(2\tilde{C}_5)^{1/4}}$.

Mas isto significa que para $t \in [0, t^*]$, a desigualdade diferencial para $\varphi(t)$ pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} \leq C_f - \dfrac{1}{2}\varphi, \\ \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases}$$

o que implica que para $t \in [0, t^*]$ vale

$$\varphi(t) \leq e^{-\frac{1}{2}t}\varphi(0) + 2C_f(1 - e^{-\frac{1}{2}t}). \tag{2.46}$$

Em particular, vale que

$$\varphi(t^*) \leq e^{-\frac{1}{2}t^*}\varphi(0) + 2C_f(1 - e^{-\frac{1}{2}t^*}) \leq \varphi(0) + 2C_f < \frac{1}{(2\tilde{C}_5)^{1/4}},$$

contradizendo a hipótese sobre t^*.

Portanto, $\varphi(t)$ é limitada para todo t e portanto pela definição de φ, (2.42), temos que $\|\nabla_\varepsilon u(t)\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ e $\|\triangle_\varepsilon \varrho(t)\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ são limitadas para qualquer t positivo, desde que observadas as condições impostas dos dados iniciais. As outras estimativas são consequências destas se voltarmos às desigualdades originais, e, portanto, a solução é global no tempo. $\square$

2.2.4 Observação Para uso no último capítulo, observamos que nas condições expostas no enunciado do Teorema 2.2.3, (2.46) vale para todo $t \in [0, +\infty)$ e, portanto, temos

$$\|\nabla_\varepsilon u(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\triangle_\varepsilon \varrho(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}, \leq (\|\nabla_\varepsilon u_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\triangle_\varepsilon \varrho_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})})e^{-\frac{1}{2}t} + 2C_f.$$

2.2.5 Observação Retornando à expressão (2.41), observamos que para $\|A_\varepsilon u(0)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \varrho(0)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \dfrac{1}{(2C_5)^{\frac{1}{4}}}$,
tem-se a limitação de $\left\|\dfrac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$ para todo $t \geq 0$.

Capítulo 3: Análise das Componentes Vertical e Horizontal das Soluções

Neste capítulo, definiremos as componentes vertical e horizontal de uma determinada solução (u, ϱ) do problema (1.13) e obteremos estimativas que garantirão o decréscimo a zero das componentes verticais de u e ϱ , quando $\varepsilon \to 0+$. Isto será essencial para a determinação do problema bidimensional reduzido correspondente e também para as propriedades e relacionamento dos respectivos atratores a serem descritos no próximo capítulo.

3.1 Componentes Horizontal e Vertical

Como mencionado acima, nesta seção identificaremos as componentes horizontais e verticais de u e ϱ. Também expressaremos as componentes verticais por meio de Séries de Fourier, com a finalidade de obtermos uma certa desigualdade do tipo Poincaré que será crucial para a obtenção dos resultados principais deste trabalho.

Iniciemos observando que (u, ϱ), solução global do Problema (1.13) dada pelo Teorema 2.2.3, pode ser expressa através de séries de Fourier como

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} u^k\, e^{2\pi i ka\cdot x}$$

onde $ka = (k_1a_1, k_2a_2, k_3a_3)$ e $a_i = l_i^{-1}$ para $1 \leq i \leq 3$ e

$$u^k = a_1a_2a_3 \int_{\bar{\Omega}} u(x)\, e^{-2\pi i ka\cdot x} dx = (u_1^k, u_2^k, u_3^k).$$

Analogamente, temos

$$\varrho(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \varrho^k \, e^{2\pi i k a \cdot x},$$

onde

$$\varrho^k = a_1 a_2 a_3 \int_{\tilde{\Omega}} \varrho(x) \, e^{-2\pi i k a \cdot x} dx.$$

A condição $\operatorname{div}_\varepsilon u = 0$ é escrita em termos de séries de Fourier como:

$$k_1 a_1 u_1^k + k_2 a_2 u_2^k + \frac{1}{\varepsilon} k_3 a_3 u_3^k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^3$$

pois

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} 2\pi i k_j a_j \, u_j^k e^{2\pi i k a \cdot x} \quad j = 1, 2$$

e

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} 2\pi i k_3 a_3 \, u_3^k e^{2\pi i k a \cdot x}.$$

Lembramos ainda que no nosso caso $l_3 = a_3 = 1$.

Passemos agora à definição das partes horizontais e verticais de u e ϱ.

3.1.1 Definição

Para (u, ϱ) solução do problema (1.13), definimos o seguinte operador: para $(x, y) \in \Omega \times [0, 1]$, onde $\Omega = [0, l_1] \times [0, l_2]$, seja

$$\mathcal{M} u(x) = \int_0^1 u(x, y) \, dy. \tag{3.1}$$

Denominaremos

$$v = \mathcal{M} u \quad \text{e} \quad \alpha = \mathcal{M} \varrho \tag{3.2}$$

as **componentes horizontais** de u e ϱ, respectivamente, e

$$w = (I - \mathcal{M}) u \quad \text{e} \quad \beta = (I - \mathcal{M}) \varrho \tag{3.3}$$

as **componentes verticais** de u e ϱ, respectivamente.

Das definições facilmente obtemos:

- $\mathcal{M}w = 0$
- $\mathcal{M}v = v$
- $\mathcal{M}\overline{v} = \overline{v}$ para qualquer $\overline{v}$ independente da terceira variável.
- $(\mathcal{M}u_1, (I-\mathcal{M})u_2) = 0$ para u_1 e u_2 correspondendo a soluções de (1.13)
- $\mathcal{M}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{M}u)$ para $i = 1, 2$

  De fato, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\mathcal{M}u) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^1 u(x,y)dy\right) = \int_0^1 \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x,y)dy = \mathcal{M}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.
- $\mathcal{M}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\mathcal{M}u) = 0$

  De fato, $\dfrac{\partial(\mathcal{M}u)}{\partial y} = 0$ e $\mathcal{M}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \int_0^1 \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,s)ds = u(x,1) - u(x,0) = 0$ pois u é periódica.
- $\nabla_\varepsilon(\mathcal{M}u) = \mathcal{M}(\nabla_\varepsilon u)$ como podemos concluir pelos ítens anteriores.
- Também $\|\nabla_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde{\Omega})} = \|\nabla_\varepsilon(\mathcal{M}u)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \|\nabla_\varepsilon u\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ e $\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ $= \|\nabla_\varepsilon(I - \mathcal{M})u\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$.
- $A_\varepsilon(\mathcal{M}u) = \mathcal{M}(A_\varepsilon u)$

  De fato,

$$A_\varepsilon(\mathcal{M}u) = \mathbf{P}_\varepsilon(\Delta_\varepsilon(\mathcal{M}u)) = \mathbf{P}_\varepsilon\left(\frac{\partial^2 \mathcal{M}u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \mathcal{M}u}{\partial x_2^2}, \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \mathcal{M}u}{\partial y^2}\right)$$

$$= \mathbf{P}_\varepsilon\left(\mathcal{M}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \mathcal{M}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{1}{\varepsilon}0\right) = \mathbf{P}_\varepsilon\left(\mathcal{M}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \mathcal{M}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,1) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)\right)\right)$$

$$= \left[\mathbf{P}_\varepsilon\left(\mathcal{M}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \mathcal{M}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{M}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] = \mathcal{M}\left[\mathbf{P}_\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] = \mathcal{M}(A_\varepsilon u).$$

  o que pode ser concluído via Séries de Fourier.

Observamos que também para $\alpha = \mathcal{M}\varrho$ e para $\beta = (I - \mathcal{M})\varrho$ são válidos os análogos aos ítens acima, em particular,

$$\triangle_\varepsilon (\mathcal{M}\varrho) = \mathcal{M}(\triangle_\varepsilon \varrho),$$

$$\|\triangle_\varepsilon (\mathcal{M}\varrho)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \|\triangle_\varepsilon \varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

e

$$\|\triangle_\varepsilon (I - \mathcal{M})\varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \|\triangle_\varepsilon \varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

3.1.2 Observação

No decorrer do texto, utilizaremos v, w, α e β sempre com o sentido acima, isto é, nos referindo às componentes horizontal e vertical de (u, ϱ), solução do problema (1.13).

Para uso posterior, observamos apenas que substituindo u por $v + w$ nas equações do problema (1.13), obtemos:

$$\begin{cases} \varrho\left[\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{dw}{dt} + ((v+w)\cdot\nabla_\varepsilon)(v+w)\right] - \mu(\triangle_\varepsilon v + \triangle_\varepsilon w) + \nabla_\varepsilon p = \\ \qquad\qquad + \lambda[((v+w)\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \varrho + (\nabla_\varepsilon \varrho \cdot \nabla_\varepsilon)(v+w)] + f \\ \operatorname{div}_\varepsilon (v+w) = 0 \\ \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} + ((v+w)\cdot\nabla_\varepsilon)\varrho = \lambda\triangle_\varepsilon \varrho \end{cases} \tag{3.4}$$

As correspondentes equações no caso do problema (1.12) são:

$$\begin{cases} \varrho\left[\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{dw}{dt} + ((v+w)\cdot\nabla_\varepsilon)(v+w)\right] - \mu(\triangle_\varepsilon v + \triangle_\varepsilon w) + \nabla_\varepsilon p = \\ \qquad\qquad + \lambda[((v+w)\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \varrho + (\nabla_\varepsilon \varrho \cdot \nabla_\varepsilon)(v+w)] + \varrho f \\ \operatorname{div}_\varepsilon (v+w) = 0 \\ \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} + ((v+w)\cdot\nabla_\varepsilon)\varrho = \lambda\triangle_\varepsilon \varrho \end{cases} \tag{3.5}$$

Vamos agora expressar as componentes verticais w e β por suas expansões em Séries de Fourier:

$$w(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} w^k e^{2\pi i k a\cdot x}, \quad w^k = (w_1^k, w_2^k, w_3^k)$$

e

$$\beta(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \beta^k e^{2\pi i k a\cdot x}.$$

3.1.3 Observação

É fácil ver das definições das componentes verticais que nas séries de Fourier anteriores, temos $w^k = 0$ e $\beta^k = 0$ para todo $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$ tais que $|k_1| + |k_2| + |k_3| = 0$.

Isto é de crucial importância pois, através dela, podemos obter desigualdades tipo Poincaré especificas para as partes verticais. Tais desigualdades apresentam uma dependência de ε que nos permite obter mais tarde o decéscimo de w e β a medida em que ε tende a zero.

Passemos agora à obtenção de tais desigualdades:

Lembramos que a norma de w em $L^2(\tilde{\Omega})$ é:

$$||w(x)||^2_{L^2(\tilde{\Omega})} = \int_{\tilde{\Omega}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |w^k|^2 \, dx\, dy = (a_1 a_2 a_3)^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |w^k|^2$$

e que

$$\nabla_\varepsilon w(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} 2\pi i (k_1 a_1, k_2 a_2, \frac{1}{\varepsilon} k_3 a_3) \cdot w^k e^{2\pi i k a\cdot x}.$$

Portanto, temos

$$||\nabla_\varepsilon w||^2_{L^2(\tilde{\Omega})} = 4\pi^2 (a_1 a_2 a_3)^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} (k_1^2 a_1^2, k_2^2 a_2^2, \frac{1}{\varepsilon^2} k_3^2 a_3^2) |w^k|^2$$

$$\geq \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2} (a_1 a_2 a_3)^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |w^k|^2 = 4\pi^2 \varepsilon^{-2} ||w||^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

já que pela observação anterior temos $w^k = 0$ para todo $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$ tais que $|k_1| + |k_2| + |k_3| = 0$.

Assim obtemos a desigualdade

$$\|w\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}. \tag{3.6}$$

Com o mesmo raciocínio, obtemos também:

$$\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \|D^2_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \frac{\varepsilon C}{2\pi} \|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}. \tag{3.7}$$

onde C é a constante decorrente da equivalência entre $\|\cdot\|_{H^2_\varepsilon}$ e $\|A_\varepsilon \cdot\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ em $D(A_\varepsilon)$.

Analogamente, valem:

$$\|\nabla_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \frac{\varepsilon C}{2\pi} \|\Delta_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \tag{3.8}$$

e

$$\|\Delta_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \frac{\varepsilon C}{2\pi} \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \tag{3.9}$$

Assim, as desigualdades (2.32) até (2.37) podem ser reformuladas, utilizando (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9), da seguinte forma:

Para $w = (I - \mathcal{M})u,\ u \in V_\varepsilon$ temos

$$\|w\|_{L^4(\tilde{\Omega})} \leq L\, \|w\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon w\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\, \|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}. \tag{3.10}$$

Para $w = (I - \mathcal{M})u,\ u \in D(A_\varepsilon)$, temos

$$\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^4(\tilde{\Omega})} \leq L\, \|\nabla_\varepsilon w\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \|A_\varepsilon w\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\, \|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}. \tag{3.11}$$

Para $\beta = (I - \mathcal{M})\varrho$, com $\varrho \in H^2_\varepsilon$, vale

$$\|\nabla_\varepsilon \beta\|_{L^4(\tilde{\Omega})} \leq L\, \|\nabla_\varepsilon \beta\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\Delta_\varepsilon \beta\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\, \|\Delta_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})}. \tag{3.12}$$

Para $\beta = (I - \mathcal{M})\varrho$, com $\varrho \in H^3_\varepsilon$, vale

$$\|\Delta_\varepsilon \beta\|_{L^4(\tilde{\Omega})} \leq L\, \|\Delta_\varepsilon \beta\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \beta\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} B\varepsilon^{\frac{1}{4}} \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})}. \tag{3.13}$$

Para $w = (I - \mathcal{M})u$, com $u \in D(A_\varepsilon)$, vale

$$\|w\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq L\, \|w\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \|A_\varepsilon w\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\, \|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \tag{3.14}$$

Para $\beta = (I - \mathcal{M})\varrho$, com $\varrho \in H^3_{p,\varepsilon}$, temos

$$\|\nabla_\varepsilon \beta\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq L\, \|\Delta_\varepsilon \beta\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \beta\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\, \|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})}. \quad (3.15)$$

Ainda, para $\beta = (I - \mathcal{M})\varrho$, com $\varrho \in H^3_{p,\varepsilon}$, vale

$$\|\beta\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq L\, \|\nabla_\varepsilon \beta\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\Delta_\varepsilon \beta\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\, \|\Delta_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})}. \quad (3.16)$$

3.2 Limitação da Componente Vertical

Nesta seção, procuramos estimativas que controlem as componentes verticais w e β da solução (u, ϱ). Antes, colocamos uma observação importante que será utilizada nas demonstrações dos lemas subsequentes.

