Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Controle Ótimo Via Inclusões Diferenciais

por

Yurilev Chalco Cano
Bacharel em Matemática - UNICA, Ica

Orientador: Prof. Dr. Marko A. Rojas Medar

Março de 2000

Controle Ótimo Via Inclusões Diferenciais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Yurilev Chalco Cano, e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 30 de março de 2000

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar
Orientador

Banca Examinadora:
1. Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar.
2. Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva.
3. Prof. Dr. Roberto Andreani.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

Dissertação de Mestrado defendida em 17 de março de 2000 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

Prof (a). Dr (a). GERALDO NUNES SILVA

Prof (a). Dr (a). ROBERTO ANDREANI

“Os únicos erros que cometemos na vida
são as coisas que não fazemos”.

Emma Thompson.

A meus pais Gustavo e Gladis,
e a meus irmãos Yeremed, Ademir e Adilmer.

Agradecimentos

À universidade de Campinas, Unicamp, ao instituto de matemática, estatística e computação científica, IMECC, por ter permitido realizar meus estudos de Mestrado.

Ao conselho nacional de desenvolvimento científico e tecnolólogico, CNPq, pela bolsa de mestrado que me foi concedida entre março de 1998 e fevereiro do 2000.

Ao professor Dr. Marko A. Rojas Medar, pela orientação, pela paciência e pelo apoio durante a elaboração deste trabalho.

A meus colegas do Imecc (predinho), pela amizade, pelo companheirismo e colaboração. Entre eles, Everaldo Souto, Emerson Alves, José Lujan, Marcela, Sofia Pinzon, Jones Colombo, Roberto Cabrales, Newton Luis Santos, Herme Soto, Lucelina Batista, Rogerio, Marcio santos.

À Universidad Nacional "San Luis Gonzaga" de Ica, Facultad de Ciencias, professores e colegas, pelo apoio que me foi dado durante a graduação e ao término desta.

A meus amigos compatriotas, Blanca Diaz (IB), Paula, Nicolas Medina e Rita Guillen (FE), por terem sido minha família em Campinas.

A meus compatriotas, Marco e Carlos Arcos Camargo (FEM), Vitaly Rodriguez (FEEC), Carlos Contreras (IMECC), Abdon Tapia (FEM) e Mari Medina (FEA) pela sua amizade.

À família Chalco Arangoitia e Cano Aguirre pelo apoio no dia a dia da minha vida.

Finalmente, quero agradecer de maneira especial a Jorge Pedraza e Blanca Maquera, pela sua amizade e seus conselhos.

Índice

Resumo

O objetivo do presente trabalho é apresentar os principais resultados de análise multívoca, isto é, análise de funções que possuem como valores conjuntos. Neste contexto estão sendo dadas as principais propriedades e caracterizações de uma multifunção tais como semicontinuidade, continuidade, mensurabilidade, integrabilidade.

Também apresentamos o conceito de uma inclusão diferencial, esta que pode ser vista como uma generalização de uma equação diferencial, no sentido de que equações diferenciais são inclusões diferenciais quando os valores da multifunção são conjuntos unitários. Desta maneira podemos falar de existência de soluções, extensão de soluções, dependência de parâmetros. Aqui, serão dados os resultados básicos.

Finalmente, formularemos e fazemos o estudo do objeto central deste trabalho, "O Princípio do Máximo para Inclusões Diferenciais".

Introdução

O estudo de multifunções, isto é, funções que possuem como valores conjuntos, se inicia na decada dos 30, quando teoremas da existência de soluções de uma inclusão diferencial são provadas formalmente e são investigadas algumas propriedades topológicas das soluções. Naquela época não se achava uma aplicação certa destes teoremas. Somente depois da descoberta do princípio do máximo de Pontriagyn e do surgimento da teoria matemática de controle ótimo é que motiva aos pesquisadores ao estudo de inclusões diferenciais. Desde então , na análise de multifunções , chamada usualmente análise multívoca, se tem obtido um avanço substancial. Destacamos entre os principais pesquisadores A.F. Filippov, V.I. Blagodatskikh, J.P. Aubin, A. Cellina, entre outros.

Neste trabalho, o primero capítulo é dedicado justamente a um estudo detalhado das principais ferramentas de análise multívoca, tais como continuidade, mensurabilidade, e integrabilidade de multifunções; dando suas definições, algumas propriedades básicas e várias caracterizações. Além disso, definiremos e daremos algumas propriedades de uma ferramenta muito relevante nesta área, a chamada função suporte de um conjunto, mediante a qual podemos caracterizar as principais propriedades de uma multifunção .

É bem conhecida a importância do estudo das equações diferenciais tanto do ponto de vista teórico quanto das aplicações. No entanto, em muitos casos, tais equações parecem ser muito restritivas para descrever certos sistemas de evolução controlados, aparecendo várias dificultades tais como falta de determinismo, desconhecimento das leis que governam o controle para os possíveis estado do sistema, etc.

É possível traduzir tais problemas em termos matemáticos através das chamadas inclusões diferenciais

$$\dot{x} \in G(t,x),$$

onde $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ é uma função ; $G : [0,T] \to 2^X$ é uma multifunção; $\dot{x}$ denota a derivada de x com respeito ao tempo e 2^X é o conjunto dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, um sistema de contole sob certas condições nos conduz a uma inclusão diferencial, uma equação diferencial, $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, com discontinuidade no lado direito também nos conduz a uma inclusão diferencial.

Similar a uma equação diferencial, já que uma inclusão diferencial pode-se ver como uma equação diferencial sempre que a multifunção tenha como valores conjuntos unitários, podemos falar de existência de soluções, extensão de soluções, assim como dependência de parâmetros, etc. Assim, no segundo capítulo deste trabalho daremos a definição de tal inclusão diferencial e estudaremos os resultados básicos sobre a existência de soluções.

Análogo ao estudo de equações diferenciais, como o sistema de controle

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u \in U$$

onde $\dot{x}$ denota o vetor velocidade, t o tempo, u o controle e $U \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário, podemos considerar o problema de controle ótimo-tempo para inclusões diferenciais

$$\dot{x} \in F(x), \tag{1}$$

isto é, dado um ponto inicial x_0 e um ponto terminal x_1 necessitamos achar uma solução de (1) que transfira o ponto inicial ao ponto terminal no menor tempo possível.

Um resultado central na teoria de controle é o princípio do máximo de Pontryagin que nos fornece uma condição necessária de otimalidade. Através do princípio do máximo, se resolve alguns problemas de controle ótimo em forma explicita e em outros casos é possível reduzir o problema a problemas mais simples. Muitos métodos numéricos para resolver problemas de controle ótimo estão baseados neste princípio.

No último capítulo se faz um estudo geral sobre a prova do princípio do máximo ao problema de controle ótimo-tempo para inclusões diferenciais, baseado em [14].

Capítulo 1

Ferramentas de Análise Multívoca

1.1 Função Suporte

Consideremos o espaço de Banach Real X com norma $\|.\|$, X^* seu dual topológico com norma $\|.\|_*$ e $\langle , \rangle$ o produto real canônico entre X e X^*.

Definição 1.1 *Seja K um subconjunto não vazio de X. A* **função suporte** *de K é a função $\sigma(K, .)$ definida em X^* com valores em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por*

$$\sigma(K, x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle : x \in K\}$$

Observação 1.2 (a) *Se $X = \mathbb{R}^n$, seu dual é o mesmo $\mathbb{R}^n$. Assim, se $K \subset \mathbb{R}^n$ então*

$$\sigma(K, x) = \sup\{\langle x, y\rangle : y \in K\}$$

onde $\langle , \rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

(b) *Se $K \subset X$ for limitado, então existe $m > 0$ tal que $\|x\| \leq m$ $\forall x \in K$. Logo é fácil provar que*

$$| \sigma(K, x^*) - \sigma(K, y^*) | \leq m \mid \|x^*\|_* - \|y^*\|_* \mid \quad \forall x^*, y^* \in X^*.$$

Portanto a função suporte de K, $\sigma(K, .)$, é contínua.

Exemplo 1.3 *Seja K a bola unitária centrada em $0 \in X$. Então a função suporte de K, $\sigma(K, .)$, é definida como a função norma do dual, isto é,*

$$\sigma(K, x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle : \|x\| \leq 1\} = \|x^*\|_*$$

para todo $x^* \in X^*$, e esta é contínua. Se $X = \mathbb{R}^n$, $\sigma(K, x) = \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, onde $\|.\|$ é a norma usual em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.4 *Seja K um subconjunto não vazio de X. Então a função suporte $\sigma(K, .)$ satisfaz as seguinte propriedades:*

(a) *$D(\sigma(K, .)) = \{x^* \in X^* : \sigma(K, x^*) < +\infty\}$, chamado* **dominio efetivo** *de $\sigma(K, .)$, é um cone convexo com vértice em $0 \in X^*$.*

(*b*) $\sigma(K, \lambda x^*) = \lambda\sigma(K, x^*)$ $\forall\lambda \geq 0$ *(Positivamente homogênea).*

(*c*) $\sigma(K, x_1{}^* + x_2{}^*) \leq \sigma(K, x_1{}^*) + \sigma(K, x_2{}^*)$ *para todo* $x_1{}^*, x_2{}^* \in X^*$ *(Subaditiva)*

(*d*) $\sigma(K, .)$ *é semicontinua inferiormente e* $\sigma(K, .) \neq +\infty$.

(*e*) $\sigma(K, .) = \sigma(\overline{co}K, .)$, *onde* $\overline{co}K$ *indica a envoltória convexa e fechada de* K.

Prova: $(a), (b), (c)$ segue imediatamente da definição e das propriedades de sup. (d) é claro já que $\sigma(K, 0) = 0$ e $\sigma(K, .)$ é o supremo das formas lineares contínuas. Provaremos a propriedade (e). É claro que

$$\sigma(K, x^*) \leq \sigma(\overline{co}K, x^*) \ \ \forall x^* \in X^*.$$

Para provar a outra desigualdade, tomemos $x^* \in X^*$ qualquer. Se $\sigma(K, x^*) = +\infty$ é evidente, suponhamos que $\sigma(K, x^*) < +\infty$ e seja $x \in coK$, então existem $x_1, ..., x_m \in K$ e $\alpha_1, ..., \alpha_m \geq 0$ com $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ tal que

$$x = \sum_{i-1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Assim,

$$\langle x^*, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x^*, x_i\rangle.$$

Como cada $x_i \in K$, então

$$\langle x^*, x_i\rangle \leq \sup\{\langle x^*, y\rangle : y \in K\} = \sigma(K, x^*)$$

donde vem

$$\langle x^*, x\rangle \leq (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\sigma(K, x^*) = \sigma(K, x^*) \qquad \forall x \in coK$$

segue-se daí que

$$\sigma(coK, x^*) = \sup\{\langle x^*, x\rangle : x \in coK\} \leq \sigma(K, x^*). \tag{1.1}$$

Agora, tomemos $x \in \overline{co}K$ qualquer, então existe uma seqüência (x_n) em coK tal que $x_n \to x$. Como x^* é contínua

$$\langle x^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle.$$

daí, por 1.1, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se que

$$\langle x^*, x_n\rangle \leq \sigma(K, x^*).$$

Logo fazendo $n \to \infty$

$$\langle x^*, x\rangle \leq \sigma(K, x^*) \ \ \forall x \in \overline{co}K.$$

Portanto,

$$\sigma(\overline{co}K, x^*) \leq \sigma(K, x^*).$$

O que completa a prova da proposição . ■

Segue da definição e da propriedade (e) da proposição anterior que podemos escrever

$$x \in \overline{co}K \Longrightarrow [\langle x^*, x\rangle \leq \sigma(K, x^*) \;\; \forall x^* \in X^*].$$

Será que vale a recíproca? Vejamos o seguinte teorema.

Teorema 1.5 *Seja $K \subset X$ e $\sigma(K, .)$ sua função suporte. Então*

$$x \in \overline{co}K \Longleftrightarrow \langle x^*, x\rangle \leq \sigma(K, x^*) \;\; \forall x^* \in X^* \tag{1.2}$$

Prova: Só falta ver ($\Leftarrow$). Suponhamos que $x \notin \overline{co}K$, então , pelo teorema de Hahn Banach, $\{x\}$ e $\overline{co}K$ podem ser separados estritamente, isto é, existe $x_0{}^* \in X^*$ tal que

$$\langle x_0{}^*, x\rangle > \sup\{\langle x_0{}^*, y\rangle : y \in \overline{co}K\} = \sigma(K, x_0{}^*).$$

O que contradiz à hipótese. ■

Na equivalência 1.2, basta considerar x^* na bola unitária fechada de X^*, já que a função suporte de um conjunto está completamente determinada nesta bola, pois como $\sigma(K, .)$ é positivamente homogênea temos que

$$\sigma(K, \frac{x^*}{\|x^*\|_*}) = \frac{1}{\|x^*\|_*}\sigma(K, x^*) \quad \forall x^* \in X^* \setminus \{0\} \quad e \quad \sigma(K, 0) = 0.$$

Logo, se $S = \{x^* \in X^* : \|x^*\|_* \leq 1\}$, então

$$\overline{co}K = \{x \in X : \langle x^*, x\rangle \leq \sigma(K, x^*) \;\; \forall x^* \in S\} = \bigcap_{x^* \in S} \{x \in X : \langle x^*, x\rangle \leq \sigma(K, x^*)\}.$$

Definição 1.6 *Uma função $\psi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se diz* **não trivial** *se ela não é identicamente $+\infty$, isto é, se*

$$\psi(x) \neq +\infty.$$

Teorema 1.7 *Existe uma bijeção entre os subconjuntos não vazios, convexos, fechados de X e as funções não triviais, semicontinuas inferiormente, subaditivas, e positivamente homegêneas em X^*.*

Prova: Seja $\psi : X^* \to \mathbb{R}$ não trivial, semicontinua inferiormente, subaditiva e positivamente homogênea. Para a prova basta definir a função

$$\psi \mapsto A = \{x \in X : \langle x^*, x\rangle \leq \psi(x^*) \;\; \forall x^* \in X^*\}$$

■

Corolário 1.8 *Seja $C : X^* \to \mathbb{R}$ uma função não trivial, semicontinua inferiormente, subaditiva e positivamente homogênea, então existe um subconjunto não vazio, fechado e convexo de X tal que C é sua função suporte.*

Prova: Pelo teorema anterior, dado C existe um único subconjunto

$$A = \{x \in X : \langle x^*, x\rangle \leq C(x^*) \ \ \forall x^* \in X^*\}$$

que é não vazio, fechado e convexo em X associado a C. Segue daí que $C = \sigma(A, .)$. ∎

A seguir daremos algumas propriedades fundamentais da função suporte.

Proposição 1.9 *Dados os subconjuntos não vazios A, B de X, se verifica:*

(a) $\sigma(A, x^*) \geq 0 \quad \forall x^* \in X^* \Longleftrightarrow 0 \in \overline{co}A$

(b) *Se* $\alpha,\ \lambda > 0$, *então* $\sigma(\alpha A + \lambda B, x^*) = \alpha\sigma(A, x^*) + \lambda\sigma(B, x^*)$

(c) *Se* $A \subseteq B$, *então* $\sigma(A, x^*) \leq \sigma(B, x^*) \quad \forall x^* \in X^*$. *Reciprocamente, se para todo* $x^* \in X^*$ *se tem que*

$$\sigma(A, x^*) \leq \sigma(B, x^*)$$

então

$$\overline{co}A \subseteq \overline{co}B.$$

Particularmente, se A, B são subconjuntos convexos e fechados, temos que

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \sigma(A, x^*) \leq \sigma(B, x^*), \quad \forall x^* \in X^*.$$

(d) *Se* $\{A_i : i \in I\}$ *é uma família de subconjuntos não vazios de* X, *então*

$$\sigma(\bigcup_i A_i, x^*) = \sup_i \sigma(A_i, x^*)$$

(e) A *é simétrico (isto é,* $A = -A$*)* $\Leftrightarrow \sigma(A, .)$ *é par (isto é,* $\sigma(A, x^*) = \sigma(A, -x^*) \ \ \forall x^* \in X^*$*).*

Para detalhes da prova veja [1] ou [2]. ∎

Proposição 1.10 *Sejam,* $X = \mathbb{R}^n$, A *uma matriz* $n \times n$ *e* K *um subconjunto não vazio de* X. *Então*

$$\sigma(AK, x) = \sigma(K, A^*x).$$

Onde A^* é a matriz adjunta de A.

Prova: A prova é imediata, já que para todo $x \in X$ vale a seguinte igualdade

$$\langle Ay, x\rangle = \langle y, A^*x\rangle \qquad \forall y \in K.$$

∎

Uma das aplicações importantes da função suporte é a caracterização da distância de Haussdorff.

Seja (X, d) um espaço métrico. Para qualquer M, N de $P(X) = \{A \subseteq X\}$, definamos o número $d(M, N)$ (eventualmente $+\infty$) como sendo

$$d(M, N) = \sup\{d(x, N) : x \in M\}$$

onde, $d(x, N) = \inf\{d(x, y) : y \in N\}$.

Observe que nem sempre se cumpre que $d(M, N) = d(N, M)$ se $N \neq M$, pelo que a função $d(.,.)$ definida sobre a família de todos os subconjuntos limitados e não vazios de X, é chamada de **semi-distância de Hausdorff**. A partir desta semi-distância defina-se a **distância de Hausdorff** como

$$H(M, N) = \max\{d(M, N), d(N, M)\},$$

a qual esta bem definida sobre a família dos subconjuntos limitados, fechados e não vazios de X.

Definamos $L(X) = \{A \in P(X); A \text{ é não vazio, limitado e fechado}\}$, logo $(L(X), H)$ é um espaço métrico. A seguir suponhamos que X é um espaço de Banach e consideremos $C(X) = \{A \in L(X) : A \text{ é convexo}\}$.

Proposição 1.11 *Sejam $M, N \in C(X)$. Então*

$$d(M, N) = \sup\{\sigma(M, x^*) - \sigma(N, x^*) : x^* \in B^*\}$$

e

$$H(M, N) = \sup\{| \sigma(M, x^*) - \sigma(N, x^*) | : x^* \in B^*\}$$

onde $B^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\|_* \leq 1\}$.

A demonstração pode-se achar em [1]. No caso que $X = \mathbb{R}^n$, a proposição é uma conseqüência imediata do teorema de imersão de Minkowski. ■

1.2 Multifunções

Agora apresentamos o conceito de Multifunções , isto é, funções que associam a cada ponto de um conjunto $\Omega \neq \emptyset$ um único subconjunto do conjunto $X \neq \emptyset$. Para tal X, defina-se por $2^X \setminus \emptyset$, como a família de todos os subconjuntos de X diferentes do vazio.

Definição 1.12 *Seja Ω um subconjunto não vazio. Uma função $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$, é chamada de* **multifunção** .

Definição 1.13 *Seja $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ uma multifunção . A* **imagem de** *F, denotado por $Im(F)$, define-se como*

$$Im(F) = F(\Omega) = \bigcup_{w \in \Omega} F(w).$$

Definição 1.14 *Dada a multifunção $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$, definamos o* **gráfico de F**, *denotado por $graf(F)$, como*

$$graf(F) = \{(w, x) \in \Omega \times X : x \in F(w)\}.$$

Definição 1.15 *Seja $M \subset X$ um subconjunto qualquer, $F : \Omega \to 2^x \setminus \emptyset$ uma multifunção . A* **pré imagem de M** *é*

$$F^{-1}(M) = \{w \in \Omega : F(w) \cap M \neq \emptyset\}.$$

Definição 1.16 *Seja $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ uma multifunção . Diremos que F possui* **valores unitários** *se $F(w)$ é um conjunto unitário, isto é,*

$$F(w) = \{f(w)\}$$

onde $f : \Omega \to X$ é uma função .

1.3 Semicontinuidade, Continuidade de Multifunções

Nesta seção X, Y denotam espaços de Banach e $\emptyset \neq \Omega \subset Y$. Aqui, nosso propósito é definir, e dar algumas propriedades e caracterizações da continuidade de multifunções .

Definição 1.17 *Uma multifunção $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ é chamada de* **semicontinua superiormente**, *denotado por scs, se $F^{-1}(A)$ é fechado em Ω quando $A \subset X$ é fechado. Também F é chamada de ϵ-δ-scs se para cada $\epsilon > 0$ e cada $w_0 \in \Omega$ existe $\delta = \delta(w_0, \epsilon) > 0$ tais que*

$$F(w) \subset F(w_0) + B_\epsilon(0)$$

para cada $w \in B_\delta(w_0) \cap \Omega$.

Exemplo 1.18 *A multifunção $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \emptyset$ definida por*

$$F(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ \{0, 1\} & se\ x = 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases}$$

é um exemplo típico de multifunção scs.

Observação 1.19 (*a*) *Se a multifunção se reduz a uma função, a definição de scs coincide com a noção de continuidade usual de funções .*

(*b*) *É fácil mostrar que, F é scs se, e somente se, $\{w \in \Omega : F(w) \subset V\}$ é aberto em Ω quando V é aberto em X.*
Em termos de seqüências, F é scs se, e somente se, dado uma seqüência $(w_n) \subset \Omega$, um conjunto A fechado em X e $w_n \to w_0 \in \Omega$, então, se $F(w_n) \cap A \neq \emptyset$ $\forall n$ implica $F(w_0) \cap A \neq \emptyset$.

(*c*) *scs não é equivalente a ϵ-δ-scs, veja o seguinte exemplo.*

Exemplo 1.20 *Seja $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Definamos a multifunção $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^2} \setminus \emptyset$, como sendo*

$$F(w) = \{w\} \times [0, +\infty).$$

É claro que F é ϵ-δ-scs mas F não é scs, pois se tomamos o conjunto $A = \{(s, \frac{1}{s}) : s > 0\}$, que é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$, se tem que $F^{-1}(A) = (0, 1]$ não é fechado em Ω.

Proposição 1.21 *Dada uma multifunção $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$, esta satisfaz o seguinte* (*a*) *Se F é scs, então F é ϵ-δ-scs. A recíproca vale se F tem valores compactos.*

(*b*) *Seja F com valores fechados. Se F é ϵ-δ-scs, então $d(x, F(.))$ é sci para cada $x \in X$. A recíproca vale se $\overline{F(\Omega)}$ é compacto.*

(*c*) *Seja F com valores fechados. Se F é ϵ-δ-scs e Ω é fechado, então o $graf(F)$ é fechado. Reciprocamente, se o $graf(F)$ for fechado e $\overline{F(\Omega)}$ é compacto então F é scs.*

Prova:

(*a*) Suponhamos que F não é ϵ-δ-*scs*, então existe $\epsilon_0 > 0$ e $w_0 \in \Omega$ tal que para todo $\delta > 0$

$$F(w) \not\subset F(w_0) + B_{\epsilon_0}(0)$$

para algum $w \in B_\delta(w_0)$. Em particular para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in B_{\frac{1}{n}}(w_0) \cap \Omega$ tal que

$$F(w_n) \not\subset F(w_0) + B_{\epsilon_0}(0)$$

Segue daí que $w_n \to w_0$, $A = \Omega \setminus (F(w_0) + B_{\epsilon_0}(0))$ é fechado em Ω, e também tem-se que

$$F(w_n) \cap A \neq \emptyset \quad e \quad F(w_0) \cap A = \emptyset$$

o que contradiz o fato de F ser *scs*.

Reciprocamente, sejam $(w_n) \subset \Omega$, A fechado em X e $w_n \to w_0 \in \Omega$ tal que

$$F(w_n) \cap A \neq \emptyset. \qquad \forall n$$

Como F é ϵ-δ-*scs*, dado $\epsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(w_n) \subset F(w_0) + B_\epsilon(0) \qquad \forall n \geq n_0.$$

Tomemos $x_n \in F(w_n) \cap A$, logo

$$d(x_n, F(w_0)) < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Daí para cada $n \geq n_0$ existem $y_n \in F(w_0)$ tal que

$$d(x_n, y_n) < \epsilon \qquad \forall n \geq n_0.$$

Pela compacidade de $F(w_0)$ existe uma subseqüência (y_{n_k}) que converge a algum $y \in F(w_0)$, logo

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y) < 2\epsilon.$$

Assim $x_n \to y$, e como A é fechado, $y \in A$. Portanto $F(w_0) \cap A \neq \emptyset$.

(*b*) Tomemos uma seqüência $(w_n) \subset \Omega$ tal que $w_n \to w_0 \in \Omega$. Devemos provar que

$$d(x, F(w_0)) \leq \lim_{n\to\infty} \inf d(x, F(w_n))$$

isto é, dado qualquer $\epsilon > 0$ devemos achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, F(w_0)) < d(x, F(w_n)) + \epsilon \;\; \forall n \geq n_0.$$

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $y_n \in F(w_n)$ tal que

$$d(x, y_n) < d(x, F(w_n)) + \frac{\epsilon}{2}$$

e existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pois de fato F é *scs*, tal que

$$F(w_n) \subset F(w_0) + B_{\frac{\epsilon}{2}}(0) \ \ \forall n \geq n_0 \ .$$

Logo

$$d(x, F(w_0)) \leq d(y_n, F(w_0)) + d(x, y_n) < d(x, F(w_n)) + \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Reciprocamente, suponhamos que F não é ϵ-δ-*scs*, então existe $\epsilon_0 > 0$, $w_0 \in \Omega$, uma seqüência $(w_n) \in \Omega$ tal que $w_n \to w_0$ e $x_n \in F(w_n)$ tal que

$$d(x_n, F(w_0) \geq \epsilon_0$$

para todo n.

Como $\overline{F(\Omega)}$ é compacto, existe uma subseqüência (x_{n_k}) de (x_n) que converge a um $x_0 \in \Omega$, consequentemente

$$d(x_0, F(w_0)) \geq \epsilon_0$$

e

$$d(x_0, F(w_n)) \leq \|x_0 - x_{n_k}\| \to 0$$

que é uma contradição , já que $d(x_0, F(.))$ é *sci*.

(c) Seja $((w_n, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência no $graf(F)$ tal que

$$w_n \to w \quad , \quad x_n \to x.$$

Agora, como F é ϵ-δ-*scs*, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$d(x_n, F(w)) < \frac{\epsilon}{2} \ \ \forall n \geq n_0.$$

Daí,

$$d(x, F(w)) \leq d(x_n, F(w)) + d(x_n, x) < \epsilon.$$

Assim, $x \in F(w)$. Portanto $(w, x) \in graf(F)$, desta maneira o $graf(F)$ é fechado.

Reciprocamente, se $(w_n) \subset \Omega$ é uma seqüência, A um conjunto fechado em X e $w_n \to w_0 \in \Omega$; são tais que

$$F(w_n) \cap A \quad \forall n$$

então , para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$. Sendo $\overline{F(\Omega)}$ compacto, existe uma subseqüência x_{n_k} tal que $x_{n_k} \to x$. Agora, pelo que $graf(F)$ é fechado, se tem que $(w_0, x) \in graf(F)$. Portanto $x \in F(w_0)$, e como A é fechado, $x \in A$. Assim $F(w_0) \cap A \neq \emptyset$.

■

Definição 1.22 *Uma multifunção* $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ *é chamada* **semicontinua inferiormente,** *denotado por sci, se* $F^{-1}(V)$ *é aberto em* Ω *quando* $V \subset X$ *é aberto.* F *é chamada de* ϵ-δ-*sci se para cada* $\epsilon > 0$ *e cada* $w_0 \in \Omega$ *existe um* $\delta = \delta(w_0, \epsilon) > 0$ *tal que*

$$F(w_0) \subset F(w) + B_\epsilon(0)$$

para cada $w \in B_\delta(w_0) \cap \Omega$.

Exemplo 1.23 *A multifunção* $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \emptyset$ *definida por*

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & se\ x \neq 0 \\ 1 & se\ x=0 \end{cases}$$

é um exemplo típico de multifunção sci.

Observação 1.24 (a) *Se a multifunção se reduz a uma função , a definição de sci coincide com a noção de continuidade usual de funções .*

(b) *É fácil mostrar que,* F *é sci se, e somente se,* $\{w \in \Omega : F(w) \subset A\}$ *é fechado em* Ω *quando* $A \subset X$ *é fechado.*

Em termos de seqüências, F *é sci se, e somente se, dado uma seqüência* $(w_n) \subset \Omega$, V *aberto em* X *e* $w_n \to w_0 \in \Omega$, *então , se* $F(w_0) \cap V \neq \emptyset$ *implica* $F(w_n) \cap V \neq \emptyset$ *para* n *suficientemente grande.*

(c) *sci não é equivalente a* ϵ-δ-*sci, veja o seguinte exemplo.*

Exemplo 1.25 *Consideremos* $\Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}$ *e definamos a multifunção* $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^2} \setminus \emptyset$, *como*

$$F(w) = \{(t, tw) : t \in [0, +\infty)\}.$$

É claro que F *é sci mas não é* ϵ-δ-*sci, pois se* F *for* ϵ-δ-*sci, dado* $w_0 \in \Omega$, $\epsilon > 0$, *existe* $\delta = \delta(w_0, \epsilon) > 0$, *tal que*

$$F(w_0) \subset F(w) + B_\epsilon(0),$$

para cada $w \in B_\delta(w_0) \cap \Omega$. *Logo, para cada* $x \in F(w_0)$ *se tem que*

$$d(x, F(w)) < \epsilon,$$

mas

$$\sup\{d(x, F(w)) : x \in F(w_0)\} = \infty.$$

O que é uma contradição .

Proposição 1.26 *Dada uma multifunção* $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$, *esta satisfaz as seguintes condições :*

(a) *se* F *é* ϵ-δ-*sci então* F *é sci. A recíproca vale se* F *tem valores compactos.*

(b) F *é sci se, e somente se,* $d(x, F(.))$ *é scs para cada* $x \in X$.

Prova:

(a) Suponhamos que F não é *sci*, então existe uma seqüência $(w_n) \subset \Omega$, $w_n \to w_0 \in \Omega$ e um aberto V em X tal que

$$F(w_0) \cap V \neq \emptyset \quad , \quad F(w_n) \cap V = \emptyset \qquad \forall n \geq 1.$$

De fato, F é ϵ-δ-*sci*, então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(w_0) \subset F(w_n) + B_\epsilon(0) \subset (X \setminus V) + B_\epsilon(0) \qquad \forall n \geq n_0.$$

daí $F(w_0) \subset X \setminus V$, o que é uma contradição .

Reciprocamente se existir ϵ_0 e w_0 tal que $F(w_0)$ não está contido em $F(w_n) + B_\epsilon(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $w_n \in B_{\frac{1}{n}}(w_0)$, então para cada n existe $x_n \in F(w_0)$ e $x_n \notin F(w_n) + B_{\epsilon_0}(0)$, pelo que

$$d(x_n, F(w_n)) \geq \epsilon_0 \;\; \forall\, n \geq 1 \quad , \quad w_n \to w_0.$$

Agora, já que $F(w_0)$ é compacto existe $x_{n_k} \subset F(w_0)$ tal que

$$x_{n_k} \to x_0 \in F(w_0),$$

e como F é *sci*

$$F(w_{n_k}) \cap B_{\frac{\epsilon_0}{2}}(x_0) \neq \emptyset$$

para k suficientemente grande; daí

$$d(x_{n_k}, F(w_{n_k})) \geq d(x_0, F(w_{n_k})) + \|x_{n_k} - x_0\| < \frac{\epsilon_0}{2} + \|x_{n_k} - x_0\| \to \frac{\epsilon_0}{2}$$

o que é absurdo.

(b) Tomemos $\psi(.) = d(x, F(.)) : \Omega \to \mathbb{R}_+$. Para cada $\delta > 0$ podemos achar $y \in F(w_0)$ tal que

$$\|x - y\| \leq \psi(w_0) + \delta$$

e dado $w_n \to w_0$ em Ω, pela *sci* de F, também acha-se $y_n \in F(w_n)$ tal que

$$d(y, y_n) < \delta$$

para todo n suficientemente grande, segue daí que

$$\|x - y_n\| \leq \psi(w_0) + 2\delta$$

para aqueles n que são suficientemente grandes. Logo é obvio que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \psi(w_n) \leq \psi(w_0).$$

Reciprocamente, se $x \in F(w_0)$, $w_n \to w_0$ e $F(w_n) \cap B_\delta(x) = \emptyset$ para algum $\delta > 0$ e todo n grande, então

$$0 = d(x, F(w_0)) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} d(x, F(w_n)) \geq \delta$$

uma contradição . ∎

Proposição 1.27 *Dada uma multifunção* $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$*, esta satisfaz o seguinte:*

(a) Se F *é* ϵ*-*δ*-scs, então* $\sigma(F(.), x^*)$ *é scs para cada* $x^* \in X^*$.

(b) Se F *é* ϵ*-*δ*-sci, então* $\sigma(F(.), x^*)$ *é sci para cada* $x^* \in X^*$.

Prova:

(a) Seja $x^* \in X^*$ qualquer e $(w_n) \in \Omega$ uma seqüência tal que $w_n \to w_0$. Então pelo fato de ser F ϵ-δ-*scs*, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(w_n) \subset F(w_0) + B_\epsilon(0). \qquad \forall n \geq n_0$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sigma(F(w_n), x^*) &\leq \sigma(F(w_0) + B_\epsilon(0), x^*) \\ &= \sigma(F(w_0), x^*) + \sigma(B_\epsilon(0), x^*) \\ &= \sigma(F(w_0), x^*) + \epsilon \|x^*\|_* \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Segue daí que $\sigma(F(.), x^*)$ é *scs*.

(b) Seja $x^* \in X^*$ qualquer e $(w_n) \in \Omega$ uma seqüência tal que $w_n \to w_0$. Então , pela hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(w_0) \subset F(w_n) + B_\epsilon(0) \qquad \forall n \geq n_0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sigma(F(w_0), x^*) &\leq \sigma(F(w_n) + B_\epsilon(0), x^*) \\ &= \sigma(F(w_n), x^*) + \sigma(B_\epsilon(0), x^*) \\ &= \sigma(F(w_n), x^*) + \epsilon \|x^*\|_* \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Segue daí que $\sigma(F(.), x^*)$ é *sci*.

■

Definição 1.28 *Uma multifunção* $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ *é dita contínua se* F *é scs e sci*

Denotemos por $L(X)$ a família de todos os subconjuntos não vazios, limitados e fechados de X, então $L(X)$ com a métrica de Hausdorff torna-se num espaço métrico. Daí, se F assume valores em $L(X)$ é possível definir a continuidade de F com respeito à métrica de Hausdorff como: F é H-contínua em $w_0 \in \Omega$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$H(F(x), F(x_0)) < \epsilon \quad se \quad \|x - x_0\| < \delta.$$

Logo, F é H-contínua se ela for H-contínua em cada ponto de Ω.

Observação 1.29 *(a) F é H-contínua se, e somente se, $\overline{F}$ é H-contínua. Também, se F é H-contínua, então coF é H-contínua.*

(b) A continuidade de F com respeito a H é equivalente a dizer que F é ϵ-δ-scs e ϵ-δ-sci. Assim, já que scs não sempre é equivalente a ϵ-δ-scs, então a continuidade de F com respeito a H não é equivalente a dizer que F é scs e sci (veja o seguinte exemplo). No entanto, se F assume valores compactos elas são equivalentes.

Exemplo 1.30 *Consideremos $\Omega = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ e X o espaço de Banach real de seqüências $x = (x_i)$ que convergen para zero, com norma*

$$\|x\| = \max_i \|x_i\|.$$

Seja $\{e_n : n \geq 1\}$ a base canônica de X, isto é, $e_n = (e_{ni})_{i \in \mathbb{N}}$, onde $e_{ni} = 1$ para $i = n$ e $e_{ni} = 0$ para $i \neq n$, tomemos e_k fixo e definamos a multifunção F como sendo

$$F(\frac{1}{n}) = \{\frac{1}{n} e_k\} \quad , \quad F(0) = \{0\}.$$

Assim F é H-contínua, basta ver que

$$\sup\{d(F(\frac{1}{n}), F(\frac{1}{m})), d(F(\frac{1}{m}), F(\frac{1}{n}))\} \leq \mid \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid .$$

Mas F não é scs, pois se tomamos $A = \{\frac{1}{2} e_k\}$, que é fechado em X,

$$F^{-1}(A) = \{\frac{1}{2}\} = (\frac{1}{3}, 1) \cap \Omega$$

é aberto em Ω.

Definição 1.31 *Uma multifunção $F : \Omega \to 2^X - \emptyset$ com valores em $L(X)$ é dita Lipschitz se ela é Lipschitz com respeito a H, isto é,*

$$H(F(w), F(w_1)) \leq L\|w - w_1\|$$

em Ω para algum $L > 0$.

Teorema 1.32 *Suponhamos que $F : \Omega \to L(X)$ é uma multifunção contínua, então a função suporte $\sigma(F(.), .)$ é contínua nas variáveis $(w, x^*) \in \Omega \times X^*$. Reciprocamente, se a função $\sigma(F(w), x^*)$ é contínua em w para cada valor fixo $x^* \in X^*$, então a multifunção $coF(w)$ é contínua.*

A demonstração encontra-se em [1]. ∎

Corolário 1.33 *A multifunção $F : \Omega \to C(X)$ é contínua se, e somente se, a função suporte $\sigma(F(.), x^*)$ é contínua em w para cada $x^* \in X^*$ fixo.*

Este corolário é uma conseqüência imediata do teorema anterior, basta observar que $F = coF$. ∎

Exemplo 1.34 *Tomemos $r(x) \geq 0$ e $a(x) \in \mathbb{R}^m$ para cada $x \in \mathbb{R}^m$, onde ambas funções são contínuas. Defina-se a multifunção F, que associa a cada $x \in \mathbb{R}^m$ a bola $S_{r(x)}a(x)$ de raio $r(x)$ e centro $a(x)$. Neste caso a função suporte $\sigma(S_{r(x)}a(x), y)$ tem a forma*

$$\sigma(F(x), y) = a(x).y + r(x).\|y\|$$

que é contínua com respeito a (x, y), segue daí que F é contínua.

1.4 Multifunções Mensuráveis

Nesta seção daremos a definição de mutifunções mensuráveis, algumas propriedades e caracterizações .

Definição 1.35 *Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e X um espaço de Banach. A multifunção $F : \Omega \to 2^X - \emptyset$ é dita $\mathcal{A}$-mensurável, se $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para cada aberto B em X.*

Vale observar que para testar a mensurabilidade de uma multifunção F é necessário representar $F^{-1}(B)$ como a união enumerável de A_i, com $A_i \in \mathcal{A}$. Pode-se imaginar que usar tal argumento de enumerabilidade, fica bem mas fácil se X for separável. Isto em parte é verdade, vejamos a seguinte proposição onde $\mathcal{A}$-mensurável pode ser expressado em termos da função distância.

Proposição 1.36 *Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, X um espaço de Banach separável. Então $F : \Omega \to 2^X - \emptyset$ é mensurável se, e somente se, $d(x, F(.))$ é mensurável para cada $x \in X$.*

Prova: Seja $\{x_i \in X : i \geq 1\}$ tal que $\overline{\{x_i \in X : i \geq 1\}} = X$. Então dado $x \in X$,

$$d(x, F(.)) = \lim_{k \to \infty} d(x_k, F(.))$$

para alguma subseqüência (x_k) de (x_i), daquí segue que para provar esta proposição basta considerar $x \in \{x_i \in X : i \geq 1\}$. Agora,

$$F^{-1}(B_r(x_i)) = \{w \in \Omega : F(w) \cap B_r(x_i) \neq \emptyset\} = \{w \in \Omega : d(x_i, F(w)) < r\} = A_r.$$

Já que um aberto $B \neq \emptyset$ em X é a união de tais $B_r(x_i)$, e $d(x_i, F(.))$ é mensurável se, e somente se, $A_r \in \mathcal{A}$ para cada $r > 0$. Então tem-se completa a prova da proposição . ∎

Definição 1.37 *Sejam $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, X um espaço de Banach e $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ uma multifunção . Uma aplicação $f : \Omega \to X$ satisfazendo a relação*

$$f(w) \in F(w) \quad \forall w \in \Omega$$

é chamada de **seleção de** F. *No caso que a aplicação f seja mensurável, será chamada de* **seleção mensurável de F**

Teorema 1.38 *(seleção mensurável) Sejam $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, X um espaço de Banach separável e F uma multifunção de Ω sobre os subconjuntos não -vazios e fechados de X. Então existe uma seleção mensurável de F.*

Prova: Seja $\{x_n\}_{n\geq 1}$ um subconjunto denso enumerável de X. A idéia da prova, é construir uma seqüência de aplicações mensuráveis $f_k : \Omega \to X \quad k \geq 0$ tomando valores em $\{x_n\}$, que converge uniformemente para uma seleção f de F. Assim, f é mensurável. Para construir tal seqüência se procede por indução .

Para cada $w \in \Omega$, seja $n \geq 1$ o menor inteiro tal que

$$F(w) \cap B(x_n, 1) \neq \emptyset.$$

Assim defina-se $f_0 : \Omega \to X$ como sendo

$$f_0(w) = x_n.$$

Logo, $f_0(.)$ é mensurável e além disso

$$\forall w \in \Omega \ , \quad d(f_0(w), F(w)) < 1.$$

Assumamos que já construimos aplicações mensuráveis

$$f_k : \Omega \to \{x_n\}_n \geq 1 \qquad k = 0, ..., m$$

satisfazendo

$$\forall 0 \leq k \leq m \quad \forall w \in \Omega \quad d(f_k(w), F(w)) < \frac{1}{2^k} \tag{1.3}$$

e

$$\forall 0 \leq k < m-1 \qquad d(f_k(w), f_{k+1}(w)) < \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{1.4}$$

Agora, para cada n defina-se

$$S_n = \{w \in \Omega; f_m(w) = x_n\}$$

claramente os conjuntos S_n são mutuamente disjuntos, e

$$\bigcup_{n\geq 1} S_n = \Omega$$

além disso, (1.3) implica que

$$\forall w \in S_n \ , \quad F(w) \cap B(x_n, 2^{-(m+1)}) \neq \emptyset.$$

Fixemos $w \in \Omega$ e seja n tal que $w \in \Omega$. Considere o menor inteiro r tal que

$$F(w) \cap B(x_n, 2^{-m}) \cap B(x_r, 2^{-(m+1)}) \neq \emptyset,$$

e defina

$$f_{m+1}(w) = x_r.$$

Então

$$d(f_m(w), f_{m+1}(w)) \leq 2^{-m} + 2^{-(m+1)} < 2^{-m+1}$$

além disso

$$d(f_{m+1}(w), F(w)) < 2^{-(m+1)}$$

assim, é possível definir uma aplicação mensurável

$$f_{m+1} : \Omega \to \{x_n\}_{n\geq 1}$$

onde (1.3), (1.4) são satisfeitos quando m é substítuido por $m+1$. De (1.4) segue que $\forall w \in \Omega$, $(f_n(w))_{n\geq 1}$ é uma seqüência de Cauchy no espaço de Banach X, deste modo existe uma aplicação $f : \Omega \to X$ tal que

$$\lim f_n(w) = f(w).$$

De (1.4) temos que $f_n \to f$ uniformemente, implicando que f é mensurável. Agora de (1.3) tem-se que

$$d(f(w), F(w)) = 0$$

daí f é uma seleção mensurável de F. ∎

Corolário 1.39 *Sobre as condições do teorema anterior, existe uma seqüência (f_n) de seleções mensuráveis de F tal que*

$$F(w) = \overline{\{f_n(w); n \geq 1\}}$$

em Ω.

Prova: Para cada $n, k \geq 1$ defina-se a multifunção $G_{nk} : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ por

$$G_{nk} = \begin{cases} \overline{F(w) \cap B(x_n, \frac{1}{k})} & \text{, se } F(w) \cap B(x_n, \frac{1}{k}) \neq \emptyset \\ F(w) & \text{, caso contrario.} \end{cases}$$

Note que G_{nk} possui valores fechados. Além disso G_{nk} é mensurável, pois dado a bola aberta $B(x_i, r)$ e tomando en conta que

$$\overline{A} \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

quando B é aberto, temos que

$$\begin{aligned} G_{nk}^{-1}(B(x_i, r)) &= \{w \in \Omega; G_{nk}(w) \cap B(x_i, r) \neq \emptyset\} \\ &= \{w \in \Omega; F(w) \cap B(x_i, r) \neq \emptyset\} \cup \\ &\quad \{w \in \Omega; F(w) \cap B(x_n, \frac{1}{k}) \cap B(x_i, r) \neq \emptyset\} \\ &= F^{-1}(B(x_i, r)) \cup F^{-1}(B(x_n, \frac{1}{k}) \cap B(x_i, r)) \end{aligned}$$

logo a mensurabilidade de G_{nk} segue da mensurabilidade de F.

Agora, pelo teorema anterior, G_{nk} possui uma seleção mensurável f_{nk}. Resta verificar que para cada $w \in \Omega$, os valores $f_{nk}(w)$ são densos em $F(w)$. Para isto fixemos $x \in F(w)$ e $\epsilon > 0$. Seja $k \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{k} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

e n tal que

$$d(x_n, x) < \frac{1}{k}.$$

Consequêntemente

$$F(w) \cap B(x_n, \frac{1}{k}) \neq \emptyset$$

e

$$f_{nk}(w) \in B(x_n, \frac{1}{k}).$$

Segue daí que

$$d(f_{nk}(w), x) \leq d(f_{nk}(w), x_n) + d(x_n, x) < \epsilon.$$

Portanto, $f_{nk}(w) \to x$. O que completa a prova do corolário. ∎

Denotemos por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a σ-algebra gerado pelo produto $A \times B$, onde $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ é a Borel σ-algebra de X).

Teorema 1.40 *(Teorema de Caracterização) Sejam $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, X espaço de Banach separável e $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ uma multifunção com valores fechados. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(a) F é mensurável.

(b) $F^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ para cada fechado C em X.

(c) Para cada $x \in X$ a aplicação $d(x, F(.))$ é mensurável.