3.2.1 Observação A solução $(u, \varrho) = (v+w, \alpha+\beta)$ é limitada no sentido do Teorema 2.2.3, isto é, $\|\nabla_\varepsilon u(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon \varrho(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < (2\tilde{C}_5)^{-1/4}$ para todo $t \geq 0$.

Entretanto, os lemas seguintes exigem uma condição de limitação menos restritiva do que a que realmente temos conforme o Teorema 2.2.3. De fato, para a validade dos lemas a seguir basta que, para alguma constante positiva fixa b menor que $1/25$, tenhamos $\|\nabla_\varepsilon\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < \varepsilon^{-b}$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o que é implicado pelo resultado acima.

Pelas observações da seção anterior, v, w, α e β também são limitadas no mesmo sentido.

O objetivo de trabalhar com este tipo menos restritivo de limitação é o de termos a possibilidade de generalizar os resultados a serem apresentados, no caso de se obter existência de solução global com condições de limitação de dados iniciais menos restritivas do que a obtida no capítulo anterior.

Outra observação importante é, como já alertamos anteriormente, embora não tenha ainda sido possível obter um resultado de existência global para o problema (1.12), a partir deste momento, trabalharemos com este problema como se houvesse um tal resultado, e fornecesse informações similares àquelas do Teorema 2.2.3.

Com ligeiras simplificações nas provas, os resultados obtidos serão imediatamente válidos para o problema (1.13).

Repetimos que adotamos este procedimento apenas para mostrar que se tivéssemos tal informação de existência global, os mesmos resultados valeriam para (1.12).

Iniciamos pelo seguinte lema, que nos fornece uma estimativa para $||A_\varepsilon w||$:

3.2.2 Lema *Seja (u,ϱ) solução global de (1.13) , dada pelo Teorema 2.2.3, a qual satisfaz*

$$\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\triangle_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} < \varepsilon^{-b},$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, (ou uma possível solução similar de (1.12)).

Sejam também $v = \mathcal{M}u$, $w = (I-\mathcal{M})u$, $\alpha = \mathcal{M}\varrho$ e $\beta = (I-\mathcal{M})\varrho$, as quais satisfazem (3.5) com as condições de contorno periódicas:

$$\begin{aligned} v((x,y)+l_i\,e_i,t) &= v((x,y),t)\ i=1,2,3\\ w((x,y)+l_i\,e_i,t) &= w((x,y),t)\ i=1,2,3\\ \alpha((x,y)+l_i\,e_i,t) &= \alpha((x,y),t)\ i=1,2,3\\ \beta((x,y)+l_i\,e_i,t) &= \beta((x,y),t)\ i=1,2,3. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Então, para qualquer constante positiva b, e $0<\varepsilon<1$, existe $C_6>0$, C_6 independente de ε e de b tal que

$$\mu\,\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \le C_6 \left\{ \|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac12 - b}\,\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right.$$

$$\left. +\varepsilon^{\frac12}\,\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\,\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac12 - b}\,\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2\,\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac12 - b}\,\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \right\}.$$

Prova: Tomando o produto interno entre a primeira equação de (3.5) e $A_\varepsilon w$, temos:

$$\left(\varrho\,\frac{\partial v}{\partial t}, A_\varepsilon w\right) + \left(\varrho\,\frac{\partial w}{\partial t}, A_\varepsilon w\right) + (\varrho\,(v\cdot\nabla_\varepsilon)\,v, A_\varepsilon w)$$

$$+(\varrho\,(v\cdot\nabla_\varepsilon)\,w, A_\varepsilon w) + (\varrho\,(w\cdot\nabla_\varepsilon)\,v, A_\varepsilon w) + (\varrho\,(w\cdot\nabla_\varepsilon)\,w, A_\varepsilon w)$$

$$-\lambda\,\left[((v\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\,\varrho, A_\varepsilon w) + ((w\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\,\varrho, A_\varepsilon w) + \right.$$

$$(\nabla_\varepsilon\, \varrho \cdot \nabla_\varepsilon\, v, A_\varepsilon w) + (\nabla_\varepsilon\, \varrho \cdot \nabla_\varepsilon\, w, A_\varepsilon w)] =$$

$$\mu\,(\triangle_\varepsilon\, v, A_\varepsilon w) + \mu\,(\triangle_\varepsilon\, w, A_\varepsilon w) - (\nabla_\varepsilon\, p, A_\varepsilon w) + (\varrho f, A_\varepsilon w).$$

Usando que $v = \mathcal{M}u$, $w = (I - \mathcal{M})u$, $\alpha = \mathcal{M}\varrho$ e $\beta = (I - \mathcal{M})\varrho$, observamos que:

- $(\triangle_\varepsilon\, v, A_\varepsilon w) = 0$ pois $\mathcal{M}(A_\varepsilon w) = 0$, já que $A_\varepsilon w = (I - \mathcal{M})A_\varepsilon u$, o que pode ser comprovado via Séries de Fourier, logo $\mathcal{M}(A_\varepsilon w) = \mathcal{M}(I - \mathcal{M})A_\varepsilon u = 0$; e $\triangle_\varepsilon\, v = \mathcal{M}(\triangle_\varepsilon\, v)$;
- $(\nabla_\varepsilon\, p, A_\varepsilon w) = 0$;
- $\left(\varrho\,\dfrac{\partial v}{\partial t}, A_\varepsilon w\right) = \left(\beta\,\dfrac{\partial v}{\partial t}, A_\varepsilon w\right)$ já que $M\left(\alpha\,\dfrac{\partial v}{\partial t}\right) = \alpha\,\dfrac{\partial v}{\partial t}$ e assim $\left(\alpha\,\dfrac{\partial v}{\partial t}, A_\varepsilon w\right) = 0$;
- Da mesma forma $(\varrho\,(v \cdot \nabla_\varepsilon\,)\,v, A_\varepsilon w) = (\beta\,(v \cdot \nabla_\varepsilon\,)\,v, A_\varepsilon w)$;
- $((v \cdot \nabla_\varepsilon\,)\nabla_\varepsilon\, \varrho, A_\varepsilon w) = ((v \cdot \nabla_\varepsilon\,)\nabla_\varepsilon\, \beta, A_\varepsilon w)$;
- $(\nabla_\varepsilon\, \varrho \cdot \nabla_\varepsilon\, v, A_\varepsilon w) = (\nabla_\varepsilon\, \beta \cdot \nabla_\varepsilon\, v, A_\varepsilon w)$;
- $(\varrho f, A_\varepsilon w) = (\alpha\,\mathcal{M}f, A_\varepsilon w) + (\alpha\,(I - \mathcal{M})\,f, A_\varepsilon w) + (\beta f, A_\varepsilon w)$, mas como $(\alpha\mathcal{M}f, A_\varepsilon w) = 0$, então $(\varrho f, A_\varepsilon w) = (\alpha\,(I - \mathcal{M})\,f, A_\varepsilon w) + (\beta f, A_\varepsilon w)$.

Após tais observações, obtemos que:

$$\mu\,\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq M\,\|(I - \mathcal{M})f\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\beta\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\|\beta\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)} + M\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\|\beta\|_\infty\|v\|_\infty\|\nabla_\varepsilon\, v\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)} + M\,\|v\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, w\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+M\,\|w\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, v\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)} + M\,\|w\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda\,\|v\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\,\beta\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)} + \lambda\,\|w\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\,\varrho\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda\,\|\nabla_\varepsilon\,\beta\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, v\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}+\lambda\,\|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, w\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}.$$

Aplicando as desigualdades (2.32) a (2.37) e (3.10) a (3.16) à expressão acima, temos:

$$\mu\,\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \le M\,\|(I-\mathcal{M})f\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}+B\varepsilon^{\frac14}\,\|\triangle_\varepsilon\,\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+B\varepsilon^{\frac14}\,\|\triangle_\varepsilon\,\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)} + M\,\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+BL\varepsilon^{\frac14}\,\|\triangle_\varepsilon\,\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, v\|^{\frac54}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|^{\frac34}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+MBL\varepsilon^{\frac14}\,\|v\|^{\frac14}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, v\|^{\frac34}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + MB\varepsilon^{\frac14}\,\|\nabla_\varepsilon\, v\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+MB\varepsilon^{\frac14}\,\|\nabla_\varepsilon\, w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\lambda\,BL\varepsilon^{\frac14}\,\|\,v\|^{\frac14}\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, v\|^{\frac34}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda\,B\,\varepsilon^{\frac14}\,\|\triangle_\varepsilon\,\varrho\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\lambda B\varepsilon^{\frac14}\,\|\nabla_\varepsilon\,\triangle_\varepsilon\,\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, v\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda BL\varepsilon^{\frac14}\,\|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|^{\frac14}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\,\varrho\|^{\frac34}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

Levando em consideração as limitações observadas em 3.2.1, obtemos:

$$\mu\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq \left(M\|(I-\mathcal{M})f\|_{L^2(\tilde\Omega)} + B\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{b}{2}}\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)} + B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\triangle_\varepsilon\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)} \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}\right.$$

$$\left. +M\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)} + BL\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{b}{2}}\|\triangle_\varepsilon\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)} + 2\lambda BL\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{b}{2}}\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}\right)\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\left(MB(2L+3)\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{b}{2}}\right)\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com constante δ_9, temos

$$\mu\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq \frac{1}{2\delta_9}\left(M^2\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right.$$

$$\left. + M^2\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + B^2L^2\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + 4\lambda^2B^2L^2\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right)$$

$$+\left(\frac{\delta_9}{2} + MB(2L+3)\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{b}{2}}\right)\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

Escolhendo agora
$\delta_9 < \dfrac{\mu}{4}, \varepsilon < \dfrac{\mu^{\frac{b}{2}-\frac{1}{4}}}{(4MB(2L+3))^{\frac{b}{2}-\frac{1}{4}}}$ e $C_6 = \dfrac{1}{\delta_9} max\{M^2, B^2, B^2L^2, 4\lambda^2B^2L^2\}$, temos:

$$\mu\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq C_6\left\{\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right.$$

$$\left. + \left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right\}$$

o que demonstra o lema.

□

Agora demonstramos um lema a que nos fornece uma estimativa para $\dfrac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$ (Definição 3.1.1).

3.2.3 Lema *Seja (u,ϱ) solução global de (1.13) , dada pelo Teorema 2.2.3 (ou uma possível solução similar de (1.12)). Sejam também $v=\mathcal{M}u$, $w=(I-\mathcal{M})u$, $\alpha=\mathcal{M}\varrho$ e $\beta=(I-\mathcal{M})\varrho$, as quais satisfazem (3.5) com condições de contorno (3.17).*

Então, para $0<\varepsilon<1$ e b qualquer constante positiva, existe $C_7>0$, independente de ε ou b tal que

$$m\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq C_7\left\{\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\Delta_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right.$$

$$\left.+\,\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\|\Delta_\varepsilon\beta\|^2\|A_\varepsilon v\|^{\frac{3}{2}}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\nabla_\varepsilon\Delta_\varepsilon\beta\|^2\right\}$$

Prova:

Tomando o produto interno entre a primeira equação de (3.5) e $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, temos:

$$\left(\varrho\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\left(\varrho\frac{\partial w}{\partial t},\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\left(\varrho v\cdot\nabla_\varepsilon v,\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\left(\varrho w\cdot\nabla_\varepsilon v,\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$+\left(\varrho v\cdot\nabla_\varepsilon w,\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\left(\varrho w\cdot\nabla_\varepsilon w,\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\lambda\left[\left((v\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\varrho,\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right.$$

$$\left.+\left((w\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\varrho,\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\left((\nabla_\varepsilon\varrho\cdot\nabla_\varepsilon)v,\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\left((\nabla_\varepsilon\varrho\cdot\nabla_\varepsilon)w,\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]$$

$$= \mu \left(\Delta_\varepsilon v, \frac{\partial w}{\partial t}\right) + \mu \left(\Delta_\varepsilon w, \frac{\partial w}{\partial t}\right) - \left(\nabla_\varepsilon p, \frac{\partial w}{\partial t}\right) + \left(\varrho f, \frac{\partial w}{\partial t}\right).$$

Observando que $v = \mathcal{M}u$, $w = (I - \mathcal{M})u$, $\alpha = \mathcal{M}\varrho$ e $\beta = (I - \mathcal{M})\varrho$, obtemos:

- $\left(\Delta_\varepsilon v, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0$
- $\left(\nabla_\varepsilon p, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0$
- $\left(\Delta_\varepsilon w, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_\varepsilon w\|^2$
- $\left(\varrho v \cdot \nabla_\varepsilon v, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = \left(\beta v \cdot \nabla_\varepsilon v, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$
- $\left(\varrho \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = \left(\beta \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$
- $\left((v \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \varrho, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = \left((v \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \beta, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$
- $\left(\nabla_\varepsilon \varrho \cdot \nabla_\varepsilon v, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = \left(\nabla_\varepsilon \beta \cdot \nabla_\varepsilon v, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$,
- $\left(\varrho f, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = \left(\alpha (I - \mathcal{M}) f, \frac{\partial w}{\partial t}\right) + \left(\beta f, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$

Por exemplo, $\left(\varrho v \cdot \nabla_\varepsilon v, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = \left(\alpha v \cdot \nabla_\varepsilon v, \frac{\partial w}{\partial t}\right) + \left(\beta v \cdot \nabla_\varepsilon v, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$, mas a parcela $\left(\alpha v \cdot \nabla_\varepsilon v, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$ é nula, visto que o primeiro termo independe da terceira variável, logo $\alpha v \cdot \nabla_\varepsilon v = \mathcal{M}(\alpha v \cdot \nabla_\varepsilon v)$ e $\frac{\partial w}{\partial t} = (I - \mathcal{M})\frac{\partial u}{\partial t}$.