(d) O gráfico de F pertence a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Prova: $(a) \Leftrightarrow (b)$. Com efeito, seja C um fechado em X. Definamos os fechados

$$C_n = \{x \in X : d(x, C) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Assim,

$$X \setminus C = \bigcup_{n \geq 1} C_n$$

daí

$$C = \bigcap_{n \geq 1} (X \setminus C_n).$$

Sendo F é mensurável , $F^{-1}(X \setminus C_n) \in \mathcal{A}$. Portanto

$$F^{-1}(C) = \bigcap_{n \geq 1} F^{-1}(X \setminus C_n) \in \mathcal{A}.$$

Reciprocamente, se V é un conjunto aberto em X, defina-se os fechados

$$C_n = \{x \in X : d(x, X \setminus V) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Assim,

$$V = \bigcup_{n\geq 1} F^{-1}(C_n).$$

Já que de fato $F^{-1}(C_n) \in \mathcal{A}$,

$$F^{-1}(V) = \bigcup_{n\geq 1} F^{-1}(C_n) \in \mathcal{A}.$$

$(a) \Leftrightarrow (c)$ pela proposição anterior. Vejamos que $(c) \Rightarrow (d)$, para isto precisaremos do seguinte Lema.

Lema 1.41 *F é mensurável $\Longleftrightarrow d(.,F(.))$ é $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mensurável.*

Prova: Suponhamos que F é mensurável, então pela proposição anterior $d(x, F(.))$ é mensurável para cada $x \in X$. Agora para cada $r > 0$ se tem que

$$A_r = \{(w,x) \in X \times \Omega : d(x, F(w)) < r\} = \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{i\geq 1} \{w : d(x_i, F(w)) < r - \frac{1}{m}\} \times B_{\frac{1}{n}}(x_i)$$

assim $A_r \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, portanto $d(.,F(.))$ é $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mensurável.

Reciprocamente, de fato

$$\{(w, x_i) \in \Omega \times X : d(x_i, F(w)) < r\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \quad \forall r > 0$$

Logo, fixado x_i, é conhecido que

$$\{w \in \Omega : d(x_i, F(w)) < r\} \in \mathcal{A}$$

pelo que

$$F^{-1}(B_r(x_i)) \in \mathcal{A}.$$

Como qualquer aberto B em X é a união de $B_r(x_i)$, então $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. O que completa a prova do Lema 1.41. ■

Voltando à prova do teorema, observe que

$$graf(F) = \{(w,x)\Omega \times X : d(x, F(w)) = 0\}.$$

Pelo lema 1.41 acima, a aplicação $d(.,F(.))$ é $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mensurável, segue daí que

$$\{(w,x) \in \Omega \times X : d(x, F(w)) = 0\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},$$

desta maneira $graf(F) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Para finalizar a prova do teorema, suponhamos que (d) se cumpre e observe que para cada aberto B em X se tem

$$F^{-1}(B) = \pi_\Omega(graf(F) \cap (\Omega \times B))$$

onde, π_Ω é a projeção sobre Ω. Agora,

$$graf(F) \cap (\Omega \times B) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

então , como a projeção é mensurável (a prova pode-se achar em [3]), $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. ■

Proposição 1.42 *(Continuidade e mensurabilidade) Sejam, Ω um espaço métrico e $\mathcal{A}$ a σ-algebra de Borel em Ω, X um espaço de Banach separável e $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ uma multifunção com valores fechados. Se F é scs ou sci, então F é mensurável.*

Prova: Suponhamos que F é *scs*. Então , dado um fechado C em X, se obtem que $F^{-1}(C)$ é fechado em Ω. Portanto, F é mensurável.

Analogamente, se F é *sci*, então dado um aberto V em X, obtemos que $F^{-1}(V)$ é aberto em Ω. Portanto F é mensurável. ∎

Teorema 1.43 *(função suporte) Sejam $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, X um espaço de Banach separável e $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ uma multifunção mensurável com valores fechados. Então esta tem função suporte mensurável, isto é, para cada $x^* \in X^*$ a função*

$$w \mapsto \sigma(F(.), x^*)$$

é mensurável. A recíproca vale se o dual de X é separável e F tem valores convexos e limitados.

Prova: Sabemos que $\sigma(F(.), x^*) : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ é definido por

$$\sigma(F(w), x^*) = \sup_{y \in F(w)} \langle x^*, y \rangle. \tag{1.5}$$

Pelo Lema 1.35, existe uma seqüência f_n de seleções mensuráveis de F tal que

$$F(w) = \overline{\{f_n(w); n \geq 1\}}.$$

Logo, já que x^* é contínua, 1.5 é equivalente a

$$\sigma(F(w), x^*) = \sup_{n \geq 1} \langle x^*, f_n(w) \rangle.$$

Também, da continuidade de x^*, segue que x^* é mensurável. Assim,

$$\langle x^*, f_n(.) \rangle : \Omega \to \mathbb{R}$$

é mensurável. Portanto, $\sigma(F(.), x^*)$ é mensurável, pois é o supremo de funções mensuráveis.

Reciprocamente, suponhamos que para cada $x^* \in X^*$, $\sigma(F(.), x^*)$ é mensurável, que X^* é separável e F possui valores fechados, convexos e limitados. Provaremos que para cada $x \in X$, a aplicação

$$w \mapsto d(x, F(w))$$

é mensurável (Teorema de Caracterização).

Como $F(w)$ é limitado, sua função suporte $\sigma(F(w), .)$ é contínua. Seja $x_n{}^*$, $n \geq 1$ um conjunto denso de pontos na esfera unitária de X^*, pois dita esfera também é separável. Fixemos $x \in X$, usando que $F(w)$ é fechado, convexo e tomando em conta a proposição 1.10, temos que

$$\begin{aligned} d(x, F(w)) &= d(0, F(w) - \{x\}) \\ &= \sup_{\|x^*\|_*} (-\sigma(F(w) - \{x\}, x^*)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|x^*\|_*} (-\sigma(F(w), x^*) - \sigma(-\{x\}, x^*)) \\
&= \sup_{\|x^*\|_*} (\langle x^*, x\rangle - \sigma(F(w), x^*)) \\
&= \sup_{n\geq 1} (\langle x^*, x\rangle - \sigma(F(w), x^*)).
\end{aligned}
$$

Segue daí que $d(x, F(.))$ é mensurável, pois ela é o supremo de funções mensuráveis. ∎

Definição 1.44 *Se diz que um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é completo se cada vez que $B \in \mathcal{A}$, $\mu(B) = 0$ e $A \subset B$, então $A \in \mathcal{A}$.*

Definição 1.45 *Uma aplicação ψ de $\Omega \times X$ com valores no espaço métrico Y é chamada Carathéodory, se para cada $x \in X$, $\psi(., x)$ é mensurável e para cada $w \in \Omega$, $\psi(w, .)$ é contínua.*

Teorema 1.46 *(Filippov) Considere o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ completo e σ-finito, X e Y espaços métricos separáveis e $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ uma multifunção com valores fechados. Seja $g : \Omega \times X \to X$ uma aplicação Carathéodory. Então para cada função mensurável $h : \Omega \to Y$ satisfazendo*

$$h(w) \in g(w, F(w)) \quad \text{para quase todo } w \in \Omega$$

existe uma seleção mensurável $f : \Omega \to X$ tal que

$$h(w) = g(w, f(w)) \quad \text{para quase todo } w \in \Omega.$$

1.5 Integral de Multifunções

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida completo σ-finita e X um espaço de Banach separável com norma $\|.\|$.

Denotemos por

$$L^1(\Omega, X, \mu) = \{f : \Omega \to X; f \text{ é integrável }\}.$$

Nesta seção daremos a definição e algumas propriedades da integral de uma multifunção F de Ω sobre os subconjuntos fechados e não vazios de X.

Denotemos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as seleções integráveis de F:

$$\mathcal{F} = \{f \in L^1(\Omega, X, \mu); f(w) \in F(w) \text{ em quase todo } \Omega\}.$$

Aumann sugeriu a seguinte definição de integral para multifunções .

Definição 1.47 *A integral de F em Ω é o conjunto de integrais de seleções integráveis de F,isto é,*

$$\int_\Omega F d\mu = \{\int_\Omega f d\mu : f \in \mathcal{F}\}.$$

Da definição segue imediatamente que a integral de F, $\int_\Omega F d\mu$, é convexa quando F tem valores convexos.

Definição 1.48 *Uma multifunção* $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ *é chamada limitadamente integrável se existe uma função não -negativa* $K \in L^1(\Omega, \mathbb{R}, \mu)$ *tal que*

$$F(w) \subset K(w)B$$

em quase todo Ω.

Desta definição concluimos que se F é limitademente integrável, então cada seleção mensurável de F é um elemento de $\mathcal{F}$ devido ao teorema de Lebesgue. Assim, quando F é mensurável, limitadamente integrável e possui valores fechados, se garante que a integral de F é um conjunto não vazio.

A convexidade e fechadura da integral de multifunções é muito importante no âmbito da análise. Assim, por um resultado clássico devido a Lyapunov, quando $X = \mathbb{R}^n$ a integral de qualquer multifunção é convexa, mesmo que os valores de dita multifunção não sejam convexos, além disso é fechada quando a multifunção é limitadamente integrável e possui valores fechados, na realidade o mesmo Aumann prova que a integral é compacta sob essas condições .

Definição 1.49 *Seja* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida. Diremos que* $A \in \mathcal{A}$ *é um átomo para a medida* μ*, se cada vez que*

. $\mu(A) > 0$

. $B \in \mathcal{A}$ *e* $B \subset A$

então

$$\mu(B) = 0 \quad ou \quad \mu(B) = \mu(A).$$

Uma medida μ *se diz não atómica quando esta não possui átomos*

Teorema 1.50 *(Teorema de convexidade de Lyapunov)Seja* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida finita, e suponha que* μ *é não atómico, então a imagem de* μ*, isto é,* $\{\mu(A); A \in \mathcal{A}\}$ *é um conjunto fechado e convexo.*

Para a sua prova pode-se consultar [9].

Teorema 1.51 *Seja* $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ *uma multifunção . Se* μ *é não -atómico, então* $\int_\Omega F d\mu$ *é convexa*

Prova: Fixemos $f_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$ e $\lambda \in [0, 1]$. Provaremos que existe $f \in \mathcal{F}$ tal que

$$\lambda \int_\Omega f_1 d\mu + (1 - \lambda) \int_\Omega f_2 d\mu = \int_\Omega f d\mu. \tag{1.6}$$

Definamos a medida $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por

$$v(A) = (\int_A f_1 d\mu, \int_A f_2 d\mu) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Então v é finita e não atómica. Logo o teorema de Lyapunov implica que a imagem de v é convexo.

Agora $v(\emptyset) = \{0\}$ e

$$v(\Omega) = (\int_\Omega f_1 d\mu, \int_\Omega f_2 d\mu).$$

Assim, existe $A \in \mathcal{A}$ satisfazendo

$$v(A) = \lambda v(\Omega)$$

isto é

$$\lambda \int_\Omega f_1 d\mu = \int_A f_1 d\mu \quad ; \quad \lambda \int_\Omega f_2 d\mu = \int_A f_2 d\mu.$$

Logo, tomando

$$f = \chi_A f_1 + \chi_A f_2$$

temos que $f \in \mathcal{A}$ e satisfaz 1.6 . ∎

Teorema 1.52 *(Aumann)Seja $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ uma multifunção limitadamente integrável com valores fechados. Então $\int F d\mu$ é compacto.*

No caso de dimensão não finita, o fecho da sua integral é convexa e é fechada quando X é relexivo, F tem valores convexos e é limitadamente integrável. Veja o seguinte teorema.

Teorema 1.53 *Seja X um espaço de Banach separável e $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ uma multifunção com valores fechados e não vazios. Se μ é não -atómica, então o fecho de sua integral é convexa e*

(a) $\overline{\int_\Omega F d\mu} = \overline{co}(\int_\Omega F d\mu)$.

(b) Se F é limitadamente integrável, então

$$\int_\Omega \overline{co} F d\mu = \overline{\int_\Omega F d\mu}$$

Além disso, quando X é reflexivo e F tem valores convexos e é limitadamente integrável, então a integral de F com respeito a μ é fechada.

Usando a definição é quase impossível calcular a integral de uma multifunção , porém, fazendo uso da função suporte é possivel calcular algumas integrais de uma maneira fácil.

Proposição 1.54 *Consideremos a multifunção $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ mensurável com valores fechados. Então*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma(\int_\Omega F d\mu, x) = \int \sigma(F(w), x) d\mu.$$

Prova: Para a prova desta proposição usa-se o seguinte teorema

Teorema 1.55 *Seja $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ uma multifunção mensurável, seja π uma forma linear sobre $\mathbb{R}^n$. Então*

$$\sup \pi(\int_\Omega F d\mu) = \int \sup \pi(F(w)) d\mu(w).$$

Voltamos à prova da proposição . Sabemos que $\sigma(\int_\Omega Fd\mu, .) : \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ está definida como

$$\sigma(\int_\Omega Fd\mu, x) = \sup_{y \in \int_\Omega Fd\mu} \langle x, y \rangle.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e consideremos a forma linear π associada com x, isto é ,

$$\pi(y) = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Então temos que

$$\begin{aligned}
\sigma(\int_\Omega Fd\mu, x) &= \sup_{y \in \int_\Omega Fd\mu} \langle x, y \rangle \\
&= \sup \pi(\int_\Omega Fd\mu) \\
&= \int_\Omega \sup \pi(F(w))d\mu(w) \\
&= \int_\Omega \sup\{\pi(z); z \in F(w)\}d\mu(w) \\
&= \int_\Omega \sup\{\langle x, z \rangle; z \in F(w)\}d\mu(w) \\
&= \int_\Omega \sigma(F(w), x)d\mu(w).
\end{aligned}$$

■

Como mencionamos acima, é possível achar certas integrais fazendo uso desta última proposição. Para isso é suficiente construir a função suporte $\sigma(F(w), x^*)$, integrar dita função com respeito a w para cada $x^* \in X^*$. Logo reconstruir o conjunto não vazio $\int_\Omega Fd\mu$ da função suporte resultante. Veja o seguinte exemplo:

Exemplo 1.56 *Seja A um conjunto convexo, compacto não vazio em $\mathbb{R}^n$, então*

$$\int_{t_1}^{t_2} Adt = (t_1 - t_2)A. \quad t_2 > t_1.$$

Com efeito, pela proposição anterior temos que , para cada $\psi \in \mathbb{R}^n$

$$\sigma(\int_{t_1}^{t_2} Adt, \psi) = \int_{t_1}^{t_2} \sigma(A, \psi)dt = \sigma(A, \psi)(t_2 - t_1)$$

Agora, como A é convexo, então $\int_{t_1}^{t_2} Adt$ é convexo. Logo, pelo teorema 1.5, se tem que

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} Adt &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi \rangle \leq \sigma(\int_{t_1}^{t_2} Adt, \psi), \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi \rangle \leq \sigma(A, \psi)(t_2 - t_1), \quad \forall \in \mathbb{R}^n\} \\
&= (t_2 - t_1)\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi \rangle \leq \sigma(A, \psi), \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^n\} \\
&= (t_2 - t_1)A.
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Inclusões Diferenciais

Neste capítulo daremos o conceito de inclusões diferenciais como também alguns teoremas de existência de soluções, em um espaço de Banach X de dimensão finita.

Definição 2.1 *Uma* **inclusão diferencial** *é definida pela relação*

$$\frac{dx}{dt} \in F(t,x)$$

onde $x = x(t)$ é uma função não conhecida e $F(t,x)$ é uma multifunção dada, que associa a cada par (t,x) (em um certo dominio $G \subset \mathbb{R} \times X$) um conjunto $F(t,x) \subset X$.

Em particular, se para cada $(t,x) \in G$ o conjunto $F(t,x)$ consiste de somente um ponto, $F(t,x) = \{f(t,x)\}$, ou seja, F possui valores unitários, então a inclusão diferencial torna-se uma equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x). \tag{2.1}$$

Inclusões diferenciais surgem em problemas de matemática pura e aplicada. Por exemplo, o estudo de um sistema de controle conduz a uma inclusão diferencial. Consideremos o sistema controlável

$$x' = f(t,x,u) \tag{2.2}$$

onde x é um vetor no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, $x' = \frac{dx}{dt}$ é o vetor velocidade, t é o tempo e $u = u(t)$ um objeto de controle tal que

$$u(t) \in U \tag{2.3}$$

com U um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Agora consideremos o conjunto de todas as velocidades admissíveis do sistema no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ dado por $f(t,x,U)$; este conjunto consiste de todos os vetores $f(t,x,u)$, onde u é um ponto arbitrário de U. Se agora $x(t)$ é uma trajetória do sistema controlável (2.2) com controle admissível $u(t)$, então para quase todo t

$$x'(t) \in f(t,x(t),U). \tag{2.4}$$

Isto conduz ao conceito de uma inclusão diferencial

$$x' \in f(t,x,U) \tag{2.5}$$

e por uma solução desta equação se entende como uma função $x(t)$ absolutamente contínua em um intervalo I satifazendo (2.4) $\forall t \in I$.

Como o problema acima há muitos outros que nos conduzem ao conceito de uma inclusão diferencial.

2.1 Seleção de uma Multifunção

Sejam, nesta seção, Ω um espaço métrico e X um espaço de Banach. Dada uma mutifunção $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$, dizemos que uma função $f : \Omega \to X$ é uma **seleção contínua** de F, se f for uma seleção de F, Definição 1.37, e contínua en Ω. O Lema de Zorn garante a existência de pelo menos uma seleção de F, pois F possui valores não vazios. Agora o problema é encontrar seleções que preservem propriedades de F tais como continuidade, semicontinuidade, mensurabilidade, contínidade, etc. Nesta seção daremos alguns critérios para o este problema.

Teorema 2.2 *(Teorema de Michaels - caso sci) Seja $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ uma multifunção sci com valores fechados e convexos, então dado $(w_0, x_0) \in graf(F)$ existe uma seleção contínua f de F tal que $f(w_0) = x_0$.*

A prova deste teorema acha-se em [5] pg. 14 ou [4] pg. 82. ∎

Existem multifunções *scs* com valores fechados e convexos que não possuem seleção contínua, como o seguinte exemplo mostra.

Exemplo 2.3 *Consideremos a multifunção $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \emptyset$ definida por:*

$$F(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ [0,1] & se\ x{=}0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases}$$

F é semicontinua superiormente, e é claro que F não tem uma seleção contínua definida em $\mathbb{R}$.

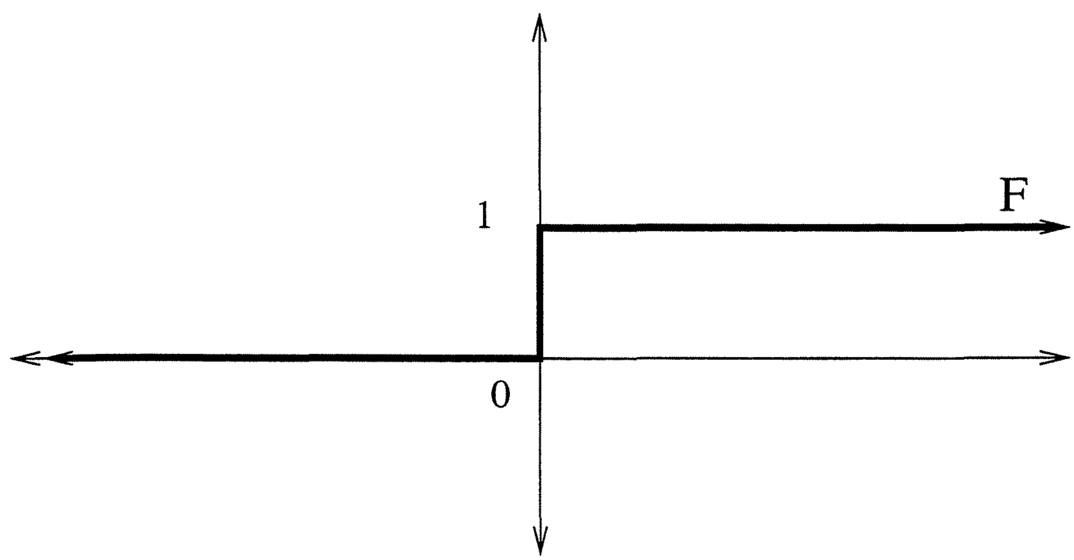

Figura 2.1: Multifunção sem seleção contínua

Teorema 2.4 *(caso scs)Seja $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ uma multifunção scs com valores convexos. Então para cada $\epsilon > 0$ existe uma função localmente Lipschtz $f_\epsilon : \Omega \to X$ tal que*

$$f_\epsilon(\Omega) \subset coF(\Omega)$$

e

$$graf(f_\epsilon) \subset B(graf(F), \epsilon).$$

Informações sobre a prova deste Teorema, encontra-se em [6] pag. 60 ou [4] pag. 84. ■

Por este último Teorema, no exemplo anterior, garante-se a existência de uma seleção aproximada. Fig. 2.2

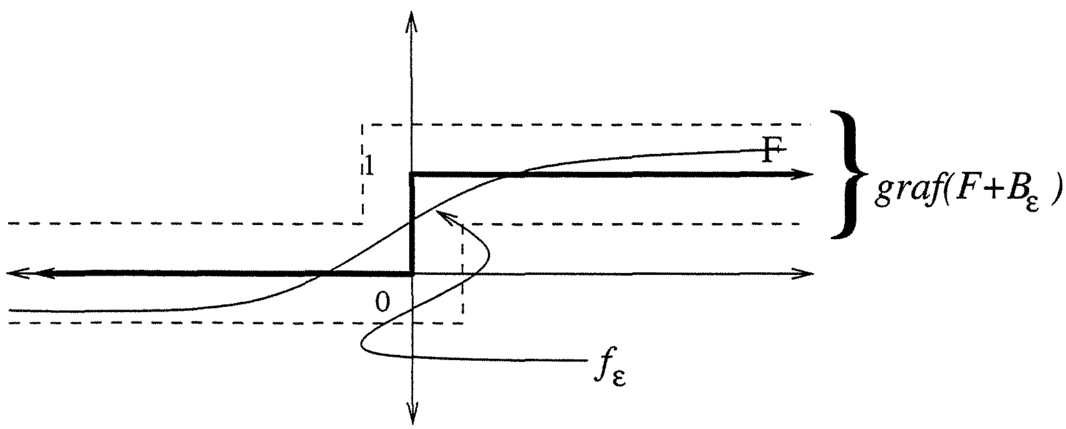

Figura 2.2: Multifunção com seleção contínua aproximada

Corolário 2.5 *(Kakutani - Teorema do ponto fixo) Seja K um subconjunto compacto e convexo de um espaço de Banach Ω e seja F uma multifunção semicontinua superiormente de K sobre os subconjuntos compactos e convexos deste. Então, F possui um ponto fixo, isto é, existe $\overline{x}$ tal que*

$$\overline{x} \in F(\overline{x}).$$

Prova: Para a prova deste corolário se utiliza o teorema de Shauder, cuja prova acha-se em [6] pag. 21-22, que afirma o seguinte:

Teorema 2.6 *Seja S um subconjunto convexo, fechado e não vazio de um espaço de Banach Ω e seja $f : S \to S$ completamente contínua, isto é, f é contínua e leva subconjuntos de S sobre subconjuntos compactos de S. Então , F possui um ponto fixo em S.*

Voltemos à prova do corolário. Pelo Teorema 2.4, existe uma seqüência $\{f_n\}$ de funções contínuas tais que

$$graf(f_n) \subset graf(F) + \epsilon B,$$

onde B é a bola unitária em Ω. Pelo teorema de Shauder, para cada $n \geq 1$, existe um $w_n \in K$ tal que

$$w_n = f_n(w_n).$$

Da compacidade de K existe uma subseqüência w_{n_k} que converge a algum w. Consequentemente

$$d((w,w), graf(F)) = \lim d((w_{n_k}, f_n(w_{n_k})), graf(F)) = 0.$$

Como o $graf(F)$ é fechado, pois f é *scs*, então $(w,w) \in graf(F)$, isto é,

$$w \in F(w).$$

■

Uma multifunção contínua não tem necessariamente uma seleção contínua. Veja exemplo 1 em ([4] pag. 68).

Consideremos o espaço métrico Ω, um espaço de Banach X e uma multifunção $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$. Define-se a função **minimal** como sendo

$$m(F(w)) = \{u \in F(w) : \|u\| = \min_{y \in F(w)} \|y\|\}.$$

Quando X é um espaço de Hilbert e F tem valores fechados e convexos, a função minimal possui valores unitários; neste caso é chamada de **seleção minimal**. Para que esta seleção seja contínua é necessario a continuidade de F, pois se F for só *scs* ou *sci* com valores convexos e fechados, então não se pode garantir a continuidade da seleção minimal. Veja o seguinte exemplo.

Exemplo 2.7 *Consideremos a multifunção $F : \mathbb{R} \to 2^X \setminus \emptyset$ definida por*

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{se } x{=}0 \\ 1 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

esta é scs com valores compactos e convexos e sua seleção minimal não é contínua em zero. Analogamente se definimos a F como sendo

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{se } x{\neq}\ 0 \\ 1 & \text{se } x{=}0 \end{cases}$$

esta é sci com valores compactos e covexos e sua seleção minimal não é contínua em zero.

Teorema 2.8 *(caso - contínuo) Sejam, Ω um espaço métrico, X um espaço de Hilbert e $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$ uma multifunção com valores fechados e convexos. Se F é contínua, então a função $w \mapsto m(F(w))$ é uma seleção contínua de F.*

Prova: A demonstração pode-se achar em [4].

Observação 2.9 *Se F for Lipschitz, a seleção minimal não é necessariamente Lipschitz.*

O seguinte teorema é chamado como seleção do baricêntro; esta seleção é aquela que mantem a propriedade de Lipschitz de uma multifunção . O baricêntro de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, compacto com interior não vazio; é definido como

$$b(A) = \frac{1}{m_n(A)} \int_A x dm_n$$

onde m_n denota a medida de Lebesgue n-dimensional.

Teorema 2.10 *Seja Ω um espaço métrico, $F : \Omega \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ uma multifunção com valores compactos e convexos, além disso suponha que para algum $M \subset \mathbb{R}^n$, $F(w) \subset MB$ para cada $w \in \Omega$, com B a bola unitária. Se F é Lipschitz, então existe uma constante K e uma função f de Ω sobre $\mathbb{R}^n$ Lipschitz com constante K, que é uma seleção de F.*

2.2 Existência de Soluções para Inclusões Diferenciais

A seguir estudaremos alguns resultados sobre a existência de soluções para uma inclusão diferencial da forma:

$$(1)\ \ x^{'}(t) \in F(x(t)) \quad ou \quad (2)\ \ x^{'}(t) \in F(t, x(t))$$

Nós entendemos que uma solução de (1) (respetivamente de (2)) é uma função absolutamente contínua definida em algum intervalo J satisfazendo (1) (respetivamente (2)) em quase toda parte de J. Para obter alguns casos de existência de solução deve-se impor algumas condições sobre a multifunção F tais como: regularidade (continuidade, semicontinuidade, Lipschitz) e condições topológicas ou de tipo geométrica (compacidade, covexidade) nos valores de F. Com as combinações destes se obtem vários casos de existência de solução. Aqui nós daremos os mais conhecidos e importantes.

Uma maneira simples de obter uma solução ao problema de Cauchy para inclusões diferenciais

$$x^{'} \in F(t, x) \quad , \quad x(0) = x_0 \tag{2.6}$$

é reduzir este a um problema de Cauchy para equações diferenciais. Para isto, é necessário obter uma seleção f de F e assim cada solução de

$$x^{'} = f(t, x) \quad , \quad x(0) = x_0$$

é também solução de (2.6).

Teorema 2.11 *(caso de sci com valores fechados e convexos)*
Seja F uma multifunção semicontínua inferiormente, de alguma região $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sobre os subconjuntos não vazios, fechados e convexos de $\mathbb{R}^n$. Suponhamos que $(0, x_0) \in \Omega$, então existe algum intervalo $I = (w_-, w_+)$, $w_- < 0 < w_+$ e pelo menos uma função continuamente diferenciável $x : I \to \mathbb{R}^n$ que é uma solução do problema de Cauchy para inclusões diferenciais (2.6) . Além disso, $w_+ = +\infty$ ou a solução $x(t)$ tende para a fronteira de Ω quando $t \to w_+$, analogamente para w_-.

Prova: Como F é *sci* e tem valores fechados e convexos, o teorema de Michael garante a existência de uma seleção contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Agora o problema de Cauchy

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)) \quad x(0) = x_0$$

possui pelo menos uma solução clássica num intervalo de existência $I = (w_-, w_+)$ com $w_- < 0 < w_+$. ■

Teorema 2.12 *Seja F uma multifunção contínua com valores fechados e convexos, definida num subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ que contem $(0, x_0)$ sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Então existe uma solução do problema de Cauchy para inclusões diferenciais (2.6) definida em algum intervalo $I = (w_-, w_+)$, $w_- < 0 < w_+$.*

Prova: Como F é contínua e possui valores fechados e convexos, então pelo Teorema 2.8 a aplicação $m(F(t,x(t)))$ é uma seleção contínua de F. Agora o problema de Cauchy

$$x' = m(F(t,x(t))) \quad , \quad x(0) = x_0$$

possui pelo menos uma solução clássica em algum intervalo de existência $I = (w_-, w_+)$ com $w_- < 0 < w_+$. ∎

Observação 2.13 *Este último teorema garante a existência de uma solução clássica através da seleção minimal. Note que fazendo uso do Teorema 2.12 também pode-se obter outra solução .*

Definição 2.14 *Se diz que uma aplicação $\psi : \Omega \to X$ é localmente compacta, se para cada $x \in Dom(\psi)$ existe uma vizinhança V de x tal que*

$$\psi(V) \subset K,$$

para algum subconjunto compacto K de X.

A seguir enunciamos um teorema que garante a existência de solução do problema de Cauchy para inclusões diferenciais (2.6) quando F é scs e possui valores fechados e convexos. A prova deste teorema é análogo à prova do teorema de Peano. Também existe uma segunda prova, usando a representação integral de (2.6) e o teorema de convergência. Ambas provas podem ser achadas em [3], pag. 98.

Teorema 2.15 *Seja X um espaço de Hilbert, $\Omega \subset \mathbb{R} \times X$ um subconjunto aberto contendo $(0, x_0)$. Seja F uma multifunção semicontínua superiormente definida em Ω sobre os subconjuntos não vazios, fechados e convexos de X. Suponha que $(t,x) \mapsto m(F(t,x))$ é localmente compacta. Então existe $T > 0$ e uma função absolutamente contínua $x(.)$ definida em $[0,T]$, uma solução de (2.6).*

A seguir dá-se alguns resultados obtidos por A.F. Filippov [8], que usaremos mais na frente. Nesse trabalho, existe um teorema que garante a existência de pelo menos uma solução de (2.6), onde F é scs e este não possui necessariamente valores convexos. Para enunciar este teorema suponhamos que a multifunção F satisfaz as seguites condições :

(a) $F(t,x)$ é um conjunto fechado e não vazio.

(b) A multifunção $F(t,x)$ é contínua em (t,x), isto é,

$$H(F(t_1,x_1), F(t,x)) \to 0 \quad \textit{quando} \quad t_1 \to t, \quad x_1 \to x.$$

(c) existe uma função integrável $K(t)$ tal que para qualquer t, x, x_1,

$$H(F(t,x_1), F(t,x)) \leq K(t)\|x_1 - x\|.$$

Sabemos, pelo Teorema 2.12, que se $(a), (b)$ são satisfeitos e $F(t,x)$ é convexo, existe pelo menos uma solução do problema de Cauchy (2.6). No seguinte teorema não se assume a convexidade de $F(t,x)$.

Teorema 2.16 *Seja $F(t,x)$ satisfazendo as condições $(a),(b),(c)$ na região $I \times I_b$, onde I é um intervalo e $I_b = \{x; \|x - y(t)\| \leq b\}$ com $y(t)$ uma função absolutamente contínua. Sejam, $t_0 \in I$, $\rho(t)$ uma função integrável, e*

$$\|y(t_0) - x_0\| \leq \delta < b \quad , \quad d(y^{'}(t), F(t, y(t))) \leq \rho(t)$$

em quase todo I. Então existe uma solução do problema

$$x^{'} \in F(t,x) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

tal que

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \Psi(t), \qquad \|x^{'}(t) - y^{'}(t)\| \leq K(t)\Psi(t) + \rho(t)$$

em quase todo I, onde

$$\Psi(t) = \delta \exp^{m(t)} + \left| \int_{t_0}^{t} \exp^{m(t)-m(s)} \rho(s) ds \right|, \qquad m(t) = \left| \int_{t_0}^{t} K(s) ds \right|$$

(para $t \in I$ tal que $\Psi(t) \leq b$).

Na mesma publicação, podemos encontrar outros resultados, como a existência de uma solução clássica ao problema

$$x^{'} \in F(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \quad x^{'}(t_0) = v_0 \tag{2.7}$$

onde $v_0 \in F(t_0, x_0)$.

Teorema 2.17 *Seja $F(t,x)$ satisfazendo (a) em uma vizinhança V do ponto (t_0, x_0) e suponha que existe uma constante k tal que para qualquer par de pontos $(t,x) \in V$, $(t_1, x_1) \in V$,*

$$H(F(t_1, X_1), F(t,x)) \leq k|t_1 - t| + \|x_1 - x\|.$$

Então existe uma solução clássica ao problema (2.7) para qualquer $v_0 \in F(t_0, x_0)$.

2.3 Viabilidade

Na continuação estudaremos alguns conceitos básicos da teoria de viabilidade, a qual é freqüentemente usada em teoria de controle e em modelos matemáticos de economia, sociologia e biologia.

Tomemos a multifunção $F : X \to 2^X \setminus \emptyset$, com X um espaço de Banach, e consideremos o problema de Cauchy para inclusões diferenciais

$$\dot{x} \in F(x), \qquad x(0) = x_0. \tag{2.8}$$

Definição 2.18 *Seja K um subconjunto qualquer de X. Uma solução $x(t)$ do problema de Cauchy para inclusões diferenciais (2.8), é chamada de* **solução viável em K se**

$$\forall t \in [0,T], \quad x(t) \in K.$$

Definição 2.19 *Diremos que $K \subset X$ é um* **conjunto viável** *se para cada $x_0 \in K$, existe uma solução viável em K.*

Quando K é fechado e F é *scs* com valores convexos e compactos, uma condição necessaria para que K seja viável é que

$$F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in X. \tag{2.9}$$

Para enunciar este resultado, necessitamos definir o conjunto $T_K(x)$, usando a função distância, e ver algumas propriedades desta.

Definição 2.20 *Diremos que o conjunto*

$$T_K(x) = \{v \in X; \quad \lim_{h \to 0^+} \inf d(x + hv, K) = 0\}$$

é o **cone contingente** *a K em x.*

Observação 2.21 *Se $K = \emptyset$, se estabelece que $T_K(x) = \emptyset$.*

A seguir são dadas algumas propriedades do cone contingente, cujas provas acha-se em [4].

Proposição 2.22 *Seja $K \subset X$ qualquer. O cone contingente satisfaz os seguintes items:*

(a) *Para cada $x \in X$, $T_X(x) = X$.*

(b) *O cone contingente a K é igual ao cone contingente a $\overline{K}$, isto é,*

$$\forall x \in X \quad T_K(x) = T_{\overline{K}}(x).$$

(c) *Se $x \in int(K)$, então $T_K(x) = X$.*

(d) *$T_K(x)$ é um cone fechado.*

Note que a condição (2.9) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\forall x \in K, \quad \exists v \in F(x) \text{ tal que } \lim_{h \to 0^+} \inf \frac{d(x + hv, K)}{h} = 0.$$

Proposição 2.23 *Seja K um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Seja $F : K \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ uma multifunção semi-contínua superiormente, com valores convexos e compactos. Se para cada $x_0 \in K$, existe $T > 0$ e uma solução viável em K, definida em $[0, T]$, do problema (2.8), então a condição tangencial*

$$\forall x \in X, \quad F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset$$

se cumpre.

Definição 2.24 *Dada a multifunção $F : \Omega \to 2^X \setminus \emptyset$, com Ω um espaço de Banach, dizemos que é* **hemicontínua superiormente** *em $w_0 \in \Omega$, se para cada $x \in X^*$, a função suporte $\sigma(F(w), x)$ é scs em w_0. F é chamada hemicontínua superiormente, se esta é hemicontínua superiormente em cada $w \in \Omega$.*

Teorema 2.25 *(Teorema de viabilidade) Seja K um subconjunto de X, $F : K \to 2^X$ uma multi-função hemicontínua superiormente, com valores convexos e compactos. Suponha que a condição tangencial (2.9) é satisfeita.*

(a) *Suponha que K é localmente compacto. Então para cada $x_0 \in K$, existe $T > 0$ tal que (2.8) possui uma solução viável em K, definida em $[0, T)$.*

(b) *Suponha que K é compacto ou X finito dimensional, e $F(x)$ é limitada. Então para cada $x_0 \in K$, existe uma solução viável de (2.8) em K definida em $[0, +\infty)$.*

A prova da Proposição 2.23 e o Teorema 2.25 encontra-se en [4] pag. 180.

Traduzimos este teorema viável para a linguagem da teoria de controle. Consideremos o seguinte sistema de controle

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(0) = x_0 \in K \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $u \in U$ (U o conjunto controle), $K \subset X$.

Definamos a aplicação realimentação R definida por

$$\forall x \in K, \quad R(x) = \{u \in U;\ f(x, u) \in T_K(x)\}.$$

Agora assumamos que:

$$\begin{cases} U \text{ é compacto} \\ f : K \times U \to X \text{ é contínua} \end{cases}.$$

Assim a multifunção F definida por

$$F(x) = \{f(x, u)\}_{u \in U}$$

é contínua e possui valores compactos.

Teorema 2.26 *Sejam K um subconjunto localmente compacto de um espaço de Hilbert X, U um subconjunto compacto e $f : K \times U \to X$ uma função contínua. Suponhamos que a aplicação realimentação R satisfaz*

$$\forall x \in K, \quad R(x) \neq \emptyset.$$

e

$$\forall x \in K, \quad F(x) = f(x, U) = \{f(x, u)\}_{u \in U}$$

é convexo. Então para cada $x_0 \in K$, existem $T > 0$, uma função mensurável $u(.)$ e $x(t)$ que é uma solução viável em K de (2.10), que são relacionados por

$$\forall t \in [0, T], \quad u(t) \in R(x(t)).$$

A prova deste Teorema acha-se em [4] pag 239.

Capítulo 3

Multifunções em Ecologia

Os modelos matemáticos para população biológica originaram-se com o economista e demógrafo inglês Thomas Robert Malthus (1798). O modelo que usou, para uma espécie, estabelecia que o crescimento populacional se dá segundo uma progresão geométrica, se este não fosse controlado e/ou sem restrições . Em têrmos de equações diferenciais a lei de Thomas é

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P(t) - \beta P(t) \tag{3.1}$$

onde

P=P(t): População da espécie no instante t.

α : Coeficiente de natalidade.

β : Coeficiente de mortalidade.

Lotka (1926) e Volterra (1931) apresentam um outro modelo, este para varias populações e con algumas limitações , baseado também em um sistema de equações diferenciais ordinarias

$$\frac{dp_i}{dt} = p_i(r_i - \frac{r_i}{K_i}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p_j) \tag{3.2}$$

onde:

p_i: População da espécie i no instante t.

r_i: Razão de crescimento intrínseca da espécie i.

K_i: Capacidade de saturação do ambiente.

α_{ij}: Coeficiente de interação entre as espécies i e j.

Em geral, para modelar a dinâmica de um sistema biológico com limitações e restrições , se trata de construir uma equação diferencial de tal maneira que a solução desta equação satisfaz essas limitações e restrições impostas. Os estados das variáveis são usualmente a densidade de uma população e/ou recursos, além disso estas devem satisfazer certas restrições . Por exemplo, estas devem ser não negativas.

Este capítulo esta baseado no trabalho de V. Krivan [12]. Alí se considera que um sistema biológico não limitado por recursos, pode ser descrito por um sistema de controle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \tag{3.3}$$

onde U é o conjunto de possíveis controles u que descreve a seleção dos recursos.

Esta dinâmica é chamada **dinâmica endógena**, pois geralmente um sistema biológico previstos com os recursos necessários possui uma razão de aumento de população endógena. Por exemplo, se assumimos que uma população não possui limitações por recursos (nutrientes, luz,...), então esta deve aumentar exponencialmente. Se isto não ocurre, a razão é que a população consume recursos escassos.

Agora, introduzimos no sistema um conjunto viável K, recordemos que uma solução viável em K de (3.3) é aquela solução $x(.)$, definida em $[0, T]$ para algum $T > 0$, de (3.3) tal que

$$x(t) \in K \quad \forall t \in [0, T].$$

Em geral, o sistema (3.3) pode não têr uma solução viável, então o sistema deve ser mudado para obtermos um sistema viável. Para fazer (3.3) viável, se projeta a dinâmica (3.3) sobre o cone contingente do conjunto K. Esta projeção é a chamada G-projeção [11],[12] ou projeção de uma inclusão diferencial [4], [5]. Para definir esta projeção se assume que G é uma multifunção dada. Do ponto de vista biológico projetar (3.3) significa adicionar ao sistema a razão de mortalidade de aquelas populações que são limitadas pela escasses de recursos. Assim, o novo sistema biológico é dado pela inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in f(x(t), u(t)) - mG(x(t), u(t)) \quad u \in U \tag{3.4}$$

onde o parâmetro de controle $m \geq 0$ pode ser interpretado como o índice de mortalidade que o sistema possui.

3.1 Dinâmica Endógena

Para descrever um ecosistema se utiliza um gráfico, chamado cadeia alimentícia. Os componentes de tal gráfico deven ser diferentes populações e/ou recursos abióticos.

Assumamos que um sistema biológico de n populações e/ou recursos abióticos é dado. A seguir, construiremos um modelo dinâmico deste sistema.

Já que uma população usualmente pode utilizar recurso alternativos temos que incluir neste modelo algum tipo de controle que deva permitir a escolha dos recursos pela populações . Assim, introduzimos a classe de matrizes U, que será chamada **matriz da cadeia alimentícia**. Esta classe de matrizes, consiste de todas as matrizes quadradas de dimensão n ($mat(n, n)$) para o qual se cumpre que:

$u \in U$ se, e somente se,

. $u_{ij} \geq 0$ se a j-ésima população pode utilizar a i-ésima componente.

. $u_{ij} = 0$ outros casos.

. $\sum_{i=1}^{n} u_{ij} = 1$ se a j-ésima componente é uma população .

O valor u_{ij} pode ser interpretada como a probabilidade na qual a j-ésima população consume a i-ésima componete do gráfico.

Exemplo 3.1 *Seja x_1 um recurso abiótico e $x_2, ..., x_8$ sete populações diferentes cuja interação é descrita pelo seguinte gráfico de cadeia alimentícia.*

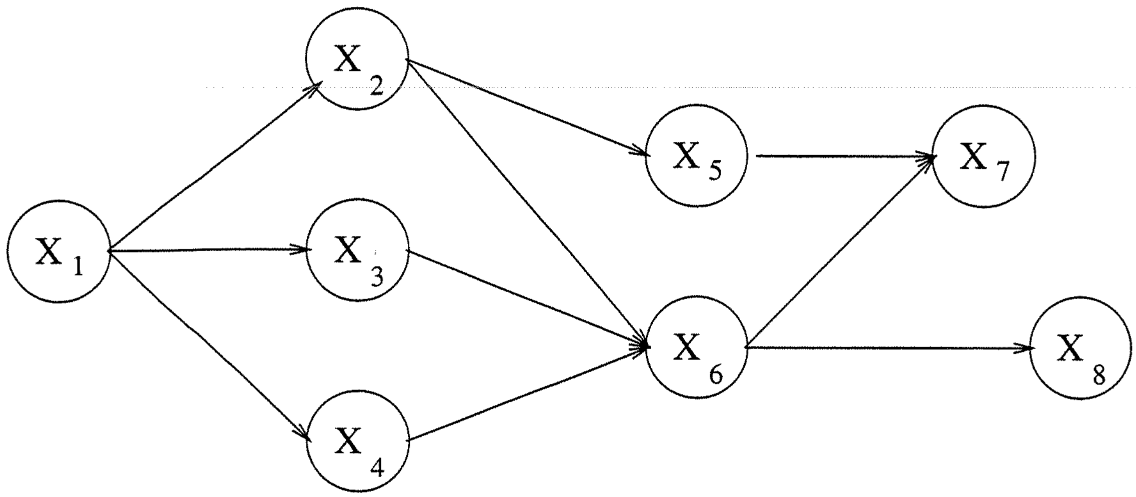

Figura 3.1: Cadeia alimentícia

Para este sistema, a matriz cadeia alimentícia $u \in U$ é dada por

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{67} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $u_{26} + u_{36} + u_{46} = 1$ *e* $u_{57} + u_{67} = 1.$

Assumamos que a dinâmica endógena é descrita pelo seguinte sistema de controle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \qquad u(t) \in U \tag{3.5}$$

Uma razão de escrever a dinâmica endógena como (3.5) é o seguinte. Seja $A(x) \in mat(n, n)$ uma matriz de razão de aumento, onde $a_{ij}(x)$ é a razão de aumento da j-ésima população , se o recurso desta população for a i-ésima componente do sistema dado (tal componente pode ser um recurso abiótico ou uma outra população). Um caso simple é tomar $a_{ij}(x)$ constante.

Se constrói o seguinte sistema de equações diferenciais que descreve a evolução do sistema

$$\dot{x}_i(t) = z_i(t) + x_i(t) \sum_{j=1}^{n} a_{ji} u_{ji}(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{ij} u_{ij}(t) x_j(t) - n_i x_i(t) \quad u(t) \in U \tag{3.6}$$

onde

$z_i(t)$: descreve o aumento do recurso abiótico no instante t.

n_i : razão intrinseca de mortalidade que não depende dos recursos.

α_{ij} : é o coeficiente de tranformação dado, $i, j = 1, ..., n$.