Levando em consideração as observações acima, temos:

$$m\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq M\,\|(I-\mathcal{M})f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\beta\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|\beta\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\beta\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\,\|v\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+M\,\|w\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + M\,\|v\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+M\,\|w\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \lambda\,\|v\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon \beta\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\lambda\|w\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon \varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \lambda\,\|\nabla_\varepsilon \beta\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\lambda\,\|\nabla_\varepsilon \varrho\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^4(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Aplicando as desigualdades (2.32) a (2.37) e (3.10) a (3.16) à expressão acima, obtemos:

$$m\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq M\,\|(I-\mathcal{M})f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\triangle_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\triangle_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+BL\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\triangle_\varepsilon\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{5}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+MB\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+MBL\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+MB^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{dw}{dt}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda BL\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda BL\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\nabla_\varepsilon\varrho\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}.$$

Usando a limitação$\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}<\varepsilon^{-b}$ (Observação 3.2.1) e a desigualdade de Hölder com constante δ_{10}, temos:

$$m\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$\leq\frac{1}{2\delta_{10}}\Big\{M^2\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+B^2L^2\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+B^2(2M^2+M^2L^2+\lambda^2+\lambda^2L^2)\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda^2 B^2(1+L^2)\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\Big\} + 11\frac{\delta_{10}}{2}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

Tomando $\delta_{10} < \dfrac{m}{11}$ e

$$C_7 = \frac{1}{\delta_{10}} max\{M^2, B^2, B^2L^2, B^2(2M^2 + M^2L^2 + \lambda^2 + \lambda^2L^2), \lambda^2B^2(1+L^2)\},$$

podemos concluir a demonstração, ou seja,

$$m\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq C_7\Big\{\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\|\triangle_\varepsilon \beta^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\Big\}.$$

□

Escrevemos agora $\varrho = \alpha + \beta$ com $\alpha = \mathcal{M}\varrho$ e $\beta = (I-\mathcal{M})\varrho$ e substituímos na terceira equação de (3.5). Desta maneira, vamos separar esta equação em duas, uma para α e outra para β, a fim de obtermos uma estimativa específica para a parte vertical β. Vejamos:

$$\frac{d}{dt}(\alpha+\beta) + ((v+w)\cdot\nabla_\varepsilon)(\alpha+\beta) = \lambda\triangle_\varepsilon(\alpha+\beta).$$

Como $\mathcal{M}\left(\dfrac{\partial\varrho}{\partial t} + u\cdot\nabla_\varepsilon\varrho - \lambda\triangle_\varepsilon\varrho\right) = 0$, temos:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \mathcal{M}(u\cdot\nabla_\varepsilon\varrho) = \lambda\triangle_\varepsilon\alpha \tag{3.18}$$

Também, como $(I-\mathcal{M})\left(\dfrac{\partial\varrho}{\partial t}+u\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho-\lambda\triangle_\varepsilon\,\varrho\right)=0$, temos:

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}+(I-\mathcal{M})(u\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho)=\lambda\,\triangle_\varepsilon\,\beta \tag{3.19}$$

Aplicando $\triangle_\varepsilon$ a (3.19) e tomando o produto interno com $\triangle_\varepsilon\,\beta$, temos:

$$\left(\triangle_\varepsilon\,\frac{\partial\beta}{\partial t},\triangle_\varepsilon\,\beta\right)+(\triangle_\varepsilon\,(I-\mathcal{M})\,(u\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho),\triangle_\varepsilon\,\beta)=\lambda\,(\triangle_\varepsilon\,(\triangle_\varepsilon\,\beta),\triangle_\varepsilon\,\beta)$$

Observamos que:

$$\left(\triangle_\varepsilon\,\frac{\partial\beta}{\partial t},\triangle_\varepsilon\,\beta\right)=\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|\triangle_\varepsilon\,\beta\|^2$$

e

$$(\triangle_\varepsilon\,(-(I-\mathcal{M})\,(u\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho)+\lambda\,\triangle_\varepsilon\,\beta),\triangle_\varepsilon\,\beta)$$

$$=-(\nabla_\varepsilon\,(-(I-\mathcal{M})\,(u\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho)+\lambda\,\triangle_\varepsilon\,\beta),\nabla_\varepsilon\,\triangle_\varepsilon\,\beta).$$

Logo, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\triangle_\varepsilon\,\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\lambda\,\|\nabla_\varepsilon\,\triangle_\varepsilon\,\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\leq|(\nabla_\varepsilon\,(I-\mathcal{M})\,(u\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho),\nabla_\varepsilon\,\triangle_\varepsilon\,\beta)|$$

$$\leq\|\nabla_\varepsilon\,(I-\mathcal{M})\,(u\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho)\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,\triangle_\varepsilon\,\beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$\leq\frac{1}{2\lambda}\,\|\nabla_\varepsilon\,(I-\mathcal{M})\,(u\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\frac{\lambda}{2}\,\|\nabla_\varepsilon\,\triangle_\varepsilon\,\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}.$$

Assim:

$$\frac{d}{dt}\,\|\triangle_\varepsilon\,\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\lambda\,\|\nabla_\varepsilon\,\triangle_\varepsilon\,\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\leq\frac{1}{\lambda}\,\|\nabla_\varepsilon\,(I-\mathcal{M})\,(u\cdot\nabla_\varepsilon\,\varrho)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \tag{3.20}$$

A partir desta estimativa, obtemos o seguinte lema:

3.2.4 Lema *Seja (u, ϱ) solução global de (1.13) , dada pelo Teorema 2.2.3 (ou uma possível solução similar de (1.12)). Sejam também $v = \mathcal{M}u$, $w = (I-\mathcal{M})u$, $\alpha = \mathcal{M}\varrho$ e $\beta = (I-\mathcal{M})\varrho$, as quais satisfazem (3.5) com condições de contorno(3.17).*

Então, para $0 < \varepsilon$ suficientemente pequeno, existe $C_8 > 0$ independente de ε tal que:

$$\frac{d}{dt}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \lambda \|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C_8 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Prova: Trabalhamos com o lado direito da estimativa (3.20).

$$(I - \mathcal{M})(u \cdot \nabla_\varepsilon \varrho) = (I - \mathcal{M})(v \cdot \nabla_\varepsilon \alpha + v \cdot \nabla_\varepsilon \beta + w \cdot \nabla_\varepsilon \alpha + w \cdot \nabla_\varepsilon \beta)$$

$$= (I - \mathcal{M})(v \cdot \nabla_\varepsilon \beta + w \cdot \nabla_\varepsilon \alpha + w \cdot \nabla_\varepsilon \beta).$$

já que $v \cdot \nabla_\varepsilon \alpha = \mathcal{M}(v \cdot \nabla_\varepsilon \alpha)$. Portanto:

$$\|\nabla_\varepsilon (I - \mathcal{M})(u \cdot \nabla_\varepsilon \varrho)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} = \|(I - \mathcal{M})\nabla_\varepsilon (u \cdot \nabla_\varepsilon \varrho)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$= \|(I - \mathcal{M})(\nabla_\varepsilon v \cdot \nabla_\varepsilon \beta + (v \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \beta + \nabla_\varepsilon w \cdot \nabla_\varepsilon \alpha$$

$$+(w \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \alpha + \nabla_\varepsilon w \cdot \nabla_\varepsilon \beta + (w \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \beta)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq \|\nabla_\varepsilon v \cdot \nabla_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|v \cdot \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon w \cdot \nabla_\varepsilon \alpha\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|w \cdot \triangle_\varepsilon \alpha\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon w \cdot \nabla_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|w \cdot \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq \|\nabla_\varepsilon \beta\|^2_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|v\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon \alpha\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|w\|^2_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon \alpha\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon \beta\|^2_{L^4(\tilde{\Omega})} + \|w\|^2_{L^\infty(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Aplicando as desigualdades (2.32) a (2.37) e (3.10) a (3.16) à expressão acima, temos:

$$\|\nabla_\varepsilon (I-\mathcal{M})(u\cdot\nabla_\varepsilon \varrho)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \le B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+BL\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + BL\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon \alpha\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon \alpha\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon \alpha\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+B\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}.$$

Usando a desigualdade $\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\triangle_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} < \varepsilon^{-b}$, (3.2.1) obtemos:

$$\frac{d}{dt}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \lambda\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \le \frac{1}{\lambda}\{2B\varepsilon^{\frac{1}{4}-b}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+(B(L+1)\varepsilon^{\frac{1}{4}-b} + B(B+1)\varepsilon^{\frac{1}{2}-b})\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\}$$

Escolhendo $\varepsilon < \left(\frac{\lambda}{4B}\right)^{b-\frac{1}{4}}$ e $C_8 = \frac{B}{\lambda} max\{L+1, B+1\}$, concluímos que:

$$\frac{d}{dt}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \lambda\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \le C_8\varepsilon^{\frac{1}{4}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}.$$

□

As estimativas obtidas pelos Lemas 3.2.2 e 3.2.3 não são suficientes pois apresentam dependência em relação à parte horizontal v. Também o lema anterior nos remete ao mesmo problema já que limita β em função de $A_\varepsilon w$. Procuramos agora contornar tais dificuldades, estabelecendo novas estimativas para a componente horizontal v. Iniciamos com o seguinte lema:

3.2.5 Lema *Seja (u, ϱ) solução global de (1.13), dada pelo Teorema 2.2.3 (ou uma possível solução similar de (1.12)). Sejam também $v = \mathcal{M}u, w = (I-\mathcal{M})u$, $\alpha = \mathcal{M}\varrho$ e $\beta = (I-\mathcal{M})\varrho$, as quais satisfazem (3.5) com condições de contorno (3.17).*

Então, para ε suficientemente pequeno e b constante positiva, existe $C_9 > 0$ independente de ε ou b tal que:

$$\mu \|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C_9 \left\{ \|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\Delta_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b} \|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\nabla_\varepsilon w\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})} + 2\|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \|\Delta_\varepsilon \varrho\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})} \right\}$$

Prova: Tomando o produto interno entre a primeira equação de (3.5) e $A_\varepsilon v$, temos:

$$\left(\varrho \frac{\partial v}{\partial t}, A_\varepsilon v\right) + \left(\varrho \frac{\partial w}{\partial t}, A_\varepsilon v\right) + (\varrho\,(v \cdot \nabla_\varepsilon v), A_\varepsilon v) + (\varrho\,(v \cdot \nabla_\varepsilon w), A_\varepsilon v)$$

$$+(\varrho\,(w\cdot\nabla_\varepsilon v), A_\varepsilon v) + (\varrho\,(w\cdot\nabla_\varepsilon w), A_\varepsilon v) - \lambda\,[((v \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \varrho, A_\varepsilon v) + ((w \cdot \nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon \varrho, A_\varepsilon v)$$

$$+ (\nabla_\varepsilon \varrho \cdot \nabla_\varepsilon v, A_\varepsilon v) + ((\nabla_\varepsilon \varrho \cdot \nabla_\varepsilon w).A_\varepsilon v)] = -\mu\,(\Delta_\varepsilon v, A_\varepsilon v)$$

$$-\mu\,(\Delta_\varepsilon w, A_\varepsilon v) - (\nabla_\varepsilon p, A_\varepsilon v) + (\varrho f, A_\varepsilon v).$$

Observamos que:

- $(\Delta_\varepsilon w, A_\varepsilon v) = 0$
- $(\nabla_\varepsilon p, A_\varepsilon v) = 0$
- $\left(\varrho \frac{\partial w}{\partial t}, A_\varepsilon v\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial t}, \varrho A_\varepsilon v\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial t}, \beta A_\varepsilon v\right) = \left(\beta \frac{\partial w}{\partial t}, A_\varepsilon v\right)$, já que $\left(\frac{\partial w}{\partial t}, \alpha A_\varepsilon v\right) = 0$ pois $\frac{\partial w}{\partial t} = (I - \mathcal{M})\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\alpha A_\varepsilon v = \mathcal{M}(\alpha A_\varepsilon v)$.

Assim, obtemos:

$$\mu\,\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq M\,\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)} + M\,\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\|\beta\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)} + M\,\|v\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, v\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+M\,\|v\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)} + M\,\|w\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, v\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+M\,\|w\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)} + \lambda\,\|v\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\, \varrho\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda\,\|w\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\, \varrho\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)} + \lambda\,\|\nabla_\varepsilon\, \varrho\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, v\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda\,\|\nabla_\varepsilon\, \varrho\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, w\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)}.$$

Utilizando as desigualdades (2.32) a (2.37) e (3.10) a (3.16), obtemos:

$$\mu\,\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq M\,\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)} + M\,\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\,\|\triangle_\varepsilon\, \beta\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)} + ML\,\|\nabla_\varepsilon\, v\|^{\frac{5}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{7}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+ML\,\|\nabla_\varepsilon\, v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{7}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)} + MBL\varepsilon^{\frac{1}{4}}\,\|\nabla_\varepsilon\, w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\, v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{7}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+MB\varepsilon^{\frac{1}{4}}\,\|\nabla_\varepsilon\, w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde\Omega)} + \lambda L\,\|\nabla_\varepsilon\, v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\, \varrho\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{7}{4}}_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\lambda L^2\|\nabla_\varepsilon\varrho\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{7}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\lambda LB\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\nabla_\varepsilon\varrho\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Reordenendo as parcelas acima, temos:

$$\mu\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\leq\Bigg(M\|f\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+M\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\triangle_\varepsilon\beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+MB\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}+\lambda B\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+LB\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\nabla_\varepsilon\varrho\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\Bigg)\|A_\varepsilon v\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+(ML\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{5}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}+ML\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+MBL\varepsilon^{\frac{1}{4}}\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}+\lambda L\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\lambda L^2\|\nabla_\varepsilon\varrho\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})})\|A_\varepsilon v\|^{\frac{7}{4}}_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder com constante δ_{11}, temos:

$$\mu\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\leq\frac{1}{2\delta_{11}}\Bigg[M^2\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+M^2\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+(M^2B^2\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\lambda^2B^2\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})})\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+L^2B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,\|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon\,\varrho\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\Big]$$

$$+\frac{1}{8\delta_{11}^8}\,[M^8L^8\,\|\nabla_\varepsilon\,v\|^{10}_{L^2(\tilde{\Omega})}+(M^8L^8+M^8B^8L^8\varepsilon^2)\,\|\nabla_\varepsilon\,v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\,w\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\lambda^8L^8\,\|\nabla_\varepsilon\,v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon\,\varrho\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})}+\lambda^8L^{16}\,\|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon\,\varrho\|^6_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\,v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}]$$

$$+\left(\frac{\delta_{11}}{2}+\frac{7}{8}\delta_{11}^{\frac{8}{7}}\right)\,\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Escolhendo δ_{11} tal que $\dfrac{\delta_{11}}{2}+\dfrac{7}{8}\delta_{11}^{\frac{8}{7}}<\dfrac{\mu}{2}$ e

$$C_9=max\left\{\frac{M^2}{\delta_{11}},\frac{B^2}{\delta_{11}},\frac{1}{\delta_{11}}\,(M^2B^2+\lambda^2B^2+L^2+B^2)\right.$$
$$\left.\frac{M^8L^8}{4\delta_{11}^8},\frac{1}{\delta_{11}^8}\,(M^8L^8+M^8B^8L^8),\frac{\lambda^8L^8}{4\delta_{11}^8}\,(1+L^8)\right\},$$

concluímos, utilizando a limitação (Observação 3.2.1) $\|\nabla_\varepsilon\,u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\Delta_\varepsilon\,\varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}<\varepsilon^{-b}$ que

$$\mu\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\le C_9\left[\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right.$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,\|\Delta_\varepsilon\,\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\,\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon\,v\|^{10}_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|\nabla_\varepsilon\,v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\,w\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon\,v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\Delta_\varepsilon\,\varrho\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})}]$$