Exemplo 3.2 *Tomemos o gráfico da cadei alimentícia do exemplo 1.1, e consideremos a matriz $A(x)$ constante, Então o sistema (3.6) é*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= z_1(t) - a_{12}\alpha_{12}x_2(t) - a_{13}\alpha_{13}x_3(t) - a_{14}\alpha_{14}x_4(t)\\
\dot{x}_2(t) &= a_{12}x_2(t) - a_{25}\alpha_{25}x_5(t) - a_{26}\alpha_{26}u_{26}(t)x_6(t) - n_2x_2(t)\\
\dot{x}_3(t) &= a_{13}x_3(t) - a_{36}\alpha_{36}u_{36}(t)x_6(t) - n_3x_3(t)\\
\dot{x}_4(t) &= a_{14}x_4(t) - a_{46}\alpha_{46}u_{46}(t)x_6(t) - n_4x_4(t)\\
\dot{x}_5(t) &= a_{25}x_5(t) - a_{57}\alpha_{57}u_{57}(t)x_7(t) - n_5x_5(t)\\
\dot{x}_6(t) &= x_6(t)(a_{26}u_{26}(t) + a_{36}u_{36}(t) + a_{46}u_{46}(t)) - a_{67}\alpha_{67}u_{67}x_7(t) - a_{68}\alpha_{68}x_8(t) - n_6x_6(t)\\
\dot{x}_7(t) &= x_7(t)(a_{57}u_{57}(t) + a_{67}u_{67}(t)) - n_7x_7(t)\\
\dot{x}_8(t) &= a_{68}x_8(t) - n_8x_8(t).
\end{aligned}$$

Logo este sistema de equações diferenciais pode ser escrito como

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad com \quad u \in U$$

3.2 Restrições Viáveis

Assumamos que o sistema deve satisfazer algumas restrições viáveis, e que esas restrições são dadas por p funções $r_i(.)$, $i = 1, ..., p$ e o conjunto viável K é dado por

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \ r_1(x) \leq 0, ..., r_p(x) \leq 0\}. \tag{3.7}$$

Por razões biológicas se assume que o conjunto K é limitado. Além disso assuma-se que $r_i(.)$ são Fréchet diferenciáveis e a seguinte condição de transversalidade é satisfeita para todo $x \in K$

$$\exists v_0 \in \mathbb{R}^n \ \text{ tal que } \ \langle r_i'(x), v_0 \rangle < 0 \ \ se \ \ r_i(x) = 0$$

onde $\langle , \rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$. Seja $x \in K$, defina-se o seguinte conjunto

$$T^i(x) = \{v \in \mathbb{R}^n;\ \ \langle r_i'(x), v \rangle \leq 0 \ \ se \ \ r_i(x) = 0\}.$$

Pela condição de transversalidade,

$$T^i(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in K.$$

Logo o cone contingente a K

$$T_K(x) = \{v \in \mathbb{R}^n;\ \ \lim_{h \to 0^+} \inf \frac{d(x + hv, K)}{h} = 0\}$$

pode ser escrito como

$$T_K(x) = \bigcap_{i=1}^{n} T^i(x).$$

Em população biológica, um caso típico é $p = n$, onde n é a dimensão do sistema e $r_i(x) = -x_i$, isto é,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \ x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0\}. \tag{3.8}$$

3.3 Sistema Projetado

Em geral, o sistema controlável (3.5) pode não ter uma solução viável, isto é, pode não existir um controle $u(t) \in U$ tal que a trajetória correspondente $x(.)$ satisfaz a restrição viável

$$x(t) \in K \quad \forall t \in [0,T] \quad T > 0.$$

Isto significa que não existe uma regra, lei, de tal maneira que a população possa escolher recursos (diretamente, não existe u_{ij}), de tal forma que o sistema esteja no conjunto K. Tomando a aplicação realimentação

$$R(x) = \{u \in U; \quad f(x,u) \in T_K(x)\},$$

pelo Teorema 2.25, isto significa que

$$\exists x \in K, \quad \text{tal que} \quad R(x) = \emptyset. \tag{3.9}$$

Já que $R(x)$ contém todos os controles $u \in U$ cuja trajetória correspondente é viável em K, (3.9) significa que não existe um controle interno (este controle é sobre a escolha de recursos) tal que exista uma trajetória viável. Além disso, a razão de mortalidade das populações que são limitadas pela falta de recursos deve aumentar. Isto só acontece na fronteira do conjunto viável K, pois no interior de K, $T_K(x) = \mathbb{R}^n$ e consequentemente $R(x) \neq \emptyset$.

Introduzimos então o índice de mortalidade pela escassez de recursos no sitema (3.5). Logo o novo sistema tem a seguinte forma

$$\dot{x}(t) \in f(x(t), u(t)) - m(G(x(t), u(t))) \quad u(t) \in U \tag{3.10}$$

onde

$$\begin{cases} m > 0 & \text{se } R(x(t)) = \emptyset \\ m = 0 & \text{se } R(x(t)) \neq \emptyset \end{cases}$$

e G é uma multifunção , que definimos abaixo. Aqui m é considerado como o parâmetro de controle induzido pela razão de mortalidade que possui o sistema viável.

Definamos a multifunção $G : \Omega \times U \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$, onde

$$\Omega = \{x \in K; \quad f(x,u) \notin T_K(x), \forall u \in U\}, \tag{3.11}$$

como segue.

Seja

$$\Omega_i = \{x \in K; \quad r_i(x) = 0\}$$

e denotemos por

$$I(f(x,u)) = \{i = 1, ...p; \quad r_i(x) = 0, \langle r_i'(x), f(x,u)\rangle > 0\},$$

o subconjunto de restrições ativas.

Seja $g_i : \Omega_i \times U \to \mathbb{R}^n$ uma função dada, logo se define G como

$$G(x,u) = co\{g_i(x,u); \quad i \in I(f(x,u))\}. \tag{3.12}$$

Exemplo 3.3 *Se o conjunto viável é definido por (3.8), então para cada* $(x, u) \in \Omega_i \times U$ *definamos*

$$g_i(x,u) = (u_{i1}\alpha_{i1}x_1, ..., u_{in}\alpha_{in}x_n) - (\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\alpha_{ij}x_j)e_i$$

onde $\{e_1, ..., e_n\}$ *é a base canônica de* $\mathbb{R}^n$*. Assim*

$$G(x,u) = co\{g_i(x,u);\ \ i \in I(f(x,u))\}.$$

O significado biológico desta escolha reflete duas suposições

. *mudamos a razão de aumento só de aquelas populações cujo aumento é limitado pela falta de recursos.*

. *o índice de mortalidade para cada população é pelo menos um funcional linear desta densidade.*

3.4 Solução Viável do Sistema Mudado

Agora o interesse é saber quando o sistema mudado (3.10) possui uma solução viável. Vejamos os seguintes resultados, cujas demonstrações pode-se achar em [3],[4],[11].

Definição 3.4 *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$*. Por* $C_+(A)$ *se denota o* **cone positivo extendido de A,** *isto é,*

$$C_+(A) = \begin{cases} \bigcup_{k\geq 0} kA & se\ A \neq \emptyset \\ \{0\} & se\ A = \emptyset \end{cases}$$

Observação 3.5 *se* $A = \{a\}$*, com* $a \in \mathbb{R}^n$*, então escreveremos* $C_+(a)$ *por* $C_+(\{a\})$*.*

Definição 3.6 *Seja* $K, M, G \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto não vazio. Então*

1) *Para cada* $g \in G$ *e cada* $u \in M \cap (C_+(g) + K)$ *defina-se*

$$K_g^K(u) = \inf\{k \geq 0;\ \ u - kg \in K\}$$

$$\pi_K^g(u) = u - K_g^K(u)g.$$

2) *Seja* $M \cap (C_+(G) + K) \neq \emptyset$*. Então*

$$\pi_K^G(M) = \bigcup_{g\in G} \bigcup_{u \in M\cap(C_+(g)+K)} \pi_K^g(u).$$

Diremos que $\pi_K^G(M)$ *é a* **G-projeção** *do conjunto* M *sobre o conjunto* K*.*

A inclusão diferencial (3.10) pode também ser escrita na seguinte forma equivalente

$$\dot{x}(t) \in f(x(t), u(t)) - C_+(G(x(t), u(t))). \tag{3.13}$$

Podemos achar em [3],[4],[5],[11], que sobre certas condições existe uma solução de (3.13), Teorema 4.8, além disso, o conjunto de soluções viáveis de (3.13) é igual ao conjunto de soluções da G-projeção do sistema de controle (3.3), Teorema 4.9, o qual é

$$\dot{x}(t) \in \pi_{T_K}^G(f(x(t), u(t))) = \pi_{T_K(x(t))}^{G(x(t),u(t))}(f(x(t), u(t))) \quad u(t) \in U. \tag{3.14}$$

Teorema 3.7 *Seja $K \subset X$ um subconjunto compacto não vazio, $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto, $f : K \times U \to X$ uma aplicação contínua. Seja $\Omega \subset K$ definida por (3.11), $G : \Omega \times U \to X$ uma multifunção com valores compactos, convexos não vazios definida por (3.12). Suponha que $C_+(G(.,.))$ possui gráfico fechado, e*

$$\forall (x,u) \in K \times U, \quad f(x,u) \in T_K(x) + C_+(G(x,u))$$

e

$$\sup_{(x,u)\in K\times U} \inf_{g\in G(x,u)} \| f(x,u) - \pi^g_{T_K(x)}(f(x,u)) \| = c < \infty.$$

Além disso, suponha que a multifunção $M : K \to X$ definida por

$$M(x) = \{ f(x,u) - (\overline{B}(o,c) \cap c_+(G(x,u))); \quad u \in U \}$$

possui valores convexos e fechados. Então para cada $T > 0$ existe uma solução para (3.13).

Teorema 3.8 *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ definido por (3.7) um conjunto convexo não vazio, $U \subset \mathbb{R}^{n+n}$, $f : K \times U \to K$ uma função . Seja $\Omega \subset K$, $G : \Omega \times U \to X$ definidos por (3.11), (3.12). Suponha que $G(.,.)$ possui valores convexos não vazios, e para cada $(x,u) \in \Omega \times U$,*

$$G(x,u) \cap T_K(x) = \emptyset.$$

Então as soluções de (3.14) são as soluções viáveis para (3.13) e viceversa.

3.5 Equação Diferencial do Aumento de População com a Presença de Restrições Viáveis

Como G definida em (3.12) é uma multifunção , o lado direito de (3.14) é também uma multifunção . Então sob certas condições podemos encontrar alguma seleção de dita multifunção .

Defina-se, para cada $x \in K$ e $u \in U$, a aplicação $\pi : K \times U \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\pi(x,u) = \begin{cases} \{ f(x,u) - kg \, ; g \in G(x,u), \ k \geq 0, & \\ \langle r_i'(x), f(x,u) - kg \rangle = 0 \ \ \forall i \in I(f(x,u)) \} & \text{se } x \in \Omega \\ f(x,u) & \text{outros casos.} \end{cases} \tag{3.15}$$

e considere-se o seguinte sitema de controle

$$x'(t) = \pi(x(t), u(t)) \quad u(t) \in U. \tag{3.16}$$

Teorema 3.9 *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ definido por (3.7) un subconjunto não vazio, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definido por (3.11). Seja $f : K \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $G : \Omega \to \mathbb{R}$ uma multifunção definida por (3.12). Seja $T^i(x)$ tal que*

(i) $\forall (x,u) \in K \times U, \quad f(x,u) \in T_K(x) + C_+(G(x,u)),$

(ii) $\forall (x,u) \in K \times U, \quad (C_+(G(x,u)) - C_+(G(x,u))) \cap \bigcap_{i\in I(f(x,u))} T^i(x) \cap (-\bigcap_{i\in I(f(x,u))} T^I(x)) \neq \emptyset.$

Então $\pi(x,u)$ definida por (3.15) é uma seleção de $\pi^G_{T_K}(f(x,u))$ e as soluções da equação diferencial (3.16) são as soluções viaveis da inclusão diferencial (3.13) e viceversa.

Desta maneira tem-se construido um novo sistema de controle (3.16), cuja soluções são as que descrevem o aumento de populações com a presença de restrições viáveis.

3.6 Descrição de Competição entre duas Populações

Seja x_1 um recurso pela qual compitem duas populações , x_2 e x_3. O gráfico da cadeia alimentícia é dada pela figura 1.2

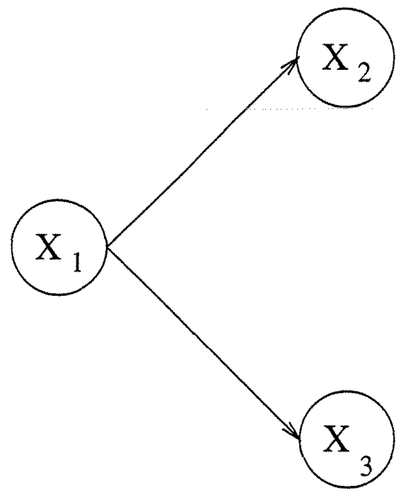

Figura 3.2: Cadeia alimentícia da competição entre duas populações

assim a matriz cadeia alimenticia é

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

então a razão de aumento de cada população sem limitações pode ser descrito pelo seguintes sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}_2(t) = a_{12}x_2(t) - n_2x_2(t) \tag{3.17}$$

$$\dot{x}_3(t) = a_{13}x_3(t) - n_3x_3(t) \tag{3.18}$$

com $a_{1i} > n_i > 0$, $i = 2, 3$.

Quanto ao recurso se distingue duas possibilidades:

1) O recurso é não destrutível (por exemplo, espaço).

2) O recurso é usado pelas populações (por exemplo, nutrientes).

Suponhamos que o recurso x_1 é como no caso 1), assim a razão do recurso é dado por

$$\dot{x}_1(t) = -\alpha_{12}(a_{12}x_2(t) - n_2x_2(t)) - \alpha_{13}(a_{13}x_3(t) - n_3x_3(t)), \tag{3.19}$$

onde α_{1i} denota o coeficiente de transformação .

Seja

$$K = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n;\ \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\} \cap B(0, d)$$

onde $B(0,d)$ é a bola de centro zero e com radio d. A razão de usar dita bola é justamente para têr K limitado.

Agora, x_1, x_2 sempre são positivos (> 0) enquanto x_1 pode ser zero. Por exemplo se o recurso for como no caso 1), então x_1, x_2 crescem até que chega um momento de saturação , isto é, em um instante t, $x_1(t) = 0$. Assim, a única restrição ativa é $x_1 = 0$, e

$$T_K(x) = \{v \in \mathbb{R}^n; \;\; v_1 \geq 0 \; se \; x \neq 0\}.$$

Daí existe $x = (0, x_2, x_3) \in K$ tal que $R(x) = \emptyset$. Pelo que não existe solução viável não trivial de (3.17), (3.18), (3.19).

Projetamos (3.17), (3.18), (3.19) sobre o cone contingente a K, usando G, onde

$$G(x) = g_1(x) = (-\sum_{i=2} 3\alpha_{1i}x_i, \alpha_{12}x_2, \alpha_{13}x_3)$$

para todo $x \in \{x \in K; \;\; x_1 = 0\}$. Explicitamente o sistema projetado é:

se $x_1(t) > 0$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\sum_{i=2}^{3} \alpha_{1i}(a_{1i}x_i(t) - n_i x_i(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{12}x_2(t) - n_2 x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= a_{13}x_3(t) - n_3 x_3(t). \end{aligned}$$

Se $x_1(t) = 0$, então $\dot{x}_1(t) = 0$. Logo

$$0 = \dot{x}(t) = -\sum_{i=2}^{3} \alpha_{1i}(a_{1i}x_i(t) - n_i x_i(t)) + m \sum_{i=2}^{3} \alpha_{1i}x_i(t)$$

de onde

$$m = \frac{\sum_{i=2}^{3} \alpha_{1i}(a_{1i}x_i(t) - n_i x_i(t))}{\sum_{i=2}^{3} \alpha_{1i}x_i(t)}.$$

Assim o sistema mudado é

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 0 \\ \dot{x}_2(t) &= a_{12}x_2(t) - n_2 x_2(t) - x_2(t)\frac{\sum_{i=2}^{3} \alpha_{1i}(a_{1i}x_i(t) - n_i x_i(t))}{\sum_{i=2}^{3} \alpha_{1i}x_i(t)} \\ \dot{x}_3(t) &= a_{13}x_3(t) - n_3 x_3(t) - x_3(t)\frac{\sum_{i=2}^{3} \alpha_{1i}(a_{1i}x_i(t) - n_i x_i(t))}{\sum_{i=2}^{3} \alpha_{1i}x_i(t)}. \end{aligned}$$

No caso 2), assuma-se que os recursos são supridos com a razão $z(t)$, isto é,

$$\dot{x}_1(t) = z(t) - \sum_{i=2}^{3} \alpha_{1i}a_{1i}x_i(t).$$

Análogo ao primeiro caso, o sistema projetado é:
Se $x_1(t) > 0$, então

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= z(t) - \sum_{i=2}^{3} \alpha_{1i} a_{1i} x_i(t) \\
\dot{x}_i(t) &= a_{1i} x_i(t) - n_i x_i(t) \quad i = 2, 3.
\end{aligned}$$

Se $x_1(t) = 0$, então

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= 0 \\
\dot{x}_i(t) &= a_{1i} x_i(t) - n_i x_i(t) - x_i(t) \frac{\sum_{j=2}^{3} a_{1j} \alpha_{1j} x_j(t)}{\sum_{j=2}^{3} \alpha_{1j} x_j(t)}. \quad i = 2, 3.
\end{aligned}$$

Capítulo 4

O princípio do Máximo Para Inclusões Diferenciais

Existe uma teoria matemática bem construída para problemas de controle descritos pelo sistema controlável clássico (2.2)

$$x' = f(t, x, u), \quad u \in U. \tag{4.1}$$

O resultado central desta teoria é o princípio do Máximo de Pontryagin, que dá uma condição necessária para otimalidade. Com a ajuda deste princípio do Máximo é possível resolver certos problemas de controle em forma explícita, por exemplo, problemas lineares, e em outros problemas é possível simplificar a solução e reduzir o problema a problemas mais simples.

Muitos métodos numéricos para resolver problemas de controle ótimo estão baseados no princípio do Máximo de Pontryagin. A prova original deste princípio para o sistema (4.1), está baseada no uso da chamada variação forte de um controle ótimo; neste caso a variação da correspondente trajetória ótima pode ser descrita, devido à existência do sistema de equações variacionais, por

$$\delta x' = \frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial x} \delta x. \tag{4.2}$$

Similar ao caso do sistema (4.1) pode-se considerar o problema de controle ótimo para a inclusão diferencial

$$x' \in F(x) \tag{4.3}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ é uma multifunção .

Aqui só consideremos o problema de controle de tempo ótimo, isto é, dado um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e um ponto terminal $x_1 \in \mathbb{R}^n$, o problema de controle de tempo ótimo consiste em achar uma solução $x(t)$ de (4.3) que transfere o ponto inicial x_0 ao ponto terminal x_1 no menor tempo possível, de outro modo, achar uma solução $x(t)$ satisfazendo a condição límite

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad x(t_1) = x_1$$

tal que o tempo transição $t_1 - t_0$ é mínimo.

Neste capítulo formula-se o princípio do Máximo do problema de tempo ótimo para a inclusão difrencial (4.3), e para sua prova, se segue como no caso do sistema (4.1); primeiro obtemos a inclusão diferencial Variacional associada com a inclusão diferencial (4.3), a diferença do sistema (4.2), esta última não é linear, mas nos permite definir a variação de uma solução ótima $x(t)$ da inclusão diferencial (4.3). Usando esta variação prova-se o mencionado Princípio do Máximo.

4.1 Formulação do Princípio do Máximo

Consideremos o problema de controle de tempo ótimo da Inclusão Diferencial (4.3) desde um estado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ para o estado terminal $x_1 \in \mathbb{R}^n$.

Para formular o Princípio do Máximo consideremos algumas condições sobre $F(x)$. Admitamos que, o conjunto $F(x)$ é não vazio e limitado e que as seguintes condições sobre x se cumpre:

Condição 1.- Existe um $k \geq 0$ tal que para qualquer par de pontos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e para um vetor arbitário $v_1 \in F(x_1)$ pode-se achar um vetor $v_2 \in F(x_2)$ satisfazendo a inequação

$$\|v_1 - v_2\| \leq k\|x_1 - x_2\|$$

No caso que o conjunto $F(x)$ é compacto, esta condição é equivalente a dizer: existe um $k \geq 0$ tal que

$$H(F(x_1), F(x_2)) \leq k\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Condição 2.- A função suporte do conjunto $F(x)$, $\sigma(F(x), \psi)$, é continuamente diferenciável com respeito a x para cada vetor fixo $\psi \in \mathbb{R}^n$ e, além disso, existe uma função contínua de valores escalares $K(x) \geq 0$ tal que para qualquer par de vetores $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^n$ o vetor gradiente $\frac{\partial\sigma(F(x),\psi)}{\partial x}$ satisfaz a inequação

$$\|\frac{\partial\sigma(F(x), \psi_1)}{\partial x} - \frac{\partial\sigma(F(x), \psi_2)}{\partial x}\| \leq K(x)\|\psi_1 - \psi_2\|.$$

O seguinte teorema dá uma condição necessária para otimizar.

Teorema 4.1 *(princípio do Máximo) Seja $x(t)$ uma solução de tempo ótimo da inclusão diferencial (4.3) que transfere o estado inicial x_0 para o estado terminal x_1 durante o intervalo de tempo $[t_0, t_1]$. Então, existe uma solução não trivial $\psi(t)$ da equação diferencial*

$$\psi' = -\frac{\partial\sigma(F(x(t)), \psi)}{\partial x} \tag{4.4}$$

chamada de sistema adjunto, tal que para todo $t \in [t_0, t_1]$ a condição do Máximo

$$\langle x'(t), \psi(t)\rangle = \sigma(F(x(t)), \psi(t)) \tag{4.5}$$

é satisfeito. Além disso, a função $\sigma(F(x(t)), \psi(t))$ é constante e não negativa.

No que segue, assumiremos que as condições desta seção são satisfeitas.

4.2 Inclusão Diferencial Variacional

Seja $x(t)$ uma solução da inclusão diferencial (4.3) definida no intervalo tempo $I = [t_0, t_1]$. Nesta seção construiremos a inclusão diferencial variacional para esta solução $x(t)$.

Lembremos da definição, que $x(t)$ satisfaz

$$x'(t) \in F(x(t))$$

para quase todo $t \in I$. Consequentemente, por definição de função suporte, a inequação

$$\langle x'(t), \psi\rangle \leq \sigma(F(x(t)), \psi) \tag{4.6}$$

é válida para qualquer vetor $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Denotemos por $N(t)$ o conjunto de vetores $\psi \in \mathbb{R}^n$ tal que ψ satisfaz a igualdade em (4.6)

$$N(t) = \{\psi \in \mathbb{R}^n : \langle x'(t), \psi\rangle = \sigma(F(x(t)), \psi)\}.$$

Isto significa que $N(t)$ é o conjunto de vetores suporte do conjunto $F(x(t))$ no ponto $x'(t)$.

O conjunto $N(t)$ esta definido para quase todo $t \in I$; extenderemos esta definição para o resto dos pontos de I fazendo $N(t) = \{0\}$.

Definição 4.2 *Diremos que uma aplicação G de $M \subset \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ é* **positivamente linear** *se, para todo $\alpha, \beta \geq 0$ e vetores $\psi_1, \psi_2 \in M$, se*

$$G(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha G(\psi_1) + \beta G(\psi_2).$$

Lema 4.3 *O conjunto $N(t)$ é um cone convexo, fechado, com vértice no ponto $\psi = 0$ e a função suporte $\sigma(F(x(t)), .)$ é positivamente linear no cone $N(t)$, isto é, para qualquer par de vetores $\psi_1, \psi_2 \in N(t)$ e números $\alpha, \beta \geq 0$, se tem que*

$$\sigma(F(x(t)), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha\sigma(F(x(t)), \psi_1) + \beta\sigma(F(x(t)), \psi_2).$$

Prova: Sabemos da Proposição 1.4, que a função suporte de um conjunto não vazio $K \subset \mathbb{R}^n$ é positivamente homogênea, isto é,

$$\sigma(K, \alpha\psi) = \alpha\sigma(K, \psi) \tag{4.7}$$

para qualquer vetor $\psi \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \geq 0$ arbitrário. Além disso, esta é subaditiva, isto é,

$$\sigma(K, \psi_1 + \psi_2) \leq \sigma(K, \psi_1) + \sigma(K, \psi_2) \tag{4.8}$$

para quaisquer vetores $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^n$. Também, se o conjunto K for limitado, a função suporte $\sigma(K, \psi)$ é contínua em ψ (Observação 1.2).

Da continuidade da função suporte $\sigma(F(x(t)), \psi)$ com respeito a ψ é imediato que $N(t)$ é fechado.

Agora vejamos que $N(t)$ é um cone convexo com vértice em zero. Para isto consideremos números arbitrários $\alpha, \beta \geq 0$ e vetores $\psi_1, \psi_2 \in N(t)$. Assim, por definição de $N(t)$

$$\langle x'(t), \psi_1\rangle = \sigma(F(x(t)), \psi_1)$$

e

$$\langle x'(t), \psi_2\rangle = \sigma(F(x(t)), \psi_2) \tag{4.9}$$

Logo de (4.7) e (4.8) obtemos que

$$\begin{aligned}
\sigma(F(x(t)), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) &\leq \alpha\sigma(F(x(t)), \psi_1) + \beta\sigma(F(x(t)), \psi_2) \\
&= \alpha\langle x'(t), \psi_1\rangle + \beta\langle x'(t), \psi_2\rangle \\
&= \langle x'(t), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2\rangle
\end{aligned}$$

Agora, tomando $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ em (4.6), concluimos que

$$\langle x'(t), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2\rangle = \sigma(F(x(t)), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) \tag{4.10}$$

isto significa que

$$\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \in N(t)$$

isto é, $N(t)$ é um cone convexo com vértice em zero. A função $\sigma(F(x(t)), \psi)$ é positivamente linear, isto segue de (4.9) e (4.10). ■

Fixemos qualquer $\delta x \in \mathbb{R}^n$ e definamos a seguinte função com valores escalares

$$C(\psi) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \psi \notin \mathrm{N(t)} \\ \langle \frac{\partial\sigma(F(x(t)),\psi)}{\partial x}, \delta x\rangle & \text{se } \psi \in \mathrm{N(t)}. \end{cases}$$

Lema 4.4 *A função* $C(\psi)$ *é positivamente linear no cone* $N(t)$, *isto é, para quaisquer vetores* $\psi_1, \psi_2 \in N(t)$ *e números* $\alpha, \beta \geq 0$

$$C(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha C(\psi_1) + \beta C(\psi_2)$$

Prova: Consideremos, os números arbitrários $\alpha, \beta \geq 0$, os vetores $\psi_1, \psi_2 \in N(t)$ e ϵ qualquer número real. Como a função suporte é positivamente homogênea e subaditiva, então para o vetor $x(t) + \epsilon\delta x$, se tem que

$$\sigma(F(x(t) + \epsilon\delta x), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) \leq \alpha\sigma(F(x(t) + \epsilon\delta x), \psi_1) + \beta\sigma(F(x(t) + \epsilon\delta x), \psi_2)$$

e

$$\sigma(F(x(t)), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) \leq \alpha\sigma(F(x(t)), \psi_1) + \beta\sigma(F(x(t)), \psi_2).$$

Segue daí que

$$\begin{aligned}\sigma(F(x(t) + \epsilon\delta x), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) - \sigma(F(x(t)), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) \quad &\leq \alpha[\sigma(F(x(t) + \epsilon\delta x), \psi_1) - \sigma(F(x(t)), \psi_1)] + \\ &\beta[\sigma(F(x(t) + \epsilon\delta x), \psi_2) - \sigma(F(x(t)), \psi_2)].\end{aligned}$$

Agora a função suporte $\sigma(F(x), \psi)$ é continuamente diferenciável em x para cada vetor ψ (condição 2), consequentemente

$$\langle\frac{\partial\sigma(F(x(t)), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2)}{\partial x}, \epsilon\delta x\rangle + r(\epsilon\delta x) \leq \alpha\langle\frac{\partial\sigma(F(x(t)), \psi_1)}{\partial x}, \epsilon\delta x\rangle + \beta\langle\frac{\partial\sigma(F(x(t)), \psi_2)}{\partial x}, \epsilon\delta x\rangle + r(\epsilon\delta x).$$

Já que ϵ pode ser um número de signo arbitrário, tomando límite quando $\epsilon \to 0^+$ e $\epsilon \to 0^-$ obtem-se

$$\langle\frac{\partial\sigma(F(x(t)), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2)}{\partial x}, \delta x\rangle = \alpha\langle\frac{\partial\sigma(F(x(t)), \psi_1)}{\partial x}, \delta x\rangle + \beta\langle\frac{\partial\sigma(F(x(t)), \psi_2)}{\partial x}, \delta x\rangle.$$

Logo, por definição de C

$$C(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha C(\psi_1) + \beta C(\psi_2).$$

■

Lema 4.5 *A função $C(\psi)$ é a função suporte de algum subconjunto fechado e convexo de $\mathbb{R}^n$.*

Prova: Pelo corolário 1.7, basta ver que $C(\psi)$ é positivamente homogênea, subaditiva e semicontínua inferiormente. Pelo lema 3.2 a função $C(\psi)$ é positivamente linear no cone $N(t)$, consequentemente esta é positivamente homogênea e subaditiva em $N(t)$.

Se, $\psi \notin N(t)$, então

$$\alpha\psi \notin N(t) \quad \forall \alpha \geq 0.$$

Segue daí que

$$C(\psi) = +\infty$$

e

$$C(\alpha\psi) = +\infty$$

pelo que

$$C(\alpha\psi) = \alpha C(\psi) \quad \forall \alpha \geq 0 \quad e \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Se, um dos vetores $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^n$ não pertence ao cone $N(t)$, então

$$C(\psi_1 + \psi_2) \leq +\infty = C(\psi_1) + C(\psi_2).$$

A função $\langle \frac{\partial \sigma(F(x(t)),\psi)}{\partial x}, \delta x \rangle$ é contínua em ψ (condição 2) no cone $N(t)$, segue daí que a função $C(\psi)$ é semicontínua inferiormente em todo o espaço $\mathbb{R}^n$. O que completa a prova do lema. ■

Conhecido $C(\psi)$ podemos construir um único conjunto fechado, convexo que tem $C(\psi)$ como função suporte. Denotemos este conjunto por $P(x(t), \delta x)$; é claro que este conjunto depende da solução $x(t)$ da inclusão diferencial (4.3) como do vetor $\delta x \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos a inclusão diferencial

$$\delta x' \in P(x(t), \delta x) \tag{4.11}$$

chamaremos a esta como a **inclusão diferencial variacional** associada com a solução $x(t)$ da inclusão diferencial (4.3). Este termo, Variacional, esta justificado pelo fato que, se a função $F(x)$ tem valores unitários (isto é $F(x) = \{f(x)\}$), então a inclusão diferencial (4.3) transforma-se na equação diferencial ordinária

$$x' = f(x). \tag{4.12}$$

Logo a inclusão diferencial variacional (4.11) torna-se um sistema clássico de equação variacional

$$\delta x' = (\frac{\partial f(x(t))}{\partial x})\delta x, \tag{4.13}$$

pois, para a solução $x(t)$ da equação diferencial (4.12) a igualdade

$$x'(t) = f(x(t))$$

é válida para quase todo t em algum intervalo I, consequentemente o cone $N(t)$ coincide com todo o espaço $\mathbb{R}^n$, para quase todo $t \in I$. Assim, a função $C(\psi)$ é da forma

$$C(\psi) = \langle \frac{\partial f(x(t))}{\partial x}\psi, \delta x \rangle = \langle \frac{\partial f(x(t))}{\partial x}\delta x, \psi \rangle.$$

Esta é linear em ψ no espaço todo $\mathbb{R}^n$ e é a função suporte do conjunto

$$P(x(t), \delta x) = \{(\frac{\partial f(x(t))}{\partial x})\delta x\}$$

isto significa que a inclusão (4.11) é o mesmo que a equação (4.13).

4.3 Propriedades da Inclusão Diferencial Variacional

Além de dar algumas propriedades da inclusão diferencial variacional, nesta seção se prova que a inclusão (4.11) pode ser representado na forma de um sistema controlável linear.

Consideremos $\frac{\partial\sigma(F(x(t)),.)}{\partial x}$ como uma função. Pela condição 2, esta função esta definida para cada vetor $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Lema 4.6 *A aplicação*

$$\frac{\partial\sigma(F(x(t)),.)}{\partial x} : N(t) \to \mathbb{R}^n \tag{4.14}$$

é um operador positivamente linear.

Prova: No Lema 3.3 foi provado que para qualquer vetor fixo $\delta x \in \mathbb{R}^n$ a função $C(\psi)$ é positivamente linear no cone $N(t)$.

Suponhamos o contrário, isto é, qua a aplicação (4.14) não é positivamente linear; isto significa que podemos achar números $\alpha, \beta \geq 0$ e vetores $\psi_1, \psi_2 \in N(t)$ tal que

$$y = \frac{\partial\sigma(F(x(t)), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2)}{\partial x} - \frac{\alpha\partial\sigma(F(x(t)), \psi_1)}{\partial x} - \frac{\beta\partial\sigma(F(x(t)), \psi_2)}{\partial x} \neq 0$$

Tomemos $y = \delta x$, então

$$\langle\frac{\partial\sigma(F(x(t)), \alpha\psi_1 + \beta\psi_2)}{\partial x}, \delta x\rangle - \alpha\langle\frac{\partial\sigma(F(x(t)), \psi_1)}{\partial x}, \delta x\rangle - \beta\langle\frac{\partial\sigma(F(x(t)), \psi_2)}{\partial x}, \delta x\rangle = \|\delta x\|^2 \neq 0$$

que é absurdo, pois $C(\psi)$ é positivamente linear no cone $N(t)$. ∎

Denotemos por $B(t)$ o operador positivamente linear definido em 4.14 no cone $N(t)$. Desta maneira para qualquer vetor $\psi \in N(t)$ o valor do operador positivamente linear é dado por

$$B(t)\psi = \frac{\partial\sigma(F(x(t)), \psi)}{\partial x}. \tag{4.15}$$

Consideremos o conjunto $L(t) = N(t) + (-N(t))$, isto é,

$$\psi \in L(t) \iff \psi = a - b, \quad a \in N(t), \quad b \in N(t).$$

Lema 4.7 *O conjunto $L(t) \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial, e o operador positivamente linear $B(t)$ definido no cone $N(t)$ pode ser extendido de maneira única para um operador linear $A(t) : L(t) \to \mathbb{R}^n$ no subespaço $L(t) \subset \mathbb{R}^n$.*

Prova: Consideremos os números arbitrários α, β e os vetores $\psi_1, \psi_2 \in L(t)$, então existem $a_1, a_2, b_1, b_2 \in N(t)$ tal que

$$\psi_1 = a_1 - b_1, \quad \psi_2 = a_2 - b_2$$

logo,

$$\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 = \alpha a_1 - \alpha b_1 + \beta a_2 - \beta b_2.$$

Tomemos o caso em que $\alpha \geq 0$ e $\beta \leq 0$, então da convexidade de $N(t)$ se tem que

$$u = \alpha a_1 - \beta b_2 \in N(t), \quad v = \alpha b_1 - \beta a_2 \in N(t)$$

logo,

$$u - v = \alpha a_1 - \alpha b_1 + \beta a_2 - \beta b_2 \in L(t)$$

isto é

$$\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \in L(t).$$

Analogamente se faz para os outros casos, $\alpha \leq 0$ e $\beta \geq 0$, $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$, $\alpha \leq 0$ e $\beta \leq 0$. Assim, $L(t)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Definamos $A(t) : L(t) \to \mathbb{R}^n$ como

$$A(t)\psi = B(t)a - B(t)b.$$

onde $\psi = a - b$ com $a, b \in N(t)$. Vejamos que $A(t)$ esta bem definida, para isto suponhamos que ψ tem duas representações

$$\psi = a_1 - b_1 = a_2 - b_2$$

com $a_1, a_2, b_1, b_2 \in N(t)$, então

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

e assim

$$a_1 + b_2 \in N(t) \quad e \quad a_2 + b_1 \in N(t).$$

Como $B(t)$ é positivamente linear, segue que

$$B(t)a_1 + B(t)b_2 = B(t)a_2 + B(t)b_1$$

pelo que ψ tem uma única imagem qualquer que for sua representação .

$A(t)$ é uma extensão de $B(t)$, isto é, para todo vetor $\psi \in N(t)$ se cumpre que

$$A(t)\psi = B(t)\psi.$$

Com efeito, se $\psi \in N(t)$, então

$$\psi = a - 0 \in L(t)$$

e

$$A(t)\psi = B(t)a + B(t)0 = B(t)\psi.$$

Provaremos agora a linearidade de $A(t)$, para isto consideremos números arbitrários $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e vetores $\psi_1, \psi_2 \in L(t)$, então

$$\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 = \alpha a_1 - \alpha b_1 + \beta a_2 - \beta b_2$$

Tomemos o caso que $\alpha \geq 0$ e $\beta \leq 0$, pelo Lema 3.2

$$u = \alpha a_1 - \beta b_2 \in N(t) \quad , \quad v = \alpha b_1 - \beta a_2 \in N(t)$$

logo, pela definição de $A(t)$ e Lema 3.5 obtemos que

$$\begin{aligned} A(t)(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) &= A(t)(u - v) \\ &= B(t)u - B(t)v \\ &= \alpha B(t)a_1 - \beta B(t)b_2 - \alpha B(t)b_1 + \beta B(t)a_2 \\ &= \alpha[B(t)a_1 - B(t)b_1] + \beta[B(t)a_2 - B(t)b_2] \\ &= \alpha A(t)\psi_1 + \beta A(t)\psi_2. \end{aligned}$$

analogamente para os outros casos, $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$, $\alpha \leq 0$ e $\beta \geq 0$, $\alpha \leq 0$ e $\beta \leq 0$. Isto completa a prova do lema. ■

Desta maneira se tem extendido o operador $B(t)$, definido no cone $N(t)$, para o subespaço $L(t)$. Também podemos extender o operador para todo $\mathbb{R}^n$, uma das formas é fazendo uso da projeção ortogonal.

Denotemos por $\pi(t)$ o operador linear projeção ortogonal sobre o subespaço $L(t)$. A extensão de $A(t)$ para todo $\mathbb{R}^n$, denotado também por $A(t)$, é definido pela expresão

$$A(t)\psi = A(t)\pi(t)\psi. \tag{4.16}$$

É claro que este operador é linear, e está definido sobre todo $\mathbb{R}^n$. Fixamos uma base de $\mathbb{R}^n$ e denotemos por $\overline{A}(t)$ a matriz correspondente de $A(t)$ nessa base.

Agora, consideremos um tempo arbitrário fixo $t \in I = [t_0, t_1]$.

Lema 4.8 *Os elementos da matriz $\overline{A}(t)$ são funções Lebesgue mensuráveis com relação ao tempo t. Além disso, o operador norma $\|\overline{A}(t)\|$ desta matriz é uniformemente limitada no intervalo I, isto é, existe uma constante K tal que*

$$\|\overline{A}(t)\| \leq K, \quad \forall t \in I$$

Prova: Fixemos um vetor arbitrário $\psi \in \mathbb{R}^n$ e provemos que a imagen do operador $A(t)$ em ψ depende em medida de $t \in I$.

Consideremos a multifunção $N(t)$ dada por (4.11). Esta é mensurável com respeito a t, já que a função $x'(t)$ é mensurável e a função suporte é contínua em t (condição 2). A multifunção $L(t)$, dada anteriormente, é a soma algébrica de duas multifunções mensuráveis, daí esta é mensurável.

A função $\pi(t)\psi$ é definida como o ponto mais próximo de $L(t)$ ao vetor ψ, como tal esta é também mensurável.

Para a função $\pi(t)\psi \in L(t)$ temos a representação

$$\pi(t)\psi = a(t) - b(t) \quad , \quad a(t), b(t) \in N(t) \tag{4.17}$$

onde as funções $a(t), b(t)$ podem ser escolhidas como mensuráveis. Isto é uma conseqüência imediata do teorema de Filippov, Teorema 1.42, se aplicamos este para o caso

$$u = (a, b) \in N(t) \times N(t) = U(t) \qquad g(u) = a - b.$$

e

$$h(.) = \pi(t)(.).$$

Pois, de fato $U(t)$ é mensurável, já que este é o produto cartesiano de duas multifunções mensuráveis; a aplicação $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ é contínua e a inclusão $h(\psi) = \pi(t)\psi \in L(t) = f(U(t))$ se cumpre, então pelo Teorema de Filippov (Teorema 1.42) existe uma função mensurável $u(t) = (a(t), b(t)) \in U(t)$ que satisfaz 4.17.

Logo podemos escrever a imagem do vetor ψ por $A(t)$ na forma

$$\begin{aligned} A(t)\psi &= a(t)(\pi(t)\psi) \\ &= A(t)[a(t) - b(t)] \\ &= B(t)a(t) - B(t)b(t) \\ &= \frac{\partial\sigma(F(x(t)), a(t))}{\partial x} - \frac{\partial\sigma(F(x(t)), b(t))}{\partial x} \end{aligned}$$

pelo que (condição 2) $A(t)\psi$ é mensurável com respeito ao tempo t.

Já que a função $A(t)\psi$ é mensurável em t para qualquer vetor $\psi \in \mathbb{R}^n$, segue que todo elemento $A_{ij}(t)$ da matriz $\overline{A}(t)$ são mensuráveis. Pois a não mensurabilidade de algum $A_{ij}(t)$ implica que $A(t)e_j$, onde e_j denota o vetor que tem todas as coordenadas igual a zero exceto na coordenada j que tem como valor 1, não é mensurável.

Por último calculamos a norma da matriz $\overline{A}(t)$

$$\|\overline{A}(t)\| = \max_{\|\psi\|\le 1} \|A(t)\psi\| \le \max_{\|a-b\|\le 1} \|\frac{\partial\sigma(F(x(t)), a)}{\partial x} - \frac{\partial\sigma(F(x(t)), b)}{\partial x}\|.$$

Agora, pela condição 2 existe uma função contínua em t, $K(x(t))$, tal que

$$\|\frac{\partial\sigma(F(x(t)), a)}{\partial x} - \frac{\partial\sigma(F(x(t)), b)}{\partial x}\| \le K(x(t))\|a - b\|.$$

Assim tomando o máximo sobre todos os vetores $a, b \in \mathbb{R}^n$ com $\|a - b\| \le 1$, obtemos que

$$\max_{\|a-b\|\le 1} \|\frac{\partial\sigma(F(x(t)), a)}{\partial x} - \frac{\partial\sigma(F(x(t)), b)}{\partial x}\| \le K(x(t)).$$

Escolhendo

$$K = \max_{t \in I} K(x(t))$$

concluimos a prova do lema. ∎

Consideremos o sistema controlável

$$\delta x' = \overline{A}^*(t)\delta x + u(t) \quad , \quad u(t) \in N^*(t) \tag{4.18}$$

onde $\overline{A}^*(t)$ é a transposta da matriz $\overline{A}(t)$ e $N^*(t)$ é o cone dual de $N(t)$, isto é,

$$N^*(t) = \{\varphi \in \mathbb{R}^n; \langle\varphi, \psi\rangle \le 0 \quad \forall\psi \in N(t)\}.$$

Usualmente uma função mensurável $u(t) \in N^*(t)$ é chamada de controle para o sistema (4.18), cujo posto $\{u(t) : t \in I\}$ tem fecho compacto em $\mathbb{R}^n$.

Lema 4.9 *A inclusão diferencial variacional (4.5) pode ser representada na forma do sistema controlável (4.18). Em outras palavras*

$$P(x(t), \delta x) = \overline{A}^*(t)\delta x + N^*(t) \tag{4.19}$$

para todo $t \in I$ *e* $\delta x \in \mathbb{R}^n$

Prova: Já que os conjuntos de ambos lados em (4.19), são fechados e convexos, é suficiente provar a igualdade de suas funções suporte (Teorema 1.7). A função suporte do conjunto $P(x(t), \delta x)$ é $C(\psi)$. Vejamos que a função suporte do conjunto $\overline{A}^*(t)\delta x + N^*(t)$ coincide com $C(\psi)$. Pelas propriedades da função suporte e definição de N^*, obtemos que

$$\begin{aligned}\sigma(\overline{A}^*(t)\delta x + N^*(t), \psi) &= \langle \overline{A}^*(t)\delta x, \psi\rangle + \sigma(N^*(t), \psi) \\ &= \langle \delta x, \overline{A}(t)\psi\rangle + \begin{cases} 0 & \text{se } \psi \in \mathrm{N(t)} \\ +\infty & \text{se } \psi \notin \mathrm{N(t)} \end{cases}.\end{aligned}$$

Agora pela definição do operador linear $A(t)$ temos que

$$A(t)\psi = \frac{\partial \sigma(F(x(t)), \psi)}{\partial x} \qquad \forall \psi \in N(t)$$

daquí a função suporte do conjunto $\overline{A}^*(t)\delta x + N^*(t)$ tem a forma

$$\sigma(\overline{A}^*(t)\delta x + N^*(t), \psi) = \begin{cases} \langle \frac{\partial \sigma(F(x(t)), \psi)}{\partial x}, \delta x\rangle & \text{se } \psi \in \mathrm{N(t)} \\ +\infty & \text{se } \psi \notin \mathrm{N(t)}. \end{cases}$$

Em outras palavras, esta coincide com $C(\psi)$. ∎

Agora fixemos dois tempos $\tau_1, \tau_2 \in I$, $\tau_1 \leq \tau_2$, e um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto $K(\tau_2, \tau_1, K)$ é chamado **conjunto atingível** para a inclusão diferencial variacional (4.11), ou equivalentemente, para o sistema controlável (4.18), este conjunto consiste dos valores $\delta x(\tau_2) \in \mathbb{R}^n$ de todas as soluções possíveis $\delta x(t)$, associadas com controles admissíveis $u(t) \in N^*(t)$ com condição inicial $\delta x(\tau_1) \in K$.