□

Substituimos agora tal resultado na expressão dada pelo Lema 3.2.2, obtendo:

$$\mu\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq C_6 \left\{\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \right.$$

$$+ \left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \frac{C_9}{\mu}\left[\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right.$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\nabla_\varepsilon v\|^{10}_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$\left.\left.+\|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon w\|^8_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon \varrho\|^8_{L^2(\tilde\Omega)}\right] + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right].$$

De onde, podemos obter:

$$\mu\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq C_6 \left\{\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right.$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\left(1+\frac{C_9}{\mu}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right)\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\left(1+\frac{C_9}{\mu}\right)\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\varepsilon^{1-b}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}(4\varepsilon^{-5b})$$

$$\left.+\varepsilon^{1-3b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{1-3b}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right\}.$$

Escolhendo $\varepsilon < \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{1-3B}}$ e $C_{10} = 2C_6\left(1+\frac{4C_9}{\mu}\right)$, concluímos que

$$\mu\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq C_{10}\left\{\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right.$$

$$\left.\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-3b}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right\}. \tag{3.21}$$

A estimativa obtida para $\|A_\varepsilon v\|^2$ pelo Lema 3.2.5 também pode ser usada para me-lhorar a expressão dada pelo Lema 3.2.3, como monstramos no lema a seguir.

3.2.6 Lema *Seja (u, ϱ) solução global de (1.13) , dada pelo Teorema 2.2.3 (ou uma possível solução similar de (1.12)). Sejam também $v = \mathcal{M}u, w = (I-\mathcal{M})u$, $\alpha = \mathcal{M}\varrho$ e $\beta = (I-\mathcal{M})\varrho$, as quais satisfazem (3.5) com condições de contorno (3.17).*

Então, para ε suficientemente pequeno e b constante positiva, existe $C_{11} > 0$ independente de ε ou b tal que:

$$\frac{m}{2}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C_{11}\left\{\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{9}{4}b}\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right.$$

$$\left. +\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right\}$$

Prova:

Substituindo a estimativa para $\|A_\varepsilon v\|^2$ obtida pelo Lema 3.2.5 na expressão dada pelo Lema 3.2.3, temos:

$$m\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C_7\{\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\frac{C_9}{\mu}\left[\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right.$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon v\|^{10}_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\left. + \|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon w\|^8_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right]$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\}.$$

Escolhendo $\varepsilon < \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{1-\frac{13}{4}b}}$ e $C_{11} = C_7\left(1 + \frac{4C_9}{\mu}\right)$, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{2}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} &\leq C_{11}\{\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&+\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{9}{4}b}\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\|\Delta_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b}\|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\}.
\end{aligned}
$$

□

Combinando agora os resultados obtidos por (3.21) e pelos Lemas 3.2.6 e 3.2.4, obtemos o lema abaixo:

3.2.7 Lema *Seja (u,ϱ) solução global de (1.13), dada pelo Teorema 2.2.3 (ou uma possível solução similar de (1.12)). Sejam também $v = \mathcal{M}u, w = (I-\mathcal{M})u$, $\alpha = \mathcal{M}\varrho$ e $\beta = (I-\mathcal{M})\varrho$, as quais satisfazem (3.5) com condições de contorno (3.17).*

Então, para b constante positiva e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe C_{12} independente de ε ou b, $C_{12} > 0$ tal que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{m}{4}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{d}{dt}\|\Delta_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\quad+\frac{\lambda}{2}\|\nabla_\varepsilon \Delta_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{\mu m}{8C_{10}}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \\
&\leq C_{12}\left\{\|(I-\mathcal{M})\ f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-2b}\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\|\Delta_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Prova: Somando as estimativas dadas pelos Lemas 3.2.6 e 3.2.4 com a expressão dada em (3.21) multiplicada pelo fator $\frac{m}{4C_{10}}$ e escolhendo $C_{12} = 1 + \frac{m}{4C_{10}}$ e $\varepsilon < min\left\{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{4}{2-25b}}, \left(\frac{\mu m}{8C_{10}C_8}\right)^2\right\}$, obtemos:

$$\frac{m}{4}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\frac{d}{dt}(\mu\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\Delta_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})})$$

$$+\frac{\mu m}{8C_{10}}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\frac{\lambda}{2}\|\nabla_\varepsilon\Delta_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq C_{12}\left\{\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-2b}\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\|\Delta_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right\}.$$

□

Ainda com o objetivo de melhorar as estimativas já obtidas para as partes verticais w e β, procuramos controlar o termo horizontal $\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$ que figura em tais estimativas. Iniciamos com o seguinte lema:

3.2.8 Lema *Seja (u,ϱ) solução global de (1.13) , dada pelo Teorema 2.2.3 (ou uma possível solução similar de (1.12)). Sejam também $v=\mathcal{M}u, w=(I-\mathcal{M})u$, $\alpha=\mathcal{M}\varrho$ e $\beta=(I-\mathcal{M})\varrho$, as quais satisfazem (3.5) com condições de contorno (3.17).*

Então, para ε suficientemente pequeno e b constante positiva, existe $C_{14}>0$, C_{14} independente de ε ou b, tal que

$$\frac{m}{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq C_{14}\left\{\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\varepsilon^{-5b}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right\}$$

Prova: Efetuando o produto interno entre a primeira equação de (1.12) e $\frac{\partial v}{\partial t}$, temos:

$$\left(\varrho\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(\varrho\frac{\partial w}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(\varrho(v\cdot\nabla_\varepsilon)v,\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(\varrho(w\cdot\nabla_\varepsilon)v,\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(\varrho(v\cdot\nabla_\varepsilon)w,\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

$$+\left(\varrho\,(w\cdot\nabla_\varepsilon)\,w,\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\lambda\left[\left((v\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\,\varrho,\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left((w\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\,\varrho,\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(\nabla_\varepsilon\,\varrho\cdot\nabla_\varepsilon\,v,\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\nabla_\varepsilon\,\varrho\cdot\nabla_\varepsilon\,w,\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right]=\mu\left(\triangle_\varepsilon\,v,\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\mu\left(\triangle_\varepsilon\,w,\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\left(\nabla_\varepsilon\,p,\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\left(\varrho f,\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

Assim, observando que $\left(\varrho\,\frac{\partial w}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\left(\beta\,\frac{\partial w}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right)$, temos:

$$m\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\frac{\mu}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon\,v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\leq M\|f\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\beta\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+M\,\|v\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,v\|_{L^4(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}+M\,\|w\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,v\|_{L^4(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+M\,\|v\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,w\|_{L^4(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}+M\,\|w\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,w\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda\,\|v\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\,\varrho\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}+\lambda\,\|w\|_{L^\infty(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon\,\varrho\|_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\lambda\,\|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,v\|_{L^4(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}+\lambda\,\|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|_{L^4(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,w\|_{L^4(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2(\tilde\Omega)}.$$

Aplicando à expressão acima as desigualdades de Hölder, (2.32) a (2.37) e (3.10) a (3.16), temos:

$$m\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\frac{\mu}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon\,v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\leq\frac{1}{2\delta_{11}}\{M^2\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+M^2L^4\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+M^2B^2L^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}+M^2L^2B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$M^2B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\lambda^2L^2\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\lambda^2B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\lambda^2L^4\|\nabla_\varepsilon\varrho\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\lambda^2L^2B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\nabla_\varepsilon\varrho\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\}+\frac{\delta_{11}}{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

ou, reordenando as parcelas e escolhendo $\delta_{11}<m$,

$$m\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq\frac{1}{2\delta_{11}}\left\{M^2\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right.$$

$$+L^2(M^2L^2\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+M^2B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\lambda^2\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\lambda^2L^2\|\nabla_\varepsilon\varrho\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\varrho\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})})\|A_\varepsilon v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+B^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}(M^2L^2\|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon v\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde{\Omega})}+M^2\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\lambda^2\|\Delta_\varepsilon\,\varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\lambda^2L^2\|\nabla_\varepsilon\,\varrho\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\tilde\Omega)}\|\Delta_\varepsilon\,\varrho\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\tilde\Omega)})\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\}$$

Escolhendo também

$$C_{13}=\frac{1}{2\delta_{11}}max\{M^2,B^2,L^2(M^2L^2+M^2B^2+\lambda^2+\lambda^2L^2),$$
$$B^2(M^2L^2+M^2+\lambda^2+\lambda^2L^2)\},$$

observando novamente que $\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\Delta_\varepsilon\,\varrho\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}<\varepsilon^{-b}$ (veja a Observação 3.2.1) e aplicando mais uma vez a desigualdade de Hölder com constante δ_{12}, temos:

$$m\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon\,v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$
$$\leq C_{13}\left\{\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\delta_{12}}\varepsilon^{-5b}+\frac{\delta_{12}}{2}\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right\}.$$

Substituindo $\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$ pela limitação obtida no Lema 3.2.5, obtemos:

$$m\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon\,v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$
$$\leq C_{13}\left\{\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\frac{1}{2\delta_{12}}\varepsilon^{-5b}\right.$$
$$+\frac{\delta_{12}C_9}{2\mu}\left[\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\Delta_\varepsilon\,\beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right.$$
$$+\varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\nabla_\varepsilon\,v\|^{10}_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\nabla_\varepsilon\,v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|\nabla_\varepsilon\,w\|^8_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+ 2\|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\|\triangle_\varepsilon \varrho\|^8_{L^2(\tilde\Omega)}\Big] + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\Big\}$$

Como m e μ são dados e C_9 já foi escolhido, podemos escolher δ_{12} tal que $\delta_{12} < \dfrac{m\mu}{C_9}$ e também $C_{14} = C_{13}\, max\left\{1 + \dfrac{\delta_{12}C_9}{2\mu}, \dfrac{1}{2\delta_{12}} + \dfrac{4\delta_{12}C_9}{2\mu}\right\}$, concluindo que

$$\frac{m}{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$\leq C_{14}\left\{\|f\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \varepsilon^{-5b} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-b}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right\}.$$

□

Combinamos agora o resultado recém obtido com aquele dada pelo Lema 3.2.7 a fim de estabelecer uma estimativa para a integral de $\left\|\dfrac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$. Tal estimativa será muito útil para a demonstração do decréscimo das partes verticais de w e β,assunto abordado ainda nesta seção.

3.2.9 Lema *Para ε suficientemente pequeno, existe $C_{16} > 0$ tal que*

$$\int_\tau^t \left\|\frac{\partial v}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} ds \leq C_{16}\{\varepsilon^{-b} + \varepsilon^{-5b}(t-\tau)\}$$

para $0 \leq \tau < t$.

Prova: Somando as estimativas obtidas nos Lemas 3.2.7 e 3.2.8, temos:

$$\frac{m}{8}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \frac{m}{4}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$+\frac{d}{dt}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \frac{\mu m}{16C_{10}}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}$$

$$\leq C_{15}\{\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{-5b}\}$$

desde que ε seja escolhido de modo que

$$\varepsilon < min\left\{\left(\frac{m}{8}\right)^{\frac{2}{1-2b}}, \left(\frac{\mu m}{16C_{10}}\right)^{\frac{2}{1-2b}}, \left(\frac{m}{4}\right)^{\frac{4}{2-9b}}\right\},$$

$C_{15} = 2C_{12} + C_{14}$ e $b < \dfrac{1}{7}$.

Integrando tal expressão entre τ e t para $0 \leq \tau < t$, temos:

$$\frac{m}{4}\int_\tau^t \left\|\frac{\partial v}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} ds \leq \mu\|\nabla_\varepsilon w(\tau)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \mu\|\nabla_\varepsilon v(\tau)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|\Delta_\varepsilon \beta(\tau)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + C_{15}\int_\tau^t \|f(s)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} ds + C_{15}\varepsilon^{-5b}(t-\tau).$$

Assim, como $\|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < \varepsilon^{-b}$ (veja a Observação 3.2.1) e, supondo $\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < C_f < \varepsilon^{-b} < \varepsilon^{-5b}$, temos:

$$\frac{m}{4}\int_\tau^t \left\|\frac{\partial v}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} ds \leq (2\mu+1)\varepsilon^{-b} + 2C_{15}\varepsilon^{-5b}(t-\tau).$$

Escolhendo $C_{16} = \dfrac{4}{m} max\{2\mu+1, 2C_{15}\}$, concluímos que

$$\int_\tau^t \left\|\frac{\partial v}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} ds \leq C_{16}\{\varepsilon^{-b} + \varepsilon^{-5b}(t-\tau)\}.$$

□

Agora temos condições de demonstrar a seguinte proposição, que estabelece uma dependência da parte vertical da solução com relação a ε.

3.2.10 Proposição *Seja (u,ϱ) solução global de (1.13) , dada pelo Teorema 2.2.3 (ou uma possível solução similar de (1.12)). Sejam também $v = \mathcal{M}u, w = (I-\mathcal{M})u$, $\alpha = \mathcal{M}\varrho$ e $\beta = (I-\mathcal{M})\varrho$, as quais satisfazem (3.5) com condições de contorno (3.17).*

Supondo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < \varepsilon^{-b}$, $\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < \tilde{C}_f$, para b constante positiva, $b < \dfrac{1}{25}$, e $\tilde{C}$ constante e $\|\nabla_\varepsilon w(0)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\triangle_\varepsilon \beta(0)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, temos:

$$\|\nabla_\varepsilon w(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\triangle_\varepsilon \beta(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < \varepsilon^{\frac{1}{2}} \ \forall t \geq 0.$$

Prova: Voltando à estimativa obtida pelo Lema 3.2.7, temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{4}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \mu\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{d}{dt}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\\
&\quad + \frac{\lambda}{2}\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{\mu m}{8C_{10}}\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\\
&\leq C_{12}\left\{\|(I-\mathcal{M})\, f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-2b}\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right\}.
\end{aligned}$$

Supondo $\|f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < \varepsilon^{-b}$, $\|(I-\mathcal{M})f\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < \tilde{C}_f$, utilizando as desigualdades
$\|\nabla_\varepsilon \triangle_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \geq \dfrac{2\pi}{\varepsilon C}\|\triangle_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ e $\|A_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \geq \dfrac{2\pi}{\varepsilon C}\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$, já mostradas em (3.7) e (3.9) e
escolhendo $l = min\left\{\dfrac{m}{4}, \mu, \dfrac{2\lambda\pi^2}{\tilde{C}^2}, \dfrac{\mu m\pi^2}{2C_{10}C^2}\right\}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \frac{d}{dt}(\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})})\\
&\quad + \varepsilon^{-2}(\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})})\\
&\leq \frac{C_{12}}{l}\left\{\tilde{C}_f + \varepsilon^{\frac{1}{2}-3b} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\|\triangle_\varepsilon \beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right\}
\end{aligned}$$

Tomando $\phi(t) = \|\nabla_\varepsilon w(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon \beta(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$, temos:

$$\frac{d\phi}{dt} + \varepsilon^{-2}\phi \leq \frac{C_{12}}{l}\left\{\tilde{C}_f + \varepsilon^{\frac{1}{2}-3b} + \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\phi\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right\}$$

ou

$$\frac{d\phi}{dt} \leq \frac{C_{12}}{l}(\tilde{C}_f + \varepsilon^{\frac{1}{2}-3b}) + \phi\left(-\varepsilon^{-2} + \frac{C_{12}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right).$$

Pelo Lema de Gronwall(veja 1.1.7), vemos que

$$\phi(t) \leq \phi(0)\, exp\left\{\int_0^t \left(-\varepsilon^{-2} + \frac{C_{12}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right) d\tau\right\}$$

$$+\int_0^t \frac{C_{12}}{l}(\tilde{C}_f + \varepsilon^{\frac{1}{2}-3b}) exp\left(\int_\tau^t \left(-\varepsilon^{-2} + \frac{C_{12}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right) ds\right) d\tau.$$

Assim,

$$\phi(t) \leq \phi(0) exp\left\{-\varepsilon^{-2}t + \frac{C_{12}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\int_0^t \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} d\tau\right\}$$

$$+\frac{C_{12}}{l}(\tilde{C}_f + \varepsilon^{\frac{1}{2}-3b})\int_0^t exp\left\{-\varepsilon^{-2}(t-\tau) + \frac{C_{12}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}\int_\tau^t \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} ds\right\} d\tau.$$

Usando a limitação para $\displaystyle\int_\tau^t \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} ds$ obtida pelo Lema 3.2.9, temos:

$$\phi(t) \leq \phi(0) exp\left\{-\varepsilon^{-2}t + \frac{C_{12}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}C_{16}\{\varepsilon^{-b} + \varepsilon^{-5b}(t-\tau)\}\right\}$$

$$+\frac{C_{12}}{l}(\tilde{C}_f+\varepsilon^{\frac{1}{2}-3b})\int_0^t exp\left\{-\varepsilon^{-2}(t-\tau)+\frac{C_{12}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}b}C_{16}[\varepsilon^{-b}+\varepsilon^{-5b}(t-\tau)]\right\}d\tau.$$

Assim

$$\phi(t)\le\phi(0)\,exp\left\{(-\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b})t\right\}\,exp\left\{\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{9}{4}b}\right\}$$

$$+\frac{C_{12}}{l}(\tilde{C}_f+\varepsilon^{\frac{1}{2}-3b})\,exp\left\{\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{9}{4}b}\right\}\,exp\left\{\frac{C_{12}C_{16}}{l}(\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b}-\varepsilon^{-2})t\right\}$$

$$\cdot\int_0^t exp\left\{\left(\varepsilon^{-2}-\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b}\right)\tau\right\}d\tau$$

$$\le\phi(0)\,exp\{(-\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b})t\}\,exp\left\{\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{9}{4}b}\right\}$$

$$+\frac{C_{12}}{l}(\tilde{C}_f+\varepsilon^{\frac{1}{2}-3b})\,exp\left\{\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{9}{4}b}\right\}\,exp\left\{\left(\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b}-\varepsilon^{-2}\right)t\right\}$$

$$\cdot\frac{exp\left\{\left(\varepsilon^{-2}-\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b}\right)\right\}-1}{\varepsilon^{-2}-\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b}}$$

Escolhendo $b<\frac{1}{25}$, temos $\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b>\frac{1}{4}$, logo $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b}<\varepsilon^{\frac{1}{4}}$. Também $\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{9}{4}b}<\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ e $\varepsilon^{\frac{1}{2}-3b}<\varepsilon^{\frac{1}{4}}$.

Ainda $\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{25}{4}b}<\frac{\varepsilon^{-2}}{2}$ para ε suficientemente pequeno e também $\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{4}}<2$, logo:

$$\phi(t)\le\phi(0)\,exp\left\{\frac{\varepsilon^{-2}}{2}t\right\}\,exp\left\{\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right\}$$

$$+\frac{C_{12}}{l}(\tilde{C}_f + \varepsilon^{\frac{1}{4}})\, exp\left\{\frac{C_{12}C_{16}}{l}\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right\}\, 2\varepsilon^2 \left(1 - exp\left\{\frac{-\varepsilon^{-2}}{2}t\right\}\right).$$

ou

$$\phi(t) \leq \phi(0)\, 2\, exp\left\{\frac{-\varepsilon^{-2}}{2}t\right\} + \frac{C_{12}}{l}(\tilde{C}_f + 4\varepsilon^{\frac{1}{4}})\varepsilon^2$$

Logo $\phi(t) < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ para qualquer $t \geq 2\varepsilon^2 log 4$.

Assim, garantimos a limitação das partes verticais $\|\nabla_\varepsilon w\|$ e $\|\Delta_\varepsilon \beta\|$ por $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

$\square$

Capítulo 4: Atratores e Semicontinuidade Superior

Neste capítulo mostraremos a existência de atrator em um sentido fraco para (1.13). Tal sentido será fraco porque o conjunto a ser construdo terá a garantia de ser atrator apenas de soluções correspondentes a dados iniciais para os quais conseguimos provar a existência de soluções globais. Como este subconjunto de dados iniciais possíveis é pequeno, e definido em termos de normas fortes, a existência de tal atrator de sentido fraco não será de difícil demonstração com as informações que temos até este ponto do trabalho.

A principal contribuição, no entanto, é a obtenção da informação de que este atrator é um *subconjunto fino na terceira dimensão*, isto é, ele terá espessura que tende a zero quando ε tende a zero, uma vez que ele será obtido como o conjunto ω-limite de um conjunto absorvente com estas características. Isto permite que se relacionem as soluções destes problemas quando ε tende a zero, com as soluções correspondentes de um problema reduzido bidimensional a ser explicitado neste capítulo.

A busca do atrator para o problema (1.13) é feita da seguinte forma: por simplicidade de exposio, primeiramente consideraremos o problema como autônomo, isto é, assumiremos que f é independente de t e buscaremos o atrator para o processo autônomo associado às soluções deste problema. Também buscaremos atrator para o problema reduzido bidimensional associado a (1.13). A seguir gene-ra-lizaremos o resultado para problemas não autônomos, utilizando a noção de *Skew-Product Semiflow* e procuraremos atratores para os *Skew-Produts Semiflows* correspondentes ao problema (1.13) e ao seu problema reduzido.

É necessário comentar também que, devido à forma das limitações dos dados exigidas nos nossos resultados de existência global no tempo, obteremos atratores dentro de uma bacia de atração respeitando tais limitações. Dessa forma, e infelizmente, não teremos o crescimento da bacia de atração a medida em que ε decresce, como ocorre no caso das equações de Navier-Stokes clássicas.

4.1 Atratores para o Problema Autônomo

Nesta seção assumiremos que o campo de forças f é independente do tempo, e, portanto, o problema (1.13) será autônomo.

Para cada $\varepsilon > 0$, denotamos a variedade

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \{(u, \varrho) \in H_\varepsilon \times L^2_{per}(\tilde{\Omega}) : \int_{\tilde{\Omega}} \varrho u = 0\}, \tag{4.1}$$

e denotemos por $\{S_\varepsilon(t)\}_{t=0}^{\infty}$, o processo autônomo contínuo correspondente às soluções de (1.13), $S_\varepsilon(t) : D(S_\varepsilon) \subset \mathcal{V}_\varepsilon \to \mathcal{V}_\varepsilon$, o qual pelo Teorema 2.2.3 sabemos estar bem definido para dados iniciais pequenos em normas adequadas se f satisfizer a condição de pequenez (2.44). Devemos lembrar também os argumentos do início do seção sobre existência global no tempo, no Capítulo 2, na qual está o argumento que mostra que $S_\varepsilon(t)(u, \varrho) \in \mathcal{V}_\varepsilon$ para $(u, \varrho) \in D(S_\varepsilon)$.

Mais propriamente, pelo Teorema 2.2.3, (veja (2.43)) para cada $\varepsilon > 0$, $D(S_\varepsilon)$ contém o seguinte conjunto limitado:

$$U_\varepsilon = \left\{(u, \varrho) \in \mathcal{V}_\varepsilon; \; \|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \frac{1}{2(2\tilde{C}_5)^{\frac{1}{4}}}\right\} \tag{4.2}$$

Definamos também o seguinte subconjunto de U_ε:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\varepsilon = \{(u, \varrho) \in \mathcal{V}_\varepsilon \quad \text{e } & \|\Delta_\varepsilon \varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \frac{1}{4(2\tilde{C}_5)^{\frac{1}{4}}} \\ & \|\Delta_\varepsilon (I - \mathcal{M})\varrho\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon (I - \mathcal{M})u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < \varepsilon^{1/2}\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Definimos o conjunto ω-limite de $\mathcal{B}_\varepsilon$ por

$$\omega(\mathcal{B}_\varepsilon) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S_\varepsilon(t)\mathcal{B}_\varepsilon}$$

onde o fecho é tomado em relação a $\mathcal{V}_\varepsilon$.

Demonstramos agora a seguinte proposição, que nos garante a existência de atrator para $S_\varepsilon(t)$:

4.1.1 Proposição *Seja $\{S_\varepsilon(t)\}$, processo autônomo contínuo associado ao Problema (1.13) definido acima. Então $\mathcal{A}_\varepsilon = \omega(\mathcal{B}_\varepsilon)$ é atrator para o processo contínuo $\{S_\varepsilon(t)\}$ com bacia de atração U_ε.*

Prova: Utilizamos o Teorema 1.1.6, recordado na seção 1.1, e que vale para processos autônomos. Segundo este teorema, temos que mostrar que:

- a) $\mathcal{B}_\varepsilon$ é absorvente em U_ε;
- b) $\{S_\varepsilon(t)\}$ é uniformemente compacto para t grande.

Demonstremos primeiro o ítem **a**.

a) $\mathcal{B}_\varepsilon$ é absorvente em U_ε.
Seja $\mathcal{B}$ um conjunto limitado em U_ε, temos que mostrar que existe $t_\varepsilon = t_\varepsilon(\mathcal{B})$ tal que $S_\varepsilon(t)\,\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\varepsilon \ \forall\, t \geq t_\varepsilon$.

Sejam $(u_0, \varrho_0) \in \mathcal{B}$ e $(u, \varrho) = S_\varepsilon(t)\,(u_0, \varrho_0)$, assim $u = v + w$ e $\varrho = \alpha + \beta$, com v e α, partes horizontais e w e β, partes verticais de u e ϱ respectivamente.

Agora, a Observação 2.2.4 feita ao final do Teorema 2.2.3, garante que:

$$\|\nabla_\varepsilon u(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon \varrho(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq (\|\nabla_\varepsilon u_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon \varrho_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})})\, e^{-\frac{1}{2}t} + 2\,C_f.$$

onde $C_f \leq \dfrac{1}{16(2\tilde{C}_5)^{\frac{1}{4}}}$, de acordo com (2.44).

Portanto, a desigualdade anterior implica que se t for tal que $e^{-t/2} \leq 1/2$, isto é, se $t \geq 2\ln 2$, teremos

$$(\|\nabla_\varepsilon u(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon \varrho(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})})\, e^{-\frac{1}{2}t} < \frac{1}{4(2\tilde{C}_5)^{\frac{1}{4}}},$$

Temos ainda que mostrar a existência de $t_\varepsilon(\mathcal{B})$ tal que

$$\|\nabla_\varepsilon w(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon \beta(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

para $t \geq t_\varepsilon(\mathcal{B})$. Para isto, lembramos que pela demonstração da Proposição 3.2.10, temos:

$$\|\nabla_\varepsilon w(t)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\Delta_\varepsilon \beta(t)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq$$
$$(\|\nabla_\varepsilon w(0)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\Delta_\varepsilon \beta(0)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}) 2\, exp\left\{-\frac{\varepsilon^{-2}}{2}\,t\right\} + 4\frac{C_{12}}{l}(\tilde C_f + \varepsilon^{\frac{1}{4}})\varepsilon^2.$$

Portanto, para termos $\|\nabla_\varepsilon w(t)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\Delta_\varepsilon \beta(t)\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} < \varepsilon^{1/2}$, basta tomarmos $\varepsilon > 0$ tão pequeno que

$$4C_{12}/l(\tilde C_f + \varepsilon^{1/4})\varepsilon^2 \leq \varepsilon^{1/2}/2,$$

e então tomar $t \geq 2\varepsilon^2 log 4 = t_\varepsilon(\mathcal{B})$.