Lema 4.10 *Seja* $K \subset \mathbb{R}^n$ *um cone convexo. Então o conjunto atingível* $K(\tau_2, \tau_1, K)$ *é também um cone convexo.*

Prova: Consideremos os números arbitrários $\alpha, \beta \geq 0$ e os vetores arbitrários $p_1, p_2 \in K(\tau_2, \tau_1, K)$. Por definição existem dois controles admissíveis $u_1(t), u_2(t) \in N^*(t)$ tais que as soluções associadas $\delta x_1(t)$ e $\delta x_2(t)$ de (4.18) , satisfaçam as condições

$$\delta x_1(\tau_2) = p_1 \;\; , \;\; \delta x_2(\tau_2) = p_2 \;\; , \;\; \delta x_1(\tau_1) \in K \;\; , \;\; \delta x_2(\tau_1) \in K.$$

Agora consideremos a função

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$$

esta também pertence a $N^*(t)$, então pela linearidade do sistema (4.18) a função

$$\delta x(t) = \alpha \delta x_1(t) + \beta \delta x_2(t)$$

é solução de (4.18) associada com o controle $u(t)$. Por outro lado, K é um cone convexo, então no tempo τ_1 se tem que

$$\delta x(\tau_1) = \alpha \delta x_1(\tau_1) + \beta \delta x_2(\tau_1) \in K.$$

Consequentemente

$$\delta x(\tau_2) = \alpha p_1 + \beta p_2 \in K(\tau_2, \tau_1, K).$$

■

Lema 4.11 *A função suporte do conjunto atingível é igual à quantidade*

$$\sigma(K(\tau_1, \tau_2, K), \psi) = \sigma(K, \psi(\tau_1)) \tag{4.20}$$

se $\psi(t) \in N(t)$ para quase todo $t \in [\tau_1, \tau_2]$; em outros casos esta é igual a $+\infty$. Aqui $\psi(t)$ denota a solução da equação diferencial linear

$$\psi' = -\overline{A}(t)\psi \tag{4.21}$$

associada com a condição inicial $\psi(\tau_2) = \psi$.

Prova: Seja $u(t) \in N^*(t)$ um controle admissível e denotemos por $\delta x(t)$ a correspondente solução do sistema controlável (4.18). Então a formula de Cauchy de $\delta x(t)$ em forma explícita fica sendo

$$\delta x(\tau_2) = \Phi(\tau_1, \tau_2)\delta x(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi(\tau_2, s)u(s)ds \tag{4.22}$$

onde $\Phi(t, \tau)$ denota a matriz fundamental formada por as soluções da equação homogênea

$$\delta x' = \overline{A}^*(t)\delta x$$

satisfazendo a condição inicial $\Phi(t, \tau) = E$, onde E é a matriz identidade. Usando (4.22) o conjunto atingível pode ser escrito na seguinte forma

$$K(\tau_1, \tau_2, K) = \Phi(\tau_2, \tau_1)K + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi(\tau_2, s)N^*(s)ds$$

onde a integral da direita é compreendido como a integral de uma multifunção e os conjuntos $\Phi(\tau_2, \tau_1)K$ e $\Phi(\tau_2, s)N^*(s)$ são imagens do conjunto K e $N^*(s)$ sobre a aplicação linear $\Phi(\tau_2, \tau_1)$ e $\Phi(\tau_2, s)$ respectivamente.

Agora usando propriedades da função suporte, nós obtemos a seguinte expressão para a função suporte do conjunto atingível

$$\sigma(K(\tau_1, \tau_2, K), \psi) = \sigma(\Phi(\tau_2, \tau_1)K, \psi) + \sigma(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi(\tau_2, s)N^*(s)ds, \psi)$$

segue daí que

$$\sigma(K(\tau_1, \tau_2, K), \psi) = \sigma(K, \Phi^*(\tau_2, \tau_1)\psi) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sigma(N^*(s), \Phi^*(\tau_2, s)\psi)ds. \tag{4.23}$$

Definindo

$$\psi(t) = \Phi^*(\tau_2, t)\psi$$

podemos facilmente testar que $\psi(t)$ é a solução de (4.21) satisfazendo $\psi(\tau_2) = \psi$.

Se o vetor $\psi(t)$ satisfaz

$$\psi(t) \in N(t)$$

para quase todo $t \in [\tau_1, \tau_2]$, então

$$\sigma(N^*(t), \psi(t)) = 0$$

pelo que, (4.23) torna-se (4.20). Por outro lado, se

$$\psi(t) \notin N(t)$$

no conjunto $[\tau_1, \tau_2]$ de medida positiva, então a integral em (4.23) é $+\infty$, e obtemos

$$\sigma(K(\tau_1, \tau_2, K), \psi) = +\infty.$$

■

Denotemos por $d(q, F)$ a distância do ponto $q \in \mathbb{R}^n$ ao conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$. Sob a condição que o conjunto F é fechado e convexo, esta distância é zero se $q \in F$ e é dada pela fórmula

$$d(q, F) = \max_{\psi \in S}[\langle q, \psi \rangle - \sigma(F, \psi)]$$

quando $q \notin F$, onde S denota a esfera unitária do espaço $\mathbb{R}^n$.

Consideremos a inclusão diferencial

$$x' \in \overline{co}F(x) \tag{4.24}$$

que pode ser obtido de (4.3) se substituimos o conjunto $F(x)$ por $\overline{co}F(x)$.

Lema 4.12 *Seja $x_0(t)$ uma função absolutamente contínua definida em um intervalo tempo $I = [t_0, t_1]$. Tomemos o ponto $\tau \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$, e assumamos que*

$$\|y_0 - x_0\| < \delta \quad , \quad d(x_0'(t), \overline{co}F(x_0(t))) \leq \rho(t)$$

para algum número $\delta > 0$ e alguma função $\rho(t)$ integrável no intervalo I. Então existe uma solução $y(t)$ da inclusão diferencial (4.3) com condição inicial

$$y(\tau) = y_0$$

tal que a desigualdade

$$\|y(t) - x_0(t)\| < m(\delta + \int_\tau^t \rho(s)ds) \tag{4.25}$$

é válida para cada $\tau \leq t \leq t_1$ e para alguma constante $m \geq 0$.

Prova: O Lema 4.12 é uma conseqüência imediata do Teorema 2.16 ■

Lema 4.13 *Dado um ponto $\tau \in I$, um número $\epsilon > 0$ e uma solução $\delta x(t)$ da inclusão diferencial variacional (4.11), com condição inicial*

$$\delta x(\tau) = \delta x_\tau.$$

Então existe uma solução $y(t)$ de (4.3) com condição inicial

$$y(\tau) = x(\tau) + \epsilon \delta x_\tau + r(\epsilon)$$

tal que para cada $t \in [\tau, t_1]$

$$y(t) = x(t) + \epsilon \delta x(t) + r(\epsilon) \tag{4.26}$$

onde $r(\epsilon)$ depende de t, porém $\frac{r(\epsilon)}{\epsilon}$ tende a zero uniformemente com respeito a $t \in [\tau, t_1]$. Além disso, esta solução $y(t)$ depende continuamente da solução $\delta x(t)$.

Prova: Consideremos a função absolutamente contínua $x_0(t) = x(t) + \epsilon \delta x(t)$ e calculemos a distância

$$d(x_0^{'}(t), \overline{co}F(x_0(t))).$$

Esta distância é zero para aqueles $t \in I$ tal que

$$x_0^{'}(t) \in \overline{co}F(x_0(t)).$$

Tomemos aqueles valores $t \in I$ para quando isto não vale. Logo

$$\begin{aligned} \rho_0(t) &= d(x_0^{'}(t), \overline{co}F(x(t))) \\ &= \max_{\psi \in S}\{\langle x_0^{'}(t), \psi\rangle \sigma(F(x_0(t)), \psi)\} \\ &= \max_{\psi \in S}\{\langle x^{'}(t), \psi\rangle + \epsilon\langle \delta x^{'}(t), \psi\rangle - \sigma(F(x(t) + \epsilon\delta x(t)), \psi)\} \qquad (*). \end{aligned}$$

Agora, pela (condição 2)

$$\sigma(F(x(t) + \epsilon\delta x(t)), \psi) = \sigma(F(x(t)), \psi) + \epsilon\langle \frac{\partial \sigma(F(x(t)), \psi)}{\partial x}, \delta x(t)\rangle + r(\epsilon)$$

onde $\frac{r(\epsilon)}{\epsilon}$ tende a zero uniformemente com respeito a $t \in I$ quando $\epsilon \to 0$. Além disso, é claro que $r(\epsilon)$ depende continuamente da função $\delta x(t)$ e do vetor $\psi \in \mathbb{R}^n$. Substituindo esta igualdade em $(*)$ a distância $\rho_0(t)$ fica como

$$\rho_0(t) = \max_{\psi \in S}\{\langle x^{'}(t), \psi\rangle - \sigma(F(x(t)), \psi) + \epsilon[\langle \delta x^{'}(t), \psi\rangle - \langle \frac{\partial \sigma(F(x(t)), \psi)}{\partial x}, \delta x(t)\rangle] + r(\epsilon)\}.$$

Para a solução $x(t)$ de (4.3), por (4.6) temos que a relação

$$\langle x^{'}(t), \psi\rangle \leq \sigma(F(x(t)), \psi)$$

é válido para quase todo $t \in I$.

Se $\psi \notin N(t)$, então a inequação anterior é estrita. Assim, para valores de ϵ muito pequenos se tem que

$$\rho_0(t) < \epsilon.$$

Se, de outro lado $\psi \in N(t)$, então para quase todo $t \in I$

$$\langle x'(t), \psi \rangle = \sigma(F(x(t)), \psi)$$

e como $\delta x(t)$ é solução da inclusão diferencial variacional (4.11), também se tem que

$$\langle \delta x'(t), \psi \rangle \leq \langle \frac{\partial \sigma(F(x(t)), \psi)}{\partial x}, \delta x(t) \rangle = C(\psi).$$

Assim, para cada ϵ suficientemente pequeno, obtemos que

$$\rho_0(t) \leq \max_{\psi \in S} r(\epsilon) = r(\epsilon)$$

e $r(\epsilon)$ depende continuamente de $\delta x(t)$.

Para a condição inicial $y(\tau)$ temos que

$$\|y(\tau) - x_0(t)\| = r(\epsilon)$$

onde $r(\epsilon)$ é independente da solução $\delta x(t)$. Pelo Lema 3.11, existe uma solução de (4.3) que satisfaz (4.25). Daquí

$$\|y(t) - x_0(t)\| \leq r(\epsilon)$$

onde $r(\epsilon)$ depende continuamente da solução $\delta x(t)$, daí a solução $y(t)$ satisfaz (4.25) e esta solução depende continuamente de $\delta x(t)$. Isto completa a prova do lema. ■

4.4 Variação da Trajetória de uma Inclusão Diferencial

Dada uma trajetória $x(t)$ da inclusão diferencial (4.3), nesta seção se construirá uma variação desta, a qual será chamada **solução variação** e será denotado por $x^*(t)$.

Seja $x(t)$ uma solução de (4.3) definida no intervalo tempo $I = [t_0, t_1]$. Consideremos dois tempos $\tau_1, \tau \in I$ satisfazendo

$$t_0 < \tau_1 \leq \tau < t_1$$

tal que τ_1 e τ são pontos regulares para a função $x'(t)$.

Tomemos dois números não negativos $\delta t \geq 0$ e $\delta \tau_1 \geq 0$ e consideremos os intervalos $[\tau_1 - \epsilon\delta\tau_1, \tau_1]$ e $[\tau - \epsilon\delta t, \tau]$. Se $\tau_1 = \tau$, então $\delta t = 0$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, estes intervalos estão contidos no intervalo base $[t_0, t_1]$.

Construiremos a solução variação $x^*(t)$ da solução $x(t)$ da inclusão diferencial (4.3) da seguinte forma:

No intervalo $[t_0, \tau_1 - \epsilon\delta\tau_1]$ ela coincide com a solução $x(t)$, isto é,

$$x^*(t) = x(t) \qquad se \;\; t_0 \leq t \leq \tau_1 - \epsilon\delta\tau_1.$$

No intervalo de tempo $[\tau_1 - \epsilon\delta\tau_1, \tau_1]$ definamos a solução variação $x^*(t)$ como segue. Seja v um vetor arbitrário do conjunto $F(x(\tau_1))$. Consideremos como $x_0(t)$ a solução clássica da inclusão diferencial (4.3), isto da (condição 1) e do Teorema 2.7, definida no intervalo $[\tau_1 - \epsilon\delta\tau_1, \tau_1]$ satisfazendo a condição inicial

$$x_0(\tau_1) = x(\tau_1) + \epsilon\delta\tau_1(v - x'(\tau_1)) \quad , \quad x_0'(\tau_1) = v. \tag{4.27}$$

Já que $x_0(t)$ é continuamente diferenciável e τ_1 é um ponto regular de $x'(t)$, então de (4.27) obtemos que

$$\begin{aligned} x_0(\tau_1 - \epsilon\delta\tau_1) &= x_0(\tau_1) - \epsilon\delta\tau_1 x_0'(\tau_1) + r(\epsilon) \\ &= x(\tau_1) + \epsilon\delta\tau_1(v - x'(\tau_1)) - \epsilon\delta\tau_1 v + r(\epsilon) \\ &= x(\tau_1) - \epsilon\delta\tau_1 x'(\tau_1) + r(\epsilon) \\ &= x(\tau_1 - \epsilon\delta\tau_1) + r(\epsilon) \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.12, existe uma solução $y(t)$ da inclusão diferencial (4.3) com condição inicial

$$y(\tau_1 - \epsilon\delta\tau_1) = x(\tau_1 - \epsilon\delta\tau_1)$$

quando a estimativa

$$\|y(t) - x_0(t)\| \leq r(\epsilon)$$

se cumpre para cada $t \in [\tau_1 - \epsilon\delta\tau_1, \tau_1]$. Tomemos $y(t)$ como a solução variação $x^*(t)$, então de (4.27) obtemos que

$$x^*(t) = x(t) + \epsilon\delta\tau_1(v - x'(\tau_1)) + r(\epsilon). \tag{4.28}$$

Agora, construimos a solução variação $x^*(t)$ no intervalo $[\tau_1, \tau - \epsilon\delta t]$. Seja $\delta x(t)$ uma solução arbitrária da inclusão diferencial variacional (4.11) com condição inicial

$$\delta x(\tau_1) = \delta\tau_1(v - x'(\tau_1)). \tag{4.29}$$

Então pelo Lema 4.13 existe uma solução $x^*(t)$ de (4.3) com condição inicial (4.28) tal que (4.26) se cumpre para cada $t \in [\tau_1, \tau - \epsilon\delta t]$, isto é,

$$x^*(t) = x(t) + \epsilon\delta x(t) + r(\epsilon).$$

Desta maneira a solução variação $x^*(t)$ esta definida no intervalo $[t_0, \tau - \epsilon\delta t]$. Uma vez que τ é um ponto regular de $x'(t)$, o valor $x^*(\tau - \epsilon\delta t)$ pode ser expressado na seguinte forma

$$\begin{aligned} x^*(\tau - \epsilon\delta t) &= x(\tau - \epsilon\delta t) + \epsilon\delta x(\tau - \epsilon\delta t) + r(\epsilon) \\ &= x(\tau) - \epsilon\delta t x'(\tau) + \epsilon\delta x(\tau) + r(\epsilon) \end{aligned}$$

isto é,

$$x^*(\tau - \epsilon\delta t) = x(\tau) + \epsilon \bigtriangleup x + r(\epsilon)$$

onde o vetor $\bigtriangleup x$ definido por

$$\bigtriangleup x = -\delta t . x'(\tau) + \delta x(\tau) \tag{4.30}$$

é independente de ϵ.

O vetor $\bigtriangleup x$ depende dos pontos $\tau_1, \tau \in I$, dos números $\delta\tau_1, \delta t \geq 0$, de $v \in F(x(\tau_1))$ e da solução $\delta x(t)$ da inclusão diferencial variacional (4.11). Estes parâmetros também determinam a variação da solução $x(t)$, isto é, a solução variação $x^*(t)$.

Fixemos os pontos $\tau_1, \tau \in I$ e o vetor $v \in F(x(\tau_1))$. Consideremos todos os possíveis números $\delta\tau_1 \geq 0$, $\delta t \geq 0$ e todas as possíveis soluções $\delta x(t)$ da inclusão diferencial variacional (4.11) com condição inicial

$$\delta x(\tau_1) = \delta\tau_1(v - x'(\tau_1)).$$

Então os correspondentes valores Δx definem o conjunto $K_\tau \subset \mathbb{R}^n$.

Lema 4.14 *O conjunto K_τ é um cone convexo.*

Prova: Definamos $K \subset \mathbb{R}^n$ como sendo

$$K = \{\delta\tau_1(v - x'(\tau_1)) : \delta\tau_1 \geq 0\} \tag{4.31}$$

o qual é um cone convexo. Logo pelo Lema 3.9 o conjunto atingível $K(\tau, \tau_1, K)$, que tem como elementos $\delta x(\tau)$ onde δx é solução de (4.18) com a condição $\delta x(\tau_1) \in K$, é também um cone convexo.

Agora da definição , K_τ é a soma algébrica de um raio e um cone convexo

$$K_\tau = \{-\delta t.x'(t) : \delta t \geq 0\} + K(\tau, \tau_1, K).$$

Por tanto este é um cone convexo. O lema está provado. ∎

O seguinte Lema é fundamental para a aplicação da construção anterior ao estudo da solução ótima $x(t)$.

Lema 4.15 *Seja $\tau \in I = [t_0, t_1]$ um ponto regular da função $x'(t)$. Se $x = 0$ é um ponto interior do cone atingível K_τ, então podemos achar uma solução variação $x^*(t)$ da solução $x(t)$ da inclusão diferencial (4.3) que transfere o ponto x_0 ao ponto $x(\tau)$ durante o intervalo tempo $[t_0, \tau']$ com $\tau' < \tau$.*

Prova: Em $\mathbb{R}^{n+1}$ consideremos o conjunto Q que consiste de todos os vetores da forma

$$q = (-\delta t, -\delta t.x'(\tau) + \delta x(\tau)) \tag{4.32}$$

onde $\delta x(t)$ é uma solução da inclusão diferencial variacional (4.18) com condição inicial (4.29), enquanto δt e $\delta\tau_1$ são números arbitrários.

O conjunto $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um cone convexo. Com efeito, tomemos números arbitrários $\alpha, \beta \geq 0$ e vetores arbitrários q_1 e q_2 em Q, isto é,

$$q_1 = (-\delta t_1, -\delta t_1.x'(\tau) + \delta x_1(\tau)) \quad , \quad q_1 = (-\delta t_2, -\delta t_2.x'(\tau) + \delta x_2(\tau)).$$

Provaremos que $\alpha q_1 + \beta q_2 \in Q$. Temos que

$$\begin{aligned}
\alpha q_1 + \beta q_2 &= \alpha(-\delta t_1, -\delta t_1.x'(\tau) + \delta x_1(\tau)) + \beta(-\delta t_2, -\delta t_2.x'(\tau) + \delta x_2(\tau)) \\
&= (-(\delta t_1 + \delta t_2), -(\alpha\delta t_1 + \beta\delta t_2)x'(\tau) + \alpha\delta x_1(\tau) + \beta\delta x_2(\tau)).
\end{aligned}$$

Agora as funções $\delta x_1(t)$ e $\delta x_2(t)$ são soluções do sistema controlável (4.18) associados com certo controle admissível

$$u_1(t) \in N^*(t) \quad e \quad u_2(t) \in N^*(t)$$

respectivamente. Daí a função

$$\alpha\delta x_1(t)+\beta\delta x_2(t)$$

é a solução do sistema controlável (4.18) com controle admissível

$$\alpha u_1(t)+\beta u_2(t)\in N^*(t)$$

e com condição inicial

$$\alpha\delta x_1(\tau_1)+\beta\delta x_2(\tau_1)=(\alpha\delta\tau_1^1+\beta\delta\tau_1^2)(v-x^{'}(\tau_1)).$$

Pelo que o vetor $\alpha q_1+\beta q_2$ é da forma (4.31). Por tanto $\alpha q_1+\beta q_2\in Q$.

Se $x=0$ é um ponto interior de K_τ então , desprezando o ponto $(0,0)$, todo o raio

$$L=\{-(\delta t,0):\delta t\geq 0\}$$

está no interior do cone Q. Com efeito, assumamos que $L\not\subset Q$, então

$$L\cap intQ=\emptyset.$$

Assim o raio L e o cone Q podem ser separados, isto é, existe um vetor não nulo $\psi^*=(\psi_0,\psi)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$\langle q,\psi^*\rangle\leq 0 \quad , \quad \langle l,\psi^*\rangle\geq 0$$

para qualquer $q\in Q$ e $l\in L$. Já que $l=(-1,0)\in L$, obtemos que $\psi_0\leq 0$ da segunda inequação . Agora, para $q\in Q$, usando a primera inequação , se tem que

$$-\delta t.\psi_0-\delta t\langle x^{'}(\tau),\psi\rangle+\langle\delta x(\tau),\psi\rangle\leq 0.$$

O vetor $\psi\in\mathbb{R}^{n+1}$ não é zero, uma vez que se $\psi=0$ então teríamos $\psi_0<0$ pelo que a última desigualdade não é satisfeita para $\delta t=1$. Como para todo $\delta t\geq 0$ a inequação $-\delta t\psi_0\geq 0$ é válida, então

$$-\delta t\langle x^{'}(\tau),\psi\rangle+\langle\delta x(\tau),\psi\rangle\leq 0.$$

Consequentemente,

$$\langle\triangle x,\psi\rangle\leq 0 \quad \forall\triangle x\in K_\tau.$$

Isto significa que o vetor $\psi\neq 0$ está suportando o conjunto K_τ no ponto $x=0$, o que contradiz à hipótese que $0\in intK_\tau$.

Fixemos um ponto

$$a=(-\delta t,0)\in L \quad ,\delta t>0$$

e consideremos o hiperplano Γ que passa por tal ponto e é ortogonal ao raio L. Já que $L\subset intQ$, o hiperplano Γ contém um simplexo n-dimensional R com vértices $r_1,...,r_{n+1}\in Q$ tal que a é um ponto interior de R.

$$R=\{\alpha_1r_1+....+\alpha_{n+1}r_{n+1}:\alpha_1\geq 0,.....,\alpha_{n+1}\geq 0 \quad , \quad \alpha_1+.....+\alpha_{n+1}=1\}.$$

Como os vétices do simplexo R pertecem ao cone Q, então cada r_i pode ser representado na forma

$$r_i=(-\delta t,-\delta t.x^{'}(\tau)+\delta x_i(\tau))$$

onde $\delta x_i(t)$ é uma solução do sistema controlável (4.18) com condição inicial $\delta x_i(\tau_1) = \delta_1^i(v - x'(\tau_1))$. Então a função

$$\delta x(t) = \alpha_1 \delta x_1(t) + ... + \alpha_{n+1}\delta x_{n+1}(t) \tag{4.33}$$

é também uma solução do sistema controlável (10) com condição inicial

$$\delta x(\tau) = (\alpha_1 \delta\tau_1^1 + ... + \alpha_n \delta\tau_1^{n+1})(v - x'(\tau_1)).$$

Se $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$ percorre todos os valores admissíveis

$$\alpha_1 \geq 0, ..., \alpha_{n+1} \geq 0 \quad , \quad \alpha_1 + ... + \alpha_{n+1} = 1$$

então o vetor

$$r = \alpha_1 r_1 + ... + \alpha_{n+1} r_{n+1} = (-\delta t, -\delta t . x'(\tau) + \delta x(\tau))$$

percorre sobre o simplexo R. Ao mesmo tempo o vetor

$$\begin{aligned} r_\epsilon &= \epsilon(-\delta t, -\delta t . x'(\tau) + \delta x(\tau)) \\ &= (-\epsilon\delta t, \epsilon \triangle x) \end{aligned}$$

percorre sobre o simplexo R_ϵ. O simplexo R_ϵ está no hiperpleno Γ_ϵ que passa pelo ponto $a_\epsilon = (-\epsilon\delta t, 0)$ e é ortogonal ao raio L. Além disso o simplexo R_ϵ contem o ponto a_ϵ no seu interior e este está contido no cone Q.