Portanto, existe $t_\varepsilon(\mathcal{B})$ tal que para $t \geq t_\varepsilon(\mathcal{B})$ temos $S_\varepsilon(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\varepsilon$ e assim $\mathcal{B}_\varepsilon$ é um conjunto absorvente em U_ε.

Mostremos agora o ítem **b**.

b) $\{S_\varepsilon(t)\}$ é uniformemente compacto para t grande.

Temos que mostrar que dado $\mathcal{B} \subset U_\varepsilon$ limitado, existe $t_* = t_*(\mathcal{B}) \geq 0$ tal que $\overline{\bigcup_{t \geq t_1} S_\varepsilon(t)\mathcal{B}}$ seja compacto.

Dado $\mathcal{B} \subset U_\varepsilon$, $(u_0, \varrho_0) \in \mathcal{B}$ e $(u, \varrho) = S_\varepsilon(t)\,(u_0, \varrho_0)$, temos, pela demonstração do Teorema 2.2.3:

$$\|\nabla_\varepsilon u(t)\|^2 + \|\Delta_\varepsilon \varrho(t)\|^2 \leq e^{-\frac{1}{2}t}\,(\|\nabla_\varepsilon u_0\|^2 + \|\Delta_\varepsilon \varrho_0\|^2) + 2\,C_f < \frac{1}{(2\tilde C_5)^{\frac{1}{4}}}.$$

Logo, para cada ε considerado, temos $\bigcup_{t \geq 0} S_\varepsilon(t)\,\mathcal{B}$ limitado em $V_\varepsilon \times H^2_\varepsilon$, o qual é compactamente imerso em $H_\varepsilon \times L^2_{per}(\tilde\Omega)$, logo $\overline{\bigcup_{t \geq 0} S_\varepsilon(t)\,\mathcal{B}}$ é compacto em $H_\varepsilon \times L^2_{per}(\tilde\Omega)$(na verdade a atração acontece em uma norma ainda meis forte) e $\{S_\varepsilon(t)\}$ é uniformemente compacto para t grande.

Pelos ítens **a** e **b**, demonstramos que $\mathcal{A}_\varepsilon = \omega(\mathcal{B}_\varepsilon)$ é o atrator para $\{S_\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$ que atrai os limitados de $\mathcal{U}_\varepsilon$. $\square$

4.2 O Problema Autônomo Reduzido e Seu Atrator

Nesta seção, estudamos o que acontece com o problema (1.13) quando tomamos os dados iniciais com partes verticais nulas, isto é, $w_0 = 0$, $\beta_0 = 0$ e $(I - \mathcal{M})\, f = 0$ ($f = \mathcal{M} f$) e o domínio como $\Omega_0 = \Omega \times \{0\}$.

Pela demonstração da Proposição 3.2.10, temos

$$\|\nabla_\varepsilon\, w(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon\, \beta(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq (\|\nabla_\varepsilon\, w_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon\, \beta_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}) 2\, exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon^2} t\right\} + 4\frac{C_{12}}{l}(\tilde{C}_f + \varepsilon^{\frac{1}{4}})\varepsilon^2,$$

logo $w = 0$ e $\beta = 0$.

Assim, para estes dados iniciais, temos o problema reduzido:

$$\begin{cases} \alpha\left[\dfrac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x)\, v\right] - \lambda\left[(v \cdot \nabla_x)\, \nabla_x \alpha + (\nabla_x \alpha \cdot \nabla_x v)\right] \\ \quad = \mu\, \Delta_x v - \nabla_x \mathcal{M}(p) + \alpha \mathcal{M} f \\ div_x\, v = 0 \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \alpha = \lambda\, \Delta_x \alpha \\ v((x,y) + l_i\, e_i, t) = v((x,y),t) \;\; i = 1,2 \\ \alpha((x,y) + l_i\, e_i, t) = \alpha((x,y),t) \;\; i = 1,2 \end{cases} \tag{4.4}$$

em $\Omega_0 = \Omega \times \{0\}$, isto é, tomamos $\varepsilon = 0$ no problema (1.12).

Também ∇_x, Δ_x e div_x são, respectivamente, os operadores ∇_ε, Δ_ε e div_ε aplicados com relação às duas primeiras variáveis, x_1 e x_2, já que as funções independem da terceira variável. Também denotamos por A_x, o operador A_ε aplicado às funções independentes de y.

Observamos que tal problema engloba o problema problema bidimensional, visto que, sendo $(\tilde{v}, \tilde{\alpha})$ seja solução do problema bidimensional, podemos tomar $v = (\tilde{v}, 0)$ e $\alpha = \tilde{\alpha}$, com (v, α) satisfazendo o problema reduzido acima, para $f = (\tilde{f}, 0)$, $\tilde{f}$ termo forçante do problema bidimensional.

Também tomaremos, para α e v, os espaços funcionais:

$$H^2_{p,0} = \left\{ \alpha \in H^2(\Omega_0);\ \int_{\Omega_0} \alpha(x)\, dx = 0 \right\}$$

$$\mathcal{V}_{\varepsilon,0} = \{ v \in C^0_{\infty,per}(\Omega_0);\ div_x\, v = 0 \text{ em } \Omega_0 \}$$

para v e α tais que $v((x,0) + l_i e_i) = v(x,0)$ e $\alpha((x,0) + l_i e_i) = \alpha(x,0)$ e H_0 e V_0 , respectivamente, os fechos de $\mathcal{V}_{\varepsilon,0}$ em $L^2(\Omega_0)$ e $H^1(\Omega_0)$.

Podemos aplicar ao problema reduzido, a desigualdade decorrente da demonstração da Proposição 2.2.3, obtendo:

$$\begin{aligned} &\|\nabla_x v(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\triangle_x \alpha(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \\ &\leq e^{-\frac{1}{2}t} (\|\nabla_x v(0)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\triangle_x \alpha(0)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}) + 2\, C_f\, (1 - e^{-\frac{1}{2}t}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Passamos agora a estudar a existência de atrator para o problema reduzido. Assim como nos casos anteriores, consideramos inicialmente o problema autônomo, isto é, f independente de t. Neste caso, seja $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$, o semigrupo contínuo associado ao problema reduzido (4.4),

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ (v,\alpha) \in \mathcal{M}(K_1 \times K_2) \subset V_0 \times H^2_{p,0};\ \|\nabla_x v(t)\|^2 + \|\triangle_x \alpha(t)\|^2 < min \left\{ 1, \frac{1}{(2\tilde{C}_5)^{\frac{1}{4}}} \right\} \right\}.$$

e

$$U_0 = \left\{ (v,\alpha) \in \mathcal{M}(K_1 \times K_2) \subset V_0 \times H^2_{p,0};\ \|\nabla_x v(t)\|^2 + \|\triangle_x \alpha(t)\|^2 < \frac{1}{(2\tilde{C}_5)^{\frac{1}{4}}} \right\} \tag{4.6}$$

Consideramos também o conjunto ω-limite de $\mathcal{B}_0$:

$$\omega(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S_0(t)\, \mathcal{B}_0}.$$

onde o fecho é tomado em relação a $V_0 \times H^2_{p,0}$.

Mostremos agora a seguinte proposição que estabelece a existência de atrator global para o problema reduzido:

4.2.1 Proposição *$\mathcal{A}_0 = \omega(\mathcal{B}_0)$ é o atrator com bacia de atração U_0 para o processo autônomo contínuo $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$, associado ao problema reduzido (4.4), com $\|f\|$ convenientemente limitada.*

Prova: Para demonstrarmos esta proposição, faremos uso novamente do Teorema 1.1.6. Segundo este, basta mostrarmos que:

- **a)** $\mathcal{B}_0$ é absorvente em U_0;
- **b)** $\{S_0(t)\}$ é uniformemente compacto para t grande.

Demonstremos primeiro o ítem **a**:

a) $\mathcal{B}_0$ é absorvente em U_0.

Seja $\mathcal{B}$, um limitado em U_0, temos que mostrar que existe $t_0 = t_0(\mathcal{B}) \geq 0$ tal que $S_0(t)\,\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0 \;\forall\, t \geq t_0$.

Seja $(v_0, \alpha_0) \in \mathcal{B}$ e $(v, \alpha) = S_0(t)\,(v_0, \alpha_0)$. Por (4.5), temos:

$$\|\nabla_x v(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_x \alpha(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq e^{-\frac{1}{2}t}\,(\|\nabla_x v_0\|^2 + \|\Delta_x \alpha_0\|^2) + 2C_f.$$

Tomando $C_f < \dfrac{1}{4}$, temos $S_0(t)\,\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$ para $t > 2\left|log\left(2\,(\|\nabla_x v_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_x \alpha_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})})\right)\right| = t_0(\mathcal{B})$.

Mostremos agora o ítem **b**:

b) $\{S_0(t)\}$ é uniformemente compacto para t grande.

Temos que mostrar que existe t_0 tal que $\overline{\bigcup_{t\geq t_0} S_0(t)\,\mathcal{B}}$ é compacto em $H_0 \times L^2(\Omega_0)$ para $\mathcal{B}$ limitado.

Novamente, utilizamos, para $(v_0, \alpha_0) \in \mathcal{B}$ e $(v, \alpha) = S_0(t)(v_0, \alpha_0)$, a desigualdade

$$\|\nabla_x v(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_x \alpha(t)\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq e^{-\frac{1}{2}t}\,(\|\nabla_x v_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_x \alpha_0\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}) + 2C_f.$$

Assim, para $t_0 = 0$, temos, como $\mathcal{B}$ é limitado, $\bigcup_{t\geq 0} S_0(t)\,\mathcal{B}$ limitado em $V_0 \times H^2_{p,0}$ imerso compactamente em $H_0 \times L^2(\Omega_0)$ (na verdade, temos atração em uma norma ainda mais forte que esta). Logo $\overline{\bigcup_{t\geq 0} S_0(t)\,\mathcal{B}}$ é compacto em $H_0 \times L^2(\Omega_0)$.

□

Pelas Proposições 4.1.1 e 4.2.1, estabelecemos, no caso autônomo, a existência dos atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_0$ para os semigrupos $\{S_\varepsilon(t)\}$ e $\{S_0(t)\}$ associados, respectivamente, ao problema (1.12) e ao problema reduzido associado, (4.4).

4.3 Semicontinuidade Superior

Nesta seção, nosso objetivo é relacionar os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}$, encontrados na seção precedente. Obteremos uma Proposição garantindo semicontinuidade superior para a família de atratores.

Iniciamos demonstrando a seguinte proposição:

4.3.1 Proposição

Seja (u, ϱ) a solução do problema (1.13) e $(\overline{v}, \overline{\alpha}))$ a solução do problema reduzido associado (4.4). Denotemos $u = v + w$ e $\varrho = \alpha + \beta$, onde $v = \mathcal{M}u$, $w = (I - \mathcal{M})u$, $\alpha = \mathcal{M}\varrho$, $\beta = (I - \mathcal{M})\varrho$, $v_0 = \overline{v}_0$ e $\alpha_0 = \overline{\alpha}_0$.

Considerando as demais hipóteses da Proposição 3.2.10, temos:

$$\|\nabla_\varepsilon (v - \overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon (\alpha - \overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})} < C\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

Prova: Como (u, ϱ) é solução de (1.13) e $(\overline{v}, \overline{\alpha}))$ é solução de (4.4), $v - \overline{v}$ e $\alpha - \overline{\alpha}$ satisfazem às equações:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha-\overline{\alpha})\frac{\partial v}{\partial t}+\overline{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(v-\overline{v})+(v-\overline{v})\cdot\nabla_\varepsilon v+\overline{v}\cdot\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\\
&-\lambda[((v-\overline{v})\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\alpha+(\overline{v}\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})+\nabla_\varepsilon\alpha\cdot\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})+\nabla_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\cdot\nabla_\varepsilon\overline{v}]\\
&=\mu\Delta_\varepsilon(v-\overline{v})+\mu\Delta_\varepsilon w+\nabla_\varepsilon(I-\mathcal{M})p+(I-\mathcal{M})f\\
&-\alpha\frac{\partial w}{\partial t}-\beta\frac{\partial w}{\partial t}-v\cdot\nabla_\varepsilon w-w\cdot\nabla_\varepsilon u\\
&+\lambda[(v\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\beta+(w\cdot\nabla_\varepsilon)\nabla_\varepsilon\varrho+\nabla_\varepsilon\alpha\cdot\nabla_\varepsilon w+\nabla_\varepsilon\beta\cdot\nabla_\varepsilon u]
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\alpha-\overline{\alpha})+v\cdot\nabla_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})+(v-\overline{v})\cdot\nabla_\varepsilon\overline{\alpha}-\lambda\Delta_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\\
&=-\frac{\partial\beta}{\partial t}-v\cdot\nabla_\varepsilon\beta-w\cdot\nabla_\varepsilon\alpha-w\cdot\nabla_\varepsilon\beta+\lambda\Delta_\varepsilon\beta
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Tomando o produto interno entre (4.7) e $\frac{\partial}{\partial t}(v-\overline{v})$, tem-se:

$$\frac{m}{2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(v-\overline{v})\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon\overline{v}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+2\lambda\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\alpha\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+2\lambda\|A_\varepsilon\overline{v}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+2\lambda\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+2\lambda\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\alpha\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

Assim, obtemos a seguinte estimativa:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}(v-\overline{v})\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\begin{aligned}&\leq C_1\left\{\left(\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon\overline{v}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right)\|\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right.\\&\quad+(\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon\overline{v}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\alpha\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})})\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\\&\quad\left.\varepsilon^{\frac{1}{2}}|\left(\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\alpha\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right)\right\}\end{aligned}\tag{4.9}$$

Dando continuidade à limitação de $v-\overline{v}$, tomamos o produto interno entre (4.7) e $A_\varepsilon(v-\overline{v})$, obtendo assim:

$$
\begin{aligned}
\|A_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde\Omega)} \leq\ & C_2\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial t}(v-\overline{v})\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right.\\
&+\left(\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|A_\varepsilon\overline{v}\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right)\|\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&+(\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|A_\varepsilon\overline{v}\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\alpha\|^2_{L^2(\tilde\Omega)})\,\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\left.+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\alpha\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Somando convenientemente (4.9) e (4.10), obtemos a estimativa abaixo para a norma de $v-\overline{v}$:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial}{\partial t}(v-\overline{v})\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\frac{d}{dt}\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|A_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\leq\left\{\left(\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|A_\varepsilon\overline{v}\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right)\|\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right.\\
&+(\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|A_\varepsilon\overline{v}\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\alpha\|^2_{L^2(\tilde\Omega)})\,\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\\
&\left.+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\alpha\|^2_{L^2(\tilde\Omega)}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Para obtermos uma estimativa semelhante para $\alpha-\overline{\alpha}$, tomamos o produto interno entre (4.8) e $\triangle_\varepsilon\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})$, de onde obtemos:

$$\frac{d}{dt}\|\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\leq \; C\{\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\overline{\alpha}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|\nabla_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\alpha\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|A_\varepsilon w\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\|\triangle_\varepsilon\beta\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\} \tag{4.12}$$

Somando as estimativas (4.11) e (4.12), obtemos a seguinte relação:

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}(v-\overline{v})\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\frac{d}{dt}(\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})})$$

$$+\|A_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$\leq C\left\{\left(\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon\overline{v}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon v\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\alpha\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\overline{\alpha}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right)\right.$$

$$\cdot\left(\|\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right)$$

$$\left.+\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|A_\varepsilon u\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\nabla_\varepsilon\triangle_\varepsilon\alpha\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\right)\right\}$$

Utilizando o Lema de Gronwall e o fato de $u\in K_1$ e $\varrho\in K_2$, tem-se:

$$\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\leq C\,exp\{C(3R_1^2+2R_2^2)\}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,(2R_1^2+R_2^2)$$

Assim

$$\|\nabla_\varepsilon(v-\overline{v})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}+\|\triangle_\varepsilon(\alpha-\overline{\alpha})\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}\leq C\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

□

Para estabelecermos a relação propriamente dita entre os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_0$, definimos a semidistância abaixo segundo a qual poderemos comparar tais atratores.

4.3.2 Definição

(i) Dado um espaço de Banach Z e dois subconjuntos C e D de Z, define-se a semidistância:

$$\delta_Z(C,D) = \sup_{c\in C} \inf_{d\in D} \|c-d\|_Z.$$

(ii) Dados $\mathcal{A}_\varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, subconjuntos de Z. Tais conjuntos são ditos semicontínuos superiormente em $\varepsilon = 0$ se:

$$\delta_Z(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \longrightarrow 0 \text{ ao } \varepsilon \longrightarrow 0$$

Sejam agora, no nosso caso, os subconjuntos de $K_1 \times K_2 \subset V_\varepsilon \times H^2_{p,\varepsilon}$, $\mathcal{A}_\varepsilon = \omega(\mathcal{B}_\varepsilon)$, com $\mathcal{B}_\varepsilon$ dado em (4.3), atrator para $\{S_\varepsilon(t)\}$ e $\mathcal{A}_0 = \omega(\mathcal{B}_0)$, com $\mathcal{B}_0$ dado em (4.6), atrator para $\{S_0(t)\}$. Seja também, $\delta(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) = \delta_{V_\varepsilon \times H^2_{p,\varepsilon}}(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0)$. Estamos agora em condições de provar a seguinte proposição:

4.3.3 Proposição *Os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_0$ para os processos $\{S_\varepsilon(t)\}$ e $\{S_0(t)\}$, respectivamente, são semicontínuos superiormente, isto é,*

$$\delta(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \longrightarrow 0 \text{ ao } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Prova:

A semidistância entre os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_0$ é dada por:

$$\delta(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) = \sup_{(u,\varrho)\in\mathcal{A}_\varepsilon} \inf_{(\tilde{v},\tilde{\alpha})\in\mathcal{A}_0} \left(\|\nabla_\varepsilon (u-\tilde{v})\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon (\varrho-\tilde{\alpha})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}\right)$$

Observamos que $u = v + w$ e $\varrho = \alpha + \beta$ para $v = \mathcal{M}u$, $w = (I - \mathcal{M})u$, $\alpha = \mathcal{M}\varrho$ e $\beta = (I - \mathcal{M})\varrho$ e, considerando $(\overline{v}, \overline{\alpha})$ solução de (4.4) com $\overline{v}_0 = v_0$ e $\overline{\alpha}_0 = \alpha_0$, utilizando a Proposição 4.3.1, temos:

$$\inf_{(\tilde{v},\tilde{\alpha})\in\mathcal{A}_0} (\|\nabla_\varepsilon (u - \tilde{v})\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon (\varrho - \tilde{\alpha})\|_{L^2(\tilde{\Omega})})$$

$$\leq \inf_{(\tilde{v},\tilde{\alpha})\in\mathcal{A}_0} (\|\nabla_\varepsilon w\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\nabla_\varepsilon (v - \overline{v})\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$+\|\nabla_\varepsilon (\overline{v} - \tilde{v})\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon \beta\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon (\alpha - \overline{\alpha})\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon (\overline{\alpha} - \tilde{\alpha})\|_{L^2(\tilde{\Omega})})$$

$$\leq \inf_{(\tilde{v},\tilde{\alpha})\in\mathcal{A}_0} (4\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \|\nabla_\varepsilon (\overline{v} - \tilde{v})\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \|\Delta_\varepsilon (\overline{\alpha} - \tilde{\alpha})\|_{L^2(\tilde{\Omega})})$$

$$\leq 4\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

Assim $\delta(S_\varepsilon(t)\,\mathcal{B}_\varepsilon, S_0(t)\,\mathcal{B}_0) \longrightarrow 0$ ao $\varepsilon \longrightarrow 0$.

□

Com esta proposição, solucionamos o problema no caso autônomo. Passamos agora a tratar do problema na sua forma ,mais geral, isto é, considerando f como dependente de t.

4.4 Atratores no Caso Não Autônomo

Para encontrar atratores para o problema (1.13) e para o problema reduzido associado, (4.4), com a função f dependendo de t, isto é, para o caso não autônomo, utilizaremos a teoria de *Skew-Produt Semiflow*.

4.4.1 Definição

Considerando $f \in W(\tilde{\Omega}) := C^0(\mathbb{R}, L^2(\tilde{\Omega})) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\tilde{\Omega}))$, definimos a convergência sequencial de f_n a f por:

$$f_n \longrightarrow f \Longleftrightarrow \sup_{t\in\mathcal{K}} \|f_n(t) - f(t)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \longrightarrow 0 \text{ ao } n \longrightarrow \infty$$

para $\mathcal{K}$ compacto, $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$.

Definimos também, para $f \in W(\tilde{\Omega})$, a translação ou fluxo translacional:

$$f_\tau(t) := f(\tau + t).$$

Observamos que $f_\tau \in W(\tilde{\Omega})$, se $f \in W(\tilde{\Omega})$ e que a função

$$\begin{array}{ccc} W(\tilde{\Omega}) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & W(\tilde{\Omega}) \\ (f, \tau) & \longmapsto & f_\tau \end{array}$$

é contínua.

4.4.2 Definição
Definimos:

$$H^+(f) = \overline{\{f_\tau; \tau \geq 0\}}$$
$$H(f) = \overline{\{f_\tau; \tau \in \mathbb{R}\}}$$

onde o fecho é tomado em $W(\tilde{\Omega})$, e o conjunto ω-limite de f por:

$$\omega(f) = \bigcap_{\tau \geq 0} H^+(f_\tau).$$

Observamos que:

- $H^+(f)$ e $H(f)$ pertencem a $W(\tilde{\Omega})$ para $f \in W(\tilde{\Omega})$;
- $\omega(f)$ é invariante pelo fluxo translacional;
- se $H^+(f)$ for compacto, então $H^+(f_\tau)$ é compacto e $\omega(f) \neq \emptyset$.

Sejam agora, H um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_H$, $\mathcal{F} \subset W(\tilde{\Omega})$, tal que $f_\tau(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{O} \subset H \times \mathcal{F} \times [0, \infty)$, aberto tal que $\{(u, f, 0);\ (u, f) \in H \times \mathcal{F}\} \subset \mathcal{O}$ e $\pi : \mathcal{O} \longrightarrow H \times \mathcal{F}$, uma função da forma $\pi(u, f; t) = (S(f, t)u, f_t)$ para $(u, f; t) \in \mathcal{O}$.

Para cada $(u, f) \in H \times \mathcal{F}$, seja $I_{(u,t)} = [0, \tau)$, $\tau = \tau(u, f)$, o intervalo maximal para o qual $(u, f, t) \in \mathcal{O}$ para $0 \leq t \leq \tau$.

4.4.3 Definição Dizemos que π é Skew-Produt Semiflow em $H \times \mathcal{F}$ se:

- **(1)** $S(f,0)\,u = u \ \forall\,(u,f) \in H \times \mathcal{F}$;
- **(2)** $t \in I_{(u,f)}$, $s \in I_{(S(f,t)\,u,f_t)}$ implica que $t+s \in I_{(u,f)}$ e $S(f_t,s)\,S(f,t)\,u = S(f,t+s)\,u$;
- **(3)** a função $(u,f,t) \longrightarrow \pi(u,f,t)$ for contínua em $(u,f) \in H \times \mathcal{F}$ para t fixo e também em t para (u,f) fixo;
- **(4)** Se $(u,f) \in H \times \mathcal{F}$ e $\tau(u,f) < \infty$, então

$$\lim_{t \longrightarrow \tau^-} sup\,\|S(f,t)\,u\|_H = \infty.$$

Dado agora um conjunto $\mathcal{K} \subset H \times \mathcal{F}$ e $0 \leq t < \tau(u,f)$, $\forall\,(u,f) \in \mathcal{K}$, definimos $\pi(\mathcal{K};t)$ como o conjunto de todos os $\pi(u,f;t)$ com $(u,f) \in \mathcal{K}$.

Dizemos também que um conjunto $\mathcal{K} \subset H \times \mathcal{F}$ é invariante por π se $\tau(u,f) = \infty\ \forall\,(u,f) \in \mathcal{K}$ e $\pi(\mathcal{K};t) = \mathcal{K}$ para $t \geq 0$.

Definimos, para $\mathcal{K} \subset H \times \mathcal{F}$ com $\tau(u,f) = \infty\ \forall\,(u,t) \in \mathcal{K}$, o conjunto ω-limite de $\mathcal{K}$, como:

$$\omega(\mathcal{K}) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\left(\bigcup_{t \geq \tau} \pi(\mathcal{K},t)\right)},$$

onde o fecho é tomado em relação a $H \times \mathcal{F}$.

Apresentamos agora, a definição de atrator no sentido de *Skew-Produt Semiflow.*

4.4.4 Definição

Um subconjunto $\mathcal{U} \subset H \times \mathcal{F}$ é um atrator para π se $\mathcal{U}$ for compacto, invariante por π e $\mathcal{U} = \omega(\tilde{U})$ onde $\tilde{U}$ é uma vizinhança limitada de $\mathcal{U}$ em $H \times \mathcal{F}$.

A bacia de atração $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ é a coleção de todos $(u,f) \in H \times \mathcal{F}$ com a propriedade:

$$d_{H\times\mathcal{F}}(\pi(u,f;t),\mathcal{U}) \longrightarrow o \ \text{ao}\ t \longrightarrow \infty.$$

Se $\mathcal{B}(\mathcal{U}) = H \times \mathcal{F}$, dizemos que $\mathcal{U}$ é atrator global para π.

Aplicamos agora estas noções aso nosso problema, assim podemos generalizar a semicontinuidade e para o caso não autônomo. Iniciamos considerando

$f \in \mathcal{F} = W^{1,\infty}((0,\infty), H^1_\varepsilon(\tilde{\Omega})) \bigcap W(\tilde{\Omega})$, o que garante, segundo [29], $H^+(f)$ compacto, logo $\omega(f) \neq \emptyset$.

Tomamos $S_\varepsilon(f,t)$, o processo associado ao problema autônomo com termo forçante f_t, considerado como constante em relação a t.

Assim, temos o *Skew-Produt Semiflow* associado ao problema (3.5) como sendo o par formado pelo processo $\{S_\varepsilon(f,t)\}$ e pelo fluxo translacional f_t. Isto é, a cada instante t, temos a evolução do semigrupo $S_\varepsilon(f,t)$ com dados iniciais u, ϱ e f_t junto à evolução do fluxo f_t. Mais precisamente:

$$\pi_\varepsilon((u,\varrho), f; t) = (S_\varepsilon(f,t)\,(u,\varrho), f_t).$$

De fato, π_ε satisfaz as condições de definição de *Skew-Product Semiflow* pois (1), (2) e (4) são satisfeitas pelo fato de $S_\varepsilon(f,t)$ ser processo.

No caso do ítem (3), a função:

$$((u,\varrho), f; t) \longmapsto \pi_\varepsilon((u,\varrho), f; t)$$

para cada t fixo é contínua pois $S_\varepsilon(f,t)$ é processo contínuo.

Para $((u,\varrho), f)$ fixos, temos, para $0 \leq t_1 \leq t_2$, $t_2 = t_1 + (t_2 - t_1)$ e

$$S_\varepsilon(f,t_2)(u,\varrho) = S_\varepsilon(f, t_1 + (t_2 - t_1))\,(u,\varrho) = S_\varepsilon(f_{t_1}, t_2 - t_1)\,S_\varepsilon(f,t_1)\,(u,\varrho).$$

Logo, ao $t_2 \longrightarrow t_1$, temos:

$$S_\varepsilon(f,t_2)\,(u,\varrho) \longrightarrow S_\varepsilon(f_{t_1}, 0)\,S_\varepsilon(f,t_1)\,(u,\varrho) = S_\varepsilon(f,t_1)\,(u,\varrho).$$

Também $f(t_2) \longrightarrow f(t_1)$ ao $t_2 \longrightarrow t_1$ pois $f \in W(\tilde{\Omega})$.