Consideremos o vetor

$$q_\epsilon = (-\epsilon\delta t, X^*(\tau - \epsilon\delta t) - x(\tau))$$

daí

$$\|r_\epsilon - q_\epsilon\| = r(\epsilon).$$

A solução $\delta x(t)$ dada por (23) depende continuamente do ponto $r \in R$, pelo que $x^*(t)$ depende continuamente de $\delta x(t)$ (Lema 4.13). Segue dai que o vetor q_ϵ depende continuamente do ponto $r \in R$. Agora, se $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ percorre sobre todos os valores admissíveis, o vetor q_ϵ se acumula em algum disco torcido Q_ϵ. Logo, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno o disco intersecta ao raio L (Revisar [9]), isto é, existe um $\delta t^* > 0$ tal que

$$(-\delta t^*, 0) = (-\epsilon\delta t, x^*(\tau - \epsilon\delta t) - x'(\tau)).$$

Portanto $x'(\tau - \epsilon\delta t) = x(\tau)$ e $\epsilon\delta t > 0$. Isto prova o lema. ∎

4.5 Prova do princípio do Máximo

Seja $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, a solução de tempo ótimo da inclusão diferencial (4.3), isto é, a solução que transfere o ponto inicial x_0 ao ponto terminal x_1 no menor tempo possível $t_1 - t_0$.

Consideremos um ponto regular arbitrário $\tau \in I$ da função $x'(t)$. Pelo Lema 4.15, segue que $x = 0$ não pertence ao interior do cone convexo K_τ. Daquí, existe um vetor não nulo $\psi \in \mathbb{R}^n$ que suporta o conjunto K_τ no ponto $x = 0$, isto é, para todo vetor $\triangle x \in K_\tau$ a inequação

$$\langle \triangle x, \psi \rangle \leq 0 \tag{4.34}$$

é satisfeito.

Denotemos por $\psi(t,\psi)$ a solução da equação diferencial ordinaria (4.21) com condição terminal

$$\psi(\tau,\psi) = \psi.$$

Esta solução está definida no espaço todo $I = [t_0, t_1]$.

Lema 4.16 *Suponhamos que o vetor $\psi \in \mathbb{R}^n$ satisfaz (4.34). então*

$$\langle x'(t), \psi(t,\psi)\rangle = \sigma(F(x(t)), \psi(t,\psi)) \tag{4.35}$$

em cada ponto do intervalo $t_0 < t \leq \tau$ que é regular para $x'(t)$. No ponto τ a inequação

$$\langle x'(\tau), \psi(\tau,\psi)\rangle \geq 0 \tag{4.36}$$

é satisfeita. Além disso, a função $\psi(t,\psi)$ é a solução da equação diferencial (4.4) no intervalo $[t_0, \tau]$.

Prova: Consideremos $\delta t = 0$ em (4.30). Então (4.34) é da forma

$$\langle \delta x(\tau), \psi\rangle \leq 0$$

e esta deve ser satisfeito para qualquer solução $\delta x(t)$ do sistema controlável (4.18) com condição inicial do cone K, isto é,

$$\delta x(\tau_1) = \delta\tau_1(v - x'(\tau_1)).$$

Segue daí que

$$\sigma(K(\tau,\tau_1,K),\psi) \leq 0$$

e isto quer dizer que a função $\sigma(K(\tau,\tau_1,K),\psi)$ é finita, então , pelo Lema 4.11, para quase todo $t \in [\tau_1, \tau]$ a inclusão

$$\psi(t,\psi) \in N(t)$$

e a inequação

$$\sigma(K, \psi(\tau_1,\psi)) \leq 0$$

são válidas. Logo, se levamos em conta (4.31), temos que

$$\langle v - x'(\tau_1), \psi(\tau_1,\psi)\rangle \leq 0.$$

Já que o vetor $v \in F(x(\tau_1))$ é arbitrário e ao mesmo tempo $x'(\tau_1) \in F(x(\tau_1))$, obtemos

$$\langle x'(\tau_1), \psi(\tau_1,\psi)\rangle = \sigma(F(x(\tau_1)), \psi(\tau_1,\psi))$$

a qual prova (4.35) para qualquer ponto regular $t_0 < \tau_1 \leq \tau$.

A função $\psi(t,\psi)$ é uma solução da equação diferencial (4.21), isto é, para quase todo $t \in I$ se cumpre que

$$\psi'(t,\psi) = -A(t)\psi(t,\psi)$$

e

$$\psi(t,\psi) \in N(t)$$

para quase todo $t \in [\tau_1, \tau]$. Agora, no cone $N(t)$ o operador $A(t)$ é dado por

$$A(t)\psi = \frac{\partial \sigma(F(x(t)), \psi)}{\partial x}$$

donde obtemos que

$$\psi'(t, \psi) = -\frac{\partial \sigma(F(x(t)), \psi(t, \psi))}{\partial x}$$

para quase todo $t \in [\tau_1, \tau]$, onde $t_0 < \tau_1 \leq \tau$ é um ponto arbitrário regular. Consequentemente esta equação é satisfeita para quase todo $t \in [t_0, \tau]$, e $\psi(t, \psi)$ é uma solução da equação diferencial (4.4) em $[t_0, \tau]$.

Tomemos agora $\delta\tau_1 = 0$ e consideremos a solução trivial $\delta x(t) = 0$. Então por (4.30) a inequação (4.34) tem a forma

$$-\delta t \langle x'(t), \psi \rangle \leq 0.$$

Já que $\delta t \geq 0$ obtemos (4.36), isto é,

$$\langle x'(\tau), \psi(\tau, \psi) \rangle \geq 0.$$

O que completa a prova do lema. ∎

A condição (4.35) coincide com a condição do máximo (4.5) no intervalo tempo $[t_0, \tau]$, onde $\tau \leq t_1$ é um ponto regular da função $x'(t)$. Como t_1 não é necessariamente regular, temos que extender a condição do máximo para o intervalo $(\tau, t_1]$.

Lema 4.17 *Se a função $\psi(t)$ é uma solução da equação diferencial (4.4) em algum intervalo de tempo I, e se neste intervalo a condição máximo (4.5) é válida em quase toda parte. Então a função $\sigma(F(x(t)), \psi(t))$ é constante nesse intervalo.*

Prova: A função suporte $\sigma(F(x), \psi)$ é continuamente diferenciável com respeito a x (Condição 2) e Lipchitz em ψ, enquanto as funções $x(t)$ e $\psi(t)$ são absolutamente contínuas. Consequentemente, $\sigma(F(x(t)), \psi(t))$, como uma função de t, é absolutamente contínua, daí existe sua derivada para quase todo t. Vejamos que esta derivada é zero em quase toda parte, o que provará o lema.

Seja $\tau \in I$ um ponto onde as tres funções $\sigma(F(x(t)), \psi(t))$, $x(t)$ e $\psi(t)$ tem derivadas e onde a inclusão

$$x'(\tau) \in F(x(\tau)) \tag{4.37}$$

e as igualdades

$$\psi'(\tau) = -\frac{\partial \sigma(F(x(\tau)), \psi(\tau))}{\partial x} \tag{4.38}$$

$$\langle x'(\tau), \psi(\tau) \rangle = \sigma(F(x\tau)), \psi(\tau)) \tag{4.39}$$

são válidas. Seja t um ponto arbitrário do intervalo I. De (4.37) obtemos que

$$\langle x'(\tau), \psi(t) \rangle \leq \sigma(F(x(\tau)), \psi(t)).$$

Agora, tomando em conta (4.39), temos que

$$\sigma(F(x(\tau)), \psi(\tau)) - \sigma(F(x(t)), \psi(t)) \quad = \quad \sigma(F(x(\tau)), \psi(\tau)) - \sigma(F(x(\tau)), \psi(t))$$

$$
\begin{aligned}
& +\sigma(F(x(\tau)),\psi(t)) - \sigma(F(x(t)),\psi(t)) \\
\geq\ & \langle x^{'}(\tau),\psi(\tau)-\psi(t)\rangle + \sigma(F(x(\tau)),\psi(t)) \\
& -\sigma(F(x(t)),\psi(t)).
\end{aligned}
$$

Suponhamos que $t < \tau$. Dividimos, nesta última inequação , por $\tau - t > 0$ e tomemos límite quando $t \to \tau^{-}$, então pela condição 2 e (4.38) obtemos que

$$
\frac{d\sigma(F(x(\tau)),\psi(\tau))}{dt} \geq \langle x^{'}(\tau),\psi^{'}(\tau)\rangle + \langle \frac{\partial\sigma(F(x(\tau)),\psi(\tau))}{\partial x}, x^{'}(\tau)\rangle = 0.
$$

Analogamente, dividindo a mesma desigualdade por $\tau - t < 0$ e tomando límite quando $t \to \tau^{+}$, obtemos que

$$
\frac{d\sigma(F(x(\tau)),\psi(\tau))}{dt} \leq 0.
$$

Por tanto a derivada da função absolutamente contínua $\sigma((x(t)),\psi(t))$ é zero em quase todo $t \in I$. O que prova o lema. ∎

Denotemos por $\overline{K_\tau}$ o fecho do cone atingível K_τ.

Lema 4.18 *Seja $\tau^{'}$ e τ pontos regulares da função $x^{'}(t)$ com $t_0 < \tau^{'} < \tau < t_1$. Então*

$$
\phi(\tau,\tau^{'})\overline{K_{\tau^{'}}} \subset \overline{K_\tau}. \tag{4.40}
$$

Onde $\phi(\tau,\tau^{'})$ denota a matriz fundamental da equação diferencial (4.21).

Prova: Por definição de $K_\tau^{'}$, $\triangle x^{'} \in K_\tau^{'}$ é da forma

$$
\triangle x^{'} = -\delta t x^{'}(\tau^{'}) + \delta x(\tau^{'}), \tag{4.41}
$$

onde $\delta x(\tau^{'})$ pertence ao conjunto atingível $K(\tau^{'},\tau_1,K)$. Fazendo uso do Lema 3.10, da igualdade

$$
\psi(\tau^{'},\psi) = \phi^{*}(\tau,\tau^{'})\psi
$$

e das propriedades de função suporte, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\sigma(K(\tau,\tau^{'},K(\tau^{'},\tau_1,K)),\psi) &\geq \sigma(K(\tau^{'},\tau_1,K),\psi(\tau^{'},\psi)) \\
&= \sigma(K(\tau^{'},\tau_1,K),\phi^{*}(\tau,\tau^{'}\psi)) \\
&= \sigma(\phi(\tau,\tau^{'})K(\tau^{'},\tau_1,K),\psi).
\end{aligned}
$$

para qualquer $\psi \in \mathbb{R}^n$, isto é,

$$
\overline{K}(\tau,\tau_1,K) = K(\tau,\tau^{'},K(\tau^{'},\tau_1,K)) \supset \phi(\tau,\tau^{'}\overline{k}(\tau^{'},\tau_1,K)).
$$

daí, o vetor $\phi(\tau,\tau^{'})\delta x(\tau^{'})$ pertece ao conjunto $\overline{K}(\tau,\tau_1,K)$ e consequentemente ao cone $\overline{K}_\tau$, é dizer

$$
\phi(\tau,\tau^{'})\delta x(\tau^{'}) \in \overline{K}_\tau. \tag{4.42}
$$

Agora, vejamos que

$$
-\delta t\phi(\tau,\tau^{'})x^{'}(\tau^{'}) \in \overline{K}_\tau. \tag{4.43}
$$

Suponhamos o contrário, que existe um $\delta t > 0$ tal que (4.43) não vale. Então o ponto

$$-\delta t\phi(\tau,\tau')x'(\tau')$$

pode ser separado estritamente do cone convexo $\overline{K}_\tau$, isto é, existe um vetor não zero $\psi \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\langle -\delta t\phi(\tau,\tau')x'(\tau'),\psi\rangle > 0 \quad , \quad \langle p,\psi\rangle < 0 \tag{4.44}$$

para qualquer $p \in \overline{K}_\tau$.

Neste caso o vetor ψ satisfaz (4.34), logo pelos Lemas 4.16 e 4.17 achamos que para os pontos regulares τ' e τ temos que

$$\langle x'(\tau'),\psi(\tau',\psi)\rangle = \sigma(F(x(\tau')),\psi(\tau',\psi)) = \sigma(F(x(\tau)),\psi) = \langle x'(\tau),\psi\rangle \geq 0$$

que contradiz a inequação estrita (4.44). Isto prova que (4.43) é satisfeito.

Já que $\overline{K}_\tau$ é um cone convexo fechado, tomando em conta (4.40), de (4.42) e (4.43) obtemos que

$$\phi(\tau,\tau')\overline{K}'_\tau \subset \overline{K}_\tau.$$

■

Seja $\tau < t_1$ um ponto regular da função $x'(t)$, e defina-se

$$K^\tau_{t_1} = \phi(t_1,\tau)\overline{K}_\tau. \tag{4.45}$$

Então $K^\tau_{t_1}$ é um cone convexo. Os cones $K^\tau_{t_1}$ formam uma sequência crescente, pois dado $\tau' < \tau$ pontos regulares, então pelo Lema 4.18 temos que

$$\begin{aligned}
K^{\tau'}_{t_1} &= \phi(t_1,\tau')\overline{K}_{\tau'}\\
&= \phi(t_1,\tau)\phi(\tau,\tau')\overline{K}_{\tau'}\\
&\subset \phi(t_1,\tau)\overline{K}_\tau\\
&= K^\tau_{t_1}.
\end{aligned}$$

Denotemos por K_{t_1} como a união de todos os cones $K^\tau_{t_1}$ sobre todos os pontos regulares $t_0 < \tau < t_1$. Este conjunto ainda é um cone convexo, e é chamado **cone atingível limitado**.

Lema 4.19 *Se a solução $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, da inclusão diferencial (4.3) é ótima, então o ponto $x = 0$ não esta no interior do cone atingível limitado.*

Prova: Suponhamos que $0 \in intK_{t_1}$, então existe um simplexo n-dimensional R com vértices $r_1, \ldots.., r_{n+1}$ contido no cone K_{t_1} tal que contem $x = 0$ no seu interior. Como cada vértice $r_i \in K_{t_1}$, então este pertece a algum cone $K^{(\tau)}_{t_1}$. Pelo de acima, $K^{(\tau)}_{t_1}$ forma uma sequência crescente, então podemos achar um ponto τ tal que todos os vértices do simplexo R estão em $K^{(\tau)}_{t_1}$. Consequentemente, $0 \in intR \subset K^{(\tau)}_{t_1}$, e por (4.20) se tem que $0 \in int\overline{K}_\tau$. como o conjunto K_τ é um cone convexo, obtemos que $0 \in intK_\tau$. Então $x(t)$ não é solução ótima Lema 4.15, o que contradiz à hipótese. ■

Agora podemos concluir a prova do teorema do princípio do Máximo. Temos que $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ é uma solução ótima da inclusão diferencial (4.3). Então , pelo Lema 4.19 o ponto $x = 0$ não pertence ao cone atingível limitado K_{t_1}, daqui existe um vetor não nulo $\psi \in \mathbb{R}^n$ suportando K_{t_1} no ponto $x = 0$, isto é , $\langle p, \psi \rangle \leq 0$ é válida para cada $p \in K_{t_1}$.

Seja $\psi(t)$ a solução da equação diferencial (4.17) com condição terminal $\psi(t_1) = \psi$. Esta solução é não trivial e está definida no intervalo tempo $[t_0, t_1]$.

Seja $t_0 < \tau < t_1$ um ponto arbitrário regular de $x^{'}(t)$. Já que o vetor ψ está suportando o cone K_{t_1} e também o cone $\phi(t_1, \tau)K_\tau$ Lema 4.18, segue que

$$\langle \phi(t_1, \tau) \bigtriangleup x, \psi \rangle = \langle \bigtriangleup x, \phi^*(t_1, \tau)\psi \rangle \leq 0$$

para um vetor arbitrário $\bigtriangleup x \in K_\tau$. Então pelo Lema 4.16 a função

$$\psi(t, \phi^*(t_1, \tau)\psi) = \psi(t)$$

satisfaz a condição do Máximo

$$\langle x^{'}(\tau), \psi(\tau) \rangle = \sigma(F(x(\tau)), \psi(\tau))$$

e também a inequação $\langle x^{'}(\tau), \psi(\tau) \rangle \geq 0$, e esta é a solução da equação diferencial adjunta (4.4) em $[t_0, \tau]$. Já que τ é um ponto arbitrário, a condição máximo (4.5) é válida para a função $\psi(t)$ em cada ponto regular. Do Lema 4.17 segue que $\sigma(F(x(t)), \psi(t))$ é constante. O que completa a prova do princípio do Máximo. ∎

Capítulo 5

Conclusões

Dado um sistema de controle

$$\dot{x} = f(x, u)\ , \quad u \in U, \tag{5.1}$$

onde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ é o vetor velocidade, t o tempo, u o vetor controle e U um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}^n$; podemos reduzi-lo a uma inclusão diferencial da forma

$$\dot{x} \in F(x) = \{f(x, u) : \ u \in U\}. \tag{5.2}$$

Se supormos que $f(x, u)$ é uma função continuamente diferenciável com respeito a x, contínua com respeito a u e o conjunto U é compacto, então o princípio do máximo de Pontryagin é válido para o sistema de controle (5.1). A formulação deste princípio para o problema de tempo ótimo é como segue

Teorema 5.1 *(Princípio do máximo de Pontryagin) Suponha que $x(t)$ é uma solução de tempo ótimo do sistema de controle (5.1) com controle $u(t)$ e que este transfere o ponto inicial x_0 ao ponto final x_1 no intervalo tempo $[t_0, t_1]$. Então existe uma solução não trivial $\psi(t)$ da equação diferencial adjunta*

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x}\psi, \tag{5.3}$$

tal que para quase todo $t \in I$ a função

$$H(x, u, \psi) = f(x, u)\psi$$

satisfaz a condição do máximo

$$\max_{u \in U} H(x(t), u, \psi(t)) = H(x(t), u(t), \psi(t)). \tag{5.4}$$

Se o sistema de controle (5.1) pode ser escrito como a inclusão diferencial (5.2), e a função suporte

$$\sigma(F(x), \psi) = \max_{u \in U} f(x, u).\psi \tag{5.5}$$

satisfaz as condições dadas no Capítulo 4, então o Teorema 4.1, do princípio do máximo para inclusões diferenciais, é válido para a inclusão diferencial (5.2). Neste caso o princípio do máximo de Pontryagin para o sistema de controle (5.1) passa a ser equivalente ao Teorema 4.1, e eles possuem a mesma função adjunta $\psi(t)$.

Agora, se supormos que a função $f(x,u)$ do sistema de controle (5.1) é continuamente diferenciável com respeito a x, e a função suporte (5.5) não é continuamente diferenciável com respeito a x, então o princípio do máximo de Pontryagin é aplicável para o sistema de controle (5.1), mas o Teorema 4.1, para a inclusão diferencial (5.2), não é aplicável.

Reciprocamente, se a função $f(x,u)$ não é continuamente diferenciável com respeito a x, porém a função suporte $\sigma(F(x),\psi)$ dada por (5.5) é continuamente diferenciável com respeito a x, então o Teorema 4.1 é aplicável, mas o princípio do máximo de Pontryagin não é aplicável.

Exemplo 5.2 *Consideremos o sistema de controle em* $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = \varphi(x)u, \tag{5.6}$$

onde $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é a função*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & se\ x_2 \geqslant 0 \\ -1 & se\ x_2 < 0 \end{cases},$$

e $u \in \mathbb{R}^2$ *é o vetor controle com a restrição* $|u| \leqslant 1$.

A função $\varphi(x)$ *é descontínua na linha* $x_2 = 0$. *Passamos o sistema de controle (5.6) para a inclusão diferencial (5.2). Neste caso tem-se a seguinte inclusão diferencial*

$$\dot{x} \in B_1(0), \tag{5.7}$$

onde $B_1(0)$ *é a bola unitária do* $\mathbb{R}^2$. *Desta maneira, o Teorema 4.1, do princípio máximo para inclusões diferenciais, é aplicável para a inclusão diferencial (5.7).*

Consideremos, por exemplo, o controle de tempo ótimo do estado inicial $x_0 = (1,0)$ *para o estado final* $x_1 = (0,1)$. *O estado ótimo tem a forma* $x(t) = (-1+t, 0)$, *fazendo a transferência de* x_0 *a* x_1 *no intervalo tempo* $I = [0,2]$, *e satisfazendo o Teorema 4.1 com função adjunta* $\psi(t) = (1,0)$.

Como vimos, existe uma nova maneira de estudar o controle ótimo, a qual possui algumas vantagens sobre a teoria clássica.

Conhecida a teoria de análise mutívoca, o proximo passo seria fazer o estudo das multifunções que tem como valores conjunto fuzzy, a qual é chamada de "Análise Multívoca Fuzzy". De nosso particular interesse é o estudo da inclusão diferencial (5.2) no caso em que U é um conjunto fuzzy. Um problema em aberto é obter um princípio do máximo de Pontryagin para o problema de tempo mínimo associada à inclusão (5.2) no caso onde o controle é uma variável fuzzy.

Bibliografia

[1] Rojas-Medar M.A., Funciones Soporte y Sus Utilidades, Notas de Aula.

[2] Román-Flores H. e Rojas-Medar M.A., Introducción al Análisis Fuzzy, 46º Seminário Brasileiro de Análise, 1997, pp. 259-319.

[3] J.P. Aubin and H.Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhauser, 1990.

[4] J.P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusions, Springer- Verleg, New york Tokyo, 1984.

[5] Klaus Deimling, Multivalued Differential Equations, Berlin, 1992.

[6] Michal Kisielewicz, Differential Inclusions and Optimal control, Boston, 1991.

[7] E. Klein and A. Thompson, Theory of Correspondences, Wiley,New York, 1984.

[8] A.F. Filippov, Classical Solutions of Differential Equations with Multivalued Right-Hand Side, SIAM J. Control 5, 1967, pp. 609-621.

[9] V.G. Boltyanskii, Mathematical Methods of Optimal Control, Nauka, Moscow 1969.

[10] Jean-Baptiste Hiriant-Urruty, Convex Analisys and Minimization Algorithmos I, Springer-Verlay 1993.

[11] Krivan V., G-projection of Differential Inclusions.

[12] Krivan V., Construction of population growth equations in the presence of viability constraints, J. Mathematical Biology 29, 1991, pp. 397-387.

[13] V.I. Blagodat.Skikh and A.F. Filippov, Differential Inclusions and Optimal Control, Procceedings of the Steklov Institute of Mathematics Issue 4, 1985, pp. 199-259.

[14] V.I. Blagodat.Skikh, The Maximun Principle for Differential Inclusions, Proccedings of the Steklov Institute of Mathematics Issue 4, 1984, pp. 23-43.

[15] J.P.Aubin, A Survey of Viability Theory, Siam J. Control and Optimization 28, 1990, pp.749-788.

[16] R. Tyrrell Rockafellar, Convex Analysis, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1970.