Obtemos agora um atrator para o Skew-Produt Semiflow associado ao problema (3.5).

4.4.5 Proposição

$\mathcal{U}_\varepsilon = (\mathcal{A}_\varepsilon, \omega(f))$ é atrator para π_ε com bacia de atração $U_\varepsilon \times \mathcal{F}$, onde $\mathcal{B}_\varepsilon$ é definido em (4.3) e $\mathcal{F} = W(\tilde{\Omega}) \bigcap W^{1,\infty}((0,\infty), H^1_\varepsilon(\tilde{\Omega}))$.

Prova:

Pela Proposição 4.1.1, temos:

$$d_{V_\varepsilon \times H^2_{p,\varepsilon}}(S_\varepsilon(f,t)\,(u,\varrho),\mathcal{A}_\varepsilon) \longrightarrow 0 \text{ ao } t \longrightarrow \infty$$

para $(u,\varrho) \in \mathcal{B}$. Também:

$$d_{\mathcal{F}}(f_t,\omega(f)) \longrightarrow 0 \text{ ao } t \longrightarrow \infty$$

pela definição de $\omega(f)$.

$\square$

Para o problema reduzido, (4.4), temos $S_0(f,t)$ processo associado a este problema para o termo forçante, $(\mathcal{M}f)_t$ considerado como constante em relação a t.

Assim, o Skew-Produt Semiflow associado a (4.4) é:

$$\pi_0((v,\alpha),\mathcal{M}f;t) = (S_\varepsilon(\mathcal{M}f,t)\,(v,\alpha),(\mathcal{M}f)_t)\,.$$

Como no caso de π_ε, temos que π_0 satisfaz as condições de definição de *Skew-Product Semiflow* e obtemos, para π_0, uma proposição semelhante a anterior.

4.4.6 Proposição
$\mathcal{U}_0 = (\mathcal{A}_0,\omega(\mathcal{M}f))$ é atrator para π_0 com bacia de atração $U_0 \times \mathcal{F}$.

Prova: De fato, pela Proposiçào 4.2.1, temos:

$$d_{V_0 \times H^2_{N,0}}(S_0(\mathcal{M}f,t)\,(v,\alpha),\mathcal{A}_0) \longrightarrow 0 \text{ ao } t \longrightarrow \infty.$$

Também, pela definição de ω-limite, $d_{\mathcal{F}}((\mathcal{M}f)_t,\omega(\mathcal{M}f)) \longrightarrow 0$ ao $t \longrightarrow \infty$ pela definição de $\omega(f)$.

$\square$

Podemos agora obter um resultado de semicontinuidade superior para os atratores $\mathcal{U}_\varepsilon$ e $\mathcal{U}_o$ dos *Skew-Products Semiflows* associados, respectivamente, aos problemas (1.12) e reduzido (4.4). Para tal, seja $f_\varepsilon(x_1,x_2,y) =$

$F(X_1, X_2, Y)$ para $(X_1, X_2, Y) \in \Omega_\varepsilon$, isto é, para cada problema associado a $\varepsilon > 0$, temos termo forçante f_ε. Assim, obtemos a proposição a seguir:

4.4.7 Proposição

Os atratores $\mathcal{U}_\varepsilon$ e $\mathcal{U}_0$ para os Skew-Produts Semiflows $\pi_\varepsilon((u, \varrho), f_\varepsilon; t)$ e $\pi_0((v, \alpha), f_0; t)$ são semicontínuos superiormente, isto é,

$$\delta_{V_\varepsilon \times H^2_{p,\varepsilon} \times \mathcal{F}}(\mathcal{U}_\varepsilon, \mathcal{U}_0) \longrightarrow 0 \text{ ao } \varepsilon \longrightarrow 0$$

para v e α, partes horizontais de u e ϱ, respectivamente, e também $f_0 = \mathcal{M} f_\varepsilon$ com f_ε tal que $\|(I - \mathcal{M})\, f_\varepsilon(t)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ $\forall t \geq 0$.

Prova:

$$\delta_{V_\varepsilon \times H^2_{p,\varepsilon} \times \mathcal{F}}(\mathcal{U}_\varepsilon, \mathcal{U}_0) = \delta_{V_\varepsilon \times H^2_{p,\varepsilon}}(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) + \delta_{\mathcal{F}}((f_\varepsilon)_t, (f_0)_t).$$

Pela Proposição 4.3.3, temos que $\delta_{V_\varepsilon \times H^2_{p,\varepsilon}}(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) \leq 2\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Por outro lado,

$$\|(f_\varepsilon)_t - (f_0)_t\|_{\mathcal{F}} = \sup_{\tau \in \mathcal{K}} \|(f_\varepsilon)_t(\tau) - (f_0)_t(\tau)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \text{ com } \mathcal{K} \subset I\!R \text{ compacto.}$$

Logo:

$$\|(f_\varepsilon)_t - (f_0)_t\|_{\mathcal{F}} = \sup_{\tau \in \mathcal{K}} \|f_\varepsilon(t + \tau) - f_0(t + \tau)\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$$

$$= \sup_{\tau \in \mathcal{K}} \|f_\varepsilon(t+\tau) - \mathcal{M} f_\varepsilon(t+\tau)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} = \sup_{\tau \in \mathcal{K}} \|(I - \mathcal{M}) f_\varepsilon(t+\tau)\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Assim:

$$\delta_{v_\varepsilon \times H^2_{p,\varepsilon} \times \mathcal{F}}(\mathcal{U}_\varepsilon, \mathcal{U}_0) \leq 3\varepsilon^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \text{ ao } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

$\square$

Obtemos assim, um resultado de semicontinuidade superior para os atratores associado aos problemas (1.12) e reduzido associado, (4.4).

Conclusão

No presente trabalho, obtivemos um resultado de semicontinuidade superior para os atratores $\mathcal{U}_\varepsilon$ e $\mathcal{U}_0$ dos problemas (3.5) e reduzido associado (4.4) respectivamente, em uma bacia de atração limitada.

Evidentemente, gostaríamos de ter obtido tal resultado dentro de uma bacia de atração com uma limitação dependente de ε, de modo que esta tendesse a se tornar ilimitada a medida em que ε decrescesse. Ou seja, gostaríamos de ter, para o problema reduzido, um atrator global, $\mathcal{U}_0$, para o qual o atrator $\mathcal{U}_\varepsilon$ se aproximasse quando ε tende a zero, como no caso da equação clássica de Navier-Stokes.

Isto não foi possível devido à limitação exigida dos dados iniciais para a existência de solução global para o problema.

Caso seja possível obter existência de solução para dados iniciais limitados por ε^{-b}, com b uma constante positiva menor que $\frac{1}{25}$, o resultado obtido no Capítulo 3 permite a generalização da semicontinuidade superior para esta situação. Assim, teríamos o atrator para o problema (3.5) em uma bacia de atração limitada na ordem de ε^{-b}, ou seja, aumentando a medida em que ε decresce e tornando-se ilimitada para o problema reduzido.

Bibliografia

[1] Adam, R. A., "Sobolev Spaces", Academic Press, 1975.

[2] Avrin, J. D. "Large-eigenvalue global existence and regularity results for the Navier-Stokes equation", J. of Differential Equations, 127, (1996), pp.365-390.

[3] Avrin, J. D., "A one-point attractor theory for the Navier-Stokes equation on thin domains with no-slip boundary conditions", Proc. AMS, vol. 127 nº 3, (1999), pp.725-735.

[4] Bayada, G., Chambat, M. and Ciuperca, I. "Comportement asymptotique d'un fluide dans un domaine mince variable en temps", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, (1998), p.265-268.

[5] Besson, O., Laydi, M. et Touzani R. "Un modèle asymptotique en océanographie", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 310, Série I, (1990), pp.661-665.

[6] Biazutti, A. C. e Crippa, H. R. "Atratores globais para sistemas dinâmicos em dimensão infinita", Minicurso, Atas do 38º Seminário Brasileiro de Análise, 1993.

[7] Beirão da Veiga, H. "Diffusion on viscous fluids. Existence and asymptotic properties of solutions", Annali Scu. Norm. Sup. Pisa, vol. X, (1983), pp.341-355.

[8] Beirão da Veiga, H. "Long time behavior of the solutions to the Navier-Stokes equations with diffusion", Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, vol. 27 nº 11, (1996), pp.1229-1239.

[9] Bresh, D., Lemoine, J. and Simon, J. "Écoulement engendré par le vent et la force de Coriolis dans un domaine mince: I cas stationnaire", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, (1997), p.807-812.

[10] Bresh, D., Lemoine, J. and Simon, J. "Écoulement engendré par le vent et la force de Coriolis dans un domaine mince: II cas d'évolution", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, (1998), p.329-334.

[11] Bresh, D., Lemoine, J. and Simon, J. "A Vertical diffusion model for lakes", SIAM J. Math. Anal., vol. 30 nº 3, (1999), pp.603-622.

[12] de Carvalho, A. N. and Ruas-Filho, J. G. "Global attractors for parabolic problems in fractional power space", SIAM J. Math. Anal., vol. 26 nº 2, (1995), pp.415-427.

[13] Evans, L. C. "Partial Differential Equations", Graduate Studies in Mathematics vol. 19, AMS, 1998.

[14] Friedman, A. "Partial Differential Equations", Holt, Rinehart and Winston, Inc., N.Y., 1969.

[15] Friedman, A. "Partial Differential Equations of Parabolic Type", Prentice-Hall, Inc., N.J.

[16] Hale, J. K. "Asymptotic Behavior of Dissipative Systems", Mathematical Surveys and Monographs nº 25, AMS, Providence, Rhode Island, 1988.

[17] Hale, J. K. and Raugel, G. "A damped hyperbolic equation on thin domains", Trans. AMS, vol. 329 nº 1, (1992), pp.185-219.

[18] Hale, J. K. and Raugel, G. "Reaction-diffusion equation on thin domains", J. Math. Pures et Appl., 71, (1992), p.33-95.

[19] Kazhikov, A. V. and Smagulov, Sh. "The correctness of boundary-value problems in a diffusion model of an inhomogeneous liquid", Sov. Phys. Dokl., vol. 22 nº 5, (1977), pp.249-250.

[20] Ladyzenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Unique solvability of an initial and boundary value problem for viscous incompressible nonhomogeneous fluids, Zap. Naucn. Sem. Leningrado Otdel Math. Inst. Steklov, 52 (1975), 52-109, English Transl. J. Soviet Math., 9 (1978), 697-749.

[21] Laydi, M. R. and Lenczner, M. "Équations de Navier-Stokes dans un domaine mince avec viscosité évanescente", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, (1998), pp.127-130.

[22] Lions, J. L. "Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires", Dunod, Paris, 1969.

[23] Marsden, J. E., Ratiu, T. S. and Raugel, G. "Équations d'Euler dans une coque sphérique since", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, (1995), pp.1201-1206.

[24] Maurer, J. "A genuinely multi-dimensional scheme for mixed hyperbolic-parabolic systems", Proc. 7th Int. Conf., Zuerich, Switzerland, 1998. Vol.II, Basel: Birkhaeuser, ISNM, Int. Ser. Numer. Math. 130, (1999), pp 713-722.

[25] Moise, I., Teman, R. e Ziane, M. "Asymptotic analysis of the Navier-Stokes equations in thin domains", Topological Methods in Nonlinear Analysis, J. of the Julius Schauder Center, vol. 10, (1997), pp.249-282.

[26] Montgomery-Smith, S. "Global regularity the Navier-Stokes equation on thin three-dimensional domains with periodic boundary conditions", Eletronic J. of Differential Equations, 1999 nº 11, (1999), pp.1-19.

[27] Oliva, S. M. "Reaction-diffusion systems on domains with thin channels", J. of Differential Equations, 123, (1995), pp.437-479.

[28] Raugel "Dynamics of Partial Differential Equations on Thin Domains", Lecture Notes in Mathematics, 1609, (1995).

[29] Raugel, G. and Sell, G. "Navier-Stokes equation on thin 3D domains I: global attractors and global Regularity of solutions", J. Amer. Math. Soc, vol. 6 nº 3, (1993), pp.503-568.

[30] Raugel, G. and Sell, G. "Navier-Stokes equation on thin 3D domain II: global regularity of spatially periodic solutions", College de France Proceedings, Pitman Res. Notes Math. Ser., Pitman, New York and London, (1992).

[31] Raugel, G. and Sell, G. "Navier-Stokes equation on thin 3D domain III: global atractors", IMA Proceedings on Dynamical Systems Approach to Turbulence, (1992).

[32] Raugel, G. and Sell, G. "Équations de Navier-Stokes dans des domaines minces en dimension trois: régularité globale", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série I, (1989), pp.299-303.

[33] Saint-Raymond, L. "Incompressible hydrodynamic limits for a kinetic model of waves-particles interaction", Asymptotic Anal., vol. 19 nº 2, (1999), pp.149-183.

[34] Secchi, P. "On the motion of viscous fluids in the presence of diffusion", SIAM J. Math. Anal., vol. 19, nº 1, (1988), pp.22-31.

[35] Tanabe, H. "Equations of Evolution", Ed. Pitman Publishing Ltd., Londres, 1979.

[36] Teman, R. "Navier-Stokes Equation, Theory and Numerical Analysis", North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1979.

[37] Teman, R. "Navier-Stokes Equation and Nonlinear Functional Analysis", CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, Pensilvania, 1983.

[38] Teman, R. e Ziane, M. "Navier-Stokes equations in three-dimensional thin Domains with various boundary conditions", Adv. Differential Equations 1, (1996), pp.499-546.

[39] Teman, R. e Ziane, M. "Navier-Stokes Equations in thin spherical domains", Contemporary Math., AMS, vol. 209, (1997), pp.281-314.

[40] Zhimin, C. "Global solutions of the Navier-Stokes equations in thin three-dimensional domains", J. Math. Anal. Appl., vol. 233 nº 2, (1999), pp.681-697.